ФИЗИКА

П. Я. Уфимцев

# ОСНОВЫ физической теории дифракции

Издательство БИНОМ

# Основы физической теории дифракции

# Fundamentals of the Physical Theory of Diffraction

Pyotr Ya. Ufimtsev

BICENTENNIAL 1807 WILEY 2007 BICENTENNIAL

WILEY-INTERSCIENCE
A JOHN WILEY & SONS, INC., PUBLICATION

П. Я. Уфимцев

# Основы физической теории дифракции

Авторский перевод с английского
П. Я. Уфимцева

3-е издание (электронное)

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2015

УДК 535
ББК 22.343
У88

**Уфимцев П. Я.**

У88 Основы физической теории дифракции [Электронный ресурс] / П. Я. Уфимцев ; пер. с англ. — 3-е изд. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 353 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-2996-0

В книге изучается дифракция акустических и электромагнитных волн на телах, бóльших по сравнению с длиной волны. Развитая в ней асимптотическая теория может быть полезна при решении разнообразных дифракционных задач, возникающих, например, в таких областях техники, как проектирование микроволновых антенн, конструирование акустических барьеров для снижения уровня шумов, мобильная и спутниковая радиосвязь, стелс-технология по созданию объектов, невидимых для радаров и сонаров.

Для научных сотрудников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов старших курсов, изучающих дифракционные явления в таких дисциплинах, как акустика, оптика, радиофизика, математическая физика и т. д.

**УДК 535**
**ББК 22.343**

**Деривативное электронное издание на основе печатного аналога**: Основы физической теории дифракции / П. Я. Уфимцев ; пер. с англ. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. — 350 с. : ил. — ISBN 978-5-94774-919-9.



**ISBN 978-5-9963-2996-0**

# Оглавление

**Предисловие** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **10**

**Предисловие автора к американскому изданию** . . . . . . . . . . **15**

**Благодарности** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **17**

**Введение** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **18**

**Глава 1. Основные понятия в теории дифракции акустических и электромагнитных волн** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **23**

1.1. Формулировка дифракционных задач . . . . . . . . . . . . . . 23
1.2. Рассеянное поле в дальней зоне . . . . . . . . . . . . . . . . . 25
1.3. Физическая оптика . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29
1.3.1. Определение физической оптики . . . . . . . . . . . . . . 29
1.3.2. Полный поперечник рассеяния . . . . . . . . . . . . . . . 32
1.3.3. Оптическая теорема . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
1.3.4. Теневое излучение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
1.3.5. Теорема о теневом контуре и полный поперечник рассеяния . 39
1.3.6. Перечень свойств физической оптики . . . . . . . . . . . 42
1.4. Неравномерная компонента поверхностного поля . . . . . . . 43
1.5. Электромагнитные волны . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46
Задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

**Глава 2. Дифракция на клине: точное решение и асимптотики** . . . . . **53**

2.1. Классические решения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53
2.2. Возбуждение плоской волной . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
2.3. Преобразование рядов в интегралы Зоммерфельда . . . . . . . 60
2.4. Лучевые асимптотики Зоммерфельда . . . . . . . . . . . . . . 65
2.5. Асимптотики Паули . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67
2.6. Равномерные асимптотики: обобщение метода Паули . . . . . . 72
2.7. Комментарии к альтернативным асимптотикам . . . . . . . . . 76
Задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77

**Глава 3. Дифракция на клине: приближение физической оптики** . . . . **80**

3.1. Исходные интегралы физической оптики . . . . . . . . . . . . 80
3.2. Преобразование интегралов ФО в каноническую форму . . . . . 83

3.3. Лучевые асимптотики для дифракционного поля в приближении ФО . . . . . 87
Задачи . . . . . 89

**Глава 4. Дифракция на клине: поле, излучаемое неравномерной компонентой поверхностных источников . . . . . 90**
4.1. Интегралы и асимптотики. . . . . 90
4.2. Интегральная форма функций $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ . . . . . 95
4.3. Наклонное падение плоской волны на клин . . . . . 97
4.3.1. Акустические волны . . . . . 97
4.3.2. Поляризационная связь электромагнитных волн . . . . . 101
Задачи . . . . . 104

**Глава 5. Первичная дифракция на лентах и полигональных цилиндрах . . . . . 105**
5.1. Дифракция на ленте . . . . . 105
5.1.1. Приближение физической оптики для рассеянного поля . . . . . 106
5.1.2. Полное рассеянное поле . . . . . 109
5.1.3. Численный анализ рассеянного поля . . . . . 113
5.1.4. ФТД первого порядка с усеченными источниками $j_h^{(1)}$ . . . . . 116
5.2. Дифракция на трехгранном цилиндре . . . . . 121
5.2.1. Симметричное рассеяние: приближение ФО . . . . . 121
5.2.2. Обратное рассеяние: приближение ФО . . . . . 124
5.2.3. Симметричное рассеяние: ФТД первого порядка . . . . . 126
5.2.4. Обратное рассеяние: ФТД первого порядка . . . . . 129
5.2.5. Численный анализ рассеянного поля . . . . . 131
Задачи . . . . . 133

**Глава 6. Осесимметричное рассеяние акустических волн на телах вращения . . . . . 137**
6.1. Дифракция на канонической конической поверхности . . . . . 137
6.1.1. Интегралы для рассеянного поля . . . . . 138
6.1.2. Лучевые асимптотики . . . . . 140
6.1.3. Фокусировка краевызх волн . . . . . 146
6.1.4. Интерполяция для поля $u_{s,h}^{(1)}$ с помощью функций Бесселя . . . . . 148
6.2. Рассеяние на диске . . . . . 149
6.2.1. Приближение физической оптики . . . . . 150
6.2.2. Поле, излучаемое неравномерными поверхностными источниками . . . . . 152
6.2.3. Полное рассеянное поле . . . . . 154
6.3. Рассеяние на конусах: поле на фокальной линии . . . . . 156
6.3.1. Асимптотики . . . . . 156
6.3.2. Численный анализ обратного рассеяния . . . . . 160
6.4. Тела вращения с ненулевой гауссовой кривизной: обратное рассеяние . . . . . 163

6.4.1. Приближение ФО . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 164
6.4.2. Обратное рассеяние. Поле на фокальной линии: ФТД первого порядка . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 166
6.4.3. Обратное рассеяние от параболоидов . . . . . . . . . 167
6.4.4. Обратное рассеяние от сферических сегментов . . . . . . . 172
6.5. Тела вращения с ненулевой гауссовой кривизной: осесимметричное бистатическое рассеяние . . . . . . . . . . . . . . . . . . 175
6.5.1. Лучевые асимптотики для поля в приближении ФО . . . . . 177
6.5.2. Приближение ФО: интерполяция с функциями Бесселя для поля в области $\pi - \omega \le \vartheta \le \pi$ . . . . . . . . . . . . . . . . . 180
6.5.3. Приближение ФТД: интерполяция с функциями Бесселя для поля в области $\pi - \omega \le \vartheta \le \pi$ . . . . . . . . . . . . . . . . . 181
6.5.4. ФТД-асимптотики для поля в области $2\omega \le \vartheta \le \pi - \omega$ вдали от геометрооптической границы $\vartheta = 2\omega$ . . . . . . . . 182
6.5.5. Равномерные асимптотики для поля ФО в лучевой области $2\omega < \vartheta \le \pi - \omega$, включая ее границу $\vartheta = \mathbf{2}\omega$ . . . . . . . . . . 182
6.5.6. Аппроксимация ФО-поля в области тени для отраженных лучей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 186
Задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 187
**Глава 7. Элементарные акустические и электромагнитные краевые волны . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 189**
7.1. Элементарные полоски на каноническом клине . . . . . . . . . . 190
7.2. Интегральные представления для неравномерных компонент поверхностных источников $j_{s,h}^{(1)}$ . . . . . . . . . . . . . . . . 192
7.3. Трехкратные интегралы для элементарных краевых волн . . . . . 195
7.4. Преобразование трехкратных интегралов в однократные . . . . . . 198
7.5. Асимптотики для элементарных краевых волн . . . . . . . . . . 203
7.6. Аналитические свойства элементарных краевых волн . . . . . . . 207
7.7. Численные расчеты элементарных краевых волн . . . . . . . . . 211
7.8. Электромагнитные элементарные краевые волны . . . . . . . . . 214
7.9. Устранение сингулярностей при скользящих направлениях $\varphi_0 = \pi$ и $\varphi_0 = \alpha - \pi$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 218
7.9.1. Акустические волны . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 219
7.9.2. Электромагнитные ЭКВ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 224
7.10. Некоторые публикации других авторов, имеющие отношение к элементарным краевым волнам . . . . . . . . . . . . . . . . . 229
Задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 230
**Глава 8. Лучевые и каустические асимптотики для краевых дифракционных волн . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 234**
8.1. Лучевые асимптотики . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 234
8.1.1. Акустические волны . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 234
8.1.2. Электромагнитные волны . . . . . . . . . . . . . . . . . 239
8.1.3. Комментарии к лучевым асимптотикам . . . . . . . . . . . 240

8.2. Каустические асимптотики . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 242
8.2.1 Акустические волны . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 242
8.2.2. Электромагнитные волны. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 246
Задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 248

**Глава 9. Многократная дифракция краевых волн: скользящее падение и дифракция волн с нулем диаграммы направленности (*slope diffraction*). . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 250**

9.1. Постановка задачи и библиография. . . . . . . . . . . . . . . . 250
9.2. Дифракция скользящих волн . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 251
9.2.1. Акустические волны . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 252
9.2.2. Электромагнитные волны. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 256
9.3. Дифракция волн с нулем диаграммы направленности (*slope diffraction*) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 257
9.3.1. Акустические волны . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 257
9.3.2. Электромагнитные волны. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 260
9.4. Дифракция волн с нулем диаграммы направленности: общий случай *slope diffraction* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 261
9.4.1. Акустические волны . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 261
9.4.2. Электромагнитные волны. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 264
Задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 267

**Глава 10. Дифракционное взаимодействие краев на линейчатой поверхности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 268**

10.1. Дифракция на акустически жесткой поверхности . . . . . . . . . 269
10.2. Дифракция на акустически мягкой поверхности . . . . . . . . . . 271
10.3. Дифракция электромагнитных волн . . . . . . . . . . . . . . . . 273
Задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 275

**Глава 11. Фокусировка многократных краевых волн при дифракции на выпуклых телах вращения с плоским торцом . . . . . . . 276**

11.1. Постановка задачи и ее характерные черты. . . . . . . . . . . . 276
11.2. Многократная дифракция на акустически жестком теле. . . . . . 278
11.3. Многократная дифракция на акустически мягком теле . . . . . . 279
Задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 281

**Глава 12. Фокусировка многократных краевых волн при дифракции на диске . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 282**

12.1. Многократная дифракция на акустически жестком диске . . . . . 282
12.2. Многократная дифракция на акустически мягком диске . . . . . 285
12.3. Многократная дифракция электромагнитных волн . . . . . . . . . 289
Задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 290

**Глава 13. Обратное рассеяние на цилиндре конечной длины . . . . . . 291**

13.1. Акустические волны . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 291
13.1.1. Приближение физической оптики . . . . . . . . . . . . . . . 291

13.1.2. Поле, создаваемое неравномерной компонентой $j^{(1)}$ . . . . 295
13.1.3. Полное рассеянное поле . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 299
13.2. Электромагнитные волны . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 301
13.2.1. *E*-поляризация . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 301
13.2.2. *H*-поляризация . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 305
Задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 307

**Глава 14. Бистатическое рассеяние на цилиндре конечной длины . . . 309**
14.1. Акустические волны . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 309
14.1.1. Приближение физической оптики . . . . . . . . . . . . . . . 310
14.1.2. Теневое излучение как компонента рассеянного поля . . . 313
14.1.3. ФТД для поля, рассеянного жестким цилиндром . . . . . . 314
14.1.4. Пучки и лучи в рассеянном поле . . . . . . . . . . . . . . . 318
14.1.5. Уточненные асимптотики для пучка, зеркально отраженного от цилиндрической поверхности . . . . . . . . 321
14.2. Электромагнитные волны . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 325
14.2.1. *E*- поляризация . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 325
14.2.2. *H*-поляризация . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 327
14.2.3. Уточненные асимптотики для пучка, зеркально отраженного от цилиндрической поверхности . . . . . . . 329
Задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 332

**Заключение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 335**

**Литература . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 336**

**Предметный указатель . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 346**

# Предисловие

*Ideas have consequences. Great ideas have far-reaching consequences*.
(Идеи имеют последствия. Великие идеи имеют далеко идущие последствия.)

Физическая теория дифракции (ФТД), предложенная профессором Уфимцевым в 1950-е годы, — методология для приближенной оценки высокочастотного рассеяния на телах, особенно на телах сложной формы — убедительно доказала, что она действительно является великой идеей.

Первая форма ФТД, развитая профессором Уфимцевым, ее векторная форма, применимая для рассеяния электромагнитных волн на трехмерных телах, играла ключевую роль в развитии современных систем вооружения с низкой радиолокационной видимостью, таких как *Lockheed F-117 Stealth Fighter* и *Northrop B-2 Stealth Bombe*r, функционирующих и как реальные инструменты, и как концепции проектов. Эти системы в результате оказали революционное воздействие на методы ведения крупномасштабных войн и тем самым способствовали формированию истории.

Бен Рич, который руководил проектом F-117 в легендарном отделе «Работы Скунса» в корпорации Локхид (*Lockheed*), ссылается на теорию профессора Уфимцева как на «Rosetta Stone»[1], позволивший осуществить прорыв в стелс-технологии.

В Нортропе (*Northrop*), где я работал над проектом *B-2*, мы были такими энтузиастами ФТД, что коллеги и я иногда напевали хором «Вперед, Уфимцев» на мотив «Вперед, Висконсин». Как в Локхиде, так и в Нортропе мы называли ФТД как «*industrial-strength diffraction theory*», в отличие от другой теории, имеющей к себе благосклонное отношение в университетах, но недостаточно развитой для решения проблем стелс-дизайна.

Как и многие хорошие теории, ФТД намного легче применить, чем объяснить. Тем не менее, давайте рассмотрим внутренний механизм ФТД, чтобы понять, почему она является таким полезным инструментом. Во-первых, ФТД

[1] «Rosetta Stone» (Розетский камень) — это базальтовый камень с древними письменами, найденный археологами в 1799 г. Один и тот же текст был записан на нем дважды, египетскими иероглифами и греческими буквами. В результате этот камень помог расшифровать египетские иероглифы. — *Прим. перев.*

основана на двух важных принципах, которые удобно называть здесь как *физический принцип* и *геометрический принцип*.

Физический принцип показывает, как рассеянное поле вне рассеивающего тела может быть определено с помощью интеграла от соответствующих величин поля на поверхности тела. В акустике такими величинами являются давление на жесткой (*hard*) поверхности и нормальная скорость на мягкой (*soft*) поверхности, а также обе эти величины на импедансной границе или на теле с проницаемой поверхностью.

Геометрический принцип утверждает, что на достаточно высокой частоте (когда длина волны достаточно мала по сравнению с характерными размерами тела) поверхностные интегралы могут быть вычислены асимптотически и дают представление для рассеянного поля в форме геометрических лучей, включая дифракционные лучи. Изменение амплитуды поля вдоль луча можно вычислить геометрически, прослеживая расходимость и сходимость лучевых пучков, всюду за исключением окрестностей (а) геометрической границы тени, где такой подход предсказывает скачок поля, и (б) каустики, т. е. геометрического места точек, где соседние лучи встречаются или пересекаются (как в простейшем случае в точке фокуса), и где лучевой расчет предсказывает бесконечно большое поле. Правильная величина поля в этих областях, которые сужаются с повышением частоты, может быть найдена с использованием равномерных асимптотических методов для оценки поверхностных интегралов.

Одной из важных черт ФТД является ее способность аккуратно вычислить поле вблизи границ тени и каустик. Это особенно важно при проектировании объектов с низкой радиолокационной видимостью, поскольку мы часто интересуемся дальним полем при рассеянии плоской волны на теле с прямыми или слегка искривленными краями, когда часть рассеянного поля оказывается в каустических областях.

Другое важное преимущество ФТД является следствием того, как она оперирует с поверхностными полями. В них выделяются *равномерная* компонента, *которая определена всюду на поверхности*, и *неравномерная* компонента, которая является поправочной величиной. В электродинамике равномерная компонента обычно, хотя и не всегда, определяется приближением физической оптики (ФО). А именно, поверхностное поле в данной точке считается таким же, как если бы эта точка находилась на бесконечной плоскости, касательной к реальному телу в данной точке. При этом предполагается, что на такой плоскости выполняюся те же самые граничные условия, что и на реальном теле в точке касания. В акустике равномерная компонента определяется аналогичным образом. Поскольку в акустике нет твердо установленного термина для этой компоненты, и поскольку уже существует прецедент, предложенный другими авторами, профессор Уфимцев использует терминологию ФО как в электродинамике, так и в акустике на протяжении всей книги. Значительная часть главы 1 посвящена ФО и ее роли в некоторых аспектах теории дифракции.

Неравномерные компоненты поверхностного поля на непрозрачных телах, таких, например, как жесткое тело в акустике или идеальный проводник в электродинамике, концентрируются вблизи тех элементов тела, где происходит наиболее интенсивный процесс дифракции. Такими элементами являются, например, линии (ребра), где смыкаются две грани на поверхности фасетчатого тела. Неравномерные компоненты поля, возникающие вблизи таких элементов, обычно быстро уменьшаются с расстояним от них. Нужно подчеркнуть, что такое желаемое поведение является также и следствием подходящего выбора (определения) равномерной компоненты поля.

Неравномерные компоненты поверхностного поля находятся с использованием решения более простых задач рассеяния, часто называемых *каноническими задачами*. Рассмотрим, например, опять задачу о рассеянии на ребре фасетчатой поверхности. Предположим, что тело является идеальным проводником, ребро есть прямая линия, а угол между его двумя гранями остается постоянным вдоль ребра. Пусть далее поле, освещающее тело, есть плоская волна, и давайте выберем ФО-поле на поверхности в качестве равномерной компоненты. Тогда канонической задачей будет дифракция подходящим образом ориентированной плоской волны на бесконечном клине с идеально проводящими плоскими гранями (даже если грани на рассматриваемом теле не являются плоскими). Эта задача сводится к двум скалярным двухмерным задачам: одна для падающей волны с электрическим вектором, нормальным к ребру, и другая — для падающей волны с магнитным вектором, нормальным к ребру. Для этих задач существуют строгие решения. Векторные поверхностные поля конструируются из двух таких скалярных решений, а неравномерные компоненты этих полей, обусловленные наличием ребра, находятся путем вычитания полей физической оптики из полного решения векторной задачи.

Теперь возникает проблема согласования равномерной компоненты и неравномерной компоненты, когда последняя определена на поверхности, которая может и не совпадать точно с поверхностью реального рассеивающего тела. Профессор Уфимцев рассматривает эту проблему в главе 7, где он представляет поле, излучаемое неравномерной компонентой, в виде множества *элементарных краевых волн*, непрерывно распределенных вдоль ребра. Эти элементарные краевые волны являются источниками дифракционных лучей и имеют диаграммы направленности, соответствующие канонической задаче. Пользуясь инженерной терминологией, эти диаграммы можно было бы назвать *дифракционными коэффициентами*.

Теперь вклад неравномерной компоненты в поле, дифрагированное на ребре, описывается интегралом от элементарных краевых волн по длине ребра. Но когда мы оцениваем асимптотически интеграл для поля, создаваемого равномерной компонентой, распределенной по всей грани ребра (т. е. оцениваем интеграл, соответствующий приближению физической оптики), мы видим, что он сводится к интегралу по периметру освещенной грани плюс, возможно, к другим локальным вкладам (таким как зеркальное отражение). Следовательно, равномерные компоненты поверхностного поля на обеих гранях ребра (если они обе освещены) также вносят свои два вклада в краевую дифракционную волну. Таким образом, эти три вклада образуют полное поле краевой волны. Важно также отметить, что каждый элемент ребра излучает дифракционные волны во всех направлениях.

Проведенное исследование того, как моделируются поверхностные поля, позволяет теперь сформулировать следующие важные свойства ФТД:

- ФТД может аккуратно описывать отражение и дифракцию на телах сложной формы без согласования всего тела с геометрией канонической задачи, осуществляя такое согласование только в тех областях, где возникает дифракция.
- ФТД минимизирует трудности согласования геометрии тела и геометрии канонической задачи.
- ФТД оперирует с дифракционными лучами, расходящимися от каждого элемента ребра во всех направлениях, а не только в направлениях хорошо известного дифракционного конуса.

Третье свойство исключительно важно при анализе рассеяния на телх с низкой радиолокационной видимостью в тех случаях, когда лучи вне дифракционного конуса создают наиболее сильное поле в направлннии к радару.

В этой книге дано детальное изложение основ ФТД как для скалярного случая, так и для векторного случая применительно к акустике и электродинамике, включая важные аспекты теории, только недавно исследованные профессором Уфимцевым. Для акустики, конечно, представляет интерес скалярная теория. Для электродинамики интересны как скалярная, так и векторная теории. Канонические задачи часто являются двухмерными и могут быть сведены к скалярной форме.

ФТД в принципе легко обобщается на случай тел с импедансными граничными условиями и на случай тел с частично проницаемой границей, но в целом являющихся непрозрачными. Фактически ФТД интенсиво используется для таких тел, хотя значительная часть этих работ выполняется под грифом секретности или с другими ограничениями на распространение сведений. Обобщение ФТД на полупрозрачные и прозрачные тела является более сложной задачей, но не по причине каких-либо недостатков ФТД, а потому что приходится иметь дело с более сложными явлениями, такими как распространение дифракционных волн внутри тела и их рефракция на границе тела.

Много было сказано и написано о сравнительных оценках двух главных асимптотических подходов в теории дифракции, ФТД с одной стороны и геометрической теории дифракции (ГТД) профессора Келлера с другой стороны, включая ее версии: равномерную теорию дифракции [uniform theory of diffraction (UTD)], разработанную в Ohio State University, и аналогичную равномерную асимптотическую теорию дифракции [uniform asymptotic theory of diffraction (UAT)].

Оба подхода имеют право на существование, каждый из них дает лучевое описание поля (ФТД как конечный результат, ГТД как начальный пункт), каждый имеет свои достоинства, и оба взаимно оплодотворяют друг друга уже в течение полстолетия. Я очень надеюсь, что следующее поколение объединит эти и другие соответствующие подходы в единую современную теорию дифракции на телах.

Данная книга профессора Уфимцева с детальным изложением основ ФТД не только представляет большую ценность для современников, но и может быть исключительно полезной в процессе создания единой теории дифракции.

*Кеннет М. Мицнер* (*Kenneth M. Mitzner*)
*Ноябрь 2006 г.*

# Предисловие автора к американскому изданию

Физическая теория дифракции (ФТД) является высокочастотной асимптотической теорией, которая используется в задачах рассеяния на сложных телах и в конструировании микроволновых антенн. В этой монографии впервые дано полное и исчерпывающее изложение современной ФТД, основанной на теории элементарных краевых волн (ЭКВ). В ней изучается дифракция акустических и электромагнитных волн на идеально отражающих телах, находящихся в однородной среде беэ потерь.

Основная идея ФТД состоит в следующем. Рассеянное поле рассматривается как излучение, создаваемое источниками (токами), которые индуцируются падающей волной на поверхности тел. Вводятся понятия *равномерной* и *неравномерной* компонент поверхностных источников. Равномерная компонента в данной точке определяется как поле, возбуждаемое падающей волной на бесконечной идеально отражающей плоскости, касательной к телу в этой точке. Неравномерная компонента обусловлена любым отклонением рассеивающей поверхности от касательной плоскости. Для больших выпуклых тел с острыми краями (ребрами) основные вклады в рассеянное поле создаются равномерными источниками и теми неравномерными компонентами, которые сосредоточены вблизи краев. В иностранной литературе эту компоненту часто называют *fringe component*. Английское слово *fringe* переводится как *бахрома*, встречающаяся, например, в одежде.

Интегрируя равномерную компоненту поверхностных источников, мы вычисляем поле, соответствующее приближению физической оптики (ФО). ФТД уточняет ФО и является ее естественным обобщением, в котором учитывается дполнительный вклад в рассеянное поле, создаваемый неравномерными источниками.

В этой книге получены высокочастотные асимптотики для неравномерных поверхностных источников (*fringe components*) и для рассеянного поля в дальней зоне. Вычисляются характеристики рассеяния для разнообразных тел, таких как ленты, трехгранные цилиндры, конусы, тела вращения с ненулевой гауссовой кривизной (включая параболоиды и сферические сегменты), а также конечные круглые цилиндры с плоскими торцами.

Название книги подчеркивает, что в ней большое внимание уделяется процессу формирования дифракционного поля. Термины дифракция и рассеяние употребляются здесь как синонимы. Полученные в книге аналитические выражения проясняют физическую структуру рассеянного поля и детально описывают все отраженные и дифракционные лучи и пучки, а также поля в окрестности каустик и фокусов. Вводится новое понятие — *теневое излучение*. Показано, что эта часть поля содержит *половину* всей мощности, рассеянной идеально отражающими телами. Физическими проявлениями теневого излучения являются хорошо известные явления Грималди–Френеля и увеличение рассеяния в окрестности границы тени (*forward scattering*).

Результаты численных расчетов, изображенные на графиках, дополняют теорию и дают наглядное представление о вкладе различных частей поверхности тела в рассеянное поле. Детальные комментарии объясняют все существенные моменты в аналитических и численных вычислениях, чтобы облегчить их анализ и использование читателями. Все главы книги сопровождаются задачами для самостоятельного решения, которые будут полезны при изучении ФТД, особенно для студентов.

Книга предназначена для научных сотрудников исследовательских институтов и университетских лабораторий, для преподавателей вузов, аспирантов и студентов старших курсов. Она также будет полезна при создании разнообразных вузовских курсов, которые включают в себя асимптотические методы в теории дифракции.

*П. Я. Уфимцев*
*Лос-Анджелес, Калифорния*
*Июнь. 2006 г.*

# Благодарности

Работа над этой книгой была частично финансирована Исследовательским Центром (*Center of Aerospace Research and Education*) при Калифорнийском Университете в г. Ирвайн (*Irvine*). Я признателен за эту поддержку директору центра, доктору С. Н. Атлури (*Satya N. Atluri*).

Я также признателен доктору А. В. Капцову за его профессиональные советы, которые помогли мне в работе с программами FORTRAN и SIGMA-PLOT.

При подготовке рукописи книги я часто обращался к моим сыновьям Ивану и Владимиру с просьбой проверить и исправить мой английский текст, а также устранить неполадки, возникающие при работе с компьютором. Я благодарен им за эту помошь.

Я также признателен Э. Джалу (*E. V. Jull*), К. Мицнеру (*K. M. Mitzner*), Я. Рахмат-Сами (*Y. Rahmat-Samii*) и А. Терзуоли (*A. J. Terzuoli, Jr*.) за их труд по рецензированию рукописи и за ценные комментарии. Особую благодарность я приношу доктору К. Мицнеру за его предисловие к этой книге.

Книга включает в адаптированном виде материалы из оригинальных статей автора, опубликованных в ряде научных журналов. Я благодарен редколлегиям этих журналов за их разрешение использовать такие материалы.

*П. Я. Уфимцев*

# Введение

Физическая теория дифракции (ФТД) исследует рассеяние волн на телах сложной формы, линейные размеры которых велики по сравнению с длиной волны. Начало этой теории было положенено в ранних работах автора (Уфимцев, 1957, 1958, 1961). Результаты этих публикаций были затем суммированы в монографии (Уфимцев, 1962), которая уже давно стала библиографической редкостью. Чтобы ознакомить новое поколение читателей с первоначальной формой ФТД, несколько глав из этой монографии в адаптированном виде были включены в недавно вышедшую книгу (Уфимцев, 2003, 2007 a). Некоторые результаты, относящиеся к дальнейшему развитию ФТД, содержатся в статьях (Буторин и Уфимцев, 1986; Буторин, Мартынов и Уфимцев, 1987; Ufimtsev, 1989, 1991; Ufimtsev and Rahmat-Samii, 1995; Ufimtsev, 2006 a, b).

В данной книге впервые представлено полное и детальное изложение современной ФТД, основанной на теории *элементарных краевых волн* (ЭКВ). В ней изучается дифракция акустических и электромагнитных волн на идеально отражающих телах.

Для акустических волн на поверхности идеально отражающих тел ставятся граничные условия Дирихле или Неймана, в зависимости от типа рассеивающей поверхности (акустичкески *мягкой* или *жесткой*). Предполагается, что тела находятся в однородной невязкой среде. Отсутствие вязкости для таких сред (например, как воздух и вода) можно считать оправданым в линейном приближении (Kinsler et al., 1982; Pierce, 1994).

В задачах дифракции электромагнитных волн мы предполагаем, что рассеивающие тела являются идеально проводящими и находятся в вакууме. Граничное условие здесь состоит в требовании, чтобы касательная компонента электрического вектора была равна нулю на поверхности тела (Вайнштейн, 1988; Balanis, 1989). Модель идеально проводящих тел обычно используется для приближенного описания металлических тел в радиолокационном диапазоне частот.

Скалярная теория дифракции акустических волн проще векторной теории для электромагнитных волн. В связи с этим мы сначала детально изучаем акустическую задачу, а затем вкратце излагаем решение аналогичной электродинамической задачи, опуская промежуточные выкладки, которые уже встречались в акустической задаче. Такой подход значительно ускоряет решение электродинамических задач.

Заметим также, что двухмерные задачи дифракции имеют идентичные решения для акустических и электромагнитных волн и отличаются только используемой терминологией. Поэтому такие задачи изучаются в книге только для акустических волн.

На протяжении всей книги мы постоянно обращаем внимание на соотношения эквивалентности, которые существуют между некоторыми компонентами дифрагированных акустических и электромагнитных волн. Такие соотношения, заключенные в рамки, приводятся в самом начале большинства глав и разделов.

ФТД имеет разнообразные применения. Соответствующие ссылки приведены в конце книги, в разделе «Дополнительные публикации, относящиеся к концепции ФТД: применения, модификации и обобщения». В частности, ФТД была с успехом использована при проектировании американских самолетов *Stealth-Fighter F-117* и *Stealth-Bomber B-2*, невидимых для радаров [(Browne, 1991 a, b; Rich, 1994; Rich and Janos, 1994); см. также предисловие Мицнера в книге (Уфимцев, 2003, 2007 a)]. Данная монография является переводом с американсого издания (Ufimtsev, 2007 b) и содержит только оригинальные результаты, полученные автором (некоторые из них в сотрудничестве с коллегами).

В рамках ФТД рассеянное телом поле рассматривается как излучение, которое создается источниками, возбуждаемыми падающей волной на поверхности тела. В случае электромагнитных волн и металлических тел такими источниками являются поверхностные электрические заряды и токи. В случае акустических волн это *акустческое давление* на жестких телах или *нормальнпя скорость частиц среды* на мягких телах. Преимущество такого подхода (по сравнению с теориями, основанными на геометрии лучей) состоит в том, что он позволяет вычислять рассеянное поле всюду, включая такие области, как окрестности границ тени, фокусов и каустик, где дифракционное поле не имеет лучевой структуры.

Центральной и оригинальной идеей ФТД явлется разделение поверхностных источников на так называемые *равномерную* и *неравномерную* компоненты. Такое разделение на компоненты является довольно гибкой процедурой и определяется подходящим выбором канонических дифракционных задач (Ufimtsev, 1998). В этой книге (за исключением раздела 7.9) *равномерная* компонента в заданной точке на освещенной стороне тела принимается такой же, как на бесконечной плоскости, касательной к поверхности тела в этой точке. Разумеется, что такая плоскость также считается идеально отражающей. В случае падающей волны с лучевой структурой равномерная компонента определяется согласно геометрической оптике (геометрической акустике) для электромагнитных (акустических) волн.

Величина поля, вычисленного путем интегрирования равномерной компоненты, является высокочастотной аппроксимацией реального рассеянного поля. В акустических задачах дифракции такую аппроксимацию обычно называют приближением Кирхгофа. В электродинамических задачах дифракции она известна как приближение физической оптики (ФО). В настоящей книге мы используем термин ФО как для электромагнитных, так и для акустических волн, следуя справочному изданию (Bowman et al., 1987, p. 29).

ФТД является естественным обобщением ФО и учитывает вклад в рассеянное поле, создаваемый *неравномерной* компонентой, которая имеет дифракционную природу и обусловлена любым отклонением реальной рассеивающей поверхности от бесконечной плоскости. Другое определение равномерной и неравномерной компонент поверхностных источников дано в разделе 7.9. Здесь равномерная компонента на рассеивающей поверхности с изломом (ребром) определяется как поле, возбуждаемое падающей волной на *освещенной стороне полуплоскости,* касательной к *освещенной грани* ребра (и к самому ребру). Нераномерная компонента определяется в свою очередь как разность между точным полным полем, возбуждаемым на касательном клине, и равномерной компонентой в ее новой формулировке. Такое разделение поверхностных источников на равномерную и неравномерную компоненты позволяет построить новую версию ФТД, свободную от от так называемой *скользящей сингулярности* (см. раздел 7.9).

Приведем еще один пример, иллюстрирующий полезность и гибкость понятий о равномерной и неравномерной компонентах поверхностных источников. В задачах рассеяния электромагнитных волн на тонких прямых проводниках конечной длины целесообразно использовать в качестве равномерной компоненты ток, возбуждаемый на бесконечно длинном проводнике (без концов). А неравномерная компонента определяется как разность между полным током на *полубесконечном* проводнике и равномерной компонентой тока. Такой подход проясняет физическую картину дифракции и позволяет получить эффективное решение задачи (Уфимцев, 1962, 2003, 2007 а).

Для количественного описания неравномерной компоненты поверхностных источников мы используем физически очевидную гипотезу о локальном характере высокочастотных дифракционных полей, известную как *принцип локальности*. В соответствии с этим принципом мы полагаем, что неравномерная компонента (вблизи искривленного ребра на поверхности рассеивающего тела) асимптотически ($k = 2\pi/\lambda \to \infty$) идентична неравномерной компоненте, возбуждаемой падающей волной на касательном клине вблизи точки касания.

Таким образом, задача о дифракции на клине является подходящей канонической задачей для исследования краевых волн и она детально исследуется в данной книге. Точные и асимптотические выражения для двухмерных краевых волн выводятся в главах 2, 3 и 4. Эти результаты используются затем в главе 5 при построении асимптотик для полей, дифрагированных на лентах и трехгранных цилиндрах.

Отметим, что двухмерные дифракционные задачи для акустически мягких (жестких) рассеивающих тел зквивалентны электродинамическим задачам, где электрический вектор $\vec{E}$ (магнитный вектор $\vec{H}$) параллелен образующей рассеивающего тела. Поэтому некоторые результаты, полученные ранее (Уфимцев, 1962) для двухмерных электродинамических задач, автоматически переносятся в данной книге на акустические задачи с соответствующим переопределением физических величин. По той же причине асимптотики, построенные в главе 5 для акустических волн, применимы для электромагнитных волн, дифрагированных на лентах и трехгранных цилиндрах.

В главе 1 предложена новая физическая интерпретация классического приближения ФО. Поле, соответствуюшее этому приближению, представлено в виде суммы *отраженного поля* и *теневого излучения*. Первое слагаемое описывает все отраженные лучи и пучки и доминирует в лучевой области. Теневое излучение эквивалентно полю, рассеянному абсолютно черным телом (той же формы и того же размера, что и реальное рассеивающее тело), и доминирует в окрестности области тени (см. рисунки 1.4 и 14.6). Проявлениями теневого излучения служат хорошо известные явления дифракции Грималди–Френеля и рассеяние вперед (*forward scattering*).

В разделе 1.3.5 доказана *теорема о теневом контуре*, согласно которой различные тела с одинаковой границей тени создают одинаковое теневое излучение. Эта теорема значительно облегчает приближенную оценку рассеяния на сложных телах [см., например, монографию Алексеева, Штагера и Козырева (2007), где исследуется рассеяние на кораблях]. В этом разделе также показано, что теневое излучение содержит *половину* всей энергии, рассеянной идеально отражающими телами. Таким образом, новая формулировка ФО проясняет физическую структуру рассеянного поля и выявляет природу фундаментального закона о полной мощности, рассеянной идеально отражающими телами. Напомним, что согласно этому закону полный поперечник рассеяния для таких тел асимптотически равен *удвоенной* площади поперечного сечения их зоны тени.

Значительная часть книги посвящена теории *элементарных краевых волн* (ЭКВ) и ее применениям. ЭКВ — это волна, которая излучается поверхностными источниками, возбуждаемыми в окрестности бесконечно малого элемента ребра. В главе 7 построены высокочастотные асимптотики для ЭКВ, которые позволяют исследовать дифракцию на телах с плавно искривленными ребрами в масштабе длины волны.

Элементарные краевые волны можно также интерпретировать как *элементарные краевые лучи*, расходящиеся от каждой освещенной точки на ребре. Поле в приближении ФО тоже можно интерпретировать как линейную суперпозицию другого типа элементарных лучей. Поэтому ФТД можно рассматривать как лучевую теорию на уровне *элементарных лучей*. Даже в таких дифракционных областях, как границы геометрической оптики, фокусы и каустики, волновое поле может быть представлено в терминах элементарных лучей. Обычные отраженные лучи и дифракционные лучи вычисляются в ФТД путем асимптотической оценки интегралов поля и могут рассматриваться как *пучки* элементарных лучей, расходящихся из окрестностей стационарных точек на поверхности рассеивающего тела. Такая возможная интерпретация ФТД согласуется с интуитивным принципом Гюйгенса, который был строго сформулирован Гельмгольцем в терминах элементарных сферических волн/лучей (Bakker and Copson, 1939).

Общая теория элементарных волн применяется в этой книге к решению ряда дифракционных задач. Обратное и бистатическое рассеяние на телах вращения изучается в главе 6. Лучевые и каустические асимптотики построены в главе 8. Дифракция волн с нулем диаграммы направленности (*slope diffraction*) и многократная дифракция иследуются в главах 9 и 10. Полученные здесь результаты используются в главах 11 и 12 для анализа фокусировки многократных краевых волн на оси симметрии тел вращения. На примере задачи о дифракции на диске (для которой известно строгое асимптотическое решение) показано, что ФТД правильно описывает *первый член* асимптотического разложения для *каждой многократной* краевой волны. Этот результат имеет прициипиальное значение, поскольку он служит обоснованием ФТД. Отметим также, что обоснование и уточнение ФТД было дано ранее на примере задач о дифракции на ленте и вибраторе (Нефедов и Фиалковский, 1972; Уфимцев, 2007 а).

В главах 13 и 14 строятся асимптотики ФТД для поля, рассеянного на круговом цилиндре конечной длины при наклонном облучении плоской волной. Вместе с численными результатами они дают наглядное представление о физической структуре рассеянного поля. Здесь также подчеркиваются новые тонкие аспекты в теории. Они касаются необходимости учитывать: а) высшие члены асимптотического разложения в приближении ФО; б) излучение, создаваемое неравномерной компонентой поверхностных источников, которая обусловлена плавным искривлением боковой поверхности цилиндра.

Теория, развитая в книге, может быть полезна при решении разнообразных практических задач. Среди них можно отметить проектирование микроволновых антенн, оценку поперечников рассеяния для сложных тел, распознавание радиолокационных целей, распространение волн в городских условиях и т. д. В комбинации с численными методами она может быть использована при построении эффективных гибридных схем для исследования сложных дифракционных задач. Эта книга также может быть полезна в разнообразных вузовских курсах, которые включают в себя высокочастотные асимптотические методы в теории дифракции. Задачи, предлагаемые для самостоятельного решения в конце каждой главы, будут полезны при изучении ФТД, особенно для студентов.

В книге используются международная система единиц (СИ) и зависимость волновых полей от времени в виде $\exp(-i\omega t)$. В списке литературы приводятся в алфавитном порядке сначала публикации на русском языке, а затем на иностранных.

Используемые обозначения:

| | |
|---|---|
| ГА | Геометрическая акустика |
| ГО | Геометрическая оптика |
| ГТД | Геометрическая теория дифракции |
| ФО | Физическая оптика |
| ФТД | Физическая теория дифракции |
| ЭКВ | Элементарные краевые волны |
| Slope Diffraction | Дифракция волны, имеющей нуль в ее диаграмме направленности |

# Глава 1

# Основные понятия в теории дифракции акустических и электромагнитных волн

## 1.1. Формулировка дифракционных задач

В этой книге развивается физическая теория дифракции (ФТД) как для *акустических,* так и для *электромагнитных* волн.

> В случае двухмерных задач ($\partial/\partial z = 0$) теория, развитая здесь для акустических волн, также применима для электромагнитных волн.

Сначала мы изложим основные теоретические понятия для акустических волн, а затем и для электромагнитных волн. В линейном приближении потенциал скоростей для гармонических акустических волн удовлетворяет волновому уравнению (Kinsler et al., 1982; Pierce, 1994)

$$\nabla^2 u + k^2 u = I. \tag{1.1}$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ есть волновое число, $\lambda$ — длина волны, $\omega$ — угловая частота, $c$ — скорость звука, $I$ — характеристика интенсивности источника. Зависимость волнового поля и его источников от времени предполагается заданной в виде $\exp(-i\omega t)$ и не указывается в явном виде в дальнейшем. Акустическое давление $p$ и колебательная скорость $\vec{v}$ частиц среды, обусловленная звуковыми волнами, определяются через потенциал скоростей [Kinsler et al. (1982); Pierce (1994)]

$$p = -\rho \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega\rho u, \quad \vec{v} = \nabla u, \tag{1.2}$$

где $\rho$ есть плотность массы среды. Плотность потока мощности звуковых волн определяется формулой

$$\vec{P} = p\vec{v} = p\nabla u. \tag{1.3}$$

Ее величина, усредненная за период колебаний $T = 2\pi/\omega$, равна

$$\vec{P}_{av} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(p^* \,\vec{v}). \tag{1.4}$$

Здесь и везде далее звездочка используется для обозначения комплексно-сопряженных величин.

Два типа граничных условий ставятся на поверхности идеально отражающих тел:

(а) условие Дирихле

$$u = 0 \;\text{ или }\; p = 0 \qquad [\text{soft}] \tag{1.5}$$

для тел с мягкой (*soft*) поверхностью, т. е. свободной от давления;

(б) условие Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \hat{n}\cdot\nabla' u = 0 \qquad [\text{hard}] \tag{1.6}$$

для тел с жесткой (*hard*) поверхностью. Следует иметь в виду, что в граничных условиях величина $u$ есть полное поле, т. е. *сумма падающей и рассеянной волн.* Символ $\hat{n}$ обозначает единичный вектор внешней нормали к поверхности рассеивающего тела (рис. 1.1). Оператор градиента $\nabla'$ действует на координаты точки $Q$ на поверхности $S$.

Чтобы обеспечить единственность решения дифракционной задачи, ее формулировку необходимо дополнить условиями излучения Зоммерфельда

$$\lim r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) \;\text{ при } r \to \infty. \tag{1.7}$$

В международной системе единиц (СИ) введенные выше величины имеют следующие размерности:

$$[r] = м,\; [t] = c,\; [\vec{v}] = [c] = м/c,\; [\omega] = 1/c\,,$$
$$[\rho] = кг/м^3,\; [p] = кг/м\cdot c^2,\; [u] = м^2/c,\; [\vec{P}] = кг/c^3. \tag{1.8}$$

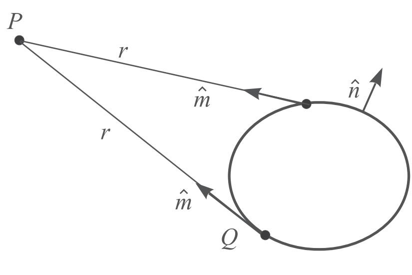


**Рис. 1.1.** Рассеивающая поверхность $S$. Здесь $r$ — расстояние между точкой наблюдения $P$ (которая может быть в дальней зоне) и точкой интегрирования $Q$ на поверхности рассеивающего тела; единичный вектор $\hat{m}$ направлен из точки $Q$ в точку $P$

Здесь используются стандартные обозначения: *м* для *метра, кг* для *килограмма* и *с* для *секунды*. Единица давления называется *Паскаль* (*Па*), причем 1 *Па* = 1 *Н*/*м*$^2$. Единицей плотности потока мощности является 1 *Вт*/*м*$^2$ = = 1 *Дж*/*с* · *м*$^2$.

В задачах дифракции, которые допускают электромагнитную интерпретацию, потенциал скоростей играет роль напряженности электрического поля ($[E] = В/м$) или напряженности магнитного поля ($[H] = А/м$), в зависимости от поляризации электромагнитных волн. Поток плотности мощности называется вектором *Пойнтинга* и определяется формулами

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \text{и} \quad \vec{P}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*\,]. \tag{1.9}$$

## 1.2. Рассеянное поле в дальней зоне

Рассеянное поле определяется формулами Гельмгольца [Bakker and Copson (1939)]:

$$u_s = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\,ds, \quad u_h = \frac{1}{4\pi}\int_S u\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\,ds, \tag{1.10}$$

где интегралы берутся по рассеивающей поверхности $S$. Функция $u_s$ описывает поле, рассеянное акустически мягким телом, а функция $u_h$ относится к полю, рассеянному акустически жестким телом. Величины поля $u$ и $\partial u/\partial n$ в подынтегральных выражениях описывают полное поле, т. е. сумму *падающей и рассеянной волн*. Эти величины представляют собой поверхностные источники, возникающие вследствие дифракции падающей волны. Мы обозначаем их символами

$$j_s = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad j_h = u, \tag{1.11}$$

аналогичными тем, которые используются для поверхностных источников/токов в электромагнитной версии ФТД (Ufimtsev, 2003, 2007 a).

Величина $\mathrm{e}^{ikr}/r$ в формуле (1.10) есть функция Грина для однородного пространства, т. е. фундаментальное решение волнового уравнения, а $\hat{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $S$.

В дальней зоне, где $r \gg kd^2$ (здесь $d$ — характерный линейный размер тела), выражения (1.10) можно упростить. Выберем начало координатной системы где-нибудь внутри тела (рис. 1.2). При условиях $R \gg r'$, $r \gg kd^2$ можно использовать следующие аппроксимации:

$$r \approx R - r'\cos\Omega, \quad \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \approx \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega}, \tag{1.12}$$

где

$$\cos\Omega = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi'). \tag{1.13}$$

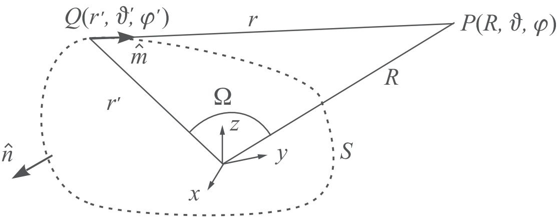


**Рис. 1.2.** $S$ — поверхность рассеивающего тела; $Q$ — точка интегрирования (с координатами $r'$, $\vartheta'$, $\varphi'$) на поверхности тела; $P$ — точка наблюдения (с координаиами $R, \vartheta, \varphi$); $\Omega$ — угол между направлениями в точки интегрирования и наблюдения

Замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} = \nabla'\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\cdot\hat{n} = -\left(ik - \frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\nabla r\cdot\hat{n}, \quad \nabla r = \hat{m}\,, \tag{1.14}$$

и используя соотношения (1.12), имеем

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \approx -ik\,\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\,\mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega}\cdot(\hat{m}\cdot\hat{n}). \tag{1.15}$$

Окончательно получаем следуюшие приближенные выражения для поля в дальней зоне:

$$\boxed{\begin{aligned} u_s &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\int_S j_s \mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega}\,ds\,, && (1.16)\\ u_h &= -\frac{ik}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\int_S j_h \mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega}(\hat{m}\cdot\hat{n})ds\,, && (1.17)\end{aligned}}$$

где $\hat{m}$ и $\hat{n}$ являются единичными векторами. Основная работа в этой книге заключается сначала в выводе асимптотических аппроксимаций для поверхностных источников $j_{s,h}$, а затем для рассеянного поля (1.16), (1.17).

Выражения (1.16) и (1.17) можно записать в форме

$$u_{s,h} = u_0\Phi_{s,h}\,\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\,, \tag{1.18}$$

где функции

$$\Phi_s = -\frac{1}{4\pi u_0}\int_S j_s\mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega}ds, \quad \Phi_h = -\frac{ik}{4\pi u_0}\int_S j_h\mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega}(\hat{m}\cdot\hat{n})ds \tag{1.19}$$

представляют собой диаграммы направленности рассеянного поля, а величина $u_0$ есть комплексная амплитуда падающей волны в начале координат ($R = 0$).

Заметим также, что вблизи рассеивающего тела, находящегося в дальней зоне от источника, падающую волну можно рассматривать как плоскую волну с амплитудой $u_0$.

В соответствии с формулами (1.2) и (1.3), плотность потока мощности в рассеянном поле определяется выражением

$$\vec{P}^{sc} = i\omega\rho u \nabla u. \tag{1.20}$$

Но в дальней зоне

$$\nabla u \approx iku \cdot \hat{R}, \text{ где } \hat{R} = \nabla R. \tag{1.21}$$

Поэтому величина (1.20), усредненная за период осцилляций $T = 2\pi/\omega$, равна

$$\vec{P}^{sc}_{av} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}[p^* \vec{v}] = \frac{1}{2}\operatorname{Re}[(i\omega\rho u)^* (iku)] \cdot \hat{R} = \frac{1}{2}k^2 Z |u^2| \cdot \hat{R}, \tag{1.22}$$

где

$$Z = \rho c \tag{1.23}$$

есть характеристический импеданс среды.

Поле в дальней зоне обычно характеризуется *бистатическим поперечником рассеяния* $\sigma$, который определяется соотношением

$$P^{sc}_{av} = \frac{\sigma \cdot P^{inc}_{av}}{4\pi R^2}, \tag{1.24}$$

где

$$P^{inc}_{av} = \frac{1}{2}k^2 Z |u^{inc}|^2 \tag{1.25}$$

есть плотность потока мощности в падающей волне. Формула (1.24) допускает следующую интерпретацию.

Бистатический поперечник рассеяния есть площадь $\sigma$ гипотетической пластины, перпендикулярной направлению падающей волны. Эта пластина перехватывает падающую на нее мощность $P^{inc}_{av} \cdot \sigma$ и излучает ее равномерно во все окружающее пространство с *плотностью потока, равной* $P^{s}_{av}$. Здесь $P^{s}_{av}$ есть фактическая плотность потока мощности, рассеиваемой телом. Поскольку эта величина зависит от направления рассеяния, бистатический поперечник рассеяния является функцией этого направления, $\sigma = \sigma(\vartheta, \varphi)$.

Термин *бистатический* означает, что направление рассеяния отличается от направления на источник падающей волны. Если же эти направления совпадают, то в этом случае величину $\sigma$ называют моностатическим поперечником рассеяния (*monostatic cross-section*), или поперечником обратного рассеяния (*backscattering cross-section*).

Из формул (1.24) и (1.25) следует, что

$$\sigma = 4\pi R^2 \frac{P^{sc}_{av}}{P^{inc}_{av}} = 4\pi R^2 |u^{sc}|^2 / |u^{inc}|^2. \tag{1.26}$$

В тех направлениях, где поле, рассеянное *гладкой выпуклой* поверхностью, имеет лучевую структуру, бистатический поперечник рассеяния определяется в соответствии с геометрической оптикой (ГО) и геометрической акустикой (ГА) следующей простой формулой:

$$\sigma = \pi \rho_1 \rho_2. \tag{1.27}$$

Здесь $\rho_1$ и $\rho_2$ суть главные радиусы кривизны поверхности в *точке отражения*. При этом поверхность предполагается идеально отражающей (абсолютно мягкой или абсолютно жесткой). Обратим внимание на следующие важные свойства этой формулы.

Во-первых, она не зависит от длины падающей волны. Во-вторых, она является универсальной, т. е. применима как для акустических, так и для электромагнитных волн. Это свойство является следствием двух факторов. Ясно, что лучевая структура отраженных волн не зависит от их природы и полностью определяется геометрией отражающей поверхности. Поэтому расходимость отраженных лучей будет одинаковой и для акустических, и для электромагнитных лучей, отраженных от поверхностей с одинаковой геометрией. Кроме того, модуль коэффициента отражения для идеально отражающей поверхности равен единице. Но именно эти два фактора, геометрическая расходимость лучей и модуль коэффициента отражения, полностью определяют амплитуду отраженных лучей и, следовательно, бистатический поперечник рассеяния.

Очевидно также, что формула (1.27) может быть обобщена на случай не полностью отражающих поверхностей:

$$\sigma = |\mathcal{R}|^2 \pi \rho_1 \rho_2 \,, \tag{1.28}$$

где $\mathcal{R}$ есть коэффициент отражения, который зависит от длины падающей волны, от типа граничных условий и может быть различным для акустических и электромагнитных волн.

Еще одно интересное, но не столь очевидное свойство формулы (1.27) заключается в следующем. Согласно этой формуле бистатический поперечник рассеяния не зависит от угла между падающим и отраженным лучами в *одной и той же* точке отражения (рис. 1.3). Иначе говоря, эта величина $\sigma$ является

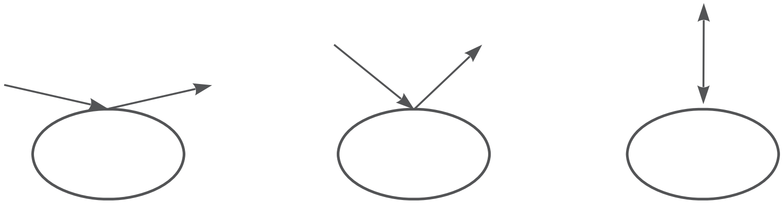

**Рис. 1.3.** Отражение в *одной и той же* точке на поверхности тела для различных бистатических углов. Бистатический поперечник рассеяния для идеально отражающего тела является постоянным для всех этих углов и равен моностатическому поперечнику рассеяния

постоянной для любых бистатических углов и точно равна моностатическому поперечнику рассеяния, когда бистатический угол равен нулю. Как показано в статье (Ufimtsev, 1999, 2005), это свойство следует из теории Фока (1965, 1970).

Теория Фока (1965, 1970) является более общей и также применима для не полностью отражаюших тел, характеризующихся коэффициентом отражения $\mathcal{R}$. В этом случае из нее следует выражение (1.28), которое мы привели выше, исходя из физических соображений.

## 1.3. Физическая оптика

Это высокочастотное приближение широко используется в задачах дифракции акустических и электромагнитных волн.

### 1.3.1. Определение физической оптики

Приближение физической оптики (ФО) было предложено Макдональдом в 1912 г. и с тех пор широко используется в теории дифракции, в частности при анализе рассеяния на больших (в масштабе длины волны) телах. Основные свойства ФО применительно к дифракции электромагнитных волн изложены, например, в статьях (Ufimtsev, 1999, 2005). Новая форма ФО дана в статье (Ufimtsev, 2008 a) и излагается ниже в разделе 1.3.4. Отметим также, что обобщение ФО и ФТД на случай дифракции электромагнитных волн на металлических телах, находящихся в неоднородной ионизированной среде (плазме), дано в статьях (Ярыгин, 1972; Переверзев и Уфимцев, 1976) и в монографии (Ярыгин и Авдеев, 2005).

Скалярный вариант ФО известен в акустике как приближение Кирхгофа (Menounou et al., 2000; Brill et al., 1993; Moser et al., 1993). Следуя справочному изданию (Bowman et al., 1987), мы используем в данной книге термин ФО как для акустических, так и для электромагнитных волн.

Поскольку приближение ФО является составной частью ФТД, развиваемой в данной книге, мы начинаем построение ФТД с изучения ФО. В соответствии с этим приближением акустическое поле, возбуждаемое падающей волной на поверхности рассеивающего тела, определяется согласно геометрической акустике (ГА). При этом мы исходим из следующих физических соображений. Геометрическая акустика описывает волновое поле в предельном случае, когда длина волны стремится к нулю. По отношению к такой волне рассеивающую поверхность в точке отражения можно рассматривать приближенно как касательную плоскость. Следовательно, поле, возбуждаемое на бесконечной касательной плоскости, является хорошей *высокочастотной аппроксимацией* для поверхностного поля на больших рассеивающих телах. Две таких плоскости $P_1$ и $P_2$, касательные в точках $Q_1$ и $Q_2$, показаны на рис. 1.4. Эти точки находятся на «освещенной» стороне тела ($S_{il}$). Согласно ГА поле равно нулю в области тени, включая точки на поверхности тела.

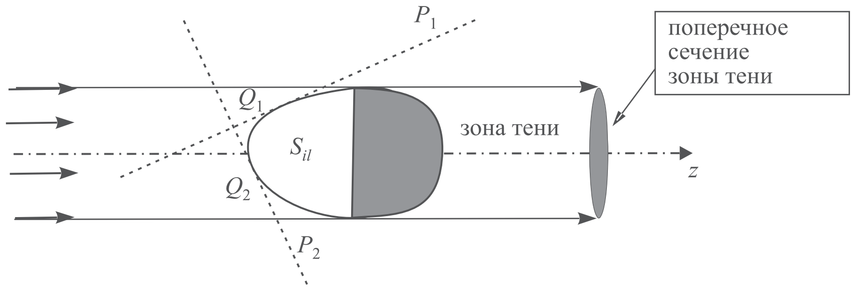


**Рис. 1.4.** Поля, возбуждаемые падающей волной в точках $Q_1$ и $Q_2$ на рассеивающем теле, асимптотически эквивалентны полям, создаваемым на касательных плоскостях $P_1$ и $P_2$. Здесь $S_{il}$ есть освещенная сторона поверхности тела. Темная пластина позади тела изображает поперечное сечение зоны тени

Таким образом, отражение от касательной плоскости есть подходящая каноническая (фундаментальная) задача. Ее строгое решение легко найти, используя теорию зеркальных изображений. Полное поле, создаваемое внешним источником над бесконечной отражающей плоскостью, есть сумма падающего и отраженного полей. При этом отраженное поле можно интерпретировать как поле, излучаемое зеркальным изображением реального источника в бесконечной плоскости (рис. 1.5).

Согласно точному решению задачи, полное поле на акустически мягкой плоскости равно нулю в силу граничного условия (1.5), а его нормальная производная определяется выражением

$$\frac{\partial u_s}{\partial n} = 2\frac{\partial u_s^{inc}}{\partial n}. \tag{1.29}$$

На акустически жесткой плоскости нормальная производная полного поля равна нулю в силу граничного условия (1.6), а само поле равно

$$u_h = 2u_h^{inc}, \tag{1.30}$$

как это следует из точного решения. В физической теории дифракции (ФТД) величины (1.29) и (1.30) рассматриваются как *равномерные компоненты* по-

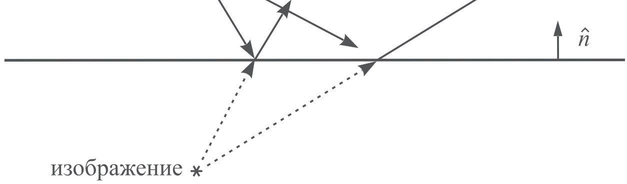


**Рис. 1.5.** Отражение от бесконечной плоскости

верхностных источников рассеянного поля,

$$j_s^{(0)} = 2\frac{\partial u^{inc}}{\partial n}, \quad j_h^{(0)} = 2u^{inc}. \tag{1.31}$$

Эти выражения определяют поверхностные источники только на *освещенной* стороне рассеивающего тела. На *теневой* стороне компоненты $j_{s,h}^{(0)}$ полагаются равными нулю.

Подставляя выражения (1.31) в формулы (1.10), получаем следующее интегральное представление для рассеянного поля в приближении ФО:

$$\boxed{\begin{aligned} u_s^{PO} &\equiv u_s^{(0)} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_{il}} j_s^{(0)} \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\,ds, \\ u_h^{PO} &\equiv u_h^{(0)} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_{il}} j_h^{(0)} \frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\,ds. \end{aligned} \qquad (1.32)}$$

Символы $u_s^{(0)}$ и $u_h^{(0)}$ подчеркивают, что выражения (1.32) описывают поле, создаваемое *равномерными компонентами* (1.31) поверхностных источников.

Приближение ФО (1.32) обладает особым свойством, относящимся к обратному рассеянию, т. е. к полю в направлении на источник падающей волны. Согласно формулам (1.16) и (1.17) это поле определяется в дальней зоне соотношениями

$$u_s^{(0)} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\int\limits_{S_{il}} \frac{\partial u^{inc}}{\partial n}\mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega}\,ds, \tag{1.33}$$

$$u_h^{(0)} = -\frac{ik}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\int\limits_{S_{il}} u^{inc}\mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega}(\hat{m}\cdot\hat{n})ds. \tag{1.34}$$

Поле, падающее на тело, которое находится на большом расстоянии от источника, можно представить в виде

$$u^{inc} = \mathrm{const}\cdot \mathrm{e}^{ik\phi^i}. \tag{1.35}$$

Единичный вектор $\nabla\phi^i = \hat{k}^i$ определяет направление падающей волны, а единичный вектор $\hat{m} = \nabla r = \hat{k}^s$ указывает направление рассеянной волны. В случае обратного рассеяния имеет место равенство $\hat{k}^s = -\hat{k}^i$. Заметим также, что

$$\frac{\partial u^{inc}}{\partial n} = \nabla u^{inc}\cdot\hat{n} = iku^{inc}(\nabla\phi^i\cdot\hat{n}) = iku^{inc}(\hat{k}^i\cdot\hat{n}). \tag{1.36}$$

Подставляя выражение (1.36) в формулу(1.33) и учитывая в формуле (1.34) равенство $(\hat{m}\cdot\hat{n}) = -(\hat{k}^i\cdot\hat{n})$, получим

$$\boxed{u_s^{(0)} = -u_h^{(0)} = -\frac{ik}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\int\limits_{S_{il}} u^{inc}\mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega}(\hat{k}^i\cdot\hat{n})ds. \qquad (1.37)}$$

Следовательно, в приближении ФО *обратное рассеяние* от акустически *мягких* и *жестких* тел (одинаковой формы и одинакового размера) отличается только знаком.

### 1.3.2. Полный поперечник рассеяния

Плотность потока мощности рассеянного поля определяется формулой (1.22). Интегрируя эту величину по поверхности тела, можно вычислить полную мощность, рассеянную телом во всех направлениях. В случае акустически мягкого тела эта величина описывается в приближении ФО интегралом

$$P^{tot} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{S_{il}} (p_s^{sc})^* \, (\vec{v}_s^{\,tot} \cdot \hat{n}) ds, \tag{1.38}$$

где

$$\vec{v}_s^{\,tot} \cdot \hat{n} = 2\frac{\partial u^{inc}}{\partial n}. \tag{1.39}$$

Кроме того, согласно граничному условию (1.5) имеем $p_s^{sc} = -p^{inc} = -i\omega\rho u^{inc}$. Заметим также, что падающую волну в окрестности рассеивающего тела, находящегося в дальней зоне от источника, можно аппроксимировать плоской волной (рис. 1.4),

$$u^{inc} = u_0 \mathrm{e}^{ikz}. \tag{1.40}$$

В этом случае

$$\vec{v}_s^{\,tot} \cdot \hat{n} = 2\frac{\partial u^{inc}}{\partial n} = 2iku_0 \mathrm{e}^{ikz} (\hat{z}\cdot\hat{n}), \quad (p_s^{sc})^* = i\omega\rho u_0^* \mathrm{e}^{-ikz} \tag{1.41}$$

и

$$\boxed{P^{tot} = -k\omega\rho |u_0|^2 \int_{S_{il}} (\hat{z}\cdot\hat{n}) ds = k^2 ZA |u_0|^2,} \tag{1.42}$$

где $A$ есть площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению падающей волны, или другими словами, $A$ есть площадь поперечного сечения зоны тени (рис. 1.4).

Учтем теперь, что согласно (1.25) плотность потока мощности падающей волны равна

$$P_{av}^{inc} = \frac{1}{2} k^2 Z |u_0|^2. \tag{1.43}$$

По определению полный поперечник рассеяния равен

$$\sigma^{tot} = P^{tot} / P_{av}^{inc} \tag{1.44}$$

и, следовательно,

$$\boxed{\sigma^{tot} = 2A.} \tag{1.45}$$

Эта формула также верна и для акустически жестких тел. Действительно, в этом случае

$$P^{tot} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{S_{il}} (p_h^{tot})^* \, (\vec{v}_h^{\,sc} \cdot \hat{n})\, ds \tag{1.46}$$

и

$$p_h^{tot} = 2p^{inc} = 2i\omega\rho u_0 \mathrm{e}^{ikz}, \quad (\vec{v}_h^{\,sc} \cdot \hat{n}) = -(\vec{v}^{\,inc} \cdot \hat{n}) = -iku_0 \mathrm{e}^{ikz} (\hat{z} \cdot \hat{n}). \tag{1.47}$$

Подстановка соотношений (1.47) в формулу (1.46) приводит к выражению (1.42) и затем к полному поперечнику рассеяния (1.45).

### 1.3.3. Оптическая теорема

Существует определенная связь между полным поперечником рассеяния и величиной рассеянного поля в направлении вперед (*forward scattering*), т. е. в направлении падающей волны в области тени. В приближении ФО выражения (1.18) и (1.19) для дальнего поля принимают вид

$$u_s^{PO} = u_0 \Phi_s^{PO} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \quad u_h^{PO} = u_0 \Phi_h^{PO} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{1.48}$$

где

$$\Phi_s^{PO} = -\frac{1}{2\pi u_0} \int_{S_{il}} \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega} ds, \tag{1.49}$$

$$\Phi_h^{PO} = -\frac{ik}{2\pi u_0} \int_{S_{il}} u^{inc} \mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega} (\hat{m} \cdot \hat{n}) ds, \tag{1.50}$$

а $\cos\Omega$ определяется согласно (1.13). Падающая волна (1.40) распространяется в положительном направлении оси $z$. Для точки наблюдения, находящейся в этом направлении в области тени, мы имеем $\vartheta = 0$, $\cos\Omega = \cos\vartheta'$, $\hat{m} = \hat{z}$, $r'\cos\vartheta' = z'$,

$$\frac{\partial u^{inc}}{\partial n} = \nabla u^{inc} \cdot \hat{n} = iku_0 \mathrm{e}^{ikz'} (\hat{z} \cdot \hat{n}) \tag{1.51}$$

и

$$\Phi_s^{PO}(\vartheta = 0) = \Phi_h^{PO}(\vartheta = 0) = -\frac{ik}{2\pi} \int_{S_{il}} (\hat{z} \cdot \hat{n}) ds = \frac{ik}{2\pi} A, \tag{1.52}$$

где $A$ есть площадь поперечного сечения зоны тени (рис. 1.4). Сравнивая выражения (1.52) и (1.45), получаем соотношение

$$\boxed{\sigma^{tot} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}\Phi(\vartheta = 0),} \tag{1.53}$$

известное как оптическая теорема (Born and Wolf , 1980).

### 1.3.4. Теневое излучение

Это понятие было впервые введено в теорию дифракции автором (Уфимцев, 1968). Исследование теневого излучения было продолжено в работе (Уфимцев, 1990). Оно также обсуждалось в статье (Ufimtsev, 1996). Значительная часть результатов, относящихся к теневому излучению электромагнитных волн, была включена в книгу (Ufimtsev, 2003, 2007 a). В данном разделе понятие теневого излучения вводится применительно к дифракции акустических волн. Дополнительные сведения о теневом излучении содержатся в статье (Ufimtsev, 2008 a).

Рассмотрим опять отражение от *бесконечной* идеально отражающей плоскости, находящейся в однородном пространстве (рис. 1.6).

Рассеянное поле в области $z > 0$ определяется формулой Гельмгольца (Bakker and Copson, 1939)

$$u^{sc} = \frac{1}{4\pi}\int_S \left( u^{tot}\, \frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{\partial u^{tot}}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r} \right) ds, \tag{1.54}$$

где $u^{tot} = u^{inc} + u^{sc}$ есть полное поле; $ds = dxdy$ — дифференциальный элемент поверхности $S$ ($z = 0$) и $r$ — расстояние между точками интегрирования и наблюдения.

Предположим, что отражающая плоскость является акустически мягкой. Тогда на ее поверхности выполняются условия

$$u^{tot} = 0, \quad u_s^{sc} = -u^{inc}, \quad \frac{\partial u_s^{tot}}{\partial n} = 2\frac{\partial u^{inc}}{\partial n} = \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} + \frac{\partial u^{inc}}{\partial n}. \tag{1.55}$$

Поэтому выражение (1.54) можно переписать в виде

$$u_s^{tot,sc} = u_{s,1}^{sc} + u_{s,2}^{sc}, \tag{1.56}$$

где

$$u_{s,1}^{sc} = \frac{1}{4\pi}\int_S \left( u^{inc}\, \frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{\partial u^{inc}}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r} \right) ds, \tag{1.57}$$

$$u_{s,2}^{sc} = \frac{1}{4\pi}\int_S \left( -u^{inc}\, \frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{\partial u^{inc}}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r} \right) ds. \tag{1.58}$$

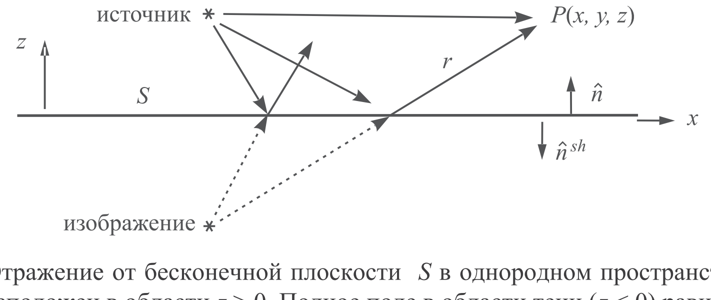


**Рис. 1.6.** Отражение от бесконечной плоскости $S$ в однородном пространстве. Источник расположен в области $z > 0$. Полное поле в области тени ($z < 0$) равно нулю

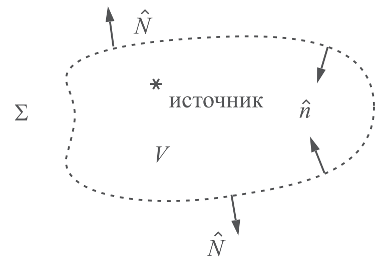


**Рис. 1.7.** Иллюстрация принципа эквивалентности: $\Sigma$ есть произвольная воображаемая поверхность, охватывающая объем $V$ однородного пространства; $\hat{n}$ и $\hat{N}$ суть внутренняя и внешняя нормали к поверхности $\Sigma$; источник поля находится внутри объема $V$

Для вычисления интеграла (1.57) мы воспользуемся теоремой эквивалентности Гельмгольца (Bakker & Copson, 1939). Согласно этой теореме, поле, создаваемое *реальным* акустическим источником в точке $P$ в однородном пространстве $V$ (рис. 1.7), может быть представлено в виде излучения, которое создается *эквивалентными* источниками $u^{inc}$ и $\partial u^{inc}/\partial N$, непрерывно распределенными на замкнутой *воображаемой* поверхности $\Sigma$:

$$u(P)=\frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\left(u^{inc}\,\frac{\partial}{\partial N}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}-\frac{\partial u^{inc}}{\partial N}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\right)ds=\begin{cases}0, \text{ если } P \text{ внутри } V,\\ u^{inc}(P), \text{если } P \text{ вне } V.\end{cases} \quad (1.59)$$

Здесь предполагается, что источник падающей волны находится внутри объема $V$.

Обратим внимание на следующее замечательное свойство этой теоремы. Поле в точке $P$ внутри объема $V$ не зависит от формы поверхности $\Sigma$. Ее можно как угодно деформировать, но результат интегрирования в формуле (1.59) будет один и тот же: $u(P) = 0$, если $P \in V$, и $u(P) = u^{inc}(P)$, если $P \notin V$.

Итак, воспользуемся теоремой эквивалентности (1.59) для вычисления интеграла (1.57). В качестве поверхности интегрирования выберем замкнутую поверхность $\Sigma = S_R + H_R$ (рис. 1.8). Здесь $S_R$ есть круглая пластина с радиусом $R$, которая является частью бесконечной плоскости $S$, показанной на рис. 1.6, а $H_R$ есть полусфера с тем же радиусом $R$. Предположим далее, что источник падающей волны находится в объеме $V$.

Тогда согласно теореме эквивалентности (1.59) имеем:

$$\frac{1}{4\pi}\oint_{S_R+H_R}\left(u^{inc}\,\frac{\partial}{\partial N}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}-\frac{\partial u^{inc}}{\partial N}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\right)ds=\begin{cases}0, \text{ если } P \text{ внутри } V,\\ u^{inc}(P), \text{если } P \text{ вне } V.\end{cases} \quad (1.60)$$

После замены $\hat{N}$ на $(-\hat{n})$ получаем:

$$\frac{1}{4\pi}\oint_{S_R+H_R}\left(u^{inc}\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}-\frac{\partial u^{inc}}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\right)ds=\begin{cases}0, \text{ если } P \text{ внутри } V,\\ -u^{inc}(P), \text{если } P \text{ вне } V.\end{cases} \quad (1.61)$$

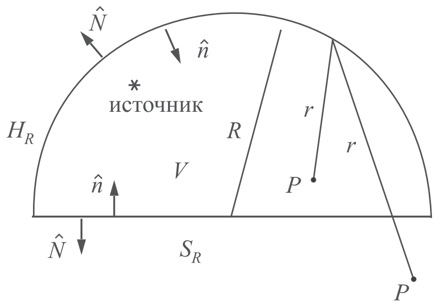


**Рис. 1.8.** Поверхность интегрирования $\Sigma = S_R + H_R$ в формуле (1.60). Источник падающей волны находится внутри объема $V$

Можно показать, что поле в точке $P$, создаваемое эквивалентными источниками, которые находятся на полусфере $H_R$, обращается в нуль, когда ее радиус $R$ стремится к бесконечности. Заметим также, что при условии $R \to \infty$ поверхность $S_R$ трансформируется в бесконечную плоскость $S$. Принимая во внимание эти замечания, мы получаем сдедующие выражения для функции (1.57):

$$u_{s,1}^{sc} = \begin{cases} 0 & \text{в области } z > 0, \\ -u^{inc} & \text{в области } z < 0. \end{cases} \tag{1.62}$$

Физический смысл поля $u_{s,1}^{sc}$ ясен. Оно гасит падающую волну в области $z < 0$, образуя там полную тень. Поэтому мы называем его *теневым излучением* и обозначаем $u^{sh}$,

$$u^{sh} = \frac{1}{4\pi}\int_S \left( u^{inc}\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} - \frac{\partial u^{inc}}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \right) ds. \tag{1.63}$$

По отношению к формуле (1.63) поверхность $S$ можно интерпретировать как *абсолютно поглощающую* (т. е. как *черную*), поскольку она не отражает падающую волну (Уфимцев, 1968, 1990, 1996, 2003, 2007 a).

Чтобы выяснить физический смысл функции $u_{s,2}^{sc}$, мы введем новые обозначения в формуле (1.58):

$$u_s^{refl} = -u^{inc}, \qquad \frac{\partial u_s^{refl}}{\partial n} = \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \tag{1.64}$$

и применим теорему эквивалентности к поверхности $\Sigma = S_R + H_R^*$, показанной на рис. 1.9. Предположим, что зеркальный источник находится внутри объема $V^*$.

Согласно теореме эквивалентности,

$$u(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_{S_R + H_R}\left( u^{refl}\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} - \frac{\partial u^{refl}}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \right) ds = \begin{cases} 0, \text{если } P \text{ внутри } V^*, \\ u^{refl}(P), \text{если } P \text{ вне } V^*. \end{cases} \tag{1.65}$$

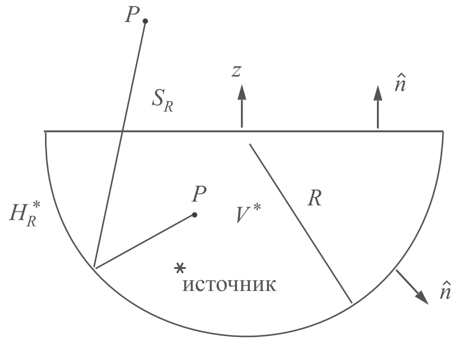


**Рис. 1.9.** Иллюстрация теоремы эквивалентности для отраженного поля. Здесь, так же как на рис. 1.8, $S_R$ есть круглая пластина с радиусом $R$ на плоскости $z = 0$, и $H_R^*$ есть полусфера с тем же самым радиусом $R$

Когда $R \to \infty$, интеграл по поверхности $H_R^*$ стремится к нулю, а пластина $S_R$ превращается в бесконечную плоскость $S$. Следовательно,

$$u_{s,2}^{sc} = u_s^{refl} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \left( u_s^{refl} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{\partial u_s^{refl}}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right) ds =$$

$$= \begin{cases} u_s^{refl} & \text{в области } z > 0, \\ 0 & \text{в области } z < 0. \end{cases} \tag{1.66}$$

Таким образом, функция (1.58) представляет собой отраженное поле в области $z > 0$.

Поле (1.54), рассеянное акустически жесткой бесконечной плоскостью $S$, также может быть представлено в виде суммы отраженного поля и теневого излучения:

$$u_h^{sc} = u_h^{refl} + u^{sh}, \tag{1.67}$$

где

$$u_h^{refl} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \left( u_h^{refl} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{\partial u_h^{refl}}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right) ds \tag{1.68}$$

и

$$u_h^{refl} = u^{inc}, \qquad \frac{\partial u_h^{refl}}{\partial n} = -\frac{\partial u^{inc}}{\partial n}. \tag{1.69}$$

Теневое излучение не зависит от типа граничных условий и является одним и тем же, как для мягкой, так и для жесткой плоскости. Оно определяется формулой (1.63).

Приведенное выше представление поля в виде суммы отраженного поля и теневого излучения можно распространить на поля, рассеянные произвольными акустически мягкими и жесткими телами. Однако в этом случае в качестве поверхности интегрирования в формулах (1.63), (1.66) и (1.68) нужно брать только освещенную сторону ($S_{il}$) тела (рис 1.4).

Таким образом, поле в приближении ФО может быть представлено в общем случае в виде

$$u_{s,h}^{PO} = u_{s,h}^{refl} + u^{sh}, \tag{1.70}$$

где

$$\boxed{u_{s,h}^{refl} = \frac{1}{4\pi}\int_{S_{il}}\left(u_{s,h}^{refl}\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} - \frac{\partial u_{s,h}^{refl}}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\right)ds, \qquad (1.71)}$$

$$\boxed{u^{sh} = \frac{1}{4\pi}\int_{S_{il}}\left(u^{inc}\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} - \frac{\partial u^{inc}}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\right)ds, \qquad (1.72)}$$

а величины $u_{s,h}^{refl}$, $\partial u_{s,h}^{refl}/\partial n$ определяются формулами (1.64) и (1.69).

Выражение (1.72) для теневого иэлучения можно рассматривать как обобщение известного определения Кирхгофа для *тонких черных экранов*. Здесь оно распространено на *объемные черные тела*. Ранее такое обобщение уже было сделано применительно к дифракции электромагнитных волн (Уфимцев, 1968, 2003, 2007 а).

Забегая вперед, отметим, что представление поля ФО в виде суммы (1.70) справедливо также и для электромагнитных волн (Ufimtsev, 2007 b, 2008 a). Явные выражения для этого случая приведены ниже в разделе 1.5.

Следует отметить еще одно интересное соотношение между ФО и теневым излучением. Согласно формулам (1.31), (1.32) и (1.72) теневое излучение можно представить в следующей форме:

$$\boxed{u^{sh} = \frac{1}{2}(u_s^{PO} + u_h^{PO}). \qquad (1.73)}$$

Если теперь мы обратимся к формуле (1.37), то немедленно получим следующий фундаментальный результат: теневое излучение асимптотически равно нулю в направлении к источнику падающей волны. Иначе говоря, при дифракции на черных телах (так, как они определены выше) обратное рассеяние отсутствует.

В отличие от задачи рассеяния на бесконечной плоскости, где отраженное поле и теневое излучение существуют в раздельных полупространствах, поля (1.71) и (1.72), возникающие при дифракции на конечных телах, существуют во всем окружающем пространстве. Однако их пространственные распределения существенно отличаются. Отраженное поле преобладает в лучевой области, тогда как теневое излучение концентрируется в теневой области и в ее окрестности (Уфимцев, 1968, 1990, 1996, 2003, 2007 а). Отметим также, что теневое излучение равно нулю в направлениях зеркально отраженных лучей (Ufimtsev, 2008).

Физическими проявлениями теневого излучения являются хорошо известные явления Грималди–Френеля и рассеяния вперед (forward scattering); см., например, публикации (Glaser, 1985; Willis, 1991; Ufimtsev, 1996).

Действительно, дифракционные полосы, обрамляющие геометрооптическую тень непрозрачного тела и наблюдаемые при дифракции Грималди–Френеля, суть не что иное, как результат интерференции падающей волны и теневого излучения. Интересно, что история дифракции как науки началась в середине 17-го века с изучения именно этого явления (Grimaldi, Newton, Young, Fresnel). Рассеяние вперед представляет собой увеличение рассеянного поля в направлениях вблизи границы тени позади рассеивающего тела. Оно интенсивно исследовалось экспериментально (Willis, 1991). Обширные численные результаты по рассеянию на акустически мягких и жестких телах, а также на идеально проводящих телах, убедительно демонстрируют существование этого явления (Bowman et al., 1987). Проведенный выше анализ приближения ФО проясняет природу этого явления, присущего дифракции на любых больших непрозрачных телах.

Отметим еще, что благодаря поперечной диффузии волнового поля, теневое излучение может проникать из области тени далеко в окружающее пространство (Уфимцев, 1990; см. также раздел 14.2 в данной книге). Кроме того, поперечная диффузия теневого излучения дает начало краевым волнам, ползущим волнам и поверхностным дифракционным лучам (Ufimtsev, 1996, 2003, 2007 а).

### 1.3.5. Теорема о теневом контуре и полный поперечник рассеяния

Среди других свойств теневого излучения наиболее важными являются величина его полной мощности и теорема о теневом контуре. Ранее эти свойства были установлены для электромагнитных волн (Уфимцев, 1968, 1990, 1996, 2003, 2007 а). Теперь мы исследуем их для акустических волн.

Сравним теневое излучение, исходящее от двух рассеивающих тел с различной формой, но с одинаковым теневым контуром (рис. 1.10). Их освещенные стороны обозначены символами $S_1$ и $S_2$ .

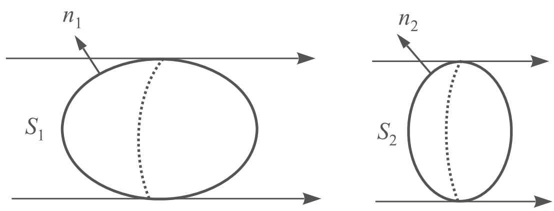


**Рис. 1.10.** Два различных тела с одинаковым теневым контуром (точечная линия)

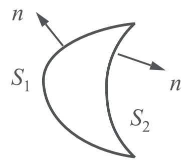


**Рис. 1.11.** Поверхность $S_1 + S_2$ в однородном пространстве. Все источники и точки наблюдения находятся вне объема, ограниченного этой поверхностью

Согласно формуле (1.72),

$$u_1^{sh} = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left(u^{inc}\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} - \frac{\partial u^{inc}}{\partial n_1}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\right)ds,$$
$$u_2^{sh} = \frac{1}{4\pi}\int_{S_2}\left(u^{inc}\frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} - \frac{\partial u^{inc}}{\partial n_2}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\right)ds. \tag{1.74}$$

Разность этих величин можно записать в виде

$$u_1^{sh} - u_2^{sh} = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1+S_2}\left(u^{inc}\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} - \frac{\partial u^{inc}}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\right)ds, \tag{1.75}$$

где $\hat{n} = \hat{n}_1$, $\hat{n} = -\hat{n}_2$ есть внешняя нормаль к поверхности $S_1 + S_2$ (рис. 1.11).

Согласно принципу эквивалентности Гельмгольца (Bakker & Copson, 1939) разность (1.75) равна нулю для точек наблюдения вне объема, ограниченного поверхностью $S_1 + S_2$. Следовательно,

$$u_1^{sh} = u_2^{sh}. \tag{1.76}$$

Это уравнение представляет собой теорему о теневом контуре:

> *Теневое излучение не зависит от всей формы рассеивающего тела и полностью определяется только размером и геометрией его теневого контура.*

Данная теорема подчеркивает роль теневого контура в формировании дифракционного поля и объясняет известные результаты (Maggi, 1888; Rubinowicz, 1917; Kottler, 1923 a, 1923 b; Уфимцев, 1990), где поверхностный интеграл (1.72) сводится к линейному интегралу вдоль теневого контура и к полю падающей волны.

Оценим теперь полную мощность как отраженного поля, так и теневого излучения. Полная мощность отраженного поля может быть представлена в виде

$$P_{s,h}^{refl} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{S_{il}}(p_{s,h}^{refl})^*\,(\vec{v}_{s,h}^{\,refl}\cdot\hat{n})ds, \tag{1.77}$$

где, согласно формулам (1.2), (1.41), (1.64) и (1.69),

$$\begin{aligned} p_s^{refl} &= -p^{inc} = -i\omega\rho u_0 e^{ikz}, \quad \vec{v}_s^{\,refl}\cdot\hat{n} = \vec{v}^{\,inc}\cdot\hat{n} = iku_0 e^{ikz}(\hat{z}\cdot\hat{n}), \\ p_h^{refl} &= p^{inc} = i\omega\rho u_0 e^{ikz}, \quad \vec{v}_h^{\,refl}\cdot\hat{n} = -\vec{v}^{\,inc}\cdot\hat{n} = -iku_0 e^{ikz}(\hat{z}\cdot\hat{n}). \end{aligned} \tag{1.78}$$

Подставляя эти величины в формулу (1.77), получаем

$$P_s^{refl} = P_h^{refl} = \frac{1}{2}k^2 ZA|u_0|^2 = P^{inc}\cdot A \tag{1.79}$$

и

$$\boxed{\sigma^{refl,tot} = A.} \tag{1.80}$$

Это выражение показывает, что полная мощность отраженного поля точно равна мощности лучей, падающих на рассеивающее тело, которое только перераспределяет их в окружающем пространстве. Изменяя форму освещенной поверхности $S_{il}$ тела, можно существенно снизить обратное рассеяние, отклоняя отраженные лучи в сторону от сонара/радара. Это есть первая основная идея, используемая в современной стелс-технологии (Уфимцев, 1996; Алексеев, Штагер и Козырев, 2007).

Полная мощность теневого излучения равна

$$P^{sh,\,tot} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{S_{il}} (p^{inc})^*\,[\vec{v}^{\,inc}\cdot(-\hat{n})]ds\,. \tag{1.81}$$

Знак минус перед нормалью $\hat{n}$ поставлен потому, что на освещенной стороне черного тела по определению отсутствует излучение в положительном направлении нормали. Согласно формулам (1.2) и (1.40),

$$p^{inc} = i\omega\rho u_0 e^{ikz}, \ (\vec{v}^{\,inc}\cdot\hat{n}) = iku_0 e^{ikz}(\hat{z}\cdot\hat{n}). \tag{1.82}$$

Подставляя эти величины в формулу (1.81), получаем

$$P^{sh,tot} = \frac{1}{2}k^2 ZA|u_0|^2 = P^{inc}A \tag{1.83}$$

и

$$\boxed{\sigma^{sh,tot} = A.} \tag{1.84}$$

Таким образом, мощность теневого излучения равна мощности отраженного поля, а их сумма точно равна полной рассеянной мощности (1.42). Этот результат проясняет физику, стоящую за фундаментальным дифракционным законом (1.45). А именно, он показывает, что акустически мягкие или жесткие тела проявляют двойственную природу. Они одновременно являются идеально отражающими (с коэффициентами отражения $\mathcal{R}_s = -1$ и $\mathcal{R}_h = 1$) и абсолютно поглощающими (с коэффициентом $\mathcal{R} = 0$), т. е. черными. Теперь закон о полном поперечнике рассеяния можно записать в виде

$$\boxed{\sigma^{tot} = \sigma^{refl,tot} + \sigma^{sh,tot} = 2A, \qquad (1.85)}$$

где $A$ есть площадь поперечного сечения зоны тени.

Выражение $\sigma^{refl,tot} = A$ ясно показывает, что полная мощность отраженных волн не изменяется при деформации рассеивающего тела, если поперечное сечение зоны тени остается постоянным. Однако эта мощность может быть уменьшена поглощающими покрытиями, наносимыми на тело. Такой способ снижения рассеяния используется в стелс-технологии со времен Второй мировой войны. Напротив, теневое излучение не может быть уменьшено любыми поглощающими покрытиями. Следовательно, оно может быть использовано для обнаружения *больших* объектов даже с малым *моностатическим* поперечником рассеяния при наблюдении их с помощью *бистатических* сонаров/радаров (Ufimtsev, 1996; Алексеев, Штагер и Козырев, 2007).

### 1.3.6. Перечень свойств физической оптики

- Приближение ФО правильно описывает как отраженные лучи вдали от геометрооптических границ, так и дифракционные поля вблизи этих границ.
- Поле ФО также является составной (а иногда даже главной) частью дифракционных полей вблизи фокусов и каустик.
- Аналитические выражения для отраженных лучей находятся путем асимптотической оценки интегралов ФО.
- Интегралы ФО правильно предсказывают величину и положение главного лепестка и близких к нему боковых лепестков в диаграмме рассеянного поля.
- Однако поверхностные интегралы ФО сложны для численных оценок, получение которых для тел больших размеров становится практически невыполнимой задачей. Пребразование таких поверхностных интегралов ФО в линейные интегралы является предметом непрекращающихся исследований (Maggi, 1888; Rubinowicz, 1917; Asvestas, 1985, 1986, 1995; Gordon, 1994, 2002, 2003; Meincke, et al., 2003).
- Обратное рассеяние в приближении ФО обладает свойством (1.37): поля, рассеянные акустически *мягкими* и *жесткими* телами (одинаковой формы и одинакового размера) отличаются только знаком.
- Разделение поля ФО на его отраженную компоненту и теневое излучение проясняет физику рассеяния. В частности, это объясняет фундаментальный закон теории дифракции, согласно которому полный поперечник рассеяния больших идеально отражающих тел равен удвоенной площади поперечного сечения их зоны тени.
- Теневое излучение равно нулю в направлении к источнику падающей волны и в направлениях зеркально отраженных лучей (Ufimtsev, 2008 a).
- Отраженная компонента поля ФО равна нулю в направлении главного теневого лепестка диаграммы рассеяния (Ufimtsev, 2008 a).

- Физическими проявлениями теневого излучения являются дифракция Грималди–Френеля и увеличение рассеяния вперед (forward scattering).

Приближение физической оптики имеет следующие недостатки:

- ФО является несамосогласованной. Когда точка наблюдения в интегралах ФО опускается на поверхность рассеивающего тела, эти интегралы не воспроизводят начальные значения для поверхностного поля. Помимо правильной геометрооптической компоненты эти интегралы содержат дополнительное слагаемое, обусловленное теневым излучением.
- По этой же причине ФО не удовлетворяет граничным условиям на поверхности рассеивающего тела.
- ФО не удовлетворяет принципу взаимности.

Причиной указанных недостатков ФО является используемая в ней геометрооптическая аппроксимация поверхностного поля, которая не учитывает присутствия там дифракционных компонент. Цель данной книги состоит в построении физической теории дифракции, которая принимает во внимание главные дифракционные компоненты поверхностного поля и тем самым уточняет ФО (Уфимцев, 1962, 1991, 2003, 2007 a, b).

## 1.4. Неравномерная компонента поверхностного поля

Поверхностные поля $u$ или $\partial u/\partial n$, возбуждаемые падающей волной на рассеивающем теле, можно рассматривать как источники рассеянного поля.

Как уже отмечалось во введении, центральная и оригинальная идея ФТД состоит в разделении этих источников на *равномерную* и *неравномерную* компоненты:

$$j_{s,h} = j_{s,h}^{(0)} + j_{s,h}^{(1)}. \tag{1.86}$$

Равномерная компонента $j_{s,h}^{(0)}$ определяется согласно выражениям (1.31) и представляет собой поверхностное поле, возбуждаемое падающей волной на бесконечной плоскости, касательной к телу (рис. 1.4 и 1.12). В случае падающей *плоской* волны это поле *равномерно* распределено по касательной плос-

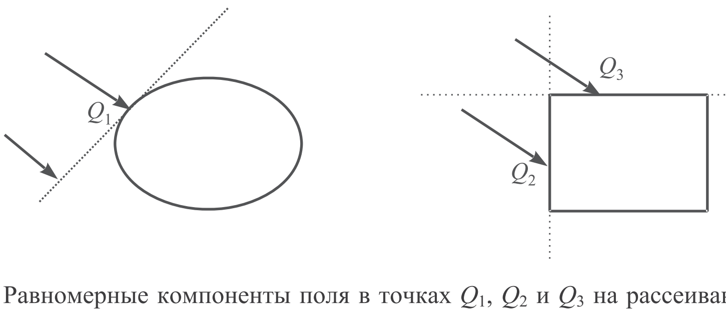


**Рис. 1.12.** Равномерные компоненты поля в точках $Q_1$, $Q_2$ и $Q_3$ на рассеивающем теле идентичны полям на бесконечных касательных плоскостях, показанных точечными линиями

кости: его амплитуда постоянна на плоскости, а его фаза есть линейная функция координат этой плоскости. Именно поэтому мы называем компоненту $j^{(0)}$ *равномерной*. В соответствии с определением (1.31) ее можно также назвать *геометрооптической* или *лучевой* компонентой.

В отличие от такой *лучевой* равномерной компоненты, *неравномерная* компонента $j_{s,h}^{(1)}$ есть *дифракционная* часть поверхностного поля. Она обусловлена *любым отклонением рассеивающей* поверхности от касательной бесконечной *однородной* плоскости. Такие отклонения могут иметь форму плавных или острых изгибов, острых ребер, линий разрывов кривизны поверхности, линий скачкообразного изменения материальных свойств тела, форму отверстий, маленьких бугорков или ямок (рис. 1.13).

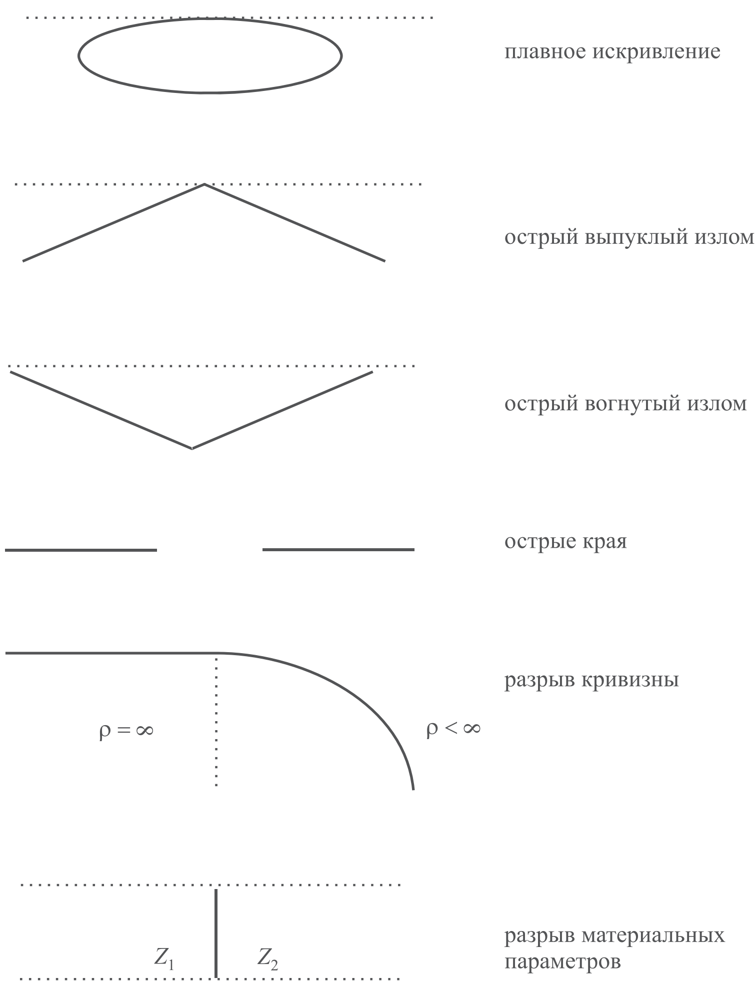


**Рис. 1.13.** Различные поверхности и структуры, где падающая волна создает неравномерные *рассеивающие* источники

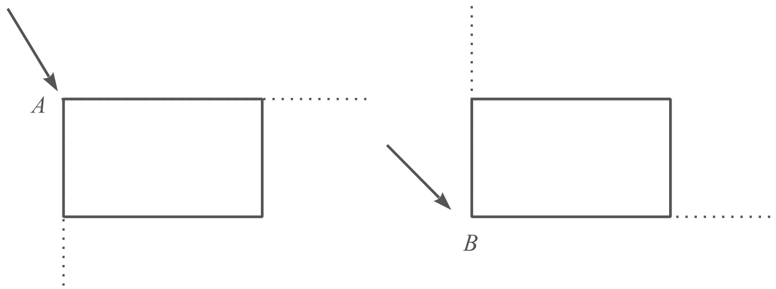


**Рис. 1.14.** Неравномерные компоненты поверхностного поля, возбуждаемые падающей волной вблизи ребер $A$ и $B$, асимптотически ($k \to \infty$) эквивалентны полям на касательных клиньях с бесконечными гранями, показанными точечными линиями

Если рассеивающее тело выпуклое и гладкое, а его размеры и радиусы кривизны велики по сравнению с длиной волны, то неравномерная компонента концентрируется вблизи границы между освещенной и теневой частями (рис. 1.4). Эта компонента описывается асимптотически функциями Фока (Fock, 1965, 1970). С физической точки зрения, она представляет собой ползущие волны, которые излучают поверхностные дифракционные лучи.

Если тело имеет острые края (ребра), то неравномерная компонента концентрируется в их окрестности (рис. 1.14) и описывается асимптотически функциями Зоммерфельда (Sommerfeld, 1935), представленными ниже в главе 2. Этот тип неравномерных компонент излучает краевые волны, часто называемые *fringe waves*. Аналогично, неравномерные компоненты вблизи вершин излучают вершинные волны.

Принимая во внимание дифракционные/неравномерные компоненты поверхностного поля, ФТД уточняет ФО и позволяет получить более точные асимптотики для рассеянного поля. Предложенное в ФТД разделение поверхностного поля на равномерную и неравномерную компоненты оказалось весьма продуктивным и часто используется в теории дифракции. Концепция разделения поля на компоненты является довольно гибкой и допускает различные модификации в зависимости от исследуемых задач. В частности, она может быть обобщена на случай задач с другими граничными условиями. В комбинации с прямыми численными методами концепция ФТД может быть использована при построении эффективных гибридных схем. Правильный выбор равномерной компоненты зависит от специфических свойств исследуемой задачи и может существенно облегчить ее решение. Дополнительные соображения на этот счет можно найти в статье (Ufimtsev, 1998) и в некоторых работах, ссылки на которые даны в публикациях автора (Ufimtsev, 1996, 2003, 2007 a). См. также в конце этой книги раздел «Дополнительные ссылки, относящиеся к концепции ФТД: применения, модификации и обобщения».

## 1.5. Электромагнитные волны

В этом разделе кратко изложены основные понятия, используемые в данной книге для описания электромагнитных волн. В книге изучается дифракция на идеально проводящих телах, бóльших по сравнению с длиной волны. Предполагается, что тела находятся в свободном пространстве (в вакууме).

**Поля и потенциалы**

Электрический ($\vec{E}$) и магнитный ($\vec{H}$) векторы волнового поля определяются следующими выражениями:

$$\vec{E} = \frac{i}{k} Z_0 \cdot [\nabla(\nabla\cdot \vec{A}^e) + k^2 \vec{A}^e] - \nabla \times \vec{A}^m, \tag{1.87}$$

$$\vec{H} = \frac{i}{kZ_0} [\nabla(\nabla\cdot \vec{A}^m) + k^2 \vec{A}^m] + \nabla \times \vec{A}^e. \tag{1.88}$$

Здесь $Z_0 = 1/Y_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$ [Ом] есть импеданс свободного пространства, $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 2\pi/\lambda$ — волновое число, а величины

$$\vec{A}^e = \frac{1}{4\pi}\int \vec{j}^{\,e} \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\,dv \quad \text{и} \quad \vec{A}^m = \frac{1}{4\pi}\int \vec{j}^{\,m} \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\,dv \tag{1.89}$$

являются электрическим и магнитным векторными потенциалами. Эти потенциалы удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta\vec{A}^{e,m} + k^2\vec{A}^{e,m} = -\vec{j}^{\,e,m}, \tag{1.90}$$

где $\vec{j}^{\,e}$ ($\vec{j}^{\,m}$) есть плотность электрического (магнитнго) тока в источниках поля.

Заметим, что выражения (1.87–1.91) проще и удобнее при вычислении полей по сравнению с теми, которые обычно приняты в книгах по электродинамике. Действительно, формулы (1.89) и (1.90) совершенно одинаковы и для электрических, и для магнитных потенциалов. Последние члены в формулах (1.87) и (1.88) не содержат множителей $1/\mu_0$ и $1/\varepsilon_0$, которые в конечном счете нейтрализуются множителями $\mu_0$ и $\varepsilon_0$ в выражениях для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

**Поле в дальней зоне**

Для вычисления полей в дальней зоне от рассеивающего тела можно использовать аппроксимации, аналогичные (1.16), (1.17):

$$\vec{A}^{e,m} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\int \vec{j}^{\,e,m}\mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega}\,dv. \tag{1.91}$$

Сферические компоненты поля описываются следующими формулами:

$$E_\vartheta = Z_0 H_\varphi = ik(Z_0 A_\vartheta^e + A_\varphi^m), \tag{1.92}$$

$$E_\varphi = -Z_0 H_\vartheta = ik(Z_0 A_\varphi^e - A_\vartheta^m). \tag{1.93}$$

Радиальные компоненты $E_R$, $H_R$ имеют величину порядка $1/R^2$ и не учитываются при оценках поля в дальней зоне.

### Поперечник рассеяния

Поперечник рассеяния определяется согласно (1.9) и (1.26) как

$$\sigma = 4\pi R^2 \left| \frac{\vec{E}^{sc}}{\vec{E}^{inc}} \right|^2. \tag{1.94}$$

Формулы (1.27) и (1.28) для поперечника рассеяния гладких выпуклых тел остаются в силе для электромагнитных волн. Выражение (1.45) для полного поперечника рассеяния также справедливо для электромагнитных волн.

### Оптическая теорема

Оптическая теорема (1.53) для электромагнитных волн с линейной поляризацией приобретает вид

$$\sigma^{tot} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}[(E^{sc}/E^{inc}) \cdot R\,\mathrm{e}^{-ikR}], \tag{1.95}$$

где $E^{sc}$ есть дальнее поле, рассеяное в направлении падающей волны (в направлении «на прострел»).

### Приближение физической оптики

Приближение физической оптики (ФО) для поля в дальней зоне, рассеяного идеально проводящими телами, определяется потенциалами

$$\vec{A}^e = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \int_{S_{il}} \vec{j}^{(0)} \mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega} ds, \quad \vec{A}^m = 0, \tag{1.96}$$

где $S_{il}$ есть освешенная сторона тела, и

$$\vec{j}^{(0)} = 2[\hat{n} \times \vec{H}^{inc}] \tag{1.97}$$

есть *равномерная компонента* плотности электрического тока, наводимого падающей волной на поверхности тела. Магнитный ток $\vec{j}^m = -[\hat{n} \times E]$ на поверхности идеально проводящего тела равен нулю в силу граничного условия $[\hat{n} \times E] = 0$. Детальное описание свойств ФО для электромагнитных волн дано в статье (Ufimtsev, 1999, 2005). См. также справочник (Ruck et al., 1970).

### Поляризационная независимость обратного рассеяния

Согласно формулам ФО (4.1.12) и (4.1.13) в книге (Ufimtsev, 2003, 2007 a), обратное рассеяние от *выпуклых идеально проводящих тел* не зависит от поляризации падающей волны. Это свойство становится очевидным, если в формуле (4.1.13) учесть, что $H_{0x} = -E_{0\vartheta}$.

### Обратное рассеяние. Соотношения эквивалентности между акустическими и электромагнитными волнами

Рассмотрим другое важное следствие ФО-аппроксимаций (4.1.12) и (4.1.13) в книге (Ufimtsev, 2003, 2007 a). Эти формулы были получены при следующих условиях:

а) Падающая плоская волна распространяется в направлении

$$\hat{k}^i = \hat{y}\sin\gamma + \hat{z}\cos\gamma.$$

б) Вычисляется *обратное рассеяние*, т. е. рассеяние в направлении $\hat{m}^i = -\hat{k}^i$. Точка наблюдения находится в плоскости $yOz$ ($\varphi = -\pi/2$).

в) Поле (4.1.12) возбуждается падающей волной с $E$-поляризацией,

$$E_x^{inc} = E_{0x}\mathrm{e}^{ik(y\sin\gamma + z\cos\gamma)}.$$

г) Поле (4.1.13) возбуждается падающей волной с $H$-поляризацией,

$$H_x^{inc} = H_{0x}\mathrm{e}^{ik(y\sin\gamma + z\cos\gamma)}.$$

Принимая во внимание эти замечания, ФО-аппроксимации (4.1.12) и (4.1.13) в книге (Ufimtsev, 2003, 2007 a) можно записать в виде

$$E_x^{(0)} = -\frac{ik}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\int\limits_{S_{il}} E_x^{inc}\mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega}(\hat{k}^i\cdot\hat{n})ds, \tag{1.98}$$

$$H_x^{(0)} = -\frac{ik}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\int\limits_{S_{il}} H_x^{inc}\mathrm{e}^{-ikr'\cos\Omega}(\hat{k}^i\cdot\hat{n})ds. \tag{1.99}$$

Сравнение этих выражений с формулой (1.37) позволяет установить следующее соотношение эквивалентности (в приближении ФО) между *обратным рассеянием* (backscattering) акустических и электромагнитных волн:

$$E_x^{(0)} = u_s^{(0)}, \text{ если } E_x^{inc} = u^{inc}, \tag{1.100}$$

$$H_x^{(0)} = u_h^{(0)}, \text{ если } H_x^{inc} = u^{inc}. \tag{1.101}$$

Отметим, что соотношение эквивалентности (1.101) также содержится в монографии (Алексеев, Штагер, Козырев, 2007, с. 98).

### Отраженная и теневая компоненты поля ФО

Используя векторные теоремы эквивалентности (Ufimtsev, 2003, 2007 a) и идеи из раздела 1.3.4 [см. также (Ufimtsev, 2008 a)], можно представить поле ФО в виде, аналогичном (1.70):

$$\vec{E}^{PO} \equiv \vec{E}^{(0)} = \vec{E}^{refl} + \vec{E}^{sh}, \quad \vec{H}^{PO} \equiv \vec{H}^{(0)} = \vec{H}^{refl} + \vec{H}^{sh}. \tag{1.102}$$

Здесь $\vec{E}^{refl}$, $\vec{H}^{refl}$ и $\vec{E}^{sh}$, $\vec{H}^{sh}$ суть отраженное поле и теневое излучение, соответственно. В дальней зоне они описываются формулами:

$$E_{\vartheta}^{refl} = \frac{ik}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{S_{il}}\{Z_0[n\times\vec{H}^{inc}]\cdot\hat{\vartheta}+[\hat{n}\times\hat{E}^{inc}]\cdot\hat{\varphi}\}e^{-ikr'\cos\Omega}ds, \quad (1.103)$$

$$E_{\varphi}^{refl} = \frac{ik}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{S_{il}}\{Z_0[n\times\vec{H}^{inc}]\cdot\hat{\varphi}-[\hat{n}\times\hat{E}^{inc}]\cdot\hat{\vartheta}\}e^{-ikr'\cos\Omega}ds, \quad (1.104)$$

$$E_{\vartheta}^{sh} = \frac{ik}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{S_{il}}\{Z_0[n\times\vec{H}^{inc}]\cdot\hat{\vartheta}-[\hat{n}\times\hat{E}^{inc}]\cdot\hat{\varphi}\}e^{-ikr'\cos\Omega}ds, \quad (1.105)$$

$$E_{\varphi}^{sh} = \frac{ik}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{S_{il}}\{Z_0[n\times\vec{H}^{inc}]\cdot\hat{\varphi}+[\hat{n}\times\hat{E}^{inc}]\cdot\hat{\vartheta}\}e^{-ikr'\cos\Omega}ds, \quad (1.106)$$

$$\vec{H}^{refl} = [\nabla R\times\vec{E}^{refl}]/Z_0, \quad \vec{H}^{sh} = [\nabla R\times\vec{E}^{sh}]/Z_0. \quad (1.107)$$

Здесь $\hat{\vartheta}$ ($\hat{\varphi}$) есть единичный вектор в направлении увеличения угла $\vartheta$ ($\varphi$).

Предположим, что падающая волна задана формулой

$$E_x^{inc} = Z_0 H_y^{inc} = E_{0x}e^{ikz}. \quad (1.108)$$

Тогда из приведенных выше формул получаем соотношения

$$E_x^{sh} = \frac{ik}{2\pi}E_{0x}A\frac{e^{ikR}}{R}, \quad E_x^{refl} = 0 \quad [\vartheta = 0] \quad (1.109)$$

для направления вперед («на прострел»), и

$$E_x^{sh} = 0 \quad [\vartheta = \pi] \quad (1.110)$$

для обратного рассеяния. Здесь $A$ есть площадь поперечного сечения зоны тени позади рассеивающего тела (рис. 1.4).

