Г. С. ШЕВЦОВ, О. Г. КРЮКОВА,
Б. И. МЫЗНИКОВА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Издание второе,
исправленное и дополненное

РЕКОМЕНДОВАНО
Научно-методическим советом по математике
и механике Учебно-методического объединения
по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия
для математических направлений
и специальностей

ЛАНЬ®

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2011

ББК 22.193я73
Ш 37

Шевцов Г. С., Крюкова О. Г., Мызникова Б. И.

Ш 37 Численные методы линейной алгебры: Учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. — СПб.: Издательство «Лань», 2011. — 496 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1246-4

Учебное пособие посвящено важному разделу современной вычислительной математики — численным методам решения задач линейной алгебры. В нем содержатся необходимые теоретические сведения, рассматриваются вопросы обусловленности и устойчивости, приводятся эффективные алгоритмы обращения прямоугольных матриц, решения систем линейных алгебраических уравнений и проблемы собственных значений. Применение численных методов демонстрируется на подробно разобранных примерах.

Для студентов, магистрантов и аспирантов, специализирующихся в области компьютерного моделирования, преподавателей прикладной математики, а также научных работников и инженеров, занимающихся применением численных методов для решения практических задач.

ББК 22.193я73

Рецензенты:

главный науч. сотр. Института механики сплошных сред УрО РАН по науке, докт. физ.-мат. наук, профессор *И. Н. ШАРДАКОВ*; зав. кафедрой вычислительной математики и механики ПГТУ, докт. техн. наук, профессор *Н. А. ТРУФАНОВ*.

Обложка
А. В. ПАНКЕВИЧ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Среди проблем, наиболее важных для исследователя, которому предстоит заниматься вычислениями, особый интерес представляют проблемы, связанные с численным решением систем линейных алгебраических уравнений и с отысканием собственных значений и собственных векторов матриц. Это основной компонент большинства алгоритмов решения задач, непосредственно возникающих на практике и в научных исследованиях, например при решении задач статистического моделирования, задач обработки данных эксперимента, краевых задач для дифференциальных уравнений и т. п.

В настоящем учебном пособии численному решению систем линейных алгебраических уравнений и отысканию собственных значений и собственных векторов посвящены главы 4 и 5. В параграфе 4.1 главы 4 рассматриваются наиболее употребительные в настоящее время эффективные и надежные методы численного решения совместных систем n линейных уравнений с n неизвестными. Важным для приложений является также численное решение совместных или несовместных систем линейных уравнений с произвольными $(m \times n)$-матрицами любого (полного или неполного) ранга. Такие системы естественно решать тем или иным способом из группы методов наименьших квадратов. Этим методам в предлагаемом пособии посвящен параграф 4.2 главы 4. В них, наряду с классическим подходом к численному решению произвольных совместных или несовместных систем линейных уравнений, основанных на решении систем нормальных уравнений, рассматриваются метод регуляризации, методы, основанные на представлении матрицы системы ее QR- и сингулярным разложениями, и другие методы.

Численному решению проблемы собственных значений и собственных векторов в нашем пособии посвящена глава 5. В ней подробно рассматриваются наиболее эффективные современные надежные методы численного решения этой проблемы, например, метод вращений, QR-алгоритм и другие методы.

Для удобства в пособии приведены необходимые сведения из линейной алгебры, подробно рассмотрены основные мультипликативные разложения матриц, обращение прямоугольных матриц и лишь после этого рассматриваются решения систем линейных уравнений точными, итерационными методами, методом наименьших квадратов и решение полной и частичной проблем собственных значений и собственных векторов. Все изучаемые в пособии факты иллюстрируются подробно разобранными примерами.

Вопросы численного решения систем линейных уравнений и отыскания собственных значений и собственных векторов рассматриваются в данном учебном пособии как с алгоритмической точки зрения, так и с точки зрения разработки программных средств решения задач вычислительной математики. Приводимые ссылки на Интернет-ресурсы и программное обеспечение будут полезны при реализации конкретных алгоритмов решения систем линейных уравнений и отыскания собственных значений и собственных векторов.

Пособие рекомендуется студентам, магистрантам и аспирантам механико-математических, физических, химических, экономических и других специальностей, а также научным работникам и инженерам, занимающимся решением задач статистического моделирования и обработкой результатов эксперимента. Оно может служить также основой специального курса по избранным главам линейной алгебры и использоваться в качестве справочника.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Первоначальные сведения о матрицах. Действия с матрицами

Прямоугольной или **$(m\times n)$-матрицей** называется система чисел, расположенных в виде таблицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кратко матрицу A записывают в виде $A=(a_{ij})$, $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$. Числа a_{ij}, составляющие данную матрицу, называют ее **элементами**. Первый индекс у элемента указывает номер строки, а второй – номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент.

Матрицу называют **комплексной**, если хотя бы один ее элемент является комплексным (невещественным) числом, и **действительной (вещественной)**, если все ее элементы – действительные (вещественные) числа.

Две матрицы одинакового размера $m\times n$ считают **равными**, если попарно равны их соответствующие элементы, т. е. элементы, стоящие на одинаковых местах в этих матрицах.

Матрицу, состоящую из одной строки или одного столбца, называют соответственно **вектор-строкой** или **вектор-столбцом**. Элементы векторов называют их **компонентами**. Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом. Матрица, состоящая из нулей, называется **нулевой** и обозначается через 0. Если число m строк матрицы равно числу n ее столбцов, то матрицу называют **квадратной порядка n**. Диагональ квадратной матрицы, соединяющую левый верхний угол с правым нижним, называют **главной**.

Квадратные матрицы, у которых отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, называют **диагональными**.

Диагональная матрица, у которой все элементы по главной диагонали одинаковые, называется **скалярной**. Частным случаем скалярных матриц является **единичная** матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу, полученную из данной матрицы A заменой в ней строк соответствующими столбцами, называют **транспонированной** к A и обозначают через A' или A^{T}. Если A – $(m \times n)$-матрица, то A^{T} – $(n \times m)$-матрица. В частности, если A – вектор-строка, то A^{T} – вектор-столбец и наоборот.

Матрицу A называют **симметричной**, если $A = A^{\mathrm{T}}$; матрицу $\overline{A}$ – **комплексно сопряженной** к матрице A, если она получена из A заменой в ней элементов на комплексно сопряженные; матрицу A^* – **эрмитово-сопряженной**, или **сопряженной** к матрице A, если она получена из A заменой элементов комплексно сопряженными и транспонированием, т. е. если $A^* = \overline{A}^{\mathrm{T}}$. Для действительной матрицы A всегда $A^* = A^{\mathrm{T}}$.

Квадратная матрица A называется **эрмитовой**, если $A^* = A$.

Элементы симметричной матрицы $A = (a_{ij})$ удовлетворяют условиям $a_{ij} = a_{ji}$. Элементы эрмитовой матрицы $A = (a_{ij})$ удовлетворяют условиям $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Элементы a_{ii} главной диагонали эрмитовой матрицы являются действительными числами, поскольку $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$.

Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, элементы которой равны суммам $a_{ij} + b_{ij}$ соответствующих элементов слагаемых матриц. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Разность матриц определяется аналогично:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число α называют матрицу $\alpha\cdot A$, все элементы которой равны произведениям соответствующих элементов исходной матрицы на это число:

$$\alpha\cdot A = \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \dots & \alpha\cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha\cdot a_{m1} & \dots & \alpha\cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В частности, матрицу $(-1)\cdot A$ называют **противоположной** к матрице A и обозначают через $-A$.

Линейной комбинацией векторов-строк (столбцов) A_1, $A_2, \dots, A_k$ называют вектор-строку (столбец)

$$\alpha_1\cdot A_1+\alpha_2\cdot A_2+\dots+\alpha_k\cdot A_k.$$

Сложение матриц и умножение их на числа обладают следующими свойствами:

1)	$A+B = B+A$,	5)	$1\cdot A=A$,
2)	$A+(B+C)=(A+B)+C$,	6)	$(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$,
3)	$A+0=A$,	7)	$\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$,
4)	$A+(-A)=0$,	8)	$\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A$

при любых матрицах A, B, C и любых α, β.

Умножение матриц определяется лишь для случая, когда число столбцов первого множителя равно числу строк второго множителя. Пусть

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{jk}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}.$$

Произведением матриц A и B, заданных в указанном порядке, называется матрица $C = (c_{ik})$, элементы которой определяются по следующему правилу:

$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, p$,

т. е. элемент c_{ik} матрицы C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B. Из этого определения следует, что матрица C будет матрицей размера $m \times p$.

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3\cdot 3 \\ 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 3\cdot 4 + 1\cdot 3 \\ 6\cdot 3 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 6\cdot 1 + 1\cdot 4 + 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ 13 & 17 \\ 22 & 16 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1) = (10),$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Из рассмотренных примеров видно, что умножение матриц некоммутативно.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$,

2) $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$,

3) $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$,

4) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Отметим некоторые **свойства операций транспонирования и комплексного сопряжения матриц:**

$$(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}, \qquad (A+B)^* = A^* + B^*, \qquad \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B},$$

$$(\alpha \cdot A)^{\mathrm{T}} = \alpha \cdot A^{\mathrm{T}}, \qquad (\alpha \cdot A)^* = \overline{\alpha} \cdot A^*, \qquad \overline{(\alpha \cdot A)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{A},$$

$$(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}, \qquad (A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*, \qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}.$$

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A, \qquad (A^*)^* = A,$$

Умножение векторов-столбцов на числа позволяет систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

записать в векторной форме следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

а умножение матриц позволяет ту же систему записать в виде

$$A \cdot X = b,$$

полагая

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Под **элементарными преобразованиями над матрицей** понимают:

1. Умножение любой i-й строки матрицы на любое число α.
2. Прибавление к любой i-й строке матрицы любой ее j-й строки, умноженной на число α.
3. Умножение любого j-го столбца матрицы на любое число α.

4. Прибавление к любому j-му столбцу матрицы любого ее i-го столбца, умноженного на число α.
5. Перестановку строк (столбцов) матрицы.

Первое и второе преобразования над матрицей равносильны умножению ее слева соответственно на элементарные матрицы

$$
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & & & \vdots & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & 1 & \vdots & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \alpha & \cdot & \cdot & \cdot \\
& & & \vdots & 1 & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \\
& & & \vdots & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i, \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} &
\end{array}
\quad
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & & & \vdots & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & \ddots & \vdots & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & \vdots & \ddots & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \alpha & \cdot & \ddots & \cdot \\
& & & \vdots & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} &
\end{array}.
$$

Третье и четвертое преобразования над матрицей равносильны умножению ее справа соответственно на эти элементарные матрицы. Перестановка строк в матрице равносильна умножению этой матрицы слева на матрицу P, получаемую из единичной матрицы той же перестановкой строк. Перестановка столбцов в матрице равносильна умножению этой матрицы справа на матрицу Q, получаемую из единичной матрицы той же перестановкой столбцов. Матрицы P и Q называют **матрицами перестановок**.

Любую $(m \times n)$-матрицу элементарными преобразованиями над строками и столбцами можно привести к виду

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
& \ddots & & & \mathbf{0} & \\
& & 1 & & & \\
& & & 0 & & \\
& \mathbf{0} & & & \ddots & \\
& & & & & 0
\end{pmatrix}.
$$

В частности, невырожденную (см. п. 1.4) квадратную матрицу таким способом можно привести к единичной матрице.

Матрицы A и B будем называть **эквивалентными**, если одна из них может быть преобразована в другую с помощью элементарных преобразований над строками и столбцами. Другими словами, матрицы A и B называют **эквивалентными**, если они связаны соотношением $B = RAS$ при некоторых невырожденных матрицах R и S. Эквивалентность матриц обозначают знаком $\sim$, т. е. пишут $A \sim B$.

Эквивалентность матриц обладает следующими свойствами:

1) рефлексивностью, т. е. $A \sim A$;
2) симметричностью, т. е. если $A \sim B$, то $B \sim A$;
3) транзитивностью, т. е. если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

1.2. Определители

Определителем $|A|$ *n-го порядка,* соответствующим квадратной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называется алгебраическая сумма $n!$ членов вида $a_{i_1 j_1} \dots a_{i_n j_n}$. Причем членами определителя служат всевозможные произведения по n элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы. Эти произведения берутся со знаком $(-1)^t$, где t — число инверсий (беспорядков) в верхнем и нижнем рядах подстановки

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

составленной из индексов элементов матрицы, входящих в произведение. В частности, при $n = 2$ и $n = 3$ соответственно получается

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{31}. \end{array} \qquad (2)$$

Основные свойства определителей

Перечислим основные свойства определителей.

1. Определитель не меняется при транспонировании.
2. Если одна из строк (один из столбцов) определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.
3. От перестановки двух строк (столбцов) определитель меняет знак.
4. Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.
5. Если все элементы некоторой строки (столбца) умножить на число, то определитель умножится на это число. Общий множитель элементов строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя. Если все элементы определителя умножить на число α, то определитель умножится на α^n.
6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки (столбца), равен нулю.
7. Если одна из строк (один из столбцов) определителя есть линейная комбинация других его строк (столбцов), то определитель равен нулю.
8. Определитель не меняется, если к элементам одной его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой его строки (столбца), умноженные на одно и то же число. Определитель не меняется, если к одной его строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию других его строк (столбцов).

9. Если все элементы i-й строки (j-го столбца) определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то и весь определитель представляется в виде суммы двух определителей, у которых все строки (столбцы), за исключением i-й (j-го), такие же, как в исходном определителе, а i-я строка (j-й столбец) в первом определителе состоит из первых слагаемых и во втором — из вторых.

Выделим в $(m \times n)$-матрице A k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечениях этих строк и столбцов, составляют матрицу порядка k. Определитель этой матрицы называют **минором *k*-го порядка матрицы** A.

Если дан определитель $|A|$, то миноры его матрицы также называют **минорами** данного **определителя**.

Среди всех миноров порядка k $(m \times n)$-матрицы A минор k-го порядка, построенный на ее строках с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m$ и столбцах с номерами $j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n$, называют **главным**, если $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$, $\ldots$, $i_k = j_k$. Например, главными минорами первого порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

являются ее диагональные элементы a_{11}, a_{22}, a_{33}; главными минорами второго порядка — миноры

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Среди всех главных миноров квадратной матрицы обычно выделяют ее последовательные угловые главные диагональные миноры.

В рассмотренной матрице это

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пусть в определителе $|A|$ n-го порядка взят минор M k-го порядка. Если вычеркнуть строки и столбцы матрицы A„ на пересечении которых стоит этот минор, то оставшиеся элементы матрицы A составят минор M' $(n-k)$-го порядка, который называют **дополнительным минором** к минору M.

Алгебраическим дополнением минора M называют его дополнительный минор M', взятый со знаком $(-1)^{S(M)}$, где $S(M)$ — сумма номеров строк и столбцов, на которых располагается минор M. В частности, **алгебраическое дополнение элемента** a_{ij} определителя $|A|$ есть $A_{ij} = (-1)^{i+j} M'$, где M' — дополнительный минор к элементу a_{ij}.

Определитель $|A|$, соответствующий матрице A, равен сумме произведений элементов произвольной его строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$|A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}, \tag{3}$$

$$|A| = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj}. \tag{4}$$

В частности, если в какой-либо строке (столбце) определителя все элементы, кроме одного, нули, то определитель равен произведению этого неравного нулю элемента на его алгебраическое дополнение.

Обобщением формул (3) и (4) является следующая теорема.

Теорема Лапласа. *Пусть в определителе $|A|$ n-го порядка произвольно выбраны k строк (или k столбцов), $1 \le k \le n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k-го порядка, расположенных в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения равна определителю $|A|$.*

Полезным является также следующее утверждение.

Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю, т. е.

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=0,\quad i\neq k, \tag{5}$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\ldots+a_{nj}A_{nk}=0,\quad i\neq k. \tag{6}$$

По формуле (3) или (4) вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению определителей $(n-1)$-го порядка. При применении этих формул на практике сначала, опираясь на свойства определителей, не меняя значения определителя, целесообразно в какой-либо его строке (столбце) получить по возможности больше нулей. Поясним это на примере.

Пример. Вычислить определитель

$$|A|=\begin{vmatrix}-3&-5&4&7\\9&8&-5&-8\\3&2&-3&-4\\6&7&-2&-5\end{vmatrix}.$$

Решение. Первую строку определителя, умноженную на 3, прибавим ко второй его строке; первую строку прибавим к третьей; удвоенную первую строку прибавим к четвертой. Затем применим формулу (4). В результате получим

$$|A|=\begin{vmatrix}-3&-5&4&7\\0&-7&7&13\\0&-3&1&3\\0&-3&6&9\end{vmatrix}=-3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-7&7&13\\-3&1&3\\-3&6&9\end{vmatrix}.$$

В полученном определителе вынесем общий множитель 3 из последней строки, (-1) — из первого столбца и определитель, оставшийся в результате, вычислим по формуле (2).

Окончательно получим

$$|A| = -3\cdot(-1)\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 7 & 7 & 13 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$9\cdot(7\cdot 1\cdot 3+7\cdot 3\cdot 1+13\cdot 3\cdot 2-13\cdot 1\cdot 1-7\cdot 3\cdot 3-7\cdot 3\cdot 2)=9\cdot 2=18.$$

При вычислении определителя наиболее целесообразным является предварительное приведение его элементарными преобразованиями по схеме прямого хода метода Гаусса (см. п. 4.1.1) к треугольному виду. Бывает удобно опираться и на теорему Лапласа. При этом предварительно в некоторых строках (столбцах) имеет смысл получить по возможности больше нулей.

В заключение отметим, что важные применения имеет следующее утверждение:

произведение определителей двух матриц n *-го порядка равно определителю произведения этих матриц, т. е.*

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B| .$$

1.3. Крамеровские системы линейных уравнений

Систему из n уравнений с n неизвестными, т. е. систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

называют **крамеровской**, если определитель Δ матрицы A этой системы отличен от нуля. Такая система имеет единственное решение, и оно находится по *формулам Крамера*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j=1,2,\ldots,n, \qquad (1)$$

где определитель Δ_j получается из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов системы.

Пример. Решить по формулам Крамера систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. Здесь определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 4.$$

Поэтому

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

1.4. Обратная матрица

Для квадратной матрицы A порядка n **обратной** называют матрицу A^{-1} этого же порядка, удовлетворяющую условию

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица.

Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу A^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была **невырожденной**, т. е. чтобы определитель матрицы A был отличен от нуля. При этом матрица A^{-1} также невырожденная и

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A; $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Пример 1. Для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

найти матрицу A^{-1} по формуле (1).

Решение. Сначала находим

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=5\neq 0,$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=5, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=4,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=12, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=0, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Поэтому

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

На практике целесообразно при вычислении обратной матрицы A^{-1} к матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

составить систему $AX = Y$, т. е. систему

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = y_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = y_n \end{cases}$$

и разрешить ее относительно x_1, x_2, ..., x_n. Тогда получим систему

$$\begin{cases} x_1 = b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + \ldots + b_{1n} y_n, \\ x_2 = b_{21} y_1 + b_{22} y_2 + \ldots + b_{2n} y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = b_{n1} y_1 + b_{n2} y_2 + \ldots + b_{nn} y_n. \end{cases}$$

Матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

этой системы и будет обратной матрицей A^{-1}. Поясним это на примере.

Пример 2. Для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

найти обратную матрицу.

Решение. Составим систему $AX=Y$, т. е. систему

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2=y_1, \\ 4x_1+3x_2=y_2. \end{cases}$$

Разрешим ее относительно x_1 и x_2. Тогда получим

$$\begin{cases} x_1=3y_1-2y_2, \\ x_2=-4y_1+3y_2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Эти рассуждения равносильны следующим. Выпишем составную матрицу $(A\,|\,E)$ *и матрицу* A *в ней приведем элементарными преобразованиями над строками по схеме метода Гаусса (см. п. 4.1.1) к единичной матрице* E. *Тогда единичная матрица* E *при тех же преобразованиях перейдет в матрицу* A^{-1}. *Так, для матрицы* A *из второго примера имеем*

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right), \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

При вычислении обратной матрицы можно опираться также на ее определение, по которому матрица A^{-1} *является решением матричного уравнения* $AX = E$, *т. е. столбцы* $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})^{\mathrm{T}}$ *матрицы* A^{-1} *являются решениями систем* $AX_j = E_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *где* E_j – j*-й столбец единичной матрицы того же порядка, что и у матрицы* A. *Этот способ особенно удобен при вычислении обратной матрицы с помощью компьютера. Причем, оформление одновременного решения систем* $AX_j = E_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ *в матричной записи тождественно схеме преобразований над строками составной матрицы* $(A \mid E)$, *проводимых в предыдущем способе.*

Обратная матрица обладает следующими свойствами:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$,

2) $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$,

3) $(A^{*})^{-1} = (A^{-1})^{*}$,

4) $(A_1 A_2)^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1}$,

5) $\left| A^{-1} \right| = \left| A \right|^{-1}$.

В заключение заметим, что *наличие обратной матрицы* A^{-1} *к матрице* A *системы* $AX = b$ *позволяет решение этой системы записать в матричной форме в виде*

$$X = A^{-1} b. \tag{2}$$

Для системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

по формуле (2) получаем

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обобщением обратной матрицы является псевдообратная матрица (см. п. 3).

1.5. Линейные пространства и их определение

Пусть дано произвольное числовое поле P, например, поле рациональных, действительных или комплексных чисел, и множество X элементов $a, b, c, \ldots$. Пусть в множестве X определены операции сложения элементов и умножения их на числа из поля P: операция сложения элементов каждой паре a и b из X однозначно ставит в соответствие элемент $a + b$ из X, называемый **суммой элементов** a и b; операция умножения элементов на числа каждому элементу a из X и каждому числу α из P однозначно ставит в соответствие элемент αa из X, называемый **произведением элемента** a **на число** α.

Элементы множества X называют **векторами**, а само множество X — **линейным пространством над полем** P, если операции сложения элементов из X и умножения их на числа α из P обладают следующими свойствами:

1. Сложение коммутативно, т. е. $a + b = b + a$ для любых a и b из X.
2. Сложение ассоциативно, т. е. $(a + b) + c = a + (b + c)$ для любых a, b, c из X.
3. В множестве X существует нулевой элемент 0, такой, что $a + 0 = a$ при любом a из X.
4. В множестве X для любого элемента a существует противоположный элемент $-a$, такой, что $a + (-a) = 0$.
5. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ при любых a и b из X и любом $\alpha \in P$.
6. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ при любом $a \in X$ и любых $\alpha, \beta \in P$.
7. $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ при любом $a \in X$ и любых $\alpha, \beta \in P$.
8. $1 \cdot a = a$ при любом $a \in X$.

Свойства 1–8 называют **аксиомами линейного пространства** X **над полем** P, поле P — **основным полем**. В дальнейшем нас будет интересовать линейное пространство над полем действительных чисел, называемое **действительным линейным пространством,** и линейное пространство над полем комплексных чисел, называемое **комплексным линейным пространством.**

Отметим, что в линейном пространстве существует ***операция вычитания***, однозначно ставящая в соответствие каждой паре элементов a и b элемент $a-b=a+(-b)$, называемый ***разностью*** элементов a и b.

Примерами линейных пространств являются:

1. Множество геометрических векторов-отрезков, выходящих из начала координат на плоскости или в пространстве с обычными правилами сложения векторов-отрезков и умножения их на действительные числа.
2. Множество всех функций действительного переменного, определенных и непрерывных на отрезке $[a,b]$, с обычными правилами сложения функций и умножения их на действительные числа.
3. Множество $P_n[x]$ многочленов степени не выше n с коэффициентами из поля P с обычными правилами сложения многочленов и умножения их на числа из поля P.
4. Множество $M_{m\,n}$ прямоугольных матриц размера $m\times n$ с элементами из поля P с обычными операциями сложения матриц и умножения их на числа из поля P.
5. Множество всех векторов-решений однородной системы линейных уравнений с коэффициентами из поля P относительно сложения векторов-решений и умножения их на числа из поля P.
6. Часто применяемым является *арифметическое (координатное) пространство* K векторов-столбцов $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)^{\mathrm{T}}$ высоты m с компонентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ из поля P, в котором операция сложения векторов-столбцов и умножения их на числа из поля P осуществляется по правилам:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^{\mathrm{T}} + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)^{\mathrm{T}} =$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_m + \beta_m)^{\mathrm{T}},$$
$$k \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^{\mathrm{T}} = (k \cdot \alpha_1, k \cdot \alpha_2, \ldots, k \cdot \alpha_m)^{\mathrm{T}}.$$

1.6. Линейная зависимость векторов

Вектор b называют *пропорциональным* вектору a, если $b = k \cdot a$. В аналитической геометрии такие векторы называют *коллинеарными*. Обобщением понятия пропорциональности векторов является понятие их линейной комбинации:

вектор b *называют* **линейной комбинацией векторов** a_1, $a_2, \ldots, a_s$, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, что

$$b = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_s \cdot a_s . \tag{1}$$

При этом говорят также, что вектор b *линейно выражается через векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Частным случаем линейной комбинации векторов является разложение векторов в аналитической геометрии по двум неколлинеарным и по трем некомпланарным направлениям.

Чтобы найти линейное выражение вектора $b \in K$ *через векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *из* K*, следует записать векторное равенство* (1) *и от него перейти к покомпонентным равенствам. В результате получится система* m *линейных уравнений относительно* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. *Определив эти числа из полученной системы и подставив их в равенство* (1), *найдем линейное выражение вектора* b *через векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Поясним это правило на примере.

Пример 1. Найти линейное выражение вектора $b = (1, -1, 4, -1)^{\mathrm{T}}$ через векторы $a_1 = (1, -1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$, $a_2 = (1, -1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

Решение. Составим векторное равенство $b = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2$ и от него перейдем к покомпонентным равенствам. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = -1, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 4, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = -1. \end{cases}$$

Из этой системы находим $\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = -2$.

Поэтому $b = 3a_1 - 2a_2$.

Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r,\ r \geq 2$ называется **линейно зависимой**, если хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных векторов этой системы. В противном случае система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r$ называется **линейно независимой**. Это определение эквивалентно следующему:

система векторов a_1, a_2, ..., a_r называется линейно зависимой, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, не все равные нулю, что

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_r \cdot a_r = 0. \qquad (2)$$

В противном случае система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_r$ линейно независима.

Для того чтобы выяснить вопрос о линейной зависимости векторов a_1, a_2, ..., a_r арифметического пространства K, следует составить векторное равенство (2) и перейти от него к покомпонентным равенствам. В результате получится система линейных однородных уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Если эта система имеет ненулевые решения, то система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_r$ линейно зависима. Если же эта система имеет лишь нулевое решение $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$, то система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_r$ линейно независима.

Пример 2. Выяснить вопрос о линейной зависимости векторов:

$$a_1 = (1, -1, 2, 1)^{\mathrm{T}}, \quad a_2 = (1, -1, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad a_3 = (1, -1, 4, -1)^{\mathrm{T}}.$$

Решение. Составим векторное равенство

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 = 0.$$

От него перейдем к покомпонентным равенствам. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет ненулевое решение $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = -1$. Поэтому система векторов a_1, a_2, a_3 линейно зависимая, причем $3a_1 - 2a_2 - a_3 = 0$.

На практике обычно вычисления проводятся с округлениями. Таким округлениям, естественно, будут подвергаться и компоненты рассматриваемых векторов $a_1, a_2, \ldots, a_r$, *а следовательно, и коэффициенты системы линейных уравнений, получаемой при переходе от равенства* (2) *к покомпонентным равенствам. При этом может случиться, что возмущенная в результате проведенных округлений система вместо нулевого решения будет иметь уже ненулевые решения или наоборот, что приведет к неправильному выводу о линейной зависимости системы векторов. На это обстоятельство следует постоянно обращать внимание.*

Конечная подсистема данной системы векторов называется ***максимальной линейно независимой***, если сама эта подсистема линейно независимая, а добавление к ней хотя бы одного вектора системы делает ее линейно зависимой. Каждый вектор системы линейно выражается через векторы ее максимальной линейно независимой подсистемы. Поэтому **базисом системы векторов** называют любую ее максимальную линейно независимую подсистему. Любые две максимальные линейно независимые подсистемы данной системы содержат по одинаковому числу векторов. Это число называют **рангом** рассматриваемой системы векторов. Вычисление ранга системы векторов арифметического пространства K сводится к вычислению ранга матрицы (см. п. 1.7).

1.7. Ранг матрицы

Рангом $(m \times n)$-матрицы называют ранг системы ее столбцов. Ранг матрицы совпадает с наивысшим порядком отличных от нуля миноров этой матрицы. Такие миноры называют **базисными**. Столбцы матрицы, на которых располагается хотя бы один базисный минор этой матрицы, линейно независимые. Их называют **базисными столбцами матрицы**. Через базисные столбцы матрицы линейно выражается любой ее столбец. Если ранг матрицы совпадает с числом ее столбцов, то все столбцы матрицы линейно независимые. Ранг матрицы можно определить как ранг системы ее строк. Ранг матрицы по строкам совпадает с ее рангом по столбцам. **Базисные строки матрицы** определяются так же, как ее базисные столбцы.

Для вычисления ранга матрицы можно воспользоваться **методом окаймления**, который состоит в следующем:

находят какой-либо минор первого или второго порядка, отличный от нуля, и вычисляют окаймляющие его миноры следующего порядка. Если среди них найдется отличный от нуля, то окаймляют его. Пусть уже найден таким способом минор r *-го порядка, отличный от нуля. Тогда вычисляют его окаймляющие миноры* $(r+1)$ *-го порядка. Если все они окажутся равными нулю или таких миноров вообще нет, то ранг матрицы равен* r .

Пользуясь этим методом, вычислим ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Отмеченный в матрице минор отличен от нуля. Окаймляющих его миноров третьего порядка лишь два, а именно

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix},$$

и они равны нулю. Поэтому ранг матрицы $r(A) = 2$, причем первые ее два столбца линейно независимые, так как на них располагается, например, отмеченный базисный минор. Второй и третий, первый и третий столбцы матрицы A также линейно независимые, так как на них соответственно располагаются базисные миноры

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления ранга системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *арифметического пространства* K *следует эти векторы записать столбцами матрицы и вычислить ее ранг. Это и будет ранг системы рассматриваемых векторов. По базисным минорам легко выделяются все максимальные линейно независимые подсистемы данной системы векторов.*

Поясним это правило на примере.

Пример 1. Найти ранг системы векторов

$$a_1 = (1, -1, 2, 1)^{\mathrm{T}}, \quad a_2 = (1, -1, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \quad a_3 = (1, -1, 4, -1)^{\mathrm{T}}$$

и выделить в ней все максимальные линейно независимые подсистемы векторов.

Решение. Составим матрицу

$$A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ее ранг равен двум. Следовательно, ранг системы векторов a_1, a_2, a_3 также равен двум. Причем, каждая пара этих векторов составляет максимальную линейно независимую подсистему, так как на каждой паре этих векторов располагаются соответственно базисные миноры

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Пример 2. В системе векторов $a_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $a_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $a_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $a_4=(1,3,3)^{\mathrm{T}}$, $a_5=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ выделить какую-либо максимальную линейно независимую подсистему и через нее линейно выразить остальные векторы системы.

Решение. Составив матрицу

$$A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

замечаем, что в ней отличен от нуля минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Поэтому ранг матрицы A равен трем и векторы a_1, a_2, a_3 составляют одну из максимальных линейно независимых подсистем данной системы векторов. Чтобы через эту подсистему линейно выразить вектор a_4, составим, как в Примере 1 из п. 1.6, векторное равенство

$$a_4=\alpha_1\cdot a_1+\alpha_2\cdot a_2+\alpha_3\cdot a_3$$

и от него перейдем к покомпонентным равенствам. Тогда придем к системе

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 3, \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 3, \end{cases}$$

из которой найдем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \ \alpha_3 = -1$. Поэтому $a_4 = a_1 + a_2 - a_3$. Точно так же найдем линейное выражение $a_5 = -a_1 + 2a_3$.

Существенным является то, что ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях над нею. Этим можно пользоваться при вычислении ранга матрицы.

Поясним это на примере.

Пример 3. С помощью элементарных преобразований вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Совершим, как при методе Гаусса (см. п. 4.1.1), цепочку элементарных преобразований. В результате получим цепочку эквивалентных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы этой цепочки матриц равен двум. Следовательно, ранг матрицы A также равен двум.

На практике обычно вычисления проводятся с округлениями. Таким округлениям будут подвергаться и элементы матрицы. Это может привести к тому, что некоторый неравный ну-

лю минор матрицы превратится в минор, равный нулю, или наоборот. А это, в свою очередь, может привести к неправильному заключению о ранге матрицы. На возможность такого обстоятельства следует постоянно обращать внимание.

В заключение отметим, что *ранг произведения матриц (квадратных или прямоугольных) не выше ранга каждого из множителей. Если* A *— матрица размера* $(m\times n)$, Q_1 *и* Q_2 *— квадратные невырожденные матрицы порядков* m *и* n*, то* $r(Q_1 A) = r(A\,Q_2) = r(A)$.

1.8. Базис линейного пространства. Координаты векторов

Всякую систему векторов линейного пространства X называют **базисом** или **базой этого пространства**, если эта система векторов линейно независима и любой вектор пространства X линейно выражается через векторы этой системы. Существенно различными являются случаи, когда базис пространства *конечен* и когда он *бесконечен*. В линейной алгебре изучаются линейные пространства с конечными базисами. Если базис пространства конечен, т. е. состоит из конечного числа векторов, то он представляет собой конечную максимальную линейно независимую систему векторов пространства и, обратно, любая конечная максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства является базисом этого пространства.

Линейное пространство X называют **конечномерным**, если оно обладает хотя бы одним базисом, состоящим из конечного числа векторов. Конечномерное пространство может обладать многими различными базисами. Число векторов в каждом базисе конечномерного пространства одинаково. Это число называют **размерностью** пространства. Если размерность пространства X равна n, то записывают $\dim X = n$. Пространство X при этом называют n-мерным и обозначают через X_n.

В арифметическом (координатном) пространстве K_m m-мерных векторов-столбцов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^{\mathrm{T}}$ за базис можно принять любую максимальную линейно независимую систему векторов

$$\begin{aligned} &e_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m1})^{\mathrm{T}}, \\ &e_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{m2})^{\mathrm{T}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &e_m = (\alpha_{1m}, \alpha_{2m}, \ldots, \alpha_{mm})^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

т. е. такую систему векторов, для которой определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

В частности, в K_m можно принять за базис систему векторов

$$\begin{aligned} &e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \\ &e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &e_m = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Этот базис в K_m называют его **естественным базисом**.

В пространстве $P_n[x]$ многочленов от x степени не выше n система многочленов $1, (x-\alpha), (x-\alpha)^2, \ldots, (x-\alpha)^n$ при любом фиксированном числе α составляет базис этого пространства.

Пусть линейное пространство X_n обладает базисом

$$e: \quad e_1, e_2, \ldots, e_n. \tag{3}$$

Тогда любой вектор x из X_n единственным образом представляется в виде

$$x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n =$$

$$= (e_1, e_2, \ldots, e_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = e \cdot [x]_e. \qquad (4)$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в разложении (4) называют **координатами вектора x в базисе** (3) и записывают $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)_e^{\mathrm{T}}$.

Столбец $(x)_e = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_e^{\mathrm{T}}$ называют **столбцом координат вектора x в базисе e.**

Индекс e базиса при столбце координат вектора обычно опускают. Кроме того, часто, если это не вызывает путаницы, вектор отождествляют со столбцом его координат.

Векторы линейного пространства X_n в данном базисе полностью определяются своими координатами. При этом операции над векторами сводятся к соответствующим операциям над их координатами.

Так, для векторов

$$x(x_1, x_2, \ldots, x_n)_e^{\mathrm{T}} \quad \text{и} \quad y(y_1, y_2, \ldots, y_n)_e^{\mathrm{T}}$$

условие $x = y$ равносильно условиям $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $x_n = y_n$.

При сложении (вычитании) векторов складываются (вычитаются) их соответствующие координаты, т. е.

$$(x \pm y)_e = (x_1 \pm y_1, \ x_2 \pm y_2, \ldots, \ x_n \pm y_n)_e^{\mathrm{T}}. \qquad (5)$$

При умножении вектора x на число α все координаты вектора x умножаются на число α, т. е.

$$(\alpha x)_e = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)_e^{\mathrm{T}}.$$

1.9. Преобразование координат вектора при переходе от базиса к базису

Пусть в линейном пространстве X_n заданы базисы

$$e: \quad e_1, e_2, \ldots, e_n , \tag{1}$$

$$e': \quad e'_1, e'_2, \ldots, e'_n . \tag{2}$$

Каждый вектор e'_j базиса e', как вектор пространства X_n, разлагается по базису (1), т. е. представляется в виде

$$e'_j = t_{1j} \cdot e_1 + t_{2j} \cdot e_2 + \ldots + t_{nj} \cdot e_n , \quad j = 1, 2, \ldots, n . \tag{3}$$

Матрицу из столбцов координат векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ в базисе (1), т. е. матрицу

$$T = ((e'_1)_e, (e'_2)_e, \ldots, (e'_n)_e) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

в которой столбцами служат строки коэффициентов разложений (3), называют **матрицей перехода от базиса (1) к базису (2)**. Соотношения (3) устанавливают связь между базисами (1) и (2). В матричной форме они записываются в виде

$$e' = e\,T , \tag{5}$$

где положено $e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Точно так же получается соотношение

$$e = e'\,T^{-1}. \tag{6}$$

Часто векторы базисов e и e' сами бывают заданы координатами в некотором базисе e^0. Тогда матрица перехода от базиса e к базису e' находится по формуле

$$T = T_1^{-1}\,T_2 , \tag{7}$$

где T_1 — матрица перехода от базиса e^0 к базису e, т. е. матрица, составленная из столбцов координат векторов базиса e в базисе e^0;

T_2 — матрица перехода от базиса e^0 к базису e', т. е. матрица, составленная из столбцов координат векторов базиса e' в базисе e^0.

Приведем примеры на отыскание матриц перехода от базиса к базису.

Пример 1. Найти матрицу перехода к базису $e'_1 = (2, 3)^{\mathrm{T}}$, $e'_2 = (1, 2)^{\mathrm{T}}$, векторы которого заданы координатами в некотором базисе e_1, e_2.

Решение. Здесь векторы нового базиса заданы координатами в старом базисе. Поэтому сразу можно записать соотношения (3), которые в данном случае имеют вид

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2\ ,\quad e'_2 = e_1 + 2e_2 .$$

Следовательно, матрицей перехода от базиса e к базису e' будет матрица

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти матрицу перехода от базиса $e_1 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$, $e_2 = (1, 0)^{\mathrm{T}}$ к базису $e'_1 = (2, 1)^{\mathrm{T}}$, $e'_2 = (1, 2)^{\mathrm{T}}$, если векторы базисов e и e' заданы координатами в некотором базисе e^0.

Решение. Составим векторное равенство $e'_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ и от него перейдем к покоординатным равенствам

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2, \\ \alpha_1 \qquad\ = 1. \end{cases}$$

Отсюда найдем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Поэтому $e'_1 = e_1 + e_2$. Так же получим $e'_2 = 2e_1 - e_2$. В данном случае соотношения (3) имеют вид

$$e'_1 = e_1 + e_2,$$

$$e'_2 = 2e_1 - e_2 .$$

Поэтому матрицей перехода от базиса e к базису e' будет

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если воспользоваться формулой (7), то сразу получим

$$T = T_1^{-1}\,T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть в пространстве X_n заданы два базиса e и e' с матрицей перехода T от первого базиса ко второму и пусть вектор x из X имеет в базисах e и e' соответственно столбцы координат

$$(x)_e = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_e^{\mathrm{T}} \text{ и } (x)_{e'} = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{e'}^{\mathrm{T}}.$$

Между этими столбцами координат вектора x имеют место соотношения

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_e^{\mathrm{T}} = T \cdot (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{e'}^{\mathrm{T}}, \tag{8}$$

$$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{e'}^{\mathrm{T}} = T^{-1} \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n)_e^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} x_1 = t_{11} \cdot x'_1 + t_{12} \cdot x'_2 + \ldots + t_{1n} \cdot x'_n, \\ x_2 = t_{21} \cdot x'_1 + t_{22} \cdot x'_2 + \ldots + t_{2n} \cdot x'_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = t_{n1} \cdot x'_1 + t_{n2} \cdot x'_2 + \ldots + t_{nn} \cdot x'_n, \end{cases} \tag{8$'$}$$

и

$$\begin{cases} x'_1 = \tau_{11} \cdot x_1 + \tau_{12} \cdot x_2 + \ldots + \tau_{1n} \cdot x_n, \\ x'_2 = \tau_{21} \cdot x_1 + \tau_{22} \cdot x_2 + \ldots + \tau_{2n} \cdot x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n = \tau_{n1} \cdot x_1 + \tau_{n2} \cdot x_2 + \ldots + \tau_{nn} \cdot x_n, \end{cases} \tag{9$'$}$$

где t_{ij} — элементы матрицы T; c_{ij} — элементы матрицы T^{-1}.

Эти соотношения называют **формулами преобразования координат вектора при изменении базиса пространства**. Причем формулы (8) и (8$'$) дают выражение старых координат вектора через его новые координаты, а (9) и (9$'$) — наоборот, выражают новые координаты вектора через его старые координаты.

1.10. Системы линейных уравнений

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

с матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ и расширенной матрицей

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Решением системы (1) называют упорядоченный набор из n чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, при подстановке которых в уравнения системы вместо соответствующих неизвестных каждое уравнение превращается в тождество. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**. Если у системы нет решений, то она называется **несовместной** или **противоречивой**. Две системы с одними и теми же неизвестными называют **эквивалентными (равносильными),** если каждое решение одной из них является решением другой и, наоборот, если обе системы несовместные.

Система (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A системы равен рангу ее расширенной матрицы B. Ранг матрицы определяется (см. п. 1.7) порядком базисного минора. Неизвестные системы (1), на столбцах коэффициентов которых располагается выбранный базисный минор, принимают за главные, а остальные считают *свободными*. Свободным неизвестным придают произвольные числовые значения. Члены, содержащие свободные неизвестные, переносят в правую часть уравнений системы и решают ее относительно главных неизвестных.

Если ранг матрицы системы совпадает с числом неизвестных и система совместна, то она имеет **единственное решение**. Если же ранг матрицы системы меньше числа неизвестных и система совместная, то она имеет **бесконечное множество решений**. Формулы, дающие выражение для каждого неизвестного системы через определенные числа и линейные комбинации произвольных постоянных или, что то же самое, через линейные комбинации свободных неизвестных, называют **общим решением системы**, если из этих формул при определенных наборах значений произвольных постоянных можно получать любое частное решение данной системы.

Совместная система линейных уравнений эквивалентна своей базисной подсистеме, т. е. подсистеме уравнений, на которых располагается базисный минор. Поэтому при решении совместной системы уравнений достаточно решить ее базисную подсистему. Поясним это на примере.

Пример 1. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 9x_4 = -1 \end{cases}$$

и решить ее, если она совместна.

Решение. Выпишем матрицу и расширенную матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -9 \end{pmatrix}, \qquad B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -9 & -1 \end{array}\right).$$

Ранги этих матриц совпадают и равны двум. Следовательно, данная система совместная. Далее замечаем, что один из базисных миноров, например, отмеченный минор, располагается на первых двух строках матрицы A и на втором и третьем ее столбцах. Поэтому данная система эквивалентна базисной подсистеме, состоящей из первых двух уравнений. Главными неизвестными в ней можно считать x_2 и x_3, а свободными неизвестными — x_1 и x_4. Вместо исходной системы можно решать ее базисную подсистему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Перенеся свободные неизвестные в правые части уравнений, придем к системе

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1 - x_1 + x_4, \\ x_2 - 2x_3 = 2 - x_1 - 3x_4. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим общее решение

$$x_1 = x_1;\ x_2 = -x_1 + 5x_4;\ x_3 = -1 + 4x_4;\ x_4 = x_4,$$

или в векторной записи

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = (x_1;\ -x_1 + 5x_4;\ -1 + 4x_4;\ x_4)^{\mathrm{T}}.$$

Из общего решения при конкретных значениях свободных неизвестных x_1, x_4 получаются частные решения. Например, при $x_1 = 1,\ x_4 = 2$ получается частное решение $(1,\ 9,\ 7,\ 2)^{\mathrm{T}}$.

Система (1) называется **однородной**, если все свободные члены ее уравнений равны нулю. Все отмеченное выше применимо к однородным системам. Кроме того, однородная система всегда совместная, так как она обладает, по крайней мере, нулевым решением $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$.

Для того чтобы система линейных однородных уравнений имела только нулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы совпадал с числом неизвестных системы. В частности, однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет только нулевое решение, если ее определитель отличен от нуля.

Для того чтобы однородная система имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы был *меньше числа неизвестных системы. В частности, однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевые решения, когда ее определитель равен нулю. Любая однородная система, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, имеет ненулевые решения.*

Решения однородной системы обладают следующими свойствами:

1. Произведение любого решения на любое число также является решением этой системы.
2. Всякая линейная комбинация решений однородной системы является решением этой системы.

Из перечисленных свойств вытекает, что *решения однородной системы составляют линейное пространство*. Каждое решение однородной системы представляет собой n-мерный вектор-столбец. Линейное пространство решений однородной системы является ($n-r$)-мерным пространством (n — число неизвестных системы, r — ранг ее матрицы, $n-r$ — число свободных неизвестных в системе). Любой его базис называют **фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы уравнений.**

Каждая фундаментальная система решений состоит из $n-r$ решений. Если $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ — какие-либо решения, составляющие фундаментальную систему решений однородной системы, то ее общее решение $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ представляется в виде

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_{n-r} X_{n-r}, \qquad (2)$$

где $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ — произвольные постоянные.

Для построения фундаментальной системы решений находят общее решение данной однородной системы. Берут любой, отличный от нуля, определитель порядка $n-r$, т. е. порядка, равного числу свободных неизвестных системы. Элементы i-й строки (столбца) этого определителя принимают соответственно за значения свободных неизвестных и находят из общего решения значения остальных (главных) неизвестных. Так поступают для всех строк (столбцов) выбранного определителя.

Полученные таким образом $n-r$ решений и дадут фундаментальную систему решений. Свободным неизвестным можно придавать значения из строк (столбцов) выбранного определителя в самой системе и из нее находить соответствующие значения главных неизвестных.

Поясним это правило на примере.

Пример 2. Найти какую-либо фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 13x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 16x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Решив данную систему, получим общее решение

$$X = (3x_3 + x_4;\ 2x_3 + x_4;\ x_3;\ x_4)^{\mathrm{T}}. \qquad (2')$$

Здесь два свободных неизвестных, а именно x_3 и x_4. Поэтому в качестве определителя, отличного от нуля, можно взять, например, определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Полагая в общем решении $(2')$ сначала $x_3 = 1, x_4 = 0$, а затем $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, получим соответственно частные решения:

$$X_1 = (3,\ 2,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}, \qquad X_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}},$$

составляющие фундаментальную систему решений данной системы уравнений. Результаты этих вычислений удобно записывать в виде следующей таблицы:

x_1	x_2	x_3	x_4
3	2	1	0
1	1	0	1

Если взять другой определитель, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix},$$

то найдем другую фундаментальную систему решений

x_1	x_2	x_3	x_4
5	4	1	2
13	10	3	4

Из приведенного примера видно, что если при построении фундаментальной системы решений в качестве ненулевого определителя выбирать определитель единичной матрицы, то вычисление столбцов фундаментальной системы решений будет наиболее простым. Это приводит к следующему упрощенному правилу.

Пусть общее решение однородной системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1,\,r+1} x_{r+1} + \alpha_{1,\,r+2} x_{r+2} + \ldots + \alpha_{1\,n} x_n, \\ x_2 = \alpha_{2,\,r+1} x_{r+1} + \alpha_{2,\,r+2} x_{r+2} + \ldots + \alpha_{2\,n} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \alpha_{r,\,r+1} x_{r+1} + \alpha_{r,\,r+2} x_{r+2} + \ldots + \alpha_{r\,n} x_n, \end{cases}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *— главные неизвестные, а* $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ *— свободные неизвестные.*

Допишем к этой системе формальные уравнения

$$x_{r+1} = x_{r+1}, \quad x_{r+2} = x_{r+2}, \quad \ldots, \quad x_n = x_n$$

и расширенную систему запишем в векторной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1} \begin{pmatrix} \alpha_{1,\,r+1} \\ \alpha_{2,\,r+1} \\ \vdots \\ \alpha_{r,\,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2} \begin{pmatrix} \alpha_{1,\,r+2} \\ \alpha_{2,\,r+2} \\ \vdots \\ \alpha_{r,\,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} \alpha_{1\,n} \\ \alpha_{2\,n} \\ \vdots \\ \alpha_{r\,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Правая часть векторного равенства представляет собой линейную комбинацию $n-r$ векторов-столбцов, которые и составляют фундаментальную систему решений рассматриваемой однородной системы.

В данном примере общее решение $(2')$ запишем в векторной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем фундаментальную систему решений

$$(\,3,\ 2,\ 1,\ 0\,)^{\mathrm{T}},\ \ (\,1,\ 1,\ 0,\ 1\,)^{\mathrm{T}}.$$

В заключение отметим следующие свойства решений неоднородной и однородной систем линейных уравнений.

1. *Сумма любого решения неоднородной системы и любого решения ее однородной системы является решением неоднородной системы.*
2. *Разность любых двух решений неоднородной системы является решением ее однородной системы.*
3. *Общее решение $X_{\text{н}}$ неоднородной системы представляется в виде суммы общего решения $X_{\text{одн}}$ ее однородной системы и какого-либо частного решения x^0 неоднородной системы, т. е. имеет место формула*

$$X_{\text{н}} = X_{\text{одн}} + x^0. \tag{3}$$

Особо обратим внимание на то, что в теории систем линейных уравнений большую роль играют ранг матрицы и линейная зависимость линейных форм. Если вычисления проводятся с округлениями, то при вычислении ранга матрицы и выяснении вопроса о линейной зависимости линейных форм (см. пп. 1.6 и 1.7) могут быть допущены ошибки. Это может весьма ощутимо повлиять на устойчивость решения системы.

1.11. Линейные подпространства

Подмножество L линейного пространства X называют **подпространством** этого пространства, если оно само является линейным пространством по отношению к определенным в X операциям сложения векторов и умножения их на числа. Так, векторы-отрезки, выходящие из начала координат и лежащие на прямой (плоскости) в обычном трехмерном пространстве X_3 векторов-отрезков, составляют одномерное (двумерное) подпространство.

Для того чтобы непустое подмножество L пространства X над полем P было линейным подпространством в X, достаточно, чтобы операции сложения векторов и умножения их на числа из поля P были замкнуты в L, т. е. чтобы для любых a и b из L и любого α из P было

$$a + b \in L, \qquad \alpha a \in L.$$

Если дана система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ из пространства X над полем P, то множество L всевозможных линейных комбинаций $t_1 \cdot a_1 + t_2 \cdot a_2 + \ldots + t_k \cdot a_k$ с коэффициентами $t_1, t_2, \ldots, t_k$ из P является подпространством в X. Это подпространство L называют **подпространством, порожденным системой векторов** $a_1, a_2, \ldots, a_k$, или **линейной оболочкой этой системы векторов**, и записывают

$$L = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle.$$

Размерность линейной оболочки $L = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ совпадает с рангом системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Ее обозначают через $\dim L$.

Для любого k, $0 \le k \le n$ в n-мерном пространстве существует подпространство размерности k. Базис подпространства определяется как базис пространства. Всякое линейное подпространство L конечномерного линейного пространства X_n является линейной оболочкой некоторой системы векторов

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ из X_n, причем $\dim L \le n$. Подпространство $L = < a_1, a_2, \ldots, a_k >$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — один из базисов в L, можно задать векторным уравнением

$$L = t_1 \cdot a_1 + t_2 \cdot a_2 + \ldots + t_k \cdot a_k . \qquad (1)$$

Уравнение (1) называют **параметрическим уравнением подпространства L в векторной форме.**

Если

$$\begin{aligned} a_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{n1})^{\mathrm{T}}, \\ a_2 &= (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{n2})^{\mathrm{T}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k &= (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots, \alpha_{nk})^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

то, переходя от векторного уравнения (1) к покоординатным равенствам, для любого $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ из L получим систему

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11} \cdot t_1 + \alpha_{12} \cdot t_2 + \ldots + \alpha_{1k} \cdot t_k , \\ x_2 = \alpha_{21} \cdot t_1 + \alpha_{22} \cdot t_2 + \ldots + \alpha_{2k} \cdot t_k , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1} \cdot t_1 + \alpha_{n2} \cdot t_2 + \ldots + \alpha_{nk} \cdot t_k . \end{cases} \qquad (2)$$

Систему (2) называют **параметрическими уравнениями подпространства L в координатной форме.**

Любое линейное подпространство L конечномерного пространства X_n можно также представить как пространство решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными, т. е. можно задать однородной системой линейных уравнений. Такое задание подпространства называют его **общими уравнениями**. Если подпространство L задано параметрическими уравнениями (2), то для получения общих уравнений подпространства L нужно из (2) исключить параметры $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Если подпространство L задано общими уравнениями, т. е. системой однородных уравнений, то для построения базиса подпространства L следует построить какую-либо фундаментальную систему решений этой системы однородных уравнений.

Если в пространстве X даны линейные подпространства L_1, L_2, то множество L_0 векторов, принадлежащих как к L_1, так и к L_2, является подпространством в X. Его называют **пересечением подпространств** L_1 **и** L_2 и обозначают через $L_0 = L_1 \cap L_2$.

Линейным подпространством является также и линейная оболочка объединения подпространств L_1 и L_2. Это подпространство называют **суммой подпространств** L_1 **и** L_2 и обозначают через $L_1 + L_2$. Оно состоит из векторов, которые представляются в виде суммы двух слагаемых, одного из L_1, другого из L_2, и только из таких векторов.

Если пересечение $L_1 \cap L_2$ является нулевым подпространством, то сумму $L_1 + L_2$ называют **прямой суммой** и обозначают через $L_1 \oplus L_2$.

Понятие пересечения и суммы подпространств распространяется на любое конечное число подпространств. Для размерностей выполняется следующее соотношение:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2). \quad (3)$$

Если пространство X является прямой суммой подпространств L_1 и L_2, то для любого вектора x из X однозначно выполняется соотношение $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. При этом x_1 называют **проекцией вектора** x **на подпространство** L_1 **параллельно подпространству** L_2**.** Аналогично x_2

называют **проекцией вектора** x **на пространство** L_2 **параллельно подпространству** L_1**.**

Подпространства L_1 и L_2, удовлетворяющие условию $X = L_1 \oplus L_2$, называют **прямыми дополнениями друг к другу в пространстве** X.

Пусть $L_1 = < a_1, a_2, \ldots, a_k >$, $L_2 = < b_1, b_2, \ldots, b_l >$ и системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_1, b_2, \ldots, b_l$ составляют базисы соответственно в L_1 и L_2. Чтобы найти какой-либо базис в $L_1 + L_2$, следует выделить какую-либо максимальную линейно независимую подсистему системы векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_l.$$

При построении какого-либо базиса в $L_1 \cap L_2$ следует записать (см. [28] решение задачи № 1319) векторное равенство

$$\begin{aligned} z &= \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = \\ &= \beta_1 \cdot b_1 + \beta_2 \cdot b_2 + \ldots + \beta_l \cdot b_l \end{aligned} \tag{4}$$

и перейти от него к покоординатным равенствам. В результате получится однородная система линейных уравнений относительно коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$. Построив какую-либо фундаментальную систему решений этой системы уравнений и подставив поочередно каждое решение построенной фундаментальной системы решений в (4), получим базис в $L_1 \cap L_2$.

Если пространства L_1 и L_2 заданы однородными системами уравнений, то пересечение $L_1 \cap L_2$ будет определяться системой, получаемой объединением всех уравнений из систем, определяющих L_1 и L_2. Любая фундаментальная система решений такой системы уравнений дает базис пересечения $L_1 \cap L_2$.

1.12. Линейные операторы в линейных пространствах

Пусть даны линейные пространства X_n и Y_m над одним и тем же полем P. Говорят, что *из пространства* X_n *в пространство* Y_m *действует оператор* φ или, что то же самое, *отображение* φ, *функция* φ, если каждому вектору a из X_n по какому-либо правилу ставится в соответствие определенный вектор $a' = \varphi(a) = \varphi a$ из Y_m. Вектор a' называют **образом вектора** a, вектор a — **прообразом вектора** a' при отображении φ.

Если пространства X_n и Y_m совпадают, то говорят, что оператор φ, или преобразование φ, действует в пространстве X_n.

Наиболее простыми являются линейные операторы. Оператор φ, действующий из X_n в Y_m, называют **линейным,** если он сумму любых векторов a и b из X_n переводит в сумму их образов a' и b', а произведение любого вектора a из X_n на любое число α из P — в произведение образа a' вектора a на то же число α, т. е. если

$$\varphi(a+b) = \varphi a + \varphi b = a' + b',$$

$$\varphi(\alpha a) = \alpha \varphi a = \alpha a'.$$

Два линейных оператора φ и ψ, действующих из X_n в Y_m, называют **равными,** если для любого a из X_n $\varphi a = \psi a$.

Примеры:

1. Оператор ε, переводящий любой вектор a линейного пространства X_n в тот же вектор $a \in X_n$, является линейным оператором. Такой оператор называют **тождественным**.
2. Оператор ω, переводящий любой вектор a линейного пространства X_n в нулевой вектор пространства Y_m, яв-

ляется линейным оператором. Такой оператор называют **нулевым.**

3. Растяжение (сжатие) векторов пространства X_n в одно и то же число α раз является линейным оператором, действующим в пространстве X_n. Такой оператор называют **оператором подобия.**
4. Пусть X_3 — трехмерное пространство векторов-отрезков, выходящих из начала системы координат $Oxyz$, Y_1 — одномерное пространство векторов на оси Oy. **Проектирование** из X_3 на Y_1 является линейным оператором, действующим из X_3 в Y_1. Этот оператор можно рассматривать также как оператор, действующий в пространстве X_3.

Пусть из пространства X_n в пространство Y_m действует линейный оператор φ. Пространство X_n называют **областью определения оператора** φ. Множество образов всех векторов из X_n при действии оператора φ называют **областью значений оператора** φ**.** Область значений оператора является подпространством в Y_m. Размерность этого подпространства называют **рангом оператора** φ**.** Множество всех векторов пространства X_n, которые переводятся линейным оператором φ в нулевой вектор, называют **ядром** этого оператора. Ядро оператора φ является подпространством в X_n. Размерность ядра оператора φ называют **дефектом** этого оператора.

Сумма ранга и дефекта оператора φ равна размерности пространства X_n. Оператор с ненулевым дефектом называют **вырожденным**, с нулевым дефектом — **невырожденным.**

Линейный оператор φ, *действующий из линейного пространства* X_n *в линейное пространство* Y_m, *определяется за-*

данием образов $\varphi e_1,\ \varphi e_2, \ldots,\ \varphi e_n$ *векторов любого фиксированного базиса* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *пространства* X_n.

Пусть в пространстве Y_m также фиксирован базис $q_1, q_2, \ldots, q_m$ и пусть векторы $\varphi e_1,\ \varphi e_2, \ldots,\ \varphi e_n$ имеют в нем разложения

$$
\begin{aligned}
\varphi e_1 &= a_{11} q_1 + a_{21} q_2 + \ldots + a_{m1} q_m, \\
\varphi e_2 &= a_{12} q_1 + a_{22} q_2 + \ldots + a_{m2} q_m, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi e_n &= a_{1n} q_1 + a_{2n} q_2 + \ldots + a_{mn} q_m.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Матрицу

$$
A_{qe} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}
\tag{2}
$$

размером $m \times n$ называют **матрицей линейного оператора** $\boldsymbol{\varphi}$ в паре базисов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $q_1, q_2, \ldots, q_m$ соответственно пространств X_n и Y_m.

Заметим, что столбцами матрицы A_{qe} служат столбцы координат векторов $\varphi e_1,\ \varphi e_2, \ldots,\ \varphi e_n$ в базисе $q_1, q_2, \ldots, q_m$, т. е. строки коэффициентов из разложений (1). Отсюда следует, что ранг r оператора φ совпадает с рангом его матрицы, а дефект оператора φ — с числом $n - r$. Часто матрицу оператора, если это не вызывает путаницы, отождествляют с самим оператором. Это особенно бывает удобно в вычислительной практике.

Соотношения (1) устанавливают связь между линейным оператором φ, базисами $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $q_1, q_2, \ldots, q_m$ и матрицей A_{qe} оператора φ в паре этих базисов. В матричной форме эти соотношения записываются в виде

$$
\varphi e = q A_{qe}, \tag{3}
$$

где положено $\varphi e = (\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n)$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$.

Если оператор φ действует в пространстве X_n, то пространство X_n выступает в качестве и области определения и области значений. В этом случае естественно ограничиться одним базисом, т. е. считать, что базисы e и q совпадают. При этом матрица A_{qe} оператора φ будет квадратной матрицей A_e порядка n и соотношение (3) примет вид

$$\varphi e = e A_e . \tag{4}$$

Если из линейного пространства X_n с базисом $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ в линейное пространство Y_m с базисом $q = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$ действует линейный оператор φ, то столбец координат $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m)_q^{\mathrm{T}}$ вектора $a' = \varphi a$ в базисе q равен матрице A_{qe} оператора φ в паре базисов e и q, умноженной на столбец координат $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)_e^{\mathrm{T}}$ вектора a в базисе e, т. е.

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_m \end{pmatrix}_q = A_{qe} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_e . \tag{5}$$

В частности, если пространства X_n и Y_m совпадают и базисы e и q также совпадают, то формула (5) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}_e = A_e \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_e . \tag{6}$$

Пусть из пространства X_n в пространство Y_m действует линейный оператор φ и пусть он имеет матрицу $A_{q\,e}$ в паре базисов e и q пространств X_n и Y_m и матрицу $A'_{q'e'}$ — в паре базисов e' и q' пространств X_n и Y_m. Тогда матрицы $A_{q\,e}$ и $A'_{q'e'}$ оператора φ связаны соотношением

$$A'_{q'e'} = Q^{-1} A_{q\,e} T\,, \tag{7}$$

где T — матрица перехода от базиса e к базису e' пространства X_n; Q — матрица перехода от базиса q к базису q' пространства Y_m.

В частности, если пространства X_n и Y_m совпадают и базисы e и q также совпадают, то формула (7) принимает вид

$$A'_{e'} = T^{-1} A_e T\,. \tag{8}$$

Матрицы $A'_{q'e'}$ и $A_{q\,e}$, связанные соотношением (7), называют **эквивалентными,** а матрицы $A'_{e'}$ и A_e, связанные соотношением (8), — **подобными,** причем говорят, что матрица $A'_{e'}$ получается из матрицы A_e трансформированием матрицей T.

Пусть из линейного пространства X_n над полем P в линейное пространство Y_m над тем же полем действуют линейные операторы φ и ψ. Операторы φ и ψ считаются *равными,* если для любого вектора x из X_n его образы при действии этих операторов равны, т. е. если $\varphi x = \psi x$. Равные линейные операторы в одном и том же базисе имеют одинаковые матрицы.

Суммой операторов φ и ψ называют оператор $\varphi + \psi$, переводящий любой вектор x из X_n в сумму образов от действия на x порознь операторов φ и ψ, т. е. оператор $\varphi + \psi$, действующий по правилу

$$(\varphi + \psi)\,x = \varphi x + \psi x\,.$$

Сумма линейных операторов является линейным оператором. Матрицей суммы линейных операторов в фиксированных базисах является сумма матриц слагаемых операторов в тех же базисах. Определение суммы линейных операторов распространяется на любое конечное число операторов. То же относится и к правилу конструирования матрицы такой суммы операторов.

Произведением линейного оператора φ на число λ из P называют оператор $\lambda\varphi$, при действии которого образы φx векторов x из X_n умножаются на λ, т. е. оператор $\lambda\varphi$, действующий по правилу

$$(\lambda\varphi)\,x = \lambda\,(\varphi x) \qquad \text{при любом } x \in X_n .$$

Произведение линейного оператора на число является линейным оператором. При умножении линейного оператора на число его матрица умножается на то же число.

Множество всех операторов, действующих из X_n в Y_m, с введенными операциями сложения операторов и умножения их на числа является линейным пространством, изоморфным линейному пространству $(m \times n)$-матриц с элементами из поля P с операциями сложения матриц и умножения их на числа из поля P.

Пусть даны линейные пространства X_n, Y_m, Z_p над полем P и пусть φ — линейный оператор, действующий из X_n в Y_m, ψ — линейный оператор, действующий из Y_m в Z_p. Результат последовательного выполнения операторов φ и ψ называют их **произведением** и обозначают через $\psi\varphi$ (оператор, действующий первым, пишется в произведении справа). Произведение $\psi\varphi$ операторов отображает X_n в Z_p и является линейным оператором.

Пусть в X_n, Y_m, Z_p выбраны соответственно базисы e, q, f. Обозначим матрицу оператора φ в базисах e и q через A, матрицу оператора ψ в базисах q и f — через B. Тогда оператор $\psi\varphi$ в базисах e и f имеет матрицу BA (матрица оператора, действующего первым, пишется в произведении справа). Из правила построения матрицы произведения операторов сразу вытекает, что ранг произведения операторов не превосходит рангов сомножителей.

Определение произведения линейных операторов распространяется на любое конечное число последовательно выполняемых линейных операторов. То же относится и к правилу конструирования матриц произведения операторов из матриц операторов сомножителей.

Пусть дан линейный оператор φ, действующий из пространства X_n в пространство Y_m. Линейный оператор φ^{-1}, действующий из Y_m в X_n, называют **обратным к оператору** φ, если $\varphi^{-1}\varphi = \varepsilon$ и $\varphi\varphi^{-1} = \tilde{\varepsilon}$, где ε и $\tilde{\varepsilon}$ — тождественные операторы соответственно в X_n и Y_m. Другими словами, линейный оператор φ^{-1} называют **обратным к оператору** φ, если для каждого x из X_n выполняется условие $\varphi^{-1}\varphi x = x$ и для каждого y из Y_m — условие $\varphi\varphi^{-1} y = y$. Очевидно, что операторы φ и φ^{-1} взаимно обратны.

Для произведения $\psi\varphi$ операторов φ и ψ обратным является оператор $\varphi^{-1}\psi^{-1}$.

1.13. Характеристический и минимальный многочлены

Характеристической матрицей квадратной матрицы A **порядка** n называют матрицу $A-\lambda E$ с переменной λ, принимающей любые числовые значения.

Определитель $\left| A-\lambda E \right|$ матрицы $A-\lambda E$ является многочленом n-й степени от λ. Этот многочлен называют **характеристическим многочленом матрицы** A, а его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — **характеристическими корнями** или **характеристическими числами матрицы** A.

Характеристические многочлены подобных матриц одинаковы. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$\left| A - \lambda E \right| = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} - \ldots \pm p_n), \qquad (1)$$

где p_k — сумма главных миноров k-го порядка матрицы A, в частности; p_1 — сумма элементов главной диагонали матрицы A, называемая **следом матрицы** A и обозначаемая через $Sp\,A$; p_n — определитель матрицы A.

По формулам Виета коэффициенты p_i выражаются через корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ следующим образом:

$$\begin{aligned} p_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n, \\ p_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-1} \lambda_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdot \ldots \cdot \lambda_n . \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, получаются часто применяемые соотношения

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn},$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \left| A \right|.$$

Пример 1. Вычислить характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению характеристического многочлена получаем

$$\left| A - \lambda E \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 .$$

Если воспользоваться формулой (1), то сначала находим

$$p_1 = Sp\,A = 2,$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$p_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Затем записываем $|A - \lambda E| = (-1)^3(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2)$.

Если в произвольный многочлен от λ

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

вместо λ подставить квадратную матрицу A порядка n, то матрицу

$$P(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \ldots + a_{n-1} A + a_n E$$

называют **значением многочлена** $P(\lambda)$ при $\lambda = A$.

Если $P(A) = 0$, то A называют **матричным корнем многочлена** $P(\lambda)$, а $P(\lambda)$ — **многочленом, аннулируемым матрицей** A.

Всякая квадратная матрица A служит корнем некоторого ненулевого многочлена. Имеет место также следующая **теорема Гамильтона–Кэли:** *Всякая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена.*

Многочлен $\varphi(\lambda)$ наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным единице, аннулируемый матрицей A, называют **минимальным многочленом** этой матрицы. Всякий многочлен $P(\lambda)$, аннулируемый матрицей A, нацело делится на минимальный многочлен $\varphi(\lambda)$ этой матрицы.

Характеристический многочлен $|A - \lambda E|$ матрицы A и ее минимальный многочлен $\varphi(\lambda)$ связаны соотношением

$$\varphi(\lambda) = \frac{(-1)^n |A - \lambda E|}{D_{n-1}}, \tag{2}$$

где D_{n-1} — наибольший общий делитель всех миноров $(n-1)$-го порядка матрицы $A - \lambda E$.

Корнями минимального многочлена $\varphi(\lambda)$ являются все различные корни характеристического многочлена $|A - \lambda E|$, причем, если

$$|A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}, \quad (3)$$

то

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}, \quad (4)$$

$$1 \le n_k \le m_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Формула (2) позволяет находить минимальный многочлен матрицы.

Пример 2. Найти минимальный многочлен матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. В предыдущем примере для матрицы A найден характеристический многочлен $|A - \lambda E| = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$. Общий наибольший делитель D_2 всех миноров второго порядка матрицы

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

равен единице, так как ее миноры

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2(\lambda + 1), \quad \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2(2 - \lambda)$$

взаимно простые. Поэтому

$$\varphi(\lambda) = \frac{(-1)^3 |A - \lambda E|}{D_2} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2.$$

Пример 3. Найти характеристический и минимальный многочлены матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для матрицы A непосредственным вычислением определителя находим характеристический многочлен

$$|\,A-\lambda E\,|=\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & -2 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(2-\lambda).$$

Выпишем все миноры второго порядка матрицы $A-\lambda E$:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2, \quad \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2(\lambda-4),$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2-\lambda & 2 \end{vmatrix} = 2(4-\lambda), \quad \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-\lambda),$$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2, \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 2(\lambda-4),$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(\lambda-4), \quad \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 2(\lambda-4),$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-4).$$

Общий наибольший делитель D_2 всех этих миноров есть $(\lambda-4)$. Поэтому минимальный многочлен матрицы A

$$\varphi(\lambda) = \frac{(-1)^3\,|\,A-\lambda E\,|}{D_2} = \frac{(-1)^3(\lambda-4)^2(2-\lambda)}{(\lambda-4)} =$$
$$= (\lambda-4)(\lambda-2).$$

Заметим, что D_2 можно найти иначе. Действительно, если в матрицу $A-\lambda E$ подставить $\lambda = 4$, то получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

ранга $r = 1$. Следовательно, все миноры второго порядка этой матрицы равны нулю. Это означает, что все миноры второго порядка матрицы $A-\lambda E$ делятся на $(\lambda-4)$, причем все эти миноры не могут делиться на большую степень двучлена $(\lambda-4)$, так как, например, минор

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2-\lambda & 2 \end{vmatrix} = 2(4-\lambda)$$

делится лишь на первую степень этого двучлена. Следовательно, в D_2 входит множитель $(\lambda-4)$ в первой степени. Другие множители из $|A-\lambda E|$ в D_2 не входят, так как на них не делится, например, выписанный только что минор второго порядка. Поэтому $D_2 = \lambda - 4$.

Учитывая, что подобные матрицы порядка n определяют один и тот же линейный оператор, действующий в линейном пространстве X_n, и что они имеют один и тот же характеристический многочлен, естественно характеристический многочлен подобных матриц называть **характеристическим многочленом линейного оператора,** определяемого этими матрицами, а его корни — **характеристическими корнями этого оператора.**

В заключение отметим, что транспонированная матрица A^{T} имеет одинаковые с матрицей A характеристические многочлены и характеристические числа.

1.14. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Пусть φ — линейный оператор, действующий в линейном пространстве X_n над полем P, имеет в некотором базисе e этого пространства матрицу A. Ненулевой вектор x из X_n называют **собственным вектором оператора** φ, если этим оператором он переводится в вектор λx, т. е. если

$$\varphi x = \lambda x, \tag{1}$$

где λ — некоторое число из поля P, называемое **собственным значением оператора** φ. При этом говорят, что *собственный вектор* x *принадлежит собственному значению* λ.

В матричной форме равенство (1) принимает вид $AX = \lambda X$. Отсюда получается следующая матричная запись:

$$(A - \lambda E)\,X = 0 \tag{2}$$

системы линейных уравнений относительно столбца X координат собственного вектора x, принадлежащего собственному значению λ, которая подробно записывается в виде

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Если известно собственное значение λ, то все собственные векторы $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, принадлежащие этому собственному значению, находятся как ненулевые решения системы (2).

С другой стороны, однородная система (2) с квадратной матрицей $A - \lambda E$ имеет ненулевые решения X с координатами из поля P лишь тогда, когда определитель $|A - \lambda E|$ матрицы этой системы равен нулю и λ принадлежит полю P. Но это означает, что λ является корнем характеристического многочлена $|A - \lambda E|$ и принадлежит полю P.

Таким образом, характеристические числа линейного оператора, принадлежащие основному полю P, *и только они, являются собственными значениями этого оператора. Поэтому в конечномерном комплексном линейном пространстве все характеристические корни линейного оператора, и только они, являются собственными значениями этого оператора; в конечномерном действительном пространстве все действительные характеристические корни линейного оператора, и только они, являются собственными значениями этого оператора.*

Множество всех собственных значений линейного оператора (каждое собственное значение берется столько раз, какова его кратность в характеристическом многочлене) называют **спектром линейного оператора.** Если матрицу отождествляют с оператором, то множество всех ее собственных значений называют **спектром матрицы.** Из сказанного следует, что *для отыскания всех собственных значений оператора с матрицей* A *нужно найти все характеристические числа матрицы* A *и из них выбрать лишь те, которые принадлежат основному полю, а для отыскания всех собственных векторов оператора с матрицей* A *нужно найти все ненулевые решения системы* (2) *при каждом собственном значении* λ.

Это правило поясним на примере.

Пример. Для оператора с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

действующего в действительном пространстве, найти собственные значения и собственные векторы.

Решение. Характеристический многочлен

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -3 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 4)(4 - \lambda)$$

матрицы A имеет корни $\lambda_1 = 4$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$. Так как рассматриваемый оператор действует в действительном линейном пространстве, то его собственным значением будет лишь $\lambda = 4$. При этом значении λ система $(A - \lambda E) X = 0$ имеет вид

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общим решением является $X = (x_1, x_1, 0)^{\mathrm{T}}$ с произвольным постоянным x_1. При x_1, пробегающем все действительные значения, оно дает общий вид собственных векторов оператора с матрицей A, принадлежащих собственному значению $\lambda = 4$. Других действительных собственных векторов оператор с матрицей A не имеет, так как у него нет других собственных значений.

Собственные векторы линейного оператора φ с матрицей A, принадлежащие одному и тому же собственному значению λ, вместе с нулевым вектором образуют подпространство, которое называют **собственным подпространством оператора φ по λ**. Это подпространство является ядром оператора $\varphi - \lambda\varepsilon$ с матрицей $A - \lambda E$. Размерность собственного подпространства оператора φ по собственному значению λ равна $n - r_\lambda$, где n — размерность пространства, в котором действует оператор φ, т. е. порядок матрицы A, r_λ — ранг оператора $\varphi - \lambda\varepsilon$ или, что то же самое, ранг матрицы $A - \lambda E$. Эту размерность называют **геометрической кратностью собственного значения λ**.

Другими словами, геометрической кратностью собственного значения λ называют максимальное число линейно независимых собственных векторов оператора φ, принадлежащих собственному значению λ. Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его **алгебраической кратности**, т. е. кратности, с которой λ входит корнем в характеристический многочлен $\left| A - \lambda E \right|$.

Собственные векторы линейного оператора φ, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы.

Их линейные комбинации, вообще говоря, не являются собственными векторами линейного оператора φ.

Если отождествлять оператор с его матрицей, то естественно говорить о собственных значениях и собственных векторах матрицы. На практике так обычно и поступают. Квадратную матрицу называют **простой,** если для каждого собственного значения матрицы его геометрическая кратность совпадает с алгебраической кратностью. В противном случае матрицу называют **дефектной.**

Собственный вектор x, определенный условием $Ax = \lambda x$, еще называют **правым собственным вектором матрицы** A, принадлежащим собственному значению λ. Рассматривают и левые собственные векторы матрицы. Ненулевой вектор y называют **левым собственным вектором матрицы** A, принадлежащим собственному значению λ, если

$$y^* A = \lambda y^* .$$

Напомним, что здесь звездочка означает транспонирование и комплексное сопряжение. Если это равенство подвергнуть транспонированию, то придем к равенству $A^{\mathrm{T}} \overline{y} = \lambda \overline{y}$. Если провести еще и комплексное сопряжение, то получим $A^* y = \overline{\lambda} y$. Это означает, что левый собственный вектор y матрицы A, принадлежащий собственному значению λ, является правым собственным вектором матрицы A^* по $\overline{\lambda}$, а вектор $\overline{y}$ — правым собственным вектором матрицы A^{T} по λ. В дальнейшем, говоря о собственных векторах, без указаний “правый”, “левый”, будем понимать, что речь идет о правых собственных векторах.

1.15. Операторы простой структуры

Линейный оператор φ, действующий в линейном пространстве X_n, называют оператором простой структуры, если в пространстве X_n существует базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

Линейный оператор простой структуры в базисе, состоящем из собственных векторов, имеет диагональную матрицу, в которой по диагонали стоят собственные значения этого оператора.

Если матрица оператора φ в некотором базисе имеет диагональную форму, то говорят, что **матрица этого оператора приводится к диагональному виду**, т. е. **диагонализуема** или, что то же самое, **подобна диагональной матрице**.

Для того чтобы в линейном пространстве X_n линейный оператор φ имел базис из собственных векторов, необходимо и достаточно, чтобы все характеристические числа λ_i оператора φ принадлежали основному полю и чтобы каждому числу λ_i принадлежало столько линейно независимых собственных векторов оператора φ, какова алгебраическая кратность корня λ_i в характеристическом многочлене оператора φ, т. е. чтобы геометрическая и алгебраическая кратности каждого числа λ_i совпадали.

Для матриц это утверждение можно перефразировать следующим образом.

Для того чтобы квадратная матрица A с элементами из поля P была матрицей простой структуры, т. е. чтобы она приводилась к диагональному виду или, что то же самое, чтобы она была подобна диагональной матрице, необходимо и достаточно, чтобы все характеристические числа λ_i матрицы A принадлежали полю P и чтобы каждому числу λ_i соответствовало столько линейно независимых собственных векторов *матрицы A, какова кратность корня λ_i в характеристическом многочлене матрицы A, т. е. чтобы геометрическая и алгебраическая кратности каждого числа λ_i совпадали.*

Линейный оператор называют **оператором простого спектра**, если все его характеристические числа различны и принадлежат основному полю.

Линейный оператор простого спектра является оператором простой структуры.

Для матриц это утверждение можно перефразировать следующим образом.

Квадратная матрица с элементами из поля P, все характеристические числа которой различны и принадлежат полю P, подобна диагональной матрице, т. е. приводится к диагональному виду.

Матрицами простой структуры, т. е. подобными диагональным матрицам, являются также (*см. пп.* 1.18, 1.19) *нормальные матрицы, т. е. матрицы, перестановочные со своими сопряженными матрицами, в частности, симметричные, эрмитовы и унитарные матрицы.*

Пусть линейный оператор φ в базисе $e=(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ имеет матрицу A, а в базисе $e'=(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, состоящем из собственных векторов, — матрицу Λ. Тогда, учитывая связь между матрицами оператора в разных базисах (см. п. 1.12, формулу (8)), имеем

$$T^{-1} A T = \Lambda, \tag{1}$$

где T — матрица перехода от базиса e к базису e'. Ее столбцами служат столбцы координат собственных векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ в базисе e.

Из соотношения (1) получается соотношение

$$A = T \Lambda T^{-1}, \tag{2}$$

которое называют **каноническим** или **спектральным** разложением матрицы A. Таким образом, матрица простой структуры приводится к диагональному виду, т. е. подобна диагональной матрице, и имеет каноническое (спектральное) разложение.

Из приведенных рассуждений следует, что при построении трансформирующей матрицы T для соотношений (1) и (2) нужно найти все собственные значения матрицы A и при каждом собственном значении λ_i построить фундаментальную систему решений однородной системы уравнений $(A - \lambda_i E)X = 0$; из решений всех таких фундаментальных систем, как из столбцов, составить матрицу T. При этом в матрице T столбцами записываются решения по каждому λ_i в порядке нумерации собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (одинаковые λ_i считаются столько раз, каковы их кратности; все λ_i можно занумеровать так, что будет $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \neq 0$, $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \ldots = \lambda_n = 0$). Если матрица T окажется квадратной, то она будет удовлетворять соотношениям (1) и (2). Если же матрица T окажется прямоугольной (неквадратной), то соотношения (1) и (2) для матрицы A невозможны, т. е. матрица A не приводится к диагональному виду и, следовательно, не имеет канонического разложения. Этот способ равносилен отысканию невырожденной матрицы T из матричного уравнения

$$AT = T\Lambda.$$

1.16. Евклидовы пространства

Говорят, что в n-мерном действительном линейном пространстве X_n определена **операция скалярного умножения векторов**, если любой паре векторов x и y из X_n поставлено в соответствие действительное число, которое называется **скалярным произведением векторов** x и y и обозначается символом (x, y), и если для любых x, y, z из X_n и любого действительного числа α выполняются следующие **аксиомы**:

1) $(x, y) = (y, x)$,
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

3) $(\alpha x, y) = \alpha \cdot (x, y)$,

4) $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$ и $(x, x) = 0$ при $x = 0$.

Из второй и третьей аксиом следует, что любую конечную линейную комбинацию векторов можно умножать скалярно на другую линейную комбинацию векторов по правилу, аналогичному правилу умножения многочлена на многочлен, т. е. по формуле

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i ; \sum_{j=1}^{l} \beta_j b_j \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \alpha_i \beta_j (a_i b_j) . \qquad (1)$$

Действительное линейное n-мерное пространство, в котором определено скалярное умножение векторов, называют **n-мерным евклидовым пространством** и обозначают через E_n. При любом n действительное n-мерное линейное пространство можно многими способами превратить в евклидово пространство. Если в пространстве X_n фиксирован базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то любые векторы x и y имеют в нем разложения

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i ; \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

и формула (1) для векторов x и y дает

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j) \qquad (2)$$

или в матричном виде

$$(x, y) = x^{\mathrm{T}} \Gamma y , \qquad (3)$$

где положено

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}, \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ g_{n1} & \ldots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \ldots & (e_1, e_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (e_n, e_1) & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

Матрицу Γ называют **матрицей Грама базиса** $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Аналогично определяют матрицу Грама для любой конечной системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Она симметричная, так как $(a_i, a_j) = (a_j, a_i)$. Определитель матрицы Грама любой линейно независимой системы векторов положителен, а линейно зависимой системы векторов равен нулю. Поэтому все главные диагональные миноры матрицы Грама базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ положительны, как определители матриц Грама линейно независимых подсистем системы векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Для задания в линейном пространстве X_n скалярного произведения векторов при фиксированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ нужно в формуле (3) взять в качестве матрицы Γ какую-либо симметричную матрицу порядка n с положительными главными диагональными минорами (*положительно определенную симметричную матрицу*). Например, в линейном пространстве X_4 скалярное произведение произвольных векторов $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$ и $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^{\mathrm{T}}$, заданных координатами в фиксированном базисе e_1, e_2, e_3, e_4, можно ввести по правилу

$$(x, y) = x^{\mathrm{T}} y = (x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4, \tag{4}$$

т. е. полагая в формуле (3) матрицу Γ равной единичной матрице четвертого порядка, а можно и другими способами, например, по формуле

$$(x, y) = x^{\mathrm{T}} \Gamma y = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2 x_2 y_2 -$$

$$- x_2 y_3 - x_3 y_2 + 2 x_3 y_3 - x_3 y_4 - x_4 y_3 + 2 x_4 y_4,$$

т. е. полагая в формуле (3)

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Возможны и другие правила задания в X_4 скалярного произведения векторов. Но каждый раз матрица Γ должна быть симметричной положительно определенной.

Матрица Грама Γ' базиса e' и матрица Грама Γ базиса e связаны соотношением

$$\Gamma' = T^{\mathrm{T}} \Gamma T \,, \tag{5}$$

где T — матрица перехода от базиса e к базису e'.

Длиной $|\, x \,|$ **вектора** x евклидова пространства E_n называют величину

$$|\, x \,| = \sqrt{(x, x)}\,. \tag{6}$$

Нормировать ненулевой вектор x — значит, заменить его вектором

$$x^0 = \frac{x}{|\, x \,|}. \tag{7}$$

Углом между ненулевыми векторами x **и** y евклидова пространства E_n называют угол ϑ, определяемый соотношением

$$\cos \vartheta = \frac{(x, y)}{|\, x \,| \cdot |\, y \,|}, \quad 0 \le \vartheta \le \pi\,. \tag{8}$$

Векторы x и y евклидова пространства называют **ортогональными**, если $(x, y) = 0$. **Система векторов** называется **ортогональной**, если в ней все векторы попарно ортогональны. Система векторов называется **ортонормированной**, если она ортогональна и в ней все векторы нормированы. Всякая ортогональная система ненулевых векторов линейно независимая.

От любой линейно независимой системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ евклидова пространства можно перейти к ортогональной системе ненулевых векторов $b_1, b_2, \ldots, b_k$, состоящей также из k векторов. Такой переход совершается с помощью процесса **ортогонализации Грама–Шмидта**. Он состоит в следующем.

Положим $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + \beta_{21} b_1$ и из условия

$$(b_2, b_1) = (a_2 + \beta_{21} b_1, b_1) = (a_2, b_1) + \beta_{21}(b_1, b_1) = 0$$

найдем коэффициент

$$\beta_{21} = -\frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{(a_2, b_1)}{\left| b_1 \right|^2}.$$

Поэтому

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{\left| b_1 \right|^2} b_1 .$$

Пусть уже построена таким способом система попарно ортогональных векторов $b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$. Тогда положим

$$b_i = a_i + \beta_{i1} b_1 + \beta_{i2} b_2 + \ldots + \beta_{i,\,i-1} b_{i-1} \qquad (9)$$

и из условий

$$(b_i, b_j) = (a_i, b_j) + \beta_{ij}(b_j, b_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, i-1,$$

найдем коэффициенты

$$\beta_{ij} = -\frac{(a_i, b_j)}{(b_j, b_j)} = -\frac{(a_i, b_j)}{\left| b_j \right|^2}, \quad j = 1, 2, \ldots, i-1. \qquad (10)$$

Поэтому равенство (9) примет вид

$$b_i = a_i - \frac{(a_i, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \ldots - \frac{(a_i, b_{i-1})}{(b_{i-1}, b_{i-1})} b_{i-1} =$$

$$= a_i - \frac{(a_i, b_1)}{\left| b_1 \right|^2} b_1 - \ldots - \frac{(a_i, b_{i-1})}{\left| b_{i-1} \right|^2} b_{i-1} . \qquad (11)$$

Так будем продолжать до тех пор, пока не построим систему попарно ортогональных векторов $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Остается заметить, что все векторы $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ненулевые. Действительно, если предположить, что какой-либо вектор

$$b_i = a_i + \beta_{i\,1} b_1 + \beta_{i\,2} b_2 + \ldots + \beta_{i,\,i-1} b_{i-1} = 0,$$

то вектор a_i можно представить в виде линейной комбинации векторов $b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$. Но каждый вектор $b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$ по построению является линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$. Поэтому вектор a_i будет линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, что противоречит линейной независимости векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Итак, в результате процесса ортогонализации линейно независимой системы из k векторов получается ортогональная система, также состоящая из k ненулевых векторов.

Процесс ортогонализации рассчитан на линейно независимые системы векторов. Но этот процесс можно модифицировать так, что станет возможным его применение и к линейно зависимым системам векторов. Если система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависима, то один из векторов a_i является линейной комбинацией предыдущих векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$. В результате процесса ортогонализации на i-м шаге получим нулевой вектор b_i. Мы опускаем этот вектор и начинаем следующий шаг. В результате придем к ортогональной системе векторов $b_1, b_2, \ldots, b_s$, но в этой системе будет меньше векторов, чем в исходной системе $a_1, a_2, \ldots, a_k$, т. е. $s < k$. Число s на самом деле есть ранг системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Пример 1. Применяя процесс ортогонализации и нормирование векторов, ортонормировать систему векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

считая, что в четырехмерном евклидовом пространстве скалярное произведение определено формулой (4).

Решение. Положим $b_1 = a_1 = (1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. В соответствии с формулой (11) находим

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{\left| b_1 \right|^2} b_1 = a_2 - \frac{1}{2} b_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Далее находим b_3:

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{\left| b_1 \right|^2} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{\left| b_2 \right|^2} b_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, вычисляем b_4:

$$b_4 = a_4 - \frac{(a_4, b_1)}{\left| b_1 \right|^2} b_1 - \frac{(a_4, b_2)}{\left| b_2 \right|^2} b_2 - \frac{(a_4, b_3)}{\left| b_3 \right|^2} b_3 =$$

$$= a_4 - 0 \cdot b_1 - 0 \cdot b_2 - \frac{3}{4} b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Нормируя векторы b_1, b_2, b_3, b_4, придем к ортонормированной системе векторов

$$q_1 = \frac{b_1}{|b_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right)^{\mathrm{T}},$$

$$q_2 = \frac{b_2}{|b_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0 \right)^{\mathrm{T}},$$

$$q_3 = \frac{b_3}{|b_3|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\mathrm{T}},$$

$$q_4 = \frac{b_4}{|b_4|} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^{\mathrm{T}}.$$

Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства E_n называют **ортогональным базисом**, если его векторы попарно ортогональны. Если, кроме того, векторы этого базиса имеют единичную длину (т. е. нормированы), то он называется **ортонормированным базисом**. В ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ выполняются условия

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{при} \quad i = j. \end{cases}$$

В любом конечномерном евклидовом пространстве E_n существуют ортогональные и ортонормированные базисы. Для построения таких базисов следует соответственно ортогонализировать (ортонормировать) какую-либо максимальную линейно независимую систему векторов.

Ортогональные (ортонормированные) базисы можно строить, дополняя подходящими векторами данный вектор или данную ортогональную (ортонормированную) систему векторов.

Пример 2. В трехмерном арифметическом пространстве K_3 со скалярным произведением векторов $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $y = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

построить ортонормированный базис, содержащий вектор $e_1 = (1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

Решение. Добавим к вектору e_1 вектор $e_2 = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющий условию $(e_1, e_2) = 0$, которое в координатах имеет вид $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Одним из решений этого уравнения является вектор $e_2 = (2,\ -1,\ -1)^{\mathrm{T}}$. Далее, к векторам e_1 и e_2 добавим вектор $e_3 = (z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющий условиям $(e_3, e_1) = 0$, $(e_3, e_2) = 0$, которые в координатной форме имеют вид $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, $2z_1 - z_2 - z_3 = 0$. Решая однородную систему из этих двух уравнений, получим, например, решение $e_3 = (0,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$. Система векторов e_1, e_2, e_3 является одним из ортогональных базисов в K_3. Нормируя эти векторы, получим в K_3 ортонормированный базис

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

В любом ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства E_n скалярное произведение векторов $x =$

$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$, заданных координатами в этом базисе, определяется формулой

$$
\begin{aligned}
(x, y) &= x^{\mathrm{T}} y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \\
&= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n .
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

В евклидовом пространстве E_n *с базисом* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *можно задать скалярное произведение так, что этот базис будет ортонормированным.*

Для этого скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$, заданных координатами в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, следует определить формулой (12).

Квадратная матрица Q, для которой транспонированная матрица Q^{T} совпадает с обратной матрицей Q^{-1}, называется **ортогональной матрицей.** Квадратная матрица Q является ортогональной, если и только если $Q^{\mathrm{T}} Q = Q Q^{\mathrm{T}} = E$.

Приведем основные свойства ортогональных матриц.

1. ***Квадратная матрица*** Q ***ортогональная тогда и только тогда, когда сумма квадратов всех элементов любого ее столбца (строки) равна единице, а сумма попарных произведений соответствующих элементов двух любых столбцов (строк) равна нулю.***
2. ***Определитель ортогональной матрицы равен*** 1 ***или*** -1.
3. ***Матрица, обратная к ортогональной матрице, тоже ортогональная.***
4. ***Произведение ортогональных матриц является ортогональной матрицей.***

Роль ортогональных матриц в теории евклидовых пространств проясняет следующее утверждение.

В евклидовом пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису является ортогональной. Если матрица перехода от ортонормированного базиса ко второму базису является ортогональной, то этот второй базис тоже ортонормированный.

Пусть E — евклидово пространство, а L — его подпространство. Множество $L^{\perp}$ векторов в E, ортогональных к каждому вектору подпространства L, называют **ортогональным дополнением** к подпространству L.

Ортогональное дополнение $L^{\perp}$ к подпространству L евклидова пространства E является подпространством в E.

Конечномерное евклидово пространство E является прямой суммой любого своего подпространства L и его ортогонального дополнения $L^{\perp}$, т. е. ортогональное дополнение к подпространству является его прямым дополнением.

Если подпространство L в n-мерном евклидовом пространстве E имеет размерность k, то его ортогональное дополнение $L^{\perp}$ имеет размерность $n-k$.

Ортогональным дополнением к подпространству $L^{\perp}$ является подпространство L.

Если L — подпространство в евклидовом пространстве E, то любой вектор $x \in E$ имеет разложение

$$x = x_0 + x^{\perp}, \tag{13}$$

где $x_0 \in L$, $x^{\perp} \in L^{\perp}$.

Вектор x_0 из разложения (13) называют *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство L и обозначают $x_0 = np_L x$, а вектор $x^{\perp}$ называют *ортогональной составляющей* вектора x, или перпендикуляром, опущенным из конца вектора x на подпространство L. Очевидно, что если $x \in L$, то $np_L x = x$ и, наоборот, если $np_L x = x$, то $x \in L$. Отметим, что в представлении (13) вектор $x^{\perp}$ есть ортогональная проекция вектора x на подпространство $L^{\perp}$. Для любого вектора x его ортогональная проекция x_0 на подпространство L и ортогональная составляющая $x^{\perp}$ — единственные.

Длина ортогональной составляющей $x^{\perp}$ вектора x меньше длины любого вектора, опущенного из конца вектора x на подпространство L.

Это утверждение является естественным обобщением известного из курса элементарной геометрии утверждения о том, что перпендикуляр короче любой наклонной, опущенной из той же точки на плоскость.

При отыскании ортогональной проекции вектора x на подпространство $L = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ поступают следующим образом. В разложении $x = x_0 + x^{\perp}$ вектор x_0, как вектор из L, представляют в виде линейной комбинации

$$x_0 = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k \tag{14}$$

векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Тогда равенство $x = x_0 + x^{\perp}$ принимает вид

$$x = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k + x^{\perp}. \tag{15}$$

Для отыскания коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ обе части равенства (15) скалярно умножают последовательно на векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Учитывая, что при этом выполняются равенства $(a_1, x^{\perp}) = (a_2, x^{\perp}) = \ldots = (a_k, x^{\perp}) = 0$, получают систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (a_1, x) = (a_1, a_1) \cdot \alpha_1 + (a_1, a_2) \cdot \alpha_2 + \ldots + (a_1, a_k) \cdot \alpha_k, \\ (a_2, x) = (a_2, a_1) \cdot \alpha_1 + (a_2, a_2) \cdot \alpha_2 + \ldots + (a_2, a_k) \cdot \alpha_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_k, x) = (a_k, a_1) \cdot \alpha_1 + (a_k, a_2) \cdot \alpha_2 + \ldots + (a_k, a_k) \cdot \alpha_k \end{cases} \tag{16}$$

относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Из системы (16) находят какое-либо решение $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ и подставляют его в равенство (14). В результате будет найдена ортогональная проекция $x_0 = np_L x$ вектора x на подпространство L. Вектор $x^{\perp}$ находят как разность $x^{\perp} = x - x_0$.

В матричной форме равенство (14) и система уравнений (16) соответственно записываются в виде

$$x_0 = A\alpha, \tag{17}$$

$$A^* A\alpha = A^* x, \tag{18}$$

где $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ — матрица, столбцами которой являются столбцы координат векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$; вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)^{\mathrm{T}}$ — искомый вектор-столбец высоты k.

Использование систем (16) и (18) указывает на то (см. п. 4.3), что *отыскание коэффициентов* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *для равенства* (14) *равносильно решению методом наименьших квадратов системы* $A\alpha = x$ *с неизвестным столбцом* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)^{\mathrm{T}}$.

Если система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независимая, то в равенстве (18) матрица $A^* A$ невырожденная, так как она представляет собой матрицу Грама линейно независимой системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Поэтому из равенства (18) вектор α определяется соотношением

$$\alpha = (A^* A)^{-1} A^* x.$$

Тогда из равенства (17) получаем

$$x_0 = np_L x = A\alpha = A(A^* A)^{-1} A^* x. \tag{19}$$

1.17. Понятие об унитарном пространстве

Пусть дано комплексное линейное пространство X. Говорят, что в X определена операция ***скалярного умножения векторов,*** если любой паре векторов x и y из X поставлено в соответствие комплексное число, называемое ***скалярным произведением векторов*** x и y и обозначаемое символом (x, y), и если для любых $x, y, z \in X$ и любого комплексного числа α выполняются следующие **аксиомы скалярного произведения**:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
2. $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$,
3. $(\alpha x, y) = \alpha \cdot (x, y)$,
4. $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$ и $(x, x) = 0$ при $x = 0$.

Например, в комплексном арифметическом пространстве, элементами которого являются столбцы высоты n с комплексными компонентами, скалярное произведение можно ввести формулой

$$(x, y) = x^{\mathrm{T}} \overline{y} = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \ldots + x_n \overline{y_n},$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$. Нетрудно проверить, что при таком задании скалярного произведения выполняются все четыре аксиомы.

Комплексное n-мерное линейное пространство, в котором определена операция скалярного умножения векторов, называют **унитарным пространством** и обозначают через U_n.

Из аксиом 1–3 скалярного произведения следует, что

$$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha \cdot (y, x)} = \overline{\alpha}\overline{(y, x)} = \overline{\alpha}(x, y), \qquad (1)$$

$$(x, y + z) = (x, y) + (x, z), \qquad (2)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i ; \sum_{j=1}^{l} \beta_j b_j \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \alpha_i \overline{\beta_j} (a_i, b_j). \qquad (3)$$

Пусть в унитарном пространстве U_n задан базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Любые векторы x и y имеют в этом базисе разложения

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i ; \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

и формула (3) для векторов x и y дает

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j}\, g_{ij} , \tag{4}$$

где $g_{ij} = (e_i, e_j)$. Формулу (4) можно представить в матричной записи

$$(x, y) = x^{\mathrm{T}} \Gamma \overline{y} , \tag{5}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$, а

$$\Gamma = \begin{pmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ g_{n1} & \ldots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \ldots & (e_1, e_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (e_n, e_1) & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

– матрица Грама базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Поскольку $(e_i, e_j) = \overline{(e_j, e_i)}$, матрица Грама Γ удовлетворяет условию

$$\Gamma = \overline{\Gamma}^{\mathrm{T}} = \Gamma^{*} . \tag{6}$$

В силу условия (6) матрица Грама является эрмитовой.

В унитарном пространстве, как и в евклидовом, длину вектора определяют формулой

$$|\, x \,| = \sqrt{(x, x)} .$$

Понятие “угол” между векторами в унитарном пространстве, как правило, не вводят. Рассматривают лишь случай ортогональности векторов. При этом, как и в евклидовом пространстве, ортогональными считают векторы x и y, удовлетворяющие условию $(x, y) = 0$.

Процесс ортогонализации системы векторов, понятия "ортогональный базис" и "ортонормированный базис", "ортогональное дополнение", "ортогональная проекция вектора на подпространство" и вообще многие факты евклидова пространства распространяются на унитарное пространство без изменения определений и общих схем рассуждений. Однако каждый раз следует быть внимательным при применении скалярного произведения, так как в унитарном пространстве скалярное произведение существенно отличается от скалярного произведения в евклидовом пространстве.

В унитарном пространстве в ортонормированном базисе для векторов

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^{\mathrm{T}}$$

формула (4) *принимает вид*

$$(x, y) = x^{\mathrm{T}} \overline{y} = y^* x = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}, \qquad (7)$$

а для скалярного квадрата она превращается в формулу

$$(x, x) = x^{\mathrm{T}} \overline{x} = x^* x = x_1 \overline{x_1} + x_2 \overline{x_2} + \dots + x_n \overline{x_n} =$$

$$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2. \qquad (8)$$

Эти формулы постоянно применяются при решении задач в унитарном пространстве.

Пример 1. Ортонормировать систему векторов

$$a_1 = (1,\ i,\ i)^{\mathrm{T}}, \quad a_2 = (i, i, i)^{\mathrm{T}}, \quad a_3 = (i,\ 0,\ i)^{\mathrm{T}},$$

считая, что векторы заданы координатами в ортонормированном базисе.

Решение. Сначала проведем процесс ортогонализации данной системы векторов. Положим $b_1 = a_1$, $b_2 = \beta_{21} b_1 + a_2$ и найдем β_{21} из условия $(b_2, b_1) = 0$. Так как

$$(b_2, b_1) = (\beta_{21} b_1 + a_2, b_1) = \beta_{21}(b_1, b_1) + (a_2, b_1),$$

то из условия $(b_2, b_1) = 0$ находим, что

$$\beta_{21} = -\frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{i \cdot \overline{1} + i \cdot \overline{i} + i \cdot \overline{i}}{|1|^2 + |i|^2 + |i|^2} = \frac{-2 - i}{3}.$$

Следовательно,

$$b_2 = \frac{-2-i}{3}\begin{pmatrix}1\\ i\\ i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}i\\ i\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2+2i\\ 1+i\\ 1+i\end{pmatrix}.$$

Аналогично находим $b_3 = a_3 - \beta_{31} b_1 - \beta_{32} b_2$, где

$$\beta_{31} = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{i\cdot\overline{1} + 0\cdot\overline{i} + i\cdot\overline{i}}{|1|^2 + |i|^2 + |i|^2} = \frac{-1-i}{3},$$

$$\beta_{32} = -\frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} =$$

$$= -\frac{i\cdot\dfrac{-2-i}{3} + i\cdot\dfrac{1-i}{3}}{\left|\dfrac{-2+2i}{3}\right|^2 + \left|\dfrac{1+i}{3}\right|^2 + \left|\dfrac{1+i}{3}\right|^2} = \frac{-3+i}{4}.$$

Поэтому

$$b_3 = \frac{-1-i}{3}\begin{pmatrix}1\\ i\\ i\end{pmatrix} + \frac{-3+i}{12}\begin{pmatrix}-2+2i\\ 1+i\\ 1+i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}i\\ 0\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ -i\\ i\end{pmatrix}.$$

Система векторов b_1, b_2, b_3 ортогональная. Чтобы получить ортонормированную систему, нормируем каждый вектор этой системы:

$$b_1^0 = \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{b_1}{\sqrt{(b_1, b_1)}} = \frac{b_1}{\sqrt{|1|^2 + |i|^2 + |i|^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\, b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1,\ i,\ i\right)^{\mathrm{T}},$$

$$b_2^0 = \frac{b_2}{|b_2|} = \frac{b_2}{\sqrt{(b_2, b_2)}} =$$

$$= \frac{b_2}{\sqrt{\left|\frac{-2+2i}{3}\right|^2 + \left|\frac{1+i}{3}\right|^2 + \left|\frac{1+i}{3}\right|^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(-2+2i,\ 1+i,\ 1+i\right)^{\mathrm{T}},$$

$$b_3^0 = \frac{b_3}{|b_3|} = \frac{b_3}{\sqrt{(b_3, b_3)}} = \frac{b_3}{\sqrt{\left|\frac{-i}{2}\right|^2 + \left|\frac{i}{2}\right|^2}} =$$

$$= \sqrt{2}\, b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ (0,\ -i,\ i)^{\mathrm{T}}.$$

Пример 2. Убедиться, что система векторов

$$a_1 = (4+3i,\ 4+3i,\ 2)^{\mathrm{T}},\ \ a_2 = (4-3i,\ -4+3i,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

ортогональная и дополнить ее до ортогонального базиса пространства U_3, считая, что векторы a_1, a_2 заданы координатами в ортонормированном базисе.

Решение. Векторы a_1, a_2 ортогональны, так как

$$(a_1, a_2) = (4+3i)(4+3i) + (4+3i)(-4-3i) + 2\cdot 0 = 0.$$

К системе векторов a_1, a_2 добавим вектор $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющий условиям

$$(x, a_1) = x_1(4-3i) + x_2(4-3i) + 2\cdot x_3 = 0,$$

$$(x, a_2) = x_1(4+3i) - x_2(4+3i) = 0.$$

Первое уравнение этой системы умножим на $4+3i$, второе — на $4-3i$. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} 25x_1 + 25x_2 + 2(4+3i)x_3 = 0, \\ 25x_1 - 25x_2 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $x_1 = x_2$. Если сложить первое уравнение со вторым, то придем к уравнению

$$50x_1 + 2(4+3i)x_3 = 0,$$

из которого находим

$$x_1 = -\frac{4+3i}{25}x_3.$$

Выберем $x_3 = -25$. В результате получим $x_1 = x_2 = 4+3i$ и $x = (4+3i, 4+3i, -25)^{\mathrm{T}}$. Итак, одним из ортогональных базисов пространства U_3, содержащим векторы a_1, a_2, является базис, состоящий из векторов a_1, a_2 и x.

Квадратную матрицу Q, обладающую свойством $Q^* = Q^{-1}$, называют **унитарной матрицей**. Квадратная матрица Q унитарная, если и только если выполнены условия

$$Q^*Q = QQ^* = E.$$

Унитарные матрицы являются комплексным аналогом ортогональных матриц и обладают похожими свойствами. Так, столбцы (строки) унитарной матрицы составляют ортонормированную систему, если их рассматривать как элементы комплексного арифметического пространства. Произведение унитарных матриц является унитарной матрицей. Унитарная матрица невырожденная и имеет обратную матрицу, также являющуюся унитарной. Унитарные матрицы, и только они, являются матрицами перехода от ортонормированного базиса унитарного пространства к ортонормированному базису. Отметим, что действительная унитарная матрица является ортогональной.

1.18. Линейные операторы в евклидовом пространстве

Все сказанное о линейных операторах в действительных линейных пространствах сохраняет силу и для линейных операторов в евклидовых пространствах. В то же время наличие в евклидовых пространствах скалярного произведения векторов позволяет выделить важные классы линейных операторов. Обычно здесь рассматривают сопряженные, симметричные (самосопряженные) и ортогональные операторы.

Линейный оператор φ^*, действующий в евклидовом пространстве E_n, называют **сопряженным с оператором** φ, если для любых векторов x и y из E_n выполняется равенство

$$(\varphi x, y) = (x, \varphi^* y). \qquad (1)$$

Замечание. Для линейного оператора φ, действующего из евклидова пространства X в евклидово пространство Y, **сопряженным** называют линейный оператор φ^*, действующий из Y в X, если для любых векторов $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется равенство (1). Такие сопряженные операторы обладают в основном теми же свойствами, что и сопряженные операторы, действующие в евклидовом пространстве E.

Для любого линейного оператора φ, действующего в E_n, сопряженный оператор φ^* существует и является единственным. Операторы φ и φ^* являются **взаимно сопряженными**. Из определения сопряженного оператора φ^* вытекают следующие его свойства:

1. $(\varphi^*)^* = \varphi$;
2. $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;
3. $(\alpha\varphi)^* = \alpha\varphi^*$ при любом действительном числе α;
4. $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$.

Матрицы A и A_1 соответственно операторов φ и φ^* в произвольном базисе e пространства E_n связаны соотношением

$$A_1 = \Gamma^{-1} A^{\mathrm{T}} \Gamma, \qquad (2)$$

где Γ — матрица Грама базиса e. В частности, если базис ортонормированный, то

$$A_1 = A^{\mathrm{T}}, \qquad (2')$$

т. е. в ортонормированном базисе матрицей сопряженного оператора φ^* является транспонированная матрица к матрице оператора φ.

Областью значений сопряженного оператора φ^* является подпространство, ортогональное к ядру оператора φ. Основное свойство сопряженного оператора состоит в следующем:

если некоторое подпространство L инвариантно относительно оператора φ, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ этого подпространства инвариантно относительно сопряженного оператора φ^*.

Характеристические многочлены, а следовательно, и собственные значения сопряженных операторов одинаковы.

Каждый собственный вектор сопряженного оператора φ^* ортогонален ко всем собственным векторам оператора φ, принадлежащим другим собственным значениям.

Для матриц последнее утверждение перефразируется так:

каждый собственный вектор действительной матрицы A^{T} ортогонален ко всем собственным векторам матрицы A, принадлежащим другим собственным значениям.

Линейный оператор φ, действующий в евклидовом пространстве E_n, называется **симметричным** или **самосопряженным**, если он совпадает со своим сопряженным оператором, т. е. если $\varphi = \varphi^*$ или, что то же самое, если для любых векторов x и y из E_n выполняется равенство

$$(\varphi x, y) = (x, \varphi y). \qquad (3)$$

Симметричный оператор в любом ортонормированном базисе евклидова пространства имеет симметричную матрицу. Все корни характеристического многочлена симметричного оператора действительные. Собственные векторы симметричного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Основным свойством симметричного оператора является то, что в евклидовом пространстве существует ортонормиро-

ванный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Это означает, что симметричный оператор является оператором простой структуры, а среди матриц T*, приводящих симметричную матрицу* A *к диагональному виду, т. е. удовлетворяющих соотношению* $T^{-1}AT = \Lambda$*, где* Λ *— диагональная матрица, есть ортогональная матрица или, что то же самое, симметричная матрица* A *обладает каноническим разложением* $A = T\Lambda T^{-1}$*, в котором трансформирующая матрица* T *ортогональна. Правило построения ортогональной трансформирующей матрицы* T *остается таким же, как в случае любых операторов простой структуры* (см. п. 1.15) *с той лишь разницей, что базис из собственных векторов матрицы* A *здесь еще и ортонормируют.*

Симметричный оператор φ называют **неотрицательным (положительно определенным),** если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $(\varphi x, x) \geq 0$ $((\varphi x, x) > 0)$. Неотрицательный и положительно определенный операторы обозначают соответственно через $\varphi \geq 0$ ($\varphi > 0$).

Симметричный оператор является неотрицательным (положительно определенным) тогда и только тогда, когда все его собственные значения неотрицательные (положительные). Для любого неотрицательного симметричного оператора φ существует такой неотрицательный оператор f, что $f^m = \varphi$ при любом натуральном m. Симметричный оператор f, удовлетворяющий условию $f^m = \varphi$, называют **арифметическим корнем** m**-й степени из неотрицательного симметричного оператора** φ**.**

Операторы $\sqrt{\varphi^*\varphi}$ и $\sqrt{\varphi\varphi^*}$ называют соответственно **правым и левым модулями оператора** φ**.**

Примерами неотрицательных симметричных операторов являются операторы $\varphi^*\varphi$ и $\varphi\varphi^*$, где φ — произвольный линейный оператор. Если оператор φ невырожденный, то операторы $\varphi^*\varphi$ и $\varphi\varphi^*$ положительно определенные.

На матричном языке все сказанное здесь перефразируется следующим образом.

Симметричная матрица A называется **неотрицательной (положительно определенной)**, если для любого вектора $x \neq 0$ выполняется условие $(Ax, x) = x^{\mathrm{T}} A x \geq 0$ ($(Ax, x) = x^{\mathrm{T}} A x > 0$). Неотрицательная (положительно определенная) матрица A обозначается через $A \geq 0$ ($A > 0$). Симметричная матрица является неотрицательной (положительно определенной) тогда и только тогда, когда все ее характеристические числа неотрицательные (положительные).

Арифметическим корнем m-й степени из неотрицательной матрицы A называют такую матрицу B, что $B^m = A$. При вычислении арифметического корня $\sqrt[m]{A}$ следует построить каноническое разложение $A = T \Lambda T^{-1}$ и положить $\sqrt[m]{A} = T \sqrt[m]{\Lambda}\, T^{-1}$, где

$$\sqrt[m]{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/m} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{1/m} \end{pmatrix}.$$

Линейный оператор φ, действующий в евклидовом пространстве E_n, называется **ортогональным**, если он сохраняет скалярное произведение любых векторов x и y из E_n, т. е. если выполняется равенство

$$(\varphi x, \varphi y) = (x, y). \tag{4}$$

Полагая в равенстве (4) $x = y$, получаем $|\varphi x|^2 = |x|^2$. Это означает, что ортогональный оператор сохраняет длины векторов.

Поскольку угол между векторами равен

$$\cos\theta = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

(см. формулу (8), п. 1.16) и поскольку числитель и знаменатель в этом соотношении не меняются при действии ортогональных операторов, то ортогональный оператор сохраняет углы между векторами. Из сказанного вытекает, что ортогональные операторы любую ортонормированную систему векторов переводят в ортонормированную систему векторов, а ортонормированный базис — в ортонормированный базис.

Оператор φ^*, сопряженный с ортогональным оператором φ, совпадает с φ^{-1}.

Корни характеристического многочлена ортогонального оператора (в том числе и комплексные) по абсолютной величине равны единице; действительные корни равны ± 1.

Собственные векторы ортогонального оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Ортогональный оператор в любом ортонормированном базисе евклидова пространства E_n имеет ортогональную матрицу. Отсюда следует, что произведение ортогональных операторов снова является ортогональным оператором.

Примерами ортогональных операторов в E_n являются операторы *вращения* и *отражения*.

В ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства E_n вращение на угол α в плоскости векторов e_i и e_j имеет матрицу

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & \cdot & & & & \cdot & & & \\
 & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & & \\
 & & 1 & \cdot & & & & \cdot & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \cos\alpha & \ldots & \ldots & \ldots & -\sin\alpha & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & \cdot & 1 & & & \cdot & & & \\
 & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \\
 & & & \cdot & & & 1 & \cdot & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \sin\alpha & \ldots & \ldots & \ldots & \cos\alpha & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & \cdot & & & & \cdot & 1 & & \\
 & & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot & \\
 & & & \cdot & & & & \cdot & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i\text{ - я строка} \\ \\ \\ \\ j\text{ - я строка} \\ \\ \\ \\
\end{array}, \quad (5)$$

называемую **матрицей простого вращения** или **матрицей Гивенса**.

Матрицы вращений применяются во многих вычислительных процессах. Особенно часто они используются при упрощении матриц. Для примера приведем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

с помощью вращений к треугольному виду. Сначала получим в матрице A нуль на месте элемента a_{21}. Замечаем, что после умножения матрицы A слева на матрицу

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

элементом матрицы $A_1 = T_1 A$ в позиции $(2, 1)$ будет $2\sin\alpha + {}$ $+ 2\cos\alpha$. Из равенства нулю этого элемента находим $\operatorname{tg}\alpha = -1$. Поэтому

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $A_1 = T_1 A =$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем теперь матрицу

$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Как в предыдущем случае, из равенства нулю элемента матрицы $A_2 = T_2 A_1$ в позиции $(3,1)$, т. е. из равенства $\frac{4}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \cos\alpha = 0$, найдем

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4},\ \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3},\quad \sin\alpha = -\frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

и $A_2 = T_2 A_1 = T_2 T_1 A =$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.
$$

Наконец, возьмем матрицу

$$
T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}
$$

и из равенства нулю элемента матрицы $A_3 = T_3 A_2$ в позиции $(3, 2)$, т. е. из равенства $\frac{2}{\sqrt{2}} \sin\alpha + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos\alpha = 0$, найдем

$$
\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}, \ \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}.
$$

Поэтому

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{3}{\sqrt{13}} & \dfrac{2}{\sqrt{13}} \\ 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{13}} & \dfrac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}.$$

и

$$A_3 = T_3 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{3}{\sqrt{13}} & \dfrac{2}{\sqrt{13}} \\ 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{13}} & \dfrac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{2}} & -\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & -\dfrac{5}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & \dfrac{26}{3\sqrt{26}} & -\dfrac{19}{\sqrt{26}} \\ 0 & 0 & -\dfrac{9}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} = R.$$

Матрица $A_3 = R$ уже является матрицей нужного вида.

Отражением называют оператор, переводящий каждый вектор пространства E_n в симметричный ему вектор относительно $(n-1)$-мерной плоскости. При этом обязательно есть векторы, которые меняют лишь направление на противоположное. Такие векторы являются **определяющими векторами** данного отражения. Они коллинеарны разности любого вектора и его образа. Если выбрать в E_n ортонормированный базис $e_1^0, e_2^0, \ldots, e_n^0$ такой, что e_k^0 является одним из определяющих векторов отражения, то матрица отражения в этом базисе (см. п. 1.12) будет иметь вид

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & -1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ k\text{ - я строка.} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ k\text{ - й столбец} \end{array} \tag{6}$$

Можно убедиться (см. [3], с. 152), что в любом ортонормированном базисе e евклидова пространства E_n матрицу отражения можно представить в виде

$$H = E - 2\frac{v\,v^{\mathrm{T}}}{|v|^2}, \tag{7}$$

где v — столбец координат определяющего вектора рассматриваемого отражения в базисе e.

Отражение с матрицей (7) в иностранной литературе называют также **преобразованием Хаусхолдера**. Матрица (7) является симметричной и ортогональной, т. е. удовлетворяет условиям $H = H^{\mathrm{T}} = H^{-1}$.

Отражения особенно часто применяют для упрощения матриц, а именно: при приведении их к треугольному виду, почти треугольному виду, к двух- и трехдиагональной форме и т. п. Для примера приведем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 2 & -10 & 5 \\ 1 & -15 & 10 \end{pmatrix}$$

с помощью отражений к треугольному виду.

Чтобы получить нули ниже главной диагонали в первом столбце матрицы A, естественно, поскольку отражение не изменяет длин векторов, отобразить вектор $x = (2, 2, 1)^{\mathrm{T}}$ в вектор $x' = (\,|x|,\ 0,\ 0\,)^{\mathrm{T}}$ или в вектор $x' = (-|x|,\ 0,\ 0\,)^{\mathrm{T}}$. Примем за x' вектор $x' = (-|x|,\ 0,\ 0\,)^{\mathrm{T}} = (-3,\ 0,\ 0\,)^{\mathrm{T}}$. Тогда определяющим отражение вектором будет вектор

$$v = x - x' = (5,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

Составим матрицу $H_1 = E - 2\dfrac{v\,v^{\mathrm{T}}}{|v|^2} =$

$$= E - \frac{2}{30}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(5, 2, 1) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{pmatrix},$$

вложим ее в правый нижний угол единичной матрицы третьего порядка, т. е. составим матрицу $U_1 = H_1$ (матрица U_1 совпала с матрицей H_1, потому что в качестве вектора x взят весь первый столбец матрицы A) и найдем матрицу $A_1 = U_1\,A =$

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 2 & -10 & 5 \\ 1 & -15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -10 \\ 0 & -12 & -1 \\ 0 & -16 & 7 \end{pmatrix}.$$

Чтобы в матрице A_1 получить нули ниже главной диагонали во втором столбце, отобразим вектор $x = (-12, -16\,)^{\mathrm{T}}$ в вектор $x' = (-|x|,\ 0\,)^{\mathrm{T}} = (-20,\ 0\,)^{\mathrm{T}}$. Тогда определяющим отображение вектором будет вектор

$$v = x - x' = (8,\ -16\,)^{\mathrm{T}}.$$

Составим матрицу $H_2 = E - 2\dfrac{v\,v^{\mathrm{T}}}{|v|^2} =$

$$= E - \frac{2}{320}\begin{pmatrix} 8 \\ -16 \end{pmatrix}(8, -16) = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 24 & 32 \\ 32 & -24 \end{pmatrix},$$

вложим ее в правый нижний угол единичной матрицы третьего порядка, т. е. составим матрицу

$$U_2 = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 32 \\ 0 & 32 & -24 \end{pmatrix}$$

и найдем матрицу $A_2 = U_2 A_1 =$

$$= \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 32 \\ 0 & 32 & -24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -10 \\ 0 & -12 & -1 \\ 0 & -16 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -10 \\ 0 & -20 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица A_2 уже нужного вида — треугольная.

Если бы на первом шаге за вектор x' приняли

$$x' = (+|x|,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}} = (3,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}},$$

то в качестве вектора, определяющего отражение, имели бы вектор

$$v = x - x' = (2,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}} - (3,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}} = (-1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$$

и получили бы матрицу отражения $U_1 = H_1 =$

$$= E - 2\frac{v\,v^{\mathrm{T}}}{|v|^2} = E - \frac{2}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(-1, 2, 1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда имели бы уже матрицу $A_1 = U_1 A =$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 2 & -10 & 5 \\ 1 & -15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 10 \\ 0 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

нужного вида. Этот пример показывает, что ***при выборе знака у первой координаты вектора-образа***

$$x' = (\ \pm \left|x\right|,\ 0, \ldots,\ 0\ )^{\mathrm{T}}$$

целесообразно брать знак, совпадающий со знаком первой координаты вектора-прообраза

$$x\ =\ (\ x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n\ )^{\mathrm{T}}.$$

Если отражение применяется к векторам-строкам, то соотношение (7) перепишется в виде

$$H\ =\ E\ -\ 2\,\frac{v^{\mathrm{T}}\,v}{\left|v\right|^2}.$$

Если отражения применяются к строкам матрицы, то ее умножают на соответствующие матрицы H справа.

Часто при упрощении матриц приходится применять отражения к ее столбцам и строкам либо одновременно, либо последовательно. Например, при приведении симметричной матрицы

$$A\ =\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

с помощью отражений к подобной матрице трехдиагонального вида нужно получить нули на месте элементов $a_{31} = a_{13} = 4$. Для этого положим

$$x = (\ 3, 4\ )^{\mathrm{T}}, \qquad x' = (-\left|x\right|, 0\ )^{\mathrm{T}} = (-\,5, 0\ )^{\mathrm{T}},$$

$$v = x\ -\ x' = (\ 8,\ 4\ )^{\mathrm{T}},$$

и построим матрицу $H_1\ =$

$$=\ E\ -\ 2\,\frac{v\,v^{\mathrm{T}}}{\left|v\right|^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}(\,8\,,\ 4\,)\ =\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

вложим ее в правый нижний угол единичной матрицы третьего порядка, т. е. составим матрицу

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -\dfrac{3}{5} & -\dfrac{4}{5} \\ -\dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5} \end{matrix}} \end{pmatrix},$$

и найдем матрицу

$$A_1 = U_1\, A\, U_1^{-1} = U_1\, A\, U_1' = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & -125 & 0 \\ -125 & 49 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A_1 уже нужного вида — трехдиагональная и подобная исходной матрице A.

Здесь мы применили одно и то же отражение одновременно к первому столбцу и первой строке матрицы A и получили трехдиагональную матрицу

$$A_1 = U_1\, A\, U_1^{-1} = U_1\, A\, U_1',$$

подобную данной. Так поступают и при приведении произвольной квадратной матрицы A к подобной матрице почти треугольного вида (см. [3], с. 182–184).

В заключение заметим, что любой линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве, разлагается в произведение симметричного и ортогонального операторов.

1.19. Линейные операторы в унитарном пространстве

Все сказанное о линейных операторах в комплексном линейном пространстве сохраняет силу и для линейных операторов в унитарных пространствах. В то же время наличие в унитарных пространствах скалярного произведения векторов позволяет выделить важные классы линейных операторов. Обычно здесь рассматривают сопряженные, самосопряженные (эрмитовы), унитарные и нормальные операторы.

Линейный оператор φ^*, действующий в унитарном пространстве U_n, называют **сопряженным с линейным операто-**

ром φ, если для любых векторов x и y из U_n выполняется равенство

$$(\varphi x, y) = (x, \varphi^* y). \tag{1}$$

Замечание, сделанное в п. 1.18 к определению сопряженного оператора в евклидовом пространстве, здесь также сохраняет силу.

Для любого линейного оператора φ, действующего в унитарном пространстве, сопряженный оператор φ^* существует и единственный. Операторы φ и φ^* являются взаимно сопряженными операторами. Из определения сопряженного оператора вытекают следующие его *свойства*:

1) $(\varphi^*)^* = \varphi$;

2) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;

3) $(\alpha\varphi)^* = \bar{\alpha}\varphi^*$ при любом комплексном числе α;

4) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$.

Матрицы A и A_1 соответственно операторов φ и φ^* в произвольном базисе e унитарного пространства U_n связаны соотношением

$$\overline{A_1} = \overline{\Gamma}^{-1} A^{\mathrm{T}} \Gamma, \tag{2}$$

где Γ — матрица Грама базиса e. В частности, если базис ортонормированный, то

$$A_1 = \overline{A}^{\mathrm{T}} = A^*, \tag{2$'$}$$

т. е. в ортонормированном базисе матрицей сопряженного оператора φ^* является матрица, сопряженная к матрице оператора φ.

Собственные значения сопряженных операторов являются комплексно сопряженными числами. Область значений сопряженного оператора φ^* является подпространством, ортогональным к ядру оператора φ.

Основное свойство сопряженного оператора состоит в следующем.

Если некоторое подпространство L инвариантно относительно оператора φ, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ этого подпространства инвариантно относительно сопряженного оператора φ^{*}.

Линейный оператор φ, действующий в унитарном пространстве, называют **самосопряженным,** или **эрмитовым**, если он совпадает со своим сопряженным оператором, т. е. если $\varphi = \varphi^{*}$, или, что то же самое, для любых векторов x и y

$$(\varphi x, y) = (x, \varphi y).$$

Если φ — самосопряженный оператор, то при любом векторе x скалярное произведение $(\varphi x, x)$ является действительным числом. Матрицей самосопряженного оператора в ортонормированном базисе является эрмитова матрица, т. е. матрица $A = \overline{A}^{\mathrm{T}} = A^{*}$. Все собственные значения самосопряженного оператора являются действительными числами. Собственные векторы самосопряженного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Для любого самосопряженного оператора, действующего в унитарном пространстве, существует в этом пространстве одномерное инвариантное подпространство. Если L — инвариантное подпространство относительно самосопряженного оператора φ, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ этого подпространства также инвариантно относительно φ.

Основным свойством самосопряженного оператора является то, что в унитарном пространстве существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Это означает, что самосопряженный оператор является оператором простой структуры, а среди матриц T, приводящих эрмитову матрицу A к действительной диагональной матрице Λ*, т. е. удовлетворяющих соотношению* $T^{-1} A T = \Lambda$*, есть унитарная матрица или, что то же самое,* *эрмитова матрица A обладает каноническим разложением $A = T\Lambda T^{-1}$ с унитарной трансформирующей матрицей T.*

Правило построения унитарной матрицы T остается таким же, как в случае симметричных матриц (см. п. 1.18).

Действительный эрмитов оператор является симметричным (см. п. 1.18).

Эрмитов оператор φ называют **неотрицательным (положительно определенным)**, если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $(\varphi x, x) \geq 0$ ($(\varphi x, x) > 0$). Неотрицательный и положительно определенный операторы обозначают соответственно через $\varphi \geq 0$ ($\varphi > 0$). Эрмитов оператор является неотрицательным (положительно определенным) тогда и только тогда, когда все его собственные значения неотрицательные (положительные). Для любого неотрицательного эрмитова оператора φ существует такой неотрицательный эрмитов оператор f, что $f^m = \varphi$. Эрмитов оператор f, удовлетворяющий условию $f^m = \varphi$, называют **арифметическим корнем m-й степени из оператора φ**.

Примерами неотрицательных эрмитовых операторов являются операторы $\varphi^* \varphi$ и $\varphi \varphi^*$, где φ — произвольный оператор. Если φ — невырожденный оператор, то операторы $\varphi^* \varphi$ и $\varphi \varphi^*$ положительно определенные. Операторы $\sqrt{\varphi^* \varphi}$ и $\sqrt{\varphi \varphi^*}$ называют соответственно **правым и левым модулями оператора φ.**

На матричном языке все сказанное здесь перефразируется следующим образом.

Эрмитова матрица A называется **неотрицательной (положительно определенной),** если для любого вектора $x \neq 0$ выполняется условие $(Ax, x) = x^* A x \geq 0$ ($(Ax, x) = x^* A x > 0$). Неотрицательная (положительно определенная) матрица A обозначается через $A \geq 0$ ($A > 0$). Эрмитова матрица неотрицательна (положительно определенная) тогда и только тогда, когда все ее характеристические числа неотрицательные (положительные).

Арифметическим корнем m-й степени из неотрицательной эрмитовой матрицы A называют такую матрицу B, что $B^m = A$. При вычислении $\sqrt[m]{A}$ следует построить каноническое разложение $A = T\Lambda T^{-1}$ матрицы A и положить

$$\sqrt[m]{A} = T \sqrt[m]{\Lambda}\, T^{-1},$$

где

$$\sqrt[m]{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/m} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{1/m} \end{pmatrix}.$$

Линейный оператор φ, действующий в унитарном пространстве, называют **унитарным**, если он не изменяет скалярного произведения векторов, т. е. если для любых векторов x, y

$$(\varphi x, \varphi y) = (x, y).$$

Отсюда следует, что унитарный оператор сохраняет длины векторов. Унитарный оператор любую ортонормированную систему векторов переводит в ортонормированную систему векторов, ортонормированный базис — в ортонормированный базис.

Линейный оператор φ тогда и только тогда является унитарным, когда

$$\varphi^* \varphi = \varphi \varphi^* = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что унитарный оператор φ невырожденный и $\varphi^* = \varphi^{-1}$.

Действительный унитарный оператор является ортогональным (см. п. 1.18).

Собственные значения унитарного оператора по модулю равны единице; собственные векторы унитарного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны. В ортонормированном базисе пространства матрицей унитарного оператора является унитарная матрица, и, обратно, если в ортонормированном базисе оператор имеет унитарную матрицу, то этот оператор унитарный. Произведение унитарных операторов является унитарным оператором.

Основное свойство унитарного оператора состоит в том, что в унитарном пространстве, в котором он действует, есть ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Это означает, что унитарный оператор является оператором простой структуры, а среди матриц, приводящих унитарную матрицу к диагональному виду с диагональными элементами, равными по модулю единице, есть унитарная матрица или, что то же самое, унитарная матрица обладает каноническим разложением с унитарной трансформирующей матрицей и диагональной матрицей с диагональными элементами, по модулю равными единице.

Схема построения унитарной трансформирующей матрицы остается такой же, как в случае любого оператора простой структуры (см. п. 1.15) с той лишь разницей, что базис из собственных векторов исходной матрицы здесь еще ортонормируют.

В приложениях наиболее часто используют **элементарные унитарные матрицы**

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \cdot & & & & \cdot & & & \\ & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & & \\ & & 1 & \cdot & & & & \cdot & & & \\ . & . & . & \cos\theta & . & . & . & -e^{i\psi}\sin\theta & . & . & . \\ & & & \cdot & 1 & & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & & 1 & \cdot & & & \\ . & . & . & e^{-i\psi}\sin\theta & . & . & . & \cos\theta & . & . & . \\ & & & \cdot & & & & \cdot & 1 & & \\ & & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot & \\ & & & \cdot & & & & \cdot & & & 1 \end{pmatrix},$$

являющиеся обобщением матриц вращений в плоскости евклидова пространства, и матрицы отражения, определяемые, как в евклидовом пространстве, равенством

$$H = E - 2\frac{v\,v^*}{\left|v\right|^2},$$

где v — столбец координат определяющего вектора отражения.

Матрица отражения H не только унитарная, но и эрмитова, т. е. удовлетворяет условиям $H = H^{-1} = H^*$.

Матрицы T_{ij} и H применяются так же, как матрицы вращений и отражений в евклидовом пространстве. Например, чтобы с помощью отражения обратить в нуль вторую и третью координаты вектора $x = (0, 3i, 4i)^{\mathrm{T}}$, найдем $\left|x\right| = 5$ и положим $x' = (5, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $v = x - x' = (-5,\ 3i,\ 4i)^{\mathrm{T}}$. Далее найдем $\left|v\right|^2 = 50$, составим матрицу отражения

$$H = E - \frac{2}{50}\begin{pmatrix} -5 \\ 3i \\ 4i \end{pmatrix}(-5, -3i, -4i) =$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & -15i & -20i \\ 15i & 16 & -12 \\ 20i & -12 & 9 \end{pmatrix},$$

и подсчитываем $x' = H\,x =$

$$= \begin{pmatrix} -5 \\ 3i \\ 4i \end{pmatrix} \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & -15i & -20i \\ 15i & 16 & -12 \\ 20i & -12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3i \\ 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Важнейшим свойством унитарных и эрмитовых операторов является то, что любой линейный оператор разлагается в произведение эрмитова и унитарного операторов.

Такое утверждение имеет место и для матриц.

Линейный оператор φ называют **нормальным**, если он перестановочен со своим сопряженным, т. е. если $\varphi^* \varphi = \varphi \varphi^*$.

В ортонормированном базисе матрицей нормального оператора является матрица A, перестановочная со своей сопряженной матрицей A^*, т. е. удовлетворяющая условию $A A^* = A^* A$. Такие матрицы называют **нормальными**.

Основным свойством нормального оператора, действующего в унитарном пространстве, является то, что в этом пространстве существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Верно и обратное утверждение, т. е. если в унитарном пространстве существует базис, состоящий из собственных векторов оператора, то этот оператор нормальный.

Если оператор φ — нормальный, то всякая ортонормированная система собственных векторов оператора φ является *ортонормированной системой собственных векторов оператора* φ^*, и наоборот.

Если оператор φ — нормальный, то собственные значения операторов φ и φ^*, соответствующие общему собственному вектору, *комплексно сопряжены*.

Примерами нормальных операторов являются эрмитовы и унитарные операторы.

*Из сказанного следует, что нормальный оператор является оператором **простой структуры**. На матричном языке это означает, что нормальная матрица приводится к диагональному виду. Причем среди матриц, приводящих нормальную матрицу к диагональному виду, есть унитарная матрица. Это можно перефразировать так: нормальная матрица обладает каноническим разложением с унитарной трансформирующей матрицей.*

Правило построения унитарной трансформирующей матрицы остается таким же, как в случае симметричных матриц (см. п. 1.18). Примерами нормальных матриц являются эрмитова и унитарная матрицы.

1.20. Нормы векторов и матриц

Пусть дано действительное (комплексное) линейное пространство X. Каждому вектору $x \in X$ поставим в соответствие действительное число $\| x \|$ и назовем его нормой вектора x, если для любых векторов $x,\ y \in X$ и любого действительного (комплексного) числа α выполняются следующие аксиомы нормы:

1. $\| x \| > 0$ при $x \neq 0$ и $\| x \| = 0$ при $x = 0$.
2. $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$.
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Линейное пространство X при этом называется **нормированным пространством.**

В арифметическом пространстве K_n наиболее употребительными являются:

1) ***октаэдрическая норма***

$$\| x \|_1 = \sum_{k=1}^{n} | x_k | ;$$

2) ***евклидова***, или ***сферическая, норма***

$$\| x \|_2 = \| x \|_E = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} | x_k |^2} ;$$

3) ***кубическая норма***

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} | x_k |.$$

Норму можно ввести в любом конечномерном пространстве. Если пространство евклидово (унитарное), то в нем можно ввести евклидову норму по формуле

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)} = \| x \|_2 .$$

Как правило, такая норма подразумевается в евклидовом (унитарном) пространстве и поэтому евклидовы (унитарные) пространства относят к нормированным пространствам.

В линейном пространстве $(m \times n)$-матриц также рассматривают различные нормы. Наиболее употребительными матричными нормами являются:

1. $\| A \| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |.$

2. $\| A \|_1 = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} |.$

3. $\| A \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{m} | a_{ij} |.$

4. $\| A \|_E = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 \right)^{1/2}.$

Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

указанные нормы имеют следующие значения:

$\| A \| = 1 + 2 + \ldots + 12 = 78;$

$\| A \|_1 = \max \{ 1 + 4 + 7 + 10,\ 2 + 5 + 8 + 11,\ 3 + 6 + 9 + 12 \} = 30;$

$\| A \|_\infty = \max \{ 1 + 2 + 3,\ 4 + 5 + 6,\ 7 + 8 + 9,\ 10 + 11 + 12 \} = 33;$

$\| A \|_E = \sqrt{1^2 + 2^2 + \ldots + 12^2} = \sqrt{650}.$

В линейном пространстве квадратных матриц порядка n кроме линейных операций важную роль играет операция умножения матриц. В связи с этим в этом линейном пространстве предпочтение отдают нормам, согласованным с операцией умножения, а именно:

$$\| A\,B \| \le \| A \| \cdot \| B \| \ .$$

При этом норму матриц, не подчиняющуюся этому неравенству, иногда называют **обобщенной нормой матриц**.

Каждую $(m \times n)$-матрицу A можно интерпретировать как оператор, действующий из n-мерного арифметического пространства K_n в m-мерное арифметическое пространство K_m по формуле $y = A\,x$, $x \in K_n$, $y \in K_m$. Если в K_n и K_m введены нормы, то желательно рассматривать ***норму матриц*** размера $m \times n$, ***согласованную с векторными нормами*** в K_n и K_m :

$$\| A\,x \| \le \| A \| \cdot \| x \| .$$

(Отметим, что это неравенство связывает сразу три нормы в трех разных линейных пространствах: в K_n, в K_m и в линейном пространстве $(m \times n)$-матриц.)

Примером такой нормы является ***матричная норма, индуцированная векторной нормой*** (или ***подчиненная векторной норме***):

$$\| A \| = \sup_{x \ne 0} \frac{\| A\,x \|}{\| x \|} = \sup_{x \le 1} \| A\,x \| = \sup_{x = 1} \| A\,x \| \ .$$

Приведем примеры норм, индуцированных различными векторными нормами.

1. Для октаэдрической векторной нормы $\| x \|_1$ индуцированной является матричная норма $\| A \|_1$.
2. Для сферической векторной нормы $\| x \|_2$ индуцированной является спектральная норма

$$\| A \|_C = \sqrt{\max \{ |\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_r| \}} = \sqrt{\max \lambda_{A^* A}} \ ,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — собственные числа матрицы $A^* A$.

3. Для кубической векторной нормы $\| x \|_{\infty}$ индуцированной матричной нормой является норма $\| A \|_{\infty}$.

Между различными матричными нормами существуют определенные соотношения. Особенно много таких соотношений приведено в [36].

1.21. Последовательности матриц и степенные матричные ряды

Пусть дана последовательность $(m \times n)$-матриц

$$A_k = (a_{ij}^{(k)}), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Пределом последовательности (1) **матриц** A_k называют матрицу

$$A = \lim_{k \to \infty} A_k = \lim_{k \to \infty} (a_{ij}^{(k)}),$$

а саму последовательность (1) матриц A_k, имеющую предел, называют **сходящейся**. Сходимость последовательности матриц, по определению, равносильна их поэлементной сходимости.

Теорема 1. *Для сходимости последовательности* (1) *матриц* A_k (см. [14]) *необходимо и достаточно, чтобы при какой-либо матричной норме* $\| \cdot \|$ *выполнялось соотношение*

$$\| A - A_k \| \to 0 \text{ при } k \to \infty . \tag{2}$$

При этом

$$\lim_{k \to \infty} \| A_k \| = \| A \| . \tag{3}$$

Доказательство. Если $A_k \to A = (a_{ij})$, то

$$\left| a_{ij} - a_{ij}^{(k)} \right| < \varepsilon \text{ при } k > N(\varepsilon) .$$

Отсюда следует, что матрица $\left| A - A_k \right|$, составленная из модулей $\left| a_{ij} - a_{ij}^{(k)} \right|$, удовлетворяет неравенству

$$\left| A - A_k \right| < \varepsilon \cdot J,$$

где J — $(m \times n)$-матрица, каждый элемент которой равен единице. Поэтому

$$\lim_{k \to \infty} \left\| A - A_k \right\| = 0.$$

Обратно, пусть выполняется условие (2). Тогда при $k > N(\varepsilon)$ будут выполняться соотношения

$$\left| a_{ij} - a_{ij}^{(k)} \right| \le \left\| A - A_k \right\| < \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{k \to \infty} A_k = A.$$

Остается заметить, что при $A_k \to A$ выполняется соотношение

$$\left| \left\| A \right\| - \left\| A_k \right\| \right| \le \left\| A - A_k \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поэтому

$$\lim_{k \to \infty} \left\| A_k \right\| = \left\| A \right\|.$$

Следствие. *Последовательность* (1) *матриц* A_k *сходится к нулевой матрице тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{k \to \infty} \left\| A_k \right\| = 0.$$

Для степенных матричных рядов (см. [12], [14], [23]) имеет место следующее, удобное в применении, утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция* $f(\lambda)$ *разлагается в степенной ряд*

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k \tag{4}$$

с кругом сходимости $|\lambda| < r$. *Тогда для любой квадратной матрицы* A, *все характеристические числа которой лежат в круге* $|\lambda| < r$, *матрица* $f(A)$ *существует и разлагается в степенной ряд*

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k . \tag{5}$$

Доказательство. Пусть все характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A лежат в круге $|\lambda| < r$ и для удобства предположим, что матрица A диагонализуема, а потому имеет каноническое разложение

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1}. \tag{6}$$

К таким матрицам относятся, в частности, симметричные, эрмитовы и нормальные матрицы. Введем обозначения

$$F_N(A) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k A^k , \; f_N(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \lambda^k ,$$

$$f(\lambda) = \lim_{N \to \infty} f_N(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$$

и выпишем следующую цепочку соотношений:

$$F_N(A) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \left\{ T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1} \right\}^k =$$

$$= T \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \right\} \cdot T^{-1} =$$

$$
= T \cdot \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_1 \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_n \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot T^{-1} =
$$

$$
= T \cdot \begin{pmatrix} f_N(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_N(\lambda_n) \end{pmatrix} \cdot T^{-1}. \qquad (7)
$$

По условию все характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ лежат в круге $|\lambda| < r$ сходимости ряда (4). Поэтому существуют конечные пределы

$$
\lim_{N \to \infty} f_N(\lambda_i) = f(\lambda_i) \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, n.
$$

Следовательно, переходя к пределу при $N \to \infty$ в соотношении (7), получим

$$
f(A) = \lim_{N \to \infty} F_N(A) = T \cdot \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \cdot T^{-1}. \qquad (8)
$$

Это доказывает сходимость матричного ряда (5) в рассматриваемой ситуации.

В общем случае утверждение теоремы 2 легко доказывается (см. [12, с. 115–118], [23, с. 170–173]) с помощью применения спектрального разложения матрицы $f(A)$.

Формула (8) представляет собой каноническое разложение матрицы $f(A)$, а числа $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, $\ldots$, $f(\lambda_n)$ являются характеристическими числами этой матрицы, если матрица A диагонализуема.

В качестве примеров применения теоремы 2 заметим, что функции $(1-\lambda)^{-1}$ и $(1+\lambda)^{-1}$ разлагаются соответственно в ряды

$$(1-\lambda)^{-1} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \ldots$$

и

$$(1+\lambda)^{-1} = 1 - \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \ldots$$

с кругом сходимости $|\lambda| < 1$. Поэтому для любой квадратной матрицы A, все характеристические числа которой лежат в круге $|\lambda| < 1$, матрицы $(E-A)^{-1}$ и $(E+A)^{-1}$ существуют и разлагаются соответственно в степенные ряды

$$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots \tag{9}$$

и

$$(E+A)^{-1} = E - A + A^2 - A^3 + \ldots . \tag{10}$$

Из теоремы 2 вытекают также следующие разложения при любой квадратной матрице A:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k, \quad \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k},$$

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}, \tag{11}$$

$$\operatorname{ch} A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!}, \qquad \operatorname{sh} A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Глава 2
Основные мультипликативные разложения матриц

2.1. Разложение квадратной матрицы на треугольные множители

Представление квадратной матрицы A n-го порядка в виде произведения $A = LU$ левой нижней треугольной матрицы L с диагональными элементами, равными единице, на правую верхнюю треугольную матрицу U с ненулевыми диагональными элементами, т. е. представление вида

$$A = L\,U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{n\,n-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

с ненулевыми элементами $u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}$, называют LU-разложением матрицы A.

Часто под LU-разложением матрицы A понимают ее представление в виде произведения $A = LU$ левой нижней треугольной матрицы L с ненулевыми диагональными элементами на правую верхнюю треугольную матрицу U с диагональными элементами, равными единице. Очевидно, что нет существенной разницы в этих двух определениях LU-разложения матрицы. Мы будем придерживаться случая, когда в матрице L диагональные элементы равны единице.

Теорема 1. *Любую квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ n-го порядка, у которой все угловые диагональные миноры*

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \dots, \quad \Delta_n = |\,A\,|$$

отличны от нуля, можно представить, причем единственным образом, в виде LU-разложения $A = LU$.

Доказательство. Возможность представления квадратных матриц в виде LU-разложения докажем индукцией по порядку матриц. Для этого проверим сначала возможность такого представления для матриц второго порядка. Будем строить разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

в виде

$$A = L\,U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix},$$

где $l_{21}, u_{11}, u_{12}, u_{22}$ — пока неизвестные числа. Для их определения в правой части последнего равенства проведем умножение матриц и сравним элементы полученной при этом матрицы

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{11} + u_{22} \end{pmatrix}$$

с соответствующими элементами матрицы A. Тогда придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} u_{11} &= a_{11}, & u_{12} &= a_{12}, \\ l_{21}u_{11} &= a_{21}, & l_{21}u_{12} + u_{22} &= a_{22}. \end{aligned}$$

Из этой системы находим единственное решение

$$\begin{aligned} u_{11} &= a_{11}, & u_{12} &= a_{12}, \\ l_{21} &= \frac{a_{21}}{a_{11}}, & u_{22} &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}. \end{aligned}$$

Причем u_{11} и u_{22} отличны от нуля, поскольку по условию

$$\Delta_1 = a_{11} \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

не равны нулю.

Таким образом, возможность представления матриц второго порядка в виде LU-разложения установлена.

Предположим теперь, что возможность представления в виде LU-разложения для матриц $(k-1)$-го порядка доказана, и докажем возможность такого представления для матриц k-го порядка. Представим матрицу $A=(a_{ij})$ k-го порядка в блочном виде

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{k-1} & a \\ \hline b & a_{kk} \end{array}\right),$$

где

$$A_{k-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,\,k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,\,k-1} \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} a_{1,\boldsymbol{k}} \\ \dots \\ a_{\boldsymbol{k}-1,\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}, \quad b = (\,a_{\boldsymbol{k}1} \;\; \dots \;\; a_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}-1}\,).$$

По индуктивному предположению, существует LU-разложение

$$A_{\boldsymbol{k}-1} = L_{\boldsymbol{k}-1} \cdot U_{\boldsymbol{k}-1}$$

матрицы $A_{\boldsymbol{k}-1}$ с матрицами $L_{\boldsymbol{k}-1}$ и $U_{\boldsymbol{k}-1}$ указанных в теореме свойств.

Будем искать разложение матрицы $\boldsymbol{A}$ в виде

$$A = \left(\begin{array}{c|c} L_{\boldsymbol{k}-1} & 0 \\ \hline l & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} U_{\boldsymbol{k}-1} & u \\ \hline 0 & u_{kk} \end{array}\right), \qquad (2)$$

где $l = (\,l_{\boldsymbol{k}1}, l_{\boldsymbol{k}2}, \dots, l_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}-1}\,)$,

$u = (\,u_{1\boldsymbol{k}}, u_{2\boldsymbol{k}}, \dots, u_{\boldsymbol{k}-1,\boldsymbol{k}}\,)^{\mathrm{T}}$ — неизвестные пока векторы. Для определения векторов l, u и элемента $u_{\boldsymbol{kk}}$ в правой части равенства (2) проведем умножение блочных матриц и сравним блоки полученной при этом матрицы

$$\left(\begin{array}{c|c} L_{k-1}\cdot U_{k-1} & L_{k-1}\cdot u \\ \hline l\cdot U_{k-1} & lu+u_{kk} \end{array}\right)$$

с соответствующими блоками матрицы A. Тогда придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} L_{k-1}\cdot u &= a, \\ l\cdot U_{k-1} &= b, \\ lu+u_{kk} &= a_{kk}. \end{aligned} \qquad (3)$$

По предположению индукции матрицы L_{k-1} и U_{k-1} невырожденные, т. е. имеют обратные. Поэтому из (3) получим

$$u = L_{k-1}^{-1}\cdot a, \quad l = b\cdot U_{k-1}^{-1}, \quad u_{kk} = a_{kk} - lu.$$

Докажем неравенство нулю элемента u_{kk}. Для этого, учитывая равенство (2), находим

$$|A| = \begin{vmatrix} L_{k-1} & 0 \\ l & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} U_{k-1} & u \\ 0 & u_{kk} \end{vmatrix} = |L_{k-1}|\cdot|U_{k-1}|\cdot u_{kk} =$$

$$= |U_{k-1}|\cdot u_{kk},$$

поскольку $|L_{k-1}| = 1$. По условию $|A| \neq 0$ и определитель $|U_{k-1}|$, равный произведению ненулевых диагональных элементов, также отличен от нуля. Тогда $u_{kk} \neq 0$. Этим завершено доказательство возможности представления матрицы A в виде LU-разложения.

Покажем, что такое разложение единственно. Предположим, что матрица A допускает LU-разложения

$$A = L_1 U_1 = L_2 U_2.$$

Тогда будет выполняться равенство

$$L_1^{-1} L_2 = U_1 U_2^{-1}.$$

Матрица в левой части этого равенства является левой нижней треугольной, а в правой части правой верхней треугольной. Такое равенство возможно лишь в случае, если $L_1^{-1} L_2$ и $U_1 U_2^{-1}$ — диагональные матрицы. Причем на диагонали матрицы $L_1^{-1} L_2$ стоят единицы. Следовательно, матрицы $L_1^{-1} L_2$ и $U_1 U_2^{-1}$ единичные, т. е. $L_1^{-1} L_2 = U_1 U_2^{-1} = E$. Отсюда следует, что $L_1 = L_2$ и $U_1 = U_2$, т. е. LU-разложение матрицы A единственное. Теорема доказана полностью.

Если в правой части разложения (1) провести умножение матриц и сравнить элементы полученной матрицы с соответствующими элементами матрицы $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то придем к следующей системе уравнений для определения элементов l_{ij} и u_{ij} матриц L и U:

$$\begin{aligned} & l_{ii} = 1 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ & \sum_{k=1}^{j} l_{ik} u_{kj} = a_{ij} \quad \text{при} \quad i \geq j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \\ & \sum_{k=1}^{i} l_{ik} u_{kj} = a_{ij} \quad \text{при} \quad i < j \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{4}$$

Эта система, в силу ее особой структуры, легко решается:

$$u_{11} = a_{11},$$

$$u_{1j} = a_{1j}, \quad l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}}, \quad j = 2, 3, \ldots, n,$$

$$u_{ii} = a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} u_{pi}, \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} u_{pj}, \quad l_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{p=1}^{j-1} l_{jp} u_{pi}}{u_{ii}},$$

$$i = 2, 3, \ldots, n, \quad j = i+1, i+2, \ldots, n.$$

Пример. Представить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 11 & 20 \\ 6 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

в виде LU -разложения $A = LU$.

Решение. Выпишем искомое разложение $A = LU$ с неизвестными элементами матриц L и U:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 11 & 20 \\ 6 & 16 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}.$$

В правой части полученного равенства проведем умножение матриц. Тогда получим

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 11 & 20 \\ 6 & 16 & 17 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}.$$

Сравнивая соответствующие элементы матриц правой и левой частей полученного равенства, придем к следующей системе уравнений:

$$u_{11} = 2, \qquad u_{12} = 5,$$
$$l_{21}u_{11} = 4, \qquad l_{21}u_{12} + u_{22} = 11,$$
$$l_{31}u_{11} = 6, \qquad l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 16,$$

$$\begin{aligned} &u_{13} = 7, \\ &l_{21}u_{13} + u_{23} = 20, \\ &l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 17. \end{aligned} \tag{5}$$

Из полученной системы находим

$$u_{11} = 2, \quad u_{12} = 5, \quad u_{13} = 7,$$
$$l_{21} = 2, \quad u_{22} = 1, \quad u_{23} = 6,$$
$$l_{31} = 3, \quad l_{32} = 1, \quad u_{33} = -10.$$

Поэтому искомым LU-разложением матрицы A является разложение

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Замечание. Систему уравнений (5) можно было выписать, пользуясь соотношениями (4).

Матрицы L и U LU-разложения матрицы A можно получить с помощью элементарных матриц, которыми матрица A приводится к правой верхней треугольной матрице. Так, если в матрице A предыдущего примера первую строку, умноженную на -2, прибавить ко второй ее строке, т. е. если матрицу A умножить слева на элементарную матрицу

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то получим матрицу

$$E_{21} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 11 & 20 \\ 6 & 16 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \\ 6 & 16 & 17 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице первую строку, умноженную на -3, прибавим к ее третьей строке, т. е. эту матрицу слева умножим на элементарную матрицу

$$E_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда получим матрицу

$$E_{31}E_{21}A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&7\\0&1&6\\6&16&17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&7\\0&1&6\\0&1&-4\end{pmatrix}.$$

Наконец, в полученной матрице вторую строку, умноженную на –1, прибавим к ее третьей строке, т. е. эту матрицу слева умножим на элементарную матрицу

$$E_{32}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

Тогда получим матрицу $E_{32}E_{31}E_{21}A=$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&7\\0&1&6\\0&1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&7\\0&1&6\\0&0&-10\end{pmatrix}=U.$$

Отсюда находим искомое LU-разложение матрицы A

$$A=(E_{32}E_{31}E_{21})^{-1}U=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&7\\0&1&6\\0&0&-10\end{pmatrix}.$$

Заметим, что в нашем примере получилось

$$U=E_{32}E_{31}E_{21}\cdot A;\;\; L^{-1}=E_{32}E_{31}E_{21}=E_{32}E_{31}E_{21}\cdot E.$$

В общем случае проведенные рассуждения равносильны следующим. Для построения матриц U и L^{-1} следует взять составную матрицу $(A\,|\,E)$ и элементарными преобразованиями над строками матрицу A преобразовать в правую верхнюю треугольную матрицу U. При таких же преобразованиях над строками матрица E преобразуется в матрицу L^{-1}. Так в рассматриваемом примере, проделав цепочку элементарных преобразований над строками составной матрицы $(A\,|\,E)$, получим

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&7&1&0&0\\4&11&20&0&1&0\\6&16&17&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&7&1&0&0\\0&1&6&-2&1&0\\0&1&-4&-3&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&5&7&1&0&0\\0&1&6&-2&1&0\\0&0&-10&-1&-1&1\end{array}\right)=(U\,|\,L^{-1}).$$

Поэтому искомым LU-разложением является разложение

$$A=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&5&7\\0&1&6\\0&0&-10\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&7\\0&1&6\\0&0&-10\end{pmatrix}.$$

Выделив главную диагональ матрицы U в LU-разложении (1) в диагональную матрицу D, матрицу U можно представить в виде произведения $U=DU_1$ с правой верхней треугольной матрицей U_1 с единицами на главной диагонали, получающейся из матрицы U делением ее строк на соответствующие диагональные элементы. Тогда разложение (1) превратится в разложение

$$A=LDU_1 \tag{7}$$

с треугольными матрицами L, U_1 и диагональной матрицей D.

Если матрица A симметричная, то разложение (7) превратится в разложение

$$A=U_1^{\mathrm{T}}DU_1 \tag{8}$$

с треугольными матрицами U_1, U_1^{T} и диагональной матрицей D.

Если, кроме того, в матрице D все диагональные элементы $d_1, d_2, \ldots, d_n$ положительные, то можно положить

$V = D^{1/2}\, U_1$, где $D^{1/2}$ — диагональная матрица с элементами $\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n}$ по диагонали. Тогда разложение (8) превратится в разложение

$$A = V^{\mathrm{T}} V \tag{9}$$

с треугольными матрицами V и V^{T}.

Так для матрицы A из предыдущего примера LU-разложение (6) можно преобразовать в разложение вида (7), т. е. в разложение

$$A = L\,D\,U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для симметричной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 18 & 40 & 38 \\ 27 & 38 & 146 \end{pmatrix},$$

имеющей LU-разложение

$$A = L\,U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 0 & 4 & -16 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

это разложение можно преобразовать в разложение вида (8), т. е. в разложение

$$A = U_1^{\mathrm{T}}\, D\, U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а последнее — в разложение вида (9), т. е. в разложение

$$A = V^{\mathrm{T}} V = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 9 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с матрицей

$$V = D^{1/2} U_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получающейся из матрицы U_1 умножением ее строк на соответствующие диагональные элементы матрицы $D^{1/2}$.

LU-разложения матриц, а также разложения вида (7), (8), (9) широко применяются в вычислительной практике. Например, LU-разложение тесно связано с решением систем линейных уравнений методом Гаусса по схеме единственного деления и по схеме Холецкого, а также в значительной степени облегчает вычисление обратных матриц, а разложение вида (9) лежит в основе метода квадратных корней решения систем линейных уравнений с симметричными матрицами.

2.2. Скелетное разложение матрицы

Представление $(m \times n)$-матрицы A ранга r в виде произведения

$$A = BC \tag{1}$$

с $(m \times r)$-матрицей B ранга r и $(r \times n)$-матрицей C ранга r называют **скелетным** разложением матрицы A.

Отметим два важных частных случая:

1. Если ранг $(m \times n)$-матрицы A совпадает с числом ее столбцов, то в скелетном разложении $A = BC$ можно положить $B = A$ и $C = E$, где E — единичная матрица n-го порядка.
2. Если ранг $(m \times n)$-матрицы A совпадает с числом ее строк, то в скелетном разложении $A = BC$ можно положить $C = A$, а в качестве матрицы B взять единичную матрицу m-го порядка.

В общем случае при конструировании скелетного разложения $(m \times n)$-матрицы A ранга r можно руководствоваться следующим правилом:

Для построения скелетного разложения $A = BC$ $(m \times n)$*-матрицы* A *ранга* r *можно в качестве сомножителя* B *взять матрицу, составленную из каких-либо* r *линейно независимых столбцов матрицы* A*, а элементы* j*-го столбца матрицы* C*:* $(c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{rj})^{\mathrm{T}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$*, найти из равенства*

$$c_{1j} \cdot B_1 + c_{2j} \cdot B_2 + \ldots + c_{rj} \cdot B_r = A_j, \qquad (2)$$

где $B_1, B_2, \ldots, B_r$ *— столбцы матрицы* B*;* A_j *—* j*-й столбец матрицы* A*.*

Это правило обусловлено тем, что по теореме о ранге матрицы все столбцы матрицы A линейно выражаются через столбцы матрицы B, т. е. можно записать равенство (2) при $j = 1, 2, \ldots, n$. Но матричной записью этих равенств служит равенство (1).

Из приведенного правила следует, что матрица A может обладать многими скелетными разложениями, поскольку при применении этого правила в качестве столбцов матрицы B можно брать любую максимальную линейно независимую подсистему системы столбцов матрицы A. Более того, матрицу B можно строить из линейно независимых линейных комбинаций столбцов матрицы A, даже не являющихся столбцами матрицы A. Это обстоятельство увеличивает свободу выбора матрицы B. В то же время при выбранном сомножителе B скелетного разложения $A = BC$ сомножитель C определяется однозначно.

Пример 1. Построить скелетное разложение для следующих матриц:

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad b)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 3-2i \\ 1 & 1 & 3 \\ 1-i & 2 & 1-5i \end{pmatrix}.$$

Решение. *a*) Легко убедиться в том, что ранг матрицы A равен двум и первые два ее столбца линейно независимые. Поэтому в качестве первого сомножителя в скелетном разложении $A = BC$ можно принять матрицу

$$B=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&3\\1&1\end{pmatrix}.$$

Элементы j-го столбца $(c_{1j},\ c_{2j})^{\mathrm{T}}$ матрицы C, $j=1,2,3$, можно найти из равенства

$$c_{1j}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}+c_{2j}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}=A_j, \tag{3}$$

где A_j — j-й столбец матрицы A.

При $j=1$ соотношение (3) приводит к системе уравнений

$$\begin{cases}c_{11}+2c_{21}=1,\\2c_{11}+c_{21}=2,\\c_{11}+3c_{21}=1,\\c_{11}+c_{21}=1,\end{cases}$$

из которой находим $c_{11}=1$, $c_{21}=0$. Поэтому первым столбцом матрицы C будет столбец $(1,\ 0)^{\mathrm{T}}$. Аналогично при $j=2$ и $j=3$ найдем второй и третий столбцы $(0,\ 1)^{\mathrm{T}}$ и $(3,\ -2)^{\mathrm{T}}$ матрицы C. Следовательно,

$$C=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

и матрица A имеет скелетное разложение

$$A=B\cdot C=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&3\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}. \tag{4}$$

С вычислительной точки зрения рассмотренный способ построения скелетного разложения матрицы недостаточно совершенен. Более удобным может оказаться метод, основанный на применении элементарных преобразований над строками матрицы (см. [3], с. 212 – 213), который состоит в следующем.

Матрицу A с помощью элементарных преобразований над строками по схеме прямого хода метода Гаусса приводят к ступенчатому виду. В матрице ступенчатого вида удаляют все нулевые строки, выбирают базисный минор и с помощью элементарных преобразований строк всей матрицы преобразуют этот минор в единичную матрицу, как при обратном ходе метода Гаусса. Затем составляют матрицу B из столбцов матрицы A, на которых расположен выбранный базисный минор, а за матрицу C принимают последнюю из матриц, получившихся в результате всех элементарных преобразований над строками матрицы A.

Так, для матрицы A из примера 1,*а*) получаем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \;\; \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix} \right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = C .$$

В данном случае выбранный базисный минор располагается на первых двух столбцах матрицы ступенчатого вида. Поэтому матрицу B строим из первых двух столбцов матрицы A, а матрицей C будет конечная матрица в цепочке преобразованных матриц. В результате получаем скелетное разложение матрицы A, совпадающее с (4). Если бы выбрали базисный минор, расположенный на других столбцах, то скелетное разложение было бы образовано другими матрицами B и C. Например, если бы выбрали базисный минор

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix},$$

расположенный на первом и третьем столбцах ступенчатой матрицы, то имели бы следующее продолжение цепочки преобразований:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&4\\1&3&-3\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-3&6\\0&1&-2\\0&-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}&\begin{matrix}2\\1\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}}\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0{,}5&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1{,}5&0\\0&0{,}5&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}&\begin{matrix}1{,}5\\-0{,}5\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}\end{pmatrix}=C\,.$$

Поэтому получили бы скелетное разложение

$$A=B\,C=\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\\1&-3\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1{,}5&0\\0&-0{,}5&1\end{pmatrix}.$$

b) При построении скелетного разложения матрицы A в данном случае ограничимся способом элементарных преобразований над строками матрицы A. Для этого проведем цепочку следующих преобразований:

$$A=\begin{pmatrix}1&1+i&3-2i\\1&1&3\\1-i&2&1-5i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1+i&3-2i\\0&-i&2i\\0&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&1+i\\0&-1\end{matrix}}&\begin{matrix}3-2i\\2\end{matrix}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&-1\end{matrix}}&\begin{matrix}5\\2\end{matrix}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}&\begin{matrix}5\\-2\end{matrix}\end{pmatrix}=C\,.$$

Поскольку выбранный базисный минор располагается на первых двух столбцах матрицы ступенчатого вида, то матрица B должна состоять из первых двух столбцов матрицы A. Следовательно, скелетным разложением матрицы A является разложение

$$A = BC = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 1 \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

О применении qR-разложения матрицы для построения ее скелетного разложения см. [3], с. 217–218.

2.3. Каноническое (спектральное) разложение матрицы

Каноническим или **спектральным** разложением действительной или комплексной матрицы A n-го порядка называют разложение

$$A = T \Lambda T^{-1}, \tag{1}$$

в котором

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

– диагональная матрица с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A по диагонали, а в трансформирующей матрице T столбцами служат столбцы координат собственных векторов матрицы A по соответствующим собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Непосредственно из этого определения и результатов 1.15 следует, что при построении канонического разложения (1) матрицы A целесообразно придерживаться следующего правила:

1. *Найти все собственные значения λ_i матрицы A (каждое λ_i считается столько раз, какова его кратность в характеристическом многочлене матрицы A). Если таких значений λ_i окажется точно n, т. е. если все характеристические числа матрицы A принадлежат основному полю, то следует выписать матрицу Λ. Если собственных*

значений матрицы A *окажется меньше* n, *то такая матрица не имеет канонического разложения и его построение на этом следует прекратить.*

2. *Если собственных значений* λ_i *матрицы* A *точно* n, *то при каждом значении* λ_i *следует построить фундаментальную систему решений однородной системы уравнений* $(A-\lambda_i E)X=0$ *и из полученных решений всех таких фундаментальных систем, как из столбцов, составить трансформирующую матрицу* T. *Если матрица* T *окажется квадратной, то разложение* (1) *для матрицы* A *существует и для его записи уже все подготовлено. Если же матрица* T *окажется прямоугольной (неквадратной), то разложения* (1) *для матрицы* A *не существует.*
3. *Нормальная матрица* A, *в частности, симметричная, эрмитова или унитарная, обладает каноническим разложением* (1) *даже с ортогональной или унитарной трансформирующей матрицей* T. *Чтобы построить такую матрицу* T, *нужно* (см. 1.18) *при каждом* λ_i *векторы-решения фундаментальных систем решений однородных систем уравнений* $(A-\lambda_i E)X=0$, *построенных в п.* 2 *приведенного правила, еще ортонормировать, а решения, принадлежащие различным собственным значениям, у таких матриц заведомо ортогональны одно к другому.*

Пример 1. Построить, если возможно, канонические разложения следующих матриц:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}-4 & 12 & 6\\ -6 & 14 & 6\\ 8 & -16 & -6\end{pmatrix},\quad b)\ A=\begin{pmatrix}12 & 4 & 4 & 4\\ 4 & 12 & -4 & -4\\ 4 & -4 & 12 & -4\\ 4 & -4 & -4 & 12\end{pmatrix},$$

$$c)\ A=\begin{pmatrix}1 & 1+i & 0\\ 1-i & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad d)\ A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение. *а*) Характеристический многочлен

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -4-\lambda & 12 & 6 \\ -6 & 14-\lambda & 6 \\ 8 & -16 & -6-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda\,(\lambda-2)^2$$

матрицы A имеет корни $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=0$. Все они действительные и, следовательно, являются собственными значениями. Поэтому можем выписать матрицу

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к построению матрицы T.