Таким образом,

$$E_x^{PO} \equiv E_x^{sh} = E_{0x}\frac{ik}{2\pi}A\frac{e^{ikz}}{z} \quad [\vartheta = 0] \quad (1.111)$$

для направления вперед, и

$$E_x^{PO} = E_x^{refl} = -\frac{ik}{2\pi}E_{0x}\frac{e^{ikR}}{R}\int_{S_{il}}(\hat{n}\cdot\hat{z})e^{i2kz'}ds \quad [\vartheta = \pi] \quad (1.112)$$

для обратного рассеяния.

**Теорема о теневом контуре**

Теорема, установленная в разделе 1.3.5 для акустических волн, остается в силе и для электромагнитных волн (Ufimtsev, 2003, 2007 a).

### Теневое излучение и черные тела

Теневое излучение можно интерпретировать как поле, рассеянное черным телом. В главе 1 в книге (Ufimtsev, 2003, 2007 a) приведены явные выражения и результаты численных расчетов для электромагнитных полей, рассеянных на произвольных двухмерных черных цилиндрах и на черных телах вращения. Отметим также, что теневое излучение равно нулю в направлениях зеркально отраженных лучей (Ufimtsev, 2008 a).

### Равномерные и неравномерные компоненты поверхностного тока

Определения этих компонент, изложенные в разделе 1.4, остаются в силе для поверхностных электрических токов. Модифицированные определения предложены в разделах 7.9.1 и 7.9.2.

## Задачи

**1.1.** Падающая волна $u^{inc} = u_0 \exp[-ik(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0)]$ возбуждает поверхностные источники $j_s = 2\partial u^{inc}/\partial y$ на освещенной стороне ($y = +0$) акустически *мягкой* бесконечной плоскости (рис. З1.1). Получите выражения для рассеянного поля $u_s^{sc}$, излучаемого этими источниками сверху и снизу от плоскости. Последовательнось действий:

- Начните с интеграла (1.10).
- Выразите интеграл по переменной $\zeta$ через функцию Ханкеля (3.7).
- Используя далее интегральное представление (3.8) для этой функции, получите двухкратный интеграл Фурье для плоской волны.
- Определите полное поле $u_s^t = u_s^{inc} + u_s^{sc}$ в области $y < 0$ и убедитесь в блокирующей роли рассеивающих источников $j_s$.

**1.2.** Решите задачу рассеяния, аналогичную задаче 1.1, но для акустически *жесткой* плоскости.

**1.3.** Падающая волна $E_z^{inc} = E_{0z} \exp[-ik(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0)]$ возбуждает поверхностный ток $\vec{j} = 2[\hat{y}\times\vec{H}^{inc}]$ на освещенной стороне ($y = +0$) идеально проводящей бесконечной плоскости (рис. З1.1). Получите выражения для рассеянного поля $E_z^{sc}$, излучаемого этим током сверху и снизу от плоскости. Последовательность действий:

- Начните вычисления с формул (1.87), (1.89) .
- Выразите интеграл по переменной $\zeta$ через функцию Ханкеля (3.7).
- Используя далее интегральное представление (3.8) для этой функции, получите двухкратный интеграл Фурье для плоской волны.
- Определите полное поле $E_z^t = E_z^{inc} + E_z^{sc}$ в области $y < 0$ и убедитесь в блокирующей роли тока $j_z$.

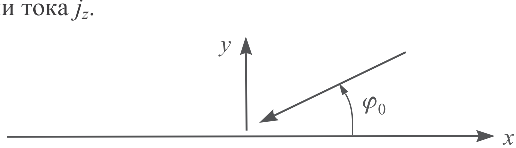


**Рис. З1.1.** Возбуждение бесконечной плоскости падающей волной

**1.4.** Решите задачу, аналогичную задаче 1.3, для падающей волны $H_z^{inc} = H_{0z}\exp[-ik(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0)]$. Определите ток, возбуждаемый на плоскости. Затем используйте формулы (1.89), (1.88) и получите выражения для рассеянного поля $H_z^{sc}$, излучаемого этим током сверху и снизу от плоскости. Следуйте далее программе, указанной в задаче 1.3.

**1.5.** Волна $u^{inc} = u_0\exp[ik(x\cos\phi_0 + y\sin\phi_0)]$ падает на акустически *мягкую* ленту, показанную на рис. 5.1. Используйте формулу (1.71) и определите *отраженную часть* рассеянного поля в дальней зоне от ленты. Последовательность действий:

- Выразите интеграл по переменной $\zeta$ через функцию Ханкеля (3.7).
- Используйте асимптотику (2.29) для функции Ханкеля и получите явные выраженияя для рассеянного поля в дальней зоне ($r \gg ka^2$).
- Определите поле в направлениях $\phi = \phi_0, \phi = \pi - \phi_0, \phi = \pi + \phi_0$ и $\phi = -\phi_0$.
- Примените оптическую теорему (5.16) к полю в направлении $\phi = \pi - \phi_0$ и дайте геометрическую интерпретацию для полного поперечника рассеяния.
- Вычислите и изобразите графически диаграмму отраженного поля, полагая $a = 2\lambda, \phi_0 = 45°$. Отметьте характерные свойства этого поля.

**1.6.** Решите задачу, аналогичную задаче 1.5, но для акустически *жесткой ленты*.

**1.7.** Волна $u^{inc} = u_0\exp[ik(x\cos\phi_0 + y\sin\phi_0)]$ падает на акустически *мягкую* ленту (рис. 5.1). Используйте формулу (1.72) и определите *теневое излучение* в дальней зоне. Последовательность действий:

- Выразите интеграл по переменной $\zeta$ через функцию Ханкеля (3.7).
- Используйте асимптотику (2.29) для функции Ханкеля и получите явные выраженияя для рассеянного поля в дальней зоне ($r \gg ka^2$).
- Определите поле в направлениях $\phi = \phi_0, \phi = \pi - \phi_0, \phi = \pi + \phi_0$.
- Примените оптическую теорему (5.16) к полю в направлении $\phi = \phi_0$ и дайте геометрическую интерпретацию для полного поперечника рассеяния.
- Вычислите и изобразите графически диаграмму отраженного поля, полагая $a = 2\lambda, \phi_0 = 45°$. Отметьте характерные свойства этого поля.

**1.8.** Объясните, чем отличаются *отраженные части* поля ФО, рассеянного акустически *мягкими* и *жесткими* телами (с одинаковой формой и с одинаковым размером).

**1.9.** Объясните, есть ли какое-либо отличие между *теневыми частям*и поля, рассеянного акустически *мягкими* и *жесткими* телами (с одинаковой формой и с одинаковым размером).

**1.10.** Волна $E_z^{inc} = E_{0z}\exp[ik(x\cos\phi_0 + y\sin\phi_0)]$ падает на идеально проводящую ленту (рис. 5.1). Определите *отраженную часть* рассеянного поля в приближении ФО.

- Начните с формул (1.87), (1.88) и (1.89). Определите токи
- $\vec{j}^{\,e,refl} = \hat{n}\times\vec{H}^{inc}$, $\vec{j}^{\,m,refl} = \hat{n}\times\vec{E}^{inc}$.
- Запишите интегральные выражения для рассеянного поля.
- Выразите интеграл по переменной $\zeta$ через функцию Ханкеля (3.7). Затем используйте асимптотику (2.29) и получите явные выражения для поля в дальней зоне ($r \gg ka^2$).
- Определите поле в направлениях $\phi = \phi_0, \phi = \pi - \phi_0, \phi = \pi + \phi_0$ и $\phi = -\phi_0$.
- Примените оптическую теорему к полю в направлении $\phi = \pi - \phi_0$ и дайте геометрическую интерпретацию для полного поперечника рассеяния.

- Вычислите и изобразите графически диаграмму отраженного поля, полагая $a = 2\lambda, \phi_0 = 45°$. Отметьте характерные свойства этого поля.

**1.11.** Волна $E_z^{inc} = E_{0z} \exp[ik(x\cos\phi_0 + y\sin\phi_0)]$ падает на идеально проводящую ленту (рис. 5.1). Определите *теневую часть* рассеянного поля в приближении ФО.

- Начните с формул (1.87), (1.88) и (1.89). Определите токи $\vec{j}^{\,e,sh} = \hat{n} \times \vec{H}^{inc}$, $\vec{j}^{\,m,sh} = -\hat{n} \times \vec{E}^{inc}$.
- Запишите интегральные выражения для рассеянного поля.
- Выразите интеграл по переменной $\zeta$ через функцию Ханкеля (3.7). Затем используйте асимптотику (2.29) и получите явные выражения для поля в дальней зоне ($r \gg ka^2$).
- Определите поле в направлениях $\phi = \phi_0, \phi = \pi - \phi_0, \phi = \pi + \phi_0$.
- Примените оптическую теорему к полю в направлении $\phi = \phi_0$ и дайте геометрическую интерпретацию для полного поперечника рассеяния.
- Вычислите и изобразите графически диаграмму отраженного поля, полагая $a = 2\lambda, \phi_0 = 45°$. Отметьте характерные свойства этого поля.

# Глава 2

# Дифракция на клине: точное решение и асимптотики

Между акустическими и электромагнитными волнами, возникающими при дифракции на клине двухмерной падающей волны ($\partial/\partial z = 0$), существуют следующие соотношения эквивалентности: $u_s = E_z$ и $u_h = H_z$. Здесь $E_z$ и $H_z$ являются компонентами (векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$), параллельными ребру клина.

## 2.1. Классические решения

Дифракция на клине является подходящей канонической задачей для исследования краевых волн, возникающих при дифракции на отражающих поверхностях с плавно изогнутыми, в масштабе длины волны, ребрами. В частном случае, когда внутренний угол между гранями клина равен нулю и клин превращется в полуплоскость, точное решение такой канонической задачи было получено в работе Зоммерфельда (1896) с использованием так называемых разветвленных волновых функций. Анализ этой работы в статье (Ufimtsev, 1998) показал, что Зоммерфельд фактически получил в своей работе все необходимое для того, чтобы построить точное решение задачи о клине с произвольным углом между гранями, но, к сожалению, он не заметил и упустил такую возможность. Точное решение задачи о клине было получено Макдональдом (1902) с помощью классического метода разделения переменных в волновом уравнении. Позднее Зоммерфельд (1935, 1937) также получил решение задачи о клине своим методом разветвленных волновых функций и построил простые асимптотические выражения для краевых дифракционных волн.

Поскольку задача о дифракции на клине является основой для построения ФТД, она исследуется здесь детально. Сначала мы получим ее решение в форме бесконечных рядов, а затем преобразуем их в интегралы Зоммерфельда, удобные для асимптотического анализа. Материал данной главы, за исключе-

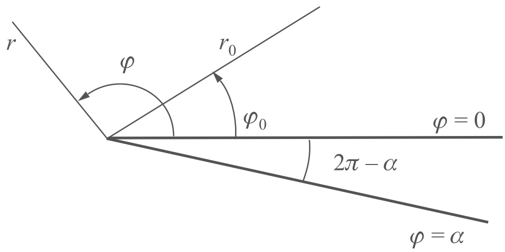


**Рис. 2.1.** На клин падает волна, излучаемая источником, который расположен на линии $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$

нием разделов 2.6 и 2.7, есть скалярная версия теории, изложенной ранее автором для электромагнитных волн (Уфимцев, 1962).

Геометрия задачи показана на рис. 2.1. Клин с бесконечными плоскими гранями $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$ находится в однородном пространстве и возбуждается цилиндрической волной. Источником этой волны является излучающая нить с кооординатами $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$. Рассматриваемая задача дифракции является двухмерной, поскольку все фигурирующие в ней величины не зависят ои координаты $z$ ($\partial/\partial z = 0$).

Волновое поле вне клина ($0 \le \varphi \le \alpha$) удовлетворяет уравнению

$$\Delta u + k^2 u = I_0 \delta(r - r_0, \varphi - \varphi_0) \tag{2.1}$$

и граничным условиям

$$u_s = 0 \tag{2.2}$$

или

$$\partial u_h / \partial n = 0 \tag{2.3}$$

на гранях клина $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$. В случае электромагнитных волн эти граничные условия соответствуют *идеально проводящему* клину. При этом функция $u_s$ является $z$-компонентой вектора электрической напряженности $\vec{E}$, а функция $u_h$ есть $z$-компонента вектора магнитной напряженности $\vec{H}$. В случае акустических волн условие (2.2) соответствует акустически *мягкому* клину, а условие (2.3) — акустически *жесткому* клину. Определения акустически *мягких* и *жестких* тел даны в разделе 1.1.

Вне источника поле $u$ удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0. \tag{2.4}$$

Двухмерный оператор Лапласа определяется выражением

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{2.5}$$

Следуя классическому методу разделения переменных, мы полагаем в уравнении (2.4)

$$u = R(r)\Phi(\varphi). \tag{2.6}$$

В результате простых преобразований получаем два уравнения:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu_l^2}{x^2}\right)R = 0, \text{ где } x = kr, \tag{2.7}$$

и

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \nu_l^2\Phi = 0. \tag{2.8}$$

Функция $\Phi$ и постоянная разделения $\nu_l$ определяются с учетом граничных условий.

В случае «мягких» граничных условий (2.2) из уравнения (2.8) находим

$$\Phi = \sin\nu_l\varphi, \quad \nu_l = l\frac{\pi}{\alpha}, \; l = 1, 2, 3, ..., \tag{2.9}$$

а в случае «жестких» граничных условий (2.3) из уравнения (2.8) получаем

$$\Phi = \cos\nu_l\varphi, \quad \nu_l = l\frac{\pi}{\alpha}, \; l = 0, 1, 2, 3, ... \tag{2.10}$$

Функции Бесселя и Ханкеля

$$R = \begin{Bmatrix} J_{\nu_l}(kr) \\ H_{\nu_l}^{(1)}(kr) \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

представляют решения радиального уравнения (2.7). Функции Бесселя $J_{\nu_l}(kr)$ могут быть использованы в области $r \le r_0$, поскольку они имеют конечную величину на ребре клина $r = 0$. Функции Ханкеля следует использовать в области $r \ge r_0$, поскольку они удовлетворяют условию излучения Зоммерфельда на бесконечности:

$$\lim \sqrt{r}\left(\frac{du}{dr} - iku\right) = 0 \quad \text{при } r \to \infty. \tag{2.12}$$

Седовательно, решения волнового уравнения (2.4) можно представить в виде

$$u_s = \begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{\infty} a_l J_{\nu_l}(kr) H_{\nu_l}^{(1)}(kr_0) \sin\nu_l\varphi_0 \sin\nu_l\varphi & \text{при } r \le r_0, \\ \sum\limits_{l=1}^{\infty} a_l J_{\nu_l}(kr_0) H_{\nu_l}^{(1)}(kr) \sin\nu_l\varphi_0 \sin\nu_l\varphi & \text{при } r \ge r_0, \end{cases} \tag{2.13}$$

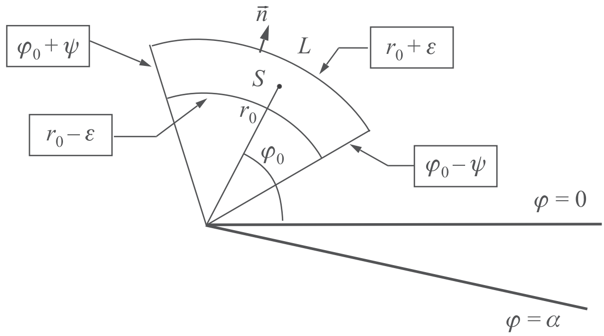


**Рис. 2.2.** Контур интегрирования $L$ в теореме Грина (2.15)

$$u_h=\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{\infty} b_l J_{\nu_l}(kr)H_{\nu_l}^{(1)}(kr_0)\cos\nu_l\varphi_0\cos\nu_l\varphi \text{ при } r\le r_0,\\ \sum\limits_{l=0}^{\infty} b_l J_{\nu_l}(kr_0)H_{\nu_l}^{(1)}(kr)\cos\nu_l\varphi_0\cos\nu_l\varphi \text{ при } r\ge r_0.\end{cases} \tag{2.14}$$

Эти выражения удовлетворяют граничным условиям, а также принципу взаимности, т. е. они не изменяются при перестановке местами $r$ и $r_0$, $\varphi$ и $\varphi_0$.

Неизвестные коэффициенты $a_l$ и $b_l$ можно определить с помощью теоремы Грина:

$$\oint\limits_L \frac{\partial u}{\partial n}dl=\int\limits_S \Delta u ds,\quad ds=rdrd\varphi\,, \tag{2.15}$$

применяя ее к полям $u_s$ и $u_h$ в области $S$, ограниченной контуром $L$ (рис. 2.2). Этот контур состоит из двух дуг $r=r_0-\varepsilon$, $r=r_0+\varepsilon$ и двух радиальных сторон $\varphi=\varphi_0-\psi$, $\varphi=\varphi_0+\psi$.

Подставим $u_{s,h}$ в теорему (2.15), учтем, что согласно (2.1)

$$\Delta u=-k^2u+I_0\delta(r-r_0,\varphi-\varphi_0) \tag{2.16}$$

и устремим $\varepsilon$ к нулю. Ясно, что

$$\int\limits_S u_{s,h}ds\to 0, \text{ когда } S\to 0, \tag{2.17}$$

поскольку функции Бесселя и Ханкеля конечны в точке $r=r_0>0$.

В результате формула Грина для функций $u_{s,h}$ трансформируется в уравнение

$$\int\limits_{\varphi_0-\psi}^{\varphi_0+\psi}\left(\left.\frac{\partial u_{s,h}}{\partial r}\right|_{r=r_0+0}-\left.\frac{\partial u_{s,h}}{\partial r}\right|_{r=r_0-0}\right)r_0d\varphi=$$

$$=I_0\int\limits_{\varphi_0-\psi}^{\varphi_0+\psi}d\varphi\lim\int\limits_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon}\delta(r-r_0,\varphi-\varphi_0)rdr \text{ при } \varepsilon\to 0. \tag{2.18}$$

Заметим, что двухмерная $\delta$-функция в полярных координатах имеет вид

$$\delta(r-r_0,\varphi-\varphi_0)=\delta(r-r_0)\frac{1}{r}\delta(\varphi-\varphi_0)\,. \tag{2.19}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\varphi_0-\psi}^{\varphi_0+\psi}\left(\left.\frac{\partial u_{s,h}}{\partial r}\right|_{r=r_0+0}-\left.\frac{\partial u_{s,h}}{\partial r}\right|_{r=r_0-0}\right)r_0 d\varphi=I_0\int\limits_{\varphi_0-\psi}^{\varphi_0+\psi}\delta(\varphi-\varphi_0)d\varphi\,. \tag{2.20}$$

Уравнение (2.20) справедливо при произвольных пределах интегрирования. Это возможно, если равны подынтегральные выражения в левой и правой частях, т. е.

$$\left.\frac{\partial u_{s,h}}{\partial r}\right|_{r=r_0+0}-\left.\frac{\partial u_{s,h}}{\partial r}\right|_{r=r_0-0}=\frac{1}{r_0}I_0\delta(\varphi-\varphi_0)\,. \tag{2.21}$$

Теперь мы используем это уравнение, чтобы определить неизвестные коэффициенты $a_l$ и $b_l$ в выражениях (2.13) и (2.14).

С этой целью мы подставим $u_s$, заданную выражением (2.13), в уравнение (2.21), умножим обе части на $\sin\nu_t\varphi$, где $\nu_t = t\pi/\alpha$, и проинтегрируем их по переменной $\varphi$ от 0 до $\alpha$. Заметим также, что

$$\int\limits_0^{\alpha}\sin\nu_l\varphi\sin\nu_t\varphi d\varphi=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\alpha, & \text{если } l=t,\\ 0, & \text{если } l\neq t,\ t=1,2,3,\ldots,\end{cases} \tag{2.22}$$

и получим уравнение

$$kr_0\frac{\alpha}{2}a_l\left[J_{\nu_l}(kr_0)\frac{d}{dkr_0}H^{(1)}_{\nu_l}(kr_0)-H^{(1)}_{\nu_l}(kr_0)\frac{d}{dkr_0}J_{\nu_l}(kr_0)\right]=I_0. \tag{2.23}$$

Выражение в квадратных скобках есть вронскиан,

$$W[J_\nu(x),H^{(1)}_\nu(x)]=J_\nu(x)\frac{d}{dx}H^{(1)}_\nu(x)-H^{(1)}_\nu(x)\frac{d}{dx}J_\nu(x)=\frac{2i}{\pi x}\,. \tag{2.24}$$

Из формул (2.23) и (2.24) следует, что

$$a_l=\frac{\pi}{i\alpha}I_0\,. \tag{2.25}$$

В случае жестких граничных условий мы выполняем аналогичные преобразования. Подставляем функцию $u_h$, заданную выражением (2.14), в уравнение (2.21), умножаем обе части на $\cos\nu_t\varphi$ и интегрируем по $\varphi$ от 0 до $\alpha$. В результате получаем уравнение, из которого находим $b_l$:

$$b_l=\varepsilon_l\frac{\pi}{i\alpha}I_0,\ \text{где}\ \varepsilon_0=\frac{1}{2},\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\ldots=1\,. \tag{2.26}$$

Таким образом, коэффициенты $a_l$ и $b_l$ найдены, и функции $u_{s,h}$ полностью определены. Теперь мы можем записать окончательные выражения для полного поля, возбуждаемого излучающей нитью $(r_0, \varphi_0)$.

В случае «мягких» граничных условий поле $u_s$ описывается следующими выражениями:

$$u_s = \begin{cases} \dfrac{\pi}{i\alpha} I_0 \sum\limits_{l=1}^{\infty} J_{\nu_l}(kr) H_{\nu_l}^{(1)}(kr_0) \sin\nu_l\varphi_0 \sin\nu_l\varphi \quad \text{при } r \le r_0, \\ \dfrac{\pi}{i\alpha} I_0 \sum\limits_{l=1}^{\infty} J_{\nu_l}(kr_0) H_{\nu_l}^{(1)}(kr) \sin\nu_l\varphi_0 \sin\nu_l\varphi \quad \text{при } r \ge r_0, \end{cases} \tag{2.27}$$

а в случае «жестких» граничных условий поле $u_h$ определяется аналогичными выражениями:

$$u_h = \begin{cases} \dfrac{\pi}{i\alpha} I_0 \sum\limits_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l J_{\nu_l}(kr) H_{\nu_l}^{(1)}(kr_0) \cos\nu_l\varphi_0 \cos\nu_l\varphi \quad \text{при } r \le r_0, \\ \dfrac{\pi}{i\alpha} I_0 \sum\limits_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l J_{\nu_l}(kr_0) H_{\nu_l}^{(1)}(kr) \cos\nu_l\varphi_0 \cos\nu_l\varphi \quad \text{при } r \ge r_0. \end{cases} \tag{2.28}$$

Эти выражения относятся к полю вне клина в области $0 \le \varphi \le \alpha$, $0 \le r \le \infty$. Поле возбуждается цилиндрической волной, источник которой описывается выражением $I_0\delta(r - r_0,\ \varphi - \varphi_0)$ в уравнении (2.1). В следующем разделе мы преобразуем их на случай возбуждения клина плоской волной.

## 2.2. Возбуждение плоской волной

Для функций Ханкеля с большим аргументом ($kr_0 \to \infty$) можно использовать асимптотическое выражение

$$H_{\nu_l}^{(1)}(kr_0) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}} \mathrm{e}^{i\left(kr_0 - \frac{\pi}{2}\nu_l - \frac{\pi}{4}\right)} \sim H_0^{(1)}(kr_0) \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}\nu_l}. \tag{2.29}$$

Тогда выражения (2.27) и (2.28) для поля в области $r < r_0$ можно записать в виде

$$u_s = \frac{\pi}{i\alpha} I_0 H_0^{(1)}(kr_0) \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}\nu_l} J_{\nu_l}(kr) \sin\nu_l\varphi_0 \sin\nu_l\varphi, \tag{2.30}$$

$$u_h = \frac{\pi}{i\alpha} I_0 H_0^{(1)}(kr_0) \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}\nu_l} J_{\nu_l}(kr) \cos\nu_l\varphi_0 \cos\nu_l\varphi, \tag{2.31}$$

или

$$u_s = \frac{\pi}{2i\alpha} I_0 H_0^{(1)}(kr_0) \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}\nu_l} J_{\nu_l}(kr)[\cos\nu_l(\varphi-\varphi_0) - \cos\nu_l(\varphi+\varphi_0)], \qquad (2.32)$$

$$u_h = \frac{\pi}{2i\alpha} I_0 H_0^{(1)}(kr_0) \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}\nu_l} J_{\nu_l}(kr)[\cos\nu_l(\varphi-\varphi_0) + \cos\nu_l(\varphi+\varphi_0)]. \qquad (2.33)$$

Чтобы выяснить смысл этих выражений, мы рассмотрим решение волнового уравнения (2.1) для поля в свободном пространстве, в отсутствие рассеивающего клина. В этой задаче удобно использовать полярные координаты $(\rho, \varphi)$ с началом в излучающем источнике. Ясно, что в силу азимутальной симметрии задачи ее решение будет функцией только одной переменной, $u = u(\rho)$. Кроме того, поскольку волновое уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка, его решение в общем случае есть сумма двух фундаментальных решений соответствующего однородного уравнения,

$$u(\rho) = c_1 H_0^{(1)}(k\rho) + c_2 H_0^{(2)}(k\rho), \qquad (2.34)$$

с константами $c_1$ и $c_2$. Мы сохраняем здесь только первое слагаемое

$$u(\rho) = c_1 H_0^{(1)}(k\rho), \qquad (2.35)$$

поскольку второе слагаемое, с функцией $H_0^{(2)}(k\rho)$, не удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда (2.12) и представляет собой нефизическую волну, приходящую из бесконечности. Константа $c_1$ находится опять с помощью теоремы Грина (2.15), которая применяется теперь к полю в области $S$, ограниченной окружностью малого радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $\rho = 0$ (рис. 2.3).

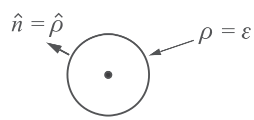


**Рис. 2.3.** Круговая область $(0 \le \rho \le \varepsilon,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$ с излучающим источником в центре

Для малых значений $k\rho \ll 1$ функция $u(k\rho)$ и ее нормальная производная $du/dn = du/d\rho$ (на границе области $S$) описываются асимптотическими выражениями

$$u(\rho) \approx c_1 \frac{i2}{\pi} \ln(k\rho), \quad \frac{du(\rho)}{d\rho} \approx c_1 \frac{i2}{\pi\rho}, \quad \text{где } k\rho \ll 1. \qquad (2.36)$$

Подставляя эти величины в теорему Грина и переходя там к пределу при $\varepsilon \to 0$, находим $c_1 = I_0/i4$ и

$$u(\rho) = \frac{1}{i4} I_0 H_0^{(1)}(k\rho)\,. \tag{2.37}$$

Это решение объясняет физический смысл множителя в формулах (2.32) и (2.33). Он фактически представляет собой поле падающей волны на ребре клина,

$$u_0 = \frac{1}{4i} I_0 H_0^{(1)}(kr_0)\,. \tag{2.38}$$

Когда $r_0 \to \infty$ и $I_0 \to \infty$, это поле можно рассматривать как плоскую волну, приходящую к клину с направления $\varphi = \varphi_0$:

$$u^{inc} = u_0 \mathrm{e}^{-ikr\cos(\varphi - \varphi_0)}. \tag{2.39}$$

В результате, выражения (2.32) и (2.33) можно записать в классической форме Зоммерфельда (Sommerfeld, 1935, 1937):

$$\boxed{\left.\begin{aligned} &u_s = u_0 \cdot [u(kr, \varphi - \varphi_0) - u(kr, \varphi + \varphi_0)] \quad (2.40)\\ &u_h = u_0 \cdot [u(kr, \varphi - \varphi_0) + u(kr, \varphi + \varphi_0)] \quad (2.41) \end{aligned}\right\} \text{для } u^{inc} = u_0 \mathrm{e}^{-ikr\cos(\varphi - \varphi_0)},}$$

где

$$u(kr, \psi) = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}\nu_l} J_{\nu_l}(kr) \cos \nu_l \psi. \tag{2.42}$$

Выражения (2.40–2.42) окончательно определяют полное поле, возбуждаемое *плоской волной* при дифракции на идеально отражающем клине.

## 2.3. Преобразование рядов в интегралы Зоммерфельда

В своей работе Зоммерфельд (1935, 1937) представил решение задачи о дифракции на клине в интегральной форме, а затем преобразовал его в бесконечные ряды. Мы действуем в обратном порядке и преобразуем бесконечные ряды (2.40) и (2.41) в интегралы. Воспользуемся следующим выражением для функции Бесселя (Зоммерфельд, 1935, 1937):

$$J_{\nu_l}(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{I}^{III} \mathrm{e}^{i[kr\cos\beta + \nu_l(\beta - \pi/2)]} d\beta\,, \tag{2.43}$$

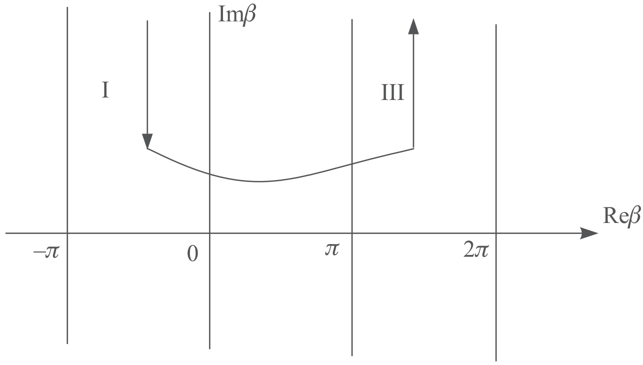


**Рис. 2.4.** Контур интегрирования в формуле (2.43)

где контур интегрирования показан на рис. 2.4. Тогда функцию $u(kr,\psi)$ можно записать в виде

$$u(kr,\psi)=\frac{1}{2\alpha}\int_{I}^{III}\mathrm{e}^{ikr\cos\beta}\left[1+\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{e}^{i\nu_l(\beta-\pi+\psi)}+\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{e}^{i\nu_l(\beta-\pi-\psi)}\right]d\beta, \quad (2.44)$$

где $\nu_l = l\pi/\alpha$. Ряды в квадратных скобках являются геометрическими прогрессиями. Суммируя их, получаем

$$u(kr,\psi)=\frac{1}{2\alpha}\int_{I}^{III}\mathrm{e}^{ikr\cos\beta}\left[\frac{1}{1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{\alpha}(\beta-\pi+\psi)}}-\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{\alpha}(\beta-\pi-\psi)}}\right]d\beta. \quad (2.45)$$

Переходя к новой переменной $\beta' = \beta-\pi$, имеем

$$u(kr,\psi)=\frac{1}{2\alpha}\int_{I'}^{III'}\mathrm{e}^{-ikr\cos\beta'}\left[\frac{1}{1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{\alpha}(\beta'+\psi)}}-\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{\alpha}(\beta'-\psi)}}\right]d\beta'. \quad (2.46)$$

Здесь контур интегрирования сдвинут на «$-\pi$» по сравнению с контуром, показанным на рис. 2.4. В соответствии с разностью в квадратных скобках функцию (2.46) можно записать в виде разности двух интегралов. В первом интеграле мы заменим $\beta'$ на $\beta$. А во втором интеграле заменим $\beta'$ на «$-\beta$». В результате мы приходим к интегралу Зоммерфельда (Sommerfeld, 1935, 1937):

$$u(kr,\psi)=\frac{1}{2\alpha}\int_{C}\frac{\mathrm{e}^{-ikr\cos\beta}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{\alpha}(\beta+\psi)}}d\beta\,, \quad (2.47)$$

где контур $C$ состоит из двух ветвей, как показано на рис. 2.5.

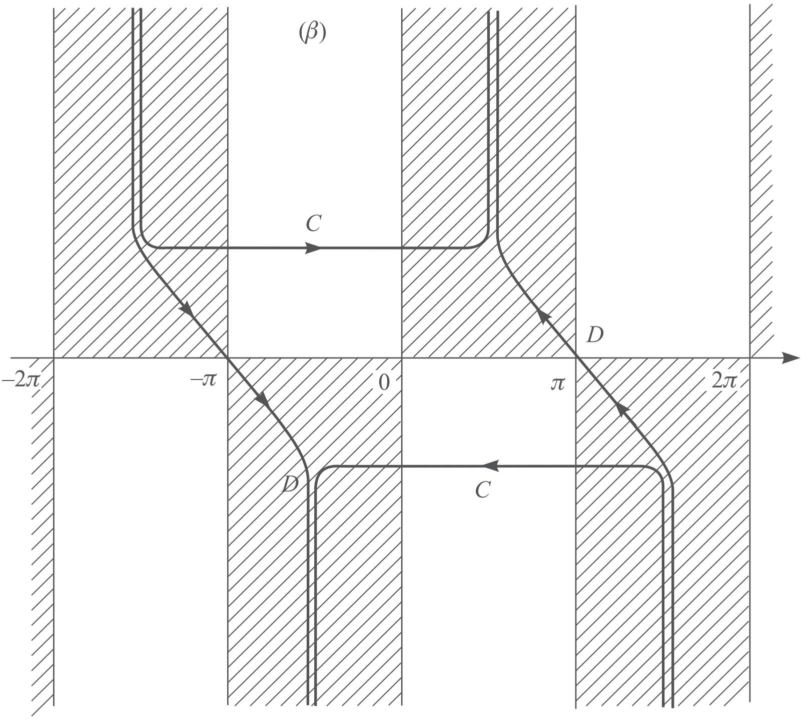


**Рис. 2.5.** Контуры интегрирования в формулах (2.47) и (2.50)

Подынтегральное выражение у функции $u(kr,\ \psi)$ имеет полюсы первого порядка

$$\beta_m = 2\alpha m - \psi \text{, где } m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ ... \tag{2.48}$$

Применяя теорему Коши о вычетах к интегралу по замкнутому контуру $C - D$, получаем

$$\begin{aligned} &u(kr,\psi) = v(kr,\psi) + \mathrm{e}^{-ikr\cos\psi}, && \text{если } -\pi < \psi < \pi, \\ &u(kr,\psi) = v(kr,\psi), && \text{если } \pi < \psi < 2\alpha - \pi, \\ &u(kr,\psi) = v(kr,\psi) - \mathrm{e}^{-ikr\cos(2\alpha-\psi)}, && \text{если } 2\alpha - \pi < \psi < 2\alpha + \pi, \end{aligned} \tag{2.49}$$

где

$$v(kr,\psi) = \frac{1}{2\alpha}\int_D \frac{\mathrm{e}^{-ikr\cos\beta}}{1 - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{\alpha}(\beta+\psi)}}d\beta\ . \tag{2.50}$$

Контур интегрирования $D$ состоит из двух ветвей (рис. 2.5). В интеграле по левой ветви мы заменяем переменную $\beta$ на $\zeta - \pi$, а в интеграле по правой вет-

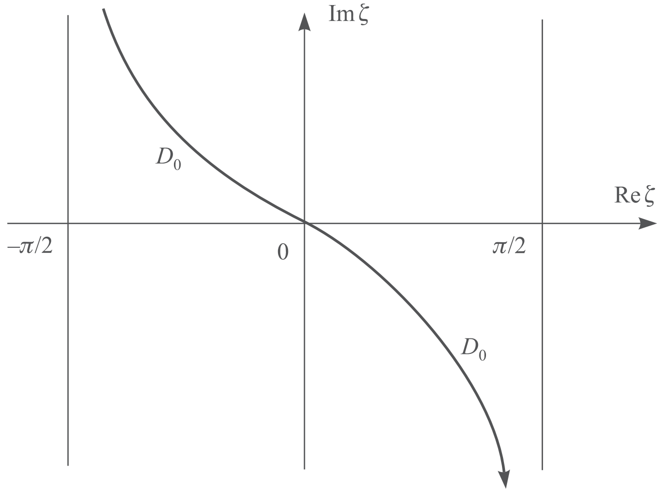


**Рис. 2.6.** Контур интегрирования в формуле (2.51)

ви полагаем $\beta = \zeta + \pi$. В результате функция $v(kr, \psi)$ пребразуется в интеграл по контуру $D_0$ (рис. 2.6);

$$v(kr,\psi) = i\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{2\pi n}\int_{D_0}\frac{e^{ikr\cos\zeta}}{\cos\dfrac{\pi}{n} - \cos\dfrac{\zeta+\psi}{n}}\,d\zeta, \tag{2.51}$$

где $n = \alpha/\pi$.

Выражения (2.49) имеют следующий физический смысл. Функция $\nu(kr, \psi)$ описывает дифракционную часть поля, а вычеты соответствуют полю геометрической оптики. Эта интерпретация становится очевидной, если мы рассмотрим выражения для функций $u(kr, \varphi - \varphi_0)$ и $u(kr, \varphi + \varphi_0)$.

В случае $0 < \varphi_0 < \alpha - \pi$, когда освещена только одна грань ($\varphi = 0$) клина (рис. 2.7), эти функции имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} u(kr,\varphi-\varphi_0) &= v(kr,\varphi-\varphi_0) + e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)} \\ u(kr,\varphi+\varphi_0) &= v(kr,\varphi+\varphi_0) + e^{-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)} \end{aligned}\right\} \text{при } 0 < \varphi < \pi - \varphi_0, \tag{2.52}$$

$$\left.\begin{aligned} u(kr,\varphi-\varphi_0) &= v(kr,\varphi-\varphi_0) + e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)} \\ u(kr,\varphi+\varphi_0) &= v(kr,\varphi+\varphi_0) \end{aligned}\right\} \text{при } \pi - \varphi_0 < \varphi < \pi + \varphi_0, \tag{2.53}$$

$$\left.\begin{aligned} u(kr,\varphi-\varphi_0) &= v(kr,\varphi-\varphi_0) \\ u(kr,\varphi+\varphi_0) &= v(kr,\varphi+\varphi_0) \end{aligned}\right\} \text{при } \pi + \varphi_0 < \varphi < \alpha. \tag{2.54}$$

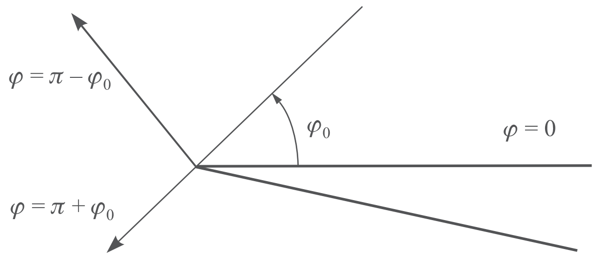


**Рис. 2.7.** Падающая волна приходит с направления $\varphi = \varphi_0$. Линия $\varphi = \pi - \varphi_0$ есть граница отраженной волны, а линия $\varphi = \pi + \varphi_0$ является границей тени

В выражениях (2.52) и (2.53) слагаемое $\mathrm{e}^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}$ определяет падающую волну, которая существует только в освещенной области $0 < \varphi < \pi + \varphi_0$, а слагаемое $\mathrm{e}^{-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)}$ относится к отраженной волне, существующей в области $0 < \varphi < \pi - \varphi_0$. В соответствии с геометрической оптикой выражения (2.54) не содержат ни падающей, ни отраженной волн, поскольку область $\pi + \varphi_0 < \varphi < \alpha$ затеняется непрозрачным клином. Границы падающей и отраженной плоских волн показаны на рис. 2.7.

Рис. 2.8 иллюстрирует ситуацию, когда освещены обе грани клина. В этом случае $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$ и функции $u(kr, \varphi - \varphi_0)$, $u(kr, \varphi + \varphi_0)$ определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} u(kr,\varphi-\varphi_0) &= v(kr,\varphi-\varphi_0) + \mathrm{e}^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)} \\ u(kr,\varphi+\varphi_0) &= v(kr,\varphi+\varphi_0) + \mathrm{e}^{-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)} \end{aligned}\right\} \text{при } 0 < \varphi < \pi - \varphi_0, \tag{2.55}$$

$$\left.\begin{aligned} u(kr,\varphi-\varphi_0) &= v(kr,\varphi-\varphi_0) + \mathrm{e}^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)} \\ u(kr,\varphi+\varphi_0) &= v(kr,\varphi+\varphi_0) \end{aligned}\right\} \text{при } \pi - \varphi_0 < \varphi < 2\alpha - \pi - \varphi_0 \tag{2.56}$$

и

$$\left.\begin{aligned} u(kr,\varphi-\varphi_0) &= v(kr,\varphi-\varphi_0) + \mathrm{e}^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)} \\ u(kr,\varphi+\varphi_0) &= v(kr,\varphi+\varphi_0) + \mathrm{e}^{-ikr\cos(2\alpha-\varphi-\varphi_0)} \end{aligned}\right\} \text{при } 2\alpha - \pi - \varphi_0 < \varphi < \alpha. \tag{2.57}$$

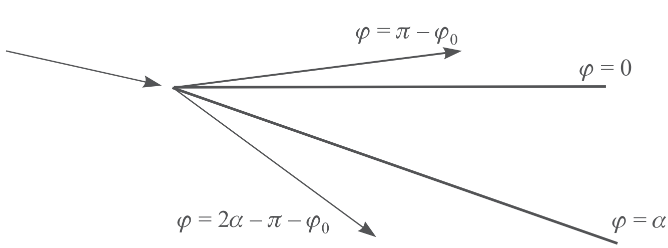


**Рис. 2.8.** Падающая плоская волна освещает обе грани клина. Линия $\varphi = \pi - \varphi_0$ есть граница волны, отраженной от грани $\varphi = 0$, а линия $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$ есть граница волны, отраженной от грани $\varphi = \alpha$

Слагаемое $\mathrm{e}^{-ikr\cos(2\alpha-\varphi-\varphi_0)}$ описывает плоскую волну, отраженную от грани $\varphi = \alpha$.

## 2.4. Лучевые асимптотики Зоммерфельда

> Между акустическими и электромагнитными дифракционными лучами, возникающими при дифракции на клине, существуют следующие соотношения эквивалентности: $u_s = E_z$ и $u_h = H_z$.

Простые асимптотические выражения для функции $v(kr, \psi)$ при больших значениях аргумента ($kr \gg 1$) можно получить, используя метод перевала (Copson, 1965; Murray, 1984). С этой целью заменим переменную интегрирования в формуле (2.51), полагая

$$s = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}\sin\frac{\zeta}{2}. \tag{2.58}$$

Тогда $s^2 = i(1 - \cos\zeta)$ и

$$v(kr,\psi) = \frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n\pi\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}\,ds}{\left(\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\psi+\zeta}{n}\right)\cos\dfrac{\zeta}{2}}, \tag{2.59}$$

где $n = \alpha/\pi$.

Здесь $s = 0$ является седловой точкой. Действительно, функция $\exp(-krs^2)$ увеличивается наиболее быстро, когда точка $s$ удаляется от точки $s = 0$ вдоль мнимой оси. Напротив, эта функция наиболее быстро убывает, когда точка $s$ удаляется от точки $s = 0$ вдоль вещественной оси. Поэтому наибольший вклад в интеграл при $kr \gg 1$ дает окрестность седловой точки. В соответствии с методом перевала подынтегральная функция раскладывается в степенной ряд Тейлора в окрестности седловой точки. Затем этот ряд почленно интегрируется. Если ряд Тейлора сходится только в окрестности седловой точки, то ряд, полученный после его интегрирования, будет полусходящимся, т. е. асимптотическим. Оставляя в таком ряде для функции $v(kr, \psi)$ только первый член, получим

$$v(kr,\psi) \sim \frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n\pi\sqrt{2}}\frac{\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\psi}{n}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-krs^2}\,ds = \frac{\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\psi}{n}}\frac{\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}. \tag{2.60}$$

Следующие члены асимптотического разложения для функции $v(kr, \psi)$ являются малыми величинами порядка $(kr)^{-3/2}$ и выше. Асимптотическое выражение (2.60) справедливо при условии $\sqrt{kr}\,|\cos(\psi/2)| \gg 1$ и описывает цилиндрические волны, расходящиеся от ребра клина, т. е. краевые волны.

Согласно формулам (2.40), (2.49) и (2.60), дифракционные волны, расходящиеся от ребра акустически мягкого клина, опреляются выражением

$$\boxed{u_s^d = u_0[v(kr,\varphi-\varphi_0)-v(kr,\varphi+\varphi_0)] \sim u_0 f(\varphi,\varphi_0,\alpha)\frac{\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \quad (2.61)}$$

где

$$f(\varphi,\varphi_0,\alpha)=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{n}}-\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\varphi+\varphi_0}{n}}\right). \quad (2.62)$$

Формулы (2.41), (2.49) и (2.60) определяют волны, распространяющиеся от ребра акустически жесткого клина:

$$\boxed{u_h^d = u_0[v(kr,\varphi-\varphi_0)+v(kr,\varphi+\varphi_0)] \sim u_0 g(\varphi,\varphi_0,\alpha)\frac{\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \quad (2.63)}$$

где

$$g(\varphi,\varphi_0,\alpha)=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{n}}+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\varphi+\varphi_0}{n}}\right). \quad (2.64)$$

Функции $f$ и $g$ представляют собой диаграммы направленности краевых волн. Асимптотические выражения (2.60–2.64) были получены Зоммерфельдом (1935, 1937) и хорошо известны. Легко проверить, что выражения (2.61) и (2.63) удовлетворяют граничным условиям (2.2) и (2.3).

Следует отметить, что двухмерные краевые волны (2.61) и (2.63) можно интерпретировать как непрерывное множество краевых дифракционных лучей. Они возникают вследствие дифракции на крае и затем удаляются от него, в первом приближении, как обычные лучи в соответствии с законами геометрической оптики для двухмерных полей. Как показано в статье (Pelosi et al.,1998), краевые дифракционные лучи визуально наблюдал еще Ньютон, хотя он и не использовал такую терминологию. Термин «дифрагированный луч» был введен Калашниковым (1912), кто первым представил объективное доказательство существования краевых дифракционных лучей, зафиксировав их на фотопластинке. Теоретически их существование было установлено Рубиновичем (1924), а затем многими другими исследователями. В общей форме концепцию дифракционных лучей сформулировал Келлер (1962).

Здесь уместно напомнить предостережение Зоммерфельда против слишком формальной лучевой интерпретации дифракционных явлений. Он писал, что светящиеся точки на краях (ребрах) в действительности не существуют и являются просто оптической иллюзией: «Das ist naturlich eine optische Tauschung» (Sommerfeld, 1896, с. 369). Он объяснил, что такие кажущиеся светящиеся точки на краях являются результатом нашего восприятия или, словами Зоммерфельда, результатом «аналитического продолжения» дифракционных лучей нашими глазами.

Ввиду лучевой структуры краевых волн, их асимптотические выражения (2.61–2.64) можно назвать *лучевыми асимптотиками*, как это подчеркивается в названии данного раздела. Эти асимптотики имеют существенный недостаток. Они неприменимы вблизи границы тени ($\varphi \approx \pi + \varphi_0$) и вблизи границ отраженных плоских волн ($\varphi \approx \pi - \varphi_0$, $\varphi \approx 2\alpha - \pi - \varphi_0$). Математическая причина этого недостатка заключается в следующем факте. Два полюса

$$s_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}\sin\frac{\pi-\psi}{2}, \quad s_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}\sin\left(\alpha - \frac{\pi+\psi}{2}\right) \tag{2.65}$$

подынтегральной функции в формуле (2.59) приближаются к седловой точке $s = 0$, когда $\psi = \varphi \pm \varphi_0 \to \pi$ и $\psi = \varphi + \varphi_0 \to 2\alpha - \pi$. В этом случае разложение Тейлора для подынтегральной функции теряет смысл, поскольку его члены стремятся к бесконечности. За этой математикой стоит следующая физика. Окрестности границ падающей и отраженных волн являются зонами эффективной поперечной диффузии, где волновое поле не может быть описано в терминах дифракционных лучей и имеет более сложную структуру. Это явление детально исследовано в главе 5 в монографии автора (Уфимцев, 2003, 2007 а).

## 2.5. Асимптотики Паули

В 1938 г. Паули предложил асимптотическое разложение для функции $v(kr,\psi)$, которое справедливо на геометрооптических границах и переходит в асимптотики Зоммерфельда вдали от этих границ (Pauli, 1938). В этом разделе мы приведем вывод первого члена в асимптотическом разложении Паули. Обычно для инженеров практическую ценность представляют только первые члены асимптотических разложений. Их высшие члены как правило не используются, поскольку они имеют малую величину, а вычислять их довольно сложно. Кроме того, высшие члены асимптотики могут оказаться за пределами применимости идеализированной математической модели, принятой для описания реального физического явления. Именно поэтому мы рассматриваем здесь только первый член асимптотики.

В соответствии с формулой (2.59),

$$v(kr,\psi) = \frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n\pi\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}\,ds}{\left(\cos\dfrac{\pi}{n} - \cos\dfrac{\psi+\zeta}{n}\right)\cos\dfrac{\zeta}{2}}, \tag{2.66}$$

где

$$s=\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}\sin\frac{\zeta}{2},\quad s^2=i(1-\cos\zeta),\quad n=\frac{\alpha}{\pi}. \tag{2.67}$$

Умножим и поделим подынтегральную функцию на величину

$$\cos\psi+\cos\zeta=i(s^2-s_0^2),\ \text{где}\ s_0^2=2i\cos^2\frac{\psi}{2}. \tag{2.68}$$

Тогда

$$v(kr,\psi)=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n\pi\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i(kr-\pi/4)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(s,\psi)\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}}{s^2-s_0^2}ds. \tag{2.69}$$

Здесь полюсы $s=\pm s_0=\pm\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\psi}{2}$ находятся вне контура интегрирования и приближаются к седловой точке $s=0$, когда $\psi\to\pi$. Функция

$$f(s,\psi)=\frac{\cos\psi+\cos\zeta}{\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\psi+\zeta}{n}\right)\cos\frac{\zeta}{2}} \tag{2.70}$$

не имеет полюса в седловой точке и может быть разложена в ее окрестности в регулярный ряд Тейлора. Интегрируя его почленно, Паули получил асимптотическое разложение функции $v(kr,\psi)$ для больших значений аргумента $kr$. Первый член этого разложения равен

$$v(kr,\psi)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}\frac{1+\cos\psi}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\psi}{n}}\mathrm{e}^{i(kr-\pi/4)}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}}{s^2-s_0^2}ds. \tag{2.71}$$

Здесь интеграл можно представить в виде

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}}{s^2-s_0^2}ds=\mathrm{e}^{-krs_0^2}\int\limits_{0}^{\infty}ds\int\limits_{kr}^{\infty}\mathrm{e}^{-(s^2-s_0^2)t}\,dt. \tag{2.72}$$

Изменяя порядок интегрирования, получим

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}}{s^2-s_0^2}ds=\mathrm{e}^{-krs_0^2}\int\limits_{kr}^{\infty}\mathrm{e}^{s_0^2t}\frac{dt}{\sqrt{t}}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-krs_0^2}\int\limits_{kr}^{\infty}\mathrm{e}^{i|s_0|^2t}\frac{dt}{\sqrt{t}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{|s_0|}\mathrm{e}^{-ikr|s_0|^2}\int\limits_{\sqrt{kr}|s_0|}^{\infty}\mathrm{e}^{iq^2}dq. \tag{2.73}$$

В результате,

$$v(kr,\psi)=\frac{2}{n}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}\left|\cos\dfrac{\psi}{2}\right|}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\psi}{n}}\,\mathrm{e}^{-ikr\cos\psi}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\sqrt{2kr}\left|\cos\frac{\psi}{2}\right|}^{\infty}\mathrm{e}^{iq^2}dq \qquad (2.74)$$

или

$$\boxed{v(kr,\psi)=\frac{2}{n}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\psi}{2}}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\psi}{n}}\,\mathrm{e}^{-ikr\cos\psi}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{\sqrt{2kr}\cos\frac{\psi}{2}}^{\infty\cos\frac{\psi}{2}}\mathrm{e}^{iq^2}dq\,. \qquad (2.75)}$$

Данное выражение представляет собой слегка модифицированный первый член асимптотического разложения Паули. Следующий член в разложении есть величина порядка $(kr)^{-1/2}$ вблизи границ $\varphi=\pi\pm\varphi_0$ и порядка $(kr)^{-3/2}$ вдали от них.

Верхний предел в формуле (2.75) следует понимать как $\mathrm{sign}\left(\cos\dfrac{\psi}{2}\right)\infty$. Он всегда равен бесконечности и меняет свой знак, когда точка наблюдения пересекает геометрооптические границы ($\psi=\varphi\pm\varphi_0=\pi$). Здесь функция $v(kr,\psi)$ испытывает разрывы конечной величины и таким образом обеспечивает непрерывность полного поля. Действительно, пользуясь формулой

$$\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{iq^2}dq=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad (2.76)$$

можно показать, что

$$v(kr,\pi+0)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{ikr},\quad v(kr,\pi-0)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{ikr} \qquad (2.77)$$

и

$$u(kr,\pi\pm 0)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{ikr}. \qquad (2.78)$$

Также с помощью асимптотических оценок

$$\int\limits_{\infty}^{p}\mathrm{e}^{iq^2}dq\sim\frac{\mathrm{e}^{ip^2}}{2ip},\quad \int\limits_{-\infty}^{-p}\mathrm{e}^{iq^2}dq\sim-\frac{\mathrm{e}^{ip^2}}{2ip}\ \text{ при }\ p\gg 1 \qquad (2.79)$$

легко проверить, что приближение Паули (2.75) переходит в асимптотику Зоммерфельда (2.60) при условии $\sqrt{kr}\left|\cos\dfrac{\psi}{2}\right|\gg 1.$

В разделе 5.5 монографии (Ufimtsev, 2003, 2007 a) показано, что асимптотику Паули можно рассматривать как «стенографическую форму» физически более содержательного выражения

$$\boxed{v(kr,\psi)=V\left[\sqrt{\frac{kr}{2}}(\psi-\pi)\right]\mathrm{e}^{ikr}+\left(\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\psi}{n}}-\frac{1}{\psi-\pi}\right)\frac{\mathrm{e}^{i\left(kr+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}},} \quad (2.80)$$

где функция

$$V(\tau)=\mathrm{e}^{-i\tau^2}\frac{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{\tau}^{\infty\,\mathrm{sign}\tau}\mathrm{e}^{iq^2}dq \quad (2.81)$$

является решением параболического уравнения. Здесь первое слагаемое $V[\sqrt{kr/2}(\psi-\pi)]\mathrm{e}^{ikr}$ описывает поперечную диффузию волнового поля в окрестности геометрооптических границ и не зависит от отражающих свойств граней клина. Втрое слагаемое в формуле (2.80) можно интерпретировать как дифракционный фон.

Интересно, что в частном случае, когда внешний угол клина $\alpha$ равен $2\pi$ и клин превращается в полуплоскость, асимптотика Паули (2.75) трансформируется в функцию

$$v(kr,\psi)=\mathrm{e}^{-ikr\cos\psi}\frac{\mathrm{e}^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty\cos\frac{\psi}{2}}^{\sqrt{2kr}\cos\frac{\psi}{2}}\mathrm{e}^{iq^2}dq \quad (2.82)$$

и дает *точное* (!) решение задачи дифракции на полуплоскости. Действительно, в этом случае $n=2$ и функция (2.51) равна

$$v(kr,\psi)=-\frac{i}{4\pi}\int_{D_0}\frac{\mathrm{e}^{ikr\cos\zeta}}{\cos\frac{\psi+\zeta}{2}}d\zeta \quad (2.83)$$

и сводится к интегралу Френеля. Чтобы показать это, давайте разделим контур интегрирования $D_0$ (рис. 2.6) на две части в точке $\zeta=0$. Суммируя интегралы по этим частям контура интегрирования, получим выражение

$$v(kr,\psi)=-\frac{i}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty}\mathrm{e}^{ikr\cos\zeta}\left(\frac{1}{\cos\frac{\psi+\zeta}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\psi-\zeta}{2}}\right)d\zeta=$$

$$=-\frac{i}{\pi}\cos\frac{\psi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty}\mathrm{e}^{ikr\cos\zeta}\frac{\cos\frac{\zeta}{2}}{\cos\psi+\cos\zeta}d\zeta\,. \quad (2.84)$$

Введем теперь новую переменную интегрирования $s = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\zeta}{2}$ и выполним преобразования, указанные в формулах (2.68–2.71). В результате получим

$$v(kr,\psi) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos\frac{\psi}{2}e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-krs^2}}{s^2 - s_0^2}ds. \qquad (2.85)$$

С помощью формулы (2.73) это выражение сводится к интегралу Френеля (2.82). Последний вместе с выражениями (2.39–2.41) и (2.52–2.54) дает точное решение задачи о дифракции плоской волны на полуплоскости.

Таким образом, асимптотика Паули (2.75) обладает ценными свойствами. Она проста. Она дает точное решение задачи о дифракции на полуплоскости. Она правильно описывает поперечную диффузию волнового поля вблизи геометрооптических границ и дифракционные лучи вдали от них. Однако она не свободна от некоторых недостатков. А именно:

- Полное поле $u_{s,h}$, определяемое с помощью асимптотики Паули (2.75), точно удовлетворяет граничным условиям (2.2) и (2.3) на грани $\varphi = 0$. Однако на грани $\varphi = \alpha$ эти условия выполняются только асимптотически, когда $\sqrt{kr}\left|\cos\frac{\psi}{2}\right| \gg 1$, и асимптотика Паули переходит в асимптотику Зоммерфельда (2.60).
- Асимптотика Паули (2.75) дает правильное значение для волнового поля на границе тени ($\varphi = \pi + \varphi_0$) и на границе $\varphi = \pi - \varphi_0$ для плоской волны, отраженной от грани $\varphi = 0$ (рис. 2.7). Однако она неверна на границе $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$ для плоской волны, отраженной от грани $\varphi = \alpha$ (рис. 2.8). Здесь она дает неверное, бесконечно большое значение для поля.

Можно предложить следующий рецепт, чтобы смягчить до некоторой степени эти недостатки. Асимптотикой (2.75) следует пользоваться только в области $0 \le \varphi \le \alpha/2$. Чтобы вычислить поле в оставшейся области $\alpha/2 \le \varphi \le \alpha$, нужно ввести новые полярные координаты с углом $\varphi'$, отсчитываемым от грани $\varphi = \alpha$, и затем использовать асимптотику (2.75) в области $0 < \varphi' \le \alpha/2$. Таким путем можно получить правильные значения для поля на границе плоской волны, отраженной от грани $\varphi = \alpha$, и удовлетворить граничным условиям на этой грани. Однако при таком подходе мы приобретаем другой нежелательный результат: разрыв поля в направлении $\varphi = \alpha/2$.

Такой разрыв является свидетельством того факта, что асимптотика Паули (2.75) не удовлетворяет фундаментальному физическому принципу. Она не инвариантна по отношению к выбору координатной системы. Действительно, если мы выберем полярные координаты $\varphi'$ и $\varphi'_0$, измеряемые от грани $\varphi = \alpha$, то асимптотика Паули приводит к соотношениям

$$v^{\text{Pauli}}(kr,\varphi' - \varphi'_0) = v^{\text{Pauli}}[kr,\alpha - \varphi - (\alpha - \varphi_0)] = v^{\text{Pauli}}(kr,\varphi - \varphi_0) \qquad (2.86)$$

и

$$v^{\text{Pauli}}(kr, \varphi' + \varphi'_0) = v^{\text{Pauli}}(kr, 2\alpha - \varphi - \varphi_0) \neq v^{\text{Pauli}}(kr, \varphi + \varphi_0). \tag{2.87}$$

Последнее неравенство означает, что, строго говоря, асимптотика Паули не удовлетворяет принципу инвариантности. Она удовлетворяет ему только приближенно, когда она трансформируется в асимптотику Зоммерфельда.

В следующем разделе мы построим новую асимптотику, пригодную для вычисления дифракционного поля во всех направлениях в области $0 < \varphi < \alpha$.

## 2.6. Равномерные асимптотики: обобщение метода Паули

Здесь мы выведем асимптотические выражения при условии, что падающая волна не испытывает вторичных и более высокого порядка многократных переотражений в гранях клина. Это условие всегда реализуется для выпуклых клиньев ($\pi < \alpha \leq 2\pi$), а также для вогнутых клиньев/рупоров ($\pi/2 < \alpha < \pi$), но только для некоторых направлений падающей волны. Однако теория, развитая здесь, может быть в принципе обобщена для любых узких рупоров ($0 < \alpha < \pi/2$) с многократными переотражениями.

Теперь мы возвращаемся к формуле (2.66) и видим, что только два полюса

$$s_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4} \cos\frac{\psi}{2} \quad \text{и} \quad s_2 = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4} \cos\left(\alpha - \frac{\psi}{2}\right) \tag{2.88}$$

могут приближаться к седловой точке $s = 0$, когда $\psi = \varphi \pm \varphi_0 \to \pi$ или $\psi = \varphi + \varphi_0 \to 2\alpha - \pi$. Полюс $s_1$ приближается к седловой точке, когда направление наблюдения $\varphi$ приближается к границе тени $\varphi = \pi + \varphi_0$ или к границе $\varphi = \pi - \varphi_0$ волны, отраженной от грани $\varphi = 0$ (рис. 2.7). Полюс $s_2$ приближается к седловой точке, когда направление наблюдения $\varphi$ приближается к границе $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$ волны, отраженной от грани $\varphi = \alpha$ (рис. 2.8). Все другие полюсы в формуле (2.66) не оказывают влияния на интеграл, поскольку они находятся в стороне от контура интегрирования и никогда не достигают седловой точки в отсутствие многократных переотражений.

Учитывая эти замечания, мы умножим и разделим подынтегральное выражение в формуле (2.66) на величину

$$(\cos\zeta + \cos\psi)[\cos\zeta + \cos(2\alpha - \psi)] = -(s^2 - s_1^2)(s^2 - s_2^2) \tag{2.89}$$

и получим выражение

$$v(kr, \psi) = -\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n\pi\sqrt{2}} \mathrm{e}^{i(kr + \pi/4)} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, \psi) \frac{\mathrm{e}^{-krs^2}}{(s^2 - s_1^2)(s^2 - s_2^2)} ds, \tag{2.90}$$

где

$$f(s,\psi)=\frac{(\cos\zeta+\cos\psi)[\cos\zeta+\cos(2\alpha-\psi)]}{\left(\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\psi+\zeta}{n}\right)\cos\dfrac{\zeta}{2}}. \tag{2.91}$$

Эта функция $f(s,\psi)$ конечна и непрерывна в окрестности седловой точки $s=0$ и, следовательно, может быть разложена в ряд Тейлора. Интегрирование этого ряда в формуле (2.90) дает равномерное асимптотическое разложение для функции $v(kr,\psi)$, справедливое для любых углов $\varphi$ и $\varphi_0$. Заметим, что только четные члены ряда, содержащие множители $s^{2m}$ ($m=1, 2, 3, ...$), дают ненулевой вклад в интеграл (2.90). Мы сохраняем и вычисляем только два первых члена в асимптотическом разложении. Второй член мы удерживаем здесь потому, что при $\alpha\to 2\pi$ он содержит величины того же порядка, что и первый член. Соответствующее асимптотическое выражение для функции $v(kr,\psi)$ имеет вид

$$v(kr,\psi)=v_1(kr,\psi)+v_2(kr,\psi), \tag{2.92}$$

где

$$v_1(kr,\psi)=-\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n\pi\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}f(0,\psi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}ds}{(s^2-s_1^2)(s^2-s_2^2)}, \tag{2.93}$$

$$v_2(kr,\psi)=-\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n\pi 2\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}\,\frac{d^2f(0,\psi)}{ds^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}s^2ds}{(s^2-s_1^2)(s^2-s_2^2)} \tag{2.94}$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}}{(s^2-s_1^2)(s^2-s_2^2)}ds=\frac{2}{(s_1^2-s_2^2)}\left[\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}ds}{s^2-s_1^2}-\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}ds}{s^2-s_2^2}\right], \tag{2.95}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}s^2}{(s^2-s_1^2)(s^2-s_2^2)}ds=\frac{2}{(s_1^2-s_2^2)}\left[\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}s^2ds}{s^2-s_1^2}-\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}s^2ds}{s^2-s_2^2}\right], \tag{2.96}$$

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}s^2}{s^2-s_{1,2}^2}ds=\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{-krs^2}ds+s_{1,2}^2\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}}{s^2-s_{1,2}^2}ds. \tag{2.97}$$

Согласно преобразованиям (2.73) эти интегралы сводятся к интегралам Френеля.

В результате мы получаем следующее асимптотическое выражение:

$$v(kr,\psi)=\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\psi}{n}}\cdot\frac{1}{\sin\alpha\sin(\alpha-\psi)}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\times$$
$$\times\left[P(\alpha,\psi)\cos^3\left(\frac{\psi}{2}\right)\mathrm{e}^{-ikr\cos\psi}\int\limits_{\sqrt{2kr}\cos\frac{\psi}{2}}^{\infty\cos\frac{\psi}{2}}\mathrm{e}^{iq^2}dq-\right.$$
$$\left.-Q(\alpha,\psi)\cos^3\left(\alpha-\frac{\psi}{2}\right)\mathrm{e}^{-ikr\cos(2\alpha-\psi)}\int\limits_{\sqrt{2kr}\cos\left(\alpha-\frac{\psi}{2}\right)}^{\infty\cos\left(\alpha-\frac{\psi}{2}\right)}\mathrm{e}^{iq^2}dq\right],\qquad(2.98)$$

где

$$P(\alpha,\psi)=2-\left[\cos\left(\alpha-\frac{\psi}{2}\right)\right]^2\left[1+\frac{4}{n^2}\frac{1+\sin^2\frac{\psi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\psi}{n}}{\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\psi}{n}\right)^2}\right]\qquad(2.99)$$

и

$$Q(\alpha,\psi)=2-\left(\cos\frac{\psi}{2}\right)^2\left[\frac{4}{n^2}\frac{1+\sin^2\frac{\psi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\psi}{n}}{\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\psi}{n}\right)^2}\right].\qquad(2.100)$$

Можно показать, что вдали от границ отраженных плоских волн, где $\sqrt{kr}\left|\cos\frac{\psi}{2}\right|\gg 1$ и $\sqrt{kr}\left|\cos\left(\alpha-\frac{\psi}{2}\right)\right|\gg 1$, асимптотика (2.98) трансформируется в асимптотику *частично* лучевого типа

$$v(kr,\psi)\sim\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\psi}{n}}\frac{\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}+$$
$$+\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\psi}{n}}\left[1+\frac{4}{n^2}\frac{1+\sin^2\frac{\psi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\psi}{n}}{\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\psi}{n}\right)^2}\right]\frac{\mathrm{e}^{i(kr-\pi/4)}}{4\sqrt{\pi}(2kr)^{3/2}}.\qquad(2.101)$$

Мы подчеркиваем, что здесь только первый член можно интерпретировать как дифракционные лучи. Второй член, так же как и все высшие члены, не представленные в формуле (2.101), не имееют лучевой структуры, поскольку их зависимость от координаты $r$ не описывается геометрической оптикой (геометрической акустикой).

На границах отраженных волн функция (2.98) разрывна,

$$v(kr,\pi\pm 0)=v(kr,2\alpha-\pi\mp 0)=$$
$$=\pm\frac{1}{2}\mathrm{e}^{ikr}-\frac{1}{n}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{n}\sin\alpha\,\mathrm{e}^{ikr\cos 2\alpha}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\sqrt{2kr}\,\sin\alpha}^{\infty\sin\alpha}\mathrm{e}^{iq^2}\,dq, \qquad (2.102)$$

и компенсирует разрывы геометрооптической части полного поля. При условии $\sqrt{2kr}\,|\sin\alpha\,|\gg 1$ из формулы (2.102) следует, что

$$v(kr,\pi\pm 0)=v(kr,2\alpha-\pi\mp 0)=\pm\frac{1}{2}\mathrm{e}^{ikr}-\frac{1}{2n}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{n}\,\frac{\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}. \qquad (2.103)$$

Легко проверить, что асимптотика (2.98) дает правильный результат $v(kr,\psi)=0$ в предельном случае $\alpha=\pi$, когда клин трансформируется в бесконечную однородную плоскость (без ребра). Учитывая, что $P(2\pi,\psi)=$ $=Q(2\pi,\psi)=0$, и применяя правило Лопиталя, можно показать, что в другом предельном случае, когда $\alpha\to 2\pi$, асимптотика (2.98) преобразуется в функцию (2.82) и, следовательно, дает точное решение задачи о дифракции на полуплоскости.

Оценим теперь точность асимптотики (2.98). Она представляет собой сумму двух первых членов асимптотического ряда, который может быть получен почленным интегрированием ряда Тейлора для подынтегральной функции в выражении (2.90). Следовательно, погрешность асимптотики (2.98) имеет величину порядка неучтенного в ней третьего асимптотического члена. Он, в свою очередь, определяется интегралом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}s^4}{s^2-s_{1,2}^2}\,ds=\begin{cases}O[(kr)^{-3/2}], \text{ если } s_{1,2}=0,\\ O[(kr)^{-5/2}], \text{ если } \sqrt{kr}|\,s_{1,2}|\gg 1,\end{cases} \qquad (2.104)$$

где значение $s_{1,2}=0$ соответствует геометрооптическим границам падающей и отраженных плоских волн. Заметим также, что выражения для полного поля с учетом функции (2.98) удовлетворяют граничным условиям (2.2) и (2.3) не строго, а только асимптотически при условии $\sqrt{kr}\left|s_{1,2}\right|\gg 1$.

В выражении (2.104) мы используем символ $O[(kr)^m]$, чтобы показать поведение интеграла при условии $kr\gg 1$. Это обычное определение, принятое в асимптотической теории (Копсон, 1966). Выражение $f(x)=O(x^m)$ означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)/x^m]=\mathrm{const}$. Мы используем эту асимптотическую символику на протяжении всей книги.

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, асимптотика Паули (2.75) не инвариантна по отношению к выбору системы координат. Такая же ситуация имеет место с асимптотическим представлением ( 2.98):

$$v[kr, \alpha - \varphi + (\alpha - \varphi_0)] = v(kr, \varphi + \varphi_0)\,, \tag{2.105}$$

но

$$v[kr, \alpha - \varphi - (\alpha - \varphi_0)] \neq v(kr, \varphi - \varphi_0)\,. \tag{2.106}$$

Кроме того, асимптотика (2.98) не удовлетворяет принципу взаимности:

$$v(kr, \varphi - \varphi_0) \neq v(kr, \varphi_0 - \varphi)\,. \tag{2.107}$$

Однако эти недостатки допустимы для асимптотических выражений, которые удовлетворяют строгим законам только приближенно. Отклонения от этих законов асимптотически малы и находятся за пределами точности этих асимптотик. Например, асимптотики (2.102) и (2.103) для поля на геометрооптических границах действительно инвариантны по отношению к выбору полярной системы координат, а их погрешность согласно оценке (2.104) есть малая величина порядка $(kr)^{-3/2}$. Кроме того, асимптотика (2.101) для поля в лучевой области удовлетворяет принципу взаимности.

Теперь кратко прокомментируем полученные результаты. Найденная асимптотика (2.98) удобна для асимптотического анализа дифракционного поля. В частном случае, когда $\alpha = 2\pi$ и клин превращается в полуплоскость, она дает строгое решение. Эта асимптотика достаточно проста и применима для всех направлений наблюдения ($0 \le \varphi \le \alpha$). Однако в силу ее асимптотического происхождения, она удовлетворяет граничным условиям, принципу взаимности и принципу инвариантности не строго, а только приближенно.

Выражение (2.98) содержит только два первых члена из полного асимптотического разложения для функции (2.90). Вычисление высших членов в этом разложении не представляет принципиальных трудностей, но мы не занимаемся их выводом, поскольку они не имеют практической ценности, как это уже отмечалось нами в начале раздела 2.5.

## 2.7. Комментарии к альтернативным асимптотикам

Оберхеттингер и Тужилин (Bowman et al.,1984) предложили альтернативные асимптотические решения задачи о дифракции на клине. Эти авторы использовали другой подход в работе с сингулярностями подынтегральных функций в точном решении. Они включили в подынтегральные функции два одинаковых сингулярных члена с противоположными знаками. Один из них полностью компенсирует сингулярность исходной подынтегральной функции. В результате к этой части интеграла можно применить регулярный метод построения полного асимптотического разложения. Интегрирование другого дополнительного члена дает интеграл Френеля, который описывает основные свойства поля в окрестности геометрооптических границ. Эти асимптотики имеют структуру аналогичную той, которая содержится в нашей формуле (2.80). Отличие состоит в том, что в формуле (2.80) интеграл Френеля и член $1/(\psi - \pi)$ описывают дифракцию на черной полуплоскости, а в формулах Оберхеттингера и Тужилина аналогичные величины определяют дифракцию на идеально отражающей полуплоскости.

Асимптотика Оберхеттингера (Bowman et al., 1984) является альтернативой асимптотики Паули. Как и асимптотика Паули, она неприменима на границе плоской волны, отраженной от грани $\varphi = \alpha$, и не удовлетворяет строго принципу инвариантности.

Асимптотика Тужилина (Bowman et al.,1984) является альтернативой нашей асимптотики (2.98). При надлежащем выборе чисел $n$ в формулах (6.21) и (6.25), приведенных в книге (Bowman et al., 1987), асимптотика Тужилина правильно оперирует с сингулярностями, но не удовлетворяет строго граничным условиям на грани клина $\varphi = 0$.

Отметим еще одно отличие нашей асимптотики (2.98) от приведенных альтернатив, которое сразу выявляется при их сравнении. Наша асимптотика — это достаточно простое и компактное выражение, удобное для анализа дифракционного поля. Асимптотики Оберхеттингера и Тужилина — это бесконечные ряды со сложными выражениями для входящих в них величин.

Заметим также, что метод Паули был обобщен в работе (Clemmow, 1950) на случай, когда несколько полюсов подынтегральной функции могут приближаться к седловой точке. Однако Клеммов не применил свою теорию к задаче о дифракции на клине, а ограничился анализом интеграла Кирхгофа для черной полуплоскости.

В этой главе изучались краевые волны, возникающие при дифракции на клине с полубесконечными *плоскими* гранями. Обзор работ по краевым волнам, возникающим в двухмерных клиновидных структурах с *изогнутыми* выпуклыми и вогнутыми гранями, содержится в статье (Molinet, 2005).

## Задачи

**2.1.** Падающая волна $u^{inc} = u_0 \exp[-ikr\cos(\varphi - \varphi_0)]$ возбуждает поле внутри акустически *мягкого* клина с углом $\alpha < \pi$ между его гранями. Получите точное выражение для полного поля внутри клина с углом раствора $\alpha = \pi/2$. Содержит ли это поле краевую волну? Обоснуйте свой ответ.

**2.2.** Решите задачу, аналогичную задаче 2.1, но для акустически *жесткого* клина с углом раствора $\alpha = \pi/2$.

**2.3.** Падающая волна $E_z^{inc} = E_{0z} \exp[-ikr\cos(\varphi - \varphi_0)]$ возбуждает поле внутри идеально проводящего клина с углом раствора $\alpha < \pi$. Получите точное выражение для полного поля внутри клина с углом раствора $\alpha = \pi/2$. Содержит ли это поле краевую волну? Обоснуйте свой ответ.

**2.4.** Решите задачу, аналогичную задаче 2.3, но в случае падающей волны $H_z^{inc} = H_{0z} \exp[-ikr\cos(\varphi - \varphi_0)]$.

**2.5.** Используйте точное решение (2.40) для акустически мягкого клина и получите асимптотическую формулу для поверхностных источников $j_s = \partial u/\partial n$, возбуждаемых вблизи края ($kr \ll 1$) на обеих гранях клина.

- Используйте асимптотики функций Бесселя для малых значений аргумента: $J_0(x) \approx 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2, \quad J_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu.$
- Получите асимптотическое выражение для функции $j_s(kr, \alpha)$.
- Оцените различное поведение этой функции для углов клина $\alpha > \pi$ и $\alpha < \pi$.

**2.6.** Проанализируйте задачу, аналогичную задаче 2.5, но для акустически жесткого клина.

**2.7.** Исследуйте электромагнитный вариант задачи 2.5 с падающей волной $E_z^{inc} = E_{0z}\exp[-ikr\cos(\varphi - \varphi_0)]$, возбуждающей клин с идеально проводящими гранями.

- Проанализируйте поведение поверхностного тока на обеих гранях клина вблизи ребра ($kr \ll 1$).
- Оцените различное поведение тока при углах раствора клина $\alpha > \pi$ и $\alpha < \pi$.

**2.8.** Исследуйте задачу, аналогичную задаче 2.7, но для падающей волны $H_z^{inc} = H_{0z}\exp[-ikr\cos(\varphi - \varphi_0)]$, возбуждающей идеально проводящий клин. Оцените поведение тока при углах раствора клина $\alpha > \pi$ и $\alpha < \pi$.

**2.9.** Используйте асимптотики Зоммерфельда (2.61) и (2.63). Определите поверхностные источники $j_s$ и $j_h$ вдали от края ($kr \gg 1$). Они представляют собой волны, бегушие от ребра.

- На каком клине (мягком или жестком) эти волны затухают быстрее?
- Объясните происхождение фазового множителя $\exp(i\pi/4)$.

**2.10.** Используйте асимптотики Зоммерфельда (2.61) и (2.63) для электромагнитных волн с $E$- и $H$-поляризацией соответственно. Определите поверхностные токи вдали от края ($kr \gg 1$). Они имеют форму волн, бегущих от ребра.

- Какие волны тока (с компонентами $j_z$ или $j_r$) затухают быстрее ?
- Почему такие волны затухают, хотя поверхность клина является идеально отражающей и, следовательно, в ней нет электрических потерь ?
- Объясните происхождение фазового множителя $\exp(i\pi/4)$.

**2.11.** Определите два первых члена асимптотического разложения (при $p \to \infty$) для интегралов $\int_p^\infty e^{ix^2} x\,dx, \; \int_p^\infty e^{ix^2} \frac{dx}{x^n}$ при $n \geq 1$.

**2.12.** Акустическая волна падает на клиновидный барьер (рис. 2.7). За каким барьером, мягким или жестким, интенсивность звука будет меньше? Исследуйте эту задачу, используя асимптотики Зоммерфельда (2.61) и (2.63).

- Вычислите функцию $f(\varphi, \varphi_0, \alpha)/g(\varphi, \varphi_0, \alpha)$ и постройте ее графики.
- Исследуйте два примера:
  а) $\alpha = 315°, \varphi_0 = 45°, 225° \leq \varphi \leq \alpha$,
  б) $\alpha = 350°, \varphi_0 = 45°, 225° \leq \varphi \leq \alpha$.
- Докажите аналитически, что функция $f(\varphi, \varphi_0, \alpha)/g(\varphi, \varphi_0, \alpha)$ равна единице на границе тени $\varphi = 180° + \varphi_0$.

**2.13.** Электромагнитная волна падает на идеально проводящий клин (рис. 2.7). Сравните интенсивность дифракционных волн с $E_z$- и $H_z$-поляризациями. Какая из них является более интенсивной в области тени ?

- Используйте асимптотики Зоммерфельда (2.61) и (2.63).
- Вычислите функцию $f(\varphi, \varphi_0, \alpha)/g(\varphi, \varphi_0, \alpha)$ и постройте ее графики. Исследуйте два примера:
  а) $\alpha = 300°, \varphi_0 = 45°, 225° \leq \varphi \leq \alpha$,
  б) $\alpha = 360°, \varphi_0 = 45°, 225° \leq \varphi \leq \alpha$.
- Докажите аналитически, что функция $f(\varphi, \varphi_0, \alpha)/g(\varphi, \varphi_0, \alpha)$ равна единице на границе тени $\varphi = 180° + \varphi_0$.

**2.14.** Плоская волна $E_z^{inc} = E_{0z}\exp(ikx)$ испытывает дифракцию на клине при скользящем падении ($\varphi_0 = \pi$) вдоль грани $\varphi = 0$ (рис. 2.8). (Акустический вариант этой задачи состоит в исследовании дифракции скользящей волны на акустически мягком клине.) В этом случае геометрооптическая часть поля на грани $\varphi = 0$ равна нулю. Согласно точному решению (2.40) полное поле на ней равно $E_z = E_{0z}[v(kr, \varphi - \pi) - v(kr, \varphi + \pi)]$, где функция $v(kr, \psi)$ определяется интегралом (2.51).

Задача состоит в асимптотической оценке поверхностного тока $j_z$ на грани $\varphi = 0$ вдали от края ($kr \gg 1$) и выполняется в следующей последовательности:

- Запишите интегральное выражение для тока $j_z = -H_r = Y_0 \dfrac{i}{kr}\dfrac{dE_z}{d\varphi}$ при $\varphi = 0$ и $Y_0 = 1/Z_0$.
- В подынтегральном выражении перейдите от дифференциального оператора $d/d\varphi$ к оператору $d/d\zeta$, где $\zeta$ есть переменная интегрирования.
- Интегрируйте по частям.
- Затем примените к интегралу метод стационарной фазы и покажите, что $j_z \approx 2E_{0z}Y_0 \dfrac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi kr}}$ при $kr \gg 1$.

**2.15.** Эта задача аналогична предыдущей. Исследуйте дифракцию на идеально проводящем клине при скользящем падении ($\varphi_0 = \pi$) волны $H_z^{inc} = H_{0z}\exp(ikx)$ на идеально проводящем клине. Вычислите поверхностный ток на грани $\varphi = 0$ вдали от края ($kr \gg 1$). Программа работы:

- Используйте точное решение (2.41), (2.51).
- Получите интегральное выражение для тока.
- Примените к интегралу метод стационарной фазы и покажите, что $j_x \approx H_{0z}\left[1 - \dfrac{1}{n}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}\dfrac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi kr}}\right]$ при $kr \gg 1$.

# Глава 3

# Дифракция на клине: приближение физической оптики

В данной задаче между акустическими и электромагнитными дифракционными полями в приближении ФО существуют следующие соотношения эквивалентности: $u_s^{(0)} = E_z^{(0)}$ и $u_h^{(0)} = H_z^{(0)}$. Исключением является случай наклонного падения плоской волны к ребру клина (см. раздел 4.3).

Точные выражения для рассеянного поля были выведены а предыдущей главе. В данной главе вычисляется рассеянное поле в приближении ФО, т. е. поле, излучаемое *равномерной* компонентой поверхностных источников. Полученные при этом результаты будут использованы в следующей главе для оценки поля, излучаемого *неравномерной* компонентой поверхностных источников. Для этого будет нужно вычесть приближение ФО из точных выражений для рассеянного поля.

## 3.1. Исходные интегралы физической оптики

Геометрия задачи показана на рис. 3.1. Идеально отражающий клин, находящийся в однородной среде, возбуждается плоской волной

$$u^{inc} = u_0 \mathrm{e}^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)} = u_0 \mathrm{e}^{-ik(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0)}, \tag{3.1}$$

где предполагается, что $0 \le \varphi_0 \le \pi$. В приближении ФО поверхностные источники на грани $\varphi = 0$ определяются согласно формуле (1.31):

$$j_s^{(0)} = -u_0 2ik\sin\varphi_0 \mathrm{e}^{-ikx\cos\varphi_0}, \quad j_h^{(0)} = u_0 2\mathrm{e}^{-ikx\cos\varphi_0}. \tag{3.2}$$

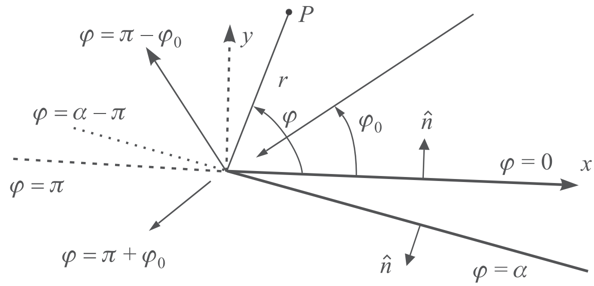


**Рис. 3.1.** Клин и используемые координаты

Поле, излучаемое этими источниками, описывается в соответствии с соотношениями (1.32):

$$u_s^{(0)} = u_0 \frac{ik \sin\varphi_0}{2\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ik\xi\cos\varphi_0} d\xi \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{ik\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+\zeta^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + \zeta^2}} d\zeta , \tag{3.3}$$

$$u_h^{(0)} = u_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ik\xi\cos\varphi_0} d\xi \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial}{\partial n} \frac{\mathrm{e}^{ik\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+\zeta^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + \zeta^2}} d\zeta . \tag{3.4}$$

Для вычисления нормальной производной воспользуемся преобразованием

$$\frac{\partial}{\partial n} f(r) = \nabla' f(r) \cdot \hat{n} = -\nabla f(r) \cdot \hat{n} = -\frac{\partial}{\partial y} f(r) , \tag{3.5}$$

где $\nabla'$ и $\nabla$ суть операторы градиента, действующие на координаты точек интегрирования и наблюдения, соответственно. Тогда поле $u_h^{(0)}$ может быть записано в виде

$$u_h^{(0)} = -u_0 \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ik\xi\cos\varphi_0} d\xi \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{ik\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+\zeta^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + \zeta^2}} d\zeta . \tag{3.6}$$

В формулах (3.3) и (3.6) интеграл по переменной $\zeta$ можно выразить через функцию Ханкеля. Мы используем две интегральных формы этой функции. Первая форма

$$H_0^{(1)}(kd) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{ik\sqrt{d^2+\zeta^2}}}{\sqrt{d^2 + \zeta^2}} d\zeta \tag{3.7}$$

следует из формулы 8.421.11 в справочнике (Gradshteyn and Ryzhik, 1994). Вторая форма

$$H_0^{(1)}(k\sqrt{d^2+z^2}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(vd-wz)}}{v}dw \tag{3.8}$$

(где $v=\sqrt{k^2-w^2}$, $\mathrm{Im}v>0$ и $d>0$) может быть проверена ее преобразованием в формулу Зоммерфельда (Sommerfeld, 1935, 1937)

$$H_0^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta+i\infty}^{\delta-i\infty}e^{i\rho\cos\beta}d\beta\,,\quad 0\le\delta\le\pi \tag{3.9}$$

путем подстановок $w = k\sin t$, $v = k\cos t$ и $k\sqrt{d^2+z^2}=\rho$.

Используя формулу (3.7), получаем

$$u_s^{(0)} = -u_0\frac{k\sin\varphi_0}{2}\int_0^{\infty}e^{-ik\xi\cos\varphi_0}H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2})d\xi \tag{3.10}$$

и

$$u_h^{(0)} = -u_0\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{\infty}e^{-ik\xi\cos\varphi_0}H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2})d\xi\,. \tag{3.11}$$

Затем мы применяем форму (3.8) и получаем в результате

$$u_s^{(0)} = -u_0\frac{k\sin\varphi_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iv|y|}}{v}e^{-iwx}dw\int_0^{\infty}e^{i(w-k\cos\varphi_0)\xi}d\xi\,, \tag{3.12}$$

$$u_h^{(0)} = \mathrm{sign}(y)u_0\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(v|y|-wx)}dw\int_0^{\infty}e^{i(w-k\cos\varphi_0)\xi}d\xi\,. \tag{3.13}$$

Чтобы гарантировать сходимость интеграла по переменной $\xi$, необходимо потребовать выполнения условия $\mathrm{Im}(w-k\cos\varphi_0)>0$. Вычисляя эти интегралы в явном виде, приходим к выражениям

$$u_s^{(0)} = u_0\frac{i\sin\varphi_0}{2\pi}I_s,\quad u_h^{(0)} = \mathrm{sign}(y)u_0\frac{1}{i2\pi}I_h, \tag{3.14}$$

где

$$I_s = k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(v|y|-wx)}}{v\cdot(k\cos\varphi_0-w)}dw,\quad I_h = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(v|y|-wx)}}{k\cos\varphi_0-w}dw \tag{3.15}$$

и контур интегрирования огибает сверху полюс $w = k\cos\varphi_0$.

## 3.2. Преобразование интегралов ФО в каноническую форму

В интегралах $I_s$ и $I_h$ перейдем к полярным координатам, используя соотношения

$$x = r\cos\varphi, \quad y = \begin{cases} r\sin\varphi & \text{при } \varphi < \pi, \\ -r\sin\varphi & \text{при } \varphi > \pi, \end{cases} \tag{3.16}$$

и заменим переменную интегрирования $w$ на $\xi$, полагая

$$w = -k\cos\xi, \quad v = k\sin\xi, \quad \operatorname{Im} v > 0\,. \tag{3.17}$$

Тогда

$$v|y| - wx = \begin{cases} kr\cos(\xi - \varphi) & \text{при } \varphi < \pi, \\ kr\cos(\xi + \varphi) & \text{при } \varphi > \pi. \end{cases} \tag{3.18}$$

Выражения

$$\begin{aligned} w &= -k\cos\xi'\operatorname{ch}\xi'' + ik\sin\xi'\operatorname{sh}\xi'', \\ v &= k\sin\xi'\operatorname{ch}\xi'' + ik\cos\xi'\operatorname{sh}\xi'' \end{aligned} \tag{3.19}$$

и условие

$$\operatorname{Im} v = k\cos\xi'\operatorname{sh}\xi'' > 0 \tag{3.20}$$

определяют контур интегрирования $F$ в комплексной плоскости $\xi = \xi' + i\xi''$, показанный на рис. 3.2.

После этих преобразований мы получаем следующие выражения:

$$I_s = \int\limits_F \frac{e^{ikr\cos(\xi-\varphi)}}{\cos\xi + \cos\varphi_0}\,d\xi \quad \text{при } \varphi < \pi, \tag{3.21}$$

$$I_s = \int\limits_F \frac{e^{ikr\cos(\xi+\varphi)}}{\cos\xi + \cos\varphi_0}\,d\xi \quad \text{при } \varphi > \pi \tag{3.22}$$

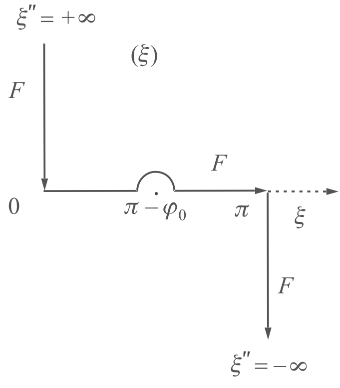


**Рис. 3.2.** Контур интегрирования $F$ в комплексной плоскости $\xi = \xi' + i\xi''$

и

$$I_h = \int\limits_F \frac{e^{ikr\cos(\xi-\varphi)}\sin\xi}{\cos\xi+\cos\varphi_0}d\xi \quad \text{при}\ \varphi<\pi, \tag{3.23}$$

$$I_h = \int\limits_F \frac{e^{ikr\cos(\xi+\varphi)}\sin\xi}{\cos\xi+\cos\varphi_0}d\xi \quad \text{при}\ \varphi>\pi, \tag{3.24}$$

где, как это показано на рис. 3.2, контур интегрирования $F$ огибает сверху полюс $\xi = \pi - \varphi_0$.

На рис. 3.3 и рис. 3.4 показаны два дополнительных контура $G_1$ и $G_2$, относящихся к случаям $\varphi < \pi$ и $\varphi > \pi$, соответственно. В заштрихованных областях на этих рисунках выполняются условия $\operatorname{Im}\cos(\xi-\varphi) > 0$ и $\operatorname{Im}\cos(\xi+\varphi) > 0$, которые гарантируют сходимость интегралов $I_s$ и $I_h$. Теперь мы применяем теорему Коши о вычетах к интегралам по замкнутым контурам $F - G_{1,2}$ (они замыкаются на бесконечности) и получаем

$$I_s = \int\limits_{G_1} \frac{e^{ikr\cos(\xi-\varphi)}}{\cos\xi+\cos\varphi_0}d\xi + \frac{2\pi i}{\sin\varphi_0}e^{-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)}, \ \text{если}\ 0 \le \varphi \le \pi-\varphi_0, \tag{3.25}$$

$$I_s = \int\limits_{G_1} \frac{e^{ikr\cos(\xi-\varphi)}}{\cos\xi+\cos\varphi_0}d\xi, \ \text{если}\ \pi-\varphi_0 \le \varphi \le \pi, \tag{3.26}$$

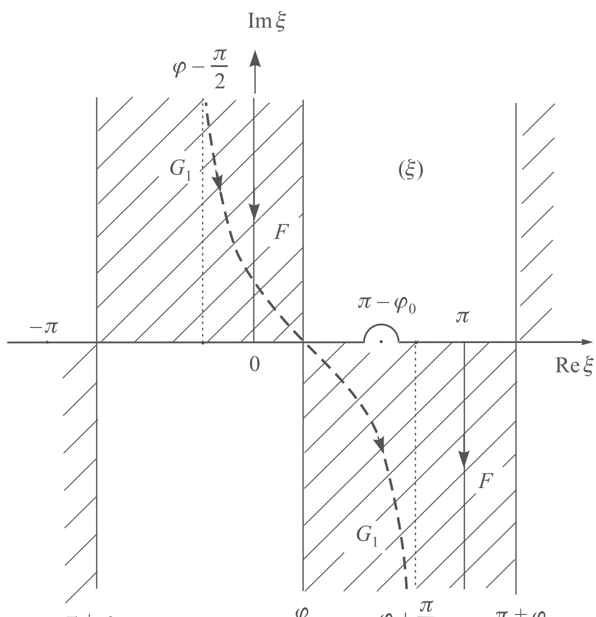


**Рис. 3.3.** Контуры интегрирования $F$ и $G_1$ для случая $\varphi < \pi$. В заштрихованных областях $\operatorname{Im}\cos(\xi-\varphi) > 0$

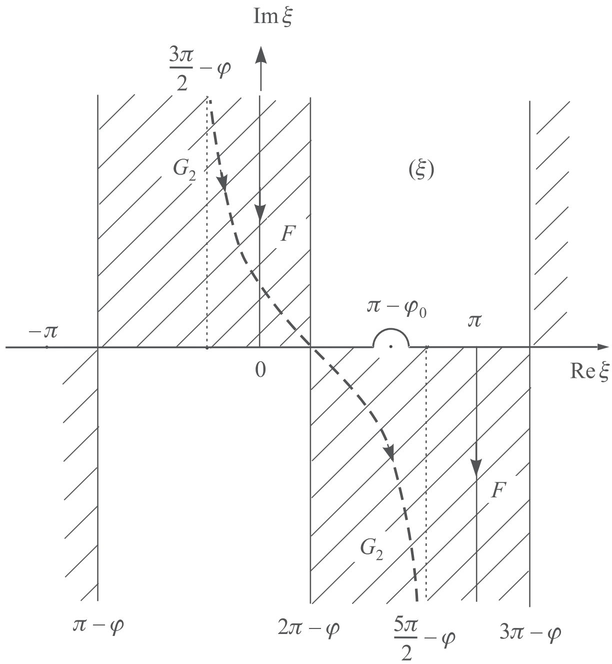


**Рис. 3.4.** Контуры интегрирования $F$ и $G_2$ для случая $\varphi > \pi$. В заштрихованных областях $\operatorname{Im}\cos(\xi + \varphi) > 0$

$$I_s = \int\limits_{G_2} \frac{e^{ikr\cos(\xi+\varphi)}}{\cos\xi + \cos\varphi_0}\, d\xi\,, \text{ если } \pi \le \varphi < \pi + \varphi_0, \tag{3.27}$$

$$I_s = \int\limits_{G_2} \frac{e^{ikr\cos(\xi+\varphi)}}{\cos\xi + \cos\varphi_0}\, d\xi + \frac{2\pi i}{\sin\varphi_0} e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}, \text{ если } \pi + \varphi_0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{3.28}$$

В этих интегралах мы заменим переменную интегрирования $\xi$ на $\zeta + \varphi$ в области $0 \le \varphi < \pi$ и на $\zeta + 2\pi - \varphi$ в области $\pi < \varphi < 2\pi$. В результате все интегралы в формулах (3.25–3.28) преобразуются в интегралы по контуру $D_0$ (рис. 2.6):

$$\int\limits_{G_1} \frac{e^{ikr\cos(\xi-\varphi)}}{\cos\xi + \cos\varphi_0}\, d\xi = \int\limits_{D_0} \frac{e^{ikr\cos\zeta}\, d\zeta}{\cos\varphi_0 + \cos(\zeta+\varphi)}\,, \text{ если } 0 \le \varphi < \pi, \tag{3.29}$$

$$\int\limits_{G_2} \frac{e^{ikr\cos(\xi+\varphi)}}{\cos\xi + \cos\varphi_0}\, d\xi = \int\limits_{D_0} \frac{e^{ikr\cos\zeta}\, d\zeta}{\cos\varphi_0 + \cos(\zeta-\varphi)}\,, \text{ если } \pi \le \varphi < 2\pi. \tag{3.30}$$

Мы опускаем аналогичные преобразования для интеграла $I_h$ и приводим только их результаты:

$$I_h = \int\limits_{D_0} \frac{e^{ikr\cos\zeta}\sin(\zeta+\varphi)}{\cos\varphi_0 + \cos(\zeta+\varphi)}d\zeta + 2\pi i e^{-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)}, \text{ если } 0 \le \varphi \le \pi - \varphi_0, \tag{3.31}$$

$$I_h = \int\limits_{D_0} \frac{e^{ikr\cos\zeta}\sin(\zeta+\varphi)}{\cos\varphi_0 + \cos(\zeta+\varphi)}d\zeta, \text{ если } \pi - \varphi_0 \le \varphi < \pi, \tag{3.32}$$

$$I_h = \int\limits_{D_0} \frac{e^{ikr\cos\zeta}\sin(\zeta-\varphi)}{\cos\varphi_0 + \cos(\zeta-\varphi)}d\zeta, \text{ если } \pi \le \varphi \le \pi + \varphi_0, \tag{3.33}$$

$$I_h = \int\limits_{D_0} \frac{e^{ikr\cos\zeta}\sin(\zeta-\varphi)}{\cos\varphi_0 + \cos(\zeta-\varphi)}d\zeta + 2\pi i e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}, \text{ если } \pi + \varphi_0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{3.34}$$

Теперь рассеянное поле можно представить в следующей форме:

$$u_s^{(0)} = u_0 v_s^+(kr,\varphi,\varphi_0) + \begin{cases} -u_0 e^{-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)}, & \text{если } 0 \le \varphi \le \pi - \varphi_0, \\ 0, & \text{если } \pi - \varphi_0 < \varphi < \pi, \end{cases} \tag{3.35}$$

$$u_s^{(0)} = u_0 v_s^-(kr,\varphi,\varphi_0) + \begin{cases} 0, & \text{если } \pi \le \varphi \le \pi + \varphi_0, \\ -u_0 e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}, & \text{если } \pi + \varphi_0 < \varphi < 2\pi \end{cases} \tag{3.36}$$

и

$$u_h^{(0)} = u_0 v_h^+(kr,\varphi,\varphi_0) + \begin{cases} u_0 e^{-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)}, & \text{если } 0 \le \varphi \le \pi - \varphi_0, \\ 0, & \text{если } \pi - \varphi_0 < \varphi < \pi, \end{cases} \tag{3.37}$$

$$u_h^{(0)} = u_0 v_h^-(kr,\varphi,\varphi_0) + \begin{cases} 0, & \text{если } \pi \le \varphi \le \pi + \varphi_0, \\ -u_0 e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}, & \text{если } \pi + \varphi_0 < \varphi < 2\pi, \end{cases} \tag{3.38}$$

где

$$v_s^{\pm}(kr,\varphi,\varphi_0) = \frac{i\sin\varphi_0}{2\pi}\int\limits_{D_0} \frac{e^{ikr\cos\zeta}}{\cos\varphi_0 + \cos(\zeta\pm\varphi)}d\zeta, \tag{3.39}$$

$$v_h^{\pm}(kr,\varphi,\varphi_0) = \pm\frac{1}{i2\pi}\int\limits_{D_0} \frac{e^{ikr\cos\zeta}\sin(\zeta\pm\varphi)}{\cos\varphi_0 + \cos(\zeta\pm\varphi)}d\zeta. \tag{3.40}$$

Приведенные выражения для $u_s^{(0)}$ и $u_h^{(0)}$ определяют в приближении ФО поле, рассеянное гранью клина $\varphi = 0$. Они справедливы при условии $0 \le \varphi_0 < \alpha - \pi$, когда освещена только одна эта грань. Обе грани освещены, если $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$. В этом случае другая грань ($\varphi = \alpha$) также создает рассеянное поле. Это поле также будет описываться формулами (3.35–3.38), если в них заменить $\varphi$ на $\alpha-\varphi$ и $\varphi_0$ на $\alpha-\varphi_0$. Таким образом, поле $u_s^{(0)}$, создаваемое в этом случае обеими гранями, описывается следующими выражениями:

$$u_s^{(0)} = u_0[v_s^+(kr,\varphi,\varphi_0) + v_s^-(kr,\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0)] + \\ + \begin{cases} -u_0 e^{-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)}, & \text{если } 0 \le \varphi \le \pi-\varphi_0, \\ 0, & \text{если } \pi-\varphi_0 < \varphi < \alpha-\pi, \end{cases} \tag{3.41}$$

$$u_s^{(0)} = u_0[v_s^+(kr,\varphi,\varphi_0) + v_s^+(kr,\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0)], \text{ если } \alpha-\pi < \varphi < \pi, \tag{3.42}$$

$$u_s^{(0)} = u_0[v_s^-(kr,\varphi,\varphi_0) + v_s^+(kr,\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0)], \text{ если } \pi < \varphi < 2\alpha-\pi-\varphi_0, \tag{3.43}$$

$$u_s^{(0)} = u_0[v_s^-(kr,\varphi,\varphi_0) + v_s^+(kr,\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0)] - \\ - u_0 e^{-ikr\cos(2\alpha-\varphi-\varphi_0)}, \text{ если } 2\alpha-\pi-\varphi_0 < \varphi < \alpha. \tag{3.44}$$

Аналогичные выражения справедливы для поля $u_h^{(0)}$ в случае $\alpha-\pi<\varphi_0<\pi$:

$$u_h^{(0)} = u_0[v_h^+(kr,\varphi,\varphi_0) + v_h^-(kr,\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0)] + \\ + \begin{cases} u_0 e^{-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)}, & \text{если } 0 \le \varphi \le \pi-\varphi_0, \\ 0, & \text{если } \pi-\varphi_0 < \varphi < \alpha-\pi, \end{cases} \tag{3.45}$$

$$u_h^{(0)} = u_0[v_h^+(kr,\varphi,\varphi_0) + v_h^+(kr,\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0)], \text{ если } \alpha-\pi < \varphi < \pi, \tag{3.46}$$

$$u_h^{(0)} = u_0[v_h^-(kr,\varphi,\varphi_0) + v_h^+(kr,\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0)], \text{ если } \pi < \varphi < 2\alpha-\pi-\varphi_0, \tag{3.47}$$

$$u_h^{(0)} = u_0[v_h^-(kr,\varphi,\varphi_0) + v_h^+(kr,\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0)] + \\ + u_0 e^{-ikr\cos(2\alpha-\varphi-\varphi_0)}, \text{ если } 2\alpha-\pi-\varphi_0 < \varphi < \alpha. \tag{3.48}$$

Как это видно из выражений (3.41–3.48), рассеянное поле состоит из отраженных плоских волн и его дифракционной части, описываемой функциями $v_s^\pm$ и $v_h^\pm$. Для этих функций и для дифракционного поля получены простые асимптотические выражения в следующем разделе.

## 3.3. Лучевые асимптотики для дифракционного поля в приближении ФО

> Асимптотики для акустических волн, полученные в этом разделе, также справедливы и для электромагнитных волн, возникающих при дифракции на идеально проводящем клине: $u_s = E_z$ и $u_h = H_z$.

Опять, как и в разделе 2.4, мы переходим в интегралах (3.39) и (3.40) к новой переменной $s = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}\sin\dfrac{\zeta}{2}$ и преобразуем функции $v^{\pm}_{s,h}$ к виду

$$v^{\pm}_{s}(kr,\varphi,\varphi_0) = \frac{\sin\varphi_0}{\sqrt{2}\pi}\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-krs^2}ds}{[\cos\varphi_0 + cos(\zeta\pm\varphi)]\cos\dfrac{\zeta}{2}}, \tag{3.49}$$

$$v^{\pm}_{h}(kr,\varphi,\varphi_0) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\zeta\pm\varphi)\mathrm{e}^{-krs^2}ds}{[\cos\varphi_0 + \cos(\zeta\pm\varphi)]\cos\dfrac{\zeta}{2}}. \tag{3.50}$$

Применяя затем стандартный метод седловой точки, получаем асимптотики

$$v^{\pm}_{s}(kr,\varphi,\varphi_0) \sim \frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi + \cos\varphi_0}\frac{\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \tag{3.51}$$

$$v^{\pm}_{h}(kr,\varphi,\varphi_0) \sim -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi + \cos\varphi_0}\frac{\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}. \tag{3.52}$$

Они верны при условии $\sqrt{kr}\left|\cos\dfrac{\varphi\pm\varphi_0}{2}\right| \gg 1$, т. е. вдали от геометрооптических границ, где дифракционное поле имеет лучевую структуру. Теперь лучевые асимптотики для дифракционной части поля (3.41–3.48) можно представить в следующей форме:

$$\boxed{\begin{aligned} u_s^{(0)d} &\sim u_0 f^{(0)}(\varphi,\varphi_0)\frac{\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, && (3.53)\\ u_h^{(0)d} &\sim u_0 g^{(0)}(\varphi,\varphi_0)\frac{\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}. && (3.54)\end{aligned}}$$

Диаграммы направленности $f^{(0)}(\varphi,\varphi_0)$ и $g^{(0)}(\varphi,\varphi_0)$ дифракционного поля различны в ситуациях, когда одна или две грани клина освещаются падающей волной. В случае $0 < \varphi_0 < \alpha - \pi$, когда освещена только грань $\varphi = 0$,

$$f^{(0)}(\varphi,\varphi_0) = \frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi + \cos\varphi_0}, \quad g^{(0)}(\varphi,\varphi_0) = -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi + \cos\varphi_0}. \tag{3.55}$$

Если же освещаются обе грани ($\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$), то

$$f^{(0)}(\varphi,\varphi_0) = \frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi + \cos\varphi_0} + \frac{\sin(\alpha - \varphi_0)}{\cos(\alpha-\varphi) + cos(\alpha - \varphi_0)}, \tag{3.56}$$

$$g^{(0)}(\varphi,\varphi_0) = -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi + \cos\varphi_0} - \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi) + \cos(\alpha-\varphi_0)}. \tag{3.57}$$

Видно, что эти функции сингулярны на геометрооптических границах $\varphi = \pi \pm \varphi_0$ и $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$. Асимптотики, справедливые для всех направлений $0 \le \varphi \le \alpha$, нетрудно получить, применяя метод Паули, изложенный ранее в разделах 2.5 и 2.6. Но мы не будем заниматься этим делом, поскольку наша главная цель в задаче о дифракции на клине состоит в вычислении поля, излучаемого неравномерной компонентой поверхностных источников.

## Задачи

**3.1.** Оцените погрешность приближения ФО. Вычислите относительную ошибку $\delta f^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) = |F(\varphi,\varphi_0,\alpha) - 1| \cdot 100\%$ и постройте ее график. Здесь $F(\varphi,\varphi_0,\alpha) = f^{(0)}(\varphi,\varphi_0) / f(\varphi,\varphi_0,\alpha)$.
Выполните расчеты для двух случаев :
(а) $\alpha = 270°$, $\varphi_0 = 45°$, $0 \le \varphi \le \alpha$,
(б) $\alpha = 360°$, $\varphi_0 = 45°$, $0 \le \varphi \le \alpha$.
Докажите аналитически равенство $F(\pi \pm \varphi_0, \varphi_0, \alpha) = 1$.
Сформулируйте заключение относительно $\delta f^{(0)}$.

**3.2.** Оцените погрешность приближения ФО. Вычислите относительную ошибку $\delta g^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) = |G(\varphi,\varphi_0,\alpha) - 1| \cdot 100\%$ и постройте ее график. Здесь $G(\varphi,\varphi_0,\alpha) = g^{(0)}(\varphi,\varphi_0) / g(\varphi,\varphi_0,\alpha)$.
Выполните расчеты для двух случаев :
(а) $\alpha = 270°$, $\varphi_0 = 45°$, $0 \le \varphi \le \alpha$,
(б) $\alpha = 360°$, $\varphi_0 = 45°$, $0 \le \varphi \le \alpha$.
Докажите аналитически равенство $G(\pi \pm \varphi_0, \varphi_0, \alpha) = 1$.
Сформулируйте заключение относительно $\delta g^{(0)}$.

**3.3.** Функция Зоммерфельда $f(\varphi, \varphi_0, \alpha)$ удовлетворяет принципу взаимности, в отличие от ее ФО-аппроксимации $f^{(0)}(\varphi, \varphi_0, \alpha)$. Оцените отклонения ФО от этого принципа. Вычислите относительную величину отклонений $\delta F(\varphi, \varphi_0) = |F(\varphi, \varphi_0, \alpha) - F(\varphi_0, \varphi, \alpha)| \cdot 100\%$, где $F(\varphi,\varphi_0,\alpha) = f^{(0)}(\varphi,\varphi_0) / f(\varphi,\varphi_0,\alpha)$.
Исследуйте случай с $\alpha = 350°$, положите $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 = 70°$. Заполните квадратную таблицу ($6 \times 6$) численными значениями величины $\delta F$. Сформулируйте заключение.