При $\lambda=2$ система $(A-\lambda E)X=0$, т. е. система

$$\begin{cases} -6x_1+12x_2+6x_3=0, \\ -6x_1+12x_2+6x_3=0, \\ 8x_1-16x_2-8x_3=0 \end{cases}$$

имеет два свободных неизвестных. Поэтому ее фундаментальная система решений состоит из двух решений, например, из решений $b_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ и $b_2=(-4,-5,\ 6)^{\mathrm{T}}$.

При $\lambda=0$ система $(A-\lambda E)X=0$, т. е. система

$$\begin{cases} -4x_1+12x_2+6x_3=0, \\ -6x_1+14x_2+6x_3=0, \\ 8x_1-16x_2-6x_3=0 \end{cases}$$

имеет одно свободное неизвестное. Поэтому ее фундаментальная система решений состоит из одного решения, например, из решения $b_3=(-3,-3,\ 4)^{\mathrm{T}}$.

Из решений b_1, b_2, b_3, как из столбцов, составим матрицу

$$T = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Она квадратная. Следовательно, матрица A имеет каноническое разложение

$$A = T\Lambda T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что данная матрица A не может иметь канонического разложения с ортогональной трансформирующей матрицей T, так как собственные векторы матрицы A, принадлежащие разным собственным значениям, не ортогональны.

b) Характеристический многочлен

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 12-\lambda & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 12-\lambda & -4 & -4 \\ 4 & -4 & 12-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & -4 & 12-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 16)^3$$

матрицы A имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 16$, $\lambda_4 = 0$. Поэтому диагональной матрицей в каноническом разложении данной симметричной матрицы будет матрица

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к построению матрицы T.

При $\lambda = 16$ система $(A - \lambda E)X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из трех решений, например, из решений $b_1 = (1, 1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, $b_2 = (1, 1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, $b_3 = (1, -1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

При $\lambda = 0$ система $(A - \lambda E)X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 12x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 12x_4 = 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из одного решения, например, из решения $b_4 = (-1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

Из решений b_1, b_2, b_3, b_4, как из столбцов, составим матрицу

$$T = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и выпишем искомое каноническое разложение

$$A = T\Lambda T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В данном примере матрица A симметричная. Поэтому для ее канонического разложения $A = T\Lambda T^{-1}$ можно построить ортогональную матрицу T. Для этого следует векторы-решения

b_1, b_2, b_3 ортонормировать, а вектор-решение b_4 — нормировать. Поскольку векторы b_1, b_2, b_3 уже попарно ортогональны и ортогональны к вектору b_4, то остается все эти решения только нормировать. Проделав это, получим ортонормированную систему векторов

$$e'_1 = \frac{1}{2}(1,\ 1,\ 1,\ -1)^{\mathrm{T}},\ e'_2 = \frac{1}{2}(1,\ 1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}},$$

$$e'_3 = \frac{1}{2}(1, -1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}},\ e'_4 = \frac{1}{2}(-1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$$

Из столбцов координат этих векторов строится ортогональная матрица

$$T = (e'_1,\ e'_2,\ e'_3,\ e'_4) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица A имеет каноническое разложение

$$A = T\,\Lambda\,T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

с ортогональной матрицей T.

Замечание. Для симметричной матрицы ее собственные значения и собственные векторы целесообразно находить с помощью компьютера методом вращений (см. 5.4.2).

c) Характеристический многочлен

$$\left| A-\lambda E \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1+i & 0 \\ 1-i & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda)^2$$

матрицы A имеет корни $\lambda_1=\lambda_2=3,\ \lambda_3=0$. Все они являются собственными значениями. Поэтому диагональной матрицей в каноническом разложении данной эрмитовой матрицы A будет матрица

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к построению унитарной матрицы T.

При $\lambda = 3$ система $(A-\lambda E)X=0$ имеет вид

$$\begin{cases} -2x_1+(1+i)x_2+0\cdot x_3 = 0, \\ (1-i)x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 = 0, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0. \end{cases}$$

В ней два свободных неизвестных. Поэтому ее фундаментальная система решений состоит из двух решений, например, из решений $b_1=(1+i,2,1)^{\mathrm{T}}$ и $b_2=(-1-i,-2,\ 6)^{\mathrm{T}}$. Эти решения уже ортогональны, поскольку

$$(b_1,b_2)=b_2^*b_1=(-1+i,-2,\ 6)\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=0.$$

Нормируя их, получим ортонормированную систему векторов

$$e_1'=\frac{1}{\sqrt{7}}(1+i,2,1)^{\mathrm{T}},\ \ e_2'=\frac{1}{\sqrt{42}}(-1-i,-2,\ 6)^{\mathrm{T}}.$$

При $\lambda = 0$ система $(A - \lambda E)X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} x_1 + (1+i)\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0, \\ (1-i)x_1 + 2\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет одно свободное неизвестное. Поэтому ее фундаментальная система решений состоит из одного решения, например, из решения $b_3 = (1 + i, -1, 0)^{\mathrm{T}}$.

Нормируя его, получим вектор

$$e'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+i, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Так как собственные векторы эрмитова оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны, то векторы e'_1, e'_2, e'_3 составляют ортонормированную систему векторов. Следовательно, матрица

$$T = (e'_1, e'_2, e'_3) = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{7}} & \frac{-1-i}{\sqrt{42}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{-2}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{6}{\sqrt{42}} & 0 \end{pmatrix},$$

составленная из столбцов координат этих векторов, унитарная. Выпишем искомое каноническое разложение $A = T\Lambda T^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{7}} & \frac{-1-i}{\sqrt{42}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{-2}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{6}{\sqrt{42}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{-1+i}{\sqrt{42}} & \frac{-2}{\sqrt{42}} & \frac{6}{\sqrt{42}} \\ \frac{1-\imath}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Для эрмитовой матрицы собственные значения и собственные векторы целесообразно находить с помощью компьютерной технологии методом вращений (см. 5.4.2).

d) Характеристический многочлен

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -3 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2+4)(4-\lambda)$$

матрицы A имеет корни $\lambda_1 = 4,\ \lambda_{2,3} = \pm 2i$. Так как матрица A действительная, то ее собственным значением является лишь $\lambda_1 = 4$. Таким образом, количество собственных значений у данной матрицы меньше, чем ее порядок $n=3$. Поэтому матрица A не имеет канонического разложения.

Каноническое разложение матриц широко применяется в теории и вычислительной практике. Например, если известно каноническое разложение $A = T\,\Lambda\,T^{-1}$ матрицы A, то ее m-я степень при натуральном числе m легко находится по формуле

$$A^m = T\,\Lambda^m\,T^{-1} = T\begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1}, \tag{2}$$

так как $A^m = T\,\Lambda\,T^{-1}\cdot T\,\Lambda\,T^{-1}\cdot\ldots\cdot T\,\Lambda\,T^{-1} = T\,\Lambda^m\,T^{-1}$. Формула (2) сохраняется при m целом отрицательном для невырожденной матрицы A. В частности,

$$A^{-1} = T\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} T^{-1}. \tag{3}$$

Замечание. Если матрица не имеет канонического разложения, то для вычисления ее степеней (см. [12]) пользуются разложением $A = T\,J\,T^{-1}$ с жордановой матрицей J.

Один из корней m-й степени из матрицы A, имеющей каноническое разложение $A = T\,\Lambda\,T^{-1}$, определяется формулой

$$\sqrt[m]{A} = T \begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}. \tag{4}$$

Действительно, возведя правую часть равенства (4) по формуле (2) в m-ю степень, получим A. Если в формуле (4) все $\lambda_i > 0$, то беря арифметические значения корней m-й степени из каждого λ_i, получим единственный корень m-й степени из матрицы A, у которого все характеристические числа положительные. Обо всех корнях m-й степени из произвольных матриц см. [12], гл. VIII.

Решение системы $A\,X = b$ линейных уравнений также значительно упрощается, если известно каноническое разложение $A = T\,\Lambda\,T^{-1}$ (см. 4.1.6).

Пример 2. Вычислить квадратный корень из матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & 12 & -4 \\ 4 & -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Решение. В примере 1,*b*) для данной матрицы построено каноническое разложение $A = T\,\Lambda\,T^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому по формуле (4) получаем $\sqrt{A} = T\sqrt{\Lambda}\,T^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.4. QR - разложение матрицы

QR-разложением действительной или комплексной квадратной матрицы A называют ее представление в виде произведения $A = QR$ с ортогональной (унитарной) матрицей Q и верхней треугольной матрицей R.

QR-разложение матрицы можно строить с помощью ортогонализации и нормирования ее столбцов, а также с помощью ортогональных (унитарных) преобразований.

Пусть в матрице $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ столбцы $a_1, a_2, \ldots,$ a_n линейно независимые. Ортогонализируем эту систему векторов, проводя процесс ортогонализации. Затем нормируем каждый вектор полученной ортогональной системы векторов. В результате придем к ортонормированной системе векторов

$$q_1 = u_{11} a_1,$$

$$q_2 = u_{12} a_1 + u_{22} a_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$q_n = u_{1n} a_1 + u_{2n} a_2 + \ldots + u_{nn} a_n.$$

В матричной записи это дает равенство

$$Q = AU,$$

где $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ — ортогональная (унитарная) матрица,

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

— верхняя треугольная матрица.

Отсюда получается QR-разложение $A = QR$ с ортогональной (унитарной) матрицей Q и треугольной матрицей $R = U^{-1}$.

QR-разложение действительной квадратной матрицы A можно также строить с помощью вращений, а для комплексной матрицы — с помощью элементарных унитарных матриц, являющихся обобщением матриц вращений на комплексный случай. Пусть при этом использованы вращения (или их обобщения на комплексный случай) с матрицами T_1, T_2, …, T_k и получена треугольная матрица

$$T_k \dots T_2 T_1 A = R.$$

Тогда $A = QR$ будет искомым QR-разложением с ортогональной (унитарной) матрицей $Q = (T_k \dots T_2 T_1)^{-1}$.

QR-разложение действительной или комплексной квадратной матрицы A можно строить и с помощью отражений. Для этого матрицу A с помощью отражений необходимо сначала привести к треугольному виду. Пусть при этом использованы отражения с матрицами $U_1, U_2, \dots, U_k$ и получена треугольная матрица

$$U_k \dots U_2 U_1 A = R.$$

Тогда $A = QR$ будет искомым QR-разложением с ортогональной (унитарной) матрицей $Q = (U_k \dots U_2 U_1)^{-1}$.

Пример. Построить QR -разложения для матриц

$$a)\ A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}, \qquad б)\ A=\begin{pmatrix} 0 & 6i & i \\ 3i & -10 & -i \\ 4i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. *а*) Для построения QR -разложения матрицы A применим сначала процесс ортогонализации и нормирования ее столбцов. Для этого положим $b_1 = a_1$ и по формуле (11) из 1.16 найдем

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}\, b_1 = a_2 + \frac{1}{3}\, b_1 = \frac{1}{3}\, a_1 + a_2 =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Далее по той же формуле находим

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)}\, b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)}\, b_2 =$$

$$= a_3 + \frac{1}{3}\, b_1 - b_2 = -a_2 + a_3 =$$

$$= -\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Система векторов b_1, b_2, b_3 ортогональная. Нормируя векторы этой системы, придем к ортонормированной системе векторов:

$$q_1 = \frac{1}{3}\,(1, -2, 2)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\, a_1,$$

$$q_2 = \frac{1}{3}\,(-2, -2, -1)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\, a_1 + a_2,$$

$$q_3 \;=\; \frac{1}{3}\,(\,2\,,-1,-2)^{\mathrm{T}} \;=\; -\;\frac{1}{9}a_2 + \frac{1}{9}\,a_3\;.$$

В матричной записи это дает равенство $Q = AU$, где

$$Q = (\,q_1\,,\,q_2\,,\,q_3\,) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix},\;\; U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Из равенства $Q = AU$ получаем искомое QR-разложение $A = QR$ при

$$R \;=\; U^{\,-1} \;=\; \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Для построения QR-разложения матрицы A с помощью вращений сначала матрицу A вращениями приведем к треугольному виду. Для этого начнем с получения нуля в позиции $(\,2,1)$ с помощью матрицы вращения

$$T_{21} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из равенства нулю элемента $\sin\varphi - 2\cos\varphi$ матрицы $T_{21}\,A$ в позиции $(\,2,1)$ находим $\mathrm{tg}\varphi = 2$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{5}},\qquad \sin\varphi = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Следовательно,

$$T_{21} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $T_{21}\,A =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{7}{\sqrt{5}} \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Возьмем теперь матрицу вращения

$$T_{31} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Как в предыдущем случае, из равенства нулю элемента матрицы $T_{31}T_{21}A$ в позиции $(3,1)$, т. е. из равенства $\frac{5}{\sqrt{5}}\sin\varphi + 2\cos\varphi = 0$, найдем $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = -\frac{2}{3},$$

$$T_{31} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$

и $T_{31}\ T_{21}\ A =$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{7}{\sqrt{5}} \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{7}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{19}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Наконец, применим матрицу вращения

$$T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Как и в предыдущих случаях, из равенства нулю элемента матрицы $T_{32}\,T_{31}\ T_{21}\,A$ в позиции $(3, 2)$, т. е. из равенства $-\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\varphi - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\varphi = 0$, найдем $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{2}$.

Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

и $T_{32}\,T_{31}\ T_{21}\ A\ =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{7}{\sqrt{5}} \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = R .$$

Из равенства $T_{32}\, T_{31}\, T_{21}\, A = R$ получаем искомое QR-разложение $A = QR$, где

$$Q = T_{21}^{-1}\, T_{31}^{-1}\, T_{32}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Если строить QR-разложение матрицы A с помощью отражений, то также сначала матрицу A отражениями приведем к треугольному виду. Для этого возьмем $x = (1, -2, 2)^{\mathrm{T}}$, $z = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, построим вектор $v = x + |x|\, z = (4, -2, 2)^{\mathrm{T}}$, вычислим матрицу

$$H = E - \frac{2\, v\, v^{\mathrm{T}}}{|v|^2} =$$

$$= E - \frac{2}{24} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и найдем матрицу

$$H\, A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = R .$$

Матрица R треугольная. Поэтому из равенства $H\, A = R$ получаем искомое QR-разложение

$$A = QR = H^{-1}R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 6i & i \\ 3i & -10 & -i \\ 4i & 0 & 1 \end{pmatrix}$. В этом случае при построении QR-разложения матрицы A ограничимся применением унитарных преобразований. Сначала QR-разложение построим с применением элементарных унитарных матриц T_{ij}, являющихся обобщением матриц вращений. Начнем с получения нуля в позиции $(2,1)$ с помощью матрицы

$$T_{21} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -e^{i\psi}\sin\varphi & 0 \\ e^{-i\psi}\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим элемент в этой позиции у произведения $T_{21}A$, равный $3i\cos\varphi$, и приравняем его к нулю. Из полученного равенства находим $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$, ψ — любое. Возьмем $\psi = 0$. Тогда

$$T_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T_{21}A = \begin{pmatrix} -3i & 10 & 1 \\ 0 & 6i & i \\ 4i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В матрице $T_{21}A$ с помощью матрицы

$$T_{31} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -e^{i\psi}\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ e^{-i\psi}\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

получим нуль в позиции $(3,1)$.

Для этого определим элемент $-3i\,e^{-i\psi}\sin\varphi + 4\,i\cos\varphi$ в позиции $(3,1)$ матрицы $T_{31}\,T_{21}\,A$ и приравняем его к нулю.

При $\psi = 0$ получим $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{4}{3}$ и

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{3}{5}, \qquad \sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{4}{5}.$$

Поэтому

$$T_{31} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \text{ и } T_{31}\,T_{21}\,A = \begin{pmatrix} -5\,i & 6 & -\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\,i \\ 0 & 6\,i & i \\ 0 & 8 & \frac{3}{5}+\frac{4}{5}\,i \end{pmatrix}.$$

В матрице $T_{31}\,T_{21}\,A$ с помощью матрицы

$$T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -e^{i\psi}\sin\varphi \\ 0 & e^{-i\psi}\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

получим нуль в позиции $(3,2)$.

Для этого элемент $6i\,e^{-i\psi}\sin\varphi + 8\cos\varphi$ в позиции $(3,2)$ матрицы $T_{32}\,T_{31}\,T_{21}\,A$ приравняем к нулю.

При $\psi = \dfrac{\pi}{2}$ находим $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{4}{3}$ и

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = -\frac{4}{5}, \qquad \sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{3}{5}.$$

Следовательно,

$$T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4i}{5} \\ 0 & \frac{4i}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

и

$$T_{32}\, T_{31}\, T_{21}\, A \;=\; \begin{pmatrix} -5i & 6 & -\frac{4}{5}+\frac{3i}{5} \\ 0 & 10i & -\frac{16}{25}+\frac{27i}{25} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{25}+\frac{12i}{25} \end{pmatrix} \;=\; R\,.$$

Из последнего равенства получим искомое QR-разложение $A = QR$, где $Q = T_{21}^{*}\ T_{31}^{*}\ T_{32}^{*}\ =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4i}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{16i}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{12i}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix},\ R \;=\; \begin{pmatrix} -5i & 6 & -\frac{4}{5}+\frac{3i}{5} \\ 0 & 10i & -\frac{16}{25}+\frac{27i}{25} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{25}+\frac{12i}{25} \end{pmatrix}.$$

При построении QR-разложения матрицы A с помощью отражений также сначала матрицу A приведем отражениями к треугольному виду.

Для этого возьмем $x = (0, 3i, 4i)^{\mathrm{T}}$, найдем $|x| = 5$ и положим $z = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$,

$$v = x - |x|\, z = (-5, 3i, 4i)^{\mathrm{T}}\,.$$

Затем составим матрицу отражений $H = E - \dfrac{2\, v\, v^{*}}{|v|^{2}} \;=$

$$= E - \frac{2}{50}\begin{pmatrix} -5 \\ 3i \\ 4i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -3i & -4i \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & -15i & -20i \\ 15i & 16 & -12 \\ 20i & -12 & 9 \end{pmatrix}$$

и вычислим матрицу

$$H\,A \;=\; \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 125 & 150i & -15-20i \\ 0 & -250 & -27-16i \\ 0 & 0 & -11+12i \end{pmatrix} \;=\; R\,.$$

Из последнего равенства получаем искомое QR-разложение $A = QR$ с унитарной матрицей $Q = H^*$.

Примечание. Если треугольную матрицу $T_{32}T_{31}T_{21}A$, полученную с помощью вращений, умножить слева на унитарную матрицу

$$U = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то результирующая матрица совпадет с матрицей $H\,A$, полученной с помощью отражений, а матрица $U\,T_{32}T_{31}T_{21}$ совпадет с матрицей H.

Разложения, аналогичные QR-разложению, можно строить и для прямоугольных $(m\times n)$-матриц (см.: [3, с. 214] и [36]). В этом случае множитель Q будет прямоугольной $(m\times n)$-матрицей, у которой столбцы составляют ортонормированную систему. Такое разложение прямоугольной матрицы называют ее qR-разложением. Рассматривают и Qr-разложения (см.: [3, с. 213] и [36]), в которых прямоугольной является матрица R.

Если известно QR- или qR-разложение матрицы A, то по столбцам матрицы Q легко выписать ортонормированную систему векторов, полученную из системы столбцов матрицы A. Так как QR- и qR-разложения можно строить либо с помощью процесса ортогонализации и нормирования столбцов матрицы

A, либо с помощью ортогональных (унитарных) преобразований, то это означает, что такими же способами можно осуществлять ортонормирование системы векторов.

QR-разложения матриц имеют широкое применение в численных методах линейной алгебры. Например, они являются основой QR-алгоритма (см. 5.4.3) для вычисления собственных значений матрицы.

Если известно QR-разложение $A=QR$ матрицы A системы линейных уравнений $AX=b$, то значительно упрощается решение этой системы, поскольку она сводится к системе $RX=Q^*b$ с треугольной матрицей R (см. п. 4.1.6).

2.5. Сингулярное разложение матрицы

Существование для симметричной (эрмитовой) матрицы канонического разложения с ортогональной (унитарной) трансформирующей матрицей позволяет получить специальное разложение для произвольной $(m\times n)$-матрицы. С этой целью прежде всего заметим, что матрицы A^*A и AA^* являются симметричными (эрмитовыми) неотрицательными матрицами, поскольку выполняются соотношения

$$(A^*A)^* = A^*A, \quad (AA^*)^* = AA^*$$

и

$$x^* \cdot A^*A \cdot x = (Ax)^* Ax = \left| Ax \right|^2 \geq 0,$$

$$x^* \cdot AA^* \cdot x = (A^*x)^* \cdot A^*x = \left| A^*x \right|^2 \geq 0$$

при любом векторе x.

Напомним, что симметричная (эрмитова) матрица B называется **неотрицательной,** если она удовлетворяет условию $x^*Bx \geq 0$ при любом векторе x; звездочка справа над матрицей означает последовательное выполнение транспонирования матрицы и замены в ней всех элементов на комплексно-сопряженные. Для действительной матрицы $A^* = A^{\mathrm{T}}$.

Характеристические числа матриц A^*A и AA^* действительны и неотрицательны.

На самом деле, если λ и μ — характеристические числа соответственно матриц A^*A и AA^*, а u и v — собственные векторы этих матриц по λ и μ, то в силу соотношений $x^*A^*Ax \geq 0$, $x^*AA^*x \geq 0$, выполняемых при любом векторе x, в частности, при векторах u и v, получаем

$$u^*A^*Au = u^*\lambda u = \lambda u^*u = \lambda(u,u) = \lambda\left|u\right|^2 \geq 0,$$

$$v^*AA^*v = v^*\mu v = \mu v^*v = \mu(v,v) = \mu\left|v\right|^2 \geq 0.$$

Поскольку $\left|u\right|^2 > 0$, $\left|v\right|^2 > 0$, то из полученных соотношений следует, что λ и μ являются *действительными неотрицательными* числами.

Обозначим характеристические числа матрицы A^*A через σ_1^2, σ_2^2, ..., σ_n^2 и будем считать, что $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \ldots \geq \sigma_n^2$, $\sigma_i \neq 0$ при $i = 1, 2, \ldots, r$.

Оператор с симметричной (эрмитовой) матрицей A^*A в евклидовом (унитарном) пространстве X_n имеет ортонормированную систему собственных векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$, принадлежащих собственным значениям σ_1^2, σ_2^2, ..., σ_n^2.

Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ удовлетворяют соотношениям

$$A^*Av_i = \sigma_i^2 v_i, \quad (v_i, v_j) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases} \tag{1}$$

Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ переводится оператором с матрицей A в некоторую ортогональную систему векторов $Av_1, Av_2, \ldots, Av_n$, так как

$$(Av_i, Av_j) = (A^*Av_i, v_j) = \sigma_i^2(v_i, v_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Кроме того, модуль вектора Av_i равен σ_i, так как

$$\left| Av_i \right| = \sqrt{(Av_i, Av_i)} = \sqrt{(A^*Av_i,\ v_i)} = \sqrt{\sigma_i^2(v_i, v_i)} = \sigma_i.$$

Поэтому вектор Av_i отличен от нулевого вектора тогда и только тогда, когда $\sigma_i \neq 0$, т. е. при $i = 1, 2, ..., r$. Ненулевой вектор Av_i является собственным вектором оператора AA^* по собственному значению σ_i^2, так как

$$AA^*(Av_i) = A(A^*Av_i) = A(\sigma_i^2 v_i) = \sigma_i^2 Av_i.$$

Верно и обратное. Следовательно, ненулевые характеристические числа матриц A^*A и AA^* совпадают с учетом их кратностей и их число равно r, а кратности нулевого характеристического числа этих матриц равны соответственно $n - r$ и $m - r$. Общих характеристических чисел у матриц A^*A и AA^* будет $s = \min\{m, n\}$.

Арифметические значения $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_s$ квадратных корней из общих характеристических чисел матриц A^*A и AA^* называют ***сингулярными*** (или ***главными***) ***числами матрицы*** A.

В пространстве X_n примем за базис ортонормированную систему $v_1, v_2, ..., v_n$ собственных векторов оператора с матрицей A^*A и построим ортонормированную систему векторов

$$u_1 = \frac{Av_1}{\left| Av_1 \right|} = \frac{Av_1}{\sigma_1}, \ \ldots, \ u_r = \frac{Av_r}{\left| Av_r \right|} = \frac{Av_r}{\sigma_r}.$$

Дополним эту систему до ортонормированного базиса в пространстве Y_m любыми векторами $u_{r+1}, u_{r+2}, ..., u_m$. По построению векторы $u_1, u_2, ..., u_m$ удовлетворяют соотношениям

$$Av_i = \begin{cases} \sigma_i u_i & \text{при } i \le r, \\ 0 & \text{при } i > r. \end{cases} \tag{2}$$

Умножая эти равенства слева на A^* и учитывая, что $A^* A v_i = \sigma_i^2 v_i$, получим соотношения

$$A^* u_i = \begin{cases} \sigma_i v_i & \text{при } i \le r, \\ 0 & \text{при } i > r. \end{cases} \tag{3}$$

Ортонормированные базисы $v_1, v_2, ..., v_n$ и $u_1, u_2, ..., u_m$ пространств X_n и Y_m, связанные соотношениями (2) и (3), называют ***сингулярными базисами***. При этом векторы $v_1, v_2, ..., v_n$ называют ***правыми сингулярными векторами матрицы*** A, а векторы $u_1, u_2, ..., u_m$ — ее ***левыми сингулярными векторами***.

Оператор, имеющий в паре исходных базисов пространств X_n и Y_m матрицу A, в сингулярных базисах $v_1, v_2, ..., v_n$ и $u_1, u_2, ..., u_m$ этих пространств в силу определения матрицы оператора и соотношений (2) имеет $(m \times n)$-матрицу

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Из формулы, устанавливающей связь между матрицами одного и того же оператора в разных базисах (см. 1.12), получаем

$$A = U \Sigma V^*, \tag{5}$$

где V — ортогональная (унитарная) матрица порядка n, столбцами которой служат столбцы координат векторов $v_1, v_2, ..., v_n$ в исходном базисе пространства X_n; U — ортогональная (унитарная) матрица порядка m, столбцами которой являются столбцы координат векторов $u_1, u_2, ..., u_m$ в исходном базисе пространства Y_m.

Разложение (5) называют **сингулярным** разложением матрицы A. Любая $(m \times n)$-матрица обладает многими различными сингулярными разложениями. Это следует из некоторого произвола при построении векторов $v_1, v_2, ..., v_n$ и $u_1, u_2, ..., u_m$.

Сингулярному разложению (5) можно придать вид

$$A = U_1 \, \Sigma_r \, V_1^*, \qquad (6)$$

где

$$\Sigma_r = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix}$$

— квадратная матрица порядка r, получающаяся из $(m \times n)$-матрицы Σ вычеркиванием $n - r$ нулевых столбцов справа и $m - r$ нулевых строк снизу; U_1 — $(m \times r)$-матрица, состоящая из первых r столбцов матрицы U; V_1^* — $(r \times n)$-матрица, состоящая из первых r строк матрицы V^*.

Разложение (6) называют **второй формой сингулярного разложения** матрицы A. В него входят матрицы меньших размеров, и, кроме того, в нем матрица Σ_r — квадратная невырожденная. Все это может оказаться существенным, особенно при компьютерных вычислениях.

При $m < n$ сингулярному разложению (5) иногда бывает удобно придать вид

$$A = U\ \Sigma_m V_1^*, \tag{7}$$

где Σ_m — квадратная матрица m-го порядка, содержащаяся в первых m строках и столбцах матрицы Σ; матрица U — та же, что и в разложении (5), а V_1^* — $(m \times n)$-матрица, состоящая из первых m строк матрицы V^*.

При $m > n$ сингулярному разложению (5) иногда также бывает удобно придать вид

$$A = U_1\ \Sigma_n V^*, \tag{8}$$

где Σ_n — квадратная матрица, содержащаяся в первых n строках и столбцах матрицы Σ; матрица U_1 — $(m \times n)$-матрица, состоящая из первых n столбцов матрицы U, а матрица V^* — та же, что и в разложении (5).

В силу изложенного при конструировании сингулярного разложения произвольной $(m \times n)$-матрицы A ранга r целесообразно придерживаться следующего порядка действий:

1. *составить матрицу* $A^* A$;
2. *найти характеристические числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *матрицы* $A^* A$. *Не нарушая общности, их можно занумеровать так, чтобы выполнялись условия* $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_n$, $\lambda_i \ne 0$ *при* $i = 1, \ldots, r$;
3. *подсчитать ненулевые сингулярные числа* $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, *матрицы* A;
4. *составить* $(m \times n)$*-матрицу* Σ *по формуле* (4);
5. *построить ортонормированную систему собственных векторов* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *оператора с матрицей* $A^* A$, *принадлежащих соответственно собственным значениям* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;

6. *составить матрицу* $V = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *из столбцов координат векторов* $v_1, v_2, ..., v_n$. *Матрица* V *является матрицей перехода от исходного базиса евклидова (унитарного) пространства* X_n *к базису* $v_1, v_2, ..., v_n$;
7. *построить ортонормированную систему векторов*
$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1}, u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2}, \ldots, u_r = \frac{Av_r}{\sigma_r};$$
8. *дополнить систему векторов* $u_1, u_2, ..., u_r$ *любыми векторами* $u_{r+1}, u_{r+2}, ..., u_m$ *до ортонормированного базиса евклидова (унитарного) пространства* Y_m;
9. *составить матрицу* $U = (u_1, u_2, ..., u_m)$ *из столбцов координат векторов* $u_1, u_2, ..., u_m$. *Матрица* U *является матрицей перехода от исходного базиса евклидова (унитарного) пространства* Y_m *к базису* $u_1, u_2, ..., u_m$;
10. *записать сингулярное разложение* $A = U\Sigma V^*$ *матрицы* A.

Замечание. В предыдущих рассуждениях и в правиле построения сингулярного разложения матрицы A можно начинать также с матрицы AA^*, ее собственных значений $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_m^2$ и произвольной ортонормированной системы собственных векторов $u_1, u_2, ..., u_m$ этой матрицы.

Тогда аналогично тому, как строилась ранее ортонормированная система собственных векторов

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1}, u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2}, \ldots, u_r = \frac{Av_r}{\sigma_r}$$

матрицы AA^*, будет построена ортонормированная система собственных векторов

$$v_1 = \frac{A^* u_1}{\sigma_1},\ v_2 = \frac{A^* u_2}{\sigma_2},\ \ldots,\ v_r = \frac{A^* u_r}{\sigma_r}$$

матрицы $A^* A$. При этом все другие утверждения и соотношения сохраняются в прежнем виде.

Пример 1. Построить сингулярное разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица

$$A^* A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 48 & 24 \\ 48 & 84 & 24 \\ 24 & 24 & 48 \end{pmatrix}$$

имеет характеристический многочлен

$$\left| A^* A - \lambda \cdot E \right| = \begin{vmatrix} 84-\lambda & 48 & 24 \\ 48 & 84-\lambda & 24 \\ 24 & 24 & 48-\lambda \end{vmatrix} = (144+\lambda)(\lambda-36)^2,$$

корнями которого являются $\lambda_1 = 144,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 36$. Поэтому сингулярными числами матрицы A являются числа $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 12$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sqrt{36} = 6$.

Следовательно, матрица

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь перейдем к построению ортонормированной системы собственных векторов линейного оператора с матрицей $A^* A$.

При $\lambda = 144$ система $(A^*A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} -60x_1 & + & 48x_2 & + & 24x_3 & = & 0, \\ 48x_1 & - & 60x_2 & + & 24x_3 & = & 0, \\ 24x_1 & + & 24x_2 & - & 96x_3 & = & 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из одного решения, например $(2,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$. Нормируя это решение, получим вектор

$$v_1 = \frac{1}{3} \cdot (2,\ \ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

При $\lambda = 36$ система $(A^*A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} 48x_1 & + & 48x_2 & + & 24x_3 & = & 0, \\ 48x_1 & + & 48x_2 & + & 24x_3 & = & 0, \\ 24x_1 & + & 24x_2 & + & 12x_3 & = & 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из двух решений, например, $(2, -1, -2)^{\mathrm{T}}$ и $(1, -2, 2)^{\mathrm{T}}$. Эти решения уже ортогональны. В противном случае их следовало бы ортогонализировать. Нормируя эти решения, получим ортонормированную систему векторов

$$v_2 = \frac{1}{3} \cdot (2,\ -1,\ -2)^{\mathrm{T}}, \quad v_3 = \frac{1}{3} \cdot (1,\ -2,\ 2)^{\mathrm{T}}.$$

Составим матрицу

$$V = (v_1,\ v_2,\ v_3) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь построим векторы

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_3 = \frac{Av_3}{\sigma_3} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Дополним систему векторов u_1, u_2, u_3 до ортонормированного базиса евклидова пространства Y_4, например, вектором $u_4 = \frac{1}{2} \cdot (1, -1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$.

Составим матрицу

$$U = (u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем искомое сингулярное разложение

$$A = U \Sigma V^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если воспользоваться сделанным выше замечанием, то решение этого примера можно провести следующим образом. Составим матрицу

$$AA^* = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 36 & 36 & 18 \\ 36 & 54 & 18 & 36 \\ 36 & 18 & 54 & 36 \\ 18 & 36 & 36 & 54 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен

$$\left| AA^* - \lambda \cdot E \right| = \lambda(\lambda - 144)(\lambda - 36)^2$$

имеет корни $\lambda_1 = \sigma_1^2 = 144$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 36$, $\lambda_4 = 0$. Поскольку $\min(m, n) = \min(4; 3) = 3$, то сингулярными числами матрицы A являются числа $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{144} = 12$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sqrt{36} = 6$. Следовательно, матрица

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1 = 144$ система $(AA^* - \lambda_1 E) \cdot X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} -90x_1 + 36x_2 + 36x_3 + 18x_4 = 0, \\ 36x_1 - 90x_2 + 18x_3 + 36x_4 = 0, \\ 36x_1 + 18x_2 - 90x_3 + 36x_4 = 0, \\ 18x_1 + 36x_2 + 36x_3 - 90x_4 = 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из одного решения, например $(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. Нормируя это решение, получим вектор

$$u_1 = \tfrac{1}{2} \cdot (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$$

При $\lambda_i = 36$ система $(AA^* - \lambda_i E) \cdot X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} 18x_1 & + & 36x_2 & + & 36x_3 & + & 18x_4 & = & 0, \\ 36x_1 & + & 18x_2 & + & 18x_3 & + & 36x_4 & = & 0, \\ 36x_1 & + & 18x_2 & + & 18x_3 & + & 36x_4 & = & 0, \\ 18x_1 & + & 36x_2 & + & 36x_3 & + & 18x_4 & = & 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из двух решений, например $(1, 1, -1, -1)^{\text{T}}$ и $(1, -1, 1, -1)^{\text{T}}$. Эти решения ортогональны. В противном случае их пришлось бы ортогонализировать. Нормируя эти решения, получим ортонормированную систему векторов

$$u_2 = \frac{1}{2} \cdot (1, 1, -1, -1)^{\text{T}}, \quad u_3 = \frac{1}{2} \cdot (1, -1, 1, -1)^{\text{T}}.$$

При $\lambda_4 = 0$ система $(AA^* - \lambda_4 E) \cdot X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} 54x_1 & + & 36x_2 & + & 36x_3 & + & 18x_4 & = & 0, \\ 36x_1 & + & 54x_2 & + & 18x_3 & + & 36x_4 & = & 0, \\ 36x_1 & + & 18x_2 & + & 54x_3 & + & 36x_4 & = & 0, \\ 18x_1 & + & 36x_2 & + & 36x_3 & + & 54x_4 & = & 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из одного решения, например $(1, -1, -1, 1)^{\text{T}}$. Нормируя это решение, получим вектор

$$u_4 = \frac{1}{2} \cdot (1, -1, -1, 1)^{\text{T}}.$$

Из векторов u_1, u_2, u_3, u_4, как из столбцов, построим матрицу

$$U = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь построим векторы

$$v_1 = \frac{A^* u_1}{\sigma_1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \frac{A^* u_2}{\sigma_2} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \frac{A^* u_3}{\sigma_3} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Число этих векторов равно размерности пространства X_3. Поэтому из них, как из столбцов, составим матрицу

$$V = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

и запишем сингулярное разложение

$$A = U \Sigma V^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Построить сингулярное разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица

$$A^*A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & 12 & -4 \\ 4 & -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

имеет характеристический многочлен

$$\left| A^*A - \lambda \cdot E \right| = \lambda(\lambda - 16)^3,$$

корнями которого являются $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 16$, $\lambda_4 = 0$. Поэтому сингулярными числами матрицы A являются числа $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sqrt{16} = 4$, $\sigma_4 = 0$.

Следовательно, матрица

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь перейдем к построению ортонормированной системы собственных векторов линейного оператора с матрицей A^*A.

При $\lambda = 16$ система уравнений $(A^*A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из трех решений, например, $(1, 1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, $(1, 1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, $(1, -1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. Эти решения уже попарно ортогональны. В противном случае их следовало бы ортогонализировать. Нормируя эти решения, получим ортонормированную систему векторов

$$v_1 = \frac{1}{2} \cdot (1,\ 1,\ 1,\ -1)^{\mathrm{T}}, \quad v_2 = \frac{1}{2} \cdot (1,\ 1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}},$$

$$v_3 = \frac{1}{2} \cdot (1,\ -1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

При $\lambda = 0$ система $(A^* A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 12x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 12x_4 = 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из одного решения, например $(-1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. Нормируя это решение, получим вектор

$$v_4 = \frac{1}{2} \cdot (-1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$$

Составим матрицу

$$V = (v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь построим векторы

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_3 = \frac{Av_3}{\sigma_3} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Дополним систему векторов u_1, u_2, u_3 до ортонормированного базиса евклидова пространства Y_4, например, вектором $u_4 = {}^{1}\!/_{2}\cdot(-1,\ 1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

Составим матрицу

$$U = (u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем искомое сингулярное разложение

$A = U\Sigma V^* =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Построить сингулярное разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2i & i \\ i & -2i \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим матрицу

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 2i & -i \\ 2 & -i & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2i & i \\ i & -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\left| A^* A - \lambda \cdot E \right| = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 \\ 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)^2$$

имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$. Сингулярными числами матрицы $A^* A$ являются числа $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{9} = 3$. Поэтому матрица

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = 9$ у системы $(A^* A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0$, т. е. у системы

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & = & 0, \\ 0 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & = & 0 \end{cases}$$

два свободных неизвестных. Поэтому она имеет фундаментальную систему решений, состоящую из двух решений, например, из решений $v_1 = (1, 0)^{\mathrm{T}}$, $v_2 = (0, 1)^{\mathrm{T}}$. Они ортогональны и нормированы. В противном случае их пришлось бы ортонормировать.

Из столбцов координат векторов v_1, v_2 составим матрицу

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь построим векторы

$$u_1 = \frac{A v_1}{\sigma_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2\,i & i \\ i & -2\,i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2\,i \\ i \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \frac{A v_2}{\sigma_2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2\,i & i \\ i & -2\,i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -2\,i \end{pmatrix}.$$

Дополним систему векторов u_1, u_2 до ортонормированного базиса пространства Y_3. Для этого найдем вектор $x = (x_1, x_2, x_3)^{\text{T}}$ из условий

$$\begin{cases} (x, u_1) = u_1^* x = 0, \\ (x, u_2) = u_2^* x = 0, \end{cases}$$

т. е. из условий

$$\begin{cases} 2x_1 + 2ix_2 - ix_3 = 0, \\ 2x_1 - ix_2 + 2ix_3 = 0. \end{cases}$$

Одним из решений этой системы является $x = (-i, 2, 2)^{\text{T}}$. Нормируя его, получим вектор $u_3 = \frac{1}{3}(-i, 2, 2)^{\text{T}}$.

Из столбцов координат векторов u_1, u_2, u_3 составим матрицу

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -i \\ -2i & i & 2 \\ i & -2i & 2 \end{pmatrix}$$

и запишем искомое сингулярное разложение $A = U\Sigma V^* =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2i & i \\ i & -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -i \\ -2i & i & 2 \\ i & -2i & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На практике конструирование сингулярного разложения матрицы целесообразно проводить средствами компьютерных технологий. Традиционная форма использования программных продуктов, разработанных экспертами, — это библиотеки стандартных программ. Примером могут служить библиотеки программ [16, 39–43].

Другой путь использования стандартного программного обеспечения — это работа в интерактивной программной среде, предоставляемой универсальными вычислительными системами, например, системой MATLAB [44, 45]. Большинство операций линейной алгебры реализованы в ней как встроенные функции. Подобные системы являются более дружественными к пользователю по сравнению, например, с библиотеками типа LAPACK, но они принимают некоторые алгоритмические решения автоматически, без учета мнения пользователя, что может сказаться на производительности программы и результатах вычислений.

2.6. Полярное разложение матрицы

Любой линейный оператор, действующий в евклидовом (унитарном) пространстве, разлагается в произведение симметричного (эрмитова) и ортогонального (унитарного) операторов. Для матриц это означает, что любая квадратная действительная (комплексная) матрица A разлагается в произведение

$$A = S\,P \tag{1}$$

симметричной (эрмитовой) матрицы S и ортогональной (унитарной) матрицы P. Такое разложение матрицы A называют ее полярным разложением. В полярном разложении (1) симметричная (эрмитова) составляющая S всегда определена однозначно и совпадает с матрицей $\sqrt{A\,A^*}$, т. е. имеет место соотношение

$$S = \sqrt{A\,A^*}\,. \tag{2}$$

Если матрица A невырожденная, то и ортогональная (унитарная) составляющая P также определена однозначно и имеет место соотношение

$$P = S^{-1}A = S\,(A^*)^{-1}\,. \tag{3}$$

В общем случае полярное разложение матрицы удобно получать с помощью ее сингулярного разложения. Действительно, если

$A = U\Sigma V^*$ — сингулярное разложение, то его можно преобразовать в разложение

$$A = U\Sigma U^* U V^*,$$

поскольку $U^*U = E$. Положив

$$S = U\Sigma U^*, \quad P = U V^*, \tag{4}$$

получим полярное разложение $A = S P$, так как $S = U\Sigma U^*$ — симметричная (эрмитова) матрица в силу выполнения соотношений

$$S^* = (U\Sigma U^*)^* = U\Sigma^* U^* = U\Sigma U^* = S,$$

а матрица $P = U V^*$ — ортогональная (унитарная) как произведение ортогональных (унитарных) матриц.

Пример 1. Построить полярное разложение матриц:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 8 & 15i \\ 15i & 8 \end{pmatrix}; \qquad б)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. *а*) Для невырожденной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 15i \\ 15i & 8 \end{pmatrix}$$

матрица

$$A A^* = \begin{pmatrix} 8 & 15i \\ 15i & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -15i \\ -15i & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 289 & 0 \\ 0 & 289 \end{pmatrix}.$$

Поэтому по формулам (2) и (3) получаем

$$S = \sqrt{A A^*} = \begin{pmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 17 \end{pmatrix},$$

$$P = S^{-1}A = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 15i \\ 15i & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 8 & 15i \\ 15i & 8 \end{pmatrix},$$

следовательно, искомым разложением является разложение

$$A = S\,P = \begin{pmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 17 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 15\,i \\ 15\,i & 8 \end{pmatrix}.$$

б) Поскольку матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

вырожденная, то сначала для нее построим сингулярное разложение. Матрица

$$A\,A^* = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 25 \\ 25 & 25 \end{pmatrix}$$

имеет характеристический многочлен

$$\left| A\,A^* - \lambda E \right| = \begin{vmatrix} 25-\lambda & 25 \\ 25 & 25-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 50\,\lambda\,,$$

корнями которого являются числа $\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = 0$. Поэтому $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 5\sqrt{2}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 0$ и матрица

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = 50$ система $(A\,A^* - \lambda E)\,X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} -25 \cdot x_1 & + & 25 \cdot x_2 & = & 0\,, \\ 25 \cdot x_1 & - & 25 \cdot x_2 & = & 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из одного решения, например, из решения $b_1 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$. Нормируя его, получим $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(1, 1)^{\mathrm{T}}$.

При $\lambda = 0$ аналогичным образом найдем вектор $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(1, -1)^{\mathrm{T}}$. Из столбцов координат векторов e_1 и e_2 составим матрицу

$$V=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Далее построим вектор

$$f_1=\frac{1}{\sigma_1}A\,e_1=\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3 & 3\\ 4 & 4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$$

и дополним его до ортонормированного базиса в E_2, например, вектором $f_2={}^1\!/_5\,(4,-3)^{\mathrm{T}}$.

Из столбцов координат векторов f_1 и f_2 составим матрицу

$$U=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$$

и выпишем искомое сингулярное разложение

$$A=U\Sigma V^*=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Теперь по формулам (4) вычислим матрицы $S=U\Sigma U^*=$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{5}\begin{pmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{pmatrix},$$

$$P=UV^*=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}7 & -1\\ 1 & 7\end{pmatrix}$$

и запишем искомое полярное разложение

$$A=S\,P=\frac{\sqrt{2}}{5}\begin{pmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}7 & -1\\ 1 & 7\end{pmatrix}.$$

Наряду с полярным разложением $A=S\,P$ применяют также и полярное разложение

$$A=P_1S_1, \tag{5}$$

в котором правый множитель S_1 является симметричной (эрмитовой) матрицей, а левый множитель P_1 — ортогональной (унитарной) матрицей. Полярное разложение вида (5) может быть получено из полярного разложения (1) сопряженной матрицы A^*. Действительно, если $A^* = SP$, то

$$A = (SP)^* = P^* S^* = P_1 S_1$$

при $P_1 = P^*$ и $S_1 = S^*$.

Такое разложение можно получить также с помощью сингулярного разложения $A = U\Sigma V^*$, представив его в виде

$$A = U\Sigma V^* = (UV^*)(V\Sigma V^*)$$

и положив

$$P_1 = UV^*, \qquad S_1 = V\Sigma V^*. \tag{6}$$

При этом

$$S_1 = V\Sigma V^* = \sqrt{V\Sigma^2 V^*} = \sqrt{(V\Sigma U^*)(U\Sigma V^*)} = \sqrt{A^* A}\,.$$

Полярное разложение можно обобщить на произвольные не обязательно квадратные матрицы. Любую $(m\times n)$-матрицу A можно представить в виде $A = SP$ и в виде $A = P_1 S_1$, где S и S_1 — симметричные (эрмитовы) матрицы порядков m и n, а P и P_1 — обобщенные ортогональные (унитарные) $(m\times n)$-матрицы, у которых при $m<n$ ортонормированы строки, а при $m>n$ ортонормированы столбцы. Это равносильно равенствам $PP^* = E$, $P_1 P_1^* = E$ при $m<n$ и равенствам $P^* P = E$, $P_1^* P_1 = E$ при $m>n$. Указанные полярные разложения можно получить с помощью сингулярного разложения (см. 2.5), записанного в виде $A = U\Sigma_m V_1^*$ или в виде $A = U_1 \Sigma_n V^*$.

Пусть, например, $m<n$. Тогда матрица A имеет разложение $A = U\Sigma_m V_1^*$. Преобразуем это разложение в разложение

$$A = (U\Sigma_m U^*)\cdot(UV_1^*)$$

и положим

$$S = U\Sigma_m U^*,\ P = UV_1^*. \tag{7}$$

Тогда получим разложение $A = SP$, в котором S — симметричная (эрмитова), а P — обобщенная ортогональная (унитарная) матрица, удовлетворяющая соотношениям

$$PP^* = UV_1^* V_1 U^* = UEU^* = E.$$

Аналогично получается разложение $A = P_1 S_1$, где

$$P_1 = U V_1^*, \qquad S_1 = V_1\Sigma_m V_1^*. \tag{8}$$

Для матриц S и S_1 сохраняется связь с матрицей A:

$$S = U\Sigma_m U^* = \sqrt{U\Sigma_m^2 U^*} = \sqrt{(U\Sigma_m V_1^*)(V_1\Sigma_m U^*)} = \sqrt{AA^*},$$

$$S_1 = V_1\Sigma_m V_1^* = \sqrt{V_1\Sigma_m^2 V_1^*} = \sqrt{(V_1\Sigma_m U^*)(U\Sigma_m V_1^*)} = \sqrt{A^*A}.$$

При $m>n$ используется сингулярное разложение $A = U_1\Sigma_n V^*$. С помощью этого разложения аналогичным образом получают полярные разложения $A = SP$ и $A = P_1 S_1$, в которых

$$S = U_1\Sigma_n U_1^*,\ P = U_1 V^*, \tag{9}$$

$$S_1 = V\Sigma_n V^*,\ P_1 = U_1 V^*. \tag{10}$$

Пример 2. Построить полярное разложение $A = SP$ для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для матрицы A сингулярное разложение, полученное в примере 1 параграфа 2.5, запишем в виде

$$A = U_1 \Sigma_n V^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Далее по формулам (9) найдем матрицы $S = U_1 \Sigma_n U_1^* =$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$P = U_1 V^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь запишем искомое полярное разложение

$$A = S\,P = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.7. $Q\,R\,S$ -разложения матрицы

На практике часто приходится упрощать заданные матрицы, используя для этого ортогональные (унитарные) матрицы. При этом любые преобразования матрицы с помощью умножений ее справа и слева на ортогональные (унитарные) матрицы приводят к $Q\,R\,S$ -разложениям исходной матрицы.

Действительно, если подвергнем матрицу A умножению слева на ортогональные (унитарные) матрицы $H_1, H_2, \ldots, H_k$ и справа на ортогональные (унитарные) матрицы $U_1, U_2, \ldots, U_l$, то получим соотношение

$$H_k \ldots H_2 H_1 A U_1, U_2, \ldots, U_l = R$$

с результирующей матрицей R нужного вида.

Из этого соотношения получаем QRS-разложение

$$A = QRS,$$

где положено

$$Q = (H_k H_{k-1} \ldots H_2 H_1)^{-1} = H_1^{-1} H_2^{-1} \ldots H_k^{-1},$$

$$S = (U_1, U_2, \ldots, U_l)^{-1} = U_l^{-1} U_{l-1}^{-1} \ldots U_2^{-1} U_1^{-1}.$$

Такие разложения матриц называют их **ортогональными разложениями**. Обычно стремятся, чтобы матрица R в таком разложении имела более простой вид, чем исходная матрица. Например, бывает желательным, чтобы матрица R была треугольной, почти треугольной, диагональной, двух- или трехдиагональной.

Пример. Построить QRS-разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 12 \\ \boxed{3} & 2 & 8 \\ \boxed{4} & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

с трехдиагональной матрицей R.

Решение. Сначала матрицу A отражениями приведем к трехдиагональной форме. Чтобы обнулить элемент в позиции $(3,1)$, возьмем вектор $x = (3,4)^{\mathrm{T}}$, положим $x' = (-|x|, 0)^{\mathrm{T}} = (-5,0)^{\mathrm{T}}$, $v = x - x' = (8,4)^{\mathrm{T}}$ и построим матрицу

$$H_1 = E - \frac{2vv^{\mathrm{T}}}{|v|^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}(8 \quad 4) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вложим матрицу H_1 в правый нижний угол единичной матрицы третьего порядка, т. е. составим матрицу

$$U_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

и вычислим матрицу

$$A_1 = U_1 A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 5 & 12 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 30 & \boxed{25 \quad 60} \\ -25 & -42 & -52 \\ 0 & 19 & -11 \end{pmatrix}.$$

Чтобы в матрице A_1 обнулить элемент в позиции $(1, 3)$, возьмем вектор $x = (25, 60)^{\mathrm{T}}$, положим $x' = (|x|, 0)^{\mathrm{T}} = (65, 0)^{\mathrm{T}}$, $v = x - x' = (-40, 60)^{\mathrm{T}}$ и построим матрицу $H_2 =$

$$= E - \frac{2vv^{\mathrm{T}}}{|v|^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2600}\begin{pmatrix} -40 \\ 60 \end{pmatrix}(-40 \quad 60) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вложим матрицу H_2 в правый нижний угол единичной матрицы третьего порядка, т. е. составим матрицу

$$U_2 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

и вычислим матрицу

$$A_1 U_2 = U_1 A U_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 30 & 25 & 60 \\ -25 & -42 & -52 \\ 0 & 19 & -11 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 12 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{65}\begin{pmatrix} 390 & 845 & 0 \\ -325 & -834 & -244 \\ 0 & -37 & 283 \end{pmatrix} = R.$$

Матрица R уже нужного вида — трехдиагональная.

Из последнего равенства получаем искомое QRS-разложение $A = QRS =$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{65}\begin{pmatrix} 390 & 845 & 0 \\ -325 & -834 & -244 \\ 0 & -37 & 283 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

с ортогональными матрицами $Q = U_1^{-1}$, $S = U_2^{-1}$ и трехдиагональной матрицей R.

Частными случаями QRS-разложений являются канонические разложения с ортогональными (унитарными) трансформирующими матрицами, QR- и сингулярные разложения матриц. QRS-разложения находят широкое применение в теории и вычислительной практике.

Упражнения

Упражнение 1. Построить LU- и LDU_1-разложения следующих матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 12 & 25 & 14 \\ 20 & 42 & 33 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 14 & 22 \\ 4 & 10 & 19 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 6 & 8 & 16 \\ 6 & 12 & 28 \end{pmatrix}$.

Упражнение 2. Построить $U_1^{\mathrm{T}} D U_1$- и $V^{\mathrm{T}} V$-разложения следующих симметричных матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 12 & 45 & 42 \\ 8 & 42 & 53 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 32 \\ 16 & 25 & 41 \\ 32 & 41 & 77 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 18 \\ 9 & 13 & 22 \\ 18 & 22 & 56 \end{pmatrix}$.

Упражнение 3. Построить скелетное разложение следующих матриц:

1) $$A=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\2&3&1&5\\1&8&2&4\\3&6&2&9\\1&5&4&6\end{pmatrix};$$ 2) $$A=\begin{pmatrix}1&1&3&2\\1&2&4&1\\1&3&5&0\\1&1&3&2\\1&2&4&1\end{pmatrix};$$ 3) $$A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&1&3&5\\1&2&3&1\\2&1&3&5\\1&2&3&1\end{pmatrix};$$

4) $$\begin{pmatrix}1&3+i&5+i\\2&1+i&1+3i\\1-i&-i&2-3i\end{pmatrix};$$ 5) $$\begin{pmatrix}1&2+i&3-2i\\1+i&1-i&5+9i\\1&3&1\end{pmatrix};$$ 6) $$\begin{pmatrix}1&1+i&3+i\\-i&3-i&3-3i\\i&1-i&1+i\end{pmatrix}.$$

Упражнение 4. Построить канонические разложения и, пользуясь ими, вычислить сотую степень и корень квадратный из следующих матриц:

1) $$A=\begin{pmatrix}7&-6&6\\18&-17&18\\15&-15&16\end{pmatrix};$$ 2) $$A=\begin{pmatrix}17&-80&-48\\-8&41&24\\16&-80&-47\end{pmatrix};$$ 3) $$A=\begin{pmatrix}-5&18&9\\-9&22&9\\12&-24&-8\end{pmatrix}.$$

Упражнение 5. Построить канонические разложения с ортогональными трансформирующими матрицами для следующих симметричных матриц:

1) $$A=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\-2&5&2\\-1&2&2\end{pmatrix};$$ 2) $$A=\begin{pmatrix}0&2&5\\2&-3&-2\\5&-2&0\end{pmatrix};$$ 3) $$A=\begin{pmatrix}11&2&-8\\2&2&10\\-8&10&-5\end{pmatrix};$$

4) $$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix};$$ 5) $$A=\begin{pmatrix}3&-3&-1\\-3&3&1\\-1&1&7\end{pmatrix};$$ 6) $$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}.$$

Упражнение 6. Построить канонические разложения с унитарными трансформирующими матрицами для следующих матриц:

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2+2i & 0 \\ 2-2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Упражнение 7. Убедиться в том, что следующие матрицы являются нормальными, и построить для них канонические разложения с унитарными трансформирующими матрицами:

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 3 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} 2-i & -1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{pmatrix}$.

Упражнение 8. Построить QR-разложения следующих матриц:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 4 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ i & 2 & i \\ -i & -i & 3 \end{pmatrix}$; 5) $A=\begin{pmatrix} 3 & i & -i \\ -i & 2 & i \\ i & -i & 3 \end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 9. Построить qR-разложения следующих матриц:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Упражнение 10. Построить сингулярные разложения следующих матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 11. Построить полярные разложения следующих матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 8 & 15i \\ 15i & 8 \end{pmatrix}$.

Упражнение 12. Построить QRS-разложения с трехдиагональными матрицами R для следующих матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 15 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Глава 3
Обращение прямоугольных матриц

Если A — квадратная невырожденная матрица, то для нее существует обратная матрица A^{-1}. Если же A — не квадратная, а прямоугольная $(m\times n)$-матрица $(m\neq n)$ или квадратная, но вырожденная матрица, то она не имеет обратной матрицы и символ A^{-1} не имеет смысла. В то же время, как будет показано далее, для произвольной прямоугольной матрицы A существует псевдообратная матрица A^{+}, которая обладает некоторыми свойствами обратной матрицы и имеет важные применения при решении систем линейных алгебраических уравнений. В случае, если A — квадратная невырожденная матрица, псевдообратная матрица A^{+} совпадает с обратной матрицей A^{-1}.

Определение. *Матрица A^{+} размера $(n\times m)$ называется псевдообратной к действительной или комплексной $(m\times n)$-матрице A, если выполняются соотношения*

$$A A^{+} A = A, \qquad A^{+} = U A^{*} = A^{*} V\,, \tag{1}$$

где U и V — некоторые матрицы.

Равенство $A^{+}=UA^{*}$ означает, что строки матрицы A^{+} являются линейными комбинациями строк матрицы A^{*}. Аналогично равенство $A^{+}=A^{*}V$ означает, что столбцы матрицы A^{+} являются линейными комбинациями столбцов матрицы A^{*}.

Теорема 1. *Для любой $(m\times n)$-матрицы A существует, и притом единственная, псевдообратная матрица A^{+}.*

Если ранг матрицы A совпадает с количеством ее столбцов (матрица A имеет максимальный столбцовый ранг), то

$$A^{+} = (A^{*}A)^{-1}\cdot A^{*}. \tag{2}$$

Если ранг матрицы A совпадает с количеством ее строк (матрица A имеет максимальный строчный ранг), то

$$A^{+} = A^{*}\cdot(A A^{*})^{-1}. \tag{3}$$

В общем случае, если матрица A имеет скелетное разложение $A = BC$, то

$$A^{+} = C^{+}B^{+} = C^{*}\cdot(C\cdot C^{*})^{-1}(B^{*}\cdot B)^{-1}B^{*}. \qquad (4)$$

Доказательство единственности матрицы A^{+}.

Пусть A_1^{+} и A_2^{+} — две матрицы, являющиеся псевдообратными к матрице A. Тогда в силу определения псевдообратной матрицы

$$A A_1^{+} A = A, \qquad A_1^{+} = U_1 A^{*} = A^{*} V_1,$$

$$A A_2^{+} A = A, \qquad A_2^{+} = U_2 A^{*} = A^{*} V_2.$$

Введем обозначения

$$D = A_1^{+} - A_2^{+}, \qquad U = U_1 - U_2, \qquad V = V_1 - V_2.$$

Тогда

$$ADA = A\cdot(A_1^{+} - A_2^{+})\cdot A = A\cdot A_1^{+}\cdot A - A\cdot A_2^{+}\cdot A = A - A = 0,$$

$$D = A_1^{+} - A_2^{+} = U_1\cdot A^{*} - U_2\cdot A^{*} = (U_1 - U_2)\cdot A^{*} = U\cdot A^{*},$$

$$D = A_1^{+} - A_2^{+} = A^{*}\cdot V_1 - A^{*}\cdot V_2 = A^{*}\cdot(V_1 - V_2) = A^{*}\cdot V.$$

Отсюда следует, что $(DA)^{*}(DA) =$

$$= A^{*}D^{*}DA = A^{*}(A^{*}V)^{*}DA = A^{*}V^{*}ADA = A^{*}V^{*}0 = 0,$$

т. е. матрица Грама системы столбцов матрицы DA равна нулю. Это равносильно утверждению, что и $DA = 0$. Чтобы в этом убедиться, обозначим столбцы матрицы DA через $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Тогда замечаем, что элементами матрицы Грама

$$(DA)^{*}(DA) = \begin{pmatrix} u_1^{*} \\ u_2^{*} \\ \vdots \\ u_n^{*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix}$$

являются скалярные произведения $u_k^{*}u_j = (u_j, u_k)$, и каждое из них, в силу соотношения $(DA)^{*}(DA) = 0$, равно нулю. В частности, для диагональных элементов этой матрицы имеем

$$u_j^* u_j = (u_j, u_j) = \left| u_j \right|^2 = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Это означает, что все столбцы матрицы DA нулевые. Поэтому и матрица $DA = 0$. Теперь подсчитаем матрицу Грама системы столбцов матрицы D^*:

$$DD^* = D \cdot (U \cdot A^*)^* = DAU^* = 0 \cdot U^* = 0.$$

Поэтому, как и при доказательстве равенства $DA = 0$, убеждаемся в том, что матрица $D^* = 0$. Следовательно, и матрица $D = A_1^+ - A_2^+ = 0$. Мы пришли к выводу, что матрицы A_1^+ и A_2^+ совпадают. Этим завершено доказательство единственности псевдообратной матрицы A^+ к матрице A.

Доказательство существования матрицы A^+.

Доказательство существования псевдообратной матрицы сводится к проверке соотношений (1), т. е. соотношений

$$A \cdot A^+ \cdot A = A, \qquad A^+ = U \cdot A^* = A^* \cdot V,$$

в предположении, что матрица A^+ вычислена в зависимости от ранга по одной из формул (2), (3), (4).

Пусть матрица A имеет максимальный столбцовый ранг. В этом случае столбцы матрицы A линейно независимы, а матрица Грама A^*A системы столбцов матрицы A является невырожденной. Положим $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ и проверим выполнение соотношений (1). Имеем

$$AA^+A = A(A^*A)^{-1}A^*A = AE = A,$$

равенство $A^+ = U \cdot A^*$ выполняется при $U = (A^*A)^{-1}$, а равенство $A^+ = A^* \cdot V$ выполняется при $V = A \cdot (A^*A)^{-2} \cdot A^*$. Следовательно, матрица $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ является псевдообратной для матрицы A максимального столбцового ранга.

Аналогичным образом можно убедиться в том, что для матрицы A максимального строчного ранга матрица $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ является псевдообратной.

Рассмотрим произвольную матрицу A со скелетным разложением $A = BC$. Положим

$$A^+ = C^+B^+ = C^* \cdot (CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*.$$

Тогда

$$AA^+A = (BC)(C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*)(BC) =$$
$$= B(CC^*)\cdot(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C = BC = A,$$

равенство $A^+ = U \cdot A^*$ выполняется при

$$U = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C,$$

а равенство $A^+ = A^* \cdot V$ — при

$$V = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*.$$

Поэтому указанная матрица A^+ является псевдообратной к матрице A. Теорема доказана.

Следствие. Для квадратной невырожденной матрицы A псевдообратная матрица A^+ совпадает с матрицей A^{-1}.

Доказательство. В этом случае для вычисления псевдообратной матрицы можно воспользоваться любой из формул (2) или (3). Учитывая, что матрицы A и A^* имеют обратные матрицы, из формулы (2) получаем

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* = A^{-1}(A^*)^{-1}A^* = A^{-1}.$$

Лемма 1. *Если* $(m \times n)$*-матрица* A *имеет* QRS*-разложение* $A = QRS$ *с ортогональными (унитарными) матрицами* Q, S *и некоторой матрицей* R*, то*

$$A^+ = S^*R^+Q^*. \qquad (5)$$

Доказательство. По определению псевдообратной матрицы имеем

$$RR^+R = R, \qquad R^+ = U_1R^* = R^*V_1.$$

Проверим выполнение аналогичных соотношений для матрицы $A = QRS$ в предположении, что $A^+ = S^*R^+Q^*$. Учитывая равенства $RR^+R = R$, $Q^*Q = E$, $SS^* = E$, получаем

$$A A^{+} A = (QRS)\cdot(S^{*}R^{+}Q^{*})\cdot(QRS) =$$
$$= QR(SS^{*})R^{+}(Q^{*}Q)RS = QRR^{+}RS = QRS = A.$$

Далее,

$$A^{+} = S^{*}R^{+}Q^{*} = S^{*}U_1 R^{*}Q^{*} = (S^{*}U_1 S)(S^{*}R^{*}Q^{*}) =$$
$$= (S^{*}U_1 S)(QRS)^{*} = UA^{*},$$

где $U = S^{*}U_1 S$, и

$$A^{+} = S^{*}R^{+}Q^{*} = S^{*}R^{*}V_1 Q^{*} = (S^{*}R^{*}Q^{*})(QV_1 Q^{*}) =$$
$$= (QRS)^{*}(QV_1 Q^{*}) = A^{*}V,$$

где $V = QV_1 Q^{*}$. Так как для матрицы $A^{+} = S^{*}R^{+}Q^{*}$ выполняются все условия определения псевдообратной матрицы к матрице $A = QRS$, то утверждение леммы доказано.

Лемма 2. *Для матрицы*

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \lambda_r & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

псевдообратной является матрица

$$R^{+} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \lambda_r^{-1} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство состоит в проверке выполнения соотношений (1) $RR^{+}R =$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_r^{-1} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \lambda_r & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}=R.$$

Далее

$$R^{+}=\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \lambda_r^{-1} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} (\bar{\lambda}_1\lambda_1)^{-1} & & & & \\ & (\bar{\lambda}_2\lambda_2)^{-1} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & (\bar{\lambda}_r\lambda_r)^{-1} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \bar{\lambda}_r & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}=UR^{*},$$

где

$$U = \begin{pmatrix} (\bar{\lambda}_1\lambda_1)^{-1} & & & & \\ & (\bar{\lambda}_2\lambda_2)^{-1} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & (\bar{\lambda}_r\lambda_r)^{-1} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$R^+ = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \lambda_r^{-1} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \bar{\lambda}_r & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\bar{\lambda}_1\lambda_1)^{-1} & & & & \\ & (\bar{\lambda}_2\lambda_2)^{-1} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & (\bar{\lambda}_r\lambda_r)^{-1} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = R^* V,$$

где

$$V = \begin{pmatrix} (\bar{\lambda}_1\lambda_1)^{-1} & & & & \\ & (\bar{\lambda}_2\lambda_2)^{-1} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & (\bar{\lambda}_r\lambda_r)^{-1} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Если заметить, что для матрицы R скелетным разложением является разложение $R = BC$ с множителями

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то доказательство леммы 2 легко провести непосредственным вычислением матрицы R^+ по формуле (4).

Из доказанных лемм вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $A=U\Sigma V^*$ — *сингулярное разложение* $(m\times n)$ *-матрицы* A *с* $(m\times n)$ *-матрицей*

$$\Sigma=\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \sigma_r & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$A^+=V\Sigma^+U^*, \tag{6}$$

где $(n\times m)$ *-матрица*

$$\Sigma^+=\begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & & & \\ & \sigma_2^{-1} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \sigma_r^{-1} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $A = P\Lambda P^{-1}$ *— каноническое разложение матрицы* A *с ортогональной (унитарной) матрицей* P*, в котором*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \lambda_r & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$A^+ = P\Lambda^+ P^{-1}, \tag{7}$$

где

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \lambda_r^{-1} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта теорема и формулы (2)–(4) дают удобный способ вычисления псевдообратной матрицы.

Пример 1. Найти псевдообратную матрицу A^+ для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для матрицы A в примере 1 параграфа 2.2 построено скелетное разложение

$$A = BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для нахождения псевдообратной матрицы A^+ применим формулу (4). Для этого сначала вычислим

$$B^+ = (B^* B)^{-1} B^* = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} 15 & -8 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{41} \begin{pmatrix} -1 & 22 & -9 & 7 \\ 6 & -9 & 13 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C^+ = C^* (C C^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right]^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Теперь по формуле (4) получаем

$$A^+ = C^+ B^+ = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{41} \begin{pmatrix} -1 & 22 & -9 & 7 \\ 6 & -9 & 13 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{574}\begin{pmatrix} 31 & 56 & 33 & 29 \\ 54 & 42 & 76 & 32 \\ -15 & 84 & -53 & 23 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти псевдообратную матрицу A^+ для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для матрицы A в примере 1 параграфа 2.5 построено сингулярное разложение

$$A = U\Sigma V^* = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому можно применить формулу (6), согласно которой

$$A^+ = V\Sigma^+U^* = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}\times$$

$$\times\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{72}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг матрицы A совпадает с числом ее столбцов, то для нахождения матрицы A^+ можно также воспользоваться формулой (2), в соответствии с которой

$$A^{+}=(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}=\left[\begin{pmatrix}7&5&3&1\\1&5&3&7\\2&-2&6&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&1&2\\5&5&-2\\3&3&6\\1&7&2\end{pmatrix}\right]^{-1}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}7&5&3&1\\1&5&3&7\\2&-2&6&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84&48&24\\48&84&24\\24&24&48\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7&5&3&1\\1&5&3&7\\2&-2&6&2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{12\cdot 36}\cdot\begin{pmatrix}8&-4&-2\\-4&8&-2\\-2&-2&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&5&3&1\\1&5&3&7\\2&-2&6&2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{72}\cdot\begin{pmatrix}8&4&0&-4\\-4&4&0&8\\1&-7&9&1\end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти псевдообратную матрицу к матрице

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\1&-i\\i&1\end{pmatrix}.$$

Решение. Ранг матрицы A равен числу ее столбцов. Поэтому применима формула (2). По ней получаем

$$A^{+}=(A^{*}A)^{-1}A^{*}=\left[\begin{pmatrix}1&1&-i\\2&i&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&-i\\i&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}1&1&-i\\2&i&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3&2-2i\\2+2i&6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&-i\\2&i&1\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}6&-2+2i\\-2-2i&3\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}1 & 1 & -i\\ 2 & i & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2+4i & 4-2i & -2-4i\\ 4-2i & -2+i & 1+2i\end{pmatrix}.$$

Для построения псевдообратной матрицы A^+ к $(m\times n)$-матрице A можно пользоваться *методом Гревилля* [1, 3, 12], не требующим знания скелетного разложения матрицы A и вычисления определителей. Для этого вводят обозначения:

a_k — k-й столбец матрицы A, $k=1,2,\ldots,n$;

$A_k=(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ — матрица, образованная первыми k столбцами матрицы A, $k=1,2,\ldots,n$;

b_k — последняя строка матрицы A_k^+, $k=1,2,\ldots,n$,

и применяют формулы:

$$A_1^+=a_1^+=(a_1^*a_1)^{-1}a_1^* \text{ и при } k=2,3,\ldots,n \quad A_k^+=\begin{pmatrix}B_k\\ b_k\end{pmatrix},$$

где $B_k=A_{k-1}^+-d_k\,b_k$, $d_k=A_{k-1}^+a_k$, причем

при $c_k=a_k-A_{k-1}d_k\neq 0$, $\quad b_k=c_k^+=(c_k^*c_k)^{-1}c_k^*$,

при $c_k=0$, $\quad b_k=(E+d_k^*d_k)^{-1}d_k^*A_{k-1}^+$.

Матрица A_k^+, построенная по указанным формулам, является псевдообратной к матрице A_k, $k=1,2,\ldots,n$. В частности, $A_n^+=A^+$.

Метод Гревилля особенно удобен, если в процессе исследования с течением времени данные пополняются и расчеты, ранее проведенные с матрицей A_k, нужно повторить с матрицей A_{k+1}, полученной из матрицы A_k добавлением $(k+1)$-го столбца. Если добавляются строки, то этот же метод применяется к транспонированной матрице.

Пример 4. Методом Гревилля вычислить псевдообратные матрицы к матрице

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и к матрице A_4, полученной присоединением к матрице A столбца $a^4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Решение. Построим последовательность матриц A_k^+, $k=1$, 2, ..., n.

При $k=1$ получаем $A_1^+=(a_1^* a_1)^{-1} a_1^*=$

$$=\left(\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}.$$

При $k=2$

$$d_2=A_1^+ a_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\1\end{pmatrix}=-\frac{3}{2},$$

$$c_2=a_2-A_1 d_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\1\end{pmatrix}+\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\neq 0.$$

Поэтому $b_2 = c_2^+ = (c_2^* c_2)^{-1} c_2^* =$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

и $B_2 = A_1^+ - d_2 b_2 =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A_2^+ = \begin{pmatrix} B_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

При $k = 3$

$$d_3 = A_2^+ a_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c_3 = a_3 - A_2 d_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Поэтому $b_3 = (E + d_3^* d_3)^{-1} d_3^* A_2^+ =$

$$= \left(E + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

и $B_3 = A_2^+ - d_3 b_3 =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A_3^+ = \begin{pmatrix} B_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = A^+ .$$

Перейдем к вычислению псевдообратной матрицы A_4^+ к матрице

$$A_4 = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

полученной присоединением столбца $a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ к матрице A. Поскольку уже известна матрица $A^+ = A_3^+$, то по методу Гревилля остается провести вычисления только при $k = 4$, т. е. следующие расчеты:

$$d_4 = A_3^+ a_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c_4 = a_4 - A_3 d_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Поэтому $b_4 = (E + d_4^* d_4)^{-1} d_4^* A_3^+ =$

$$= \left(E + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

и

$$B_4 = A_3^+ - d_4 b_4 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$A_4^+ = \begin{pmatrix} B_4 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

методом Гревилля построить псевдообратную матрицу.

Решение. По указанным выше формулам получаем:

при $k = 1$

$$A_1^+ = (a_1^* a_1)^{-1} a_1^* = \left[\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \end{pmatrix};$$

при $k = 2$

$$d_2 = A_1^+ a_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1+2i}{3},$$

$$c_2 = a_2 - A_1 d_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1+2i}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1+i \\ 1+i \\ 2-2i \end{pmatrix} \neq 0.$$

Поэтому $b_2 = c_2^+ = (c_2^* c_2)^{-1} c_2^* =$

$$= \left[\frac{1}{3} (-1-i \quad 1-i \quad 2+2i) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1+i \\ 1+i \\ 2-2i \end{pmatrix} \right]^{-1} \frac{1}{3} (-1-i \quad 1-i \quad 2+2i) =$$

$$= \frac{1}{4} (-1-i \quad 1-i \quad 2+2i)$$

и $B_2 = A_1^+ - d_2 b_2 =$

$$= \frac{1}{3}(1 \quad i \quad 1) - \frac{1+2i}{3} \cdot \frac{1}{4}(-1-i \quad 1-i \quad 2+2i) =$$

$$= \frac{1}{4}(1+i \quad -1+3i \quad 2-2i).$$

Следовательно,

$$A_2^+ = \begin{pmatrix} B_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+i & -1+3i & 2-2i \\ -1-i & 1-i & 2+2i \end{pmatrix} = A^+.$$

При вычислении псевдообратной матрицы A^+ к действительной $(m \times n)$-матрице A можно пользоваться (см. [1]) *итерационной формулой Бен-Израиля*:

$$(A^+)^{(k+1)} = (A^+)^{(k)}\left[2E - A \cdot (A^+)^{(k)}\right], \quad (A^+)^{(0)} = \alpha A^{\mathrm{T}},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где α — число, удовлетворяющее условию

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

при $\lambda_{\max}$, являющемся максимальным собственным значением матрицы $A^{\mathrm{T}}A$ или, что то же самое, матрицы AA^{T}. Вместо $\lambda_{\max}$ можно брать какую-либо норму этих матриц (о норме матриц см. параграф 1.20). При известном $\lambda_{\max}$ обычно полагают $\alpha = \dfrac{1,6}{\lambda_{\max}}$.

Пример 6. Для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

с помощью итерационной формулы Бен-Израиля построить псевдообратную матрицу.

Решение. Характеристический многочлен

$$\left| A A^{\mathrm{T}} - \lambda E \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(\lambda^2 - 16\lambda + 56)$$

имеет корни $\lambda_1 = 8+\sqrt{8}$, $\lambda_2 = 8-\sqrt{8}$, $\lambda_3 = 0$.

Поэтому за α можно принять $\alpha = \dfrac{1,6}{8+\sqrt{8}} \approx 0,14775922$ и за $(A^+)^{(0)}$ — матрицу

$$(A^+)^{(0)} = \alpha A^{\mathrm{T}} = 0,14775922 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле Бен-Израиля при $k = 1, 2, 3, 4$ получим

$$(A^+)^{(1)} = (A^+)^{(0)} \left[2E - A\cdot (A^+)^{(0)} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{0,2}0818728 & \underline{0,3}2904341 & -\underline{0,0}33524986 \\ \underline{0,1}2085613 & \underline{0,0}87331148 & 0,18790611 \end{pmatrix},$$

$$(A^+)^{(2)} = \begin{pmatrix} \underline{0,21}593801 & \underline{0,35}261602 & -\underline{0,0}57098541 \\ \underline{0,1}365737 & \underline{0,07}9468314 & \underline{0,2}507842 \end{pmatrix},$$

$$(A^+)^{(3)} = \begin{pmatrix} \underline{0,214}53365 & \underline{0,35}672228 & -\underline{0,0}69534975 \\ \underline{0,141}999 & \underline{0,07}2605168 & \underline{0,28}121786 \end{pmatrix},$$

$$(A^+)^{(4)} = \begin{pmatrix} \underline{0,2142}2526 & \underline{0,3571}7893 & -\underline{0,071}375151 \\ \underline{0,1427}5098 & \underline{0,071}507542 & \underline{0,285}66921 \end{pmatrix}.$$

В каждом приведенном приближении к матрице A^+ подчеркнуты верные знаки элементов матрицы A^+.

Псевдообратная матрица обладает следующими свойствами.

Свойство 1. $(A^*)^+ = (A^+)^*$.

Доказательство. Если матрица A имеет скелетное разложение $A = BC$, то $A^* = C^*B^*$ — скелетное разложение матрицы A^*. Учитывая это, получаем

$$(A^*)^+ = (B^*)^+(C^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C =$$

$$= \left[C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*\right]^* = (A^+)^*.$$

Свойство 2. $(A^+)^+ = A$.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда матрица A имеет максимальный столбцовый ранг. Тогда в соответствии с формулой (2), $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$, причем ранг матрицы A^+ совпадает с рангом матрицы A^* и матрица A^+ имеет максимальный строчный ранг. Поэтому

$$(A^+)^+ = (A^+)^* \cdot \left[A^+ \cdot (A^+)^*\right]^{-1} =$$

$$= A(A^*A)^{-1}\left[(A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}\right]^{-1} = A(A^*A)^{-1}A^*A = A.$$

Аналогично устанавливается равенство $(A^+)^+ = A$ для матриц максимального строчного ранга.

Наконец, в общем случае, выбрав скелетное разложение $A = BC$ матрицы A, получаем скелетное разложение $A^+ = C^+B^+$ псевдообратной матрицы. Поэтому на основании разобранных частных случаев получаем

$$(A^+)^+ = (C^+B^+)^+ = (B^+)^+(C^+)^+ = BC = A.$$

Свойство 3. $(AA^+)^* = AA^+, \quad (AA^+)^2 = AA^+$.

Свойство 4. $(A^+A)^* = A^+A, \quad (A^+A)^2 = A^+A$.

Третье и четвертое свойства устанавливаются непосредственной проверкой путем подстановки в рассматриваемые равенства выражения (4) для псевдообратной матрицы A^+.

Следующее утверждение фактически приводит к другому определению псевдообратной матрицы.

Теорема 3. *Матрица* A^+ *является псевдообратной к матрице* A *тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$A A^+ A = A,\ \ A^+ A A^+ = A^+,\ \ (A A^+)^* = A A^+,\ \ (A^+ A)^* = A^+ A. \quad (8)$$

Доказательство. Необходимость условий (8) следует из определения псевдообратной матрицы и ее свойств 1–4. Первое условие вытекает из определения, второе — из того факта, что псевдообратной к матрице A^+ является матрица A (свойство 2). Третье и четвертое условия вытекают из свойств 3 и 4 псевдообратной матрицы.

Докажем достаточность условий (8). Первое из условий (8) означает, что выполнено первое из условий (1). Применяя второе и третье условия (8), получаем

$$A^+ = A^+ \cdot A \ \ \cdot A^+ = A^+ (A A^+)^* = A^+ (A^+)^* A^* = U A^*,$$

где $U = A^+ (A^+)^*$. Следовательно, выполняется второе соотношение (1). Аналогично, используя второе и четвертое условия (8), приходим к третьему условию (1):

$$A^+ = A^+ A A^+ = (A^+ A)^* A^+ = A^* (A^+)^* A^* = A^* V,$$

где $V = (A^+)^* A^*$. Таким образом, условия (8) являются достаточными для того, чтобы матрица A^+ была псевдообратной к матрице A. Теорема доказана.

Возможны и другие способы введения псевдообратной матрицы. Сформулируем некоторые критерии.

Матрица A^+ *является псевдообратной к* $(m \times n)$*-матрице* A*, если*:

1) *выполняются соотношения* $A^* A A^+ = A^*$, $A^+ = A^* V$, *где* V *— некоторая матрица*;
2) *выполняется равенство* $A^+ = \lim\limits_{t \to +0} (A^* A + t E)^{-1} A^*$;
3) *выполняется равенство* $A^+ = \lim\limits_{t \to +0} A^* (A^* A + t E)^{-1}$.

Матрица A^{+} является нормальным псевдорешением матричного уравнения $AX = E$, т. е. столбцы a_j^{+}, $j = 1, 2, ..., m$ матрицы A^{+} являются нормальными псевдорешениями линейных систем $Ax = e_j$, где e_j — j-й столбец единичной матрицы E порядка m;
При любом столбце b нормальное псевдорешение системы $Ax = b$ представимо в виде $x = A^{+}b$.

В связи с этими критериями отметим следующее. Нормальные псевдорешения обсуждаются ниже (см. 4.2). Критерий 4 удобен при компьютерных вычислениях псевдообратной матрицы (см. Теорему 5 в п. 4.2.2). Формула $x = A^{+}b$ (см. Теорему 4 в п. 4.2.2) представления нормального псевдорешения системы $Ax = b$ является естественным обобщением формулы $x = A^{-1}b$, представляющей решение системы $Ax = b$ с квадратной невырожденной матрицей.

Понятие “псевдообратная матрица” было введено в 1920 г. В. Муром с помощью предельного перехода (критерии 2 и 3).

Широкое применение псевдообратных матриц началось значительно позже, после того как Р. Пенроуз в 1955 г. ввел понятие псевдообратной матрицы через условия (8).

Упражнения

Упражнение 1. Используя скелетные разложения матриц

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 7 \\ -2 & -8 & -7 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix}$;

построить скелетные разложения этих матриц по формулам (2), (3), (4) главы 3.

Упражнение 2. Используя сингулярные разложения матриц

1) $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

построить для этих матриц псевдообратные матрицы по формуле (6) главы 3.

Упражнение 3. Используя канонические разложения матриц

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & -5 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; 8) $A = \begin{pmatrix} 3 & i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 9) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i & 0 \\ 2-2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

построить для этих матриц псевдообратные матрицы по формуле (7) главы 3.

Глава 4

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Методы численного решения систем линейных уравнений естественным образом распадаются на две группы, а именно, на точные (прямые) и итерационные методы. Точные методы представляют собой способы вычисления решений систем за конечное число шагов. К ним относятся, например, правило Крамера, метод Гаусса, метод квадратного корня и др. Итерационные методы — это приближенные методы, позволяющие получать решения систем с помощью бесконечных сходящихся процессов. К таким методам относятся метод итераций, метод Зейделя, метод релаксации и др.

Заметим, что вследствие неизбежности округлений при компьютерных вычислениях даже точные методы становятся приближенными.

4.1. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

4.1.1. *Метод последовательного исключения неизвестных* (*метод Гаусса*)

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Над уравнениями системы обычно приходится проводить следующие элементарные преобразования:

1) умножение обеих частей какого-либо уравнения на число, отличное от нуля;
2) прибавление (вычитание) к одному уравнению другого, умноженного на некоторое число;
3) перестановку уравнений;

4) вычеркивание уравнений вида

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0\text{, т. е. тождеств } 0=0;$$

5) перестановку неизвестных в системе уравнений.

В результате элементарных преобразований система преобразуется в эквивалентную ей систему.

Общий подход к отысканию решений системы основывается на последовательном переходе с помощью элементарных преобразований от данной системы к такой эквивалентной ей системе, для которой решение находится просто. Такой подход, в частности, лежит в основе метода последовательного исключения неизвестных (метода Гаусса).

Алгоритм этого метода состоит в следующем.

Предположим, что коэффициент a_{11} системы (1) отличен от нуля. Этого всегда можно добиться, переставляя в случае необходимости уравнения системы или неизвестные в ней и меняя нумерацию уравнений или неизвестных. Умножим первое уравнение на a_{21}/a_{11} и вычтем результат из второго уравнения, затем — на a_{31}/a_{11} и вычтем результат из третьего уравнения и т. д. Наконец, умножим первое уравнение на a_{m1}/a_{11} и вычтем результат из последнего уравнения. После таких элементарных преобразований над уравнениями системы (1) неизвестное x_1 будет исключено из всех ее уравнений, кроме первого, и система примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{m2}x_2+\ldots+a'_{mn}x_n=b'_m. \end{cases} \tag{2}$$

В системе (2) следует вычеркнуть уравнения вида $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$, если такие появились. На этом первый шаг прямого хода метода Гаусса заканчивается. Элемент a_{11} называют **ведущим элементом** этого шага.

Следующий шаг прямого хода метода Гаусса осуществляется аналогично. Так, на втором шаге при $a'_{22} \neq 0$ последовательно умножают второе уравнение на a'_{32}/a'_{22}, a'_{42}/a'_{22}, …, a'_{m2}/a'_{22} и вычитают соответственно из третьего, четвертого, …, m-го уравнений. В результате неизвестное x_2 исключается из всех уравнений, кроме первого и второго. На третьем шаге таким же образом неизвестное x_3 исключается из всех уравнений, кроме первых трех, и т.д.

Возможно, что на некотором шаге прямого хода метода Гаусса встретится уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i \text{ при } b_i \neq 0. \tag{3}$$

Тогда рассматриваемая система несовместна, и дальнейшее ее решение прекращается. Если же при выполнении прямого хода метода Гаусса не встречаются уравнения вида (3), то рассматриваемая система совместная и не более чем через m шагов прямого хода преобразуется в эквивалентную ей систему вида

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1r} x_r + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ \qquad a_{22} x_2 + \ldots + a_{2r} x_r + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{rr} x_r + \ldots + a_{rn} x_n = b_r. \end{cases} \tag{4}$$

Для упрощения записи в системе (4) штрихи над коэффициентами опущены. В ней не более m уравнений, т. е. $r \leq m$, так как некоторые уравнения, возможно, были приведены к виду $0 = 0$ и вычеркнуты. Очевидно также, что $r \leq n$. При $r = n$ система (4) имеет треугольный вид

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ \qquad a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{nn} x_n = b_n, \end{cases}$$

и в ней легко совершить обратный ход метода Гаусса. Для этого из последнего уравнения этой системы находят значение неизвестного x_n. Подставив его в предпоследнее уравнение, находят значение x_{n-1}. Продолжая так далее, однозначно определяют все неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Следовательно, если система* (1) *при прямом ходе метода Гаусса приводится к системе треугольного вида, то такая система определенная, т. е. имеет единственное решение.*

При $r < n$ система (4) имеет вид трапеции. В ней неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ принимают за главные, а неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ — за свободные. Свободные неизвестные могут принимать любые фиксированные значения. Полагая $x_{r+1} = \gamma_{r+1}, x_{r+2} = \gamma_{r+2}, \ldots, x_n = \gamma_n$, где $\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \ldots, \gamma_n$ — произвольные постоянные, и проведя в системе (4) обратный ход метода Гаусса, приходят к формулам

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{1,r+1}\gamma_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n}\gamma_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{2,r+1}\gamma_{r+1} + \ldots + \alpha_{2n}\gamma_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = \beta_r + \alpha_{r,r+1}\gamma_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn}\gamma_n, \\ x_{r+1} = \gamma_{r+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \gamma_n, \end{cases} \tag{5}$$

которые представляют собой **общее решение системы (1).** Из общего решения (5) при конкретных значениях $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n$ будут получаться частные решения системы (1). *Так как каждое свободное неизвестное γ_j, $j = r+1, \ldots, n$, может принимать бесконечное множество значений, то система* (1) *при $r < n$, т. е. в случае, если она приводится к трапецеидальному виду, обладает бесконечным множеством решений. Так всегда будет для совместных систем, имеющих меньше уравнений, чем неизвестных, в частности, для однородных систем, имеющих меньше уравнений, чем неизвестных.*

На практике методом Гаусса обычно решают квадратные системы линейных уравнений с невырожденными матрицами, т. е. системы из n уравнений с n неизвестными, определители матриц которых отличны от нуля. При этом запись результатов вычислений вносят в таблицы, позволяющие на каждом шаге делать проверку правильности проведенных вычислений. Поясним это на примере.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}17\,x_2 - 0{,}25\,x_3 + 0{,}54\,x_4 = 0{,}3\,, \\ 0{,}17\,x_1 + x_2 + 0{,}67\,x_3 - 0{,}32\,x_4 = 0{,}5\,, \\ -0{,}11\,x_1 + 0{,}35\,x_2 + x_3 - 0{,}74\,x_4 = 0{,}7\,, \\ 0{,}55\,x_1 + 0{,}43\,x_2 + 0{,}36\,x_3 + x_4 = 0{,}9\,. \end{cases}$$

Решение. Схема решения представлена в табл. 1. Вычисления ведутся с двумя запасными знаками по сравнению с числом десятичных знаков у коэффициентов системы. В первом разделе таблицы выписаны матрица коэффициентов при неизвестных и столбец свободных членов. Последний, дополнительный столбец таблицы содержит контрольные суммы. В рассматриваемом разделе таблицы контрольные суммы образуются как суммы элементов строк расширенной матрицы исходной системы.

Контроль правильности вычислений основан на следующих рассуждениях. Если в данной системе сделать замену переменных, увеличив значения всех неизвестных на единицу $\bar{x}_i = x_i + 1$, то для определения $\bar{x}_i$ получим систему с прежними коэффициентами при неизвестных и свободными членами, равными суммам элементов соответствующих строк расширенной матрицы. Поэтому если над контрольными суммами в каждой строке производить те же преобразования, что и над остальными элементами этой строки, то элементы столбца Σ должны совпадать с суммами элементов соответствующих преобразованных строк. В случае несовпадения указанных значений решение системы прекращается.

Прямой ход отображен в табл. 1 следующим образом. Результат деления первой строки таблицы на $a_{11} = 1$ записан в первой выделенной строке. Затем вычисляются элементы первой вспомогательной матрицы с использованием любого элемента первого раздела, не находящегося в первой строке, из которого вычитается произведение первого элемента его строки на элемент столбца, которому он принадлежит, стоящий в выделенной строке. Далее процесс повторяется. Расчет прямого хода заканчивается, когда получена матрица, состоящая из одной строки.

Таблица 1

Решение системы
по схеме последовательного исключения неизвестных

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	Свободные члены	Σ
1	0,17	–0,25	0,54	0,3	1,76
0,47	1	0,67	–0,32	0,5	2,32
–0,11	0,35	1	–0,74	0,7	1,20
0,55	0,43	0,36	1	0,9	3,24
1	0,17	–0,25	0,54	0,3	1,76
	0,9201	0,7875	–0,5738	0,3590	1,4928
	0,3687	0,9725	–0,6806	0,7330	1,3936
	0,3365	0,4975	0,7030	0,7350	2,2720
	1	0,8559	–0,6236	0,3902	1,6224
		0,6569	–0,4507	0,5891	0,7954
		0,2095	0,9128	0,6037	1,7260
		1	–0,6860	0,8968	1,2108
			1,0566	0,4158	1,4724
			1	0,3936	1,3936
		1		1,1668	2,1668
	1			–0,3630	0,6370
1				0,4409	1,4409

Обратный ход использует выделенные строки, содержащие единицы, начиная с последней. В ней элемент, стоящий в столбце свободных членов, дает значение x_4. Все остальные неизвестные получены последовательно, путем вычитания из свободного члена выделенной строки произведений ее элементов на соответствующие значения ранее найденных неизвестных. Правильность вычислений обратного хода контролируется нахождением чисел $\overline{x}_i$ и их совпадением с числами $x_i + 1$.

Замечание. При компьютерной реализации метода Гаусса элементарные преобразования над матрицами естественно выполнять с помощью соответствующих элементарных матриц (см. п. 1.1). Так, при проведении первого шага прямого хода метода Гаусса для системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

следует ко второй строке расширенной матрицы системы прибавить ее первую строку, умноженную на -3, и к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на -2, или, что то же самое, нужно вычислить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \boxed{-2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \boxed{-2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \end{array}\right).$$

Напомним, что число-множитель для прибавляемой строки находится в элементарной матрице в позиции (i, j), где i — номер строки, к которой прибавляется умноженная строка, а j — номер столбца, равный номеру прибавляемой строки.

При проведении второго шага прямого хода метода Гаусса нужно вторую строку полученной матрицы, умноженную на -1, прибавить к ее третьей строке. Это равносильно вычислению произведения матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Далее естественно последнюю строку полученной матрицы умножить на $1/2$, что равносильно вычислению произведения матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1/2} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

При проведении первого шага обратного хода метода Гаусса нужно последнюю строку полученной матрицы, умноженную на 7, прибавить к ее второй строке, и последнюю строку, умноженную на -4, прибавить к первой строке. Это равносильно вычислению произведения матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{-4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{-4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Оставшиеся операции обратного хода метода Гаусса равносильны вычислению произведения матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1/5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Следовательно, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Предельная оценка уровня вычислительных затрат в методе Гаусса составляет

$$C(n) = \frac{2}{3} n^3 + O(n^2) \ (n \to \infty)$$

арифметических операций.

4.1.2. *Метод Гаусса с выбором главного элемента*

Один из недостатков схемы последовательного исключения неизвестных связан с тем, что при ее реализации накапливается вычислительная погрешность. Если же ведущий элемент какого-нибудь шага близок к нулю, возможен неконтролируемый рост погрешности. Для того чтобы снизить темп ее роста, применяют различные модификации метода Гаусса, обладающие улучшенными вычислительными свойствами. Рассмотрим вариант метода с выбором главного элемента.

Существуют две стратегии выбора. Первая стратегия состоит в *частичном выборе главного элемента*. Рассмотрим алгоритм, называемый *методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу*. В этом случае на k-м шаге прямого хода в качестве ведущего элемента выбирают максимальный по абсолютной величине коэффициент при неизвестном x_k в неприведенной части k-го столбца. Затем строка расширенной матрицы, соответствующая выбранному главному элементу, переставляется с k-й строкой и производится перенумерация коэффициентов при неизвестных. После этого вычисления выполняются так же, как по схеме последовательного исключения неизвестного x_k из других строк. В этом случае деление осуществляется на наибольший из возможных коэффициентов и все масштабирующие множители по модулю оказываются меньшими единицы. Следовательно, относительная погрешность будет минимальной и схема обладает вычислительной устойчивостью.

Аналогичными рассуждениями можно установить, что вычислительная погрешность, вносимая на k-м шаге прямого хода, будет наименьшей, если в качестве ведущего элемента выбирать максимальный по абсолютной величине коэффициент при неизвестном в k-й строке. Столбец матрицы системы, соответствующий выбранному главному элементу, переставляется с ее k-м столбцом, производится перенумерация коэффициентов и неизвестных, а затем выполняется k-й шаг метода по схеме последовательного исключения неизвестных. Этот алгоритм называется *методом Гаусса с выбором главного элемента по строке*.

Вторая стратегия состоит в *полном выборе главного элемента* (*наибольшего по абсолютной величине*) *по всей матрице системы*. В этом случае переставляются строки и столбцы. В остальном схема приведения системы к треугольному виду практически остается неизменной.

Описанная модификация метода Гаусса приводит к усложнению алгоритма, росту числа арифметических операций и соответственно к увеличению времени счета. В методе Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице число арифметических операций асимптотически в полтора раза больше, чем в обычной схеме последовательного исключения неизвестных из-за необходимости дополнительного выполнения операций сравнения элементов матрицы системы для нахождения элемента, наибольшего по абсолютной величине:

$$C(n) = n^3 + O(n^2) \ \ (n \to \infty).$$

Если на главной диагонали оказался элемент, слишком малый по сравнению с другими элементами соответствующей строки, то возможна потеря точности при делении на число, близкое к нулю. В этом случае задается барьерное значение ε, и если главный элемент меньше ε, то матрица системы считается вырожденной и выполнение алгоритма должно быть прервано.

Пример 1. Решить систему $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -9 & 5 \\ -15 & -12 & 50 & -16 \\ -27 & -36 & 73 & 8 \\ 9 & 12 & -10 & -16 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -14 \\ 44 \\ 142 \\ -76 \end{pmatrix}.$$

Решение. Применим метод Гаусса с частичным выбором главного элемента по столбцу. Процедуру решения занесем в табл. 2.

4.1.3. *Метод Холецкого*

Пусть требуется решить систему линейных уравнений $Ax = b$. Как известно, применение метода Гаусса для ее решения осуществимо тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы системы отличны от нуля. Процедура метода Гаусса эквивалентна построению разложения этой матрицы в произведение двух треугольных матриц $A = SR$, где $S = (s_{ij})$ — нижняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами, а $R = (r_{ij})$ — верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали. Такое разложение единственно.

Если найдены матрицы S и R, то решение исходной системы сводится к последовательному решению двух систем уравнений с треугольными матрицами

$$\begin{cases} Sy = b, \\ Rx = y. \end{cases} \tag{1}$$

Опишем алгоритм решения полученной системы двух матричных уравнений, основанный на компактной схеме вычислений по следующим рекуррентным формулам:

$$s_{i1} = a_{i1}, \quad r_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}, \quad y_1 = \frac{b_1}{s_{11}}, \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n; \\ j = 2, \ldots, n; \end{matrix} \tag{2}$$

Таблица 2

Решение системы методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	Свободные члены	Σ
3	4	−9	5	−14	−11
−15	−12	50	−16	44	51
$\boxed{-27}$	−36	73	8	142	160
9	12	−10	−16	−76	−81
−27	−36	73	8	142	160
−15	−12	50	−16	44	51
3	4	−9	5	−14	−11
9	12	−10	−16	−76	−81
1	1,33	−2,7037	−0,2963	−5,2593	−5,9259
	8	9,4444	−20,4444	−34,8889	−37,8889
	0	−0,8889	5,8889	1,7778	6,7778
	0	$\boxed{14{,}3333}$	−13,3333	−28,6667	−27,6667
	1	1,1806	−2,5556	−4,3611	−4,7361
		14,3333	−13,3333	−28,6667	−27,6667
		−0,8889	5,8889	1,7778	6,7778
		1	−0,9302	−2	−1,9302
			5,0620	0	5,0620
			1	0	1
		1		−2	−1
	1			−2	−1
1				−8	−7

$$s_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} s_{ik}\ r_{kj}\,,\quad 1 < j \le i\,,\quad i\,, j = 2\,,\ldots, n\,, \tag{3}$$

$$r_{ij} = \frac{1}{s_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik}\ r_{kj} \right),\quad j > i > 1\,,\quad i\,, j = 2\,,\ldots, n\,, \tag{4}$$

$$y_i = \frac{1}{s_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik}\ y_k \right),\quad (i > 1)\,. \tag{5}$$

$$x_n = y_n\,,\qquad x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{ik}\ x_k\,,\quad (i < n)\,. \tag{6}$$

Процедура вычислений по указанным формулам осуществляется следующим образом. Сначала по формулам (2) находят элементы первого столбца матрицы S и первой строки матрицы R, учитывая, что $r_{11} = 1$. Затем по формулам (3) вычисляют элементы второго столбца $(j = 2)$ матрицы S, а по формулам (4) — элементы второй строки матрицы R и т. д. Как видно из формул (2) и (5), неизвестные y_i следует вычислять одновременно с элементами матрицы R. Обратный ход выполняется по формулам (6), в результате определяются неизвестные x_i. Этот метод называется **методом А.-Л. Холецкого**. Для организации текущего контроля правильности вычислений составляется столбец контрольных сумм, над которым производятся те же действия, что и над столбцом свободных членов.

Пример 1. Решить систему $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Применим метод Холецкого. Процесс решения представлен в табл. 3.

Таблица 3

Решение системы методом Холецкого

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	Σ
3	1	-1	2	6	11
-5	1	3	-4	-12	-17
2	0	1	-1	1	3
1	-5	3	-3	3	-1
s_{i1} $\lfloor r_{i1}$	r_{i2}	r_{i3}	r_{i4}	y_i	Σ
3 $\lfloor 1$	0,3333	$-0{,}333$	0,6667	2	3,667
-5	2,6667 $\lfloor 1$	0,5	$-0{,}25$	$-0{,}75$	0,5
2	$-0{,}6667$	2 $\lfloor 1$	$-1{,}25$	$-1{,}75$	-2
1	$-5{,}3333$	6	2,5 $\lfloor 1$	3	4
					x_i
					1
					-1
					2
					3

Асимптотически количество арифметических операций в методе Холецкого равно числу операций, необходимых для проведения метода Гаусса.

4.1.4. *Метод квадратного корня*

Пусть требуется решить систему линейных уравнений $Ax = b$ с самосопряженной (в вещественном случае — симметричной) матрицей A порядка n, все главные миноры которой отличны от нуля. Тогда существуют невырожденная верхняя треугольная матрица $R = (r_{ij})$ с вещественными положительными элементами на главной диагонали и диагональная матрица D с вещественными равными по модулю единице диагональными элементами такие, что имеет место разложение

$$A = R^* D R . \tag{1}$$

Здесь $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$ и $R^* = \begin{pmatrix} \overline{r}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{r}_{12} & \overline{r}_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{r}_{1n} & \overline{r}_{2n} & \dots & \overline{r}_{nn} \end{pmatrix}$.

Если матрица A — положительно определенная, то матрица D — единичная и разложение (1) принимает вид произведения двух транспонированных комплексно сопряженных друг другу треугольных матриц, что близко к LU-разложению:

$$A = R^* R . \tag{2}$$

Разложение вида (1) или (2) называют **разложением Холецкого**. Приведем расчетные формулы для его построения:

$$d_{ii} = \operatorname{sign}\,(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \left| r_{ki} \right|^2 d_{kk}), \quad i = 1,\dots,n ,$$

$$r_{ii} = \sqrt{\left| a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \left| r_{ki} \right|^2 d_{kk} \right|}, \quad i = 1,\dots,n , \tag{3}$$

$$r_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{r_{ki}}\, d_{kk} r_{kj}) / (r_{ii} d_{ii}), \quad i < j, \quad i, j = 1,\dots,n .$$

Для нахождения всех ненулевых элементов матриц D и R будем использовать алгоритм, соответствующий компактной схеме, когда формулы (3) применяются рекуррентно, в режиме накопления. Сначала вычисляются элементы первых строк этих матриц:

$$d_{11} = \operatorname{sign} a_{11}\,,\ r_{11} = \sqrt{|\,a_{11}\,|}\,,\ r_{1j} = a_{1j}/(r_{11}\,d_{11})\,,\ j = 2,\ldots,n\,;$$

затем формулы (3) применяются при $i = 2$:

$$d_{22} = \operatorname{sign}(a_{22} - \left|r_{12}\right|^2 d_{11})\,,\quad r_{22} = \sqrt{\left|a_{22} - \left|r_{12}\right|^2 d_{11}\right|}\,,$$

$$r_{2j} = (\,a_{2j} - \overline{r_{12}} \cdot d_{11} \cdot r_{1j})\,/(r_{22}\,d_{22})\,,\ j = 3,\ldots,n\,,$$

и т. д. Вычисления по этой компактной схеме называют **методом Холецкого для разложения симметричной матрицы на множители** вида (1).

В случае положительно определенной матрицы A формулы (3) упрощаются:

$$r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \left|\, r_{ki}\,\right|^2}\,,\quad i = 1,\ldots,n\,,$$

$$r_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{r}_{ki}\ r_{kj}\right)/\,r_{ii}\,,\quad i < j,\quad i,j = 1,\ldots,n\,. \tag{4}$$

Если матрица A вещественная и положительно определенная, то матрица R также вещественная и в формулах (4) можно убрать знаки модуля и комплексного сопряжения. В этих условиях компактная схема для определения элементов r_{ij} матрицы R имеет вид

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}}\,,\quad r_{1j} = a_{1j}/r_{11}\,,\ j = 2,\ldots,n\,;$$

$$r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2}\,,\quad 1 < i \le n\,, \tag{5}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} r_{ki}\, r_{kj}}{r_{ii}} & \text{при}\quad i < j, \\ 0 & \text{при}\quad i > j\,. \end{cases}$$

Если разложение (1) получено, то решение системы $Ax = b$, или $R^{*} D R x = b$, сводится к решению двух систем уравнений с треугольными матрицами:

$$\begin{cases} R^{*} D y = b, \\ R x = y. \end{cases} \tag{6}$$

В случае вещественной и положительно определенной матрицы A система $Ax = b$, или $R^{\mathrm{T}} R x = b$, эквивалентна двум матричным уравнениям:

$$\begin{cases} R^{\mathrm{T}} y = b, \\ R\, x = y. \end{cases} \tag{7}$$

Выпишем решение системы (7). Прямой ход состоит в последовательном нахождении элементов r_{ij} по формулам (5) и значений y_i по рекуррентным формулам

$$y_1 = \frac{b_1}{r_{11}}, \qquad y_i = \frac{b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} r_{ki}\, y_k}{r_{ii}} \quad (i > 1), \tag{8}$$

а обратным ходом вычисляются искомые неизвестные x_i по рекуррентным формулам

$$x_n = \frac{y_n}{r_{nn}}, \qquad x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} r_{ik}\, x_k}{r_{ii}} \quad (i < n). \tag{9}$$

Метод решения системы, основанный на применении разложения Холецкого, называется **методом квадратного корня**. Он требует асимптотически вдвое меньшее количество арифметических операций, чем метод Гаусса решения системы с матрицей общего вида

$$C(n) = \frac{1}{3} n^3 + O(n^2) \ (n \to \infty).$$

Пример 1. Решить систему $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 81 & -45 & 45 \\ -45 & 50 & -15 \\ 45 & -15 & 38 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 531 \\ -460 \\ 193 \end{pmatrix}.$$

Решение. Применим метод квадратного корня. Процедуру решения занесем в табл. 4. Первый раздел таблицы содержит коэффициенты при неизвестных и свободные члены данной системы. Так же, как и раньше, формируем столбец контрольных сумм. В дальнейшем над ним выполняются те же операции, что и над столбцом свободных членов. Второй раздел табл. 4 формируем с помощью формул (5) и (8) для коэффициентов и новых свободных членов первой из систем (7). Затем выполняем обратный ход: по формулам (9) находим значения неизвестных x_i, контрольные величины $\bar{x}_i = x_i + 1$ и заполняем третий раздел таблицы.

Таблица 4

Решение системы методом квадратного корня

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	Свободные члены	Σ
81	-45	45	531	612
	50	-15	-460	-425
		38	193	231
r_{i1}	r_{i2}	r_{i3}	y_i	Σ
9	-5	5	59	68
	5	2	-33	-26
		3	-12	-9
6	-5	-4		x_i
7	-4	-3		$\bar{x}_i$

Если элементы матрицы системы таковы, что подкоренные выражения в формулах (5) для r_{ii} отрицательны, т. е. среди r_{ii} есть чисто мнимые числа, то существенного усложнения алгоритма не происходит, требуется лишь выполнять действия по правилам арифметики комплексных чисел.

4.1.5. *Метод прогонки*

Важным частным случаем систем линейных алгебраических уравнений является случай, когда система n линейных уравнений с n неизвестными имеет трехдиагональную матрицу. Такие системы встречаются, например, при решении разностных систем, возникающих при решении краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка.

Для достижения единообразия в записи уравнений системы с трехдиагональной матрицей $A = (a_{ij})$ вводят обозначения

$$a_i = a_{i,i-1},\ b_i = a_{ii},\ c_i = a_{i,i+1},\ a_1 = c_n = 0,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

При таких обозначениях исходная система принимает вид

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2, \\ \qquad a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = d_3, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = d_{n-1}, \\ \qquad\qquad a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n, \end{cases} \tag{1}$$

или в краткой записи

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1, \\ a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ \qquad a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n. \end{cases}$$

Заметим, что коэффициенты такой системы могут быть как действительными (вещественными), так и комплексными (невещественными) числами.

Для численного решения системы (1) с трехдиагональной матрицей применяют метод прогонки, который представляет собой один из вариантов метода Гаусса. При этом получают рекуррентные формулы, по которым неизвестное x_i выражают через неизвестное x_{i+1}. С этой целью первое уравнение системы (1) разрешают относительно x_1 и получают

$$x_1 = p_1 x_2 + q_1,$$

где

$$p_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \qquad q_1 = \frac{d_1}{b_1}.$$

Найденное выражение для x_1 подставляют во второе уравнение системы (1). Тогда это уравнение преобразуется в уравнение

$$(a_2 p_1 + b_2)\, x_2 + c_2 x_3 = d_2 - a_2 q_1,$$

не содержащее x_1. Разрешив его относительно x_2, получают

$$x_2 = p_2 x_3 + q_2,$$

где

$$p_2 = -\frac{c_2}{a_2 p_1 + b_2}, \qquad q_2 = \frac{d_2 - a_2 q_1}{a_2 p_1 + b_2}.$$

С найденным выражением для x_2 поступают аналогично и т. д. В результате получают соотношения

$$x_i = p_i x_{i+1} + q_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1, \tag{2}$$

$$p_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \qquad q_1 = \frac{d_1}{b_1}, \tag{3}$$

$$p_i = -\frac{c_i}{a_i p_{i-1} + b_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \tag{4}$$

$$q_i = \frac{d_i - a_i\ q_{i-1}}{a_i\ p_{i-1} + b_i}, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \tag{5}$$

$$x_n = q_n. \tag{6}$$

Теперь для вычисления неизвестных x_1, x_2, …, x_n естественно сначала по формулам (3), (4), (5) вычислить все коэффициенты p_i и q_i. Эту операцию называют **прямой прогонкой**, а коэффициенты p_i и q_i — **прогоночными коэффициентами**. После вычисления всех прогоночных коэффициентов p_i и q_i находят x_n по формуле (6) и, наконец, по рекуррентным формулам (2) последовательно вычисляют неизвестные x_{n-1}, x_{n-2}, …, x_2, x_1. Эту операцию называют **обратной прогонкой**. Алгоритм решения системы (1) линейных уравнений с трехдиагональной матрицей по формулам (2) называют **методом прогонки**, а сами эти формулы — **формулами прогонки**.

Лемма. *Пусть выполняются условия диагонального преобладания*

$$a_1 = c_n = 0, \quad \left| b_1 \right| \geq \left| c_1 \right| > 0, \quad a_i \neq 0, \; c_i \neq 0,$$

$$\left| b_i \right| \geq \left| a_i \right| + \left| c_i \right|, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1. \tag{7}$$

Тогда для всех прогоночных коэффициентов p_i *выполняется соотношение*

$$\left| p_i \right| \leq 1, \tag{8}$$

а в формулах (4) *и* (5) *знаменатели* $a_i\ p_{i-1} + b_i \neq 0$.

Доказательство. Сначала докажем выполнимость соотношения (8). В силу условия $\left| b_1 \right| \geq \left| c_1 \right| > 0$ выполняется соотношение $\left| p_1 \right| = \left| -\frac{c_1}{b_1} \right| \leq 1$.

Предположим, что нужное соотношение выполняется для всех p_i при $k \le i-1$ и докажем его выполнимость для p_i. Так как

$$\left| b_i + a_i \, p_i \right| \geq \left| b_i \right| - \left| a_i \right| \cdot \left| p_{i-1} \right|,$$

$$\left| a_i \right| \cdot \left| p_{i-1} \right| \le \left| a_i \right| \text{ и } \left| b_i \right| - \left| a_i \right| \ge \left| c_i \right| > 0,$$

что вытекает из неравенств

$$\left| b_i \right| \ge \left| a_i \right| + \left| c_i \right| > 0, \;\; c_i \ne 0,$$

то будет иметь место следующая цепочка соотношений:

$$\left| p_i \right| = \left| -\frac{c_i}{a_i \, p_{i-1} + b_i} \right| = \frac{\left| c_i \right|}{\left| a_i \, p_{i-1} + b_i \right|} \le$$

$$\le \frac{\left| c_i \right|}{\left| b_i \right| - \left| a_i \right| \cdot \left| p_{i-1} \right|} \le \frac{\left| c_i \right|}{\left| b_i \right| - \left| a_i \right|} \le \frac{\left| c_i \right|}{\left| c_i \right|} = 1.$$

Теперь перейдем к доказательству неравенства нулю знаменателей $a_i \, p_{i-1} + b_i$ в формулах (4) и (5). Для модуля такого знаменателя имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\left| a_i \, p_{i-1} + b_i \right| \ge \left| b_i \right| - \left| a_i \right| \cdot \left| p_{i-1} \right| \ge \left| b_i \right| - \left| a_i \right| \ge \left| c_i \right| > 0 .$$

Поэтому сам такой знаменатель не равен нулю.

Доказанное утверждение гарантирует при условиях (7) существование и единственность решения системы (1). Причем это решение можно найти методом прогонки, т. е. применяя формулы (2)–(6). Кроме того, при условиях (7) метод прогонки оказывается устойчивым относительно округлений при вычислениях и позволяет успешно решать системы вида (1) с большим числом неизвестных. Этот метод оказывается устойчивым для хорошо обусловленных систем вида (1) даже при нарушении условий (7) диагонального преобладания.

Пример. Методом прогонки решить систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 & = 9, \\ x_1 + 8x_2 - x_3 & = 14, \\ -2x_2 + 10x_3 - 2x_4 = & 18, \\ 2x_3 - 10x_4 & = -34. \end{cases}$$

Решение. Пользуясь формулами прогонки, сначала вычислим прогоночные коэффициенты p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3, q_4. В первом уравнении коэффициенты $b_1 = 5, c_1 = 2, d_1 = 9$. Значит,

$$p_1 = -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{2}{5}, \quad q_1 = \frac{d_1}{b_1} = \frac{9}{5}.$$

Во втором уравнении коэффициенты $a_2 = 1$, $b_2 = 8$, $c_2 = -1$, $d_2 = 14$. Следовательно,

$$p_2 = -\frac{c_2}{a_2 p_1 + b_2} = \frac{1}{1\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) + 8} = \frac{5}{38},$$

$$q_2 = \frac{d_2 - a_2 q_1}{a_2 p_1 + b_2} = \frac{14 - 1\cdot\frac{9}{5}}{1\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) + 8} = \frac{61}{38}.$$

Аналогично, так как $a_3 = -2$, $b_3 = 10$, $c_3 = -2$, $d_3 = 18$, то

$$p_3 = -\frac{c_3}{a_3 p_2 + b_3} = \frac{2}{-2\cdot\frac{5}{38} + 10} = \frac{38}{185},$$

$$q_3 = \frac{d_3 - a_3 q_2}{a_3 p_2 + b_3} = \frac{18 + 2\cdot\frac{61}{38}}{-2\cdot\frac{5}{38} + 10} = \frac{403}{185}.$$

Наконец, поскольку $a_4 = 2$, $b_4 = -10$, $d_4 = -34$, то

$$q_4 = \frac{d_4 - a_4 q_3}{a_4 p_3 + b_4} = \frac{-34 - 2 \cdot \dfrac{403}{185}}{2 \cdot \dfrac{38}{185} - 10} = 4 .$$

Теперь последовательно вычислим неизвестные $x_4, \ldots, x_1$:

$$x_4 = q_4 = 4 ,$$

$$x_3 = p_3 x_4 + q_3 = \frac{38}{185} \cdot 4 + \frac{403}{185} = 3 ,$$

$$x_2 = p_2 x_3 + q_2 = \frac{5}{38} \cdot 3 + \frac{61}{38} = 2 ,$$

$$x_1 = p_1 x_2 + q_1 = -\frac{2}{5} \cdot 2 + \frac{9}{5} = 1 .$$

Таким образом, искомое решение $x = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$.

Еще см. пример 4 в п. 4.1.6.

4.1.6. *Применение мультипликативных разложений матриц к решению систем линейных уравнений*

При решении систем линейных уравнений часто бывает целесообразным предварительно матрицу системы представить в виде какого-либо ее мультипликативного разложения. Например, если матрица A системы $Ax = b$ представлена в виде LU-разложения $A = LU$, то от системы $LUx = b$, полагая $Ux = z$, перейдем к системе $Lz = b$. Таким образом, решение исходной системы сведется к решению двух систем $Lz = b$ и $Ux = z$ с треугольными матрицами L и U. Заметим, что применение матрицы L равносильно проведению прямого хода метода Гаусса, а применение матрицы U равносильно проведению обратного хода метода Гаусса.

Аналогично если матрица A системы $Ax = b$ представлена ее QR-разложением $A = QR$, то от системы $Ax = b$, т. е. от системы $QRx = b$, легко перейти к системе $Rx = Q^{-1}b$ с треугольной матрицей R, решение которой дает искомый вектор x.

Если матрица A системы $Ax=b$ представлена каким-либо ее QRS-разложением, например, QRS-разложением с треугольной, почти треугольной, трехдиагональной матрицей R, или QRS-разложением, являющимся каноническим или сингулярным разложением, то от системы $Ax=b$, т. е. от системы $QRSx=b$ естественно сначала перейти к системе $RSx=$ $=Q^{-1}b$. Затем положить $Sx=z$ и перейти к системе $Rz=$ $=Q^{-1}b$ соответственно с треугольной, почти треугольной, трехдиагональной или диагональной матрицей R. Решив эту более простую систему, из равенства $Sx=z$ найдем искомое решение x по формуле $x=S^{-1}z$.

Если матрица A системы $Ax=b$ представлена полярным разложением $A=HU$, то от системы $Ax=b$, т. е. от системы $HUx=b$, полагая $Ux=z$, следует перейти к системе $Hz=b$ с симметричной (эрмитовой) матрицей H. Решив эту систему, например, методом квадратного корня или методом Холецкого, найдем затем $x=U^{-1}z$. Возможны и другие подходы, например, в полярном разложении $A=HU$ симметричную (эрмитову) матрицу H можно представить ее каноническим разложением $H=T\Lambda T^{-1}$ с ортогональной (унитарной) матрицей T. Тогда матрица $A=HU$ будет разложена в произведение

$$A=HU=T\Lambda(T^{-1}U),$$

являющееся QRS-разложением с ортогональными (унитарными) матрицами $Q=T$, $S=T^{-1}U$ и диагональной матрицей $R=\Lambda$. Такое разложение можно, в частности, далее преобразовать в сингулярное разложение. Можно также матрицу H с помощью ортогональных матриц преобразовать в трехдиагональную матрицу R, а всю матрицу A — в QRS-разложение с трехдиагональной матрицей R. К системе $Ax=b$ с матрицей A, представленной QRS-разложением, применим описанный выше прием решения.

Поясним приведенные подходы применения мультипликативных разложений матриц к решению систем линейных уравнений на примерах.

Пример 1. Применяя LU-разложение матрицы A, решить систему $Ax = b$ при

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 11 & 20 \\ 6 & 16 & 17 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Решение. В примере параграфа 2.1 для матрицы A получено LU-разложение

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Оно позволяет от системы $Ax = b$, т. е. от системы $LUx = b$, полагая $Ux = z$, перейти к системе $Lz = b$, которая в подробной записи имеет вид

$$\begin{cases} z_1 & = -1, \\ 2z_1 + z_2 & = 2, \\ 3z_1 + z_2 + z_3 & = -9. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $z = (-1, 4, -10)^{\mathrm{T}}$. Далее из системы $Ux = z$, т. е. из системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = -1, \\ x_2 + 6x_3 = 4, \\ - 10x_3 = -10, \end{cases}$$

найдем $x = (1, -2, 1)^{\mathrm{T}}$.

Пример 2. Применяя QR-разложение матрицы A, решить систему $Ax = b$ при

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&5\\-2&0&-3\\2&-1&-7\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}6\\-7\\-4\end{pmatrix}.$$

Решение. В примере параграфа 2.4 для матрицы A получено QR-разложение

$$A=QR=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&-1\\2&-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-1&-1\\0&1&1\\0&0&9\end{pmatrix}.$$

Оно позволяет от системы $Ax=b$, т. е. от системы $QR\,x=b$, перейти к системе $R\,x=Q^{-1}b$ с треугольной матрицей R, которая в подробной записи имеет вид

$$\begin{cases}3x_1-x_2-x_3=4,\\ \qquad\;\; x_2+x_3=2,\\ \qquad\qquad 9x_3=9.\end{cases}$$

Отсюда получаем искомое решение: $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=1$.

Пример 3. Применяя каноническое разложение матрицы A, решить систему $Ax=b$, если

$$a)\ A=\begin{pmatrix}-4&12&6\\-6&14&6\\8&-16&-6\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix};$$

$$б)\ A=\begin{pmatrix}1&1+i&0\\1-i&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}2+i\\3-i\\3\end{pmatrix}.$$

Решение. *а*) В примере 1*а* параграфа 2.3 для матрицы A построено каноническое разложение

$$A=T\Lambda T^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&2\end{pmatrix}.$$

От системы $Ax = b$, т. е. от системы $T\Lambda T^{-1}x = b$, перейдем к системе $\Lambda T^{-1}x = T^{-1}b$. Затем, полагая $T^{-1}x = z = (z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}$, перейдем к системе $\Lambda z = T^{-1}b$, т. е. к системе

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или, что то же самое, к системе

$$\begin{cases} 2z_1 & = 2, \\ \quad 2z_2 & = 0, \\ \qquad 0 \cdot z_3 & = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем $z = (1, 0, C)^{\mathrm{T}}$.

Теперь из соотношения $T^{-1}x = z$ находим

$$x = Tz = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

б) В примере 1*c* параграфа 2.3 для матрицы A построено каноническое разложение $A = T\Lambda T^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{7}} & \frac{-1-i}{\sqrt{42}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{-2}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{6}{\sqrt{42}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{-1+i}{\sqrt{42}} & \frac{-2}{\sqrt{42}} & \frac{6}{\sqrt{42}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

От системы $Ax = b$, т. е. от системы $T\Lambda T^{-1}x = b$, перейдем к системе $\Lambda T^{-1}x = T^{-1}b$. Затем, полагая $T^{-1}x = z =$

$=(z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}$, перейдем к системе $\Lambda z = T^{-1} b$, которая в подробной записи имеет вид

$$\begin{cases} 3z_1 = \dfrac{12-3i}{\sqrt{7}}, \\ 3z_2 = \dfrac{9+3i}{\sqrt{42}}, \\ 0 \cdot z_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем $z = \left(\dfrac{4-i}{\sqrt{7}}, \dfrac{3+i}{\sqrt{42}}, C \right)^{\mathrm{T}}$.

Теперь из равенства $T^{-1}x = z$ находим

$$x = Tz = \begin{pmatrix} \dfrac{1+i}{\sqrt{7}} & \dfrac{-1-i}{\sqrt{42}} & \dfrac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{7}} & \dfrac{-2}{\sqrt{42}} & \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{7}} & \dfrac{6}{\sqrt{42}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{4-i}{\sqrt{7}} \\ \dfrac{3+i}{\sqrt{42}} \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2+i}{3} \\ \dfrac{3-i}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \dfrac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Решить систему $Ax = b$ при

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 12 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

путем сведения ее решения к решению системы с матрицей трехдиагональной формы.

Решение. В примере параграфа 2.7 для матрицы A получено QRS-разложение $A = QRS =$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -4\\ 0 & -4 & 3\end{pmatrix}\frac{1}{65}\begin{pmatrix}390 & 845 & 0\\ -325 & -834 & -244\\ 0 & -37 & 283\end{pmatrix}\frac{1}{13}\begin{pmatrix}13 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 12\\ 0 & 12 & -5\end{pmatrix}$$

с трехдиагональной матрицей R и ортогональными матрицами Q и S. От системы $Ax=b$, т. е. от системы $QRSx=b$, перейдем к системе $RSx=Q^{-1}b$. Затем положим $Sx=z=$ $=(z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}$ и перейдем к системе $Rz=Q^{-1}b$, которая в подробной записи имеет вид

$$\begin{cases} \frac{390}{65}z_1 + \frac{845}{65}z_2 = -1,\\ -\frac{325}{65}z_1 - \frac{834}{65}z_2 - \frac{244}{65}z_3 = -2,\\ -\frac{37}{65}z_2 + \frac{283}{65}z_3 = 6, \end{cases}$$

так как

$$Q^{-1}b = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -4\\ 0 & -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -3\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -3\\ 6\end{pmatrix}.$$

Для удобства перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} 6z_1 + 13z_2 = -1,\\ -325z_1 - 834z_2 - 244z_3 = -195,\\ -37z_2 + 283z_3 = 390. \end{cases}$$

Прямой ход метода прогонки дает следующие рекуррентные соотношения:

$$z_1 = -\frac{13}{6}z_2 - \frac{1}{6}, \quad z_2 = -\frac{1464}{779}z_3 + \frac{1495}{779}, \quad z_3 = \frac{17}{13}.$$

При обратном ходе получим

$$z_3 = \frac{17}{13}, \quad z_2 = -\frac{1464}{779} \cdot \frac{17}{13} + \frac{1495}{779} = -\frac{7}{13}, \quad z_1 = \frac{13}{6} \cdot \frac{7}{13} - \frac{1}{6} = 1.$$

Поэтому искомое решение

$$x = S^{-1} z = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 12 & -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом наименьших квадратов

4.2.1. *Постановка задачи. Решение средствами математического анализа*

Пусть дана действительная или комплексная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

или, что то же самое, в матричной форме

$$Ax = b. \tag{2}$$

В общем случае эта система может быть и несовместной. Тогда решать ее точно не имеет смысла. Поэтому систему уравнений (1), совместная она или несовместная, решают методом наименьших квадратов (МНК), т. е. находят такие ее приближенные решения (*псевдорешения*) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, при которых квадратичное отклонение

$$F(x) = \left| Ax - b \right|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right|^2 \tag{3}$$

имеет наименьшее значение.

Очевидно, что если система уравнений $Ax = b$ является совместной, то ее псевдорешения представляют собой обычные решения, и, наоборот, *любое решение этой системы является ее псевдорешением.*

Система может иметь не единственное псевдорешение. Среди всех псевдорешений системы линейных алгебраических уравнений псевдорешение x^0, имеющее наименьшую длину, называют ***нормальным псевдорешением***. На таком псевдорешении x^0 функция

$$\Phi(x) = \left| x \right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i \right|^2 \tag{4}$$

принимает наименьшее значение.

Этим свойством нормального псевдорешения обычно пользуются при его выделении из общего псевдорешения. Другой способ выделения нормального псевдорешения системы $Ax = b$ основывается на свойстве ортогональности (см. п. 4.2.2, следствие из теоремы 3) нормального псевдорешения к каждому решению однородной системы уравнений $Ax = 0$, в частности, к каждому решению, входящему в какую-либо фундаментальную систему решений этой однородной системы.

Практическая необходимость такого подхода возникает, например, если в эмпирической формуле

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b$$

нужно найти коэффициенты $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ по результатам наблюдений (измерений) величин $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, b$.

Пусть имеем следующие результаты наблюдений (табл. 1).

Подставляя данные каждого наблюдения в рассматриваемое выражение, придем к системе $Ax = b$. Эта система вследствие ошибок измерений и неучтенных факторов, как правило, бывает несовместной. Поэтому приходится ее решать методом наименьших квадратов.

Таблица 1

Номер наблюдения	a_1	a_2	$\dots$	a_n	b
1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m

С аналогичной проблемой встречаемся также при отыскании коэффициентов $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ функции

$$y(t) = x_1\,\varphi_1(t) + x_2\,\varphi_2(t) + \ldots + x_n\,\varphi_n(t),$$

аппроксимирующей функцию $f(t)$, заданную таблично, где $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ — некоторые линейно независимые функции, например, $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$, или $1, e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}, \dots, e^{\alpha_{n-1} t}$.

Исходя из определения псевдорешений, укажем способ их нахождения. Для этого замечаем, что левая часть i-го уравнения системы (1) при любом наборе значений $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ отличается от его правой части на некоторую невязку. Поэтому вместо системы (1) будем рассматривать систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + z_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + z_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + z_m = b_m \end{cases}$$

в матричной записи имеющую вид $Ax + z = b$.

Для того чтобы функция $F(x) = \left|Ax - b\right|^2$ имела наименьшее значение, длина вектора z должна быть минимальной. Это возможно, лишь когда в равенстве $Ax + z = b$ вектор

$$Ax = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

является ортогональной проекцией вектора b на пространство $L(A)$ столбцов $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$ матрицы A, а вектор z — ортогональной составляющей вектора b. Поэтому вектор z должен быть ортогональным к каждому вектору-столбцу a_j матрицы A. Следовательно, $(z,\ a_j)=0$, $j=1,\ 2,\ldots,n$. В матричной форме это означает, что $A^*z=0$. Учитывая это равенство при умножении слева равенства $Ax+z=b$ на матрицу A^*, получим систему

$$A^*A\,x=A^*b\,. \tag{5}$$

В действительном (вещественном) случае к системе (5) можно прийти также, используя методы математического анализа, а именно, приравняв к нулю дифференциал

$$dF(x)=dx^*A^*(Ax-b)+(Ax-b)^*A\,dx=2\cdot dx^*(A^*Ax-A^*b)$$

функции

$$F(x)=\left|Ax-b\right|^2=(Ax-b)^*(Ax-b),$$

или, что то же самое, приравнивая к нулю первые частные производные по $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ функции $F(x)$.

Замечание. При вычислении дифференциала $dF(x)$ использовано то обстоятельство, что вещественное выражение $(Ax-b)^*A\,dx$, являясь матрицей первого порядка, не меняется при транспонировании и комплексном сопряжении, и потому совпадает с выражением $dx^*A^*(Ax-b)$.

Систему $A^*A\,x=A^*b$ называют *системой нормальных уравнений*. Ее матрица A^*A квадратная n-го порядка. Определителем этой матрицы является определитель матрицы Грама системы столбцов матрицы A.

Теорема 1. *Система нормальных уравнений $A^*A\,x=A^*b$ всегда совместна, причем ее решения, и только они, являются псевдорешениями системы $Ax=b$.*

Доказательство. Для доказательства совместности системы $A^* A\, x = A^* b$ убедимся в том, что одним из ее решений является вектор $A^+ b$, где A^+ — псевдообратная к A матрица. Для этого запишем какое-либо скелетное разложение $A = BC$ матрицы A. Тогда

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

и имеет место цепочка равенств

$$A^* A\,(A^+ b) = C^* B^* B C C^* (CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1} B^* b =$$

$$= C^* B^* B\,(B^*B)^{-1} B^* b = C^* B^* b = A^* b\,.$$

Следовательно, $A^* A\,(A^+ b) = A^* b$, т. е. вектор $A^+ b$ является решением системы нормальных уравнений, а сама эта система совместная.

В совместности системы нормальных уравнений можно убедиться и так. Представим столбец b в виде $b = b_0 + b^{\perp}$, где $b_0 = np_{L(A)}\, b = k_1 A_1 + k_1 A_1 + \cdots + k_n A_n$, A_n — столбцы матрицы A**,** $b^{\perp}$ – ортогональная составляющая вектора b. Тогда

$$A^* A\, x = A^* b = A^*(b_0 + b^{\perp}) = A^* b_0 + A^* b^{\perp} = A^*\, b_0 + 0 = A^* b_0\,.$$

Таким образом, система нормальных уравнений равносильна системе $A^* A\, x = A^* b_0$, а последняя всегда совместна, поскольку при $x = (k_1,\ k_2, \ldots, k_n)^{\mathrm{T}}$ имеем

$$A^* A\, x - A^* b = A^*(A\, x - b_0) = A^* \cdot 0 = 0\,.$$

Перейдем к доказательству второй части утверждения теоремы.

Пусть x_0 — произвольное решение системы $A^* A\, x = A^* b$. Покажем, что x_0 является псевдорешением системы $Ax = b$. Для этого рассмотрим значение функции $F(x) = \left| A\,x - b \right|^2$ при $x = x_0 + z$, где z — произвольный вектор. Тогда получим

$$F(x_0+z)=\left|A(x_0+z)-b\right|^2=\left|(Ax_0-b)+Az\right|^2=$$
$$=((Ax_0-b)+Az;\ (Ax_0-b)+Az)=(Ax_0-b;Ax_0-b)+$$
$$+\ (Az,Ax_0-b)+(Ax_0-b,Az)+(Az,Az)=$$
$$=\left|Ax_0-b\right|^2+\overline{(Ax_0-b,Az)}+z^*A^*(Ax_0-b)+\left|Az\right|^2=$$
$$=\left|Ax_0-b\right|^2+\ \overline{z^*A^*(Ax_0-b)}+z^*A^*(Ax_0-b)+\left|Az\right|^2=$$
$$=\left|Ax_0-b\right|^2+\overline{z^*(\underbrace{A^*Ax_0-A^*b}_{=0})}+z^*(\underbrace{A^*A\,x_0-A^*b}_{=0})+\left|Az\right|^2=$$
$$=F(x_0)+\left|Az\right|^2.$$

Таким образом, для $x=x_0+z$ при любом z выполняется соотношение $F(x)\geq F(x_0)$, причем равенство возможно лишь при $z=0$. Следовательно, x_0 является псевдорешением системы $Ax=b$.

В этом можно убедиться и следующим образом. Пусть x – решение системы нормальных уравнений $A^*A\,x=A^*b$. Замечаем, что эта система равносильна системе $A^*(A\,x-b)=0$, означающей, что каждый столбец матрицы A ортогонален столбцу $z=A\,x-b$. Следовательно, столбец $A\,x$ является проекцией вектора b на подпространство $L(A)$, порожденное столбцами матрицы A, а вектор x есть псевдорешение системы $A\,x=b$. Эти рассуждения можно провести и в обратном порядке (см. вывод системы нормальных уравнений). Тогда придем к заключению, что псевдорешения системы $Ax=b$ являются решениями системы нормальных уравнений.

Следствие 1. Система $A^*A\,x=A^*b$ имеет единственное решение, если столбцы матрицы A линейно независимы, и бесконечное множество решений, если столбцы матрицы A линейно зависимы.

Доказательство. Определитель системы $A^* A\,x = A^* b$ есть определитель матрицы Грама системы столбцов матрицы A. Если этот определитель отличен от нуля, то система $A^* A\,x = A^* b$ имеет единственное решение, а система столбцов матрицы A линейно независима. Если этот определитель равен нулю, то рассматриваемая система имеет бесконечное множество решений, а система столбцов матрицы A линейно зависима.

Следствие 2. Общее псевдорешение системы $A\,x = b$ представимо в виде

$$x = x_0 + x_{\text{одн}},$$

где x_0 — какое-либо частное решение системы $A^* A\,x = A^* b$, $x_{\text{одн}}$ — общее решение системы $A^* A\,x = 0$.

Доказательство. Действительно, по известному правилу “*общее решение неоднородной системы равно ее частному решению плюс общее решение однородной системы*” получаем нужное.

Лемма 1. *Однородные системы* $A\,x = 0$ *и* $A^* A\,x = 0$ *эквивалентны.*

Доказательство. Если $A\,x = 0$, то $A^* A\,x = A^* \cdot 0 = 0$, т. е. все решения системы $A\,x = 0$ являются и решениями системы $A^* A\,x = 0$. Предположим, что столбец x является решением системы $A^* A\,x = 0$. Тогда $x^* A^* A\,x = x^* \cdot 0 = 0$. Но

$$0 = x^* A^* A\,x = (A\,x)^* A\,x = \left| A\,x \right|^2 .$$

Таким образом, из равенства $A^* A\,x = 0$ вытекает, что столбец $A\,x$ имеет нулевую длину, а значит, он равен нулю, т. е. $A\,x = 0$ и x — решение этой системы.

Следствие. *Общее псевдорешение системы* $A\,x = b$ *представимо в виде*

$$x = x_0 + x_{\text{одн}},$$

где x_0 *— какое-либо частное псевдорешение системы* $Ax = b$;

$x_{\text{одн}}$ *— общее решение однородной системы* $Ax = 0$.

Итак, чтобы решить систему $Ax = b$ методом наименьших квадратов, нужно найти общее решение системы $A^* A\, x = A^* b$ и, если требуется, из множества решений выделить нормальное решение, т. е. то, которое имеет наименьшую длину.

Пример 1. Пользуясь методами математического анализа, найти общее и нормальное псевдорешения системы линейных уравнений $Ax = b$ при

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для решения данной системы указанным способом вычислим следующие матрицы:

$$A^* A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -3 \\ -9 & 15 & 6 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A^* b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ 72 \\ 45 \end{pmatrix},$$

выпишем систему нормальных уравнений $A^* A\, x = A^* b$, которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} 6\, x_1 - 9\, x_2 - 3\, x_3 = -27, \\ -9\, x_1 + 15\, x_2 + 6\, x_3 = 72, \\ -3\, x_1 + 6\, x_2 + 3\, x_3 = 45. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим искомое общее псевдорешение

$$x = (27 - x_3;\ 21 - x_3;\ x_3)^{\mathrm{T}}.$$

Чтобы из общего псевдорешения x выделить нормальное псевдорешение x^0, составим функцию

$$\Phi(x) = |x|^2 = (27 - x_3)^2 + (21 - x_3)^2 + (x_3)^2,$$

найдем ее первую частную производную по x_3 и приравняем ее к нулю:

$$-2 \cdot (27 - x_3) - 2 \cdot (21 - x_3) + 2 \cdot x_3 = 0.$$

Отсюда находим $x_3 = 16$. Поэтому нормальным псевдорешением исходной системы уравнений является

$$x^0 = (27 - 16,\ 21 - 16,\ 16)^{\mathrm{T}} = (11,\ 5,\ 16)^{\mathrm{T}}.$$

Если для выделения нормального псевдорешения x^0 применить второй способ, то сначала нужно построить какую-либо ФСР однородной системы уравнений $Ax = 0$. Для этого замечаем, что общим решением этой системы является

$$x_{\text{общ}} = (-x_3;\ -x_3;\ x_3)^{\mathrm{T}},$$

а одна ее ФСР состоит из решения $X_1 = (-1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

Затем из условия ортогональности решения X_1 и общего псевдорешения x

$$(X_1, x) = -(27 - x_3) - (21 - x_3) + x_3 = 0$$

найдем значение $x_3 = 16$, при котором из общего псевдорешения x выделяется нормальное псевдорешение

$$x^0 = (11,\ 5,\ 16)^{\mathrm{T}}.$$

Пример 2. Найти нормальное псевдорешение системы $Ax = b$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1+i & 2+i\\ 1-i & 1 & 2-i\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}4+2i\\ 4-2i\\ 4+i\end{pmatrix}.$$

Решение. Следуя общему правилу, выпишем систему нормальных уравнений $A^* A\,x = A^* b$, которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} 4x_1+(3+2i)x_2+(7+2i)x_3=14+5i,\\ (3-2i)x_1+4x_2+(7-2i)x_3=14-3i,\\ (7-2i)x_1+(7+2i)x_2+14x_3=28+2i.\end{cases}$$

Решив эту систему, получим общее псевдорешение

$$X=\left(\frac{8+i}{3}-x_3;\ \frac{4+i}{3}-x_3;\ x_3\right)^{\mathrm{T}}$$

исходной системы $A\,x=b$. Чтобы из него выделить нормальное псевдорешение X^0, представим x_3 в виде $x_3=a+bi$. Тогда X примет вид

$$X=\left(\frac{(8-3a)+(1-3b)\,i}{3};\ \frac{(4-3a)+(1-3b)\,i}{3};\ a+bi\right)^{\mathrm{T}}.$$

Далее запишем функцию

$$\Phi(X)=\left|X\right|^2=X^*X=$$

$$=\frac{(8-3a)^2+(1-3b)^2}{9}+\frac{(4-3a)^2+(1-3b)^2}{9}+a^2+b^2=$$

$$=\frac{27a^2+27b^2-72a-12b+82}{9},$$

и из равенств нулю производных

$$\Phi'_a(X)=\frac{54a-72}{9},\ \Phi'_b(X)=\frac{54b-12}{9}$$

найдем $a = \dfrac{12}{9}$; $b = \dfrac{2}{9}$. Следовательно, $x_3 = a + bi = \dfrac{12+2i}{9}$.

При таком значении x_3 из общего псевдорешения X выделяется нормальное псевдорешение

$$X^0 = \left(\frac{12+i}{9};\ \frac{i}{9};\ \frac{12+2i}{9}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Чтобы из общего псевдорешения X выделить нормальное псевдорешение X^0 вторым способом, построим какую-либо ФСР однородной системы уравнений $Ax = 0$. Для этого замечаем, что общим решением этой системы является

$$X_{\text{общ}} = (-x_3;\ -x_3;\ x_3)^{\mathrm{T}}.$$

Поэтому одна из ФСР состоит из решения

$$x = (-1,\ -1,\ 1\ )^{\mathrm{T}}.$$

Далее из соотношения ортогональности

$$(X, x) = -\frac{8+i}{3} + x_3 - \ \frac{4+i}{3} + x_3 + x_3 = 0$$

векторов X и x находим значение $x_3 = \dfrac{12+2i}{9}$, при котором из общего псевдорешения X выделяется нормальное псевдорешение

$$X^0 = \left(\frac{12+i}{9};\ \frac{i}{9};\ \frac{12+2i}{9}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Пример 3. Найти многочлен

$$p(t) = x_1 + x_2 \cdot t + x_3 \cdot t^2,$$

который с наименьшей квадратичной погрешностью аппроксимирует на отрезке $[-2, 2]$ функцию $f(t)$, заданную табл. 2.

Таблица 2

t	-2	-1	1	2
$f(t)$	9	2	5	16

Решение. Подставляя поочередно данные из таблицы в многочлен $p(t) = x_1 + x_2 \cdot t + x_3 \cdot t^2$, придем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$$

относительно неизвестных коэффициентов x_1, x_2, x_3 искомого многочлена $p(t)$.

Полученная система является несовместной. Будем решать ее методом наименьших квадратов, пользуясь средствами математического анализа. Для этого выпишем матрицу коэффициентов при неизвестных и вектор свободных членов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицы

$$A^* A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix},$$

$$A^* b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 17 \\ 107 \end{pmatrix}.$$

Составим систему нормальных уравнений $A^* A\, x = A^* b$, которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} 4x_1 & & + & 10x_3 & = & 32, \\ & 10x_2 & & & = & 17, \\ 10x_1 & & + & 34x_3 & = & 107. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем значения неизвестных $x_1 = 0,5$; $x_2 = 1,7$; $x_3 = 3$.

Таким образом, искомый многочлен, который с наименьшей квадратичной погрешностью аппроксимирует на отрезке $\left[-2, 2\right]$ таблично заданную функцию $f(t)$, имеет вид

$$p(t) = 0,5 + 1,7t + 3t^2.$$

Пример 4. Найти коэффициенты x_1 и x_2 функции

$$y(t) = x_1 \cdot \sin t + x_2 \cdot \cos t,$$

которая с наименьшей квадратичной погрешностью аппроксимирует на отрезке $[\pi/6, \pi/3]$ функцию $f(t)$, заданную табл. 3.

Таблица 3

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$f(t)$	3,6	3,5	3,2

Решение. Подставляя поочередно данные из таблицы в функцию $y(t) = x_1 \cdot \sin t + x_2 \cdot \cos t$, придем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 0,50\,x_1 & + & 0,86\,x_2 & = & 3,6, \\ 0,71\,x_1 & + & 0,71\,x_2 & = & 3,5, \\ 0,86\,x_1 & + & 0,50\,x_2 & = & 3,2 \end{cases}$$

относительно неизвестных коэффициентов функции $y(t)$. Полученная система несовместная. Будем решать ее методом наименьших квадратов, пользуясь средствами математического анализа. Для этого выпишем матрицу системы и столбец ее свободных членов

$$A = \begin{pmatrix} 0,50 & 0,86 \\ 0,71 & 0,71 \\ 0,86 & 0,50 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3,6 \\ 3,5 \\ 3,2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицы

$$A^* A = \begin{pmatrix} 0,50 & 0,71 & 0,86 \\ 0,86 & 0,71 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,50 & 0,86 \\ 0,71 & 0,71 \\ 0,86 & 0,50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,49 & 1,36 \\ 1,36 & 1,49 \end{pmatrix},$$

$$A^* b = \begin{pmatrix} 0,50 & 0,71 & 0,86 \\ 0,86 & 0,71 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3,6 \\ 3,5 \\ 3,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,04 \\ 7,19 \end{pmatrix}.$$

Составим систему нормальных уравнений $A^* A\, x = A^* b$, которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} 1,49\, x_1 + 1,36\, x_2 = 7,04, \\ 1,36\, x_1 + 1,49\, x_2 = 7,19. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $x_1 = 1,92$; $x_2 = 3,07$. Поэтому искомая функция $y(t)$, которая с наименьшей квадратичной погрешностью аппроксимирует на отрезке $[\pi 26, \pi / 3]$ таблично заданную функцию $f(t)$, имеет вид

$$y(t) = 1,92 \cdot \sin t + 3,07 \cdot \cos t.$$

Пример 5. Найти коэффициенты x_1 и x_2 функции

$$y(t) = x_1 \cdot 3^{-t} + x_2 \cdot 3^{-2t},$$

которая с наименьшей квадратичной погрешностью аппроксимирует на отрезке $[0; 2]$ функцию $f(t)$, заданную табл. 4.

Таблица 4

t	0	1	2
$f(t)$	91	11	2

Решение. Подставляя поочередно данные из таблицы в функцию $y(t) = x_1 \cdot 3^{-t} + x_2 \cdot 3^{-2t}$, придем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 91, \\ \dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{1}{9}x_2 = 11, \\ \dfrac{1}{9}x_1 + \dfrac{1}{81}x_2 = 2 \end{cases}$$

относительно неизвестных коэффициентов функции $y(t)$.

Для удобства преобразуем эту систему в систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 91, \\ 3x_1 + x_2 = 99, \\ 9x_1 + x_2 = 162. \end{cases}$$

Полученная система несовместная. Будем решать ее методом наименьших квадратов, пользуясь средствами математического анализа. Для этого выпишем матрицу системы и столбец ее свободных членов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 91 \\ 99 \\ 162 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицы

$$A^* A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91 & 13 \\ 13 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A^* b = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 91 \\ 99 \\ 162 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1846 \\ 352 \end{pmatrix}.$$

Составим систему нормальных уравнений $A^* A\, x = A^* b$, которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} 91\, x_1 & + & 13\, x_2 & = & 1846\,, \\ 13\, x_1 & + & 3\, x_2 & = & 352\,. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x_1 = 9,25;\ x_2 = 77,25$. Поэтому искомой функцией является функция

$$y(t) = 9,25 \cdot 3^{-t} + 77,25 \cdot 3^{-2t}\,.$$

Для сравнения заметим, что если функция $f(t)$ задана табл. 5, то получится функция $y(t) = 9 \cdot 3^{-t} + 81 \cdot 3^{-2t}$, совпадающая с функцией $f(t)$.

Таблица 5

t	0	1	2
$f(t)$	91	12	2

Пример 6. Адсорбция пропионовой кислоты на активированном угле описывается эмпирическим уравнением Фрейндлиха

$$A = \beta C^{\alpha}\,.$$

Требуется найти коэффициенты α и β по результатам наблюдений, приведенным в табл. 6 (см. [37], табл. 15, с. 69).

Таблица 6

a_1	1	1	1	1	1	1	1
a_2	$-1,09$	$-0,9$	$-0,76$	$-0,57$	$-0,45$	$-0,34$	$-0,25$
y	$-0,05$	$0,04$	$0,11$	$0,20$	$0,26$	$0,29$	$0,32$

Решение. Чтобы применить линейный метод наименьших квадратов, исходное уравнение перепишем в виде

$$\lg A = \lg \beta + \alpha \cdot \lg C$$

и введем обозначения

$$y = \lg A, \quad x_1 = \lg \beta, \quad x_2 = \alpha, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \lg C .$$

Тогда получим уравнение $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$.

Неизвестные x_1 и x_2 этого уравнения найдем методом наименьших квадратов по результатам наблюдений, приведенным в табл. 6. Подставляя поочередно данные из этой таблицы в уравнение $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$, придем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 1,09 x_2 = -0,05, \\ x_1 - 0,90 x_2 = 0,04, \\ x_1 - 0,76 x_2 = 0,11, \\ x_1 - 0,57 x_2 = 0,20, \\ x_1 - 0,45 x_2 = 0,26, \\ x_1 - 0,34 x_2 = 0,29, \\ x_1 - 0,25 x_2 = 0,32. \end{cases}$$

Полученная система несовместная. Будем решать ее методом наименьших квадратов, пользуясь средствами математического анализа. Для этого выпишем матрицу системы и столбец ее свободных членов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1,09 \\ 1 & -0,90 \\ 1 & -0,76 \\ 1 & -0,57 \\ 1 & -0,45 \\ 1 & -0,34 \\ 1 & -0,25 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -0,05 \\ 0,04 \\ 0,11 \\ 0,20 \\ 0,26 \\ 0,29 \\ 0,32 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицы

$$A^*A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\-1,09&-0,90&-0,76&-0,57&-0,45&-0,34&-0,25\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}1&-1,09\\1&-0,90\\1&-0,76\\1&-0,57\\1&-0,45\\1&-0,34\\1&-0,25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-4,36\\-4,36&3,2811\end{pmatrix},$$

$$A^*b=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\-1,09&-0,90&-0,76&-0,57&-0,45&-0,34&-0,25\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}-0,05\\0,04\\0,11\\0,20\\0,26\\0,29\\0,32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,17\\-0,4747\end{pmatrix}.$$

Составим систему нормальных уравнений $A^*A\,x=A^*b$, которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases}7x_1-4,36x_2=1,17,\\-4,36x_1+3,2811x_2=-0,4747.\end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x_1\approx 0,45;\ x_2\approx 0,45$. Следовательно, $\alpha=x_2\approx 0,45$; $\lg\beta=x_1\approx 0,45$; $\beta\approx 2,82$. Поэтому

$$A=\beta C^{\alpha}=2,82\,C^{0,45}.$$

Пример 7. Методом наименьших квадратов найти коэффициенты a_0, a_1, a_2 функции потребления

$$C = a_0 \cdot I + a_1 \cdot B + a_2 \cdot C_{-1}$$

согласно указанным в табл. 7 поквартальным данным, со второго квартала 1970 г. по четвертый квартал 1980 г. включительно.

Используемые обозначения: C — реальные потребительские расходы домашних хозяйств за текущий квартал; C_{-1} — реальные потребительские расходы домашних хозяйств за предыдущий квартал; $B = YD/PC$, где YD — располагаемый доход домашних хозяйств, PC — дефлятор потребительских расходов домашних хозяйств.

Примечание. **1.** Данные заимствованы из книги [25, с. 130-131]. **2**. За единицу измерения фактических потребительских расходов и располагаемого дохода в задаче принят 1 млрд иен.

Решение. В рассматриваемом случае относительно неизвестных коэффициентов a_0, a_1, a_2 имеем систему

$$I \cdot a_0 + B \cdot a_1 + C_{-1} \cdot a_2 = C$$

с (43×3)-матрицей $A = (I, B, C_{-1})$, т. е. с матрицей, составленной из последних трех столбцов I, B, C_{-1} высоты $h = 43$ приведенной таблицы данных, и столбцом C свободных членов той же таблицы, начинающимся со второго квартала 1970 г.

Поэтому

$$A^* A = \begin{pmatrix} 43,0 & 11,40770 \cdot 10^3 & 890,41030 \cdot 10^3 \\ 11,40770 \cdot 10^3 & 3167,82140 \cdot 10^3 & 239769,89987 \cdot 10^3 \\ 890,41030 \cdot 10^3 & 239769,89987 \cdot 10^3 & 18855152,07563 \cdot 10^3 \end{pmatrix},$$

$$A^* C = \begin{pmatrix} 903,1317 \cdot 10^3 \\ 246455,1008 \cdot 10^3 \\ 19030653,995 \cdot 10^3 \end{pmatrix},$$

и системой нормальных уравнений является система

Таблица 7

Год	Квартал	C	YD	PC	I	B	C_{-1}
1970	1	14566,9	–	–	–	–	–
	2	15071,4	10594,2	59,1	1	179,2589	14566,9
	3	15970,3	11506,7	59,4	1	193,7155	15071,4
	4	18029,9	15247,2	60,7	1	251,1895	15970,3
1971	1	15472,6	10511,8	61,9	1	169,8191	18029,9
	2	16038,4	11949,2	62,9	1	189,9714	15472,6
	3	16714,4	13000,2	63,5	1	204,7276	16038,4
	4	19137,5	16592,9	64,3	1	258,0544	16714,4
1972	1	16667,9	11538,5	65,0	1	177,5154	19137,5
	2	17435,5	13880,4	66,4	1	209,0422	16667,9
	3	18482,0	14860,0	67,0	1	221,7910	17435,5
	4	21212,6	20049,1	67,7	1	296,1462	18482,0
1973	1	18667,3	13856,8	69,5	1	199,3784	21212,6
	2	18938,4	16695,5	72,4	1	230,6008	18667,3
	3	20126,4	19202,7	74,2	1	258,7965	18938,4
	4	22972,5	25737,8	77,6	1	331,6727	20126,4
1974	1	18478,2	16741,1	83,7	1	200,0131	22972,5
	2	19091,9	22435,9	87,7	1	255,8255	18478,2
	3	20311,7	24276,7	90,5	1	268,2508	19091,9
	4	22321,4	31200,6	95,3	1	327,3935	20311,7
1975	1	19530,8	20484,4	96,9	1	211,3973	22321,4
	2	19919,6	25619,3	99,3	1	257,9990	19530,8
	3	20889,1	26791,2	100,4	1	266,8446	19919,6
	4	23286,3	34874,4	102,7	1	339,5755	20889,1
1976	1	20117,4	23380,8	104,8	1	223,0992	23286,3
	2	20488,2	29391,9	108,4	1	271,1430	20117,4
	3	21703,5	29601,6	109,7	1	269,8414	20488,2
	4	24151,4	39377,8	111,7	1	352,5318	21703,5
1977	1	20970,9	25299,2	114,2	1	221,5342	24151,4
	2	21451,3	32249,6	116,6	1	276,5832	20970,9
	3	22389,5	32554,8	117,4	1	277,2981	21451,3
	4	24756,0	42802,5	118,0	1	362,7331	22389,5

Продолжение табл. 7

1978	1	21715,4	28351,1	120,5	1	235,2788	24756,0
	2	22111,2	36115,0	122,4	1	295,0572	21715,4
	3	23369,1	34526,1	123,1	1	280,4720	22111,2
	4	26323,4	45865,4	123,0	1	372,8894	23369,1
1979	1	23203,5	29607,3	123,8	1	239,1543	26323,4
	2	23793,1	39212,7	126,1	1	310,9651	23203,5
	3	24746,9	37610,6	127,1	1	295,9135	23793,1
	4	27273,3	48643,7	128,4	1	378,8450	24746,9
1980	1	23741,9	32307,8	131,4	1	245,8737	27273,3
	2	23954,7	42860,4	135,0	1	317,4844	23741,9
	3	24816,6	40473,9	136,3	1	296,9472	23954,7
	4	27288,3	52755,6	137,0	1	385,0774	24816,6

$$\begin{cases} 43,0\cdot a_0 + 0,114\cdot 10^5 a_1 + 8,904\cdot 10^5 a_2 = 9,031\cdot 10^5, \\ 0,114\cdot 10^5 a_0 + 31,678\cdot 10^5 a_1 + 2397,700\cdot 10^5 a_2 = 2464,551\cdot 10^5, \\ 8,904\cdot 10^5 a_0 + 2397,699\cdot 10^5 a_1 + 188551,521\cdot 10^5 a_2 = 190306,540\cdot 10^5. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение

$$a_0 = 1405,313;\ a_1 = 36,48023;\ a_2 = 0,4790497.$$

Следовательно, рассматриваемая функция потребления:

$$C = 1405,387\cdot I + 36,48023\cdot B + 0,4790497\cdot C_{-1}.$$

Пример 8. Методом наименьших квадратов найти коэффициенты a, α, β производственной функции Кобба–Дугласа

$$Y = a\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta},\quad \alpha > 0,\quad \beta > 0, \tag{6}$$

по результатам наблюдений (см. [25], с. 135), сведенным в табл. 8.

Используемые обозначения: Y – индекс производства (количество выпущенной продукции), K — индекс основных производственных фондов (затраты на капитальное оборудование), L — индекс наемной рабочей силы (затраты труда).

Решение. Чтобы для решения задачи сделать возможным применение метода наименьших квадратов, обе части функции (6) прологарифмируем по основанию 10. Тогда получим линейную функцию $\lg Y = \lg a + \alpha\cdot\lg K + \beta\cdot\lg L$ относительно

Таблица 8

Номер наблюдения	*Y*	*K*	*L*
1	100	100	100
2	101	107	104,8
3	112,0	114,0	110,0
4	122,0	122,0	117,2
5	124,0	131,0	121,9
6	122,0	138,0	115,6
7	143,0	149,0	125,0
8	152,0	163,0	134,2
9	151,0	176,0	139,9
10	126,0	185,0	123,2
11	155,0	198,0	142,7
12	159,0	208,0	147,0
13	153,0	216,0	148,1
14	177,0	226,0	155,0
15	184,0	236,0	156,2
16	169,0	244,0	152,2
17	189,0	266,0	155,8
18	225,0	298,0	183,0
19	227,0	335,0	197,5
20	223,0	366,0	201,1
21	218,0	387,0	195,9
22	231,0	407,0	194,4
23	179,0	417,0	146,4
24	240,0	431,0	160,5

неизвестных $\lg a$, α, β, или если ввести обозначения $\lg Y = b$, $\lg K = k$, $\lg L = l$, $\lg a = \gamma$, выражение $\gamma + \alpha \cdot k + \beta \cdot l = b$.

Подставляя в это выражение поочередно данные каждого наблюдения, придем к системе линейных уравнений $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2,0293837 & 2,0203612 \\ 1 & 2,0569048 & 2,0413926 \\ 1 & 2,0863598 & 2,0689275 \\ 1 & 2,1172712 & 2,0860036 \\ 1 & 2,1398790 & 2,0629578 \\ 1 & 2,1731862 & 2,0969099 \\ 1 & 2,2121875 & 2,1277524 \\ 1 & 2,2455126 & 2,1458176 \\ 1 & 2,2671717 & 2,0906106 \\ 1 & 2,2966651 & 2,1544239 \\ 1 & 2,3180633 & 2,1673173 \\ 1 & 2,3344537 & 2,1705550 \\ 1 & 2,3541084 & 2,1903316 \\ 1 & 2,3729119 & 2,1936810 \\ 1 & 2,3873898 & 2,1824146 \\ 1 & 2,4248816 & 2,1925674 \\ 1 & 2,4742162 & 2,2624510 \\ 1 & 2,5250448 & 2,2955670 \\ 1 & 2,5634811 & 2,3034120 \\ 1 & 2,5877109 & 2,2920344 \\ 1 & 2,6095944 & 2,2886962 \\ 1 & 2,6201360 & 2,1655410 \\ 1 & 2,6344772 & 2,2054750 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2,0043213 \\ 2,0492179 \\ 2,0863598 \\ 2,0934216 \\ 2,0863598 \\ 2,1553360 \\ 2,1818435 \\ 2,1789769 \\ 2,1003705 \\ 2,1903316 \\ 2,2013971 \\ 2,1846914 \\ 2,2479732 \\ 2,2648177 \\ 2,2278866 \\ 2,2764617 \\ 2,3521825 \\ 2,3560258 \\ 2,3483048 \\ 2,3384564 \\ 2,3636119 \\ 2,2528530 \\ 2,3802112 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем матрицы

$$A^* A = \begin{pmatrix} 24,0 & 55,8309920 & 51,79896 \\ 55,830992 & 130,793808843022 & 120,869775124652 \\ 51,79896 & 120,869775124652 & 111,979327590368 \end{pmatrix},$$

$$A^* b = \begin{pmatrix} 52,921415 \\ 123,617892496958 \\ 114,449687699056 \end{pmatrix}$$

и составляем систему нормальных уравнений $A^* A\, x = A^* b$, т. е. систему

$$\begin{cases} 24,0\ \gamma + \ \ 55,831\ \alpha + \ \ 51,799\ \beta = \ \ 52,921, \\ 55,831\ \gamma + 130,794\ \alpha + 120,870\ \beta = 123,618, \\ 51,799\ \gamma + 120,870\ \alpha + 111,979\ \beta = 114,450. \end{cases} \qquad (7)$$

Система (7) имеет единственное решение:

$$\gamma = \lg a = -0,0195094; \ \ \alpha = 0,244873; \ \ \beta = 0,767090.$$

Поэтому производственная функция Кобба–Дугласа (6) имеет вид

$$Y = 0,9561 \cdot K^{0,2449} \cdot L^{0,7671}.$$

Пример 9. Найти нормальное псевдорешение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 - i\, x_2 = 1, \\ i\, x_1 + \ \ x_2 = 1. \end{cases}$$

Решение. Следуя общему правилу, составим систему $A^* A\, x = A^* b$ нормальных уравнений, которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + (2-2i)x_2 = 2-i, \\ (2+2i)x_1 + 6x_2 = 3+i. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим единственное решение

$$x = \frac{1}{10}(4 - 2i\,;\; 3 + i)^{\mathrm{T}}.$$

Оно и является искомым нормальным псевдорешением.

Для системы $Ax = b$ с произвольной $(m \times n)$-матрицей A система нормальных уравнений $A^* A\, x = A^* b$ является (см. теорему 1) совместной системой с квадратной матрицей $A^* A$ порядка n. Поэтому для решения системы нормальных уравнений применимы все методы, пригодные к решению совместных квадратных систем линейных уравнений, начиная с правила Крамера и метода Гаусса с его многочисленными модификациями. Таких методов достаточно много (см. п. 4.1, 4.4). Здесь заметим лишь, что поскольку матрица $A^* A$ симметричная (эрмитова) неотрицательно определенная, то при решении системы нормальных уравнений с помощью компьютерных технологий особенно удобными могут оказаться метод квадратного корня и схема Холецкого с ее превосходными качествами экономичности и устойчивости. Для реализации этих методов на компьютере можно использовать стандартные программы, которые включены практически во все библиотеки стандартных программ для решения математических задач. В учебной литературе обычно ограничиваются кратким обзором проблемы решения линейных задач методом наименьших квадратов. Поэтому чаще всего рассматривают постановку задачи, получают систему нормальных уравнений и рекомендуют переходить от данной системы линейных уравнений к ее системе нормальных уравнений и решать последнюю любым из методов, пригодных для решения совместных систем. Других способов решения произвольных систем линейных уравнений методом наименьших квадратов обычно не рассматривают. Однако переход от данной системы линейных уравнений к ее системе нормальных уравнений не всегда бывает целесообразным уже хотя бы потому, что если матрица A данной системы плохо обусловлена, то матрица $A^* A$ системы нормальных уравнений, как правило, будет во много раз хуже обусловленной. В связи с этим в следующих параграфах мы остановимся на разборе нескольких способов решения систем линейных алгебраических уравнений методом наименьших квадратов, не требующих перехода к системам нормальных уравнений, и укажем, какие из них в настоящее время являются наиболее употребительными, надежными и эффективными при их компьютерной реализации.

4.2.2. *Применение псевдообратной матрицы к решению систем линейных уравнений методом наименьших квадратов*

Решать системы линейных уравнений методом наименьших квадратов можно также с помощью псевдообратной матрицы. Обсудим этот способ подробнее.