**3.4.** Функция Зоммерфельда $g(\varphi, \varphi_0, \alpha)$ удовлетворяет принципу взаимности, в отличие от ее ФО-аппроксимации $g^{(0)}(\varphi, \varphi_0, \alpha)$. Оцените отклонения ФО от этого принципа. Вычислите относительную величину отклонений $\delta G(\varphi, \varphi_0) = |G(\varphi, \varphi_0, \alpha) - G(\varphi_0, \varphi, \alpha)| \cdot 100\%$, где $G(\varphi,\varphi_0,\alpha) = g^{(0)}(\varphi,\varphi_0) / g(\varphi,\varphi_0,\alpha)$.
Исследуйте случай с $\alpha = 350°$, положите $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 = 70°$. Заполните квадратную таблицу ($6 \times 6$) численными значениями величины $\delta G$. Сформулируйте заключение.

# Глава 4

# Дифракция на клине: поле, излучаемое неравномерной компонентой поверхностных источников

| |
|---|
| Соотношения эквивалентности $u_s^{(1)} = E_z^{(1)}$ и $u_h^{(1)} = H_z^{(1)}$ существуют между акустическими и электромагнитными волнами, излучаемыми неравномерной компонентой $j^{(1)}$ поверхностных источников. Исключение имеется в случае наклонного падения плоской волны к ребру клина (см. раздел 4.3.2). |

Теперь мы достигли момента, когда можно построить интегральные и асимптотические представления для поля, излучаемого *неравномерной* компонентой поверхностных источников, возбуждаемых на клине падающей волной. Точные выражения для полного поля были выведены в главе 2. Часть этого поля, соответствующая приближению ФО и излучаемая *равномерной* компонентой поверхностных источников, определена в главе 3. Очевидно, что разность между полным полем и его ФО-частью представляет собой излучение, создаваемое *неравномерной* компонентой поверхностных источников. Это излучение и составляет предмет исследования в данной главе.

## 4.1. Интегралы и асимптотики

Согласно точному решению [см. формулы (2.40), (2.41), (2.52–2.57)] полное поле в пространстве вне клина состоит из дифракционной и геометрооптической частей

$$u_{s,h}^{t} = u_{s,h}^{d} + u_{s,h}^{go}, \tag{4.1}$$

где величина $u_{s,h}^{d}$ описывается функциями $v(kr, \psi)$, а величина $u_{s,h}^{go}$ есть сумма падающей и отраженных плоских волн. Выражения (3.35–3.38), (3.41–3.48) описывают рассеянное поле в приближении ФО. Суммируя это поле с падающей волной, мы получим полное поле в этом приближении,

$$u_{s,h}^{(0)t} = u_{s,h}^{(0)d} + u_{s,h}^{go}, \tag{4.2}$$

где величина $u_{s,h}^{(0)d}$ есть дифракционная часть поля, которая описывается функциями $v_{s,h}^{\pm}$. Геометрооптическая часть $u_{s,h}^{go}$ поля в приближении ФО есть та же самая величина, которая содержится в точном выражении (4.1). Поле $u_{s,h}^{d}$ создается полным поверхностным источником $j_{s,h}^{t} = j_{s,h}^{(0)} + j_{s,h}^{(1)}$, состоящим из *равномерной* и *неравномерной* компонент. Поле $u_{s,h}^{(0)d}$ создается только *равномерной* компонентой $j_{s,h}^{(0)}$. Следовательно, поле, создаваемое *неравномерной* компонентой, есть разность

$$u_{s,h}^{(1)} = u_{s,h}^{t} - u_{s,h}^{(0)t} = u_{s,h}^{d} - u_{s,h}^{(0)d}. \tag{4.3}$$

В случае $0 < \varphi_0 < \alpha - \pi$, когда только одна грань клина ($\varphi = 0$) освещается падающей волной, это поле описывается формулами

$$u_s^{(1)}/u_0 = v(kr, \varphi - \varphi_0) - v(kr, \varphi + \varphi_0) - \begin{cases} v_s^{+}(kr, \varphi, \varphi_0), \text{если } 0 \le \varphi < \pi \\ v_s^{-}(kr, \varphi, \varphi_0), \text{если } \pi < \varphi \le \alpha \end{cases} \tag{4.4}$$

и

$$u_h^{(1)}/u_0 = v(kr, \varphi - \varphi_0) + v(kr, \varphi + \varphi_0) - \begin{cases} v_h^{+}(kr, \varphi, \varphi_0), \text{если } 0 \le \varphi < \pi \\ v_h^{-}(kr, \varphi, \varphi_0), \text{если } \pi < \varphi \le \alpha. \end{cases} \tag{4.5}$$

В случае $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$, когда освещены обе грани, поле определяется формулами

$$\begin{aligned} u_s^{(1)}/u_0 &= v(kr, \varphi - \varphi_0) - v(kr, \varphi + \varphi_0) - \\ &- \begin{cases} v_s^{+}(kr, \varphi, \varphi_0) + v_s^{-}(kr, \alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0), \text{если } 0 \le \varphi < \alpha - \pi \\ v_s^{+}(kr, \varphi, \varphi_0) + v_s^{+}(kr, \alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0), \text{если } \alpha - \pi < \varphi < \pi \\ v_s^{-}(kr, \varphi, \varphi_0) + v_s^{+}(kr, \alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0), \text{если } \pi < \varphi \le \alpha, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} u_h^{(1)}/u_0 &= v(kr, \varphi - \varphi_0) + v(kr, \varphi + \varphi_0) - \\ &- \begin{cases} v_h^{+}(kr, \varphi, \varphi_0) + v_h^{-}(kr, \alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0), \text{если } 0 \le \varphi < \alpha - \pi \\ v_h^{+}(kr, \varphi, \varphi_0) + v_h^{+}(kr, \alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0), \text{если } \alpha - \pi < \varphi < \pi \\ v_h^{-}(kr, \varphi, \varphi_0) + v_h^{+}(kr, \alpha - \varphi, \alpha - \varphi_0), \text{если } \pi < \varphi \le \alpha. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Функция $v(kr, \psi)$ согласно формуле (2.51) и функции $v_{s,h}^{\pm}(kr, \varphi, \varphi_0)$ согласно формулам (3.39), (3.40) опреляются интегралами в комплексной плоскости по одному и тому же контуру $D_0$, показанному на рис. 2.6. Следовательно, поле $u^{(1)}_{s,h}$ тоже может быть представлено в виде интеграла по контуру $D_0$ от линейной комбинации подынтегральных выражений, относящихся к функциям $v$ и $v^{\pm}_{s,h}$:

$$u^{(1)}_{s,h} = \int_{D_0} U_{s,h}(\alpha, \varphi, \varphi_0, \zeta)\, \mathrm{e}^{ikr\cos\zeta}\, d\zeta\,. \tag{4.8}$$

Для точек наблюдения вдали от ребра клина ($kr \gg 1$) этот интеграл можно оценить асимптотически, применяя метод седловой точки (Копсон, 1965; Murray, 1984). Для этого сначала заменим переменную интегрирования $\zeta$ на $s = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}\sin\dfrac{\zeta}{2}$ и трансформируем интеграл к виду

$$u^{(1)}_{s,h} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{ikr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_{s,h}[\alpha, \varphi, \varphi_0, \zeta(s)]}{\cos[\zeta(s)/2]}\mathrm{e}^{-krs^2}\, ds\,. \tag{4.9}$$

Затем разложим функцию $U_{s,h}/\cos(\zeta/2)$ в ряд Тейлора в окрестности седловой точки $s = 0$. Сохраняя в этом ряду только первый член и интегрируя его, получаем асимпттическое выражение

$$u^{(1)}_{s,h} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{ikr}U_{s,h}(\alpha, \varphi, \varphi_0, 0)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-krs^2}\, ds + O\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-krs^2}s^2\, ds\right], \tag{4.10}$$

или

$$u^{(1)}_{s,h} = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{\sqrt{kr}}U_{s,h}(\alpha, \varphi, \varphi_0, 0) + O[(kr)^{-\frac{3}{2}}], \tag{4.11}$$

справедливое при условии $kr \gg 1$.

Теперь выражение (4.11) можно переписать в терминах функций $f$, $g$, $f^{(0)}$, $g^{(0)}$, введенных ранее в разделах 2.4 и 3.3:

$$\boxed{\begin{aligned} u^{(1)}_s &\sim u_0 f^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha)\frac{\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}\,, &(4.12)\\ u^{(1)}_h &\sim u_0 g^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha)\frac{\mathrm{e}^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}\,, &(4.13)\end{aligned}}$$

где

$$f^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) = f(\varphi, \varphi_0, \alpha) - f^{(0)}(\varphi, \varphi_0)\,, \tag{4.14}$$

$$g^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) = g(\varphi, \varphi_0, \alpha) - g^{(0)}(\varphi, \varphi_0)\,. \tag{4.15}$$

Таким образом, поле, создаваемое *неравномерной* компонентой $j_{s,h}^{(1)}$, представляет собой цилиндрическую волну, расходящуюся от ребра клина. Такая форма этого поля является следствием того факта, что неравномерная компонента $j_{s,h}^{(1)}$ концентрируется вблизи ребра. Именно по этой причине величину $j_{s,h}^{(1)}$ называют иногда в публикациях на английском языке как «*fringe* component».

Поскольку цилиндрическую волну можно рассматривать как совокупность лучей, мы называем выражения (4.12) и (4.13) лучевыми асимптотиками.

Диаграммы направленности полей (4.12) и (4.13) обладают замечательным свойством. В отличие от функций $f$, $g$, $f^{(0)}$, $g^{(0)}$, которые являются *сингулярными* на геометрооптических границах, функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ имеют там *конечную* величину. Оказывается, что сингулярности функций $f$ и $g$ полностью компенсируются сингулярностями функций $f^{(0)}$ и $g^{(0)}$. Приводимые ниже выражения определяют конечные значения функций $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ на таких границах.

На границе $\varphi = \pi - \varphi_0$ для плоской волны, отраженной от грани $\varphi = 0$ (рис. 2.7), функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ принимают значения

$$\begin{Bmatrix} f^{(1)} \\ g^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi - 2\varphi_0}{n}} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varphi_0 \pm \frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}, \tag{4.16}$$

когда $0 < \varphi_0 < \alpha - \pi$, и

$$\begin{Bmatrix} f^{(1)} \\ g^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi - 2\varphi_0}{n}} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varphi_0 \pm \frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} - $$

$$- \begin{Bmatrix} \dfrac{\sin(\alpha - \varphi_0)}{\cos(\alpha - \varphi_0) - \cos(\alpha + \varphi_0)} \\ \dfrac{\sin(\alpha + \varphi_{0)}}{\cos(\alpha - \varphi_0) - \cos(\alpha + \varphi_0)} \end{Bmatrix}, \tag{4.17}$$

когда $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$.

На границе тени ($\varphi = \pi + \varphi_0$) для падающей волны (рис. 2.7) функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ принимают значения

$$\begin{Bmatrix} f^{(1)} \\ g^{(1)} \end{Bmatrix} = \mp \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi + 2\varphi_0}{n}} \pm \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varphi_0 - \frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}, \tag{4.18}$$

когда $0 < \varphi_0 < \pi$. При условии $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$ направление $\varphi = \pi + \varphi_0$ оказывается внутри клина и поэтому не представляет интереса.

В случае $\alpha - \pi < \varphi_0 < \pi$, когда освещены обе грани клина (рис. 2.8), функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ имеют следующие значения на границе $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$ для волны, отраженной от грани $\varphi = \alpha$:

$$\begin{Bmatrix} f^{(1)} \\ g^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n} - \cos\dfrac{\varphi - \varphi_0}{n}} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}(\alpha - \varphi_0) \pm \frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} -\dfrac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi + \cos\varphi_0} \\ \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi + cos\varphi_0} \end{Bmatrix}. \tag{4.19}$$

Отметим, однако, что функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ оказываются сингулярными в двух особых направлениях:

$$\varphi = 0 \text{ при } \varphi_0 = \pi \tag{4.20}$$

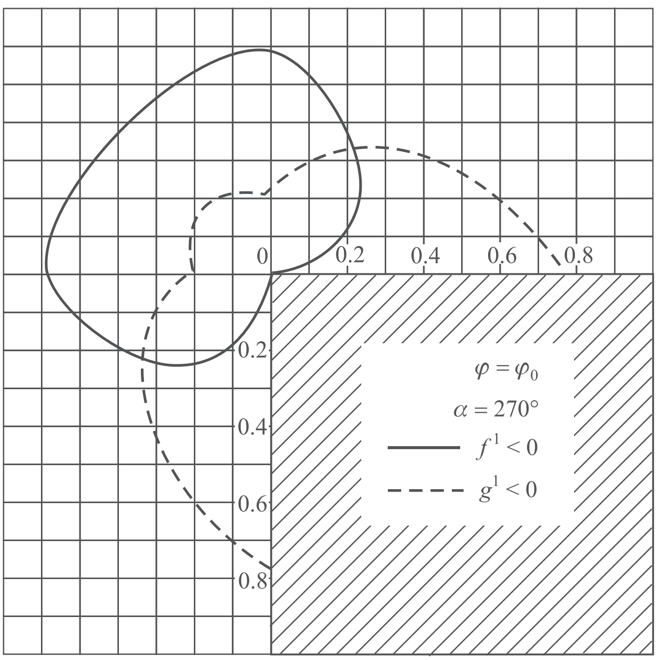


**Рис. 4.1.** Диаграммы направленности краевых волн, излучаемых неравномерными компонентами поверхностных источников. Функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ относятся к случаю акустически мягкого и жесткого клина, соответственно. Они также описывают компоненты $E_z$ и $H_z$ электромагнитной волны, рассеянной на идеально проводящем клине. Репродукция из статьи (Уфимцев, 1957) с разрешения *Журнала Технической Физики*

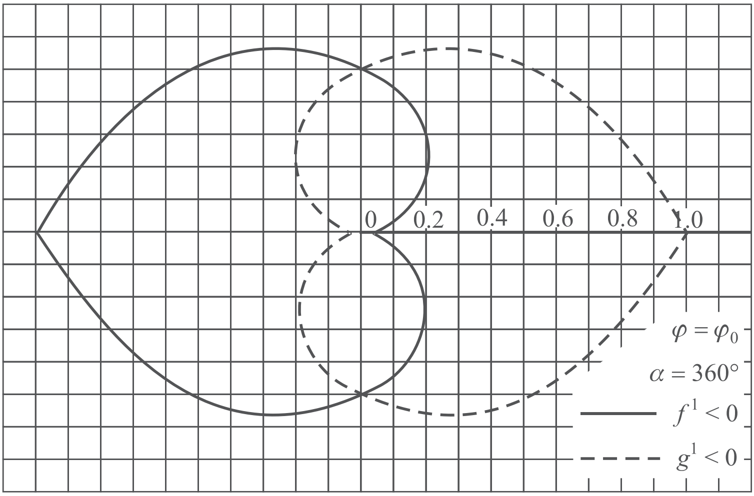


**Рис. 4.2.** Диаграммы направленности краевых волн, излучаемых неравномерными компонентами поверхностных источников. Функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ относятся к случаю акустически мягкой и жесткой полуплоскости, соответственно. Они также описывают компоненты $E_z$ и $H_z$ электромагнитной волны, рассеянной на идеально проводящей полуплоскости. Репродукция из статьи (Уфимцев, 1957) с разрешения *Журнала Технической Физики*

и

$$\varphi = \alpha \text{ при } \varphi_0 = \alpha - \pi. \tag{4.21}$$

Эти направления соответствуют зеркальным отражениям от граней клина при скользящих направлениях падающей волны. В этом случае подынтегральную функцию в интеграле (4.9) не удается разложить в ряд Тейлора, поскольку его члены становятся бесконечно большими. Ниже, в разделе 7.9 развита специальная версия ФТД, свободная от скользящей сингулярности.

Рис. 4.1 и 4.2 иллюстрируют поведение и красоту функций $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$.

## 4.2. Интегральная форма функций $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$

В теории антенн и в теории рассеяния хорошо известно, что диаграмма излучения/рассеяния в дальней зоне представляет собой конформное преобразование Фурье излучающих/рассеивающих источников, распределенных по поверхности антенн/рассеивающих тел. Это ясно видно, например, в формуле (1.19). В данном разделе мы установим аналогичные соотношения между диаграммами направленности $f^{(1)}$, $g^{(1)}$ и их источниками $j_s^{(1)}$, $j_h^{(1)}$ на гранях клина.

Геометрия задачи показана на рис. 3.1, а падающая волна задана выражением (3.1). Неравномерные компоненты поверхностных источников

$$j_s^{(1)} = u_0 J_s^{(1)}, \quad j_h^{(1)} = u_0 J_h^{(1)} \tag{4.22}$$

излучают поле (1.10). Рассмотрим сначала излучение с грани клина $\varphi = 0$:

$$u_s^{(1)} = -\frac{u_0}{4\pi}\int_0^{\infty} J_s^{(1)}(k\xi,\varphi_0)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+\zeta^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+\zeta^2}}d\zeta\,, \tag{4.23}$$

$$u_h^{(1)} = -\frac{u_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{\infty} J_h^{(1)}(k\xi,\varphi_0)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+\zeta^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+\zeta^2}}d\zeta\,. \tag{4.24}$$

Ввиду соотношения (3.7),

$$u_s^{(1)} = -u_0\frac{i}{4}\int_0^{\infty} J_s^{(1)}(k\xi,\varphi_0)H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2})d\zeta\,, \tag{4.25}$$

$$u_h^{(1)} = -u_0\frac{i}{4}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{\infty} J_h^{(1)}(k\xi,\varphi_0)H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2})d\zeta. \tag{4.26}$$

Согласно формулам (1.11), (2.61) и (2.63), функции $J_s^{(1)}$ и $J_h^{(1)}$ убывают с увеличением расстояния $\xi$ от ребра клина как $(k\xi)^{-3/2}$ и $(k\xi)^{-1/2}$, соответственно. На некотором расстоянии $\xi = \xi_{eff}$ эти функции становятся достаточно малыми и их можно приближенно положить равными нулю при $\xi \geq \xi_{eff}$. Для точки наблюдения в дальней зоне, где $r \gg k\xi_{eff}^2$, функцию Ханкеля в выражениях (4.25) и (4.26) можно приближенно заменить ее асимптотикой (2.29). В результате получаем асимптотические выражения:

$$u_s^{(1)} \sim -u_0\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{2\sqrt{2\pi kr}}\int_0^{\xi_{eff}} J_s^{(1)}(k\xi,\varphi_0)e^{-ik\xi\cos\varphi}d\xi\,, \tag{4.27}$$

$$u_h^{(1)} \sim -u_0 ik\sin\varphi\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{2\sqrt{2\pi kr}}\int_0^{\xi_{eff}} J_h^{(1)}(k\xi,\varphi_0)e^{-ik\xi\cos\varphi}d\xi\,. \tag{4.28}$$

Эти выражения описывают поле, излучаемое с грани $\varphi = 0$. Заменяя в них $\varphi$ на $\alpha-\varphi$ и $\varphi_0$ на $\alpha-\varphi_0$, можно определить поле, излучаемое с грани $\varphi = \alpha$. Сумма полей, излучаемых с обеих граней, описывается также выражениями (4.12) и (4.13). Поэтому, приравнивая интегральные выражения для поля к явным выражениям (4.12) и (4.13), мы получаем интегральные представления для функций $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$:

$$f^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \sim -\frac{1}{2}\left[\int_0^{\xi_{eff}} J_s^{(1)}(k\xi,\varphi_0)\mathrm{e}^{-ik\xi\cos\varphi}\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\xi_{eff}} J_s^{(1)}(k\xi,\alpha-\varphi_0)\mathrm{e}^{-ik\xi\cos(\alpha-\varphi)}\,d\xi\right], \tag{4.29}$$

$$g^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \sim -\frac{ik}{2}\left[\sin\varphi\int_0^{\xi_{eff}} J_h^{(1)}(k\xi,\varphi_0)\mathrm{e}^{-ik\xi\cos\varphi}\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \sin(\alpha-\varphi)\int_0^{\xi_{eff}} J_h^{(1)}(k\xi,\alpha-\varphi_0)\mathrm{e}^{-ik\xi\cos(\alpha-\varphi)}\,d\xi\right]. \tag{4.30}$$

Эти соотношения позволяют интерпретировать функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ как диаграммы направленности *элементарных* краевых волн (в плоскости, нормальной к ребру клина), которые излучаются поверхностными источниками, распределенными вдоль линий, перпендикулярных к ребру.

## 4.3. Наклонное падение плоской волны на клин

В случае наклонного падения верны соотношения эквивалентности $u_h^{(0,1,t)} = H_z^{(0,1,t)}$, $u_s^{(t)} = E_z^{(t)}$ между акустическими и электромагнитными дифракционными полями. Здесь величины с верхними индексами 0, 1, $t$ относятся к полям, излучаемым соответственно поверхностными источниками $j^{(0)}$, $j^{(1)}$, $j^{(t)} = j^{(0)} + j^{(1)}$. Однако $u_s^{(0)} \neq E_z^{(0)}$ и $u_s^{(1)} \neq E_z^{(1)}$ по причине поляризационной связи в приближении ФО.

### 4.3.1. Акустические волны

Здесь мы обобщим результаты раздела 4.1 на случай наклонного падения плоской волны к ребру клина (рис. 4.3). Теперь падающая волна задана формулой

$$u^{inc} = u_0\mathrm{e}^{ik(x\cos\tilde{\alpha} + y\cos\beta + z\cos\gamma)}, \tag{4.31}$$

где $0 < \gamma \le \pi/2$. Мы используем символ «тильда» для угла $\tilde{\alpha}$, чтобы отличить его от внешнего угла клина $\alpha$.

На гранях клина должны выполняться граничные условия (2.2) или (2.3) в зависимости от его физических свойств. Чтобы удовлетворить этим усло-

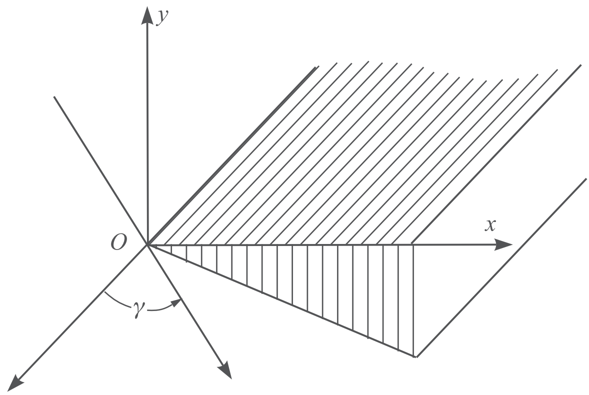


**Рис. 4.3.** Наклонное падение плоской волны на клин

виям, дифракционное поле должно иметь такую же зависимость от координаты $z$, как и падающая волна (4.31):

$$u^d = u(r,\varphi)\mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}. \tag{4.32}$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.4), получаем уравнение для функции $u(r, \varphi)$:

$$\Delta u(r,\varphi) + k_1^2 u(r,\varphi) = 0 \ \text{ при } k_1 = k\sin\gamma, \tag{4.33}$$

где оператор Лапласа $\Delta$ определяется формулой (2.5). Падающую волну (4.31) целесообразно представить в форме (3.1):

$$u^{inc} = u_0\mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}\mathrm{e}^{-ik_1(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0)}, \tag{4.34}$$

где

$$\sin\gamma\cos\varphi_0 = -\cos\tilde{\alpha}, \quad \sin\gamma\sin\varphi_0 = -\cos\beta \tag{4.35}$$

и

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\cos\beta}{\cos\tilde{\alpha}} \ \text{ при } \ 0 \le \varphi_0 < \pi. \tag{4.36}$$

Таким образом, мы свели трехмерную задачу о наклонном падении волны к двухмерной задаче для нормального падения ($\gamma = \pi/2$), изученной ранее в главе 2. А именно, в полученном там решении следует заменить величину $u_0$ на $u_0\mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}$, волновое число $k$ на $k_1 = k\sin\gamma$ и угол $\varphi_0$ на $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(\cos\beta/\cos\tilde{\alpha})$.

Это правило установлено здесь для точного решения задачи о дифракции на клине и для его асимптотик. Можно показать, что оно также справедливо и для приближения физической оптики (ФО) в данной задаче. С этой целью подставим выражение (4.34) для падающей волны в формулу (1.31) и определим поверхностные источники в приближении ФО:

$$j_s^{(0)} = -u_0\mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}\, 2ik_1\sin\varphi_0\mathrm{e}^{-ik_1x\cos\varphi_0}, \tag{4.37}$$

$$j_h^{(0)} = u_0\mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}\, 2\mathrm{e}^{ik_1x\cos\varphi_0}. \tag{4.38}$$

Сравнение с выражениями (3.2) показывает, что источники (4.37) и (4.38) удовлетворяют сформулированному выше правилу перехода от случая нормального падения к случаю наклонного падения. Если источники поля удовлетворяют этому правилу, то естественно ожидать, что ему будут удовлетворять и поля, создаваемые этими источниками. Чтобы убедиться в этом, подставим выражения (4.37) и (4.38) в исходные формулы (1.32) для расеянного поля:

$$u_s^{(0)} = u_0 \frac{ik_1 \sin\varphi_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ik_1\xi\cos\varphi_0} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\zeta\cos\gamma} \frac{e^{ik\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}} d\zeta\,, \quad (4.39)$$

$$u_h^{(0)} = -u_0 \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} e^{-ik_1\xi\cos\varphi_0} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\zeta\cos\gamma} \frac{e^{ik\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}} d\zeta\,, \quad (4.40)$$

или

$$u_s^{(0)} = u_0 e^{ikz\cos\gamma} \frac{ik_1 \sin\varphi_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ik_1\xi\cos\varphi_0} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{iks\cos\gamma} \frac{e^{ik\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+s^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+s^2}} ds, \quad (4.41)$$

$$u_h^{(0)} = -u_0 e^{ikz\cos\gamma} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} e^{-ik_1\xi\cos\varphi_0} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{iks\cos\gamma} \frac{e^{ik\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+s^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+s^2}} ds\,. \quad (4.42)$$

Интегралы по переменной $s$ еще содержат волновое число $k$ для случая нормального падения и нуждаются в дальнейшем исследовании. Перепишем их в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iks\cos\gamma} \frac{e^{ik\sqrt{D^2+s^2}}}{\sqrt{D^2+s^2}} ds, \text{ где } D = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}. \quad (4.43)$$

Вернемся теперь к интегралу (3.8) для функции Ханкеля и произведем в нем следующие замены: $w = s$, $z = t$, $d = -ip$, $k = -iD$, $q = \sqrt{p^2 - t^2}$, полагая также $D > 0$ и $\mathrm{Im} q > 0$. После этих замен в формуле (3.8) получаем

$$H_0^{(1)}(qD) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} \frac{e^{ip\sqrt{D^2+s^2}}}{\sqrt{D^2+s^2}} ds = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} \frac{e^{ip\sqrt{D^2+s^2}}}{\sqrt{D^2+s^2}} ds\,. \quad (4.44)$$

Полагая здесь $t = k\cos\gamma$, $p = k$, $q = \sqrt{p^2 - t^2} = k\sin\gamma = k_1$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{iks\cos\gamma} \frac{\mathrm{e}^{ik\sqrt{D^2+s^2}}}{\sqrt{D^2+s^2}} ds = i\pi H_0^{(1)}(k_1 D). \tag{4.45}$$

Это соотношение позволяет переписать поля ФО (4.41) и (4.42) в виде

$$u_s^{(0)} = -u_0 \mathrm{e}^{ikz\cos\gamma} \frac{k_1 \sin\varphi_0}{2} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ik_1\xi\cos\varphi_0} H_0^{(1)}(k_1\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}) d\xi, \tag{4.46}$$

$$u_h^{(0)} = -u_0 e^{ikz\cos\gamma} \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ik_1\xi\cos\varphi_0} H_0^{(1)}(k_1\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}) d\xi. \tag{4.47}$$

Сравнение этих выражений с формулами (3.10) и (3.11) подтверждает, что поля в приближении ФО действительно удовлетворяют правилу перехода к случаю наклонного падения плоской волны на клин.

Таким образом, доказано, что это правило применимо как к точному решению, так и к его приближению ФО. Следовательно, это правило применимо и к их разности, т. е. к полю $u_{s,h}^{(1)}$, излучаемому *неравномерной* компонентой $j_{s,h}^{(1)}$ поверхностных источников дифракционного поля. Применяя теперь это правило к выражениям (4.12) и (4.13), можно легко определить поле $u_{s,h}^{(1)}$, возникающее при наклонном падении плоской волны:

$$u_s^{(1)} \sim u_0 f^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{\mathrm{e}^{i(k_1 r + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} \mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}, \tag{4.48}$$

$$u_h^{(1)} \sim u_0 g^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{\mathrm{e}^{i(k_1 r + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} \mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}. \tag{4.49}$$

Здесь функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ описываются выражениями, приведенными в разделе 4.1, а угол $\varphi_0$ определяется формулой (4.36).

Волны (4.48) и (4.49) имеют форму конических волн и могут интепретироваться в терминах дифракционных лучей. Действительно, их эйконал

$$S = z\cos\gamma + r\sin\gamma \tag{4.50}$$

описывает фазовый фронт как коническую поверхность, где $S = \text{const}$. Градиент эйконала

$$\nabla S = \hat{z}\cos\gamma + \hat{r}\sin\gamma \tag{4.51}$$

указывает направления краевых дифракционных лучей. Они ориентированы по конической поверхности, показанной на рис. 4.4. Ось конуса направлена вдоль ребра клина. Все лучи образуют тот же угол $\gamma$ с ребром, что и падающий луч.

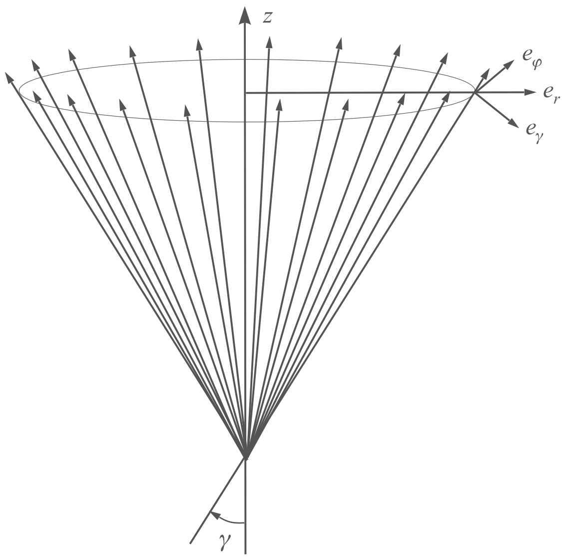


**Рис. 4.4.** Конус дифракционных лучей

Следует отметить, что существование дифракционного конуса было впервые установлено теоретически Рубиновичем (Rubinowicz, 1924). Им показано, что в случае искривленных ребер ось дифракционного конуса направлена вдоль касательной к ребру в точке дифракции. Он также установил, что краевые дифракционные лучи удовлетворяют принципу Ферма. Эта концепция краевых дифракционных лучей были затем использована Келлером (1962) при построении геометрической теории дифракции. Лучевая интерпретация конических дифракционных волн (4.56), (4.57) была также предложена ранее в ФТД (Уфимцев, 1962). В статье (Senior and Uslenghi, 1972) представлено экспериментальное доказательство существования конуса дифракционных лучей.

### 4.3.2. Поляризационная связь электромагнитных волн

Для электромагнитных волн правило перехода от случая нормального падения к случаю наклонного падения остается в силе, но за одним исключением. Оказывается, что в этом случае в приближении ФО возникает связь между волнами с различными поляризациями (Ufimtsev, 1975; Уфимцев, 2007 a; Ufimtsev, 2008 b). Происхождение этого эффекта мы рассмотрим чуть ниже, а сейчас приведем результат вычисления дифракционных волн в приближении ФО. Предположим, что клин возбуждается электромагнитной волной с компонентами

$$E_z^{inc} = E_{0z} \mathrm{e}^{ikz\cos\gamma} \mathrm{e}^{-ik_1 r\cos(\varphi-\varphi_0)}, \tag{4.52}$$

$$H_z^{inc} = H_{0z} \mathrm{e}^{ikz\cos\gamma} \mathrm{e}^{-ik_1 r\cos(\varphi-\varphi_0)}. \tag{4.53}$$

Можно показать, что возникающее при этом дифракционное поле в приближении ФО описывается следующими асимптотическими выражениями:

$$E_z^{(0)} = \{E_{0z} f^{(0)}(\varphi, \varphi_0) -$$
$$-Z_0 H_{0z}[\varepsilon(\varphi_0) - \varepsilon(\alpha - \varphi_0)]\cos\gamma\} \frac{\mathrm{e}^{i(k_1 r + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} \mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}, \tag{4.54}$$

$$H_z^{(0)} = H_{0z} g^{(0)}(\varphi, \varphi_0) \frac{\mathrm{e}^{i(k_1 r + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} \mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}. \tag{4.55}$$

Для точного решения задачи и для его асимптотик типа (4.12), (4.13) правило перехода к наклонному падению остается в силе и для электромагнитных волн (Уфимцев, 1962):

$$E_z = E_{0z} f(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{\mathrm{e}^{i(k_1 r + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} \mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}, \tag{4.56}$$

$$H_z = H_{0z} g(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{\mathrm{e}^{i(k_1 r + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} \mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}. \tag{4.57}$$

Поэтому для разности полей $E_z - E_z^{(0)}$, $H_z - H_z^{(0)}$, т. е. для полей, излучаемых *неравномерной компонентой* поверхностного тока, справедливы следующие выражения (Ufimtsev, 1975, 2003, 2007 a, 2008 b):

$$E_z^{(1)} = \{E_{0z} f^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) +$$
$$+Z_0 H_{0z}[\varepsilon(\varphi_0) - \varepsilon(\alpha - \varphi_0)]\cos\gamma\} \frac{\mathrm{e}^{i(k_1 r + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} \mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}, \tag{4.58}$$

$$H_z^{(1)} = H_{0z} g^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{\mathrm{e}^{i(k_1 r + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} \mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}. \tag{4.59}$$

В формулах (4.54) и (4.58) функция $\varepsilon(x)$ определяется выражением

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x \le \pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi. \end{cases} \tag{4.60}$$

Присутствие в формулах (4.54) и (4.58) слагаемых с множителем $H_{0z}$ является свидетельством поляризационной связи в приближении ФО. Рассмотрим происхождение этого явления.

Падающая волна (4.53) возбуждает на грани клина $\varphi = 0$ равномерную компоненту тока

$$j_r^{(0)} = j_x^{(0)} = 2\varepsilon(\varphi_0) H_{0z}^{inc} \mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}, \tag{4.61}$$

которая существует в области $0 \le x \le \infty$ (рис. 4.3). В точке $x = 0$ этот ток испытывает конечный разрыв, поскольку он равен нулю за пределами грани ($x < 0$). Ввиду этого разрыва и в силу уравнения непрерывности $\nabla \cdot \vec{j}^{(0)} = i\omega\rho^{(0)}$, на ребре клина возникает нить электрического заряда:

$$\rho^{(0)} = \frac{2}{i\omega}\varepsilon(\varphi_0)H_{0z}\mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}\delta(x)\,. \tag{4.62}$$

Этот заряд создает электрическое поле

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \tag{4.63}$$

со скалярным потенциалом

$$\Phi = \frac{1}{2k}\varepsilon(\varphi_0)Z_0H_{0z}\mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}\cdot H_0^{(1)}(k_1r) \tag{4.64}$$

и с компонентой

$$E_z = -\varepsilon(\varphi_0)Z_0H_{0z}\mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}\cos\gamma\,\frac{\mathrm{e}^{ik_1r+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_1r}} \tag{4.65}$$

в области $k_1r \gg 1$. Заметим, что согласно уравнению Максвелла

$$ikZ_0\vec{H} = \nabla\times\vec{E} = -\nabla\times(\nabla\Phi) \equiv 0 \tag{4.66}$$

электрический заряд (4.62) не создает магнитное поле.

Сравнивая теперь величины (4.65) и (4.54), мы видим, что последняя содержит член, полностью идентичный (4.65). Другой аналогичный член в выражении (4.54) с множителем $\varepsilon(\alpha-\varphi_0)$ обусловлен разрывом тока

$$j_r^{(0)} = -2\varepsilon(\alpha-\varphi_0)H_{0z}\mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}, \tag{4.67}$$

который возбуждается на грани клина $\varphi = \alpha$.

Когда освещены обе грани клина, имеет место равенство $\varepsilon(\varphi_0) = \varepsilon(\alpha-\varphi_0) = 1$, и поляризационная связь в полях (4.54) и (4.58) исчезает. В этом случае ток $j_r^{(0)}$ свободно, без разрыва, обтекает край клина и, следовательно, заряд $\rho^{(0)}$ не аккумулируется на его ребре. Как видно из формул (4.54), (4.58), (4.65), поляризационная связь также исчезает при нормальном падении ($\gamma = \pi/2$).

Отметим еще, что поле (4.63) имеет радиальную компоненту

$$E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \sim \varepsilon(\varphi_0)Z_0H_{0z}\mathrm{e}^{ikz\cos\gamma}\sin\gamma\,\frac{\mathrm{e}^{ik_1r-i3\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_1r}}\,, \tag{4.68}$$

где $k_1r \gg 1$, которая остается конечной при нормальном падении ($\gamma = \pi/2$). Но в этом случае, согласно выражению (4.55) и уравнению Максвелла

$$\vec{E} = -\frac{1}{ik}Z_0\nabla\times\vec{H}\,, \tag{4.69}$$

радиальная компонента

$$E_r = -\frac{1}{ikr} Z_0 \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \tag{4.70}$$

должна быть величиной порядка $(kr)^{-3/2}$, а не $(kr)^{-1/2}$, как это следует из формулы (4.68). Однако это обстоятельство не противоречит уравнениям Максвелла. Можно показать, что при нормальном падении ($\gamma = \pi/2$) величина (4.68) полностью гасится точно такой же величиной, но с обратным знаком, содержащейся в радиальной компоненте поля ФО, которое создается зарядами и токами, находящимися на грани $\varphi = 0$ вне ее ребра, т. е. в области $x > 0^+$.

Подчеркнем еще раз, что поляризационная связь отсутствует в поле (4.56), (4.57), которое создается полным током $\vec{j}^{(t)} = \vec{j}^{(0)} + \vec{j}^{(1)}$.

## Задачи

Функции $f(\varphi, \varphi_0, \alpha)$, $g(\varphi, \varphi_0, \alpha)$ и функции $f^{(0)}(\varphi, \varphi_0)$, $g^{(0)}(\varphi, \varphi_0)$ сингулярны на геометрооптических границах. Проверьте, что их разности, т. е. функции $f^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha)$ и $g^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha)$ являются там конечными.

**4.1.** Докажите формулу (4.16).

**4.2.** Докажите формулу (4.17).

**4.3.** Докажите формулу (4.18).

**4.4.** Докажите формулу (4.19).

# Глава 5

# Первичная дифракция на лентах и полигональных цилиндрах

В этих задачах существуют соотношения эквивалентности $u_s = E_z$ и $u_h = H_z$ между акустическими и электромагнитными волнами.

В предыдущих главах 3 и 4 построен фундамент для решения двухмерных дифракционных задач. Там выведены общие асимптотические выражения для первичных дифракционных волн, излучаемых как *равномерными*, так и *неравномерными* компонентами поверхностных источников. В данной главе эта общая теория применяется к исследованию высокочастотной дифракции на лентах и цилиндрах с трехугольным поперечным сечением. Эти задачи детально изучены в существующей литературе. В частности, равномерные асимптотические выражения (с произвольной асимптотической точностью) для диаграммы направленности и для поля на поверхности ленты были получены автором (Уфимцев, 1969, 1970, 2003, 2007 а). В этих публикациях можно найти много ссылок, относящихся к задаче о дифракции на ленте. Среди них прежде всего следует отметить классическое решение Шварцшильда (Schwarzschild, 1902). Высокочастотная дифракция на полигональных цилиндрах была исследована в работах (Morse, 1964) и (Боровиков, 1966). Мы рассматриваем здесь эти задачи для того, чтобы продемонстрировать первые применения ФТД и показать, как с ней следует работать.

## 5.1. Дифракция на ленте

Геометрия задачи показана на рис. 5.1. На поверхности ленты выполняются «*мягкие*» (1.5) или «*жесткие*» (1.6) граничные условия. Падающая волна задана

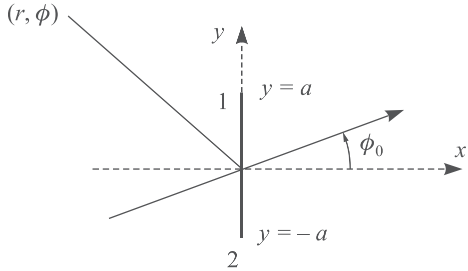


**Рис. 5.1.** Поперечное сечение ленты плоскостью $z$ = const

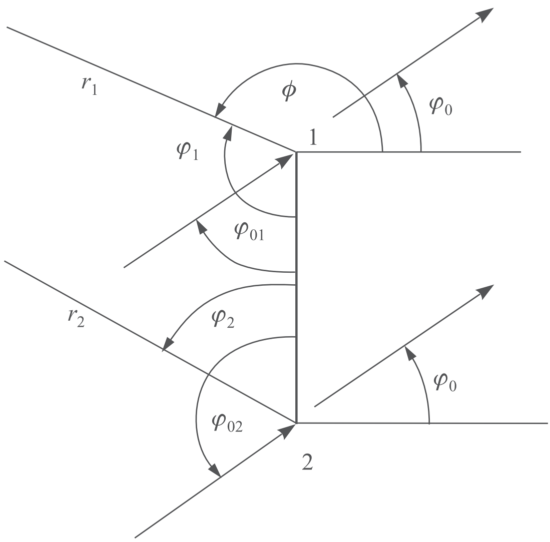


**Рис. 5.2.** Локальные координаты краевых волн

выражением

$$u^{inc} = u_0 \mathrm{e}^{ik(x\cos\phi_0 + y\sin\phi_0)} \text{ при } -\pi/2 < \phi_0 < \pi/2. \qquad (5.1)$$

Дифракционное поле исследуется вдали от ленты в направлениях $-\pi/2 < \phi < 3\pi/2$.

Для описания краевых волн мы используем локальные координаты $r_1$, $\varphi_1$, $\varphi_{01}$ и $r_2$, $\varphi_2$, $\varphi_{02}$, в которых углы $\varphi_1$ и $\varphi_2$ отсчитываются от *освещенной* стороны ленты (рис. 5.2).

### 5.1.1. Приближение физической оптики для рассеянного поля

Рассеянное поле в приближении ФО создается *равномерными* компонентами (1.31) поверхностных источников и определяется интегралами (1.32). Однако этот процесс интегрирования можно обойти. Поле в дальней зоне может быть сразу представлено в виде суммы двух краевых волн, которые описываются в общем случае выражениями (3.53) и (3.54):

$$u_s^{(0)} = u_0\left[ f^{(0)}(\varphi_1, \varphi_{01}) \frac{e^{i(kr_1+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr_1}} + f^{(0)}(\varphi_2, \varphi_{02}) \frac{e^{i(kr_2+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr_2}} \right], \tag{5.2}$$

$$u_h^{(0)} = u_0\left[ g^{(0)}(\varphi_1, \varphi_{01}) \frac{e^{i(kr_1+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr_1}} + g^{(0)}(\varphi_2, \varphi_{02}) \frac{e^{i(kr_2+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr_2}} \right]. \tag{5.3}$$

Для дальней зоны ($r \gg ka^2$) эти выражения можно упростить:

$$u_s^{(0)} = u_0[f^{(0)}(1)e^{ika(\sin\phi_0 - \sin\phi)} + f^{(0)}(2)e^{-ika(\sin\phi_0 - \sin\phi)}]\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \tag{5.4}$$

$$u_h^{(0)} = u_0[g^{(0)}(1)e^{ika(\sin\phi_0 - \sin\phi)} + g^{(0)}(2)e^{-ika(\sin\phi_0 - \sin\phi)}]\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \tag{5.5}$$

где

$$f^{(0)}(1) \equiv f^{(0)}(\varphi_1, \varphi_{01}), \quad f^{(0)}(2) \equiv f^{(0)}(\varphi_2, \varphi_{02}) \tag{5.6}$$

и

$$g^{(0)}(1) \equiv g^{(0)}(\varphi_1, \varphi_{01}), \quad g^{(0)}(2) \equiv g^{(0)}(\varphi_2, \varphi_{02}). \tag{5.7}$$

В соответствии с определением (3.55), функции $f^{(0)}$ и $g^{(0)}$ описываются в основной системе координат $\phi$ и $\phi_0$ (рис. 5.1) выражениями:

$$f^{(0)}(1) = -f^{(0)}(2) = \frac{\cos\phi_0}{\sin\phi_0 - \sin\phi}, \tag{5.8}$$

$$g^{(0)}(1) = -g^{(0)}(2) = \frac{\cos\phi}{\sin\phi_0 - \sin\phi}, \tag{5.9}$$

где $-\pi/2 < \phi < 3\pi/2$ и $-\pi/2 < \phi_0 < \pi/2$.

Выражения (5.4) и (5.5) для рассеянного поля обладают замечательным свойством. Хотя все функции (5.8), (5.9) сингулярны в направлениях $\phi = \phi_0$ и $\phi = \pi - \phi_0$, их комбинации (5.4) и (5.5) всегда ограничены благодаря соотношениям $f^{(0)}(1) = -f^{(0)}(2)$ и $g^{(0)}(1) = -g^{(0)}(2)$. Это свойство выражений (5.4) и (5.5) становится очевидным, если их записать в явном виде:

$$u_s^{(0)} = u_0 \Phi_s^{(0)}(\phi, \phi_0)\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \tag{5.10}$$

$$u_h^{(0)} = u_0 \Phi_h^{(0)}(\phi, \phi_0)\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \tag{5.11}$$

где

$$\Phi_s^{(0)}(\phi, \phi_0) = i2\cos\phi_0 \frac{\sin[ka(\sin\phi - \sin\phi_0)]}{\sin\phi - \sin\phi_0}, \tag{5.12}$$

$$\Phi_h^{(0)}(\phi, \phi_0) = i2\cos\phi \frac{\sin[ka(\sin\phi - \sin\phi_0)]}{\sin\phi - \sin\phi_0}. \tag{5.13}$$

Теперь ясно, что

$$\Phi_s^{(0)}(\phi_0, \phi_0) = \Phi_h^{(0)}(\phi_0, \phi_0) = i2ka\cos\phi_0 \tag{5.14}$$

для направления $\phi = \phi_0$, и

$$\Phi_s^{(0)}(\pi - \phi_0, \phi_0) = -\Phi_h^{(0)}(\pi - \phi_0, \phi_0) = i2ka\cos\phi_0 \tag{5.15}$$

для зеркального направления $\phi = \pi - \phi_0$.

Согласно двухмерной форме оптической теоремы (Ufimtsev, 2003, 2007 a), полный поперечник рассеяния определяется формулой

$$\sigma^{tot} = \frac{2}{k}\operatorname{Im}\Phi(\phi_0, \phi_0) \tag{5.16}$$

и в силу соотношений (5.14) равен

$$\sigma_s^{(0)tot} = \sigma_h^{(0)tot} = 2A, \tag{5.17}$$

где $A = 2a\cos\phi_0$ есть «ширина» участка падающей волны, перехватываемого лентой (рис. 5.3). Величину (5.17) можно интерпретировать как полную мощность, рассеянную участком ленты длиной в один метр в направлении оси $z$.

Кроме того, целесообразно ввести понятие двухмерного бистатического поперечника рассеяния $\sigma$ по аналогии с выражением (1.24):

$$P_{av}^{sc} = \frac{\sigma \cdot P_{av}^{inc}}{2\pi r}, \tag{5.18}$$

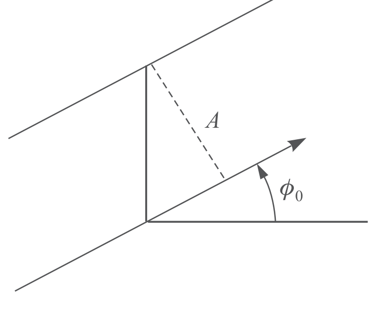


**Рис. 5.3.** Поперечное сечение $A$ участка падающей волны, перехватываемого лентой

где

$$P_{av}^{inc} = \frac{1}{2} k^2 Z |u_0|^2, \quad P_{av}^{sc} = \frac{1}{2} k^2 Z |u^{sc}|^2. \tag{5.19}$$

Тогда согласно выражениям (5.10) и (5.11) бистатический поперечник рассеяния будет определяться формулой

$$\boxed{\sigma_{s,h}^{(0)} = \frac{1}{k} |\Phi_{z,h}^{(0)}(\phi, \phi_0)|^2.} \tag{5.20}$$

Эта формула дает общее определение бистатического поперечника рассеяния $\sigma$, справедливое для любых двухмерных тел, если рассеянное поле записано в форме (5.10), (5.11).

В случае обратного рассеяния, когда $\phi = \pi + \phi_0$, диаграммы направленности описываются простыми выражениями

$$\Phi_s^{(0)} = -\Phi_h^{(0)} = i \operatorname{ctg}\phi_0 \sin(2ka \sin \phi_0). \tag{5.21}$$

Наконец, следует отметить еще одну особенность диаграмм направленности (5.12) и (5.13) для полей, создаваемых *равномерными* компонентами поверхностных источников. Они имеют точные нули в направлениях, где

$$ka(\sin\phi_0 - \sin\phi) = \pm n\pi \text{ при } n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{5.22}$$

Это свойство является следствием соотношений $f^{(0)}(1) = -f^{(0)}(2)$ и $g^{(0)}(1) = -g^{(0)}(2)$.

### 5.1.2. Полное рассеянное поле

*Неравномерные* компоненты поверхностных источников концентрируются вблизи краев ленты и излучают две краевых волны, которые можно вычислить с помощью формул (4.12) и (4.13). Их сумма равна

$$u_s^{(1)} = u_0 \left[ f^{(1)}(\varphi_1, \varphi_{01}, 2\pi) \frac{e^{i(kr_1 + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k r_1}} + f^{(1)}(\varphi_2, \varphi_{02}, 2\pi) \frac{e^{i(kr_2 + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k r_2}} \right] \tag{5.23}$$

и

$$u_h^{(1)} = u_0 \left[ g^{(1)}(\varphi_1, \varphi_{01}, 2\pi) \frac{e^{i(kr_1 + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k r_1}} + g^{(1)}(\varphi_2, \varphi_{02}, 2\pi) \frac{e^{i(kr_2 + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k r_2}} \right]. \tag{5.24}$$

Согласно соотношениям (4.12–4.15), эти выражения можо записать в форме

$$u_s^{(1)} = u_s - u_s^{(0)}, \quad u_h^{(1)} = u_h - u_h^{(0)}. \tag{5.25}$$

Следовательно, полное рассеянное поле равно

$$u_s = u_s^{(0)} + u_s^{(1)} =$$
$$= u_0\left[ f(\varphi_1, \varphi_{01}, 2\pi)\frac{e^{i(kr_1+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr_1}} + f(\varphi_2, \varphi_{02}, 2\pi)\frac{e^{i(kr_2+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr_2}}\right], \tag{5.26}$$

$$u_h = u_h^{(0)} + u_h^{(1)} =$$
$$= u_0\left[ g(\varphi_1, \varphi_{01}, 2\pi)\frac{e^{i(kr_1+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr_1}} + g(\varphi_2, \varphi_{02}, 2\pi)\frac{e^{i(kr_2+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr_2}}\right], \tag{5.27}$$

где функции $f$ и $g$ определяются согласно формулам (2.62) и (2.64). В дальней зоне выражения (5.26) и (5.27) упрощаются:

$$u_s = u_0[f(1)e^{ika(\sin\phi_0 - \sin\phi)} + f(2)e^{-ika(\sin\phi_0 - \sin\phi)}]\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \tag{5.28}$$

$$u_h = u_0[g(1)e^{ika(\sin\phi_0 - \sin\phi)} + g(2)e^{-ika(\sin\phi_0 - \sin\phi)}]\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \tag{5.29}$$

где

$$\begin{aligned} &f(1) \equiv f(\varphi_1, \varphi_{01}, 2\pi), \quad f(2) \equiv f(\varphi_2, \varphi_{02}, 2\pi), \\ &g(1) \equiv g(\varphi_1, \varphi_{01}, 2\pi), \quad g(2) \equiv g(\varphi_2, \varphi_{02}, 2\pi). \end{aligned} \tag{5.30}$$

В основных координатах $\phi$ и $\phi_0$ эти функции записываются в виде

$$\begin{Bmatrix} f^{(1)} \\ g^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left( -\frac{1}{\sin\dfrac{\phi-\phi_0}{2}} \mp \frac{1}{\cos\dfrac{\phi+\phi_0}{2}} \right) \text{ при } -\pi/2 \le \phi \le 3/2\pi \tag{5.31}$$

и

$$\begin{Bmatrix} f^{(2)} \\ g^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left( \frac{1}{\sin\dfrac{\phi-\phi_0}{2}} \mp \frac{1}{\cos\dfrac{\phi+\phi_0}{2}} \right) \text{ при } -\pi/2 \le \phi \le \pi/2, \tag{5.32}$$

но

$$\begin{Bmatrix} f^{(2)} \\ g^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left( -\frac{1}{\sin\dfrac{\phi-\phi_0}{2}} \pm \frac{1}{\cos\dfrac{\phi+\phi_0}{2}} \right) \text{ при } \pi/2 \le \phi \le 3\pi/2. \tag{5.33}$$

Согласно этим выражениям, функции g(2) и $\partial f(2)/\partial\phi$ имеют разрывы в направлении $\phi = \pi/2$. Причина их такого поведения заключается в том, что они описывают поле, излучаемое поверхностными источниками со всей полуплоскости $-a < y < \infty$. Функции g(1) и $\partial f(1)/\partial\phi$ тоже разрывны. Они имеют различные значения в направлениях $\phi = -\pi/2$ и $\phi = 3\pi/2$, относящихся к разным сторонам полуплоскости $-\infty < y < a$, на которой находятся источники рассеянного поля.

Указанные разрывы в поле первичных краевых волн (5.28) и (5.29) можно устранить двумя способами. В первом способе при вычислении поля, излучаемого *неравномерной* компонентой $j_{s,h}^{(1)}$, следует ограничиться интегрированием по фактической поверхности ленты ($-a \le y \le a$). Этот способ иложен ниже в разделе 5.1.4. См. также статьи (Michaeli, 1987; Johansen, 1996). Другой способ состоит в вычислении многократных краевых волн (Ufimtsev, 2003, 2007 a).

С учетом выражений (5.31–5.33), рассеянные поля (5.28), (5.29) можно записать в следующей форме:

$$u_{s,h} = u_0 \Phi_{s,h}(\phi,\phi_0)\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \tag{5.34}$$

где

$$\Phi_s(\phi,\phi_0) =$$

$$= -\frac{\cos[ka(\sin\phi_0 - \sin\phi)]}{\cos\dfrac{\phi_0+\phi}{2}} + i\frac{\sin[ka(\sin\phi_0 - \sin\phi)]}{\sin\dfrac{\phi_0-\phi}{2}} \quad \text{при } -\pi/2 \le \phi \le \pi/2, \tag{5.35}$$

$$\Phi_s(\phi,\phi_0) =$$

$$= \frac{\cos[ka(\sin\phi_0 - \sin\phi)]}{\sin\dfrac{\phi_0-\phi}{2}} - i\frac{\sin[ka(\sin\phi_0 - \sin\phi)]}{\cos\dfrac{\phi_0+\phi}{2}} \quad \text{при } \pi/2 \le \phi \le 3\pi/2 \tag{5.36}$$

и

$$\Phi_h(\phi,\phi_0) =$$

$$= \frac{\cos[ka(\sin\phi_0 - \sin\phi)]}{\cos\dfrac{\phi_0+\phi}{2}} + i\frac{\sin[ka(\sin\phi_0 - \sin\phi)]}{\sin\dfrac{\phi_0-\phi}{2}} \quad \text{при } -\pi/2 \le \phi \le \pi/2, \tag{5.37}$$

$$\Phi_h(\phi,\phi_0) =$$

$$= \frac{\cos[ka(\sin\phi_0 - \sin\phi)]}{\sin\dfrac{\phi_0-\phi}{2}} + i\frac{\sin[ka(\sin\phi_0 - \sin\phi)]}{\cos\dfrac{\phi_0+\phi}{2}} \quad \text{при } \pi/2 \le \phi \le 3\pi/2, \tag{5.38}$$

Как видно, эти функции [в отличие от функций $\Phi^{(0)}_{s,h}(\phi,\phi_0)$] не имеют точных нулей в направлениях, определяемых формулой (5.22).

Теперь мы приведем явные выражения функций $\Phi_{s,h}$ для некоторых особых направлений рассеяния. В направлении падающей волны ($\phi = \phi_0$)

$$\Phi_s(\phi_0,\phi_0) = i2ka\cos\phi_0 - \frac{1}{\cos\phi_0}, \tag{5.39}$$

$$\Phi_h(\phi_0,\phi_0) = i2ka\cos\phi_0 + \frac{1}{\cos\phi_0} \tag{5.40}$$

и в зеркальном направлении ($\phi = \pi - \phi_0$ — направление лучей, зеркально отраженных от ленты)

$$\Phi_s(\pi-\phi_0,\phi_0) = i2ka\cos\phi_0 - \frac{1}{\cos\phi_0}, \tag{5.41}$$

$$\Phi_h(\pi-\phi_0,\phi_0) = -i2ka\cos\phi_0 - \frac{1}{\cos\phi_0}. \tag{5.42}$$

Кроме того, в направлении обратного рассеяния $\phi = \pi + \phi_0$

$$\Phi_s(\pi+\phi_0,\phi_0) = -\cos(2ka\sin\phi_0) + i\frac{\sin(2ka\sin\phi_0)}{\sin\phi_0}, \tag{5.43}$$

$$\Phi_h(\pi+\phi_0,\phi_0) = -\cos(2ka\sin\phi_0) - i\frac{\sin(2ka\sin\phi_0)}{\sin\phi_0}. \tag{5.44}$$

В соответствии с соотношениями (4.20) и (4.21) функции (5.39–5.42) сингулярны при скользящем направлении ($\phi_0 = \pm\pi/2$) падающей волны.

Сравнение с формулой (5.14) показывает, что первый член в выражениях (5.39) и (5.40) обусловлен *равномерной* компонентой, а второй член — *неравномерной* компонентой поверхностных источников. Если теперь обратиться к формуле (5.16), то создается парадоксальное впечатление, что *неравномерная* компонента $j^{(1)}$, которая излучает поле (5.23), (5.24), не дает вклада в полное рассеянное поле (!). Этот парадокс разрешается следующим образом: поле (5.23), (5.24), конечно же, дает вклад в полное рассеянное поле, но в полном поперечнике рассеяния он проявляется уже в виде вклада от вторичных и многократных волн, возникающих вследствие многократной дифракции на крях ленты первичных краевых волн (5.34), частью которых и являются волны (5.23), (5.24).

Дополнительный комментарий необходим в связи с выражениями (5.28), (5.29) и содержащимися в них функциями $f$ и $g$. Эти функции сингулярны в направлениях $\phi = \phi_0$ и $\phi = \pi - \phi_0$, соответствующих геометрооптическим границам падающих и отраженных лучей. Однако эти сингулярности гасят друг друга в выражениях (5.28), (5.29), которые в результате дают конечные значе-

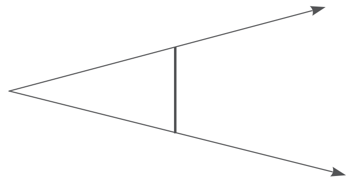

**Рис. 5.4.** Границы тени в поле падающей цилиндрической волны. На этих границах функции $f$ и $g$ сингулярны: $f = \infty$, $g = \infty$

ния (5.39–5.42) для рассеянного поля. Такое взаимное гашение сингулярностей обязано тому факту, что падающая волна является плоской. По этой причине геометрооптические границы, относящиеся к разным краям ленты, оказываются параллельными и сливаются вместе в дальней зоне от ленты. Сингулярности же, относящиеся к разным краям, имеют противоположные знаки и потому благополучно гасят друг друга. Этот случай является исключением по сравнению с более общей ситуацией, когда источник падающей волны находится на конечном расстоянии от рассеивающего тела. Например, в случае падающей цилиндрической волны (рис. 5.4) границы тени, образованной лентой, не параллельны между собой. Следовательно, сингулярности функций $f$ и $g$, относящиеся к разным краям, разделены в пространстве и не могут погасить друг друга. В таком случае рекомендуется использовать традиционную процедуру ФТД: нужно вычислять *раздельно* поля, создаваемые равномерной и неравномерной компонентами поверхностных источников. Каждое из них является конечным и, следовательно, их сумма также конечна.

### 5.1.3. Численный анализ рассеянного поля

В задаче о дифракции на ленте имеют место соотношения эквивалентности $u_s = E_z$ и $u_h = H_z$ между акустическими и электромагнитными волнами.

В этом разделе мы представим численный анализ рассеянного поля с использованием различных методик. Геометрия задачи показана на рис. 5.1. Мягкие (1.5) или жесткие (1.6) граничные условия заданы на поверхности ленты. Падающая волна есть плоская волна (5.1). Соотношения $u_s = E_z$ и $u_h = H_z$ выражают эквивалентность между акустическими и электромагнитными волнами в данной задаче. Формула (5.20) определяет бистатический поперечник рассеяния. Вычисляется нормированный поперечник рассеяния

$$\frac{\sigma_{s,h}}{kl^2} = \left|\frac{\Phi_{s,h}(\phi, \phi_0)}{kl}\right|^2, \text{ где } l = 2a. \qquad (5.45)$$

Строятся графики логарифмической величины $10\lg(\sigma/kl^2)$, т. е. графики поперечника рассеяния в децибелах. Для параметров $ka$ и $\phi_0$ приняты значения $ka = 3\pi$, $\phi_0 = 45°$. Для выбранного параметра $ka$ ширина ленты $l = 2a$ составляет $3\lambda$, и применимость асимптотической теории можно считать оправданной. Поскольку рассеянное поле обладает симметрией [$\Phi_s(\pi-\phi,\phi_0)=\Phi_s(\phi,\phi_0)$, $\Phi_h(\pi-\phi,\phi_0)=-\Phi_h(\phi,\phi_0)$], расчеты достаточно провести в интервале $\pi/2\le\phi\le 3\pi/2$.

Расчеты выполнены с использованием следующих методик:

- Приближение ФО с функциями $\Phi^{(0)}_{s,h}$, представленными в разделе 5.1.1.
- Приближение ФТД первого порядка с функциями $\Phi_{s,h}$, представленными в разделе 5.1.2 .
- Приближение первого порядка согласно теории краевых волн (Ufimtsev, 2003, 2007 a). Соответствующие кривые на графиках обозначены символом ТКД (теория краевой дифракции). Функции $\Phi_{s,h}(\phi,\phi_0)$ определяются формулами

$$\Phi_s(\phi,\phi_0)=\tilde{\Psi}_1(\alpha,\alpha_0)+\tilde{\Psi}_1(-\alpha,-\alpha_0), \tag{5.46}$$

$$\Phi_h(\phi,\phi_0)=\tilde{\Phi}_1(\alpha,\alpha_0)+\tilde{\Phi}_1(-\alpha,-\alpha_0), \tag{5.47}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_1(\alpha,\alpha_0)=&\frac{\sqrt{1-\alpha}\sqrt{1-\alpha_0}}{\alpha+\alpha_0}\mathrm{e}^{i\chi(\alpha+\alpha_0)}+\\&+\frac{\sqrt{1-\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}}{\alpha+\alpha_0}\left[\frac{1-\alpha}{2}\psi(q,\alpha)-\frac{1+\alpha_0}{2}\psi(q,-\alpha_0)\right]\mathrm{e}^{iq+i\chi(\alpha-\alpha_0)}+\\&+\frac{\sqrt{1-\alpha}}{2D_s}\mathrm{e}^{i2q}[\sqrt{1-\alpha_0}\psi(q,\alpha_0)\mathrm{e}^{i\chi\alpha_0}-\\&-\sqrt{1+\alpha_0}\psi(q,-\alpha_0)\psi(q,1)\mathrm{e}^{iq-i\chi\alpha_0}]\psi(q,\alpha)\mathrm{e}^{i\chi\alpha},\end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_1(\alpha,\alpha_0)=&-\frac{\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}}{\alpha+\alpha_0}\mathrm{e}^{i\chi(\alpha+\alpha_0)}+\\&+\frac{1}{\alpha+\alpha_0}\left[(1+\alpha_0)\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\varphi(q,-\alpha_0)-(1-\alpha)\sqrt{\frac{1-\alpha_0}{2}}\varphi(q,\alpha)\right]\mathrm{e}^{iq+i\chi(\alpha-\alpha_0)}-\\&-\frac{1}{D_h}\mathrm{e}^{i2q}[\varphi(q,\alpha_0)\mathrm{e}^{i\chi\alpha_0}-\varphi(q,-\alpha_0)\varphi(q,1)\mathrm{e}^{iq-i\chi\alpha_0}]\varphi(q,\alpha)\mathrm{e}^{i\chi\alpha}.\end{aligned} \tag{5.49}$$

Здесь

$$\alpha=\sin\phi,\quad \alpha_0=-\sin\phi_0,\quad \chi=ka,\quad q=2\chi=2ka, \tag{5.50}$$

$$\varphi(q,\alpha)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-i\pi/4}\mathrm{e}^{-iq(1+\alpha)}\int\limits_{\sqrt{q(1+\alpha)}}^{\infty}\mathrm{e}^{it^2}dt, \tag{5.51}$$

$$\psi(q,\alpha)=\frac{i}{\sqrt{2(1+\alpha)}}\frac{\partial\varphi(q,\alpha)}{\partial q}, \tag{5.52}$$

$$D_s=1-\psi^2(q,1)\mathrm{e}^{i2q},\quad D_h=1-\varphi^2(q,1)\,\mathrm{e}^{i2q}. \tag{5.53}$$

Абсолютная погрешность ТКД-приближения (5.46) и (5.47) равна

$$Q_{s,h}(\alpha,\alpha_0)=\widetilde{Q}_{s,h}(\alpha,\alpha_0)+\widetilde{Q}_{s,h}(-\alpha,-\alpha_0), \tag{5.54}$$

где

$$\widetilde{Q}_s(\alpha,\alpha_0)=\frac{O(q^{-1/2})}{[1+q(1+\alpha)][1+q(1-\alpha_0)]}, \tag{5.55}$$

$$\widetilde{Q}_h(\alpha,\alpha_0)=\frac{\sqrt{1+\alpha}\sqrt{1+\alpha_0}O(\sqrt{q})}{[1+q(1+\alpha)][1+q(1+\alpha_0)]} \tag{5.56}$$

при условиях $q(1 \pm \alpha) \gg 1$ и $q(1 \pm \alpha_0) \gg 1$. Кроме того,

$$\lim\sqrt{1-\alpha^2}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}Q_s(\alpha,\alpha_0)=0 \text{ при } \alpha \to \pm 1 \tag{5.57}$$

и

$$Q_h(\alpha,\pm 1)=Q_h(\pm 1,\alpha_0)=0. \tag{5.58}$$

Формулы (5.57) и (5.58) означают, что рассеянное поле (5.46) и (5.47) и его нормальные производные являются непрерывными вне ленты ($|y| \gg a$) в плоскости $x = 0$. Другими словами, согласно аппроксимациям (5.46) и (5.47) поверхностные источники рассеяния (1.11) отсутствуют за пределами ленты.

Мы вычисляли функции (5.46) и (5.47) с точно установленными оценками их погрешности (5.55), (5.56) для того, чтобы проверить точность ФО- и ФТД-приближений. Результаты расчетов представлены на рис. 5.5 и 5.6, где по вертикальной оси откладываются значения в децибелах, т. е. величины $10\lg(\sigma_{s,h}/kl^2)$.

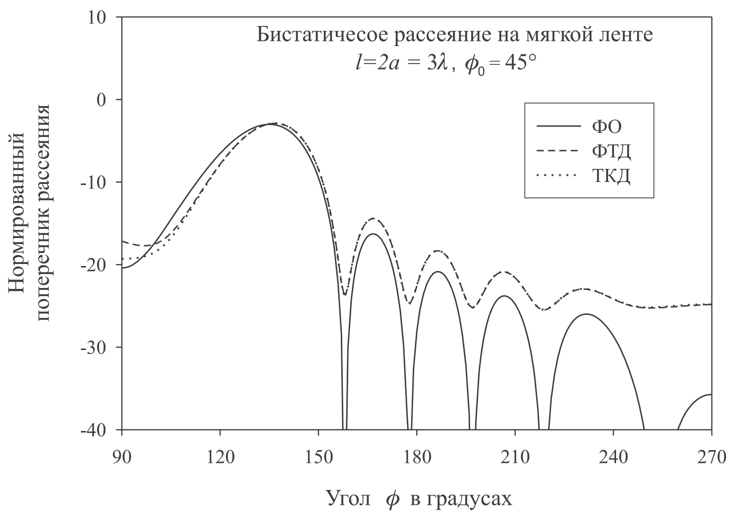


**Рис. 5.5.** Рассеяние на акустически мягкой ленте. Эти графики также иллюстрируют рассеяние электромагнитных волн с $E_z$-поляризацией на идеально проводящей ленте

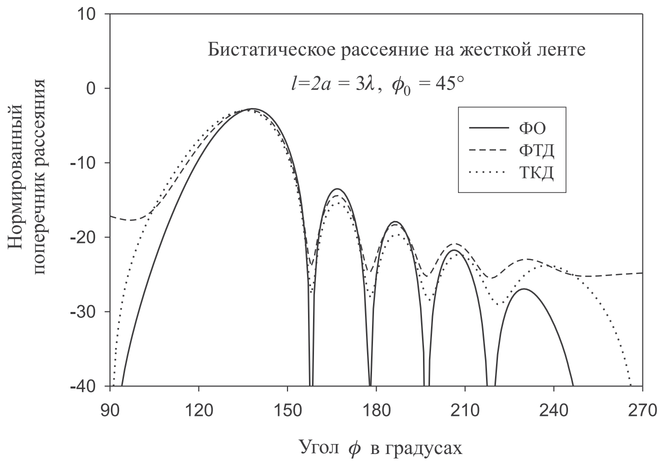


**Рис. 5.6.** Рассеяние на акустически жесткой ленте. Эти графики также иллюстрируют рассеяние электромагнитных волн с $H_z$-поляризацией на идеально проводящей ленте

На этих рисунках видно, что точность ФТД выше для мягких граничных условий. Только небольшое отличие от точной ТКД-кривой наблюдается в окрестности направления $\phi = 90°$. В области же $100° < \phi \leq 270°$ кривые ФТД и ТКД фактически сливаются. Причиной более высокой точности ФТД для мягких граничных условий является более быстрое затухание поверхностных источников $j_s^{(1)}$, по сравнению с источниками $j_h^{(1)}$, при удалении от того края ленты, где они возбуждаются. Амплитуда источника $j_s^{(1)}$ на противоположном крае ленты есть величина порядка $(2ka)^{-3/2}$, тогда как амплитуда источника $j_h^{(1)}$ имеет там порядок $(2ka)^{-1/2}$.

На этих рисунках также видно, что ФО неправильно описывает поле в окрестности минимумов, где согласно ей поле имеет точные нули.

Неправильные значения ФТД-приближения для функции $\sigma_h$ в окрестности направлений $\phi = 90°$ и $\phi = 270°$ обусловлены фиктивными поверхностными источниками $j_h^{(1)}$ за пределами ленты, как это уже обсуждалось в разделе 5.1.2. Этот недостаток ФТД первого порядка устраняется в следуюшем разделе.

### 5.1.4. ФТД первого порядка с усеченными источниками $j_n^{(1)}$

В этой задаче имеет место соотношение зквивалентности $u_h = H_z$ между акустическими и электромагнитными дифракционными полями.

Геометрия задачи показана на рис. 5.1 и падающая волна задана выражением (5.1). При вычислении рассеянного поля $u_h$ мы исходим из формулы (1.10) и используем следующие замечания:

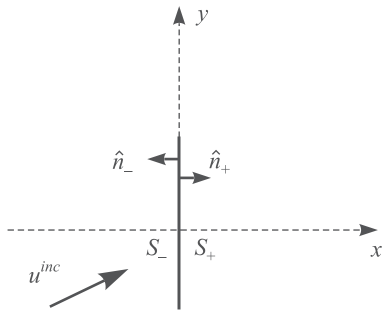


**Рис. 5.7.** Поверхность интегрирования $S = S_- + S_+$ в формуле (1.10), используемой в задаче о дифракции на ленте

- В формуле (1.10) символ $r$ обозначал расстояние между точками интегрирования и наблюдения. Теперь мы заменим его через $\rho = \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2}$ и сохраним символ $r$ для полярной координаты $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ точки наблюдения, имея в виду, что $x = r\cos\phi$ и $y = r\sin\phi$.
- Поверхность интегрирования в (1.10) включает обе стороны ленты: $S = S_- + S_+$ (рис. 5.7).
- Оператор $\dfrac{\partial}{\partial n}$ в (1.10) действует на координаты точки интегрирования. Согласно соотношению (3.5), его можно заменить на оператор, действующий на координаты точки наблюдения. А именно, $\dfrac{\partial}{\partial n_-} = \dfrac{\partial}{\partial x}$ для освещенной стороны $S_-$ ленты и $\dfrac{\partial}{\partial n_+} = -\dfrac{\partial}{\partial x}$ для теневой стороны $S_+$. Здесь $\partial/\partial x$ есть дифференцирование по координате точки наблюдения, находящейся вне ленты.
- Согласно формуле (3.7), интеграл в (1.10) по переменной $\zeta$ можно выразить через функцию Ханкеля.
- Рассеянное поле исследуется в дальней зоне, где $r \gg ka^2$. Здесь для функции Ханкеля можно использовать асимптотическое выражение

$$H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \mathrm{e}^{ik(r-\eta\sin\phi)-i\pi/4}. \tag{5.59}$$

- Поверхностные источники обозначаем как $j_h^{(0)} = u_0 J_h^{(0)}$ и $j_h^{(1)} = u_0 J_h^{(1)}$.
- Теперь рассеянное поле в дальней зоне можно представить в виде

$$u_h^{(0)} = u_0 \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi k}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{\sqrt{r}} \int_{-a}^{a} J_h^{(0)}(\eta, x=-0)\, \mathrm{e}^{-ik\eta\sin\phi}\, d\eta\,, \tag{5.60}$$

$$u_h^{(1)} = u_0 \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi k}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \left[ \int_{-a}^{a} J_h^{(1)}(\eta, x=-0) e^{-ik\eta\sin\phi} d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_{-a}^{a} J_h^{(1)}(\eta, x=+0) e^{-ik\eta\sin\phi} d\eta \right]. \qquad (5.61)$$

Мы напоминаем, что поверхностные источники $j_h^{(0)}$ существуют только на освещенной стороне ленты, где $x = -0$.

- В выражениях для поля в дальней зоне можно положить

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \approx ik\cos\phi \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}. \qquad (5.62)$$

- Согласно определению (1.31), имеем $J_h^{(0)}(\eta, x=-0) = 2e^{ik\eta\sin\phi_0}$.
- *Неравномерный* поверхностный источник $j_h^{(1)}$ находится из строгого решения задачи о дифракции на полуплоскости (раздел 2.5). Согласно этому решению,
  - функция $j_h^{(1)}$ является антисимметричной:

    $j_h^{(1)}(\eta, x=+0) = -j_h^{(1)}(\eta, x=-0)$

    и, следовательно, $J_h^{(1)}(\eta, x=+0) = -J_h^{(1)}(\eta, x=-0)$.
  - величина $J_h^{(0)}(\eta, x=-0)$ определяется выражением

$$J_h^{(1)}(\eta, x=-0) = 2\left\{ v\left[ k(a-\eta), \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right] e^{ika\sin\phi_0} + \right.$$

$$\left. + v\left[ k(a+\eta), \frac{\pi}{2} + \phi_0 \right] e^{-ika\sin\phi_0} \right\}, \qquad (5.63)$$

где функция $v(ks, \psi)$ определяется согласно (2.82) через интеграл Френеля.

- С учетом сделанных замечаний, для полей (5.60) и (5.61) можно использовать следующие аппроксимации:

$$u_h^{(0)} = u_0 i2\cos\phi \frac{\sin[ka(\sin\phi_0 - \sin\phi)]}{\sin\phi_0 - \sin\phi} \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \qquad (5.64)$$

$$u_h^{(1)} = u_0 2ik\cos\phi \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}} \int_{-a}^{a} \left\{ v\left[ k(a-\eta), \frac{\pi}{2} - \phi_0 \right] e^{ika\sin\phi_0} + \right.$$

$$\left. + v\left[ k(a+\eta), \frac{\pi}{2} + \phi_0 \right] e^{-ika\sin\phi_0} \right\} e^{-ik\eta\sin\phi} d\eta. \qquad (5.65)$$

- Асимптотическое выражение (5.64) было найдено здесь непосредственным интегрированием *равномерной* компоненты поверхностных источников. Оно полностью совпадает с выражением (5.11), полученным суммированием двух краевых волн.

- Поле (5.65) вычисляется интегрированием по частям.

Мы представляем здесь окончательные результаты:

$$u_h^{(0,1)} = u_0 \Phi_h^{(0,1)}(\phi, \phi_0) \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \tag{5.66}$$

где $\Phi_h^{(0)}$ определяется формулой (5.13), и

$$\Phi_h^{(1)}(\phi,\phi_0) = \frac{\cos\phi}{\xi}\Bigg\{ -i4\sin(ka\xi) + \\
+2\frac{e^{i3\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\left[ e^{-ika\xi}\int_0^{\sqrt{2ka(1+\sin\phi_0)}} e^{it^2}dt - e^{ika\xi}\int_0^{\sqrt{2ka(1-\sin\phi_0)}} e^{it^2}dt \right] - \\
-2\frac{e^{i3\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\left[ \sqrt{\frac{1+\sin\phi_0}{1+\sin\phi}}\, e^{ika\xi}\int_0^{\sqrt{2ka(1+\sin\phi)}} e^{it^2}dt - \right. \\
\left. -\sqrt{\frac{1-\sin\phi_0}{1-\sin\phi}}\, e^{-ika\xi}\int_0^{\sqrt{2ka(1-\sin\phi)}} e^{it^2}dt \right]\Bigg\}, \tag{5.67}$$

где $\xi = \sin\phi_0 - \sin\phi$.

Диаграмма направленности *полного* поля $u_h^{tr} = u_h^{(0)} + u_h^{(1)}$ (найденного путем усечения *неравномерной* компоненты $j_h^{(1)}$ за пределами ленты) равна $\Phi_h^{tr} = \Phi_h^{(0)} + \Phi_h^{(1)}$, где

$$\Phi_h^{(1)}(\phi,\phi_0) = \frac{\cos\phi}{\xi}\Bigg\{ -i2\sin(ka\xi) + \\
+2\frac{e^{i3\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\left[ e^{-ika\xi}\int_0^{\sqrt{2ka(1+\sin\phi_0)}} e^{it^2}dt - e^{ika\xi}\int_0^{\sqrt{2ka(1-\sin\phi_0)}} e^{it^2}dt \right] - \\
-2\frac{e^{i3\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\left[ \sqrt{\frac{1+\sin\phi_0}{1+\sin\phi}}\, e^{ika\xi}\int_0^{\sqrt{2ka(1+\sin\phi)}} e^{it^2}dt - \right. \\
\left. -\sqrt{\frac{1-\sin\phi_0}{1-\sin\phi}}\, e^{-ika\xi}\int_0^{\sqrt{2ka(1-\sin\phi)}} e^{it^2}dt \right]\Bigg\}. \tag{5.68}$$

В лучевой области [где $ka(1 \pm \sin\phi_0) \gg 1$ и $ka(1 \pm \sin\phi) \gg 1$] эта функция имеет следующую асимптотику:

$$\Phi_h^{tr}(\phi,\phi_0) = g(1)\mathrm{e}^{ika(\sin\phi_0 - \sin\phi)} + g(2)\mathrm{e}^{-ika(\sin\phi_0 - \sin\phi)} -$$

$$-\cos\phi\left[\frac{\mathrm{e}^{ika(\sin\phi_0+\sin\phi)}}{(1+\sin\phi)\sqrt{1+\sin\phi_0}} + \frac{\mathrm{e}^{-ika(\sin\phi_0+\sin\phi)}}{(1-\sin\phi)\sqrt{1-\sin\phi_0}}\right]\frac{\mathrm{e}^{i(2ka+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi ka}}, \quad (5.69)$$

где функции $g(1)$ и $g(2)$ определяются согласно (5.31–5.33). Эти функции относятся к первичным краевым волнам, возникающим на краях ленты. Слагаемые во втрой строке в (5.69) описывают излучение первичных краевых волн в тот момент, когда они достигли противоположного края ленты. Эти слагаемые можно интерпретировать как часть вторичных краевых волн, возникающих при вторичной дифракции. Точные выражения для вторичных краевых волн описываются ТКД-приближением (5.47), согласно которому

$$\Phi_h^{ТКД}(\phi,\phi_0) = g(1)\mathrm{e}^{ika(\sin\phi_0 - \sin\phi)} + g(2)\mathrm{e}^{-ika(\sin\phi_0 - \sin\phi)} +$$

$$+\left[\frac{\mathrm{e}^{ika(\sin\phi_0+\sin\phi)}}{\sqrt{1+\sin\phi)}\sqrt{1+\sin\phi_0}} + \frac{\mathrm{e}^{-ika(\sin\phi_0+\sin\phi)}}{\sqrt{1-\sin\phi}\sqrt{1-\sin\phi_0}}\right]\frac{\mathrm{e}^{i(2ka+\pi/4)}}{\sqrt{\pi ka}}. \quad (5.70)$$

Функция $\Phi_h^{tr}(\phi,\phi_0)$ содержит слагаемые, сингулярные в направлении зеркального отражения падающей волны, $\phi = \pi - \phi_0$. Однако такие сингулярности гасят друг друга, и функция $\Phi_h^{tr}(\phi,\phi_0)$ принимает там конечное значение:

$$\Phi_h^{tr}(\pi-\phi_0,\phi_0) = i2ka\cos\phi_0 -$$

$$-\cos\phi_0\left\{4ka\frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\sqrt{2ka(1+\sin\phi_0)}}\mathrm{e}^{it^2}dt + \int_0^{\sqrt{2ka(1-\sin\phi_0)}}\mathrm{e}^{it^2}dt\right]+\right.$$

$$+\sqrt{\frac{2ka}{\pi}}\mathrm{e}^{i3\pi/4}\left[\frac{\mathrm{e}^{i2ka(1+\sin\phi_0)}}{\sqrt{1+\sin\phi_0}} + \frac{\mathrm{e}^{i2ka(1-\sin\phi_0)}}{\sqrt{1-\sin\phi_0}}\right]-$$

$$\left.-\frac{\mathrm{e}^{i3\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{1+\sin\phi_0}\int_0^{\sqrt{2ka(1+\sin\phi_0)}}\mathrm{e}^{it^2}dt + \frac{1}{1-\sin\phi_0}\int_0^{\sqrt{2ka(1-\sin\phi_0)}}\mathrm{e}^{it^2}dt\right]\right\}. \quad (5.71)$$

Выражения (5.68) и (5.71) были использованы в расчетах нормированного поперечника рассеяния (5.45). Результаты представлены на рис. 5.8. Как видно из рисунка, усеченная версия ФТД хорошо согласуется с точной асимптотической теорией ТКД (Ufimtsev, 2003, 2007 а). Значительное улучшение по сравнению с неусеченной версией ФТД (рис. 5.6) достигнуто в окрестности направлений $\phi = 90°$ и $\phi = 270°$.

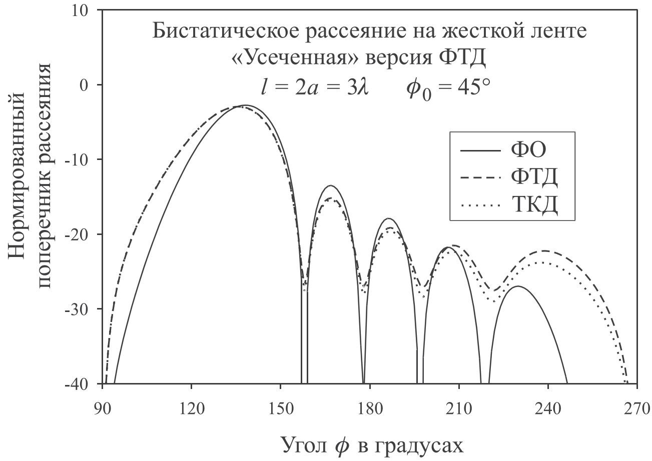


**Рис. 5.8.** Рассеяние на жесткой ленте согласно усеченной версии ФТД. Эти графики также иллюстрируют рассеяние электромагнитной волны с $H_z$-поляризацией на идеально проводящей ленте

## 5.2. Дифракция на трехгранном цилиндре

В этой задаче существуют соотношения эквивалентности $u_s = E_z$ и $u_h = H_z$ между акустическими и электромагнитными волнами.

Для простоты мы рассмотрим здесь дифракцию на цилиндре с поперечным сечением в форме равностороннего треугольника (рис. 5.9). Будут исследованы два специальных случая: (а) Симметричное рассеяние, когда падающая волна распространяется в направлении биссектрисы треуглъника; (б) Обратное рассеяние, когда исследуется поле, рассеянное в том направлении, откуда приходит падающая волна. Сначала мы изучим эти задачи, используя приближение ФО, а затем скорректируем его, принимая во внимание краевые волны первого порядка, излучаемые *неравномерной* компонентой $j^{(1)}_{s,h}$ поверхностных источников.

### 5.2.1. Симметричное рассеяние: приближение ФО

Падающая волна

$$u^{inc} = u_0 e^{ikx} \tag{5.72}$$

возбуждает одинаковые рассеивающие источники $j^{(1)}_{s,h}$ на гранях цилиндра 1–2 и 1–3, которые симметричны относительно координатной оси $x$ (рис. 5.9). Мягкие (1.5) или жесткие (1.6) граничные условия задаются на поверхности цилиндра. Цилиндр считается равностронним. Ширина каждой грани равна $l$, и каждый

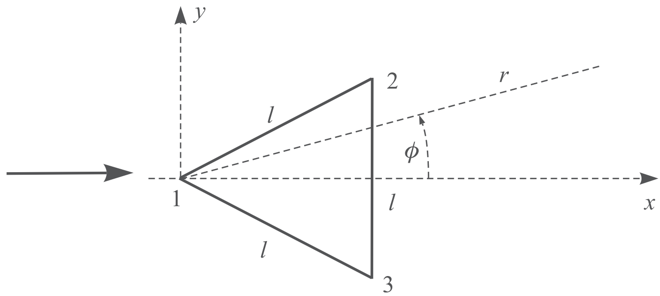


**Рис. 5.9**. Поперечное сечение рассеивающего цилиндра. Числа 1, 2 и 3 обозначают ребра цилиндра; $r$ и $\phi$ — полярные координаты точки наблюдения вне цилиндра

внутренний угол между гранями равен 60°. Декартовы координаты ребер 1, 2 и 3 равны (0,0), ($h,a$), и ($h, -a$), где $h = l\cos(\pi/6)$ и $a = l/2$. В силу симметрии задачи, достаточно вычислить рассеянное поле в напрвлениях $0 \le \phi \le \pi$.

Традиционный метод интегрирования для вычисления рассеянного поля в приближении ФО можно обойти. Действительно, в этом приближении рассеивающий цилиндр можно рассматривать как комбинацию двух лент, 1–2 и 1–3. Как уже было показано в разделе 5.1.1, поле, рассеянное лентой, состоит из двух краевых волн, которые определяются выражениями (3.53) и (3.54). Мы опускаем все рутинные вычисления, относящиеся к переходу от локальных координат ($r_{1,2,3}$, $\varphi_{1,2,3}$) (используемых для описания индивидуальных краевых волн) к основным координатам ($r$, $\phi$), и приводим окончательные выражения для рассеянного поля в области $r \gg kl^2$, $0 \le \phi \le \pi$:

$$u_{s,h}^{(0)} = u_0 \Phi_{s,h}^{(0)}(\phi,0) \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}, \tag{5.73}$$

где

$$\Phi_s^{(0)} = f^{(0)}(1) + f^{(0)}(2)e^{i\psi_2} + f^{(0)}(3)e^{i\psi_3}, \tag{5.74}$$

$$\Phi_h^{(0)} = g^{(0)}(1) + g^{(0)}(2)e^{i\psi_2} + g^{(0)}(3)e^{i\psi_3} \tag{5.75}$$

и

$$\psi_2 = kh(1-\cos\phi) - ka\sin\phi, \quad \psi_3 = kh(1-\cos\phi) + ka\sin\phi\,. \tag{5.76}$$

> Нужно иметь в виду, что равномерные компоненты $j_{s,h}^{(0)}$ поверхностных источников на каждой грани, 1–2 и 1–3, излучают поле *во всё* окружающее пространство ($0 \le \phi \le 2\pi$).

Функции $f^{(0)}$ и $g^{(0)}$ определяют диаграммы направленности краевых волн, которые распространяются от ребер, обозначаемых соответствующим номером в аргументе этих функций. Мы приводим явные выражения для них:

$$f^{(0)}(1) = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) - \cos\frac{\pi}{6}} + \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \phi\right) - \cos\frac{\pi}{6}}, \tag{5.77}$$

$$g^{(0)}(1) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) - \cos\frac{\pi}{6}} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \phi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \phi\right) - \cos\frac{\pi}{6}}, \tag{5.78}$$

$$f^{(0)}(2) = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right)}, \quad g^{(0)}(2) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right)}{\cos\frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right)}, \tag{5.79}$$

$$f^{(0)}(3) = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \phi\right)}, \quad g^{(0)}(3) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \phi\right)}{\cos\frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \phi\right)}. \tag{5.80}$$

Все эти функции имеют сингулярности в направлении $\phi = 0$, которые полностью гасят друг друга в выражениях для функций $\Phi_{s,h}^{(0)}$. А именно,

$$\Phi_s^{(0)}(0,0) = \Phi_h^{(0)}(0,0) = ikl. \tag{5.81}$$

Аналогичная ситуация с взаимной компенсацией сингулярностей имеет место в направлении зеркального отражения падающей волны от грани 1–2 ($\phi = \pi/3$), где

$$\Phi_s^{(0)}\left(\frac{\pi}{3},0\right) = ik\frac{l}{2} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\mathrm{e}^{i\psi_3}, \quad \Phi_h^{(0)}\left(\frac{\pi}{3},0\right) = -ik\frac{l}{2} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}\mathrm{e}^{i\psi_3}. \tag{5.82}$$

В силу симметрии задачи, точно такое же поле рассеивается в направлении зеркального отражения от грани 1–3:

$$\Phi_s^{(0)}\left(-\frac{\pi}{3},0\right) = \Phi_s^{(0)}\left(\frac{\pi}{3},0\right), \quad \Phi_h^{(0)}\left(-\frac{\pi}{3},0\right) = \Phi_h^{(0)}\left(\frac{\pi}{3},0\right). \tag{5.83}$$

Следует отметить, что сумма главных слагаемых в отраженных полях (5.82) и (5.83) равна $\pm ikl$, т. е. с точностью до знака равна полю (5.81), рассеянному в переднем направлении. Если теперь обратиться к оптической теореме (5.16), то видно, что полученный результат полностью согласуется с фундаментальным законом о полной рассеяной мощности: полная мощность отраженного поля (1.79) асимптотически (при $kl \gg 1$) равна полной мощности теневого излучения (1.83).

### 5.2.2. Обратное рассеяние: приближение ФО

Здесь мы предполагаем, что направление падающей волны

$$u^{inc} = u_0 \mathrm{e}^{ik(x\cos\phi_0 + y\sin\phi_0)} \tag{5.84}$$

может изменяться в интервале $-\pi \le \phi_0 \le 0$. Рассеянное поле исследуется в обратном направлении, $\phi = \pi + \phi_0$, где оно обладает особым свойством.

Чтобы установить это свойство, вспомним, что рассеянное поле представляет собой сумму краевых волн с диаграммами направленности $f^{(0)}(\varphi, \varphi_0)$ и $g^{(0)}(\varphi, \varphi_0)$, которые определяются формулами (3.55–3.57).

В случае обратного рассеяния, когда $\varphi = \varphi_0$, из этих формул следует соотношение $f^{(0)}(\varphi, \varphi_0) = -g^{(0)}(\varphi, \varphi_0)$. Это означает, что в приближении ФО обратное рассеяние от акустически мягких и жестких цилиндров отличается только знаком. Ранее такое свойство ФО уже было установлено для трехмерных тел, см. формулу (1.37). Итак, поле (5.73), рассеянное цилиндром в обратном направлении, обладает следующим свойством:

$$\Phi_s^{(0)} = -\Phi_h^{(0)}. \tag{5.85}$$

Как и в предыдущем разделе, мы опять опускаем все промежуточные рутинные преобразования и приводим окончательные выражения для обратного рассеяния. В зависимости от количества краевых волн в разных интервалах наблюдения, мы имеем разные выражения для рассеянного поля.

Только две краевых волны, приходящие от ребер 2 и 3, существуют в интервале $0 \le \phi \le \pi/6$. Поэтому здесь

$$\Phi_s^{(0)}(\phi) = f^{(0)}(2)\mathrm{e}^{i\psi_2} + f^{(0)}(3)\mathrm{e}^{i\psi_3}, \tag{5.86}$$

где

$$f^{(0)}(2) = -f^{(0)}(3) = -\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\phi, \tag{5.87}$$

$$\psi_2 = -2k(h\cos\phi + a\sin\phi), \quad \psi_3 = -2k(h\cos\phi - a\sin\phi) \tag{5.88}$$

при $h = l\cos(\pi/6)$ и $a = l/2$.

Выражение (5.86) можно записать в компактной форме,

$$\Phi_s^{(0)}(\phi) = i\cos\phi \frac{\sin(2ka\sin\phi)}{\sin\phi}\mathrm{e}^{-i2kh\cos\phi}, \tag{5.89}$$

откуда следует, что

$$\Phi_s^{(0)}(0) = i2ka\mathrm{e}^{-i2kh} = ikl\mathrm{e}^{-i2kh}. \tag{5.90}$$

В интервале $\pi/6 < \phi < \pi/2$ рассеянное поле состоит из трех краевых волн,

$$\Phi_s^{(0)}(\phi) = f^{(0)}(1) + f^{(0)}(2)\mathrm{e}^{i\psi_2} + f^{(0)}(3)\mathrm{e}^{i\psi_3}, \tag{5.91}$$

где

$$f^{(0)}(1) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right), \tag{5.92}$$

$$f^{(0)}(2) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) - \mathrm{ctg}\phi\right], \tag{5.93}$$

$$f^{(0)}(3) = \frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\phi\,. \tag{5.94}$$

В интервале $\pi/2 < \phi < 5\pi/6$ имеются только две краевых волны,

$$\Phi_s^{(0)}(\phi) = f^{(0)}(1) + f^{(0)}(2)\,\mathrm{e}^{i\psi_2}, \tag{5.95}$$

где функция $f^{(0)}(1)$ определяется формулой (5.92). Выражение для функции $f^{(0)}(2)$ в этом интервале отличается от (5.93) и имеет вид

$$f^{(0)}(2) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right). \tag{5.96}$$

Причина отличия состоит в том, что в данном интервале грань 2–3 не освещается падающей волной и, следовательно, в приближении ФО не создает рассеянное поле. В направлении зеркального отражения от грани 1–2, когда $\phi = 2\pi/3$, формула (5.95) предсказывает величину

$$\Phi_s^{(0)}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = ikl, \tag{5.97}$$

которая согласуется с (5.90). Отличие в фазе объясняется различным положением граней 1–2 и 2–3 по отношению к выбранной системе координат.

В интервале $5\pi/6 < \phi \le \pi$ рассеянное поле опять состоит из трех краевых волн и описывается выражением (5.91), но с другими формулами для функций $f^{(0)}(1)$ и $f^{(0)}(3)$:

$$f^{(0)}(1) = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \phi\right)\right], \tag{5.98}$$

$$f^{(0)}(3) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \phi\right). \tag{5.99}$$

Функция $f^{(0)}(2)$ по-прежнему описывается формулой (5.96). Функция (5.98) отличается от (5.92) потому, что в этом интервале наблюдения освещаются обе грани ребра 1, т. е. грани 1–2 и 1–3. Функция (5.99) отличается от (5.94) потому, что в интервалах $0 \le \phi < \pi/2$ и $5\pi/6 < \phi \le \pi$ освещаются разные грани ребра 3.

### 5.2.3. Симметричное рассеяние: ФТД первого порядка

> Здесь акустическая величина $\Phi_s$ ($\Phi_h$) эквивалентна диаграмме направленности компоненты $E_z$ ($H_z$) электромагнитного поля, рассеянного на идеально проводящем цилиндре.

В предыдущих разделах 5.2.1 и 5.2.2 была определена та часть рассеянного поля, которая создается *равномерной* компонентой $j_{s,h}^{(0)}$ поверхностных источников и которая состоит из краевых волн типа (3.53), (3.54). Теперь мы добавим к ней поле, излучаемое *неравномерной* компонентой $j_{s,h}^{(1)}$ и состоящее в первом приближении из краевых волн типа (4.12) и (4.13). В силу соотношений (4.14) и (4.15) суммарное рассеянное поле будет состоять из краевых волн типа (2.61) и (2.63), диаграммы направленности которых выражаются через функции Зоммерфельда $f$ и $g$. Поскольку цилиндр является идеально отражающим (т. е. непрозрачным), то полное рассеянное поле состоит только из тех первичных краевых волн, которые приходят от ребер, видимых из точки наблюдения.

Напоминаем, что падающая волна задана выражением (5.72) и создает рассеянное поле, симметричное относительно координатной оси $x$ (рис. 5.9). Поэтому нам достаточно исследовать поле только в интервале $0 \le \phi \le \pi$. Мы приводим здесь окончательные выражения для диаграммы направленности полного рассеянного поля.

В интервале $0 \le \phi < \pi/6$

$$\Phi_s(\phi, 0) = f(2)\mathrm{e}^{i\psi_2} + f(3)\mathrm{e}^{i\psi_3}, \tag{5.100}$$

$$\Phi_h(\phi, 0) = g(2)\mathrm{e}^{i\psi_2} + g(3)\mathrm{e}^{i\psi_3}, \tag{5.101}$$

где

$$\begin{Bmatrix} f(2) \\ g(2) \end{Bmatrix} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left[\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n} - \cos\left(\dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\phi}{n}\right)} \mp \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n} + \cos\left(\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{\phi}{n}\right)}\right] \text{при } 0 \le \phi \le \pi, \tag{5.102}$$

$$\begin{Bmatrix} f(3) \\ g(3) \end{Bmatrix} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left[\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n} - \cos\left(\dfrac{\pi}{n} + \dfrac{\phi}{n}\right)} \mp \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n} + \cos\left(\dfrac{\pi}{5} - \dfrac{\phi}{n}\right)}\right] \text{при } 0 \le \phi \le \pi/2 \tag{5.103}$$

и $n = \alpha/\pi = 5/3$ (здесь $\alpha = 5\pi/3$ есть внешний угол между гранями ребра), а величина $\psi_{2,3}$ определяется согласно (5.76). Первые слагаемые в функциях

(5.102) и (5.103) сингулярны в направлении $\phi = 0$. Однако эти сингулярности гасят друг друга при вычислении диаграмм направленности. В результате,

$$\Phi_s(0) = ikl - \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} - \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{\pi}{5}}, \tag{5.104}$$

$$\Phi_h(0) = ikl - \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{\pi}{5}}. \tag{5.105}$$

Сравнение с выражением (5.81) показывает, что первое слагаемое здесь относится к полю ФО, а остальные два слагаемых описывают излучение, создаваемое *неравномерной* компонентой $j_{s,h}^{(1)}$.

В интервале $\pi/6 < \phi < \pi/2$ три краевых волны формируют полное рассеянное поле:

$$\Phi_s(\phi) = f(1) + f(2)e^{i\psi_2} + f(3)e^{i\psi_3}, \tag{5.106}$$

$$\Phi_h(\phi) = g(1) + g(2)e^{i\psi_2} + g(3)e^{i\psi_3}, \tag{5.107}$$

где

$$\begin{Bmatrix} f(1) \\ g(1) \end{Bmatrix} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left[\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\phi}{n}\right)} \mp \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} + \cos\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\phi}{n}\right)}\right] \text{при } \pi/6 \le \phi \le \pi. \tag{5.108}$$

В этом секторе находится направление зеркального отражения ($\phi = \pi/3$) от грани 1–2, где сингулярны вторые слагаемые в функциях $f(1)$, $g(1)$ и $f(2)$, $g(2)$. Однако эти сингулярности гасят друг друга при вычислении диаграмм направленности, которые остаются при этом конечными:

$$\Phi_s(\pi/3) = ik\frac{l}{2} + \frac{1}{n}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right) + f(3)e^{i\psi_3}, \tag{5.109}$$

$$\Phi_h(\pi/3) = -ik\frac{l}{2} + \frac{1}{n}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right) + g(3)e^{i\psi_3}. \tag{5.110}$$

Благодаря симметрии задачи, эти выражения также определяют поле в направлении зеркального отражения от грани 1–3. Здесь опять уместно замечание, сделанное в конце раздела 5.2.1: полная мощность поля, отраженного от граней 1–2 и 1–3, асимптотически равна полной мощности теневого излучения, определяемой согласно оптической теореме (5.16) первыми слагаемыми в выражениях (5.104) и (5.105). Также ясно, что доминирующее слагаемое $\pm ikl/2$ в выражениях (5.109) и (5.110) относяится к полю ФО.

В интервале $\pi/2 < \phi < 5\pi/6$ не видно ребра 3 и поэтому рассеянное поле состоит только из двух краевых волн:

$$\Phi_s(\phi) = f(1) + f(2)\mathrm{e}^{i\psi_2}, \tag{5.111}$$

$$\Phi_h(\phi) = g(1) + g(2)\mathrm{e}^{i\psi_2}. \tag{5.112}$$

В интервале $5\pi/6 < \phi \le \pi$ видны все три ребра, и рассеянное поле опять определяется формулами (5.106) и (5.107) с функциями

$$\begin{Bmatrix} f(3) \\ g(3) \end{Bmatrix} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left[\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n} - \cos\left(\dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\phi}{n}\right)} \mp \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n} + \cos\left(\dfrac{\pi}{n} + \dfrac{\phi}{n}\right)}\right] \text{при } \pi/6 \le \phi \le \pi. \tag{5.113}$$

Эта формула для функций $f(3)$ и $g(3)$ отличается от (5.103), хотя обе они являются точными формами функций (2.62) и (2.64). Такое различие связано с тем, что локальная полярная координата $\varphi_3$ [используемая для описания функций $f(3)$ и $g(3)$] не может быть описана единым выражением в областях $\varphi_3 < \pi/6$ и $\varphi_3 > \pi/6$ (рис. 5.10) в терминах основной координаты $\phi$ при заданном ограничении $0 \le \phi \le \pi$.

Отметим, что найденные выше асимптотические выражения для величин $u_h$ и $du_s/d\phi$ имеют конечные разрывы в направлениях $\phi = \pi/6$, $\phi = \pi/2$ и $\phi = 5\pi/6$, которые являются геометрооптическими границами для краевых волн. Величина этих разрывов может быть уменьшена, если учесть краевые волны высших порядков, которые возникают вследствие многократной дифракции. Однако, как показано ниже в разделе 5.2.5, такие разрывы становятся незначительными уже в случае, когда $l \ge 3\lambda$.

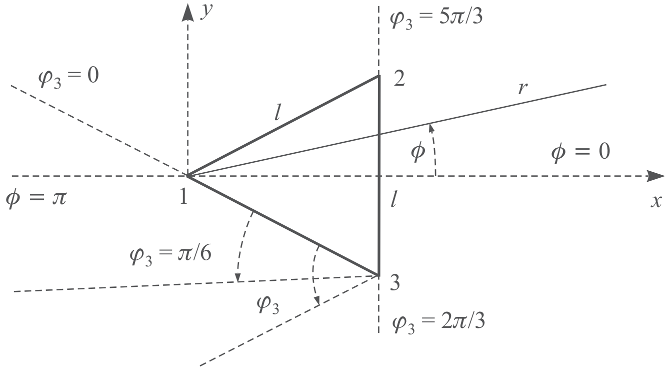


**Рис. 5.10.** Сектор $0 \le \varphi_3 \le 5\pi/3$ есть область задания функций $f(3)$ и $g(3)$. Точка наблюдения $(r, \phi)$ находится в области $0 \le \phi \le \pi$

Нетрудно построить аналогичные асимптотики для бистатического рассеяния при произвольном направлении падающей волны. Однако они имеют существенный недостаток: в соответсвии с соотношениями (4.20) и (4.21) они сингулярны при скользящем падении волны на грани цилиндра. Такие сингулярности можно устранить, применяя равномерную версию ФТД, развитую ниже в разделе 7.9. Еще одна версия ФТД, свободная от скользящей сингулярности, основана на усечении поверхностных источников (Michaeli, 1987; Breinbjerg, 1992; Johansen, 1996).

### 5.2.4. Обратное рассеяние: ФТД первого порядка

> Здесь акустическая величина $\Phi^s$ ($\Phi^h$) эквивалентна диаграмме направленности компоненты $E_z$ ($H_z$) электромагнитного поля, рассеянного на идеально прводящем цилиндре.

Как было показано в предыдущем разделе, в приближении ФТД первого порядка поле, рассеянное трехгранным цилиндром, состоит из линейной комбинации первичных краевых волн, которые определяются в общем случае выражениями (2.61) и (2.63). Теперь мы применим эту теорию для исследования обратного рассеяния, предполагая, что падающая волна задана выражением (5.84), где угол падения $\phi_0$ может изменяться в интервале $-\pi \le \phi_0 \le 0$. Вычисляется поле, рассеянное в направлении $\phi = \pi + \phi_0$ в секторе $0 \le \phi \le \pi$. Геометрия задачи показана на рис. 5.9. Мы опускаем простые, но утомительные вычисления индивидуальных краевых волн в терминах основной системы координат $(r, \phi)$ и приводим окончательные выражения для диаграмм направленности полного рассеянного поля, подразумевая, что оно записывается в форме, аналогичной (5.73).

В интервале $0 \le \phi \le \pi/6$

$$\Phi_s(\phi) = f(2)\mathrm{e}^{ik\psi_2} + f(3)\mathrm{e}^{i\psi_3}, \tag{5.114}$$

$$\Phi_h(\phi) = g(2)\mathrm{e}^{ik\psi_2} + g(3)\mathrm{e}^{i\psi_3}, \tag{5.115}$$

где

$$\begin{Bmatrix} f(2) \\ g(2) \end{Bmatrix} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left[\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} \mp \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2\phi}{n}\right)}\right] \text{ при } 0 \le \phi \le \pi, \tag{5.116}$$

$$\begin{Bmatrix} f(3) \\ g(3) \end{Bmatrix} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left[\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} \mp \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\left(\frac{\pi}{n} - \frac{2\phi}{n}\right)}\right] \text{ при } 0 \le \phi \le \pi/2. \tag{5.117}$$

Здесь, параметр, характеризующий угол между гранями ребра, равен $n = \alpha/\pi = 5/3$, а величины $\psi_{2,3}$ определяются соотношениями (5.88). Из формул (5.114) и (5.115) следует, что в направлении $\phi = 0$

$$\Phi_s(0) = \left( ikl + \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} \right) e^{-i2kh}, \tag{5.118}$$

$$\Phi_h(0) = \left( -ikl - \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} \right) e^{-i2kh}, \tag{5.119}$$

где $h = l\cos(\pi/6)$.

В интервале $\pi/6 < \phi \le \pi/2$ появляется дополнительная волна, приходящая от ребра 1. Следовательно, в этом интервале

$$\Phi_s(\phi) = f(1) + f(2)\, e^{ik\psi_2} + f(3)\, e^{i\psi_3}, \tag{5.120}$$

$$\Phi_h(\phi) = g(1) + g(2)\, e^{ik\psi_2} + g(3)\, e^{i\psi_3}, \tag{5.121}$$

где функции $f(2)$, $f(3)$ и $g(2)$, $g(3)$ определяются формулами (5.116) и (5.117), а

$$\begin{Bmatrix} f(1) \\ g(1) \end{Bmatrix} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n} \left[ \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} \mp \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\phi}{n}\right)} \right] \text{при } \pi/6 < \phi \le \pi. \tag{5.122}$$

В интервале $\pi/2 < \phi < 5\pi/6$ исчезает дифракционная волна от ребра 3 и, следовательно,

$$\Phi_s(\phi) = f(1) + f(2)\, e^{ik\psi_2}, \tag{5.123}$$

$$\Phi_h(\phi) = g(1) + g(2)\, e^{ik\psi_2}. \tag{5.124}$$

В этом интервале имеется направление $\phi = 2\pi/3$, соответствующее зеркальному отражению от грани 1–2, для которого

$$\Phi_s\left(\frac{2\pi}{3}\right) = ikl + \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - 1}, \tag{5.125}$$

$$\Phi_h\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -ikl - \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - 1}. \tag{5.126}$$

В силу симметрии задачи, эти выражения почти полностью совпадают с аналогичными выражениями (5.118), (5.119). Они отличаются только отсутствием фазового множителя $e^{-i2kh}$, что обусловлено выбором начала координат на ребре 1.

В интервале $5\pi/6 < \phi \le \pi$ наблюдаются краевые волны от всех трех ребер, и рассеянное поле опять определяется формулами (5.120), (5.121). Однако теперь функции $f(3)$, $g(3)$ описываются выражениями

$$\begin{Bmatrix} f(3) \\ g(3) \end{Bmatrix} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1} \mp \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}+\cos\dfrac{2\phi}{n}}\right), \tag{5.127}$$

отличающимися от (5.117). На этом мы завершаем аналитическое исследование рассеянного поля.