Лемма 2. *Общее решение однородной системы* $Ax = 0$ *представимо в виде*

$$x_{\text{одн}} = (E - A^{+}A)\cdot c\,, \qquad (1)$$

где E *— единичная матрица соответствующего порядка* n; $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}}$ *— вектор произвольных постоянных.*

Доказательство. При любом векторе c столбец $(E - A^{+}A)\cdot c$ является решением системы $Ax = 0$, поскольку

$$A\cdot(E - A^{+}A)\cdot c = (A - AA^{+}A)\cdot c = (A - A)\cdot c = 0\,.$$

В то же время любое решение x_0 системы $Ax = 0$ можно представить в виде $x_0 = (E - A^{+}A)\cdot x_0$, так как

$$(E - A^{+}A)\cdot x_0 = x_0 - A^{+}Ax_0 = x_0 - A^{+}\cdot 0 = x_0\,.$$

Это значит, что формула (1) содержит все решения системы $Ax = 0$.

Следствие. *Общее решение системы* $A^{*}Ax = 0$ *представимо в виде* (1).

Это следствие вытекает из лемм 1 и 2.

Теорема 2. *Общее псевдорешение системы* $Ax = b$ *представимо в виде*

$$x = A^+ b + (E - A^+ A)\cdot c\,, \tag{2}$$

где $c = (c_1, c_2, \ \dots, \ c_n)^{\mathrm{T}}$ *— вектор произвольных постоянных.*

Доказательство. Общее псевдорешение системы $Ax = b$ совпадает с общим решением всегда совместной системы $A^* A x = A^* b$. Одним из решений системы $A^* A x = A^* b$ является столбец $A^+ b$ (см. доказательство теоремы 1). Общее решение соответствующей однородной системы $A^* A x = 0$ может быть представлено в виде (1). Значит, общее решение неоднородной системы $A^* A x = A^* b$ в соответствии с правилом “*частное решение плюс общее решение однородной системы*” имеет вид (2).

Теорема 3. *Нормальное псевдорешение системы* $Ax = b$ *есть столбец*

$$x^0 = A^+ b\,. \tag{3}$$

Доказательство. Известно (см. доказательство теоремы 1 п. 4.2.1), что $x^0 = A^+ b$ является псевдорешением системы $Ax = b$. Пусть x — произвольное псевдорешение этой системы. В силу следствия из леммы 1 п. 4.2.1 это решение можно представить в виде $x = x^0 + z$, где $x^0 = A^+ b$ и z — произвольное решение системы $Ax = 0$. Тогда

$$\left|x\right|^2 = \left|x^0 + z\right|^2 = (x^0 + z)^*(x^0 + z) = \left|\,x^0\right|^2 + (\,x^0)^* z + z^* x^0 + \left|z\right|^2 .$$

Поскольку столбец z является решением системы $Ax = 0$, а псевдообратная матрица A^+ может быть представлена в виде $A^+ = A^* V$, то

$$z^* x^0 = z^* A^+ b = z^* A^* V b = (Az)^* V b = 0\cdot V b = 0\,.$$

При этом и

$$(\,x^0)^*\, z = (\,z^* x^0)^* = 0^* = 0\,.$$

Значит,

$$\left|x\right|^2 = \left|x^0\right|^2 + \left|z\right|^2$$

и наименьшее значение модуля псевдорешения $x = x^0 + z$ достигается при $z = 0$, т. е. $x^0 = A^+ b$ и есть нормальное псевдорешение системы $Ax = b$.

Следствие. Нормальное псевдорешение x^0 системы $Ax = b$ ортогонально к каждому решению системы $Ax = 0$.

Доказательство. Это следует из полученного в ходе доказательства теоремы 3 равенства

$$(z^*, x^0) = (x^0, z) = 0$$

при любом решении z системы $Ax = 0$.

Формула (3) является естественным обобщением формулы $x = A^{-1} b$, представляющей решение системы $Ax = b$ с квадратной невырожденной матрицей.

Учитывая доказанную теорему и следствие из леммы 1 п. 4.2.1, приходим к следующему ***утверждению***.

Теорема 4. *Общее псевдорешение системы* $Ax = b$ *представимо в виде*

$$x = A^+ b + x_{\text{общ}},$$

где $x_{\text{общ}}$ *— общее решение однородной системы* $Ax = 0$*, которому, в частности, можно придать вид* (1).

Пример 1. Найти нормальное и общее псевдорешения системы уравнений $Ax = b$ при

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. В примере 1 из главы 3 для матрицы A найдена псевдообратная матрица

$$A^{+} = \frac{1}{574} \cdot \begin{pmatrix} 31 & 56 & 33 & 29 \\ 54 & 42 & 76 & 32 \\ -15 & 84 & -53 & 23 \end{pmatrix}.$$

Поэтому искомое нормальное псевдорешение

$$x^{0} = A^{+} b = \frac{1}{574} \cdot \begin{pmatrix} 31 & 56 & 33 & 29 \\ 54 & 42 & 76 & 32 \\ -15 & 84 & -53 & 23 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

У однородной системы уравнений $Ax = 0$, т. е. у системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

общее решение

$$x_{\text{одн}} = (-3x_3, 2x_3, x_3)^{\text{T}}.$$

Поэтому общим псевдорешением рассматриваемой системы является

$$x = x^{0} + x_{\text{одн}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где переменная x_3 принимает любые числовые значения.

Пример 2. Найти нормальное псевдорешение системы уравнений $Ax = b$ при

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Решение. В примере 2 из главы 3 для матрицы A найдена псевдообратная матрица

$$A^+ = V\,\Sigma^+\,U^* = \frac{1}{72}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому искомое нормальное псевдорешение

$$x^0 = A^+ b = \frac{1}{72}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & 9 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти нормальное псевдорешение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 = 1, \\ x_1 - i\,x_2 = 1, \\ i\,x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Решение. В примере 3 из главы 3 для матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

найдена псевдообратная матрица

$$A^+ = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 2+4\,i & 4-2\,i & -2-4\,i \\ 4-2\,i & -2+i & 1+2\,i \end{pmatrix}.$$

Поэтому искомое нормальное псевдорешение

$$x^0 = A^+ b = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2+4i & 4-2i & -2-4i \\ 4-2i & -2+i & 1+2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4-2i \\ 3+i \end{pmatrix}.$$

Псевдообратная матрица A^+ к матрице A позволяет найти нормальное псевдорешение системы $Ax = b$ по формуле $x^0 = A^+ b$. В то же время имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Псевдообратная матрица A^+ к $(m \times n)$- матрице A является нормальным псевдорешением матричного уравнения*

$$AX = E,$$

где E — единичная матрица m-го порядка.

Доказательство. Отыскание нормального псевдорешения X^0 матричного уравнения $AX = E$ равносильно отысканию нормальных решений $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_m^0$ систем

$$AX_j = E_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m,$$

где X_j — j-й столбец матрицы X; E_j — j-й столбец единичной матрицы E порядка m.

Для каждой из этих систем по формуле (3) из п. 4.2.3 соответственно получаем

$$X_j^0 = A^+ E_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Эти соотношения равносильны соотношению

$$X^0 = A^+ E = A^+,$$

которое доказывает утверждение теоремы.

Свойство псевдообратной матрицы A^+, составляющее содержание доказанной теоремы, часто принимают в качестве определения псевдообратной матрицы (см. п. 3). Из него также вытекает следующее

Правило. *Для вычисления псевдообратной матрицы A^+ к $(m \times n)$-матрице A следует найти нормальное решение X_j^0 каждой линейной системы*

$$AX_j = E_j\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, m\,,$$

где X_j *—* j*-й столбец матрицы* A^+*;* E_j *—* j*-й столбец единичной матрицы* E *порядка* m*, и из полученных столбцов-решений* $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_m^0$ *составить матрицу*

$$A^+ = (X_1^0, X_2^0, \ldots, X_m^0).$$

Такой способ отыскания псевдообратной матрицы является естественным обобщением аналогичного способа вычисления обратной матрицы A^{-1} к невырожденной матрице A.

Пример 4. Пользуясь приведенным правилом, найти псевдообратную матрицу A^+ к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для решения задачи следует найти нормальные псевдорешения систем $AX_1 = E_1$, $AX_2 = E_2$, $AX_3 = E_3$, $AX_4 = E_4$, где X_1, X_2, X_3, X_4 — столбцы искомой матрицы A^+, E_1, E_2, E_3, E_4 — столбцы единичной матрицы E четвертого порядка.

В рассматриваемом случае нормальные решения этих систем естественно искать методами, в которых не используются псевдообратные матрицы. Мы остановимся на решении соответствующих систем нормальных уравнений. Для этого вычислим матрицы

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -3 \\ -9 & 15 & 6 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A^*E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A^*E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A^*E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$A^*E_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

выпишем системы нормальных уравнений $A^*AX_1 = A^*E_1$, $A^*AX_2 = A^*E_2$, $A^*AX_3 = A^*E_3$, $A^*AX_4 = A^*E_4$, т. е. системы

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 1, \\ -9x_1 + 15x_2 + 6x_3 = -1, \\ -3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 - 3x_3 = -1, \\ -9x_1 + 15x_2 + 6x_3 = 2, \\ -3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 2, \\ -9x_1 + 15x_2 + 6x_3 = -3, \\ -3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 0, \\ -9x_1 + 15x_2 + 6x_3 = 1, \\ -3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Найдем общее решение первой из этих систем

$$X_1 = (2/3 - x_3,\ 1/3 - x_3,\ x_3)^{\mathrm{T}}.$$

Чтобы из общего решения X_1 выделить нормальное решение X_1^0, составим функцию

$$\Phi(X_1) = \left| X_1 \right|^2 = \left(\frac{2}{3} - x_3 \right)^2 + \left(\frac{1}{3} - x_3 \right)^2 + x_3^2,$$

найдем ее производную по x_3 и приравняем ее к нулю. Тогда придем к уравнению

$$-2\left(\frac{2}{3} - x_3 \right) - 2\left(\frac{1}{3} - x_3 \right) + 2x_3 = 0,$$

из которого найдем $x_3 = 1/3$.

При таком значении x_3 из общего решения X_1 выделяется нормальное решение

$$X_1^0 = \left(1/3,\ 0,\ 1/3 \right)^{\mathrm{T}}.$$

Таким же способом найдем нормальные решения

$$X_2^0 = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right)^{\mathrm{T}}, \quad X_3^0 = \left(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{9} \right)^{\mathrm{T}}, \quad X_4^0 = \left(\frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{5}{9} \right)^{\mathrm{T}}$$

соответственно для остальных рассматриваемых систем нормальных уравнений. Из полученных нормальных решений, как из столбцов, построим матрицу

$$A^{+} = (X_1^0, X_2^0, X_3^0, X_4^0) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4.2.3. *Применение метода регуляризации к решению систем линейных уравнений методом наименьших квадратов*

Пусть дана произвольная (совместная или несовместная) система $Ax = b$ из m линейных уравнений с действительными или комплексными коэффициентами и n неизвестными. Для получения нормального псевдорешения этой системы кроме описанного выше способа можно применить также *метод регуляризации*. Он включает следующие этапы.

1. Составляют функцию

$$F_\alpha(x) = \left|Ax - b\right|^2 + \alpha\left|x\right|^2 = \left|\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - b_i\right|^2 + \alpha\sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right|^2, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$, и находят вектор x^α, при котором функция $F_\alpha(x)$ достигает своего минимума. Таким вектором является решение

$$x^\alpha = (A^* A + \alpha \cdot E)^{-1} A^* b \qquad (2)$$

системы

$$(A^* A + \alpha \cdot E)\, x = A^* b. \qquad (3)$$

Эта система содержит регуляризационный параметр α. При равенстве нулю параметра α она превращается в систему нормальных уравнений системы $Ax = b$. В действительном (вещественном) случае к системе (3) можно прийти, приравняв к нулю дифференциал функции $F_\alpha(x)$:

$$dF_\alpha(x) = dx^* A^* (Ax - b) + (Ax - b)^* A\,dx + \alpha\,dx^* x + \alpha\,x^* dx =$$
$$= 2 \cdot dx^* A^* (Ax - b) + 2 \cdot \alpha\,dx^* x = 2 \cdot dx^* \left[(A^* A + \alpha E)\,x - A^* b \right],$$

или, что то же самое, приравняв к нулю первые частные производные этой функции по $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Примечание. При вычислении дифференциала $dF_\alpha(x)$ использовано то обстоятельство, что вещественные выражения $(Ax - b)^* A\,dx$ и $x^* dx$, являясь матрицами первого порядка, не меняются при транспонировании и комплексном сопряжении, и потому совпадают соответственно с выражениями $dx^* A^* (Ax - b)$ и $dx^* x$.

2. В полученном выражении для вектора

$$x^\alpha = (A^* A + \alpha \cdot E)^{-1} A^* b \qquad (3)$$

переходят к пределу при $\alpha \to +0$. Этот предел дает нормальное псевдорешение x^0 системы $Ax = b$, поскольку

$$x^0 = \lim_{\alpha \to +0} (A^* A + \alpha \cdot E)^{-1} A^* b = A^+ b$$

Пример 1. Методом регуляризации найти нормальное псевдорешение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Решение. Вычислим матрицы

$$A^* A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix},$$

$$A^* b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Запишем систему уравнений (3), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} (6+\alpha)x_1 + 2x_2 = 2, \\ 2x_1 + (9+\alpha)x_2 = 5. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$x_1 = \frac{8+2\alpha}{50+15\alpha+\alpha^2}, \quad x_2 = \frac{26+5\alpha}{50+15\alpha+\alpha^2}.$$

В найденном решении совершим предельный переход при $\alpha \to +0$. Тогда получим

$$x_1 = \frac{4}{25}, \quad x_2 = \frac{13}{25}.$$

Таким образом, искомое нормальное псевдорешение

$$x^0 = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

При компьютерной реализации метода регуляризации функцию $F_\alpha(x)$ рассматривают при конкретных значениях параметра α. При каждом таком значении α из системы (3) находят соответствующее приближение x^α к искомому нормальному псевдорешению x^0.

Метод регуляризации эффективен при отыскании устойчивого нормального псевдорешения системы $Ax = b$ при ее возмущениях. Дело в том, что нормальное псевдорешение возмущенной системы может сильно отличаться от нормального псевдорешения исходной системы уравнений. В то же время при некотором фиксированном значении параметра α решение возмущенной системы методом регуляризации может дать приближенный результат, очень близкий к точному значению нормального псевдорешения исходной системы.

При нахождении решения с помощью компьютера практически каждая система подвергается возмущениям порядка некоторого ε в силу особенностей представления данных в памяти компьютера. Поэтому целесообразно придерживаться следующей тактики. Если известно, что исходная система устойчива по отношению к возмущениям (хорошо обусловлена), то ее решают обычными методами. В случае же плохо обусловленных, неустойчивых к возмущениям, систем решение ищут методом регуляризации, причем полагают $\alpha = \varepsilon^{2/3}$, если система совместна, и $\alpha = \varepsilon^{1/2}$, если она несовместна. При таком выборе параметра α обеспечивается почти наилучшее приближение к искомому нормальному псевдорешению исходной системы. Если об устойчивости системы ничего не известно, то начинают с приведения системы к более простому виду, выясняя попутно вопрос об ее устойчивости. После этого выбирают метод решения системы.

4.2.4. *Отыскание нормального псевдорешения системы линейных уравнений путем решения одной или двух систем с невырожденными матрицами*

Случай 1. Если дана совместная или несовместная система уравнений $Bx = b$ с $(m \times n)$-матрицей B ранга $r = n$, то, умножив данную систему слева на матрицу B^*, придем к системе

$$B^* B x = B^* b$$

с невырожденной матрицей $B^* B$ ранга n. Решая эту систему уравнений, получим

$$x = (B^* B)^{-1} B^* b = B^+ b = x^0 .$$

Случай 2. Если дана система уравнений $Cx = b$ с $(m \times n)$-матрицей C ранга $r = m$, то ее решение x будем искать в виде $x = C^* z$. Тогда придем к системе $CC^* z = b$ с невырожденной матрицей CC^* ранга m. Решая эту систему, найдем вектор

$$z = (CC^*)^{-1} b .$$

Поэтому

$$x = C^* z = C^* \cdot (CC^*)^{-1} b = C^+ b = x^0 .$$

Заметим, что при $r = m$ данная система совместна. Можно найти ее общее решение и из него выделить нормальное решение. Однако с помощью рассматриваемого метода сразу получается нормальное решение. Кроме того, этот подход во многом способствовал введению и обоснованию понятия псевдообратной матрицы (см. формулы (2)–(4) главы 3).

Общий случай. Пусть, наконец, дана совместная или несовместная система уравнений

$$Ax = b$$

с $(m \times n)$-матрицей A ранга $r \neq n$, и $r \neq m$. Представим матрицу A скелетным разложением $A = BC$ с $(m \times r)$-матрицей B ранга r и $(r \times n)$-матрицей C ранга r. Тогда система уравнений $Ax = b$ может быть записана в виде

$$BCx = b .$$

Полагая в последнем равенстве $y = Cx$, придем к системе $By = b$, которая согласно только что рассмотренному случаю 1, имеет решение

$$y = Cx = B^{+} b .$$

Применяя далее результат случая 2, получаем решение данной системы

$$x = C^{+} y = C^{+} B^{+} b = A^{+} b = x^{0} .$$

Таким образом, рассмотренный способ отыскания нормального псевдорешения системы линейных уравнений равносилен применению формулы $x^{0} = A^{+} b$. Однако этот подход позволяет миновать вычисления матрицы A^{+} в явном виде. Результат получается из решения одной или двух систем уравнений с невырожденными матрицами.

Пример 1. Найти нормальное псевдорешение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Ранг $r = 3$ матрицы системы совпадает с числом ее столбцов. Следовательно, мы имеем первый из рассмотренных случаев для системы $Bx = b$. Поэтому вычислим матрицы

$$B^*B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 9 \\ 6 & 9 & 10 \end{pmatrix},$$

$$B^*b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix}$$

и выпишем систему уравнений $B^*Bx = B^*b$, т. е. систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 16, \\ 6x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 25, \\ 6x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 25. \end{cases}$$

Отсюда находим $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Следовательно, искомое нормальное псевдорешение $x^0 = (1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

Пример 2. Найти нормальное псевдорешение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение. Ранг $r = 3$ матрицы системы совпадает с числом ее строк. Следовательно, мы имеем второй из рассмотренных случаев для системы $Cx = b$. Поэтому введем новый неизвестный вектор $x = C^*z$, вычислим произведение матриц

$$
C\,C^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}
$$

и выпишем систему $C\,C^{*}z = b$, т. е. систему

$$
\begin{cases} 4z_1 & + & 5z_2 & + & 5z_3 & = & 0, \\ 3z_1 & + & 7z_2 & + & 6z_3 & = & 1, \\ 5z_1 & + & 6z_2 & + & 7z_3 & = & -1. \end{cases}
$$

Отсюда находим $z = (0,\ 1, -1)^{\mathrm{T}}$. Поэтому искомое нормальное псевдорешение

$$
x^{0} = C^{*}z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Пример 3. Найти нормальное псевдорешение системы $Ax = b$ при

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Решение. Ранг $r = 2$ матрицы A данной системы не совпадает ни с числом ее столбцов, ни с числом ее строк. Поэтому нам потребуется построить скелетное разложение матрицы A. Для этого (см. параграф 2.2) проведем следующую цепочку элементарных преобразований над строками матрицы A

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = C\,.
$$

Отсюда следует, что скелетным разложением матрицы A является разложение

$$A = BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому исходная система $Ax = b$ может быть записана в виде $BCx = b$ или, что то же самое, в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Cx$, приходим к системе $By = b$, т. е. к системе

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь мы имеем случай 1 из рассмотренных выше, поэтому вычислим матрицы

$$B^*B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$B^*b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

и выпишем систему $B^*By = B^*b$, т. е. систему

$$\begin{cases} 2y_1 - 3y_2 = -3, \\ -3y_1 + 6y_2 = 9. \end{cases}$$

Отсюда находим $y = (3, 3)^{\mathrm{T}}$. Подставив найденное решение y в систему $Cx = y$, получим ситуацию, соответствующую рассмотренному выше случаю 2. В соответствии с ранее описанным подходом введем новый неизвестный вектор $z = (z_1,\ z_2)^{\mathrm{T}}$ такой, что $x = C^* z$, вычислим матрицу

$$C\,C^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

и выпишем систему $C\,C^* z = Cx = y$, т. е. систему

$$\begin{cases} 3z_1 = 3, \\ 3z_2 = 3. \end{cases}$$

Ее решением является $z = (1,\ 1)^{\mathrm{T}}$. Следовательно, искомое нормальное псевдорешение

$$x^0 = C^* z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4.2.5. *Применение QR-разложения матрицы к решению системы линейных уравнений методом наименьших квадратов*

Пусть дана совместная или несовместная система линейных уравнений $Ax = b$ с действительной или комплексной $(m \times n)$-матрицей A ранга $r = n$ и $m \geq n$. Тогда для отыскания нормального псевдорешения применима формула (см. п. 4.2.3)

$$x^0 = A^+ b = (A^* A)^{-1} A^* b. \tag{1}$$

Если известно QR-разложение $A = QR$ данной $(m \times n)$-матрицы A (при $r = n$ и $m > n$ такое разложение (см. [4], с. 214) является qR-разложением с $(m\times n)$-матрицей Q, у которой ортонормированы столбцы, а матрица R является невырожденной правой верхней треугольной матрицей n-го порядка), то формуле (1) можно придать следующий вид:

$$x^0 = R^{-1}Q^*b\,, \tag{2}$$

так как в рассматриваемом случае допустима следующая цепочка преобразований:

$$x^0 = A^+b = (A^*A)^{-1}A^*b = (R^*Q^*QR)^{-1}R^*Q^*b =$$
$$= (R^*R)^{-1}R^*Q^*b = (R)^{-1}(R^*)^{-1}R^*Q^*b = R^{-1}Q^*b\,.$$

В случае системы $Ax = b$ с $(m\times n)$-матрицей A неполного ранга и $m \ge n$ в множителях Q и R QR-разложения $A = QR$ выделяют блоки полного ранга (см. [15]) и в соответствии с этим усовершенствуют формулу (2). Однако при этом в значительной степени снижается надежность получаемых результатов. Поэтому при $r \ne n$ и $m \ge n$ для отыскания нормального решения системы $Ax = b$ с $(m\times n)$-матрицей A лучше применять другие методы, например метод, основанный на представлении матрицы системы ее сингулярным разложением (см. п. 4.2.6).

Случаи систем $Ax = b$ с $(m\times n)$-матрицами A при $m < n$ на практике встречаются реже, и для них нет формулы, аналогичной формуле (2). Поэтому для решения таких систем QR-разложение не применяют.

Пример 1. Решить систему $Ax = b$ при

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Данная система несовместная, и ее матрица A имеет ранг $r = n = 3$ и $m > n$. Поэтому нормальное решение этой системы можно искать по формуле (2). Для применения этой формулы нужно знать множители Q и R QR-разложения матрицы A. Чтобы построить такое разложение, применим процесс ортогонализации системы столбцов матрицы A с последующим нормированием получаемых при этом векторов. Положим

$$b_1 = a_1 = (2, 1, 3, -1)^{\mathrm{T}}, \quad b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 - 2b_1 =$$

$$= a_2 - 2a_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Далее вычислим вектор

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = a_2 - 2b_1 - 0 \cdot b_2 =$$

$$= a_3 - 2a_1 = (1, 5, 1, 10)^{\mathrm{T}}.$$

Нормируя векторы b_1, b_2, b_3, получим

$$q_1 = \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{\sqrt{15}} (2, 1, 3, -1)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{15}} a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3,$$

$$q_2 = \frac{b_2}{|b_2|} = \frac{1}{\sqrt{23}} (3, 2, -3, -1)^{\mathrm{T}} = -\frac{2}{\sqrt{23}} a_1 + \frac{1}{\sqrt{23}} a_2 + 0 \cdot a_3,$$

$$q_3 = \frac{b_3}{|b_3|} = \frac{1}{\sqrt{127}} (1, 5, 1, 10)^{\mathrm{T}} = -\frac{2}{\sqrt{127}} a_1 + 0 \cdot a_2 + \frac{1}{\sqrt{127}} a_3.$$

Отсюда видно, что $Q = AU$, где

$$Q = (q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{15} & 3/\sqrt{23} & 1/\sqrt{127} \\ 1/\sqrt{15} & 2/\sqrt{23} & 5/\sqrt{127} \\ 3/\sqrt{15} & -3/\sqrt{23} & 1/\sqrt{127} \\ -1/\sqrt{15} & -1/\sqrt{23} & 10/\sqrt{127} \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{15} & -2/\sqrt{23} & -2/\sqrt{127} \\ 0 & 1/\sqrt{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{127} \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица A имеет QR-разложение $A = QR$ при $Q = (q_1, q_2, q_3)$ и $R = U^{-1}$.

Теперь по формуле (2) найдем нормальное решение

$$x^0 = R^{-1}Q^* b = U\,Q^* b =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{-2}{\sqrt{23}} & \frac{-2}{\sqrt{127}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{23}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{127}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{3}{\sqrt{15}} & \frac{-1}{\sqrt{15}} \\ \frac{3}{\sqrt{23}} & \frac{2}{\sqrt{23}} & \frac{-3}{\sqrt{23}} & \frac{-1}{\sqrt{23}} \\ \frac{1}{\sqrt{127}} & \frac{5}{\sqrt{127}} & \frac{1}{\sqrt{127}} & \frac{10}{\sqrt{127}} \end{pmatrix} \times$$

$$\times\begin{pmatrix}14\\12\\13\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-6278}{43815} & \dfrac{-8149}{43815} & \dfrac{19503}{43815} & \dfrac{-6011}{43815}\\ \dfrac{3}{23} & \dfrac{2}{23} & \dfrac{-3}{23} & \dfrac{-1}{23}\\ \dfrac{1}{127} & \dfrac{5}{127} & \dfrac{1}{127} & \dfrac{10}{127}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\12\\13\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{37804}{43815}\\ \dfrac{22}{23}\\ \dfrac{137}{127}\end{pmatrix}\approx$$

$$\approx(0{,}862809540;\ 0{,}95652173;\ 1{,}0787401)^{\mathrm{T}}.$$

Для сравнения заметим, что система $Ax=b$ с той же матрицей A, но при $b=(14,12,13,\boxed{4})^{\mathrm{T}}$ совместная и имеет нормальное решение $x^0=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

Пример 2. Решить систему $Ax=b$ при

$$A=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\\ 1 & -i\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1+i\\1+i\\1+i\end{pmatrix}\quad \text{и}\quad b=\begin{pmatrix}1+i\\1+i\\1-i\end{pmatrix}.$$

Решение. Как и в предыдущем примере, будем решать систему в обоих случаях по формуле (2). Сначала построим QR-разложение матрицы A. Для этого положим

$$b_1=a_1=(1,i,1)^{\mathrm{T}},\quad b_2=a_2-\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}\cdot b_1=a_2-\frac{b_1^*a_2}{b_1^*b_1}\cdot b_1=$$

$$=a_2-\frac{\begin{pmatrix}1 & -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\1\\-i\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1 & -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}}\cdot b_1=a_2-\frac{i}{3}\cdot b_1=\begin{pmatrix}i\\1\\-i\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}i\\-1\\i\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}4i\\2\\-2i\end{pmatrix}=\frac{i}{3}\cdot a_1+a_2\,.$$

Полученные векторы нормируем:

$$q_1=\frac{b_1}{\left|b_1\right|}=\frac{b_1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}a_1+0\cdot a_2\,,\ q_2=\frac{b_2}{\left|b_2\right|}=\frac{3b_2}{\sqrt{24}}=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4i\\2\\-2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2i}{\sqrt{6}}\\[2mm]\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\[2mm]-\dfrac{i}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\frac{i}{2\sqrt{6}}\,a_1+\frac{3}{2\sqrt{6}}\,a_2\,.$$

Отсюда видно, что $Q=AU$, где

$$Q=(\,q_1\,,q_2\,)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2i}{\sqrt{6}}\\[2mm]\dfrac{i}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\[2mm]\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{-i}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\qquad U=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{i}{2\sqrt{6}}\\[2mm]0 & \dfrac{3}{2\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица A имеет QR-разложение $A=QR$ при $Q=(\,q_1\,,q_2\,)$ и $R=U^{-1}$.

Теперь по формуле (2) при $b=\begin{pmatrix}1+i & 1+i & 1+i\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ найдем нормальное решение

$x^0=R^{-1}Q^*b=U\,Q^*b=$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{2\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ 1+i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2+i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Точно также при $b=\begin{pmatrix}1+i & 1+i & 1-i\end{pmatrix}^{\text{т}}$ получаем

$$x^0=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{2\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.2.6. *Решение систем линейных уравнений методом наименьших квадратов, основанным на представлении матрицы системы ее сингулярным разложением*

Пусть дана произвольная, совместная или несовместная, система $Ax=b$ из m уравнений с действительными или комплексными коэффициентами и с n неизвестными. Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Столбцы* $v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n$ *матрицы* V *из сингулярного разложения* $A=U\Sigma V^*$ ($m\times n$)*-матрицы* A *ранга* r, *соответствующие нулевым сингулярным числам матрицы* A, *составляют фундаментальную систему решений системы линейных уравнений* $Ax=0$.

Доказательство. Действительно, число этих столбцов равно $n-r$, и они линейно независимые как подсистема системы всех столбцов ортогональной (унитарной) матрицы V. Кроме того, каждый из этих столбцов является решением системы $Ax=0$, поскольку при $j=r+1, r+2, \ldots, n$

$$A v_j = U\Sigma V^* v_j = U\Sigma \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} v_j =$$

$$= U\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к обсуждению рассматриваемого метода. Для этого представим матрицу A сингулярным разложением $A = U\Sigma V^*$. Тогда исходная система $Ax = b$ примет вид $U\Sigma V^* x = b$. Полагая

$$z = V^* x, \quad d = U^{-1} b = U^* b, \tag{1}$$

преобразуем эту систему к виду

$$\Sigma z = d, \tag{2}$$

т. е. в систему

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} \sigma_1 z_1 & & & & & & & = & d_1, \\ & \sigma_2 z_2 & & & & & & = & d_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \sigma_r z_r & & & & & = & d_r, \\ & & & 0\cdot z_{r+1} & & & & = & d_{r+1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 0\cdot z_n & & & = & d_n, \\ & & & & & 0 & & = & d_{n+1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & 0 & = & d_m. \end{array}\right. \tag{3}$$

Отсюда находим

$$z_1 = \frac{d_1}{\sigma_1}, \quad z_2 = \frac{d_2}{\sigma_2}, \ \ldots, \ z_r = \frac{d_r}{\sigma_r}, \quad z_{r+1} = \ldots = z_n = 0.$$

Поэтому нормальное псевдорешение системы (2)

$$z^0 = (z_1, z_2, \ldots, z_r, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{d_1}{\sigma_1}, \frac{d_2}{\sigma_2}, \ldots, \frac{d_r}{\sigma_r}, 0, \ldots, 0 \right)^{\mathrm{T}}.$$

Теперь из системы $z = V^* x$ получаем нормальное псевдорешение исходной системы по формуле

$$x^0 = V z^0 = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \cdot z_1 + v_2 \cdot z_2 + \ldots + v_r \cdot z_r, \qquad (4)$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — столбцы матрицы V.

Поскольку столбцы $v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n$ матрицы V, соответствующие нулевым сингулярным числам матрицы A, составляют фундаментальную систему решений однородной системы $Ax = 0$ (см. лемму 1), то для исходной системы $Ax = b$ можно записать ее общее псевдорешение:

$$x = x^0 + x_{\text{одн}} = x^0 + c_1 v_{r+1} + c_2 v_{r+2} + \ldots + c_{n-r} v_n. \qquad (5)$$

Если в решении системы (3) положим

$$z_1 = \frac{d_1}{\sigma_1}, \quad z_2 = \frac{d_2}{\sigma_2}, \ \ldots, \ z_r = \frac{d_r}{\sigma_r}, \quad z_{r+1} = c_1, \ldots, z_n = c_{n-r},$$

то получим общее псевдорешение

$$z=(z_1,z_2,\dots,z_r,c_1,\ c_2,\dots,c_{n-r})^{\mathrm{T}}=$$

$$=(z_1,z_2,\dots,z_r,0,\dots,0)^{\mathrm{T}}+(0,\dots,0,c_1,\ c_2,\dots,c_{n-r})^{\mathrm{T}}.$$

Тогда сразу приходим к общему псевдорешению

$$x=Vz=(v_1,v_2,\dots,v_n)\cdot\left[\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_{n-r}\end{pmatrix}\right]=$$

$$=x^0+c_1v_{r+1}+c_2v_{r+2}+\dots+c_{n-r}v_n$$

исходной системы $Ax=b$.

Примечание. Рассуждения, проведенные при отыскании нормального псевдорешения x^0, в матричной записи сводятся к следующей цепочке преобразований:

$$Ax=b,$$

$$U\Sigma V^*x=b,$$

$$\Sigma V^*x=U^*b,$$

$$z^0=V^*x=\Sigma^+U^*b,$$

$$x^0=Vz^0=V\Sigma^+U^*b=A^+b.$$

Таким образом, рассматриваемый метод отыскания нормального псевдорешения x^0 равносилен применению формулы $x^0=A^+b$. Однако вычисления при этом способе проводятся в форме решения двух простейших систем, минуя вычисление матрицы A^+ в явном виде.

При компьютерной реализации рассматриваемого метода для учета неточности входных данных и погрешности вычислений вводят границу τ. *Например, если исходные данные вводятся с тремя верными десятичными знаками, то подходящим будет граничное значение* $\tau = 10^{-3}$. *Если исходные данные представлены в памяти компьютера точно, то* τ *принимают равным произведению машинного эпсилон на* n. *Тогда в системе (3) те сингулярные числа* σ_i, $i = 1, 2, ..., n$, *значения которых меньше* τ, *полагают равными нулю, а остальным* σ_i *сохраняют их значения. В остальном процесс вычислений сохраняется в том же виде.*

Пример 1. Найти нормальное и общее псевдорешения системы уравнений $Ax = b$ при

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \boxed{11} \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Система несовместная. Поэтому решать ее следует методом наименьших квадратов. Будем использовать вариант метода, основанный на применении сингулярного разложения

$$A = U\Sigma V^{*}x =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицы A (см. пример 2 параграфа 2.5).

Систему $Ax = b$ представим в виде

$$U\Sigma V^{*}x = b.$$

От нее перейдем к системе

$$\Sigma V^{*}x = U^{*}b.$$

Полагая $z = V^* x$, эту систему преобразуем к виду

$$\Sigma z = U^* b,$$

т. е. в систему

$$\begin{cases} 4z_1 & & & & = \dfrac{7}{2}, \\ & 4z_2 & & & = \dfrac{15}{2}, \\ & & 4z_3 & & = \dfrac{23}{2}, \\ & & & 0 \cdot z_4 & = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{6}$$

Отсюда находим нормальное псевдорешение

$$z^0 = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 23 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

Теперь из равенства $z = V^* x$ получаем искомое нормальное псевдорешение $x^0 = V z^0 =$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 23 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 45 \\ -1 \\ 15 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,8125 \\ -0,0625 \\ 0,9375 \\ 1,9375 \end{pmatrix}.$$

Для сравнения заметим, что система $Ax = b$ с той же матрицей A, но при $b = (\boxed{12}, 0, 4, 8)^{\mathrm{T}}$ — совместная и имеет нормальное псевдорешение $x^0 = (3, 0, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

Далее, поскольку нулевому сингулярному числу матрицы A в матрице V соответствует только один, а именно четвертый столбец $v_4 = \frac{1}{2} \cdot (-1,\ 1,\ 1,\ 1)^{\text{т}}$, то для однородной системы $Ax = 0$ общее решение $x_{\text{одн}} = c \cdot v_4 = \frac{c}{2} \cdot (-1,\ 1,\ 1,\ 1)^{\text{т}}$. Поэтому искомое общее псевдорешение

$$x = x^0 + x_{\text{одн}} = x^0 + c \cdot v_4 = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ -1 \\ 15 \\ 31 \end{pmatrix} + \frac{c}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если при решении системы (6) взять

$$z_{\text{общ}} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 23 \\ \boxed{C} \end{pmatrix},$$

то из равенства $z = V^* x$ сразу получим искомое общее псевдорешение:

$$x = V z_{\text{общ}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 23 \\ C \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 45 - C \\ -1 + C \\ 15 + C \\ 31 + C \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ -1 \\ 15 \\ 31 \end{pmatrix} + \frac{C}{16} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^0 + c_1 \cdot v_4,$$

где положено $c_1 = \frac{C}{8}$.

Пример 2. Найти нормальное псевдорешение системы $Ax = b$ при

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{3} \\ 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. При $b = b_1 = (1, 4, 5, 3, 10)^{\mathrm{T}}$ данная система совместная. Ее можно решать точными методами, например методом Гаусса. Тогда получим общее решение

$$x = \left(\frac{7}{3} - x_3 + \frac{1}{3} x_4 ; \quad -\frac{2}{3} - \frac{5}{3} x_4 ; \quad x_3 ; \quad x_4 \right)^{\mathrm{T}} .$$

Чтобы из него выделить нормальное решение, составим функцию

$$\Phi(x) = \left| x \right|^2 = \left(\frac{7}{3} - x_3 + \frac{1}{3} x_4 \right)^2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3} x_4 \right)^2 + x_3^2 + x_4^2$$

и приравняем к нулю ее первые частные производные по x_3 и x_4. Это приведет к системе

$$\begin{cases} -2 \cdot \left(\frac{7}{3} - x_3 + \frac{1}{3} x_4 \right) + 2 x_3 = 0, \\ 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{7}{3} - x_3 + \frac{1}{3} x_4 \right) + 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3} x_4 \right) + 2 x_4 = 0, \end{cases}$$

из которой находим $x_3 = 73/69, \quad x_4 = -\,9/29.$

При таких значениях x_3 и x_4 из общего решения выделяется нормальное решение

$$x^0 = \left(76/69, -1/69, 76/69, -9/23\right)^{\mathrm{T}} =$$

$$= (1{,}10144928; \ -0{,}01449275; \ 1{,}10144928; \ -0{,}39130435)^{\mathrm{T}}.$$

Если данную систему решить рассматриваемым методом, применяя для построения сингулярного разложения матрицы программу svd [35, 20], то получим следующие результаты:

```
                    Матрица A
          1.000  2.000 1.000  3.000
          2.000  1.000 2.000  1.000
          3.000  3.000 3.000  4.000
          1.000 -1.000 1.000 -2.000
          4.000 -1.000 4.000 -3.000

             Вектор B правых частей
                     1.000
                     4.000
                     5.000
                     3.000
                    10.000

          Вектор W сингулярных чисел
          j  =  1     w  =  8.30662386
          j  =  2     w  =  6.92820323
          j  =  3     w  =  0.00000000
          j  =  4     w  =  0.00000000

                    Матрица U
 0.37796447 -0.32732684 -0.50517885  0.5974279900
 0.37796447  0.05455447 -0.55922747 -0.7315136300
 0.75592895 -0.27277236  0.43626311   -7.256714E-3
 0.00000000  0.38188131 -0.45267593  0.2929731400
 0.37796447  0.81831709  0.19188009  0.1485990700
                    Матрица V

  0.59152048  0.37796447  0.00000000 -0.71221231
  0.36401260 -0.37796447  0.84515425  0.10174462
  0.59152048  0.37796447 -0.16903085  0.69186339
  0.40951418 -0.75592895 -0.50709255 -0.06104677

Граница абсолютной погрешности:TAU= 1.16308461E-06

Векторы: D = U'* B;    Z;    X — нормальное решение
```

```
D[1]=9.44911183  Z[1]=1.13753939  X[1]= 1.10144928
D[2]=7.85584405  Z[2]=1.13389342  X[2]=-0.01449275
D[3]=0.00000000  Z[3]=0.00000000  X[3]= 1.10144928
D[4]=0.00000000  Z[4]=0.00000000  X[4]=-0.39130435

          Невязка  r=  4.16480393E-06


               Столбцы матрицы V,
     соответствующие нулевым сингулярным числам:
                     V3   V4
```

Полученные результаты позволяют записать общее решение данной системы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = X^0 + C_1 \cdot v_3 + C_2 \cdot v_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.10144928 \\ -0.01449275 \\ 1.10144928 \\ -0.39130435 \end{pmatrix} + C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0.00000000 \\ 0.84515425 \\ -0.16903085 \\ -0.50709255 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -0.71221231 \\ 0.10174462 \\ 0.69186339 \\ -0.06104677 \end{pmatrix}.$$

2. При $b = b_2 = (1, \boxed{3}, 5, 3, 10)^{\mathrm{T}}$, где по сравнению с вектором $b = b_1 = (1, 4, 5, 3, 10)^{\mathrm{T}}$ незначительно изменена лишь вторая координата, система $Ax = b$ уже несовместная. Решать ее точными методами, например методом Гаусса, нельзя. Решим эту систему рассматриваемым методом, применяя для получения сингулярного разложения матрицы программу svd (см. [35, 20]). Тогда получим следующие результаты:

```
                     Матрица A
            1.000  2.000  1.000  3.000
            2.000  1.000  2.000  1.000
            3.000  3.000  3.000  4.000
            1.000 -1.000  1.000 -2.000
            4.000 -1.000  4.000 -3.000

              Вектор B правых частей
                       1.000
                       3.000
                       5.000
                       3.000
                      10.000

            Вектор W сингулярных чисел
            j = 1     w = 8.30662386
            j = 2     w = 6.92820323
            j = 3     w = 0.00000000
            j = 4     w = 0.00000000

                     Матрица U
 0.37796447 -0.32732684 -0.50517885  0.5974279900
 0.37796447  0.05455447 -0.55922747 -0.7315136300
 0.75592895 -0.27277236  0.43626311  -7.256714E-3
 0.00000000  0.38188131 -0.45267593  0.2929731400
 0.37796447  0.81831709  0.19188009  0.1485990700
                     Матрица V

  0.59152048  0.37796447  0.00000000 -0.71221231
  0.36401260 -0.37796447  0.84515425  0.10174462
  0.59152048  0.37796447 -0.16903085  0.69186339
  0.40951418 -0.75592895 -0.50709255 -0.06104677

Граница абсолютной погрешности:TAU= 1.16308461E-06

Векторы: D = U’* B;    Z;    X — нормальное решение
```

```
D[1]=9.07114735  Z[1]=1.09203781  X[1]= 1.07155797
D[2]=7.80128958  Z[2]=1.12601916  X[2]=-0.02807971
D[3]=0.55922747  Z[3]=0.00000000  X[3]= 1.07155797
D[4]=0.73151363  Z[4]=0.00000000  X[4]=-0.40398551

          Невязка  r=  2.3081396461E-01

               Столбцы матрицы V,
     соответствующие нулевым сингулярным числам:
                      V3   V4
```

Полученные результаты позволяют записать общее решение данной системы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = X^0 + C_1 \cdot v_3 + C_2 \cdot v_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.07155797 \\ -0.02807971 \\ 1.07155797 \\ -0.40398551 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 0.00000000 \\ 0.84515425 \\ -0.16903085 \\ -0.50709255 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -0.71221231 \\ 0.10174462 \\ 0.69186339 \\ -0.06104677 \end{pmatrix}.$$

Замечание. При печати матрицы U ее пятый столбец опущен, так как он не используется в вычислениях, поскольку сингулярных чисел лишь четыре.

Пример 3. Найти нормальное псевдорешение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1, \\ -2ix_1 + ix_2 = 1, \\ ix_1 - 2ix_2 = 1. \end{cases}$$

Решение. В примере 3 параграфа 2.5 для матрицы A системы получено сингулярное разложение $A = U \Sigma V^* =$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2i & i \\ i & -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -i \\ -2i & i & 2 \\ i & -2i & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данную систему запишем в виде $U\Sigma V^* x = b$ и, полагая $z = V^* x$, преобразуем ее в систему $\Sigma z = U^* b$, т. е. в систему

$$\begin{cases} 3z_1 & & = \dfrac{2+i}{3}, \\ & 3z_2 & = \dfrac{2+i}{3}, \\ 0\cdot z_1 & + \ 0\cdot z_2 & = \dfrac{4+i}{3}. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$z^0 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2+i \\ 2+i \end{pmatrix}.$$

Теперь из равенства $V^* x = z$ получим искомое нормальное псевдорешение

$$x^0 = V z^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2+i \\ 2+i \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2+i \\ 2+i \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемый метод является наиболее надежным и эффективным при решении систем линейных уравнений методом наименьших квадратов с помощью компьютера. Он позволяет также легко судить о числе обусловленности матрицы системы $Ax = b$, так как это число принимают равным отношению σ_1 / σ_s, где σ_1 и σ_s — наибольшее и наименьшее сингулярные числа матрицы A (при $\sigma_s = 0$ число обусловленности матрицы A считают равным бесконечности). Большая величина числа обусловленности матрицы системы $Ax = b$ указывает на то, что эта система плохо обусловлена. Обсуждаемый метод не требует перехода от данной системы $Ax = b$ к системе нормальных уравнений $A^*Ax = A^*b$. В этом состоит одно из его существенных преимуществ перед другими методами, поскольку матрица A^*A системы нормальных уравнений, как правило, бывает во много раз хуже обусловленной, чем матрица A исходной системы. Применение этого метода оказывается весьма удобным, например, при конструировании математической модели, описывающей результаты эксперимента, так как позволяет быстро „проигрывать” разные варианты и из них выбрать наиболее подходящий.

Поясним это на примере (см. [35]) выбора функции $y(t)$, выравнивающей результаты следующих наблюдений (табл. 9):

Таблица 9

t	1900	1910	…	1970
$y(t)$	b_1	b_2	…	b_8

Если эти данные выравнивать функцией

$$y(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 t + c_3 t^2, \tag{7}$$

то для определения коэффициентов c_1, c_2, c_3 придем к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} c_1 & + & 1900c_2 & + & 1900^2 c_3 & = & b_1, \\ c_1 & + & 1910c_2 & + & 1910^2 c_3 & = & b_2, \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ c_1 & + & 1970c_2 & + & 1970^2 c_3 & = & b_8, \end{cases}$$

с (8×3)-матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1900 & 1900^2 \\ 1 & 1910 & 1910^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1970 & 1970^2 \end{pmatrix}.$$

Сингулярными числами этой матрицы являются $\sigma_1 = 0,106 \cdot 10^3$, $\sigma_2 = 0,648 \cdot 10^2$, $\sigma_3 = 0,346 \cdot 10^{-3}$. Число обусловленности $\sigma_1 / \sigma_3 = 0,306 \cdot 10^{11}$ матрицы A весьма велико. Следовательно, вид выравнивающей функции (7) выбран не совсем удачно. В ней базисные функции $1, t, t^2$ для значений t между 1900 и 1970 близки к линейной зависимости, поскольку наименьшее сингулярное число σ_3 близко к нулю. Для исправления положения естественно изменить базисные функции и тем самым изменить вид выравнивающей функции $y(t)$. Вместо функции (7) возьмем, например, функцию

$$y(t) = c_1 \cdot 1 + c_2(t - 1900) + c_3(t - 1900)^2 \tag{8}$$

или функцию

$$y(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 \frac{t - 1935}{10} + c_3 \left(\frac{t - 1935}{10} \right)^2 . \tag{9}$$

Эти функции приведут соответственно к системам линейных алгебраических уравнений с матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 10^2 \\ 1 & 20 & 20^2 \\ 1 & 30 & 30^2 \\ 1 & 40 & 40^2 \\ 1 & 50 & 50^2 \\ 1 & 60 & 60^2 \\ 1 & 70 & 70^2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3,5 & 3,5^2 \\ 1 & -2,5 & 2,5^2 \\ 1 & -1,5 & 1,5^2 \\ 1 & -0,5 & 0,5^2 \\ 1 & 0,5 & 0,5^2 \\ 1 & 1,5 & 1,5^2 \\ 1 & 2,5 & 2,5^2 \\ 1 & 3,5 & 3,5^2 \end{pmatrix}.$$

Сингулярными числами матрицы A_1 являются числа $\sigma_1 = 0,684 \cdot 10^4$, $\sigma_2 = 0,293 \cdot 10^2$, $\sigma_3 = 0,199 \cdot 10$, а матрицы A_2 —

числа $\sigma_1 = 0{,}198 \cdot 10^2$, $\sigma_2 = 0{,}648 \cdot 10$, $\sigma_3 = 0{,}185 \cdot 10$. Числа обусловленности σ_1 / σ_3 этих матриц соответственно равны $0{,}575 \cdot 10^4$ и $10{,}7$. Последнее число обусловленности совсем невелико. Поэтому математическая модель (9) более надежна и приемлема по сравнению с моделью (8), и особенно по сравнению с моделью (7).

При конструировании выравнивающей функции $y(t)$ можно увеличить степень многочлена, представляющего эту функцию, и, „проиграв" несколько вариантов, выбрать наиболее подходящий.

Можно также попытаться выразить выравнивающую функцию $y(t)$ через другие базисные функции, например, через $\exp(\alpha_1 t), \exp(\alpha_2 t), ..., \exp(\alpha_k t)$ или через $\sin t$, $\cos t$, $\sin 2t$, $\cos 2t$, **...**, $\sin kt$, $\cos kt$, и, „проиграв" несколько вариантов, выбрать наиболее подходящий из них.

Применение сингулярного разложения $A = U \Sigma V^*$ позволяет перейти от системы $Ax = b$ к системе $\Sigma z = d$, по которой можно уяснить смысл некорректности системы и увидеть пути ее исправления.

Другими словами, применение сингулярного разложения позволяет наглядно проводить анализ данных и целенаправленно планировать эксперимент, приводящий к рассмотренной системе линейных уравнений, путем „проигрывания" различных вариантов.

Действительно, по виду системы $\Sigma z = d$, в подробной записи имеющей вид (3), сразу замечаем, что для ее совместности необходимо равенство нулю всех d_i при $i = r+1, \ldots, m$. Чем больше эти числа отличаются от нуля, тем большей будет некорректность системы $\Sigma z = d$, а следовательно, и системы $Ax = b$. Для исправления положения следует попытаться так организовать эксперимент, чтобы путем проигрывания различных вариантов добиться, по крайней мере, уменьшения указанной некорректности или попытаться изменить математическую модель.

Применение сингулярного разложения $A=U\Sigma V^*$ позволяет также проводить сингулярный анализ для получения достоверного решения задачи. Речь идет о нахождении решений систем

$$U\cdot\begin{pmatrix}\Sigma_{kk} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot V^*x=b,\qquad k=1,2,\ldots,r,$$

где Σ_{kk} — матрица, построенная на k первых строках и k первых столбцах матрицы Σ и выборе наиболее подходящего из этих решений. Подробные разъяснения по содержанию и применению сингулярного анализа можно найти в [35].

Полезным может оказаться следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $(m\times n)$*-матрица* A *ранга* r *имеет сингулярное разложение*

$$A=U\Sigma V^*=(u_1,u_2,\ldots,u_m)\begin{pmatrix}\sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \sigma_r & \\ & & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1^*\\ v_2^*\\ \vdots\\ v_n^*\end{pmatrix},$$

где $u_1,u_2,\ldots,u_m$ *— столбцы матрицы* U*,* $v_1,v_2,\ldots,v_n$ *— столбцы матрицы* V*,* $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_r$ *— ненулевые сингулярные числа матрицы* A*, то нормальному псевдорешению* x^0 *системы* $Ax=b$ *можно придать следующий вид*:

$$x^0=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_rv_r, \tag{10}$$

где

$$\alpha_i=\frac{(b,Av_i)}{\sigma_i^2},\qquad i=1,2,\ldots,r, \tag{11}$$

а также вид

$$x^0 = \beta_1 A^* u_1 + \beta_2 A^* u_2 + \ldots + \beta_r A^* u_r \,, \qquad (12)$$

где

$$\beta_i = \frac{(b, u_i)}{\sigma_i^2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r \,. \qquad (13)$$

Доказательство. Действительно, $x^0 = A^+ b = V \Sigma^+ U^* b =$

$$= (v_1, v_2, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & & & \\ & \sigma_2^{-1} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \sigma_r^{-1} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_m^* \end{pmatrix} b =$$

$$= \left(\frac{v_1}{\sigma_1}, \ \frac{v_2}{\sigma_2}, \ \ldots, \frac{v_r}{\sigma_r}, 0, \ldots, 0 \right) \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_m^* \end{pmatrix} b =$$

$$= \frac{v_1}{\sigma_1} u_1^* b + \frac{v_2}{\sigma_2} u_2^* b + \ldots + \frac{v_r}{\sigma_r} u_r^* b \,. \qquad (14)$$

Применяя соотношения $u_i = \dfrac{A v_i}{\sigma_i}$ и $v_i = \dfrac{A^* u_i}{\sigma_i}$ (см. формулы (2) и (3) параграфа 2.5), каждое слагаемое правой части равенства (14) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^* b = \frac{1}{\sigma_i^2} v_i (A v_i)^* b = \frac{(b, A v_i)}{\sigma_i^2} v_i = \alpha_i v_i \,; \ \alpha_i = \frac{(b, A v_i)}{\sigma_i^2},$$

и

$$\frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^* b = \frac{1}{\sigma_i^2} A^* u_i u_i^* b = \frac{(b, u_i)}{\sigma_i^2} A^* u_i = \beta_i A^* u_i; \ \beta_i = \frac{(b, u_i)}{\sigma_i^2}.$$

Применяя эти преобразования, из равенства (14) получим равенства (10) и (12).

Заметим, что для произвольного псевдорешения x системы $Ax = b$ становятся очевидными соотношения $x = x^0 + x_{\text{одн}} =$

$$= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r + c_1 v_{r+1} + c_2 v_{r+2} + \ldots + c_{n-r} v_n, \quad (15)$$

и

$$x = x^0 + x_{\text{одн}} = \beta_1 A^* u_1 + \beta_2 A^* u_2 + \ldots + \beta_r A^* u_r +$$

$$+ c_1 v_{r+1} + c_2 v_{r+2} + \ldots + c_{n-r} v_n, \quad (16)$$

где α_i и β_i определяются соответственно формулами (11) и (13), $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ — произвольные постоянные.

Пример 4. Пользуясь формулой (10), найти нормальное псевдорешение системы $Ax = b$ из примера 1**.**

Решение. Для матрицы *A* данной системы в решении примера 1 приведено сингулярное разложение $A = U \Sigma V^* =$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

из которого видно, что только столбцы

$$v_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1)^{\text{T}}, \ v_2 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, 1)^{\text{T}}, \ v_3 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1)^{\text{T}}$$

матрицы V соответствуют ненулевым сингулярным числам, а именно числам $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 4$. Поэтому для применения формулы (10) сначала вычислим векторы

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Затем по формуле (11) найдем коэффициенты

$$\alpha_1 = \frac{(b, Av_1)}{\sigma_1^2} = \frac{1}{16} \cdot (11, 0, 4, 8) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{7}{8},$$

$$\alpha_2 = \frac{(b, Av_2)}{\sigma_2^2} = \frac{1}{16} \cdot (11, 0, 4, 8) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{15}{8},$$

$$\alpha_3 = \frac{(b, Av_3)}{\sigma_3^2} = \frac{1}{16} \cdot (11, 0, 4, 8) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{23}{8}$$

и по формуле (10) вычислим искомое нормальное псевдорешение $x^0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 =$

$$=\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{23}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix}45\\-1\\15\\31\end{pmatrix}.$$

Заметим, что формула (10) остается верной при любой ортонормированной системе собственных векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матрицы A^*A, поскольку при построении сингулярного разложения матрицы A можно пользоваться любой такой системой векторов. Таким образом, для применения формулы (10) достаточно построить какую-либо ортонормированную систему собственных векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ симметричной (эрмитовой) матрицы A^*A. Для этого следует найти собственные значения $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ матрицы A^*A и при каждом из них построить фундаментальную систему решений однородной системы уравнений $(A^*A-\sigma_i^2 E)\,x=0$. Затем ортонормировать векторы-решения каждой из этих фундаментальных систем решений. В результате получим нужную ортонормированную систему векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Собственные значения $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ и ортонормированную систему собственных векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ симметричной (эрмитовой) матрицы A^*A можно найти также с помощью компьютера, применив к этой матрице метод вращений. Аналогичные замечания можно высказать относительно ортонормированной системы собственных векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ матрицы A^*A и формулы (12).

Пример 5. Пользуясь формулой (10), найти нормальное решение системы $Ax=b$ при

$$A=\begin{pmatrix}7&1&2\\5&5&-2\\3&3&6\\1&7&2\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}4\\2\\-6\\-8\end{pmatrix}.$$

Решение. В решении примера 1 параграфа 2.5 найдены только что указанным способом собственные значения $\lambda_1 = \sigma_1^2 = 144$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 36$ и соответствующие им собственные векторы

$$v_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)^{\mathrm{T}}, \quad v_2 = \frac{1}{3}(2, -1, -2)^{\mathrm{T}}, \quad v_3 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^{\mathrm{T}}.$$

Поэтому для применения формулы (10) остается вычислить векторы

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Затем по формуле (11) следует найти коэффициенты

$$\alpha_1 = \frac{(b, Av_1)}{\sigma_1^2} = \frac{1}{144} \cdot (4, 2, -6, -8) \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3},$$

$$\alpha_2 = \frac{(b, Av_2)}{\sigma_2^2} = \frac{1}{36} \cdot (4, 2, -6, -8) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{5}{3},$$

$$\alpha_3 = \frac{(b, Av_3)}{\sigma_3^2} = \frac{1}{36} \cdot (4, 2, -6, -8) \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3},$$

и по формуле (10) вычислить искомое нормальное решение

$$x^0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 =$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.3. Оценка погрешности решения системы линейных уравнений

В этом параграфе будут использоваться матричные нормы, согласованные с векторными нормами, и потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть квадратная матрица* C *удовлетворяет условию* $\| C \| < 1$. *Тогда для матрицы* $(E + C)$ *существует ей обратная матрица* $(E + C)^{-1}$ *и ее норма*

$$\| (E + C)^{-1} \| \le \frac{1}{1 - \| C \|}.$$

Доказательство. Известно, что любое собственное значение матрицы C по модулю не превосходит ее спектрального радиуса λ_C. В то же время спектральный радиус λ_C меньше любой нормы матрицы C, в частности, меньше рассматриваемой нормы $\|C\|$, которая, по условию, меньше 1. Поэтому все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы C лежат в круге $|\lambda| < 1$ с центром в начале координат, т. е. в круге разложимости функции $f(\lambda) = (1+\lambda)^{-1}$ в ряд

$$1 - \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \ldots .$$

Это гарантирует (см. п. 1.21) сходимость матричного ряда

$$E - C + C^2 - C^3 + \ldots,$$

а потому гарантирует существование матрицы $(E+C)^{-1}$, являющейся суммой этого ряда.

При этом для нормы матрицы $(E+C)^{-1}$, учитывая соотношения $\|C\| < 1$, $\|E\| = 1$ и $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$, получаем

$$\left\|(E+C)^{-1}\right\| = 1 + \|C\| + \left\|C^2\right\| + \left\|C^3\right\| + \ldots \le$$

$$\le 1 + \|C\| + \|C\|^2 + \|C\|^3 + \ldots = \frac{1}{1 - \|C\|}.$$

Перейдем теперь к оценке погрешности решения системы линейных уравнений.

Пусть

$$Ax = b \tag{1}$$

— исходная система линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей A n-го порядка и

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b \tag{2}$$

— возмущенная система. Здесь x — решение данной системы; $x_B = x + \delta x$ — решение возмущенной системы.

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получим

$$\delta A \cdot x + (A + \delta A) \cdot \delta x = \delta b. \tag{3}$$

Представим матрицу $A + \delta A$ в виде

$$A + \delta A = A \cdot (E + A^{-1} \delta A)$$

и предположим, что

$$\| A^{-1} \| \cdot \| \delta A \| < 1. \tag{4}$$

Тогда

$$\| A^{-1} \cdot \delta A \| \le \| A^{-1} \| \cdot \| \delta A \| < 1,$$

и в силу леммы для матрицы $(E + A^{-1} \delta A)$ существует обратная матрица $(E + A^{-1} \delta A)^{-1}$, норма которой

$$\| (E + A^{-1} \delta A)^{-1} \| \le \frac{1}{1 - \| A^{-1} \| \cdot \| \delta A \|}.$$

Поэтому матрица

$$(A + \delta A)^{-1} = \left[A \cdot (E + A^{-1} \delta A) \right]^{-1} = (E + A^{-1} \delta A)^{-1} \cdot A^{-1},$$

и из равенства (3) получаем равенство

$$\delta x = (E + A^{-1} \delta A)^{-1} \cdot A^{-1} (\delta b - \delta A \cdot x),$$

из которого следует соотношение

$$\| \delta x \| \le \frac{\| A^{-1} \|}{1 - \| A^{-1} \| \cdot \| \delta A \|} \cdot (\| \delta A \| \cdot \| x \| + \| \delta b \|). \tag{5}$$

Из равенства $Ax = b$ вытекает соотношение $\| b \| \le \| A \| \cdot \| x \|$. Поэтому число $\alpha = \dfrac{\| A \| \cdot \| x \|}{\| b \|} \ge 1$ и неравенство (5) можно усилить, умножив в нем слагаемое $\|\delta b\|$ на число α. Проделав это, получим неравенство

$$\|\delta x\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|}\cdot\left(\|\delta A\|\cdot\|x\| + \frac{\|\delta b\|\cdot\|A\|\cdot\|x\|}{\|b\|}\right),$$

которое легко преобразовать к виду

$$\|\delta x\| \le \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\|x\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\cdot\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right). \qquad (6)$$

Введя обозначение

$$K(A) = \|A^{-1}\|\cdot\|A\|, \qquad (7)$$

неравенство (6) записывают в виде

$$\|\delta x\| = \|x_B - x\| \le \frac{K(A)\cdot\|x\|}{1-K(A)\cdot\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\cdot\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right). \qquad (8)$$

Число $K(A)$, определенное соотношением (7), называют **числом обусловленности** матрицы A в рассматриваемой матричной норме.

Разделив неравенство (8) на $\|x\|$, придем к неравенству

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = \frac{\|x_B - x\|}{\|x\|} \le \frac{K(A)}{1-K(A)\cdot\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\cdot\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right). \qquad (9)$$

Таким образом, если невырожденная матрица A и столбец b системы линейных уравнений $Ax = b$ получают возмущения δA и δb, причем в некоторой матричной норме

$$\left\| A^{-1} \right\| \cdot \left\| \delta A \right\| < 1,$$

то возмущенная система

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

имеет единственное решение $x_B = x + \delta x$ *и относительная погрешность*

$$\frac{\| \delta x \|}{\| x \|}$$

решения системы $Ax = b$ *оценивается через относительные возмущения* $\dfrac{\| \delta A \|}{\| A \|}$ *матрицы* A *и* $\dfrac{\| \delta b \|}{\| b \|}$ *столбца* b *свободных членов этой системы формулой* (9) *в рассматриваемой норме.*

Из формул (8) и (9) видно, что чем больше число обусловленности матрицы системы, тем большими будут абсолютная и относительная погрешности решения этой системы. Поэтому системы линейных уравнений, у которых матрицы имеют большие числа обусловленности, называют **плохо обусловленными**. Число обусловленности определяется не только матрицей, но и выбором нормы. Для разных норм по формулам (8) и (9) будем получать разные оценки абсолютной и относительной погрешностей решения системы.

Отметим некоторые свойства числа обусловленности.

Непосредственно из определения числа обусловленности вытекает, что

$$K(A) = K(A^{-1}). \tag{10}$$

Перемножая неравенства

$$\| AB \| \le \| A \| \cdot \| B \| \quad \text{и} \quad \left\| (AB)^{-1} \right\| = \left\| B^{-1} A^{-1} \right\| \le \left\| B^{-1} \right\| \cdot \left\| A^{-1} \right\|,$$

получим соотношение

$$K(AB) = K(A) \cdot K(B). \tag{11}$$

Из соотношения $E = A^{-1}A$ следует, что $\| E \| = \| A^{-1}A \| \le$ $\le \| A^{-1} \| \cdot \| A \| = K$, т. е.

$$K(A) \ge \| E \| \ge 1. \tag{12}$$

Пусть σ_1 и σ_n — наибольшее и наименьшее сингулярные числа матрицы A. Тогда спектральная норма $\| A \| = \sigma_1$, а спектральная норма $\| A^{-1} \| = \sigma_n^{-1}$. Поэтому для спектрального числа обусловленности матрицы A получаем соотношение

$$K_C(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}. \tag{13}$$

Отсюда следует, что спектральное число обусловленности ортогональной (унитарной) матрицы равно единице. Поэтому спектральное число обусловленности матрицы A не меняется при ее умножении на ортогональную (унитарную) матрицу. В силу этого при решении системы $Ax = b$ предпочтительно трансформировать эту систему с помощью ортогональных (унитарных) преобразований, что равносильно умножению системы на ортогональные (унитарные) матрицы.

Пример 1. В системе

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

элементы матрицы системы могут изменяться на ε_1, а свободные члены — на ε_2. Оценить возможное изменение координат вектора решения при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,001$.

Решение. В рассматриваемой системе

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\delta A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \quad \delta b = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Для оценки возмущения координат вектора-решения используем кубическую норму $\| x \|_\infty = \max\limits_i | x_i |$. Подчиненной ей матричной нормой является

$$\| A \|_\infty = \max_i \sum_j | a_{ij} | .$$

В рассматриваемом случае

$$\| A \|_\infty = 7, \quad \| A^{-1} \|_\infty = 7, \quad K(A) = 7 \cdot 7 = 49, \| b \|_\infty = 2,$$

$$\| x_0 \|_\infty = 2, \quad \| \delta A \|_\infty = 2\varepsilon_1, \quad \| \delta b \|_\infty = \varepsilon_2,$$

$$\frac{\| \delta A \|_\infty}{\| A \|_\infty} = \frac{2\varepsilon_1}{7}, \quad \frac{\| \delta b \|_\infty}{\| b \|_\infty} = \frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Поэтому в соответствии с соотношениями (8) и (9) получаем

$$\| x_B - x_0 \|_\infty \le \frac{49 \cdot 2}{1 - 49 \cdot \dfrac{2\varepsilon_1}{7}} \cdot \left(\frac{2\varepsilon_1}{7} + \frac{\varepsilon_2}{2} \right) =$$

$$= \frac{49 \cdot 2}{1 - 14\varepsilon_1} \cdot \left(\frac{2\varepsilon_1}{7} + \frac{\varepsilon_2}{2} \right),$$

$$\frac{\| x_B - x_0 \|_\infty}{\| x_0 \|_\infty} \le \frac{49 \cdot 2}{1 - 14\varepsilon_1} \cdot \left(\frac{2\varepsilon_1}{7} + \frac{\varepsilon_2}{2} \right).$$

В частности, при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}001$

$$\| x_B - x_0 \|_\infty \le \frac{98}{1 - 0{,}014} \cdot \left(\frac{0{,}002}{7} + \frac{0{,}001}{2} \right) = 0{,}078,$$

$$\frac{\| x_B - x_0 \|_\infty}{\| x_0 \|_\infty} \le \frac{49}{0{,}986} \cdot \frac{0{,}011}{14} \approx 0{,}039,$$

т. е. при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}001$ координаты вектора-решения данной системы могут изменяться не более чем на $0{,}078$, а их относительное изменение не превосходит $0{,}039$.

Пример 2. В системе

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

элементы матрицы системы могут изменяться на ε_1, а свободные члены — на ε_2. Оценить возможное изменение вектора решения по длине при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}01$.

Решение. Для оценки возмущения вектора-решения по длине естественно использовать евклидову норму $\| x \|_2$. Подчиненной ей матричной нормой является спектральная норма $\| A \|_C = \sqrt{\max \lambda_{A^* A}}$. В рассматриваемом примере матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

симметричная. Поэтому спектральная норма матрицы A совпадает с максимальным из модулей ее характеристических чисел, т. е. $\| A \|_C = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) = 7$, так как характеристический многочлен $|A - \lambda E| = \lambda^2 - 6\lambda - 7$ имеет корни $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -1$. Поскольку собственные значения матриц A и A^{-1} взаимно обратные, получаем

$$\| A^{-1} \|_C = \max\left(\frac{1}{|\lambda_1|}, \frac{1}{|\lambda_2|} \right) = \frac{1}{\min(|\lambda_1|, |\lambda_2|)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Матрица

$$\delta A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

симметричная, ее характеристический многочлен

$$\left| \delta A - \lambda E \right| = \lambda\,(\lambda - 2\varepsilon_1)$$

имеет корни $\lambda_1 = 2\varepsilon_1$, $\lambda_2 = 0$. Поэтому

$$\| \delta A \|_C = \max\,(\left|\lambda_1\right|, \left|\lambda_2\right|) = 2\varepsilon_1, \qquad \frac{\| \delta A \|_C}{\| A \|_C} = \frac{2\varepsilon_1}{7}.$$

Далее имеем

$$\| b \|_2 = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}\,,\ \delta b = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix},\ \| \delta b \|_2 = \varepsilon_2\sqrt{2}\,,$$

$$\frac{\| \delta b \|_2}{\| b \|_2} = \frac{\varepsilon_2}{7},$$

решение данной системы $x_0 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$ и его норма $\| x_0 \|_2 = \sqrt{2}$.

Теперь в соответствии с неравенствами (8) и (9) получаем

$$\| x_B - x_0 \|_2 \le \frac{1 \cdot 7 \cdot \sqrt{2}}{1 - 1 \cdot 7 \cdot \dfrac{2\varepsilon_1}{7}} \cdot \left(\frac{2\varepsilon_1}{7} + \frac{\varepsilon_2}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} \cdot (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{1 - 2\varepsilon_1},$$

$$\frac{\| x_B - x_0 \|_2}{\| x_0 \|_2} \le \frac{1 \cdot 7}{1 - 1 \cdot 7 \cdot \dfrac{2\varepsilon_1}{7}} \cdot \left(\frac{2\varepsilon_1}{7} + \frac{\varepsilon_2}{2} \right) = \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1 - 2\varepsilon_1}.$$

В частности, при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}01$

$$\| x_B - x_0 \|_2 \le \frac{\sqrt{2}}{0{,}98} \cdot \left(0{,}02 + 0{,}01\right) \simeq 0{,}0433\,,$$

$$\frac{\| x_B - x_0 \|_2}{\| x_0 \|_2} \le \frac{1}{0,98} \cdot \left(0,02 + 0,01\right) \simeq 0,0306,$$

т. е. длина вектора-решения может изменяться не более чем на $0,0433$, а его относительное изменение по длине не превосходит $0,0306$.

Другой подход к оценке погрешности решения $\tilde{x}$ возмущенной системы $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ опирается на использование невязки $r = A\tilde{x} - b$, которая получается при подстановке вычисленного решения возмущенной системы в точную систему $Ax = b$. Обоснование такого подхода сводится к следующей цепочке соотношений:

$$Ax = b, \quad x = A^{-1}b, \qquad \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \quad \tilde{x} = \tilde{A}^{-1}\tilde{b},$$

$$r = A\tilde{x} - b, \qquad b = A\tilde{x} - r,$$

$$\delta x = \tilde{x} - x = \tilde{x} - A^{-1}b = \tilde{x} - A^{-1}(A\tilde{x} - r) =$$

$$= \tilde{x} - \tilde{x} + A^{-1}r = A^{-1}r.$$

Таким образом,

$$\delta x = \tilde{x} - x = A^{-1}r.$$

Отсюда получаем

$$\| \delta x \| = \| \tilde{x} - x \| = \| A^{-1}r \| \le \| A^{-1} \| \cdot \| r \|.$$

Эта простая оценка привлекательна с практической точки зрения, поскольку r легко вычисляется, если вычислено приближенное решение $\tilde{x}$. При этом нет необходимости в оценивании δA и δb.

Исследованию влияния возмущений матрицы и столбца системы $Ax = b$ с произвольной $(m \times n)$-матрицей A ранга r посвящены в [7] параграфы 16 и 17. Приведем основные результаты из них.

Пусть даны совместная или несовместная системы

$$Ax = b$$

с ($m\times n$)-матрицей A ранга r и ее возмущенная система

$$\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b},$$

где для удобства введены обозначения $\tilde{A}=A+\delta A$, $\tilde{x}=x+\delta x$, $\tilde{b}=b+\delta b$. В этом случае естественно вести речь (см. п. 4.2.1) о нормальном псевдорешении x^0 точной системы и его возмущении при возмущениях системы.

Пусть матрицы A и $\tilde{A}$ имеют сингулярные разложения

$$A=U\begin{pmatrix}\sigma_1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \sigma_s & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}V^*,\quad \tilde{A}=\tilde{U}\begin{pmatrix}\tilde{\sigma}_1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \tilde{\sigma}_s & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\tilde{V}^*.$$

Предположим, что найдены решения $\tilde{x}^{(k)}$, $k=1,2,\dots,r$, систем

$$\tilde{U}\begin{pmatrix}\tilde{\sigma}_1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \tilde{\sigma}_k & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\tilde{V}^*\tilde{x}=\tilde{b},\quad k=1,2,\dots,r, \tag{14}$$

и известно, что точная система совместная, и ее возмущения малы по сравнению с наименьшим ненулевым сингулярным числом σ_r матрицы A, т. е. возмущения элементов матрицы A и свободных членов системы $Ax=b$ малы по сравнению с сингулярным числом σ_r. Тогда для нормального решения x^0 точной системы принимают приближенное равенство

$$x^0=\tilde{x}^{(k)} \text{ при } k=r. \tag{15}$$

В методе, описанном в п. 4.2.6, этого результата достигают с помощью введения границы τ.

Для оценки относительной погрешности по длине нормального решения x^0, определенного по формуле (15), будем иметь соотношение

$$\frac{\left\| \delta x^0 \right\|_E}{\left\| x^0 \right\|_E} = \frac{\left\| \tilde{x}^{(r)} - x^0 \right\|_E}{\left\| x^0 \right\|_E} \leq K^+(A) \cdot \left(\frac{\left\| \delta A \right\|_E}{\left\| A \right\|_E} + \frac{\left\| \delta b \right\|_E}{\left\| b \right\|_E} \right), \quad (16)$$

где

$$K^+(A) = \left\| A^+ \right\|_E \cdot \left\| A \right\|_E$$

— *обобщенное число обусловленности матрицы* A.

Формулы (15) и (16) сохраняются и для почти совместной системы $Ax = b$, т. е. для такой системы, в которой вектор

$$b = (b_r, 0)^{\mathrm{T}} + (0, b'_r)^{\mathrm{T}}$$

имеет достаточно малое слагаемое $(0, b'_r)^{\mathrm{T}}$. Заметим, что формула (16) аналогична формуле (9). При этом она показывает, что если точная система совместная или почти совместная и ее возмущение мало по сравнению с наименьшим сингулярным числом матрицы системы, то нормальное решение можно найти по формуле (15) с той же точностью, что и для системы с невырожденной матрицей.

В случае несовместности точной системы $Ax = b$ и малого ее возмущения по сравнению с наименьшим ненулевым сингулярным числом для нормального решения точной системы принимают также приближенное равенство (15), т. е. полагают $x^0 = \tilde{x}^{(k)}$ при $k = r$. При этом вместо соотношения (16) будет иметь место соотношение

$$\frac{\left\| \delta x^0 \right\|_E}{\left\| x^0 \right\|_E} = \frac{\left\| \tilde{x}^{(k)} - x^0 \right\|_E}{\left\| x^0 \right\|_E} \leq K^+(A) \cdot \left(\frac{\left\| \delta A \right\|_E}{\left\| A \right\|_E} + \frac{\left\| \delta b \right\|_E}{\left\| b \right\|_E} \right) +$$

$$+ K^+(A) \cdot \left(K^+(A) \frac{\left\| \delta A \right\|_E}{\left\| A \right\|_E} + \frac{\left\| \delta b \right\|_E}{\left\| b \right\|_E} \right) \cdot \frac{\left\| b'_r \right\|_E}{\left\| b_r \right\|_E}. \quad (17)$$

Это соотношение показывает, что точность приближения x^0 с помощью $\tilde{x}^{(r)}$ в значительной мере зависит от отношения $\left\| b_r' \right\|_E \Big/ \left\| b_r \right\|_E$, т. е. от степени согласованности правой и левой частей точной системы $Ax = b$.

Формулы (15), (16), (17) *верны при возмущениях системы, достаточно малых по сравнению с наименьшим ненулевым сингулярным числом матрицы системы.* ***В общем случае****, когда входные данные системы* $Ax = b$ *заданы с точностью порядка* ε*,* ***одно из решений*** $\tilde{x}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, r$, *системы* (14) *приближает нормальное псевдорешение* x^0 *по длине с точностью порядка* $(n\varepsilon)^{2/3}$*, если точная система совместная, и с точностью порядка* $(n\varepsilon)^{1/2}$*, если точная система несовместная.*

К аналогичному результату придем, если вместо приближенного равенства (15) будем пользоваться (см. п. 4.2.2) приближенным равенством

$$x^0 \approx \tilde{x}^{\alpha} \tag{18}$$

при некотором значении α, т. е. если нормальное псевдорешение x^0 системы $Ax = b$ приближать с помощью вектора $\tilde{x}^{\alpha}$, который находится при некотором значении α **методом регуляризации** для возмущенной системы $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, так как при этом оказывается верным (см. [7], §17) следующее утверждение.

Если входные данные системы $Ax = b$ *заданы с точностью порядка* ε*, то при некотором значении* α *вектор* $\tilde{x}^{\alpha}$ *приближает нормальное псевдорешение* x^0 *системы* $Ax = b$ *по длине с точностью порядка* $\varepsilon^{2/3}$ *в случае ее совместности и с точностью порядка* $\varepsilon^{1/2}$ *в противном случае. При этом, если* $\alpha = \varepsilon^{2/3}$ *в первом случае и* $\alpha = \varepsilon^{1/2}$ *во втором случае, то* $\tilde{x}^{\alpha}$ *обеспечивает почти наилучшее приближение к* x^0.

Пример 3. В системах

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \tag{19}$$

и

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \tag{20}$$

элементы матриц и свободные члены могут изменяться на $\varepsilon = 0,01$. Оценить возможную погрешность приближения нормального псевдорешения каждой из данных систем.

Решение. Точная система (19) совместная и $r(A) = 2$, а система (20) несовместная. Матрица

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

имеет характеристический многочлен

$$\left| A^*A - \lambda E \right| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & -1 \\ -3 & 3-\lambda & 3 \\ -1 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 13\lambda + 36),$$

корнями которого являются числа $\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 0$. Поэтому сингулярные числа матрицы A — это числа $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 0$. Наименьшим ненулевым из них является число $\sigma_2 = 2$. Оно значительно больше возмущений элементов матрицы и свободных членов данных систем. Поэтому для нормальных псевдорешений этих систем применима формула (15) при $k = 2$, по которой $x^0 \approx \tilde{x}^{(2)}$, а погрешность этого приближенного равенства оценивается для системы (19) по формуле

(16), для системы (20) — по формуле (17). Чтобы применить эти формулы, вычислим для обеих систем

$$A^{+}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}13 & -4 & 5\\ -4 & 4 & 4\\ 5 & 4 & 13\end{pmatrix},\quad \left\| A \right\|_{E}=\sqrt{13},\quad \left\| A^{+} \right\|_{E}=\frac{\sqrt{13}}{6},$$

$$\left\| \delta A \right\|_{E}=3\varepsilon,\qquad \frac{\left\| \delta A \right\|_{E}}{\left\| A \right\|_{E}}=\frac{3\varepsilon}{\sqrt{13}},$$

$$K^{+}(A)=\left\| A^{+} \right\|_{E}\cdot\left\| A \right\|_{E}=\frac{13}{6}.$$

Кроме того, вычислим для системы (19):

$$\left\| b \right\|_{E}=\sqrt{2},\qquad \left\| \delta b \right\|_{E}=\varepsilon\sqrt{3},\qquad \frac{\left\| \delta b \right\|_{E}}{\left\| b \right\|_{E}}=\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

и для системы (20):

$$\left\| b \right\|_{E}=\sqrt{14},\quad \left\| \delta b \right\|_{E}=\varepsilon\sqrt{3},\ \frac{\left\| \delta b \right\|_{E}}{\left\| b \right\|_{E}}=\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{\sqrt{14}},$$

$$\left\| b_{2} \right\|_{E}=\sqrt{13},\ \left\| b_{2}' \right\|_{E}=1.$$

Теперь по формуле (16) получим оценку возможной относительной погрешности по длине нормального решения x^{0}, вычисленного по формуле $x^{0}\approx\tilde{x}^{(2)}$ для системы (19):

$$\frac{\left\| \delta x^{0} \right\|_{E}}{\left\| x^{0} \right\|_{E}}\le K^{+}(A)\cdot\left(\frac{\left\| \delta A \right\|_{E}}{\left\| A \right\|_{E}}+\frac{\left\| \delta b \right\|_{E}}{\left\| b \right\|_{E}}\right)=\frac{13}{6}\left(\frac{3\varepsilon}{\sqrt{13}}+\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

В частности, при $\varepsilon=0,01$ имеем $\dfrac{\left\| \delta x^{0} \right\|_{E}}{\left\| x^{0} \right\|_{E}}\approx 0,0446$.

Абсолютную погрешность $x^{0}\approx\tilde{x}^{(2)}$ можно вычислить по формуле $(n\varepsilon)^{2/3}$, по которой получаем

$$(n\varepsilon)^{2/3} = (3 \cdot 0{,}01)^{2/3} \approx 0{,}096 .$$

Если нормальное решение x^0 находить приближенно по формуле (18), то для него получим следующую оценку абсолютной погрешности по длине: $\varepsilon^{2/3} = (0{,}01)^{2/3} \approx 0{,}046$.

Для системы (20) формула (17) дает следующую оценку возможной относительной погрешности для x^0, вычисленного по формуле $x^0 \approx \tilde{x}^{(2)}$:

$$\frac{\left\| \delta x^0 \right\|_E}{\left\| x^0 \right\|_E} \le \frac{13}{6}\left(\frac{3\varepsilon}{\sqrt{13}} + \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{\sqrt{14}} \right) + \frac{13}{6}\left(\frac{13\varepsilon}{2\sqrt{13}} + \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{\sqrt{14}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} .$$

В частности, при $\varepsilon = 0{,}01$ имеем $\dfrac{\left\| \delta x^0 \right\|_E}{\left\| x^0 \right\|_E} \approx 0{,}042$.

Для возможной абсолютной погрешности $x^0 \approx \tilde{x}^{(2)}$ по длине находим $(n\varepsilon)^{1/2} = (3 \cdot 0{,}01)^{1/2} \approx 0{,}173$.

При вычислении x^0 методом регуляризации, т. е. по приближенной формуле (18), возможной абсолютной погрешностью для x^0 по длине будет $\varepsilon^{1/2} = (0{,}01)^{1/2} = 0{,}1$.

В заключение заметим, что результаты этого параграфа используются для обоснования устойчивости любого метода решения систем линейных уравнений.

4.4. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

4.4.1. *Метод итераций*

При большом числе неизвестных в системе линейных уравнений применение метода Гаусса и других методов, дающих точное решение, становится весьма затруднительным. В таких случаях для решения системы линейных уравнений могут оказаться более удобными приближенные методы. Рассмотрим *метод итераций* (*метод последовательных приближений*). Решение системы при этом методе получается как предел последовательности приближенных решений, которые находятся с помощью некоторого единообразного процесса, называемого *процессом итераций*.

Принцип построения итерационного процесса состоит в следующем. Пусть дана квадратная система

$$Ax = b \tag{1}$$

с невырожденной матрицей A n-го порядка. Представим эту систему в виде

$$x = h + Bx\,, \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^{\mathrm{T}}$, B — квадратная матрица порядка n. К такому виду системы можно прийти, например, если в системе (1) первое уравнение разрешить относительно x_1, второе — относительно x_2 и т. д.

Систему (2) называют ***приведенной*** и решают методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимают какой-либо вектор

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}.$$

На практике за нулевое приближение часто берут столбец $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^{\mathrm{T}}$ свободных членов системы (2).

Подставив $x^{(0)}$ вместо x в правую часть системы (2), получают первое приближение

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})^{\mathrm{T}}.$$

С ним поступают аналогично и далее действуют по правилу:

$$x^{(k+1)} = h + Bx^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{3}$$

В результате получают последовательность приближенных решений

$$x^{(0)},\ x^{(1)},\ \dots,\ x^{(k)},\ \dots.$$

Если эта последовательность имеет предел

$$x = \lim_{k \to \infty} x^{(k)},$$

то этот предел является решением системы (2), а потому и системы (1). При вычислениях по формуле (3) каждое приближение является исходным для вычисления следующего приближения. Поэтому ошибки, допущенные при вычислении предыдущих приближений, сглаживаются в процессе вычислений последующих приближений. Следовательно, итерационный процесс является самоисправляющимся процессом. Процесс быстро сходится, если диагональные коэффициенты $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ исходной системы значительно преобладают по абсолютной величине над остальными ее коэффициентами или, что то же самое, если коэффициенты b_{ij} системы (2) достаточно малы по абсолютной величине. Более точно достаточные условия сходимости итерационного процесса описывает следующая теорема.

Теорема 1. *Процесс итераций* (3) *для системы линейных уравнений* (2) *сходится к единственному ее решению, если какая-либо норма матрицы этой системы меньше единицы, в частности, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

$$\| B \|_1 = \max_j \sum_i \left| b_{ij} \right| < 1,$$

$$\| B \|_\infty = \max_i \sum_j \left| b_{ij} \right| < 1, \tag{4}$$

$$\| B \|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right|^2} < 1,$$

$$\| B \| = \sqrt{\max \lambda_{B^* B}} < 1,$$

где $\max \lambda_{B^* B}$ *— наибольшее характеристическое число матрицы* $B^* B$.

Доказательство. Приняв за нулевое приближенное решение произвольный вектор $x^{(0)}$, по формуле (3) построим последовательность приближенных решений

$$x^{(1)} = h + B\,x^{(0)},$$

$$x^{(2)} = h + B\,x^{(1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^{(k-1)} = h + B\,x^{(k-2)},$$

$$x^{(k)} = h + B\,x^{(k-1)}.$$

Отсюда получаем

$$x^{(k)} = h + B\,x^{(k-1)} = h + B\,(h + B\,x^{(k-2)}) =$$

$$= (E + B)\,h + B^2\,x^{(k-2)} = \ldots =$$

$$= (E + B + B^2 + \ \ldots\ + B^{k-1})\,h + B^k x^{(0)}.$$

Таким образом,

$$x^{(k)} = (E + B + B^2 + \ \ldots\ + B^{k-1})\,h + B^k\,x^{(0)} \tag{5}$$

Так как по условию $\| B \| < 1$, то $\| B^k \| \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому для матриц выполняются соотношения

$$\lim_{k \to \infty} B^k = 0$$

и для матричной геометрической прогрессии $E, B, B^2, ..., B^{k-1}, ...$

$$\lim_{k \to \infty} (E + B + B^2 + \ \ldots\ + B^{k-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} B^k = (E - B)^{-1}.$$

Учитывая это, перейдем к пределу в равенстве (5). Тогда получим

$$x = \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = (E - B)^{-1} h. \tag{6}$$

Это означает, что итерационный процесс (3) сходящийся. Остается показать, что полученный предел является решением системы (2), а потому и решением системы (1). Для этого равенство (6) перепишем в виде

$$(E - B)x = h .$$

Отсюда получаем $x = h + Bx$, т. е. x является решением системы (2).

Теорема 2. *Погрешность k-го приближенного решения $x^{(k)}$, полученного при решении системы $x = h + Bx$ методом итераций, оценивается при произвольном выборе нулевого приближенного решения $x^{(0)}$ по формуле*

$$\left\| x - x^{(k)} \right\| \le \frac{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|}{1 - \left\| B \right\|}, \tag{7}$$

где $\left\| B \right\|$ — какая-либо матричная норма, согласованная с векторной нормой и меньшая единицы.

Доказательство. Пусть $x^{(k-1)}$ и $x^{(k)}$ — два последовательных приближенных решения системы $x = h + Bx$, полученных методом итераций. При любом $p \ge 1$

$$x^{(k+p)} - x^{(k)} = (x^{(k+1)} - x^{(k)}) + (x^{(k+2)} - x^{(k+1)}) +$$

$$+ \ldots + (x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)}) .$$

Поэтому

$$\left\| x^{(k+p)} - x^{(k)} \right\| \le \left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| + \left\| x^{(k+2)} - x^{(k+1)} \right\| +$$

$$+ \ldots + \left\| x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)} \right\|. \tag{8}$$

Так как

$$x^{(l+1)} = h + Bx^{(l)}$$

и

$$x^{(l)} = h + Bx^{(l-1)},$$

то

$$x^{(l+1)} - x^{(l)} = B(x^{(l)} - x^{(l-1)}) .$$

Следовательно,

$$\left\| x^{(l+1)} - x^{(l)} \right\| \le B \cdot \left\| x^{(l)} - x^{(l-1)} \right\| \le B^{l-k} \cdot \left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \qquad (9)$$

при $l > k \ge 1$.

Поэтому из формулы (8) получаем

$$\left\| x^{(k+p)} - x^{(k)} \right\| \le \left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| + \left\| B \right\| \cdot \left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| +$$

$$+ \ldots + \left\| B^{p} \right\| \cdot \left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le$$

$$\le (1 + \left\| B \right\| + \left\| B \right\|^2 + \ldots + \left\| B \right\|^p) \cdot \left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|. \qquad (10)$$

Поскольку при $\left\| B \right\| \le 1$ для p-й частичной суммы геометрической прогрессии $1, \left\| B \right\|, \left\| B \right\|^2, \ldots, \left\| B \right\|^p, \ldots$

$$\lim_{p \to \infty} (1 + \left\| B \right\| + \left\| B \right\|^2 + \ldots + \left\| B \right\|^p) = \sum_{p=0}^{\infty} \left\| B \right\|^p = \frac{1}{1 - \left\| B \right\|},$$

то, переходя к пределу при $p \to \infty$ в неравенстве (10), получим нужную формулу (7).

Следствие. *Для оценки погрешности* k*-го приближенного решения* $x^{(k)}$ *системы* $x = h + Bx$, *полученного методом итераций при произвольном выборе нулевого приближенного решения* $x^{(0)}$, *вместо формулы* (7) *можно пользоваться формулой*

$$\left\| x - x^{(k)} \right\| \le \frac{\left\| B \right\|}{1 - \left\| B \right\|} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| \qquad (11)$$

или формулой

$$\left\| x - x^{(k)} \right\| \le \frac{\left\| B \right\|^k}{1 - \left\| B \right\|} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|, \qquad (12)$$

а при нулевом приближенном решении $x^{(0)} = h$ *— формулой*

$$\left\| x - x^{(k)} \right\| \le \frac{\left\| B \right\|^{k+1}}{1 - \left\| B \right\|} \left\| h \right\|. \qquad (13)$$

Доказательство. Формулы (11) и (12) получаются из формулы (7) с помощью оценки (9) для нормы разности двух последовательных приближенных решений. Формула (13) получается из формулы (12), поскольку при

$$x^{(0)} = h\,,$$

$$x^{(1)} = h + B\,h\,,$$

разность

$$x^{(1)} - x^{(0)} = B\,h$$

и потому

$$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\| = \| B\,h \| \le \| B \| \cdot \| h \|\,.$$

Из формулы (13) можно найти номер k нужной итерации, которая обеспечит необходимую точность ε k-го приближенного решения $x^{(k)}$.

На самом деле, чтобы выполнялось соотношение

$$\left\| x - x^{(k)} \right\| \le \varepsilon\,,$$

из формулы (13) получаем, что должно выполняться неравенство

$$\frac{\| B \|^{k+1}}{1 - \| B \|} \| h \| \le \varepsilon\,.$$

Отсюда получаем

$$\| B \|^{k+1} \le \frac{\varepsilon \cdot (1 - \| B \|)}{\| h \|}$$

и

$$(k+1) \cdot \lg \| B \| \le \lg \varepsilon + \lg (1 - \| B \|) - \lg \| h \|\,.$$

Следовательно,

$$(k+1) \ge \frac{\left[\lg \varepsilon + \lg (1 - \| B \|) - \lg \| h \| \right]}{\lg \| B \|}$$

и

$$k \geq \frac{\left[\lg \varepsilon + \lg(1 - \| B \|) - \lg \| h \|\right]}{\lg \| B \|} - 1. \qquad (14)$$

Следует отметить, что теоретическая оценка погрешности k-го приближенного решения $x^{(k)}$ по формулам (7), (11), (12), (13) практически оказывается весьма заниженной, а найденный по формуле (14) номер k нужной итерации, которая обеспечит необходимую точность приближенного решения $x^{(k)}$, практически оказывается весьма завышенным.

Пример. Методом итераций решить систему

$$\begin{cases} 20x_1 + 3x_2 + x_3 = 68, \\ 2x_1 + 20x_2 + 3x_3 = 41, \\ 3x_1 + x_2 + 10x_3 = 60. \end{cases}$$

Решение. Разрешив первое уравнение относительно x_1, второе — относительно x_2, третье — относительно x_3, придем к системе

$$\begin{cases} x_1 = 3{,}4 - 0{,}15x_2 - 0{,}05x_3, \\ x_2 = 2{,}05 - 0{,}1x_1 - 0{,}15x_3, \\ x_3 = 6 - 0{,}3x_1 - 0{,}1x_2. \end{cases} \qquad (15)$$

Матрицей этой системы является матрица

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}15 & -0{,}05 \\ -0{,}1 & 0 & -0{,}15 \\ -0{,}3 & -0{,}1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее норма

$$\| B \|_1 = \max\,(0 + 0{,}1 + 0{,}3; 0{,}15 + 0 + 0{,}1; 0{,}05 + 0{,}15 + 0) =$$
$$= \max\,(0{,}4; 0{,}25; 0{,}2) = 0{,}4 < 1.$$

Поэтому процесс итераций для системы (15) будет сходящимся.

За нулевое приближение примем

$$x_1^{(0)} = 3,4\,; \qquad x_2^{(0)} = 2,05\,; \qquad x_3^{(0)} = 6\,.$$

Подставив эти значения соответственно вместо x_1, x_2, x_3 в правые части уравнений системы (15), получим

$$x_1^{(1)} = 2,7925\,; \qquad x_2^{(1)} = 0,81\,; \qquad x_3^{(1)} = 4,775\,.$$

С полученным приближением поступим аналогично и т. д. Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Процесс приостановлен, так как пошло повторение результатов. Таким образом, можно принять

$$x = x^{(14)} = (3, 1, 5)^{\mathrm{T}}\,.$$

Таблица 1

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	3,4	2,05	6
1	2,7925	0,81	4,775
2	3,03975	1,0545	5,08125
3	2,9877625	0,9838375	4,982625
4	3,0032932	1,0038301	5,0052876
5	2,9991611	0,9988776	4,9986290
6	3,000237	1,0002896	5,0003639
7	2,9999384	0,9999217	4,9998999
8	3,0000167	1,0000212	5,0000263
9	2,9999955	0,9999944	4,9999929
10	3,0000012	1,0000016	5,000002
11	2,9999997	0,9999996	4,9999994
12	3,0000001	1,0000001	5,0000001
13	3	1	5
14	3	1	5

Процесс можно было остановить раньше, например, на пятом — шестом шаге, заметив, что значения $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $x_3^{(k)}$ уже при $k = 5$; 6 колеблются соответственно вблизи значений 3, 1, 5.

Оценим теоретическую погрешность по векторной норме $\|\cdot\|_1$, например, шестого приближения $x^{(6)}$. Вычислив

$$\|B\|_1 = \max(0+0{,}1+0{,}3; 0{,}15+0+0{,}1; 0{,}05+0{,}15+0) = 0{,}4;$$

$$\|x^{(7)} - x^{(6)}\|_1 = |x_1^{(7)} - x_1^{(6)}| + |x_2^{(7)} - x_2^{(6)}| + |x_3^{(7)} - x_3^{(6)}| =$$

$$= 0{,}0002986 + 0{,}0003679 + 0{,}0004640 = 0{,}0011305,$$

по формуле (7) находим

$$\|x - x^{(6)}\|_1 \le \frac{\|x^{(7)} - x^{(6)}\|_1}{1 - \|B\|_1} = \frac{0{,}001135}{1-0{,}4} \approx 0{,}001844.$$

Таким образом, $\|x - x^{(6)}\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |x_i - x_i^{(6)}| \le 0{,}001844$. Отсюда следует, что найденные значения $x_1^{(6)}$, $x_2^{(6)}$, $x_3^{(6)}$ компонент вектора $x^{(6)}$ отличаются по абсолютной величине от компонент вектора x, т. е. от истинных значений искомых неизвестных $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$, соответственно меньше чем на $0{,}001844$. Фактически же $|x_1 - x_1^{(6)}| = 0{,}000237$, $|x_2 - x_2^{(6)}| = 0{,}0002896$, $|x_3 - x_3^{(6)}| = 0{,}0003639$.

По формуле (14) теоретически найдем номер k нужной итерации, которая обеспечит точность $\varepsilon = 0{,}001$ k-го приближенного решения $x^{(k)}$ по векторной норме $\|\cdot\|_1$. Для этого сначала подсчитаем норму $\|B\|_1 = 0{,}4$ и норму $\|h\|_1 = 3{,}4 + 2{,}05 + 6 = 11{,}45$. Далее по формуле (14) получим

$$k \ge \frac{[\lg 0{,}001 + \lg 0{,}6 - \lg 11{,}45]}{\lg 0{,}4} - 1 =$$

$$= \frac{\left[-3-0,22184878-1,0588054\right]}{-\,0,39793999} - 1 \;=\; 9,757036\,.$$

Поэтому за искомое k можно принять $k=10$. Фактически же оказалось с гарантией нужное $k=6$.

4.4.2. *Метод Зейделя*

Другим итерационным методом решения систем линейных уравнений является метод Зейделя. Он представляет собой некоторое видоизменение метода итераций. В нем при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестной x_i используются уже вычисленные значения $(k+1)$-го приближения для неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$. Если для приведенной системы

$$\begin{cases} x_1 \;=\; b_{11}\,x_1 + b_{12}\,x_2 + \ldots + b_{1n}\,x_n + h_1\,, \\ x_2 \;=\; b_{21}\,x_1 + b_{22}\,x_2 + \ldots + b_{2n}\,x_n + h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n \;=\; b_{n1}\,x_1 + b_{n2}\,x_2 + \ldots + b_{nn}\,x_n + h_n \end{cases}$$

уже найдено k-е приближение $x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)}$, то ее $(k+1)$-е приближение находится по формулам

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} \;=\; b_{11}\,x_1^{(k)} + b_{12}\,x_2^{(k)} + \ldots + b_{1n}\,x_n^{(k)} + h_1\,, \\ x_2^{(k+1)} \;=\; b_{21}\,x_1^{(k+1)} + b_{22}\,x_2^{(k)} + \ldots + b_{2n}\,x_n^{(k)} + h_2, \\ x_3^{(k+1)} \;=\; b_{31}\,x_1^{(k+1)} + b_{32}\,x_2^{(k+1)} + \ldots + b_{3n}\,x_n^{(k)} + h_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} \;=\; b_{n1}\,x_1^{(k+1)} + \ldots + b_{n,n-1}\,x_{n-1}^{(k+1)} + b_{nn}\,x_n^{(k)} + h_n\,, \end{cases} \qquad (1)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Если матрицу B итерационного процесса (1) Зейделя представить в виде $B = B_1 + B_2$, где

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

то систему (1) можно записать в матричной форме следующим образом:

$$x^{(k+1)} = B_1 x^{(k+1)} + B_2 x^{(k)} + h, \tag{2}$$

или, что то же самое, в виде

$$(E - B_1)\, x^{(k+1)} = B_2 x^{(k)} + h. \tag{3}$$

Матрица $E - B_1$ является левой нижней треугольной матрицей с единицами по главной диагонали. Поэтому она имеет обратную матрицу $(E - B_1)^{-1}$. Умножив слева обе части равенства (3) на матрицу $(E - B_1)^{-1}$, придем к равенству

$$x^{(k+1)} = (E - B_1)^{-1} B_2 x^{(k)} + (E - B_1)^{-1} h. \tag{4}$$

Таким образом, итерационный процесс (1) Зейделя эквивалентен процессу (4) простой итерации. Для сходимости обоих этих процессов достаточно, чтобы какая-либо норма матрицы $(E - B_1)^{-1} B_2$ была меньше единицы.

Можно доказать, что достаточными условиями сходимости процесса Зейделя (4) являются те же условия, что и для сходимости процесса простой итерации.

Пример. Методом Зейделя решить систему

$$\begin{cases} 20x_1 + 3x_2 + x_3 = 68, \\ 2x_1 + 20x_2 + 3x_3 = 41, \\ 3x_1 + x_2 + 10x_3 = 60. \end{cases}$$

Решение. Разрешив первое уравнение относительно x_1, второе — относительно x_2, третье — относительно x_3, придем к системе

$$\begin{cases} x_1 = & & -0{,}15\,x_2 - 0{,}05x_3 + 3{,}4, \\ x_2 = & -0{,}1\,x_1 & -0{,}15\,x_3 + 2{,}05, \\ x_3 = & -0{,}3\,x_1 - 0{,}1\,x_2 & +6, \end{cases}$$

удобной для решения методом Зейделя.

За нулевое приближение примем

$$x_1^{(0)} = 3{,}4\,; \quad x_2^{(0)} = 2{,}05\,; \quad x_3^{(0)} = 6$$

и по формулам (1) получим:

при $k = 0$

$$x_1^{(1)} = -0{,}15 \cdot 2{,}05 - 0{,}05 \cdot 6 + 3{,}4 = 2{,}7925\,,$$

$$x_2^{(1)} = -0{,}1 \cdot 2{,}7925 - 0{,}15 \cdot 6 + 2{,}05 = 0{,}87075\,,$$

$$x_3^{(1)} = -0{,}3 \cdot 2{,}7925 - 0{,}1 \cdot 0{,}87075 + 6 = 5{,}075175\,,$$

при $k = 1$

$$x_1^{(2)} = -0{,}15 \cdot 0{,}87075 - 0{,}05 \cdot 5{,}075175 + 3{,}4 = 3{,}0156287\,,$$

$$x_2^{(2)} = -0{,}1 \cdot 3{,}0156287 - 0{,}15 \cdot 5{,}075175 + 2{,}05 = 0{,}9871609,$$

$$x_3^{(2)} = -0{,}3 \cdot 3{,}0156287 - 0{,}1 \cdot 0{,}9871609 + 6 = 4{,}9965953$$

и т. д. Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	3,4	2,05	6
1	2,7925	0,87075	5,075175
2	3,0156287	0,9871609	4,9965953
3	3,0020961	1,0003011	4,9993411
4	2,999878	1,0001	4,9999937
5	2,9999853	1,0000024	5,0000042
6	2,9999994	0,9999994	5,0000003
7	3,0000001	0,9999995	5
8	3	1	5
9	3	1	5

Процесс остановили, так как пошло повторение результатов. Таким образом, можно принять

$$x = x^{(9)} = (3,\ 1,\ 5)^{\mathrm{T}}.$$

Заметим, что такой же результат для этой системы получен методом итераций лишь на 14-й итерации.

4.4.3. *Преобразование системы линейных уравнений к виду, удобному для итераций*

Если в исходной системе $Ax = b$ хотя бы некоторые диагональные коэффициенты не преобладают по абсолютной величине над остальными коэффициентами, то, комбинируя уравнения этой системы, стараются заменить ее эквивалентной системой, в которой все диагональные коэффициенты уже будут обладать нужным свойством. Так, в системе

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 10, \\ 10x_1 - 20x_2 - 9x_3 = 20, \\ 6x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 30 \end{cases}$$

не все диагональные коэффициенты преобладают по абсолютной величине над остальными коэффициентами. Чтобы исправить положение, сложим первое и третье уравнения и результат запишем первым уравнением; из второго уравнения вычтем третье и результат запишем вторым уравнением; третье уравнение оставим без изменения. В результате получим систему

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 40, \\ 4x_1 - 25x_2 + 6x_3 = -10, \\ 6x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 30, \end{cases}$$

в которой уже все диагональные коэффициенты доминируют по абсолютной величине над остальными коэффициентами. От этой системы обычным путем придем к системе

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 0{,}2x_2 + 0{,}5x_3\ , \\ x_2 = 0{,}4 + 0{,}16x_1 + 0{,}24x_3\ , \\ x_3 = -2 + 0{,}4x_1 + 0{,}(3)x_2\ , \end{cases}$$

уже удобной для итераций.

Такой подход при больших размерах системы не всегда легко приводит к цели. Поэтому на практике обычно идут другими путями. Например, в случае системы $Ax = b$ с симметричной положительно определенной матрицей A сначала от системы $Ax = b$ переходят к эквивалентной ей системе $\tau Ax = \tau b$, затем полагают $\tau A = E - E + \tau A$ и переходят к системе

$$x = (E - \tau A)\, x + \tau b. \tag{1}$$

Пусть λ_i — собственные значения матрицы A. Тогда $(1 - \tau\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — собственные значения матрицы $B = E - \tau A$. Для сходимости процесса итераций системы (1) следует подобрать τ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\max_{\tau} \left| 1 - \tau\lambda_i \right| < 1.$$

Пусть известны нижняя и верхняя границы собственных значений матрицы A, т. е.

$$0 < m < \lambda_i < M, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Поскольку итерационный процесс сходится тем быстрее, чем меньше максимум величины $\left| 1 - \tau\lambda_i \right|$, то τ следует искать из условия

$$\min_{\tau} \max_{\lambda \in [m, M]} \left| 1 - \tau\lambda \right|.$$

Как видно из рис. 1, максимум функции $f(\lambda) = \left| 1 - \tau\lambda \right|$ при $\lambda \in [m, M]$ достигается на одном из концов отрезка $[m, M]$. Он будет минимальным, когда значения функции $f(\lambda)$ на концах отрезка $[m, M]$ будут одинаковыми. Это возможно лишь в случае, когда $f(\lambda) = 0$ при значении λ, являющемся серединой отрезка $[m, M]$, т. е. когда $1 - \tau\lambda = 0$ при $\lambda = \dfrac{m + M}{2}$. Отсюда получаем

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{m + M}. \tag{2}$$

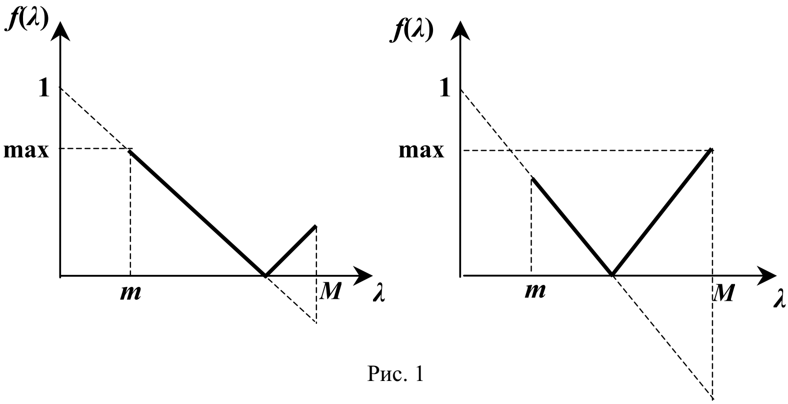

Рис. 1

При таком τ

$$\min_{\tau} \max_{\lambda \in [m, M]} \left| 1 - \tau \lambda \right| = f(m) = \left| f(M) \right| = \frac{M - m}{m + M}. \qquad (3)$$

В частности, если известны наибольшее и наименьшее собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы A, то из (2) следует

$$\tau = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \qquad (4)$$

а из (3) вытекает, что спектральная норма матрицы $B = E - \tau A$

$$\| B \| = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} < 1. \qquad (5)$$

В силу трудоемкости вычисления характеристических чисел матрицы A вместо формулы (4) на практике обычно пользуются формулой

$$\tau = \frac{2}{\sigma}, \qquad (6)$$

где за σ берут число, большее любой из легко вычисляемых норм матрицы A, например, норм

$$\| A \|_1 = \max_j \sum_i | a_{ij} |, \quad \| A \|_\infty = \max_i \sum_j | a_{ij} |.$$

В общем случае, когда невырожденная матрица A системы $Ax = b$ не является симметричной положительно определенной и в ней не все диагональные элементы преобладают по абсолютной величине над остальными элементами, сначала от системы $Ax = b$ переходят к системе $A^{\mathrm{T}} A x = A^{\mathrm{T}} b$, имеющей симметричную положительно определенную матрицу $A^{\mathrm{T}} A$. К этой системе можно применить, ***если потребуется****, описанный только что метод преобразования системы к виду, удобному для проведения итераций.*

Пример. Преобразовать к виду, удобному для проведения итераций, следующие системы линейных уравнений:

$$
а)\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1, \end{cases} \qquad
б)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 13, \end{cases}
$$

$$
в)\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -5, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}
$$

Решение. *а*) Дана система

$$
\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1, \end{cases}
$$

В ней не все диагональные коэффициенты преобладают по абсолютной величине над остальными коэффициентами, но матрица системы положительно определенная, поскольку она симметричная и все ее угловые диагональные миноры

$$
\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 18
$$

положительные. Поэтому преобразуем данную систему, применяя формулу (1). Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

системы найдем характеристические числа $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, по формуле (4) определим

$$\tau = \frac{2}{10+1} = \frac{2}{11}$$

и по формуле (1) составим систему

$$x = (E - \frac{2}{11} A) x + \frac{2}{11} b,$$

эквивалентную данной. В подробной записи эта система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \frac{6}{11} x_1 - \frac{4}{11} x_2 + \frac{4}{11} x_3 + \frac{12}{11}, \\ x_2 = -\frac{4}{11} x_1 + \frac{1}{11} x_2 + \frac{8}{11} x_3 + \frac{2}{11}, \\ x_3 = \frac{4}{11} x_1 + \frac{8}{11} x_2 + \frac{1}{11} x_3 + \frac{2}{11}. \end{cases}$$

В силу равенства (5) спектральная норма матрицы B этой системы будет удовлетворять соотношению

$$\| B \| = \frac{10-1}{10+1} = \frac{9}{11} < 1.$$

Поэтому процесс итераций, примененный к этой системе, будет сходящимся.

Если бы не были известны характеристические числа матрицы $\boldsymbol{A}$, то можно было бы подсчитать нормы

$$\| A \|_1 = \| A \|_\infty = \max (2+2+2,\ 2+5+4,\ 2+4+5) = 11$$

и для определения τ воспользоваться формулой (6), полагая в ней, например, $\sigma = 20$. Тогда получили бы $\tau = \frac{1}{10}$ и пришли бы к системе

$$x = (E - \frac{1}{10} A) x + \frac{1}{10} b,$$

т. е. к системе

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}8 x_1 - 0{,}2 x_2 + 0{,}2 x_3 + 0{,}6, \\ x_2 = -0{,}2 x_1 + 0{,}5 x_2 + 0{,}4 x_3 + 0{,}1, \\ x_3 = 0{,}2 x_1 + 0{,}4 x_2 + 0{,}5 x_3 + 0{,}1, \end{cases}$$

также удобной для решения методом итераций.

б) Дана система

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

В ней диагональные коэффициенты не преобладают по абсолютной величине над остальными коэффициентами, и матрица системы не является симметричной положительно определенной. Поэтому от данной системы перейдем сначала к системе $A^{\mathrm{T}} A x = A^{\mathrm{T}} b$, т. е. к системе

$$\begin{cases} 14 x_1 + 10 x_2 + 9 x_3 = 65, \\ 10 x_1 + 14 x_2 + 7 x_3 = 55, \\ 9 x_1 + 7 x_2 + 6 x_3 = 43. \end{cases}$$

В этой системе также не все диагональные коэффициенты преобладают по абсолютной величине над остальными коэффициентами. В то же время матрица

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 9 \\ 10 & 14 & 7 \\ 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

этой системы симметричная и положительно определенная. Поэтому к полученной системе применим общий прием преобразования системы к виду, удобному для проведения итераций. Для этого подсчитаем норму

$$\| C \|_1 = \max(14 + 10 + 9,\ 10 + 14 + 7,\ 9 + 7 + 6) = 33$$

и положим $\sigma = 40$. Тогда по формуле (6) получим

$$\tau = \frac{2}{\sigma} = \frac{1}{20}$$

и по формуле (1) перейдем к системе

$$x = (E - \frac{1}{20} C)\, x + \frac{1}{20} (65, 55, 43)^{\mathrm{T}},$$

т. е. к системе

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3\, x_1 - 0{,}5\, x_2 - 0{,}45\, x_3 + 3{,}25, \\ x_2 = -0{,}5\, x_1 + 0{,}3\, x_2 - 0{,}35\, x_3 + 2{,}75, \\ x_3 = -0{,}45\, x_1 - 0{,}35\, x_2 + 0{,}7\, x_3 + 2{,}15, \end{cases}$$

удобной для проведения итераций.

в) Дана система

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -5, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$$

В ней диагональные коэффициенты не преобладают по абсолютной величине над остальными коэффициентами. Поэтому сначала перейдем к системе $A^{\mathrm{T}} A x = A^{\mathrm{T}} b$, т. е. к системе

$$\begin{cases} 29\, x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 35, \\ 3x_1 + 50x_2 + 10x_3 = 28, \\ 3x_1 + 10x_2 + 54x_3 = 66. \end{cases}$$

В полученной системе диагональные коэффициенты преобладают по абсолютной величине над остальными коэффициентами. Поэтому можно не применять общего приема преобразования этой системы к виду, удобному для проведения итераций, а разрешить первое уравнение относительно x_1, второе — относительно x_2, третье — относительно x_3. Тогда придем к системе

$$\begin{cases} x_1 = & & -\dfrac{3}{29}x_2 - \dfrac{3}{29}x_3 + \dfrac{35}{29}, \\ x_2 = -\dfrac{3}{50}x_1 & & -\dfrac{1}{5}x_3 + \dfrac{14}{25}, \\ x_3 = -\dfrac{1}{18}x_1 - \dfrac{5}{27}x_2 & & +\dfrac{11}{9}, \end{cases}$$

удобной для проведения итераций.

Обобщением только что описанного подхода является следующий прием (см.: [19], [29]). Сначала от системы $Ax = b$ с произвольной невырожденной матрицей A, как и выше, переходят к системе $\tau Ax = \tau b$. Затем полагают $\tau A = B - B + \tau A$ и переходят к системе

$$Bx = (B - \tau A)\,x + \tau b.$$

Полученную систему решают методом последовательных приближений в соответствии с формулой

$$B \cdot \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + Ax^{(k)} = b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

При этом τ выбирают так, чтобы процесс (5) итераций был сходящимся. Обычно при выборе итерационного параметра τ исходят либо из учета наименьшей и наибольшей границ собственных значений матрицы A, либо из требования минимизации на каждом шаге итераций погрешности искомого решения по той или иной норме. В зависимости от выбора матрицы B и параметра τ приходят к разным итерационным методам. При $B = E$ процесс называют явным, при $B \neq E$ — неявным. Итерационный процесс (5) называют стационарным, если матрица B и параметр τ не меняются при изменении номеров итераций и нестационарным — в противном случае. В случае $B = E$ и постоянном τ получается метод простой итерации. Выбрав $B \neq E$ и подходящий постоянный параметр τ, приходят к различным модификациям метода итераций. Взяв в качестве B какую-либо легко обратимую матрицу, получают *общий неявный метод простой итерации* (см.: [19], [29]) ;

при

$$B = D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \tau = 1$$

получают *модифицированный метод простой итерации*;
при

$$B = D + \tau A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и таком τ, что наибольшее по модулю собственное значение матрицы

$$E - \tau (D + \tau A_1)^{-1} A$$

становится минимальным, приходят к *методу верхней релаксации* (см.: [19], [29]).

Напомним, что если матрицы A и $B - A$ симметричные положительно определенные, то соответственно пишут $A > 0$, $B > A$, и без доказательства приведем следующие утверждения (см.: [19], [29]).

Если матрица A симметричная положительно определенная, то для того, чтобы итерационный процесс (5) ***общего неявного метода простой итерации*** *при любом выборе нулевого приближения был сходящимся, достаточно, чтобы выполнялось условие $2B > A > 0$; для сходимости процесса*

$$D \cdot \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + A x^{(k)} = b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

модифицированного метода простой итерации *при любом выборе нулевого приближения достаточно, чтобы выполнялись условия $2D > A$, $A > 0$; если матрица A симметричная положительно определенная, то для сходимости* ***процесса верхней релаксации***

$$(D+\tau A_1)\cdot\frac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{\tau}+Ax^{(k)}=b,\quad k=0,1,2,\ldots$$

достаточно, чтобы выполнялось условие $0<\tau<2$.

В общем случае, если матрица A *системы* $Ax=b$ *не является симметричной и положительно определенной, то, как и в случае метода простой итерации, сначала переходят к системе* $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}b$ *с симметричной положительно определенной матрицей* $A^{\mathrm{T}}A$ *и к полученной системе применяют обобщенный прием преобразования системы к виду, удобному для проведения модифицированного метода итераций.*

4.4.4. *Итерационные методы с чебышевским набором параметров*

Явный итерационный метод

$$\frac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{\tau_{k+1}}+Ax^{(k)}=b,\quad k=0,1,2,\ldots \tag{1}$$

решения системы $Ax=b$ с симметричной положительно определенной матрицей A (метод Ричардсона для системы $Ax=b$ с положительно определенной матрицей A) при параметрах

$$\tau_k=\frac{\tau_0}{1+\rho_0\cdot t_k},\quad k=1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

где

$$\tau_0=\frac{2}{\lambda_{\min}(A)+\lambda_{\max}(A)},\qquad \rho_0=\frac{1-\xi}{1+\xi},\qquad \xi=\frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)},$$

$$t_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\quad k=1,2,\ldots,n,$$

называют (см. [29]) *явным итерационным методом с чебышевским набором параметров*, или *методом Ричардсона с чебышевским набором параметров*. Он обеспечивает минимальную норму $\| x^{(n)} - x \|_2$ погрешности искомого решения на n-м шаге итераций. Причем имеет место оценка

$$\| x^{(n)} - x \|_2 \le q_n \cdot \| x^{(0)} - x \|_2 , \tag{3}$$

где

$$q_n = \frac{2\rho_1^n}{1+\rho_1^{2n}}, \qquad \rho_1 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}, \qquad \xi = \frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)}.$$

Из оценки (3) легко найти номер n нужной итерации, которая обеспечит необходимую точность ε n-го приближенного решения $x^{(n)}$.

На самом деле, для обеспечения нужной точности ε достаточно, чтобы в соотношении (3) было $q_n < \varepsilon$, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$q_n = \frac{2\rho_1^n}{1+\rho_1^{2n}} < \varepsilon ,$$

или, что то же самое, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1+\rho_1^{2n}}{\rho_1^n} > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Решая это неравенство относительно $z = \dfrac{1}{\rho_1^n}$, получим

$$\frac{1}{\rho_1^n} > \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Последнее неравенство будет выполнено, если

$$\frac{1}{\rho_1^n} \ge \frac{2}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что

$$n \geq \frac{\ln\left(2/\varepsilon \right)}{\ln\left(1/\rho_1 \right)}.$$

Неявный итерационный метод

$$B \cdot \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_{k+1}} + A x^{(k)} = b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

решения системы $A x = b$ при симметричных положительно определенных матрицах A, B и параметрах τ_1, τ_2, … τ_n, определенных соотношениями (2) настоящего раздела, где

$$\xi = \frac{\lambda_{\min}(B^{-1} A)}{\lambda_{\max}(B^{-1} A)},$$

называют (см. [29]) *неявным итерационным методом с чебышевским набором параметров*. Он обеспечивает минимальную норму $\left\| x^{(n)} - x \right\|_B$ погрешности искомого решения на n-м шаге итераций. При этом имеет место оценка

$$\left\| x^{(n)} - x \right\|_B \leq q_n \cdot \left\| x^{(0)} - x \right\|_B,$$

где для любого вектора z норма определена соотношением

$$\left\| z \right\|_B = \sqrt{(B z, z)}$$

и

$$q_n = \frac{2 \rho_1^n}{1 + \rho_1^{2n}}, \qquad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}, \qquad \xi = \frac{\lambda_{\min}(B^{-1} A)}{\lambda_{\max}(B^{-1} A)}.$$

4.4.5. *Метод минимальных невязок*

Методом минимальных невязок (см. [29]) решения системы $A x = b$ называют явный итерационный процесс

$$\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_{k+1}} + A x^{(k)} = b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

в котором параметр τ_{k+1} выбирают из условий минимума нормы $\| r_{k+1} \|_2 = \sqrt{(r_{k+1}, r_{k+1})}$ невязки $r_{k+1} = A x^{(k+1)} - b$.

Чтобы найти формулу для выражения τ_{k+1}, пользуясь обозначением

$$r_k = A x^{(k)} - b, \tag{2}$$

запишем итерационный процесс (1) в виде

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau_{k+1} r_k. \tag{3}$$

Умножив обе части этого равенства слева на матрицу A, получим

$$A x^{(k+1)} = A x^{(k)} - \tau_{k+1} A r_k.$$

Пользуясь полученным выражением для $A x^{(k+1)}$ и соотношением (2), проведем следующие преобразования невязки $r_{k+1} = A x^{(k+1)} - b$:

$$r_{k+1} = A x^{(k+1)} - b = A x^{(k)} - \tau_{k+1} A r_k - b = r_k - \tau_{k+1} A r_k. \tag{4}$$

Вычисляя квадрат нормы $\| r_{k+1} \|_2$ невязки r_{k+1}, получим

$$\| r_{k+1} \|_2^2 = (r_{k+1}, r_{k+1}) = (r_k - \tau_{k+1} A r_k, \; r_k - \tau_{k+1} A r_k) =$$

$$= \| r_k \|_2^2 - 2 \tau_{k+1} (A r_k, r_k) + \tau_{k+1}^2 \| A r_k \|_2^2. \tag{5}$$

Отсюда следует, что норма $\| r_{k+1} \|_2$ невязки r_{k+1} достигает своего минимума при

$$\tau_{k+1} = \frac{(A r_k, r_k)}{\| A r_k \|_2^2} \tag{6}$$

т. е. в точке τ_{k+1}, где производная функции (5) равна нулю.

Таким образом, при проведении метода минимальных невязок для перехода от k-й итерации к $(k+1)$-й итерации следует по найденному вектору $x^{(k)}$ вычислить невязку $r_k = Ax^{(k)} - b$ и по формуле (6) найти значение τ_{k+1}. Затем по формуле (3) вычислить $x^{(k+1)}$.

Метод минимальных невязок сходится с такой же скоростью, как и метод простой итерации. Причем для погрешности выполняется оценка

$$\left\| A(x^{(k)} - x) \right\|_2 = \rho_0^k \left\| A(x^{(0)} - x) \right\|_2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (7)$$

где

$$\rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \qquad \xi = \frac{\lambda_{min}(A)}{\lambda_{max}(A)}.$$

4.4.6. *Метод минимальных поправок*

Пользуясь соотношением $Ax^{(k)} - b = r_k$, неявный итерационный процесс

$$B \cdot \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_{k+1}} + Ax^{(k)} = b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

с симметричной положительно определенной матрицей B для решения системы $Ax = b$ с невырожденной матрицей A запишем в виде

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau_{k+1} B^{-1} r_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Вектор $w_k = B^{-1} r_k$ называют **поправкой** на $(k+1)$-м шаге итерационного процесса (1), а сам этот процесс называют (см. [29]) методом *минимальных поправок*, если в нем **параметр** τ_{k+1} выбирают из условий минимума нормы

$$\| w_{k+1} \|_B = \sqrt{(B w_{k+1}, w_{k+1})} .$$

При $B = E$ метод минимальных поправок совпадает с методом минимальных невязок.

Чтобы найти формулу для вычисления параметра τ_{k+1}, обе части равенства (2) умножим слева на матрицу A. Тогда получим

$$A x^{(k+1)} = A x^{(k)} - \tau_{k+1} A B^{-1} r_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Затем, пользуясь полученным выражением для $A x^{(k+1)}$ и соотношением $A x^{(k)} - b = r_k$, преобразуем соотношение $r_{k+1} = A x^{(k+1)} - b$ следующим образом:

$$r_{k+1} = A x^{(k+1)} - b = A x^{(k)} - \tau_{k+1} A B^{-1} r_k - b =$$

$$= r_k - \tau_{k+1} A B^{-1} r_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Далее замечаем, что из соотношения $B^{-1} r_k = w_k$ вытекают соотношения $r_k = B w_k$, $r_{k+1} = B w_{k+1}$. Поэтому соотношение (3) можно записать в виде

$$B w_{k+1} = B w_k - \tau_{k+1} A w_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots , \tag{4}$$

или, что то же самое, в виде

$$w_{k+1} = w_k - \tau_{k+1} B^{-1} A w_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Вычисляя квадрат нормы $\| w_{k+1} \|_B$, получим

$$\| w_{k+1} \|_B^2 = (B w_{k+1}, w_{k+1}) =$$

$$= (B(w_k - \tau_{k+1} B^{-1} A w_k), w_k - \tau_{k+1} B^{-1} A w_k) =$$

$$= (B w_k - \tau_{k+1} A w_k, w_k - \tau_{k+1} B^{-1} A w_k) =$$

$$= \| w_k \|_B^2 - 2 \tau_{k+1} (A w_k, w_k) + (\tau_{k+1}^2 (B^{-1} A w_k, A w_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots , \tag{6}$$

поскольку $(Aw_k, B^{-1}Aw_k) = (B^{-1}Aw_k, Aw_k)$ и при симметричной матрице B

$$(Bw_k, B^{-1}Aw_k) = (w_k, Aw_k) = (Aw_k, w_k).$$

Из соотношения (6) следует, что норма $\| w_{k+1} \|_B$ будет минимальной при

$$\tau_{k+1} = \frac{(Aw_k, w_k)}{(B^{-1}Aw_k, Aw_k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{7}$$

т. е. в точке τ_{k+1}, где производная функции (6) равна нулю.

Таким образом, при решении системы $Ax = b$ методом минимальных поправок для перехода от k-й к $(k+1)$-й итерации следует по найденному $x^{(k)}$ вычислить $r_k = Ax^{(k)} - b$. Затем вычислить вектор $w_k = B^{-1} r_k$ и по формуле (7) найти τ_{k+1}. Наконец, по формуле (2) или, что то же самое, по формуле (1) найти $x^{(k+1)}$.

Скорость сходимости (см. [29]) метода минимальных поправок определяется границами спектра задачи на собственные значения

$$B^{-1}Ax = \lambda x.$$

Если A и B — симметричные положительно определенные матрицы, то для погрешности метода минимальных поправок имеет место оценка

$$\| A(x^{(k)} - x) \|_{B^{-1}} = \rho_0^k \| A(x^{(0)} - x) \|_{B^{-1}}, \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{8}$$

где

$$\rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \qquad \xi = \frac{\lambda_{\min}(B^{-1}A)}{\lambda_{\max}(B^{-1}A)}.$$

4.4.7. *Метод скорейшего спуска*

Явным методом скорейшего спуска (см. [29]) решения системы $A x = b$ с положительно определенной матрицей A называют итерационный процесс

$$\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_{k+1}} + A x^{(k)} = b, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

в котором параметр τ_{k+1} выбирают из условий минимума нормы $\| z_{k+1} \|_A$ невязки $z_{k+1} = x^{(k+1)} - x$, если для любого вектора z и симметричной положительно определенной матрицы A норма $\| z \|_A = \sqrt{(Az, z)}$.

Чтобы найти формулу для вычисления τ_{k+1}, заметим, что применяя обозначения $z_k = x^{(k)} - x$, $z_{k+1} = x^{(k+1)} - x$ и равенство $A x = b$, соотношение (1) можно записать в виде

$$\frac{(z_{k+1} + x) - (z_k + x)}{\tau_{k+1}} + A z_k = 0,$$

или, что то же самое, в виде

$$z_{k+1} = z_k - \tau_{k+1} A z_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Вычислив квадрат нормы $\| z_{k+1} \|_A$, придем к соотношению

$$\| z_{k+1} \|_A^2 = (A z_{k+1}, z_{k+1}) = (A(z_k - \tau_{k+1} A z_k),\ z_k - \tau_{k+1} A z_k) =$$

$$= \| z_k \|_A^2 - 2\tau_{k+1}(A z_k, A z_k) + \tau_{k+1}^2 (A^2 z_k, A z_k), \tag{2}$$

поскольку при симметричной матрице A произведение

$$(A^2 z_k, z_k) = (A z_k, A z_k).$$

Отсюда следует, что норма $\| z_{k+1} \|_A$ достигает своего минимума при

$$\tau_{k+1} = \frac{(Az_k, Az_k)}{(A^2 z_k, Az_k)},$$

т. е. в точке τ_{k+1}, где производная функции (2) равна нулю. Так как вектор $z_k = x^{(k)} - x$ неизвестен, то заметим, что вектор

$$Az_k = A(x^{(k)} - x) = Ax^{(k)} - Ax = Ax^{(k)} - b = r_k.$$

Поэтому для τ_{k+1} окончательно получаем формулу

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)}. \tag{3}$$

Таким образом, при проведении явного метода скорейшего спуска для перехода от k-й итерации к $(k+1)$-й итерации следует по найденному вектору $x^{(k)}$ вычислить вектор-невязку $r_k = Ax^{(k)} - b$ и по формуле (3) найти значение τ_{k+1}. Затем из соотношения (1) вычислить $x^{(k+1)}$.

Явный метод скорейшего спуска сходится с такой же скоростью, как и метод простой итерации.

Причем для погрешности выполняется оценка

$$\left\| x^{(k)} - x \right\|_A \le \rho_0^k \left\| x^{(0)} - x \right\|_A,$$

где

$$\rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \qquad \xi = \frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)}.$$

Неявным методом скорейшего спуска (см. [29]) решения системы $Ax = b$ с положительно определенной матрицей A называют итерационный процесс

$$B \cdot \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_{k+1}} + Ax^{(k)} = b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

в котором параметр τ_{k+1} выбирают из условий минимума нормы $\left\| z_{k+1} \right\|_A$ невязки $z_{k+1} = x^{(k+1)} - x$, если для любого вектора

z и симметричной положительно определенной матрицы A норма $\| z \|_A = \sqrt{(Az, z)}$.

Чтобы вывести формулу для вычисления τ_{k+1}, заметим, что, применяя обозначения $z_k = x^{(k)} - x$, $z_{k+1} = x^{(k+1)} - x$ и равенство $Ax = b$, соотношение (4) можно преобразовать в соотношение

$$\frac{(z_{k+1} + x) - (z_k + x)}{\tau_{k+1}} + B^{-1} A z_k = 0,$$

или, что то же самое, в соотношение

$$z_{k+1} = z_k - \tau_{k+1} w_k,$$

где положено

$$w_k = B^{-1} A z_k. \tag{5}$$

Вычисляя квадрат нормы $\| z_{k+1} \|_A$, придем к соотношению

$$\| z_{k+1} \|_A^2 = (A z_{k+1}, z_{k+1}) = (A(z_k - \tau_{k+1} w_k),\ z_k - \tau_{k+1} w_k) =$$

$$= (A z_k - \tau_{k+1} A w_k,\ z_k - \tau_{k+1} w_k) =$$

$$= \| z_k \|_A^2 - 2\tau_{k+1} (A z_k, w_k) + \tau_{k+1}^2 (A w_k, w_k), \tag{6}$$

поскольку при симметричной матрице A

$$(A w_k, z_k) = (w_k,\ A z_k) = (A z_k, w_k).$$

Так как

$$A z_k = A(x^{(k)} - x) = A x^{(k)} - A x = A x^{(k)} - b = r_k,$$

то соотношение (6) можно записать в виде

$$\| z_{k+1} \|_A^2 = \| z_k \|_A^2 - 2\tau_{k+1} (r_k, w_k) + \tau_{k+1}^2 (A w_k, w_k). \tag{7}$$

Отсюда следует, что норма $\| z_{k+1} \|_A$ достигает своего минимума при

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, w_k)}{(Aw_k, w_k)},$$

т. е. в точке τ_{k+1}, где производная функции (7) равна нулю.

Теперь заметим, что

$$w_k = B^{-1}Az_k = B^{-1}A(x^{(k)} - x) = B^{-1}(Ax^{(k)} - Ax) =$$
$$= B^{-1}(Ax^{(k)} - b) = B^{-1}r_k.$$

Поэтому для τ_{k+1} окончательно получаем формулу

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, B^{-1}r_k)}{(AB^{-1}r_k, B^{-1}r_k)}. \tag{8}$$

Таким образом, при переходе в неявном методе скорейшего спуска от k-й итерации к $(k+1)$-й итерации следует по найденному вектору $x^{(k)}$ вычислить невязку $r_k = Ax^{(k)} - b$ и по формуле (8) найти значение τ_{k+1}. Затем из соотношения (4) вычислить $x^{(k+1)}$.

Неявный метод скорейшего спуска сходится с такой же скоростью, как и метод простой итерации. Для погрешности выполняется оценка

$$\| x^{(k)} - x \|_A \le \rho_0^k \| x^{(0)} - x \|_A, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

где

$$\rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \qquad \xi = \frac{\lambda_{\min}(B^{-1}A)}{\lambda_{\max}(B^{-1}A)}.$$

4.5. Общие рекомендации к решению систем линейных алгебраических уравнений с помощью компьютера

Решения систем линейных алгебраических уравнений, найденные с помощью компьютера, как правило, не бывают точными. На это влияют возможные погрешности в исходных данных и погрешности, связанные с представлением чисел в памяти компьютера. Фактически вместо нужной системы $Ax = b$ приходится решать возмущенную систему $(A + \varepsilon_A)\, x = b + \varepsilon_b$.

Кроме того, следует также учитывать, что машинная арифметика существенно отличается от арифметики “карандаша и бумаги”. При ручных вычислениях промежуточные результаты доступны для обозрения и точность вычислений можно изменить в процессе выполнения расчетов. Вычислительный же процесс, реализуемый на компьютере, может включать большое количество элементарных операций, результаты которых усекаются или округляются до ближайшего числа с плавающей точкой. Эти малые ошибки, накапливаясь, могут приводить к результатам, весьма далеким от истинных. Чтобы избежать такого положения, в алгоритмы некоторых методов решения систем линейных уравнений вводят корректирующие ограничения, позволяющие устойчиво получать достоверные результаты.

В описанном в разд. 4.2.6 способе решения совместной или несовместной системы линейных уравнений, основанном на представлении $(m \times n)$-матрицы системы ее сингулярным разложением, таким корректирующим ограничением для учета неточностей входных данных и погрешностей вычислений служит выбор границы τ. Например, если данные вводятся с точностью ε, то подходящим будет $\tau = \varepsilon$. Если данные вводятся точно, то значение для τ принимают равным машинному эпсилон, умноженному на n. Это обеспечивает условия для получения устойчивого нормального решения рассматриваемой системы линейных уравнений. Поэтому данный способ решения линейных систем является одним из самых надежных и эффективных среди всех применяемых с этой целью современных численных методов.

Столь же надежным способом решения совместных или несовместных систем линейных уравнений на компьютере является метод регуляризации (см. разд. 4.2.2). При надлежащем выборе корректирующего параметра α этот метод также позволяет получать устойчивое нормальное решение рассматриваемой системы линейных уравнений.

В то же время следует отметить, что как способ решения системы линейных уравнений, основанный на представлении матрицы системы ее сингулярным разложением, так и метод регуляризации являются весьма трудоемкими и потому довольно медленными и дорогостоящими.

Несмотря на это, способ, основанный на представлении матрицы системы ее сингулярным разложением, целесообразно применять при решении систем линейных уравнений на компьютере, и тем более тогда, когда другие методы не могут обеспечить надежного получения достоверных результатов, а именно в случаях плохо обусловленных совместных или несовместных систем линейных уравнений. К таким системам, в частности, можно отнести совместные или несовместные системы с $(m \times n)$-матрицами, ранги которых не совпадают ни с m, ни с n.

Напомним, что обусловленность системы $Ax = b$ характеризуется числом обусловленности

$$K^{+}(A) = \left\| A^{+} \right\| \cdot \left\| A \right\|$$

матрицы A. На практике часто в качестве числа обусловленности матрицы A принимают отношение σ_1 / σ_s наибольшего сингулярного числа σ_1 к наименьшему сингулярному числу σ_s матрицы A. Если наименьшее сингулярное число σ_s равно нулю, то число обусловленности матрицы A считают равным бесконечности. В случае, когда число обусловленности матрицы системы невелико, рассматриваемая система считается хорошо обусловленной. При очень большом значении числа обусловленности матрицы коэффициентов система считается плохо обусловленной.

При решении с помощью компьютера квадратной системы линейных уравнений с невырожденной матрицей следует либо применить способ, основанный на представлении матрицы системы ее сингулярным разложением с выбором границы τ в соответствии с указанной выше рекомендацией, или метод регуляризации, либо придерживаться следующей тактики.

Если известно, что исходная система с невырожденной матрицей устойчива к возмущениям, т. е. хорошо обусловлена, то ее можно решать любым обычным методом, в частности, любым методом из разд. 4.1, например, методом Гаусса или какой-либо его модификацией. Если известно, что исходная система с невырожденной матрицей неустойчива к возмущениям, т. е. плохо обусловлена, то такую систему следует решать методом, основанным на представлении матрицы системы ее сингулярным разложением с выбором корректирующего параметра τ, как указано выше, или методом регуляризации, полагая в нем параметр $\alpha = \varepsilon^{2/3}$ (ε — граница точности входных данных). При таких значениях корректирующих параметров τ и α обеспечивается наилучшее приближение к истинному решению исходной системы с невырожденной матрицей.

Если об устойчивости к возмущениям квадратной системы с невырожденной матрицей ничего не известно, то систему упрощают и попутно выясняют вопрос о ее устойчивости к возмущениям. После этого выбирают метод решения системы.

Для решения квадратных систем линейных уравнений с невырожденными матрицами эффективными могут оказаться также итерационные методы (см. разд. 4.4). Такие методы особенно целесообразно применять при больших порядках матриц систем линейных уравнений.

Совместные или несовместные системы линейных уравнений с $(m \times n)$-матрицами любого (полного или неполного) ранга естественно решать на компьютере тем или иным способом из группы методов наименьших квадратов (см. разд. 4.2). Причем поскольку в способах, описанных в разд. 4.2.1, 4.2.3–4.2.5 не предусмотрено введение корректирующих ограничений, то такие способы целесообразно применять к решению методом наименьших квадратов только хорошо обусловленных систем линейных уравнений. Если ранг матрицы такой системы совпадает с числом неизвестных в системе, то самым простым и экономичным будет способ, основанный на решении системы нормальных уравнений (см. разд. 4.2.1). Для решения системы нормальных уравнений в этом случае можно применить любой из методов, описанных в разд. 4.1, например, метод Гаусса, метод квадратного корня или схему Холецкого. Во многих случаях простым и экономичным может оказаться также способ (см. разд. 4.2.4), сводящий решение данной системы методом наименьших квадратов к решению одной или двух систем с невырожденными матрицами. Удобным также может быть применение формул (10) и (15), (16) разд. 4.2.6.

В отличие от изложенного в данном пособии основного способа решения систем линейных алгебраических уравнений методом наименьших квадратов, базирующегося на представлении матрицы системы ее сингулярным разложением, существуют другие подходы, например, способы, основанные на применении рекуррентных формул для решения системы нормальных уравнений. Описанию таких подходов посвящено учебное пособие [26]. Использование рекуррентных формул просто в употреблении. При этом осуществляется лишь коррекция определяемых параметров. В то же время в связи с возможной плохой обусловленностью матрицы системы нормальных уравнений такой способ требует повышенной точности вычислений.

Для компьютерной реализации метода наименьших квадратов решения плохо обусловленных совместных или несовместных систем с произвольными $(m \times n)$-матрицами следует применить метод (см. разд. 4.2.6), основанный на представлении матрицы системы ее сингулярным разложением с надлежащим выбором корректирующего параметра τ, или метод регуляризации. Причем в методе регуляризации сразу следует полагать $\alpha = \varepsilon^{2/3}$ в случае совместности системы и $\alpha = \varepsilon^{1/2}$ — в случае ее несовместности (ε — граница точности входных данных).

Упражнения

Упражнение 1. Методом Гаусса решить следующие системы линейных уравнений:

1)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41. \end{cases}$$

Упражнение 2. Методом Гаусса с выбором главного элемента решить системы линейных уравнений из упражнения 1.

Упражнение 3. Методом квадратного корня решить следующие системы линейных уравнений:

1)
$$\begin{cases} 4x_1 + 12x_2 + 8x_3 = 4, \\ 12x_1 + 45x_2 + 42x_3 = 21, \\ 8x_1 + 42x_2 + 53x_3 = 27; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 16x_1 + 16x_2 + 32x_3 = 64, \\ 16x_1 + 25x_2 + 41x_3 = 73, \\ 32x_1 + 41x_2 + 77x_3 = 145; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 9x_1 + 9x_2 + 18x_3 = 18, \\ 9x_1 + 13x_2 + 22x_3 = 18, \\ 18x_1 + 22x_2 + 56x_3 = 20. \end{cases}$$

Упражнение 4. Методом Холецкого решить системы линейных уравнений из упражнения 3.

Упражнение 5. Методом прогонки решить следующие системы линейных уравнений:

1)
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 11, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 7, \\ 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 13, \\ 4x_3 - 5x_4 = -8; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 17, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 23, \\ 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 20, \\ 7x_3 - 5x_4 = 9. \end{cases}$$

Упражнение 6. Решить систему $Ax = b$, если матрица A представлена LU-разложением

1)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 35 \\ 49 \end{pmatrix};$$

2)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 26 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 7. Решить систему $Ax = b$, если матрица A представлена каноническим разложением

1)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix};$$

2)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 8. Решить систему $Ax = b$, если матрица A представлена QR-разложением

1)

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} 34 \\ -40 \\ 77 \end{pmatrix};$$

2)

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & 30 & 30 \\ 0 & 15 & 30 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ -27 \\ 48 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 9. Решить систему $Ax = b$, если матрица A представлена QRS-разложением

1)

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & 30 & 0 \\ 45 & 15 & 30 \\ 0 & 30 & 45 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 67 \\ -67 \end{pmatrix};$$

2)

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 & 15 & 0 \\ 30 & 45 & 15 \\ 0 & 30 & 15 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} -27 \\ -18 \\ 153 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 10. В системе

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -1, \\ -4x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

элементы матрицы системы могут изменяться на ε_1, а свободные члены — на ε_2. Оценить возможное изменение координат вектора-решения при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}001$.

Упражнение 11. В системе

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

элементы матрицы системы могут изменяться на ε_1, а свободные члены — на ε_2. Оценить возможное изменение координат вектора-решения при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}001$.

Упражнение 12. В системах

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$$

элементы матрицы и свободные члены могут изменяться на $\varepsilon = 0{,}01$. Оценить возможное изменение по длине **нормального** псевдорешения каждой из данных соответственно совместной и несовместной систем.

Замечание. Наряду с упражнениями 10–12 настоятельно рекомендуем ознакомиться по [17] с задачами параграфа 8.3 (с. 236–240) этого сборника.

Упражнение 13. Способом, описанным в п. 4.2.1, найти нормальное и общее псевдорешения системы $Ax = b$ при

1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

2) $$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix};$$

3) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix};$$

4) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -5 \\ 3 & -5 & 3 \\ 5 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

5)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & -1+i \\ 1-i & 1 & -1+2i \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ b = b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } b = b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix};$$

6)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+i \\ 1-i & 1 & 2-i \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ и } b = b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix};$$

7)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+i & -i \\ 1-i & 1 & 2-i & -i \end{pmatrix}, \quad b = b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ и } b = b_2 = \begin{pmatrix} 4+i \\ 4-3i \end{pmatrix}.$$

Упражнение 14. Методом регуляризации найти нормальные псевдорешения систем линейных уравнений из упражнения 13.

Упражнение 15. Применяя формулу $x^0 = A^+ b$, найти нормальные псевдорешения систем уравнений из упражнения 13.

Упражнение 16. Способом, описанным в п. 4.2.4, найти нормальные псевдорешения систем уравнений из упражнения 13.

Упражнение 17. Найти нормальное псевдорешение системы $Ax = b$, если матрица A системы представлена QR-разложением

1)

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ и } b = b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

2)

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = b_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ -6 \\ -8 \\ 18 \end{pmatrix} \text{ и } b = b_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ -7 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 18. Способом, основанным на представлении матрицы системы ее сингулярным разложением, найти нормальное и общее псевдорешения системы $Ax = b$, если

1)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = b_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = b_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \\ \boxed{9} \end{pmatrix};$$

2)
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = b_1 = \begin{pmatrix} 81 \\ 162 \\ 243 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = b_2 = \begin{pmatrix} \boxed{80} \\ 162 \\ 243 \end{pmatrix};$$

3)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 2 & 7 & 12 \\ 3 & 8 & 13 \\ 4 & 9 & 14 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = b_2 = \begin{pmatrix} \boxed{4} \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix};$$

4)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

5)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2-2i \\ 2+2i & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 19. Применяя формулу (10) разд. 4.2.6, найти нормальные псевдорешения систем уравнений из упражнения 18.

Упражнение 20. В эмпирической формуле

$$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$$

найти коэффициенты x_1, x_2, x_3 по результатам наблюдений (табл. 1–4):

Таблица 1

a_1	a_2	a_3	b
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	1	1	4

Таблица 2

a_1	a_2	a_3	b
1	1	– 1	12
– 1	1	1	12
1	– 1	1	12
1	1	– 1	12

Таблица 3

a_1	a_2	a_3	b
1	– 1	0	12
2	– 1	1	– 12
0	1	1	12
1	– 1	1	– 24

Таблица 4

a_1	a_2	a_3	b
1	– 1	0	9
– 1	2	1	0
2	– 3	– 1	– 9
0	1	1	0

Упражнение 21. В эмпирической формуле

$$p(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2$$

найти коэффициенты x_0, x_1, x_2 по результатам наблюдений (табл. 5–10):

Таблица 5

t	0	1	2	3
$p(t)$	1	4	9	16

Таблица 6

t	0	– 1	– 2	– 3
$p(t)$	1	0	1	4

Таблица 7

t	– 1	0	1	2
$p(t)$	5	1	– 1	– 1

Таблица 8

t	0	1	2	3
$p(t)$	1,1	3,9	9,1	16,1

Таблица 9

t	– 1	0	1	2
$p(t)$	4	1	0	1

Таблица 10

t	0	– 1	– 2	– 3
$p(t)$	1,1	– 0,1	1,1	3,9

Упражнение 22. Найти многочлен второй степени

$$p(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2,$$

приближающий с наименьшей квадратичной погрешностью функцию $f(t)$, заданную таблицами (табл. 11, 12):

Таблица 11

t	0	1	2	3
$f(t)$	1	3	3	1

Таблица 12

t	– 1	0	1	2
$f(t)$	4	2	2	4

Упражнение 23. Найти многочлен третьей степени

$$p(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3,$$

приближающий с наименьшей квадратичной погрешностью функцию $f(t)$, заданную таблицами (табл. 13, 14):

Таблица 13

t	0	1	2
$f(t)$	1	1	– 1

Таблица 14

t	– 1	0	1
$f(t)$	4	2	– 2

Упражнение 24. Найти коэффициенты x_1, x_2 функции

$$y(t) = x_1 \sin t + x_2 \cos t,$$

которая с наименьшей квадратичной погрешностью аппроксимирует на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ функцию $f(t)$, заданную табл. 15:

Таблица 15

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$f(t)$	3,2	3,5	3,6

Упражнение 25. Методом наименьших квадратов найти коэффициенты функции

$$y(t) = a_0 + a_1 \sin t + a_2 \cos t + a_3 \sin 2t + a_4 \cos 2t,$$

заданной на отрезке $[0;\pi]$ табл. 16:

Таблица 16

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(t)$	1	1	3	5	3	1	– 3

Упражнение 26. Найти коэффициенты x_1, x_2 функции

$$y(t) = x_1 2^{-t} + x_2 2^{-2t},$$

которая с наименьшей квадратичной погрешностью аппроксимирует на отрезке $[0;2]$ функцию $f(t)$, заданную табл. 17:

Таблица 17

t	0	1	2
$f(t)$	21	5	2

Упражнение 27. Методом итераций решить следующие системы линейных уравнений:

1)
$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 23, \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 31, \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 38; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 35, \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 17, \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 25; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 43, \\ x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 34, \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 39; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} 20x_1 + 3x_2 + x_3 = 68, \\ 2x_1 + 20x_2 + 3x_3 = 41, \\ 3x_1 + x_2 + 10x_3 = 60; \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 30, \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 40, \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 = 47; \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} 20x_1 - x_2 - 2x_3 = 8, \\ -2x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 3, \\ -3x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 43. \end{cases}$$

Упражнение 28. Методом Зейделя решить следующие системы линейных уравнений:

1)
$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 25, \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 15, \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 35; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 17, \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 32, \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 20; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ -2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = 9, \\ -3x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 21; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} 10x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 25, \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 + 10x_3 = 20; \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 57, \\ 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 33, \\ x_1 + 2x_2 + 20x_3 = 29; \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 51, \\ -2x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 27, \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 3. \end{cases}$$

Упражнение 29. Привести следующие системы линейных уравнений к виду, удобному для проведения метода итераций:

1)
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -1, \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 39, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 14; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -15, \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 = 38, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -3; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 14, \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 = 15, \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 54; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 4, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 50; \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 = -17, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 43; \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -1, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 32. \end{cases}$$

Глава 5
Проблема собственных значений и собственных векторов

5.1. Общие положения проблемы собственных значений

Решение проблемы собственных значений является одной из основных и самых сложных задач линейной алгебры, которая, будучи фундаментальной наукой, в то же время служит основой всех методов вычислительной математики и в этом смысле является чисто прикладной дисциплиной.

Собственные значения являются наиболее важной чертой практически любой динамической системы. Поэтому несколько слов следует сказать о том, для чего они служат. Колебания встречаются повсюду, и это так же верно для связанных с ними собственных значений (или частот). Вероятно, наиболее известным является пример с солдатами, идущими по мосту: при переходе моста они должны перестать идти в ногу, ибо частота, с которой они маршируют, может совпасть с одной из собственных частот колебаний моста и привести к резонансу. Аналогично этому на качелях, заметив естественную частоту качания и попадая в такт, вы раскачиваетесь сильнее. Инженер-строитель добивается, чтобы собственные частоты зданий лежали вне полосы частот, возбуждаемых землетрясением. Слушатель на концерте фактически анализирует колебания своих барабанных перепонок. Специалист по спектроскопии с помощью собственных значений определяет компоненты газа. А биржевой игрок проводит жизнь, пытаясь попасть в такт с естественными колебаниями рынка.

Проиллюстрируем некоторые математические особенности проблемы на примере из механики. Одной из наиболее ранних, досконально изученных задач на собственные значения является рассмотренная Леонардом Эйлером в 1744 г. проблема определения критической нагрузки для защемленного на одном конце гибкого стержня длины l, на другой свободный конец которого действует сжимающая сила P, направленная вдоль оси стержня [21]. В положении равновесия ось стержня остается прямолинейной. Однако существует критическое значение силы

P_*, выше которого прямолинейное положение является неустойчивым и сменяется устойчивым состоянием, когда стержень имеет изогнутую форму.

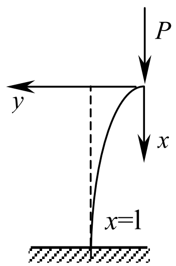

Рис. 1

Пусть система координат выбрана так, как показано на рис. 1; начало координат расположено в точке приложения силы P. Нас будет интересовать порог потери устойчивости равновесия стержня при продольном изгибе, поэтому будем рассматривать малые отклонения $y(x)$ от прямолинейной формы.

Дифференциальное уравнение задачи, без учета явления укорочения стержня в результате сжатия и возможного неупругого поведения материала стержня, имеет вид

$$y'' = -\frac{P}{\alpha} y, \qquad (1)$$

где коэффициент α — жесткость на изгиб, полагаемый постоянной величиной, штрихи означают дифференцирование по x.

Математическая формулировка задачи должна быть дополнена двумя граничными условиями, которые в данном случае зависят от способа закрепления стержня и имеют вид

$$y(0) = 0, \quad y'(l) = 0. \qquad (2)$$

Введем обозначение $P/\alpha = \lambda$. Тогда математическое описание процесса представляет собой краевую задачу для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = -\lambda y$$

с однородными граничными условиями (2). Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, x).$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Из условия $y(0) = 0$ следует, что $C_1 = 0$, а второе граничное условие дает $\sqrt{\lambda}\, C_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, l) = 0$. Это приводит к одному из следующих вариантов решения:

1) $\lambda = 0$, т. е. отсутствует нагрузка, что не представляет для нас интереса;
2) $C_2 = 0$, т. е. $y(x) = 0$, что соответствует прямолинейному положению стержня. Эта функция является решением рассматриваемой краевой задачи для любого значения λ, но не позволяет ничего сказать о критическом значении нагрузки;
3) $\cos(\sqrt{\lambda}\, l) = 0$, $\sqrt{\lambda}\, l = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$. Таким значениям параметра λ соответствуют критические нагрузки

$$P_m = \alpha \lambda_m = \alpha \left[\frac{(2m-1)\pi}{2l} \right]^2, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

и каждому из этих критических значений параметра λ_m соответствует определенная с точностью до постоянного множителя функция прогиба $y(x) = C \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$, дающая нетривиальное решение краевой задачи. Эти значения λ_m называются собственными значениями задачи, а решение, соответствующее каждому из них, называется собственной функцией, принадлежащей конкретному собственному значению. Первые четыре собственные функции, описывающие возможные положения равновесия изогнутого стержня, приведены на рис. 2 с соответствующими критическими нагрузками.

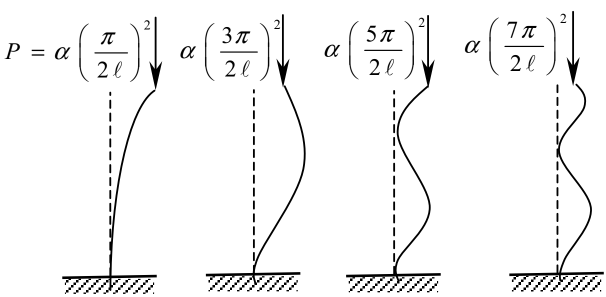

Рис. 2

Поскольку математическое моделирование проникает во все новые и новые области знания, потребность в вычислении собственных значений будет проявляться во все более богатом многообразии ситуаций. Но различия в задачах на собственные значения исчезают, когда дается их математическая формулировка, и конкретные проблемы, как бы они ни были интересны, сводятся к одной и той же — вычислению характеристических чисел квадратной матрицы с действительными или комплексными элементами.

Три важнейших подхода к развитию теории задач на собственные значения основаны на использовании дифференциальных уравнений, интегральных уравнений и вариационного исчисления.

Покажем, например, как решение алгебраической проблемы собственных значений тесно связано с решением системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, к которым сводятся многие задачи о колебаниях, устойчивости и др. Общий вид системы n однородных дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными $y_1, y_2, \ldots, y_n$ таков:

$$B\frac{dy}{dt} = Cy, \tag{3}$$

где t — независимая переменная; y — вектор с компонентами $y_1, y_2, \ldots, y_n$, а B и C — матрицы n-го порядка.

Если матрица B вырожденная, то это означает, что левые части системы уравнений (3) связаны линейным соотношением. Правые части (3) должны удовлетворять тому же самому соотношению, и, следовательно, y_i являются линейно зависимыми. В этом случае систему (3) можно свести к системе низшего порядка. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что матрица B невырожденная, т. е. $\det B \neq 0$. Тогда систему (3) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{4}$$

где $A = B^{-1}C$. Будем искать решение системы (4) в виде

$$y = \varphi e^{\lambda t}, \tag{5}$$

где $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ — это неизвестный вектор амплитуд, не зависящий от t, а λ — неизвестный параметр. Тогда производная по t определяется соотношением

$$\frac{dy}{dt} = \lambda \varphi e^{\lambda t}$$

и система уравнений (4) перепишется в виде

$$\lambda \varphi e^{\lambda t} = A \varphi e^{\lambda t}.$$

Отсюда получаем

$$A \varphi = \lambda \varphi. \tag{6}$$

Мы пришли к фундаментальной алгебраической проблеме собственных значений, которая состоит в определении тех значений параметра λ, при которых система (6) n однородных линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет нетривиальное решение.

Собственными значениями матрицы A являются (см. параграф 1.14) ее характеристические числа, принадлежащие основному полю, и только такие числа.

При рассмотрении проблемы собственных значений матрицы A различают два варианта постановки этой задачи. Нахождение всех собственных значений матрицы A называют **полной проблемой собственных значений** этой матрицы. Определение одного или нескольких, как правило, немногих собственных значений матрицы A носит название **частичной проблемы собственных значений** этой матрицы. Все имеющиеся методы решения проблемы собственных значений могут быть разделены на две большие группы: *прямые методы*, основанные на решении характеристического уравнения $\phi(\lambda) = |A - \lambda E| = 0$ матрицы A, и *итерационные методы*. В прямых методах важным этапом является развертывание характеристического многочлена $\phi(\lambda) = |A - \lambda E|$. Непосредственное вычисление определителя $|A - \lambda E|$ при больших значениях порядка матрицы A обычно бывает связано с громоздкими вычислениями. Поэтому применяют различные методы развертывания характеристического многочлена, не требующие непосредственного вычисления определителя $\left| A - \lambda E \right|$, например, метод А. Н. Крылова, метод А. М. Данилевского и т. п.

Развернутый характеристический многочлен $\phi(\lambda)$ является алгебраическим многочленом n-й степени. Его корни находятся как корни характеристического уравнения $\phi(\lambda) = 0$ любым из известных методов, например, методом хорд, методом Ньютона и т. п. Из всех вычисленных корней характеристического уравнения $\phi(\lambda) = 0$ собственными значениями матрицы A будут те, и только те, которые принадлежат основному полю.

При каждом найденном собственном значении λ_i соответствующие ему собственные векторы x матрицы A находятся как векторы-решения системы $A x = \lambda_i x$, т. е. системы $(A - \lambda_i E)\, x = 0$.

Итерационные методы, как правило, более приспособлены к решению частичной проблемы собственных значений. Формально рассуждая, можно было бы считать, что эти задачи являются частным случаем полной проблемы, рассмотрением которой можно и ограничиться. Однако для многих спектральных задач возможность решения лишь частичной проблемы очень ценна, поскольку полный объем вычислений, осуществляемых при решении полной проблемы собственных значений и собственных векторов, может оказаться неоправданно большим.

С помощью итерационных методов собственные значения определяются без предварительного вычисления характеристического многочлена, как пределы некоторых числовых последовательностей. Как правило, при этом одновременно находятся и собственные векторы или некоторые другие векторы, связанные с собственными простыми соотношениями.

В настоящее время накопление и обмен знаниями по вычислительным методам алгебры осуществляются как в форме традиционного математического изложения, так и в форме публикаций программ, написанных на одном из языков высокого уровня. Причем каждое математическое описание вычислительного метода порождает, как правило, целое семейство его машинных реализаций, порой значительно различающихся между собой, особенно в отношении численной устойчивости. На наш взгляд, одним из наиболее удачных описаний фонда алгоритмов и программ для решения проблемы собственных значений является справочник [33]. В нем для каждого алгоритма указаны область применимости, оценка точности, результаты тестовой проверки, дано подробное описание процедуры вычислений на языке АЛГОЛ.

Содержание данной главы посвящено рассмотрению методов решения проблемы собственных значений с помощью компьютера, оценке влияния различных погрешностей, присущих формулировке задачи и методам ее решения, т. е. тем деталям, которые могут оказаться весьма существенными для понимания особенностей машинной реализации метода. Рассматриваемые численные методы решения проблемы собственных значений эффективны, но достаточно трудоемки. Несмотря на разнообразие предлагаемых расчетных схем, большинство из них основано на последовательном выполнении таких алгебраических операций, как линейные преобразования векторов и нахождение матриц преобразований, двухсторонние действия с матрицами и т. п.

5.2. Локализация и возмущение собственных значений

Говорят, что действительная, или комплексная матрица A n-го порядка имеет *доминирующую главную диагональ*, если каждый ее диагональный элемент a_{ii} по модулю больше суммы модулей остальных элементов той же i-й строки, т. е. если

$$\left| a_{ii} \right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| a_{ij} \right| \tag{1}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма. *Если матрица A имеет доминирующую главную диагональ, то ее определитель* $\left| A \right| \neq 0$.

Доказательство. Допустим, что определитель $\left| A \right| = 0$. Тогда система $Ax = 0$ имеет ненулевое решение $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$. Пусть x_i — максимальная по модулю компонента этого решения. Подставим в i-е уравнение системы $Ax = 0$ найденное решение. Тогда получим равенство, из которого вытекает соотношение

$$\left| a_{ii} x_i \right| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left| a_{ij} x_j \right| .$$

Отсюда следует неравенство

$$\left| a_{ii} \right| \cdot \left| x_i \right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left| a_{ij} \right| \cdot \left| x_j \right| .$$

Заменяя в правой части этого неравенства каждое x_j большим по модулю числом x_i, получим неравенство

$$\left| a_{ii} \right| \cdot \left| x_i \right| \le \left| x_i \right| \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left| a_{ij} \right|$$

или после сокращения на $\left| x_i \right|$ неравенство

$$\left| a_{ii} \right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left| a_{ij} \right| ,$$

что противоречит условию теоремы, т. е. условиям (1).

Теорема 1. *Все характеристические числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *матрицы* A *содержатся в объединении кругов*

$$\left| \lambda_i - a_{ii} \right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left| a_{ij} \right| , \quad i = 1, 2, \ldots, n . \tag{2}$$

Доказательство. Если какое-либо характеристическое число λ_i не содержится в объединении кругов (2), то каждое из условий (2) должно быть нарушено, т. е. замениться на строгое неравенство противоположного смысла. Но тогда матрица $A-\lambda_i E$, в силу предыдущей леммы, должна быть невырожденной, что невозможно.

Круги (2) называют **локализационными кругами матрицы** A, или **кругами Гершгорина матрицы** A.

Следствие. *Если в матрице* $D+\delta D$ *матрица*

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}, \tag{3}$$

то характеристические числа $\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,\ldots,\hat{\lambda}_\nu$ *матрицы* $D+\delta D$ *содержатся в объединении кругов*

$$\left|\hat{\lambda}_i-\lambda_i\right|\le\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\left|\delta d_{ij}\right|,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Таким образом, если D — диагональная матрица (3) и λ_i — собственные значения матрицы $D+\delta D$, то среди характеристических чисел матрицы D найдется такое число λ_i, что

$$\left|\hat{\lambda}_i-\lambda_i\right|\le\left\|\delta A\right\|_\infty. \tag{4}$$

Замечание. В проведенных рассуждениях можно вести речь также относительно столбцов матрицы A вместо ее строк. Тогда вместо кругов (2) получим круги

$$\left|\lambda_i-a_{ii}\right|\le\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}\left|a_{ij}\right|,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

При этом характеристические числа λ_i также содержатся в таких кругах, а все характеристические числа матрицы A содержатся в объединении этих кругов. Использование таких кругов может уточнить локализацию характеристических корней матрицы A.

Приведем некоторые числовые оценки модулей характеристических чисел матрицы.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A. Число $\lambda_A = \max\limits_i \left| \lambda_i \right|$ называют **спектральным радиусом** матрицы A.

Теорема 2. *Спектральный радиус λ_A матрицы A не превосходит любой нормы этой матрицы, т. е. $\lambda_A \le \| A \|$.*

Доказательство. Пусть характеристические числа матрицы A занумерованы так, что $\lambda_A = \lambda_1$, и пусть x — собственный вектор матрицы A, принадлежащий собственному значению λ_1, т. е. $Ax = \lambda_1 x$. Обозначим через X квадратную матрицу n-го порядка, у которой первым столбцом служит вектор x, а остальные столбцы нулевые. Очевидно, что $AX = \lambda_1 X$. Переходя к нормам в обеих частях этого равенства, получим

$$\left| \lambda_1 \right| \cdot \| X \| = \| AX \| \le \| A \| \cdot \| X \|.$$

Так как $\| X \| > 0$, то полученное неравенство

$$\left| \lambda_1 \right| \cdot \| X \| \le \| A \| \cdot \| X \|$$

можно сократить на $\| X \|$. Так придем к нужному неравенству.

Применяя теорему 2 к различным нормам, получим следующие оценки для модуля любого характеристического числа λ_k матрицы A:

$$\left| \lambda_k \right| \le \left(\sum_{i,j} \left| a_{ij} \right|^2 \right)^{1/2}, \tag{5}$$

$$\left| \lambda_k \right| \le n \cdot \max \left| a_{ij} \right|, \tag{6}$$

$$\left| \lambda_k \right| \le \max_j \sum_i \left| a_{ij} \right|, \tag{7}$$

$$\left| \lambda_k \right| \le \max_i \sum_j \left| a_{ij} \right|, \tag{8}$$

$$|\lambda_k| \le \sigma_1\,, \tag{9}$$

для спектральной нормы при максимальном сингулярном числе σ_1. Неравенство (9) может быть дополнено оценкой снизу, так как имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Модули характеристических чисел матрицы A заключены между ее наименьшим и наибольшим сингулярными числами, т. е.*

$$\sigma_n \le |\lambda_k| \le \sigma_1\,, \text{ при } k = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть x — собственный вектор матрицы A, принадлежащий собственному значению λ_k, т. е. пусть $A\,x = \lambda_k\, x$. Тогда имеет место следующая цепочка равенств:

$$|\lambda_k x|^2 = \| A\,x \|^2,$$

$$|\lambda_k|^2 (x,\, x) = (A\,x, A\,x), \quad |\lambda_k|^2 (x,\, x) = (A\,x)^* A\,x,$$

$$|\lambda_k|^2 (x,\, x) = x^* A^* A\,x\,,$$

$$|\lambda_k|^2 = \frac{x^* A^* A\,x}{(x,\, x)}\,. \tag{11}$$

В правой части последнего равенства стоит известное отношение Релея для симметричной (эрмитовой) матрицы $A^* A$, для которого имеет место соотношение

$$\sigma_n^2 \le \frac{x^* A^* A\,x}{(x,\, x)} \le \sigma_1^2\,, \tag{12}$$

где σ_1^2 и σ_n^2 — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы $A^* A$.