### 5.2.5. Численный анализ рассеянного поля

Здесь поперечник раасеяния $\sigma_s$ ($\sigma_h$) для акустических волн равен поперечнику рассеяния электромагнитных волн с компонентой $E_z$ ($H_z$).

Численные расчеты были проведены для нормированного поперечника рассеяния (5.20)

$$\frac{\sigma_{s,h}}{kl^2} = \left|\frac{\Phi_{s,h}(\phi)}{kl}\right|^2. \tag{5.128}$$

Исследовалось рассеяние на равностороннем цилиндре с параметром $kl = 6\pi$, когда $l = 3\lambda$. Представлены графики величины $10\lg(\sigma/kl^2)$. Рисунки 5.11 и 5.12 иллюстрируют симметричное рассеяние падающей волны, распрос-

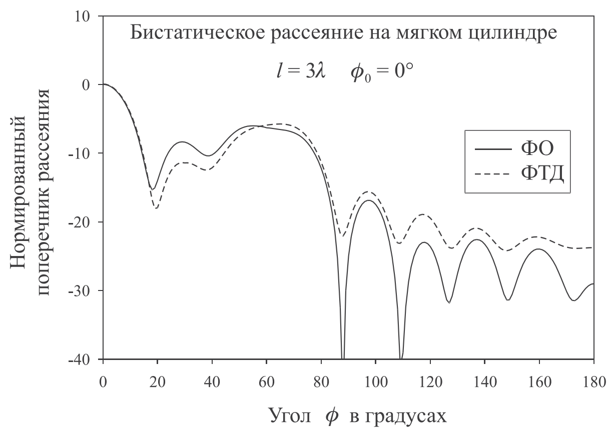


**Рис. 5.11.** Бистатическое рассеяние на акустически мягком цилиндре (рассеяние электромагнитной волны с компонентой $E_z$ на идеально проводящем цилиндре)

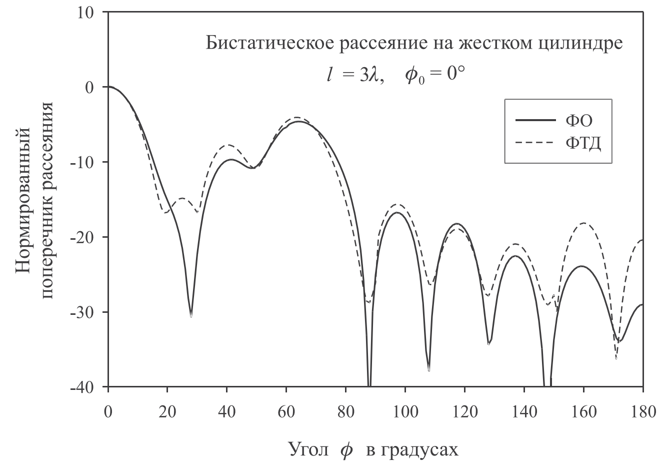


**Рис. 5.12.** Бистатическое рассеяние на акустически жестком цилиндре (рассеяние электромагнитной волны с компонентой $H_z$ на идеально проводящем цилиндре)

траняющейся в направлении вдоль биссектрисы цилиндра (рис. 5.9). Рисунки 5.13 и 5.14 изображают обратное рассеяние.

Как видно на этих рисунках, ФТД существенно уточняет приближение ФО в минимумах поперечника рассеяния. Различие между ФТД и ФО также ощутимо в максимумах. Оно осбенно проявляется в случае рассеяния на акустически жестком цилиндре и достигает там величины около 6–9 децибел в секторе 160°–180°. Аналогичная ситуация наблюдается в максимумах обратного рассеяния. В частности, различие между ФТД- и ФО-кривыми для акустически жесткого цилиндра составляет около 5–9 децибел в направлениях 50°–70° и 170° –180°.

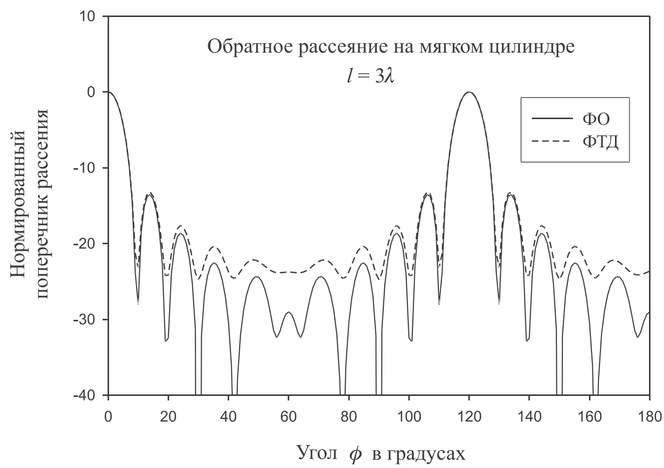


**Рис. 5.13.** Обратное рассеяние на акустически мягком цилиндре (рассеяние электромагнитных волн с компонентой $E_z$ на идеально проводящем цилиндре)

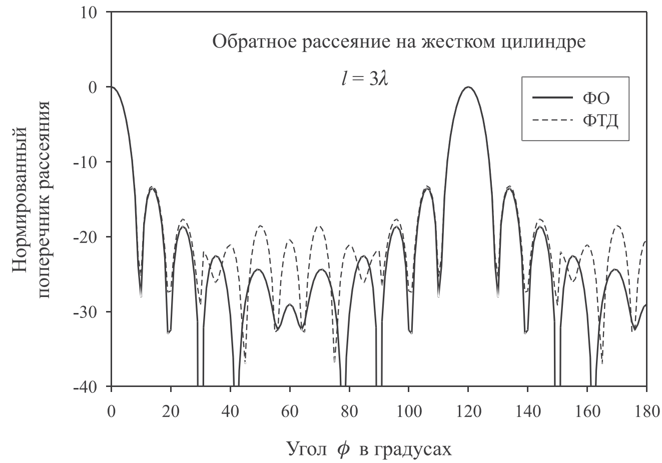


**Рис. 5.14.** Обратное рассеяние на акустически жестком цилиндре (рассеяние электромагнитных волн с компонентой $H_z$ на идеально проводящем цилиндре)

Отметим, что более точные результаты для трехгранного цилиндра получены в работе (Johanson, 1996), где используется версия ФТД с усеченными поверхностными источниками и где частично учитываются вторичные краевые волны.

## Задачи

**5.1.** Получите приближение ФО для поля в дальней зоне, рассеянного на акустически мягкой ленте (рис. 5.1). Падающая волна задана выражением (5.1).
Рекомендуемая последовательность действий:
- Начните с формулы (1.32). Преобразуйте двукратный интеграл в интеграл по одной переменной, используя выражение (3.7) для функции Ханкеля.
- Замените функцию Ханкеля ее асимптотическим приближением (2.29).
- Используйте аппроксимации, допустимые при вычислении поля в дальней зоне.
- Полученный интеграл вычисляется в явном виде.
- Представьте рассеянное поле в виде суммы краевых волн.
- Проверьте, что полученное выражение полностью совпадает с формулой (5.4).

**5.2.** Получите приближение ФО для поля в дальней зоне, рассеянного на акустически жесткой ленте (рис. 5.1). Падающая волна задана выражением (5.1). Рекомендуемая последовательность действий:
- Начните с формулы (1.32). Следуйте разд. 5.1.4 и перейдите от оператора $\partial/\partial n$ к оператору $\partial/\partial x$.
- Преобразуйте двукратный интеграл в интеграл по одной переменной, используя выражение (3.7) для функции Ханкеля.
- Замените функцию Ханкеля ее асимптотическим приближением (2.29).

- Используйте аппроксимации, допустимые при вычислении поля в дальней зоне.
- Полученный интеграл вычисляется в явном виде.
- Представьте рассеянное поле в виде суммы краевых волн.
- Проверьте, что полученное выражение полностью совпадает с формулой (5.5).

**5.3.** Получите приближение ФО для поля в дальней зоне, рассеянного на идеально проводящей ленте (рис. 5.1). Падающая волна задана выражением $E_z^{inc} = E_{0z}\,\mathrm{e}^{ik(x\cos\phi_0 + y\sin\phi_0)}$.

Рекомендуемая последовательность действий:

- Начните с формул (1.87) и (1.97).
- Преобразуйте двухкратный интеграл в интеграл по одной переменной, используя выражение (3.7) для функции Ханкеля.
- Замените функцию Ханкеля ее асимптотическим приближением (2.29).
- Используйте аппроксимации, допустимые при вычислении поля в дальней зоне.
- Полученный интеграл вычисляется в явном виде.
- Представьте рассеянное поле в виде суммы краевых волн.
- Сравните полученное выражение с формулой (5.4) и сформулируйте соотношение эквивалентности между электромагнитными и акустическими дифракционными полями.

**5.4.** Получите приближение ФО для поля в дальней зоне, рассеянного на идеально проводящей ленте (рис. 5.1). Падающая волна задана выражением $H_z^{inc} = H_{0z}\,\mathrm{e}^{ik(x\cos\phi_0 + y\sin\phi_0)}$.

Рекомендуемая последовательность действий:

- Начните с формул (1.88) и (1.97).
- Преобразуйте двухкратный интеграл в интеграл по одной переменной, используя выражение (3.7) для функции Ханкеля.
- Замените функцию Ханкеля ее асимптотическим приближением (2.29).
- Используйте аппроксимации, допустимые при вычислении поля в дальней зоне.
- Полученный интеграл вычисляется в явном виде.
- Представьте рассеянное поле в виде суммы краевых волн.
- Сравните полученное выражение с формулой (5.5) и сформулируйте соотношение эквивалентности между электромагнитными и акустическими дифракционными полями.

**5.5.** Используйте выражение (5.35). Докажите равенство (5.39). Примените формулу (5.16) и вычислите полный поперечник рассеяния для акустически мягкой ленты.

**5.6.** Используйте выражение (5.37). Докажите равенство (5.40). Примените формулу (5.16) и вычислите полный поперечник рассеяния для акустически жесткой ленты.

**5.7.** Исследуйте дифракцию цилиндрической волны на акустически мягкой ленте (рис. 5.1). Падающая волна задана выражением $u^{inc} = u_0 \dfrac{\mathrm{e}^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}}$, где $r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$ и $k|x_0| \gg 1$.

Получите ФТД-приближение для рассеянного поля в виде суммы двух отдельных компонент: $u_s^{(0)}$ и $u_s^{(1)}$. Рекомендуемая последовательность действий:

- Начните с вычисления поля ФО, исходя из общего выражения (1.32).
- Преобразуйте двухкратный интеграл в интеграл по одной переменной, используя выражение (3.7) для функции Ханкеля.
- Замените функцию Ханкеля ее асимптотическим приближением (2.29).
- Используйте аппроксимации, допустимые при вычислении поля в дальней зоне.
- Представьте поле $u_s^{(0)}$ в интегральной форме.
- Используйте формулу (4.12) и получите асимптотические выражения для краевых волн, излучаемых неравномерной компонентой $j_s^{(1)}$ поверхностных источников.
- Докажите, что эти волны имеют конечную величину на границах тени (рис. 5.4).
- Проследите за переходом (в выражениях для поля) от падающей цилиндрической волны к плоской волне, полагая $\lim\limits_{x_0\to-\infty} u_0 \dfrac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}} = e^{ikx}$.

**5.8.** Исследуйте дифракцию цилиндрической волны на акустически жесткой ленте (рис. 5.1). Падающая волна задана выражением $u^{inc} = u_0 \dfrac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}}$, где $r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$ и $k|x_0| \gg 1$.

Получите ФТД-приближение для рассеянного поля в виде суммы двух отдельных компонент: $u_h^{(0)}$ и $u_h^{(1)}$. Рекомендуемая последовательность действий:

- Начните с вычисления поля ФО, исходя из общего выражения (1.32).
- Преобразуйте двухкратный интеграл в интеграл по одной переменной, используя выражение (3.7) для функции Ханкеля.
- Замените функцию Ханкеля ее асимптотическим приближением (2.29).
- Используйте аппроксимации, допустимые при вычислении поля в дальней зоне.
- Представьте поле $u_h^{(0)}$ в интегральной форме.
- Используйте формулу (4.13) и получите асимптотические выражения для краевых волн, излучаемых неравномерной компонентой $j_h^{(1)}$ поверхностных источников.
- Докажите, что эти волны имеют конечную величину на границах тени (рис. 5.4).
- Проследите за переходом (в выражениях для поля) от падающей цилиндрической волны к плоской волне, полагая $\lim\limits_{x_0\to-\infty} u_0 \dfrac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}} = e^{ikx}$.

**5.9.** Исследуйте дифракцию цилиндрической волны на идеально проводящей ленте (рис. 5.1). Падающая волна задана выражением $E_z^{inc} = E_{0z} \dfrac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}}$, где $r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$ и $k|x_0| \gg 1$.

Получите ФТД-приближение для рассеянного поля в виде суммы двух отдельных компонент: $E_z^{(0)}$ и $E_z^{(1)}$. Рекомендуемая последовательность действий:

- Начните с вычисления поля $E_z^{(0)}$, исходя из общего выражения (1.87).
- Преобразуйте двухкратный интеграл в интеграл по одной переменной, используя выражение (3.7) для функции Ханкеля.
- Замените функцию Ханкеля ее асимптотическим приближением (2.29).
- Используйте аппроксимации, допустимые при вычислении поля в дальней зоне.
- Представьте поле $E_z^{(0)}$ в интегральной форме.
- Используйте формулу (4.12), адаптированную для электромагнитных волн, и получите асимптотическое выражение для поля $E_z^{(1)}$ в виде суммы краевых волн.
- Докажите, что эти волны имет конечную величину на границах тени (рис. 5.4).
- Проследите за переходом (в выражениях для поля) от падающей цилиндрической волны к плоской волне, полагая $\lim\limits_{x_0 \to -\infty} E_{0z} \dfrac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}} = e^{ikx}$.

**5.10.** Исследуйте дифракцию цилиндрической волны на идеально проводящей ленте (рис. 5.1). Падающая волна задана выражением $H_z^{inc} = H_{0z} \dfrac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}}$, где $r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$ и $k|x_0| \gg 1$.

Получите ФТД-приближение для рассеянного поля в виде суммы двух отдельных компонент: $H_z^{(0)}$ и $H_z^{(1)}$. Рекомендуемая последовательность действий:

- Начните с вычисления поля $H_z^{(0)}$, исходя из общего выражения (1.88).
- Преобразуйте двухкратный интеграл в интеграл по одной переменной, используя выражение (3.7) для функции Ханкеля.
- Замените функцию Ханкеля ее асимптотическим приближением (2.29).
- Используйте аппроксимации, допустимые при вычислении поля в дальней зоне.
- Представьте поле $H_z^{(0)}$ в интегральной форме.
- Используйте формулу (4.13), адаптированную для электромагнитных волн, и получите асимптотическое выражение для поля $H_z^{(1)}$ в виде суммы краевых волн.
- Докажите, что эти волны имет конечную величину на границах тени (рис. 5.4).
- Проследите за переходом (в выражениях для поля) от падающей цилиндрической волны к плоской волне, полагая $\lim\limits_{x_0 \to -\infty} H_{0z} \dfrac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}} = e^{ikx}$.

# Глава 6

# Осесимметричное рассеяние акустических волн на телах вращения

> Аналогичная задача для электромагнитных волн рассматривается в главе 2 в монографии (Ufimtsev, 2003, 2007 a).

В этой главе развивается ФТД первого порядка для акустических волн, рассеиваемых телами вращения с круговыми изломами. Под термином «теория первого порядка» подразумевается теория краевых волн, образующихся при *первичной* дифракции. Изучается осесимметричное рассеяние плоской волны, которая распространяется вдоль оси симметрии тел вращения. Радиус кругового излома ($a$) предполагается большим по сравнению с длиной волны ($\lambda$). В этом случае *неравномерная* компонента $j_{s,h}^{(1)}$ поверхностных источников вблизи излома асимптотически (при $ka \to \infty$) идентична аналогичной компоненте вблизи ребра касательной конической поверхности (рис. 6.1). Дифракция на такой поверхности является подходящей канонической задачей и изучается в разделе 6.1. Результаты ее решения используются затем в следующих разделах при исследовании рассеяния на некоторых типичных телах вращения.

## 6.1. Дифракция на канонической конической поверхности

Геометрия задачи иллюстрируется на рисунках 6.1 и 6.2. Сплошные линии на рис. 6.1 показывают общий вид тела вращения с круговым изломом. Штриховые линии принадлежат касательной конической поверхности. Продольное сечение этой поверхности меридиональной плоскостью и некоторые обозначения показаны на рис. 6.2. Здесь, $\xi$ есть расстояние от ребра вдоль образующей; $r'$, $\vartheta'$, $\psi'$ — сферические координаты и $\rho$, $\psi'$, $z$ — полярные координаты точки

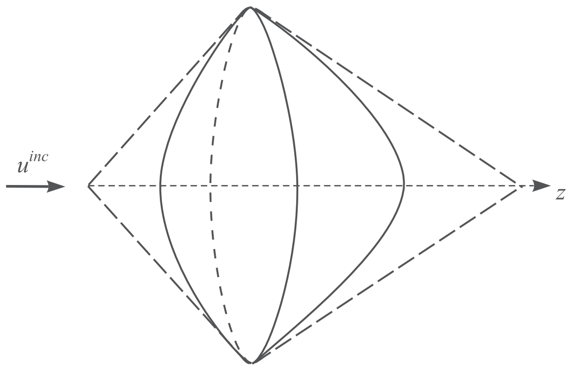


**Рис. 6.1.** Тело вращения (сплошные линии) с круговым изломом и коническая поверхность (штриховые линии), касательная к телу в точках излома

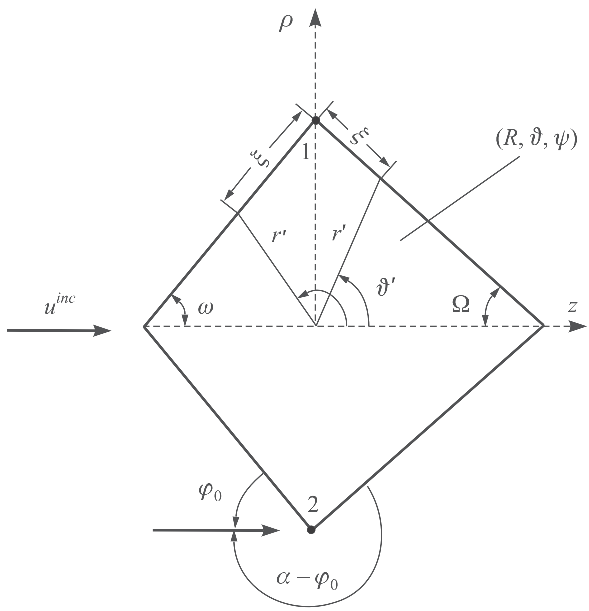


**Рис. 6.2**. Продольное сечение конической поверхности.

на конической поверхности; $R$, $\vartheta$, $\psi$ — координаты точки наблюдения; $\varphi_0$ — угол падения, измеряемый от освещенной стороны поверхности тела; $\alpha - \varphi_0$ — угол падения, измеряемый от теневой стороны; смысл углов $\omega$ и $\Omega$ ясен из рисунка; краевые точки 1 и 2 являются симметричными.

### 6.1.1. Интегралы для рассеянного поля

Предполагается, что плоская волна

$$u^{inc} = u_0 \mathrm{e}^{ikz} \tag{6.1}$$

распространяется вдоль оси симметрии конической поверхности и возбуждает на ней поверхностные источники $j_{s,h}^{(0)}$ и $j_{s,h}^{(1)}$. В данной канонической задаче нас интересует только поле, которое излучается *неравномерной* компонентой $j_{s,h}^{(1)}$, сосредоточенной вблизи кругового излома. Представим эту компоненту в виде

$$j_s^{(1)} = u_0 J_s^{(1)}, \quad j_h^{(1)} = u_0 J_h^{(1)}. \tag{6.2}$$

Очевидно, что в силу симметрии задачи эти источники не зависят от азимутальной координаты $\psi'$. Излучаемое ими поле в дальней зоне описывается общими формулами (1.16) и (1.17). В частном случае конической поверхности, величины, содержащиеся в этих формулах, определяются следующими выражениями:

Величины

$$\left.\begin{aligned} ds^- &= (a - \xi \sin\omega) d\xi d\psi', \\ ds^+ &= (a - \xi \sin\Omega) d\xi d\psi' \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

суть дифференциальные элементы конической поверхности на ее освещенной ($z < 0$) и теневой ($z > 0$) сторонах, соответственно;

$$\left.\begin{aligned} r' \sin\vartheta' &= a - \xi \sin\omega \\ r' \cos\vartheta' &= -\xi \cos\omega \end{aligned}\right\} \text{для точек с координатами } z < 0, \tag{6.4}$$

$$\left.\begin{aligned} r' \sin\vartheta' &= a - \xi \sin\Omega \\ r' \cos\vartheta' &= \xi \cos\Omega \end{aligned}\right\} \text{для точек с координатами } z > 0; \tag{6.5}$$

$$(\hat{m}\cdot\hat{n})^- = \sin\vartheta \cos\omega \cos(\psi' - \psi) - \sin\omega \cos\vartheta \tag{6.6}$$

для точек с координатами $z < 0$ и

$$(\hat{m}\cdot\hat{n})^+ = \sin\vartheta \cos\Omega \cos(\psi' - \psi) + \sin\Omega \cos\vartheta \tag{6.7}$$

для точек с координатами $z > 0$.

В этом разделе мы используем символ $\Omega$ для угла, показанного на рис. 6.2. В выражениях (1.16) и (1.17) этот же символ был использован для другого угла (рис. 1.2). Мы напоминаем об этом, чтобы избежать возможной путаницы.

С учетом этих замечаний формулы (1.16) и (1.17) можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} u_s^{(1)} = &-u_0 \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \times \\ &\times \left[ \int_0^{\xi_{eff}} J_s^{(1)}(k\xi, \varphi_0) \mathrm{e}^{ik\xi\cos\omega\cos\vartheta} (a - \xi\sin\omega) d\xi \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ik\Psi^-(\psi',\psi)} d\psi' + \right. \\ &\left. + \int_0^{\xi_{eff}} J_s^{(1)}(k\xi, \alpha - \varphi_0) \mathrm{e}^{-ik\xi\cos\Omega\cos\vartheta} (a - \xi\sin\Omega) d\xi \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ik\Psi^+(\psi',\psi)} d\psi' \right], \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$u_h^{(1)} = -u_0 \frac{ik}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \times$$

$$\times \Bigg[ \int_0^{\xi_{eff}} J_h^{(1)}(k\xi, \varphi_0) \mathrm{e}^{ik\xi \cos\omega \cos\vartheta} (a - \xi \sin\omega) d\xi \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ik\Psi^-(\psi',\psi)} (\hat{m} \cdot \hat{n})^- d\psi' +$$

$$+ \int_0^{\xi_{eff}} J_h^{(1)}(k\xi, \alpha - \varphi_0) \mathrm{e}^{-ik\xi \cos\Omega \cos\vartheta} (a - \xi \sin\Omega) d\xi \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ik\Psi^+(\psi',\psi)} (\hat{m} \cdot \hat{n})^+ d\psi' \Bigg], \quad (6.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Psi^-(\psi',\psi) &= (a - \xi \sin\omega) \sin\vartheta \cos(\psi' - \psi), \\ \Psi^+(\psi',\psi) &= (a - \xi \sin\Omega) \sin\vartheta \cos(\psi' - \psi). \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Первые слагаемые в квадратных скобках в выражениях (6.8) и (6.9) относятся к освещенной поверхности ($z < 0$), а вторые слагаемые относятся к теневой поверхности ($z > 0$). Интегралы по переменной $\xi$ вычисляются приближенно, только в интервале $0 \le \xi \le \xi_{eff}$, поскольку *неравномерная* компонента $J_{s,h}^{(1)}(k\xi)$ поверхностных источников сосредоточена вблизи излома ($\xi = 0$) и уменьшается с удалением от него. Поэтому на некотором расстоянии $\xi > \xi_{eff}$ ею можно пренебречь. В следующих разделах даны асимптотические оценки для рассеянного поля.

### 6.1.2. Лучевые асимптотики

Сначала мы исследуем поле в той области пространства, откуда видны все точки кругового ребра ($0 \le \psi' \le 2\pi$). Такая ситуация возможна в двух интервалах наблюдения: $0 \le \vartheta \le \Omega$ и $\pi - \omega \le \vartheta \le \pi$. Мы предполагаем, что

$$\left. \begin{aligned} k(a - \xi_{eff} \sin\omega) \sin\vartheta &\gg 1, \\ k(a - \xi_{eff} \sin\Omega) \sin\vartheta &\gg 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

и применяем метод стационарной фазы (Копсон, 1966; Murray, 1984) к интегралам по переменной $\psi'$. Точки стационарной фазы находятся из условия

$$d\Psi^{\pm}(\psi',\psi)/d\psi' = 0, \quad (6.12)$$

которое ведет к уравнению

$$d\cos(\psi' - \psi)/d\psi' = -\sin(\psi' - \psi) = 0 \text{ в точке } \psi' = \psi'_{st}. \quad (6.13)$$

В интервале $0 \le \psi' \le 2\pi$ существуют две точки стационарной фазы:

$$\psi_1 = \psi \text{ и } \psi_2 = \pi + \psi. \tag{6.14}$$

В соответствии с этим асимптотическим методом, функция $\cos(\psi' - \psi)$, содержащаяся в величине $\Psi^{\pm}$, аппроксимируется двумя первыми членами ряда Тейлора,

$$\cos(\psi' - \psi) \approx 1 - \frac{1}{2}(\psi' - \psi_1)^2 \tag{6. 15}$$

в окрестности точки $\psi' = \psi_1$ и

$$\cos(\psi' - \psi) \approx -1 + \frac{1}{2}(\psi' - \psi_2)^2 \tag{6.16}$$

в окрестности точки $\psi' = \psi_2$. Медленно меняющийся множитель $(\hat{m}\cdot\hat{n})^{\pm}$ аппроксимируется его значением в стационарных точках. Исходные интегралы по переменной $\psi'$ асимптотически равны сумме интегралов, вычисляемых в окрестности каждой стационарной точки. Интервалы интегрирования в каждом из таких интегралов полагаются бесконечно большими, от $-\infty$ до $+\infty$. Эти стандартные преобразования приводят к следующему асимптотическому выражению:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ik\Psi^{\pm}(\psi',\psi)} (\hat{m}\cdot\hat{n})^{\pm}\, d\psi' \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k\left[a - \xi\sin\begin{pmatrix}\Omega\\ \omega\end{pmatrix}\right]\sin\vartheta}} \times$$

$$\times\left\{(\hat{m}\cdot\hat{n})^{\pm}\Big|_{\psi'=\psi_1} \cdot \mathrm{e}^{-ik\left[a - \xi\sin\begin{pmatrix}\Omega\\ \omega\end{pmatrix}\right]\sin\vartheta} \cdot \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} + \right.$$

$$\left. + (\hat{m}\cdot\hat{n})^{\pm}\Big|_{\psi'=\psi_2} \cdot \mathrm{e}^{ik\left[a - \xi\sin\begin{pmatrix}\Omega\\ \omega\end{pmatrix}\right]\sin\vartheta} \cdot \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\right\}, \tag{6.17}$$

где

$$\left.\begin{aligned} (\hat{m}\cdot\hat{n})^{+}\Big|_{\psi'=\psi_1} &= \sin(\vartheta + \Omega), \quad & (\hat{m}\cdot\hat{n})^{-}\Big|_{\psi'=\psi_1} &= \sin(\vartheta - \omega),\\ (\hat{m}\cdot\hat{n})^{+}\Big|_{\psi'=\psi_2} &= -\sin(\vartheta - \Omega), \quad & (\hat{m}\cdot\hat{n})^{-}\Big|_{\psi'=\psi_2} &= -\sin(\vartheta + \omega).\end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

Выражение (6.17) позволяет свести поверхностные интегралы (6.8) и (6.9) к линейным интегралам по переменной $\xi$. Полученные при этом интегралы содержат функции $\sqrt{a - \xi\sin\omega}$ и $\sqrt{a - \xi\sin\Omega}$, которые можно аппроксимировать величиной $\sqrt{a}$ при условии $a \gg \xi_{eff}$.

Прежде чем представить окончательные приближенные выражения для полей (6.8) и (6.9), мы введем локальные координаты $\varphi_1$ и $\varphi_2$ в стационарных точках $\psi_1$ и $\psi_2$. На рис. 6.2 эти точки обозначены числами 1 и 2. На рис. 6.3 показаны локальные координаты для точки 1, а на рис. 6.4 и 6.5 — для точки 2.

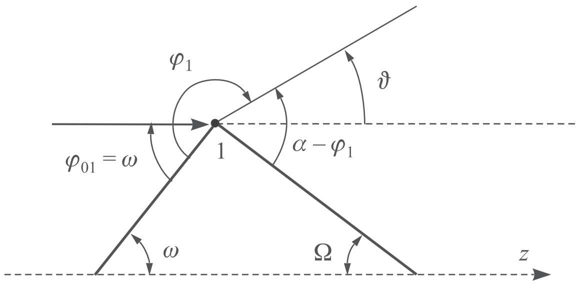


**Рис. 6.3.** Локальные координаты в стационарной точке 1 ($\psi'_{st} = \psi$)

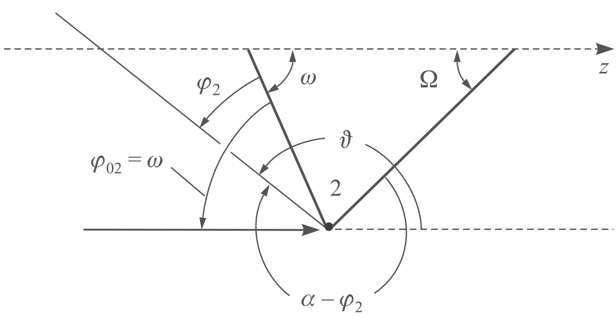


**Рис. 6.4**. Локальные координаты в стационарной точке 2 ($\psi'_{st} = \pi+\psi$) для направлений наблюдения в интервале $\pi-\omega \le \vartheta \le \pi$

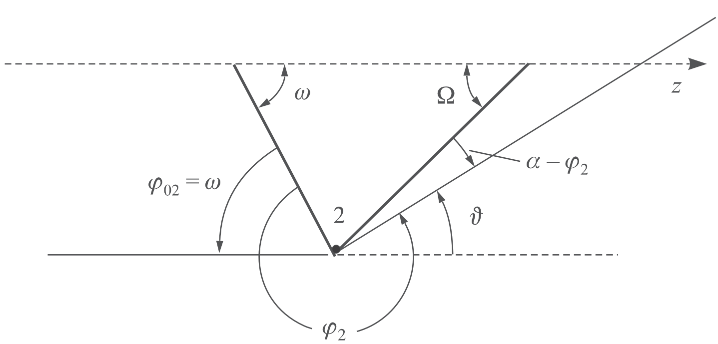


**Рис. 6.5.** Локальные координаты в стационарной точке 2 ($\psi'_{st} = \pi+\psi$) для направлений наблюдения в интервале $0 \le \vartheta \le \Omega$

Принимая во внимание соотношения между координатами $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\vartheta$ и используя асимптотические оценки (6.17), получаем следующие аппроксимации для полей (6.8) и (6.9):

$$u_s^{(1)} = -u_0 \frac{a}{2\sqrt{2\pi ka \sin\vartheta}} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \times$$
$$\times\left\{ \mathrm{e}^{-ika\sin\vartheta + i\frac{\pi}{4}} \cdot \left[ \int_0^{\xi_{eff}} J_s^{(1)}(k\xi, \varphi_0)\mathrm{e}^{-ik\xi\cos\varphi_1} d\xi + \right.\right.$$
$$\left. + \int_0^{\xi_{eff}} J_s^{(1)}(k\xi, \alpha - \varphi_0)\mathrm{e}^{-ik\xi\cos(\alpha-\varphi_1)} d\xi \right] +$$
$$+ \mathrm{e}^{ika\sin\vartheta - i\frac{\pi}{4}} \cdot \left[ \int_0^{\xi_{eff}} J_s^{(1)}(k\xi, \varphi_0)\mathrm{e}^{-ik\xi\cos\varphi_2} d\xi + \right.$$
$$\left.\left. + \int_0^{\xi_{eff}} J_s^{(1)}(k\xi, \alpha - \varphi_0)\mathrm{e}^{-ik\xi\cos(\alpha-\varphi_2)} d\xi \right]\right\}, \tag{6.19}$$

$$u_h^{(1)} = -u_0 \frac{ika}{2\sqrt{2\pi ka \sin\vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} \times$$
$$\times\left\{ \mathrm{e}^{-ika\sin\vartheta + i\frac{\pi}{4}} \cdot \left[ \sin\varphi_1 \int_0^{\xi_{eff}} J_h^{(1)}(k\xi, \varphi_0)\mathrm{e}^{-ik\xi\cos\varphi_1} d\xi + \right.\right.$$
$$\left. + \sin(\alpha - \varphi_1) \int_0^{\xi_{eff}} J_h^{(1)}(k\xi, \alpha - \varphi_0)\mathrm{e}^{-ik\xi\cos(\alpha-\varphi_1)} d\xi \right] +$$
$$+ \mathrm{e}^{ika\sin\vartheta - i\frac{\pi}{4}} \cdot \left[ \sin\varphi_2 \int_0^{\xi_{eff}} J_h^{(1)}(k\xi, \varphi_0)\mathrm{e}^{-ik\xi\cos\varphi_2} d\xi + \right.$$
$$\left.\left. + \sin(\alpha - \varphi_2) \int_0^{\xi_{eff}} J_h^{(1)}(k\xi, \alpha - \varphi_0)\mathrm{e}^{-ik\xi\cos(\alpha-\varphi_2)} d\xi \right]\right\}. \tag{6.20}$$

При условии $ka \gg 1$ поверхностные источники $J_{s,h}^{(1)}$ вблизи ребра конической поверхности можно считать асимптотически эквивалентными аналогичным источникам вблизи ребра касательного клина. Следовательно, выражения внутри квадратных скобок в (6.19) и (6.20) асимптотически эквивалентны аналогичным выражениям в формулах (4.29) и (4.30), которые относятся к задаче о дифракции на клине. Используя это наблюдение, выражения (6.19) и (6.20) можно теперь записать в виде

$$u_s^{(1)} = \frac{u_0 a}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}}\left[ f^{(1)}(1)\mathrm{e}^{-ika\sin\vartheta + i\frac{\pi}{4}} + f^{(1)}(2)\mathrm{e}^{ika\sin\vartheta - i\frac{\pi}{4}}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \quad (6.21)$$

$$u_h^{(1)} = \frac{u_0 a}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}}\left[ g^{(1)}(1)\mathrm{e}^{-ika\sin\vartheta + i\frac{\pi}{4}} + g^{(1)}(2)\mathrm{e}^{ika\sin\vartheta - i\frac{\pi}{4}}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \quad (6.22)$$

Эти выражения можно интерпретировать как лучевые асимптотики для поля $u_{s,h}^{(1)}$. Они показывают, что при условии $ka\sin\vartheta \gg 1$ это поле состоит из двух дифракционных лучей, приходящих от стационарных точек 1 и 2 на круговом изломе. Видно также, что луч от точки 2 испытывает фазовый сдвиг, равный $-\pi/2$, при пересечении фокальной линии, совпадающей с осью $z$.

Приведенные аппроксимации были получены для областей $0 < \vartheta \le \Omega$ и $\pi - \omega \le \vartheta < \pi$, когда обе стационарных точки видны из точки наблюдения. Та же самая процедура используется для вычисления дифракционного поля в области $\Omega \le \vartheta \le \pi - \omega$, откуда стационарная точка 2 не видна и, следовательно, не дает вклад в первичные краевые волны. В этом случае только окрестность стационарной точки 1 участвует в вычислениях, результатом которых являются следующие выражения:

$$u_s^{(1)} = \frac{u_0 a}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}} f^{(1)}(1)\,\mathrm{e}^{-ika\sin\vartheta + i\frac{\pi}{4}}\,\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \quad (6.23)$$

$$u_h^{(1)} = \frac{u_0 a}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}} g^{(1)}(1)\,\mathrm{e}^{-ika\sin\vartheta + i\frac{\pi}{4}}\,\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \quad (6.24)$$

Функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ определяются формулами (4.14), (4.15) с учетом формул (3.55–3.57 ) и ( 2.62), (2.64). Согласно этим формулам,

$$f^{(1)}(1) = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left( \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi-\vartheta}{n}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi+2\omega-\vartheta}{n}} \right) - $$

$$-\frac{\sin\omega}{\cos\omega - \cos(\omega-\vartheta)}, \quad (6.25)$$

$$g^{(1)}(1)=\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi-\vartheta}{n}}+\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi+2\omega-\vartheta}{n}}\right)-$$

$$-\frac{\sin(\omega-\vartheta)}{\cos\omega-\cos(\omega-\vartheta)}, \tag{6.26}$$

где

$$n=\frac{\alpha}{\pi}=1+\frac{\omega+\Omega}{\pi}. \tag{6.27}$$

Эти выражения для функций $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ применимы во всей области $0\le\vartheta\le\pi$, тогда как для функций $f^{(1)}(2)$ и $g^{(1)}(2)$ мы имеем два различных выражения. В области $0\le\vartheta\le\Omega$

$$f^{(1)}(2)=\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi+\vartheta}{n}}-\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi+2\omega+\vartheta}{n}}\right)-$$

$$-\frac{\sin\omega}{\cos\omega-\cos(\omega+\vartheta)}, \tag{6.28}$$

$$g^{(1)}(2)=\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi+\vartheta}{n}}+\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi+2\omega+\vartheta}{n}}\right)-$$

$$-\frac{\sin(\omega+\vartheta)}{\cos\omega-\cos(\omega+\vartheta)}. \tag{6.29}$$

В области $\pi-\omega\le\vartheta\le\pi$ справедливы выражения

$$f^{(1)}(2)=\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi-\vartheta}{n}}-\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi-2\omega-\vartheta}{n}}\right)-$$

$$-\frac{\sin\omega}{\cos\omega-\cos(\omega+\vartheta)}, \tag{6.30}$$

$$g^{(1)}(2)=\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi-\vartheta}{n}}+\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi-2\omega-\vartheta}{n}}\right)-$$

$$-\frac{\sin(\omega+\vartheta)}{\cos\omega-\cos(\omega+\vartheta)}. \tag{6.31}$$

Слагаемые в функциях $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ сингулярны в некоторых направлениях $\vartheta$, однако такие сингулярности гасят друг друга, и эти функции остаются конечными. Для направления $\vartheta = 0$, которое является границей тени позади рассеивающего тела,

$$f^{(1)}(1) = f^{(1)}(2) = -\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi+2\omega}{n}} - \frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\omega\,, \tag{6.32}$$

$$g^{(1)}(1) = g^{(1)}(2) = \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi+2\omega}{n}} - \frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\omega\,. \tag{6.33}$$

Для направления $\vartheta = 2\omega$, соответствующего зеркальному отражению от конической поверхности,

$$f^{(1)}(1) = \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi-2\omega}{n}} + \frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\omega\,, \tag{6.34}$$

$$g^{(1)}(1) = \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi-2\omega}{n}} - \frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\omega\,. \tag{6.35}$$

Отметим также, что в силу симметрии задачи для направлений $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ справедливы соотношения

$$f^{(1)}(1) = f^{(2)}(2) \text{ и } g^{(1)}(1) = g^{(2)}(2). \tag{6.36}$$

### 6.1.3. Фокусировка краевых волн

Здесь исследуется фокусировка краевых акустических волн, излучаемых *неравномерной* компонентой $j^{(1)}$ поверхностных источников. Аналогичная задача для электромагнитных волн рассматривается в монографии (Ufimtsev, 2003, 2007 a). Ввиду векторной природы электромагнитных волн их асимптотические выражения на фокальной оси существенно отличаются от аналогичных выражений для акустических волн.

В случае падающей волны (6.1) каждая точка на оси $z$ является точкой фокуса для краевых дифракционных волн (рис. 6.1). В дальней зоне такие точки при $z > 0$ имеют координату $\vartheta = 0$, а точки при $z < 0$ характеризуются координатой $\vartheta = \pi$. Для полей в этих направлениях $\vartheta$ общие выражения (6.8) и (6.9) упрощаются. Интегралы по переменной $\psi'$ вычисляются в явном виде, в интегралах по переменной $\xi$ мы полагаем $a \gg \xi_{eff}$, и в результате получаем следующие формулы:

$$u_s^{(1)} = -u_0 \frac{a}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \times$$
$$\times \left[ \int_0^{\xi_{eff}} J_s^{(1)}(k\xi, \varphi_0) e^{\pm ik\xi \cos\omega} d\xi + \int_0^{\xi_{eff}} J_s^{(1)}(k\xi, \alpha - \varphi_0) e^{\mp ik\xi \cos\Omega} d\xi \right], \quad (6.37)$$

$$u_h^{(1)} = -u_0 \frac{ika}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \times \left[ \mp \sin\omega \int_0^{\xi_{eff}} J_h^{(1)}(k\xi, \varphi_0) e^{\pm ik\xi \cos\omega} d\xi \pm \right.$$
$$\left. \pm \sin\Omega \int_0^{\xi_{eff}} J_h^{(1)}(k\xi, \alpha - \varphi_0) e^{\mp ik\xi \cos\Omega} d\xi \right]. \quad (6.38)$$

Здесь верний (нижний) знак относится к направлению $\vartheta = 0$ ($\vartheta = \pi$). В терминах локальных координат эти выражения можно записать в общей форме для обоих направлений:

$$u_s^{(1)} = -u_0 \frac{a}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \times \left[ \int_0^{\xi_{eff}} J_s^{(1)}(k\xi, \varphi_0) e^{-ik\xi \cos\varphi_1} d\xi + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\xi_{eff}} J_s^{(1)}(k\xi, \alpha - \varphi_0) e^{-ik\xi \cos(\alpha - \varphi_1)} d\xi \right], \quad (6.39)$$

$$u_h^{(1)} = -u_0 \frac{ika}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \times \left[ \sin\varphi_1 \int_0^{\xi_{eff}} J_h^{(1)}(k\xi, \varphi_0) e^{-ik\xi \cos\varphi_1} d\xi + \right.$$
$$\left. + \sin(\alpha - \varphi_1) \int_0^{\xi_{eff}} J_h^{(1)}(k\xi, \alpha - \varphi_0) e^{-ik\xi \cos(\alpha - \varphi_1)} d\xi \right]. \quad (6.40)$$

Здесь $\varphi_1 = \omega$ ($\varphi_1 = \pi + \omega$), когда $\vartheta = \pi$ ($\vartheta = 0$). Затем мы обращаемся к формулам (4.29), (4.30) и получаем окончательные выражения для фокальных полей:

$$u_s^{(1)} = u_0 a f^{(1)}(1) \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (6.41)$$

$$u_h^{(1)} = u_0 a g^{(1)}(1) \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (6.42)$$

Теперь очевидно, что фокальные поля в $\sqrt{ka}$ раз больше по величине, чем лучевые поля (6.21), (6.22). В связи с формулами (6.41) и (6.42) мы напоминаем соотношения (6.36), справедливые для фокальных точек.

### 6.1.4. Интерполяция для поля $u_{s,h}^{(1)}$ с помощью функций Бесселя

В предыдущих разделах были получены лучевые и фокальные асимптотики для поля $u_{s,h}^{(1)}$. Лучевые асимптотики (6.21–6.24) применимы при условии $ka\sin\vartheta \gg 1$, т. е. вдали от фокальной линии. Выражения (6.41) и (6.42) определяют поле непосредственно на фокальной оси, где $ka\sin\vartheta = 0$. Нашей целью в данном разделе является построение таких аппроксимаций, которые давали бы единое непрерывное описание дифракционного поля как в лучевой, так и в фокальной областях. Покажем, что такие аппроксимации можно построить, используя функции Бесселя $J_0(ka\sin\vartheta)$ и $J_1(ka\sin\vartheta)$.

Для больших значений аргумента ($ka\sin\vartheta \gg 1$) эти функции имеют асимптотики (Gradshteyn and Ryzhik, 1994)

$$J_0(ka\sin\vartheta) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}}\left(\mathrm{e}^{ika\sin\vartheta - i\frac{\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-ika\sin\vartheta + i\frac{\pi}{4}}\right), \tag{6.43}$$

$$J_1(ka\sin\vartheta) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}}\left(\mathrm{e}^{ika\sin\vartheta - i\frac{3\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-ika\sin\vartheta + i\frac{3\pi}{4}}\right). \tag{6.44}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\mathrm{e}^{-ika\sin\vartheta + i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}} \approx \frac{1}{2}[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)], \tag{6.45}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{ika\sin\vartheta - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}} \approx \frac{1}{2}[J_0(ka\sin\vartheta) + iJ_1(ka\sin\vartheta)]. \tag{6.46}$$

С учетом этих соотношений лучевые асимптотики (6.21), (6.22) можно записать в виде

$$u_s^{(1)} = u_0\frac{a}{2}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \times \{f^{(1)}(1)[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)] +$$
$$+ f^{(1)}(2)[J_0(ka\sin\vartheta) + iJ_1(ka\sin\vartheta)]\}, \tag{6.47}$$

$$u_h^{(1)} = u_0\frac{a}{2}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \times \{g^{(1)}(1)[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)] +$$
$$+ g^{(1)}(2)[J_0(ka\sin\vartheta) + iJ_1(ka\sin\vartheta)]\}. \tag{6.48}$$

Теперь мы аналитически продолжим эти выражения в фокальную область. Если принять во внимание формулы (6.36), а также равенства $J_0(0) = 1$ и $J_1(0) = 0$, то становится очевидным, что выражения (6.47) и (6.48) точно переходят в фокальные асимптотики (6.41), (6.42), когда $\vartheta \to 0$ и $\vartheta \to \pi$. Это означает, что выражения (6.47), (6.48) можно рассматривать как подходящие аппроксимации для дифракционного поля в областях $0 \le \vartheta \le \Omega$ и $\pi - \omega \le \vartheta \le \pi$.

В области $\Omega \le \vartheta \le \pi - \omega$, откуда стационарная точка 2 не видна, можно использовать модифицированные версии формул (6.47) и (6.48),

$$u_s^{(1)} = u_0 \frac{a}{2} f^{(1)}(1)[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)]\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{6.49}$$

$$u_h^{(1)} = u_0 \frac{a}{2} g^{(1)}(1)[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)]\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{6.50}$$

которые представляют собой аналитическое продолжение функций (6.23) и (6.24) на всю область $\Omega \le \vartheta \le \pi - \omega$.

В следующих разделах результаты решения данной канонической задачи используются для исследования полей, рассеянных на некоторых телах вращения.

## 6.2. Рассеяние на диске

Геометрия задачи показана на рис. 6.6. Падающая волна, заданная формулой (6.1), распространяется в положительном направлении оси $z$ и испытывает дифракцию на круглом диске с радиусом $a$. В силу симметрии задачи, рассеяное поле имеет одну и ту же величину во всех меридиональных плоскостях $\varphi = \text{const}$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$. Кроме того, оно симметрично относительно диска: $u_s(-z) = u_s(z)$, $u_h(-z) = -u_h(z)$. Поэтому достаточно исследовать поле только в одной азимутальной плоскости $\varphi = \pi/2$ в направлениях $0 \le \vartheta \le \pi/2$.

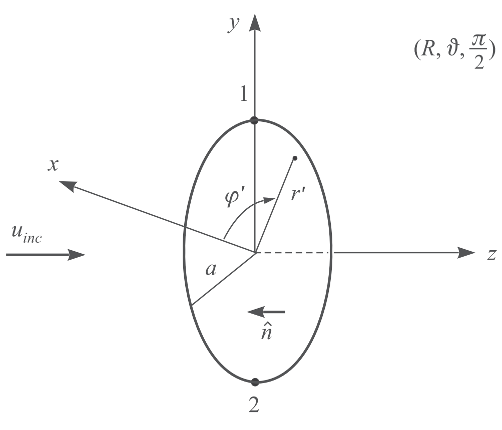


**Рис. 6.6.** Падающая волна испытывает дифракцию на круглом диске. Краевые точки 1 и 2 находятся в плоскости $x = 0$

### 6.2.1. Приближение физической оптики

Соотношения эквивалентности $u_s^{(0)} = E_\varphi^{(0)}$ и $u_h^{(0)} = H_\varphi^{(0)}$ справедливы в задаче о дифракции на диске при условиях $u_s^{inc} = E_\varphi^{inc}$ и $u_h^{inc} = H_\varphi^{inc}$.

**Акустические волны**

В приближении ФО рассеянное поле рассматривается как излучение, создаваемое *равномерной* компонентой (1.31) поверхностных источников, которые возбуждаются падающей волной на освещенной стороне ($z$ = –0) диска. Это поле описывается общими формулами (1.16) и (1.17), где следует положить

$$\vartheta' = \pi/2, \quad \varphi = \pi/2, \quad \cos\Omega = \sin\vartheta \sin\varphi', \quad \hat{m}\cdot\hat{n} = -\frac{z}{r} \approx -\cos\vartheta, \tag{6.51}$$

$$j_s = j_s^{(0)} = -2iku_0, \quad j_h = j_h^{(0)} = 2u_0. \tag{6.52}$$

Теперь

$$u_s^{(0)} = u_0 \frac{ik}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \int_0^a r'dr' \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ikr'\sin\vartheta \sin\varphi'} d\varphi', \tag{6.53}$$

$$u_h^{(0)} = u_0 \frac{ik}{2\pi} \cos\vartheta \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \int_0^a r'dr' \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ikr'\sin\vartheta \sin\varphi'} d\varphi'. \tag{6.54}$$

Согласно справочнику (Gradshteyn and Ryzhik, 1994),

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ix\sin\varphi'} d\varphi' = J_0(x), \quad \int J_0(x) x\, dx = xJ_1(x), \tag{6.55}$$

где $J_0$ и $J_1$ являются функциями Бесселя. Следовательно,

$$u_s^{(0)} = u_0 \frac{ia}{\sin\vartheta} J_1(ka\sin\vartheta) \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{6.56}$$

$$u_h^{(0)} = u_0 \frac{ia}{\sin\vartheta} \cos\vartheta \; J_1(ka\sin\vartheta) \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \tag{6.57}$$

Для малых значений аргумента $J_1(ka\sin\vartheta) \approx (ka\sin\vartheta)/2$. Поэтому, полагая $\vartheta = 0, \pi$, находим следующие приближенные выражения для поля на фокальной линии:

$$u_s^{(0)} = u_0 \frac{ika^2}{2} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \text{ для } \vartheta = 0 \text{ и } \vartheta = \pi, \tag{6.58}$$

$$u_h^{(0)} = \pm u_0 \frac{ika^2}{2} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \text{ для } \vartheta = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}. \tag{6.59}$$

В направлениях наблюдения вдали от фокальной линии, где $ka\sin\vartheta \gg 1$, функцию Бесселя в формулах (6.56) и (6.57) можно заменить ее асимптотикой (6.44). Выражения, полученные при этом, выявляют лучевую структуру поля. Оно состоит из дифракционных лучей, приходящих от стационарных точек 1 и 2:

$$u_s^{(0)} = \frac{u_0 a}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}}\left[f^{(0)}(1)\mathrm{e}^{-ika\sin\vartheta+i\frac{\pi}{4}} + f^{(0)}(2)\mathrm{e}^{ika\sin\vartheta-i\frac{\pi}{4}}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \quad (6.60)$$

$$u_h^{(0)} = \frac{u_0 a}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}}\left[g^{(0)}(1)\mathrm{e}^{-ika\sin\vartheta+i\frac{\pi}{4}} + g^{(0)}(2)\mathrm{e}^{ika\sin\vartheta-i\frac{\pi}{4}}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \quad (6.61)$$

где функции

$$f^{(0)}(1) = -f^{(0)}(2) = -\frac{1}{\sin\vartheta}, \quad (6.62)$$

$$g^{(0)}(1) = -g^{(0)}(2) = -\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \quad (6.63)$$

определяют диаграммы направленности дифракционных лучей в приближении ФО.

### Электромагнитные волны

Чтобы установить соотношения между акустическими и электромагнитными дифракционными полями, мы приводим здесь приближение ФО для поля, рассеянного на идеально проводящем диске (Уфимцев, 1962):

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta^{(0)} &= Z_0 H_\varphi^{(0)} = -\, iaZ_0 H_{0x}\sin\varphi\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}J_1(ka\sin\vartheta)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \\ E_\varphi^{(0)} &= -Z_0 H_\vartheta^{(0)} = -\, iaZ_0 H_{0x}\cos\varphi\frac{1}{\sin\vartheta}J_1(ka\sin\vartheta)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \end{aligned}\right\} \quad (6.64)$$

Это поле возникает при дифракции падающей волны

$$E_y^{inc} = -Z_0 H_x^{inc} = -Z_0 H_{0x}\mathrm{e}^{ikz} = E_{0y}\mathrm{e}^{ikz}, \quad (6.65)$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$ Ом есть импеданс свободного пространства. Согласно (6.65),

$$E_{0\varphi} = E_{0y}\cos\varphi = -Z_0 H_{0x}\cos\varphi, \quad H_{0\varphi} = -H_{0x}\sin\varphi \quad (6.66)$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} E_\varphi^{(0)} &= E_{0\varphi}\frac{ia}{\sin\vartheta}J_1(ka\sin\vartheta)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \\ H_\varphi^{(0)} &= H_{0\varphi}\frac{ia}{\sin\vartheta}\cos\vartheta\, J_1(ka\sin\vartheta)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \end{aligned}\right\} \quad (6.67)$$

Сравнение этих выражений с их аналогами (6.56) и (6.57) выявляет эквивалентность между акустическими и электромагнитными дифракционными полями в приближении ФО:

$$\boxed{\begin{aligned} u_s^{(0)} &= E_\varphi^{(0)}, \text{ если } u_0 = E_{0\varphi}, \\ u_h^{(0)} &= H_\varphi^{(0)}, \text{ если } u_0 = H_{0\varphi}. \end{aligned} \qquad (6.68)}$$

Эти соотношения согласуются с выражениями (1.100), (1.101), установленными ранее для обратного рассеяния.

### 6.2.2. Поле, излучаемое неравномерными поверхностными источниками

Общие выражения для поля, создаваемого *неравномерными* источниками $j_{s,h}^{(1)}$, получены в разделе 6.1.4. Здесь мы воспроизведем их опять применительно к задаче о дифракции на диске. Итак,

$$u_s^{(1)} = u_0 \frac{a}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \times \{f^{(1)}(1)[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)] + \\ + f^{(1)}(2)[J_0(ka\sin\vartheta) + iJ_1(ka\sin\vartheta)]\}, \tag{6.69}$$

$$u_h^{(1)} = u_0 \frac{a}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \times \{g^{(1)}(1)[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)] + \\ + g^{(1)}(2)[J_0(ka\sin\vartheta) + iJ_1(ka\sin\vartheta)]\}, \tag{6.70}$$

где $0 \le \vartheta \le \pi$. Лучевые асимптотики этих полей описываются формулами (6.21) и (6.22). Фокальные асимптотики определяются соотношениями (6.41) и (6.42). Общие выражения для функций $f^{(1)}(1)$, $f^{(1)}(2)$ и $g^{(1)}(1)$, $g^{(1)}(2)$ даны в формулах (6.25–6.31). Запишем теперь их применительно к рассматриваемой задаче о дифракции на диске.

Функции $f^{(1)}(1)$ и $g^{(1)}(1)$ описываются во всей области $0 \le \vartheta \le \pi$ следующими выражениями:

$$f^{(1)}(1) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\vartheta}{2}}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}, \tag{6.71}$$

$$g^{(1)}(1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\vartheta}{2}}\right) + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}. \tag{6.72}$$

Функции $f^{(1)}(2)$ и $g^{(1)}(2)$ определяются формулами

$$f^{(1)}(2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}-\frac{1}{\cos\frac{\vartheta}{2}}\right)-\frac{1}{\sin\vartheta}, \tag{6.73}$$

$$g^{(1)}(2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\vartheta}{2}}\right)-\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \tag{6.74}$$

в области $0\le\vartheta\le\pi/2$, и формулами

$$f^{(1)}(2)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\vartheta}{2}}\right)-\frac{1}{\sin\vartheta}, \tag{6.75}$$

$$g^{(1)}(2)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\vartheta}{2}}\right)-\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \tag{6.76}$$

в области $\pi/2\le\vartheta\le\pi$.

Функции $f^{(1)}(1)$ и $f^{(1)}(2)$ симметричны относительно плоскости диска:

$$f^{(1)}(1,\pi-\vartheta)=f^{(1)}(1,\vartheta),\quad f^{(1)}(2,\pi-\vartheta)=f^{(1)}(2,\vartheta), \tag{6.77}$$

тогда как функции $g^{(1)}(1)$ и $g^{(1)}(2)$ являются антисимметричными:

$$g^{(1)}(1,\pi-\vartheta)=-g^{(1)}(1,\vartheta),\quad g^{(1)}(2,\pi-\vartheta)=-g^{(1)}(2,\vartheta). \tag{6.78}$$

Здесь функции с аргументом $\pi-\vartheta$ соответствуют левому полупространству ($z<0$).

Из формул (6.71–6.76) следует, что

$$f^{(1)}(1)=f^{(1)}(2)=-\frac{1}{2}\ \text{для}\ \vartheta=0\ \text{и}\ \vartheta=\pi, \tag{6.79}$$

$$g^{(1)}(1)=g^{(1)}(2)=\pm\frac{1}{2}\ \text{для}\ \vartheta=\begin{pmatrix}0\\ \pi\end{pmatrix}. \tag{6.80}$$

После подстановки этих значений в формулы (6.41) и (6.42) получаем

$$u_s^{(1)}=-\frac{u_0a}{2}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\ \text{для}\ \vartheta=0\ \text{и}\ \vartheta=\pi, \tag{6.81}$$

$$u_h^{(1)}=\pm\frac{u_0a}{2}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\ \text{для}\ \vartheta=\begin{pmatrix}0\\ \pi\end{pmatrix}. \tag{6.82}$$

Следует отметить, что амплитуда фокального поля, излучаемого *неравномерной* компонентой поверхностных источников, *не зависит* от частоты.

### 6.2.3. Полное рассеянное поле

Сумма

$$u_{s,h} = u_{s,h}^{(0)} + u_{s,h}^{(1)} \tag{6.83}$$

дает приближение ФТД первого порядка для рассеянного поля:

- Величины $u_{s,h}^{(0)}$ и $u_{s,h}^{(1)}$ определяются соответственно формулами (6.56), (6.57) и (6.69), (6.70).
- Их лучевые асимптотики определяются соответственно формулами (6.60), (6.61) и (6.21), (6.22).

  Заметим, что функции $f^{(0)}$, $g^{(0)}$ входят в выражения для полей $u_{s,h}^{(0)}$ и $u_{s,h}^{(1)}$ с противоположными знаками. Поэтому при суммировании этих полей они уничтожают друг друга, и лучевые асимптотики для полного поля (6.83) определяются только через функции Зоммерфельда $f$ и $g$:

$$u_s = \frac{u_0 a}{\sqrt{2\pi ka \sin\vartheta}} \left[ f(1) e^{-ika\sin\vartheta + i\frac{\pi}{4}} + f(2) e^{ika\sin\vartheta - i\frac{\pi}{4}} \right] \frac{e^{ikR}}{R}, \tag{6.84}$$

$$u_h = \frac{u_0 a}{\sqrt{2\pi ka \sin\vartheta}} \left[ g(1) e^{-ika\sin\vartheta + i\frac{\pi}{4}} + g(2) e^{ika\sin\vartheta - i\frac{\pi}{4}} \right] \frac{e^{ikR}}{R}. \tag{6.85}$$

  Функции $f(1, 2)$ и $g(1, 2)$ описываются выражениями (6.71–6.76), в которых следует убрать последние слагаемые, находящиеся вне квадратных скобок.
- Фокальные асимптотики для полей $u_{s,h}^{(0)}$ и $u_{s,h}^{(1)}$ определяются соответственно выражениями (6.58), (6.59) и (6.81), (6.82). Суммируя их, получаем

$$u_s = u_0 \frac{ika^2}{2}\left(1 + \frac{i}{ka}\right)\frac{e^{ikR}}{R} \text{ для } \vartheta = 0 \text{ и } \vartheta = \pi, \tag{6.86}$$

$$u_h = \pm u_0 \frac{ika^2}{2}\left(1 - \frac{i}{ka}\right)\frac{e^{ikR}}{R} \text{ для } \vartheta = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}. \tag{6.87}$$

  Приближение (6.87) для направления $\vartheta = \pi$ совпадает с формулой (14.114) в книге [Bowman et al. (1987)].

Результаты численных расчетов, показанные на рис. 6.7 и 6.8, дополняют анализ рассеянного поля. Здесь изображены нормированные поперечники рассеяния

$$\sigma_{norm} = \frac{\sigma_{s,h}}{\pi a^2 (ka)^2}$$

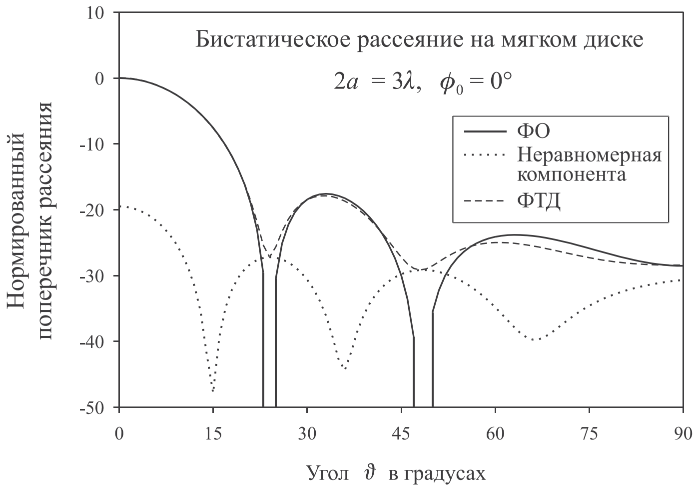


**Рис. 6.7.** Рассеяние на акустически мягком диске. Точечная кривая относится к полю, создаваемому *неравномерными* («*fringe*») поверхностными источниками. Кривая ФО относится к приближению физической оптики. Согласно соотношению (1.100), кривая ФО также демонстрирует рассеяние электромагнитных волн на идеально проводящем диске

в логарифмическом масштабе ($10\lg\sigma_{norm}$). Обычный поперечник рассеяния определяется согласно формуле (1.26).

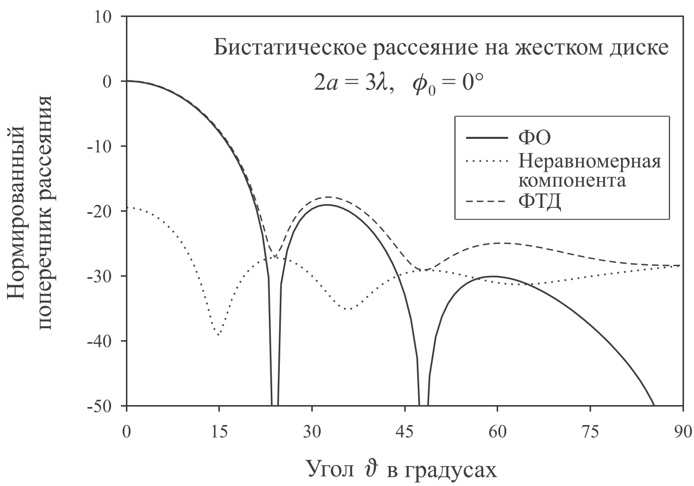


**Рис. 6.8.** Рассеяние на акустически жестком диске. Точечная кривая относится к полю, создаваемому *неравномерными* («*fringe*») поверхностными источниками. Кривая ФО относится к приближению физической оптики (ФО). Согласно соотношению (1.101), кривая ФО также демонстрирует рассеяние электромагнитных волн на идеально проводящем диске

На этих рисунках ясно виден вклад, вносимый *неравномерной* (*fringe*) компонентой $j^{(1)}$ поверхностных источников в полное рассеянное поле. Заметим также, что поле, рассеянное жестким диском, должно равняться нулю в направлении $\vartheta = 90°$. Конечная величина ФТД-поля в этом направлении (рис. 6.8) обусловлена фиктивными рассеивающими источниками $j^{(1)}$, распределенными (в данном приближении) за пределами поверхности диска. Этот недостаток может быть устранен путем усечения таких фиктивных источников, как это уже было показано в разделе 5.1.4.

## 6.3. Рассеяние на конусах: поле на фокальной линии

> В этой задаче приближения ФО для акустических и электромагнитных полей идентичны. Однако асимптотики для полных акустических и электромагнитных полей различны.

Геометрия задачи показана на рис. 6.9. Падающая волна задана формулой (6.1).

### 6.3.1. Асимптотики

Сначала мы вычислим фокальное поле, излучаемое *равномерной* компонентой $j_{s,h}^{(0)}$ поверхностных рассеивающих источников. Они определяются согласно формуле (1.31) и на поверхности конуса имеют следующие значения:

$$j_s^{(0)} = -2u_0 ik \sin\omega \, \mathrm{e}^{ikz}, \quad j_h^{(0)} = 2u_0 \mathrm{e}^{ikz}. \tag{6.88}$$

Рассеянное поле в дальней зоне определяется выражениями (1.16), (1.17), в которых следует положить

$$\hat{m} \cdot \hat{n} = -\sin\omega\cos\vartheta \ \text{ при } \vartheta = 0 \text{ или } \vartheta = \pi \tag{6.89}$$

и

$$ds = \xi \sin\omega d\xi d\varphi', \text{ где } \xi = r'. \tag{6.90}$$

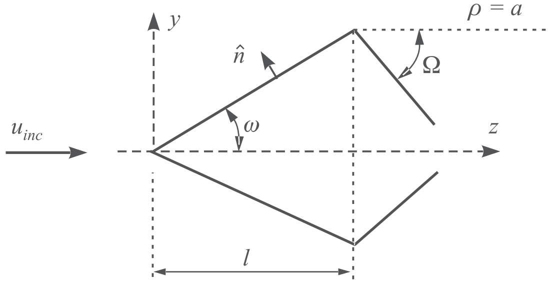


**Рис. 6.9.** Продольное сечение конуса плоскостью *yOz*. Радиус кругового ребра обозначен буквой *a*

Для точек наблюдения на фокальной линии ($\vartheta = 0, \pi$) интеграл по переменной $\varphi'$ равен $2\pi$. Поэтому поле $u_{s,h}^{(0)}$ может быть представлено в виде

$$u_s^{(0)} = u_0 ik \sin^2 \omega \ \frac{e^{ikR}}{R} \int_0^b e^{ik\xi(1-\cos\vartheta)\cos\omega} \xi d\xi, \tag{6.91}$$

$$u_h^{(0)} = u_0 ik \sin^2 \omega \cos\vartheta \ \frac{e^{ikR}}{R} \int_0^b e^{ik\xi(1-\cos\vartheta)\cos\omega} \xi d\xi, \tag{6.92}$$

где $b = a/\sin\omega$ есть длина образующей и $a$ есть радиус основания конуса. Из этих выражений следует, что

$$u_s^{(0)} = u_h^{(0)} = u_0 \frac{ika^2}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \tag{6.93}$$

в переднем направлении ($\vartheta = 0$) и

$$u_s^{(0)} = -u_h^{(0)} = -u_0 \frac{i}{4k} \operatorname{tg}^2\omega \frac{e^{ikR}}{R} + u_0 \cdot \left( \frac{i}{4k} \operatorname{tg}^2\omega + \frac{a}{2} \operatorname{tg}\omega \right) \frac{e^{ikR}}{R} e^{i2kl} \tag{6.94}$$

в направлении обратного рассеяния ($\vartheta = \pi$).

Рассеяние вперед (6.93) точно совпадает с рассеянием (6.58) и (6.59) на диске, и фактически представляет собой теневое излучение, понятие о котором было введено ранее, в разделе 1.3.4. Этот результат полностью согласуется с *теоремой о теневом контуре*, представленной в разделе 1.3.5. Конус и диск с одинаковыми радиусами $a$ образуют одинаковую тень и создают одинаковое теневое излучение.

Сравнение акустических полей (6.93), (6.94) с электромагнитным полем, рассеянным идеально проводящим конусом [формула (2.4.3) в книге (Ufimtsev, 2003, 2007 a), выявляет следующие соотношения эквивалентности:

$$\boxed{\begin{aligned} E_x^{(0)} &= u_s^{(0)}, \text{ если } E_x^{(0)} = u^{inc}, \\ H_y^{(0)} &= u_h^{(0)}, \text{ если } H_y^{(0)} = u^{inc} \end{aligned} \qquad (6.95)}$$

для направлений рассеяния $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$. Этот результат полностью согласуется с более общими соотношениями (1.100) и (1.101) для обратного рассеяния.

Поле, излучаемое *неравномерной* компонентой $j_{s,h}^{(1)}$ поверхностных источников, возбуждаемых вблизи кругового излома, было исследовано в разделе 6.1. Согласно (6.41) и (6.42) это поле равно

$$u_s^{(1)} = u_0 a f^{(1)} \frac{e^{ikR}}{R}, \tag{6.96}$$

$$u_h^{(1)} = u_0 a g^{(1)} \frac{e^{ikR}}{R} \tag{6.97}$$

в переднем направлении ($\vartheta = 0$), и

$$u_s^{(1)} = u_0 a f^{(1)} \frac{e^{ikR}}{R} e^{i2kl}, \tag{6.98}$$

$$u_h^{(1)} = u_0 a g^{(1)} \frac{e^{ikR}}{R} e^{i2kl} \tag{6.99}$$

в обратном направлении ($\vartheta = \pi$). Здесь

$$f^{(1)} = -\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi + 2\omega}{n}} - \frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\omega, \tag{6.100}$$

$$g^{(1)} = \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi + 2\omega}{n}} - \frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\omega \tag{6.101}$$

в переднем направлении ($\vartheta = 0$), и

$$f^{(1)} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\omega, \tag{6.102}$$

$$g^{(1)} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\omega \tag{6.103}$$

в обратном направлении ($\vartheta = \pi$). В этих выражениях $n = 1 + (\omega + \Omega)/\pi$.

В отличие от указанных выше соотношений эквивалентности между акустическими и электромагнитными полями *в приближении ФО*, акустические и электромагнитные поля, излучаемые *неравномерными* компонентами поверхностных источников, принципиально отличаются друг от друга. Так, согласно формулам (2.3.18), (2.3.19) в книге (Ufimtsev, 2003, 2007 a), электромагнитное поле определяется линейной комбинацией функций $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$, тогда как акустическое поле $u_s^{(1)}$ зависит только от функции $f^{(1)}$, а поле $u_h^{(1)}$ только от функции $g^{(1)}$.

Полученные выше формулы описывают поле $u_{s,h}^{(1)}$, излучаемое *только теми* неравномерными источниками, которые возбуждаются вблизи кругового излома конической поверхности. Эти формулы не учитывают существование еще двух типов *неравномерной* компоненты. Одна из них обусловлена плавным искривлением конической поверхности и является малой величиной порядка $(k\rho)^{-1}$ вдали от вершины конуса. Здесь $\rho$ есть полярная координата поверхности конуса ($\rho = a$ на ребре конуса). Другая неравномерная компонента обусловлена как острием конуса, так и большой кривизной его поверхности вблизи вершины. На большом расстоянии $\xi$ от вершины эта компонента имеет малую велину порядка $(k\xi)^{-1}$ или выше. В случае дифракции электромагнитных волн на идеально проводящем конусе было показано (Уфимцев, 1962, 2003, 2007 а), что при вычислении обратного рассеяния можно пренебречь влиянием обеих этих неравномерных компонент. Строгое исследование задачи о дифракции на полубесконечном конусе (Felsen, 1955; Bowman et al.,1987) также подтверждает это наблюдение.

С учетом этих замечаний ФТД-приближение первого порядка для обратного рассеяния ($\vartheta = \pi$) можно получить, суммируя аппроксимации (6.94), (6.98) и (6.99):

$$u_s = u_0 a\left[-\frac{i}{4ka}\operatorname{tg}^2\omega\,(1-\mathrm{e}^{i2kl})+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-1}-\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2\omega}{n}}\right)\mathrm{e}^{i2kl}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{6.104}$$

$$u_h = u_0 a\left[\frac{i}{4ka}\operatorname{tg}^2\omega\,(1-\mathrm{e}^{i2kl})+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-1}+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2\omega}{n}}\right)\mathrm{e}^{i2kl}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \tag{6.105}$$

В предельном случае, когда $\omega \to \pi/2$ и передняя часть конуса (рис. 6.9) трансформируется в диск, формулы для обратного рассеяния преобразуются к следующему виду:

$$u_s = u_0 a\left(\frac{ika}{2}+\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}-1}+\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{6.106}$$

$$u_h = u_0 a\left(-\frac{ika}{2}+\frac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}-1}-\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{6.107}$$

где $n = 3/2 + \Omega/\pi$. И, наконец, при $\Omega \to \pi/2$ эти выражения трансформируются в более простые функции

$$u_s = u_0\left(\frac{ika^2}{2} - \frac{a}{2}\right)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{6.108}$$

$$u_h = -u_0\left(\frac{ika^2}{2} + \frac{a}{2}\right)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{6.109}$$

которые точно совпадают с функциями (6.86) и (6.87) для обратного рассеяния от диска.

### 6.3.2. Численный анализ обратного рассеяния

При записи поля в форме

$$u_{s,h} = u_0\Phi_{s,h}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \tag{6.110}$$

поперечник рассеяния определяется согласно выражению (1.26) следующей формулой:

$$\sigma_{s,h} = 4\pi|\Phi_{s,h}|^2. \tag{6.111}$$

Расчеты проводились для нормированного поперечника рассеяния

$$\sigma_{s,h}^{norm} = \sigma_{s,h}/\pi a^2 \tag{6.112}$$

и изображались графически в шкале децибел, т. е. строились графики величины $10\lg\sigma_{s,h}^{norm}$. Отметим, что эта нормировка отличается от использованной в разделе 6.2.3 в задаче о рассеянии на диске.

Согласно разд. 6.3.1, в приближении физической оптики имеем следующую величину для поперечника обратного рассеяния:

$$\sigma^{(0)} = \sigma_s^{(0)} = \sigma_h^{(0)} = \pi a^2\left|\frac{i}{2ka}\mathrm{tg}^2\omega\,(1-\mathrm{e}^{i2kl}) - \mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{e}^{i2kl}\right|^2. \tag{6.113}$$

В предельном случае, когда $\omega \to \pi/2$,

$$\sigma^{(0)} = \pi a^2(ka)^2. \tag{6.114}$$

С учетом вклада от *неравномерной* компоненты $j_{s,h}^{(1)}$ поверхностных источников, полный поперечник рассеяния равен

$$\sigma_s = \pi a^2\left|\frac{i}{2ka}\mathrm{tg}^2\omega\,(1-\mathrm{e}^{i2kl}) - \frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-1} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2\omega}{n}}\right)\mathrm{e}^{i2kl}\right|^2, \tag{6.115}$$

$$\sigma_h = \pi a^2 \left| \frac{i}{2ka} \operatorname{tg}^2\omega\,(1 - e^{i2kl}) + \frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n} \left( \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}} \right) e^{i2kl} \right|^2, \tag{6.116}$$

где $n = 1 + (\omega + \Omega)/\pi$.

В предельном случае, когда $\omega \to \pi/2$,

$$\sigma_s = \pi a^2 \left| ika + \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} + \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} \right|^2, \tag{6.117}$$

$$\sigma_h = \pi a^2 \left| -ika + \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} - \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} \right|^2, \tag{6.118}$$

где $n = 3/2 + \Omega/\pi$.

Наконец, когда оба угла $\omega$ и $\Omega$ равны $\pi/2$ и конус трансформируется в диск,

$$\sigma_s = \pi a^2 |ika - 1|^2, \tag{6.119}$$

$$\sigma_h = \pi a^2 |ika + 1|^2. \tag{6.120}$$

Нормированный поперечник рассеяния (6.112) для конуса исследовался численно как функция трех переменных: длины $l$, угла $\omega$ и угла $\Omega$. Результаты изображены графически в логарифмическом масштабе. Ниже дано краткое описание проведенных расчетов:

- Расчеты поперечника рассеяния (6.112) как функции длины $l$ были выполнены для конусов с параметрами
  $\omega = 45°$, $\Omega = 90°$, $a = l\operatorname{tg}\omega = l$, $10 \le kl < 30$.
  В этом случае $1{,}5\lambda < l < 4{,}8\lambda$ и $3\lambda < 2a < 9{,}6\lambda$. Результаты представлены на рис. 6.10.
  Как видно на рисунке, величина поперечника рассеяния для жесткого конуса значительно превышает соответствующую величину для мягкого конуса. Различие между ними составляет примерно 15 дБ. Значения, соответствующие приближению ФО, находятся примерно посередине между $\sigma_s$ и $\sigma_h$.
- Расчеты поперечника рассеяния (6.112) как функции угла раствора конуса ($\omega$) были выполнены для конусов с параметрами
  $ka = 3\pi$, $10° \le \omega \le 90°$, $\Omega = 90°$.
  В этом случае $2a = 3\lambda$, $0 \le l \le 8{,}5\lambda$. Результаты изображены на рис. 6.11.
  Большое отличие наблюдается между данными для мягкого и жесткого конусов. Для узких конусов оно достигает величины порядка 40 дБ.

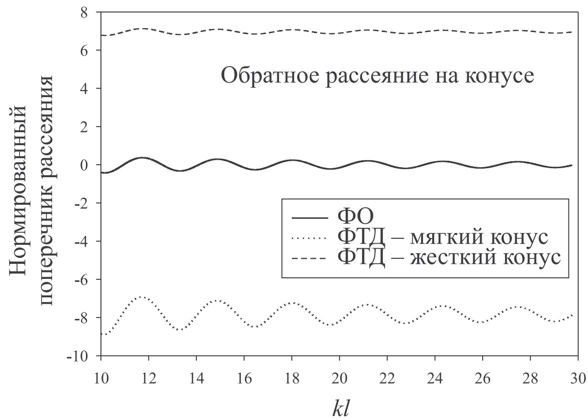


**Рис. 6.10.** Обратное рассеяние от конуса: зависимость от длины конуса $l$. Согласно соотношениям эквивалентности (6.95), кривая ФО также демонстрирует рассеяние электромагнитных волн от идеально проводящего конуса

- Расчеты поперечника рассеяния (6.112) как функции угла $\Omega$ (рис. 6.9) были выполнены для конусов с параметрами
  $\omega = 10°, ka = 3\pi, kl = 17\pi, 0° \leq \Omega \leq \pi - \omega = 170°$.
  В этом случае $2a = 3\lambda$ и $l \approx 8.5\lambda$. Результаты представлены на рис. 6.12. Приближение ФО не зависит от угла $\Omega$ и поэтому изображается прямой горизонтальной линией. Разность между данными для мягкого и жесткого конусов изменяется в интервале 42–57 дБ. Влияние формы основания конуса достигает величины порядка 11дБ для мягкого конуса и 16 дБ для жесткого конуса.

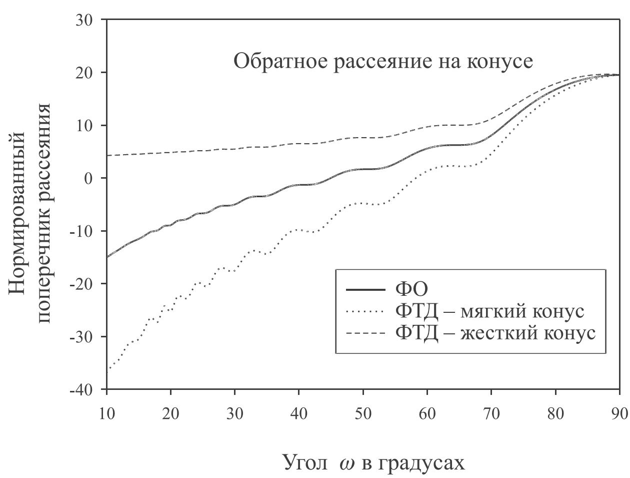


**Рис. 6.11.** Обратное рассеяние от конуса: зависимость от угла раствора конуса. Согласно соотношениям эквивалентности (6.95), кривая ФО также демонстрирует рассеяние электромагнитных волн от идеально проводящего конуса

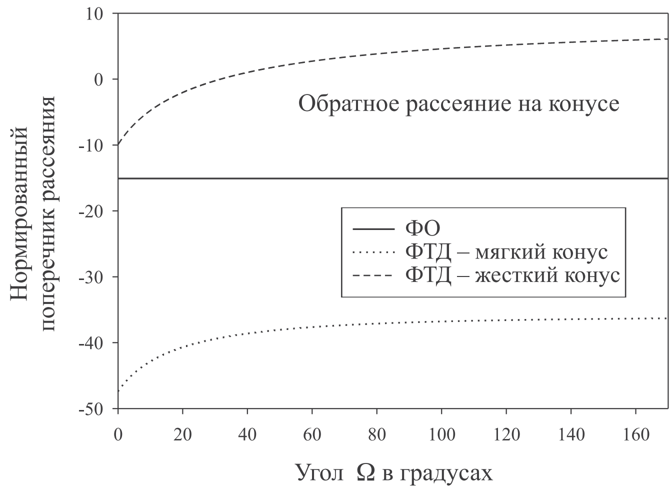


**Рис. 6.12.** Обратное рассеяние от конуса: зависимость от угла Ω. Согласно соотношениям эквивалентности (6.95), кривая ФО также демонстрирует рассеяние электромагнитных волн от идеально проводящего конуса

# 6.4. Тела вращения с ненулевой гауссовой кривизной: обратное рассеяние

В этом разделе изучается симметричное рассеяние на телах вращения, освещенная часть которых является произвольной гладкой и выпуклой поверхностью с ненулевой гауссовой кривизной. Образующая такой поверхности и соответствующая геометрия показаны на рис. 6.13. Поясним другие детали, относящиеся к постановке задачи.

Падающая волна (6.1) распространяется в положительном направлении оси $z$, которая является осью симметрии рассеивающего тела. Мы используем две системы координат: цилиндрические координаты $\rho$, $\varphi$, $z$ и сферические координаты $r$, $\vartheta$, $\varphi$. Образующая тела вращения задается уравнением $\rho = \rho(z)$.

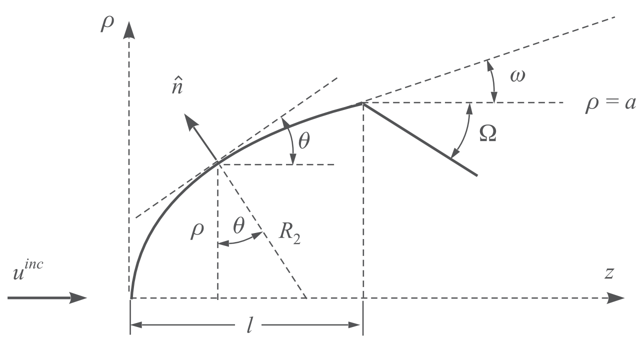


**Рис. 6.13.** Образующая тела вращения

Предполагается, что $d^2\rho/dz^2 \neq 0$ для освещенной стороны ($0 \le z \le l$) тела. Это условие означает, что ее гауссова кривизна не равна нулю. Мы также используем следующие обозначения, относящиеся к точкам на круговом ребре ($\rho = a$): $d\rho/dz = \mathrm{tg}\omega$ для освещенной стороны ($z = l - 0$) и $d\rho/dz = -\mathrm{tg}\Omega$ для теневой стороны ($z = l + 0$). Теневая сторона может быть проивольной гладкой поверхностью, где $0 \le \Omega \le \pi - \omega$. В предельном случае, когда $\Omega = \pi - \omega$, рассеивающее тело может быть бесконечно тонким (но по-прежнему идеально отражающим) экраном с образующей $\rho = \rho(z)$, где $0 \le z \le l$.

Главные радиусы кривизны рассеивающей поверхности определяются в соответствии с дифференциальной геометрией (Бронштейн и Семендяев, 1953, 1985):

$$R_1 = \frac{\{1 + [\rho'(z)]^2\}^{3/2}}{|\rho''(z)|}, \quad R_2 = \rho(z)\sqrt{1 + [\rho'(z)]^2}, \tag{6.121}$$

где $\rho' = d\rho(z)/dz$, $\rho'' = d^2\rho(z)/dz^2$. Радиус $R_1$ относится к нормальному сечению поверхности меридиональной плоскостью ($\rho$, $z$). Радиус $R_2$ относится к ортогональному нормальному сечению. Поскольку $\rho' = \mathrm{tg}\theta$ и $\omega \le \theta \le \pi/2$, главные радиусы кривизны можно записать как функции угла $\theta$:

$$R_1 = \frac{1}{|\rho''(z)|\cos^3\theta}, \quad R_2 = \frac{\rho(z)}{\cos\theta}. \tag{6.122}$$

Радиус $R_2$ показан на рис. 6.13. Гауссова кривизна определяется формулой

$$k_G = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{|\rho''(z)|}{\rho(z)}\cos^4\theta. \tag{6.123}$$

Приведенные выражения для величин $R_1$, $R_2$ и $k_G$ становятся неопределенными в точке $z = 0$, где $\rho = 0$ и $\theta = \pi/2$. Чтобы раскрыть эти неопределенности, можно использовать альтернативные выражения,

$$R_1 = \frac{\{1 + [z'(\rho)]^2\}^{3/2}}{z''(\rho)}, \quad R_2 = \frac{\rho\sqrt{1 + [z'(\rho)]^2}}{z'(\rho)}, \tag{6.124}$$

где $z = z(\rho)$, $z' = dz(\rho)/d\rho$ и $z'' = d^2z(\rho)/d\rho^2$. Из этих выражений следует, что в точке $\rho = z = 0$

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{z''(\rho)}. \tag{6.125}$$

Равенство двух главных радиусов кривизны означает, что точка $\rho = z = 0$ рассеивающей поверхности является омбилической точкой.

### 6.4.1. Приближение ФО

Это приближение описывает поле, излучаемое *равномерными* компонентами (1.31) поверхностных источников,

$$j_s^{(0)} = iu_0 2kn_z \mathrm{e}^{ikz}, \quad j_h^{(0)} = u_0 2\mathrm{e}^{ikz}. \tag{6.126}$$

Согласно дифференциальной геометрии (Бронштейн и Семендяев, 1953, 1985),

$$\hat{n}=\hat{x}\frac{\cos\psi}{\sqrt{1+[\rho'(z)]^2}}+\hat{y}\frac{\sin\psi}{\sqrt{1+[\rho'(z)]^2}}-\hat{z}\frac{\rho'(z)}{\sqrt{1+[\rho'(z)]^2}}, \tag{6.127}$$

или

$$\hat{n}=\hat{x}\cos\theta\cos\psi+\hat{y}\cos\theta\sin\psi-\hat{z}\sin\theta. \tag{6.128}$$

Здесь мы исаользуем букву $\psi$ для полярной координаты рассеивающей поверхности и сохраняем букву $\varphi$ для полярной координаты точки наблюдения.

Рассеянное поле в дальней зоне определяется формулами (1.16) и (1.17), где теперь следует положить

$$ds=\rho(z)\sqrt{1+(\rho')^2}\,dzd\psi, \quad r'\sin\vartheta'=\rho(z), \quad r'\cos\vartheta'=z, \tag{6.129}$$

$$\hat{m}=\nabla r=\hat{x}\sin\vartheta\cos\varphi+\hat{y}\sin\vartheta\sin\varphi+\hat{z}\cos\vartheta. \tag{6.130}$$

В силу симметрии рассеянного поля, его достаточно вычислить в меридиональной плоскости $\varphi=\pi/2$. В этом случае

$$\hat{m}\cdot\hat{n}=\frac{\sin\vartheta\sin\psi-\rho'(z)\cos\vartheta}{\sqrt{1+[\rho'(z)]^2}} \tag{6.131}$$

и

$$u_s^{(0)}=u_0\frac{ik}{2\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\int_0^l e^{ikz(1-\cos\vartheta)}\rho(z)\rho'(z)dz\int_0^{2\pi}e^{-ik\rho(z)\sin\vartheta\sin\psi}d\psi, \tag{6.132}$$

$$u_h^{(0)}=-u_0\frac{ik}{2\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\int_0^l e^{ikz(1-\cos\vartheta)}\rho(z)dz\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}e^{-ik\rho(z)\sin\vartheta\sin\psi}[\sin\vartheta\sin\psi-\rho'(z)\cos\vartheta]d\psi. \tag{6.133}$$

Из этих выражений следует, что

$$u_s^{(0)}=u_h^{(0)}=u_0\frac{ika^2}{2}\frac{e^{ikR}}{R} \tag{6.134}$$

в переднем направлении ($\vartheta=0$) и

$$u_s^{(0)}=-u_h^{(0)}=u_0 ik\frac{e^{ikR}}{R}\int_0^l e^{i2kz}\rho(z)\rho'(z)\,dz \tag{6.135}$$

в обратном направлении ($\vartheta=\pi$). Интегрируя по частям, получаем следующие асимптотические оценки:

$$u_s^{(0)}=-u_h^{(0)}=-u_0\frac{1}{2}\left[\rho(0)\rho'(0)-\rho(l)\rho'(l)e^{i2kl}+O\left(\frac{1}{k}\right)\right]\frac{e^{ikR}}{R}. \tag{6.136}$$

Неопределенность в первом слагаемом в квадратных скобках раскрывается с помощью следующих преобразований:

$$\rho(0)\rho'(0) = \lim_{z\to 0}\rho(z)\frac{d\rho(z)}{dz} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho}{dz(\rho)/d\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{d^2 z(\rho)/d\rho^2} = \frac{1}{z''(0)}. \quad (6.137)$$

Согласно формуле (6.125), эта величина определяет радиус кривизны рассеивающей поверхности в точке $z = 0$. Теперь выражение (6.136) можно записать в виде

$$\boxed{u_s^{(0)} = -u_h^{(0)} = -u_0\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z''(0)} - a\,\mathrm{tg}\omega\, \mathrm{e}^{i2kl}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \qquad (6.138)}$$

Здесь первое слагаемое описывает обычный луч, отраженный от вершины тела, а второе слагаемое определяет фокальное поле первого порядка, которое излучается равномерной компонентой $j_{s,h}^{(0)}$ поверхностных источников, возбуждаемых падающей волной вблизи кругового ребра ($z = l$). Действительно, согласно формулам (6.125) и (6.138), поперечник обратного рассеяния (1.26), соответствующий отражению от вершины тела, равен

$$\sigma = \pi\frac{1}{[z''(0)]^2} = \pi R_{1,2}^2, \quad (6.139)$$

что полностью согласуется с формулой (1.27). Отметим еще, что согласно соотношениям эквивалентности (1.100) и (1.101), выражения (6.138) и (6.139) также справедливы для электромагнитных волн, отраженных от идеально проводящих тел.

### 6.4.2. Обратное рассеяние. Поле на фокальной линии: ФТД первого порядка

В этом приближении полное рассеянное поле в направлении $\vartheta = \pi$ находится суммированием его компонент (6.138) и (6.41), (6.42), создаваемых соответственно *равномерными* $j_{s,h}^{(0)}$ и *неравномерными* $j_{s,h}^{(1)}$ поверхностными источниками. Заметим, что функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ в выражениях (6.41) и (6.42) определяются для направления $\vartheta = \pi$ формулами (6.102) и (6.103). В результате указанного суммирования получаем следующие асимптотические выражения:

$$\boxed{u_s = -\frac{u_0}{2}\left[\frac{1}{z''(0)} - a\frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}}\right)\mathrm{e}^{i2kl}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \quad (6.140)}$$

$$u_h = \frac{u_0}{2}\left[\frac{1}{z''(0)} + a\,\frac{2\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1} + \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{2\omega}{n}}\right)\mathrm{e}^{i2kl}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \qquad (6.141)$$

Здесь $n = 1 + (\omega + \Omega)/\pi$, где $0 \le \omega \le \pi/2$ и $0 \le \Omega \le \pi - \omega$. В следующих разделах мы исследуем обратное рассеяние от двух конкретных тел вращения.

### 6.4.3. Обратное рассеяние от параболоидов

В этой задаче асимптотики ФО для акустических и электромагнитных волн идентичны. Но фокальные ФТД-асимптотики для акустических и электромагнитных волн существенно отличаются друг от друга.

**Асимптотики для рассеянного поля**

Освещенная сторона рассеивающего тела представляет собой параболоид, образующая которого задана уравнением

$$\rho^2(z) = 2pz, \qquad (6.142)$$

где $0 \le z \le l$. Фокус параболоида находится в точке $z = p/2$. Согласно формуле (6.125) фокальный параметр $p$ равен радиусу кривизны параболоида в точке его вершины ($z = 0$). Форма затененной стороны тела и его другие геометрические характеристики показаны на рис. 6.13.

В соответствии с формулами (6.138) и (6.140), (6.141), обратное рассеянное поле на фокальной оси описывается следующими асимптотическими выражениями. Первое из них относится к приближению ФО:

$$u_s^{(0)} = -u_h^{(0)} = -\frac{u_0}{2}(p - a\,\mathrm{tg}\omega\,\mathrm{e}^{i2kl})\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \qquad (6.143)$$

Следующие два выражения относятся к ФТД первого порядка:

$$u_s = -\frac{u_0}{2}\left[p - a\,\frac{2\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1} - \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{2\omega}{n}}\right)\mathrm{e}^{i2kl}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \qquad (6.144)$$

$$u_h = \frac{u_0}{2}\left[p + a\,\frac{2\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1} + \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{2\omega}{n}}\right)\mathrm{e}^{i2kl}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \qquad (6.145)$$

где $n = 1 + (\omega + \Omega)/\pi$. Сравнение с приближением ФО для электромагнитного поля, рассеянного на идеально проводящем параболоиде [см. формулу (2.5.3) в книге (Уфимцев, 2003, 2007 а)], позволяет установить следующие соотношения эквивалентности:

$$\boxed{\begin{aligned} &E_x^{(0)} = u_s^{(0)}, \text{ если } E_x^{(0)} = u^{inc}, \\ &H_y^{(0)} = u_h^{(0)}, \text{ если } H_y^{(0)} = u^{inc}, \end{aligned} \qquad (6.146)}$$

которые полностью согласуются с общими выражениями (1.100) и (1.101).

Принимая во внимание что $\rho'(l) = p/a = \mathrm{tg}\omega$ и $p = a\,\mathrm{tg}\omega$, выражения для рассеянного поля можно переписать в виде

$$u_s^{(0)} = -u_h^{(0)} = -u_0 \frac{a}{2} \mathrm{tg}\omega\, (1 - \mathrm{e}^{i2kl}) \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \tag{6.147}$$

и

$$u_s = -u_0 \frac{a}{2} \left[ \mathrm{tg}\omega - \frac{2\sin\dfrac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n} - 1} - \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n} - \cos\dfrac{2\omega}{n}} \right) \mathrm{e}^{i2kl} \right] \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{6.148}$$

$$u_h = u_0 \frac{a}{2} \left[ \mathrm{tg}\omega + \frac{2\sin\dfrac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n} - 1} + \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n} - \cos\dfrac{2\omega}{n}} \right) \mathrm{e}^{i2kl} \right] \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \tag{6.149}$$

Эти выражения полезны, в частности, тем, что позволяют проследить за поведением поля при непрерывной трансформации параболоида в диск, когда $\omega \to \pi/2$. Используя соотношение $l = a^2/2p = (a\,\mathrm{ctg}\omega)/2$, можно показать, что в предельном случае при $\omega = \pi/2$

$$u_s^{(0)} = -u_h^{(0)} = u_0 \frac{ika^2}{2} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \tag{6.150}$$

и

$$u_s = u_0 \frac{a}{2} \left( ika + \frac{1}{n} \mathrm{ctg}\frac{\pi}{n} + \frac{\dfrac{2}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n} - 1} \right) \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{6.151}$$

$$u_h = -u_0 \frac{a}{2} \left( ika + \frac{1}{n} \mathrm{ctg}\frac{\pi}{n} - \frac{\dfrac{2}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n} - 1} \right) \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{6.152}$$

где $n = 3/2 + \Omega/\pi$.

Характерным свойством приближения ФО являются осцилляции с нулями, соответствующими значениям $kl = m\pi$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$ . Другие свойства рассеянного поля демонстрируются в следующем разделе.

**Численный анализ обратного рассеяния**

Здесь вычисляется нормированный поперечник рассеяния (6.112), который определяется в терминах рассеянного поля выражениями (6.110) и (6.111). Используя результаты предыдущего раздела, можно получить следующие формулы для поперечника рассеяния.

В приближении ФО

$$\sigma_s^{(0)} = \sigma_h^{(0)} = \pi a^2 |\operatorname{tg}\omega \cdot (1 - \mathrm{e}^{i2kl})|^2 \tag{6.153}$$

и в приближении ФТД первого порядка

$$\sigma_s = \pi a^2 \left| \operatorname{tg}\omega - \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}}\right)\mathrm{e}^{i2kl}\right|^2, \tag{6.154}$$

$$\sigma_h = \pi a^2 \left| \operatorname{tg}\omega + \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}}\right)\mathrm{e}^{i2kl}\right|^2, \tag{6.155}$$

где $n = 1 + (\omega + \Omega)/\pi$.

Когда $l \to 0$ и $\omega \to \pi/2$, из этих выражений следует, что

$$\sigma^{(0)} = \pi a^2 (ka)^2, \tag{6.156}$$

$$\sigma_s = \pi a^2 \left| ika + \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - 1}\right|^2, \tag{6.157}$$

$$\sigma_h = \pi a^2 \left| ika + \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} - \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - 1}\right|^2, \tag{6.158}$$

где $n = 3/2 + \Omega/\pi$.

Далее представлены результаты трех расчетов, аналогичных тем, которые были проведены в разделе 6.3.2 для конуса. В первом из них исследуется рассеяние от конформных параболоидов в зависимости от их длины. Во втором исследуется рассеянное поле при трансформации параболоида в диск. Целью третьего расчета является изучение влияния формы затененной части параболоида на обратное рассеяние.

- При исследовании рассеяния от конформных параболоидов их фокальный параметр считается постоянным ($kp = 3\pi \text{tg} 14°$), а параметр $kl$ изменяется ($6\pi \leq kl \leq 36$). В этом случае радиус основания параболоида и его длина изменяются в интервалах
  $1{,}5\lambda \leq a \leq 2\lambda$ и $3\lambda \leq l \leq 5{,}8\lambda$.
  При заданной частоте ($k = \text{const}$) фокальный параметр $p$ является постоянной величиной для всех параболоидов с различными длинами $l$. Это условие фактически означает, что все такие параболоиды являются лишь различными частями одного и того же полубесконечного параболоида. Поэтому мы называем их конформными.
  Согласно соотношению $l = a^2/2p = (a\text{ctg}\omega)/2$ угол $\omega$ (рис. 6.13) определяется уравнением $\text{ctg}\omega = \sqrt{2kl/ka}$. При заданных выше значениях параметра $kl$ этот угол изменяется в интервале $10{,}24° \leq \omega \leq 14°$. Для угла $\Omega$ (рис. 6.13) мы принимаем значение $\Omega = 90°$. Результаты расчетов изображены графически на рис. 6.14.
  Разность между результатами расчетов для акустически мягких и жестких параболоидов достигает величины около 16–19 дБ. Как видно из этого рисунка, приближение ФО является слишком грубым. Данные для поперечника рассеяния, соответствующие ФО, совсем не зависят от граничных условий и совершенно неверны в окрестности минимумов.
- Следующим предметом исследования является трансформация параболоида в диск. В этом процессе трансформации каждая поверхность, промежуточная между начальной и конечной, является параболоидом с фокальным параметром $p$, зависящим от его длины $l$.
  Из уравнения $l = a^2/2p$ следует, что $p = a^2/2l$. Чтобы определить угол $\omega$ (рис. 6.13), мы используем дополнительное уравнение $\text{tg}\omega = a/2l$, или

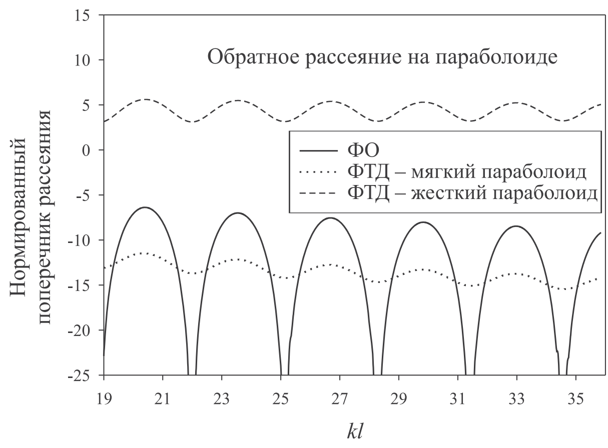


**Рис. 6.14.** Обратное рассеяние от конформных параболоидов с различной длиной $l$ и с постоянным фокальным параметром $p$. Согласно соотношениям эквивалентности (6.146), кривая ФО также демонстрирует рассеяние электромагнитных волн от идеально проводящих параболоидов, рассчитанное в приближении физической оптики (ФО)

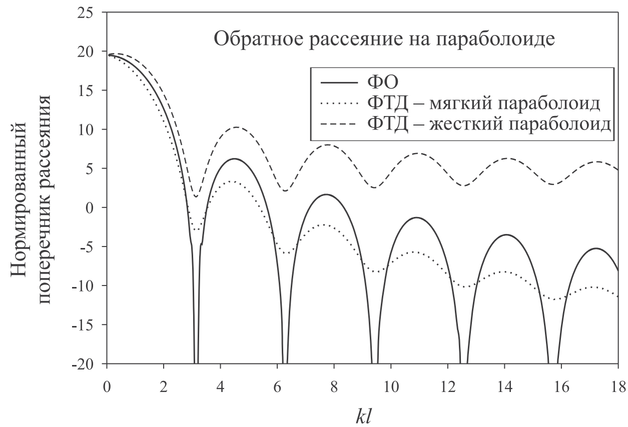


**Рис. 6.15**. Трансформация параболоида в диск. Все промежуточные поверхности являются параболоидами с различными значениями фокального параметра $p$. Согласно соотношениям эквивалентности (6.146), кривая ФО также демонстрирует рассеяние электромагнитных волн от идеально проводящих параболоидов, расчитанное в приближении физической оптики

$\mathrm{tg}\omega = ka/2kl$. Для параметра $ka$ мы принимаем постоянное значение $ka = 3\pi$, которое не зависит от длины параболоида. В этом случае диаметр всех промежуточных параболоидов и их предельной формы в виде диска равен $2a = 3\lambda$. Для начального параболоида, с которого начинается трансформация в диск, мы полагаем $kl = 6\pi$, т. е. $l = 3\lambda$. Результаты расчетов изображены на рис. 6.15.

- Теперь мы рассмотрим влияние формы теневой части параболоида на обратное рассеяние. Исследуется рассеяние от параболоида с параметрами $ka = 3\pi$ и $kl = 6\pi$. При этом диаметр основания параболоида равен его длине, $2a = l = 3\lambda$. Параметром, который характеризует форму основания параболоида и оказывает влияние на рассеянное поле, является угол $\Omega$. Он изменяется от нуля до значения $\Omega = \pi - \omega$, где

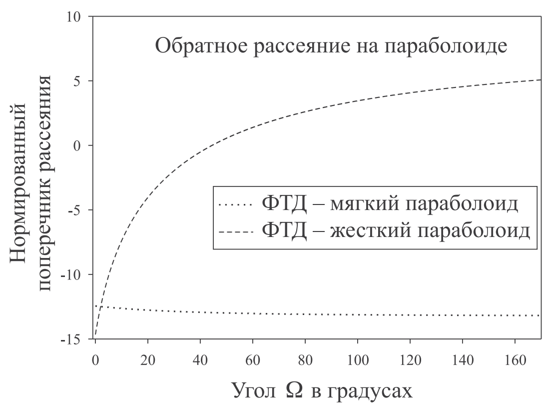


**Рис. 6.16.** Влияние формы теневой части параболоида на обратное рассеяние

$\omega = \text{arctg}\left(\dfrac{ka}{2kl}\right) \approx 14°$. В предельном случае $\Omega = \pi - \omega$ рассеивающее тело трансформируется в идеально отражающий параболоид с бесконечно тонкой стенкой. Результаты этого исследования представлены на рис. 6.16. Приближение ФО не зависит от формы теневой части параболоида. Для выбранного значения параметра $kl = 6\pi$ рассеянное поле в этом приближении равно нулю. В логарифмической шкале ему соответствует величина, равная отрицательной бесконечности, находящаяся за пределами рисунка. Как видно из этого рисунка, обратное рассеяние от акустически мягкого параболоида относительно слабо зависит от угла $\Omega$. Его поперечник рассеяния изменяется на величину около 3 дБ. Напротив, сильная зависимость наблюдается для акустически жесткого параболоида (около 20 дБ).

## 6.4.4. Обратное рассеяние от сферических сегментов

> В этой задаче асимптотики ФО для акустических и электромагнитных волн идентичны. Но фокальные ФТД-асимптотики для акустических и электромагнитных волн существенно отличаются друг от друга.

### Асимптотики для рассеянного поля

Освещенная поверхность рассеиваюшего тела является сферическим сегментом, образующая которого показана на рис. 6.17 и определяется формулой

$$z(\rho) = b - \sqrt{b^2 - \rho^2} \text{ при } 0 \le z \le l, \tag{6.159}$$

где $b$ есть радиус сферической поверхности. Отсюда следует, что

$$z'(\rho) = \frac{dz(\rho)}{d\rho} = \frac{\rho}{\sqrt{b^2 - \rho^2}} = \text{ctg}\theta, \tag{6.160}$$

$$z''(\rho) = \frac{d^2 z(\rho)}{d\rho^2} = \frac{b^2}{(b^2 - \rho^2)^{3/2}}, \quad z''(0) = \frac{1}{b}. \tag{6.161}$$

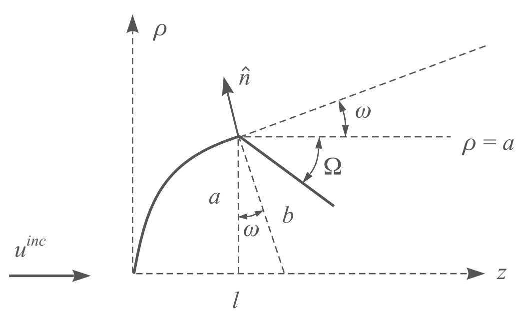


**Рис. 6.17.** Образующая сферического сегмента с произвольной формой основания

Угол $\theta(z)$, входящий в формулу (6.160), изображен на рис. 6.13. В точке $z = l$, $\rho = a$ этот угол определяется равенством $\theta(l) = \omega$. Для заданных значений величин $b$ и $a$ угол $\omega$ и длина сегмента $l$ определяются соотношениями

$$\mathrm{tg}\omega = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}, \quad l = b - \sqrt{b^2 - a^2}. \tag{6.162}$$

Если же заданы значения величин $\omega$ и $a$, то радиус сегмента $b$ и его длина $l$ определяются выражениями

$$b = \frac{a}{\cos\omega}, \quad l = a\frac{1-\sin\omega}{\cos\omega}. \tag{6.163}$$

Эти выражения полезны при исследовании непрерывной трансформации сферического сегмента в диск, когда $\omega \to \pi/2$, $l \to 0$ и $a = \mathrm{const}$.

Согласно формулам (6.138), (6.161) и (6.163), поле $u_{s,h}^{(0)}$ описывается выражениями

$$u_s^{(0)} = -u_h^{(0)} = -u_0 \frac{1}{2}(b - a\,\mathrm{tg}\omega\, \mathrm{e}^{i2kl})\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{6.164}$$

или

$$u_s^{(0)} = -u_h^{(0)} = -u_0 \frac{a}{2\cos\omega}(1 - \sin\omega\, \mathrm{e}^{i2kl})\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \tag{6.165}$$

Сравнение этих выражений с формулой (2.6.4) в книге (Уфимцев, 2003, 2007 а) выявляет следующие соотношения эквивалентности между акустическими и электромагнитными волнами, рассеянными сферическим сегментом:

$$\boxed{\begin{aligned} &E_x^{(0)} = u_s^{(0)}, \text{ если } E_x^{(0)} = u^{inc}, \\ &H_y^{(0)} = u_h^{(0)}, \text{ если } H_y^{(0)} = u^{inc}. \end{aligned} \qquad (6.166)}$$

Здесь, конечно же, имеется в виду сравнение с рассеянием электромагнитных волн на *идеально проводящем* сферическом сегменте.

Далее, согласно формулам (6.140), (6.141), (6.161) и (6.163) имеем следующие выражения для полного рассеянного поля $u_{s,h} = u_{s,h}^{(0)} + u_{s,h}^{(1)}$:

$$u_s = -u_0\frac{1}{2}\left[b - a\frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}}\right)\mathrm{e}^{i2kl}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{6.167}$$

$$u_h = u_0\frac{1}{2}\left[b + a\frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\omega}{n}}\right)\mathrm{e}^{i2kl}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{6.168}$$

или

$$u_s = -u_0 \frac{a}{2}\left[\frac{1}{\cos\omega} - \frac{2\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1} - \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{2\omega}{n}}\right)e^{i2kl}\right]\frac{e^{ikR}}{R}, \quad (6.169)$$

$$u_h = u_0 \frac{a}{2}\left[\frac{1}{\cos\omega} + \frac{2\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1} + \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{2\omega}{n}}\right)e^{i2kl}\right]\frac{e^{ikR}}{R}, \quad (6.170)$$

где $n = 1 + (\omega + \Omega)/\pi$, $0 \le \omega \le \pi/2$ и $0 \le \Omega \le \pi - \omega$.

В предельном случае, когда сферический сегмент непрерывно трансформируется в диск ($\omega \to \pi/2$ и $l \to 0$), выражения (6.164), (6.165) и (6.167), (6.168) точно преобразуются в выражения (6.150) и (6.151), (6.152), соответственно.

**Численное исследование обратного рассеяния**

В этом разделе мы вычисляем нормированный поперечник рассеяния (6.112), принимая во внимание соотношения (6.110) и (6.111). Используя соответствующие формулы из предыдущего раздела, можно получить следующие выражения для обычного поперечника рассеяния (1.26).

В приближении ФО имеем

$$\sigma_s^{(0)} = \sigma_h^{(0)} = \pi a^2\left|\frac{1}{\cos\omega} - \mathrm{tg}\omega\cdot e^{i2kl}\right|^2, \quad (6.171)$$

а в приближении ФТД первого порядка

$$\sigma_s = \pi a^2\left|\frac{1}{\cos\omega} - \frac{2\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1} - \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{2\omega}{n}}\right)e^{i2kl}\right|^2, \quad (6.172)$$

$$\sigma_h = \pi a^2\left|\frac{1}{\cos\omega} + \frac{2\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1} + \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{2\omega}{n}}\right)e^{i2kl}\right|^2, \quad (6.173)$$

где $n = 1 + (\omega + \Omega)/\pi$.

Здесь представлены результаты двух расчетов.

- В первом из них исследуется рассеянное поле при непрерывной трансформации сферического сегмента в плоский диск в предельном случае, когда $\omega \to \pi/2$. Предполагается, что все промежуточные поверхности являются сферическими с радиусом кривизны $b = a/\cos\omega$. Начальный сегмент имеет параметры $ka = 3\pi$, $kl_0 \approx 2{,}5\pi$, $\omega_0 = 10°$ и $\Omega = 90°$. В терминах длины

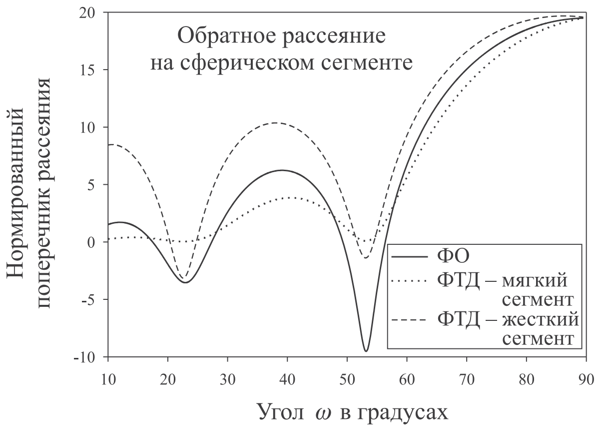


**Рис. 6.18.** Трансформация сферического сегмента в плоский диск. Согласно соотношениям эквивалентности (6.166), кривая ФО изображает также (в приближении физической оптики) рассеяние электромагнитных волн на идеально проводящем сферическом сегменте

волны радиус основания и длина сферического элемента соответственно равны $a = 1{,}5\lambda$ и $l_0 \approx 1{,}26\lambda$. Численные результаты для нормированного поперечника рассеяния приведены на рис. 6.18. Они ясно показывают влияние *неравномерной* компоненты $\left(j_{s,h}^{(1)}\right)$ поверхностных источников, обусловленной круговым изломом поверхности.

- Следующий расчет состоит в исследовании влияния затененной части тела на обратное рассеяние. Ее форма определяется углом $\Omega$, который показан на рис. 6.17 и изменяется от нуля до $\pi - \omega$. В предельном случае, ког-

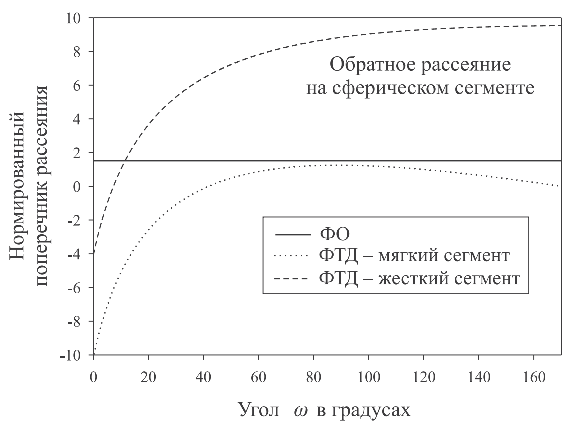


**Рис. 6.19.** Влияние затененной части сферического сегмента на обратное рассеяние. Согласно соотношениям эквивалентности (6.166), кривая ФО изображает также (в приближении физической оптики) рассеяние электромагнитных волн на идеально проводящем сферическом сегменте

да $\Omega = \pi - \omega$, рассеивающее тело превращается в бесконечно тонкую идеально отражающую сферическую поверхность. Освещенная сферическая поверхность задана параметрами $\omega = 10°$, $ka = 3\pi$, $kl \approx 2{,}5\pi$. В терминах длины волны $a = 1{,}5\lambda$ и $l_0 \approx 1{,}26\lambda$. Результаты расчета приведены на рис. 6.19.

Приближение ФО не зависит от формы теневой части и представлено на рис. 6.19 прямой горизонтальной линией (ФО). Но в приближении ФТД обратное рассеяние увеличивается до 10 дБ для акустически мягкого тела и до 13,5 дБ для акустически жесткого тела.

## 6.5. Тела вращения с ненулевой гауссовой кривизной: осесимметричное бистатическое рассеяние

Геометрия задачи показана на рис. 6.20. Падающая волна (6.1) распространяется в положительном направлении оси $z$, которая является осью симметрии рассеивающего тела. Ниже указаны детали его геометрии.

- Образующая освещенной стороны тела ($0 \le z \le l$) описывается функцией $\rho = \rho(z)$, которая удовлетворяет условию $d^2\rho/dz^2 \ne 0$. Это условие гарантирует, что гауссова кривизна поверхности не равна нулю.
- Теневая строна тела ($z > l$) имеет произвольную гладкую поверхность, где $0 \le \Omega \le \pi - \omega$. В предельном случае, когда $\Omega = \pi - \omega$, рассеивающее тело представляет собой бесконечно тонкую идеально отражающую поверхность с координатами $\rho = \rho(z)$ и $0 \le z \le l$.
- Касательная к образующей образует угол $\theta$ с осью $z$. В освещенных точках на ребре, где $z = l - 0$, этот угол равен $\theta(l) = \omega = \mathrm{arctg}[d\rho(l)/dz]$.
- Главные радиусы кривизны ($R_1$, $R_2$) определяются формулами (6.121) и (6.122). Гауссова кривизна описывается выражением (6.123).
- Единичная внешняя нормаль к освещенной стороне тела определяется формулой (6.128).

В силу симметрии задачи, достаточно вычислить рассеянное поле только в меридиональной плоскости $\varphi = \pi/2$.

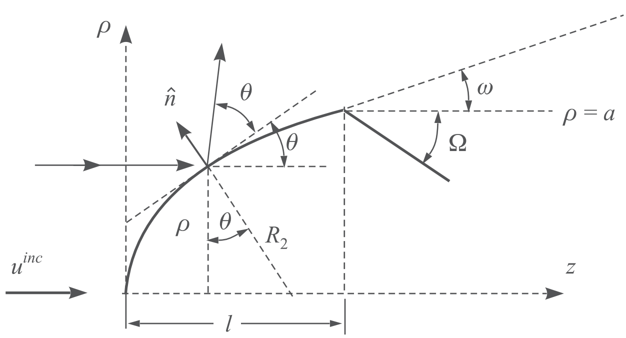


**Рис. 6.20.** Образующая тела вращения

### 6.5.1. Лучевые асимптотики для поля в приближении ФО

Эти асимптотики могут быть получены из выражений (6.132) и (6.133) при условии $k\rho\sin\vartheta \gg 1$. Сначала мы рассмотрим случай, когда точка наблюдения находится в плоскости $yOz$, в области $\pi - \omega < \vartheta \le \pi$, откуда видна вся освещенная поверхность ($0 \le z \le l$) рассеивающего тела (рис. 6.21).

Интегрирование в формулах (6.132) и (6.133) по переменной $\psi$ выполняется методом стационарной фазы (Копсон, 1966; Murray, 1984). Детали этого метода были кратко изложены в разделе 6.1.2. Фазовая функция в этих интегралах имеет две стационарных точки $\psi_1 = \pi/2$ и $\psi_2 = 3\pi/2$. Асимптотичекое вычисление интегралов приводит к следующим приближенным выражениям:

$$u_s^{(0)} = u_0 \frac{ik}{\sqrt{2\pi k \sin\vartheta}} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \times$$

$$\times \left[ \mathrm{e}^{i\pi/4} \int_0^l \mathrm{e}^{ik\Phi_1(z)} \sqrt{\rho(z)}\rho'(z)dz + \mathrm{e}^{-i\pi/4} \int_0^l \mathrm{e}^{ik\Phi_2(z)} \sqrt{\rho(z)}\rho'(z)dz \right], \quad (6.174)$$

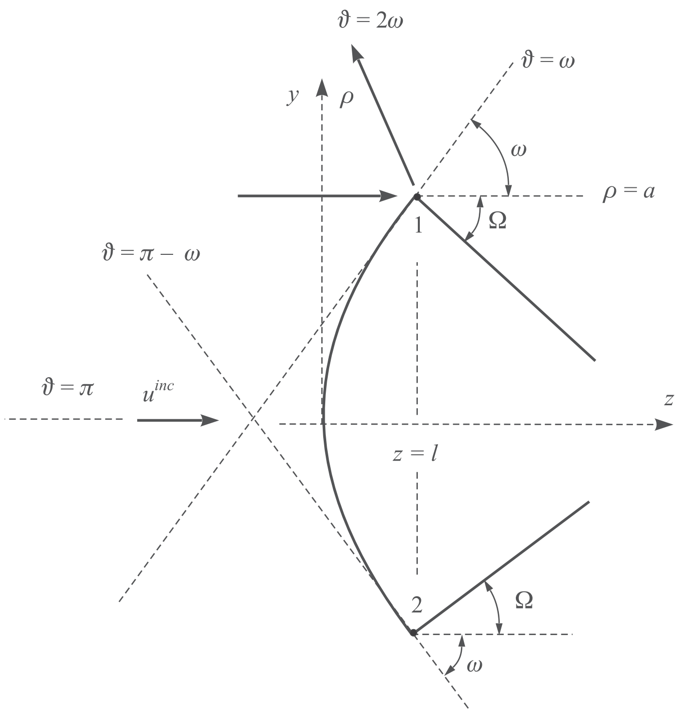


**Рис. 6.21.** Поперечное сечение тела вращения плоскостью $yOz$

$$u_h^{(0)} = -u_0 \frac{ik}{\sqrt{2\pi k \sin\vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R} \times$$
$$\times \left\{ e^{i\pi/4} \int_0^l e^{ik\Phi_1(z)} \sqrt{\rho(z)} [\sin\vartheta - \rho'(z) cos\vartheta] dz - \right. \tag{6.175}$$
$$\left. - e^{-i\pi/4} \int_0^l e^{ik\Phi_2(z)} \sqrt{\rho(z)} [\sin\vartheta + \rho'(z)\cos\vartheta] dz \right\},$$

где

$$\Phi_1(z) = z(1-\cos\vartheta) - \rho(z)\sin\vartheta, \tag{6.176}$$
$$\Phi_2(z) = z(1-\cos\vartheta) + \rho(z)\sin\vartheta. \tag{6.177}$$

Здесь интегралы с множителем $\exp[\Phi_1(z)]$ определяют поле, рассеянное окрестностью стационарной линии $\psi = \pi/2$, $0 < z \le l$. Интегралы с множителем $\exp[\Phi_2(z)]$ описывают поле, рассеянное окрестностью стационарной линии $\psi = 3\pi/2$, $0 < z \le l$ (рис. 6.21).

Теперь мы проверим функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ на наличие у них стационарных точек $z_{st}$. Из уравнения

$$\Phi_1'(z) = 1 - \cos\vartheta - \rho'(z_{st})\sin\vartheta = 0 \tag{6.178}$$

следует, что

$$\rho'(z_{st}) = d\rho/dz = \mathrm{tg}\theta(z_{st}) = \mathrm{tg}(\vartheta/2) \tag{6.179}$$

и

$$\theta(z_{st}) = \vartheta/2. \tag{6.180}$$

Это уравнение определяет точку отражения $z_{st}$ на рассеивающей поверхности, как это показано на рис. 6.20. В этой точке касательная к образующей $\rho(z)$ составляет угол $\theta = \vartheta/2$ с осью $z$, что согласуется с законом зеркального отражения.

Затем мы проверим функцию $\Phi_2(z)$ на наличие у нее стационарной точки. Из уравнения

$$\Phi_2'(z) = 1 - \cos\vartheta + \rho'(z_{st})\sin\vartheta = 0 \tag{6.181}$$

следует, что

$$\rho'(z_{st}) = d\rho/dz = \mathrm{tg}\theta(z_{st}) = -\mathrm{tg}(\vartheta/2) \tag{6.182}$$

и

$$\theta(z_{st}) = -\vartheta/2, \text{ где } -\pi < \vartheta < 0. \tag{6.183}$$

Эта стационарная точка относится к отраженному лучу в меридиональной плоскости $\varphi = 3\pi/2$. Для одного и того же значения $z_{st}$ в формулах (6.180) и (6.183) этот луч является точно симметричным по отношению к отраженному лучу, показанному на рис. 6.20. Так как мы рассматриваем рассеянное поле только в меридиональной плоскости $\varphi = \pi/2$, функция $\Phi_2(z)$ не имеет стационарных точек для таких направлений наблюдения.

Перейдем теперь в формулах (6.174) и (6.175) к новой переменной интегрирования $\xi = z$ в интегралах с функцией $\Phi_1(z)$ и к переменной $\xi = -z$ в интегралах с функцией $\Phi_2(z)$. Тогда сумму таких интегралов можно представить в виде одного интеграла,

$$I(P) = \int_{-l}^{l} F(\xi, P)\,\mathrm{e}^{ik\Phi(\xi, P)}\,d\xi, \tag{6.184}$$

где символ $P$ обозначает положение точки наблюдения. Для полей с достаточно высокой частотой ($k \gg 1$) множитель $\exp[\Phi(\xi, P)]$ как функция переменной интегрирования $\xi$ испытывает быстрые осцилляции. Поэтому большинство дифференциальных вкладов $F(\xi, P)\,\mathrm{e}^{ik\Phi(\xi, P)}d\xi$ в интеграл $I(P)$ асимптотически гасят друг друга. Только те участки интегрирования, которые находятся в окрестности стационарной точки и вблизи концов интервала интегрирования, вносят существенный вклад в интеграл $I(P)$. Вклад стационарной точки находится с помощью метода стационарной фазы (Копсон, 1966; Murray, 1984). Вклады концевых точек ($\xi = \pm\, l$) находятся интегрированием по частям. В результате получаем следующее асимптотическое приближение для интеграла $I(P)$:

$$I(P) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k\Phi''(\xi_{st}, P)}}\,F(\xi_{st}, P)\,\mathrm{e}^{ik\Phi(\xi_{st}, P) + i\pi/4} +$$
$$+ \frac{1}{ik}\left[\frac{F(l, P)}{\Phi'(l, P)}\,\mathrm{e}^{ik\Phi(l, P)} - \frac{F(-l, P)}{\Phi'(-l, P)}\,\mathrm{e}^{ik\Phi(-l, P)}\right]. \tag{6.185}$$

Здесь первое слагаемое представляет вклад стационарной точки, а остальные слагаемые описывают вклады концевых точек. Только главный асимптотический член для каждого вклада указан в формуле (6.185).

В соответствии с описанной процедурой, рассеянное поле может быть представлено в виде трех слагаемых:

$$u_{s,h}^{(0)} = u_{s,h}^{(0)}(z_{st}) + u_{s,h}^{(0)}(1) + u_{s,h}^{(0)}(2), \tag{6.186}$$

где

$$u_s^{(0)}(z_{st}) = -u_h^{(0)}(z_{st}) = -u_0\,\frac{1}{2}\sqrt{R_1(z_{st})R_2(z_{st})}\,\mathrm{e}^{ik\Phi_1(z_{st})}\,\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \tag{6.187}$$

и

$$u_s^{(0)}(1) + u_s^{(0)}(2) = \frac{u_0 a}{\sqrt{2\pi k a \sin\vartheta}} \times$$
$$\times [f^{(0)}(1)\,\mathrm{e}^{-ika\sin\vartheta + i\pi/4} + f^{(0)}(2)\,\mathrm{e}^{ika\sin\vartheta - i\pi/4}]\,\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\,\mathrm{e}^{ikl(1-\cos\vartheta)}, \tag{6.188}$$

$$u_h^{(0)}(1) + u_h^{(0)}(2) = \frac{u_0 a}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}} \times$$

$$\times [g^{(0)}(1)\,\mathrm{e}^{-ika\sin\vartheta + i\pi/4} + g^{(0)}(2)\,\mathrm{e}^{ika\sin\vartheta - i\pi/4}]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\mathrm{e}^{ikl(1-\cos\vartheta)}. \qquad (6.189)$$

Функции $u_{s,h}^{(0)}(z_{st})$ описывают обычные лучи, отраженные от тела в стационарной точке $z_{st}$, которая определяется уравнениями (6.179) и (6.180). Главные радиусы кривизны $R_1$ и $R_2$ рассеивающей поверхности определяются формулами (6.121) и (6.122).

Каждое из полей (6.188) и (6.189) состоит из двух дифракционных лучей, расходящихся от краевых точек 1 и 2 (рис. 6.21). Диаграммы направленности этих лучей описываются функциями

$$f^{(0)}(1) = \frac{\sin\omega}{\cos\omega - \cos(\omega - \vartheta)}, \quad f^{(0)}(2) = \frac{\sin\omega}{\cos\omega - \cos(\omega + \vartheta)}, \qquad (6.190)$$

$$g^{(0)}(1) = \frac{\sin(\omega - \vartheta)}{\cos\omega - \cos(\omega - \vartheta)}, \quad g^{(0)}(2) = \frac{\sin(\omega + \vartheta)}{\cos\omega - \cos(\omega + \vartheta)}. \qquad (6.191)$$

### 6.5.2. Приближение ФО: интерполяция с функциями Бесселя для поля в области $\pi - \omega \le \vartheta \le \pi$

Используя соотношения (6.45) и (6.46), полученные выше лучевые асимптотики можно записать в следующей форме:

$$u_s^{(0)} = u_0 \left[\!\left[ -\frac{1}{2}\sqrt{R_1(z_{st})R_2(z_{st})}\,\mathrm{e}^{ik\Phi_1(z_{st})} + \right.\right.$$

$$+\frac{a}{2}\{f^{(0)}(1)[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)] + \qquad (6.192)$$

$$\left.\left. +f^{(0)}(2)[J_0(ka\sin\vartheta) + iJ_1(ka\sin\vartheta)]\}\mathrm{e}^{ikl(1-\cos\vartheta)}\,\right]\!\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R},$$

$$u_h^{(0)} = u_0 \left[\!\left[ \frac{1}{2}\sqrt{R_1(z_{st})R_2(z_{st})}\,\mathrm{e}^{ik\Phi_1(z_{st})} + \right.\right.$$

$$+\frac{a}{2}\{g^{(0)}(1)[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)] + \qquad (6.193)$$

$$\left.\left. +g^{(0)}(2)[J_0(ka\sin\vartheta) + iJ_1(ka\sin\vartheta)]\}\mathrm{e}^{ikl(1-\cos\vartheta)} \right]\!\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R},$$

где $J_0$ и $J_1$ суть функции Бесселя. Эти асимптотики применимы вдали от фокальной линии ($\vartheta = \pi$) при условии $ka\sin\vartheta \gg 1$. Поле на фокальной линии определяется формулой (6.138), которую можно переписать в виде

$$u_s^{(0)} = -u_h^{(0)} = u_0\left[-\frac{1}{2}\sqrt{R_1(0)R_2(0)} + \frac{a}{2}\operatorname{tg}\omega\, \mathrm{e}^{i2kl}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \qquad (6.194)$$

где $R_1(0) = R_2(0) = 1/z''(0)$.

Когда $\vartheta \to \pi$, выражения (6.192) и (6.193) точно трансформируются в фокальную асимптотику (6.194). Следовательно, их можно рассматривать как подходящее приближение для рассеянного поля во всей области $\pi - \omega \le \vartheta \le \pi$.

### 6.5.3. Приближение ФТД: интерполяция с функциями Бесселя для поля в области $\pi - \omega \le \vartheta \le \pi$

Поле в приближении ФТД есть сумма полей $u_{s,h}^{(0)}$ и $u_{s,h}^{(1)}$. Поле $u_{s,h}^{(0)}$ создается *равномерной* компонентой $j_{s,h}^{(0)}$ поверхностных источников и представляет собой поле в приближении ФО. Поле $u_{s,h}^{(1)}$ излучается *неравномерными* компонентами $j_{s,h}^{(1)}$ поверхностных источников. На поверхности гладкого выпуклого тела с круговым изломом имеются два типа источников $j_{s,h}^{(1)}$. Один из них обусловлен гладким искривлением поверхности и создает поле, амплитуда которого имеет величину порядка $k^{-1}$ (Schensted, 1955). Другой тип источников $j_{s,h}^{(1)}$ обусловлен круговым изломом и создает поле (6.21) и (6.22), которое имеет величину порядка $k^{-1/2}$. В приближении ФТД первого порядка мы сохраняем только главный вклад в рассеянное поле, который создается источниками $j_{s,h}^{(1)}$, возбуждаемыми вблизи ребра поверхности.

Равномерные аппроксимации для этого вклада в области $\pi - \omega \le \vartheta \le \pi$ определяются формулами (6.47) и (6.48), которые следует модифицировать. Они были получены в системе координат, изображенной на рис. 6.2. Теперь же мы работаем с системой координат, показанной на рис. 6.21, которая сдвинута по оси $z$ на величину, равную $l$. В связи с этим в формулы (6.47) и (6.48) необходимо включить дополнительный множитель $\exp[ikl(1-\cos\vartheta)]$.

Суммируя модифицированные таким образом выражения (6.47) и (6.48) с выражениями ФО (6.192) и (6.193), мы получаем следующие аппроксимации в приближении ФТД первого порядка:

$$u_s^{ФТД} = u_0\left[\!\!\left[-\frac{1}{2}\sqrt{R_1(z_{st})R_2(z_{st})}\,\mathrm{e}^{ik\Phi_1(z_{st})} + \right.\right.$$

$$+\frac{a}{2}\{f(1)[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)] + \qquad (6.195)$$

$$\left.\left.+f(2)[J_0(ka\sin\vartheta) + iJ_1(ka\sin\vartheta)]\}\,\mathrm{e}^{ikl(1-\cos\vartheta)}\right]\!\!\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R},$$

$$u_s^{ФТД} = u_0 \left[\!\left[ \frac{1}{2}\sqrt{R_1(z_{st})R_2(z_{st})}\,\mathrm{e}^{ik\Phi_1(z_{st})} + \right.\right.$$

$$+\frac{a}{2}\{g(1)[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)] + \tag{6.196}$$

$$\left.\left. +g(2)[J_0(ka\sin\vartheta) + iJ_1(ka\sin\vartheta)]\}\,\mathrm{e}^{ikl(1-\cos\vartheta)} \right]\!\right] \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}.$$

Функции $f(1,2)$ и $g(1,2)$ описываются формулами (6.25) и (6.26), в которых следует отбросить последние слагаемые. Эти слагаемые полностью уничтожаются величинами $f^{(0)}(1,2)$ и $g^{(0)}(1,2)$ при суммировании модифицированных выражений (6.47), (6.48) с выражениями (6.192), (6.193).

### 6.5.4. ФТД-асимптотики для поля в области $2\omega \le \vartheta \le \pi - \omega$ вдали от геометрооптической границы $\vartheta = 2\omega$

В этой области пространства стационарная точка 2 (рис. 6.21) не видна, если $\Omega < 2\omega$. Поэтому ее вклад первого порядка в рассеянное поле равен нулю. Мы также предполагаем, что направление наблюдения достаточно далеко от границы отраженных лучей ($\vartheta = 2\omega$), где функции $f(1)$ и $g(1)$ сингулярны. При таких условиях можно использовать следующие формулы для рассеянного поля:

$$u_s^{ФТД} = u_0 \left[\!\left[ -\frac{1}{2}\sqrt{R_1(z_{st})R_2(z_{st})}\,\mathrm{e}^{ik\Phi_1(z_{st})} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\frac{a}{2} f(1)[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)]\,\mathrm{e}^{ikl(1-\cos\vartheta)} \right]\!\right] \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{6.197}$$

$$u_h^{ФТД} = u_0 \left[\!\left[ \frac{1}{2}\sqrt{R_1(z_{st})R_2(z_{st})}\,\mathrm{e}^{ik\Phi_1(z_{st})} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\frac{a}{2} g(1)[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)]\,\mathrm{e}^{ikl(1-\cos\vartheta)} \right]\!\right] \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \tag{6.198}$$

### 6.5.5. Равномерные асимптотики для поля ФО в лучевой области $2\omega < \vartheta \le \pi - \omega$, включая ее границу $\vartheta = 2\omega$

Лучевые асимптотики (6.197) и (6.198) неприменимы в окрестности геометрооптической границы $\vartheta = 2\omega$, где волновое поле не имеет лучевой структуры. В этой, так называемой переходной области, происходит процесс поперечной диффузии волнового поля, где еще только зарождаются дифракционные лучи (Уфимцев, 2003, 2007 а). Результатом неадекватности лучевой структуры реальному волновому полю в этой области являются сингулярности функций $f(1)$, $g(1)$ и множителя $1/\Phi'(l)$ в выражении (6.185), возникающие на границе (в этом случае $\xi_{st} \to l$ и $\Phi'(l, P) \to 0$). Для вычисления интеграла (6.184) в этой области следует использовать более точный метод стационарной фазы, который допускает слияние точки стационарной фазы с концевой точкой $\xi = l$ (Felsen and Marcuvitz, 1972). Поясним основные идеи этого метода.

Сначала преобразуем интеграл (6.184). Для упрощения его вида уберем символ $P$, указывающий на зависимость от координат точки наблюдения. Заметим, что краевая точка 2 (рис. 6.21) не видна из исследуемой области. Поэтому ее вклад первого порядка в рассеянное поле равен нулю. В интеграле (6.184) этой точке соответствует концевая точка $\xi = -l$. Чтобы исключить ее влияние, мы положим нижний предел интегрирования равным $\xi = -\infty$. Затем введем новую переменную интегрирования $t$, используя уравнение

$$\Phi(\xi) = \Phi(\xi_{st}) + t^2. \tag{6.199}$$

Согласно формуле (6.176), вторая производная $\Phi''(\xi_{st}) = -\rho''(\xi_{st})\sin\vartheta$ является положительной, и следовательно величина $\Phi(\xi_{st})$ есть минимум функции $\Phi(\xi)$. Принимая во внимание это обстоятельство, определим новую переменную $t$ как непрерывную и дифференцируемую функцию старой переменной $\xi$, полагая

$$t(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\Phi(\xi) - \Phi(\xi_{st})} & \text{при } \xi \ge \xi_{st}, \\ -\sqrt{\Phi(\xi) - \Phi(\xi_{st})} & \text{при } \xi \le \xi_{st}, \end{cases} \tag{6.200}$$

где радикал понимается в обычном арифметическом смысле. В окрестности стационарной точки, где $\Phi'(\xi_{st}) = 0$, можно использовать аппроксимации Тейлора

$$\Phi(\xi) = \Phi(\xi_{st}) + \frac{1}{2!}\Phi''(\xi_{st})(\xi - \xi_{st})^2 + \frac{1}{3!}\Phi'''(\xi_{st})(\xi - \xi_{st})^3 + \ldots \tag{6.201}$$

и

$$t(\xi) = (\xi - \xi_{st})\sqrt{\frac{1}{2}\Phi''(\xi_{st})}\left[1 + \frac{1}{6}\frac{\Phi'''(\xi_{st})}{\Phi''(\xi_{st})}(\xi - \xi_{st})\right]. \tag{6.202}$$

Теперь канонический интеграл (6.184) можно представить в виде

$$I = \mathrm{e}^{ik\Phi(\xi_{st})}\int_{-\infty}^{t(l)} \mathrm{e}^{ikt^2} G(t)dt, \tag{6.203}$$

где

$$G(t) = F(\xi)\frac{d\xi}{dt} = F(\xi)\frac{2t(\xi)}{\Phi'(\xi)} \tag{6.204}$$

и

$$G(0) = \lim_{\xi \to \xi_{st}} \frac{2t(\xi)}{\Phi'(\xi)} F(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\Phi''(\xi_{st})}} F(\xi_{st}). \tag{6.205}$$

Следующая идея состоит в том, чтобы из интеграла (6.203) выделить в явном виде интеграл Френеля. Для этого используем простое преобразование,

$$I = \mathrm{e}^{ik\Phi(\xi_{st})}\left\{G(0)\int\limits_{-\infty}^{t(l)} \mathrm{e}^{ikt^2}\,dt + \int\limits_{-\infty}^{t(l)} \mathrm{e}^{ikt^2}\,[G(t)-G(0)]\,dt\right\}. \tag{6.206}$$

Интегрируя далее по частям второй интеграл, получаем асимптотическое выражение

$$I = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\mathrm{e}^{ik\Phi(\xi_{st})}G(0)\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{k}t(l)} \mathrm{e}^{ix^2}\,dx + \frac{G[t(l)]-G(0)}{i2kt(l)}\,\mathrm{e}^{ik\Phi(l)} + O\!\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{6.207}$$

При условии $\sqrt{k}\,t(l) \gg 1$, когда точка наблюдения находится далеко от геометрооптической границы $\vartheta = 2\omega$, это выражение преобразуется асимптотически в два первых слагаемых в формуле (6.185 ).

Когда же точка наблюдения приближается к геометрооптической границе ($\vartheta = 2\omega + 0$ и $t = +0$), нужно использовать выражения (6.201), (6.202) и дополнительные аппроксимации:

$$\frac{1}{\Phi'(\xi)} = \frac{1}{(\xi-\xi_{st})\Phi''(\xi_{st})}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{\Phi'''(\xi_{st})}{\Phi''(\xi_{st})}(\xi-\xi_{st}) + O[(\xi-\xi_{st})^2]\right\}, \tag{6.208}$$

$$\frac{2t(\xi)}{\Phi'(\xi)} = \sqrt{\frac{2}{\Phi''(\xi_{st})}}\left\{1 - \frac{1}{3}\frac{\Phi'''(\xi_{st})}{\Phi''(\xi_{st})}(\xi-\xi_{st}) + O[(\xi-\xi_{st})^2]\right\}, \tag{6.209}$$

$$F(\xi) = F(\xi_{st}) + F'(\xi_{st})(\xi-\xi_{st}) + \ldots, \tag{6.210}$$

$$G(t) - G(0) = (\xi-\xi_{st})\sqrt{\frac{2}{\Phi''(\xi_{st})}}\left[F'(\xi_{st}) - \frac{1}{3}F(\xi_{st})\frac{\Phi'''(\xi_{st})}{\Phi''(\xi_{st})}\right]. \tag{6.211}$$

Эти соотношения позволяют получить следующее значение для канонического интеграла на границе $\vartheta = 2\omega + 0$:

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{2k\Phi''(l)}}F(l)\,\mathrm{e}^{ik\Phi(l)+i\pi/4} +$$

$$+\frac{1}{ik\Phi''(l)}\left[F'(l) - \frac{1}{3}F(l)\frac{\Phi'''(l)}{\Phi''(l)}\right]\mathrm{e}^{ik\Phi(l)} + O\!\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{6.212}$$

Изложенный метод используется далее для вычисления рассеянного поля в приближении ФО:

$$u_s^{(0)} = u_0\,\frac{ik}{\sqrt{2\pi k\sin\vartheta}}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}I_s\,\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\,, \tag{6.213}$$

$$u_h^{(0)} = -u_0\,\frac{ik}{\sqrt{2\pi k\sin\vartheta}}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}I_h\,\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\,, \tag{6.214}$$

где величины $I_{s,h}$ имеют вид (6.203) с функциями

$$F_s(\xi) = \sqrt{\rho(\xi)}\rho'(\xi), \quad F_h(\xi) = \sqrt{\rho(\xi)}[\sin\vartheta - \rho'(\xi)\cos\vartheta], \tag{6.215}$$

$$\Phi(\xi) = \xi(1-\cos\vartheta) - \rho(\xi)\sin\vartheta. \tag{6.216}$$

Мы опускаем все промежуточные преобразования и приводим окончательные выражения, пренебрегая в них членами порядка $k^{-2}$:

$$u_s^{(0)} = u_0\frac{e^{ikR}}{R}\left\{\frac{e^{i3\pi/4}}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{R_1(z_{st})R_{st}(z_{st})}\,e^{ik\Phi(z_{st})}\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{k}t(l)} e^{ix^2}dx + \right.$$

$$\left.+\left[\frac{a}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}}f^{(0)}(1) - \frac{\sqrt{R_1(z_{st})R_2(z_{st})}}{4\sqrt{\pi k}t(l)}\right]e^{ik\Phi(l)+i\pi/4}\right\}, \tag{6.217}$$

$$u_h^{(0)} = u_0\frac{e^{ikR}}{R}\left\{-\frac{e^{i3\pi/4}}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{R_1(z_{st})R_{st}(z_{st})}e^{ik\Phi(z_{st})}\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{k}t(l)} e^{ix^2}dx + \right.$$

$$\left.+\left[\frac{a}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}}g^{(0)}(1) + \frac{\sqrt{R_1(z_{st})R_2(z_{st})}}{4\sqrt{\pi k}t(l)}\right]e^{ik\Phi(l)+i\pi/4}\right\}. \tag{6.218}$$

Здесь $t(l) = \sqrt{\Phi(l) - \Phi(z_{st})}$; функции $f^{(0)}(1)$ и $g^{(0)}(1)$ определяются формулами (6.190) и (6.191); $R_{1,2}$ обозначают главные радиусы кривизны (6.121).

Вдали от геометрооптической границы ($\sqrt{k}t(l) \gg 1$), формулы (6.217) и (6.218) трансформируются асимптотически в выражения:

$$u_s^{(0)} = u_0\frac{e^{ikR}}{R}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{R_1(z_{st})R_{st}(z_{st})}\,e^{ik\Phi(z_{st})} + \frac{a}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}}f^{(0)}(1)e^{ik\Phi(l)+i\pi/4}\right], \tag{6.219}$$

$$u_h^{(0)} = u_0\frac{e^{ikR}}{R}\left[\frac{1}{2}\sqrt{R_1(z_{st})R_{st}(z_{st})}\,e^{ik\Phi(z_{st})} + \frac{a}{\sqrt{2\pi ka\sin\vartheta}}g^{(0)}(1)e^{ik\Phi(l)+i\pi/4}\right]. \tag{6.220}$$

Эти выражения полностью согласуются с асимптотиками (6.186–6.189), если принять во внимание, что краевая точка 2 не видна из области $2\omega \le \vartheta < \pi - \omega$. Первые слагаемые в выражениях (6.219) и (6.220) описывают обычные отраженные лучи, а вторые слагаемые определяют краевые дифракционные лучи.

Точно на границе отраженных лучей ($\vartheta = 2\omega + 0$) формулы (6.217) и (6.218) дают следующие значения для рассеянного поля:

$$u_s^{(0)} = u_0\frac{e^{ikR}}{R}\left\{-\frac{1}{4}\sqrt{R_1(l)R_2(l)} + \right.$$

$$\left.+\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k\sin\vartheta}\,\Phi''(l)}\left[F_s'(l) - \frac{1}{3}F_s(l)\frac{\Phi'''(l)}{\Phi''(l)}\right]e^{ik\Phi(l)}\right\}, \tag{6.221}$$

$$u_h^{(0)} = u_0 \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ \frac{1}{4} \sqrt{R_1(l) R_2(l)} - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k \sin\vartheta}\, \Phi''(l)} \left[ F_h'(l) - \frac{1}{3} F_h(l) \frac{\Phi'''(l)}{\Phi''(l)} \right] e^{ik\Phi(l)} \right\}, \qquad (6.222)$$

Мы напоминаем, что все производные в этих выражениях берутся по переменной интегрирования $\xi$ в интеграле (6.184), а нижние индексы $s$ и $h$ указывают тип (мягкий или жесткий) рассеивающего тела.

Приближение ФТД первого рода для рассеянного поля в исследуемой области $(2\omega \le \vartheta \le \pi - \omega)$ находится суммированием ФО-поля (6.217), (6.218) и поля $u_{s,h}^{(1)}$, которое излучается *неравномерной* компонентой $j_{s,h}^{(1)}$ поверхностных источников. Для поля $u_{s,h}^{(1)}$ можно использовать формулы (6.49), (6.50), которые не являются сингулярными на границе отраженных лучей $\vartheta = 2\omega$. Однако эти формулы предварительно нужно модифицировать, учитывая различные положения начала координат в разд. 6.1, где они были выведены, и здесь, в данном разделе. Теперь их нужно записать в следующей форме:

$$u_s^{(1)} = u_0 \frac{a}{2} f^{(1)}(1)[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)] e^{ikl(1-\cos\vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R}, \qquad (6.223)$$

$$u_h^{(1)} = u_0 \frac{a}{2} g^{(1)}(1)[J_0(ka\sin\vartheta) - iJ_1(ka\sin\vartheta)] e^{ikl(1-\cos\vartheta)} \frac{e^{ikR}}{R}, \qquad (6.224)$$

где функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ определены в разд. 6.1.2. Мы напоминаем опять, что полученные формулы применимы для исследования поля в области $2\omega \le \vartheta < \pi - \omega$. При дополнительном условии $\Omega < 2\omega$ краевая точка 2 не видна из этой области и, следовательно, в первом приближении ее влиянием на рассеянное поле можно пренебречь.

### 6.5.6. Аппроксимация ФО-поля в области тени для отраженных лучей

Обычные лучи, отраженные от поверхности тела, отсутствуют в области $0 \le \vartheta < 2\omega$ (рис. 6.21), которая является для них зоной тени. Это обстоятельство может быть использовано для приближенной оценки ФО-поля (6.174), (6.175). Согласно соотношению (1.70), поле ФО состоит из двух частей: отраженного поля (1.71) и теневого излучения (1.72). Отраженное поле состит из отраженных лучей и дополнительного дифракционного поля, которым можно пренебречь в зоне тени ($0 \le \vartheta < 2\omega$), где доминирует теневое излучение. Поэтому для оценки поля ФО в этой области естественно использовать следующую аппроксимацию:

$$u_{s,h}^{(0)} \approx u^{sh} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_{il}} \left( u^{inc} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right) ds. \qquad (6.225)$$

Здесь интегрирование осуществляется по освещенной стороне рассеивающего тела. Такой интеграл в общем случае тоже нелегко вычислять. Однако теорема о теневом контуре, установленная в разделе 1.3.5, значительно упрощает вычисления. Согласно ей интеграл (6.225) эквивалентен интегралу по освещенной поверхности черного диска, который расположен в плоскости $z = l$ и имеет радиус $a$.

Как было показано в разделе 1.3.4, поле, рассеянное черным диском, может быть представлено в форме (1.73),

$$u^{sh} = \frac{1}{2}[u_s^{(0)} + u_h^{(0)}]. \qquad (6.226)$$

Величины $u_s^{(0)}$ и $u_h^{(0)}$ были уже вычислены в разделе 6.2.1 в приближении дальней зоны. Используя формулы (6.56), (6.57) и учитывая сдвиг начала координат, принятый в данном разделе, поле (6.226) может быть записано в виде

$$u^{sh} = u_0 \frac{ia}{2} \frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta} J_1(ka\sin\vartheta) \frac{e^{ikR}}{R} e^{ikl(1-\cos\vartheta)}. \qquad (6.227)$$

Видно, что это поле концентрируется в области тени. Действительно, в направлении вперед ($\vartheta = 0$) оно велико и точно равно полю, создаваемому идеально отражающим диском,

$$u^{sh} = u_0 \frac{ika^2}{2} \frac{e^{ikR}}{R}. \qquad (6.228)$$

В направлении обратного рассеяния $\vartheta = \pi$ поле (6.227) равно нулю.

В приближении ФТД полное рассеянное поле в зоне тени ($0 \le \vartheta \le 2\omega$) равно сумме поля (6.227) и поля $u_{s,h}^{(1)}$, которое создается краевыми источниками $j_{s,h}^{(1)}$ и определяется формулами (6.47), (6.48). При переносе их в данный раздел в них следует включить дополнительный множитель $\exp[ikl(1-\cos\vartheta)]$, обусловленный сдвигом начала координат, как это уже отмечалось выше.

Данный раздел завершает анализ поля, рассеянного телами вращения с ненулевой гауссовой кривизной.

## Задачи

**6.1.** Доказать асимптотику (6.17) для интеграла от функции с двумя стационарными точками.

**6.2.** Доказать формулы (6.25) и (6.26) для функций $f^{(1)}(1)$, $g^{(1)}(1)$, относящихся к стационарной точке 1 (рис. 6.3).

**6.3.** Доказать формулы (6.30) и (6.31) для функций $f^{(1)}(2)$, $g^{(1)}(2)$, относящихся к стационарной точке 2 (рис. 6.4).

**6.4**. Доказать формулы (6.34) и (6.35) для функций $f^{(1)}(1)$, $g^{(1)}(1)$, относящихся к направлению зеркального отражения $\vartheta = 2\omega$ (рис. 6.21).

**6.5.** Доказать ФО-аппроксимацию (6.64) для поля, рассеянного идеально проводящим диском. Начните с формул (1.87) и (1.88), выведите формулу (1.96), получите формулы (1.98), (1.99) и примените их к эадаче о рассеянии на диске.

**6.6.** Доказать фокальные асимптотики (6.86) и (6.87) для поля, рассеянного диском.

**6.7.** Используйте выражения (6.104), (6.105) для фокального поля, рассеяного на конусе, и докажите, что они трансформируются в формулы (6.108), (6.109) в предельном случае, когда конус деформируется в диск.

**6.8.** Формулы (6.148) и (6.149) описывают поле, рассеянное параболоидом. Докажите, что они трансформируются в формулы (6.151), (6.152) в предельном случае, когда $\omega \to \pi/2$ и параболоид деформируется в тело вращения с плоским торцом.

**6.9.** Формулы (6.169) и (6.170) описывают поле, рассеянное сферическим сегментом. Докажите, что они трансформируются в формулы (6.151), (6.152) в предельном случае, когда $\omega \to \pi/2$ и сферический сегмент деформируется в тело вращения с плоским торцом.

# Глава 7

# Элементарные акустические и электромагнитные краевые волны

Эта глава основана на работах (Буторин и Уфимцев, 1986; Буторин et al., 1987; Ufimtsev, 1989, 1991, 2006 a, 2006 b).

> Между акустическими и электромагнитными ЭКВ, распространяющимися в направлениях дифракционного конуса, существуют соотношения эквивалентности:
>
> $du_s = dE_t$, если $u^{inc}(\zeta) = E_t^{inc}(\zeta)$;
>
> $du_h = dH_t$, если $u^{inc}(\zeta) = H_t^{inc}(\zeta)$.
>
> Здесь $\hat{t}$ есть касательная к рассеивающему ребру в точке дифракции $\zeta$.
> Соотношения $du_s^{(0,1)}(\zeta) = dE_t^{(0,1)}$ справедливы только в отсутствие поляризационной связи в приближении ФО (см. раздел 4.3.2).

В предыдущих главах было показано, что краевые дифракционные волны вносят существенный вклад в рассеянное поле. Эти волны представляют собой линейную суперпозицию *элементарных краевых волн* (ЭКВ), возбуждаемых в окрестности бесконечно малых элементов рассеивающего ребра, т. е.

$$u = \int_L du(\zeta).$$

Здесь $L$ обозначает ребро рассеивающего тела, а $\zeta$ есть криволинейная координата вдоль ребра, связанная с его длиной ($d\zeta = dl$). Предполагается, что радиус кривизны ребра $L$ велик по сравнению с длиной волны и может медленно изменяться вдоль ребра, также как и угол между гранями ребра. Подынтегральная величина $du(\zeta)$ обозначает поле ЭКВ.

Наша цель состоит в выводе высокочастотных асимптотик для ЭКВ. Имея их, можно вычислять краевые волны, возникающие при дифракции на телах с произвольными искривленными ребрами. Чтобы достичь эту цель, мы используем асимптотический принцип локальности. Мы исходим из очевидного с физической точки зрения предположения, что *неравномерная* компонента $j^{(1)}$ поверхностных источников вблизи ребра асимптотически ($k \to \infty$) эквивалентна компоненте $j^{(1)}_{klin}$, возбуждаемой вблизи ребра канонического клина, касательного к реальному рассеивающему ребру. Для того чтобы понять, какая точка на ребре рассеивающего тела является подходящей точкой касания и какая окрестность этой точки является отвественной за формирование ЭКВ, следует обратиться к физической структуре краевых волн, возникающих при дифракции на каноническом клине.

## 7.1. Элементарные полоски на каноническом клине

В главе 4 было показано, что при наклонном облучении клина плоской волной возникающие краевые волны имеют форму конических волн, которые можно интерпретировать как дифракционные лучи, образующие так назывемый дифракционный конус (рис. 4.4). Следовательно, *неравномерная* компонента на гранях клина также представляет собой поле, бегущее от ребра вдоль образующей дифракционного конуса. Теперь становится ясно, как следует выбрать точку касания реального рассеивающего ребра $L$ с ребром $E$ канонического клина (рис. 7.1) и как определить ее окрестность, ответственную за формирование ЭКВ.

За точку касания следует выбрать ту точку на ребре, из которой дифракционный луч приходит в точку наблюдения, расположенную на грани касательного клина. Мы подчеркиваем, что в общем случае точка касания на ребре не является *ближайшей* к точке наблюдения (!). За окрестность точки касания следует выбрать бесконечно узкую (элементарную) полоску, ориентированную вдоль дифракционного луча. На рис. 7.1 она обозначена буквой $A$.

Этот рисунок также помогает понять, почему неприемлема любая другая элементарная полоска, например такая как полоска $B$. На рисунке видно, что ориентация такой полоски не согласуется с принципом локальности. Действительно, поле на ней не зависит от локальных свойств падающей волны и

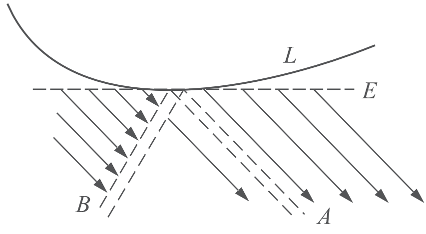


**Рис. 7.1.** Здесь $L$ есть ребро реального рассеивающего тела и $E$ есть ребро касательного клина. Стрелки обозначают краевые дифракционные лучи, расходящиеся от ребра $E$ вспомогательного касательного клина. Элементарные полоски $A$ и $B$ принадлежат граням этого клина

реального рассеивающего ребра $L$ в точке касания. Напротив, оно состоит из фиктивных дифракционных лучей, приходящих из точек на вспомогательном ребре $E$, которые *не принадлежат* реальному рассеивающему ребру.

Чтобы закончить определение элементарной полоски, нужно еще определить ее длину. Хотя *неравномерная* компонента $j^{(1)}$ сосредоточена вблизи ребра и убывает с удалением от него, тем не менее она существует на всей полоске (от ее начала до бесконечности). Интегрируя компоненту $j^{(1)}$ по такой полубесконечной полоске, можно определить асимптотические выражения для ЭКВ в первом приближении. Однако иногда у элементарной полоски отсекается та ее часть, которая выступает за пределы реальной грани рассеивающего тела (Michaeli, 1987; Breinbjerg, 1992; Johansen, 1996). Аналогичная процедура усечения рассматривалась выше, в разделе 5.1.4. С физической точки зрения, такое усечение приводит к появлению в рассеянном поле дополнительной элементарной волны, расходящейся от точки усечения. Эту волну можно интерпретировать *как часть волны*, возникающей вследствие вторичной дифракции.

В заключение рассмотрим специальный случай, когда ориентация элементарных полосок может быть произвольной. Такая ситуация возможна для усеченных полосок на полигональных гранях, освещаемых плоской волной (рис. 7.2).

Области $A$ и $C$ полигональной грани свободны от дифракционных лучей, в то время как область $B$ непрерывно заполнена такими лучами. Две параллельные линии показывают положение усеченной элементарной полоски с произвольной ориентацией. Все другие элементарные полоски в области $B$ параллельны ей и имеют различные длины. Поле, излучаемое *неравномерными* источниками $j^{(1)}$ из области $B$, определяется поверхностным интегралом от этих источников. Ясно, что результат такого интегрирования не зависит от формы элементов, на которые можно подразделить область $B$, и, следовательно, он не зависит от ориентации элементарных полосок.

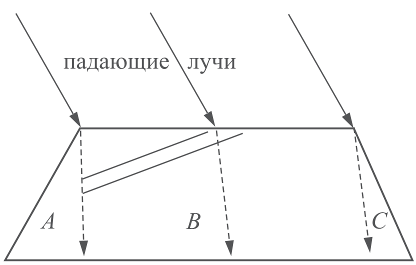


**Рис. 7.2.** Полигональная грань рассеивающего тела. Только дифракционные лучи (штриховые линии), приходящие от верхнего ребра, показаны здесь и обсуждаются в тексте выше

## 7.2. Интегральные представления для неравномерных компонент поверхностных источников $j_{s,h}^{(1)}$

Сначала определим ориентацию элементарных полосок в соответствии с правилом, сформулированным в разделе 7.1. Они ориентированы вдоль краевых дифракционных лучей и показаны на рис. 7.3.

Падающая волна задана выражением

$$u^{inc} = u_0 \mathrm{e}^{ik\phi^i} \tag{7.1}$$

и распространяется в направлении $\hat{k}^i = \nabla\phi^i \equiv \mathrm{grad}\,\phi^i$. В цилиндрических координатах $(r, \varphi, z)$ эта волна определяется выражением

$$u^{inc} = u_0 \mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0} \cdot \mathrm{e}^{-ik_1 r\cos(\varphi-\varphi_0)}, \tag{7.2}$$

где $k_1 = k\sin\gamma_0$, $0 < \gamma_0 < \pi$, $0 \le \varphi_0 \le \pi$, $0 \le \varphi \le \alpha$. Здесь $\alpha$ есть внешний угол между гранями клина 1 и 2 ($\pi \le \alpha \le 2\pi$). Для описания дифракционного поля мы будем использовать две локальных системы координат: сферические координаты $(R, \vartheta, \varphi)$ и координаты $(R, \beta_1, \beta_2)$, где углы $\beta_{1,2}$ измеряются от элементарных полосок, т. е. от осей $x_{1,2}$, и не превышают величины, равной 180° ($0 \le \beta_{1,2} \le \pi$).

> Локальные цилиндрические координаты $r, \varphi, z$ и сферические координаты $R, \vartheta, \varphi$ вводятся в соответствии с правилом правой руки по отношению к их единичным векторам ($\hat{r}\times\hat{\varphi} = \hat{z}$, $\hat{R}\times\hat{\vartheta} = \hat{\varphi}$). Следует помнить, что эти координаты вводятся таким образом, что угол $\varphi$ *измеряется от освещенной грани рассеивающего ребра, а касательная $\vec{t}$ к ребру направлена вдоль локальной полярной оси $\vec{z}$* ($\hat{t} = \hat{z}$). Когда освещены обе грани ребра, угол $\varphi$ можно измерять от любой грани. Но в этом случае нужно правильно выбирать направление полярной оси $\vec{z}$ и касательной $\vec{t}$ ($\hat{z} = \hat{t} = \hat{r}\times\hat{\varphi}$).

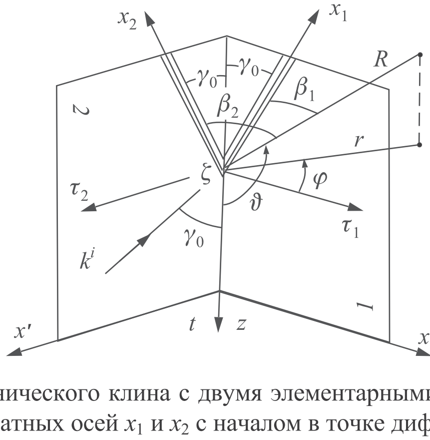


**Рис. 7.3.** Элемент канонического клина с двумя элементарными полосками, ориентированными вдоль координатных осей $x_1$ и $x_2$ с началом в точке дифракции $\zeta$ на ребре клина

Эти замечания относительно ориентации систем координат исключительно важны для правильного применения развиваемой здесь теории ЭКВ, особенно в случае электромагнитных волн.

Согласно разделам 2.3 и 4.3, падающая волна (7.2) возбуждает вне клина волновое поле

$$u_s(r,\varphi)=u_0\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}[v(k_1r,\varphi-\varphi_0)-v(k_1r,\varphi+\varphi_0)]+u_s^{go}(r,\varphi) \tag{7.3}$$

и

$$u_h(r,\varphi)=u_0\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}[v(k_1r,\varphi-\varphi_0)+v(k_1r,\varphi+\varphi_0)]+u_h^{go}(r,\varphi). \tag{7.4}$$

Здесь, $u_{s,h}^{go}$ есть геометрооптическая часть поля (состоящая из падающей и отраженных плоских волн), а дифракционная часть поля описывается линейной комбинацией функций $v(k_1r,\varphi\pm\varphi_0)$, где

$$v(k_1r,\psi)=\frac{1}{2\alpha}\int_D\frac{\mathrm{e}^{-ik_1r\cos\eta}}{w(\eta+\psi)}d\eta, \tag{7.5}$$

$$w(x)=1-\exp\left(i\frac{\pi}{\alpha}x\right), \tag{7.6}$$

а контур интегрирования $D$ показан на рис. 2.5.

Нас интересуют *неравномерные* компоненты $j_{s,h}^{(1)}$ поверхностных источников, индуцируемых на элементарных полосках. В соответствии с формулами (1.86), (1.31) и (1.11) они определяются выражениями:

$$j_s^{(1)}=\frac{\partial u_s(r,\varphi)}{\partial n}-\frac{\partial u_s^{go}(r,\varphi)}{\partial n}\quad\text{на гранях }\varphi=0,\alpha, \tag{7.7}$$

$$j_h^{(1)}=u_h(r,\varphi)-u_h^{go}(r,\varphi)\qquad\text{на гранях }\varphi=0,\alpha. \tag{7.8}$$

Нормальные производные в выражении (7.7) определяются согласно формулам

$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\ \text{на грани }\varphi=0\text{ и }\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\ \text{на грани }\varphi=\alpha. \tag{7.9}$$

Дифференцирование функции $v(k_1r,\varphi\mp\varphi_0)$ выполняется по частям:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}v(k_1r,\varphi\mp\varphi_0)=\frac{1}{2\alpha}\int_D\mathrm{e}^{-ik_1r\cos\eta}\frac{\partial}{\partial\varphi}w^{-1}(\eta+\varphi\mp\varphi_0)d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\int_D\mathrm{e}^{-ik_1r\cos\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}w^{-1}(\eta+\varphi\mp\varphi_0)d\eta=\frac{1}{2\alpha}\frac{\mathrm{e}^{-ik_1r\cos\eta}}{w(\eta+\varphi\mp\varphi_0)}\Bigg|_{-\frac{3\pi}{2}+i\infty}^{-\frac{\pi}{2}-i\infty}+$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\frac{\mathrm{e}^{-ik_1 r\cos\eta}}{w(\eta+\varphi\mp\varphi_0)}\Bigg|_{\frac{3\pi}{2}-i\infty}^{\frac{\pi}{2}+i\infty}-\frac{ik_1 r}{2\alpha}\int\limits_D \frac{\mathrm{e}^{-ik_1 r\cos\eta}\sin\eta}{w(\eta+\varphi\mp\varphi_0)}d\eta=$$

$$=-\frac{ik_1 r}{2\alpha}\int\limits_D \frac{\mathrm{e}^{-ik_1 r\cos\eta}\sin\eta}{w(\eta+\varphi\mp\varphi_0)}d\eta. \tag{7.10}$$

Здесь слагаемые, относящиеся к концам контура $D$, равны нулю. Используем также соотношения

$$z=\zeta-\xi_{1,2}\cos\gamma_0,\quad r=\xi_{1,2}\sin\gamma_0, \tag{7.11}$$

относящиеся к точкам наблюдения $x_{1,2}=\xi_{1,2}$, находящимся на элементарных полосках.

С учетом сделанных замечаний имеем следующие интегральные выражения для компонент $j_{s,h}^{(1)}$:

$$j_s^{(1)}=u_0\frac{ik_1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-ik(\zeta-\xi_1\cos\gamma_0)\cos\gamma_0}\times$$

$$\times\int\limits_D \mathrm{e}^{-ik_1\xi_1\sin\gamma_0\cos\eta}[w^{-1}(\eta+\varphi_0)-w^{-1}(\eta-\varphi_0)]\sin\eta d\eta, \tag{7.12}$$

$$j_h^{(1)}=u_0\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-ik(\zeta-\xi_1\cos\gamma_0)\cos\gamma_0}\times$$

$$\times\int\limits_D \mathrm{e}^{-ik_1\xi_1\sin\gamma_0\cos\eta}[w^{-1}(\eta+\varphi_0)+w^{-1}(\eta-\varphi_0)]d\eta \tag{7.13}$$

на полоске 1 ($\varphi=0$), и

$$j_s^{(1)}=u_0\frac{ik_1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-ik(\zeta-\xi_2\cos\gamma_0)\cos\gamma_0}\times$$

$$\times\int\limits_D \mathrm{e}^{-ik_1\xi_2\sin\gamma_0\cos\eta}[w^{-1}(\eta+\alpha-\varphi_0)-w^{-1}(\eta+\alpha+\varphi_0)]\sin\eta d\eta, \tag{7.14}$$

$$j_h^{(1)}=u_0\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-ik(\zeta-\xi_2\cos\gamma_0)\cos\gamma_0}\times$$

$$\times\int\limits_D \mathrm{e}^{-ik_1\xi_2\sin\gamma_0\cos\eta}[w^{-1}(\eta+\alpha-\varphi_0)+w^{-1}(\eta+\alpha+\varphi_0)]d\eta \tag{7.15}$$

на полоске 2 ($\varphi=\alpha$). Тождество

$$w(\eta+\alpha+\varphi_0)=1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{\alpha}(\eta+\alpha+\varphi_0)}=1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{\alpha}(2\alpha+\eta-\alpha+\varphi_0)}=$$

$$=1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{\alpha}(\eta-\alpha+\varphi_0)}=w(\eta-\alpha+\varphi_0)$$

позволяет переписать выражения (7.14) и (7.15) в более удобной форме:

$$j_s^{(1)} = u_0 \frac{ik_1}{2\alpha} \mathrm{e}^{-ik(\zeta - \xi_2 \cos\gamma_0)\cos\gamma_0} \times$$
$$\times \int_D \mathrm{e}^{-ik_1 \xi_2 \sin\gamma_0 \cos\eta} [w^{-1}(\eta + \alpha - \varphi_0) - w^{-1}(\eta - \alpha + \varphi_0)] \sin\eta d\eta, \quad (7.16)$$

$$j_h^{(1)} = u_0 \frac{1}{2\alpha} \mathrm{e}^{-ik(\zeta - \xi_2 \cos\gamma_0)\cos\gamma_0} \times$$
$$\times \int_D \mathrm{e}^{-ik_1 \xi_2 \sin\gamma_0 \cos\eta} [w^{-1}(\eta + \alpha - \varphi_0) + w^{-1}(\eta - \alpha + \varphi_0)] d\eta. \quad (7.17)$$

Теперь видно, что выражения (7.16) и (7.17), относящиеся к функции $j_{s,h}^{(1)}$ на полоске 2, можно получить из выражений (7.12), (7.13) путем формальной замены $\varphi_0$ на $\alpha - \varphi_0$ и $\xi_1$ на $\xi_2$. В следующем разделе эти выражения для функций $j_{s,h}^{(1)}$ используются для вычисления ЭКВ.

## 7.3. Трехкратные интегралы для элементарных краевых волн

При использовании теории ЭКВ нужно помнить следующее:

- в общем случае криволинейная координатная ось $\zeta$ располагается на ребре рассеивающего клина и ассоциируется с его длиной;
- дифференциальный элемент длины ребра всегда положителен ($d\zeta > 0$);
- положительное направление оси $\zeta$ задается направлением локальной полярной оси $z$;
- локальная полярная ось $z$ и касательная к ребру $\vec{t}$ определяются соотношением $\hat{t} = \hat{z} = \hat{r} \times \hat{\varphi}$, где $r$ и $\varphi$ являются локальными цилиндрическими координатами;
- координата $\varphi$ вводится в соответствии с правилом, указанным в разделе 7.1.

Рассеянное поле описывается в общем случае формулами (1.10). Здесь мы применим их для вычисления поля $du_{s,h}^{(1)}$, которое создается источниками $j_{s,h}^{(1)}$, определенными в предыдущем разделе. В качестве поверхности интегрирования в формулах (1.10) выберем элементарные полоски 1 (на грани $\varphi = 0$) и 2 (на грани $\varphi = \alpha$). Учтем, что для этих полосок дифференциальный элемент площади равен $ds_{1,2} = \sin\gamma_0 d\zeta d\xi_{1,2}$.

Результатом применения формул (1.10) являются следующие выражения:

$$du_s^{(1)} = du_1^{(1)} + du_2^{(1)}, \quad du_h^{(1)} = dv_1^{(1)} + dv_2^{(1)}, \quad (7.18)$$

где

$$du^{(1)}_{1,2} = -d\zeta \frac{\sin\gamma_0}{4\pi} \int_0^\infty j^{(1)}_{s1,s2} \frac{e^{ikr_{1,2}}}{r_{1,2}} d\xi_{1,2}, \tag{7.19}$$

$$dv^{(1)}_{1,2} = d\zeta \frac{\sin\gamma_0}{4\pi} \int_0^\infty j^{(1)}_{h1,h2} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr_{1,2}}}{r_{1,2}} d\xi_{1,2}. \tag{7.20}$$

Величины $du_1^{(1)}$, $dv_1^{(1)}$ и $du_2^{(1)}$, $dv_2^{(1)}$ описывают поле, создаваемое элементарными полосками 1 и 2, соответственно. Отрезки прямых $r_1 = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + h_1^2}$ и $r_2 = \sqrt{(x_2 - \xi_2)^2 + h_2^2}$ определяют расстояние между точками наблюдения и интегрирования (рис. 7.4).

Для функции Грина свободного пространства мы используем формулу (6.616-3) из справочника (Gradshteyn and Ryzhik, 1994)

$$\frac{e^{ikr_{1,2}}}{r_{1,2}} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{ip(x_{1,2}-\xi_{1,2})} H_0^{(1)}(qh_{1,2})dp, \tag{7.21}$$

где $q = \sqrt{k^2 - p^2}$, $\mathrm{Im}(q) \ge 0$ и $h_{1,2} = \sqrt{y_{1,2}^2 + z_{1,2}^2} \ge 0$. Квадратный корень $q$ является двузначной функцией. Мы превращаем его в однозначную функцию, вводя два разреза в комплексной плоскости ($p$): $-\infty \le \mathrm{Re}(p) \le -k$ и $k \le \mathrm{Re}(p) \le \infty$. Контур интегрирования в формуле (7.21) проводится по верхнему берегу левого разреза и огибает сверху точку ветвления $p = -k$, затем он продолжается вдоль вещественной оси и огибает снизу вторую точку ветвления $p = k$. Обогнув ее, контур интегрирования продолжается вдоль нижнего берега правого разреза.

Нормальная производная функции Грина определяется формулой

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikr_{1,2}}}{r_{1,2}} = \nabla' \frac{e^{ikr_{1,2}}}{r_{1,2}} \cdot \hat{y}_{1,2} = -\nabla \frac{e^{ikr_{1,2}}}{r_{1,2}} \cdot \hat{y}_{1,2} = -\frac{\partial}{\partial y_{1,2}} \frac{e^{ikr_{1,2}}}{r_{1,2}} =$$

$$= \frac{iy_{1,2}}{2h_{1,2}} \int_{-\infty}^\infty e^{ip(x_{1,2}-\xi_{1,2})} qH_1^{(1)}(qh_{1,2})dp. \tag{7.22}$$

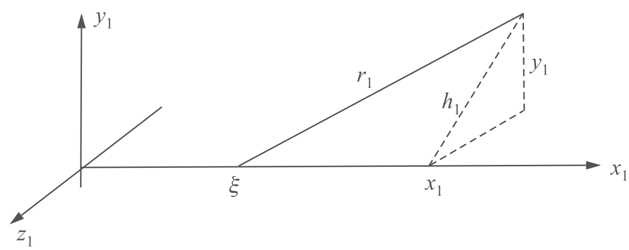


**Рис. 7.4.** Локальные декартовы координаты ($x_1$, $y_1$, $z_1$) с осями $x_1$ и $z_1$, лежащими на грани клина 1 ($\varphi = 0$); ось $y_1$ перпендикулярна к грани 1 ($\hat{y}_1 = \hat{n}$). Аналогичные декартовы координаты ($x_2$, $y_2$, $z_2$) с осями $x_2$, $z_2$ вводятся на грани 2 ($\varphi = \alpha$); ось $y_2$ ориентирована параллельно нормали ($\hat{y}_2 = \hat{n}$)

Напоминаем, что дифференциальный оператор $\nabla'$ ($\nabla$) действует на координаты точки интегрирования (наблюдения). Величины $y_{1,2}$ выражаются в терминах сферических координат $(R, \vartheta, \varphi)$ соотношениями

$$y_1 = R\sin\vartheta\sin\varphi, \quad y_2 = R\sin\vartheta\sin(\alpha-\varphi), \tag{7.23}$$

а величины $h_{1,2}$ выражаются в терминах координат $(R, \beta_1, \beta_2)$ соотношениями

$$h_1 = R\sin\beta_1, \quad h_2 = R\sin\beta_2. \tag{7.24}$$

Учитывая приведенные выше соотношения и используя выражения из раздела 7.2 для источников $j_{s,h}^{(1)}$, получаем следующие интегральные представления для ЭКВ:

$$du_1^{(1)} = u_0 \mathrm{e}^{-ik\zeta\cos\gamma_0} d\zeta \frac{k\sin^2\gamma_0}{16\pi\alpha} I_u(x_1, h_1, \varphi_0), \tag{7.25}$$

$$dv_1^{(1)} = u_0 \mathrm{e}^{-ik\zeta\cos\gamma_0} d\zeta \frac{i}{16\pi\alpha} \frac{\sin\gamma_0\sin\vartheta\sin\varphi}{\sin\beta_1} I_v(x_1, h_1, \varphi_0), \tag{7.26}$$

где

$$I_u(x_1, h_1, \varphi_0) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{ik\xi_1\cos^2\gamma_0} d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ip(x_1-\xi_1)} H_0^{(1)}(qh_1)dp \times$$
$$\times \int_D \mathrm{e}^{-ik\xi_1\sin^2\gamma_0\cos\eta} [w^{-1}(\eta+\varphi_0) - w^{-1}(\eta-\varphi_0)]\sin\eta d\eta, \tag{7.27}$$

$$I_v(x_1, h_1, \varphi_0) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{ik\xi_1\cos^2\gamma_0} d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ip(x_1-\xi_1)} qH_1^{(1)}(qh_1)dp \times$$
$$\times \int_D \mathrm{e}^{-ik\xi_1\sin^2\gamma_0\cos\eta} [w^{-1}(\eta+\varphi_0) + w^{-1}(\eta-\varphi_0)]d\eta \tag{7.28}$$

и

$$du_2^{(1)} = u_0 \mathrm{e}^{-ik\zeta\cos\gamma_0} d\zeta \frac{k\sin^2\gamma_0}{16\pi\alpha} I_u(x_2, h_2, \alpha-\varphi_0), \tag{7.29}$$

$$dv_2^{(1)} = u_0 \mathrm{e}^{-ik\zeta\cos\gamma_0} d\zeta \frac{i}{16\pi\alpha} \frac{\sin\gamma_0\sin\vartheta\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\beta_2} I_v(x_2, h_2, \alpha-\varphi_0). \tag{7.30}$$

Теперь видно, что выражения (7.29) и (7.30) для полей, создаваемых полоской 2, могут быть получены из выражений (7.25) и (7.26) для полей от полоски 1 путем следующих формальных замен:

$$x_1 \to x_2, \quad h_1 \to h_2, \quad \beta_1 \to \beta_2, \quad \varphi_0 \to \alpha-\varphi_0, \quad \varphi \to \alpha-\varphi. \tag{7.31}$$

Это наблюдение позволяет проводить все дальнейшие вычисления только для полей $du_1^{(1)}$, $dv_1^{(1)}$. Окончательные выражения для полей $du_2^{(1)}$, $dv_2^{(1)}$ будут затем получены с использованием соотношений (7.31).

Итак, задача об элементарных краевых волнах сведена к вычислению трехкратных интегралов $I_u$, $I_v$. Их исследование проводится в следующем разделе.

## 7.4. Преобразование трехкратных интегралов в однократные

Сначала мы поменяем порядок интегрирования в интегралах (7.27), (7.28):

$$I_u = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ipx_1} H_0^{(1)}(qh_1)dp \times$$

$$\times \int_D [w^{-1}(\eta+\varphi_0) - w^{-1}(\eta-\varphi_0)]\sin\eta d\eta \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi_1(p_2+k_2\cos\eta)} d\xi_1, \quad (7.32)$$

$$I_v = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ipx_1} qH_1^{(1)}(qh_1)dp \times$$

$$\times \int_D [w^{-1}(\eta+\varphi_0) + w^{-1}(\eta-\varphi_0)]d\eta \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi_1(p_2+k_2\cos\eta)} d\xi_1, \quad (7.33)$$

где

$$p_2 = p - k\cos^2\gamma_0, \quad k_2 = k\sin^2\gamma_0 . \quad (7.34)$$

Интеграл по переменной $\xi$ вычисляется в явном виде при условии $\mathrm{Im}(p_2 + k_2\cos\eta) < 0$, гарантирующем его сходимость. В результате получаем двукратные интегралы:

$$I_u = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ipx_1} H_0^{(1)}(qh_1)dp \int_D \frac{[w^{-1}(\eta+\varphi_0) - w^{-1}(\eta-\varphi_0)]\sin\eta}{p_2 + k_2\cos\eta} d\eta, \quad (7.35)$$

$$I_v = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ipx_1} qH_1^{(1)}(qh_1)dp \int_D \frac{[w^{-1}(\eta+\varphi_0) + w^{-1}(\eta-\varphi_0)]}{p_2 + k_2\cos\eta} d\eta. \quad (7.36)$$

Указанное выше условие сходимости интеграла выполняется во всех точках контура $D$ (за исключением точек $\eta = \pm\pi$) благодаря неравенству $\mathrm{Im}(k_2\cos\eta) < 0$, которое выполняется на этом контуре. Для точек $\eta = \pm\pi$) и $p \neq k$ сходимость достигается *временным допущением*, что волновое число имеет небольшую мнимую часть, $k = k' + ik''$, $k' > 0$ и $0 < k'' \ll 1$. Это допущение означает небольшое затухание акустических волн из-за *временно допускаемой* небольшой вязкости среды. После перехода к интегралам (7.35) и (7.36) это допущение опускается. Особая ситуация возникает, когда $\eta = \pm\pi$ и переменная $p$ приближается к точке $p = k$, которая является точкой ветвления в комплексной плоскости $(p)$. Поскольку контур интегрирования в плоскости $(p)$

огибает эту точку снизу, величина $p$ оказывается здесь комплексной, $p = p' + ip''$, где $p' = k$ и $p'' = \mathrm{Im}(p) < 0$. Следовательно, в этом специальном случае интеграл по переменной $\xi_1$ сходится благодаря неравенству $\mathrm{Im}(p) < 0$.

Дальнейшая работа состоит в тщательном анализе интегралов по контуру $D$. Их подынтегральные функции имеют полюсы двух типов. Два полюса, $\eta_1 = \varphi_0$ и $\eta_2 = -\varphi_0$, относятся к функциям $w^{-1}(\eta \mp \varphi_0)$. Два других полюса, $\eta_3 = \sigma$ и $\eta_4 = -\sigma$, являются нулями знаменателя $p_2 + k_2\cos\eta$, когда

$$\cos\sigma = -\frac{p_2}{k_2} \text{ и } \sigma = \arccos\left(-\frac{p_2}{k_2}\right). \tag{7.37}$$

Ясно, что

$$\sigma = \pi - \arccos(p_2/k_2), \text{ если } |p_2| \le k_2, \tag{7.38}$$

где для обратного косинуса мы берем его главные значения, $0 \le \arccos(x) \le \pi$. Условие $|p_2| \le k_2$ выполняется для всех точек $p$ на вещественной оси в интервале $k\cos(2\gamma_0) \le p \le k$. В этом случае $0 \le \sigma \le \pi$.

Чтобы определить $\sigma$ для значений $|p_2| \ge k_2$, воспользуемся формулой Эйлера для косинуса. Вместе с соотношением (7.37) она приводит к уравнению

$$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\sigma} + \mathrm{e}^{-i\sigma}) = -\frac{p_2}{k_2}. \tag{7.39}$$

Заменой $\mathrm{e}^{-i\sigma} = t$ оно сводится к квадратному уравнению с решением

$$\sigma = i\ln\frac{-p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - k_2^2}}{k_2}. \tag{7.40}$$

Теперь необходимо определить подходящие ветви для квадратного корня $\sqrt{p_2^2 - k_2^2}$ и для логарифмической функции. Квадратный корень имеет точки ветвления $p_2 = \pm k_2$. Чтобы сделать этот корень однозначной функцией, мы проводим в комплексной плоскости $(p)$ два разреза $(-\infty \le p_2 \le -k_2$ и $k_2 \le p_2 \le \infty)$ и выбираем ту ветвь, где $\sqrt{p_2^2 - k_2^2} \ge 0$ для всех точек на верхнем (нижнем) берегу левого (правого) разреза.

Чтобы определить подходящий знак перед квадратным корнем и подходящую ветвь логарифмической функции в формуле (7.40), мы используем два условия: $\sigma = \pi$ для $p_2 = k_2$ и $\sigma = 0$ для $p_2 = -k_2$. Эти условия позволяют определить функцию $\sigma$ в следующем виде:

$$\sigma = i\ln\frac{-p_2 + \sqrt{p_2^2 - k_2^2}}{k_2}, \tag{7.41}$$

где $\ln(-1) = -i\pi$ и $\ln(1) = 0$.

Из формулы (7.41) следует, что

$$\sigma = \pi + i\ln\frac{p_2 - \sqrt{p_2^2 - k_2^2}}{k_2} \text{ при } p_2 \geq k_2 \tag{7.42}$$

и

$$\sigma = i\ln\frac{-p_2 + \sqrt{p_2^2 - k_2^2}}{k_2} \text{ при } p_2 \leq -k_2. \tag{7.43}$$

Поскольку величина $p_2$ вещественная, а аргумент логарифма в формулах (7.42) и (7.43) всегда положителен, мы выбираем для логарифма регулярную арифметическую ветвь, где $\ln(0) = -\infty$, $\ln(1) = 0$ и $\ln(\infty) = +\infty$.

Теперь можно проследить за положением полюса $\sigma$ в комплексной плоскости $(\eta)$ как функции переменной $p$ в выражениях (7.35) и (7.36). Когда эта переменная изменяется от $p = -\infty$ до $p = k\cos(2\gamma_0)$, полюс $\eta_3 = \sigma$ перемещается в комплексной плоскости $(\eta)$ вдоль мнимой оси $\mathrm{Im}(\eta)$ от $\eta = +i\infty$ к $\eta = 0$. Когда точка $p$ движется от $p = k\cos(2\gamma_0)$ к $p = k$, полюс $\eta_3 = \sigma$ перемещается вдоль вещественной оси $\mathrm{Re}(\eta)$ от $\eta = 0$ к $\eta = \pi$. Когда точка $p$ движется от $p = k$ к $p = +\infty$, полюс $\eta_3 = \sigma$ перемещается вниз вдоль вертикальной линии от $\eta = \pi$ к $\eta = \pi - i\infty$. Положение полюса $\eta_3 = \sigma$ в комплексной плоскости $(\eta)$ показано на рис. 7.5 толстой сплошной линией. Штриховая линия показывает положение полюса $\eta_4 = -\sigma$.

Чтобы вычислить интегралы по контуру $D$, мы соединим его ветви дополнительными контурами $F_+$ и $F_-$ (рис. 7.5), где $\mathrm{Im}(\eta) = A$ и $\mathrm{Im}(\eta) = -A$, соответственно. Сначала мы проведем эти контуры на большом *конечном* расстоянии от вещественной оси ($A \gg 1$) и применим теорему Коши о вычетах к интегралам по замкнутому контуру $C = D + F_+ + F_-$. Затем результаты этой теоремы

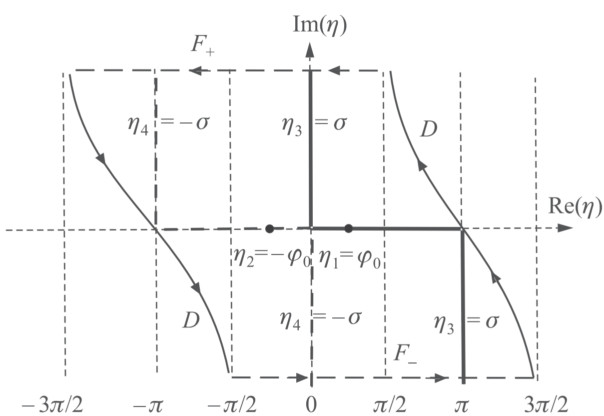


**Рис. 7.5.** Контуры интегрирования в комплексной плоскости $(\eta)$

распространим на случай, когда контуры $F_+$ и $F_-$ сдвигаются на *бесконечное* расстояние ($A \to \infty$). Эта процедура реализуется ниже для интегралов

$$J_u(C) = \int\limits_C \frac{w^{-1}(\eta+\varphi_0) - w^{-1}(\eta-\varphi_0)}{p_2 + k_2\cos\eta} \sin\eta\, d\eta, \tag{7.44}$$

$$J_v(C) = \int\limits_C \frac{w^{-1}(\eta+\varphi_0) + w^{-1}(\eta-\varphi_0)}{p_2 + k_2\cos\eta} d\eta. \tag{7.45}$$

Основные детали этой процедуры одинаковы для обоих интегралов. Поэтому они демонстрируются ниже только для интеграла $J_u$, а для интеграла $J_v$ приводится уже окончательный результат.

Когда все полюсы в интеграле $J_u$ находятся в области, замкнутой контуром $C = D + F_+ + F_-$, теорема Коши утверждает, что

$$J_u(C) = 2\pi i \sum_{m=1}^{4} \mathrm{Res}_m. \tag{7.46}$$

Здесь величины $\mathrm{Res}_1$ и $\mathrm{Res}_2$ являются вычетами в полюсах $\eta_1 = \varphi_0$ и $\eta_2 = -\varphi_0$,

$$\mathrm{Res}_1 = \mathrm{Res}_2 = \frac{\alpha}{i\pi} \cdot \frac{\varepsilon(\varphi_0)\sin\varphi_0}{p_2 + k_2\cos\varphi_0}, \tag{7.47}$$

где

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x \le \pi, \\ 0, & \text{если } \pi < x, \end{cases} \tag{7.48}$$

а

$$\mathrm{Res}_3 = \frac{1}{k_2}[w^{-1}(\sigma-\varphi_0) - w^{-1}(\sigma+\varphi_0)], \tag{7.49}$$

$$\mathrm{Res}_4 = \frac{1}{k_2}[w^{-1}(-\sigma-\varphi_0) - w^{-1}(-\sigma+\varphi_0) \tag{7.50}$$

являются вычетами в полюсах $\eta_3$ и $\eta_4$. Кроме того,

$$\mathrm{Res}_3 + \mathrm{Res}_4 = \frac{i}{k_2}\left[\mathrm{ctg}\frac{\pi(\sigma-\varphi_0)}{2\alpha} - \mathrm{ctg}\frac{\pi(\sigma+\varphi_0)}{2\alpha}\right]. \tag{7.51}$$

Можно проверить, что вычеты $\mathrm{Res}_3$ и $\mathrm{Res}_4$ стремятся к нулю, когда $\mathrm{Im}(\sigma) \to \pm\infty$.

Заметим, что для некоторых больших значений параметра $|p|$ полюсы $\eta_3$ и $\eta_4$ могут достичь контуры $F_+$ и $F_-$. Когда они находятся точно на этих контурах, интеграл $J_u(C)$ равен

$$J_u(C) = 2\pi i\left[\mathrm{Res}_1 + \mathrm{Res}_2 + \frac{1}{2}(\mathrm{Res}_3 + \mathrm{Res}_4)\right]. \tag{7.52}$$

Наша цель состоит в вычислении интеграла $J_u(D)$ по контуру $D = C - (F_+ + F_-)$, когда контуры $F_+$ и $F_-$ сдвинуты на бесконечность $[\mathrm{Im}(\eta) = \pm\infty]$. Согласно формулам (7.46) и (7.52), интеграл определяется выражениями:

$$J_u(D) = 2\pi i \sum_{m=1}^{4} \mathrm{Res}_m - J_u(F_+ + F_-), \text{ если } |\mathrm{Im}(\sigma)| < A \tag{7.53}$$

и

$$J_u(D) = 2\pi i \left[ \mathrm{Res}_1 + \mathrm{Res}_2 + \frac{1}{2}(\mathrm{Res}_3 + \mathrm{Res}_4) \right] - J_u(F_+ + F_-), \text{ если } |\mathrm{Im}(\sigma)| = A, \tag{7.54}$$

где

$$J_u(F_+ + F_-) = J_u(F_+) + J_u(F_-) \tag{7.55}$$

и

$$J_u(F_+) = \int_{\pi/2+iA}^{-3\pi/2+iA} \frac{w^{-1}(\eta+\varphi_0) - w^{-1}(\eta-\varphi_0)}{p_2 + k_2\cos\eta} \sin\eta d\eta, \tag{7.56}$$

$$J_u(F_-) = \int_{-\pi/2-iA}^{3\pi/2-iA} \frac{w^{-1}(\eta+\varphi_0) - w^{-1}(\eta-\varphi_0)}{p_2 + k_2\cos\eta} \sin\eta d\eta. \tag{7.57}$$

Когда полюсы $\eta_3$ и $\eta_4$ находятся в области, ограниченной контуром $D + F_+ + F_-$, и при этом $A \to \infty$, интегралы $J_u(F_\pm)$ обращаются в нуль в силу соотношений

$$w^{-1}(\eta \pm \varphi_0) \to \begin{cases} 1, \text{ если } \mathrm{Im}(\eta) \to +\infty, \\ 0, \text{ если } \mathrm{Im}(\eta) \to -\infty, \end{cases} \tag{7.58}$$

$$w^{-1}(\eta+\varphi_0) - w^{-1}(\eta-\varphi_0) \to 0, \text{ если } \mathrm{Im}(\eta) \to \pm\infty, \tag{7.59}$$

$$tg(\eta) \to \begin{cases} i, & \text{если } \mathrm{Im}(\eta) \to +\infty, \\ -i, & \text{если } \mathrm{Im}(\eta) \to -\infty. \end{cases} \tag{7.60}$$

В случае, когда полюсы $\eta_3$ и $\eta_4$ находятся точно на контурах $F_+$ и $F_-$,

$$J_u(F_+) = \lim_{\sigma \to +i\infty} 2\pi i \cdot \left[ \frac{1}{2}(\mathrm{Res}_3 + \mathrm{Res}_4) \right] +$$

$$+ \lim_{A\to\infty} \lim_{\delta\to 0} \left[ \int_{\pi/2+iA}^{\delta+iA} + \int_{-\delta+iA}^{-\pi+\delta+iA} + \int_{-\pi-\delta+iA}^{-3\pi/2+iA} \right] \frac{w^{-1}(\eta+\varphi_0) - w^{-1}(\eta-\varphi_0)}{p_2 + k_2\cos\eta} \sin\eta d\eta', \tag{7.61}$$

$$J_u(F_-) = \lim_{\sigma \to -i\infty} 2\pi i \cdot \left[ \frac{1}{2}(\mathrm{Res}_3 + \mathrm{Res}_4) \right] +$$

$$+ \lim_{A\to\infty} \lim_{\delta\to 0} \left[ \int_{-\pi/2-iA}^{-\delta-iA} + \int_{+\delta-iA}^{\pi-\delta-iA} + \int_{\pi+\delta-iA}^{3\pi/2-iA} \right] \frac{w^{-1}(\eta+\varphi_0) - w^{-1}(\eta-\varphi_0)}{p_2 + k_2\cos\eta} \sin\eta d\eta'. \tag{7.62}$$

Здесь слагаемые с двойными пределами представляют собой главные значения интегралов $J_u(F_\pm)$. В силу соотношений (7.59) и (7.60) и предела $\lim\limits_{\eta\to\pm i\infty} \mathrm{Res}_{3,4} = 0$, интегралы $J_u(F_\pm)$ опять равны нулю.

Таким образом, при любом положении полюсов $\eta_3$ и $\eta_4$ оказывается, что $J_u(F_+ + F_-) = 0$ при $A \to \infty$. Учитывая это наблюдение и соотношения (7.53), (7.54), мы получаем следующий строгий результат:

$$J_u(D) = 2\pi i \sum_{m=1}^{4} \mathrm{Res}_m, \tag{7.63}$$

где вычеты определяются выражениями (7.47) и (7.49), (7.50).

Применяя ту же самую процедуру к интегралу $J_v(D)$, можно показать, что он также может быть представлен в форме (7.63), но с другими вычетами. Мы опускаем теперь все промежуточные выкладки и приводим окончательные выражения для интегралов (7.32) и (7.33):

$$I_u = \frac{1}{i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ipx_1} H_0^{(1)}(qh_1)\left\{\frac{4\alpha\varepsilon(\varphi_0)\sin\varphi_0}{p_2 + k_2\cos\varphi_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\pi}{k_2}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma+\varphi_0)}{2\alpha} - \operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma-\varphi_0)}{2\alpha}\right]\right\} dp, \tag{7.64}$$

$$I_v = \frac{1}{i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ipx_1} qH_1^{(1)}(qh_1)\left\{-\frac{4\alpha\varepsilon(\varphi_0)}{p_2 + k_2\cos\varphi_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\pi}{k_2\sin\sigma}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma+\varphi_0)}{2\alpha} + \operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma-\varphi_0)}{2\alpha}\right]\right\} dp. \tag{7.65}$$

Напомним, что эти интегралы определяют поля (7.25), (7.26), рассеиваемые элементарной полоской 1. В следующем разделе мы получим для них асимптотические оценки.

## 7.5. Асимптотики для элементарных краевых волн

Главный вклад в интегралы $I_{u,v}$ создается окрестностью стационарной точки $p_{st}$. Чтобы определить такую точку, необходимо сначала выделить в явном виде фазовый множитель в подынтегральных выражениях. С этой целью воспользуемся асимптотикой функций Ханкеля для больших значений аргумента,

$$H_0^{(1)}(qh_1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi q h_1}}\,\mathrm{e}^{iqh_1 - i\pi/4}, \quad H_1^{(1)}(qh_1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi q h_1}}\,\mathrm{e}^{iqh_1 - i3\pi/4}, \tag{7.66}$$

где $qh_1 \gg 1$.

В результате видно, что подынтегральные выражения имеют быстро осциллирующий множитель $\exp[i\Phi(p)] = \exp[i(px_1 + qh_1)]$. Стационарная точка находится из условия $d\Phi(p)/dp = 0$, которое приводит к уравнению

$$x_1\sqrt{k^2 - p_{st}^2} - h_1 p_{st} = 0. \tag{7.67}$$

Замечая, что $x_1 = R\cos\beta_1$, $h_1 = R\sin\beta_1$ и $q > 0$ в интервале $-k < p < k$, находим стационарную точку $p_{st} = k\cos\beta_1$. Далее можно было бы применить стандартный метод стационарной фазы и получить асимптотические оценки для интегралов $I_{u,v}$. Но мы используем другую идею, которая позволяет получить тот же результат, но значительно быстрее.

Рассмотрим интеграл

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ipx_1} H_0^{(1)}(qh_1)F(p)dp, \tag{7.68}$$

где $F(p)$ есть медленно меняющаяся функция. Ясно, что

$$I_0 \approx F(p_{st})\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ipx_1} H_0^{(1)}(qh_1)dp, \tag{7.69}$$

и согласно формуле (7.21)

$$I_0 \approx -2iF(p_{st})\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{7.70}$$

где $R = \sqrt{x_1^2 + h_1^2}$.

Аналогичным способом можно оценить интеграл

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ipx_1} qH_1^{(1)}(qh_1)F(p)dp = -\frac{d}{dh_1}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ipx_1} H_0^{(1)}(qh_1)F(p)dp \sim$$

$$\sim 2iF(p_{st})\frac{d}{dh_1}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \approx -2F(p_{st})k\frac{h_1}{R}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} = -2k\sin\beta_1 F(p_{st})\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{7.71}$$

где $kR \gg 1$.

Этот способ имеет еше одно преимущество. Он применим при условии $kR \gg 1$ и свободен от ограничения $q_{st}h_1 = kR\sin\beta_1 \gg 1$ в стандартном методе стационарной фазы.

Используя предложенный способ, легко получить асимптотические выражения для интегралов $I_{u,v}$, заданных формулами (7.64) и (7.65):

$$I_u = -2\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\left\{\frac{4\alpha\varepsilon(\varphi_0)\sin\varphi_0}{p_{2,st} + k_2\cos\varphi_0} + \frac{2\pi}{k_2}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma_1 + \varphi_0)}{2\alpha} - \operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma_1 - \varphi_0)}{2\alpha}\right]\right\}, \tag{7.72}$$

$$I_v = 2ik\sin\beta_1 \frac{e^{ikR}}{R}\left\{-\frac{4\alpha\varepsilon(\varphi_0)}{p_{2,st} + k_2\cos\varphi_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi}{k_2\sin\sigma_1}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma_1+\varphi_0)}{2\alpha} + \operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma_1-\varphi_0)}{2\alpha}\right]\right\}, \tag{7.73}$$

где

$$p_{2,st} = p_{st} - k\cos^2\gamma_0 = k(\cos\beta_1 - \cos^2\gamma_0), \tag{7.74}$$

$$\cos\beta_1 = \sin\gamma_0\sin\vartheta\cos\varphi - \cos\gamma_0\cos\vartheta. \tag{7.75}$$

Параметр $\sigma_1$ определяется в соответствии с формулами (7.38) и (7.42), (7.43) следующими выражениями:

$$\sigma_1 = \pi - \arccos\left[\frac{\cos\beta_1 - \cos^2\gamma_0}{\sin^2\gamma_0}\right], \text{ если } 0 \le \beta_1 \le \beta_k, \tag{7.76}$$

$$\sigma_1 = i\ln\{\cos^2\gamma_0 - \cos\beta_1 + \sqrt{(\cos^2\gamma_0 - \cos\beta_1)^2 - \sin^4\gamma_0}\} - 2i\ln(\sin\gamma_0), \tag{7.77}$$

если $\beta_k \le \beta_1 \le \pi$, где

$$\beta_k = \begin{cases} 2\gamma_0, & \text{если } 0 \le \gamma_0 \le \pi/2, \\ 2(\pi-\gamma_0), & \text{если } \pi/2 \le \gamma_0 \le \pi. \end{cases} \tag{7.78}$$

Подставляя величины (7.72) и (7.73) в формулы (7.25) и (7.26), получим асимптотические оценки для поля, рассеянного элементарной полоской 1:

$$du_1^{(1)} = u_0 e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}\frac{d\zeta}{2\pi}F_{s,1}^{(1)}(\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{7.79}$$

$$dv_1^{(1)} = u_0 e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}\frac{d\zeta}{2\pi}F_{h,1}^{(1)}(\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{7.80}$$

где $kR \gg 1$,

$$F_{s,1}^{(1)} = -U(\sigma_1,\varphi_0)\sin^2\gamma_0, \tag{7.81}$$

$$F_{h,1}^{(1)} = -V(\sigma_1,\varphi_0)\sin\gamma_0\sin\vartheta\sin\varphi \tag{7.82}$$

и

$$U(\sigma_1,\varphi_0) = U_t(\sigma_1,\varphi_0) - U_0(\beta_1,\varphi_0), \tag{7.83}$$

$$V(\sigma_1,\varphi_0) = V_t(\sigma_1,\varphi_0) - V_0(\beta_1,\varphi_0), \tag{7.84}$$

$$U_t(\sigma_1,\varphi_0) = \frac{\pi}{2\alpha\sin^2\gamma_0}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma_1+\varphi_0)}{2\alpha} - \operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma_1-\varphi_0)}{2\alpha}\right], \tag{7.85}$$

$$U_0(\beta_1,\varphi_0) = -\frac{\varepsilon(\varphi_0)\sin\varphi_0}{\cos\beta_1 - \cos^2\gamma_0 + \sin^2\gamma_0\cos\varphi_0}, \tag{7.86}$$

$$V_t(\sigma_1,\varphi_0) = \frac{\pi}{2\alpha\sin^2\gamma_0\sin\sigma_1}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma_1+\varphi_0)}{2\alpha} + \operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma_1-\varphi_0)}{2\alpha}\right], \tag{7.87}$$

$$V_0(\beta_1,\varphi_0) = \frac{\varepsilon(\varphi_0)}{\cos\beta_1 - \cos^2\gamma_0 + \sin^2\gamma_0\cos\varphi_0}. \tag{7.88}$$

Здесь функции $U_t$, $V_t$ относятся к полю, излучаемому полными рассеивающими источниками $j_{s,h}^{tot} = j_{s,h}^{(0)} + j_{s,h}^{(1)}$, а функции $U_0$, $V_0$ представляют поле, излучаемое их *равномерными* компонентами $j_{s,h}^{(0)}$. Величина $\varepsilon(\varphi_0)$ определяется формулой (7.48).

Асимптотические выражения (7.79) и (7.80) описывают поле, создаваемое источниками $j_{s,h}^{(1)}$, которые возбуждаются на элементарной полоске 1, находящейся на грани клина $\varphi = 0$. Используя эти выражения и соотношения (7.31), легко получить асимптотики для полей $du_2^{(1)}$, $dv_2^{(1)}$, создаваемых элементарной полоской 2, расположенной на грани клина $\varphi = \alpha$. Следовательно, полное поле ЭКВ, создаваемое обеими полосками, будет описываться следующими выражениями:

$$du_s^{(1)} = u^{inc}(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi}F_s^{(1)}(\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{7.89}$$

$$du_h^{(1)} = u^{inc}(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi}F_h^{(1)}(\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{7.90}$$

где $kR \gg 1$,

$$F_s^{(1)}(\vartheta,\varphi) = -[U(\sigma_1,\varphi_0) + U(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)]\sin^2\gamma_0, \tag{7.91}$$

$$F_h^{(1)}(\vartheta,\varphi) = -[V(\sigma_1,\varphi_0)\sin\varphi + V(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)\sin(\alpha-\varphi)]\sin\gamma_0\sin\vartheta \tag{7.92}$$

и

$$U(\sigma_2,\alpha-\varphi_0) = U_t(\sigma_2,\alpha-\varphi_0) - U_0(\beta_2,\alpha-\varphi_0), \tag{7.93}$$

$$V(\sigma_2,\alpha-\varphi_0) = V_t(\sigma_2,\alpha-\varphi_0) - V_0(\beta_2,\alpha-\varphi_0). \tag{7.94}$$

Величина $u^{inc}(\zeta)$ в формулах (7.89), (7.90) обозначает поле падающей волны в точке $\zeta$ на рассеивающем ребре. Параметр $\sigma_2$ определяется формулами (7.76) и (7.77), в которых следует произвести замену $\beta_1 \to \beta_2$. Угол $\beta_2$ определяется выражением

$$\cos\beta_2 = \sin\gamma_0\sin\vartheta\cos(\alpha-\varphi) - \cos\gamma_0\cos\vartheta, \tag{7.95}$$

которое следует из формулы (7.75) после замены $\varphi$ на $\alpha - \varphi$.

Учитывая замечания, сопровождающие формулы (7.87) и (7.88), легко получить выражения для ЭКВ, создаваемых полными рассеивающими источниками $j_{s,h}^{(t)} = j_{s,h}^{(0)} + j_{s,h}^{(1)}$. Эти выражения являются простыми модификациями формул (7.89) и (7.90):

$$du_s^{(t)} = u^{inc}(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi}F_s^{(t)}(\vartheta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{7.96}$$

$$du_h^{(t)} = u^{inc}(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi}F_h^{(t)}(\vartheta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{7.97}$$

где

$$F_s^{(t)}(\vartheta,\varphi) = -[U_t(\sigma_1,\varphi_0) + U_t(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)]\sin^2\gamma_0, \tag{7.98}$$

$$F_h^{(t)}(\vartheta,\varphi) = -[V_t(\sigma_1,\varphi_0)\sin\varphi + V_t(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)\sin(\alpha-\varphi)]\sin\gamma_0\sin\vartheta. \tag{7.99}$$

Как и ожидалось, элементарная краевая волна (ЭКВ) на больших расстояниях ($kR \gg 1$) от точки дифракции на ребре представляет собой сферическую волну с диаграммой направленности, описываемой формулами (7.91), (7.92) и (7.98), (7.99). Эту волну можно также интерпретировать как множество *элементарных краевых дифракционных лучей,* излучаемых во все стороны от точки дифракции на ребре. В следующем разделе мы изучим аналитические свойства ЭКВ.

## 7.6. Аналитические свойства элементарных краевых волн

- Очевидно, что для вещественных параметров $\sigma_{1,2}$ диаграммы направленности $F_{s,h}^{(1)}$ элементарных краевых волн являются вещественными функциями. Можно проверить, что они остаются вещественными и для мнимых параметров $\sigma_{1,2}$. Таким образом, функции $F_{s,h}^{(1)}$ всегда вещественны, хотя их аргументы могут быть комплексными.
- Поле $du_s^{(1)}$ для акустически мягких рассеивателей равно нулю при скользящем падении ($\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = \alpha$). Рассмотрим, например, случай $\varphi_0 = 0$. Действительно, согласно формулам (7.85) и (7.86), $U_t(\sigma_1, 0) = 0$ и $U_0(\beta_1, 0) = 0$. Функция $U_t(\sigma_2, \alpha)$ также равна нулю, поскольку

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma_2+\alpha)}{2\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\pi(2\alpha+\sigma_2-\alpha)}{2\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma_2-\alpha)}{2\alpha}. \tag{7.100}$$

  Это свойство является следствием того факта, что падающая плоская волна не может распространяться вдоль грани клина: в силу граничных условий она полностью гасится отраженной волной. Но если нет падающей волны, то нет и дифракционного поля.

- Очевидно, что функции $U_t(\sigma_1, \varphi_0)$, $V_t(\sigma_1, \varphi_0)$ и $U_t(\sigma_2, \alpha-\varphi_0)$, $V_t(\sigma_2, \alpha-\varphi_0)$ сингулярны в точках $\sigma_1 = \varphi_0$ и $\sigma_2 = \alpha - \varphi_0$, соответственно. В этих точках функции $U_0(\beta_1, \varphi_0)$, $V_0(\beta_1, \varphi_0)$ и $U_0(\beta_2, \alpha-\varphi_0)$, $V_0(\beta_2, \alpha-\varphi_0)$ также сингулярны, поскольку в этих случаях имеют место равенства $\beta_1 = \beta_{10}$ для $\sigma_1 = \varphi_0$ и $\beta_2 = \beta_{20}$ для $\sigma_2 = \alpha - \varphi_0$, где

$$\cos\beta_{10} = \cos^2\gamma_0 - \sin^2\gamma_0 \cos\varphi_0, \tag{7.101}$$

$$\cos\beta_{20} = \cos^2\gamma_0 - \sin^2\gamma_0 \cos(\alpha-\varphi_0). \tag{7.102}$$

Можно показать, что сингулярные члены функций $U_t$, $V_t$ гасятся сингулярными членами функций $U_0$, $V_0$ и в результате функции $U = U_t - U_0$, $V = V_t - V_0$ остаются конечными. Мы продемонстрируем это свойство для функций $U(\sigma_1, \varphi_0) = U_t(\sigma_1, \varphi_0) - U_0(\beta_1, \varphi_0)$ и $V(\sigma_1, \varphi_0) = V_t(\sigma_1, \varphi_0) - V_0(\beta_1, \varphi_0)$.

Согласно формулам (7.37) и (7.74),

$$\cos\sigma_1 = \frac{\cos^2\gamma_0 - \cos\beta_1}{\sin^2\gamma_0} \text{ и } \cos\beta_1 = \cos^2\gamma_0 - \sin^2\gamma_0\cos\sigma_1. \tag{7.103}$$

Используя последнее равенство, можно представить функции $U_0(\beta_1, \varphi_0)$ и $V_0(\beta_1, \varphi_0)$ в следующей форме:

$$U_0(\beta_1,\varphi_0) = \frac{1}{2\sin^2\gamma_0}\left[\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1+\varphi_0}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-\varphi_0}{2}\right], \tag{7.104}$$

$$V_0(\beta_1,\varphi_0) = \frac{1}{2\sin^2\gamma_0\sin\sigma_1}\left[\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1+\varphi_0}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-\varphi_0}{2}\right]. \tag{7.105}$$

Теперь легко доказать, что

$$\begin{aligned} U(\varphi_0,\varphi_0) &= \lim_{\sigma_1\to\varphi_0}[U_t(\sigma_1,\varphi_0) - U_0(\beta_1,\varphi_0)] = \\ &= \frac{\pi}{2\alpha\sin^2\gamma_0}\operatorname{ctg}\frac{\pi\varphi_0}{\alpha} - \frac{1}{2\sin^2\gamma_0}\operatorname{ctg}\varphi_0, \end{aligned} \tag{7.106}$$

$$V(\varphi_0,\varphi_0) = \lim_{\sigma_1\to\varphi_0}[V_t(\sigma_1,\varphi_0) - V_0(\beta_1,\varphi_0)] = U(\varphi_0,\varphi_0)/\sin\varphi_0. \tag{7.107}$$

Аналогичные выражения определяют предельные значения

$$U(\alpha-\varphi_0,\alpha-\varphi_0) = \frac{\pi}{2\alpha\sin^2\gamma_0}\operatorname{ctg}\frac{\pi(\alpha-\varphi_0)}{\alpha} - \frac{1}{2\sin^2\gamma_0}\operatorname{ctg}(\alpha-\varphi_0), \tag{7.108}$$

$$V(\alpha-\varphi_0,\alpha-\varphi_0) = U(\alpha-\varphi_0,\alpha-\varphi_0)/\sin(\alpha-\varphi_0). \tag{7.109}$$

Из этих выражений следует, что при скользящем падении ($\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = \alpha$),

$$\lim_{\varphi_0\to 0} U(\varphi_0,\varphi_0) = \lim_{\varphi_0\to\alpha} U(\alpha-\varphi_0,\alpha-\varphi_0) = 0 \tag{7.110}$$

и

$$\lim_{\varphi_0 \to 0} V(\varphi_0, \varphi_0) = \lim_{\varphi_0 \to \alpha} V(\alpha - \varphi_0, \alpha - \varphi_0) = \frac{1}{6\sin^2 \gamma_0}\left[1 - \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2\right]. \qquad (7.111)$$

Однако функции (7.106), (7.107) и (7.108), (7.109) остаются сингулярными при скользящих направлениях $\varphi_0 = \pi$ и $\varphi_0 = \alpha - \pi$. Причина этой сингулярности объяснялась в связи с соотношениями (4.20), (4.21) и обсуждается ниже в разделе 7.9, где изложена новая версия ФТД, свободная от скользящей сингулярности. Заметим также, что эта сингулярность может быть устранена усечением элементарных полосок (Johansen, 1996). Пример аналогичного усечения рассеивающих источников рассматривался ранее в разделе 5.1.4.

- Отметим, что элементарные дифракционные лучи в направлениях $\beta_1 = \beta_{10}$ и $\beta_2 = \beta_{20}$, определяемых формулами (7.101) и (7.102), образуют две конических поверхности с осями вдоль элементарных полосок 1 и 2 ( оси $x_1$ и $x_2$ на рис. 7.3). Согласно формуле (7.75) коническая поверхность $\beta_1 = \beta_{10}$ содержит дифракционные лучи в направлениях $\vartheta = \pi - \gamma_0$, $\varphi = \pi + \varphi_0$ и $\vartheta = \pi - \gamma_0$, $\varphi = \pi - \varphi_0$, которые находятся на границах падающих и отраженных геометрооптических лучей, соответственно (рис. 2.7). Согласно же формулам (7.95) и (7.102) коническая поверхность $\beta_2 = \beta_{20}$ содержит дифракционный луч в направлении $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$, который находится на границе геометрооптическиъх лучей, отраженных от грани $\varphi = \alpha$ (рис. 2.8).
- **ЭКВ в направлениях дифракционного конуса (рис. 4.4)**
  Эти направления определяются координатой $\vartheta = \pi - \gamma_0$. Согласно формулам (7.37), (7.74), (7.75) и (7.95),

$$\cos\sigma_1 = -\cos\varphi, \quad \cos\sigma_2 = -\cos(\alpha - \varphi). \qquad (7.112)$$

Величины $\sigma_{1,2}$ находятся в интервале $0 \le \sigma_{1,2} \le \pi$. Следовательно,

$$\sigma_1 = \begin{cases} \pi - \varphi \text{ при } 0 \le \varphi \le \pi, \\ \varphi - \pi \text{ при } \pi \le \varphi \le 2\pi, \end{cases} \qquad (7.113)$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} \pi - (\varphi - \alpha) \text{ при } -\pi \le \alpha - \varphi \le 0, \\ \pi - (\alpha - \varphi) \text{ при } 0 \le \alpha - \varphi \le \pi, \\ \alpha - \varphi - \pi \quad \text{при } \pi \le \alpha - \varphi \le 2\pi. \end{cases} \qquad (7.114)$$

Заметим, что первая строка в формуле (7.114) относится к области внутри клина ($\alpha \le \varphi \le 2\pi$). Используя эти выражения для параметров $\sigma_{1,2}$, можно показать, что диаграммы направленности $F_{s,h}^{(1)}$ преобразуются следующим образом:

$$F_s^{(1)}(\pi - \gamma_0, \varphi) = f^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha), \; F_h^{(1)}(\pi - \gamma_0, \varphi) = g^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) \qquad (7.115)$$

вне клина ($0 \le \varphi \le \alpha$) и

$$F_s^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi)=-f^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha),\ \ F_h^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi)=-g^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \quad (7.116)$$

внутри клина ($\alpha < \varphi < 2\pi$).

Последние соотношения означают, что полное поле ЭКВ внутри клина равно нулю:

$$F_{s,h}^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi)+F_{s,h}^{(0)}(\pi-\gamma_0,\varphi)=0. \quad (7.117)$$

Здесь функции

$$F_s^{(0)}(\pi-\gamma_0,\varphi)=f^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha), \quad F_h^{(0)}(\pi-\gamma_0,\varphi)=g^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha)$$

относятся к ЭКВ, излучаемым *равномерными* источниками $j_{s,h}^{(0)}$. Нуль полного поля ЭКВ есть результат экранировки области $\alpha < \varphi < 2\pi$ идеально отражающими гранями клина.

Функции $f^{(1)}$, $g^{(1)}$ определяются формулами (4.14) и (4.15). Функции $f^{(0)}$, $g^{(0)}$ определяются в соответствии с формулами (3.55), (3.56) и (3.57):

$$f^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha)=\frac{\varepsilon(\varphi_0)\sin\varphi_0}{\cos\varphi+\cos\varphi_0}+\frac{\varepsilon(\alpha-\varphi_0)\sin(\alpha-\varphi_0)}{\cos(\alpha-\varphi)+\cos(\alpha-\varphi_0)}, \quad (7.118)$$

$$g^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha)=-\frac{\varepsilon(\varphi_0)\sin\varphi}{\cos\varphi+\cos\varphi_0}-\frac{\varepsilon(\alpha-\varphi_0)\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)+\cos(\alpha-\varphi_0)}, \quad (7.119)$$

где $\varepsilon(x)$ определяется формулой (7.48).

Функции $f$, $g$ и $f^{(0)}$, $g^{(0)}$ сингулярны на границах падающих и отраженных геометрооптических лучей, т. е. в направлениях $\varphi = \pi \pm \varphi_0$, $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$. Как показано в разделе 4.1, эти сингулярности полностью гасят друг друга, и в результате функции $f^{(1)} = f - f^{(0)}$, $g^{(1)} = g - g^{(0)}$ остаются конечными.

Отметим также, что ЭКВ, излучаемые в направлениях $\vartheta = \pi - \gamma_0$ полными поверхностными источниками $j_{s,h}^{(t)} = j_{s,h}^{(0)} + j_{s,h}^{(1)}$, удовлетворяют принципу взаимности. Их диаграммы направленности $F_{s,h}^{(t)}$ не изменяются при взаимной перестановке $\vartheta \Leftrightarrow \gamma_0$, $\varphi \Leftrightarrow \varphi_0$. Ситуация с принципом взаимности в общем случае обсуждается в главе 8.

В заключение мы представим выражения для акустических ЭКВ в направлениях дифракционного конуса ($\vartheta = \pi - \gamma_0$):

$$\left.\begin{matrix} du_s^{(0)} \\ du_s^{(1)} \\ du_s^{(t)} \end{matrix}\right\} = u^{inc}(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi}\left\{\begin{matrix} f^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \\ f^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \\ f(\varphi,\varphi_0,\alpha) \end{matrix}\right\}\frac{e^{ikR}}{R}, \quad (7.120)$$

$$\left.\begin{matrix} du_h^{(0)} \\ du_h^{(1)} \\ du_h^{(t)} \end{matrix}\right\} = u^{inc}(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi}\begin{Bmatrix} g^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \\ g^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \\ g(\varphi,\varphi_0,\alpha) \end{Bmatrix}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \qquad (7.121)$$

## 7.7. Численные расчеты элементарных краевых волн

В этом разделе представлены результаты численных расчетов ЭКВ, излучаемых *неравномерными* компонентами $j_{s,h}^{(1)}$ поверхностных источников. Аналитические выражения для диаграмм направленности этих волн $F_{s,h}^{(1)}$ даны в предыдущих разделах. Вычисляются величины $10\lg|F_{s,h}^{(1)}|$ при заданных параметрах $\alpha = 315°$, $\gamma_0 = 45°$ и $\varphi_0 = 45°$. Рис. 7.6 показывает диаграммы направленности в плоскости, перпендикулярной к ребру ($\vartheta = 90°$, $0° \le \varphi \le 360°$).

Рис. 7.7 демонстрирует диаграммы направленности в плоскости, проходящей через ребро клина и биссектрису угла между его гранями. На этом рисунке полярный угол $\theta$ определяется через сферическую координату $\vartheta$:

$$\theta = \begin{cases} \vartheta & \text{при } \varphi = \alpha/2, \\ 2\pi - \vartheta & \text{при } \varphi = \alpha/2 + 180^\circ. \end{cases}$$

Это означает, что интервал $0° \le \theta \le 180°$ находится в полуплоскости $\varphi = \alpha/2$ вне клина, а интервал $180° \le \theta \le 360°$ — в полуплоскости $\varphi = \alpha/2 + 180°$ внутри клина.

Рис. 7.6 и 7.7 показывают элементарные краевые волны как вне, так и внутри клина. Присутствие волн внутри клина не противоречит тому факту, что клин является непрозрачным. ФТД основана на принципе эквивалентности Гельмгольца, см. формулы (1.10), (1.54) и (1.59). Согласно этому принципу реальное рассеивающее тело формально заменяется *эквивалентными* источниками, распределенными в *свободном пространстве* (!) по геометрической поверхности, конформной с фактической рассеивающей поверхностью. Эти источники создают поле всюду, включая область внутри идеально отражающего тела, где это поле полностью гасит падающую волну и обеспечивает равенство нулю полного поля. Отличные от нуля ЭКВ внутри клина, излучаемые полными источниками $j_{s,h}^{(t)} = j_{s,h}^{(0)} + j_{s,h}^{(1)}$ (распределенными вдоль всего рассеивающего ребра), также должны полностью гасить друг друга. Но поскольку ФТД является приближенной, асимптотической теорией, такая взаимная компенсация ЭКВ внутри клина также будет приближенной (при условии $k \to \infty$).

Рис. 7.8 демонстрирует элементарные краевые волны, распространяющиеся вдоль дифракционного конуса. Здесь будут уместны следующие комментарии:

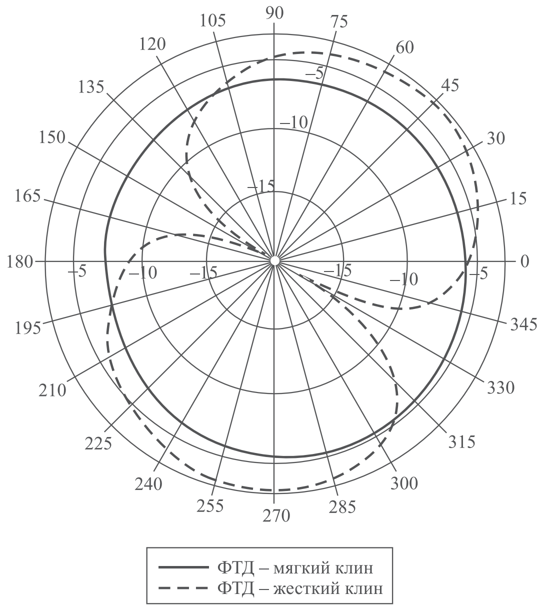


**Рис. 7.6.** Диаграммы направленности элементарных краевых волн, излучаемых *неравномерными* источниками $j_{s,h}^{(1)}$, в плоскости $\vartheta = 90°$. Интервал $315° \leq \varphi \leq 360°$ относится к области внутри клина

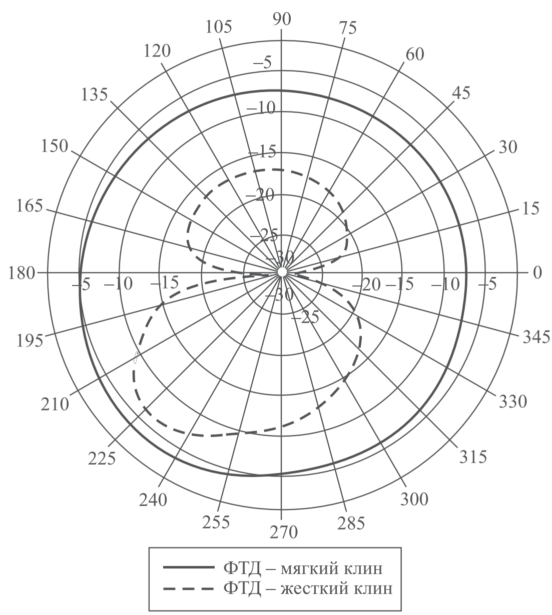


**Рис. 7.7.** Диаграммы направленности элементарных краевых волн, излучаемых *неравномерными* источниками $j_{s,h}^{(1)}$, в плоскости, содержащей биссектрису угла между гранями клина. Интервал $180° \leq \theta \leq 360°$ находится в области внутри клина

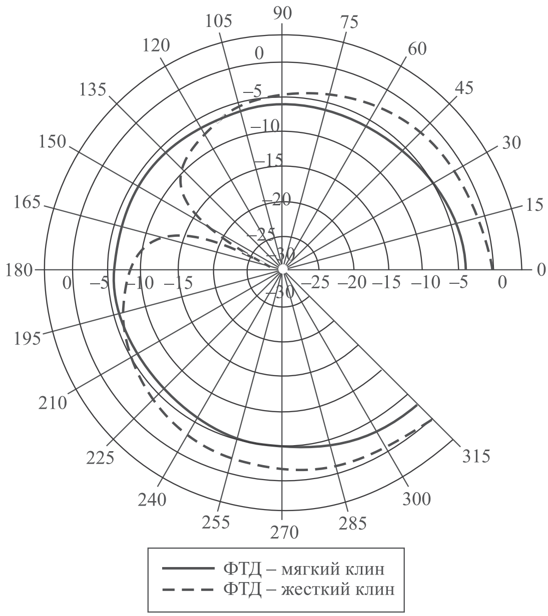


**Рис. 7.8.** Диаграммы направленности элементарных краевых волн, излучаемых *неравномерными* источниками $j_{s,h}^{(1)}$ в направлениях дифракционного конуса ($\vartheta = \pi - \gamma_0$, $0 \le \varphi \le \alpha$)

- Так как $\varphi_0 = 45°$, то только одна грань клина ($\varphi = 0$) оказывается освещенной. Поэтому сингулярными являются только функции $U_t(\sigma_1, \varphi_0)$, $V_t(\sigma_1, \varphi_0)$, $U_0(\beta_1, \varphi_0)$ и $V_0(\beta_1, \varphi_0)$. Однако их линейные комбинации в функциях $U(\sigma_1, \varphi_0)$ и $V(\sigma_1, \varphi_0)$ всегда конечны в этих расчетах. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся формулами (7.104), (7.105) и учтем, что $2\sin^2\gamma_0 = 1$ для заданного значения $\gamma_0 = 45°$. Эти формулы вместе с выражениями (7.85) и (7.87) позволяют получить следующие аппроксимации Тейлора:

$$U(\sigma_1,\varphi_0) \approx \frac{\pi}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma_1+\varphi_0)}{2\alpha} - \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1+\varphi_0}{2} + A - B, \tag{7.122}$$

$$V(\sigma_1,\varphi_0) \approx \frac{\pi}{\alpha\sin\sigma_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma_1+\varphi_0)}{2\alpha} - \frac{1}{\sin\sigma_1}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1+\varphi_0}{2} - \frac{1}{\sin\sigma_1}(A-B), \tag{7.123}$$

где $\sigma_1 \to \varphi_0$ и

$$A = \frac{\pi}{\alpha}\left[\frac{\pi(\sigma_1-\varphi_0)}{6\alpha} + \frac{1}{45}\frac{\pi^3(\sigma_1-\varphi_0)^3}{8\alpha^3}\right], \tag{7.124}$$

$$B = \frac{\sigma_1-\varphi_0}{6} + \frac{1}{45}\frac{(\sigma_1-\varphi_0)^3}{8}. \tag{7.125}$$

- При расчетах поля в окрестности дифракционного конуса ($\vartheta = \pi - \gamma_0$) полезны соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \cos\sigma_1 &= -\cos\varphi, \ \ \cos\sigma_2 = -\cos(\alpha-\varphi), \\ \sin\sigma_1 &= |\sin\varphi|, \ \ \ \ \sin\sigma_2 = |\sin(\alpha-\varphi)|. \end{aligned}\right\} \tag{7.126}$$

Они позволяют упростить выражения $V_t(\sigma_1, \varphi_0)\sin\varphi$ и $V_t(\sigma_2, \alpha-\varphi_0)\sin(\alpha-\varphi)$, принимая во внимание, что

$$\sin\varphi/\sin\sigma_1 = \operatorname{sign}(\sin\varphi), \quad \sin(\alpha-\varphi)/\sin\sigma_2 = \operatorname{sign}(\sin(\alpha-\varphi)). \tag{7.127}$$

- Численные расчеты подтверждают, что в области внутри клина ($315° \le \varphi \le 360°$) полное поле $F_{s,h}^{(t)} = F_{s,h}^{(0)} + F_{s,h}^{(1)}$ равно нулю в направлениях дифракционного конуса ($\vartheta = \pi - \gamma_0$).

## 7.8. Электромагнитные элементарные краевые волны

Теория акустических ЭКВ, представленная в разд. 7.1–7.7, была обобщена в работах (Буторин et al., (1987); Ufimtsev, 1991) для электромагнитных волн, возникающих при дифракции на идеально проводящих телах. Основные элементы этой теории аналогичны тем, которые имеются в теории акустических волн.

*Равномерная* компонента тока, возбуждаемая на элементарных полосках 1 и 2 (рис. 7.3), определяется согласно приближению физической оптики (1.97),

$$\vec{j}^{(0)} = 2\{\varepsilon(\varphi_0)[\hat{n}_1 \times \vec{H}^{inc}] + \varepsilon(\alpha-\varphi_0)[\hat{n}_2 \times \vec{H}^{inc}]\}, \tag{7.128}$$

где $\hat{n}_1$ и $\hat{n}_2$ суть единичные нормали к граням 1 и 2, соответственно.

*Неравномерная* компонента $\vec{j}^{(1)}$ поверхностного тока определяется как разность $\vec{j}^{(1)} = \vec{j}^{(t)} - \vec{j}^{(0)}$. Здесь $\vec{j}^{(t)}$ есть полный ток, возбуждаемый на касательном идеально проводящем клине. Этот ток определяется точным решением задачи о дифракции на клине, изложенным в разд. 2.1–2.4 и адаптированным здесь для электромагнитных волн. Явные выражения для тока $\vec{j}^{(1)}$, возбуждаемого на элементарных полосках 1 и 2 (рис. 7.3), приведены ниже в задачах 7.14 и 7.15 в конце этой главы. Они также содержатся в статье (Ufimtsev, 1998), где кроме того представлены быстро сходящиеся интегралы для численных расчетов этого тока и даны его асимптотики.

Поле, излучаемое неравномерной компонентой тока, находится интегрированием этой компоненты по элементарным полоскам 1 и 2. Почти все основные интегралы здесь те же самые, что и в случае акустических волн. Мы опускаем все промежуточные выкладки и приводим окончательные результаты.

Предполагается, что падающая электромагнитная волна

$$\vec{E}^{inc} = \vec{E}_0 e^{ik\phi^i}, \quad \vec{H}^{inc} = \vec{H}_0 e^{ik\phi^i} \tag{7.129}$$

распространяется в направлении $\nabla\phi^i$ и испытывает дифракцию на идеально проводящем теле с плавно изогнутым ребром (рис. 8.1). Неравномерная компонента тока $\vec{j}^{(1)}$, возбуждаемая вблизи ребра, излучает элементарные краевые волны. Вдали от точки дифракции $\zeta$ на ребре ($kR \gg 1$) их высокочастотные асимптотики описываются формулами:

$$d\vec{E}^{(1)} = \frac{d\zeta}{2\pi}\vec{\mathcal{E}}^{(1)}(\vartheta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \quad d\vec{H}^{(1)} = [\nabla R \times d\vec{E}^{(1)}]/Z_0. \tag{7.130}$$

Здесь $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$ Ом есть импеданс вакуума, а $\zeta$ есть криволинейная координатная ось, расположенная на ребре и ассоциируемая с его длиной. Положительное направление этой оси задается направлением *локальной полярной оси* $\hat{z} = \vec{t}$. Дифференциальный элемент ребра всегда положителен ($d\zeta > 0$). Функция

$$\vec{\mathcal{E}}^{(1)}(\vartheta,\varphi) = [E_{0t}(\zeta)\vec{F}^{(1)}(\vartheta,\varphi) + Z_0 H_{0t}(\zeta)\vec{G}^{(1)}(\vartheta,\varphi)]\mathrm{e}^{ik\phi^i(\zeta)} \tag{7.131}$$

есть диаграмма направленности ЭКВ.

Здесь целесообразно повторить следующие замечания из раздела 7.2:

> Локальные цилиндрические координаты $r$, $\varphi$, $z$ и сферические координаты $R$, $\vartheta$, $\varphi$ вводятся в соответствии с правилом правой руки по отношению к их единичным векторам ($\hat{r}\times\hat{\varphi} = \hat{z}$, $\hat{R}\times\hat{\vartheta} = \hat{\varphi}$). Следует помнить, что эти координаты вводятся таким образом, что угол $\varphi$ *измеряется от освещенной грани рассеивающего ребра, а касательная $\vec{t}$ к ребру направлена вдоль локальной полярной оси $\vec{z}$* ($\hat{t} = \hat{z}$). Когда освещены обе грани ребра, угол $\varphi$ можно измерять от любой грани. Но в этом случае нужно правильно выбирать направление полярной оси $\vec{z}$ и касательной $\vec{t}$ ($\hat{z} = \hat{t} = \hat{r}\times\hat{\varphi}$).
> Эти замечания относительно ориентации систем координат исключительно важны для правильного применения развиваемой здесь теории ЭКВ.

Величины $E_{0t}(\zeta)\exp[ik\phi^i(\zeta)]$ и $H_{0t}(\zeta)\exp[ik\phi^i(\zeta)]$ являются компонентами падающего поля, касательными к ребру. Векторы $\vec{F}^{(1)}$ и $\vec{G}^{(1)}$ определяются их сферическими координатами:

$$F_{\vartheta}^{(1)}(\vartheta,\varphi) = [U(\sigma_1,\varphi_0) + U(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)]\sin\vartheta, \quad F_{\varphi}^{(1)}(\vartheta,\varphi) = 0, \tag{7.132}$$

$$\begin{aligned} G_{\vartheta}^{(1)}(\vartheta,\varphi) = {} & \frac{\sin\vartheta\cos\gamma_0}{\sin^2\gamma_0}[\varepsilon(\varphi_0) - \varepsilon(\alpha-\varphi_0)] + \\ & + (\sin\gamma_0\cos\vartheta\cos\varphi - \cos\gamma_0\sin\vartheta\cos\sigma_1)V(\sigma_1,\varphi_0) - \\ & - [\sin\gamma_0\cos\vartheta\cos(\alpha-\varphi) - \cos\gamma_0\sin\vartheta\cos\sigma_2]V(\sigma_2,\alpha-\varphi_0), \end{aligned} \tag{7.133}$$

$$G_{\varphi}^{(1)}(\vartheta,\varphi) = -[V(\sigma_1,\varphi_0)\sin\varphi + V(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)\sin(\alpha-\varphi)]\sin\gamma_0. \tag{7.134}$$

Все функции и параметры, содержащиеся в формулах (7.131–7.134), являются теми же самыми, которые были введены в предыдущих разделах для акустических волн.

ЭКВ, излучаемые полным током $\vec{j}^{(t)} = \vec{j}^{(0)} + \vec{j}^{(1)}$, определяются формулами:

$$d\vec{E}^{(t)} = \frac{d\zeta}{2\pi}\vec{\mathcal{E}}^{(t)}(\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikR}}{R}, \quad d\vec{H}^{(t)} = [\nabla R \times d\vec{E}^{(t)}]/Z_0, \tag{7.135}$$

где

$$\vec{\mathcal{E}}^{(t)}(\vartheta,\varphi) = [E_{0t}(\zeta)\vec{F}^{(t)}(\vartheta,\varphi) + Z_0 H_{0t}(\zeta)\vec{G}^{(t)}(\vartheta,\varphi)]e^{ik\phi^i(\zeta)} \tag{7.136}$$

и

$$F_\vartheta^{(t)}(\vartheta,\varphi) = [U_t(\sigma_1,\varphi_0) + U_t(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)]\sin\vartheta, \quad F_\varphi^{(t)}(\vartheta,\varphi) = 0, \tag{7.137}$$

$$G_\vartheta^{(t)}(\vartheta,\varphi) = (\sin\gamma_0\cos\vartheta\cos\varphi - \cos\gamma_0\sin\vartheta\cos\sigma_1)V_t(\sigma_1,\varphi_0) -$$

$$-[\sin\gamma_0\cos\vartheta\cos(\alpha-\varphi) - \cos\gamma_0\sin\vartheta\cos\sigma_2]V_t(\sigma_2,\alpha-\varphi_0), \tag{7.138}$$

$$G_\varphi^{(t)}(\vartheta,\varphi) = -[V_t(\sigma_1,\varphi_0)\sin\varphi + V_t(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)\sin(\alpha-\varphi)]\sin\gamma_0. \tag{7.139}$$

Разность

$$d\vec{E}^{(0)} = d\vec{E}^{(t)} - d\vec{E}^{(1)}, \quad d\vec{H}^{(0)} = d\vec{H}^{(t)} - d\vec{H}^{(1)} \tag{7.140}$$

определяет электромагнитные ЭКВ, излучаемые *равномерной* компонентой тока.

Для направлений рассеяния, относящихся к дифракционному конусу ($\vartheta = \pi - \gamma_0$), функции $\vec{F}^{(1,t)}$ и $\vec{G}^{(1,t)}$ упрощаются:

$$F_\vartheta^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi) = -\frac{1}{\sin\gamma_0}f^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha), \tag{7.141}$$

$$F_\vartheta^{(t)}(\pi-\gamma_0,\varphi) = -\frac{1}{\sin\gamma_0}f(\varphi,\varphi_0,\alpha), \tag{7.142}$$

$$G_\varphi^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi) = \frac{1}{\sin\gamma_0}g^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha), \tag{7.143}$$

$$G_\varphi^{(t)}(\pi-\gamma_0,\varphi) = \frac{1}{\sin\gamma_0}g(\varphi,\varphi_0,\alpha), \tag{7.144}$$

$$G_\vartheta^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi) = [\varepsilon(\varphi_0) - \varepsilon(\alpha-\varphi_0)]\mathrm{ctg}\gamma_0, \tag{7.145}$$

$$G_\vartheta^{(t)}(\pi-\gamma_0,\varphi) = 0. \tag{7.146}$$

Свойства функций $U(\sigma,\psi)$ и $V(\sigma,\psi)$ описаны в разделах 7.5 и 7.6.

Используя приведенные выражения, легко получить следующие формулы для электромагнитных ЭКВ, распространяющихся в направлениях дифракционного конуса ($\vartheta = \pi - \gamma_0$):

$$\left.\begin{aligned} dE_\vartheta^{(0)} &= Z_0 dH_\varphi^{(0)} \\ dE_\vartheta^{(1)} &= Z_0 dH_\varphi^{(1)} \\ dE_\vartheta^{(t)} &= Z_0 dH_\varphi^{(t)} \end{aligned}\right\} = -E_t^{inc}(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi}\frac{1}{\sin\gamma_0}\begin{Bmatrix} f^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \\ f^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \\ f(\varphi,\varphi_0,\alpha) \end{Bmatrix}\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{7.147 а}$$

$$\left.\begin{aligned} dH_\vartheta^{(0)} &= -Y_0 dE_\varphi^{(0)} \\ dH_\vartheta^{(1)} &= -Y_0 dE_\varphi^{(1)} \\ dH_\vartheta^{(t)} &= -Y_0 dE_\varphi^{(t)} \end{aligned}\right\} = -H_t^{inc}(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi}\frac{1}{\sin\gamma_0}\begin{Bmatrix} g^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \\ g^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \\ g(\varphi,\varphi_0,\alpha) \end{Bmatrix}\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{7.147 б}$$

где $Y_0 = 1/Z_0$, а $\hat{t}$ — единичный вектор касательной к рассеивающему ребру в точке дифракции $\zeta$.

Заметим, что первые две строки в формуле (7.147 а) справедливы только при отсутствии поляризационной связи в электромагнитных волнах (см. раздел 4.3.2). В общем случае они имееют следующий вид:

$$dE_\vartheta^{(0)} = Z_0 dH_\varphi^{(0)} = -\frac{d\zeta}{2\pi}\frac{1}{\sin\gamma_0}\{E_t^{inc}(\zeta) f^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) +$$

$$+Z_0 H_t^{inc}[\varepsilon(\varphi_0) - \varepsilon(\alpha-\varphi_0)]\cos\gamma_0\}\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{7.148 а}$$

$$dE_\vartheta^{(1)} = Z_0 dH_\varphi^{(1)} = \frac{d\zeta}{2\pi}\frac{1}{\sin\gamma_0}\{-E_t^{inc}(\zeta) f^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) +$$

$$+Z_0 H_t^{inc}[\varepsilon(\varphi_0) - \varepsilon(\alpha-\varphi_0)]\cos\gamma_0\}\frac{e^{ikR}}{R}. \tag{7.148 б}$$

Заметим также, что радиальные компоненты поля в дальней зоне имеют величину порядка $1/R^2$. Пренебрегая ими, имеем следующие соотношения:

$$E_\vartheta = -E_t/\sin\vartheta, \quad H_\vartheta = -H_t/\sin\vartheta \tag{7.149}$$

и

$$dE_\vartheta = -dE_t/\sin\vartheta, \quad dH_\vartheta = -dH_t/\sin\vartheta. \tag{7.150}$$

Принимая во внимание эти соотношения и условие $\vartheta = \pi - \gamma_0$, приведенные выше формулы можно переписать в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} &dE_t^{(0)} \\ &dE_t^{(1)} \\ &dE_t^{(t)} \end{aligned}\right\} = E_t^{inc}(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi}\begin{Bmatrix} f^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \\ f^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \\ f(\varphi,\varphi_0,\alpha) \end{Bmatrix}\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{7.151 а}$$

$$\left.\begin{matrix} dH_t^{(0)} \\ dH_t^{(1)} \\ dH_t^{(t)} \end{matrix}\right\} = H_t^{inc}(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi}\left\{\begin{matrix} g^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \\ g^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) \\ g(\varphi,\varphi_0,\alpha) \end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \tag{7.151 б}$$

Две первых строки в формуле (7.151 а) справедливы только в отсутствие поляризационной связи. В общем случае они имеют вид:

$$dE_t^{(0)} = \frac{d\zeta}{2\pi}\{E_t^{inc}(\zeta)f^{(0)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) +$$

$$+Z_0H_t^{inc}[\varepsilon(\varphi_0)-\varepsilon(\alpha-\varphi_0)]\cos\gamma_0\}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{7.152 а}$$

$$dE_t^{(1)} = \frac{d\zeta}{2\pi}\{E_t^{inc}(\zeta)f^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha) -$$

$$-Z_0H_t^{inc}[\varepsilon(\varphi_0)-\varepsilon(\alpha-\varphi_0)]\cos\gamma_0\}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \tag{7.152 б}$$

Сравнивая полученные асимптотики для электромагнитных ЭКВ с асимптотиками (7.120), (7.121) для акустических ЭКВ, получаем следующие соотношения эквивалентности для ЭКВ в направлениях дифракционного конуса:

$$dE_t = du_s, \text{ если } E_t^{inc}(\zeta) = u^{inc}(\zeta), \tag{7.153}$$

$$dH_t = du_h, \text{ если } H_t^{inc}(\zeta) = u^{inc}(\zeta). \tag{7.154}$$

Соотношения $dE_t^{(0,1)} = du_s^{(0,1)}$ имеют место только при отсутствии поляризационной связи у электромагнитных волн.

Отметим, что на основе теории, изложенной в этом разделе, в работе (Ufimtsev, 1991) детально исследованы лучевые, каустические и фокальные асимптотики электромагнитных волн, а также их многократная дифракция. Результаты этого исследования представлены ниже в главах 8–10.

## 7.9. Устранение сингулярностей при скользящих направлениях $\varphi_0 = \pi$ и $\varphi_0 = \alpha - \pi$

Центральная идея ФТД состоит в разделении поверхностных источников на *равномерную* и *неравномерную* компоненты таким образом, чтобы они были наиболее удобны для вычисления рассеянного поля. В случае рассеивающих объектов с острыми краями (ребрами), неравномерная компонента определяется как та чвсть поля, которая сосредоточена вблизи ребер. Формулы (7.7) и (7.8) определяют ее как разность между полным полем на касательном клине и его геометрооптической частью. Как показано в этой книге и в других публи-

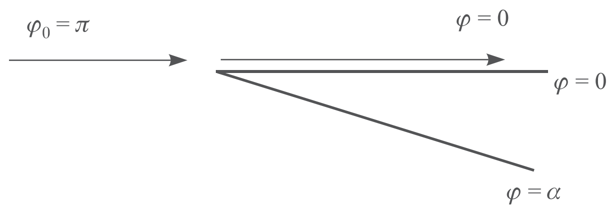


**Рис. 7.9.** Падение плоской волны на клин под скользящим углом $\varphi_0 = \pi$ и наблюдение рассеянного поля в скользящем направлении $\varphi = 0$. Сингулярность в рассеянном поле отсутствует в противоположном случае, когда $\varphi_0 = 0$ и $\varphi = \pi$

кациях, использование таких компонент действительно является полезным при исследовании многих задач дифракции.

Однако указанное разделение на равномерную и неравномерную компоненты оказывается неудовлетворительным в случае скользящего направления падающей волны (рис. 7.9), когда функции $f^{(1)} = f - f^{(0)}$ и $g^{(1)} = g - g^{(0)}$ сингулярны в направлении зеркально отраженной волны ($\varphi = 0$). В этом случае обращается в бесконечность либо функция $f$, либо $f^{(0)}$ ($g$ или $g^{(0)}$) в зависимости от того, как реализуется скользящая ситуация: сначала полагается $\varphi = 0$, а затем $\varphi_0 \to \pi$, или наоборот, сначала полагается $\varphi_0 = \pi$, а затем $\varphi \to 0$.

Эти сингулярности свидетельствуют о том, что в данном случае определения (1.31) и (7.7), (7.8) для равномерной и неравномерной компонент неадекватны фактическому распределению поверхностного поля. В частности, компонента $j_h^{(1)}$ не убывает с удалением от ребра, а, напротив, содержит плоскую волну. Кроме того, компонента $j_h^{(0)}$ включает *отсутствующую* отраженную плоскую волну. Физическая причина скользящей сингулярности заключается в том, что в данной ситуации *неприменима* геометрическая оптика, участвующая в определении равномерной компоненты $j^{(0)}$.

Чтобы устранить такую сингулярность, мы вводим ниже новые определения для компонент $j^{(0)}$ и $j^{(1)}$, более подходящие для ситуации, когда падающая волна освещает обе грани ребра и распространяется в направлении, близком к скользящему вдоль одной из граней.

### 7.9.1. Акустические волны

Этот раздел основан на статье [Ufimtsev (2006 a)].

Подходящим кандидатом на *новое определение равномерных компонент* $j_{h,s}^{(0)}$ является поле *на освещенной стороне касательной полуплоскости.* Здесь имеется в виду идеально отражающая полуплоскость, касательная к рассеивающему ребру и к его освещенной грани в точке дифракции падающей волны. На элементарной полоске 1 (рис. 7.3), принадлежащей грани $\varphi = 0$, эти компоненты определяются формулами:

$$j_h^{(0)} \equiv j_h^{hp} = 2u_0 e^{-ik\zeta\cos\gamma_0} e^{ik\xi_1\cos^2\gamma_0} \times$$

$$\times\left[-e^{-ik\xi_1\sin^2\gamma_0\cos\varphi_0}\frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{\sqrt{2k\xi_1}\sin\gamma_0\cos\frac{\varphi_0}{2}}^{\infty} e^{it^2}dt + e^{-ik\xi_1\sin^2\gamma_0\cos\varphi_0}\right], \tag{7.155}$$

$$j_s^{(0)} \equiv j_s^{hp} = 2u_0 e^{-ik\zeta\cos\gamma_0} e^{ik\xi_1\cos^2\gamma_0} \times$$

$$\times\left[ik\sin\gamma_0\sin\varphi_0 e^{-ik\xi_1\sin^2\gamma_0\cos\varphi_0}\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{\sqrt{2k\xi_1}\sin\gamma_0\cos\frac{\varphi_0}{2}}^{\infty} e^{it^2}dt +\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{k}{2}}\sin\frac{\varphi_0}{2}\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{ik\xi_1\sin^2\gamma_0}}{\sqrt{\xi_1}} - ik\sin\gamma_0\sin\varphi_0 e^{-ik\xi_1\sin^2\gamma_0\cos\varphi_0}\right]. \tag{7.156}$$

Последние слагаемые в этих формулах (вместе с коэффициентом 2 перед квадратными скобками) относятся к сумме падающей и отраженной волн. Когда $\varphi_0 \to \pi$, из этих формул следуют выражения

$$j_h^{(0)} = u_0 e^{-ik\zeta\cos\gamma_0} e^{ik\xi_1}, \tag{7.157}$$

$$j_s^{(0)} = u_0 e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}\sqrt{\frac{2k}{\pi\xi_1}} e^{i(k\xi_1-\pi/4)}, \tag{7.158}$$

где $j_h^{(0)}$ фактически представляет собой скользящую падающую волну, а $j_s^{(0)}$ есть цилиндрическая краевая волна. Величины $j_{h,s}^{(0)}$ на полоске 2 (на освещенной стороне полуплоскости $\varphi = \alpha$) находятся из формул (7.155) и (7.156) путем замены $\varphi_0$ на $\alpha - \varphi_0$ и $\xi_1$ на $\xi_2$.

*Новые неравномерные компоненты* $j_{h,s}^{(1)}$ определяются как разность между полными рассеивающими источниками $j_{h,s}$ (индуцированными падающей волной на гранях касательного клина) и равномерными компонентами $j_{h,s}^{(0)} \equiv j_{h,s}^{hp}$ (индуцированными на касательных полуплоскостях). Эти новые неравномерные компоненты определяются формулами (7.12) и (7.13), где следует заменить

$$\alpha w(\eta+\psi) \text{ на } \alpha w(\eta+\psi) - 2\pi w_{hp}(\eta+\psi), \tag{7.159}$$

где

$$w_{hp}(x) = 1 - e^{ix/2}. \tag{7.160}$$

Поле, излучаемое новыми компонентами $j_{h,s}^{(1)}$, находится с помощью процедур, полностью аналогичных тем, которые описаны в разд. 7.3–7.5. Соответствующие интегралы, через которые вычисляется рассеянное поле, определяются формулами (7.44), (7.45), где следует произвести замену (7.159). Важно отметить, что вклад в эти интегралы, обусловленный полюсами $\eta = \pm\varphi_0$, равен нулю. Поле ЭКВ, найденное таким путем, может быть опять представлено в форме (7.89), (7.90) с новыми функциями $F_{h,s}^{(1)}$, обозначенными здесь как $\mathcal{F}_h^{(1)}$:

$$du_h^{(1)} = u^{inc}(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi}\mathcal{F}_h^{(1)}(\vartheta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \qquad (7.161)$$

$$du_s^{(1)} = u^{inc}(\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi}\mathcal{F}_s^{(1)}(\vartheta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \qquad (7.162)$$

и

$$\mathcal{F}_h^{(1)}(\vartheta,\varphi) = \{[-V_t(\sigma_1,\varphi_0) + V_t^{hp}(\sigma_1,\varphi_0)]\sin\varphi +$$
$$+ [-V_t(\sigma_2,\alpha-\varphi_0) + \varepsilon(\alpha-\varphi_0)V_t^{hp}(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)]\sin(\alpha-\varphi)\}\sin\gamma_0\sin\vartheta, \qquad (7.163)$$

$$\mathcal{F}_s^{(1)} = \{[-U_t(\sigma_1,\varphi_0) + U_t^{hp}(\sigma_1,\varphi_0)] +$$
$$+ [-U_t(\sigma_2,\alpha-\varphi_0) + \varepsilon(\alpha-\varphi_0)U_t^{hp}(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)]\}\sin^2\gamma_0. \qquad (7.164)$$

Здесь предполагается, что $0 \le \varphi_0 \le \pi$, и используется обозначение (7.48) для функции $\varepsilon(x)$. Функции $V_t$, $U_t$ определяются формулами (7.87) и (7.85). Функции $V_t^{hp}$ и $U_t^{hp}$ суть аналогичные функции, относящиеся к касательной полуплоскости:

$$V_t^{hp}(\sigma,\psi) = \frac{1}{4\sin^2\gamma_0\sin\sigma}\left[\operatorname{ctg}\frac{\sigma+\psi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{\sigma-\psi}{4}\right], \qquad (7.165)$$

$$U_t^{hp}(\sigma,\psi) = \frac{1}{4\sin^2\gamma_0}\left[\operatorname{ctg}\frac{\sigma+\psi}{4} - \operatorname{ctg}\frac{\sigma-\psi}{4}\right]. \qquad (7.166)$$

Для направлений дифракционного конуса ($\vartheta = \pi - \gamma_0$) функции (7.163) и (7.164) могут быть представлены в следующей форме:

$$\mathcal{F}_h^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi) = g(\varphi,\varphi_0,\alpha) - g^{hp}(\varphi,\varphi_0) - \varepsilon(\alpha-\varphi_0)g^{hp}(\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0), \qquad (7.167)$$

$$\mathcal{F}_s^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi) = f(\varphi,\varphi_0,\alpha) - f^{hp}(\varphi,\varphi_0) - \varepsilon(\alpha-\varphi_0)f^{hp}(\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0), \qquad (7.168)$$

где $g$ и $f$ суть функции Зоммерфельда (2.64), (2.62), а функции

$$g^{hp}(\varphi,\varphi_0) = -\frac{1}{4}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi-\varphi_0}{4} + \operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi+\varphi_0}{4}\right] -$$
$$-\varepsilon(\alpha-\varphi_0)\frac{1}{4}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi+\varphi-\varphi_0}{4} + \operatorname{ctg}\frac{\pi+\varphi+\varphi_0-2\alpha}{4}\right], \qquad (7.169)$$

$$f^{hp}(\varphi,\varphi_0)=\frac{1}{4}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi-\varphi_0}{4}-\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi+\varphi_0}{4}\right]-$$

$$-\varepsilon(\alpha-\varphi_0)\frac{1}{4}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi+\varphi-\varphi_0}{4}-\operatorname{ctg}\frac{\pi+\varphi+\varphi_0-2\alpha}{4}\right] \qquad (7.170)$$

относятся к равномерной части поля, рассеянного касательными полуплоскостями.

Отметим, что для анализа и численных расчетов функций $g$ и $f$ более удобны их выражения через котангенсы, чем оригинальные формулы Зоммерфельда (2.64) и (2.62). Эти выражения таковы:

$$g(\varphi,\varphi_0,\alpha)=-\frac{1}{2n}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi-\varphi_0}{2n}+\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi+\varphi_0}{2n}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{ctg}\frac{\pi+\varphi+\varphi_0}{2n}+\operatorname{ctg}\frac{\pi+\varphi-\varphi_0}{2n}\right], \qquad (7.171)$$

$$f(\varphi,\varphi_0,\alpha)=\frac{1}{2n}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi-\varphi_0}{2n}-\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi+\varphi_0}{2n}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{ctg}\frac{\pi+\varphi+\varphi_0}{2n}-\operatorname{ctg}\frac{\pi+\varphi-\varphi_0}{2n}\right], \qquad (7.172)$$

где $n=\alpha/\pi$.

Функции $f$, $g$ и $f^{hp}$, $g^{hp}$ сингулярны в направлениях падающей и отраженной плоских волн ($\varphi=\pi+\varphi_0$, $\varphi=\pi-\varphi_0$, $\varphi=2\alpha-\pi-\varphi_0$), но их разность конечна. Например,

$$\mathcal{F}_h^{(1)}(\pi-\gamma_0,\pi-\varphi_0)=-\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{n}+\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{2}-$$

$$-\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi_0}{n}+\varepsilon(\alpha-\varphi_0)\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi_0}{2}+$$

$$+\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\pi}{n}-\varepsilon(\alpha-\varphi_0)\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\pi}{2}, \qquad (7.173)$$

$$\mathcal{F}_s^{(1)}(\pi-\gamma_0,\pi-\varphi_0)=-\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{n}+\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{2}-$$

$$-\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi_0}{n}+\varepsilon(\alpha-\varphi_0)\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi-\varphi_0}{2}-$$

$$-\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\pi}{n}+\varepsilon(\alpha-\varphi_0)\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\pi}{2}, \qquad (7.174)$$

$$\mathcal{F}_h^{(1)}(\pi-\gamma_0, 2\alpha-\pi-\varphi_0) = -\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_0-(\alpha-\pi)}{n} + \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_0-(\alpha-\pi)}{2} + \\ + \frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\pi}{n} - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\pi}{2} - \\ - \frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\varphi_0}{n} + \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\varphi_0}{2}, \tag{7.175}$$

$$\mathcal{F}_s^{(1)}(\pi-\gamma_0, 2\alpha-\pi-\gamma_0) = -\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_0-(\alpha-\pi)}{n} + \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_0-(\alpha-\pi)}{2} - \\ - \frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\pi}{n} + \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\pi}{2} - \\ - \frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\varphi_0}{n} + \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\varphi_0}{2}. \tag{7.176}$$

Из этих выражений следует, что функции $\mathcal{F}_{h,s}^{(1)}$ свободны от скользящей сингулярности. Действительно, для скользящих направлений падающей волны ($\varphi_0 = \pi$, $\varphi_0 = \alpha - \pi$) эти функции принимают конечные значения:

$$\mathcal{F}_h^{(1)}(\pi-\gamma_0, 0) = \mathcal{F}_h^{(1)}(\pi-\gamma_0, \alpha) = -\frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \tag{7.177}$$

$$\mathcal{F}_s^{(1)}(\pi-\gamma_0, 0) = \mathcal{F}_s^{(1)}(\pi-\gamma_0, \alpha) = -\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{7.178}$$

Из этих выражений также следует, что функции $\mathcal{F}_{h,s}^{(1)}$ равны нулю, когда $\alpha = 2\pi$ и клин превращается в полуплоскость. Этот результат является очевидным следствием выражений (7.163) и (7.164) и тождеств $V_t = V_t^{hp}$, $U_t = U_t^{hp}$, которые имеют место в случае $\alpha = 2\pi$.

Чтобы определить поле, рассеянное конечным объектом с плоскими гранями, необходимо также вычислть поле, создаваемое равномерной компонентой, возбуждаемой на *конечных* элементарных полосках ($0 \le \xi_{1,2} \le l$).

В дальней зоне ($R \gg kl^2$) оно определяется интегралами

$$du_{h1}^{(0)} = \frac{d\zeta}{4\pi} ik \sin\gamma_0 \sin\vartheta \sin\varphi \frac{e^{ikR}}{R}\int_0^l j_{h1}^{(0)}(\xi_1,\varphi_0) e^{-ik\xi_1\cos\beta_1} d\xi_1, \tag{7.179}$$

$$du_{s1}^{(0)} = -\frac{d\zeta}{4\pi} \sin\gamma_0 \frac{e^{ikR}}{R}\int_0^l j_{s,1}^{(0)}(\xi_1,\varphi_0) e^{-ik\xi_1\cos\beta_1} d\xi_1. \tag{7.180}$$

Заменяя здесь $\xi_1$, $\beta_1$, $\varphi$, $\varphi_0$ на $\xi_2$, $\beta_2$, $\alpha-\varphi$, $\alpha-\varphi_0$, можно получить выражения для поля от полоски 2 ($0 \le \xi_2 \le l$). Эти интегралы легко вычисляются в явном виде. Мы приводим здесь только те результаты, которые относятся к случаю скользящего падения ($\varphi_0 = \pi$):

$$du_{h1}^{(0)} = u_0 e^{ik\zeta\cos\gamma_0} \frac{d\zeta}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\frac{\sin\gamma_0 \sin\vartheta \sin\varphi}{1-\cos\beta_1}[e^{ikl(1-\cos\beta_1)} - 1], \tag{7.181}$$

$$du_{s1}^{(0)} = u_0 \mathrm{e}^{-ik\zeta\cos\gamma_0} \frac{d\zeta}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \sin\gamma_0 \sqrt{\frac{2}{1-\cos\beta_1}} \frac{\mathrm{e}^{i3\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{kl(1-\cos\beta_1)}} \mathrm{e}^{it^2} dt. \quad (7.182)$$

Для скользящего направления рассеяния ($\beta_1 = 0$, $\varphi = 0$) отсюда следует, что

$$du_{h1}^{(0)} = 0, \quad (7.183)$$

$$du_{s1}^{(0)} = u_0 \mathrm{e}^{-ik\zeta\cos\gamma_0} \frac{d\zeta}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \sin\gamma_0 \sqrt{\frac{2kl}{\pi}} \mathrm{e}^{i3\pi/4}. \quad (7.184)$$

Как и ожидалось, поле $du_{h,s}^{(0)}$ также свободно от скользящей сингулярности.

### 7.9.2. Электромагнитные ЭКВ

| Этот раздел основан на статье [Ufimtsev (2006 b)]. |
|---|

Асимптотические выражения для электромагнитных ЭКВ, выведенные в разделе 7.8, обладают скользящей сингулярностью. Тщательный анализ показывает причину их сингулярности. Как и в случае акустических волн, оказывается, что использованные ранее определения величин $\vec{j}^{(0)}$ и $\vec{j}^{(1)}$ неадекватны реальным поверхностным токам при скользящем падении ($\varphi_0 = \pi$ или $\varphi_0 = \alpha - \pi$). В этом случае компонента $j_n^{(1)}$, нормальная к ребру клина, не убывает с удалением от ребра, а, напротив, трансформируется в плоскую волну. Кроме того, компонента $j_n^{(0)}$ содержит *несуществующую* отраженную плоскую волну. Как уже отмечалось в предыдущем разделе, физическая причина скользящей сингулярности заключается в том, что в этом случае *неприменима* геометрическая оптика, использованная при определении равномерной компоненты. Следовательно, чтобы устранить скользящую сингулярность, необходимо изменить прежние определения компонент тока $\vec{j}^{(0,1)}$.

С этой целью мы вводим *новую равномерную компоненту* $\vec{j}^{(0)} \equiv \vec{j}^{hp}$, равную поверхностному электрическому току, возбуждаемому падающей волной на *освещенной стороне* касательной полуплоскости. *Новая неравномерная компонента* поверхностного тока есть разность $\vec{j}^{(1)} = \vec{j}^{\,t}_{\text{клин}} - \vec{j}^{hp}$, где $\vec{j}^{\,t}_{\text{клин}}$ есть полный ток, возбуждаемый на касательном идеально проводящем клине.

#### ЭКВ, излучаемые неравномерной компонентой $\vec{j}^{(1)}$

Падающая электромагнитная волна (7.129) испытывает дифракцию на рассеивающем идеально проводящем теле (рис. 8.1) и возбуждает на нем поверхностный ток $\vec{j}^{(1)}$. Этот ток излучает дифракционные ЭКВ. Вдали от точки дифракции $\zeta$ ($kR \gg 1$) эти волны можно опять представить в форме (7.130), (7.131) с новыми функциями $\vec{F}^{(1)}$ и $\vec{G}^{(1)}$. Эти новые функции находятся тем же самым путем, который описан в разделе 7.8 и в работах (Буторин et al., 1987; Ufimtsev, 1991), с простой модификацией, основанной на замене (7.159). Мы приводим здесь только окончательные результаты для ЭКВ.

Поле, излучаемое током $\vec{j}^{\,(1)}$, описывается следующими формулами:

$$d\vec{E}^{(1)} = \frac{d\zeta}{2\pi}\vec{\mathcal{E}}^{(1)}(\vartheta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \quad d\vec{H}^{(1)} = [\nabla R \times d\vec{E}^{(1)}]/Z_0, \tag{7.185}$$

где

$$\vec{\mathcal{E}}^{(1)}(\vartheta,\varphi) = [E_{0t}(\zeta)\vec{\mathcal{F}}^{(1)}(\vartheta,\varphi) + Z_0 H_{0t}(\zeta)\vec{\mathcal{G}}^{(1)}(\vartheta,\varphi)]\mathrm{e}^{ik\phi^i(\zeta)} \tag{7.186}$$

и

$$\mathcal{F}_\vartheta^{(1)}(\vartheta,\varphi) = [U_t(\sigma_1,\varphi_0) - U_t^{hp}(\sigma_1,\varphi_0)]\sin\vartheta +$$

$$+[U_t(\sigma_2,\alpha-\varphi_0) - \varepsilon(\alpha-\varphi_0)U_t^{hp}(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)]\sin\vartheta, \tag{7.187}$$

$$\mathcal{F}_\varphi^{(1)}(\vartheta,\varphi) = 0, \tag{7.188}$$

$$\mathcal{G}_\vartheta^{(1)}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{2}\frac{\sin\vartheta\cos\gamma_0}{\sin^2\gamma_0}[\varepsilon(\varphi_0) - \varepsilon(\alpha-\varphi_0)] +$$

$$+[\sin\gamma_0\cos\vartheta\cos\varphi - \cos\gamma_0\sin\vartheta\cos\sigma_1][V_t(\sigma_1,\varphi_0) - V_t^{hp}(\sigma_1,\varphi_0)] -$$

$$-[\sin\gamma_0\cos\vartheta\cos(\alpha-\varphi) - \cos\gamma_0\sin\vartheta\cos\sigma_2]\times$$

$$\times[V_t(\sigma_2,\alpha-\varphi_0) - \varepsilon(\alpha-\varphi_0)V_t^{hp}(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)], \tag{7.189}$$

$$\mathcal{G}_\varphi^{(1)}(\vartheta,\varphi) = -[V_t(\sigma_1,\varphi_0) - V_t^{hp}(\sigma_1,\varphi_0)]\sin\varphi\sin\gamma_0 -$$

$$-[V_t(\sigma_2,\alpha-\varphi_0) - \varepsilon(\alpha-\varphi_0)V_t^{hp}(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)]\sin(\alpha-\varphi)\sin\gamma_0. \tag{7.190}$$

Здесь предполагается, что $0 < \varphi_0 \le \pi$.

В направлениях дифракционного конуса ($\vartheta = \pi - \gamma_0$) эти выражения становятся проще:

$$\mathcal{F}_\vartheta^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi) = -\frac{1}{\sin\gamma_0}[f(\varphi,\varphi_0,\alpha) - f^{hp}(\varphi,\varphi_0) -$$

$$-\varepsilon(\alpha-\varphi_0)f^{hp}(\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0)], \qquad \mathcal{F}_\varphi^{(1)}(\vartheta,\varphi) = 0, \tag{7.191}$$

$$\mathcal{G}_\varphi^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi) = \frac{1}{\sin\gamma_0}[g(\varphi,\varphi_0,\alpha) - g^{hp}(\varphi,\varphi_0) -$$

$$-\varepsilon(\alpha-\varphi_0)g^{hp}(\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0)],$$

$$\mathcal{G}_\vartheta^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi) = \frac{1}{2}[\varepsilon(\varphi_0) - \varepsilon(\alpha-\varphi_0)\operatorname{ctg}\gamma_0], \tag{7.192}$$

где функции $f$, $g$ и $f^{hp}$, $g^{hp}$ определены в разделе 7.9.1. Сравнение с формулами (7.167) и (7.168) выявляет следующие соотношения между электромагнитными и акустическими ЭКВ:

$$\mathcal{F}_{\vartheta}^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi)=-\frac{1}{\sin\gamma_0}\mathcal{F}_s^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi), \tag{7.193}$$

$$\mathcal{G}_{\varphi}^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi)=\frac{1}{\sin\gamma_0}\mathcal{F}_h^{(1)}(\pi-\gamma_0,\varphi). \tag{7.194}$$

Согласно разделу 7.9.1 эти функции свободны как от скользящих сингулярностей, так и от сингулярностей в направлениях падающих и отраженных лучей. Пользуясь полученными выражениями для акустических и электромагнитных полей в направлении дифракционного конуса ($\vartheta=\pi-\gamma_0$), можно показать, что в отсутствие поляризационной связи имеют место следующие соотношения эквивалентности:

$$\boxed{\begin{aligned} &dE_t^{(1)}=du_s^{(1)},\ \text{если}\ E_t^{inc}(\zeta)=u^{inc}(\zeta),\\ &dH_t^{(1)}=du_h^{(1)},\ \text{если}\ H_t^{inc}(\zeta)=u^{inc}(\zeta).\end{aligned}}$$

**Поле, излучаемое равномерной компонентой $\vec{j}^{\,(0)}\equiv\vec{j}^{\,hp}$**

Здесь исследуется поле, излучаемое током $\vec{j}^{\,hp}$, который возбуждается на конечных элементарных полосках ($0\le\xi_{1,2}\le l$), принадлежащих конечным плоским граням рассеивающего тела (рис. 7.3). В этом исследовании мы используем правые декартовы координаты $x$, $y$, $z$ и $x'$, $y'$, $z$, относящиеся к граням 1 и 2, соответственно. Оси $x$ и $x'$ принадлежат граням 1 и 2 и параллельны касательным $\tau_1$ и $\tau_2$. Используя известное решение для задачи о дифракции на полуплоскости, можно определить ток на полоске 1:

$$j_{x,1}^{(0)}\equiv j_{x,1}^{hp}=2H_{0z}e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}e^{ik\xi_1(cos^2\gamma_0-\sin^2\gamma_0\cos\varphi_0)}\times$$
$$\times\left[1-\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{\sqrt{2k\xi_1}\sin\gamma_0\cos\frac{\varphi_0}{2}}^{\infty}e^{it^2}dt\right], \tag{7.195}$$

$$j_{z,1}^{(0)}\equiv j_{z,1}^{hp}=-2e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}e^{ik\xi_1\cos^2\gamma_0}\frac{1}{\sin\gamma_0}\times$$

$$\times\left\{Y_0 E_{0z}\left[\sin\varphi_0 \mathrm{e}^{-ik\xi_1\sin^2\gamma_0\cos\varphi_0}\frac{\mathrm{e}^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{\sqrt{2k\xi_1}\sin\gamma_0\cos\frac{\varphi_0}{2}}^{\infty}\mathrm{e}^{it^2}dt+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\gamma_0}\frac{\mathrm{e}^{-i3\pi/4}}{\sqrt{2\pi k\xi_1}}\mathrm{e}^{ik\xi_1\sin^2\gamma_0}-\sin\varphi_0\mathrm{e}^{-ik\xi_1\sin^2\gamma_0\cos\varphi_0}\right]+$$

$$+H_{0z}\cos\gamma_0\left[\cos\varphi_0\mathrm{e}^{-ik\xi_1\sin^2\gamma_0\cos\varphi_0}\frac{\mathrm{e}^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{\sqrt{2k\xi_1}\sin\gamma_0\cos\frac{\varphi_0}{2}}^{\infty}\mathrm{e}^{it^2}dt+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\gamma_0}\frac{\mathrm{e}^{-i3\pi/4}}{\sqrt{2\pi k\xi_1}}\mathrm{e}^{ik\xi_1\sin^2\gamma_0}-\cos\varphi_0\mathrm{e}^{-ik\xi_1\sin^2\gamma_0\cos\varphi_0}\right]\right\}, \qquad (7.196)$$

где $Y_0 = 1/Z_0$ есть адмитанс свободного пространства. Компоненты тока $j^{(0)}_{x',2}$ и $j^{(0)}_{z,2}$ на полоске 2 определяются формулами (7.195), (7.196), в которых нужно произвести следующие замены:

$$H_{0z}\to -H_{0z},\quad \xi_1\to\xi_2,\quad \varphi_0\to\alpha-\varphi_0. \qquad (7.197)$$

Поле, излучаемое этими токами, определяется (в терминах запаздывающего векторного потенциала $d\vec{A}$) следующим образом:

$$dE_\varphi = -Z_0 dH_\vartheta = ikZ_0[-dA_{x,1}\sin\varphi+\varepsilon(\alpha-\varphi_0)dA_{x',2}\sin(\alpha-\varphi)], \qquad (7.198)$$

$$dE_\vartheta = Z_0 dH_\varphi = ikZ_0\{-[dA_{z,1}+\varepsilon(\alpha-\varphi_0)dA_{z,2}]\sin\vartheta +$$
$$+[dA_{x,1}\cos\varphi+\varepsilon(\alpha-\varphi_0)dA_{x',2}\cos(\alpha-\varphi)]\cos\vartheta\}. \qquad (7.199)$$

Здесь предполагается, что $0<\varphi_0\le\pi$. Для поля в дальней зоне ($R\gg kl^2$) можно использовать следующие аппроксимации:

$$d\vec{A}_{1,2} = \frac{d\zeta}{4\pi}\sin\gamma_0\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\int\limits_0^l \vec{j}_{1,2}(\xi_{1,2})\mathrm{e}^{-ik\xi_{1,2}\cos\beta_{1,2}}d\xi_{1,2}. \qquad (7.200)$$

Подставляя $\vec{j}^{(0)}_{1,2}$ в формулу (7.200), получаем

$$dA_{x.1} = -\frac{1}{ik}H_{0z}\mathrm{e}^{-ik\zeta\cos\gamma_0}\frac{d\zeta}{2\pi}[B_3(\varphi,\varphi_0)-B_1(\varphi,\varphi_0)]\sin\gamma_0\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \qquad (7.201)$$

$$dA_{z,1} = -\frac{1}{ik} e^{-ik\zeta\cos\gamma_0} \frac{d\zeta}{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \times$$

$$\times \left\{ Y_0 E_{0z} \left[ B_3(\varphi,\varphi_0)\sin\varphi_0 + B_2(\varphi)\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\gamma_0} - B_1(\varphi,\varphi_0)\sin\varphi_0 \right] + \right.$$

$$\left. + H_{0z}\cos\gamma_0 \left[ B_3(\varphi,\varphi_0)\cos\varphi_0 + B_2(\varphi)\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\gamma_0} - B_1(\varphi,\varphi_0)\cos\varphi_0 \right] \right\}, \quad (7.202)$$

где

$$B_1(\varphi,\varphi_0) = \frac{e^{ikl\Phi(\varphi,\varphi_0)} - 1}{\Phi(\varphi,\varphi_0)}, \quad (7.203)$$

$$B_2(\varphi) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{\Psi(\varphi)}} \int_0^{\sqrt{kl\Psi(\varphi)}} e^{it^2} dt, \quad (7.204)$$

$$B_3(\varphi,\varphi_0) = \frac{1}{\Phi(\varphi,\varphi_0)} \left[ e^{ikl\Phi(\varphi,\varphi_0)} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{2kl}\sin\gamma_0\cos\frac{\varphi_0}{2}}^{\infty} e^{it^2} dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} + B_2(\varphi)\sin\gamma_0\cos\frac{\varphi_0}{2} \right] \quad (7.205)$$

и

$$\Phi(\varphi,\varphi_0) = \cos^2\gamma_0 - \sin^2\gamma_0\cos\varphi_0 - \cos\beta_1, \quad (7.206)$$

$$\Psi(\varphi) = 1 - \cos\beta_1. \quad (7.207)$$

Компоненты $dA_{x',2}$ и $dA_{z,2}$ определяются формулами для компонент $dA_{x,1}$ и $dA_{z,1}$, соответственно, в которых нужно произвести следующие замены: $H_{0z} \to -H_{0z}$, $\varphi \to \alpha - \varphi$, $\varphi_0 \to \alpha - \varphi_0$ и $\beta_1 \to \beta_2$.

Затем мы подставляем выражения для вектора $d\vec{A}$ в формулы (7.198), (7.199) и получаем окончательные формулы для поля, которые можно опять представить в форме (7.130) и (7.131):

$$d\vec{E}^{(0)} = \frac{d\zeta}{2\pi} \vec{\mathcal{E}}^{(0)}(\vartheta,\varphi) \frac{e^{ikR}}{R}, \quad d\vec{H}^{(0)} = [\nabla R \times d\vec{E}^{(0)}]/Z_0, \quad (7.208)$$

$$\vec{\mathcal{E}}^{(0)}(\vartheta,\varphi) = [E_{0t}(\zeta)\vec{\mathcal{F}}^{(0)}(\vartheta,\varphi) + Z_0 H_{0t}(\zeta)\vec{\mathcal{G}}^{(0)}(\vartheta,\varphi)] e^{ik\phi^i(\zeta)}, \quad (7.209)$$

где

$$F_{\vartheta}^{(0)} = F_{1\vartheta}(\varphi,\varphi_0,\vartheta) + \varepsilon(\alpha-\varphi_0)F_{1\vartheta}(\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0,\vartheta), \quad F_{\varphi}^{(0)} = 0, \tag{7.210}$$

$$\mathcal{G}_{\vartheta}^{(0)} = \mathcal{G}_{1\vartheta}(\varphi,\varphi_0,\vartheta) - \varepsilon(\alpha-\varphi_0)\mathcal{G}_{1\vartheta}(\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0,\vartheta), \tag{7.211}$$

$$\mathcal{G}_{\varphi}^{(0)} = \mathcal{G}_{1\varphi}(\varphi,\varphi_0,\vartheta) + \varepsilon(\alpha-\varphi_0)\mathcal{G}_{1\varphi}(\alpha-\varphi,\alpha-\varphi_0,\vartheta). \tag{7.212}$$

Здесь

$$\mathcal{F}_{1\vartheta}(\varphi,\varphi_0,\vartheta) = \left[ B_3(\varphi,\varphi_0)\sin\varphi_0 + B_2(\varphi)\frac{\sin\dfrac{\varphi_0}{2}}{\sin\gamma_0} - B_1(\varphi,\varphi_0)\sin\varphi_0 \right]\sin\vartheta, \tag{7.213}$$

$$\mathcal{G}_{1\vartheta}(\varphi,\varphi_0,\vartheta) = \left[ B_3(\varphi,\varphi_0)\cos\varphi_0 + B_2(\varphi)\frac{\cos\dfrac{\varphi_0}{2}}{\sin\gamma_0} - B_1(\varphi,\varphi_0)\cos\varphi_0 \right]\cos\gamma_0\sin\vartheta -$$

$$- [B_3(\varphi,\varphi_0) - B_1(\varphi,\varphi_0)]\sin\gamma_0\cos\vartheta\cos\varphi, \tag{7.214}$$

$$\mathcal{G}_{1\varphi}(\varphi,\varphi_0,\vartheta) = [B_3(\varphi,\varphi_0) - B_1(\varphi,\varphi_0)]\sin\gamma_0\sin\varphi. \tag{7.215}$$

Заметим, что функции $B_{1,2,3}$ конечны, когда $\Phi = 0$ и $\Psi = 0$. В частности, для скользящего падения ($\varphi_0 = \pi$) и для скользящего направления рассеяния, соответствующего дифракционному конусу ($\vartheta = \pi - \gamma_0$, $\varphi = 0$), они принимают следуюшие значения:

$$B_1 = ikl, \quad B_2 = \sqrt{2kl}\,\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}, \quad B_3 = \frac{1}{2}kl. \tag{7.216}$$

Как и ожидалось, поле, излучаемое равномерной компонентой поверхностного тока, также свободно от скользящей сингулярности.

Таким образом, теория, развитая в разделах 7.9.1 и 7.9.2, справедлива для всех направлений падения и рассеяния. Она особенно удобна для расчетов бистатического рассеяния, когда обе плоские грани рассеивающего ребра освещены падающей волной. Для других направлений падения $\varphi_0$ можно использовать теорию, развитую в разделах 7.1–7.8.

Здесь уместно отметить альтернативный подход (Michaeli, 1987; Breinbjerg, 1992; Johansen, 1996) для устранения скользящей сингулярности. Равномерная и неравномерная компоненты тока определяются там согласно традиционной ФТД, а скользящая сингулярность устраняется путем усечения элементарных полосок ($0 \le x_{1,2} \le l$). Отличительная особенность нашей теории заключается в том, что в ней вводятся *новые неравномерные источники* $j^{(1)}$, которые излучают элементарные краевые волны, *регулярные* во всех направлениях рассеяния. Иначе говоря, она позволяет выделить *краевую компоненту* из полного поля *в явной форме* для всех направлений рассеяния.

## 7.10. Некоторые публикации других авторов, имеющие отношение к элементарным краевым волнам

Исследование ЭКВ имеет продолжительную историю.

В приближении Кирхгофа ЭКВ были впервые обнаружены итальянским ученым Маджи (Maggi, 1888; Baker & Copson, 1950). Позднее они были заново открыты польским ученым Рубиновичем (Rubinowicz, 1917). Аналогичное исследование электромагнитных ЭКВ было проведено Котлером (Kottler, 1923 b).

Попытки определить ЭКВ более строго (на основе точного решения Зоммерфельда (1896, 1935) для задачи о дифракции на клине) были впервые предприняты Бейтманом (Bateman, 1955) и Рубиновичем (Rubinowicz, 1965). Однако их выражения для ЭКВ удовлетворяют граничным условиям Дирихле и Неймана *всюду* на гранях канонического касательного клина. Поэтому такие ЭКВ неверно описывают дифракционное поле на тех частях *виртуального* касательного клина, которые находятся за пределами реального рассеивающего объекта и показаны на рис. 7.10 штриховыми линиями. Фактически согласно такому определению ЭКВ, *бесконечно большие* области *свободного пространства* (вне рассеивающего тела) формально становятся идеально отражающими.

Тот же самый недостаток присущ другой теории ЭКВ, предложенной в работах (Tiberio et al.,1994, 1995, 2004). В ФТД аналогичный недостаток встречается только на продолжениях *бесконечно узких* элементарных полосок (рис. 7.3). Поскольку в ФТД рассеянное поле находится интегрированием поверхностных источников на элементарных полосках, этот недостаток может быть полностью устранен путем усечения таких полосок (Johansen, 1996).

Диаграмму направленности электромагнитных ЭКВ можно интерпретировать как *эквивалентный краевой ток* (ЭКТ). В литературе на английском языке этот ток называется *equivalent edge current* (EEC). ЭКТ, введенные в работе (Knott and Senior, 1974; Knott, 1985), основаны на геометрической теории дифракции (ГТД) и применимы только для направлений дифракционного конуса. ЭКТ, основанные на ФТД, применимы для произвольных направлений рассеяния (Michaeli, 1986, 1987; Breinbjerg, 1992; Johansen, 1996). В работе (Johansen, 1996) содержится дополнительная библиография, относящаяся к концепции ЭКТ (EEC).

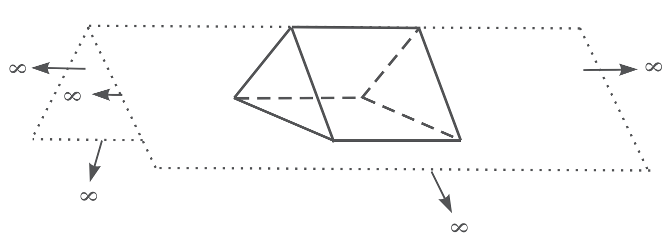


**Рис. 7.10.** Идеально отражающая призма конечного размера (сплошные и штриховые линии) и бесконечные грани виртуального касательного клина (точечные линии)

Существует другая интерпретация диаграмм направленности ЭКВ, в которой они называются *дифференциальными дифракционными коэффициентами* (ДДК), В литературе на английском языке этот ток называется *incremental length diffraction coefficient* (ILDC). Этот термин был введен Мицнером (Mitzner, 1974), который определил ДДК на основе ФТД. Концепция ДДК (ILDC) получила дальнейшее развитие в работе (Tiberio et al., 2004).

Отметим также асимптотическую теорию для плоских экранов, аналогичную ФТД (Wolf, 1967), и метод сшивания асимптотических разложений (Tran Van Nhieu, 1995, 1996), который позволяет получить другим путем лучевые асимптотики ФТД.

## Задачи

**7.1.** Начните с формул (7.3) и (7.4) и получите выражения (7.12) и (7.13) для рассеивающих поверхностных источников $j_s$ и $j_h$ на элементарной полоске 1 (рис. 7.3).

**7.2.** Начните с формул (7.3) и (7.4) и получите выражения (7.16) и (7.17) для рассеивающих поверхностных источников $j_s$ и $j_h$ на элементарной полоске 2 (рис. 7.3).

**7.3.** Начните с формул (7.19) и (7.20) и получите выражения (7.25) и (7.26) для рассеянного поля.

**7.4.** Начните с формул (7.19) и (7.20), используйте соотношения (7.16), (7.17) и получите выражения (7.29), (7.30).

**7.5.** Начните с формулы (7.37) для полюса $\sigma(p)$. Проверьте формулы (7.42) и (7.43). Проследите за траекторией этого полюса в комплексной плоскости $(\eta)$ при изменении аргумента $p$ от $-\infty$ до $+\infty$.

**7.6.** Примените теорему Коши о вычетах к интегралу (7.35) и проверьте его трансформацию к виду (7.64).

**7.7.** Примените теорему Коши о вычетах к интегралу (7.36) и проверьте его трансформацию к виду (7.65).

**7.8.** Примените метод стационарной фазы к интегралам (7.64), (7.65) и получите асимптотики (7.89), (7.90) для ЭКВ.

**7.9.** Докажите, что диаграммы направленности $F^{(1)}_{s,h}$ для ЭКВ всегда являются вещественными функциями, хотя их аргументы $\sigma_{1,2}$ могут быть комплексными.

**7.10.** Объясните, почему функция $F^{(1)}_s$ равна нулю в случае скользящего падения ($\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = \alpha$).

**7.11.** Функции $U_t(\sigma_1, \varphi_0)$, $V_t(\sigma_1, \varphi_0)$ также как и функции $U_0(\beta_1, \varphi_0)$, $V_0(\beta_1, \varphi_0)$ сингулярны в точке $\sigma_1 = \varphi_0$. Докажите, что их разности $U = U_t - U_0$ и $V = V_t - V_0$ остаются эдесь конечными. Докажите формулы (7.106) и (7.107).

**7.12.** Покажите, что для направлений рассеяния $\vartheta = \pi - \gamma_0$, $0 \le \varphi \le \alpha$ (которые принадлежат к дифракционному конусу *вне клина*) функции $F^{(1)}_s$ и $F^{(1)}_h$ трансформируются в функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$, соответственно. Докажите формулу (7.115).

**7.13.** Покажите, что для направлений рассеяния $\vartheta = \pi - \gamma_0$, $\alpha \le \varphi \le 2\pi$ (которые принадлежат дифракционному конусу *внутри клина*) полное поле ЭКВ равно нулю. Докажите формулу (7.116). Объясните, почему это поле равно нулю.

**7.14.** Докажите, что падающая волна с компонентами

$$E_z^{inc} = E_{0z}\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}\mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi-\varphi_0)},$$
$$H_z^{inc} = H_{0z}\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}\mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

возбуждает на элементарной полоске 1 (рис. 7.3) неравномерные компоненты тока:

$$j_x^{(1)} = \frac{1}{2\alpha}H_{0z}\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}\int\limits_D \mathrm{e}^{-ik_1x\cos\eta}[w^{-1}(\eta+\varphi_0)+w^{-1}(\eta-\varphi_0)]d\eta,$$

$$j_z^{(1)} = \frac{\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}}{2\alpha\sin\gamma_0}\times$$
$$\times\{H_{0z}\cos\gamma_0\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}\int\limits_D \mathrm{e}^{-ik_1x\cos\eta}[w^{-1}(\eta+\varphi_0)+w^{-1}(\eta-\varphi_0)]\cos\eta d\eta -$$
$$-Y_0E_{0z}\int\limits_D \mathrm{e}^{-ik_1x\cos\eta}[w^{-1}(\eta+\varphi_0)-w^{-1}(\eta-\varphi_0)]\sin\eta d\eta\}.$$

Здесь $k_1 = k\sin\gamma_0$, $z = \zeta - \xi_1\cos\gamma_0$, $x = \xi_1\sin\gamma_0$, $\zeta$ есть координата точки дифракции на ребре касательного клина, а $\xi_1$ есть координата точки на оси $x_1$ (рис. 7.3). Рекомендуемая последовательность действий:

- Представьте поле, возбуждаемое падающей волной вокруг клина, в форме $\vec{E} = \vec{E}(x,y)\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}$, $\vec{H} = \vec{H}(x,y)\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}$.
- Используйте уравнения Максвелла и выразите компоненты $E_{r,\varphi}(x,y)$, $H_{r,\varphi}$ через компоненты $E_z(x,y)$, $H_z(x,y)$. В гауссовой системе единиц соответствующие соотношения приведены в формуле (5.04) в книге (Уфимцев, 1962).
- В соответствии с главой 4,
$$E_z = E_{0z}\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}[v(k_1r,\varphi-\varphi_0)-v(k_1r,\varphi+\varphi_0)],$$
$$H_z = H_{0z}\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}[v(k_1r,\varphi-\varphi_0)+v(k_1r,\varphi+\varphi_0)].$$
- Затем определите ток $\vec{j}^{(1)} = \hat{n}\times[\vec{H}-\vec{H}^{go}]$, где $\vec{H}$ есть полное поле вне клина, а $\vec{H}^{go}$ есть его геометрооптическая часть. Оси $x$, $y$ показаны на рис. 7.3.

**7.15.** Следуйте рекомендациям задачи 7.14 и определите ток $\vec{j}^{(1)}$ на элементарной полоске 2 (рис. 7.3), который возбуждается той же плоской волной. Докажите, что его компоненты описываются следующими выражениями:

$$j_{x'}^{(1)} = -\frac{1}{2\alpha}H_{0z}\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}\times$$
$$\times\int\limits_D \mathrm{e}^{-ik_1x'\cos\eta}[w^{-1}(\eta+\alpha-\varphi_0)+w^{-1}(\eta-\alpha+\varphi_0)]d\eta,$$

$$j_z^{(1)} = -\frac{\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}}{2\alpha\sin\gamma_0}\times$$
$$\times\{H_{0z}\cos\gamma_0\int\limits_D \mathrm{e}^{-ik_1x'\cos\eta}[w^{-1}(\eta+\alpha-\varphi_0)+w^{-1}(\eta-\alpha+\varphi_0)]\cos\eta d\eta +$$
$$+Y_0E_{0z}\int\limits_D \mathrm{e}^{-ik_1x'\cos\eta}[w^{-1}(\eta+\alpha-\varphi_0)-w^{-1}(\eta-\alpha+\varphi_0)]\sin\eta d\eta\}.$$

Здесь $k_1 = k\sin\gamma_0$, $z = \zeta - \xi_2\cos\gamma_0$, $x' = \xi_2\sin\gamma_0$, $\zeta$ есть координата точки дифракции на ребре касательного клина, а $\xi_2$ есть координата точки на оси $x_2$ (рис.7.3).

**7.16.** Определите вектор-потенциал $dA_{x,z}^{(1)}$ для поля, излучаемого неравномерными компонентами $j_{x,z}^{(1)}$ тока, который возбуждается на элементарной полоске 1 (рис. 7.3). Падающая волна указана в задаче 7.14.

Рекомендуемая последовательность действий:

- Начните с формулы (1.89). Подставьте в нее выражения для тока $j_{x,z}^{(1)}$, указанные в задаче 7.14.
- Используйте выражения (7.21) для функции Грина.
- Вычислите в явном виде интеграл по переменной $\xi_1$ (вдоль полоски).
- Примените теорему Коши к интегралу по переменной $\eta$.
- Примените асимптотическую процедуру (7.69) к интегралам типа (7.68).
- Представьте вектор-потенциал в форме сферической волны, расходящейся от стационарной точки.
- Затем используйте формулы (1.92), (1.93) и получите асимптотические выражения для ЭКВ, излучаемой полоской 1.
- В полученных выражениях произведите следующие замены: $H_{0z} \to -H_{0z}, \beta_1 \to \beta_2, \sigma_1 \to \sigma_2, \varphi_0 \to \alpha - \varphi_0, \varphi \to \alpha - \varphi$ и получите ЭКВ, создаваемое полоской 2.
- Проверьте, что сумма ЭКВ, создаваемых обеими полосками, равна величине (7.130).

**7.17.** В разделе 7.9.1 получены асимптотики для акустических ЭКВ, свободные от скользящей сингулярности.

- Докажите, что для направлений дифракционного конуса ($\vartheta = \pi - \gamma_0$) функции $\mathcal{F}_{h,s}^{(1)}$ принимают вид (7.167) и (7.168).
- Докажите формулы (7.173) и (7.174) для зеркального направления $\varphi = \pi - \varphi_0$.
- Докажите формулы (7.177) и (7.178) для скользящего направления падения ($\varphi_0 = \pi$) и скользящего направления рассеяния ($\varphi = 0$).

**7.18.** В разделе 7.9.2 получены асимптотики для электромагнитных ЭКВ, свободные от скользящей сингулярности.

- Докажите, что для направлений дифракционного конуса ($\vartheta = \pi - \gamma_0$) функции $\vec{\mathcal{F}}^{(1)}, \vec{\mathcal{G}}^{(1)}$ принимают вид (7.191) , (7.192).
- Докажите соотношения (7.193), (7.!94), существующие между акустическими и электромагнитными ЭКВ.

Глава 8

# Лучевые и каустические асимптотики для краевых дифракционных волн

Эта глава основана на статьях (Ufimtsev, 1989, 1991).

## 8.1. Лучевые асимптотики

Между акустическими и электромагнитными дифракционными лучами существуют следующие соотношения эквивалентности:

$u_s = E_t$, если $u^{inc}(\zeta) = E_t^{inc}(\zeta)$,

$u_h = H_t$, если $u^{inc}(\zeta) = H_t^{inc}(\zeta)$,

где $\hat{t}$ есть касательная к рассеивающему ребру в точке дифракции $\zeta$.

Соотношения $u_s^{(0,1)}(\zeta) = E_t^{(0,1)}(\zeta)$ справедивы только при отсутствии поляризационной связи у электромагнитных волн в приближении физической оптики.

### 8.1.1. Акустические волны

Теория ЭКВ применяется здесь к исследованию дифракции на плавно изогнутом ребре $L$ с медленно меняющимся углом $\alpha(\zeta)$ между его гранями (рис. 8.1).

В малой (по сравнению с длиной волны) окрестности точки $\zeta$ на рассеивающем ребре любую падающую волну

$$u^{inc}(\zeta) = u_0(\zeta)\, e^{ik\phi^i(\zeta)} \tag{8.1}$$

можно локально рассматривать как плоскую волну, распространяющуюся в направлении

$$\hat{k}^i = \nabla'\phi^i = \mathrm{grad}'\phi^i. \tag{8.2}$$

Следовательно, заменяя множитель $u^{inc}(\zeta)$ в формулах (7.89), (7.90) и (7.96), (7.97) на величину (8.1), мы получим асимптотические выражения для ЭКВ, возбуждаемых произвольной падающей волной. Результирующая дифракци-

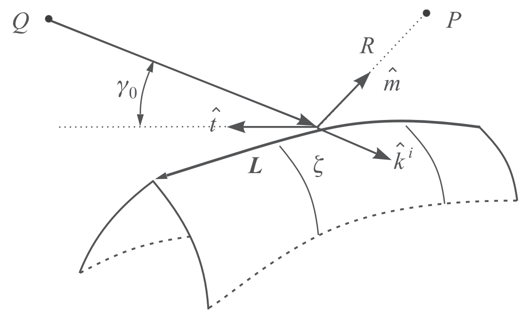


**Рис. 8.1.** Элемент рассеивающего ребра $L$ с криволинейной координатой $\zeta$ вдоль ребра; $\hat{t}$ есть единичный вектор касательной к ребру в точке $\zeta$

онная волна, возникающая на ребре $L$ и создаваемая *неравномерными* компонентами $j_{s,h}^{(1)}$ поверхностных источников, является линейной суперпозицией ЭКВ (7.89) и (7.90),

$$u_{s,h}^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_L u_0(\zeta) F_{s,h}^{(1)}(\zeta,\hat{m}) \frac{e^{ik\Phi(\zeta)}}{R(\zeta)}\, d\zeta. \tag{8.3}$$

Краевая волна, создаваемая *полными* источниками $j_{s,h}^{(t)} = j_{s,h}^{(0)} + j_{s,h}^{(1)}$, является в свою очередь линейной суперпозицией ЭКВ (7.96) и (7.97),

$$u_{s,h}^{(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_L u_0(\zeta) F_{s,h}^{(t)}(\zeta,\hat{m}) \frac{e^{ik\Phi(\zeta)}}{R(\zeta)}\, d\zeta. \tag{8.4}$$

Здесь

$$\hat{m} = \nabla R, \quad \Phi = \phi^i + R \tag{8.5}$$

и $R$ есть расстояние между точкой интегрирования $\zeta$ на ребре и точкой наблюдения $P(x, y, z)$. Следует иметь в виду, что дифференциальный оператор $\nabla'$ в формуле (8.2) действует на координаты точки $\zeta$ на ребре, тогда как оператор $\nabla$ в формуле (8.5) действует на координаты $x, y, z$ точки наблюдения $P$.

Высокочастотные аппроксимации (при $k \gg 1$) для рассеянного поля можно получить методом стационарной фазы (Копсон, 1966; Murray, 1984), детали которого были изложены выше в разделе 6.1.2. Стационарная точка $\zeta_{st}$ находится из уравнения

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = \nabla'\Phi\cdot\hat{t} = \nabla'(\phi^i + R)\cdot\hat{t} = (\hat{k}^i - \hat{m})\cdot\hat{t} = 0. \tag{8.6}$$

Обозначим через $\hat{k}^s$ единичный вектор $\hat{m}$, направленный из стационарной точки $\zeta_{st}$ в точку наблюдения. Тогда уравнение (8.6) можно переписать в виде

$$\hat{k}^s\cdot\hat{t} = \hat{k}^i\cdot\hat{t} = -\cos\gamma_0. \tag{8.7}$$

Таким образом, направления рассеяния $\hat{k}^s$ образуют конус с осью вдоль касательной $\hat{t}$ к ребру в точке стационарной фазы. Такой конус показан на рис. 4.4.

Функция Φ описывает расстояние между точками $Q$ и $P$ вдоль прямых линий $Q\zeta$ и $\zeta P$ (рис. 8.1). Следовательно, уравнение (8.6) означает, что это расстояние оказывается экстремальным (минимальным или максимальным), когда точка $\zeta$ является стационарной. Другими словами, стационарная точка $\zeta_{st}$ на ребре $L$ удовлетворяет принципу Ферма.

В соответствии с методом стационарной фазы первый член асимптотического разложения для поля (8.3) равен

$$u_{s,h}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} u^{inc}(\zeta_{st}) F_{s,h}^{(1)}(\zeta_{st}, \hat{k}^{s}) \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\frac{k\Phi''(\zeta_{st})}{2}(\zeta-\zeta_{st})^2} d\zeta, \tag{8.8}$$

где $\Phi''(\zeta_{st}) = d^2\Phi(\zeta_{st})/d\zeta^2$ и $R$ есть расстояние между стационарной точкой $\zeta_{st}$ и точкой наблюдения $P$. В силу равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\pm ix^2} dx = \sqrt{\pi} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \tag{8.9}$$

выражение (8.8) принимает вид

$$u_{s,h}^{(1)} = u^{inc}(\zeta_{st}) F_{s,h}^{(1)}(\zeta_{st}, \hat{k}^{s}) \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k\Phi''(\zeta_{st})}} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{8.10}$$

где

$$\sqrt{\Phi''(\zeta_{st})} = \sqrt{|\Phi''(\zeta_{st})|}\, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}, \text{ если } \Phi''(\zeta_{st}) < 0. \tag{8.11}$$

В местных сферических координатах $R$, $\vartheta$, $\varphi$ (см. рис. 7.3) единичные векторы $\hat{k}^{s}$ имеют направления $\vartheta = \pi - \gamma_0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Для этих направлений функции $F_{s,h}^{(1)}(\zeta_{st}, \hat{k}^{s})$ определяются формулами (7.115) и (7.116). Следовательно,

$$u_{s}^{(1)} = u^{inc}(\zeta_{st}) f^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k\Phi''(\zeta_{st})}} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{8.12}$$

$$u_{h}^{(1)} = u^{inc}(\zeta_{st}) g^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k\Phi''(\zeta_{st})}} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \tag{8.13}$$

в направлениях $0 \le \varphi \le \alpha$, относящихся к области *вне* касательного клина, и

$$u_{s}^{(1)} = -u^{inc}(\zeta_{st}) f^{(0)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k\Phi''(\zeta_{st})}} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{8.14}$$

$$u_{h}^{(1)} = -u^{inc}(\zeta_{st}) g^{(0)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k\Phi''(\zeta_{st})}} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \tag{8.15}$$

в направлениях $\alpha < \varphi < 2\pi$, относящихся к области *внутри* касательного клина.

Полное дифракционное поле $u_{s,h}^{(t)}$, излучаемое полными поверхностными источниками $j_{s,h}^{(t)} = j_{s,h}^{(0)} + j_{s,h}^{(1)}$, описывается формулами (8.12) и (8.13), в которых следует заменить функции $f^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha)$, $g^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha)$ на функции $f(\varphi, \varphi_0, \alpha)$, $g(\varphi, \varphi_0, \alpha)$. В области $\alpha < \varphi < 2\pi$ (внутри касательного клина) полное дифракционное поле $u^{(1)} + u^{(0)}$ асимптотически равно нулю, поскольку $u^{(1)} = -u^{(0)}$ согласно формулам (8.14) и (8.15).

Полученные асимптотики для краевых дифракционных волн могут быть представлены в другой форме, которая демонстрирует их лучевую структуру. С этой целью мы используем следующие дифференциальные операции:

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{d\zeta} = \hat{t} \cdot \nabla'(\phi^{inc} + R) = \hat{t} \cdot \hat{k}^i + \hat{t} \cdot \nabla' R = -\cos\gamma_0 + \hat{t} \cdot \nabla' R, \qquad (8.16)$$

$$\Phi'' = \frac{d\Phi'}{d\zeta} = \sin\gamma_0 \frac{d\gamma_0}{d\zeta} + \frac{d\nabla' R}{d\zeta} \cdot \hat{t} + \nabla' R \cdot \frac{d\hat{t}}{d\zeta}, \qquad (8.17)$$

$$\frac{d\nabla' R}{d\zeta} \cdot \hat{t} = \frac{1}{R}[1 - (\hat{t} \cdot \nabla' R)^2], \qquad (8.18)$$

$$\frac{d\hat{t}}{d\zeta} = \frac{\hat{\nu}}{a}. \qquad (8.19)$$

Здесь $\hat{\nu}$ есть единичный вектор главной нормали к ребру $L$ и $a$ есть радиус кривизны ребра.

В точке стационарной фазы справедливы соотношения $\nabla' R = -\hat{k}^s$ и $\hat{t} \cdot \nabla' R = -\hat{t} \cdot \hat{k}^s = \cos\gamma_0$. Поэтому

$$\frac{d\nabla' R}{d\zeta} \cdot \hat{t} = \frac{\sin^2\gamma_0}{R}, \qquad (8.20)$$

$$\nabla' R \cdot \frac{d\hat{t}}{d\zeta} = -\frac{\hat{k}^s \cdot \hat{\nu}}{a}. \qquad (8.21)$$

В силу соотношений (8.16–8.21),

$$\Phi''(\zeta_{st}) = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{R}{\rho}\right)\sin^2\gamma_0, \qquad (8.22)$$

где

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sin\gamma_0}\left(\frac{d\gamma_0}{d\zeta} - \frac{\hat{k}^s \cdot \hat{\nu}}{a\sin\gamma_0}\right). \qquad (8.23)$$

Величина $\rho$ есть каустический параметр, он определяет расстояние ($R = -\rho$) вдоль луча от ребра до каустики.

Теперь дифракционное поле может быть представлено в лучевой форме,

$$u_{s,h}^{(1)} = u^{inc}(\zeta_{st}) \cdot (DF) \cdot (DC) \cdot \mathrm{e}^{ikR}, \tag{8.24}$$

где

$$DF = \frac{1}{\sqrt{R\,|1 + R/\rho|}} \tag{8.25}$$

есть фактор лучевой расходимости, а множитель

$$DC = \frac{\mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{4}}}{\sin\gamma_0\sqrt{2\pi k}} \begin{Bmatrix} f^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) \\ g^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) \end{Bmatrix} \tag{8.26}$$

может быть интерпретирован как дифракционный коэффициент. Величины $R$ и $R+\rho$ суть два главных радиуса кривизны дифракционного фазового фронта. Верхний знак в экспоненте $\mathrm{e}^{\pm i\pi/4}$ берется, если $\Phi''(\zeta_{st}) > 0$, а нижний знак — если $\Phi''(\zeta_{st}) < 0$. Последний множитель $\mathrm{e}^{ikR}$ в формуле (8.24) есть фазовый фактор, вместе с экспонентой $\mathrm{e}^{\pm i\pi/4}$ он определяет фазу дифракционного луча.

Фактор расходимости показывает, как краевая волна, будучи цилиндрической в окрестности ребра ($R \ll |\rho|$),

$$(DF)\,\mathrm{e}^{ikR} \approx \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{\sqrt{R}}, \tag{8.27}$$

трансформируется в сферическую волну

$$(DF)\,\mathrm{e}^{ikR} \approx \sqrt{|\rho|}\,\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \tag{8.28}$$

на большом расстоянии от края ($R \gg \rho$).

Полная краевая волна также может быть представлена в лучевой форме и имеет вид

$$\boxed{u_{s,h}^{(t)} = u^{inc}(\zeta_{st}) \frac{1}{\sqrt{R(1 + R/\rho)}} \frac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{\sin\gamma_0\sqrt{2\pi k}} \begin{Bmatrix} f(\varphi, \varphi_0, \alpha) \\ g(\varphi, \varphi_0, \alpha) \end{Bmatrix} \mathrm{e}^{ikR}. \quad (8.29)}$$

Мы напоминаем, что все переменные параметры и координаты в лучевых формулах относятся к стационарной точке $\zeta_{st}$.

Отметим, что лучевые асимптотики (8.12) и (8.13) со второй производной $\Phi''(\zeta)$ значительно проще для вычислений, чем их аналог (8.29), используемый в ГТД и связанный со сложными вычислениями каустического параметра $\rho(\zeta)$.

### 8.1.2. Электромагнитные волны

Согласно формулам (7.130) и (7.131) ЭКВ, расходящиеся от рассеивающего ребра $L$, создают интегральную краевую волну с векторами

$$\vec{E}^{(1,t)} = \frac{1}{2\pi} \int_L \vec{\mathcal{E}}^{(1,t)}(\zeta) \frac{\mathrm{e}^{ikR(\zeta)}}{R(\zeta)} d\zeta \tag{8.30}$$

и

$$\vec{H}^{(1,t)} = \frac{1}{2\pi Z_0} \int_L [\nabla R(\zeta) \times \vec{\mathcal{E}}^{(1,t)}(\zeta)] \frac{\mathrm{e}^{ikR(\zeta)}}{R(\zeta)} d\zeta, \tag{8.31}$$

где

$$\vec{\mathcal{E}}^{(1,t)}(\zeta) = [E_{0t}(\zeta)\vec{F}^{(1,t)}(\zeta) + Z_0 H_{0t}(\zeta)\vec{G}^{(1,t)}(\zeta)]\mathrm{e}^{ik\phi^i(\zeta)}. \tag{8.32}$$

Подынтегральные выражения здесь содержат быстро осциллирующий фактор $\exp(ik\Phi(\zeta))$, где $\Phi(\zeta) = R(\zeta) + \phi^i(\zeta)$ Применяя к этим интегралам метод стационарной фазы, получаем следующие лучевые асимптотики:

$$E_\vartheta^{(1)} = Z_0 H_\varphi^{(1)} = -\frac{1}{\sin\gamma_0}\{E_t^{inc}(\zeta_{st}) f^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) -$$

$$-Z_0 H_t^{inc}(\zeta_{st})[\varepsilon(\varphi_0) - \varepsilon(\alpha - \varphi_0)]\cos\gamma_0\} \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k \Phi''(\zeta_{st})}} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{8.33 а}$$

$$E_\vartheta^{(t)} = Z_0 H_\varphi^{(t)} = -\frac{E_t^{inc}(\zeta_{st})}{\sin\gamma_0} f(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k \Phi''(\zeta_{st})}} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{8.33 б}$$

$$\left.\begin{aligned} E_\varphi^{(1)} &= -Z_0 H_\vartheta^{(1)} \\ E_\varphi^{(t)} &= -Z_0 H_\vartheta^{(t)} \end{aligned}\right\} = \frac{Z_0 H_t^{inc}(\zeta_{st})}{\sin\gamma_0} \begin{bmatrix} g^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) \\ g(\varphi, \varphi_0, \alpha) \end{bmatrix} \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k \Phi''(\zeta_{st})}} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \tag{8.34}$$

Они также могут быть записаны в форме (8.29):

$$E_\vartheta^{(1)} = Z_0 H_\varphi^{(1)} = -\frac{1}{\sin^2\gamma_0}\{E_t^{inc}(\zeta_{st}) f^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) -$$

$$-Z_0 H_t^{inc}(\zeta_{st})[\varepsilon(\varphi_0) - \varepsilon(\alpha - \varphi_0)]\cos\gamma_0\} \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k}} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{\sqrt{R(1 + R/\rho)}}, \tag{8.35 а}$$

$$E_\vartheta^{(t)} = Z_0 H_\varphi^{(t)} = -\frac{E_t^{inc}(\zeta_{st})}{\sin^2\gamma_0} f(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k}} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{\sqrt{R(1 + R/\rho)}}, \tag{8.35 б}$$

$$\left.\begin{aligned} E_\varphi^{(1)} &= -Z_0 H_\vartheta^{(1)} \\ E_\varphi^{(t)} &= -Z_0 H_\vartheta^{(t)} \end{aligned}\right\} = \frac{Z_0 H_t^{inc}(\zeta_{st})}{\sin^2\gamma_0} \begin{bmatrix} g^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) \\ g(\varphi, \varphi_0, \alpha) \end{bmatrix} \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k}} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{\sqrt{R(1 + R/\rho)}}. \tag{8.36}$$

Вторые слагаемые в формулах (8.33 а) и (8. 35 а) отражают поляризационную связь в электромагнитных дифракционных лучах.

Принимая во внимание соотношения (7.149), полученные асимптотики можно представить в терминах компонент поля, касательных к рассеивающему ребру:

$$E_t^{(1)} = \{E_t^{inc}(\zeta_{st}) f^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) -$$

$$-Z_0 H_t^{inc}(\zeta_{st})[\varepsilon(\varphi_0) - \varepsilon(\alpha - \varphi_0)]\cos\gamma_0\} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k \Phi''(\zeta_{st})}} \frac{e^{ikR}}{R}, \qquad (8.37\text{ а})$$

$$E_t^{(t)} = E_t^{inc}(\zeta_{st}) f(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k \Phi''(\zeta_{st})}} \frac{e^{ikR}}{R}, \qquad (8.37\text{ б})$$

$$\left.\begin{matrix} H_t^{(1)} \\ H_t^{(t)} \end{matrix}\right\} = H_t^{inc}(\zeta_{st}) \begin{bmatrix} g^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) \\ g(\varphi, \varphi_0, \alpha) \end{bmatrix} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k \Phi''(\zeta_{st})}} \frac{e^{ikR}}{R}. \qquad (8.38)$$

### 8.1.3. Комментарии к лучевым асимптотикам

- Сравнение выражений (8.12), (8.13) и (8.37), (8.38) выявляет следующие соотношения эквивалентности между акустическими и электромагнитными дифракционными лучами:

$$u_s = E_t, \text{ если } u^{inc}(\zeta) = E_t^{inc}(\zeta), \qquad (8.39)$$

$$u_h = H_t, \text{ если } u^{inc}(\zeta) = H_t^{inc}(\zeta). \qquad (8.40)$$

Соотношения $u_s^{(0,1)} = E_t^{(0,1)}$ справедливы только в отсутствие поляризационной связи у электромагнитных лучей в приближении ФО.

Здесь $\zeta$ есть точка дифракции на рассеивающем ребре. Эти соотношения вместе с формулами (7.149) и (7.150) позволяют полностью определить поле электромагнитных лучей, дифрагированных на идеально проводящих телах, если известны выражения для акустических лучей, дифрагированных на таких же, но акустически мягких и жестких телах. Отметим, что эти соотношения были установлены ранее в работе (Ufimtsev, 1995).

- Лучевые асимптотики (8.29), (8.35 б), (8.36) для поля, излучаемого полными рассеивающими источниками $j^{(t)} = j^{(0)} + j^{(1)}$, были постулированы в ГТД (Keller, 1962). Наш вывод этих асимптотик, основанный на теории ЭКВ, служит обоснованием ГТД, которую можно интерпретировать как лучевую форму ФТД. Отметим также, что лучевые асимптотики типа (8.29) (но в приближении Кирхгофа) были получены впервые Рубиновичем (Rubinowicz, 1924). В работе (Ufimtsev, 1995) показано, что приведенные выше лучевые асимптотики для полного поля (и, следовательно, асимптотики ГТД) могут быть легко получены путем обобщения теории Рубиновича.

- В отличие от ФТД, ГТД неприменима в тех областях, где рассеянное поле не имеет лучевой структуры и где фактически происходит сам процесс дифракции (ГО-границы, фокусы, каустики). Различные обобщения ГТД были предложены, чтобы преодолеть ее недостатки (Ahluwalia et al., 1968; Lee and Deshamhs, 1976; Kouyoumjian and Pathak, 1974; James, 1980; Borovikov and Kinber, 1994). Среди них наиболее развита для практических приложений так называемая *равномерная теория дифракции* (Kouyoumjian and Pathak, 1974; McNamara et al., 1990).
- Лучевые асимптотики (8.29), (8.35) и (8.36) для полей $u_{s,h}^{(t)}$, $\vec{E}^{(t)}$, $\vec{H}^{(t)}$ не изменяются при перестановках $\vartheta \Leftrightarrow \gamma_0$, $\varphi \Leftrightarrow \varphi_0$ и, следовательно, удовлетворяют принципу взаимности. Напоминаем, что эти выражения справедливы только для направлений дифракционного конуса ($\vartheta = \pi - \gamma_0$). В стороне от этого конуса полные поля $u_{s,h}^{(t)}$, $\vec{E}^{(t)}$, $\vec{H}^{(t)}$ асимптотически (при $k \to \infty$) малы из-за отсутствия для таких направлений стационарной точки на ребре. В этой области элементарные краевые волны асимптотически гасят друг друга.
- Асимптотические выражения (8.29) для $u_{s,h}^{(t)}$ и (8.35), (8.36) для $\vec{E}^{(t)}$, $\vec{H}^{(t)}$ удовлетворяют граничным условиям на плоских гранях ребра. Ситуация с этими условиями иллюстрируется на рис. 8.2.
- Лучевые асимптотики неприменимы на каустиках ($R = 0$ и $R = -\rho$), где они предсказывают бесконечно большие поля. Каустика $R = 0$ находится на самом ребре. Каустика $R = -\rho$ может быть реальной или мнимой. Реальная каустика находится вне рассеивающего тела в положительном направлении вектора $\hat{k}^s$, исходящего от точки дифракции на ребре. Мнимая каустика находится в направлении, противоположном вектору $\hat{k}^s$. В частности, мнимая каустика может находиться внутри рассеивающего тела. Величина $\Phi''(\zeta_{st}) > 0$ относится к случаю, когда краевой дифракционный луч еще не достиг каустики. Величина $\Phi''(\zeta_{st}) < 0$ соответствует лучу, который уже прошел через каустику и приобрел там дополнительный сдвиг фазы, равный $-\pi/2$ [согласно формуле (8.11)].
- Теория ЭКВ, развитая в главе 7, позволяет вычислять поле краевых дифракционных волн в окрестности любых каустик вдали от рассеивающего ребра. Пример таких вычислений рассматривается ниже.

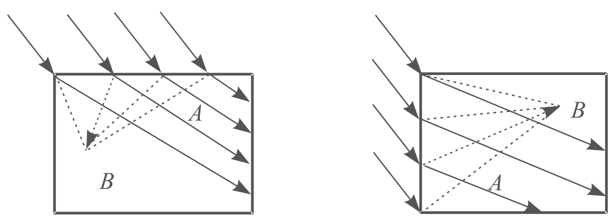


**Рис. 8.2.** Прямоугольные грани рассеивающего ребра. Краевые дифракционные лучи (сплошные стрелки) существуют только в области $A$ и удовлетворяют там граничным условиям. Индивидуальные элементарные краевые лучи (точечные стрелки) в области $B$ не удовлетворяют граничным условиям, но они асимптотически гасят там друг друга

## 8.2. Каустические асимптотики

Здесь представлены каустические асимптотики для акустических и электромагнитных волн. Эти асимптотики имееют одинаковую структуру, но отличаются своими коэффициентами.

### 8.2.1 Акустические волны

Предположим, что краевые дифракционные лучи образуют гладкую каустику (рис. 8.3). Она является огибающей дифракционных лучей, где концентрируется волновое поле с высокой интенсивностью. Согласно разд. 8.1 дифракционное поле вдали от каустики (перед каустикой) представляет собой сумму двух лучей, приходящих от стационарных точек $\zeta_1$ и $\zeta_2$ на рассеивающем ребре $L$:

$$u = u_0(\zeta_1)\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k\Phi''(\zeta_1)}}F(\zeta_1)\frac{e^{ik\Phi(\zeta_1)}}{R_1} +$$
$$+u_0(\zeta_2)\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k|\Phi''(\zeta_2)|}}F(\zeta_2)\frac{e^{ik\Phi(\zeta_2)}}{R_2}, \tag{8.41}$$

где $\Phi(\zeta) = \phi^i(\zeta) + R(\zeta)$ и $\phi^i(\zeta)$ есть фаза падающей волны в точке $\zeta$ на рассеивающем ребре. В зависимости от типа функции $F(\zeta_{1,2})$ выражение (8.41) описывает или поле $u^{(1)}_{s,h}$, излучаемое *неравномерными* источниками $j^{(1)}_{s,h}$, или поле $u^{(t)}_{s,h}$, излучаемое полными рассеивающими источниками $j^{(t)}_{s,h} = j^{(0)}_{s,h} + j^{(1)}_{s,h}$. А именно, функции

$$F^{(1)}_s(\zeta_{1,2}) = f^{(1)}(\varphi_{1,2},\varphi_{01,02},\alpha_{1,2}), F^{(1)}_h(\zeta_{1,2}) = g^{(1)}(\varphi_{1,2},\varphi_{01,02},\alpha_{1,2}) \tag{8.42}$$

относятся к полю $u^{(1)}_{s,h}$, тогда как функции

$$F^{(t)}_s(\zeta_{1,2}) = f(\varphi_{1,2},\varphi_{01,02},\alpha_{1,2}), F^{(t)}_h(\zeta_{1,2}) = g(\varphi_{1,2},\varphi_{01,02},\alpha_{1,2}) \tag{8.43}$$

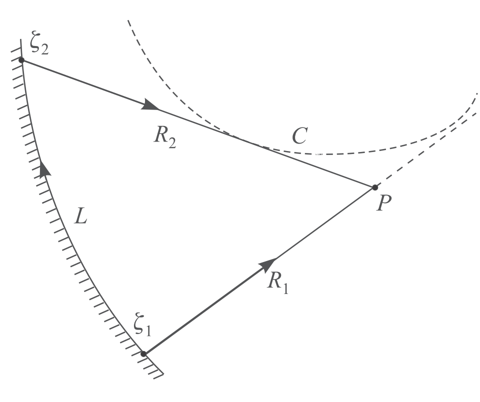


**Рис. 8.3.** Краевые дифракционные лучи в точке $P$ в окрестности каустики $C$

относятся к полю $u_{s,h}^{(t)}$. Мы напоминаем, что функции $f$, $g$, $f^{(1)}$, $g^{(1)}$ определяются формулами (2.62), (2.64), (4.14), (4.15) и (3.55–3.57). Функция $\Phi''(\zeta_{1,2})$ может быть представлена в форме (8.22).

Первое слагаемое в формуле (8.41) описывает луч, который еще не достиг каустики, а второе слагаемое относится к лучу, который уже коснулся каустики. Для точек наблюдения позади каустики нет стационарных точек на ребре $L$, и, следовательно, туда не приходят дифракционные лучи. Здесь находится зона тени для дифракционных лучей. Ниже мы построим асимптотики для поля в освещенной области, перед каустикой, включая точки на самой каустике.

Начнем с общего интегрального представления для краевых волн в форме (8.3), (8.4),

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L u_0(\zeta)F(\zeta,\hat{m})\frac{\mathrm{e}^{ik\Phi}}{R}d\zeta, \quad \hat{m} = \mathrm{grad}R. \tag{8.44}$$

В области перед каустикой подынтегральная функция имеет две стационарных точки, $\zeta_1$ и $\zeta_2$. При приближении точки наблюдения $P$ к каустике стационарные точки движутся навстречу друг другу и сливаются в тот момент, когда точка $P$ опускается на каустику. В этом случае $\Phi''(\zeta_{1,2}) \to 0$ и лучевая асимптотика (8.41) становится неприменимой. Гладкую каустику $C$ можно определить как *воображаемую* поверхность в свободном пространстве, где равны нулю первая и вторая производные, $\Phi'(\zeta) = 0$ и $\Phi''(\zeta) = 0$.

Главный вклад в интеграл (8.44) вносится окрестностями стационарных точек. Реальные рассеивающие структуры имееют концы, которые тоже создают рассеяннок поле. Чтобы выделить каустический эффект в чистом виде, мы устремим пределы интегрирования в формуле (8.44) на бесконечность ($-\infty \le \zeta \le \infty$) и таким образом устраним вклад концов в дифракционное поле, который обычно меньше по своей величине по сравнению с вкладом стационарных точек (8.41).

Равномерные асимптотики, справедливые во всей освещенной области, включая каустику, можно построить с помощью метода стационарной фазы, обобщенного на случай слияния двух стационарных точек (Chester et al., 1957). Ниже изложены основные детали этого метода и дан вывод каустических асимптотик.

- Поскольку первая и вторая проиэводные фазовой функции $\Phi(\zeta)$ обращаются в нуль на каустике, ее целесообразно представить в виде кубического полинома

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{3}\tau^3 - \mu\tau + \psi \tag{8.45}$$

при условии, что $\tau^2 = \mu = 0$ для точки наблюдения, находящейся на каустике.

- Функция $\tau(\zeta)$ описывает трехлистную риманову поверхность в комплексной плоскости $(\zeta)$. Мы выбираем ее регулярную ветвь, полагая

$$\tau(\zeta_1) = \tau_1 = \mu^{1/2}, \quad \tau(\zeta_2) = -\mu^{1/2}. \tag{8.46}$$

Величины $\tau(\zeta_{1,2})$ являются стационарными точками функции $\Phi[\zeta(\tau)]$. Параметры $\mu$ и $\psi$ определяются из уравнения (8.45), где следует положить $\zeta = \zeta_1$ и $\zeta = \zeta_2$:

$$\mu^{3/2} = \frac{3}{4}[\Phi(\zeta_2) - \Phi(\zeta_1)], \quad \psi = \frac{1}{2}[\Phi(\zeta_1) + \Phi(\zeta_2)]. \tag{8.47}$$

- Согласно формуле (8.41) и в соответствии с рис. 8.3, функция $\Phi(\zeta)$ обладает следующими свойствами:
  - $\Phi''(\zeta_1) \geq 0$ и $\Phi''(\zeta_2) \leq 0$. Это означает, что $\Phi(\zeta_2) \geq \Phi(\zeta_1)$ и $\mu \geq 0$, $\mu^{1/2} \geq 0, \mu^{3/2} \geq 0$.
  - $\Phi'(\zeta) > 0$ для $\zeta_1 < \zeta < \zeta_2$ и $\Phi'(\zeta) < 0$ для $\zeta < \zeta_1$ и $\zeta > \zeta_2$.
  - $\Phi'''(\zeta) < 0$ в окрестности точки слияния $\zeta_0 = \lim\limits_{P \to C} \zeta_{1,2}$.
- Из формулы (8.45) следует, что

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{\tau^2 - \mu}{\Phi'(\zeta)}, \text{ если } \Phi'(\zeta) \neq 0. \tag{8.48}$$

В силу свойств функции $\Phi(\zeta)$ и согласно соотношениям (8.46), эта производная всегда отрицательна ($d\zeta/d\tau \leq 0$). Это наблюдение позволяет выбрать правильный знак для $d\zeta/d\tau$ в стационарных точках $\zeta_{1,2}$, где $\Phi'(\zeta) = 0$ и $\Phi''(\zeta) = 0$. Соответствующие выражения для $d\zeta/d\tau$ в этих точках находятся последовательным дифференцированием функции (8.45):

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2\mu^{1/2}}{|\Phi''(\zeta_{1,2})|}}, \text{ если } \Phi'(\zeta_{1,2}) = 0, \tag{8.49}$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\left[\frac{2}{|\Phi'''(\zeta_0)|}\right]^{3/2}, \text{ если } \Phi'(\zeta_0) = \Phi'''(\zeta_0) = 0, \tag{8.50}$$

где $\sqrt{|x|} > 0$ и $(|x|)^{3/2} > 0$.

- После перехода к новой переменной $\tau = \tau(\zeta)$ в интеграле (8.44) мы опять устраняем вклады от концевых точек, полагая пределы интегрирования бесконечными. В соответствии с соотношениями (8.46) мы полагаем предел интегрирования $\tau = -\infty$ ($\tau = \infty$), когда $\zeta = \infty$ ($\zeta = -\infty$). Кроме того, мы принимаем во внимание, что $d\zeta/d\tau = -|d\zeta/d\tau|$. В результате интеграл (8.44) может быть представлен в виде

$$u = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{ik\psi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \mathrm{e}^{ik\left(\frac{\tau^3}{3} - \mu\tau\right)} d\tau, \tag{8.51}$$

где

$$G(\tau) = \frac{u_0(\zeta)}{R(\zeta)} F(\zeta, \hat{m}) \left| \frac{d\zeta}{d\tau} \right|. \tag{8.52}$$

- Затем функция $G(\tau)$ раскладывается в ряд

$$G(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (\tau - \mu)^n + \sum_{n=0}^{\infty} q_n \tau (\tau - \mu)^n . \tag{8.53}$$

Интегрируя этот ряд в формуле (8.51), можно получить асимптотическое разложение, справедливое при условии $k \to \infty$. Мы сохраняем только два главных члена в ряде (8.53),

$$G(\tau) = p + q\tau, \tag{8.54}$$

где $p = p_0$ и $q = q_0$. Полагая здесь $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$, находим

$$p = \frac{1}{2}[G(\mu^{1/2}) + G(-\mu^{1/2})], \quad q = \frac{1}{2\mu^{1/2}}[G(\mu^{1/2}) - G(-\mu^{1/2})]. \tag{8.55}$$

- Последующая подстановка функции (8.54) в формулу (8.51) приводит к асимптотическому выражению

$$\boxed{u \sim k^{-1/3} e^{ik\psi} [p\mathrm{Ai}(-k^{2/3}\mu) - ik^{-1/3} q\mathrm{Ai}'(-k^{2/3}\mu)] \text{ при } k \to \infty, \quad (8.56)}$$

где

$$\mathrm{Ai}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{x^3}{3} + tx\right)} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{x^3}{3} + tx\right) dx \tag{8.57}$$

есть функция Эйри (Abramowitz and Stegun, 1972) и

$$\mathrm{Ai}'(t) = \frac{d}{dt} \mathrm{Ai}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x \sin\left(\frac{x^3}{3} + tx\right) dx. \tag{8.58}$$

Отметим также, что

$$\mathrm{Ai}'(-t) = \frac{d}{d(-t)} \mathrm{Ai}(-t) = -\frac{d}{dt} \mathrm{Ai}(-t). \tag{8.59}$$

Асимптотическое выражение (8.56) справедливо во всей освещенной области, включая каустику. В частности, на самой каустике оно дает следующее значение для дифракционного поля:

$$u = k^{-1/3} p(\zeta_0) \mathrm{Ai}(0) e^{ik\Phi(\zeta_0)} + O(k^{-2/3}), \tag{8.60}$$

где согласно формуле (10.4.4) в справочнике (Abramowitz and Stegun, 1972),

$$\mathrm{Ai}(0) = 3^{-2/3} / \Gamma(2/3) \approx 0.35502. \tag{8.61}$$

Чтобы окончательно определить асимптотики (8.56) для полей $u_{s,h}^{(1)}$, мы приводим явные выражения для коэффициентов $p$ и $q$:

$$\left.\begin{matrix} p_s^{(1)} \\ p_h^{(1)} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{u_0(\zeta_1)}{R(\zeta_1)}\begin{bmatrix} f^{(1)}(\varphi_1,\varphi_{01},\alpha_1) \\ g^{(1)}(\varphi_1,\varphi_{01},\alpha_1)\end{bmatrix}\left|\frac{d\zeta(\tau_1)}{d\tau}\right| + \right.$$

$$\left. + \frac{u_0(\zeta_2)}{R(\zeta_2)}\begin{bmatrix} f^{(1)}(\varphi_2,\varphi_{02},\alpha_2) \\ g^{(1)}(\varphi_2,\varphi_{02},\alpha_2)\end{bmatrix}\left|\frac{d\zeta(\tau_2)}{d\tau}\right|\right\} \tag{8.62}$$

и

$$\left.\begin{matrix} q_s^{(1)} \\ q_h^{(1)} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\mu^{1/2}}\left\{\frac{u_0(\zeta_1)}{R(\zeta_1)}\begin{bmatrix} f^{(1)}(\varphi_1,\varphi_{01},\alpha_1) \\ g^{(1)}(\varphi_1,\varphi_{01},\alpha_1)\end{bmatrix}\left|\frac{d\zeta(\tau_1)}{d\tau}\right| - \right.$$

$$\left. - \frac{u_0(\zeta_2)}{R(\zeta_2)}\begin{bmatrix} f^{(1)}(\varphi_2,\varphi_{02},\alpha_2) \\ g^{(1)}(\varphi_2,\varphi_{02},\alpha_2)\end{bmatrix}\left|\frac{d\zeta(\tau_2)}{d\tau}\right|\right\}, \tag{8.63}$$

где величина $\mu$ опрелеляется согласно формуле (8.47). После замены функций $f^{(1)}$, $g^{(1)}$ на $f$, $g$ (или на $f^{(0)}$, $g^{(0)}$) выражения (8.62) и (8.63) определяют коэффициенты $p_{s,h}^{(t)}$, $q_{s,h}^{(t)}$ (или $p_{s,h}^{(0)}$, $q_{s,h}^{(0)}$), относящиеся к полям $u_{s,h}^{(t)}$ (или к $u_{s,h}^{(0)}$).

Для больших вещественных аргументов ($t \gg 1$) функция Эйри и ее производная описываются следующими асимптотическими формулами (Abramowitz and Stegun, 1972):

$$\mathrm{Ai}(-t) \sim \pi^{-1/2} t^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \tag{8.64}$$

$$\mathrm{Ai}'(-t) \sim -\pi^{-1/2} t^{1/4} \cos\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right). \tag{8.65}$$

Используя эти асимптотики, можно показать, что вдали от каустики ($k^{2/3}\mu \gg 1$) общее асимптотическое выражение (8.56) трансформируется в лучевую асимптотику (8.41).

### 8.2.2. Электромагнитные волны

Каустические асимптотики для электромагнитных волн выводятся так же, как и для акустических волн, и имеют аналогичную форму (Ufimtsev, 1991):

$$\boxed{\begin{bmatrix} \vec{E}^{(1)} \\ \vec{H}^{(1)} \end{bmatrix} \sim k^{-1/3} \mathrm{e}^{ik\psi}\left\{\begin{bmatrix} \vec{p}_e^{(1)} \\ \vec{p}_h^{(1)} \end{bmatrix}\mathrm{Ai}(-k^{2/3}\mu) - ik^{-1/3}\begin{bmatrix} \vec{q}_e^{(1)} \\ \vec{q}_h^{(1)} \end{bmatrix}\mathrm{Ai}'(-k^{2/3}\mu)\right\}. \quad (8.66)}$$

Здесь

$$\vec{p}_{\text{e}}^{(1)}=\frac{1}{2}\left[\vec{\mathcal{E}}^{(1)}(\zeta_1)\frac{1}{R(\zeta_1)}\left|\frac{d\zeta(\tau_1)}{d\tau}\right|+\vec{\mathcal{E}}^{(1)}(\zeta_2)\frac{1}{R(\zeta_2)}\left|\frac{d\zeta(\tau_2)}{d\tau}\right|\right], \tag{8.67}$$

$$\vec{q}_{\text{e}}^{(1)}=\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\left[\vec{\mathcal{E}}^{(1)}(\zeta_1)\frac{1}{R(\zeta_1)}\left|\frac{d\zeta(\tau_1)}{d\tau}\right|-\vec{\mathcal{E}}^{(1)}(\zeta_2)\frac{1}{R(\zeta_2)}\left|\frac{d\zeta(\tau_2)}{d\tau}\right|\right] \tag{8.68}$$

и согласно формулам (7.136), (7.141), (7.143) и (7.145)

$$\mathcal{E}_{\vartheta_m}^{(1)}(\zeta_m)=\frac{1}{\sin\gamma_{0m}}\{-E_{t_m}^{inc}(\zeta_m)f^{(1)}(\varphi_m,\varphi_{0m},\alpha_m)+$$

$$+Z_0H_{t_m}^{inc}(\zeta_m)[\varepsilon(\varphi_{0m})-\varepsilon(\alpha_m-\varphi_{0m})]\cos\gamma_{0m}\}, \tag{8.69}$$

$$\mathcal{E}_{\varphi_m}^{(1)}(\zeta_m)=Z_0H_{t_m}^{inc}\frac{1}{\sin\gamma_{0m}}g^{(1)}(\varphi_m,\varphi_{0m},\alpha_m). \tag{8.70}$$

Индексы $m = 1, 2$ обозначают, что соответствующие им величины относятся к стационарным точкам $\zeta_1$ или $\zeta_2$ на рассеивающем ребре.

Формулы, аналогичные выражениям (8.67) и (8.68), определяют векторные коэффициенты $\vec{p}_h^{(1)}$ и $\vec{q}_h^{(1)}$. В этих выражениях нужно только заменить вектор $\vec{\mathcal{E}}^{(1)}$ на $\vec{\mathcal{H}}^{(1)}=[\nabla R\times\vec{\mathcal{E}}^{(1)}]/Z_0$.

После замены функций $f^{(1)}$, $g^{(1)}$ на $f$, $g$ (или на $f^{(0)}$, $g^{(0)}$) выражения (8.67), (8.68) определяют коэффициенты $\vec{p}_{e,h}^{(t)}$, $\vec{q}_{e,h}^{(t)}$ (или $\vec{p}_{e,h}^{(0)}$, $\vec{q}_{e,h}^{(0)}$), относящиеся к полям $\vec{E}^{(t)}$, $\vec{H}^{(t)}$ (или $\vec{E}^{(0)}$, $\vec{H}^{(0)}$). Разумеется, что при этом нужно также учитывать наличие или отсутствие поляризационной связи, которая описывается слагаемым $Z_0H_{t_m}^{inc}(\zeta_m)[\varepsilon(\varphi_{0m})-\varepsilon(\alpha_m-\varphi_{0m})]\cos\gamma_{0m}$ в формуле (8.69). А именно, при замене $f^{(1)}$ на $f$ это слагаемое следует убрать, а при замене $f^{(1)}$ на $f^{(0)}$ оно сохраняется, но приобретает противоположный знак.

Полученные выше каустические асимптотики для полей $u_{s,h}^{(1)}$, $\vec{E}^{(1)}$, $\vec{H}^{(1)}$ (с функциями $f^{(1)}$, $g^{(1)}$) имеют важное преимущество по сравнению с аналогичными асимптотикми для полных полей $u_{s,h}^{(t)}$, $\vec{E}^{(t)}$, $\vec{H}^{(t)}$. Они остаются конечными на границах падающих и отраженных лучей ($\varphi = \pi \pm \varphi_0$, $\varphi = 2\alpha - \pi - \varphi_0$), где функции $f$, $g$ становятся сингулярными.

Сравнение формул (8.56) и (8.66) показывает, что акустические и электромагнитные каустические поля имеют одинаковую структуру. Их асимптотики отличаются только коэффициентами $p$, $q$, которые являются скалярными величинами для акустических волн и векторами для электромагнитных волн.

Напомним, что асимптотики (8.56) и (8.66) описывают поле только в освещенной области, перед каустикой. Когда точка наблюдения пересекает каустику и движется в область тени, дифракционное поле непрерывно изменяется и экспоненциально затухает, поскольку элементарные краевые волны асимптотически гасят там друг друга. Мы не рассматриваем здесь этот вопрос. Детали, относящиеся к поведению волнового поля в окрестности произвольных каустик, можно найти в обзорной статье (Кравцов и Орлов, 1983).

# Задачи

**8.1.** Используйте теорию ЭКВ, изложенную в разделе 7.5, и получите выражение для краевой волны, рассеянной бесконечным прямолинейным ребром клина. Падающая волна задана формулой
$u^{inc} = u_0 \mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0} \mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi-\varphi_0)}$, где $0 \le \varphi_0 \le \alpha - \pi$.
Рассмотрите дифракцию этой волны как на акустически мягком, так и на акустически жестком клине. Интегрируйте ЭКВ вдоль всего ребра. Примените метод стационарной фазы и получите асимптотики (4.48) и (4.49).

**8.2.** Используйте теорию ЭКВ, изложенную в разделе 7.8, и получите выражение для краевой волны, рассеянной бесконечным прямолинейным ребром идеально проводящего клина. Падающая волна имеет компоненты
$E_z^{inc} = E_{0z} \mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0} \mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi-\varphi_0)}$
и
$H_z^{inc} = H_{0z} \mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0} \mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi-\varphi_0)}$,
где $0 \le \varphi_0 \le \alpha - \pi$. Интегрируйте ЭКВ вдоль всего ребра. Примените метод стационарной фазы и получите асимптотики (4.48) и (4.49).

**8.3.** Используйте теорию ЭКВ, изложенную в разделе 7.5, и получите выражение для краевой волны $u_{s,h}^{(1)}$, рассеянной круглым плоским диском (рис. 6.6). Падающая акустическая волна задана формулой
$u^{inc} = u_0 \mathrm{e}^{ikz}$.
Рассмотрите рассеяние на акустически мягком и жестком дисках. Интегрируйте ЭКВ вдоль всего ребра диска.

- Получите фокальные асимптотики для полей $u_{s,h}^{(1)}$. Сравните их с выражениями (6.81) и (6.82).
- Примените к интегралам метод стационарной фазы и получите лучевые асимптотики. Сравните их с выражениями (6.84) и (6.85).

**8.4.** Используйте теорию ЭКВ, изложенную в разделе 7.8, и получите выражение для краевой волны $E_x^{(1)}$, рассеянной на идеально проводящем диске (рис. 6.6). Падающая электромагнитная волна задана формулой
$E_x^{inc} = E_{0x} \mathrm{e}^{ikz}$.
Интегрируйте ЭКВ вдоль всего ребра.

- Получите фокальные асимптотики для поля $E_x^{(1)}$.
- Примените к интегралу метод стационарной фазы и получите лучевую асимптотику для поля в плоскости $x = 0$. Сравните ее с выражением (6.84).

**8.5.** Используйте теорию ЭКВ, изложенную в разделе 7.8, и получите выражение для краевой волны $u_{s,h}^{(1)}$, рассеянной на эллиптическом диске ($y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$). Падающая акустическая волна задана формулой
$u^{inc} = u_0 \mathrm{e}^{ikz}$.
Рассмотрите рассеяние на акустически мягком и жестком дисках. Интегрируйте ЭКВ вдоль всего ребра диска.

- Получите фокальные асимптотики для полей $u_{s,h}^{(1)}$. Сравните их с выражениями (6.81) и (6.82).
- Примените к интегралу метод стационарной фазы и получите лучевые асимптотики для поля в плоскости $x = 0$. Сравните их с выражениями (6.84) и (6.85).

**8.6.** Используйте теорию ЭКВ, изложенную в разделе 7.8, и получите выражение для краевой волны $E_x^{(1)}$, рассеянной на идеально проводящем эллиптическом диске ($y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$). Падающая электромагнитная волна задана формулой

$$E_x^{inc} = E_{0x}\mathrm{e}^{ikz}.$$

Интегрируйте ЭКВ вдоль всего ребра.

- Получите фокальную асимптотику для поля $E_x^{(1)}$.
- Примените к интегралу метод стационарной фазы и получите лучевую асимптотику для поля в плоскости $x = 0$. Сравните ее с выражением (6.84).

**8.7.** Покажите, что каустическая асимптотика (8.56) для акустических волн трансформируется в лучевую асимптотику (8.41) при условии $k^{2/3}\mu \gg 1$.

**8.8.** Используйте каустическую асимптотику (8.66) для электромагнитных волн. Примените аппроксимации (8.64), (8.65) для функций Эйри. Получите лучевую асимптотику типа (8.41) при условии $k^{2/3}\mu \gg 1$.

# Глава 9

# Многократная дифракция краевых волн: скользящее падение и дифракция волн с нулем диаграммы направленности (*slope diffraction*)

## 9.1. Постановка задачи и библиография

Очевидно, что теория, развитая в предыдущих главах, может быть использована для исследования многократной дифракции на телах, разнесенных в пространстве.

Однако два особых случая нуждаются в дополнительном исследовании.

Первый случай касается скользящего падения краевых волн на акустически жесткие *плоские* пластины. В развитой выше асимптотической теории падающая волна аппроксимируется эквивалентной плоской волной. Но плоская волна не испытывает дифракции на бесконечно тонкой пластине при скользящем падении по следующей причине. Когда эта волна распространяется параллельно пластине, ее фазовый и амплитудный фронты перпендикулярны пластине. Следовательно, такое падающее поле является постоянной величиной в направлении, нормальном к пластине, и автоматически удовлетворяет граничному условию $du/dn = 0$ на поверхности пластины. Такая волна «не видит» пластину и распространяется так, как будто перед ней находится свободное пространство без пластины. Поэтому согласно развитой выше теории, дифракционное поле в этом случае равно нулю. Однако в процессе многократной дифракции каждая дифракционная волна не является плоской. Если ее нормальная производная отлична от нуля на пластине, то такая волна испытывает дифракцию, встречая на своем пути пластину. Такая «*скользящая*» дифракция изучается в разделе 9.2.

Второй случай, который также нуждается в специальном исследовании, встречается тогда, когда ребро на рассеивающем теле оказывается в нуле диаграммы направленности падающей волны. Это есть так называемый случай *slope diffraction*. Данный термин имеет следующее происхождение. Английское слово «slope» означает наклон и указывает на то, что касательная к функции $f(x)$ в ее нуле имеет наклон под углом $\theta$ к оси $x$, $df/dx = \mathrm{tg}\theta$. В зависимости от порядка нуля диаграммы направленности падающей волны различают порядок *slope diffraction.* Здесь мы рассматриваем наиболее важный случай дифракции первого порядка, когда первая производная падающей волны отлична от нуля. Такая ситуация встречается, например, в зеркальных антеннах, когда стараются понизить уровень боковых лепестков в диаграмме излучения, а также в процессе многократной дифракции между отдельными телами, или между различными частями одного тела. К сожалению, в русском языке отсутствует краткий и содержательный термин, эквивалентный понятию *slope diffraction,* поэтому мы будем использовать его в дальнейшем без перевода.

Явление *slope diffraction* изучалось многими авторами. Уфимцев (1958, 1962) получил равномерные асимптотики для вторичных краевых волн, возникающих при такой дифракции на плоских экранах (лента, диск). Карп и Келлер (1961) вывели для этих волн неравномерные асимптотики. Mentzer et al. (1975) опубликовали равномерные асимптотики, аналогичные тем, которые были получены ранее Уфимцевым (1958). Спектральная теория дифракции (Rahmat-Samii and Mitra, 1978) также позволяет исследовать *slope diffraction*. В частном случае, в задаче о дифракции на полуплоскости, Boersma и Rahmat-Samii (1980) анализировали это явление в рамках двух известных обобщений ГТД [*uniform asymptotic theory* (UAT) и *uniform theory of diffraction* (UTD)]. Pathak (1988) предложил общую теорию (UTD) для *slope diffraction* на клине. Общая теория *slope diffraction* для электромагнитных волн, основанная на концепции ЭКВ, разработана в статьях (Ufimtsev, 1991; Ufimtsev and Rahmat-Samii, 1995). Аналогичная теория для *скользящей* и *slope* дифракции была ранее развита в работах (Ufimtsev, 1989, 1991). Теория, представленная ниже, основана на статьях (Ufimtsev, 1989; Ufimtsev, 1991; Ufimtsev and Rahmat-Samii, 1995).

## 9.2. Дифракция скользящих волн

> Следующее соотношение эквивалентности существует между акустическими и электромагнитными дифракционными лучами, возникающими при скользящей дифракции на пластине $S_1$ (рис. 9.1):
>
> $$u_h = H_t, \text{ если } \quad \frac{\partial u^{inc}(\zeta)}{\partial n} = \frac{\partial H_t^{inc}(\zeta)}{\partial n}$$
>
> на рассеивающем ребре $L_1$. Здесь $\hat{t}$ есть касательная к ребру $L_1$ и $\hat{n}$ есть нормаль к пластине $S_1$ в точке дифракциии $\zeta$.

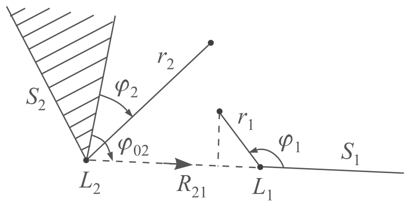


**Рис. 9.1.** К задаче о многократной дифракции. Ребро $L_2$ находится в плоскости, содержащей пластину $S_1$ с ребром $L_1$. Ребро $L_1$ перпендикулярно к плоскости рисунка в точке его пересечения с этой плоскостью. Ребро $L_2$ пересекает плоскость рисунка под наклонным углом. Линия $R_{21}$ показывает дифракционный луч, приходящий от $L_2$ к $L_1$. Репродукция из статьи (Ufimtsev, 1989) с разрешения журнала *Journal of Acoustical Society of America*

### 9.2.1. Акустические волны

Рисунок 9.1 показывает конфигурацию, подходящую для изучения как *скользящей* дифракции, так и *slope* дифракции. Здесь имеются два акустически жестких тела с ребрами $L_1$ и $L_2$. Одно из них является плоской пластиной $S_1$. Граничные условия $du/dn = 0$ выполняются на поверхностях $S_1$ и $S_2$. Ребро $L_2$ находится в плоскости, содержащей пластину $S_1$. Не более, чем один дифракционный луч приходит в каждую точку на ребре $L_1$ ($L_2$) от ребра $L_2$ ($L_1$).

Предполагается, что имеется внешний источник, который облучает оба рассеивающих ребра. Первичная волна, возникшая при дифракции на ребре $L_2$, распространяется к ребру $L_1$ и испытывает скользящую дифракцию на пластине $S_1$. Это явление изучается в данном разделе. Первичная волна, возникшая при дифракции на ребре $L_1$, имеет нуль в направлении к ребру $L_2$, где она испытывает *slope diffraction*. Это явление рассматривается в разделе 9.3.

Предположим, что волна

$$u_2^{inc} = v_2(R_2, \varphi_2, \varphi_{02})\mathrm{e}^{ikR_2} \tag{9.1}$$

распространяется от ребра $L_2$ и испытывает дифракцию на пластине $S_1$. Эта волна имеет лучевую структуру типа (8.29). Рассмотрим два первых члена ее ряда Тейлора в окрестности скользящего направления $\varphi_2 = \varphi_{02}$:

$$u_2^{inc} = v_2(R_2, \varphi_{02}, \varphi_{02})\mathrm{e}^{ikR_2} + \frac{\partial v_2(R_2, \varphi_{02}, \varphi_{02})}{\partial \varphi_2}(\varphi_2 - \varphi_{02})\mathrm{e}^{ikR_2} + \ldots \tag{9.2}$$

Здесь первый член представляет волну, которая не испытывает дифракцию на пластине $S_1$, поскольку ее нормальная производная равна нулю $[\partial v_2(R_2, \varphi_{02}, \varphi_{02})/\partial\varphi_2 = \partial(\mathrm{const})/\partial\varphi_2 = 0]$. Следовательно, ту часть падающей волны, которая испытывает дифракцию на пластине, можно аппроксимировать волной

$$\frac{\partial v_2(R_2, \varphi_{02}, \varphi_{02})}{\partial \varphi_2}(\varphi_2 - \varphi_{02})\mathrm{e}^{ikR_2}, \tag{9.3}$$

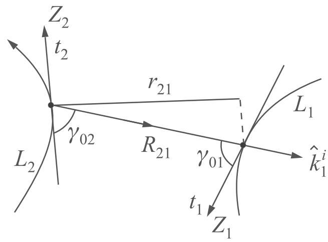


**Рис. 9.2.** Краевая волна, возникающая на ребре $L_2$, распространяется в направлении $\hat{k}_1^i = \nabla R_{21}$ и испытывает дифракцию на ребре $L_1$. Единичные векторы $\hat{t}_1$ и $\hat{t}_2$ являются касательными к ребрам $L_1$ и $L_2$. Репродукция из статьи (Ufimtsev, 1989) с разрешения журнала *Journal of Acoustical Society of America*

которая имеет нуль в скользящем направлении. Таким образом, скользящая дифракция падающей волны (9.1) фактически представляет собой частный случай *slope diffraction*.

Волну (9.3) можно аппроксимировать эквивалентной канонической волной

$$\boxed{\begin{aligned} u_2^{eq} &= u_{02}\frac{\partial}{\partial\varphi_{01}}\mathrm{e}^{-ikz_1\cos\gamma_{01}}\mathrm{e}^{-ikr_1\sin\gamma_{01}\cos(\varphi_1-\varphi_{01})}\Big|_{\varphi_{01}=\pi} = \\ &= u_{02}ikr_1\sin\gamma_{01}\sin\varphi_1\mathrm{e}^{-ikz_1\cos\gamma_{01}}\mathrm{e}^{ikr_1\sin\gamma_{01}\cos\varphi_1}, \qquad (9.4)\end{aligned}}$$

полученной путем дифференцирования плоской волны. Величины $r_1$, $\varphi_1$, $z_1$ являются координатами точки наблюдения в полярной системе координат с ее началом в точке дифракции на ребре $L_1$ (рис. 9.1). Угол $\gamma_{01}$ показан на рис. 9.2, где $\hat{k}_1^i = \nabla R_{21}$.

Амплитуда $u_{02}$ эквивалентной канонической волны находится из равенства нормальных производных реальной и эквивалентной падающих волн в точке дифракции $z_1 = r_1 = 0$:

$$\frac{1}{R_{21}\sin\gamma_{02}}\frac{\partial v_2(R_2,\varphi_2,\varphi_{02})}{\partial\varphi_2}\mathrm{e}^{ikR_2}\Bigg|_{R_2=R_{21},\,\varphi_2=\varphi_{02}} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial u_2^{eq}}{\partial\varphi_1}\Bigg|_{z_1=r_1=0,\ \varphi_1=\pi.} \qquad (9.5)$$

Согласно этому уравнению,

$$u_{02} = -\frac{1}{ikR_{21}\sin\gamma_{01}\sin\gamma_{02}}\frac{\partial v_2(R_{21},\varphi_2,\varphi_{02})}{\partial\varphi_2}\mathrm{e}^{ikR_{21}} \text{ при } \varphi_2 = \varphi_{02} \qquad (9.6)$$

или

$$u_{02} = w_{02}\mathrm{e}^{ikR_{21}}, \qquad (9.7)$$

где

$$w_{02} = -\frac{1}{ikR_{21}\sin\gamma_{01}\sin\gamma_{02}} \frac{\partial v_2(R_{21},\varphi_2,\varphi_{02})}{\partial\varphi_2}\bigg|_{\varphi_2=\varphi_{02}}. \tag{9.8}$$

Заметим теперь, что уравнение Гельмгольца, описывающее волновое поле, и граничные условия для идеально отражающих тел допускают дифференцирование по параметру $\varphi_{01}$, поскольку он не входит ни в коэффициенты уравнения, ни в граничные условия. Это означает, что производная по этому параметру от любого решения граничной задачи для уравнения Гельмгольца также является решением граничной задачи для этого уравнения, но, разумеется, уже с другим источником волнового поля. В этом можно убедиться, обращаясь, например, к точному решению задачи о дифракции на клине, представленному в главе 2. Действительно, легко видеть, что производные по параметру $\varphi_{01}$ от решений (2.27), (2.28) и (2.40), (2.41) удовлетворяют как уравнению Гельмгольца, так и граничным условиям.

В главе 7 мы определили краевые волны, возникающие при дифракции плоской волны (7.2). Падающая волна (9.4) является производной от плоской волны (7.2). Следовательно, дифракцинное поле, возбуждаемое волной (9.4), можно определить дифференцированием краевых волн, найденных в главе 7, если мы заменим там величину $u^{inc}(\zeta)$ на $u_{02} = w_{02}\exp(ikR_{21})$. Прежде чем осуществить эту процедуру, сделаем еще одно замечание.

Падающая волна, распространяющаяся под скользящим углом к пластине, создает одинаковые рассеивающие источники $j_h^{(0)} = 2u^{inc}$ на обеих сторонах пластины. Согласно формуле (1.10) поле, излучаемое источниками с одной стороны пластины, полностью погашается полем, излучаемым такими же источниками с другой стороны пластины. Следовательно, в этом частном случае скользящего падения на пластину, поле $u_h^{(0)}$ равно нулю и $u_h^{(1)} \equiv u_h^{(t)}$.

В связи со сделанными змечаниями, элементарную краевую волну, возбуждаемую на ребре $L_1$, можно найти дифференцированием выражения (7.97) с одновременной заменой величины $u^{inc}(\zeta)$ на $w_{02}(\zeta)\exp(ikR_{21})$:

$$du_h^{(t)} = \frac{d\zeta}{2\pi} w_{02}(\zeta) \frac{\partial}{\partial\varphi_{01}} F_h^{(t)}(\zeta,\hat{m})\bigg|_{\varphi_{01}=\pi} \cdot \frac{e^{ik[R_1(\zeta)+R_{21}(\zeta)]}}{R_1(\zeta)}. \tag{9.9}$$

Дифракционная волна, расходящаяся от всего ребра, определяется соответственно интегралом

$$u_h^{(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{L_1} w_{02}(\zeta) \frac{\partial}{\partial\varphi_{01}} F_h^{(t)}(\zeta,\hat{m})\bigg|_{\varphi_{01}=\pi} \cdot \frac{e^{ik[R_1(\zeta)+R_{21}(\zeta)]}}{R_1(\zeta)} d\zeta. \tag{9.10}$$

Лучевая асимптотика этого поля находится методом стационарной фазы, описанным в разделе 8.1. Мы опускаем все детали вычислений и приводим окончательный результат:

$$\boxed{u_h^{(t)} = w_{02}(\zeta_{st})\frac{1}{\sqrt{R_1(1+R_1/\rho_1)}}\frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sin\gamma_{01}\sqrt{2\pi k}}\frac{\partial g(\varphi_1,\varphi_{01},\alpha_1)}{\partial\varphi_{01}}\mathrm{e}^{ik(R_1+R_{21})}\bigg|_{\varphi_{01}=\pi,} \qquad (9.11)}$$

где $\alpha_1 = 2\pi$, $\sqrt{R_1(1+R_1/\rho_1)}>0$, если $(1+R_1/\rho_1)>0$, и $\sqrt{R_1(1+R_1/\rho_1)}=$ $=i\left|\sqrt{R_1(1+R_1/\rho_1)}\right|$, если $(1+R_1/\rho_1)<0$. Здесь все координаты и переменные параметры являются функциями стационарной точки $\zeta_{st}$, например, $\gamma_{01}(\zeta_{st})$, $\alpha_1(\zeta_{st})$, $\varphi_1(\zeta_{st})$. Каустический параметр $\rho_1(\zeta_{st})$ определяется согласно формуле (8.23):

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\sin\gamma_{01}}\left(\frac{d\gamma_{01}}{d\zeta}-\frac{\hat{k}_1^s\cdot\hat{\nu}_1}{a_1\sin\gamma_{01}}\right), \qquad (9.12)$$

где единичный вектор

$$\hat{\nu}_1 = a_1\frac{d\hat{t}_1}{d\zeta} \qquad (9.13)$$

есть главная нормаль к ребру $L_1$ и $a_1$ есть радиус кривизны этого ребра в стационарной точке $\zeta_{st}$. Единичный вектор $\hat{k}_1^s$ показывает направление дифракционных лучей (9.11), которые образуют дифракционный конус. В соответствии с формулой (8.7) этот вектор определяется уравнением

$$\hat{k}^s\cdot\hat{t}_1=\hat{k}_1^i\cdot\hat{t}_1=-\cos\gamma_{01}. \qquad (9.14)$$

Асимптотическое выражение (9.11) может быть также записано в форме (8.13):

$$u_h^{(t)}\approx w_{02}(\zeta_{st})\frac{\partial g(\varphi_1,\varphi_{01},\alpha)}{\partial\varphi_{01}}\frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k\Phi''(\zeta_{st})}}\frac{\mathrm{e}^{ik(R_1+R_{21})}}{R_1}, \qquad (9.15)$$

где $\Phi(\zeta_{st}) = R_{21}(\zeta_{st}) + R_1(\zeta_{st})$. Заметим, что вычислять величину $\Phi''(\zeta)=d^2\Phi/d\zeta^2$ легче, чем каустический параметр $\rho_1(\zeta)$ в выражении (9.11).

Следует иметь в виду, что аппроксимации (9.11) и (9.15) представляют собой неравномерные асимптотики. Они сингулярны в направлениях $\varphi_1 = 0,\ 2\pi$, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_{01}}g(\varphi_1,\varphi_{01},\alpha_1)\bigg|_{\varphi_{01}=\pi}=-\frac{1}{2}\frac{\cos\dfrac{\varphi_1}{2}}{\sin^2\dfrac{\varphi_1}{2}}\to\infty \quad \text{при } \varphi_1\to 0,\ 2\pi. \qquad (9.16)$$

Эта сингулярность является следствием сингулярности функции $g(\varphi_1,\varphi_{01},\alpha_1)$ в направлениях $\varphi_1=\pi\pm\varphi_0$.

Следует также отметить, что согласно формуле (9.8) волны (9.11) и (9.15), возникающие при скользящей дифракции (*slope diffraction*), по своей величине на порядок $(1/kR_{21})$ меньше по сравнению с волной (8.29), образующейся при обычной дифракции на ребре.

### 9.2.2. Электромагнитные волны

Задача о скользящей дифракции электромагнитных волн была исследована ранее в статье (Ufimtsev, 1991). Ее решение находится таким же способом, который был использован выше в случае дифракции акустических волн. Предположим, что краевая волна, распространяющаяся от ребра $L_2$ к ребру $L_1$, поляризована перпендикулярно к пластине $S_1$ ($\vec{E}_2^{tot} \perp S_1$), а ее магнитный вектор параллелен этой пластине и определяется выражением

$$H_{2z_1}^{tot} = v_2(R_2, \varphi_2, \varphi_{02})\mathrm{e}^{ikR_2}. \tag{9.17}$$

В окрестности ребра $L_1$ эта волна аппроксимируется эквивалентной волной, описываемой формулой (9.4), где следует положить $u_2^{eq} = H_{2z_1}^{eq}$. Величина $u_{02}$ в формуле (9.4) определяется выражением (9.6). Теперь эквивалентную волну можно записать в виде

$$H_{2z_1}^{eq} = w_{02}\mathrm{e}^{ikR_{21}}, \tag{9.18}$$

где величина $w_{02}$ определяется выражением (9.8). Элементарная краевая волна, возникающая на ребре $L_1$, находится дифференцированием выражений (7.135), (7.136), в которых следует положить $E_{0t} = 0$ и $H_{0t} = w_{02}\exp(ikR_{21})$.

Интегрируя ЭКВ вдоль ребра $L_1$, получим полную волну, дифрагированную на этом ребре:

$$\vec{E}_{21}^{(t)} = \frac{1}{2\pi} Z_0 \int_{L_1} w_{02}(\zeta)\mathrm{e}^{ikR_{21}} \left[ \left. \frac{\partial \vec{G}(\zeta)}{\partial \varphi_{01}} \right|_{\varphi_{01}=\pi} \right] \frac{\mathrm{e}^{ikR_1}}{R_1} d\zeta_1, \tag{9.19}$$

$$\vec{H}_{21}^{(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} w_{02}(\zeta)\mathrm{e}^{ikR_{21}} \left[ \nabla R_1 \times \left. \frac{\partial \vec{G}(\zeta)}{\partial \varphi_{01}} \right|_{\varphi_{01}=\pi} \right] \frac{\mathrm{e}^{ikR_1}}{R_1} d\zeta_1. \tag{9.20}$$

Лучевая асимптотика этой волны находится методом стационарной фазы и определяется следующими выражениями:

$$\vec{E}_{21}^{(t)} = \hat{e}_{\varphi_1} Z_0 \frac{w_{02}(\zeta_{st})}{\sin^2 \gamma_{01}} \frac{\partial g(\varphi_1, \pi, \alpha_1)}{\partial \varphi_{01}} \frac{\mathrm{e}^{ik(R_1 + R_{21}) + i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k R_1 (1 + R_1/\rho_1)}}, \tag{9.21}$$

$$\vec{H}_{21}^{(t)} = [\nabla R_1 \times \vec{E}^{(t)}]/Z_0, \tag{9.22}$$

где $\hat{e}_{\varphi_1}$ есть единичный вектор, связанный с полярным углом $\varphi_1$ (рис. 9.1). Следовательно, в первом асимптотическом приближении,

$$E_{\varphi_1}^{(t)} = -Z_0 H_{\vartheta_1} = Z_0 \frac{w_{02}(\zeta_{st})}{\sin^2\gamma_{01}} \frac{\partial g(\varphi_1, \pi, \alpha_1)}{\partial \varphi_{01}} \frac{\mathrm{e}^{ik(R_1+R_{21})+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k R_1(1+R_1/\rho_1)}}. \quad (9.23)$$

Каустический параметр $\rho_1$ определяется формулой (9.12). Согласно выражению (7.149),

$$H_{\vartheta_1}^{(t)} = -H_{t_1}^{(t)}/\sin\gamma_{01} \quad (9.24)$$

и, следовательно,

$$H_{t_1}^{(t)} = w_{02}(\zeta_{st}) \frac{1}{\sin\gamma_{01}} \frac{\partial g(\varphi_1, \pi, \alpha_1)}{\partial \varphi_{01}} \frac{\mathrm{e}^{ik(R_1+R_{21})+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k R_1(1+R_1/\rho_1)}}. \quad (9.25)$$

Эта лучевая асимптотика для касательной компоненты магнитного вектора полностью совпадает с асимптотикой (9.11), найденной выше для акустических волн. Таким образом, между акустическими и электромагнитными дифракционными лучами, возникающими при скользящей дифракции, существует следующее соотношение эквивалентности:

$$H_t = u_h, \text{ если } \frac{\partial H_t^{inc}}{\partial n} = \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \text{ на рассеивающем ребре } L_1. \quad (9.26)$$

## 9.3. Дифракция волн с нулем диаграммы направленности (*slope diffraction*)

Геометрия задачи изображена на рис. 9.1.

Между акустическими и электромагнитными дифракционными лучами, возникающими в результате *slope diffraction* на ребре $L_2$ (рис. 9.1), существует следующее соотношение эквивалентности:

$$u_h = H_t, \text{ если } \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} = \frac{\partial H_t^{inc}}{\partial n} \text{ в точке дифракции на ребре } L_2.$$

Здесь $\hat{t}$ есть касательная к ребру $L_2$ и $\hat{n}$ есть нормаль к пластине $S_1$.

### 9.3.1. Акустические волны

Предположим, что внешняя волна

$$u^{ext} = u_0 \mathrm{e}^{ik\phi_0} \quad (9.27)$$

при дифракции на на ребре $L_1$ создает волну типа (8.29):

$$u_{1h}^{inc} = v_1(R_1, \varphi_1, \varphi_{01})\mathrm{e}^{ikR_1} =$$
$$= u_0 \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sin\gamma_0\sqrt{2\pi k}} \frac{1}{\sqrt{R_1(1+R_1/\rho_1)}} g(\varphi_1, \varphi_{01}, \alpha_1)\mathrm{e}^{ikR_1}, \qquad (9.28)$$

где $\gamma_0 = \pi - \gamma_{01}$, $\cos\gamma_{01} = \hat{t}_1 \cdot \nabla\phi_0$ и угол $\gamma_{01}$ показан на рис. 9.2. Эта волна падает на ребро $L_2$ и испытывает там дифракцию. Поэтому мы называем ее падающей волной и обозначаем символом $u_{1h}^{inc}$. Функция $g(\varphi_1, \varphi_{01}, \alpha_1)$ определяется выражением (2.64), в котором следует положить $\alpha_1 = 2\pi$ и $n = 2$. Очевидно, что эта функция имеет нуль в направлении $\varphi_1 = \pi$ к ребру $L_2$.

Таким образом, в данном случае происходит явление *slope diffraction* волны (9.28) на ребре $L_2$. Чтобы исследовать это явление, мы аппроксимируем падающую волну эквивалентной волной

$$u_1^{eq} = u_{01} \frac{\partial}{\partial\varphi_{02}} \mathrm{e}^{ikz_2\cos\gamma_{02}} \mathrm{e}^{-ikr_2\sin\gamma_{02}\cos(\varphi_2-\varphi_{02})} =$$
$$= -u_{01} ikr_2 \sin\gamma_{02} \sin(\varphi_2 - \varphi_{02}) \mathrm{e}^{ikz_2\cos\gamma_{02}} \mathrm{e}^{-ikr_2\sin\gamma_{02}\cos(\varphi_2-\varphi_{02})}. \qquad (9.29)$$

Угол $\gamma_{02}$ показан на рис. 9.2. Амплитуда этой волны находится из условия

$$\left.\frac{1}{r_2}\frac{\partial u_1^{eq}}{\partial\varphi_2}\right|_{z_2=r_2=0,\ \varphi_2=\varphi_{02}} = \left.\frac{1}{R_1\sin\gamma_{01}}\frac{\partial u_{1h}}{\partial\varphi_1}\right|_{R_1=R_{21},\ \varphi_1=\pi} \qquad (9.30)$$

и равна

$$u_{01} = -\frac{1}{ikR_{21}\sin\gamma_{01}\sin\gamma_{02}} \left.\frac{\partial v_1(R_1, \varphi_1, \varphi_{0_1})}{\partial\varphi_1}\mathrm{e}^{ikR_{21}}\right|_{R_1=R_{21},\ \varphi_1=\pi}, \qquad (9.31)$$

или

$$u_{01} = w_{01}\mathrm{e}^{ikR_{21}}, \qquad (9.32)$$

где

$$w_{01} = -\frac{1}{ikR_{21}\sin\gamma_{01}\sin\gamma_{02}} \left.\frac{\partial v_1(R_{21}, \varphi_1, \varphi_{01})}{\partial\varphi_1}\right|_{\varphi_1=\pi}. \qquad (9.33)$$

Согласно рецепту из раздела 9.2, элементарные краевые волны, возникающие на ребре $L_2$, определяются путем дифференцирования выражений (7.90), (7.97) по параметру $\varphi_{02}$ с одновременной заменой $u^{inc}(\zeta)$ на величину (9.32):

$$du_h^{(1)} = \frac{d\zeta}{2\pi} w_{01}(\zeta) \frac{\partial}{\partial\varphi_{02}} F_h^{(1)}(\zeta) \frac{\mathrm{e}^{ik[R_2(\zeta)+R_{21}(\zeta)]}}{R_2(\zeta)}, \qquad (9.34)$$

$$du_h^{(t)} = \frac{d\zeta}{2\pi} w_{01}(\zeta) \frac{\partial}{\partial\varphi_{02}} F_h^{(t)}(\zeta) \frac{\mathrm{e}^{ik[R_2(\zeta)+R_{21}(\zeta)]}}{R_2(\zeta)}. \qquad (9.35)$$

Напомним, что величины $du_h^{(1)}$ и $du_h^{(t)}$ суть ЭКВ, излучаемые соответственно неравномерными ($j_h^{(1)}$) и полными ($j_h^{(t)} = j_h^{(0)} + j_h^{(1)}$) поверхностными источниками.

Дифракционные волны, создаваемые совместно всеми ЭКВ, описываются интегралами

$$u_h^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_2} w_{01}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\varphi_{02}}F_h^{(1)}(\zeta)\frac{\mathrm{e}^{ik[R_2(\zeta)+R_{21}(\zeta)]}}{R_2(\zeta)}d\zeta, \tag{9.36}$$

$$u_h^{(t)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_2} w_{01}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\varphi_{02}}F_h^{(t)}(\zeta)\frac{\mathrm{e}^{ik[R_2(\zeta)+R_{21}(\zeta)]}}{R_2(\zeta)}d\zeta. \tag{9.37}$$

Лучевые асимптотики этих волн находятся методом стационарной фазы и имеют вид:

$$\boxed{\begin{aligned} u_h^{(1)} &= w_{01}(\zeta_{st})\frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sin\gamma_{02}\sqrt{2\pi k}}\frac{\partial g^{(1)}(\varphi_2,\varphi_{02},\alpha_2)}{\partial\varphi_{02}}\frac{\mathrm{e}^{ik(R_2+R_{21})}}{\sqrt{R_2(1+R_2/\rho_2)}}, && (9.38)\\ u_h^{(t)} &= w_{01}(\zeta_{st})\frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sin\gamma_{02}\sqrt{2\pi k}}\frac{\partial g(\varphi_2,\varphi_{02},\alpha_2)}{\partial\varphi_{02}}\frac{\mathrm{e}^{ik(R_2+R_{21})}}{\sqrt{R_2(1+R_2/\rho_2)}}. && (9.39)\end{aligned}}$$

Здесь каустический параметр $\rho_2$ определяется в соответствии с формулой (8.23) и равен

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\sin\gamma_{02}}\left(-\frac{d\gamma_{02}}{d\zeta} - \frac{\hat{k}_2^s\cdot\hat{\nu}_2}{a_2\sin\gamma_{02}}\right), \tag{9.40}$$

где $\hat{\nu}_2 = a_2 d\hat{t}/d\zeta$ есть главная нормаль к ребру $L_2$ с радиусом $a_2$ в стационарной точке $\zeta_{st}$. Эти лучи распространяются в направлении вектора $\hat{k}_2^s$, который определяется уравнением $\hat{k}_2^s\cdot\hat{t}_2 = \hat{k}_2^i\cdot\hat{t}_2 = \cos\gamma_{02}$. Функция $g^{(1)}(\varphi_2,\ \varphi_{02},\ \alpha_2)$ описывается формулой (4.15).

Отметим, что выражение (9.40) отличается от аналогичного выражения (9.12) знаком перед первым членом в круглых скобках. Это отличие есть следствие формул (8.16) и (8.17), которые были использованы при выводе выражений (9.12) и (9.40). Согласно формулам (8.16) и (8.17), первые члены в выражениях (9.12) и (9.40) являются результатом дифференцирования скалярных произведений $\hat{k}_1^i\cdot\hat{t}_1 = -\cos\gamma_{01}$ и $\hat{k}_2^i\cdot\hat{t}_2 = \cos\gamma_{02}$. Здесь вектор $\hat{k}_1^i$ ($\hat{k}_2^i$) указывает направление луча, приходящего к ребру $L_1$ ($L_2$), а углы $\gamma_{01}$ и $\gamma_{02}$ показаны на рис. 9.2.

Так же, как и в случае *скользящей* дифракции, рассмотренной в разделе 9.2, амплитуда волн (9.38), (9.39), возникающих при *slope diffraction*, на порядок ($1/kR_{21}$) меньше амплитуды волн (8.13), (8.29), возникающих при обычной дифракции. Этот результат не вызывает удивления, поскольку интенсивность волны, падающей на край в случае *slope diffraction*, значительно меньше.

### 9.3.2. Электромагнитные волны

Теория, изложенная здесь, является обобщением результатов предыдущего раздела на случай электромагнитных волн. Ранее она была опубликована в работе (Ufimtsev, 1991).

Краевая волна, распространяющаяся от ребра $L_1$ к ребру $L_2$, может рассматриваться как сумма двух волн с двумя ортогональными поляризациями. Одна из них содержит компоненту

$$H_{t_1}^{(t)} = v_1(R_1, \varphi_1, \varphi_{01}) e^{ikR_1} \tag{9.41}$$

с функцией $v_1$ из формулы (9.28), имеющей нуль в направлении к ребру $L_2$. Ясно, что дифракция этой волны на ребре $L_2$ может быть исследована таким же путем, как и дифракция акустической волны (9.27). Следуя ему, мы аппроксимируем ее эквивалентной волной

$$H_{1t_2}^{eq} = w_{01} e^{ikR_{21}} \frac{\partial}{\partial \varphi_{02}} e^{ikz_2 \cos\gamma_{02}} e^{-ikr_2 \sin\gamma_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_{02})} \tag{9.42}$$

с функцией $w_{01}$, заданной выражением (9.33). Элементарные краевые волны, возникающие на ребре $L_2$, находятся дифференцированием выраженй (7.135) и (7.136) (по параметру $\varphi_{02}$), где следует положить $E_{0t} = 0$ и $H_{0t}\exp(ik\phi^i) = w_{01}\exp(ikR_{21})$.

После этого полную краевую волну от ребра $L_2$ можно представить в виде интегралов

$$\vec{E}^{(t)} = \frac{Z_0}{2\pi} \int\limits_{L_2} w_{01}(\zeta) \frac{\partial \vec{G}^{(t)}(\zeta)}{\partial \varphi_{02}} \frac{e^{ik[R_2(\zeta) + R_{21}(\zeta)]}}{R_2(\zeta)} d\zeta, \tag{9.43}$$

$$\vec{H}^{(t)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_2} w_{01}(\zeta) \left[ \nabla R_2 \times \frac{\partial \vec{G}^{(t)}(\zeta)}{\partial \varphi_{02}} \right] \frac{e^{ik[R_2(\zeta) + R_{21}(\zeta)]}}{R_2(\zeta)} d\zeta. \tag{9.44}$$

Асимптотическая оценка этих интегралов приводит к лучевым асимптотикам:

$$E_{\varphi_2}^{(t)} = Z_0 w_{01}(\zeta_{st}) \frac{e^{i\pi/4}}{\sin^2\gamma_{02}\sqrt{2\pi k}} \frac{\partial g(\varphi_2, \varphi_{02}, \alpha_2)}{\partial \varphi_{02}} \frac{e^{ik(R_2 + R_{21})}}{\sqrt{R_2(1 + R_2/\rho_2)}}, \tag{9.45}$$

$$H_{\theta_2}^{(t)} = -w_{01}(\zeta_{st}) \frac{e^{i\pi/4}}{\sin^2\gamma_{02}\sqrt{2\pi k}} \frac{\partial g(\varphi_2, \varphi_{02}, \alpha_2)}{\partial \varphi_{02}} \frac{e^{ik(R_2 + R_{21})}}{\sqrt{R_2(1 + R_2/\rho_2)}}. \tag{9.46}$$

Так как $H_{\vartheta_2}^{(t)} = -H_{t_2}^{(t)} / \sin\gamma_{02}$, то из формулы (9.46) следует выражение

$$\boxed{H_{t_2}^{(t)} \approx w_{01}(\zeta_{st}) \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sin\gamma_{02}\sqrt{2\pi k}} \frac{\partial g(\varphi_2, \varphi_{02}, \alpha_2)}{\partial \varphi_{02}} \frac{\mathrm{e}^{ik(R_2+R_{21})}}{\sqrt{R_2(1+R_2/\rho_2)}}, \qquad (9.47)}$$

которое полностью совпадает с (9.39) и позволяет сформулировать следующее соотношение:

$$\boxed{u_h = H_t, \text{ если } \frac{\partial}{\partial n} u_h^{inc} = \frac{\partial}{\partial n} H_t^{inc} \text{ на рассеивающем ребре в точке } \zeta = \zeta_{st}.}$$

Оно устанавливает эквивалентность между акустическими и электромагнитными лучами, возникающими при дифракции волны с нулем диаграммы направленности (т. е. при *slope diffraction*).

## 9.4. Дифракция волн с нулем диаграммы направленности: общий случай *slope diffraction*

Между акустическими и электромагнитными дифракционными лучами, возникающими при *slope diffraction*, существуют следующие соотношения эквивалентности:

$$u_s = E_t, \text{ если } \frac{\partial}{\partial n} u^{inc}(\zeta_{st}) = \frac{\partial}{\partial n} E_t^{inc}(\zeta_{st}),$$

$$u_h = H_t, \text{ если } \frac{\partial}{\partial n} u^{inc}(\zeta_{st}) = \frac{\partial}{\partial n} H_t^{inc}(\zeta_{st}),$$

где $\zeta_{st}$ есть точка дифракции на рассеивающем ребре и $\hat{t}$ есть касательная к ребру.

### 9.4.1. Акустические волны

Предположим, что волна

$$u^{inc} = v_0 e^{ikR_Q} \qquad (9.49)$$

с лучевой структурой типа (8.29) испытывает дифракцию на идеально отражающем объекте, имеющем излом/ребро $L$. Объект может быть акустически мягким или жестким, т. е. на его поверхности выполняются граничные условия $u = 0$ или $du/dn = 0$. Геометрия задачи иллюстрируется на рис. 9.3 и 9.4. Точка $Q$ принадлежит к каустике падающей волны.

Предполагается, что $u^{inc} = 0$ и $\partial u^{inc}/\partial n \neq 0$ в точке $\zeta$ на рассеивающем ребре $L$. Возникающая здесь дифракционная волна вычисляется таким же мето-

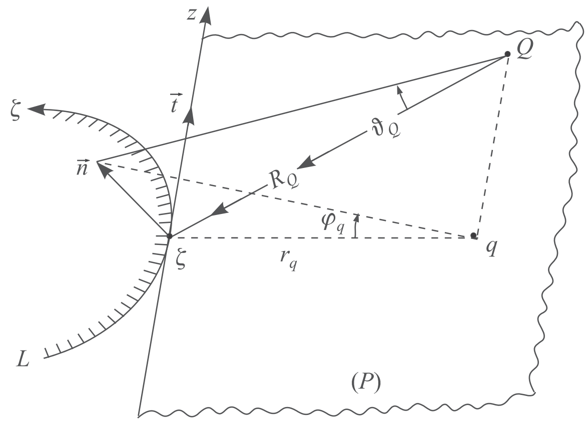


**Рис. 9.3.** Плоскость $P$ содержит касательную $\hat{t}$ к ребру $L$, падающий луч $Q\zeta$ и точку $q$, которая является проекцией точки $Q$ на перпендикуляр $r_q$ к касательной $\hat{t}$. Вектор $\hat{n}$ есть единичная нормаль к плоскости $P$. Репродукция из статьи (Ufimtsev and Rahmat-Samii, 1995) с разрешения журнала *Annales des Telecommunications*

дом, как и в разделах 9.2 и 9.3. Падающая волна (9.49) аппроксимируется эквивалентной волной

$$u^{eq} = u_0 \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0} \mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi-\varphi_0)} =$$

$$= -u_0 ikr \sin\gamma_0 \sin(\varphi-\varphi_0) \mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0} \mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi-\varphi_0)}. \quad (9.50)$$

Полярные координаты $r$, $\varphi$, $z$ показаны на рис. 9.4. Угол $\varphi$ измеряется от освещенной грани ребра ($0 \le \varphi \le \alpha$, $0 \le \varphi_0 < \pi$).

Амплитуда эквивалентной волны находится из условия

$$\frac{\partial u^{eq}}{\partial n} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u^{eq}}{\partial \varphi}\bigg|_{z=r=0,\ \varphi=\varphi_0} = \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} = \frac{1}{R_Q}\frac{\partial u^{inc}}{\partial \vartheta_Q}\bigg|_{\vartheta_Q=0} = \frac{1}{r_q}\frac{\partial u^{inc}}{\partial \varphi_q}\bigg|_{\varphi_q=0} \quad (9.51)$$

и равна

$$u_0 = \frac{\mathrm{e}^{ikR_Q}}{ikR_Q \sin\gamma_0} \frac{\partial v_0}{\partial \vartheta_Q}\bigg|_{\vartheta_Q=0}. \quad (9.52)$$

Представим ее в форме

$$u_0 = w_0 \mathrm{e}^{ikR_Q}, \quad (9.53)$$

где

$$w_0 = \frac{1}{ikR_Q \sin\gamma_0} \frac{\partial v_0}{\partial \vartheta_Q}\bigg|_{\vartheta_Q=0}. \quad (9.54)$$

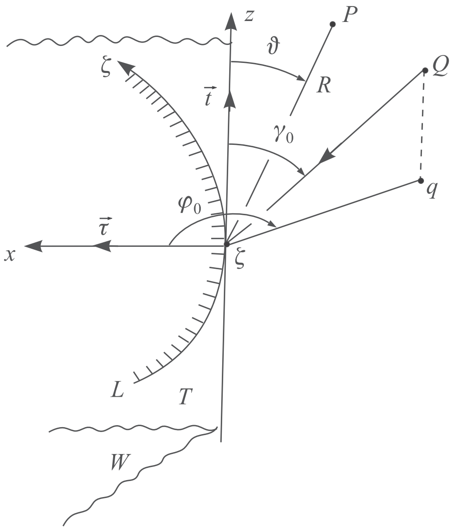


**Рис. 9.4.** Здесь $W$ есть клин, касательный к ребру $L$, плоскость $T$ есть грань клина $W$, вектор $\vec{\tau}$ перпендикулярен к касательной $\vec{t}$ и принадлежит к плоскости $T$. Угол $\gamma_0$ указывает направление падающего луча. Точка $P(R, \vartheta, \varphi)$ является точкой наблюдения. Репродукция из статьи (Ufimtsev and Rahmat-Samii, 1995) с разрешения журнала *Annales des Telecommunications*

Согласно рецепту, предложенному в разделе 9.2, дифракционные волны, возникающие на ребре $L$, находятся дифференцированием выражений (8.3) и (8.4) по параметру $\varphi_0$ с одновременной заменой в них сомножителя $u^{inc}(\zeta) = u_0(\zeta)\exp(ik\phi^i(\zeta))$ на величину (9.53). В результате, краевые волны, излучаемые *неравномерными* поверхностными источниками $j^{(1)}_{s,h}$, определяются формулами

$$u_s^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_L w_0(\zeta)\frac{\partial F_s^{(1)}(\zeta)}{\partial\varphi_0}\frac{\mathrm{e}^{ik[R(\zeta)+R_Q(\zeta)]}}{R}\,d\zeta, \tag{9.55}$$

$$u_h^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_L w_0(\zeta)\frac{\partial F_h^{(1)}(\zeta)}{\partial\varphi_0}\frac{\mathrm{e}^{ik[R(\zeta)+R_Q(\zeta)]}}{R}\,d\zeta, \tag{9.56}$$

а краевые волны, излучаемые полными источниками $j^{(t)}_{s,h} = j^{(0)}_{s,h} + j^{(1)}_{s,h}$, описываются выражениями

$$u_s^{(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_L w_0(\zeta)\frac{\partial F_s^{(t)}(\zeta)}{\partial\varphi_0}\frac{\mathrm{e}^{ik[R(\zeta)+R_Q(\zeta)]}}{R}\,d\zeta, \tag{9.57}$$

$$u_h^{(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_L w_0(\zeta)\frac{\partial F_h^{(t)}(\zeta)}{\partial\varphi_0}\frac{\mathrm{e}^{ik[R(\zeta)+R_Q(\zeta)]}}{R}\,d\zeta. \tag{9.58}$$

Их лучевые асимптотики могут быть получены с помощью метода стационарной фазы, идея которого уже объяснялась ранее, например, в разделе 8.1. Однако мы получим их гораздо быстрее путем дифференцирования лучевых асимптотик (8.12), (8.13) и (8.29) с одновременной заменой в них члена $u^i(\zeta_{st})$ на величину (9.53):

$$\begin{bmatrix} u_s^{(1)} \\ u_h^{(1)} \end{bmatrix} = w_0(\zeta_{st}) \frac{1}{\sqrt{R(1+R/\rho)}} \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sin\gamma_0\sqrt{2\pi k}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha)}{\partial\varphi_0} \\ \dfrac{\partial g^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha)}{\partial\varphi_0} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{ik(R+R_Q)}, \qquad (9.59)$$

$$\begin{bmatrix} u_s^{(t)} \\ u_h^{(t)} \end{bmatrix} = w_0(\zeta_{st}) \frac{1}{\sqrt{R(1+R/\rho)}} \frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sin\gamma_0\sqrt{2\pi k}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\varphi,\varphi_0,\alpha)}{\partial\varphi_0} \\ \dfrac{\partial g(\varphi,\varphi_0,\alpha)}{\partial\varphi_0} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{ik(R+R_Q)}, \qquad (9.60)$$

где стационарная точка $\zeta_{st}$ находится из уравнения (8.7), а каустический параметр $\rho = \rho(\zeta_{st})$ определяется по формуле (8.23).

В силу формулы (9.54) амплитуда полей, возникающих при *slope diffraction,* на порядок $(1/kR_Q)$ меньше по сравнению с обычными дифракционными волнами (8.12), (8.13) и (8.29).

Заметим, что интегральные выражения (9.55–9.58) позволяют также вычислять дифракционные поля в окрестностях каустик и фокусов дифракционных лучей.

### 9.4.2. Электромагнитные волны

Запишем падающую электромагнитную волну в виде

$$\vec{E}^{inc} = \vec{E}_0^i \mathrm{e}^{ikR_Q}, \quad \vec{H}^{inc} = \vec{H}_0^i \mathrm{e}^{ikR_Q}, \qquad (9.61)$$

где

$$\vec{E}_0^i = Z_0[\vec{H}_0^i \times \nabla R_Q]. \qquad (9.62)$$

Предположим, что в направлении к ребру $L$ идеально проводящего рассеивающего тела величины $\vec{E}_0^i$, $\vec{H}_0$ равны нулю, но их первые нормальные производные отличны от нуля:

$$\vec{E}_0 = 0, \quad \vec{H}_0^i = 0 \ \text{ на } L, \qquad (9.63)$$

$$\frac{\partial \vec{E}_0^i}{\partial n} = \frac{1}{R_Q}\frac{\partial \vec{E}_0^i}{\partial \vartheta_Q} \neq 0, \quad \frac{\partial \vec{H}_0^i}{\partial n} = \frac{1}{R_Q}\frac{\partial \vec{H}_0^i}{\partial \vartheta_Q} \neq 0 \ \text{ на } L. \qquad (9.64)$$

Как и в предыдущем разделе, реальную падающую волну в окрестности ребра $L$ аппроксимируем эквивалентной волной с компонентами

$$E_t^{eq} = -ikrE_{0t}^{eq} \sin\gamma_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0} \mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi-\varphi_0)}, \tag{9.65}$$

$$H_t^{eq} = -ikrH_{0t}^{eq} \sin\gamma_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0} \mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi-\varphi_0)}, \tag{9.66}$$

которые являются производными обычной плоской волны по углу падения $\varphi_0$. Амплитуда эквивалентной волны находится из требования, чтобы нормальные производные этой волны (на рассеивающем ребре) были равны производным реальной падающей волны:

$$\frac{\partial E_t^{eq}}{\partial n} = -\frac{\partial E_t^{eq}}{r\partial\varphi}\bigg|_{z=r=0,\ \varphi=\varphi_0} = ik\sin\gamma_0 E_{0t}^{eq} = \frac{\partial E_{0t}^{i}}{R_Q\partial\vartheta_Q}\mathrm{e}^{ikR_Q}\bigg|_{\vartheta_Q=0}, \tag{9.67}$$

$$\frac{\partial H_t^{eq}}{\partial n} = -\frac{\partial H_t^{eq}}{r\partial\varphi}\bigg|_{z=r=0,\ \varphi=\varphi_0} = ik\sin\gamma_0 H_{0t}^{eq} = \frac{\partial H_{0t}^{i}}{R_Q\partial\vartheta_Q}\mathrm{e}^{R_Q}\bigg|_{\vartheta_Q=0}. \tag{9.68}$$

Следовательно,

$$E_{0t}^{eq} = \frac{1}{ikR_Q\sin\gamma_0}\mathrm{e}^{ikR_Q}\frac{\partial E_{0t}^{i}}{\partial\vartheta_Q}\bigg|_{\vartheta_Q=0}, \tag{9.69}$$

$$H_{0t}^{eq} = \frac{1}{ikR_Q\sin\gamma_0}\mathrm{e}^{ikR_Q}\frac{\partial H_{0t}^{i}}{\partial\vartheta_Q}\bigg|_{\vartheta_Q=0}. \tag{9.70}$$

Как и в предыдущем разделе, элементарные краевые волны, возникающие на ребре $L$, находятся дифференцированием выражений (7.135), (7.136) по углу $\varphi_0$ с одновременной заменой в них функций $E_{0t}(\zeta)$, $H_{0t}(\zeta)$ величинами (9.69) и (9.70):

$$d\vec{E}^{(t)} = \frac{d\zeta}{2\pi}\vec{\mathcal{E}}^{(t)}(\zeta)\mathrm{e}^{ikR_Q(\zeta)}\frac{\mathrm{e}^{ikR(\zeta)}}{R(\zeta)}, \tag{9.71}$$

$$d\vec{H}^{(t)} = [\nabla R \times d\vec{E}^{(t)}]/Z_0, \tag{9.72}$$

где

$$\vec{\mathcal{E}}^{(t)}(\zeta) = E_{0t}^{eq}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\varphi_0}\vec{F}^{(t)}(\zeta,\vartheta,\varphi) + Z_0 H_{0t}^{eq}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\varphi_0}\vec{G}^{(t)}(\zeta,\vartheta,\varphi). \tag{9.73}$$

Полная краевая волна, создаваемая всеми ЭКВ, определяется интегралами:

$$\vec{E}^{(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_L \vec{\mathcal{E}}^{(t)}(\zeta) \frac{e^{ik[R(\zeta)+R_Q(\zeta)]}}{R(\zeta)} d\zeta, \tag{9.74}$$

$$\vec{H}^{(t)} = \frac{1}{2\pi Z_0} \int_L [\nabla R \times \vec{\mathcal{E}}^{(t)}(\zeta)] \frac{e^{ik[R(\zeta)+R_Q(\zeta)]}}{R(\zeta)} d\zeta. \tag{9.75}$$

Лучевые асимптотики этой волны находятся методом стационарной фазы и определяются следующими выражениями:

$$\boxed{E_\varphi^{(t)} = -Z_0 H_\vartheta^{(t)} = Z_0 H_{0t}^{eq} \frac{e^{i\pi/4}}{\sin^2\gamma_0 \sqrt{2\pi k}} \frac{\partial g(\varphi, \varphi_0, \alpha)}{\partial \varphi_0} \frac{e^{ik(R+R_Q)}}{\sqrt{R(1+R/\rho)}},} \tag{9.76}$$

$$\boxed{E_\vartheta^{(t)} = Z_0 H_\varphi^{(t)} = -E_{0t}^{eq} \frac{e^{i\pi/4}}{\sin^2\gamma_0 \sqrt{2\pi k}} \frac{\partial f(\varphi, \varphi_0, \alpha)}{\partial \varphi_0} \frac{e^{ik(R+R_Q)}}{\sqrt{R(1+R/\rho)}},} \tag{9.77}$$

где для всех функций переменной $\zeta$ берутся их значения в точке стационарной фазы $\zeta_{st}$. В соответствии с соотношениями (7.149), эти выражения могут быть записаны в терминах компонент поля, параллельных касательной $\hat{t}(\zeta_{st})$,

$$E_t^{(t)} = E_{0t}^{eq} \frac{e^{i\pi/4}}{\sin\gamma_0 \sqrt{2\pi k}} \frac{\partial f(\varphi, \varphi_0, \alpha)}{\partial \varphi_0} \frac{e^{ik(R+R_Q)}}{\sqrt{R(1+R/\rho)}}, \tag{9.78}$$

$$H_t^{(t)} = H_{0t}^{eq} \frac{e^{i\pi/4}}{\sin\gamma_0 \sqrt{2\pi k}} \frac{\partial g(\varphi, \varphi_0, \alpha)}{\partial \varphi_0} \frac{e^{ik(R+R_Q)}}{\sqrt{R(1+R/\rho)}}. \tag{9.79}$$

Их сравнение с выражениями (9.60) позволяет сформулировать следующие соотношения эквивалентности между акустическими и электромагнитными дифракционными лучами, возникающими вследствие дифракции на рассеивающем ребре $L$:

$$\boxed{u_s = E_t, \text{ если } \frac{\partial}{\partial n} u^{inc}(\zeta_{st}) = \frac{\partial}{\partial n} E_t^{inc}(\zeta_{st}),} \tag{9.80}$$

$$\boxed{u_h = H_t, \text{ если } \frac{\partial}{\partial n} u^{inc}(\zeta_{st}) = \frac{\partial}{\partial n} H_t^{inc}(\zeta_{st}),} \tag{9.81}$$

где $\zeta_{st}$ есть точка дифракции на рассеивающем ребре.

# Задачи

**9.1.** Используйте интегральное выражение (9.10) для акустического поля, возникающего при скользящей дифракции. Примените к нему метод стационарной фазы и получите лучевую аппроксимацию (9.11).

**9.2.** Используйте интегральные выражения (9.19) и (9.20) для электромагнитного поля, возникающего при скользящей дифракции. Примените к ним метод стационарной фазы и получите лучевые асимптотики (9.23) и (9.25). Сравните эти асимптотики с выражением (9.11) и сформулируйте соотношение эквивалентности между акустическими и электромагнитными дифракционными лучами.

**9.3.** Используйте интегральные выражения (9.36) и (9.37) для акустических волн, возникающих при *slope diffraction*. Примените к ним метод стационарной фазы и получите лучевые асимптотики (9.38) и (9.39).

**9.4.** Используйте интегральные выражения (9.43) и (9.44) для электромагнитного поля, возникающего вследствие *slope diffraction.* Примените к ним метод стационарной фазы и получите лучевые асимптотики (9.45), (9.46) и (9.47). Сравните выражения (9.47) и (9.39). Сформулируйте соотношение эквивалентности между акустическими и электромагнитными дифракционными лучами.

# Глава 10

# Дифракционное взаимодействие краев на линейчатой поверхности

Здесь между акустическими и электромагитными краевыми волнами, распространяющимися в направлениях дифракционного конуса, имеют место следующие соотношения эквивалентности:

$$u_h = H_t, \quad \text{если} \quad u_h^{inc}(\zeta) = H_t^{inc}(\zeta),$$

$$u_s = E_t, \quad \text{если} \quad \frac{\partial u_s^{inc}(\zeta)}{\partial n} = \frac{\partial E_t^{inc}(\zeta)}{\partial n},$$

где $\hat{t}$ ($\hat{n}$) есть касательная (нормаль) к ребру в точке дифракциии $\zeta$. Эти соотношения вместе с формулой (7.149) позволяют определить все компоненты поля электромагнитных волн, зная аналогичные выражения для акустических волн.

Рассмотрим дифракционное взаимодействие двух краев с общей гранью. Если эта грань искривлена, то краевая волна испытывает дифракцию уже на ее пути к другому краю. В общем случае эта задача не поддается аналитическому решению. Однако возмущающим влиянием грани можно пренебречь в частном случае, который иллюстрируется на рис. 10.1. Обшая грань $S$ у ребер $L_1$ и $L$ есть линейчатая поверхность, образующие которой совпадают с краевыми дифракционными лучами, возникающими на крае $L_1$ и распространяющимися к краю $L$. Предполагается, что плоскость, касательная к грани, не изменяет своей ориентации вдоль образующей. Плоская грань является частным случаем такой поверхности. Поэтому развитая ниже теория применима также и в этом случае.

Данная глава основана на статьях (Ufimtsev, 1989; Ufimtsev, 1991).

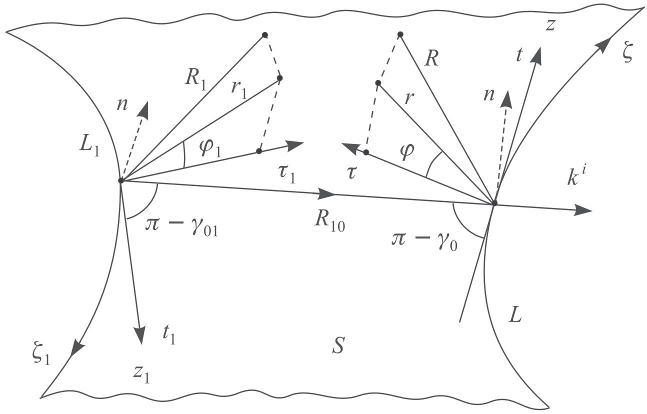


**Рис. 10.1.** Элемент линейчатой поверхности $S$ с двумя краями/ребрами $L_1$ и $L$. Единичные векторы $\hat{t}_1$, $\hat{t}$ касательны к ребрам. Единичные векторы $\hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}$ касательны к поверхности $S$ и перпендикулярны к векторам $\hat{t}_1$, $\hat{t}$ соответственно. Величины $r_1$, $\varphi_1$, $z_1$ и $r$, $\varphi$, $z$ являются локальными полярными координатами. Единичный вектор $\hat{n}$ есть нормаль к плоскости, касательной к $S$ и содержащей образующую $R_{10}$, а также векторы $\hat{t}_1$, $\hat{t}$ и $\hat{\tau}_1$, $\hat{\tau}$. Репродукция из статьи (Ufimtsev, 1989) с разрешения журнала *Journal of Acoustical Society of America*

## 10.1. Дифракция на акустически жесткой поверхности

Предположим, что краевая волна, распространяющаяся от ребра, имеет лучевую структуру и задана в форме (8.29),

$$u_{1h}(R_1,\varphi_1)=u_{01}g(\varphi_1,\varphi_{01},\alpha_1)\frac{\mathrm{e}^{ikR_1+i\pi/4}}{\sin\gamma_{01}\sqrt{2\pi kR_1(1+R_1/\rho_1)}}, \qquad (10.1)$$

где функция $g(\varphi_1, \varphi_{01}, \alpha_1)$ определяется формулой (2.64). В окрестности ребра $L$ эту волну можно аппроксимировать двумя сливающимися плоскими волнами

$$\lim_{\varphi_0\to 0}\frac{1}{2}u_{1h}(R_{10},0)\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}[\mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi-\varphi_0)}+\mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi+\varphi_0)}]. \qquad (10.2)$$

Здесь первое слагаемое играет роль падающей волны в канонической задаче о дифракции на клине, решение которой было использовано в главе 8 при выводе асимптотических выражений (8.3) и (8.4). Следовательно, заменяя функцию $u_0(\zeta)\exp(ik\phi^i)$ в формуле (8.4) на величину $(1/2)u_{1h}(R_{10}, 0)$, мы получим асимптотическое выражение

$$u_h^{(t)}=\frac{1}{4\pi}\int_L u_{1h}(\zeta)F_h^{(t)}(\zeta,\hat{m})\frac{\mathrm{e}^{ikR(\zeta)}}{R(\zeta)}d\zeta,\ \text{где}\ u_{1h}(\zeta)=u_{1h}(R_{10},0) \qquad (10.3)$$

для краевой волны, излучаемой *полным* рассеивающим источником $j_h^{(t)} = j_h^{(0)} + j_h^{(1)}$. Следует отметить, что в этом частном случае равномерная компонента источника равна $j_h^{(0)} = u_{1h}(R_1, 0)$.

Лучевая асимптотика этой волны может быть найдена методом стационарной фазы. Однако ее можно получить непосредственно из выражения (8.29), если мы заменим там множитель $u^{inc}(\zeta_{st})$ на величину $(1/2)u_{1h}(\zeta_{st})$ и положим $\varphi_0 = 0$:

$$\boxed{u_h^{(t)} = \frac{1}{2} u_{1h}(\zeta_{st}) g(\varphi, 0, \alpha) \frac{e^{ikR + i\pi/4}}{\sin\gamma_0 \sqrt{2\pi kR(1 + R/\rho)}},} \tag{10.4}$$

где

$$u_{1h}(\zeta_{st}) = u_{01} g(0, \varphi_{01}, \alpha_1) \frac{e^{ikR_{10} + i\pi/4}}{\sin\gamma_{01}\sqrt{2\pi kR_{10}(1 + R_{10}/\rho_1)}}. \tag{10.5}$$

Здесь символы $\alpha_1$, $\alpha$ обозначают внешние углы между гранями ребер $L_1$, $L$ ($\pi \le \alpha_1 \le 2\pi$, $\pi \le \alpha \le 2\pi$), а каустические параметры $\rho_1$, $\rho$ определяются согласно формуле (8.23).

Лучевая асимптотика (10.4) неприменима вблизи границы тени ($\varphi = \pi$) падающей волны (10.1), где она становится сингулярной. Вместо неравномерной асимптотики (10.4) можно предложить следующую эвристическую аппроксимацию для поля (10.3), которая справедлива во всех направлениях вдоль дифракционного конуса ($\vartheta = \pi - \gamma_0$, $0 \le \varphi \le \alpha$):

$$\boxed{u_h^{(t)} = u_{1h}(R_{10}, 0) D_h(\chi, \varphi, \gamma_0) \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R(1 + R/\rho)}},} \tag{10.6}$$

где

$$D_h(\chi, \varphi, \gamma_0) = \sqrt{\frac{\chi}{\sin\gamma_0}}\, v(k\chi\sin\gamma_0, \varphi) e^{-ik\chi\sin\gamma_0}, \tag{10.7}$$

$$v(s, \varphi) = \frac{\frac{2}{N}\sin\frac{\pi}{N}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\pi}{N} - \cos\frac{\varphi}{N}} e^{-is\cos\varphi} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sqrt{2s}\cos\frac{\varphi}{2}}^{\operatorname{sign}(\cos\frac{\varphi}{2})\infty} e^{it^2}\, dt. \tag{10.8}$$

Здесь параметры $N$ и $\chi$ определяются выражениями

$$N = \alpha/\pi, \quad \chi = \frac{R_{10} R}{R_{10} + R}\sin\gamma_0. \tag{10.9}$$

В соответствии с соотношениями

$$v(s, \pi \mp 0) = \mp\frac{1}{2} e^{is} \tag{10.10}$$

и

$$\rho = \rho_1 + R_{10} \text{ для } \varphi = \pi, \tag{10.11}$$

дифракционное поле $u^{(t)}$ имеет разрыв на границе тени ( $\varphi_1 = 0, \varphi = \pi$):

$$u_h^{(t)} = \mp \frac{1}{2} u_{1h} (R_{10} + R, 0). \tag{10.12}$$

Однако сумма дифракционного поля и падаюшей волны $(u_h^{(t)} + u_{1h})$ здесь непрерывна. Можно также показать, что нормальная производная этой суммы также непрерывна на границе тени.

Используя асимптотическую аппроксимацию

$$\int_x^{[\mathrm{sign}(x)]\infty} \mathrm{e}^{it^2} dt \sim -\frac{\mathrm{e}^{ix^2}}{2ix} \text{ при } |x| \gg 1, \tag{10.13}$$

нетрудно проверить, что равномерная асимптотика (10.6) переходит в лучевую асимптотику (10.4) вдали от границы тени, где выполняется неравенство $\sqrt{2k\chi \sin\gamma_0}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| \gg 1.$

## 10.2. Дифракция на акустически мягкой поверхности

Геометрия задачи показана на рис. 10.1. Предположим, что краевая волна

$$u_{1s}(R_1, \varphi_1) = u_{01} f(\varphi_1, \varphi_{01}, \alpha_1) \frac{\mathrm{e}^{ikR_1 + i\pi/4}}{\sin\gamma_{01}\sqrt{2\pi k R_1 (1 + R_1/\rho_1)}} \tag{10.14}$$

распространяется от края $L_1$ вдоль грани $S$ и в силу граничных условий равна нулю в направлении $\varphi_1 = 0$ к ребру $L$. Напомним, что $f(0, \varphi_{01}, \alpha_1) = 0$ согласно определению этой функции (2.62). Следовательно, дифракция волны (10.14) на ребре $L$ есть частный случай явления *slope diffraction* и может быть исследована, как показано ниже, с помощью слегка модифицированного метода, изложенного в главе 9.

Сначала мы заметим, что подходящая волна, эквивалентная падающей волне (10.14), может быть сконструирована из комбинации падающей и отраженной плоских волн

$$\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}[\mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi-\varphi_0)} - \mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi+\varphi_0)}], \tag{10.15}$$

бегущих вдоль грани. А именно,

$$u_s^{eq} = u_0^{eq}\mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}\frac{\partial}{\partial\varphi_0}[\mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi-\varphi_0)} - \mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos(\varphi+\varphi_0)}]\Big|_{\varphi_0=0} =$$

$$= -u_0^{eq}\, 2ikr\sin\gamma_0 \sin\varphi\, \mathrm{e}^{-ikz\cos\gamma_0}\mathrm{e}^{-ikr\sin\gamma_0\cos\varphi}. \tag{10.16}$$

Амплитудный фактор $u_0^{eq}$ эквивалентной волны определяется требованием

$$\frac{1}{R_{10}\sin\gamma_{01}}\frac{\partial u_{1s}(R_1,\varphi_1)}{\partial\varphi_1}\bigg|_{R_1=R_{10},\,\varphi_1=0}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_s^{eq}}{\partial\varphi}\bigg|_{z=r=0,\,\varphi=0} \tag{10.17}$$

и равен

$$u_0^{eq}=-\frac{1}{i2kR_{10}\sin\gamma_{01}\sin\gamma_0}\frac{\partial u_{1s}(R_1,\varphi_1)}{\partial\varphi_1}\bigg|_{R_1=R_{10},\,\varphi_1=0}. \tag{10.18}$$

Согласно рецепту, предложенному в главе 9, краевая волна, возникающая при *slope diffraction* эквивалентной волны (10.16), находится дифференцированием функции (8.4) с одновременной заменой в ней сомножителя $u_0(\zeta)\exp(ik\phi^i)$ на величину $u_0^{eq}$:

$$u_s^{(t)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_L u_0^{eq}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\varphi_0}F_s^{(t)}(\zeta,\hat{m})\Big|_{\varphi_0=0}\cdot\frac{e^{ikR(\zeta)}}{R(\zeta)}d\zeta\,. \tag{10.19}$$

Лучевая асимптотика этой волны может быть получена методом стационарной фазы или непосредственным дифференцированием выражения (8.29), где следует заменить сомножитель $u^{inc}(\zeta_{st})$ на величину $u_0^{eq}(\zeta_{st})$:

$$u_s^{(t)}=u_0^{eq}(\zeta_{st})\frac{\partial f(\varphi,0,\alpha)}{\partial\varphi_0}\frac{e^{ikR+i\pi/4}}{\sin\gamma_0\sqrt{2\pi kR(1+R/\rho)}}\,. \tag{10.20}$$

Эта асимптотика сингулярна в направлении границы тени ($\varphi=\pi$). Вместо нее можно предложить следующую эвристическую аппроксимацию поля (10.19), которая справедлива для всех направлений вдоль дифракционного конуса ($\vartheta=\pi-\gamma_0$, $0\le\varphi\le\alpha$):

$$\boxed{u_s^{(t)}=\frac{i}{k}\frac{\partial u_{1s}(\zeta_{st})}{\partial n}D_s(\chi,\varphi,\gamma_0)\frac{e^{ikR}}{\sqrt{R(1+R/\rho)}}\,,} \tag{10.21}$$

где

$$\frac{\partial u_{1s}(\zeta_{st})}{\partial n}=\frac{1}{R_{10}\sin\gamma_{01}}\frac{\partial u_{1s}(R_1,\varphi_1)}{\partial\varphi_1}\bigg|_{R_1=R_{10},\,\varphi_1=0}, \tag{10.22}$$

$$D_s(\chi,\varphi,\alpha)=-k\chi\sqrt{\frac{\chi}{\sin\gamma_0}}w(k\chi\sin\gamma_0,\varphi)e^{-ik\chi\sin\gamma_0}, \tag{10.23}$$

$$\chi=\frac{R_{10}R}{R_{10}+R}\sin\gamma_0. \tag{10.24}$$

Здесь

$$w(s,\varphi)=-\frac{2\sqrt{2}}{N^2}\frac{\sin\dfrac{\pi}{N}\sin\dfrac{\varphi}{N}\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{\left(\cos\dfrac{\pi}{N}-\cos\dfrac{\varphi}{N}\right)^2}\mathbb{F}\left(\sqrt{2s}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\mathrm{e}^{i(s-\pi/4)}}{\sqrt{\pi s}}, \tag{10.25}$$

$N=\alpha/\pi$ и

$$\mathbb{F}(x)=1+i2x\mathrm{e}^{-ix^2}\cdot\int\limits_x^{\operatorname{sign}(x)\infty}\mathrm{e}^{it^2}\,dt. \tag{10.26}$$

Для больших значений аргумента, $|\,x\,|\gg 1$,

$$\mathbb{F}(x)\approx\frac{i}{2x^2} \tag{10.27}$$

и

$$w(s,\varphi)\approx-\frac{2}{N^2}\frac{\sin\dfrac{\pi}{N}\sin\dfrac{\varphi}{N}}{\left(\cos\dfrac{\pi}{N}-\cos\dfrac{\varphi}{N}\right)^2}\frac{\mathrm{e}^{i(s+\pi/4)}}{\sqrt{\pi}(2s)^{3/2}}. \tag{10.28}$$

Можно показать, что поле $u_{1s}(R_1,\varphi_1)+u_s^{(t)}$ и его нормальная производная непрерывны на границе тени ($\varphi_1=0$, $\varphi=\pi$). Вдали от этой границы, где $\sqrt{2k\chi\sin\gamma_0}\left|\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|\gg 1$, функция (10.21) переходит в лучевую асимптотику (10.20).

Здесь уместно упомянуть обзорную статью (Molinet, 2005) о возбуждении двумерных краевых волн ползущими волнами и волнами шепчущей галереи, распространяющимися соответственно на выпуклых и вогнутых рассеивающих поверхностях.

## 10.3. Дифракция электромагнитных волн

В общем случае волна, дифрагированная на крае $L_1$, представляет собой сумму двух волн с ортогональными поляризациями, т. е. с компонентами $H_t$ и $E_t$. Поскольку они играют роль волн, падающих на ребро $L$, мы обозначим их как $H_t^{inc}$, $E_t^{inc}$. Волна с компонентой $H_t^{inc}$ может быть представлена в виде (10.1) и, следовательно, ее дифракция на ребре $L$ может быть рассчитана точно так же, как и дифракция волны (10.1). Волна с компонентой $E_t^{inc}$, в свою очередь, может быть представлена в виде волны (10.14) и, следовательно, ее дифракция на ребре $L$ может быть исследована тем же способом, что и дифракция волны (10.14).

Результатом таких вычислений являются следующие лучевые асимптотики:

$$E_{\varphi}^{(t)} = -Z_0 H_{\vartheta}^{(t)} = \frac{1}{2} Z_0 H_t^{inc}(\zeta_{st}) g(\varphi, 0, \alpha) \frac{e^{ikR + i\pi/4}}{\sin^2\gamma_0 \sqrt{2\pi kR(1 + R/\rho)}}, \qquad (10.29)$$

$$E_{\vartheta}^{(t)} = Z_0 H_{\varphi}^{(t)} = -E_t^{eq}(\zeta_{st}) \frac{\partial f(\varphi, 0, \alpha)}{\partial \varphi_0} \frac{e^{ikR + i\pi/4}}{\sin^2\gamma_0 \sqrt{2\pi kR(1 + R/\rho)}}, \qquad (10.30)$$

где

$$H_t^{inc}(\zeta_{st}) = u_{01} g(0, \varphi_{01}, \alpha_1) \frac{e^{ikR_{10} + i\pi/4}}{\sin\gamma_{01} \sqrt{2\pi kR_{10}(1 + R_{10}/\rho_1)}}, \qquad (10.31)$$

$$E_t^{eq}(\zeta_{st}) = -\frac{1}{i2kR_{10} \sin\gamma_{01} \sin\gamma_0} \left. \frac{\partial E_t^{inc}(R_1, \varphi_1)}{\partial \varphi_1} \right|_{R_1 = R_{10}, \varphi_1 = 0}, \qquad (10.32)$$

$$E_t^{inc} = u_{01} f(\varphi_1, \varphi_{0_1}, \alpha_1) \frac{e^{ikR_{10} + i\pi/4}}{\sin\gamma_{01} \sqrt{2\pi kR_{10}(1 + R_{10}/\rho_1)}}. \qquad (10.33)$$

Пользуясь соотношениями (7.149), лучевые асимптотики можно записать в терминах компонент, касательных к ребру $L$ в точке дифракции $\zeta_{st}$:

$$H_t^{(t)} = \frac{1}{2} H_t^{inc}(\zeta_{st}) g(\varphi, 0, \alpha) \frac{e^{ikR + i\pi/4}}{\sin\gamma_0 \sqrt{2\pi kR(1 + R/\rho)}}, \qquad (10.34)$$

$$E_t^{(t)} = E_t^{eq}(\zeta_{st}) \frac{\partial f(\varphi, 0, \alpha)}{\partial \varphi_0} \frac{e^{ikR + i\pi/4}}{\sin\gamma_0 \sqrt{2\pi kR(1 + R/\rho)}}. \qquad (10.35)$$

Их сравнение с асимптотиками (10.4) и (10.20) выявляет такие же соотношения эквивалентности между акустическими и электромагнитными дифракционными лучами, которые были установлены в предыдущих главах:

$$u_h = H_t, \text{ если } u_h^{inc} = H_t^{inc} \text{ в точке дифракции,} \qquad (10.36)$$

$$u_s = E_t, \text{ если } \frac{\partial u_s^{inc}}{\partial n} = \frac{\partial E_t^{inc}}{\partial n} \text{ в точке дифракции.} \qquad (10.37)$$

Равномерные асимптотики для дифракционных волн, справедливые для всех направлений дифракционного конуса ($\vartheta = \pi - \gamma_0$, $0 \le \varphi \le \alpha$), описываются электромагнитными аналогами выражений (10.6) и (10.21):

$$E_{\varphi}^{(t)} = -Z_0 H_{\vartheta}^{(t)} = Z_0 H_t^{inc}(\zeta_{st}) D_h(\chi, \varphi, \gamma_0) \frac{e^{ikR}}{\sin\gamma_0 \sqrt{R(1+R/\rho)}}, \tag{10.38}$$

$$E_{\vartheta}^{(t)} = Z_0 H_{\varphi}^{(t)} = \frac{1}{ik\sin\gamma_0} \frac{\partial E_t^{inc}(\zeta_{st})}{\partial n} D_s(\chi, \varphi, \gamma_0) \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R(1+R/\rho)}}. \tag{10.39}$$

Здесь верхний индекс «$t$» показывает, что эта волна, дифрагированная на ребре $L$, излучается полным поверхностным током $j^{(t)} = j^{(0)} + j^{(1)}$. Вместе с падающей волной, расходящейся от ребра $L_1$, они формируют полное поле. Можно показать, что такое полное поле и его нормальные производные непрерывны на границе падающей волны ($\varphi = \pi$). Вдали от этой границы ($\sqrt{k\chi\sin\gamma_0}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| \gg 1$) равномерные аппроксимации (10.38), (10.39) переходят в лучевые асимптотики (10.29), (10.30).

Асимптотики (10.38), (10.39), записанные в терминах касательных компонент $E_t$ и $H_t$, полностью согласуются с выражениями (10.6), (10.21) и подтверждают соотношения эквивалентности (10.36), (10.37) между акустическими и электромагнитными дифракционными волнами.

## Задачи

**10.1.** Покажите, что поле $u_{1h} + u_h^{(t)}$ акустических волн и его нормальная производная непрерывны на границе тени ($\varphi = \pi$). Функции $u_{1h}$ и $u_h^{(t)}$ определяются формулами (10.1) и (10.6), соответственно.

**10.2.** Покажите, что вдали от границы тени функция (10.6) для акустических волн трансформируется асимптотически в лучевую аппроксимацию (10.4).

**10.3.** Покажите, что поле $u_{1s} + u_s^{(t)}$ акустических волн и его нормальная производная непрерывны на границе тени ($\varphi = \pi$). Функции $u_{1s}$ и $u_s^{(t)}$ опреляются формулами (10.14) и (10.21), соответственно.

**10.4.** Покажите, что вдали от границы тени функция (10.21) для акустических волн трансформируется асимптотически в лучевую аппроксимацию (10.20).

**10.5.** Покажите, что вдали от границы тени ($\varphi = \pi$) функция (10.38) для электромагнитных волн трансформируется асимптотически в лучевую аппроксимацию (10.34).

**10.6.** Покажите, что вдали от границы тени ($\varphi = \pi$) функция (10.39) для электромагнитных волн трансформируется асимптотически в лучевую аппроксимацию (10.35).

Глава 11

# Фокусировка многократных краевых волн при дифракции на выпуклых телах вращения с плоским торцом

Теория, изложенная здесь, основана на статьях (Ufimtsev, 1989; Ufimtsev, 1991; Ufimtsev and Rahmat-Samii, 1995).

## 11.1. Постановка задачи и ее характерные черты

Данная задача иллюстрируется на рис. 11.1, где изображено тело вращения, возбуждаемое осесимметричной падающей волной

$$u^{inc} = u_0 \mathrm{e}^{ik\phi^i}, \tag{11.1}$$

поле которой является постоянной величиной на круговом изломе поверхности тела.

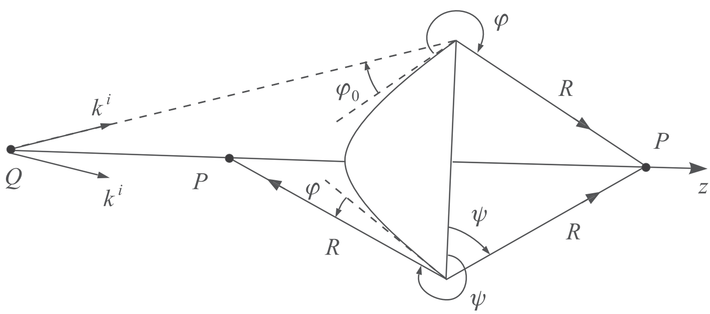


**Рис. 11.1.** Тело вращения, возбуждаемое полем источника $Q$. Краевые дифракционные лучи фокусируются в каждой точке на оси $z$. Репродукция из статьи (Ufimtsev, 1989) с разрешения журнала *Journal of Acoustical Society of America*

Ось симметрии $z$ является фокальной линией для элементарных краевых лучей. По отношению к точке наблюдения $P$ на этой оси каждая точка на ребре является точкой стационарной фазы. Элементарные дифракционные лучи, возникающие на ребре, распространяются от него в направлениях дифракционного конуса, который в данном случае трансформируется в меридиональную плоскость. Поэтому согласно разд. 7.6 и 8.1, диаграммы направленности таких лучей выражаются через функции Зоммерфельда $f$ и $g$. Эти функции определяются формулами (2.62) и (2.64) и описывают поле, излучаемое полными рассеивающими источниками $j_{s,h}^{(t)} = j_{s,h}^{(0)} + j_{s,h}^{(1)}$, которые возбуждаются вблизи ребра. Предметом исследования является анализ дифракционного поля на фокальной оси.

В этой задаче мы пренебрегаем краевыми волнами, возникающими на ребре вследствие дифракции экспоненциально затухающих ползущих волн, которые возбуждаются на выпуклой стороне тела ($z < 0$), и принимаем во внимание только многократную дифракцию краевых волн, распространяющихся вдоль плоского торца. Мы используем здесь обозначение $u_{s,h}^{(m)}$ для многократных краевых волн, где индекс $m = 2, 3, \ldots$ указывает порядок дифракции.

Краевые волны первого порядка, т. е. первичные (*primary*) краевые волны, возбуждаемые непосредственно падающей волной (11.1), описываются интегральным выражением (8.4), где в качестве пути интегрирования $L$ следует выбрать круговое ребро рассеивающего тела. В силу симметрии задачи, подынтегральная функция в (8.4) является постоянной величиной на ребре, и поэтому результат интегрирования очевиден:

$$\left.\begin{matrix} u_s^{pr} \\ u_h^{pr} \end{matrix}\right\} = u_0 \mathrm{e}^{ik\phi^i} \cdot a \begin{bmatrix} f(\varphi, \varphi_0, \alpha) \\ g(\varphi, \varphi_0, \alpha) \end{bmatrix} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \tag{11.2}$$

Здесь латинская буква $a$ обозначает радиус кривизны ребра, а греческая буква $\alpha$ обозначает внешний угол между гранями ребра. Это асимптотическое выражение справедливо для поля в любой точке на фокальной оси вне рассеивающего тела при условии $kR \gg 1$.

Многократные краевые волны $u_{s,h}^{(m)}$ с индексом $m = 2, 3, \ldots$ , которые возникают вследствие дифракции волн, бегущих вдоль плоского торца от его края к противоположному, могут быть найдены с помощью выражений (10.3) и (10.19), где в рассматриваемой задаче функции $F_{s,h}^{(t)}$ трансформируются в функции $f$ и $g$. Для вычисления краевых волн, бегущих вдоль плоского торца, можно использовать лучевые асимптотики (10.4) и (10.20), где следует положить $\gamma_0 = \pi/2$, $R = 2a$ и $\rho = -a$. На своем пути к противоположному краю эти волны пересекают фокальную ось и приобретают фазовый сдвиг, равный $(-\pi/2)$, который является прямым следствием фактора лучевой расходимости, $1/\sqrt{1 + R/a} = 1/\sqrt{1 - 2a/a} = -i$.

Теперь можно приступить к расчету многократных краевых волн.

## 11.2. Многократная дифракция на акустически жестком теле

Согласно формуле (10.3) поле на фокальной оси, создаваемое краевыми волнами порядка $m + 1$, может быть представлено в виде

$$u_h^{(m+1)}(P) = \frac{1}{4\pi} g(\psi,0,\alpha)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\int_L \bar{u}_h^{(m)}(\zeta)d\zeta = \frac{a}{2} g(\psi,0,\alpha)\bar{u}_h^{(m)}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \quad (11.3)$$

Здесь фактор $\bar{u}_h^{(m)}$ обозначает краевую волну порядка $m$, которая распространяется вдоль торца к противоположной точке $\zeta$ на ребре, где она испытывает дифракцию и создает элементарные краевые волны порядка $m + 1$. Другими словами, величина $\bar{u}_h^{(m)}$ есть поле краевой волны порядка $m$ в точке дифракции $\zeta$. Можно показать, что

$$\bar{u}_h^{(1)} \equiv u_h^{pr} = \frac{1}{2} u_0 \mathrm{e}^{ik\phi^i} g(\alpha,\varphi_0,\alpha)\frac{\mathrm{e}^{i(2ka-\pi/4)}}{\sqrt{\pi ka}}, \quad (11.4)$$

$$\bar{u}_h^{(m)} = \bar{u}_h^{(m-1)} g(0,0,\alpha)\frac{\mathrm{e}^{i(2ka-\pi/4)}}{4\sqrt{\pi ka}}, \; m = 2, 3, 4, \dots . \quad (11.5)$$

Согласно этим соотношениям,

$$\bar{u}_h^{(m)} = u_0 \mathrm{e}^{ik\phi^i} 2g(\alpha,\varphi_0,\alpha)[g(0,0,\alpha)]^{m-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{i(2ka-\pi/4)}}{4\sqrt{\pi ka}}\right]^m, \; m = 1, 2, 3, \dots \quad (11.6)$$

Следовательно, полное поле всех краевых волн на фокальной оси равно

$$u_h^{ew}(P) = u_h^{pr}(P) + \sum_{m=2}^{\infty} u_h^{(m)}(P) =$$

$$= u_0 \mathrm{e}^{lk\phi^i} \cdot a\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\left\{g(\varphi,\varphi_0,\alpha) + g(\psi,0,\alpha)g(\alpha,\varphi_0,\alpha)\frac{\mathrm{e}^{i(2ka-\pi/4)}}{4\sqrt{\pi ka}} + \right.$$

$$\left. + g(\psi,0,\alpha)g(\alpha,\varphi_0,\alpha)\sum_{m=3}^{\infty}[g(0,0,\alpha)]^{m-2}\left[\frac{\mathrm{e}^{i(2ka-\pi/4)}}{4\sqrt{\pi ka}}\right]^{m-1}\right\}. \quad (11.7)$$

Здесь ряд является геометрической прогрессией и может быть просуммирован. Слагаемые в этой формуле имеют ясный физический смысл. Первое слагаемое в фигурных скобках относится к первичным краевым волнам, второе слагаемое представляет вторичные краевые волны, а третье слагаемое описывает все многократные волны, начиная с волн третьего порядка.

Полное рассеянное поле на фокальной линии также содержит отраженные лучи (6.187) в области перед рассеивающим телом ($z < 0$) и теневое излучение (6.228) в области тени ($z > 0$). Изложенная аппроксимация рассеянного поля представляет собой *неполное* асимптотическое разложение, поскольку оно включает только *первый член индивидуального* асимптотического разложения для каждой многократной краевой волны. Заметим также, что формула (6.187) представляет только первый член асимптотического разложения для отраженного поля.

Выражение (11.7) позволяет оценить полный поперечник рассеяния. В случае падения плоской волны $u^{inc} = \mathrm{e}^{ikz}$ эта величина определяется формулой

$$\sigma_{h,s} = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}(u_{h,s}^{(t)} \cdot R\mathrm{e}^{-ikR}), \tag{11.8}$$

где $u_{h,s}^{(t)}$ есть полное поле, рассеянное в направлении вперед ($\psi = \pi/2$ на рис. 11.1). Это поле состоит из следующих компонент:

- Теневое излучение, которое эквивалентно полю в приближении физической оптики для данного направления и описывается формулой (6.228), где следует положить $u_0 = 1$.
- Первичные краевые волны, излучаемые *неравномерными* источниками $j_{h,s}^{(1)}$ и описываемые формулами (6.41), (6.42), где следует положить $u_0 = 1$.
- Сумма всех многократных краевых волн, начиная с волн второго порядка.

Подстановка такого полного поля $u_h^{(t)}$ в формулу (11.8) приводит к следующему асимптотическому выражению:

$$\sigma_h = 2\pi a^2 \left\{1 + \frac{2}{ka} g\left(\frac{\pi}{2}, 0, \alpha\right) g(\alpha, \varphi_0, \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} [g(0,0,\alpha)]^{m-1} \frac{\sin[m(2ka - \pi/4)]}{4^m (\pi ka)^{m/2}}\right\}, \tag{11.9}$$

которое является *неполным* в смысле, указанном выше. Заметим, что ряд в формуле (11.9) равен нулю при $2ka - \pi/4 = l\pi$ ($l = 1, 2, 3, \ldots$). В этом случае все поправки к первому слагаемому в формуле (11.9) будут определяться членами второго и более высокого порядка в индивидуальных асимптотических разложениях для многократных краевых волн.

## 11.3. Многократная дифракция на акустически мягком теле

Первичные краевые волны, возбуждаемые падающей волной (11.1), определяются формулой (11.2). Краевые волны высокого порядка возникают вследствие *slope diffraction* волн, бегущих вдоль плоского торца рассеивающего тела. Эти волны определяются на основе выражения (10.19). Результирующая волна порядка $m + 1$, приходящая в точку $P$ на фокальной оси, может быть представлена в виде

$$u_s^{(m+1)}(P) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial f(\psi, 0, \alpha)}{\partial \varphi_0} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \int_L \bar{u}_s^{(m)} d\zeta = a\bar{u}_s^{(m)} \frac{\partial f(\psi, 0, \alpha)}{\partial \varphi_0} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \tag{11.10}$$

Здесь $\bar{u}_s^{(m)}$ есть амплитудный фактор волны, которая эквивалентна краевой волне порядка $m$, приходящей в точку $\zeta$ на ребре от противоположной точки

$\bar{\zeta} = \zeta - \pi a$. Эта величина вычисляется с помощью соотношений (10.18), (10.20), где следует положить $\gamma_0 = \gamma_{01} = \pi/2$, $R = 2a$ и $\rho = -a$. Результатом таких вычислений являются выражения

$$\bar{u}_s^{(1)} = -u_0 e^{ik\phi^i} \frac{\partial f(\alpha, \varphi_0, \alpha)}{\partial \varphi} \frac{e^{i(2ka+\pi/4)}}{8ka\sqrt{\pi ka}}, \tag{11.11}$$

$$\bar{u}_s^{(m)} = \bar{u}_s^{(m-1)} \frac{\partial^2 f(0,0,\alpha)}{\partial \varphi\, \partial \varphi_0} \frac{e^{i(2ka+\pi/4)}}{8ka\sqrt{\pi ka}}, \tag{11.12}$$

или

$$\bar{u}_s^{(m)} = -u_0 e^{ik\phi^i} \frac{\partial f(\alpha, \varphi_0, \alpha)}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial^2 f(0,0,\alpha)}{\partial \varphi\, \partial \varphi_0}\right]^{m-1} \left[\frac{e^{i(2ka+\pi/4)}}{8ka\sqrt{\pi ka}}\right]^m. \tag{11.13}$$

После подстановки этого выражения в формулу (11.10) получаем

$$u_s^{(m+1)}(P) = -u_0 e^{ik\phi^i} \cdot a \frac{e^{ikR}}{R} \times$$
$$\times \frac{\partial f(\psi,0,\alpha)}{\partial \varphi_0} \frac{\partial f(\alpha, \varphi_0, \alpha)}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial^2 f(0,0,\alpha)}{\partial \varphi \partial \varphi_0}\right]^{m-1} \left[\frac{e^{i(2ka+\pi/4)}}{8ka\sqrt{\pi ka}}\right]^m. \tag{11.14}$$

Полное поле всех краевых волн на фокальной оси равно

$$u_s^{ew}(P) = u_s^{pr}(P) + \sum_{m=1}^{\infty} u_s^{(m)}(P) = u_0 e^{ik\phi^i} \cdot a \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ f^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial f(\psi,0,\alpha)}{\partial \varphi_0} \frac{\partial f(\alpha, \varphi_0, \alpha)}{\partial \varphi} \sum_{m=2}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 f(0,0,\alpha)}{\partial \varphi \partial \varphi_0}\right]^{m-2} \left[\frac{e^{i(2ka+\pi/4)}}{8ka\sqrt{\pi ka}}\right]^{m-1} \right\}. \tag{11.15}$$

Ряд в этой формуле есть геометрическая прогрессия.

Теперь мы используем выражение (11.15) для вычисления полного поперечника рассеяния. В случае падения плоской волны $u^{inc} = e^{ikz}$ он определяется согласно формуле (11.8), где

$$u_s^{(t)} = u^{sh} + u_s^{(1)} + \sum_{m=2}^{\infty} u_s^{(m)}. \tag{11.16}$$

Здесь $u^{sh}$ есть теневое излучение (6.228), где следует положить $u_0 = 1$. Величина

$$u_s^{(1)} = a f^{(1)}(\varphi, \varphi_0, \alpha) \frac{e^{ikR}}{R} \tag{11.17}$$

есть первичная краевая волна, излучаемая *неравномерными* источниками $j_s^{(1)}$.

И, наконец, ряд в (11.16) представляет сумму всех краевых волн, начиная с волн второго порядка. Таким образом, полный поперечник рассеяния акустически мягкого тела равен

$$\sigma_s = 2\pi a^2 \left\{ 1 - \frac{2}{ka} \frac{\partial f(\pi/2, 0, \alpha)}{\partial \varphi_0} \frac{\partial f(\alpha, \varphi_0, \alpha)}{\partial \varphi} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial^2 f(0,0,\alpha)}{\partial \varphi \partial \varphi_0} \right]^{m-1} \frac{\sin[m(2ka + \pi/4)]}{(8ka)^m (\pi ka)^{m/2}} \right\}. \quad (11.18)$$

Мы подчеркиваем опять, что аппроксимации (11.15) и (11.18) являются *неполными* асимптотическими разложениями в смысле, указанном в разделе 11.2. Ряд в выражении (11.18) равен нулю для значений $2ka + \pi/4 = l\pi$ ($l = 1, 2, 3, ...$). В этом случае все поправки к первому слагаемому в выражении (11.18) будут определяться членами высших порядков в индивидуальных асимптотических разложениях для каждой многократной краевой волны.

# Задачи

**11.1.** Докажите формулы (11.4–11.6) для первичных и многократных краевых волн, возникающих при рассеянии на акустически жестком рассеивающем теле (рис. 11.1). Объясните все детали, включая каустические параметры, фазовые сдвиги, факторы направленности и амплитудные коэффициенты.

**11.2.** Докажите формулы (11.11–11.13) для первичных и многократных краевых волн, возникающих при рассеянии на акустически мягком рассеивающем теле (рис. 11.1). Объясните все детали, включая каустические параметры, фазовые сдвиги, факторы направленности и амплитудные коэффициенты.

# Глава 12

# Фокусировка многократных краевых волн при дифракции на диске

Теория, иложенная ниже, основана на статьях (Ufimtsev, 1989; Ufimtsev, 1991; Ufimtsev & Rahmat-Samii, 1995). Она представляет собой обобщение методики из предыдущей главы на задачу о дифракции на диске, в которой необходимо принимать во внимание краевые волны, распространяющиеся вдоль обеих граней диска (рис. 12.1). Эта задача усложняется еще тем обстоятельством, что волна, бегущая вдоль одной грани диска, создает при дифракции на его крае волны следующего (более высокого) порядка не только на той же грани, но также и на противоположной грани. Однако решение этой задачи можно облегчить, если учесть симметрию рассеянного поля. Рассмотрим для этого рассеяние на произвольной плоской пластине, расположенной в плоскости $z = 0$. Из формул (1.10) следует, что

$$u_s^{sc}(-z) = u_s^{sc}(z), \quad u_h^{sc}(-z) = -u_h^{sc}(z). \tag{12.1}$$

Здесь первое равенство очевидно, а второе является следствием фактора

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} = \nabla'\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\cdot\hat{n} = -\nabla\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\cdot\hat{n} = -\frac{d}{dr}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}(\nabla r\cdot\hat{n}) = -\frac{d}{dr}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}(\hat{r}\cdot\hat{n}), \tag{12.2}$$

где $\hat{r}(-z)\cdot\hat{n} = -\hat{r}(z)\cdot\hat{n}$.

Геометрия задачи показана на рис. 12.1. Падающая плоская волна задана выражением $u^{inc} = \mathrm{e}^{ikz}$. Рассеянное поле исследуется в точках $P$ на оси $z$, которая является фокальной линией для краевых дифракционных лучей.

## 12.1. Многократная дифракция на акустически жестком диске

Первичные краевые волны, возбуждаемые непосредственно падающей волной, описываются формулой (11.2), где следует положить $u_0\exp(ik\phi^i) = 1$. Вол-

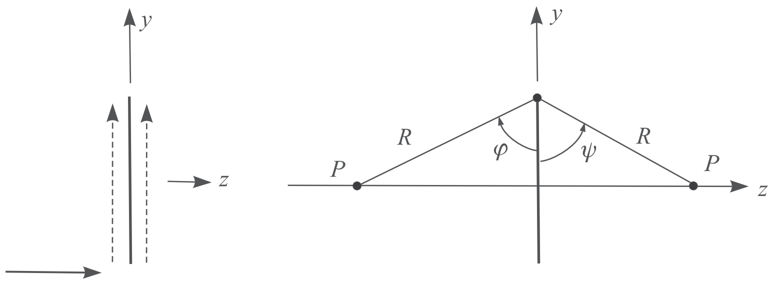


**Рис. 12.1.** Проекции диска на плоскость $yOz$ (сплошные толстые линии) и краевые волны (штриховые линии). Углы $\varphi$ и $\psi = 2\pi - \varphi$ измеряются соответственно от левой и правой сторон диска и определяют направление в точку наблюдения $P$

ны порядка $m + 1$ определяются формулой (11.3), адаптированной к задаче о дифракции на диске,

$$u_h^{(m+1)}(P) = \frac{1}{4\pi}\int_L [\,\overline{u}_l^{(m,t)}(\zeta)g(\varphi,0,\alpha) + \overline{u}_r^{(m,t)}(\zeta)g(\psi,0,\alpha)]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\,d\zeta =$$

$$= \frac{a}{2}[\overline{u}_l^{(m,t)}g(\varphi,0,\alpha) + \overline{u}_r^{(m,t)}g(\psi,0,\alpha)]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \ m = 1, 2, 3, .... \qquad (12.3)$$

Здесь $a$ есть радиус диска, $\psi = 2\pi - \varphi$, $\alpha = 2\pi$. Величина $\overline{u}_l^{(m,t)}$ есть *полное* поле краевой волны порядка $m$, приходящей в точку $\zeta$ на ребре вдоль *левой* грани диска,

$$\overline{u}_l^{(m,t)} = \overline{u}_{ll}^{(m)} + \overline{u}_{rl}^{(m)}. \qquad (12.4)$$

Величина $\overline{u}_{ll}^{(m)}$ обозначает волну порядка $m$ на *левой* стороне диска в точке $\zeta$ на ребре, созданную в противоположной точке ребра $(\zeta - \pi a)$ волной порядка $m - 1$, которая пришла туда по *левой* же стороне диска. Аналогично, величина $\overline{u}_{rl}^{(m)}$ есть волна порядка $m$ на *левой* стороне диска в точке ребра $\zeta$, возникшая при дифракции волны порядка $m - 1$ в противоположной точке на ребре $(\zeta - \pi a)$, пришедшей туда по *правой* стороне диска. С обозначениями такого типа становится ясным физический смысл функции

$$\overline{u}_r^{(m,t)} = \overline{u}_{lr}^{(m)} + \overline{u}_{rr}^{(m)}. \qquad (12.5)$$

Согласно соотношениям (12.1),

$$\overline{u}_l^{(m,t)} = -\overline{u}_r^{(m,t)}, \quad \overline{u}_{ll}^{(m)} = -\overline{u}_{lr}^{(m)}, \quad \overline{u}_{rr}^{(m)} = -\overline{u}_{rl}^{(m)}. \qquad (12.6)$$

Далее, согласно формуле (2.64),

$$g(\psi,0,\alpha) = -g(\varphi,0,\alpha) = \frac{1}{\cos\dfrac{\varphi}{2}}. \qquad (12.7)$$

Теперь выражение (12.3) можно переписать в виде

$$u_h^{(m+1)}(P) = a\bar{u}_l^{(m,t)} g(\varphi,0,\alpha)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{12.8}$$

или

$$u_h^{(m+1)}(P) = a\bar{u}_r^{(m,t)} g(\psi,0,\alpha)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \tag{12.9}$$

Величины $\bar{u}_l^{(1,t)} \equiv \bar{u}_l^{pr}$ и $\bar{u}_r^{(1,t)} \equiv \bar{u}_r^{pr}$ суть первичные краевые волны на поверхности диска, которые прошли через фокальную ось и пришли в точку ζ на ребре. Они определяются с помощью формулы (8.29), в которой следует положить $\gamma_0 = \pi/2$, $R = 2a$, $\rho = -a$ и $g = g(0,\ \pi/2,\ \alpha)$ для величины $\bar{u}_l^{pr}$, тогда как $g = g(\alpha,\ \pi/2,\ \alpha)$ для величины $\bar{u}_r^{pr}$. Таким же образом можно определить величины $\bar{u}_{ll}^{(m)}$, $\bar{u}_{lr}^{(m)}$, $\bar{u}_{rl}^{(m)}$ для $m = 2, 3, ...$, только функция $g$ будет для них другой, а именно $g = g(0,\ 0,\ \alpha) = -1$. Мы опускаем все промежуточные выкладки и приводим результаты:

$$\bar{u}_l^{pr} = -\bar{u}_r^{pr} = g(0,\pi/2,\alpha)\lambda = -\sqrt{2}\lambda, \tag{12.10}$$

$$\bar{u}_l^{(m,t)} = -\bar{u}_l^{(m-1,t)}\lambda = (-1)^m\sqrt{2}\lambda^m, \tag{12.11}$$

где

$$\lambda = \frac{\mathrm{e}^{i(2ka-\pi/4)}}{2\sqrt{\pi ka}}. \tag{12.12}$$

Следовательно,

$$u_h^{(m+1)}(P) = a\sqrt{2}g(\varphi,0,\alpha)(-1)^m\lambda^m\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{12.13}$$

и полное поле всех краевых волн на фокальной оси определяется формулой

$$u_h^{ew}(P) = a[g(\varphi,\pi/2,\alpha) + \sqrt{2}g(\varphi,0,\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\lambda^m]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \tag{12.14}$$

Функция $g(\varphi,\ \pi/2,\ \alpha)$ сингулярна в направлениях $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$. Поэтому полное рассеянное поле в дальней зоне целесообразно представить в традиционной ФТД-форме:

$$u_h^{sc} = u_h^{(0)} + u_h^{fr} + \sum_{m=2}^{\infty}u_h^{(m)}. \tag{12.15}$$

Здесь

$$u_h^{(0)} = \pm\frac{ika^2}{2}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \text{ в направлениях } \varphi = \begin{cases}3\pi/2\\ \pi/2\end{cases} \tag{12.16}$$

есть поле, излучаемое *равномерными* рассеивающими источниками $j_h^{(0)}$, или другими словами, это есть поле в приближении ФО. Величина

$$u_h^{fr} = ag^{(1)}(\varphi, \pi/2, \alpha)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \tag{12.17}$$

с функциями $g^{(1)}(\pi/2, \pi/2, \alpha) = -g(3\pi/2, \pi/2, \alpha) = -1/2$ описывает поле, излучаемое *неравномерными* рассеивающими источниками $j_h^{(1)}$, которые возникают на диске при первичной дифракции падающей волны. Ряды в формулах (12.14) и (12.15) представляют вклад в рассеянное поле, обусловленный той частью источников $j_h^{(1)}$, которые возникают при многократной дифракции.

Подставляя выражение (12.15) в формулу (11.8), находим полный поперечник рассеяния для диска:

$$\sigma_h = 2\pi a^2\left\{1 + \frac{2}{ka}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{\sin[m(2ka - \pi/4)]}{2^{m-1}(\pi ka)^{m/2}}\right\}. \tag{12.18}$$

Это выражение предствляет собой *неполное* асимптотическое разложение, поскольку оно включает только *первый* член асимптотического ряда (при $ka \to \infty$) для каждой многократной краевой волны. Сравнение с точным асимптотическим решением (Witte and Westpfahl, 1970), которое содержит шесть первых членов для полного поперечника рассеяния, подтверждает правильность нашей формулы (12.18).

## 12.2. Многократная дифракция на акустически мягком диске

Первичные краевые волны, возникающие при дифракции падающей волны $u^{inc} = \exp(ikz)$, создают фокальное поле, которое определяется согласно формуле (11.2):

$$u_s^{pr} = af(\varphi, \pi/2, \alpha)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{12.19}$$

где $\alpha = 2\pi$ и

$$f(\varphi, \varphi_0, \alpha) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\cos\dfrac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{1}{\cos\dfrac{\varphi + \varphi_0}{2}}\right). \tag{12.20}$$

Это поле излучается полными рассеивающими источниками $j_s^{(t)} = j_s^{(0)} + j_s^{(1)}$. Фокальное поле первичных краевых волн, которые излучаются *неравномерной* компонентой $j_s^{(1)}$, также описывается формулой (12.1), где следует заменить функцию $f$ на $f^{(1)}$:

$$f^{(1)}(\varphi,\varphi_0,\alpha)=f(\varphi,\varphi_0,\alpha)-f^{(0)}(\varphi,\varphi_0). \tag{12.21}$$

Здесь

$$f^{(0)}(\varphi,\varphi_0)=\frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi+\cos\varphi_0}. \tag{12.22}$$

Все краевые волны, бегущие вдоль акустически мягкого диска, в силу граничного условия имеют нуль в направлении к противоположному краю и испытывают там дифракцию, которую мы называем английским термином *slope diffraction* за отсутствием аналогичного краткого термина в русском языке. Волны, возникающие при такой дифракции, находятся с помощью формулы (10.19). В случае дифракции на выпуклом теле вращения с плоским торцом соответствующая методика была развита в разделе 11.3. В настоящем разделе она используется для исследования дифракции на акустически мягком диске. Согласно адаптированной формуле (10.19), фокальное поле, создаваемое краевыми волнами порядка $m+1$, определяется выражением

$$u_s^{(m+1)}(P)=\frac{1}{2\pi}\int_L\left[\bar{u}_l^{(m,t)}\frac{\partial f(\varphi,0,\alpha)}{\partial\varphi_0}+\bar{u}_r^{(m,t)}\frac{\partial f(\psi,0,\alpha)}{\partial\varphi_0}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\,d\zeta, \tag{12.23}$$

где $d\zeta=ad\theta$ есть дифференциальный элемент ребра $L$ диска с радиусом $a$. Геометрия задачи показана на рис. 12.1. Углы $\varphi$ и $\psi$ измеряются от разных граней диска и при этом $\psi=2\pi-\varphi$. Благодаря осевой симметрии задачи, выражение (12.23) упрощается и принимает следующий вид:

$$u_s^{(m+1)}(P)=a\left[\bar{u}_l^{(m,t)}\frac{\partial f(\varphi,0,\alpha)}{\partial\varphi_0}+\bar{u}_r^{(m,t)}\frac{\partial f(\psi,0,\alpha)}{\partial\varphi_0}\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \tag{12.24}$$

Здесь $\bar{u}_{l,r}^{(m,t)}$ есть амплитудный множитель волны, которая эквивалентна *полной* краевой волне порядка $m$, приходящей в точку $\zeta$ на ребре от противоположной точки $\bar{\zeta}=\zeta-\pi a$ вдоль левой или правой грани, обозначаемой соответственно индексами $l$ или $r$. Согласно формуле (12.1), рассеянное поле симметрично по отношению к плоскости диска, следовательно

$$\bar{u}_l^{(m,t)}=\bar{u}_r^{(m,t)}. \tag{12.25}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial f(\psi,0,\alpha)}{\partial\varphi_0}=\frac{\partial f(\varphi,0,\alpha)}{\partial\varphi_0}=\frac{\sin\dfrac{\varphi}{2}}{2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}. \tag{12.26}$$

Поэтому

$$u_s^{(m+1)}(P) = 2a\bar{u}_l^{(m,t)} \frac{\partial f(\varphi,0,\alpha)}{\partial \varphi_0} \frac{e^{ikR}}{R}. \tag{12.27}$$

Величина

$$\bar{u}_l^{(m,t)} = \bar{u}_{ll}^{(m)} + \bar{u}_{rl}^{(m)} = 2\bar{u}_{ll}^{(m)} \tag{12.28}$$

состоит из двух одинаковых слагаемых. Слагаемое $\bar{u}_{ll}^{(m)}$ относится к краевой волне порядка $m$ на *левой* грани диска в точке $\zeta$. Эта волна создается волной порядка $m-1$ в противоположной точке $\bar{\zeta} = \zeta - \pi a$, которая пришла туда по *левой* же стороне диска. Слагаемое $\bar{u}_{rl}^{(m)}$ относится к краевой волне порядка $m$ в той же самой точке $\zeta$ на *левой* стороне диска. Эта волна создана краевой волной порядка $m-1$ в противоположной точке $\bar{\zeta} = \zeta - \pi a$, которая пришла туда по *правой* стороне диска. В силу симметрии поля эти слагаемые равны друг другу.

Величины $\bar{u}_{ll}^{(m)}$ и $\bar{u}_l^{(m,t)}$ вычисляются по формулам (10.18) и (10.20), где следует положить $\gamma_0 = \gamma_{01} = \pi/2$, $R = 2a$ и $\rho = -a$. В результате таких вычислений получаем следующие выражения:

$$\bar{u}_l^{(1,t)} \equiv \bar{u}_l^{(1)} = \mu \frac{\partial f(0,\pi/2,\alpha)}{\partial \varphi}, \text{ где } \mu = \frac{e^{i(2ka+\pi/4)}}{8ka\sqrt{\pi ka}} \tag{12.29}$$

и

$$\bar{u}_l^{(m,t)} = 2\mu\bar{u}_l^{(m-1,t)} \frac{\partial^2 f(0,0,\alpha)}{\partial \varphi \partial \varphi_0}, \text{ где } m = 2, 3, 4, \ldots \tag{12.30}$$

Мы используем обозначение $\bar{u}_l^{(1,t)} = \bar{u}_l^{(1)}$ для первичных волн и подчеркиваем, что только *одна* первичная волна существует на каждой грани диска, тогда как *две* волны любого высокого порядка имеются на каждой стороне диска. Таким образом,

$$\bar{u}_l^{(m,t)} = 2^{m-1}\mu^m \frac{\partial f(0,\pi/2,\alpha)}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial^2 f(0,0,\alpha)}{\partial \varphi \partial \varphi_0}\right]^{m-1} \tag{12.31}$$

и

$$u_s^{(m+1)}(P) = a2^m\mu^m \frac{\partial f(0,\pi/2,\alpha)}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial^2 f(0,0,\alpha)}{\partial \varphi \partial \varphi_0}\right]^{m-1} \frac{\partial f(\varphi,0,\alpha)}{\partial \varphi_0} \frac{e^{ikR}}{R}, \tag{12.32}$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$ и

$$\frac{\partial f(0,\pi/2,\alpha)}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial^2 f(0,0,\alpha)}{\partial \varphi \partial \varphi_0} = \frac{1}{4}. \tag{12.33}$$

Полное фокальное поле, созданное вместе всеми краевыми волнами, равно

$$u_s^{ew}(P) = a\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\left\{ f(\varphi, \pi/2, \alpha) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f(0, \pi/2, \alpha)}{\partial \varphi} \frac{\partial f(\varphi, 0, \alpha)}{\partial \varphi_0} \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \frac{\mathrm{e}^{im(2ka+\pi/4)}}{(8ka\sqrt{\pi ka})^m} \left[ \frac{\partial^2 f(0,0,\alpha)}{\partial\varphi\partial\varphi_0} \right]^{m-1} \right\}. \quad (12.34)$$

Это выражение может быть использовано для вычисления полного поперечника рассеяния по формуле (11.8), где величина $u_s^{(t)}$ есть полное поле, рассеянное в направлении вперед ($\varphi = 3\pi/2$). В этом случае

$$u_s^{(t)} = a\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\left\{ i\frac{ka}{2} + f^{(1)}(3\pi/2, \pi/2, \alpha) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f(0, \pi/2, \alpha)}{\partial \varphi} \frac{\partial f(3\pi/2, 0, \alpha)}{\partial \varphi_0} \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \frac{\mathrm{e}^{im(2ka+\pi/4)}}{(8ka\sqrt{\pi ka})^m} \left[ \frac{\partial^2 f(0,0,\alpha)}{\partial\varphi\partial\varphi_0} \right]^{m-1} \right\}, \quad (12.35)$$

где

$$f^{(1)}(3\pi/2, \pi/2, \alpha) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f(3\pi/2, 0, \alpha)}{\partial \varphi_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (12.36)$$

Подставляя выражение (12.35) в формулу (11.8), находим полный поперечник рассеяния:

$$\sigma_s = 2\pi a^2 \left\{ 1 + \frac{2}{ka} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin[m(2ka + \pi/4)]}{2^{m-1}(8ka\sqrt{\pi ka})^m} \right\}. \quad (12.37)$$

Полученное выражение представляет собой *неполный* асимптотический ряд, который включает в себя только первый член *полного* асимптотического ряда для каждой краевой волны. Сравним его с точным асимптотическим решением (14.54) в книге (Bowman et al., 1987), которое содержит несколько первых членов, включая величину порядка $(ka)^{-4}$. Согласно нашему выражению (12.37),

$$\sigma_s = 2\pi a^2 \left\{ 1 + \frac{\cos(2ka - \pi/4)}{4\sqrt{\pi}(ka)^{5/2}} + \frac{\cos(4ka)}{64\pi(ka)^4} + O[(ka)^{-11/2}] \right\}. \quad (12.38)$$

Сравнение с точной асимптотикой показывает, что все содержащиеся здесь члены совпадают с точными. Таким образом, сравнение асимптотик (12.18) и (12.37) с точными результатами показывает, что ФТД правильно описывает первый член в полном асимптотическом разложении для каждой многократной краевой волны.

## 12.3. Многократная дифракция электромагнитных волн

Здесь мы исследуем дифракцию плоской волны

$$E_x^{inc} = Z_0 H_y^{inc} = \mathrm{e}^{ikz} \tag{12.39}$$

на идеально проводящем диске (рис. 12.1). Основные детали решения этой задачи остаются такими же, как и в рассмотренной выше акустической задаче. Поэтому мы не будем их повторять и только кратко обсудим специфику задачи, связанную с векторным характером электромагнитных волн. Учитывая это обстоятельство и симметрию задачи, дифракционные волны высоких порядков ($m = 2, 3, ...$) можно подразделить на две независимые группы, $E_\varphi$-волны и $H_\varphi$-волны. Многократная дифракция $E_\varphi$-волн ($H_\varphi$-волн) происходит так же, как дифракция акустических волн на *мягком (жестком)* диске. Это наблюдение существенно облегчает решение задачи, результатом которого являются следующие аппроксимации для фокального поля при положительных значениях $z$ ($z \gg kR^2$). Фокальные поля, создаваемые всеми многократными $E_\varphi$-волнами и $H_\varphi$-волнами, соответственно равны

$$E_x^{(e)} = Z_0 H_y = \frac{a}{z}\mathrm{e}^{ikz}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{im(2ka+\pi/4)}}{2^{4m}\pi^{m/2}(ka)^{3m/2}} \qquad [E_\varphi\text{-волны}] \tag{12.40}$$

и

$$E_x^{(h)} = Z_0 H_y = \frac{a}{z}\mathrm{e}^{ikz}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\,\frac{\mathrm{e}^{im(2ka-\pi/4)}}{2^{m}(\pi ka)^{m/2}} \qquad [H_\varphi\text{-волны}]. \tag{12.41}$$

Полное фокальное поле также содержит компоненты, создаваемые током $\vec{j}^{\,(0)}$ (поле ФО) и током $\vec{j}^{\,(1)}$ (поле первичной дифракции):

$$E_x^{(0)} = Z_0 H_y^{(0)} = \frac{ika^2}{2}\frac{\mathrm{e}^{ikz}}{z}, \tag{12.42}$$

$$E_x^{(1)} = Z_0 H_y^{(1)} = \frac{a}{2}[f^{(1)}(3\pi/2,\pi/2,2\pi) + g^{(1)}(3\pi/2,\pi/2,2\pi)]\frac{\mathrm{e}^{ikz}}{z}. \tag{12.43}$$

Однако

$$f^{(1)}(3\pi/2,\pi/2,2\pi) = -g^{(1)}(3\pi/2,\pi/2,2\pi) = -\frac{1}{2}, \tag{12.44}$$

и поэтому компонента $E_x^{(1)}$ оказывается равной нулю ($E_x^{(1)} = H_y^{(1)} = 0$).

Следовательно, полное поле на фокальной оси имеет следующую величину:

$$E_x^{(t)} = Z_0 H_y^{(t)} = a\frac{\mathrm{e}^{ikz}}{z}\left[\frac{ika}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{\mathrm{e}^{im(2ka-\pi/4)}}{2^m(\pi ka)^{m/2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{im(2ka+\pi/4)}}{2^{4m}\pi^{m/2}(ka)^{3m/2}}\right]. \qquad (12.45)$$

Используя теперь формулу (11.8), которая также справедлива для электромагнитных волн (при замене $u^{(t)}$ на $E_x^{(t)}$), находим полный поперечник рассеяния для идеально проводящего диска:

$$\sigma = 2\pi a^2\left\{1 + \frac{2}{ka}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{\sin[m(2ka-\pi/4)]}{2^m(\pi ka)^{m/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{ka}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin[m(2ka+\pi/4)]}{2^{4m}\pi^{m/2}(ka)^{3m/2}}\right\}. \qquad (12.46)$$

Оказывается, что эта величина связана соотношением

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_h + \sigma_s) \qquad (12.47)$$

с аналогичными величинами (12.18) и (12.37) для акустических волн.

## Задачи

**12.1.** Докажите формулу (12.14) для фокального поля, создаваемого всеми акустическими краевыми волнами, которые возникают при дифракции на жестком диске. Объясните все детали в этой формуле, включая каустические параметры, фазовые сдвиги и амплитудные коэффициенты.

**12.2.** Докажите формулу (12.34) для фокального поля, создаваемого всеми акустическими краевыми волнами, которые возникают при дифракции на мягком диске. Объясните все детали в этой формуле, включая каустические параметры, фазовые сдвиги и амплитудные коэффициенты.

**12.3.** Докажите формулу (12.40) для фокального поля, создаваемого группой $E_\varphi$-волн, которые возникают при при дифракции электромагнитных волн на идеально проводящем диске. Объясните все детали в этой формуле, включая каустические параметры, фазовые сдвиги и амплитудные коэффициенты.

**12.4.** Докажите формулу (12.41) для фокального поля, создаваемого группой $H_\varphi$-волн, которые возникают при при дифракции электромагнитных волн на идеально проводящем диске. Объясните все детали в этой формуле, включая каустические параметры, фазовые сдвиги и амплитудные коэффициенты.

# Глава 13

# Обратное рассеяние на цилиндре конечной длины

## 13.1. Акустические волны

Геометрия задачи показана на рис. 13.1. Сплошной круглый цилиндр с плоскими торцами облучается плоской волной

$$u^{inc} = u_0 e^{ik(y\sin\gamma + z\cos\gamma)}, \text{ где } 0 \le \gamma \le \pi/2. \tag{13.1}$$

Полная длина цилиндра и его диаметр соответственно равны $L = 2l$ и $d = 2a$.

В этом разделе исследуется только *обратное* рассеяние, т. е. рассеяние в направлении $\vartheta = \pi - \gamma$, $\varphi = 3\pi/2$, откуда приходит падающая волна.

### 13.1.1. Приближение физической оптики

Согласно приближению ФО (1.37), обратное рассеяние на акустически жестком теле отличается только знаком от обратного рассеяния на таком же, но акустически мягком теле. Поэтому нам достаточно исследовать рассеяние только на жестком цилиндре.

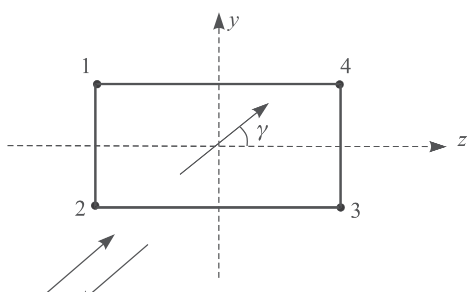


**Рис. 13.1.** Поперечное сечение цилиндра плоскостью $yOz$. Точки 1, 2, 3 являются точками стационарной фазы, которые видны в секторе $\pi/2 < \vartheta < \pi$

Сначала мы вычислим дальнее поле, рассеянное левым торцом (диском) жесткого цилиндра. Используя формулу (1.37), получаем выражение

$$u_h^{(0)disk} = u_0 \frac{ik}{2\pi} \cos\vartheta \, e^{i2kl\cos\vartheta} \frac{e^{ikR}}{R} \int_0^a r'dr' \int_0^{2\pi} e^{i2kr'\sin\vartheta\sin\varphi'} d\varphi', \tag{13.2}$$

где $\vartheta = \pi - \gamma$. С учетом сотношений (6.55) оно принимает вид

$$u_h^{(0)disk} = u_0 \frac{ia}{2} \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} J_1(2ka\sin\vartheta) e^{i2kl\cos\vartheta} \frac{e^{ikR}}{R}. \tag{13.3}$$

Далее, согласно формуле (1.37) поле, рассеянное цилиндричесой частью тела, описывается интегральным выражением

$$u_h^{(0)cyl} = u_0 \frac{ika}{2\pi} \sin\vartheta \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-l}^{l} e^{-i2kz'\cos\vartheta} dz' \int_{\pi}^{2\pi} e^{i2ka\sin\vartheta\sin\varphi'} \sin\varphi' d\varphi'. \tag{13.4}$$

Здесь интегрирование осуществляется по освещенной части рассеивающей поверхности, где $\pi \le \varphi' \le 2\pi$ при условии $\pi/2 + 0 \le \vartheta \le \pi - 0$. В предельном случае, когда $\vartheta = \pi$, интеграл берется по всей цилиндрической поверхности ($0 \le \varphi' \le 2\pi$) и равен нулю. Однако выражение (13.4) также справедливо в этом сучае, поскольку оно обращается в нуль благодаря множителю $\sin\vartheta$. Таким образом,

$$u_h^{(0)cyl} = 0, \text{ если } \vartheta = \pi. \tag{13.5}$$

В формуле (13.4) интеграл по переменной $z'$ вычислется в явном виде. При условии $2ka\sin\vartheta \gg 1$ интеграл по переменной $\varphi'$ вычисляется методом стационарной фазы (Копсон, 1966; Murray, 1984). Детали этого метода уже рассматривались ранее в разделах 6.1.2 и 8.1. Стационарная точка $\varphi'_{st} = 3\pi/2$ находится из уравнения

$$\frac{d}{d\varphi'} 2ka\sin\vartheta\sin\varphi' = 2ka\sin\vartheta\cos\varphi' = 0. \tag{13.6}$$

Асимптотическое выражение для интеграла определяется формулой

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{i2ka\sin\vartheta\sin\varphi'} \sin\varphi' d\varphi' \sim -\sqrt{\frac{\pi}{ka\sin\vartheta}} \, e^{-i2ka\sin\vartheta + i\pi/4}. \tag{13.7}$$

Следовательно, при условии $2ka\sin\vartheta \gg 1$ рассеянное поле $u_h^{(0)cyl}$ имеет асимптотику

$$u_h^{(0)cyl} \sim -u_0 \frac{ia}{2} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} \sin(2kl\cos\vartheta) \frac{e^{-i2ka\sin\vartheta + i\pi/4}}{\sqrt{\pi ka\sin\vartheta}} \frac{e^{ikR}}{R}. \tag{13.8}$$

Исходя из выражений (13.5) и (13.8), можно сконструировать аппроксимацию для поля, применимую во всей области $\pi/2 \le \vartheta \le \pi$. Это можно сделать, используя такой же подход, как и в разделе 6.1.4. А именно, используя асимптотики функций Бесселя для больших аргументов, можно получить следующие соотношения:

$$\frac{\mathrm{e}^{-i2x+i\pi/4}}{\sqrt{\pi x}} \approx J_0(2x) - iJ_1(2x), \tag{13.9}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-i2x+i\pi/4}}{\sqrt{\pi x}} \approx \frac{1}{i}[J_1(2x) - iJ_2(2x)] \tag{13.10}$$

и

$$\frac{\mathrm{e}^{-i2x+i\pi/4}}{\sqrt{\pi x}} \approx \mathrm{e}^{-in\pi/2}\cdot[J_n(2x) - iJ_{n+1}(2x)],\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{13.11}$$

Каждая из этих комбинаций может быть использована для аппроксимации поля в области $\pi/2 \le \vartheta \le \pi$. Мы проанализируем простейшие из них, (13.9) и (13.10). В соответствии с ними, полное поле в приближении ФО может быть представлено в следующих двух формах:

$$u_{h,1}^{(0)} = u_0\frac{ia}{2}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\left\{\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}J_1(2ka\sin\vartheta)\mathrm{e}^{i2kl\cos\vartheta} - \right.$$
$$\left. - \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\sin(2kl\cos\vartheta)\,[J_0(2ka\sin\vartheta) - iJ_1(2ka\sin\vartheta)]\right\} \tag{13.12}$$

и

$$u_{h,2}^{(0)} = u_0\frac{ia}{2}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\left\{\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}J_1(2ka\sin\vartheta)\mathrm{e}^{i2kl\cos\vartheta} + \right.$$
$$\left. + i\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\sin(2kl\cos\vartheta)[J_1(2ka\sin\vartheta) - iJ_2(2ka\sin\vartheta)]\right\}. \tag{13.13}$$

Нетрудно видеть, что вторые слагаемые в этих формулах, соответствующие полю $u_h^{(0)cyl}$, действительно обращаются в нуль в направлении $\vartheta = \pi$ и, следовательно, согласуются с формулой (13.5).

Поперечник рассеяния $\sigma$ определяется согласно формуле (1.26). Мы провели вычисления для нормированного поперечника рассеяния

$$\sigma_{norm} = \sigma/\sigma_d, \tag{13.14}$$

где величина

$$\sigma_d = \pi a^2(ka)^2 \tag{13.15}$$

есть поперечник рассеяния диска в приближении ФО при нормальном падении ($\vartheta = \pi$). Результаты вычислений представлены на рис. 13.2 и 13.3. Кривые ФО-1 и ФО-2 относятся к приближениям (13.12) и (13.13), соответственно.

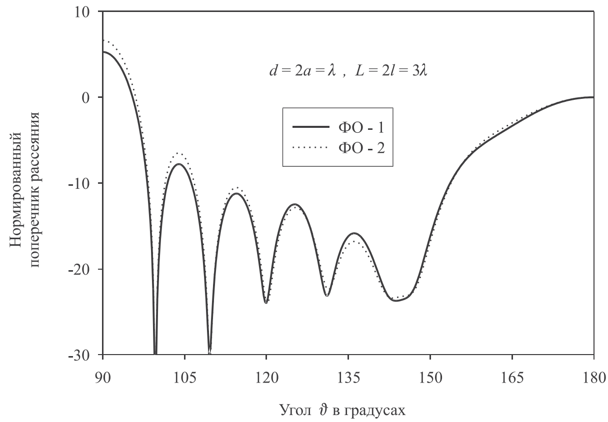


**Рис. 13.2.** Обратное рассеяние на конечном цилиндре в приближении физической оптики. Аппроксимации ФО-1 и ФО-2 вычислены по формулам (13.12) и (13.13), соответственно

Небольшое отличие между двумя кривыми на рис. 13.2 обусловлено различными членами высокого порядка в асимптотических выражениях (13.12) и (13.13). Оно проявляется, когда диаметр цилиндра еще недостаточно большой и равен только одной длине волны ($d = 2a = \lambda$). В этом случае аргумент функций Бесселя не превышает величины $2\pi$. Отличие между приближениями ФО-1 и ФО-2 становится практически неразличимым уже в случае, когда $d = 3\lambda$, как это ясно видно на рис. 13.3. Поэтому в дальнейших вычислениях мы используем простейшую аппроксимацию (13.12). Есть еще одно соображение в пользу приближения (13.12). Оно согласуется с аналогичными аппроксимациями (13.22) и (13.23) для поля, излучаемого *неравномерным* источником $j^{(1)}$. Это поле исследуется в следующем разделе.

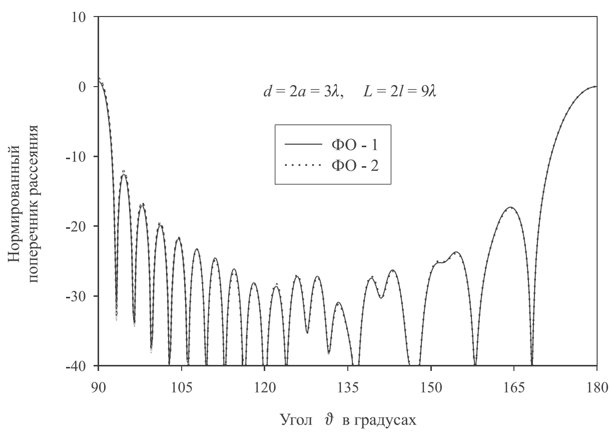


**Рис. 13.3.** Обратное рассеяние на конечном цилиндре в приближении физической оптики. Аппроксимации ФО-1 и ФО-2 вычислены по формулам (13.12) и (13.13), соответственно

### 13.1.2. Поле, создаваемое неравномерной компонентой $j^{(1)}$

На поверхности конечного цилиндра существуют три типа *неравномерных* компонент $j^{(1)}$ рассеивающих источников. Краевая компонента $j^{(1)}_{\text{кр}}$ концентрируется вблизи краев (ребер), где касательная к поверхности цилиндра (как функция его координат) испытывает разрыв. Компонента $j^{(1)}_{\text{плз}}$, обусловленная плавным искривлением поверхности и имеющая форму ползущих волн, концентрируется вблизи границы тени на цилиндрической части тела и экспоненциально затухает при движении этих волн в область тени. Третья компонента $j^{(1)}_{dif}$ обусловлена поперечной диффузией волнового поля между соседними лучами, отраженными от гладкой цилиндрической части тела. Эта компонента существует на освещенной стороне цлиндрической поверхности вдали от ее геометрооптической границы. Среди этих компонент источника $j^{(1)}$ главный вклад в обратное рассеянное поле создается краевой компонентой $j^{(1)}_{\text{кр}}$, поэтому именно он изучается в данной главе. Заметим также, что поле, излучаемое компонентой $j^{(1)}_{dif}$, может быть сравнимо с полем, создаваемым компонентой $j^{(1)}_{\text{кр}}$. Но такая ситуация встречается только в направлении лучей, зеркально отраженных от цилиндрической поверхности, и она изучается в следующей главе.

Сначала мы исследуем поле, создаваемое краевой компонентой, сосредоточенной вблизи левого края ($z=-l$, $\sqrt{x^2+y^2}=a$). Согласно формуле (8.3) оно описывается интегралом

$$u^{(1)left}_{s,h} = u_0 \frac{a}{2\pi} \mathrm{e}^{i2kl\cos\vartheta} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \int_0^{2\pi} F^{(1)}_{s,h}(\varphi')\mathrm{e}^{i2ka\sin\vartheta\sin\varphi'} d\varphi'. \tag{13.16}$$

В направлении $\vartheta=\pi$ функция $F^{(1)}_{s,h}$ трансформируется в функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$, как это следует из формулы (7.115). Напомним, что эти функции определены в разделе 4.1. Таким образом, для этого направления имеет место соотношение

$$\left.\begin{matrix} u^{(1)left}_s \\ u^{(1)left}_h \end{matrix}\right\} = u_0 a \begin{bmatrix} f^{(1)} \\ g^{(1)} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-i2kl} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \quad (\vartheta=\pi). \tag{13.17}$$

Для других направлений $\vartheta$, которые удовлетворяют условию $2ka\sin\vartheta \gg 1$, интеграл (13.16) оценивается асимптотически методом стационарной фазы. Его подынтегральная функция имеет две стационарных точки, $\varphi'_{st,1}=\pi/2$ и $\varphi'_{st,2}=3\pi/2$. В этих точках функции $F^{(1)}_{s,h}$ также трансформируются в функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$. В результате поле (13.16) описывается следующими приближенными выражениями:

$$u^{(1)left}_s = u_0 \frac{a}{2} \mathrm{e}^{i2kl\cos\vartheta} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \frac{1}{\sqrt{\pi ka\sin\vartheta}} \times$$
$$\times [f^{(1)}(1)\mathrm{e}^{i2ka\sin\vartheta - i\pi/4} + f^{(1)}(2)\mathrm{e}^{-i2ka\sin\vartheta + i\pi/4}] \tag{13.18}$$

и

$$u_h^{(1)left} = u_0 \frac{a}{2} e^{i2kl\cos\vartheta} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{1}{\sqrt{\pi ka\sin\vartheta}} \times$$
$$\times \left[g^{(1)}(1)e^{i2ka\sin\vartheta - i\pi/4} + g^{(1)}(2)e^{-i2ka\sin\vartheta + i\pi/4}\right]. \qquad (13.19)$$

Здесь функции $f^{(1)}(1)$, $g^{(1)}(1)$ относятся к стационарной точке 1 ($\varphi'_{st,1} = \pi/2$), а функции $f^{(1)}(2)$, $g^{(1)}(2)$ к стационарной точке 2 ($\varphi'_{st,2} = 3\pi/2$). Эти точки показаны на рис. 13.1.

Чтобы построить аппроксимации для поля во всей области $\pi/2 \le \vartheta \le \pi$, мы используем идею, предложенную ранее в разделах 6.1.4 и 13.1. А именно, мы подставим асимптотики

$$\frac{e^{i2ka\sin\vartheta - i\pi/4}}{\sqrt{\pi ka\sin\vartheta}} \approx J_0(2ka\sin\vartheta) + iJ_1(2ka\sin\vartheta), \qquad (13.20)$$

$$\frac{e^{-i2ka\sin\vartheta + i\pi/4}}{\sqrt{\pi ka\sin\vartheta}} \approx J_0(2ka\sin\vartheta) - iJ_1(2ka\sin\vartheta) \qquad (13.21)$$

в формулы (13.18), (13.19) и получим приближенные выражения для поля во всей области $\pi/2 \le \vartheta \le \pi$:

$$u_s^{(1)left} = u_0 \frac{a}{2} e^{i2kl\cos\vartheta} \frac{e^{ikR}}{R} \times$$
$$\times \{f^{(1)}(1)[J_0(2ka\sin\vartheta) + iJ_1(2ka\sin\vartheta)] +$$
$$+ f^{(1)}(2)[J_0(2ka\sin\vartheta) - iJ_1(2ka\sin\vartheta)]\} \qquad (13.22)$$

и

$$u_h^{(1)left} = u_0 \frac{a}{2} e^{i2kl\cos\vartheta} \frac{e^{ikR}}{R} \times$$
$$\times \{g^{(1)}(1)[J_0(2ka\sin\vartheta) + iJ_1(2ka\sin\vartheta)] +$$
$$+ g^{(1)}(2)[J_0(2ka\sin\vartheta) - iJ_1(2ka\sin\vartheta)]\}. \qquad (13.23)$$

Оказывается, что эти выражения *точно* трансформируются в формулу (13.17), когда $\vartheta \to \pi$. Следовательно, полученные выражения можно рассматривать как подходящие аппроксимации для рассеянного поля во всех направлениях $\pi/2 \le \vartheta \le \pi$.

Вклад в рассеянное поле (в области $\pi/2 \le \vartheta \le \pi$) от правого края ($z = +l$, $\sqrt{x^2 + y^2} = a$) описывается выражением

$$u_{s,h}^{(1)right} = u_0 \frac{a}{2\pi} e^{-i2kl\cos\vartheta} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{\pi}^{2\pi} F_{s,h}^{(1)}(\varphi') e^{i2ka\sin\vartheta\sin\varphi'} d\varphi', \qquad (13.24)$$

аналогичным выражению (13.16). Его асимптотическое приближение находится методом стационарной фазы и определяется формулой

$$\left.\begin{matrix} u_s^{(1)right} \\ u_h^{(1)right} \end{matrix}\right\} = u_0 \frac{a}{2} \begin{bmatrix} f^{(1)}(3) \\ g^{(1)}(3) \end{bmatrix} \frac{e^{-i2ka\sin\vartheta + i\pi/4}}{\sqrt{\pi ka \sin\vartheta}} e^{-i2kl\cos\vartheta} \frac{e^{ikR}}{R}, \tag{13.25}$$

где $2ka\sin\vartheta \gg 1$, а функции $f^{(1)}(3)$, $g^{(1)}(3)$ относятся к стационарной точке 3 ($\varphi'_{st,3} = 3\pi/2$), показанной на рис. 13.1. Применяя соотношение (13.21), это выражение можно распространить на всю область $\pi/2 \le \vartheta \le \pi$:

$$u_s^{(1)right} = u_0 \frac{a}{2} f^{(1)}(3)\,[J_0(2ka\sin\vartheta) - iJ_1(2ka\sin\vartheta)]\,e^{-i2kl\cos\vartheta} \frac{e^{ikR}}{R} \tag{13.26}$$

и

$$u_h^{(1)right} = u_0 \frac{a}{2} g^{(1)}(3)\,[J_0(2ka\sin\vartheta) - iJ_1(2ka\sin\vartheta)]\,e^{-i2kl\cos\vartheta} \frac{e^{ikR}}{R}. \tag{13.27}$$

Таким образом, полное поле, создаваемое компонентой $j_{\text{кр}}^{(1)}$, в первом приближении описывается следующими формулами:

$$u_s^{(1)} = u_0 \frac{a}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \{f^{(1)}(1)\,[J_0(2ka\sin\vartheta) + iJ_1(2ka\sin\vartheta)]\,e^{i2kl\cos\vartheta} +$$
$$+ [f^{(1)}(2)\,e^{i2kl\cos\vartheta} + f^{(1)}(3)\,e^{-i2kl\cos\vartheta}][J_0(2ka\sin\vartheta) - iJ_1(2ka\sin\vartheta)]\}, \tag{13.28}$$

$$u_h^{(1)} = u_0 \frac{a}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \{g^{(1)}(1)\,[J_0(2ka\sin\vartheta) + iJ_1(2ka\sin\vartheta)]\,e^{i2kl\cos\vartheta} +$$
$$+ [g^{(1)}(2)\,e^{i2kl\cos\vartheta} + g^{(1)}(3)\,e^{-i2kl\cos\vartheta}][J_0(2ka\sin\vartheta) - iJ_1(2ka\sin\vartheta)]\}. \tag{13.29}$$

Функции $f^{(1)}$ и $g^{(1)}$ определяются в соответствии с разд. 4.1:

$$f^{(1)}(1) = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi - 2\vartheta}{n}} \right) + \frac{1}{2}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \tag{13.30}$$

$$g^{(1)}(1) = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi - 2\vartheta}{n}} \right) - \frac{1}{2}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \tag{13.31}$$

$$f^{(1)}(2) = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n} \left( \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - 1} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\vartheta}{n}} \right) - \frac{1}{2}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} - \frac{1}{2}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}, \tag{13.32}$$

$$g^{(1)}(2)=\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1}+\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{2\vartheta}{n}}\right)+\frac{1}{2}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}+\frac{1}{2}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}, \quad (13.33)$$

$$f^{(1)}(3)=\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1}-\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi+2\vartheta}{n}}\right)+\frac{1}{2}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}, \quad (13.34)$$

$$g^{(1)}(3)=\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1}+\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi+2\vartheta}{n}}\right)-\frac{1}{2}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}, \quad (13.35)$$

где $n = 3/2$.

Хотя некоторые члены в этих функциях сингулярны в направлениях $\vartheta=\pi/2$ и $\vartheta=\pi$, эти сингулярности всегда гасят друг друга так, что функции $f^{(1)}$, $g^{(1)}$ остаются конечными. В направлении $\vartheta=\pi/2$ они имеют следующие значения:

$$f^{(1)}(1)=0, \quad f^{(1)}(2)=f^{(1)}(3)=\frac{\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1}+\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}, \quad (13.36)$$

$$g^{(1)}(1)=\frac{\dfrac{2}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1}, \quad g^{(1)}(2)=g^{(1)}(3)=\frac{\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1}-\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}. \quad (13.37)$$

А в направлении $\vartheta=\pi$ они определяются аналогичными формулами:

$$f^{(1)}(1)=f^{(1)}(2)=\frac{\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1}+\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}, \quad f^{(1)}(3)=0, \quad (13.38)$$

$$g^{(1)}(1)=g^{(1)}(2)=\frac{\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1}-\frac{1}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}, \quad g^{(1)}(3)=\frac{\dfrac{2}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}-1}. \quad (13.39)$$

Мы также приводим выражения для функций $f^{(1)}(4)$ и $g^{(1)}(4)$, относящихся к стационарной точке 4 (см. рис. 13.1), которая становится видимой в направлениях $\vartheta=\pi/2$ и $\vartheta=\pi$. Для обоих этих направлений функции $f^{(1)}(4)$ и $g^{(1)}(4)$

имеют одни и те же значения,

$$f^{(1)}(4) = 0 \quad \text{и} \quad g^{(1)}(4) = \frac{\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - 1}. \tag{13.40}$$

Поскольку вклад в рассеянное поле от точки 4 равен нулю для акустически мягкого цилиндра, аппроксимация (13.28) может быть использована во всей области $\pi/2 \le \vartheta \le \pi$. Что касается аппроксимации (13.29) для жесткого цилиндра, то строго говоря, она справедлива только в области $\pi/2 + 0 \le \vartheta \le \pi - 0$, откуда точка 4 не видна. Однако вклад точки 4 в поле, рассеянное жестким цилиндром, на порядок по параметру $1/ka$ (или $1/kl$) меньше, чем поле ФО в направлении $\vartheta = \pi$ (или $\vartheta = \pi/2$). Поэтому им можно пренебречь в случае рассеяния на больших цилиндрах.

Количественная оценка влияния поля $u_{s,h}^{(1)}$ на обратное рассеяние иллюстрируется графически в следующем разделе.

### 13.1.3. Полное рассеянное поле

Полное рассеянное поле определяется выражением

$$u_{s,h}^{(t)} = u_{s,h}^{(0)} + u_{s,h}^{(1)}, \tag{13.41}$$

где $u_s^{(0)} = -u_h^{(0)}$, а величины $u_h^{(0)}$, $u_{s,h}^{(1)}$ описываются формулами (13.12), (13.28) и (13.29). Используя эти аппроксимации, мы вычислили нормированный поперечник рассеяния (13.14) и определили индивидуальный вклад каждого слагаемого в формуле (13.41). Напомним, что поле $u_{s,h}^{(0)}$ создается *равномерной* ком-

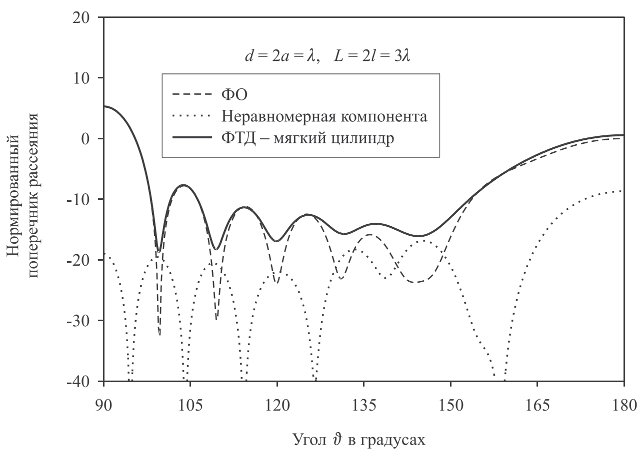


**Рис. 13.4.** Обратное рассеяние от акустически мягкого цилиндра. Согласно соотношению эквивалентности (13.46), здесь кривая ФО также изображает обратное рассеяние электромагнитных волн (с $E_x$-поляризацией) от идеально проводящего цилиндра

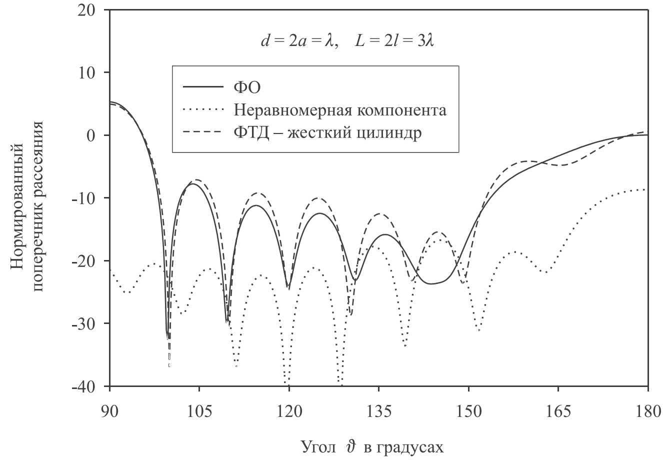


**Рис. 13.5.** Обратное рассеяние от акустически жесткого цилиндра. Согласно соотношению эквивалентности (13.70), здесь кривая ФО также изображает обратное рассеяние электромагнитных волн (с $H_x$-поляризацией) от идеально проводящего цилиндра

понентой $j_{s,h}^{(0)}$ поверхностных источников и фактически представляет собой поле в приближении ФО. Поле $u_{s,h}^{(1)}$ создается *неравномерной* компонентой $j_{s,h}^{(1)}$ поверхностных источников, которая сосредоточена вблизи ребер цилиндра. Полное поле обозначено символом ФТД (физическая теория дифракции).

Численные результаты представлены для двух наборов параметров цилиндра: (а) $d = 2a = \lambda$, $L = 2l = 3\lambda$; (б) $d = 3\lambda$, $L = 9\lambda$. Здесь $d$ есть диаметр цилиндра, а $L$ есть его длина.

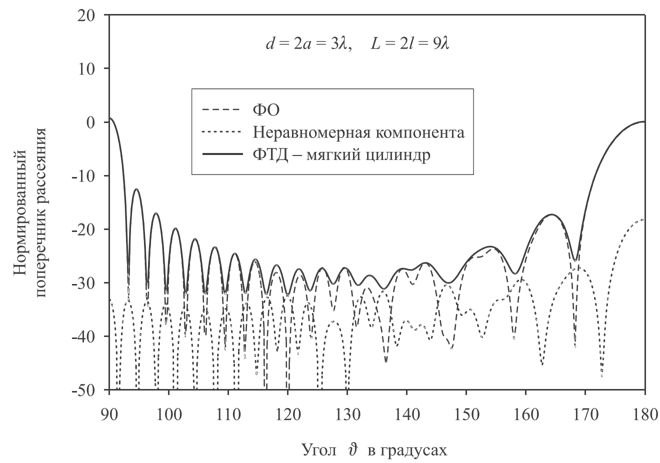


**Рис. 13.6.** Обратное рассеяние от акустически мягкого цилиндра. Согласно соотношению эквивалентности (13.46), здесь кривая ФО также изображает обратное рассеяние электромагнитных волн (с $E_x$-поляризацией) от идеально проводящего цилиндра

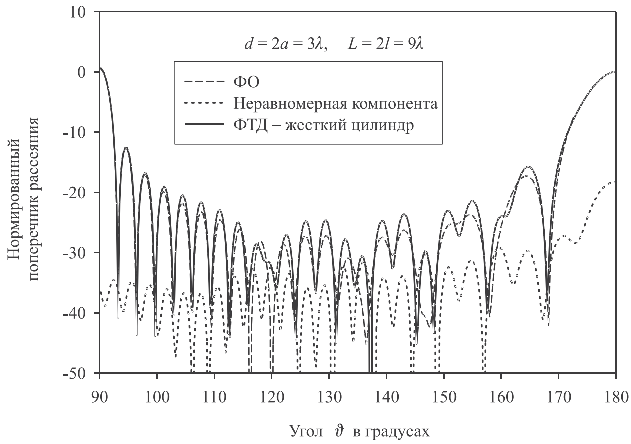


**Рис. 13.7.** Обратное рассеяние от акустически жесткого цилиндра. Согласно соотношению эквивалентности (13.70), здесь кривая ФО также изображает обратное рассеяние электромагнитных волн (с $H_x$-поляризацией) от идеально проводящего цилиндра

Интересное наблюдение следует из рисунков 13.4–13.7. Большинство *максимумов* в поле, излучаемом *неравномерной* компонентой $j_s^{(1)}$ на мягком цилиндре, расположено в окрестности *минимумов* поля в приближении ФО. Противоположная ситуация наблюдается в поле, рассеянном жестким цилиндром. *Максимумы* поля, создаваемого *неравномерной* компонентой $j_h^{(1)}$, располагаются вблизи *максимумов* поля ФО. Это наблюдение объясняет тот факт, что *минимумы* поля, рассеянного мягким цилиндром, не так глубоки, как в случае жесткого цилиндра.

## 13.2. Электромагнитные волны

Первоначальная форма ФТД для электромагнитных волн, рассеянных на идеально проводящем цилиндре, была изложена ранее в публикациях (Уфимцев, 1958 а, 1962). Ниже мы представим кратко ее современную версию, основанную на концепции ЭКВ.

### 13.2.1. *E*-поляризация

Падающую волну запишем в виде

$$E_x^{inc} = E_{0x} e^{ik(z\cos\gamma + y\sin\gamma)}, \quad E_y^{inc} = E_z^{inc} = H_x^{inc} = 0. \qquad (13.42)$$

Равномерная компонента поверхностного тока (1.97), возбуждаемая падающей волной, определяется формулами

$$j_x^{(0)disk} = 2Y_0 E_{0x} \cos\gamma e^{-ikl\cos\gamma} e^{ik\rho\sin\vartheta\sin\psi},$$

$$j_y^{(0)disk} = j_z^{(0)disk} = 0 \qquad (13.43)$$

на левом торце цилиндра (рис. 13.1), и формулами

$$j_x^{(0)cyl} = -2Y_0 E_{0x} \sin\gamma \sin\psi e^{ik(z\cos\gamma + a\sin\gamma\sin\psi)},$$

$$j_y^{(0)cyl} = 2Y_0 E_{0x} \sin\gamma \cos\psi e^{ik(z\cos\gamma + a\sin\gamma\sin\psi)},$$

$$j_z^{(0)cyl} = 2Y_0 E_{0x} \cos\gamma \cos\psi e^{ik(z\cos\gamma + a\sin\gamma\sin\psi)} \qquad (13.44)$$

на цилиндрической части поверхности ($-l \le z \le l$, $\pi \le \psi \le 2\pi$). Здесь $Y_0 = 1/Z_0$ есть адмитанс свободного пространства (вакуума).

Поле $E_x^{(0)}$, создаваемое током $\vec{j}^{(0)}$, находится с помощью формул (1.92) и (1.93), где следует отбросить слагаемые $A^m_{\varphi,\vartheta}$, поскольку $\vec{j}^{m} = -[\hat{n} \times \vec{E}] = 0$ в силу граничных условий на идеально проводящей поверхности. Неравномерная компонента тока $\vec{j}^{(1)}$ сосредоточена вблизи левого ($z = -l$) и правого ($z = l$) ребер. Поле $E_x^{(1)}$, излучаемое этим током, вычисляется с помощью теории ЭКВ, развитой в разделе 7.8. Полное рассеянное поле есть сумма

$$E_x = E_x^{(0)disk} + E_x^{(0)cyl} + E_x^{(1)left} + E_x^{(1)right}. \qquad (13.45)$$

Можно показать, что

$$E_x^{(0)disk} = u_s^{(0)disk}, \quad E_x^{(0)cyl} = u_s^{(0)cyl}. \qquad (13.46)$$

Здесь величины $u_s^{(0)disk}$ и $u_s^{(0)cyl}$ определяются соответствующими формулами в разделе 13.1, в которых следует учесть соотношение (1.37) и положить $u_0 = E_{0x}$. Следовательно, кривые ФО на рис. 13.4 и 13.6 для обратного рассеяния на акустически мягком цилиндре также изображают обратное рассеяние электромагнитных волн от идеально проводящего цилиндра.

Поля $E_x^{(1)left}$ и $E_x^{(1)right}$ вычисляются путем интегрирования ЭКВ, которые являются функциями локальных сферических координат с началом в точке ребра $x = a\cos\psi$, $y = a\sin\psi$. Чтобы избежать возможной путаницы с основными координатами $R$, $\vartheta$, $\varphi$ точки наблюдения, мы переобозначим ее локальные координаты символами $r$, $\theta$, $\phi$. Необходимая предварительная работа состоит в том, чтобы определить локальные координаты в терминах основных координат $\vartheta$, $\psi$.

Сначала заметим, что можно использовать следующие аппроксимации:

$$r^{left} = R + a\sin\vartheta\sin\psi + l\cos\vartheta, \quad r^{right} = R + a\sin\vartheta\sin\psi - l\cos\vartheta, \qquad (13.47)$$

$$\hat{r}^{left} \approx \hat{r}^{right} \approx \hat{R} = -\hat{y}\sin\vartheta + \hat{z}\cos\vartheta \qquad (13.48)$$

для точки наблюдения ($x = 0$, $y = -R\sin\vartheta$, $z = R\cos\vartheta$) в дальней зоне ($R \gg ka^2$, $R \gg kl^2$). Затем мы вводим единичные векторы

$$\hat{\theta} = \hat{x}\theta_x + \hat{y}\theta_y + \hat{z}\theta_z, \quad \hat{\phi} = \hat{x}\phi_x + \hat{y}\phi_y + \hat{z}\phi_z \qquad (13.49)$$

и находим их компоненты из уравнений

$$\hat{R}\cdot\hat{\theta}=0,\quad \hat{\theta}\cdot[\hat{R}\times\hat{t}\,]=0,\quad \hat{t}\cdot\hat{\theta}=-\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi},\quad \hat{\phi}=\hat{R}\times\hat{\theta}, \quad (13.50)$$

где $\hat{t}=\hat{x}\sin\psi-\hat{y}\cos\psi$ есть касательная к ребру (как к левому, так и к правому). Согласно этим уравнениям,

$$\theta_x=-\frac{\sin\psi}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi}},\quad \theta_y=\frac{\cos\psi\cos^2\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi}},$$

$$\theta_z=\frac{\cos\psi\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi}}, \quad (13.51)$$

$$\phi_x=-\frac{\cos\psi\cos\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi}},\quad \phi_y=-\frac{\sin\psi\cos\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi}},$$

$$\phi_z=-\frac{\sin\psi\sin\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi}}. \quad (13.52)$$

Угол $\theta$ определяется уравнением

$$\hat{R}\cdot\hat{t}=\cos\theta=\sin\vartheta\cos\psi. \quad (13.53)$$

При определении углов $\phi$ и $\phi_0$ нужно помнить, что они измеряются от освещенной грани края в плоскости, перпендикулярной к касательной $\hat{t}$ к ребру. Проектируя векторы $\hat{R}=-\hat{y}\sin\vartheta+\hat{z}\cos\vartheta$ и $\hat{Q}=-\hat{k}^{\,i}=-\hat{y}\sin\gamma-\hat{z}\cos\gamma$ на эту плоскость, находим выражения

$$\sin\phi=-\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi}},\quad \cos\phi=\frac{\sin\vartheta\sin\psi}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi}} \quad (13.54)$$

и

$$\sin\phi_0=\frac{\cos\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi}},\quad \cos\phi_0=\frac{\sin\gamma\sin\psi}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi}} \quad (13.55)$$

для левого ребра ($z=-l$), и

$$\sin\phi=-\frac{\sin\vartheta\sin\psi}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi}},\quad \cos\phi=-\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi}}, \quad (13.56)$$

$$\sin\phi_0=-\frac{\sin\gamma\sin\psi}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi}},\quad \cos\phi_0=\frac{\cos\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\cos^2\psi}} \quad (13.57)$$

для правого ребра ($z=l$).

Теперь в соответствии с разд. 7.8 получаем следующие формулы для рассеянного поля:

$$E_x^{(1)left} = E_{0x}\frac{a}{2\pi}\frac{e^{ikR}}{R}e^{i2kl\cos\vartheta}\int_0^{2\pi}\{\sin\psi F_\theta^{(1)}(\psi,\theta,\phi)\cdot\theta_x +$$

$$+\cos\vartheta\cos\psi\,[G_\theta^{(1)}(\psi,\theta,\phi)\cdot\theta_x + G_\phi^{(1)}(\psi,\theta,\phi)\cdot\phi_x]\}e^{i2ka\sin\vartheta\sin\psi}d\psi, \quad (13.58)$$

$$E_{y,z}^{(1)left} = H_x^{(1)left} = 0 \quad (13.59)$$

и

$$E_x^{(1)right} = E_{0x}\frac{a}{2\pi}\frac{e^{ikR}}{R}e^{-i2kl\cos\vartheta}\int_\pi^{2\pi}\{\sin\psi\, F_\theta^{(1)}(\psi,\theta,\phi)\cdot\theta_x +$$

$$+\cos\vartheta\cos\psi\,[G_\theta^{(1)}(\psi,\theta,\phi)\cdot\theta_x + G_\phi^{(1)}(\psi,\theta,\phi)\cdot\phi_x]\}\,e^{i2ka\sin\vartheta\sin\psi}d\psi, \quad (13.60)$$

$$E_{y,z}^{(1)right} = H_x^{(1)right} = 0. \quad (13.61)$$

Выражения (13.59) и (13.61) показывают, что благодаря симметрии задачи (по отношению к плоскости $x = 0$) в рассеянном поле отсутствует кроссполяризация. Для направления $\vartheta = \pi - 0$, которое является фокальной линией для ЭКВ, приведенные выражения дают следующие оценки для рассеянного поля:

$$E_x^{(1)left} = E_{0x}\frac{a}{2}\left[f^{(1)}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right) - g^{(1)}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\right]\frac{e^{ikR}}{R}e^{-i2kl}, \quad (13.62)$$

$$E_x^{(1)right} = E_{0x}\frac{a}{4}\left[f^{(1)}\left(0,0,\frac{3\pi}{2}\right) - g^{(1)}\left(0,0,\frac{3\pi}{2}\right)\right]\frac{e^{ikR}}{R}e^{i2kl}. \quad (13.63)$$

Полученные выше выражения позволяют осуществить расчет рассеянного поля (13.45). Они включают элементарные функции, функции Бесселя и однократные линейные интегралы (13.58), (13.60), которые можно вычислять численно. Однако эту процедуру интегрирования можно избежать, если использовать аппроксимации, аналогичные (13.22), (13.23) и (13.26), (13.27).

Идея этих аппроксимаций состоит в следующем. Вдали от фокальной линии ($ka\sin\vartheta \gg 1$) асимптотическая оценка интегралов (13.58) и (13.60) дает лучевые асимптотики:

$$E_x^{(1)left} = E_{0x}\frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi ka\sin\vartheta}}[f^{(1)}(1)e^{i2ka\sin\theta - i\pi/4} +$$

$$+f^{(1)}(2)e^{-i2ka\sin\theta + i\pi/4}]\frac{e^{ikR}}{R}e^{i2kl\cos\vartheta} \quad (13.64)$$

и

$$E_x^{(1)right} = E_{0x}\frac{a}{2}f^{(1)}(3)\frac{e^{-i2ka\sin\vartheta + i\pi/4}}{\sqrt{\pi ka\sin\vartheta}}\frac{e^{ikR}}{R}e^{-i2kl\cos\vartheta}. \quad (13.65)$$

Они являются электромагнитными аналогами акустических асимптотик (13.18) и (13.25) и выявляют эквивалентность, существующую между акустическими и электромагнитными дифракционными лучами:

$$E_x^{(1)} = u_s^{(1)}, \text{ если } u_0 = E_{0x}. \tag{13.66}$$

Как показано выше, фокальная асимптотика (13.62) для электромагнитных волн отличается от фокальной асимптотики (13.17) для акустических волн. Однако они отличаются лишь малыми величинами порядка $(ka)^{-1}$ по сравнению с основной компонентой $E_{0x}^{(0)disk}$, рассеянной левым торцом (диском). Поэтому аппроксимацию (13.28), выведенную для акустических волн, можно также использовать для электромагнитных волн с относительной погрешностью порядка $(ka)^{-1}$. В этом случае в формуле (13.28) достаточно заменить величину $u_0$ на $E_{0x}$ и $u_s^{(1)}$ на $E_x^{(1)}$.

### 13.2.2. *H*-поляризация

Падающая волна

$$H_x^{inc} = H_{0x} \mathrm{e}^{ik(z\cos\gamma + y\sin\gamma)}, \quad H_{y,z}^{inc} = E_x^{inc} = 0 \tag{13.67}$$

возбуждает равномерные компоненты тока

$$j_y^{(0)disk} = -2H_{0x} \mathrm{e}^{-ikl\cos\gamma} \mathrm{e}^{ik\rho\sin\gamma\sin\psi}, \quad j_x^{(0)disk} = j_z^{(0)disk} = 0 \tag{13.68}$$

на левом торце цилиндра (рис. 13.1) и

$$j_z^{(0)cyl} = -2H_{0x} \sin\psi \mathrm{e}^{ik(z\cos\gamma + a\sin\gamma\sin\psi)}, \quad j_x^{(0)cyl} = j_y^{(0)cyl} = 0 \tag{13.69}$$

на его цилиндрической части ($-l \le z \le l$, $\pi \le \psi \le 2\pi$). Можно показать, что эти токи создают рассеяное поле

$$H_x^{(0)} = u_h^{(0)} \tag{13.70}$$

при условии $u_0 = H_{0x}$, где величина $u_h^{(0)}$ определена в разделе 13.1 и представляет собой акустическое поле, рассеянное на жестком цилиндре. Следовательно, кривые ФО на рис. 13.5 и 13.7 для обратного рассеяния на жестком цилиндре также изображают обратное рассеяние электромагнитных волн на идеально проводящем цилиндре.

Неравномерные компоненты тока, возбуждаемые вблизи левого ($z = -l$) и правого ($z = l$) ребер, излучают поле $H_x^{(1)} = H_x^{(1)left} + H_x^{(1)right}$, которое определяется согласно разд. 7.8 :

$$H_x^{(1)left} = H_{0x} \frac{a}{2} \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \mathrm{e}^{i2kl\cos\vartheta} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \{\sin\psi [G_\theta^{(1)}(\psi,\theta,\phi)\cdot\phi_x - G_\phi^{(1)}(\psi,\theta,\phi)\cdot\theta_x] -$$

$$- \cos\vartheta\cos\psi\, F_\theta^{(1)}(\psi,\theta,\phi)\cdot\phi_x\} \mathrm{e}^{i2ka\sin\vartheta\sin\psi} d\psi \tag{13.71}$$

и

$$H_x^{(1)right} = H_{0x}\,\frac{a}{2}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\mathrm{e}^{-i2kl\cos\vartheta}\,\times$$

$$\times\int_{\pi}^{2\pi}\{\sin\psi[G_\theta^{(1)}(\psi,\theta,\phi)\cdot\phi_x - G_\phi^{(1)}(\psi,\theta,\phi)\cdot\theta_x]-$$

$$-\;\cos\vartheta\cos\psi\,F_\theta^{(1)}(\psi,\theta,\phi)\cdot\phi_x\}\mathrm{e}^{i2ka\sin\vartheta\sin\psi}\,d\psi. \qquad (13.72)$$

Благодаря симметрии задачи, кроссполяризационная компонента поля при обратном рассеянии равна нулю, т. е. $H_{y,z}^{(1)} = 0$. Локальные сферические координаты $\theta,\phi$ в выражениях для ЭКВ в этих интегралах определены в разделе 13.2.1.

Для точек наблюдения на фокальной линии ($\vartheta = \pi - 0$) эти интегралы вычисляются в явном виде:

$$H_x^{(1)left} = H_{0x}\,\frac{a}{2}\left[g^{(1)}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right) - f^{(1)}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\mathrm{e}^{-i2kl} \qquad (13.73)$$

и

$$H_x^{(1)right} = H_{0x}\,\frac{a}{4}\left[g^{(1)}\left(0{,}0,\frac{3\pi}{2}\right) - f^{(1)}\left(0{,}0,\frac{3\pi}{2}\right)\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\mathrm{e}^{i2kl}. \qquad (13.74)$$

Лучевые асимптотики для поля $H_x^{(1)}$ имеют вид

$$H_x^{(1)left} = H_{0x}\,\frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi ka\sin\vartheta}}[g^{(1)}(1)\mathrm{e}^{i2ka\sin\vartheta - i\pi/4} +$$

$$+\,g^{(1)}(2)\mathrm{e}^{-i2ka\sin\vartheta + i\pi/4}]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\mathrm{e}^{i2kl\cos\vartheta} \qquad (13.75)$$

и

$$H_x^{(1)right} = H_{0x}\,\frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi ka\sin\vartheta}}g^{(1)}(3)\mathrm{e}^{-i2ka\sin\vartheta + i\pi/4}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\mathrm{e}^{-i2kl\cos\vartheta}. \qquad (13.76)$$

Эти асимптотики полностью идентичны тем, которые были найдены в разделе 13.1.2 для акустических волн $u_h^{(1)}$.

Для электромагнитных волн с $H_x$-поляризацией можно также предложить аппроксимацию, аналогичную (13.29). Для этого в формуле (13.29) достаточно произвести замены $u_0 \to H_{0x}$, $u_h^{(1)} \to H_x^{(1)}$. Выражения, полученные таким путем, точно переходят в лучевые асимптотики (13.75) и (13.76). Однако они имеют относительную погрешность порядка $(ka)^{-1}$ в окрестности фокальной линии.

# Задачи

**13.1.** Используйте соотношения (13.20), (13.21) и проверьте переход от равномерных аппроксимаций (13.22), (13,23) к лучевым асимптотикам (13.18), (13.19).

**13.2.** Проверьте формулу (13.43) для тока $j_x^{(0)disk}$. Используйте формулы (1.92), (1.93) и дайте вывод ФО-выражения $\vec{E}^{(0)disk}$ для обратного рассеяния от левого торца конечного цилиндра. Докажите равенство $E_{y,z}^{(0)disk} = 0$. Сравните $\vec{E}^{(0)disk}$ с акустическим полем $u_s^{(0)disk}$, рассеянным от мягкого цилиндра [см. разд. 13.1 и формулу (1.37)]. Сформулируйте соотношение эквивалентности между акустическими и электромагнитными дифракционными волнами.

**13.3.** Проверьте, что выражения (13.22) и (13.23) точно переходят в фокальные асимптотики (13.17) и асимптотически преобразуются в лучевые асимптотики (13.18), (13.19).

**13.4.** Докажите приближенные формулы (13.47) для расстояния между дифракционной точкой на ребре и точкой наблюдения в дальней зоне.

**13.5.** Используйте уравнения (13.50) и проверьте выражения (13.51) и (13.52) для единичных векторов $\hat{\theta}, \hat{\phi}$.

**13.6.** Докажите формулы (13.54) и (13.55) для локальных координат $\phi$, $\phi_0$ элементарных краевых волн, расходящихся от левого ребра ($z = -l$).

**13.7.** Докажите формулы (13.56) и (13.57) для локальных координат $\phi$, $\phi_0$ элементарных краевых волн, расходящихся от правого ребра ($z = +l$).

**13.8.** Используйте общие выражения (7.130), (7.131) для ЭКВ и получите выражение (13.58) для поля, рассеянного левым ребром цилиндра.

**13.9.** Используйте общие выражения (7.130), (7.131) для ЭКВ и получите выражение (13.60) для поля, рассеянного правым ребром цилиндра.

**13.10.** Используйте определения величин $F_\theta^{(1)}$, $G_{\theta,\phi}^{(1)}$ и докажите соотношения

$$F_\theta^{(1)}(\pi-\psi) = F_\theta^{(1)}(\psi), G_\theta^{(1)}(\pi-\psi) = -G_\theta^{(1)}(\psi), G_\phi^{(1)}(\pi-\psi) = G_\phi^{(1)}(\psi).$$

Затем докажите с их помощью формулу (13.59), которая означает отсутствие кроссполяризации при обратном рассеянии от конечного цилиндра.

**13.11.** Примените метод стационарной фазы к интегралам (13.58), (13.60) и получите лучевые асимптотики (13.64), (13.65) для электромагнитных волн, дифрагированных на левом и правом ребрах цилиндра (рис. 13.1). Сравните их с аналогичными выражениями для акустических волн в разд. 13.1.2. Сформулируйте соотношения эквивалентности между акустическими и электромагнитными дифракционными лучами.

**13.12.** Вычислите и постройте графики для поперечника обратного рассеяния от акустически мягкого цилиндра с параметрами $d = 2a = 2\lambda$, $L = 2l = 4\lambda$. Положите $\gamma = 45°$. Следуйте разделу 13.1.3.

**13.13.** Проверьте формулу (13.68) для тока. Используйте формулы (1.92) и (1.93) и получите выражение для поля $H_x^{(0)disk}$, рассеянного левым торцом цилиндра в направлении $\vartheta = \pi - \gamma$, $\varphi = -\pi/2$ при условии $R \gg ka^2$. Сравните полученное выражение с формулой (13.3) для акустического поля. Сформулируйте соотношение эквивалентности между акустическими и электромагнитными дифракционными полями в приближении ФО.

**13.14.** Проверьте формулу (13.69) для тока. Используйте формулы (1.92) и (1.93) и получите выражение для поля $\vec{H}^{(0)cyl}$, рассеянного цилиндрической поверхностью конечного цилиндра в направлении $\vartheta = \pi - \gamma$, $\varphi = -\pi/2$ при условии $R \gg ka^2$. Докажите равенство $H_{y,z}^{(0)cyl} = 0$. Сравните выражение для компоненты $H_x^{(0)cyl}$ с формулой (13.4) для акустического поля. Сформулируйте соотношение эквивалентности между акустическими и электромагнитными дифракционными полями в приближении ФО.

**13.15.** Используйте общие формулы (7.130), (7.131) для ЭКВ и докажите формулу (13.71) для поля, рассеянного левым ребром цилиндра (рис. 13.1).

**13.16.** Используйте общие формулы (7.130), (7.131) для ЭКВ и докажите формулу (13.72) для поля, рассеянного правым ребром цилиндра (рис. 13.1).

**13.17.** Используйте общие формулы (7.130), (7.131) для ЭКВ и получите интегральные выражения для компонент поля $H_{y,z}^{(1)left}$, аналогичные выражению (13.71). Докажите равенство $H_{y,z}^{(1)left} = 0$ для направления обратного рассеяния ($\vartheta = \pi - \gamma$, $\varphi = -\pi/2$) при условии $R \gg ka^2$.

**13.18.** Используйте формулы (13.71), (13.72) и докажите фокальные асимптотики (13.73), (13.74).

**13.19.** Примените метод стационарной фазы к интегралу (13.71) и получите лучевую асимптотику (13.75). Сравните ее с выражением (13.19) и сформулируйте соотношение эквивалентности между акустическими и электромагнитными дифракционными лучами.

# Глава 14

# Бистатическое рассеяние на цилиндре конечной длины

## 14.1. Акустические волны

Геометрия задачи показана на рис. 14.1. Диаметр цилиндра равен $d = 2a$, а его длина равна $L = 2l$.

Падающая волна задана формулой

$$u^{inc} = u_0 e^{ik(y \sin\gamma + z \cos\gamma)}, \ 0 < \gamma < \pi/2. \tag{14.1}$$

Рассеянное поле исследуется в плоскости $yOz$ ($\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$). Направление рассеяния определяется углом $\Theta$ ($0 \le \Theta \le 2\pi$),

$$\Theta = \begin{cases} \vartheta & \text{, если } \varphi = \pi/2, \\ 2\pi - \vartheta & \text{, если } \varphi = 3\pi/2, \end{cases} \tag{14.2}$$

где $\vartheta$ ($0 \le \vartheta \le \pi$) есть обычная сферическая координата точки наблюдения $(R, \vartheta, \varphi)$. Следует различать этот угол $\Theta$ и локальный угол $\theta$, который исполь-

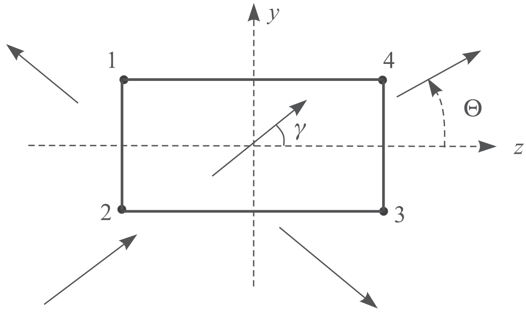


**Рис. 14.1.** Поперечное сечение цилиндра плоскостью $yOz$. Точки 1, 2 и 3 являются точками стационарной фазы

зуется для описания ЭКВ, расходящихся от точки дифракции $\zeta$ на ребре цилиндра. Соответствующие локальные координаты $r, \theta, \phi$ были введены выше, в разделе 13.2.1.

### 14.1.1. Приближение физической оптики

Падающая волна (14.1) возбуждает равномерные компоненты $j_{s,h}^{(0)}$ рассеивающих источников только на левом торце (диске) и на нижней половине ($\pi \le \psi \le 2\pi$) цилиндрической поверхности. Рассеянное поле определяется согласно формулам (1.32). Мы опускаем все промежуточные выкладки и приводим окончательные результаты для поля в приближении ФО:

$$u_{s,h}^{(0)} = u_0 \Phi_{s,h}^{(0)}(\Theta, \gamma) \frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{14.3}$$

где

$$\Phi_s^{(0)} = ika^2 \cos\gamma \frac{J_1(p)}{p} \mathrm{e}^{iq} - \frac{ikal}{\pi} \sin\gamma \frac{\sin q}{q} \int_\pi^{2\pi} \mathrm{e}^{ip\sin\psi} \sin\psi d\psi, \tag{14.4}$$

$$\Phi_h^{(0)} = ika^2 \cos\Theta \frac{J_1(p)}{p} \mathrm{e}^{iq} - \frac{ikal}{\pi} \sin\Theta \frac{\sin q}{q} \int_\pi^{2\pi} \mathrm{e}^{ip\sin\psi} \sin\psi d\psi, \tag{14.5}$$

$$p = ka(\sin\gamma - \sin\Theta), \quad q = kl(\cos\Theta - \cos\gamma). \tag{14.6}$$

Первые слагаемые у величин $\Phi_{s,h}^{(0)}$, которые содержат функцию Бесселя $J_1(p)$, относятся к полю, расеянному торцом (диском) цилиндра, а вторые слагаемые описывают поле, рассеянное боковой (цилиндрической) поверхностью. Как для первых, так и для вторых слагаемых были получены численные оценки, которые изображены графически на рис. 14.2 и 14.4.

Из приведенных выражений для рассеянного поля следует, что полный поперечник рассеяния для цилиндра равен

$$\sigma_{s,h}^{tot} = 2A, \tag{14.7}$$

где

$$A = \pi a^2 \cos\gamma + 4al\sin\gamma \tag{14.8}$$

есть площадь поперечного сечения зоны тени, образуемой цилиндром.

Согласно выражениям (14.4) и (14.5), нормированный бистатический поперечник рассеяния (13.14) определяется формулой

$$\sigma_{norm}^{(0)}(\Theta, \gamma) = \left( \frac{2}{ka^2} |\Phi_{s,h}^{(0)}(\Theta, \gamma)| \right)^2. \tag{14.9}$$

$d = 2a = 3\lambda, \quad L = 2l = 9\lambda, \ \gamma = 45°$

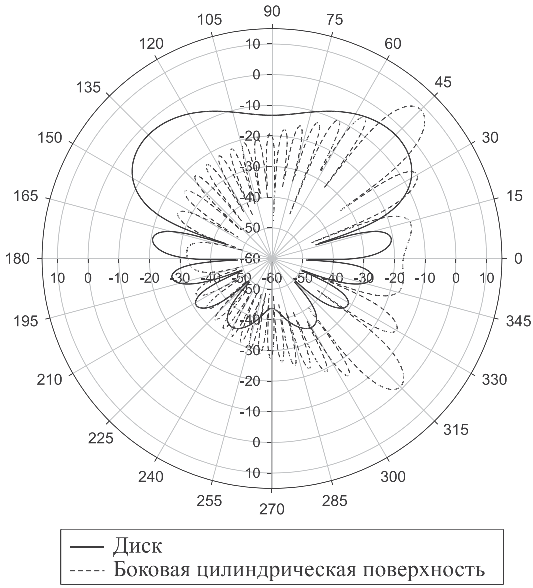


**Рис. 14.2.** Рассеяние на индивидуальных частях акустически мягкого цилиндра. Согласно соотношению (14.62), этот рисунок также изображает рассеяние (в приближении ФО) электромагнитных волн (с $E_x$-поляризацией) на идеально проводящем цилиндре

$d = 2a = 3\lambda, \quad L = 2l = 9\lambda, \ \gamma = 45°$

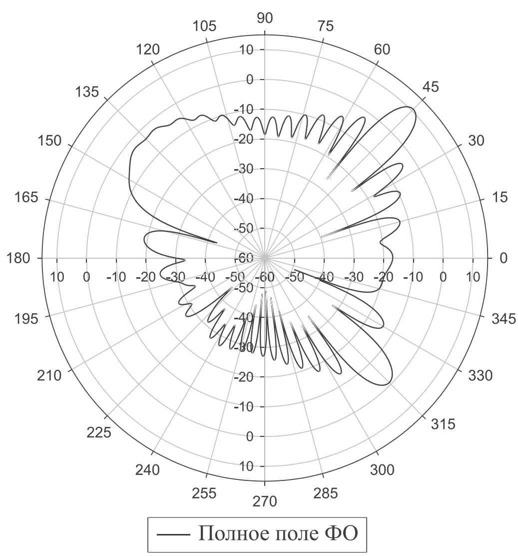


**Рис. 14.3.** Рассеяние на акустически мягком цилиндре. Согласно соотношению (14.62), этот рисунок также изображает рассеяние (в приближениии ФО) электромагнитных волн (с $E_x$-поляризацией) на идеально проводящем цилиндре

$d = 2a = 3\lambda, \quad L = 2l = 9\lambda, \quad \gamma = 45°$

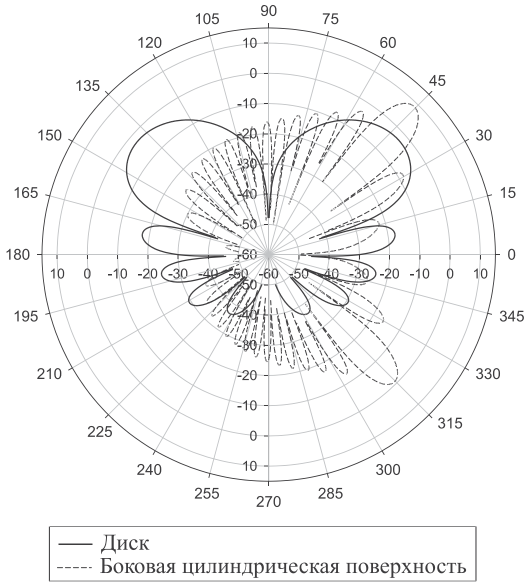


**Рис. 14.4.** Рассеяние на индивидуальных частях акустически жесткого цилиндра. Согласно соотношению (14.75), этот рисунок также изображает рассеяние (в приближениии ФО) электромагнитных волн (с $H_x$-поляризацией) на идеально проводящем цилиндре

$d = 2a = 3\lambda, \; L = 2l = 9\lambda, \; \gamma = 45°$

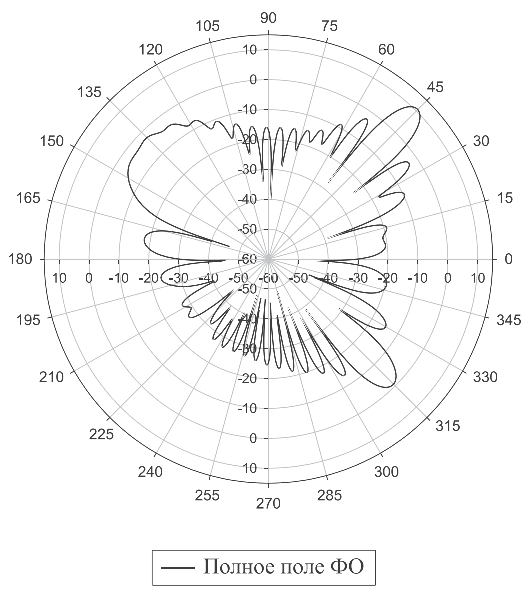


**Рис. 14.5.** Рассеяние на акустически жестком цилиндре. Согласно соотношению (14.75), этот рисунок также изображает рассеяние (в приближениии ФО) электромагнитных волн (с $H_x$-поляризацией) на идеально проводящем цилиндре

Эта величина была исследована численно. Результаты вычислений изображены графически на рис. 14.2–14.5 для случая, когда угол падения плоской волны равен $\gamma = 45°$.

Рисунки 14.2 и 14.4 изображают рассеяние на индивидуальных частях цилиндра и показывают как формируется полное рассеянное поле.

### 14.1.2. Теневое излучение как компонента рассеянного поля

В разделе 1.3.4 было показано, что теневое излучение является составной частью поля в приближении ФО. Там отмечалось, что эта часть поля концентрируется в окрестности зоны тени, Теперь мы можем проверить это свойство путем численного исследования теневого излучения, возникающего при дифракции на конечном цилиндре. Наиболее подходящей процедурой для проведения таких расчетов было бы применение теоремы о теневом контуре, представленной в разделе 1.3.5. Однако в данном конкретном случае, когда мы уже имеем результаты расчетов поля ФО, теневое излучение легко вычислить, используя соотношение (1.73),

$$u_{sh} = \frac{1}{2}[u_s^{(0)} + u_h^{(0)}], \tag{14.10}$$

где $u_s^{(0)}$ и $u_h^{(0)}$ суть поля, соответствующие приближению ФО. Рис. 14.6 показывает пространственное распределение теневого излучения, найденного таким путем. Здесь построен график нормированного бистатического попереч-

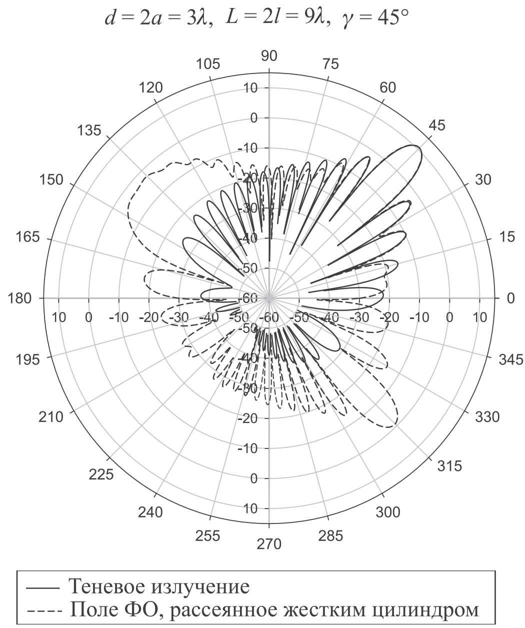


**Рис. 14.6.** Теневое излученик как компонента поля в приближении ФО

ника рассеяния (14.9) в шкале децибел. График ясно показывает, что теневое излучение действительно сосредоточено в переднем секторе ($0° < \Theta < 90°$) и представляет собой природу известного явления — рассеяния вперед (*forward scattering*). Согласно соотношениям (14.62), (14.75) и (1.100–1.102), этот рисунок также изображает теневое излучение, возникающее при дифракции электромагнитных волн на идеально проводящем цилиндре.

### 14.1.3. ФТД для поля, рассеянного жестким цилиндром

Здесь мы рассмотрим рассеяние только на акустически жестком цилиндре. Эта задача более важна с практической точки зрения. Согласно ФТД, рассеянное поле создается *равномерной* ($j_h^{(0)}$) и *неравномерной* ($j_h^{(1)}$) компонентами рассеивающих источников, возбуждаемых падающей волной на цилиндре. Поле, создаваемое компонентой $j_h^{(0)}$, представляет собой поле в приближении ФО, которое было исследовано в предыдущих разделах. Теперь мы исследуем поле, создаваемое той частью компоненты $j_h^{(1)}$, которая сосредоточена вблизи ребер цилиндра (*fringe component*). Затем мы объединим обе компоненты рассеянного поля и приведем численные результаты для полного поля.

Поле, излучаемое компонентой $j_h^{(1)}$, находится путем интегрирования *элементарных краевых волн* (ЭКВ), изученных в главе 7. Оно может быть записано в следующей форме:

$$u_h^{(1)} = u_h^{(1)left} + u_h^{(1)right}, \tag{14.11}$$

где

$$u_h^{(1)left} = u_0 \frac{a}{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} e^{ikl(\cos\Theta - \cos\gamma)} \int_0^{2\pi} F_h^{(1)left}(\psi,\theta,\phi) e^{ip\sin\psi} d\psi, \tag{14.12}$$

$$u_h^{(1)right} = u_0 \frac{a}{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ikl(\cos\Theta - \cos\gamma)} \int_\pi^{2\pi} F_h^{(1)right}(\psi,\theta,\phi) e^{ip\sin\psi} d\psi. \tag{14.13}$$

Здесь $p = ka(\sin\gamma - \sin\Theta)$, а угол $\Theta$ ($0 \le \Theta \le 2\pi$) определяется согласно формуле (14.2). Слагаемые $u_h^{(1)left}$ и $u_h^{(1)right}$ представляют компоненты поля, создаваемые левым и правым ребрами, соответственно. Только половина правого ребра освещается падающей волной (14.1), и поэтому пределы интегрирования в формуле (14.13) равны $\pi$ и $2\pi$.

Функции $F_h^{(1)left,right}(\psi,\theta,\phi)$ описывются формулами (7.91) и (7.92). В разделе 13.2.1 показано, как определяются локальные углы $\gamma_0$, $\theta$, $\phi$ и $\phi_0$ для направления обратного рассеяния ($\vartheta = \pi - \gamma$). Таким же образом можно определить эти углы для произвольных направлений рассеяния в плоскости $yOz$. Соотношения

$$\cos\gamma_0 = \sin\gamma\cos\psi, \quad \cos\theta = -\sin\Theta\cos\psi \tag{14.14}$$

справедливы для обоих ребер. Для определения угловых координат ЭКВ от левого ребра следует использовать выражения

$$\sin\phi_0 = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\psi}}, \quad \cos\phi_0 = \frac{\sin\gamma\sin\psi}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\psi}}, \tag{14.15}$$

$$\sin\phi = -\frac{\cos\Theta}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\psi}}, \quad \cos\phi = -\frac{\sin\Theta\sin\psi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\psi}}. \tag{14.16}$$

Однако угловые координаты для ЭКВ от правого ребра определяются уже другими выражениями:

$$\sin\phi_0 = -\frac{\sin\gamma\sin\psi}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\psi}}, \quad \cos\phi_0 = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\psi}}, \tag{14.17}$$

$$\sin\phi = \frac{\sin\Theta\sin\psi}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\psi}}, \quad \cos\phi = -\frac{\cos\Theta}{\sqrt{1-\sin^2\Theta\cos^2\psi}}. \tag{14.18}$$

Численные результаты, полученные по приведенным формулам для нормированного поперечника рассеяния (13.14), представлены для двух цилиндров с параметрами $L = 3d = 3\lambda$ и $L = 3d = 9\lambda$. Направление падающей волны (14.1) задано углом $\gamma = 45°$. Рисунки 14.7 и 14.9 показывают индивидуальные вклады в рассеянное поле, создаваемые компонентами $j_h^{(0)}$ и $j_h^{(1)}$. Сумма этих полей и ее сравнение с полем ФО показаны на рис. 14.8 и 14.10.

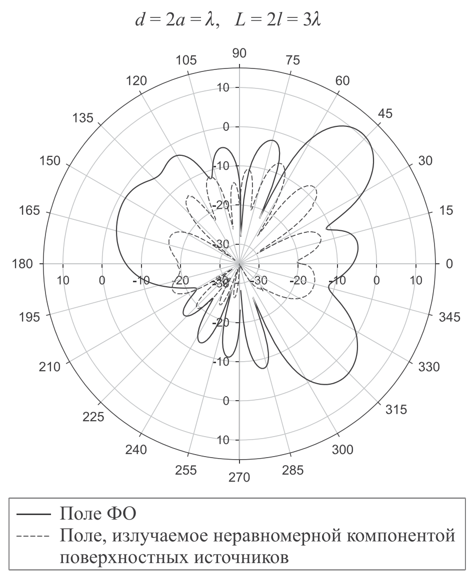


**Рис. 14.7.** Бистатическое рассеяние на акустически жестком цилиндре. Согласно соотношению (14.75), кривая ФО также изображает рассеяние электромагнитных волн (с $H_x$-поляризацией) на идеально проводящем цилиндре

$d = 2a = \lambda,\ \ L = 2l = 3\lambda$

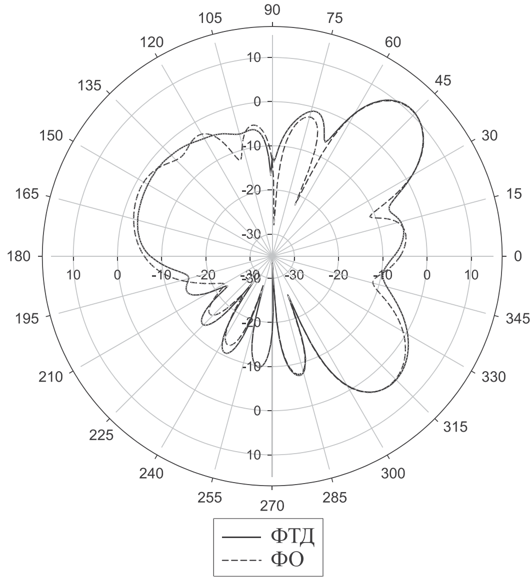


**Рис. 14.8.** Бистатическое рассеяние на акустически жестком цилиндре. Согласно соотношению (14.75), кривая ФО также изображает рассеяние электромагнитных волн (с $H_x$-поляризацией) на идеально проводящем цилиндре

$d = 2a = 3\lambda,\quad L = 2l = 9\lambda,\ \ \gamma = 45°$

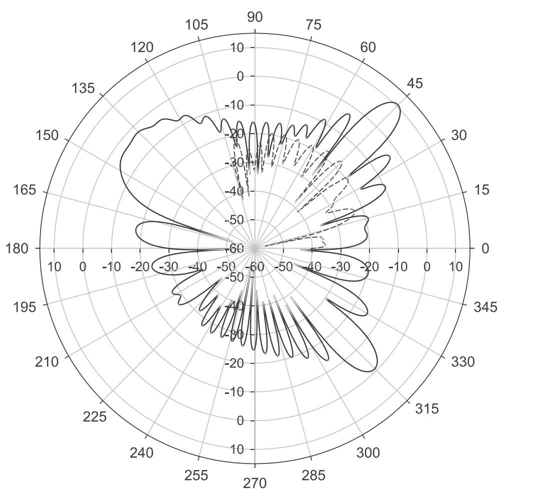


**Рис. 14.9.** Бистатическое рассеяние на акустически жестком цилиндре. Согласно соотношению (14.75), кривая ФО также изображает рассеяние электромагнитных волн (с $H_x$-поляризацией) на идеально проводящем цилиндре

$d = 2a = 3\lambda,\ L = 2l = 9\lambda,\ \gamma = 45°$

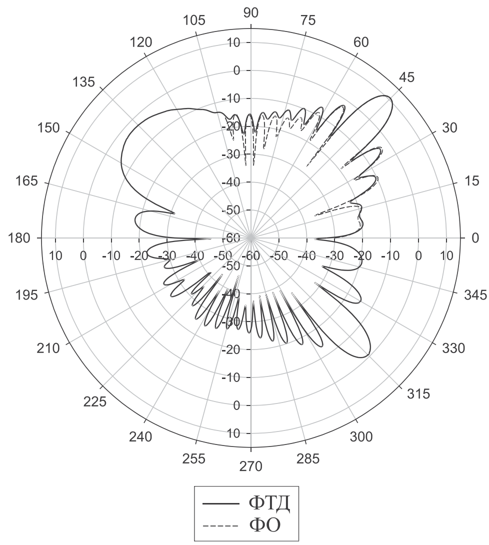


**Рис. 14.10.** Бистатическое рассеяне на акустически жестком цилиндре. Согласно соотношению (14.75), кривая ФО также изображает рассеяние электромагнитных волн (с $H_x$-поляризацией) на идеально проводящем цилиндре

Эти рисунки ясно показывают влияние поля, излучаемого *неравномерной* компонентой $j_h^{(1)}$ поверхностных источников. В частности, видно, что это поле заполняет глубокие минимумы в поле ФО. Более точные результаты можно получить с учетом краевых волн, возникающих при многократной дифракции. Однако в отличие от тонких вибраторов (Уфимцев, 2007 а) толстые цилиндры не являются резонансными телами, и поэтому краевыми волнами высоких порядков можно пренебречь, когда размеры цилиндра превышают 3–5 длин волн. Чем больше размер цилиндра, тем точнее ФТД-аппроксимации (14.12) и (14.13).

Следующие комментарии объясняют некоторые важные детали численных расчетов:

- Функции $F_h^{(1)left, right}$ определяются формулами (7.82), (7.84), (7.87), (7.88), (7.92) и (7.94) через функции $V_t(\sigma_1, \phi_0)$ и $V_t(\sigma_2, \alpha - \phi_0)$, которые содержат множитель $1/\sin\sigma_{1,2}$. Этот множитель становится сингулярным, когда $\sigma_{1,2} \to 0$ или $\sigma_{1,2} \to \pi$. В случае $\sigma_1 \to 0$ функции $V_t$ остаются конечными. Их целесообразно преобразовать к виду

$$V_t(\sigma_1, \phi_0) = \frac{4}{9\sin^2\gamma} \cdot \frac{\cos\dfrac{\sigma_1}{3}}{1 - \dfrac{4}{3}\sin^2\dfrac{\sigma_1}{3}} \cdot \frac{1}{\cos\dfrac{2\phi_0}{3} - \cos\dfrac{2\sigma_1}{3}}. \tag{14.19}$$

Заменяя в этой формуле $\sigma_1$ на $\sigma_2$ и $\phi_0$ на $\alpha - \phi_0$, получим аналогичное выражение для функции $V_t(\sigma_2, \alpha - \phi_0)$, удобное для вычислений, когда $\sigma_2 \to 0$.

- Однако эти выражения остаются сингулярными, когда $\sigma_{1,2} \to \pi$. В этом случае следует вычислять произведения $V_t(\sigma_1, \phi_0)\sin\phi$ и $V_t(\sigma_2, \alpha - \phi_0)\sin(\alpha - \phi_0)$. Они остаются конечными при $\sigma_{1,2} \to \pi$, так как $\sin\phi/\sin\sigma_1 = \text{sign}(\sin\phi)$ и $\sin(\alpha - \phi)/\sin\sigma_2 = \text{sign}[\sin(\alpha - \phi)]$.
- Функция $V(\sigma_2, \alpha - \phi_0)$, относящаяся к левому ребру, сингулярна в точках $\psi = 0, \pi, 2\pi$ для направления наблюдения $\Theta = \gamma$. Это есть так называемая *скользящая сингулярность*, упомянутая ранее в связи с соотношением (4.21). Она удаляется путем исключения некоторой окрестности сингулярных точек из интеграла (14.12). Эта процедура исключения сингулярных точек осуществляется только для той части интеграла (14.12), которая содержит функцию $V(\sigma_2, \alpha - \phi_0)$. Функция $V(\sigma_1, \phi_0)$ является регулярной и интегрируется в формулу (14.12) по всей области $0 \le \psi \le 2\pi$. Отметим также, что теория ЭКВ, развитая в разделе 7.9 и свободная от скользящей сингулярности, в данной задаче о дифракции на конечном цилиндре не может быть использована, поскольку она применима только для тел с плоскими гранями.
- Наконец, напомним, что в случаях, когда $\sigma_1 \to \phi_0$ или $\sigma_2 \to \alpha - \phi_0$, следует пользоваться формулой (7.107) для функции $V(\phi_0, \phi_0)$ и формулой (7.109) для функции $V(\alpha - \phi_0, \alpha - \phi_0)$.

### 14.1.4. Пучки и лучи в рассеянном поле

В предыдущем разделе было проведено численное исследование поля, рассеянного конечным цилиндром. Теперь мы рассмотрим его физическую структуру и получим простые высокочастотные асимптотики для диаграммы $\Phi(\Theta, \gamma)$ рассеянного поля

$$u^{sc} = u_0 \Phi(\Theta, \gamma) \frac{e^{ikR}}{R}. \tag{14.20}$$

С физической точки зрения рассеянное поле состоит из следующих основных компонент:

- Отраженный пучок в окрестности направления $\Theta = \pi - \gamma$. Этот пучок возникает в результате поперечной диффузии поля в обычных лучах, зеркально отраженных от левого торца цилиндра (рис. 14.1). Он описывается первым слагаемым в формулах (14.4) и (14.5), которое содержит функцию Бесселя $J_1(p)$. Точно в направлении $\Theta = \pi - \gamma$ диаграмма этого пучка имеет величину

$$\Phi_s^{beam1} = -\Phi_h^{beam1} = \frac{ika^2}{2} \cos\gamma \, e^{-i2kl\cos\gamma}. \tag{14.21}$$

- Отраженный пучок в окрестности направления $\Theta = 2\pi - \gamma$. Он возникает в результате поперечной диффузии поля в обычных лучах, зеркально отраженных от нижней части цилиндрической поверхности (рис. 14.1). Этот пучок описывается высокочастотными асимптотиками вторых слагаемых в формулах (14.4) и (14.5):

$$\Phi_s^{beam2} = ikal \sin\gamma \frac{\sin q}{q} \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \mathrm{e}^{-ip} \mathrm{e}^{i\pi/4}, \tag{14.22}$$

$$\Phi_h^{beam2} = ikal \sin\Theta \frac{\sin q}{q} \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \mathrm{e}^{-ip} \mathrm{e}^{i\pi/4}. \tag{14.23}$$

Точно в направлении $\Theta = 2\pi - \gamma$ его величина равна

$$\Phi_s^{beam2} = -\Phi_h^{beam2} = l\sqrt{\frac{ka\sin\gamma}{\pi}} \mathrm{e}^{-i2ka\sin\gamma} \mathrm{e}^{i3\pi/4}. \tag{14.24}$$

Напоминаем, что здесь $p = ka(\sin\gamma - \sin\Theta)$ и $q = kl(\cos\Theta - \cos\gamma)$.

- Пучок теневого излучения в окрестности направления $\Theta = \gamma$. Он описывается обоими слагаемыми в формулах (14.4) и (14.5). Точно в этом направлении он имеет величину

$$\Phi_s^{shad.beam} = \Phi_h^{shad.beam} = \frac{ika^2}{2}\cos\gamma + \frac{i2kal}{\pi}\sin\gamma. \tag{14.25}$$

- Пучок краевых дифракционных лучей, излучаемых неравномерной компонентой $j_{s,h}^{(1)}$ поверхностных источников, сосредоточенных вблизи левого ребра (рис.14.1). Он существует в окрестности направления $\Theta = \pi - \gamma$ и дополняет отраженный пучок (14.21). В случае акустически мягкого цилиндра соответствующее выражение для него следует из формулы (14.12) с очевидной заменой функции $F_h^{(1)}$ на $F_s^{(1)}$. Точно в направлении $\Theta = \pi - \gamma$ этот пучок определяется выражениями

$$\Phi_s^{fr.beam1} = \frac{a}{2\pi} \mathrm{e}^{-i2kl\cos\gamma} \int_0^{2\pi} f^{(1)left}(\psi, \pi - \gamma) d\psi, \tag{14.26}$$

$$\Phi_h^{fr.beam1} = \frac{a}{2\pi} \mathrm{e}^{-i2kl\cos\gamma} \int_0^{2\pi} g^{(1)left}(\psi, \pi - \gamma) d\psi. \tag{14.27}$$

- Пучок краевых дифракционных лучей, излучаемых неравномерной компонентой $j_{s,h}^{(1)}$ поверхностных источников, сосредоточенных вблизи обоих ребер (рис.14.1). Он распространяется в направлении $\Theta = \gamma$ и дополняет теневое излучение. Этот пучок описывается формулой (14.11). Точно в направлении $\Theta = \gamma$ он имеет величину

$$\Phi_s^{fr.shad.beam} = \frac{a}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} f^{(1)left}(\psi,\gamma)d\psi + \int_\pi^{2\pi} f^{(1)right}(\psi,\gamma)d\psi\right], \tag{14.28}$$

$$\Phi_h^{fr.shad.beam} = \frac{a}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} g^{(1)left}(\psi,\gamma)d\psi + \int_\pi^{2\pi} g^{(1)right}(\psi,\gamma)d\psi\right]. \tag{14.29}$$

Чтобы устранить скользящую сингулярность, здесь следует исключить некоторую окрестность точек в интегралах по левому ребру.

Вдали от этих пучков рассеянное поле содержит три краевых дифракционных луча, создаваемых полными поверхностными источниками $j_{s,h}^{(0)} + j_{s,h}^{(1)}$. Их величину можно определить путем асимптотической оценки выражений (14.4), (14.5) и (14.11). Однако более простой способ их описания состоит в использовании модифицированных асимптотик (8.12) и (8.13), где следует заменить функции $f^{(1)}$, $g^{(1)}$ функциями $f$, $g$. В результате можно получить следующие выражения для этих лучей:

- Луч 1 описывается формулами

$$\Phi_s^{ray}(1) = \frac{a}{\sqrt{2\pi|p|}} f(1) \mathrm{e}^{i(p+q)} \mathrm{e}^{\mp i\pi/4}, \tag{14.30}$$

$$\Phi_h^{ray}(1) = \frac{a}{\sqrt{2\pi|p|}} g(1) \mathrm{e}^{i(p+q)} \mathrm{e}^{\mp i\pi/4} \tag{14.31}$$

и распространяется от стационарной точки 1 (рис.14.1). Этот луч существует в областях $0 \le \Theta < \gamma$, $\gamma < \Theta < \pi - \gamma$, $\pi - \gamma < \Theta \le 3\pi/2$. Коэффициент $\exp(-i\pi/4)$ берется для положительных значений параметра $p$, а коэффициент $\exp(+i\pi/4)$ — для отрицательных значений этого параметра.

- Луч 2 описывается формулами

$$\Phi_s^{ray}(2) = \frac{a}{\sqrt{2\pi|p|}} f(2) \mathrm{e}^{i(q-p)} \mathrm{e}^{\pm i\pi/4}, \tag{14.32}$$

$$\Phi_h^{ray}(2) = \frac{a}{\sqrt{2\pi|p|}} g(2) \mathrm{e}^{i(q-p)} \mathrm{e}^{\pm i\pi/4} \tag{14.33}$$

и распространяется от стационарной точки 2. Он существует в областях $\pi/2 \le \Theta < \pi - \gamma$, $\pi - \gamma < \Theta < 2\pi - \gamma$ и $2\pi - \gamma < \Theta \le 2\pi$. Коэффициент $\exp(+i\pi/4)$ берется для положительных значений параметра $p$, а коэффициент $\exp(-i\pi/4)$ — для отрицательных значений этого параметра.

- Луч 3 описывается формулами

$$\Phi_s^{ray}(3) = \frac{a}{\sqrt{2\pi|p|}} f(3) \mathrm{e}^{-i(q+p)} \mathrm{e}^{\pm i\pi/4}, \tag{14.34}$$

$$\Phi_h^{ray}(3) = \frac{a}{\sqrt{2\pi|p|}} g(3) \mathrm{e}^{-i(q+p)} \mathrm{e}^{\pm i\pi/4} \tag{14.35}$$

и распространяется от стационарной точки 3 (рис. 14.1). Он существует в областях $0 \le \Theta < \gamma$, $\gamma < \Theta \le \pi/2$, $\pi \le \Theta \le 2\pi - \gamma$ и $2\pi - \gamma < \Theta \le 2\pi$. Коэффициент $\exp(+i\pi/4)$ берется для положительных значений параметра $p$, а коэффициент $\exp(-i\pi/4)$ — для отрицательных значений этого параметра.

В приведенных выражениях функции $f$, $g$ и $f^{(1)}$, $g^{(1)}$ определяются в соответствии с главами 2, 3 и 4. Мы используем для них следующие обозначения:

$$f(m) = f(\phi_m, \phi_{0m}, \alpha), \quad g(m) = g(\phi_m, \phi_{0m}, \alpha), \tag{14.36}$$

$$f^{(1)}(m) = f^{(1)}(\phi_m, \phi_{0m}, \alpha), \quad g^{(1)}(m) = g^{(1)}(\phi_m, \phi_{0m}, \alpha), \tag{14.37}$$

где $m = 1, 2, 3$. Здесь $\alpha = 3\pi/2$ и

$$\phi_1 = 3\pi/2 - \Theta, \quad \phi_{01} = \pi/2 - \gamma, \tag{14.38}$$

$$\phi_2 = \Theta - \pi/2, \quad \phi_{02} = \pi/2 + \gamma, \tag{14.39}$$

$$\phi_3 = \Theta - \pi, \text{если } \pi \le \Theta \le 2\pi, \tag{14.40}$$

$$\phi_3 = \pi + \Theta, \text{если } 0 \le \Theta \le \pi/2, \tag{14.41}$$

$$\phi_{03} = \gamma. \tag{14.42}$$

Углы $\phi$, $\phi_0$ для функций $f^{(1)left}[\phi(\psi), \phi_0(\psi), \alpha]$, $g^{(1)left}[\phi(\psi), \phi_0(\psi), \alpha]$ определяются соотношениями (14.15) и (14.16), а для функций $f^{(1)right}[\phi(\psi), \phi_0(\psi), \alpha]$, $g^{(1)right}[\phi(\psi), \phi_0(\psi), \alpha]$ — соотношениями (14.17), (14.18).

Все дифракционные лучи испытывают фазовый скачок ($+\pi/2$ или $-\pi/2$), когда они пересекают фокальные линии $\Theta = \gamma$ и $\Theta = \pi - \gamma$, которые являются осями дифракционных пучков.

### 14.1.5. Уточненные асимптотики для пучка, зеркально отраженного от цилиндрической поверхности

В этом разделе мы исследуем более детально дифракционный пучок, отраженный от боковой поверхности цилиндра в зеркальном направлении $\Theta = 2\pi - \gamma$ (рис. 14.1). В первом приближении эта задача изучалась в предыдущем разделе. Теперь мы рассмотрим некоторые тонкие детали теории, которые находятся за пределами первого приближения. Результаты этого раздела были ранее опубликованы в статье (Ufimtsev, 1989).

Согласно ФТД, рассеянное поле излучается равномерной $j^{(0)}$ и неравномерной $j^{(1)}$ компонентами рассеивающих источников, которые возбуждаются падающей волной на поверхности тела. До сих пор мы исследовали поле, создаваемое только *главной* частью компоненты $j^{(1)}$, которая обусловлена *изломами* (краями) на поверхности тела. Обозначим ее символом $j^{(1)}_{\text{кр}}$.

Другая компонента $j^{(1)}_{dif}$ обусловлена *плавным искривлением* рассеивающей поверхности. Здесь нижний индекс $dif$ указывает на то, что эта компонента является следствием поперечной *диффузии* поля в отраженных лучах. Она асимптотически мала по сравнению с компонентами $j^{(0)}$ и $j^{(1)}_{\text{кр}}$. В частном случае круглого цилиндра отношение $j^{(1)}_{dif} / j^{(0)}$ есть величина порядка $1/ka$. Поэтому компонентой $j^{(1)}_{dif}$ обычно пренебрегают в расчетах рассеяния на толстых цилиндрах. Однако в наших работах (Ufimtsev, 1979, 1981, 1989) было показано, что эта малая компонента, распределенная вдоль всей образующей цилиндра ($-l \le z \le l$, $\psi = 3\pi/2$, $kl \gg 1$) создает в зеркальном направлении $\Theta = 2\pi - \gamma$

синфазное излучение такого же порядка $(ka)^{-1/2}$, как и поле, создаваемое компонентой $j_{\text{кр}}^{(1)}$. Следовательно, такое дополнительное излучение необходимо включить в поле отраженного дифракционного пучка. Это обстоятельство является первой важной деталью в построении более точной теории.

Кроме того, в тех же работах (Ufimtsev, 1979, 1981, 1989) было показано, что второй член асимптотического разложения для поля ФО является величиной порядка $(ka)^{-1/2}$ и также должен быть учтен при вычислении поля в зеркальном направлении. Обычно высшие члены в асимптотическом разложении для поля ФО считаются неверными и игнорируются. Однако в рамках ФТД поле ФО является составной частью рассеянного поля. Поэтому в выражение для рассеянного поля небходимо включить вторые члены асимптотики ФО, которые имеют тот же порядок величины, как и поле, создаваемое неравномерной компонентой $j_{dif}^{(1)}$. В этом заключается вторая важная деталь для построения более точной теории.

В данном разделе эти наблюдения демонстрируются в аналитической форме для диаграммы $\Phi(\Theta,\gamma)$ рассеянного поля (14.20). Рассеяное поле изучается в окрестности зеркального направления $\Theta = 2\pi - \gamma$. Поле ФО создается компонентой $j^{(0)}$ и описывается выражениями (14.4) и (14.5). Первое слагаемое в них относится к полю, рассеянному левым торцом цилиндра. Его вклад в поле в области $3\pi/2 < \Theta < 2\pi$ создается окрестностью точки 2 (рис. 14.1) и определяется асимптотикой функции Бесселя. В результате, рассеянное поле в этой области можно представить в виде

$$\Phi_s^{(0)} = -\frac{a e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi p}} \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma - \sin\Theta} e^{i(q-p)} - \frac{ikal}{\pi} \sin\gamma \frac{\sin q}{q} \int_{\pi}^{2\pi} e^{ip\sin\psi} \sin\psi d\psi, \quad (14.43)$$

$$\Phi_h^{(0)} = -\frac{a e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi p}} \frac{\cos\Theta}{\sin\gamma - \sin\Theta} e^{i(q-p)} - \frac{ikal}{\pi} \sin\