Из соотношений (11) и (12) следует соотношение (10).

Приведем еще несколько локализационных оценок (см., например, [36], [17]) в случае нормальной матрицы $A = (a_{i\,j})$ n-го порядка:

$$\left|\lambda_1\right| \ge \frac{1}{n}\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\right|;$$

$$\sigma_1 = \max_{x\ne 0}\frac{|Ax|}{|x|} \text{ и } \sigma_n = \min_{x\ne 0}\frac{|Ax|}{|x|};$$

$$\sigma_1 \ge \max\left\{\max_i\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2},\ \max_j\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2}\right\};$$

$$\sigma_n \le \min\left\{\min_i\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2},\ \min_j\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2}\right\}.$$

Перейдем к получению оценок возмущения собственных значений матрицы при ее возмущении. Собственные значения матрицы являются непрерывными функциями ее элементов. Будем говорить, что проблема собственных значений матрицы плохо обусловлена, если малые возмущения матрицы могут привести к большим возмущениям всех или некоторых ее собственных значений. Возмущения матрицы могут возникать при измерениях (наблюдениях) ее элементов, а также при вводе данных и при компьютерных вычислениях. Поэтому на практике вместо точной матрицы A приходится иметь дело с ее возмущенной матрицей $A+\delta A$, где δA — матрица возмущений.

Будем предполагать, что в матрице A все ее собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ различные. Собственные векторы матрицы A, принадлежащие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, обозначим соответственно через $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Аналогично для матрицы A^* собственные значения обозначим через $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_n$, а им соответствующие собственные векторы — через $y_1, y_2, \ldots, y_n$. По определению собственных векторов

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \quad A^* y_i = \overline{\lambda}_i y_i.$$

Для возмущенных матриц $A+\delta A$ и $A^*+\delta A^*$ будем полагать

$$\hat{\lambda}_i = \lambda_i + \delta\lambda_i, \quad \hat{\bar{\lambda}}_i = \bar{\lambda}_i + \delta\bar{\lambda}_i,$$

$$\hat{x}_i = x_i + \delta x_i, \quad \hat{y}_i = y_i + \delta y_i.$$

Возмущения матриц, их собственных значений и собственных векторов будем считать малыми. Тогда величинами старших порядков малости относительно возмущений можно пренебречь и уравнения для возмущенных величин можно записать в виде

$$(A + \delta A)(x_i + \delta x_i) = (\lambda_i + \delta\lambda_i)(x_i + \delta x_i),$$

или, учитывая, что $A x_i = \lambda_i x_i$ в виде

$$A \cdot \delta x_i + \delta A \cdot x_i = \delta\lambda_i \cdot x_i + \lambda_i \cdot \delta x_i.$$

Умножив полученное равенство скалярно на y_i, придем к соотношению

$$(A \cdot \delta x_i, y_i) + (\delta A \cdot x_i, y_i) = \delta\lambda_i \cdot (x_i, y_i) + \lambda_i \cdot (\delta x_i, y_i). \quad (13)$$

В этом равенстве первое слагаемое левой части равно второму слагаемому правой части, поскольку

$$(A \cdot \delta x_i, y_i) = (\delta x_i, A^* y_i) = (\delta x_i, \bar{\lambda}_i y_i) = \lambda_i (\delta x_i, y_i).$$

Поэтому равенство (13) упростится, и из него найдем

$$\delta\lambda_i = \frac{(\delta A \cdot x_i, y_i)}{(x_i, y_i)} = \frac{y_i^* \cdot \delta A \cdot x_i}{(x_i, y_i)}.$$

Отсюда получаем

$$\left| \delta\lambda_i \right| \le \frac{\left| x_i \right| \cdot \left| y_i \right| \cdot \left\| \delta A \right\|}{\left| (x_i, y_i) \right|} = C_i \cdot \left\| \delta A \right\|_\infty, \quad (14)$$

где

$$C_i = \frac{\left| x_i \right| \cdot \left| y_i \right|}{\left| (x_i, y_i) \right|}$$

— величина, большая или равная единице. Ее называют **коэффициентом перекоса матрицы** A, соответствующим собственному значению λ_i, поскольку для вещественных векторов x_i и y_i

$$C_i = \frac{1}{\left|\cos\varphi_i\right|},$$

где φ_i — угол между векторами x_i и y_i.

Коэффициенты перекоса матрицы A равны единице тогда и только тогда, когда матрица A нормальная, т. е. перестановочная со своей сопряженной матрицей A^*. Для произвольной матрицы A возмущения $\delta\lambda_i$ при фиксированном δA тем больше, чем больше соответствующие этому собственному значению коэффициенты перекоса C_i. При достаточно большом значении C_i задача отыскания собственных значений может оказаться неустойчивой. Соотношение (14) допускает (см. [15]) следующее уточнение:

$$\left|\delta\lambda_i\right| \le \frac{n\cdot\left\|\delta A\right\|}{\left|(x_i, y_i)\right|}. \tag{14$'$}$$

Приведем еще некоторые оценки возмущений собственных значений при возмущении матрицы.

Теорема 4. *Пусть матрица A диагонализуема, т. е. существует такая матрица P, что*

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

и пусть матрица A получает возмущение δA. Тогда для любого собственного значения $\hat{\lambda}_i$ матрицы $A+\delta A$ найдется собственное значение λ_i матрицы A, для которого

$$\left|\delta\lambda_i\right| = \left|\hat{\lambda}_i - \lambda_i\right| \le \left\|P^{-1}\right\|_\infty \left\|P\right\|_\infty \left\|\delta A\right\|_\infty = K_\infty(P)\cdot\left\|\delta A\right\|_\infty, \tag{15}$$

где $K_\infty(P) = \left\|P^{-1}\right\|_\infty \cdot \left\|P\right\|_\infty$ — число обусловленности матрицы P в матричной норме $\|\cdot\|_\infty$.

Доказательство. Поскольку $P^{-1}AP = D$, то

$$P^{-1}(A+\delta A)P = P^{-1}AP + P^{-1}\cdot\delta A\cdot P = D + P^{-1}\cdot\delta A\cdot P,$$

т. е. матрицы $A+\delta A$ и $D + P^{-1}\cdot\delta A\cdot P$ подобны. Следовательно, они имеют одинаковые характеристические числа. Причем, так как матрица D диагональная и подобная матрице A, то для характеристического числа $\hat{\lambda}_i$ матрицы $A+\delta A$ в матрице $D + P^{-1}\cdot\delta A\cdot P$ найдется (см. соотношение (4)) такое характеристическое число λ_i матрицы A, для которого

$$\left|\hat{\lambda}_i - \lambda_i\right| \le \left\|P^{-1}\delta A\cdot P\right\|_\infty \le \left\|P^{-1}\right\|_\infty \left\|P\right\|_\infty \left\|\delta A\right\|_\infty = K_\infty(P)\left\|\delta A\right\|_\infty .$$

Теорема 5. *Пусть матрица A диагонализуема, т. е. существует такая матрица P, что*

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

и пусть матрица A получает возмущение δA, а матричная норма $\|\cdot\|$ такая, что для всех диагональных матриц

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{pmatrix},$$

$\|H\| = \max\limits_i \left|h_i\right|$, *в частности $\|\cdot\|$ —* ***спектральная норма****. Тогда для любого собственного значения $\hat{\lambda}_i$ матрицы $A+\delta A$ найдется собственное значение λ_i матрицы A, для которого*

$$\left|\hat{\lambda}_i - \lambda_i\right| \le \left\|P^{-1}\delta A\cdot P\right\| \le \left\|P^{-1}\right\|\cdot\left\|P\right\|\cdot\left\|\delta A\right\| = K(P)\cdot\left\|\delta A\right\|, \quad (16)$$

где через $K(P)$ обозначено число обусловленности матрицы P в рассматриваемой норме $\|\cdot\|$, в частности в ***спектральной норме****.*

Доказательство. Так как

$$P^{-1}(A+\delta A)P = P^{-1}AP + P^{-1}\cdot\delta A\cdot P = D + P^{-1}\cdot\delta A\cdot P,$$

то матрицы $A+\delta A$ и $D+P^{-1}\cdot\delta A\cdot P$ имеют одинаковые характеристические числа $\hat\lambda_1,\hat\lambda_2,\dots,\hat\lambda_n$. При собственном значении $\hat\lambda$ матрицы $D+P^{-1}\cdot\delta A\cdot P$ ее характеристическая матрица

$$D+P^{-1}\cdot\delta A\cdot P-\hat\lambda E = D-\hat\lambda E+P^{-1}\cdot\delta A\cdot P$$

вырожденная. Если при этом вырождена и матрица $D-\hat\lambda E$, то $\hat\lambda=\lambda_i$ и нужное неравенство (16) выполняется. Поэтому будем считать, что матрица $D-\hat\lambda E$ невырожденная и рассмотрим матрицу

$$(D-\hat\lambda E)^{-1}(D-\hat\lambda E+P^{-1}\cdot\delta A\cdot P).$$

Эта матрица вырожденная, поскольку ее определитель равен нулю, так как он представим произведением двух определителей, из которых один равен нулю.

Преобразуем эту матрицу следующим образом:

$$(D-\hat\lambda E)^{-1}(D-\hat\lambda E+P^{-1}\cdot\delta A\cdot P)=$$

$$=E+(D-\hat\lambda E)^{-1}P^{-1}\cdot\delta A\cdot P.$$

Так как матрица $E+(D-\hat\lambda E)^{-1}P^{-1}\cdot\delta A\cdot P$ вырожденная, то в силу леммы

$$\left\|(D-\hat\lambda E)^{-1}P^{-1}\cdot\delta A\cdot P\right\|\ge 1.$$

Преобразуем это неравенство следующим образом:

$$1\le\left\|(D-\hat\lambda E)^{-1}\cdot P^{-1}\cdot\delta A\cdot P\right\|\le\left\|(D-\hat\lambda E)^{-1}\right\|\cdot\left\|P^{-1}\right\|\times$$

$$\times\left\|\delta A\right\|\cdot\left\|P\right\| = \max_i\left|\hat\lambda_i-\lambda_i\right|\cdot K(P)\cdot\left\|\delta A\right\| = \frac{K(P)\cdot\left\|\delta A\right\|}{\min_i\left|\hat\lambda_i-\lambda_i\right|}.$$

Из полученного результата следует неравенство

$$\min_i\left|\hat\lambda_i-\lambda_i\right|\le K(P)\cdot\left\|\delta A\right\|,$$

из которого вытекает нужное неравенство (16).

Соотношения (16) в спектральной норме можно истолковать также следующим образом:

Собственные значения возмущенной матрицы $A+\delta A$ *находятся в области, являющейся объединением всех кругов с центрами в* λ_i *и радиуса* $K(P)\cdot\left\|\delta A\right\|_2$.

Столбцы матрицы P представляют собой собственные векторы матрицы A. Поэтому из соотношения (16) вытекает, что общей мерой чувствительности собственных значений к возмущению матрицы, по-видимому, может служить спектральное число обусловленности матрицы P, состоящей из собственных векторов матрицы A, а не число обусловленности самой матрицы A.

Будем считать, что матрица P всегда выбирается такой, что значение числа $K(P)$ является минимальным. Если A — нормальная матрица, в частности, симметричная, эрмитова или унитарная, то можно взять в качестве матрицы P ортогональную или унитарную матрицу. Тогда спектральный коэффициент обусловленности $K(P)=1$ и соотношение (16) превратится в соотношение

$$\left|\hat{\lambda}-\lambda_i\right|\le\left\|\delta A\right\|_2. \tag{17}$$

В случае эрмитовой матрицы A, пользуясь соотношением (17) (см. [8]), можно показать, что в каждом круге с центром в λ_i и радиусом $\left\|\delta A\right\|_2$ содержится хотя бы одно собственное значение возмущенной матрицы $A+\delta A$.

Если собственные значения матрицы A простые, то при достаточно малом возмущении δA все круги разделяются, и тогда в каждом круге будет содержаться одно и только одно собственное значение возмущенной матрицы $A+\delta A$.

В заключение следует отметить, что вопросы устойчивости собственных значений и собственных векторов являются одними из самых сложных вопросов численных методов линейной алгебры.

5.3. Развертывание характеристического многочлена

Характеристическим многочленом матрицы A является определитель $\left| A-\lambda E \right|$ характеристической матрицы $A-\lambda E$. Непосредственное вычисление этого определителя для сколь-нибудь высокого порядка матрицы громоздко и весьма трудоемко. Поэтому разработаны специальные методы развертывания такого определителя, не требующие непосредственного его вычисления. Рассмотрим некоторые из этих методов.

5.3.1. *Метод Крылова*

Академик А. Н. Крылов предложил оригинальный метод раскрытия характеристического многочлена. Приведем (см. [12, 14, 34] следующую модификацию этого метода. Пусть

$$\left| A-\lambda E \right| = (-1)^n(\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n) \qquad (1)$$

– характеристический многочлен матрицы A порядка n. Для определения коэффициентов $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ замечаем, что по теореме Гамильтона–Кэли, матрица A является корнем своего характеристического многочлена. Поэтому

$$A^n + p_1 A^{n-1} + \ldots + p_{n-1} A + p_n E = 0. \qquad (2)$$

Если в левой части равенства (2) провести указанные действия, а затем сравнить j-й столбец матрицы, полученной в левой части, с j-м столбцом матрицы правой части, то получим n систем линейных уравнений

$$a_j^{(n)} + p_1 a_j^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} a_j^{(1)} + p_n a_j^{(0)} = 0$$

относительно неизвестных $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Для их нахождения достаточно ограничиться получением лишь одной системы.

Чтобы уменьшить объем громоздких вычислений и получить лишь одну систему линейных уравнений относительно неизвестных $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$, поступим следующим образом.

Возьмем произвольный ненулевой вектор

$$y^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$$

и умножим на него справа обе части равенства (2). В результате получим векторное равенство

$$A^n y^{(0)} + p_1 A^{n-1} y^{(0)} + \ldots + p_{n-1} A\, y^{(0)} + p_n\, y^{(0)} = 0\,. \quad (3)$$

В частности, при $y^{(0)} = e_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, будут получаться указанные выше системы:

$$a_j^{(n)} + p_1 a_j^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} a_j^{(1)} + p_n a_j^{(0)} = 0\,.$$

Введем обозначения

$$y^{(1)} = A\, y^{(0)},\;\; y^{(2)} = A\, y^{(1)} = A^2 y^{(0)}, \ldots,\; y^{(n)} = A\, y^{(n-1)} = A^n y^{(0)}\,.$$

Тогда равенство (3) преобразуется в равенство

$$y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}\, y^{(1)} + p_n\, y^{(0)} = 0\,,$$

которое для удобства запишем в виде

$$p_1\, y^{(n-1)} + p_2\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}\, y^{(1)} + p_n\, y^{(0)} = -y^{(n)}\,. \quad (4)$$

Поскольку при выбранном ненулевом векторе $y^{(0)}$ все векторы $y^{(k)} = A\, y^{(k-1)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ являются вполне определенными векторами, то равенство (4) представляет собой систему n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $p_1, p_2, \ldots, p_n$, записанную в векторной форме. Если эта система имеет единственное решение, то оно дает набор коэффициентов характеристического многочлена матрицы A. Если же система (4) имеет бесконечное число решений, то методом А. Н. Крылова можно получить лишь коэффициенты многочлена, являющегося либо минимальным многочленом матрицы A, либо его делителем. Поэтому если система (4) окажется неопределенной, то следует попытаться изменить начальный вектор и повторить процесс, или применить другой метод.

Для определения всех коэффициентов характеристического многочлена методом А. Н. Крылова требуется

$$C(n) = \frac{1}{3}(n^4 + 4n^3 + 2n^2 - n - 3)$$

операций умножения и деления (см. [34]).

Пример 1. Методом А. Н. Крылова найти характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем характеристический многочлен матрицы A в виде

$$\phi(\lambda) = \left| A - \lambda E \right| = (-1)^4 (\lambda^4 + p_1 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_3 \lambda + p_4).$$

Вычислительная процедура развертывания векового определителя по методу А. Н. Крылова включает следующие этапы:

1. Выбираем начальный вектор, например, $y^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.
2. С помощью матрицы A строим векторы $y^{(k)}$ по правилу

$y^{(k)} = A\, y^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, 3, 4:$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \; y^{(2)} = \begin{pmatrix} 36 \\ 32 \\ 29 \\ 31 \end{pmatrix}, \; y^{(3)} = \begin{pmatrix} 322 \\ 315 \\ 255 \\ 296 \end{pmatrix}, \; y^{(4)} = \begin{pmatrix} 2975 \\ 2865 \\ 2357 \\ 2705 \end{pmatrix}.$$

3. Записываем систему уравнений (4) в векторной форме, принимая в качестве множителей при неизвестных p_1, p_2, p_3, p_4 соответственно векторы $y^{(3)}, \; y^{(2)}, y^{(1)}, y^{(0)}$, а вектор $y^{(4)}$, взятый со знаком минус, — за столбец свободных членов системы:

$$p_1 \begin{pmatrix} 322 \\ 315 \\ 255 \\ 296 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 36 \\ 32 \\ 29 \\ 31 \end{pmatrix} + p_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + p_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2975 \\ 2865 \\ 2357 \\ 2705 \end{pmatrix},$$

или в развернутой записи

$$\begin{cases} 322\,p_1 + 36\,p_2 + 3\,p_3 + p_4 = -2975, \\ 315\,p_1 + 32\,p_2 + 7\,p_3 = -2865, \\ 255\,p_1 + 29\,p_2 + 2\,p_3 = -2367, \\ 296\,p_1 + 31\,p_2 + 4\,p_3 = -2705. \end{cases}$$

4. Решаем полученную систему относительно p_1, p_2, p_3, p_4 любым способом, например, методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса). В результате получим:

$$p_1 = -8, \quad p_2 = -11, \quad p_3 = 1, \quad p_4 = -6.$$

5. Записываем характеристический многочлен матрицы A:

$$\phi\,(\lambda) = \left| A - \lambda E \right| = \lambda^4 - 8\lambda^3 - 11\lambda^2 + \lambda - 6.$$

Если же сначала вычислить матрицы

$$A^2 = \begin{pmatrix} 36 & 10 & 18 & 27 \\ 32 & 9 & 16 & 31 \\ 29 & 8 & 14 & 21 \\ 31 & 9 & 16 & 27 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 322 & 91 & 162 & 262 \\ 315 & 88 & 158 & 247 \\ 255 & 72 & 128 & 208 \\ 296 & 83 & 148 & 235 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2975 & 837 & 1492 & 2389 \\ 2865 & 808 & 1440 & 2316 \\ 2357 & 663 & 1182 & 1892 \\ 2705 & 762 & 1358 & 2181 \end{pmatrix},$$

затем выписать системы

$$a_j^{(4)} + p_1\,a_j^{(3)} + p_2\,a_j^{(2)} + p_3\,a_j^{(1)} + p_4\,a_j^{(0)} = 0,$$

то для вычисления коэффициентов p_1, p_2, p_3, p_4 достаточно решить любую из полученных систем. Например, систему, полученную при $j = 1$ и в векторной форме имеющую вид

$$\begin{pmatrix}2975\\2865\\2357\\2705\end{pmatrix}+p_1\begin{pmatrix}322\\315\\255\\296\end{pmatrix}+p_2\begin{pmatrix}36\\32\\29\\31\end{pmatrix}+p_3\begin{pmatrix}3\\7\\2\\4\end{pmatrix}+p_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Решив ее, получим единственное решение $p_1=-8$, $p_2=-11$, $p_3=1$, $p_4=-6$, пользуясь которым, выпишем характеристический многочлен матрицы A:

$$\phi\,(\lambda)=\left|\,A-\lambda E\,\right|=\lambda^4-8\lambda^3-11\lambda^2+\lambda-6\,.$$

Пример 2. Методом А. Н. Крылова найти характеристический многочлен матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & 30 & -48\\3 & 14 & -24\\3 & 15 & -25\end{pmatrix}.$$

Решение. В соответствии с описанной процедурой выберем начальный вектор $y^{(0)}=(1,0,0\,)^{\mathrm{T}}$ и построим векторы по формулам $y^{(k)}=A\;y^{(k-1)}$, $k=1,2,3$

$$y^{(1)}=\begin{pmatrix}5\\3\\3\end{pmatrix},\ y^{(2)}=\begin{pmatrix}-29\\-15\\-15\end{pmatrix},\ y^{(3)}=\begin{pmatrix}125\\63\\63\end{pmatrix}.$$

Затем составим систему уравнений

$$\begin{cases}-29\,p_1+5\,p_2+p_3=125,\\-15\,p_1+3\,p_2\qquad\quad=\ 63,\\-15\,p_1+3\,p_2\qquad\quad=\ 63\end{cases}\tag{5}$$

для определения коэффициентов p_i. Очевидно, что эта система имеет бесконечное число решений и потому не позволяет определить коэффициенты характеристического многочлена матрицы A.

Вырождение в системе (5) означает линейную зависимость векторов $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, …, $y^{(n)}$. В этом случае методом А. Н. Крылова можно получить коэффициенты полинома степени m, являющейся значением индекса, для которого векторы $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, …, $y^{(m-1)}$ линейно независимы, а вектор $y^{(m)} = A^m y^{(0)}$ линейно зависит от них:

$$y^{(m)} = \alpha_0 y^{(0)} + \alpha_1 A y^{(0)} + \ldots + \alpha_{m-1} A^{m-1} y^{(0)}.$$

Многочлен

$$\lambda^m - \alpha_{m-1} \lambda^{m-1} - \ldots - \alpha_1 \lambda - \alpha_0$$

будет являться или минимальным многочленом матрицы A, или его делителем.

На практике поступают таким образом:

- в системе вида (5) отбрасывается $(n-m)$ строк, в которых исключаются все коэффициенты одновременно (в рассматриваемом примере $m=2$, $n-m=1$, отбрасывается третье уравнение);
- в наборе коэффициентов $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ характеристического полинома исключаются из рассмотрения $(n-m)$ последних неизвестных (в примере 3 — коэффициент p_3), а из векторов коэффициентов оставшейся системы уравнений отбрасываются $(n-m)$ последних столбцов, начиная со столбца свободных членов, т. е. со столбца из оставшихся компонент вектора $y^{(n)} = y^{(3)}$;
- последний из оставшихся столбцов принимается за столбец свободных членов новой системы, в рассматриваемом примере — столбец из оставшихся компонент вектора $y^{(2)}$;
- коэффициенты минимального полинома матрицы находятся как решение полученной системы.

В рассматриваемом случае урезанная система

$$5p_1 + p_2 = -29,$$
$$3p_1 \qquad = -15$$

имеет решение

$$p_1 = -5, \quad p_2 = -4.$$

Мы определили коэффициенты многочлена второй степени

$$\phi_2(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda+1)(\lambda+4),$$

являющегося лишь делителем характеристического полинома, который имеет третью степень:

$$\phi(\lambda) = \phi_2(\lambda)(\lambda - \lambda_3) = (\lambda+1)(\lambda+4)(\lambda-\lambda_3).$$

В данном случае мы можем найти недостающий корень уравнения, воспользовавшись свойствами спектра матрицы. След матрицы, т. е. сумма ее диагональных элементов, равняется сумме корней характеристического многочлена. В нашем случае $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -6$. С другой стороны, сумма корней многочлена $\phi_2(\lambda)$ равна -5. Следовательно, $\lambda_3 = -1$.

Таким образом, характеристический многочлен матрицы A можно записать в виде

$$\phi(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda+4).$$

Покажем теперь, как, используя результаты промежуточных вычислений при нахождении p_i по методу А. Н. Крылова, можно определить собственные векторы матрицы A.

Предположим, что коэффициенты p_i и корни характеристического уравнения $\phi(\lambda) = 0$ определены. Ограничимся случаем, когда все собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ различны. Требуется найти собственные векторы $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, принадлежащие соответственно собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Пусть $y^{(0)}$, $y^{(1)} = Ay^{(0)}, \ldots, y^{(n-1)} = A^{n-1}y^{(0)}$ — векторы, использованные в методе А. Н. Крылова для нахождения коэффициентов p_i.

Векторы $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ линейно независимы и образуют базис. Разложим вектор $y^{(0)}$ по собственным векторам

$$y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \ldots + c_n x^{(n)},$$

где c_i — числовые коэффициенты. Тогда

$$y^{(1)} = A y^{(0)} = c_1 A x^{(1)} + c_2 A x^{(2)} + \ldots + c_n A x^{(n)},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$y^{(n-1)} = A^{n-1} y^{(0)} = c_1 A^{n-1} x^{(1)} + c_2 A^{n-1} x^{(2)} + \ldots + c_n A^{n-1} x^{(n)}.$$

Учитывая, что $A x^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}$, $A^2 x^{(i)} = \lambda_i^2 x^{(i)}$, …, получим

$$y^{(1)} = c_1 \lambda_1 x^{(1)} + c_2 \lambda_2 x^{(2)} + \ldots + c_n \lambda_n x^{(n)},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$y^{(n-1)} = c_1 \lambda_1^{n-1} x^{(1)} + c_2 \lambda_2^{n-1} x^{(2)} + \ldots + c_n \lambda_n^{n-1} x^{(n)}.$$

Покажем, что линейная комбинация векторов $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, …, $y^{(n-1)}$ при подходящем выборе коэффициентов дает собственный вектор матрицы A:

$$\beta_{10} y^{(n-1)} + \beta_{11} y^{(n-2)} + \ldots + \beta_{1,n-1} y^{(0)} =$$

$$= \beta_{10} (c_1 \lambda_1^{n-1} x^{(1)} + c_2 \lambda_2^{n-1} x^{(2)} + \ldots + c_n \lambda_n^{n-1} x^{(n)}) + \ldots +$$

$$+ \beta_{1,n-1} (c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \ldots + c_n x^{(n)}) =$$

$$= c_1 (\beta_{10} \lambda_1^{n-1} + \beta_{11} \lambda_1^{n-2} + \ldots + \beta_{1,n-1}) x^{(1)} + \ldots +$$

$$+ c_n (\beta_{10} \lambda_n^{n-1} + \beta_{11} \lambda_n^{n-2} + \ldots + \beta_{1,n-1}) x^{(n)} =$$

$$= c_1 \phi_1(\lambda_1) x^{(1)} + \ldots + c_n \phi_1(\lambda_n) x^{(n)}, \qquad (6)$$

где

$$\phi_1(\lambda_i) = \beta_{10} \lambda_i^{n-1} + \beta_{11} \lambda_i^{n-2} + \ldots + \beta_{1,n-1}.$$

С другой стороны, выберем в качестве $\phi_1(\lambda)$ полином

$$\phi_1(\lambda) = \frac{(-1)^n \phi(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = \frac{\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \ldots - p_{n-1}\lambda - p_n}{\lambda - \lambda_1} =$$

$$= (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\ldots(\lambda - \lambda_n), \qquad (7)$$

причем

$$\phi_1(\lambda_1) \neq 0, \quad \phi_1(\lambda_i) = 0, \quad i \neq 1.$$

Здесь $\phi(\lambda)$ — характеристический многочлен, коэффициенты p_i и нули λ_i которого уже вычислены. Тогда

$$\beta_{10}\lambda_1^{n-1} + \beta_{11}\lambda_1^{n-2} + \ldots + \beta_{1,n-1} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\ldots(\lambda_1 - \lambda_n).$$

Коэффициенты β_{1j} можно определить по схеме Горнера

$$\beta_{10} = 1, \quad \beta_{1j} = \lambda_1 \beta_{1,j-1} - p_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (8)$$

Таким образом, выражение (6) можно переписать в виде

$$c_1 \phi_1(\lambda_1) x^{(1)} = \beta_{10} y^{(n-1)} + \beta_{11} y^{(n-2)} + \ldots + \beta_{1,n-1} y^{(0)}.$$

Следовательно, линейная комбинация векторов $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, …, …, $y^{(n-1)}$ с коэффициентами, вычисленными по формулам (8), определяет собственный вектор $x^{(1)}$ с точностью до постоянного множителя.

Аналогично в качестве остальных собственных векторов можно принять

$$x^{(i)} = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ij} y^{(n-1-j)}, \qquad (9)$$

где

$$\beta_{i0} = 1, \quad \beta_{ij} = \lambda_i \beta_{i,j-1} - p_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (10)$$

В качестве примера вычислим собственный вектор, принадлежащий какому-либо собственному значению матрицы из примера 1. Выпишем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 - 11\lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Один из его вещественных корней $\lambda_1 = -1,50556$.

Вычислим числа β_{1j} при $j = 0,1,2,3$ по формулам (10):

$$\beta_{10} = 1; \;\; \beta_{11} = -9,50556; \;\; \beta_{12} = 3,31119; \;\; \beta_{13} = -3,9852.$$

Составим линейные комбинации по формуле (9) для $i = 1$, располагая вычисления в нижеследующей таблице.

$\beta_{13} y^{(0)}$	$\beta_{12} y^{(1)}$	$\beta_{11} y^{(2)}$	$\beta_{10} y^{(3)}$	$x^{(1)}$	$\tilde{x}^{(1)}$
–3.9852	9.9336	–342.200	322	–14,252	1
0	23.1783	–304.178	315	34,0004	–2.4144
0	6.6224	–275.661	255	–14,039	0.9851
0	13.2448	–294.672	296	14,5724	–1.0225

Последний столбец таблицы содержит компоненты собственного вектора $x^{(1)}$, нормированного так, что его первая компонента равна единице.

5.3.2. *Метод Данилевского*

Суть метода А. М. Данилевского состоит в приведении данной матрицы A к подобной матрице F, имеющей нормальную форму Фробениуса, т. е. к подобной матрице F вида

$$F = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы первой строки матрицы F, умноженные на -1, равны соответствующим коэффициентам характеристического многочлена

$$\left| A - \lambda E \right| = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \ldots - p_n) \qquad (1)$$

матрицы A.

Действительно, учитывая, что подобные матрицы A и F имеют одинаковые характеристические многочлены, т. е. $\left| A - \lambda E \right| = \left| F - \lambda E \right|$, и разлагая определитель $\left| F - \lambda E \right|$ по элементам первой строки, получим

$$\left| A - \lambda E \right| = \left| F - \lambda E \right| = \begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (p_1 - \lambda)(-\lambda)^{n-1} - p_2 (-\lambda)^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} p_n =$$

$$= (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \ldots - p_n).$$

Следовательно, если матрица A приведена к нормальной форме Фробениуса, то построение ее характеристического многочлена не вызывает затруднений.

Опишем начало процесса преобразования матрицы A. На первом этапе нужно последнюю строку

$$(a_{n1} \quad a_{n2} \quad \ldots \quad a_{n,\,n-1} \quad a_{nn})$$

привести к виду $(0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 1 \;\; 0)$. Предполагая, что $a_{n,\,n-1} \neq 0$, разделим все элементы $(n-1)$-го столбца матрицы A на $a_{n,\,n-1}$ (в противном случае находим среди элементов последней строки отличный от нуля элемент и меняем местами соответствующие строки и столбцы). В результате n-я строка матрицы A примет вид $(a_{n1} \;\; a_{n2} \;\; \ldots \;\; 1 \;\; a_{nn})$. Затем от каждого из остальных столбцов полученной матрицы вычитаем $(n-1)$-й столбец, умноженный на соответствующий элемент n-й строки: $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$. В полученной матрице последняя строка имеет желаемый вид $(0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 1 \;\; 0)$.

Известно, что каждое элементарное преобразование квадратной матрицы равносильно ее умножению на соответствующую элементарную матрицу. При этом, если преобразование производится над столбцами матрицы, множитель должен быть правым и представлять собой результат применения соответствующего элементарного преобразования к единичной матрице.

Отсюда заключаем, что произведенные операции эквивалентны умножению матрицы A справа на матрицу

$$M_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{n,\,n-1}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{n,\,n-1}} & \dots & \dfrac{1}{a_{n,\,n-1}} & -\dfrac{a_{nn}}{a_{n,\,n-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После указанных преобразований получим матрицу

$$B = A\,M_{n-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,\,n-1} & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

элементы которой вычисляются по следующим правилам:

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{i,\,n-1}\, m_{n-1,\,j}\,, \quad j \neq n-1,$$

$$b_{i,\,n-1} = a_{i,\,n-1}\, m_{n-1,\,n-1}\,, \quad 1 \le i \le n\,.$$

Однако построенная матрица $B = A\,M_{n-1}$ не будет подобна матрице A. Чтобы получить матрицу, подобную исходной, нужно матрицу B слева умножить на матрицу M_{n-1}^{-1}, равную

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $C = M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} = M_{n-1}^{-1} B$. Умножение M_{n-1}^{-1} на матрицу B меняет лишь $(n-1)$-ю строку матрицы B. Матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,\,n-1} & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \dots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,\,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ее элементы равны

$$c_{ij} = b_{ij}\,, \qquad 1 \le i \le n-2\,,$$

$$c_{n-1,\,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\, b_{kj}\,, \qquad 1 \le j \le n\,.$$

Матрица C подобна матрице A и имеет одну (последнюю) строку приведенного вида.

Далее матрицу C аналогично преобразуют, взяв за основную $(n-2)$-ю ее строку. В результате получим матрицу D с двумя приведенными строками: $D = M_{n-2}^{-1} C\, M_{n-2}$. Продолжая этот процесс, получим матрицу Фробениуса

$$F = M_1^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} A\, M_{n-1} \dots M_1\,,$$

подобную матрице A, элементы первой строки которой, умноженные на -1, равны соответствующим коэффициентам характеристического многочлена матрицы A.

Метод А. М. Данилевского является одним из самых экономичных методов развертывания характеристического многочлена матрицы. Общее число операций умножения и деления, необходимых для определения коэффициентов характеристического многочлена по методу А. М. Данилевского, равняется $n^3 - n^2$, что значительно меньше, чем по методу А. Н. Крылова.

Пример 1. Методом А. М. Данилевского раскрыть характеристический многочлен матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Чтобы последнюю строку матрицы A привести к виду $(0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$, сначала разделим на 2 все элементы третьего столбца матрицы. Тогда четвертая строка матрицы A примет вид $(4 \quad 3 \quad 1 \quad 1)$. Теперь измененный третий столбец матрицы умножим на 4 и вычтем из первого столбца, затем измененный третий столбец умножим на 3 и вычтем из второго столбца, умножим на 1 и вычтем из четвертого столбца. В результате четвертая строка примет нужный вид $(0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$. Эти преобразования равносильны умножению матрицы A справа на матрицу

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая получается при выполнении тех же действий над столбцами единичной матрицы четвертого порядка. В результате имеем матрицу

$$B = AM_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & -2{,}5 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить матрицу, подобную матрице A, нужно умножить матрицу B слева на матрицу

$$M_3^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая получается из единичной матрицы четвертого порядка заменой в ней третьей строки на четвертую строку матрицы A. Проделав эту операцию, получим матрицу C, подобную матрице A и имеющую четвертую строку нужного вида:

$$C = M_3^{-1} A M_3 =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 & -2{,}5 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & -2{,}5 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ -24 & -15 & 11 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На этом заканчивается первый шаг метода А. М. Данилевского.

Чтобы в матрице C преобразовать третью строку к виду $(0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$, поступим аналогично, а именно, второй столбец разделим на -15. Затем преобразованный столбец умножим на 24 и прибавим к первому столбцу, умножим на -11 и прибавим к третьему столбцу, умножим на -19 и прибавим к четвертому столбцу. Эти действия равносильны умножению матрицы C справа на матрицу

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 24/(-15) & 1/(-15) & 11/15 & 19/15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}6 & -0{,}067 & 0{,}733 & 1{,}267 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая выводится из единичной матрицы четвертого порядка теми же преобразованиями над ее столбцами. В результате получим матрицу

$$C\,M_2 = \begin{pmatrix} -5 & -2{,}5 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ -24 & -15 & 11 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}6 & -0{,}067 & 0{,}733 & 1{,}267 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0{,}167 & -0{,}333 & -0{,}667 \\ 1{,}2 & 0{,}133 & -0{,}467 & -0{,}534 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В заключение второго шага выпишем матрицу

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & -15 & 11 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая получается из единичной матрицы четвертого порядка заменой в ней второй строки на третью строку матрицы C, и вычислим матрицу

$$D = M_2^{-1} C M_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & -15 & 11 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0{,}167 & -0{,}333 & -0{,}667 \\ 1{,}2 & 0{,}133 & -0{,}467 & -0{,}534 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0{,}167 & -0{,}333 & -0{,}667 \\ 6 & 5 & 34 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

подобную матрице A и имеющую третью и четвертую строки нужного вида.

На этом завершается второй шаг метода А. М. Данилевского.

На третьем шаге, чтобы преобразовать вторую строку матрицы D к виду $(1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)$, поступим аналогично, а именно, первый ее столбец разделим на 6. Затем этот измененный столбец умножим на -5 и прибавим ко второму столбцу, умножим на -34 и прибавим к третьему столбцу, умножим на -24 и прибавим к четвертому столбцу. Эти действия равносильны умножению матрицы D справа на матрицу

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1/6 & -5/6 & -34/6 & -24/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0{,}167 & -0{,}833 & -5{,}667 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая получается теми же преобразованиями над столбцами единичной матрицы четвертого порядка. Проделав это, получим матрицу

$$DM_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0{,}167 & -0{,}333 & -0{,}667 \\ 6 & 5 & 34 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}167 & -0{,}833 & -5{,}667 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}167 & 1 & 5{,}333 & 3{,}333 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее выпишем матрицу

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 34 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая получается из единичной матрицы четвертого порядка заменой в ней первой строки на вторую строку матрицы D, и вычислим матрицу

$$F = M_1^{-1} D M_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 34 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}167 & 1 & 5{,}333 & 3{,}333 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 40 & 56 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На этом закончен третий шаг метода А.М. Данилевского.

Матрица F подобна матрице A и имеет нужный вид, т. е. нормальный вид Фробениуса.

Теперь по формуле (1) легко выписать искомый характеристический многочлен матрицы A:

$$\phi(\lambda) = (-1)^4(\lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20)\,.$$

Исходные данные и результаты вычислений, проводимых по методу А.М. Данилевского, обычно размещают в компактной вычислительной таблице (см. [14], с. 407–410).

При развернутом характеристическом многочлене (1) матрицы A характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ этой матрицы определяются как корни нелинейного алгебраического уравнения n-й степени

$$\left| A - \lambda E \right| = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n) = 0$$

с помощью любого из известных приближенных методов, например, метода Ньютона, метода хорд и т. п.

Для найденного собственного значения λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ координаты ему принадлежащего собственного вектора x можно определить из системы $(A - \lambda_i E)\,x = 0$. Можно также воспользоваться результатами вычислений, проведенных при реализации метода А. М. Данилевского, и поступить следующим образом. Пусть $\lambda_i = \lambda$. Найдем собственный вектор y матрицы F, принадлежащий собственному значению λ. По определению, $Fy = \lambda y$. Отсюда $(F - \lambda E)\,y = 0$, или в подробной записи

$$\begin{cases} (p_1 - \lambda)y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n = 0, \\ \qquad y_1 - \lambda y_2 \qquad\qquad = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad y_{n-1} - \lambda y_n = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений однородна, ее определитель равен нулю. Она имеет бесконечное множество решений. С точностью до произвольной постоянной ее решения могут быть найдены следующим образом. Положим $y_n = 1$. Тогда последовательно получим

$$\begin{aligned} &y_{n-1} = \lambda , \\ &y_{n-2} = \lambda^2 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_1 = \lambda^{n-1} . \end{aligned} \tag{3}$$

Первое уравнение системы будет удовлетворяться тождественно, так как

$$\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \ldots - p_n = 0 .$$

Таким образом, собственный вектор матрицы F равен $y = (\lambda^{n-1},\ \lambda^{n-2}, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$.

Обозначим через x собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ.

Поскольку $F = S^{-1} A S$, где $S = M_{n-1} M_{n-2} \ldots M_2 M_1$, то собственный вектор x матрицы A выражается через собственный вектор y матрицы F по формуле $x = S y$, или

$$x = M_{n-1} M_{n-2} \ldots M_2 M_1 y .$$

Это вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$F = S^{-1} A S , \quad F y = \lambda y ,\ S^{-1} A S y = \lambda y , \quad A (S y) = \lambda (S y) .$$

Вычислим $M_1 y =$

$$= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} m_{1k} y_k \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} m_{1k} y_k \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Преобразование M_1 изменяет лишь первую координату вектора y. Аналогично преобразование M_2 изменит лишь вторую координату вектора $M_1 y$. Повторив этот процесс $(n-1)$ раз, получим искомый собственный вектор x матрицы A.

В качестве иллюстрации рассмотрим вычисление собственного вектора матрицы из примера 1, принадлежащего собственному значению $\lambda_1 = 0{,}5858$, используя данные табл. 1.

Собственный вектор y матрицы F, соответствующий λ_1, имеет координаты:

$$y = (-0{,}2010;\ 0{,}3431;\ -0{,}5858;\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

Последовательно найдем

$$M_1 y = (-0{,}9997;\ 0{,}3431;\ -0{,}5858;\ 1)^{\mathrm{T}},$$

$$M_2 M_1 y = (-0{,}9997;\ 2{,}4141;\ -0{,}5858;\ 1)^{\mathrm{T}},$$

$$x^{(1)} = M_3 M_2 M_1 y = (-0{,}9997;\ 2{,}4141;\ -2{,}4147;\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

Метод А. М. Данилевского проходит без осложнений, если все выделенные элементы, на которые осуществляется деление, отличны от нуля.

Рассмотрим вырожденные случаи, когда это требование нарушается.

Пусть на некотором этапе преобразования исходной матрицы A к нормальной форме Фробениуса получена матрица вида

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} & \dots & d_{1,n-1} & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kk} & \dots & d_{k,n-1} & d_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

причем оказалось, что элемент $d_{k,\,k-1}=0$.

Здесь возможны два случая.

1. Если при этом окажется, что хотя бы один из элементов, стоящих левее нулевого, отличен от нуля, т. е. $d_{k\,l}\neq 0$, $l<k-1$, то в матрице D нужно переставить $(k-1)$-й и l-й столбцы и затем $(k-1)$-ю и l-ю строки. Это равносильно умножению матрицы D сначала справа на матрицу P перестановок $(k-1)$-го и l-го столбцов, которая получается такой же перестановкой столбцов единичной матрицы n-го порядка, а затем умножению матрицы DP слева на матрицу P^{-1} перестановок строк с такими же номерами. Поэтому матрица $D_1 = P^{-1}DP$ будет подобна матрице D, и процесс А. М. Данилевского может быть продолжен. При вычислении собственных векторов сделанное преобразование должно быть учтено: в надлежащий момент надо будет переставить $(k-1)$-ю и l-ю компоненты соответствующих векторов.
2. Если же все элементы $d_{k\,l}=0$, $l=1,2,\ldots,k-1$, то матрица D имеет вид

$$D=\begin{pmatrix} D_1 & C \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|cccc}
d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1,\,k-1} & d_{1\,k} & \ldots & d_{1,\,n-1} & d_{1\,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
d_{k-1,\,1} & d_{k-1,\,2} & \ldots & d_{k-1,\,k-1} & d_{k-1,\,k} & \ldots & d_{k-1,\,n-1} & d_{k-1,\,n} \\
\hline
0 & 0 & \ldots & 0 & d_{k\,k} & \ldots & d_{k,\,n-1} & d_{k,\,n-1} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0
\end{array}\right).$$

Следовательно, характеристический многочлен матрицы D равен произведению характеристических полиномов матриц D_1 и D_2, т. е.

$$\left| D - \lambda E \right| = \left| D_1 - \lambda E \right| \cdot \left| D_2 - \lambda E \right|.$$

Матрица D_2 уже имеет нормальную форму Фробениуса, ее характеристический многочлен может быть выписан сразу. К матрице D_1 нужно снова применить метод А. М. Данилевского.

Пример 2. Методом А. М. Данилевского раскрыть характеристический многочлен матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. В третьей строке матрицы A элемент $a_{3,2} = 0$, а стоящий перед ним элемент $a_{3,1} = 2 \neq 0$. Следовательно, мы имеем первый случай вырождения матрицы для метода А. М. Данилевского. Чтобы исправить положение, в матрице A поменяем местами первый столбец со вторым, а затем в полученной матрице переставим первую и вторую строки:

$$A = \underset{\leftrightarrow}{\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{\updownarrow} \to \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} = A_1.$$

Это равносильно умножению матрицы A сначала справа на матрицу перестановок, которая получается из единичной матрицы третьего порядка также перестановкой первого и второго столбцов:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

затем умножению слева полученной матрицы AP на матрицу Q перестановок первой и второй строк матрицы AP, которая всегда оказывается равной матрице P^{-1}. Поэтому матрица $A_1 = QAP = P^{-1}AP$ подобна матрице A и к ней уже можно применить метод А. М. Данилевского.

Чтобы последнюю строку матрицы A_1 привести к виду $(0 \quad 1 \quad 0)$, сначала разделим все элементы ее второго столбца на 2. Затем полученный второй столбец умножим на -7 и прибавим к третьему столбцу. Эти преобразования равносильны умножению матрицы A_1 справа на матрицу

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая получается такими же преобразованиями над столбцами единичной матрицы третьего порядка. В результате получим матрицу

$$A_1M_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & -19 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы эту матрицу преобразовать в матрицу, подобную матрице A, нужно умножить ее слева на матрицу

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая получается из единичной матрицы третьего порядка заменой в ней второй строки на третью строку матрицы A_1. Проделав это, получим матрицу

$$C = M_2^{-1} A_1 M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & -19 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ -4 & 13 & -38 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

подобную матрице A и имеющую третью строку нужного вида.

Чтобы преобразовать вторую строку матрицы C к виду $(1 \quad 0 \quad 0)$, поступим аналогично, а именно, первый столбец матрицы C разделим на -4. Затем полученный столбец умножим на -13 и прибавим ко второму столбцу, умножим на 38 и прибавим к третьему столбцу. Это равносильно умножению матрицы C справа на матрицу

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1/-4 & 13/4 & 38/-4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая получается из единичной матрицы третьего порядка такими же преобразованиями над ее столбцами. В результате получим матрицу

$$C M_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ -4 & 13 & -38 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/-4 & 13/4 & 38/-4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/4 & 61/4 & -162/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее выпишем матрицу

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 13 & -38 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая получается из единичной матрицы третьего порядка заменой в ней первой строки на вторую строку матрицы C, и вычислим матрицу

$$D = M_1^{-1}CM_1 = \begin{pmatrix} -4 & 13 & -38 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5/4 & 61/4 & -162/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -99 & 162 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица уже нужного вида и подобная матрице A.

Теперь по формуле (1) запишем характеристический многочлен матрицы A:

$$\phi(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162).$$

Пример 3. Методом А. М. Данилевского раскрыть характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Чтобы последнюю строку $(1 \quad -1 \quad 1)$ матрицы A привести к виду $(0 \quad 1 \quad 0)$, сначала разделим на (-1) все элементы второго столбца матрицы. Тогда третья строка матрицы A примет вид $(1 \quad 1 \quad 1)$. Теперь измененный второй столбец вычтем из первого столбца, а затем из третьего столбца. В результате третья строка матрицы примет нужный вид $(0 \quad 1 \quad 0)$. Эти преобразования равносильны умножению матрицы A справа на матрицу

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая получается теми же преобразованиями над столбцами единичной матрицы третьего порядка. В результате получим матрицу

$$B = AM_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы эту матрицу преобразовать в подобную матрице A, нужно умножить матрицу B слева на матрицу

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая получается из единичной матрицы третьего порядка заменой в ней второй строки на третью строку матрицы A. Проделав эту операцию, получим матрицу C, подобную матрице A:

$$C = M_2^{-1} A M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Здесь имеем вырожденный случай, когда матрица C распалась на два блока, причем каждый из них уже приведен к нужному виду. Поэтому по формуле (1) для первого блока имеем

$$\phi_1(\lambda) = (-1)(\lambda - 3),$$

а для второго блока:

$$\phi_2(\lambda) = (-1)^2(\lambda^2 - 3\lambda + 2).$$

В итоге для матрицы A получим

$$\phi(\lambda) = \phi_1(\lambda) \cdot \phi_2(\lambda) = (-1)^3(\lambda - 3)(\lambda^2 - 3\lambda + 2).$$

5.3.3. *Метод вращений*

При решении полной проблемы собственных значений, как правило, первый шаг состоит в преобразовании исходной матрицы к подобному виду $S^{-1}AS$, содержащему как можно большее количество нулевых элементов по сравнению с A.

Покажем, следуя [32, 34], что любую симметричную матрицу A можно привести к трехдиагональному виду посредством цепочки вращений, т. е. цепочки преобразований подобия с матрицами вида

$$
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & & & \cdot & & & & \cdot & & & \\
& \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & & \\
& & 1 & \cdot & & & & \cdot & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & c & \cdots & \cdots & \cdots & -s & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & \cdot & 1 & & & \cdot & & & \\
& & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \\
& & & \cdot & & & 1 & \cdot & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & s & \cdots & \cdots & \cdots & c & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & \cdot & & & & \cdot & 1 & & \\
& & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot & \\
& & & \cdot & & & & \cdot & & & 1
\end{pmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} & & & i & & & & j & & & \end{matrix} &
\end{array},
$$

при $c^2 + s^2 = 1$.

Последовательность матриц строится по правилу

$$A^{(k+1)} = T_{ij}^{\mathrm{T}} A^{(k)} T_{ij}, \quad A^{(0)} = A, \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{1}$$

Процесс приведения симметричной матрицы к трехдиагональному виду включает следующие этапы:

- за счет преобразований вращения аннулируются по очереди элементы первой строки, начиная с третьего;
- аннулируются элементы второй строки, начиная с четвертого. При этом элементы первой строки больше меняться не будут;
- и так далее; каждое последующее преобразование не будет изменять ранее аннулированных элементов.

Таким образом, самое большее через $(n-1)(n-2)/2$ преобразований будет осуществлен переход от данной симметричной матрицы A к трехдиагональной матрице S.

Рассмотрим один шаг процесса. Матрица $A^{(k+1)}$ отличается от подобной ей матрицы $A^{(k)}$ только четырьмя элементами $a_{ii}^{(k+1)}$, $a_{ij}^{(k+1)}$, $a_{ji}^{(k+1)}$, $a_{jj}^{(k+1)}$. Их вычисление происходит в следующем порядке. Сначала находится матрица $B = A^{(k)} T_{ij}$. Все ее столбцы совпадают со столбцами матрицы A, за исключением i-го и j-го, которые получаются из соответствующих столбцов матрицы $A^{(k)}$ по формулам

$$\begin{aligned} B_i &= c\,A_i^{(k)} + s\,A_j^{(k)}, \\ B_j &= -\,s\,A_i^{(k)} + c\,A_j^{(k)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Затем строится матрица $A^{(k+1)}$, строки которой совпадают со строками матрицы B, за исключением i-й и j-й, которые получаются из соответствующих строк матрицы B по аналогичным формулам

$$\begin{aligned} A_i^{(k+1)} &= c\,B_i + s\,B_j, \\ A_j^{(k+1)} &= -\,s\,B_i + c\,B_j. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть $1 < i < j$. Покажем, что c и s можно выбрать так, чтобы $a_{i-1,j}^{(k+1)} = 0$. Действительно, $a_{i-1,j}^{(k+1)} = b_{i-1,j} = -\,s\,a_{i-1,i}^{(k)} + c\,a_{i-1,j}^{(k)}$, т. е. достаточно взять

$$\frac{s}{c} = \frac{a_{i-1,j}^{(k)}}{a_{i-1,i}^{(k)}},$$

чтобы получить $a_{i-1,j}^{(k+1)} = 0$. Учитывая условие $c^2 + s^2 = 1$, получим

$$s = \frac{a_{i-1,j}^{(k)}}{\sqrt{\left[a_{i-1,i}^{(k)}\right]^2 + \left[a_{i-1,j}^{(k)}\right]^2}}, \quad c = \frac{a_{i-1,i}^{(k)}}{\sqrt{\left[a_{i-1,i}^{(k)}\right]^2 + \left[a_{i-1,j}^{(k)}\right]^2}}.$$

Следовательно, элементы первой строки, начиная с третьего, аннулируются по очереди посредством T_{23}, T_{24}, …, T_{2n}; элементы второй строки, начиная с четвертого, аннулируются за счет преобразований с матрицами T_{34}, …, T_{3n} и т. д.

Описанной процедуре подвергается лишь половина всех недиагональных элементов матриц $A^{(k)}$; остальным элементам приписываются принудительные значения из соображений симметрии. В результате получим симметричную трехдиагональную матрицу

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n,n-1} & s_{nn} \end{pmatrix},$$

причем $s_{i,i+1} = s_{i+1,i}$. После того как построена трехдиагональная матрица S, подобная исходной матрице A, собственные значения могут быть найдены следующим способом. Обозначим главный минор порядка r матрицы $S - \lambda E$ через $\phi_r(\lambda)$ и определим $\phi_0(\lambda)$ равным единице. Тогда, разлагая $\left| S_r - \lambda E \right|$ по элементам последнего r-го столбца, получим рекуррентные формулы, которые позволят определить с точностью до знака характеристический многочлен матрицы S:

$$\phi_0(\lambda) = 1, \quad \phi_1(\lambda) = \lambda - s_{11},$$

$$\phi_i(\lambda) = (\lambda - s_{ii})\phi_{i-1}(\lambda) - s_{i-1,i}^2\,\phi_{i-2}(\lambda), \;\; (i = 2, \dots, n-1),$$

$$\phi_n(\lambda) = (-1)^n \phi(\lambda). \tag{4}$$

Коэффициенты $p_j^{(i)}$ полиномов $\phi_i(\lambda)$ удобно вычислять согласно схеме

ϕ_0	ϕ_1	$\cdots$	ϕ_{n-1}	ϕ_n	
				1	λ^n
			1	$p_{n-1}^{(n)}$	λ^{n-1}
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	1	$\cdots$	$p_1^{(n-1)}$	$p_1^{(n)}$	λ
1	$p_0^{(1)}$	$\cdots$	$p_0^{(n-1)}$	$p_0^{(n)}$	λ^0

Эта схема заполняется слева направо по рекуррентным формулам

$$
\begin{aligned}
& p_0^{(1)} = -s_{11}\,, \\
& p_0^{(i)} = -s_{i-1,i}^2\, p_0^{(i-2)} - s_{ii}\, p_0^{(i-1)}\,, \\
& p_j^{(i)} = -s_{i-1,i}^2\, p_j^{(i-2)} - s_{ii}\, p_j^{(i-1)} + p_{j-1}^{(i-1)}, \quad (j \ge 1, i \ge 2)\,.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Нахождение корней характеристического уравнения $\phi(\lambda) = 0$ осуществляется одним из известных итерационных методов решения нелинейных алгебраических уравнений (дихотомии, касательных, секущих, комбинированным и т. п.).

После определения корней характеристического уравнения компоненты собственных векторов $y^{(i)}$ матрицы S вычисляются посредством решения системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей

$$
\begin{aligned}
(s_{11} - \lambda_i) y_1 + \quad s_{12} y_2 \quad &= 0\,, \\
s_{12} y_1 + (s_{22} - \lambda_i) y_2 + s_{23} y_3 \quad &= 0\,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
s_{n-1,n} y_{n-1} + (s_{nn} - \lambda_i) y_n &= 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Задав произвольно первую компоненту собственного вектора, например $y_1 = 1$, последовательно из первых $n-1$ уравнений найдем y_2, …, y_n. Последнее уравнение можно использовать для контроля.

Для перехода от собственных векторов матрицы S к собственным векторам матрицы A нужно использовать соотношение

$$S = (T_{13} \dots T_{n-2,n})^{\mathrm{T}} A\, (T_{13} \dots T_{n-2,n})\,.$$

Пусть $y^{(i)}$ — собственный вектор матрицы P по λ_i, т. е. пусть $Py^{(i)} = \lambda_i\, y^{(i)}$. Тогда

$$(T_{13} \dots T_{n-2,n})^{\mathrm{T}} A\, (T_{13} \dots T_{n-2,n})\, y^{(i)} = \lambda_i\, y^{(i)}\,.$$

Отсюда следует равенство

$$A (T_{13} \dots T_{n-2,n})\, y^{(i)} = \lambda_i\, (T_{13} \dots T_{n-2,n})\, y^{(i)},$$

которое означает, что $x^{(i)} = T_{13} \dots T_{n-2,n}\, y^{(i)}$ является собственным вектором матрицы A по λ_i, т. е. вектор $x^{(i)}$ получается из вектора $y^{(i)}$ посредством цепочки умножений на матрицы вращения T_{kl}. При каждом отдельном умножении будут меняться только две компоненты предыдущего вектора, k-я и l-я, по формулам

$$y_k^{(m+1)} = c\, y_k^{(m)} - s\, y_l^{(m)},$$

$$y_l^{(m+1)} = s\, y_k^{(m)} + c\, y_l^{(m)}.$$

Предварительное перемножение матриц вращения потребовало бы большего числа действий.

На приведение матрицы к трехдиагональной форме и нахождение всех ее собственных значений в прямом методе вращений требуется $2n^3 + 50n^2$. Для нахождения каждого собственного вектора надо затратить еще $3n^2$ действий.

Прямой метод вращений устойчив, если ошибки округления не нарушают ортогональности матриц вращения, что может иметь место, например, если из-за погрешностей счета окажется, что $c^2 + s^2 \neq 1$.

Пример. Построить характеристический многочлен для симметричной матрицы A, преобразовав ее посредством вращений к трехдиагональному виду. Определить ее собственные значения и принадлежащие им собственные векторы.

$$A = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,42 & 1,00 & 0,32 & 0,44 \\ 0,54 & 0,32 & 1,00 & 0,22 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1,00 \end{pmatrix}.$$

Решение. Процесс последовательного приведения исходной симметричной матрицы к трехдиагональному виду представлен в табл. 1.

В первой части табл. 1 расположены элементы данной матрицы A.

Чтобы аннулировать элемент a_{13}, выполним вращение с помощью матрицы T_{23}. Преобразованные элементы с индексами 22, 23, 32, 33 выписаны в надлежащих местах II части табл. 1.

Таблица 1

I	1.00 0.42 0.54 0.66	0.42 1.00 0.32 0.44	0.54 0.32 1.00 0.22	0.66 0.44 0.22 1.00
II		0.8665 0.9858	– 0.5929 0.3613	
III	1.00 0.6841 0 0.66	0.6841 1.3102 – 0.0788 0.4438	0 – 0.0788 0.6898 – 0.2122	0.66 0.4438 – 0.2122 1 00
IV		1.2510 1.0137		– 0.5903 0.4115
V	1.00 0.9506 0.00 0.00	0.9506 1.6041 – 0.2041 – 0.1391	0.00 – 0.2041 0.6898 – 0.0981	0.00 – 0.1391 – 0.0981 0.7060
VI			0.5148 0.3166	– 0.4695 0.6386
VII	1.00 0.9506 0.00 0.00	0.9506 1.6041 – 0.2469 0.00	0.00 – 0.2469 0.6037 – 0.0283	0.00 0.00 – 0.0283 0.7922

В третьей части таблицы расположены элементы матрицы, подобной данной, с $a_{13} = 0$. Представленная матрица заполнена с учетом симметрии.

Во втором и четвертом столбцах IV части помещены элементы с индексами 22, 24, 42, 44, полученные в результате вращения с помощью матрицы T_{24}.

Часть V содержит элементы подобной матрицы с четырьмя равными нулю элементами.

Посредством матрицы T_{34} преобразуем элементы двух строк и двух столбцов с номерами 3 и 4 и разместим их на соответствующих местах в части VI.

Часть VII содержит результирующую трехдиагональную матрицу, подобную исходной.

На следующем этапе для приведенной матрицы в соответствии с формулами (4), (5) вычислим коэффициенты характеристического многочлена и разместим результаты в табл. 2.

Таблица 2

$\phi_0(\lambda)$	$\phi_1(\lambda)$	$\phi_2(\lambda)$	$\phi_3(\lambda)$	$\phi_4(\lambda)$	
				1	λ^4
			1	– 4,0000	λ^3
		1	– 3,2078	4,7520	λ^2
	1	– 2,6041	2,2117	– 2,1119	λ
1	– 1	0,7005	– 0,3619	0,2862	λ^0

Искомый характеристический многочлен имеет вид

$$\phi(\lambda) = \lambda^4 - 4,0000\,\lambda^3 + 4,7520\,\lambda^2 - 2,1119\,\lambda + 0,2862\,.$$

Корни характеристического уравнения $\phi(\lambda) = 0$ равны $\lambda_1 = 2,3227$, $\lambda_2 = 0,7968$, $\lambda_3 = 0,6381$, $\lambda_4 = 0,2423$. Определим собственный вектор, принадлежащий собственному значению $\lambda_1 = 2.3227$. Для этого найдем сначала соответствующий собственный вектор матрицы S как решение системы

$$\begin{cases} (1-\lambda_1)\,y_1 + 0,9506\,y_2 = 0\,, \\ 0,9506\,y_1 + (1,6041-\lambda_1)\,y_2 - 0,2469\,y_3 = 0\,, \\ -0,2469\,y_2 + (0,6037-\lambda_1)\,y_3 - 0,0283\,y_4 = 0\,, \\ -0,0283\,y_3 + (0,7922-\lambda_1)\,y_4 = 0\,. \end{cases}$$

В результате получим

$$y = (\,1 \quad 1,3915 \quad -0,1999 \quad 0,0037\,)^{\mathrm{T}}.$$

Далее вычисляем последовательно

$$T_{34}\, y = (1 \quad 1{,}3915 \quad -0{,}1673 \quad -0{,}1095)^{\mathrm{T}},$$

$$T_{24}\, T_{34}\, y = (1 \quad 1{,}0775 \quad -0{,}1673 \quad 0{,}8873)^{\mathrm{T}},$$

$$T_{23}\, T_{24}\, T_{34}\, y = (1 \quad 0{,}7936 \quad 0{,}7478 \quad 0{,}8873)^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом, собственный вектор x матрицы A, соответствующий λ_1, равен

$$x = (1 \quad 0{,}7936 \quad 0{,}7478 \quad 0{,}8873)^{\mathrm{T}}.$$

5.3.4. *Метод Леверрье–Фаддеева*

Этот метод раскрытия характеристического определителя основан на применении формул для сумм степеней корней многочлена, известных под названием формул Ньютона. Если характеристический полином матрицы A порядка n

$$\phi(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \ldots - p_n) \qquad (1)$$

имеет корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, среди которых могут быть кратные, то собственные значения матрицы A^k равны $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$. Следовательно, след матрицы A^k равен

$$s_k = Sp\, A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k . \qquad (2)$$

Если вычислить s_k при $k = 1, 2, \ldots, n$, то коэффициенты p_k характеристического многочлена (1) могут быть получены из решения рекуррентной системы

$$k\, p_k = s_k - p_1 s_{k-1} - p_2 s_{k-2} - \ldots - p_{k-1} s_1, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \quad (3)$$

Соотношения (3) называют *формулами Ньютона*. Отсюда

$$p_1 = s_1,\ p_2 = \frac{1}{2}(s_2 - p_1 s_1),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

$$p_n = \frac{1}{n}(s_n - p_1 s_{n-1} - p_2 s_{n-2} - \ldots - p_{n-1} s_1).$$

Таким образом, вычислительная процедура метода Леверрье состоит в последовательном вычислении степеней данной матрицы A^k при $k=1,2,\ldots,n$, затем в вычислении их следов s_k — сумм элементов главных диагоналей матриц A^k, и в определении искомых коэффициентов p_i $(i=1,2,\ldots,n)$ по формулам (4).

Достоинство метода Леверрье — в его универсальности, отсутствии исключительных случаев. Однако метод Леверрье гораздо более трудоемкий, чем ранее изложенные методы, поскольку приходится подсчитывать n степеней матрицы A. Число требуемых операций умножения равно

$$C(n)=\frac{1}{2}(n-1)(2n^3-2n^2+n+2).$$

Д. К. Фаддеев предложил усовершенствование метода Леверрье, которое упрощает вычисление коэффициентов характеристического многочлена данной матрицы и позволяет найти ее собственные векторы. Суть видоизменения состоит в следующем. Вместо последовательного вычисления A, A^2, …, A^n будем строить матрицы A_1, A_2, …, A_n по следующим формулам:

$$\begin{array}{lll}
A_1=A, & Sp\,A_1=q_1, & B_1=A_1-q_1E, \\
A_2=AB_1, & \dfrac{Sp\,A_2}{2}=q_2, & B_2=A_2-q_2E, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
A_{n-1}=AB_{n-2}, & \dfrac{Sp\,A_{n-1}}{n-1}=q_{n-1}, & B_{n-1}=A_{n-1}-q_{n-1}E, \\
A_n=AB_{n-1}, & \dfrac{Sp\,A_n}{n}=q_n, & B_n=A_n-q_nE.
\end{array} \tag{5}$$

Докажем, что

$$q_1=p_1,\ q_2=p_2,\ \ldots,\ q_n=p_n. \tag{6}$$

Воспользуемся методом математической индукции. С помощью первой из формул (4) легко убедиться, что

$$q_1=Sp\,A=p_1.$$

Предположим, что $q_2 = p_2, \ldots, q_{k-1} = p_{k-1}$.

Докажем, что $q_k = p_k$. С учетом формул (5) запишем цепочку равенств

$$A_k = A^k - q_1 A^{k-1} - \ldots - q_{k-1} A = A^k - p_1 A^{k-1} - \ldots - p_{k-1} A .$$

Найдем след матриц в обеих частях последнего равенства

$$Sp\, A_k = Sp\, A^k - p_1\, Sp\, A^{k-1} - \ldots - p_{k-1}\, Sp\, A =$$

$$= s_k - p_1 s_{k-1} - \ldots - p_{k-1} s_1 .$$

Так как из (5) следует $Sp\, A_k = k\, q_k$, а в силу формул Ньютона (4) $s_k - p_1 s_{k-1} - p_2 s_{k-2} - \ldots - p_{k-1} s_1 = k\, p_k$, то $k\, q_k = k\, p_k$ и, следовательно, $q_k = p_k$.

Число операций умножения, необходимых для получения коэффициентов характеристического многочлена матрицы по формулам (6), равно

$$C(n) = (n-1)\, n^3 .$$

Пусть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A уже найдены, причем они являются различными. Рассмотрим способ определения собственных векторов этой матрицы. Построим матрицы

$$Q_k = \lambda_k^{n-1} E + \lambda_k^{n-2} B_1 + \ldots + B_{n-1} ,$$

где B_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — матрицы, полученные в процессе вычисления коэффициентов p_i. Покажем, что *каждый* столбец матрицы Q_k представляет собой собственный вектор, принадлежащий собственному значению λ_k. Действительно,

$$(\lambda_k E - A)\, Q_k = (\lambda_k E - A)(\lambda_k^{n-1} E + \lambda_k^{n-2} B_1 + \ldots + B_{n-1}) =$$

$$= \lambda_k^n E + \lambda_k^{n-1}(B_1 - A) + \lambda_k^{n-2}(B_2 - A B_1) + \ldots - A B_{n-1} =$$

$$= \lambda_k^n E - p_1 \lambda_k^{n-1} E - p_2 \lambda_k^{n-2} E - \ldots - p_n E = 0 .$$

Отсюда следует, что $(\lambda_k E - A)u = 0$, где u — любой столбец матрицы Q_k, т. е. $\lambda_k u = Au$. Это равенство показывает, что u есть собственный вектор матрицы A.

Замечание 1. Вычисляя собственные векторы по методу Д. К. Фаддеева, следует находить не все столбцы матрицы Q_k, а ограничиться вычислением одного столбца, элементы которого получаются в виде линейной комбинации одноименных столбцов матриц B_i.

Замечание 2. Для вычисления столбца u матрицы Q_k удобно пользоваться рекуррентной формулой

$$u_0 = e; \qquad u_i = \lambda_k u_{i-1} + b_i, \tag{7}$$

где b_i — выбранный столбец матрицы B_i, а e — одноименный столбец единичной матрицы. Тогда

$$u = u_{n-1}.$$

Пример. Используя метод Леверрье–Фаддеева, определить коэффициенты характеристического многочлена матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2,2 & 2 & 0,5 & 2 \\ 1 & 1,3 & 2 & 1 \\ 0,5 & 2 & 0,5 & 1,6 \\ 2 & 1 & 1,6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Коэффициенты характеристического многочлена $\phi(\lambda) = \lambda^4 - p_1\lambda^3 - p_2\lambda^2 - p_3\lambda - p_4$ матрицы A определяются при помощи матриц, построенных по формулам (5). Эти вычисления расположены в табл. 1.

По полученным результатам выпишем характеристический многочлен

$$\phi(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 - 0,2\lambda^2 + 12,735\lambda - 2,7616.$$

Корни характеристического уравнения $\phi(\lambda) = 0$ образуют спектр матрицы A. Собственными значениями являются числа

$$\lambda_1 = 5,652; \quad \lambda_2 = 1,545; \quad \lambda_3 = -1,420; \qquad \lambda_4 = 0,2226.$$

Таблица 1

A_i				B_i			
2,2	1	0,5	2	– 3,8	1	0,5	2
1	1,3	2	2	1	– 4,7	2	1
0,5	2	0,5	1,6	0,5	2	– 5,5	1,6
2	1	1,6	2	2	1	1,6	– 4
$p_1 = 6$							
– 3,11				– 3,31	0,5	3,55	– 1,8
	– 0,11			0,5	– 0,31	– 6,3	2,5
		4,06		3,55	– 6,3	3,86	– 2,6
			– 0,44	– 1,8	2,5	– 2,6	– 0,64
$p_2 = 0,4:2 = 0,2$							
– 8,61				4,128	2,64	–1,76	– 4,04
	– 10,0			2,64	2,73	0,48	– 4,39
		– 13,1		– 1,76	0,48	– 0,32	1,776
			– 6,54	– 4,04	– 4,39	1,776	6,195
$p_3 = -38,205:3 = -12,735$							
2,762							
	2,762						
		2,762					
			2,762				
$p_4 = 2,7616$							

Собственный вектор x_i, соответствующий собственному значению λ_i, определяется по формуле

$$x_i = \lambda_i^3 e + \lambda_i^2 b_1 + \lambda_i b_2 + b_3 .$$

В соответствии с формулами (7) последовательно вычисляем векторы

$$u_{0i} = e; \quad u_{1i} = \lambda_i u_{0i} + b_1; \; u_{2i} = \lambda_i u_{1i} + b_2;$$

$$u_{3i} = \lambda_i u_{2i} + b_3; \; x_i = u_{3i} .$$

Результаты этих расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2

λ_i	u_{0i}	u_{1i}	u_{2i}	$x_i = u_{3i}$	$\tilde{x}_i$
5,652	1	1,852	7,1575	45,5892	0,897
	0	1	6,152	37,4111	0,763
	0	0,5	6,3760	34,2772	0,690
	0	2	9,504	49,6766	1
1,545	1	–2,255	– 6,7940	– 6,3687	1
	0	1	2,045	5,7995	– 0,911
	0	0,5	4,3225	4,9183	– 0,772
	0	2	1,290	– 2,0470	0,321
– 1,420	0	1	– 0,92	3,9464	0,293
	1	– 6,12	8,3804	– 9,1682	– 0,681
	0	2	– 9,14	13,4588	1
	0	1	1,08	– 5,9236	– 0,440
0,2226	0	1	0,7226	2,8009	– 0,740
	1	– 4,4774	– 1,3067	2,4411	– 0,645
	0	2	– 5,8548	– 0,8233	0,218
	0	1	2,7226	– 3,7839	1

Предпоследний столбец табл. 2 содержит компоненты собственных векторов x_i, а последний столбец — компоненты собственных векторов $\tilde{x}_i$ после нормирования.

5.3.5. *Метод интерполяции*

С помощью методов, рассмотренных в предыдущих параграфах, решаются задачи представления характеристического определителя в форме многочлена. Метод интерполяции применим к развертыванию определителя более общего вида

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} f_{11}(\lambda) & \dots & f_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(\lambda) & \dots & f_{nn}(\lambda) \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

где $f_{ij}(\lambda)$ — заданный целый полином от λ.

Сущность метода заключается в следующем. Пусть известно, что $F(\lambda)$ есть полином, степень которого не превосходит числа k. Такой полином вполне определяется своими значениями в $(k+1)$-й точке $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, выбираемых произвольно, и может быть восстановлен по таким значениям при помощи той или иной интерполяционной формулы.

Воспользуемся интерполяционной формулой А. А. Маркова, полученной из первой интерполяционной формулы Ньютона для равноотстоящих узлов. Выберем равноотстоящие значения λ_i, $i = 0, 1, \dots, k$, и вычислим $(k+1)$ значение определителя

$$F(\lambda_i) = \begin{vmatrix} f_{11}(\lambda_i) & \dots & f_{1n}(\lambda_i) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(\lambda_i) & \dots & f_{nn}(\lambda_i) \end{vmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, k. \qquad (2)$$

Вычисление определителей можно осуществить, например, с помощью одного из мультипликативных разложений соответствующих матриц.

Для полученных значений определителя составим таблицу разностей $\Delta^i F(\lambda_j)$, рассчитываемых по рекуррентной формуле

$$\Delta^i F(\lambda_j) = \Delta^{i-1} F(\lambda_{j+1}) - \Delta^{i-1} F(\lambda_j).$$

Пусть $\lambda_i = i$, $i = 0, 1, \dots, k$. Первая интерполяционная формула Ньютона в этом случае дает выражение

$$F(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\Delta^i F(0)}{i\,!} \lambda(\lambda - 1)\dots(\lambda - i + 1) + R_k(\lambda). \qquad (3)$$

Положим

$$\frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-i+1)}{i\,!} = \sum_{m=1}^{i} c_{mi}\, \lambda^m, \quad i = 1, 2, \dots \qquad (4)$$

Тогда формула (3) может быть преобразована к виду

$$F(\lambda)=\sum_{i=0}^{k}\Delta^{i}F(0)\left(\sum_{m=1}^{i}c_{mi}\,\lambda^{m}\right)=$$

$$=F(0)+\sum_{m=1}^{k}\left(\sum_{i=m}^{k}c_{mi}\,\Delta^{i}F(0)\right)\lambda^{m}\,. \qquad (5)$$

Формула (5) называется **интерполяционной формулой А. А. Маркова**.

Метод интерполяции весьма трудоемок. Общее число арифметических операций, требуемых для получения коэффициентов характеристического многочлена, равное

$$C(n)=\frac{n+1}{3}(n-1)(n^{2}+n+3)+\frac{n(n+1)}{2}\,,$$

значительно превышает число операций, нужных для получения тех же коэффициентов по методу А. М. Данилевского или по методу А. Н. Крылова. Кроме того, метод интерполяции не позволяет упростить задачу нахождения собственных векторов матриц. Тем не менее этот метод удобен своей простой вычислительной схемой и применимостью к развертыванию определителей более общего вида, чем $\phi(\lambda)=\left|A-\lambda E\right|$.

Пример. Методом интерполяции раскрыть характеристический определитель

$$\phi(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1-\lambda & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1-\lambda & 2\\ 4 & 3 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}.$$

Решение. Так как $\phi(\lambda)$ есть полином четвертой степени, выберем $\lambda_i=i$, $i=0,1,2,3,4$ и последовательно вычислим $\phi(\lambda_i)$:

$$\phi(0)=-20\,,\ \ \phi(1)=-119\,,\ \ \phi(2)=-308\,,$$

$$\phi(3)=-575\,,\ \phi(4)=-884\,.$$

Конечные разности $\Delta^{i}\phi(\lambda)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

λ	$\phi(\lambda)$	$\Delta\phi(\lambda)$	$\Delta^2\phi(\lambda)$	$\Delta^3\phi(\lambda)$	$\Delta^4\phi(\lambda)$
0	$\underline{\underline{-20}}$	$\underline{\underline{-99}}$	$\underline{\underline{-90}}$	$\underline{\underline{12}}$	$\underline{\underline{24}}$
1	– 119	– 189	– 78	36	
2	– 308	– 267	– 42		
3	– 575	– 309			
4	– 884				

Так как

$$\frac{\lambda}{1!}=\lambda; \quad \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}=\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda}{2}; \quad \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}=\frac{\lambda^3}{6}-\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda}{3};$$

$$\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{4!}=\frac{\lambda^4}{24}-\frac{\lambda^3}{4}+\frac{11\lambda^2}{24}-\frac{\lambda}{4},$$

то по формуле (4) получаем

$$c_{11}=1;$$

$$c_{22}=\frac{1}{2};\ c_{12}=-\frac{1}{2};$$

$$c_{33}=\frac{1}{6};\ c_{23}=-\frac{1}{2};\ c_{13}=\frac{1}{3};$$

$$c_{44}=\frac{1}{24};\ c_{34}=-\frac{1}{4};\ c_{24}=\frac{11}{24};\ c_{14}=-\frac{1}{4}.$$

Применим формулу А. А. Маркова (5) и запишем характеристический многочлен

$$\phi(\lambda)=\phi(0)+[c_{11}\Delta\phi(0)+c_{12}\Delta^2\phi(0)+c_{13}\Delta^3\phi(0)+$$

$$+c_{14}\Delta^4\phi(0)]\lambda+[c_{22}\Delta^2\phi(0)+c_{23}\Delta^3\phi(0)+c_{24}\Delta^4\phi(0)]\lambda^2+$$

$$+[c_{33}\Delta^3\phi(0)+c_{34}\Delta^4\phi(0)]\lambda^3+c_{44}\Delta^4\phi(0)\lambda^4=$$

$$= -20 + \left(-99 \cdot 1 + 90 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{1}{3} - 24 \cdot \frac{1}{4}\right)\lambda +$$

$$+\left(-90 \cdot \frac{1}{2} - 12 \cdot \frac{1}{2} + 24 \cdot \frac{11}{24}\right)\lambda^2 + \left(12 \cdot \frac{1}{6} - 24 \cdot \frac{1}{4}\right)\lambda^3 + 24 \cdot \frac{1}{24}\lambda^4 =$$

$$= -20 - 56\lambda - 40\lambda^2 - 4\lambda^3 + \lambda^4.$$

5.4. Итерационные методы решения проблемы собственных значений

5.4.1. *Метод итераций*

Для одновременного отыскания собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы A наиболее простым является **метод итераций**. Известно, что собственные значения симметричной матрицы A являются действительными числами, а собственные векторы, принадлежащие собственным значениям λ_i и λ_j при $i \neq j$, можно выбирать ортогональными друг другу. В силу определения собственного вектора $X_1 = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})^{\text{т}}$, принадлежащего собственному значению λ_1, его координаты находятся из системы $AX_1 = \lambda_1 X_1$, т. е. из системы

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \ldots + a_{1n}x_{n1} = \lambda_1 x_{11}, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + \ldots + a_{2n}x_{n1} = \lambda_1 x_{21}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + \ldots + a_{nn}x_{n1} = \lambda_1 x_{n1}. \end{cases} \tag{1}$$

Так как координаты собственного вектора X_1 можно находить с точностью до постоянного множителя, то одну из них, например x_{n1}, примем равной единице и систему (1) перепишем в виде

$$\begin{cases} x_{11} = \dfrac{1}{\lambda_1}(a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \ldots + a_{1,\,n-1}x_{n-1,\,1} + a_{1n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1,\,1} = \dfrac{1}{\lambda_1}(a_{n-1,\,1}x_{11} + a_{n-1,\,2}x_{21} + \ldots + a_{n-1,\,n-1}x_{n-1,\,1} + a_{n-1,\,n}) \\ \lambda_1 = \dfrac{1}{x_{n1}}(a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + \ldots + a_{n,\,n-1}x_{n-1,\,1} + a_{nn}). \end{cases} \qquad (2)$$

Эту систему естественно решать методом итераций или методом Зейделя, выбрав подходящим образом нулевые приближения $x_{11}^{(0)}, x_{21}^{(0)}, \ldots, x_{n1}^{(0)}$, $\lambda_1^{(0)}$. На практике обычно за такие приближения принимают соответствующие свободные члены уравнений системы (2). Через некоторое число k шагов итерационного процесса будет найдено собственное значение $\lambda_1 \approx \lambda_1^{(k)}$ и координаты соответствующего ему вектора $X_1 \approx (x_{11}^{(k)}, x_{21}^{(k)}, \ldots, x_{n1}^{(k)})^{\mathrm{T}}$.

Второе собственное значение λ_2 и координаты соответствующего ему собственного вектора $X_2 = (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2})^{\mathrm{T}}$ ищут из системы $AX_2 = \lambda_2 X_2$, т. е. из системы

$$\begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \ldots + a_{1n}x_{n2} = \lambda_2 x_{12}, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{2n}x_{n2} = \lambda_2 x_{22}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{12} + a_{n2}x_{22} + \ldots + a_{nn}x_{n2} = \lambda_2 x_{n2}. \end{cases} \qquad (3)$$

При условии ортогональности векторов X_1 и X_2, т. е. при условии

$$(X_1, X_2) = x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22} + \ldots + x_{n1}x_{n2} = 0\,. \qquad (4)$$

Выразив x_{n2} из условия (4) через остальные координаты вектора X_2 и подставив это выражение в систему (3), придем к системе, которую можно записать в виде

$$\begin{cases} x_{12} = \dfrac{1}{\lambda_2}(b_{11} x_{12} + \ldots + b_{1,n-1} x_{n-1,2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-2,2} = \dfrac{1}{\lambda_2}(b_{n-2,1} x_{12} + \ldots + b_{n-2,n-1} x_{n-1,2}), \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{x_{n-1,2}}(b_{n-1,1} x_{12} + \ldots + a_{n-1,n-1} x_{n-1,2}). \end{cases} \tag{5}$$

Как и в предыдущем случае, принимают $x_{n-1,2} = 1$ и полученную систему (5) решают методом итераций или методом Зейделя, а значение координаты x_{n2} каждый раз находят из соотношения (4). В результате получают собственное значение λ_2 и соответствующий ему собственный вектор X_2.

Собственное значение λ_3 и координаты соответствующего ему собственного вектора $X_3 = (x_{13}, x_{23}, \ldots, x_{n3})^{\mathrm{T}}$ таким же способом находят из системы $AX_3 = \lambda_3 X_3$, т. е. из системы

$$\begin{cases} a_{11} x_{13} + a_{12} x_{23} + \ldots + a_{1n} x_{n3} = \lambda_3 x_{13}, \\ a_{21} x_{13} + a_{22} x_{23} + \ldots + a_{2n} x_{n3} = \lambda_3 x_{23}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} x_{13} + a_{n2} x_{23} + \ldots + a_{nn} x_{n3} = \lambda_3 x_{n3} \end{cases}$$

при условиях $(X_1, X_3) = 0$, $(X_2, X_3) = 0$.

Аналогично поступают и при отыскании следующих собственных значений и собственных векторов. Координаты последнего собственного вектора X_n определятся из условий

$$(X_1, X_n) = 0,\ (X_2, X_n) = 0,\ \ldots\ (X_{n-1}, X_n) = 0,$$

в которых можно положить координату $x_{nn} = 1$.

Последнее собственное значение λ_n можно найти с помощью любого из следующих соотношений:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}, \tag{6}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = |A|, \tag{7}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{x_{nn}} (a_{n1} x_{1n} + a_{n2} x_{2n} + \ldots + a_{nn} x_{nn}). \tag{8}$$

Пример. Методом итераций найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала найдем собственное значение λ_1 и собственный вектор $X_1 = (x_{11}, x_{21}, x_{31})^{\mathrm{T}}$. Для этого составим систему $AX_1 = \lambda_1 X_1$, т. е. систему

$$\begin{cases} 6x_{11} - 2x_{21} + 2x_{31} = \lambda_1 x_{11}, \\ -2x_{11} + 5x_{21} \qquad\qquad = \lambda_1 x_{21}, \\ 2x_{11} + \qquad\qquad 7x_{31} = \lambda_1 x_{31}, \end{cases}$$

примем в ней $x_{31} = 1$ и перепишем ее в виде

$$\begin{cases} x_{11} = \dfrac{1}{\lambda_1}(6x_{11} - 2x_{21} + 2), \\ x_{21} = \dfrac{1}{\lambda_1}(-2x_{11} + 5x_{21}), \\ \lambda_1 = 2x_{11} + 7. \end{cases}$$

Полученную систему будем решать методом Зейделя. При этом расчетные формулы имеют вид

$$\begin{cases} x_{11}^{(k+1)} = \dfrac{1}{\lambda_1}(6x_{11}^{(k)} - 2x_{21}^{(k)} + 2), \\ x_{21}^{(k+1)} = \dfrac{1}{\lambda_1}(-2x_{11}^{(k+1)} + 5x_{21}^{(k)}), \\ \lambda_1^{(k+1)} = 2x_{11}^{(k+1)} + 7, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{9}$$

За нулевые приближения примем $x_{11}^{(0)} = 2$, $x_{21}^{(0)} = 0$, $\lambda_1^{(0)} = 7$. Подставляя эти значения $x_{11}^{(0)}$, $x_{21}^{(0)}$, $\lambda_1^{(0)}$ в правые части уравнений системы (9), найдем

$$\begin{cases} x_{11}^{(1)} = \dfrac{1}{7}(6 \cdot 2 + 2) = 2, \\ x_{21}^{(1)} = \dfrac{1}{7}(-2 \cdot 2) = -\dfrac{4}{7} = -0{,}571429, \\ \lambda_1^{(1)} = 2 \cdot 2 + 7 = 11. \end{cases}$$

С полученными приближениями поступим аналогично и т. д.

Результаты вычислений приведены в табл. 1. Из таблицы видно, что за λ_1 и $X_1 = (x_{11}, x_{21}, x_{31})^{\mathrm{T}}$ можно принять $\lambda_1 = 9$, $X_1 = (1; -0{,}5; 1)^{\mathrm{T}}$.

Перейдем к отысканию собственного значения λ_2 и собственного вектора $X_2 = (x_{12}, x_{22}, x_{32})^{\mathrm{T}}$.

Таблица 1

k	$X_1^{(k)}$	$X_2^{(k)}$	$X_3^{(k)}$	$\lambda_1^{(k)}$
0	2	0	1	7
1	2	– 0,5714	1	11
2	1,3766	– 0,5100	1	9,7532
3	1,1565	– 0,4986	1	9,3130
4	1,0669	– 0,4968	1	9,1339
5	1,0286	– 0,4972	1	9,0572
6	1,0120	– 0,4980	1	9,0240
7	1,0049	– 0,4986	1	9,0097
8	1,0019	– 0,4991	1	9,0037
9	1,0006	– 0,4994	1	9,0012
10	1,0002	– 0,4996	1	9,0003

Для этого будем решать систему $AX_2 = \lambda_2 X_2$, т. е. систему

$$\begin{cases} 6x_{12} - 2x_{22} + 2x_{32} = \lambda_2 x_{12}, \\ -2x_{12} + 5x_{22} \qquad\qquad = \lambda_2 x_{22}, \\ 2x_{12} + \qquad\quad 7x_{32} = \lambda_2 x_{32}, \end{cases}$$

при условии $(X_1, X_2) = x_{12} - 0,5x_{22} + x_{32} = 0$. Из этого условия найдем

$$x_{32} = -x_{12} + 0,5x_{22} \tag{10}$$

и подставим это выражение для x_{32} в рассматриваемую систему. Тогда получим систему

$$\begin{cases} 4x_{12} - \ x_{22} = \lambda_2 x_{12}, \\ -2x_{12} + 5x_{22} = \lambda_2 x_{22}. \end{cases}$$

Третье уравнение опущено, так как оно является линейной комбинацией предыдущих уравнений, а именно оно равно второму уравнению, умноженному на $0,5$, минус первое уравнение.

Примем $x_{22} = 1$ и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x_{12} = \dfrac{1}{\lambda_2}(4x_{12} - 1), \\ \lambda_2 = -2x_{12} + 5. \end{cases}$$

Полученную систему также будем решать методом Зейделя, а значения x_{32} — каждый раз вычислять по формуле (10). Расчетными формулами при этом будут следующие:

$$\begin{cases} x_{12}^{(k+1)} = \dfrac{1}{\lambda_2^{(k)}}(4x_{12}^{(k)} - 1), \\ \lambda_2^{(k+1)} = -2x_{12}^{(k+1)} + 5, \\ x_{32}^{(k+1)} = -x_{12}^{(k+1)} + 0{,}5, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{11}$$

За нулевые приближения $x_{12}^{(0)}$ и $\lambda_2^{(0)}$ примем соответственно свободные члены первого и второго уравнений, т. е. положим

$$x_{12}^{(0)} = \frac{-1}{\lambda_2^{(0)}} = \frac{-1}{5} = -0{,}2, \quad \lambda_2^{(0)} = 5.$$

Подставив эти значения $x_{12}^{(0)}$ и $\lambda_2^{(0)}$ в правые части расчетных формул (11), получим

$$x_{12}^{(1)} = \frac{1}{5}(-4 \cdot 0{,}2 - 1) = -0{,}36,$$

$$\lambda_2^{(1)} = 2 \cdot 0{,}36 + 5 = 5{,}72,$$

$$x_{32}^{(1)} = 0{,}36 + 0{,}5 = 0{,}86.$$

С найденными приближениями поступим аналогично и т. д. Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Как видно из таблицы, $\lambda_2 = 6$, $X_2 = (-0{,}5; 1; 1)^{\mathrm{T}}$. Координаты вектора $X_3 = (x_{13}, x_{23}, x_{33})^{\mathrm{T}}$ найдем из условий

Таблица 2

k	$\lambda_2^{(k)}$	$x_{12}^{(k)}$	$x_{22}^{(k)}$	$x_{32}^{(k)}$
0	5	– 0,2	1	0,7
1	5,72	– 0,36	1	0,86
2	5,8531	– 0,4266	1	0,9266
3	5,9247	– 0,4624	1	0,9624
4	5,9619	– 0,4809	1	0,9809
5	5,9808	– 0,4904	1	0,9904
6	5,9904	– 0,4952	1	0,9952
7	5,9952	– 0,4976	1	0,9976
8	5,9976	– 0,4988	1	0,9988
9	5,9988	– 0,4994	1	0,9994
10	5,9994	– 0,4997	1	0,9997
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
26	6	– 0,5	1	1

$$(X_1, X_3) = x_{13} - 0,5\,x_{23} + x_{33} = 0,$$

$$(X_2, X_3) = -0,5\,x_{13} + x_{23} + x_{33} = 0.$$

Полагая в этих условиях $x_{33} = 1$, получим $x_{13} = x_{23} = -2$.

Поэтому $X_3 = (-2; -2; 1)^{\mathrm{T}}$.

Наконец, из соотношения (6) находим

$$\lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} - \lambda_1 - \lambda_2 = 6 + 5 + 7 - 9 - 6 = 3.$$

В заключение отметим, что метод итераций для отыскания собственных значений и собственных векторов симметрических матриц в некоторых случаях может иметь весьма малую скорость сходимости, а иногда вообще может оказаться расходящимся. Поэтому его обычно рекомендуют лишь для положительно определенных симметрических матриц.

5.4.2. *Метод вращений* (*метод Якоби*)

Для симметричной матрицы A при отыскании собственных значений и собственных векторов в настоящее время наиболее употребительным является метод вращений (метод Якоби). При его обосновании исходят из того, что определение собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы A равносильно построению диагональной матрицы Λ и ортогональной матрицы T, связанных соотношением (см. разд. 2.3)

$$\Lambda = T^{-1} A T = T^{\mathrm{T}} A T . \qquad (1)$$

Диагональные элементы матрицы Λ будут искомыми собственными значениями, а столбцы матрицы T — столбцами координат собственных векторов, соответствующих этим собственным значениям. При приближенном вычислении матриц Λ и T строят последовательности матриц

$$A_0 = A,\ \ A_1,\ \ A_2,\ \ \ldots\ \ A_k,\ \ \ldots\ \ \to \Lambda,$$

$$T_0 = E,\ \ T_1,\ \ T_2,\ \ \ldots\ \ T_k,\ \ \ldots\ \ \to T,$$

по формулам

$$A_{k+1} = T_{ij}^{\mathrm{T}} A_k T_{ij}, \qquad T_{k+1} = T_k T_{ij}, \qquad (2)$$

где T_{ij} — матрица простых вращений. Матрица T_k равна произведению всех матриц T_{ij}, примененных при построении матриц A_0, A_1, A_2, … , A_k, причем матрицы T_{ij} в этом произведении перемножаются слева направо в том порядке, в каком они применялись. На k-м шаге принимают $\Lambda \approx A_k$, $T \approx T_k$.

Матрицу T_{ij} в формуле (2) строят следующим образом. В матрице A_k выбирают наибольший по модулю недиагональный элемент $a_{ij}^{(k)}$ и строят матрицу простого вращения

$$T_{ij} = \left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & \cdot & & & & \cdot & & & \\
 & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & & \\
 & & 1 & \cdot & & & & \cdot & & & \\
\dots & \dots & \dots & \cos\alpha & \dots & \dots & \dots & -\sin\alpha & \dots & \dots & \dots \\
 & & & \cdot & 1 & & & \cdot & & & \\
 & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \\
 & & & \cdot & & & 1 & \cdot & & & \\
\dots & \dots & \dots & \sin\alpha & \dots & \dots & \dots & \cos\alpha & \dots & \dots & \dots \\
 & & & \cdot & & & & \cdot & 1 & & \\
 & & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot & \\
 & & & \cdot & & & & \cdot & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i\text{-я строка} \\ \\ \\ \\ j\text{-я строка} \\ \\ \\ \\
\end{array}, \quad (3)$$

выбирая угол α так, чтобы в матрице A_{k+1} обратился в нуль элемент $a_{ij}^{(k+1)}$. Заметим, что если в правой части первого из соотношений (2) провести умножение матриц, то элемент $a_{ij}^{(k+1)}$ матрицы A_{k+1} будет иметь вид

$$a_{ij}^{(k+1)} = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\, a_{ij}^{(k)} + \cos\alpha \cdot \sin\alpha\, (a_{jj}^{(k)} - a_{ii}^{(k)})\,.$$

Из равенства нулю этого выражения получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{ij}^{(k)}}{(a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)})}, \quad |\alpha| \le \frac{\pi}{4}. \qquad (4)$$

Чтобы записать матрицу T_{ij}, нужно знать $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Их легко найти по формулам

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}, \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}. \qquad (5)$$

Чтобы выполнялось условие $|\alpha| \le \dfrac{\pi}{4}$, знак у корня в формуле для $\sin\alpha$ выбирают тот же, что и у выражения

$$a_{ij}^{(k)}(a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}). \tag{6}$$

При вычислении элементов матрицы удобно пользоваться формулами (см. [19], с. 182)

$$a_{ml}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ml}^{(k)}, & m, l \neq i, j; \\ a_{mi}^{(k)} \cos\alpha + a_{mj}^{(k)} \sin\alpha, & m = i,\ l \neq i, j \text{ или } l = i,\ m \neq i, j; \\ -a_{mi}^{(k)} \sin\alpha + a_{mj}^{(k)} \cos\alpha, & m = j,\ l \neq i, j \text{ или } l = j,\ m \neq i, j; \\ a_{ii}^{(k)} \cos^2\alpha + 2a_{ij}^{(k)} \cos\alpha \sin\alpha + \\ \quad + a_{jj}^{(k)} \sin^2\alpha, & m = l = i; \\ a_{ii}^{(k)} \sin^2\alpha - 2a_{ij}^{(k)} \cos\alpha \sin\alpha + \\ \quad + a_{jj}^{(k)} \cos^2\alpha, & m = l = j; \\ (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\, a_{ij}^{(k)} + \\ \quad + \cos\alpha \sin\alpha\, (a_{jj}^{(k)} - a_{ii}^{(k)}), & m = i,\ l = j \text{ или } m = j,\ l = i, \end{cases}$$

которые получаются при сравнении элементов матриц левой и правой частей первого равенства из (2) (элементы $a_{ij}^{(k+1)}$, $a_{ji}^{(k+1)}$ при выбранном α по формулам (4) и (5) равны нулю).

Метод вращений обладает (см.: [2], [10]) *высокой скоростью сходимости.*

Для доказательства этого утверждения сумму квадратов всех недиагональных элементов матрицы A_k обозначим через $t(A_k)$. Учитывая, что матрица A_{k+1} отличается от матрицы A_k лишь строками и столбцами с номерами i, j, из равенства $A_{k+1} = T_{ij}^{-1} A_k T_{ij}$ непосредственным подсчетом элементов в правой части при выбранном угле α в соответствии с формулой (4) получим соотношение

$$t(A_{k+1}) = t(A_k) - 2(a_{ij}^{(k)})^2. \tag{7}$$

В то же время, поскольку $a_{ij}^{(k)}$ — максимальный по абсолютной величине недиагональный элемент матрицы A_k и всего недиагональных элементов в этой матрице $n(n-1)$, то выполняется неравенство

$$t(A_k) \le n(n-1)(a_{ij}^{(k)})^2 .$$

Следовательно,

$$(a_{ij}^{(k)})^2 \ge \frac{1}{n(n-1)} \cdot t(A_k) .$$

Тогда из равенства (7) получаем

$$t(A_{k+1}) \le t(A_k) - \frac{2}{n(n-1)} \cdot t(A_k) = q \cdot t(A_k) ,$$

где $q = 1 - \dfrac{2}{n(n-1)}$, причем $0 \le q < 1$, так как $n \ge 2$.

Отсюда вытекает цепочка неравенств

$$t(A_k) \le q \cdot t(A_{k-1}) \le q^2 \cdot t(A_{k-2}) \le \ldots \le q^k \cdot t(A_0) ,$$

и поскольку $A_0 = A$, то

$$t(A_k) \le q^k \cdot t(A) .$$

Таким образом, $t(A_k) \to 0$ при $k \to \infty$ со скоростью, не меньшей скорости сходимости геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1 - \dfrac{2}{n(n-1)} < 1$.

Оценим предельное количество арифметических операций, требуемых для выполнения одного шага алгоритма метода вращений, т. е. для вычисления вектора $X^{(k+1)}$ и $\lambda_i^{(k)}$:

$$C(n) = 2n^2 + O(n) \ (n \to \infty)$$

Пример 1. Методом вращений найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Положим $A_0 = A$ и по формуле (2) при $k = 0$ будем строить матрицы A_1 и T_1. Так как в матрице $A_0 = A$ $\max\left|a_{ij}\right| = \left|a_{12}\right| = 3$, то $i = 1$, $j = 2$ и

$$T_{ij} = T_{12} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Угол 2α определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} = \frac{-6}{1-1} \to -\infty.$$

Такое значение $\operatorname{tg} 2\alpha$ указывает на то, что угол $2\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и

$$T_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По формулам (2) вычислим матрицы A_1 и T_1:

$$A_1 = T_{12}^{-1} A_0 T_{12} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$T_1 = T_0 T_{12} = E T_{12} = T_{12}.$$

По тем же формулам (2) построим матрицы A_2 и T_2. Так как в матрице A_1 $\max\left|a_{ij}^{(1)}\right| = \left|a_{13}\right| = \sqrt{2}$, то $i = 1$, $j = 3$ и

$$T_{ij} = T_{13} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Угол 2α определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{ij}^{(1)}}{a_{ii}^{(1)} - a_{jj}} = \frac{-\frac{4}{\sqrt{2}}}{4-5} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Поэтому

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+8}} = \frac{1}{3},$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Поскольку $a_{13}^{(1)} \cdot (a_{11}^{(1)} - a_{33}^{(1)}) = -\sqrt{2}\,(4-5) > 0$, то по формуле (5) для $\sin\alpha$ выбран знак “$+$” и матрица

$$T_{13} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

Теперь по первой формуле из (2) вычислим матрицу

$$A_2 = T_{13}^{-1} A_1 T_{13} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 5 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \Lambda,$$

и по второй формуле из (2) — матрицу

$T = T_2 = T_{12}T_{13} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

По найденным матрицам Λ и T выписываем собственные значения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 6$ и соответствующие им собственные векторы матрицы A

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^{\mathrm{T}}, \quad e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad e_3' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)^{\mathrm{T}}.$$

Метод Якоби применяют в случае произвольной действительной, а также в случае комплексной матрицы (см.: [19], [33]). Если A — комплексная матрица, то вместо матрицы (3) простого вращения применяют унитарную матрицу

$$
T_{ij} = \begin{pmatrix}
1 & & & \cdot & & & & \cdot & & & \\
& \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & & \\
& & 1 & \cdot & & & & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cos\alpha & \cdot & \cdot & \cdot & -e^{i\psi}\sin\alpha & \cdot & \cdot & \cdot \\
& & & \cdot & 1 & & & \cdot & & & \\
& & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \\
& & & \cdot & & & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & e^{-i\psi}\sin\alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \cos\alpha & \cdot & \cdot & \cdot \\
& & & \cdot & & & & \cdot & 1 & & \\
& & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot & \\
& & & \cdot & & & & \cdot & & & 1
\end{pmatrix}.
$$

Напомним, что по формуле Эйлера

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha .$$

Для эрмитовой матрицы A метод Якоби остается таким же, как и в случае действительной симметричной матрицы, а именно для максимального уменьшения на k-м шаге (см. [19]) суммы квадратов модулей недиагональных элементов матрицы A_k номера i и j выбирают так, чтобы элемент $a_{ij}^{(k)}$ был наибольшим по модулю недиагональным элементом матрицы A_k, а углы ψ и α находят из соотношений

$$\psi = \arg a_{ij}^{(k)}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\left|a_{ij}^{(k)}\right|}{(a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)})}, \quad |\alpha| \le \frac{\pi}{4}.$$

Возможны и различные модификации этого метода. Например, применяют метод Якоби с циклическим перебором недиагональных элементов (см. [33]).

Пример 2. Методом Якоби найти собственные значения и собственные векторы эрмитовой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Положим $A_0 = A$ и построим матрицы T_{ij} и A_1. Для этого замечаем, что $\max\left|a_{ij}\right| = \left|a_{12}\right|$. Поэтому принимаем $i = 1$, $j = 2$. Поскольку

$$a_{ij} = a_{12} = -i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

то $\psi = \arg a_{12} = -\pi/2$. Далее находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\left|a_{12}\right|}{a_{11} - a_{22}} = \frac{2 \cdot 1}{3 - 3} \to \infty .$$

Следовательно, $2\alpha = \pi/2$ и $\alpha = \pi/4$. Можно записать матрицу

$$T_{12} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -e^{-i\pi/2}\sin\dfrac{\pi}{4} & 0 \\ e^{i\pi/2}\sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем матрицу

$$A_1 = T_{12}^{-1} A T_{12} = T_{12}^{*} A T_{12} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\dfrac{i}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \Lambda .$$

Матрица $A_1 = \Lambda$ уже диагональная, а матрица T оказалась равной матрице T_{12}. По найденным матрицам Λ и T запишем собственные значения $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$ матрицы A и соответствующие им собственные векторы

$$e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

В рассмотренных примерах процесс закончился соответственно на втором и первом шагах. В общем же случае такой процесс бесконечен, так как на каждом шаге вместо нулевых недиагональных элементов могут возникать ненулевые. Однако при выполнении каждого шага уменьшается с большой скоростью сумма квадратов недиагональных элементов. Процесс прекращают, когда все недиагональные элементы становятся пренебрежимо малыми по абсолютной величине.

Метод вращений хорошо реализуется средствами компьютерных технологий, причем существует большое количество вычислительных схем для его реализации. При любой из них метод вращений представляет собой исключительно компактную процедуру, которая обеспечивает высокую точность вычислений. Точность нахождения собственных значений и собственных векторов этим методом оказывается сравнимой с длиной машинного слова. Стандартные программы к методу вращений содержатся во многих пакетах математического обеспечения.

5.4.3. QR-алгоритм

В настоящее время наиболее надежным и употребительным методом решения полной проблемы собственных значений, т. е. проблемы отыскания всех характеристических чисел произвольной действительной или комплексной квадратной матрицы A n-го порядка, является QR-алгоритм, предложенный в начале 1960-х гг. независимо и почти одновременно В.Н. Кублановской и Дж. Френсисом.

При выполнении QR-алгоритма строят последовательность подобных матриц

$$A_0 = A, A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots \qquad (1)$$

по следующему правилу:

Матрицу A_{k-1}, $k = 1, 2, \ldots$, представляют ее QR-разложением

$$A_{k-1} = Q_k R_k \qquad (2)$$

и полагают

$$A_k = Q_k^{-1} A_{k-1} Q_k = Q_k^{-1}(Q_k R_k) Q_k = R_k Q_k .$$

Фактически матрицы A_k получаются из матрицы A_{k-1}, представленной ее QR-разложением (2), путем перестановки множителей в этом разложении.

Таким образом, построение последовательности (1) подобных матриц реализуется по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{array}{l} A_0 = Q_1 R_1, \quad A_1 = Q_1^{-1} A_0 Q_1 = Q_1^{-1}(Q_1 R_1) Q_1 = R_1 Q_1, \\ A_1 = Q_2 R_2, \quad A_2 = Q_2^{-1} A_1 Q_2 = Q_2^{-1}(Q_2 R_2) Q_2 = R_2 Q_2, \\ \quad . \; ., \\ A_{k-1} = Q_k R_k, A_k = Q_k^{-1} A_{k-1} Q_k = Q_k^{-1}(Q_k R_k) Q_k = R_k Q_k, \\ . \; .. \end{array} \qquad (3)$$

При этом матрица A_k при любом k ортогонально (унитарно) подобна матрице A, так как

$$A_k = Q_k^{-1} A_{k-1} Q_k = Q_k^{-1} Q_{k-1}^{-1} A_{k-2} Q_{k-1} Q_k = \ldots =$$

$$= Q_k^{-1} Q_{k-1}^{-1} \ldots Q_1^{-1} A Q_1 \ldots Q_{k-1} Q_k = \tag{4}$$

$$= (Q_1 \ldots Q_{k-1} Q_k)^{-1} A (Q_1 \ldots Q_{k-1} Q_k) = P_k^{-1} A P_k,$$

где $P_k = Q_1 Q_2 \ldots Q_{k-1} Q_k$ — ортогональная (унитарная) матрица.

При достаточно общих предположениях последовательность подобных матриц (1) сходится к треугольной матрице. Диагональные элементы такой треугольной матрицы являются ее характеристическими числами и характеристическими числами всех подобных матриц A_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, в частности матрицы $A_0 = A$.

На практике процесс итераций по формулам (3) останавливают на некотором k-м шаге, когда все поддиагональные элементы матрицы A_k становятся по абсолютной величине меньше заданного ε, и за приближенные значения характеристических чисел матрицы A принимают диагональные элементы матрицы A_k.

Описанный метод преобразует почти треугольную матрицу, в частности, трехдиагональную или треугольную матрицу, при любом k в матрицу такого же вида, причем каждый шаг процесса над почти треугольной матрицей осуществляется примерно в $n/2$ раз быстрее, чем для полной матрицы n-го порядка, а в случае трехдиагональной матрицы ускорение процесса увеличивается еще на один порядок по n. Поэтому для ускорения QR-алгоритма целесообразно сначала исходную матрицу A с помощью ортогональных (унитарных) преобразований привести к подобной почти треугольной матрице, а в случае симметричной (эрмитовой) матрицы — к трехдиагональной матрице $A_0 = U^{-1} A U$. На практике QR-алгоритм всегда стремятся применять к почти треугольным или трехдиагональным матрицам.

Другим важным приемом ускорения QR-алгоритма является использование сдвигов ν_k, $k = 1, 2, \ldots$, для повышения скорости убывания по абсолютной величине поддиагональных элементов матрицы A_{k-1}. С этой целью на k-м шаге строят QR-разложение не для матрицы A_{k-1}, а для матрицы $A_{k-1}-\nu_k E$. Если построено QR-разложение

$$A_{k-1}-\nu_k E = Q_k R_k$$

матрицы $A_{k-1}-\nu_k E$, то полагают

$$A_k = Q_k^{-1} A_{k-1} Q_k = Q_k^{-1}(Q_k R_k + \nu_k E)\, Q_k = R_k Q_k + \nu_k E\,.$$

При этом снова матрица A_k ортогонально (унитарно) подобна матрице A_{k-1}, так как

$$Q_k^{-1} A_{k-1} Q_k = Q_k^{-1}(Q_k R_k + \nu_k E)\, Q_k = R_k Q_k + \nu_k E = A_k\,.$$

В силу этого для матрицы A_k снова выполняется цепочка соотношений (4), из которой следует ортогональное (унитарное) подобие матрицы A_k матрице A.

На практике обычно в качестве сдвига ν_k принимают элемент матрицы A_{k-1}, стоящий в ее нижнем правом углу, или собственное значение подматрицы второго порядка

$$\begin{pmatrix} a_{n-1,n-1}^{(k-1)} & a_{n-1,n}^{(k-1)} \\ a_{n,n-1}^{(k-1)} & a_{n,n}^{(k-1)} \end{pmatrix},$$

которое ближе по величине к элементу $a_{n,n}^{(k-1)}$.

Наконец, третьим приемом ускорения QR-алгоритма является замена малых по абсолютной величине поддиагональных элементов матрицы A_{k-1} нулевыми элементами, что позволяет продолжать применение метода к матрицам меньших размеров.

Пусть в результате некоторого числа шагов QR-алгоритма пришли к матрице вида

$$\begin{pmatrix} * & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & \varepsilon & \lambda'_n \end{pmatrix} \qquad (5)$$

с пренебрежимо малым по абсолютной величине числом ε. Тогда принимают $\lambda_n \approx \lambda'_n$ и переходят к вычислению характеристического числа λ_{n-1}. При этом фактически работают уже с матрицей $(n-1)$-го порядка, расположенной в матрице (5) в левом верхнем углу. За сдвиг ν_k теперь каждый раз принимают элемент, стоящий в правом нижнем углу матрицы $(n-1)$-го порядка, расположенной в левом верхнем углу матрицы A_{k-1}, или соответствующее собственное значение подматрицы второго порядка, стоящей в правом нижнем углу матрицы $(n-1)$-го порядка, с которой работают. После того как вычислено характеристическое число λ_{n-1}, аналогично поступают при вычислении характеристического числа λ_{n-2} и т. д.

Если матрица A действительная, то QR-алгоритм можно реализовать в вещественной арифметике (см. [36], с. 142).

Пример. С помощью QR-алгоритма найти характеристические числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Чтобы показать, как проводятся шаги QR-алгоритма без сдвига и со сдвигом, начнем с того, что первый шаг проведем без сдвига. Поэтому будем строить QR-разложение матрицы $A_0 = A$. Сначала эту матрицу вращениями приведем к треугольному виду. Для этого следует обнулить лишь элемент $a_{32} = -3$. С этой целью составим матрицу вращения

$$T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

и найдем $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ из равенства нулю элемента матрицы $T_{32} A_0$ в позиции $(3, 2)$, т. е. из равенства

$$3\sin\alpha - 3\cos\alpha = 0.$$

Отсюда получаем $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и

$$T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим произведение

$$T_{32} A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{6}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = R_0.$$

Из этого равенства получаем QR-разложение

$$A_0 = T_{32}^{-1} R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{6}{\sqrt{2}} & -\dfrac{6}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \dfrac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = Q_0 R_0 .$$

В заключение цикла построим матрицу

$$A_1 = R_0 Q_0 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{6}{\sqrt{2}} & -\dfrac{6}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \dfrac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Следующий шаг проведем со сдвигом $\nu = a_{32}^{(1)} = 2$. Поэтому будем строить QR-разложение матрицы

$$A_1 - \nu E = A_1 - 2E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Как и в предыдущем случае, сначала эту матрицу приведем к треугольному виду. С этой целью также следует обнулить лишь элемент $a_{32}^{(1)} = -2$ матрицы $A_1 - 2E$. Для этого составим матрицу вращения

$$T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

и найдем $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ из равенства нулю элемента матрицы $T_{32}(A_1 - 2E)$ в позиции $(3, 2)$, т. е. из равенства

$$4\sin\alpha - 2\cos\alpha = 0 .$$

Отсюда получаем $\operatorname{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{2}$. Поэтому

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

и

$$T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим произведение $T_{32}(A_1 - 2E) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_1.$$

Из этого равенства получаем QR-разложение

$$A_1 - 2E = T_{32}^{-1} R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_1 R_1.$$

В заключение цикла построим матрицу

$$A_2 = R_1 Q_1 + 2E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} + 2E =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2E = \begin{pmatrix} 7 & -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица A_2 уже треугольная с характеристическими числами $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 2$. Эти же значения являются характеристическими числами матрицы A.

При проведении второго шага, если сдвиг ν выбирать по Уилкинсону, то в матрице A_1 следует выписать подматрицу второго порядка

$$\begin{pmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

найти ее собственные значения $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2$ и за ν принять то из них, которое ближе к $a_{22}^{(1)} = 6$, т. е. положить $\nu = \lambda_1 = 6$. Тогда придется строить QR-разложение матрицы

$$A_1 - \nu E = A_1 - 6E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Как и в предыдущем случае, сначала эту матрицу приведем к треугольному виду. С этой целью следует также обнулить лишь элемент $a_{32}^{(1)} = -2$ матрицы $A_1 - 6E$. Для этого составим матрицу вращения

$$T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

и найдем $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ из равенства нулю элемента матрицы $T_{32}(A_1 - 6E)$ в позиции $(3, 2)$, т. е. из равенства

$$0 \cdot \sin\alpha - 2\cos\alpha = 0 .$$

Отсюда получаем $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = 1$ и

$$T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим произведение $T_{32}(A_1 - 6E) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_1 .$$

Из этого равенства получаем QR-разложение

$$A_1 - 6E = T_{32}^{-1} R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_1 R_1 .$$

В заключение шага построим матрицу

$$A_2 = R_1 Q_1 + 6E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 6E =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 6E = \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрица A_2 уже треугольная с характеристическими числами $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 2$. Эти же значения являются характеристическими числами матрицы A.

5.4.4. *Степенной метод*

При вычислении наибольшего по абсолютной величине собственного значения λ_1 матрицы A и соответствующего ему собственного вектора $X_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ можно пользоваться итерационным методом, называемым степенным. Он состоит в следующем. В качестве нулевого приближения к искомому вектору X_1 берут произвольный вектор $X_1^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots,$ $x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$ и строят последовательность приближений

$$X_1^{(1)} = A X_1^{(0)},\ X_1^{(2)} = A^2 X_1^{(0)}, \ldots,\ X_1^{(k)} = A^k X_1^{(0)}, \ldots \qquad (1)$$

Если эта последовательность векторов сходится при $k \to \infty$ к вектору X_1, то он будет искомым собственным вектором, а для соответствующих координат векторов последовательности (1) будут выполняться соотношения

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}} = \lambda_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2)$$

В качестве вектора X_1 приближенно можно принять вектор $X_1^{(k)} = A^k X_1^{(0)}$ при достаточно большом значении k, а за собственное значение λ_1 — любое из соотношений

$$\frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3)$$

или среднее арифметическое таких отношений, т. е. положить

$$\lambda_1 \approx \lambda_1^{(k)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}} \; . \tag{4}$$

Процесс приостанавливают, когда $(k-1)$-е и k-е приближения к λ_1 достаточно мало отличаются одно от другого.

Если процесс окажется несходящимся, последнее легко заметить по сильно "прыгающим" значениям отношений (3) при изменении k, то следует изменить начальный вектор $X_1^{(0)}$ и процесс повторить.

Чтобы избежать чрезмерного роста по абсолютной величине координат векторов $A^k X_1^{(0)}$, $k = 1, 2, \ldots$, иногда целесообразно все их координаты умножать на какие-либо числа α_k, меньшие единицы. Например, удобным оказывается деление всех координат вектора $A^k X_1^{(0)}$ на модуль его первой координаты или нормирование этих векторов. При этом вместо последовательности векторов (1) получают последовательность векторов

$$Y_1^{(1)} = \alpha_1 A X_1^{(0)},\; Y_1^{(2)} = \alpha_2 A^2 X_1^{(0)}, \ldots,\; Y_1^{(k)} = \alpha_k A^k X_1^{(0)}, \ldots .$$

Для получения приближений к собственному значению λ_1 в этом случае следует брать отношения соответствующих координат векторов $A Y_1^{(k)}$ и $Y_1^{(k)}$, а за вектор X_1 — вектор $Y_1^{(k)}$ или $A Y_1^{(k)}$. Более подробные рекомендации об этом можно найти в [3] и [34]. Там же можно познакомиться с различными модификациями степенного метода и с обратным степенным методом.

Приведем обоснование рассматриваемого метода.

Пусть действительная квадратная матрица A n-го порядка имеет полную систему линейно независимых собственных векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Таким образом, выполняются соотношения

$$A e'_i = \lambda_i e'_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Будем предполагать, что выполняются также неравенства
$$\left|\lambda_1\right| > \left|\lambda_2\right| \geq \left|\lambda_3\right| \geq \ldots \geq \left|\lambda_n\right|. \tag{6}$$
В пространстве E_n с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ возьмем произвольный вектор $X_1^{(0)}$ и разложим его по базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ собственных векторов матрицы A. Тогда получим
$$X_1^{(0)} = c_1 e'_1 + c_2 e'_2 + \ldots + c_n e'_n = \sum_{j=1}^{n} c_j e'_j. \tag{7}$$

Построим последовательность векторов $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}, \ldots,$ $X_1^{(k)}$, ... с помощью итерационной процедуры
$$X_1^{(k)} = A X_1^{(k-1)} = A^k X_1^{(0)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$
Учитывая соотношения (1), (5) и (7), получим
$$X_1^{(k)} = A^k X_1^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^k e'_j, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$
Пусть в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства E_n вектор $X_1^{(k)}$ имеет столбец координат $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})^{\mathrm{T}}$, а собственный вектор e'_j — столбец координат $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj})^{\mathrm{T}}$, т. е. вектор
$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i.$$
Подставляя это выражение для e'_j в равенство (8), получим
$$X_1^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^k \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_{ij} \lambda_j^k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$
Отсюда видно, что i-й координатой вектора $X_1^{(k)}$ является
$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_{ij} \lambda_j^k. \tag{9}$$
Аналогично получим
$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_{ij} \lambda_j^{k+1}. \tag{10}$$

Разделив равенство (10) на равенство (9), придем к соотношению

$$\frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}}=\frac{c_1\alpha_{i1}\lambda_1^{k+1}+\ldots+c_n\alpha_{in}\lambda_n^{k+1}}{c_1\alpha_{i1}\lambda_1^{k}+\ldots+c_n\alpha_{in}\lambda_n^{k}}. \tag{11}$$

Предположим, что $c_1\neq 0$ и $\alpha_{i1}\neq 0$. Этого можно добиться, выбирая надлежащим образом исходный вектор $X_1^{(0)}$ и базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства E_n. Равенство (11) преобразуем к виду

$$\frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}}=\lambda_1\cdot\frac{1+\dfrac{c_2\alpha_{i2}}{c_1\alpha_{i1}}\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1}+\ \ldots\ +\dfrac{c_n\alpha_{in}}{c_1\alpha_{i1}}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k+1}}{1+\dfrac{c_2\alpha_{i2}}{c_1\alpha_{i1}}\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k}+\ \ldots\ +\dfrac{c_n\alpha_{in}}{c_1\alpha_{i1}}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k}}. \tag{12}$$

Отсюда следует, что при $\left|\lambda_1\right|>\left|\lambda_2\right|$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}}=\lambda_1, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

или приближенно

$$\lambda_1\approx\frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}}, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

За приближенное значение λ_1 можно брать найденное по этой формуле значение при любом $i=1,2,\ldots,n$ или среднее арифметическое этих значений.

Вектор $X_1^{(k)}=A^kX_1^{(0)}$ приближенно представляет собой собственный вектор e_1' матрицы A, соответствующий собственному значению λ_1. Действительно, из равенства (8) получаем

$$X_1^{(k)} = A^k X_1^{(0)} = c_1 \lambda_1^k e_1' + \sum_{j=2}^{n} c_j \lambda_j^k e_j' =$$

$$= c_1 \lambda_1^k \left[e_1' + \sum_{j=2}^{n} \frac{c_j}{c_1} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k e_j' \right]. \qquad (13)$$

Поскольку $\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k \to 0$ при $k \to \infty$, то при достаточно большом значении k

$$X_1^{(k)} = A^k X_1^{(0)} \approx c_1 \lambda_1^k e_1',$$

т. е. вектор $X_1^{(k)} = A^k X_1^{(0)}$ пропорционален собственному вектору e_1', принадлежащему собственному значению λ_1, и, следовательно, также является собственным вектором, принадлежащим собственному значению λ_1.

В случае, когда наибольшее по модулю собственное значение матрицы A является s-кратным, обоснование рассматриваемого метода проводится аналогично, с незначительными уточнениями в преобразованиях правой части равенства (11) при переходе к равенству, соответствующему равенству (12). При этом результат сохраняется прежний. То же относится и к равенствам (8) и (13).

Пример 1. Степенным методом найти наибольшее по абсолютной величине собственное значение λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $X_1 = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

Решение. За нулевое приближение вектора X_1 примем вектор $X_1^{(0)} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ и построим последовательность векторов

$X_1^{(k)} = A^k X_1^{(0)}$ при $k = 1, 2, \ldots, 10$. Причем на каждом шаге вычислим $\lambda_1^{(k)}$ по формуле (4). Результаты приведены в табл. 1.

Как видно, значения $\lambda_1^{(k)}$ колеблются около числа -3, причем $\lambda_1^{(8)}$, $\lambda_1^{(9)}$ и $\lambda_1^{(10)}$ мало отличаются одно от другого. Поэтому за λ_1 можно принять $\lambda_1 \approx \lambda_1^{(9)} \approx -3$, а за собственный вектор X_1 — вектор

$$X_1 \approx X_1^{(9)} = A^9 X_1^{(0)} = (157581;\ -78762;\ -78789)^{\mathrm{T}},$$

или вектор

$$X_1 \approx \frac{1}{157\,581} A^9 X_1^{(0)} \approx (1; -0{,}49982; -0{,}49999)^{\mathrm{T}},$$

или единичный вектор

$$X_1 \approx \frac{A^9 X_1^{(0)}}{\left| A^9 X_1^{(0)} \right|} \approx (0{,}8165; -0{,}4081; -0{,}4083)^{\mathrm{T}}.$$

Таблица 1

$X_1^{(0)}$	$AX_1^{(0)}$	$A^2X_1^{(0)}$	$A^3X_1^{(0)}$	$A^4X_1^{(0)}$	$A^5X_1^{(0)}$
1 1 1	45 − 18 − 21	− 39 27 21	261 − 120 − 129	− 591 309 297	2013 − 990 − 1005
$\lambda_1^{(k)}$	2	− 1,1222	− 5,7599	− 2,3806	− 3,3313

Продолжение табл. 1

$A^6X_1^{(0)}$	$A^7X_1^{(0)}$	$A^8X_1^{(0)}$	$A^9X_1^{(0)}$	$A^{10}X_1^{(0)}$
− 5751 2895 2877	17589 − 8772 − 8793	− 52383 26217 26193	157581 − 78762 − 78789	− 472263 236193 236133
− 2,8813	− 3,0483	− 2,9819	− 3,0068	− 2,9975

При переходе, например, от вектора $A^8 X_1^{(0)}$ к вектору $A^9 X_1^{(0)}$, чтобы избежать больших по абсолютной величине координат, вместо вектора $A^8 X_1^{(0)}$ можно было взять вектор

$$Y_1^{(8)} = \frac{1}{52383} A^8 X_1^{(0)} \approx (-1;\, 0{,}50049;\, 0{,}50003)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда вместо вектора $A^9 X_1^{(0)}$ мы имели бы вектор

$$A Y_1^{(8)} = (3{,}0082; -1{,}50358; -1{,}50409)^{\mathrm{T}}$$

и по формуле (4) получили бы

$$\lambda_1^{(9)} = \frac{1}{3}\left(\frac{3{,}00824}{-1} + \frac{-1{,}50358}{0{,}50049} + \frac{-1{,}50409}{0{,}50003}\right) \approx -3.$$

Степенной метод в комбинации с ***методом исчерпывания*** можно применять к вычислению других собственных значений и собственных векторов матрицы. Для обоснования такого подхода нам потребуются следующие утверждения.

Утверждение 1. *Характеристические многочлены матрицы* A *и ее транспонированной матрицы* A^{T} *совпадают.*

На самом деле,

$$\left| A^{\mathrm{T}} - \lambda E \right| = \left| (A^{\mathrm{T}} - \lambda E)^{\mathrm{T}} \right| = \left| A - \lambda E \right|.$$

Следствие. *Транспонированная матрица* A^{T} *имеет, с учетом кратностей, те же собственные значения, что и матрица* A.

Утверждение 2. *Если вектор* x' *является собственным вектором матрицы* A^{T}, *принадлежащим собственному значению* λ, *т. е. если* $A^{\mathrm{T}} x' = \lambda x'$, *то выполняется соотношение* $(x')^{\mathrm{T}} A = \lambda (x')^{\mathrm{T}}$.

Утверждение 3. *Собственный вектор* x *матрицы* A, *принадлежащий собственному значению* λ, *ортогонален каждому собственному вектору* x' *матрицы* A^{T}, *принадлежащему собственному значению* $\mu \neq \lambda$.

Действительно, по условию

$$A x = \lambda x, \quad A^{\mathrm{T}} x' = \mu x', \quad \mu \neq \lambda.$$

Поэтому

$$A x = \lambda x, \quad (x')^{\mathrm{T}} A = \mu (x')^{\mathrm{T}}, \quad \mu \neq \lambda.$$

Тогда, с одной стороны,

$$(x')^{\mathrm{T}} A x = (x')^{\mathrm{T}} \lambda x = \lambda (x')^{\mathrm{T}} x = \lambda (x', x),$$

и, с другой стороны,

$$(x')^{\mathrm{T}} A x = \mu (x')^{\mathrm{T}} x = \mu (x', x).$$

Отсюда вытекает равенство

$$\lambda (x', x) = \mu (x', x) \text{ при } \mu \neq \lambda,$$

или, что то же самое, равенство

$$(\lambda - \mu)(x', x) = 0 \text{ при } \mu \neq \lambda.$$

Это возможно лишь при $(x', x) = 0$, что доказывает ортогональность векторов x и x'.

Теперь перейдем к изложению **метода исчерпывания**. Пусть уже найдено собственное значение λ_1 и собственный вектор x_1 матрицы A, принадлежащий этому собственному значению. Для вычисления второго по абсолютной величине собственного значения λ_2 и соответствующего ему собственного вектора x_2 матрицы A найдем степенным методом или из системы $(A^{\mathrm{T}} - \lambda_1 E)\, u_1 = 0$ собственный вектор u_1 матрицы A^{T}, принадлежащий собственному значению λ_1, и положим

$$x_1' = \frac{u_1}{(x_1, u_1)}.$$

Так, построенный собственный вектор x_1' матрицы A^{T} удовлетворяет условию $(x_1, x_1') = x_1^{\mathrm{T}} x_1' = 1$, поскольку

$$x_1^{\mathrm{T}} x_1' = \frac{x_1^{\mathrm{T}} u_1}{(x_1, u_1)} = \frac{(x_1, u_1)}{(x_1, u_1)} = 1.$$

Далее построим матрицу

$$A_1 = A - \lambda_1 x_1 (x_1')^{\mathrm{T}}.$$

Все собственные векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *матрицы* A *являются собственными векторами матрицы* A_1*, причем соответствующие собственные значения также сохраняются, за исключением* λ_1*, которому в матрице* A_1 *соответствует нулевое собственное значение.*

Это утверждение доказывают следующие соотношения:
при $j = 1$

$$A_1 x_1 = \left[A - \lambda_1 x_1 (x_1')^{\mathrm{T}} \right] x_1 = A x_1 - \lambda_1 x_1 (x_1')^{\mathrm{T}} x_1 =$$

$$= \lambda_1 x_1 - \lambda_1 x_1 \underbrace{(x_1', x_1)}_{=1} = (\lambda_1 - \lambda_1)\, x_1 = 0 \cdot x_1 ,$$

так как в силу доказанного выше $(x_1, x_1') = x_1^{\mathrm{T}} x_1' = 1$, и при $j = 2, 3, \ldots, n$

$$A_1 x_j = \left[A - \lambda_1 x_1 (x_1')^{\mathrm{T}} \right] x_j = A x_j - \lambda_1 x_1 (x_1')^{\mathrm{T}} x_j =$$

$$= \lambda_1 x_j - \lambda_1 x_1 \underbrace{(x_1', x_j)}_{=0} = \lambda_1 x_j ,$$

поскольку $(x_1', x_j) = 0$ в силу ортогональности векторов x_1' и x_j при $j = 2, 3, \ldots, n$.

Наибольшее по абсолютной величине собственное значение μ_1 и ему принадлежащий собственный вектор v_1 матрицы A_1 (их опять можно найти степенным методом) являются соответственно вторым по абсолютной величине собственным значением λ_2 и ему принадлежащим собственным вектором x_2 матрицы A. С матрицей A_1 можно поступить аналогично и т. д. В итоге можно найти все собственные значения и собственные векторы матрицы A. Поясним такой подход на примере.

Пример 2. Степенным методом в сочетании с методом исчерпывания найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала степенным методом для матрицы A найдем собственное значение λ_1 и принадлежащий ему собственный вектор $X_1=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$. Для этого за нулевое приближение вектора X_1 примем, например, вектор $X_1^{(0)}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ и построим векторы $X_1^{(k)}=A^k X_1^{(0)}$ при $k=1,2,\ldots,10$. Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

$X_1^{(0)}$	$AX_1^{(0)}$	$A^2X_1^{(0)}$	$A^3X_1^{(0)}$	$A^4X_1^{(0)}$	$A^5X_1^{(0)}$
1	– 6	– 72	– 540	– 3564	– 22356
1	– 6	– 72	– 540	– 3564	– 22356
1	30	252	1728	11016	68040

Продолжение табл. 2

$A^6X_1^{(0)}$	$A^7X_1^{(0)}$	$A^8X_1^{(0)}$	$A^9X_1^{(0)}$	$A^{10}X_1^{(0)}$
–137052	–831060	–5012604	–30154356	–181162330
–137052	–831060	–5012604	–30154356	–181162330
414072	2501928	15064056	90541800	543723200

Теперь по формуле (4) при $k=10$ находим

$$\lambda_1\approx\frac{1}{3}\left(\frac{-181162330}{-30154356}+\frac{-181162330}{-30154356}+\frac{543723200}{90541800}\right)\approx 6\,.$$

За вектор X_1 примем вектор

$$X_1\approx\frac{A^{10}X_1^{(0)}}{181162330}\approx(-1;-1;3)^{\mathrm{T}}.$$

Чтобы найти собственное значение λ_2 и собственный вектор X_2 матрицы A, сначала из системы $(A^{\mathrm{T}}-\lambda_1 E)\,U=0$ или степенным методом найдем собственный вектор $U_1 = (1; 5; 3)^{\mathrm{T}}$ матрицы A^{T}, принадлежащий собственному значению $\lambda_1 = 6$, и положим

$$X_1' = \frac{U_1}{(X_1, U_1)} = \frac{1}{3}(1; 5; 3)^{\mathrm{T}}.$$

Затем сконструируем матрицу

$$A_1 = A - \lambda_1 X_1 (X_1')^{\mathrm{T}} = A - 6 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}(1; 5; 3) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 3 & 15 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \\ -3 & -15 & -6 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы A_1 степенным методом найдем собственное значение μ_1 и ему принадлежащий собственный вектор V_1. Для этого за нулевое приближение собственного вектора V_1 примем, например, вектор $V_1^{(0)} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ и построим векторы $V_1^{(k)} = A^k V_1^{(0)}$ при $k = 1, 2, 3$. Результаты вычислений приведены в табл. 3.

Таблица 3

$V_1^{(0)}$	$A_1 V_1^{(0)}$	$A_1^2 V_1^{(0)}$	$A_1^3 V_1^{(0)}$
1	12	36	108
1	12	36	108
1	-24	-72	-216

Теперь по формуле (4) при $k = 3$ находим

$$\mu_1 \approx \frac{1}{3}\left(\frac{108}{36} + \frac{108}{36} + \frac{-216}{-72}\right) = 3$$

и за вектор V_1 примем вектор

$$V_1 = \frac{A^3 V_1^{(0)}}{108} = (1;1;-2)^{\mathrm{T}}.$$

Поэтому для матрицы A собственное значение $\lambda_2 = \mu_1 = 3$ и собственный вектор $X_2 = V_1 = (1;1;-2)^{\mathrm{T}}$. Собственное значение $\lambda_3 = 3$ матрицы A найдем из соотношения

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

а собственный вектор $X_3 = (2;-1;1)^{\mathrm{T}}$ — из системы

$$(A - \lambda_3 E)X = 0.$$

5.4.5. *Метод скалярных произведений*

При вычислении наибольшего по абсолютной величине собственного значения λ_1 матрицы A можно воспользоваться также **методом скалярных произведений**, который состоит в следующем. Берут произвольный ненулевой вектор $X_1^{(0)}$, строят две последовательности векторов

$$A X_1^{(0)}, A^2 X_1^{(0)}, \ldots, A^k X_1^{(0)}, \ldots$$

$$A^{\mathrm{T}} X_1^{(0)}, (A^{\mathrm{T}})^2 X_1^{(0)}, \ldots, (A^{\mathrm{T}})^k X_1^{(0)}, \ldots$$

и вычисляют соответствующие приближения к λ_1 по формуле

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{(A^k X_1^{(0)},\ (A^{\mathrm{T}})^k X_1^{(0)})}{(A^{k-1} X_1^{(0)},\ (A^{\mathrm{T}})^k X_1^{(0)})}. \tag{1}$$

Процесс останавливают, когда в $\lambda_1^{(k)}$ стабилизируется достаточное число десятичных знаков после запятой или, что то же самое, когда $\lambda_1^{(k-1)}$ и $\lambda_1^{(k)}$ достаточно мало отличаются одно от другого, и принимают $\lambda_1 \approx \lambda_1^{(k)}$.

Как и в случае степенного метода, чтобы избежать чрезмерного роста по абсолютной величине координат векторов $A^k X_1^{(0)}$, целесообразно все эти координаты умножать на какие-либо числа α_k, меньшие единицы, например на α_k, равное модулю обратной величины первой координаты вектора $A^k X_1^{(0)}$, или на $\alpha_k = \dfrac{1}{\left| A^k X_1^{(0)} \right|}$.

Аналогично следует поступать и с векторами $A^{\mathrm{T}} X_1^{(0)}$. В результате получится две последовательности векторов

$$Y^{(1)} = \alpha_1 A X_1^{(0)},\ Y^{(2)} = \alpha_2 A Y^{(1)}, \ldots, Y^{(k)} = \alpha_k A Y^{(k-1)}, \ldots$$

$$Z^{(1)} = \beta_1 A^{\mathrm{T}} X_1^{(0)}, Z^{(2)} = \beta_2 A^{\mathrm{T}} Z^{(1)}, \ldots, Z^{(k)} = \beta_k A^{\mathrm{T}} Z^{(k-1)}, \ldots$$

и $\lambda_1^{(k)}$ находится по формуле

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{(A Y^{(k)},\ A^{\mathrm{T}} Z^{(k)})}{(Y^{(k)},\ A^{\mathrm{T}} Z^{(k)})}. \tag{2}$$

Собственный вектор X_1 находят, как и при степенном методе, т. е. полагают

$$X_1 \approx A^k X_1^{(0)}, \text{ или } X_1 \approx \alpha_k A^k X_1^{(0)} = Y^{(k)},$$

или находят его из системы $(A - \lambda_1 E) X_1 = 0$.

Заметим, что метод скалярных произведений значительно упрощается, если матрица A симметричная, т. е. если $A = A^{\mathrm{T}}$.

Пример. Методом скалярных произведений найти наибольшие по абсолютной величине собственные значения и соответствующие им собственные векторы следующих матриц:

$$а)\ A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad б)\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. *а*) Матрица A_1 несимметричная. Поэтому за начальное приближение примем, например, вектор $X_1^{(0)} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ и вычислим векторы $A_1^k X_1^{(0)}$, $(A_1^{\mathrm{T}})^k X_1^{(0)}$ при $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Результаты приведены в табл. 1 и 2:

Таблица 1

$X_1^{(0)}$	$A_1 X_1^{(0)}$	$A_1^2 X_1^{(0)}$	$A_1^3 X_1^{(0)}$	$A_1^4 X_1^{(0)}$	$A_1^5 X_1^{(0)}$
1	5	9	17	33	65
1	3	5	9	17	33
1	2	4	8	16	32

Таблица 2

$X_1^{(0)}$	$A_1^{\mathrm{T}} X_1^{(0)}$	$(A_1^{\mathrm{T}})^2 X_1^{(0)}$	$(A_1^{\mathrm{T}})^3 X_1^{(0)}$	$(A_1^{\mathrm{T}})^4 X_1^{(0)}$	$(A_1^{\mathrm{T}})^5 X_1^{(0)}$
1	26	67	144	293	586
1	– 21	– 62	– 139	– 288	– 581
1	– 13	– 36	– 77	– 154	– 303

Теперь по формуле (1) при $k = 5$ вычислим

$$\lambda_1 \approx \lambda_1^{(5)} = \frac{(A_1^5 X_1^{(0)},\ (A_1^{\mathrm{T}})^5 X_1^{(0)})}{(A_1^4 X_1^{(0)},\ (A_1^{\mathrm{T}})^5 X_1^{(0)})} =$$

$$= \frac{(65, 33, 32)\begin{pmatrix} 586 \\ -581 \\ -303 \end{pmatrix}}{(33, 17, 16)\begin{pmatrix} 586 \\ -581 \\ -303 \end{pmatrix}} = \frac{9221}{4610} \approx 2,$$

а за вектор X_1 примем вектор

$$X_1 = \frac{A_1^5 X_1^{(0)}}{32} \approx (\,2 \quad 1 \quad 1\,)^{\mathrm{T}}.$$

б) В этом случае матрица

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

симметричная, и потому $A_2 = A_2^{\mathrm{T}}$. Как и в предыдущем случае, за начальный вектор примем вектор $X_1^{(0)} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ и вычислим векторы $A_2^k X_1^{(0)} = (A_2^{\mathrm{T}})^k X_1^{(0)}$ при $k = 1, 2, 3, 4$. Результаты приведены в табл. 3.

Таблица 3

$X_1^{(0)}$	$A_2 X_1^{(0)}$	$A_2^2 X_1^{(0)}$	$A_2^3 X_1^{(0)}$	$A_2^4 X_1^{(0)}$
1	-3	-5	-71	-389
1	-1	13	55	421
1	5	27	153	891

По формуле (1) при $k = 4$ вычислим

$$\lambda_1 \approx \lambda_1^{(4)} = \frac{(-389, 421, 891)\begin{pmatrix} -389 \\ 421 \\ 891 \end{pmatrix}}{(-71, 55, 153)\begin{pmatrix} -389 \\ 421 \\ 891 \end{pmatrix}} \approx 6\,.$$

За собственный вектор X_1 матрицы A_2 примем приближенно вектор $A_2^4 X_1^{(0)}$, т. е. положим

$$X_1 \approx A_2^4 X_1^{(0)} = (\,-389 \quad 421 \quad 891\,)^{\mathrm{T}} \approx (\,-1 \quad 1 \quad 2)^{\mathrm{T}}.$$

При вычислении собственного значения λ_1 метод скалярных произведений дает лучший результат при меньшем числе итераций вектора $X_1^{(0)}$, чем степенной метод. Поэтому метод скалярных произведений рассматривают (см. [34]) как ускорение степенного метода. В то же время для более точного вычисления собственного вектора X_1, так же как и при степенном методе, требуется большее число итераций вектора $X_1^{(0)}$, либо собственный вектор X_1 в этом случае проще найти при уже известном собственном значении λ_1 из системы $(A-\lambda_1 E)X_1 = 0$.

Метод скалярных произведений, как и степенной метод, можно применять в сочетании с методом исчерпывания для отыскания других собственных значений матрицы.

5.5. Уточнение отдельного собственного значения и принадлежащего ему собственного вектора

На практике часто случается, что при применении итерационных методов отыскания собственных значений матриц нужно произвести очень много итераций для получения результата с требуемой точностью. В связи с этим возникает необходимость уточнить уже вычисленное с некоторой точностью приближенное собственное значение и найти соответствующий ему собственный вектор.

Рассмотрим некоторые приемы такого уточнения.

5.5.1. *Метод Виландта*

Пусть μ — приближение к произвольному собственному значению λ матрицы A. Если это приближение достаточно хорошее, то можно надеяться, что у матрицы $A-\mu E$ есть собственное значение, по модулю значительно меньшее остальных. В этом случае итерации с матрицей $A-\mu E$ быстро приведут к его вычислению, т. е. к поправке для μ. Заодно будет найден (или уточнен) приближенный собственный вектор.

Вычислительная схема метода Виландта такова.

1. Выбрать нормированный вектор $x^{(0)}$.
2. Для $k=1,2,\ldots$ вычислить нормированные векторы $x^{(k)}$ как решение линейной системы

$$(A-\mu E)x^{(k)}=\tau_k x^{(k-1)}, \tag{1}$$

   где τ_k — скаляр, являющийся нормирующим множителем, призванным воспрепятствовать выходу компонент вычисляемого вектора за пределы разрядной сетки ЭВМ.
3. Принять $\lambda=\mu+\tau$.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что на всех шагах метода Виландта системы уравнений вида (1) имеют одну и ту же матрицу. Поэтому, вычислив однажды, например LU-разложение матрицы $A-\mu E$, найдем $x^{(k)}$ посредством сравнительно небольших по объему расчетов.

Анализ сходимости метода Виландта содержится, например в [18], откуда следует, что если задача хорошо обусловлена, метод является численно устойчивым и быстро сходящимся: практически достаточно всего лишь одной–двух итераций. В случае плохой обусловленности поведение метода усложняется, но он не перестает сходиться.

Наилучшими свойствами обладает RQI-модификация метода Виландта, для которой вычислительная процедура включает следующие этапы:

1. Выбрать нормированный вектор $x^{(0)}$ и начальное приближение μ_0 к собственному значению.
2. Для $k=1,2,\ldots$ вычислить нормированный вектор $x^{(k)}$ из условия

$$(A-\mu_{k-1}E)x^{(k)}=\tau_k x^{(k-1)}.$$

3. Положить μ_k равным отношению Релея

$$\mu_k = \rho(x^{(k)}) = \frac{(A x^{(k)}, x^{(k)})}{(x^{(k)}, x^{(k)})} .$$

Теперь каждая итерация сопряжена с разложением новой матрицы $A - \mu_k E$, но нормы невязок

$$\left\| r(\mu_k, x^{(k)}) \right\| = A x^{(k)} - \mu_k x^{(k)}$$

в RQI монотонно убывают и последовательность $\{\mu_k, x^{(k)}\}$ всегда сходится к точной собственной паре $\{\mu, x\}$, причем асимптотически скорость сходимости кубическая, если матрица A нормальная.

Пример. Уточнить собственное значение и принадлежащий ему собственный вектор для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -5.509882 & 1.870086 & 0.422908 \\ 0.287865 & -11.811654 & 5.711900 \\ 0.049099 & 4.308033 & -12.970687 \end{pmatrix}.$$

Решение. Пусть, например, с помощью степенного метода последовательных итераций определены приближенные значения собственного числа $\mu = -17.39$ и компоненты принадлежащего ему собственного вектора $x^{(0)} = (1.00, -8.14, 7.91)^{\mathrm{T}}$.

Построим соответствующую систему вида (1) и решим ее по схеме последовательного исключения неизвестных метода Гаусса. Результаты расчетов содержатся в табл. 1.

В результате получили собственный вектор

$$x^{(1)} = -0.007662(-130.5185, 1063.3671, -1033.3512)^{\mathrm{T}} =$$

$$= (1.0000, -8.14725, 7.91728)^{\mathrm{T}} .$$

Уточненное собственное значение

$$\lambda = \mu + \tau_1 = -17.397662 .$$

Таблица 1

11.880118 0.287865 0.049099	1.870086 5.578346 4.308033	0.422908 5.711900 4.419313	1.00 – 8.14 7.91	15.173112 3.438111 16.686445
1	0.15741308 5.5330323 4.3003042	0.03559796 5.7016526 4.4175652	0.08417425 – 8.1642308 7.9058671	1.2771853 3.0704541 16.6237365
	1	1.0304751 – 0.0137912	– 1.4755437 14.251154	0.5549315 14.237362
  1	 1	1	– 1033.3512 1063.3671 – 130.5185	– 1032.3512 1064.3671 – 129.5185

5.5.2. *Метод Дерведюэ*

Пусть μ и $x^{(0)}$ — приближенные значения для некоторого характеристического числа матрицы A и принадлежащего этому собственному значению собственного вектора. Обозначим соответствующие точные значения через $\lambda = \mu + \Delta\mu$ и $x = x^{(0)} + \Delta x$. Обозначим через r невязку

$$r = Ax^{(0)} - \mu x^{(0)}. \tag{1}$$

Для точных значений λ и x имеем $Ax = \lambda x$, или

$$A(x^{(0)} + \Delta x) = (\mu + \Delta\mu)(x^{(0)} + \Delta x).$$

Отсюда

$$A \cdot x^{(0)} + A \cdot \Delta x = \mu \cdot x^{(0)} + \Delta\mu \cdot x^{(0)} + \mu \cdot \Delta x + \Delta\mu \cdot \Delta x.$$

Линеаризуем полученное уравнение, отбрасывая члены второго порядка малости $\Delta\mu \cdot \Delta x$ и учитывая (1). Тогда получим

$$r + A \cdot \Delta x - \Delta\mu \cdot x^{(0)} - \mu \cdot \Delta x = 0.$$

Перенесем вектор r в правую часть и запишем полученное соотношение покомпонентно:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\Delta x_1 + a_{12}\Delta x_2 + \ldots + a_{1n}\Delta x_n - \Delta\mu\cdot x_1^{(0)} - \mu\cdot\Delta x_1 = -r_1,\\
&a_{21}\Delta x_1 + a_{22}\Delta x_2 + \ldots + a_{2n}\Delta x_n - \Delta\mu\cdot x_2^{(0)} - \mu\cdot\Delta x_2 = -r_2,\\
&\quad . \qquad (2)\\
&a_{n1}\Delta x_1 + a_{n2}\Delta x_2 + \ldots + a_{nn}\Delta x_n - \Delta\mu\cdot x_n^{(0)} - \mu\cdot\Delta x_n = -r_n.
\end{aligned}
$$

Получили систему n линейных алгебраических уравнений с $(n+1)$ неизвестным $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n, \Delta\mu$. Без нарушения общности можно считать, что первая компонента вектора Δx равна нулю, поскольку собственный вектор x определен с точностью до постоянного множителя. Тогда система (2) примет вид

$$
\begin{aligned}
&-x_1^{(0)}\cdot\Delta\mu + a_{12}\Delta x_2 + \ldots + a_{1n}\Delta x_n = -r_1,\\
&-x_2^{(0)}\cdot\Delta\mu + (a_{22}-\mu)\Delta x_2 + \ldots + a_{2n}\Delta x_n = -r_2,\\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)\\
&-x_n^{(0)}\cdot\Delta\mu + a_{n2}\Delta x_2 + \ldots + (a_{nn}-\mu)\Delta x_n = -r_n.
\end{aligned}
$$

Решив систему (3) любым из известных методов, например, по схеме последовательного исключения неизвестных метода Гаусса, найдем поправки $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n, \Delta\mu$.

При необходимости описанный процесс может быть повторен.

Пример. Уточнить собственное значение и принадлежащий ему собственный вектор для матрицы из примера п. 5.5.1.

Решение. Примем

$$\mu = -17.39 \text{ и } x^{(0)} = (1.00000, -8.14472, 7.91426)^{\mathrm{T}}.$$

Вычислим невязку по формуле (1)

$$r = (-0.00420498, 0.0592605, -0.0630314)^{\mathrm{T}}.$$

Построим систему вида (3) и определим из нее $\Delta\mu$, Δx_2, Δx_3 по схеме единственного деления метода Гаусса.

Результаты расчетов представлены в табл. 2.

Таким образом,

$$\Delta\mu = -0.007658,\ \Delta x_2 = -0.00253,\ \Delta x_3 = 0.00301.$$

Таблица 2

– 1	1,870086	0,422908	0,00420498	1,297199
8,14472	5,578346	5,711900	–0,05926046	19,375706
– 7,91426	4,308033	4,419313	0,06303143	0,8761174
1	– 1,870086	– 0,422908	– 0,0042049	– 1,297199
	20,809673	9,156367	– 0,02501208	29,941029
	– 10,492314	1,072309	0,02975214	– 9,390253
	1	0,4400053	– 0,00120195	1,438804
		5,6889803	0,01714090	5,706124
		1	0,00301300	1,0030130
	1		– 0,0025277	0,9974724
1			– 0,0076578	0,9923423

Следовательно, уточненные значения равны

$$\lambda = -17.397658\,,\ x = (1.0000, -8.14725, 7.91727)^{\mathrm{T}}.$$

5.5.3. *Метод Маянца*

Представим данную матрицу A в блочном виде:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & V \\ W & B \end{pmatrix},$$

где B — подматрица $(n-1)$-го порядка.

Будем предполагать, что первая компонента подлежащего определению собственного вектора матрицы A, отвечающего некоторому собственному значению μ, не является исчезающе малой по сравнению с остальными, так что без нарушения общности можно считать ее равной единице и искать собственный вектор в виде $x = (1, z)^{\mathrm{T}}$. Тогда матричное уравнение $Ax = \mu x$ можно заменить эквивалентной системой

$$\alpha + Vz = \mu\,,$$

$$W + Bz = \mu z\,. \qquad (1)$$

Из второго уравнения системы (1) находим

$$z = -(B - \mu E)^{-1} W. \tag{2}$$

После подстановки (2) в первое уравнение системы (1), получим относительно μ нелинейное алгебраическое уравнение вида

$$F(\mu) = \mu - \alpha + V(B - \mu E)^{-1} W = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) можно решать любым известным итерационным методом, например методом Ньютона. Согласно этому методу, начиная с некоторого начального приближения μ_0, строятся последовательные приближения по правилу

$$\mu_k = \mu_{k-1} - \frac{F(\mu_{k-1})}{F'(\mu_{k-1})}. \tag{4}$$

Этот процесс имеет квадратичную сходимость. С учетом явного выражения для функции $F(\mu)$ формула (4) может быть преобразована к виду

$$\mu_k = \mu_{k-1} - \frac{\mu_{k-1} - \alpha + V(B_{k-1})^{-1} W}{1 + V(B_{k-1})^{-2} W}. \tag{5}$$

Здесь введено обозначение $B_{k-1} = B - \mu_{k-1} E$.

Формулу (5) можно преобразовать, заменив матричные умножения скалярными произведениями векторов

$$\mu_k = \mu_{k-1} - \frac{\mu_{k-1} - \alpha + (V^{\mathrm{T}}, B_{k-1}^{-1} W)}{1 + (V^{\mathrm{T}}, B_{k-1}^{-2} W)}. \tag{5$'$}$$

При использовании этой формулы нужно на каждом шаге вычислять векторы $z^{(k-1)} = B_{k-1}^{-1} W$ и $B_{k-1}^{-1} z^{(k-1)}$.

Из равенства (2) следует, что вспомогательные векторы $z^{(k)}$ сходятся к вектору, составленному из взятых с обратными знаками компонент (кроме первой) собственного вектора матрицы A.

Если матрица A симметрическая, формула (5) упрощается

$$\mu_k = \mu_{k-1} - \frac{\mu_{k-1} - \alpha + (W, z^{(k-1)})}{1 + (z^{(k-1)}, z^{(k-1)})}, \tag{5$''$}$$

где $z^{(k)}$ — по-прежнему решение системы $B_k z^{(k)} = W$.

Пример. Уточнить собственное значение и принадлежащий ему собственный вектор для матрицы из примера п. 5.5.1.

Решение. Пусть найдено приближение $\mu_0 = -17.39$, $x^{(0)} = (1.00000, -8.14472, 7.91426)^{\mathrm{T}}$.

Предположим, что вторая строка и второй столбец матрицы A будут играть "особую" роль, т. е. что вторая компонента определяемого собственного вектора не является исчезающе малой. Тогда

$$\alpha = -11.811654,$$

$$V = (0.287865, 5.711900)^{\mathrm{T}}, \quad W = (1.870086, 4.308033)^{\mathrm{T}},$$

$$B = \begin{pmatrix} -5.509882 & 0.422908 \\ 0.049099 & -12.970687 \end{pmatrix}.$$

Обозначив $B_0 = B - \mu_0 E$, получим

$$B_0 = \begin{pmatrix} 11.880118 & 0.422908 \\ 0.049099 & 4.419313 \end{pmatrix}.$$

Далее вычислим векторы

$$z^{(0)} = B_0^{-1} W = \begin{pmatrix} 0.12276004 \\ 0.97345574 \end{pmatrix}, \; B_0^{-1} z^{(0)} = \begin{pmatrix} 2.49294679 \cdot 10^{-3} \\ 0.2202454 \end{pmatrix}.$$

Теперь по формуле (5) получим первое приближение к уточненному собственному значению $\mu_1 = -17.39764771$.

Следующее приближение дает

$$B_1 = \begin{pmatrix} 11.88776571 & 0.422908 \\ 0.049099 & 4.42696071 \end{pmatrix}, \quad z^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.12274088 \\ 0.97345574 \end{pmatrix},$$

$$\mu_2 = -17.39765505.$$

Окончательно получим $\mu = -17.39765507$,

$$x = (-0.12274087, 1.00000000, -0.97177266)^{\mathrm{T}}.$$

После нормирования собственный вектор примет вид

$$x = (1.00000000, -8.14724549, 7.91727043)^{\mathrm{T}}.$$

5.5.4. *Метод возмущений*

Метод возмущений разработан для симметричных матриц М. К. Гавуриным.

Пусть симметричная матрица A_0 имеет простое собственное значение μ_0 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(0)}$. Обозначим через z вектор, ортогональный $x^{(0)}$. Определим матрицу R условиями $R(A_0-\mu_0 E)\, z=z$ и $R\, x^{(0)}=0$.

Пусть A — некоторая другая симметричная матрица, μ — ее собственное значение и $\boldsymbol{x}$ — принадлежащий ему собственный вектор, причем такой, что $(x, x^{(0)})\neq 0$. Последнее обстоятельство позволяет предположить, что справедливо соотношение $x=x^{(0)}+v$, где $(v, x^{(0)})=0$.

Обозначим $B=A-A_0$, $\lambda=\mu-\mu_0$.

Для введенных величин выполняется цепочка равенств

$$(\lambda E-B)x=((\mu-\mu_0)E-(A-A_0))x=$$

$$=(\mu E-A)\,x-(\mu_0 E-A_0)\,x=(A_0-\mu_0 E)\,x. \qquad (1)$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$((\lambda E-B)\,x, x^{(0)})=((A_0-\mu_0 E)\,x, x^{(0)})=$$

$$=(x,(A_0-\mu_0 E)\,x^{(0)})=0. \qquad (2)$$

Далее

$$(E-R(\lambda E-B))\,x=x-R\,(A_0-\mu_0 E)\,x=$$

$$=x-R\,(A_0-\mu_0 E)(x+x^{(0)})= \qquad (3)$$

$$=x-R\,(A_0-\mu_0 E)\,x^{(0)}-R\,(A_0-\mu_0 E)\,v=x-v=x^{(0)}.$$

Из формулы (3) следует, что

$$x=(E-R\,(\lambda E-B))^{-1}\,x^{(0)}. \qquad (4)$$

Правую часть формулы (4) можно разложить в ряд, основываясь на известной формуле из математического анализа:

$$(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} t^{k-1} .$$

Кроме того, полагая $|\lambda|$ и $\|B\|$ достаточно малыми, ограничимся в разложении членами второго порядка

$$x \approx x^{(0)} - RBx^{(0)} + \lambda R x^{(0)} + RBRBx^{(0)} - \lambda R^2 B x^{(0)} .$$

По нашему предположению, $Rx^{(0)} = 0$, тогда приближенная формула примет вид

$$x \approx x^{(0)} - RBx^{(0)} + RBRBx^{(0)} - \lambda R^2 B x^{(0)} . \qquad (5)$$

Подставим полученное выражение в левую часть (2) и окончательно будем иметь

$$\lambda \approx \frac{(Bx^{(0)}, x^{(0)}) - (RBx^{(0)}, Bx^{(0)}) + (BRBx^{(0)}, RBx^{(0)})}{\left\| x^{(0)} \right\|^2 + \left\| RBx^{(0)} \right\|^2} . \qquad (6)$$

По формулам (5) и (6), позволяющим уточнить собственный вектор и собственное значение, можно повторять процесс до получения требуемой точности.

Пример. Уточнить собственное значение и собственный вектор матрицы, рассмотренной ранее в примере п. 5.3.3.

Решение. Выберем вектор $x^{(0)} = (0.8, 0.2, -0.5, -0.6)^{\mathrm{T}}$ в качестве приближения к собственному вектору матрицы A, отвечающему некоторому собственному значению $\lambda^{(0)}$. Нормируем его к единичной длине и обозначим нормированный вектор

$$X^{(0)} = (0.704361, 0.176090, -0.440225, -0.528271)^{\mathrm{T}} .$$

Приближенное значение собственного числа равно

$$\lambda^{(0)} = (AX^{(0)}, X^{(0)}) = 0.248992 .$$

Обозначим через r невязку $r = AX^{(0)} - \lambda^{(0)} X^{(0)}$. Построим симметрическую матрицу

$$A_0 = A - X^{(0)} r^{\mathrm{T}} - r\,(X^{(0)})^{\mathrm{T}} .$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\lambda^{(0)}$ является собственным значением матрицы A_0, а $X^{(0)}$ — ее собственным вектором, принадлежащим собственному значению $\lambda^{(0)}$. С учетом обозначений, принятых в данном параграфе, $r = B X^{(0)}$.

Приближенные формулы (5) и (6) примут в рассматриваемом случае более простой вид:

$$x \approx X^{(0)} - R\,r - \lambda R^2 r, \qquad (5')$$

$$\lambda \approx -\frac{(R\,r,\ r)}{1 + \|R\,r\|^2}. \qquad (6')$$

Векторы Rr и R^2r находятся соответственно из решения следующих систем уравнений:

$$(A_0 - \lambda^{(0)} E)\,v = r, \qquad (v,\ X^{(0)}) = 0; \qquad (7)$$

$$(A_0 - \lambda^{(0)} E)\,v = R\,r, \qquad (v,\ X^{(0)}) = 0. \qquad (8)$$

Поскольку $\left| A_0 - \lambda^{(0)} E \right| = 0$, одно из четырех первых уравнений в системах (7) и (8) может быть отброшено и использовано лишь для контроля.

Если в формуле (5') отбросить слагаемое $\lambda R^2 r$ второго порядка малости, то нет необходимости решать систему (8).

После однократного применения формул (5') и (6') и нормирования получим

$$X^{(1)} = (0{,}718839;\ 0{,}095717;\ -0{,}387445;\ -0{,}569206)^{\mathrm{T}},$$

$$\lambda^{(1)} = 0{,}24226072.$$

Напомним, что собственная пара, найденная ранее прямым методом вращений, равнялась

$$x = (0{,}718846;\ 0{,}095699;\ -0{,}387435;\ -0{,}569207)^{\mathrm{T}},$$

$$\lambda^{(1)} = 0{,}24226071.$$

Упражнения

Упражнение 1. Методом А. Н. Крылова раскрыть характеристические многочлены следующих матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 9 & 22 & -4 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Упражнение 2. Методом А. М. Данилевского раскрыть характеристические многочлены следующих матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Упражнение 3. Методом интерполяции раскрыть характеристические многочлены матриц из упражнений 1 и 2.

Упражнение 4. Методом Фаддеева раскрыть характеристические многочлены матриц из упражнений 1 и 2.

Упражнение 5. Методом итераций найти собственные значения и собственные векторы следующих матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 12 & 22 & -22 \\ 22 & 45 & -44 \\ -22 & -44 & 45 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ -6 & 9 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} 18 & 6 & -6 \\ 6 & 21 & 0 \\ -6 & 0 & 16 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$;

Упражнение 6. Методом вращений найти собственные значения и собственные векторы следующих матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} 11 & -7 & -9 \\ -7 & 11 & 9 \\ -9 & 9 & 27 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

Упражнение 7. Методом Якоби найти собственные значения и собственные векторы следующих матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i & 0 \\ 2-2i & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i & 0 \\ 2+i & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

;

4) $A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i & 0 \\ 2-2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Упражнение 8. С помощью QR-алгоритма найти характеристические числа следующих матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}44 & -22 & 26\\ -22 & 29 & -4\\ 26 & -4 & 53\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -12\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}9 & -16 & -8\\ -16 & 33 & 16\\ -8 & 16 & 9\end{pmatrix}$; 5) $A=\begin{pmatrix}13 & 14 & -4\\ 14 & 24 & -18\\ -4 & -18 & 29\end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 9\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$;

Упражнение 9. Степенным методом найти наибольшие по абсолютной величине собственные значения и соответствующие им собственные векторы следующих матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}6 & -5 & -3\\ 3 & -2 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}7 & 1 & 1\\ 1 & 7 & 1\\ 1 & 1 & 7\end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$; 5) $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$;

Упражнение 10. Степенным методом в комбинации с методом исчерпывания найти собственные значения и соответствующие им собственные векторы следующих матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix} 29 & -16 & -4 \\ -16 & 17 & 16 \\ -4 & 16 & 29 \end{pmatrix}$; 5) $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$;

Упражнение 11. Методом скалярных произведений найти наибольшие по абсолютной величине собственные значения и соответствующие им собственные векторы следующих матриц:

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 5) $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

Упражнение 12. Методом скалярных произведений в комбинации с методом исчерпывания найти собственные значения и соответствующие им собственные векторы следующих матриц:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$; 5) $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$;

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. — М. : Наука, 1977.
2. *Бахвалов Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М. : Наука, 1987.
3. *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. — СПб. : Лань, 2008.
4. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М. : Наука, 1984.
5. *Березин И. С.* Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. — М. : Наука, 1966. Т. 1.
6. *Березин И. С.* Методы вычислений / И.С. Березин, Н. П. Жидков. — М. : Наука, 1960. Т. 2.
7. *Воеводин В. В.* Вычислительные основы линейной алгебры. — М. : Наука, 1977.
8. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. — СПб. : Лань, 2009.
9. *Воеводин В. В.* Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры. — М. : Изд-во МГУ, 1969.
10. *Воеводин В. В.* Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы. — М. : Наука, 1966.
11. *Воеводин В. В.* Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. — М. : Наука, 1984.
12. *Гантмахер Ф. Л.* Теория матриц. — М. : Наука, 1967.
13. *Голуб Дж.* Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ван Ч. Лоун. — М. : Мир, 1999.
14. *Демидович Б. П.* Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — СПб. : Лань, 2009.
15. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. — М. : Мир, 2001.
16. Зарубежные библиотеки программ по численным методам. — М. : Мир, 1992.
17. *Икрамов Х. Д.* Задачник по линейной алгебре. — СПб. : Лань, 2006.
18. *Икрамов Х. Д.* Несимметричная проблема собственных значений. Численные методы. — М. : Наука, 1991.
19. *Ильин В. А.* Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позднякс. — М. : Наука, 1974.
20. *Каханер Д.* Численные методы и программное обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. — М. : Мир, 2001.

21. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. — М. : Наука, 1968.
22. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — СПб. : Лань, 2008.
23. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М. : Наука, 1978.
24. *Лоусон Ч.* Численное решение задач метода наименьших квадратов / Ч. Лоусон, Р. Хенсон. — М. : Наука, 1986.
25. Математическая экономика на персональном компьютере / Под ред. М. Кубонива. — М. : Финансы и статистика, 1991.
26. *Неймарк Ю. И.* Новые технологии применения метода наименьших квадратов / Ю. И. Неймарк, Л. Г. Теклина. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2003.
27. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. — М. : Мир, 1983.
28. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. — СПб. : Лань, 2010.
29. *Самарский А. А.* Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М. : Наука, 1989.
30. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее приложения. — М. : Мир, 1980.
31. *Тыртышников Е. Е.* Методы численного анализа: учеб. пособие для студ. вузов. — М. : Изд. центр «Академия», 2007.
32. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. — М. : Наука, 1970.
33. *Уилкинсон Дж.* Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра / Дж. Уилкинсон, К. Райнш. М. : Машиностроение, 1976.
34. *Фаддеев Д. К.* Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В .Н. Фаддеева. — СПб. : Лань, 2009.
35. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малкольм, К. Моулер. — М. : Мир, 1980.
36. *Хорн Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М. : Мир, 1989.
37. *Цюрупа Н. Н.* Практикум по коллоидной химии. — М. : Высш. шк., 1963.
38. *Шевцов Г. С.* Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты / 2-е изд. — М. : Магистр; ИНФРА-М, 2010.
39. http://www.nag.co.uk
40. http://www.netlib.org/lapack
41. http://www.nr.com
42. http://sources.redhat.com/gsl
43. http://www.srcc.msu.su/num_anal
44. http://www.matlab.ru
45. http://www.mathworks.com

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Георгий Семенович ШЕВЦОВ
Ольга Георгиевна КРЮКОВА
Бэла Исаковна МЫЗНИКОВА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

Издание второе,
исправленное и дополненное

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 17.06.11.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Формат 84×108 $^{1}/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 26,04. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru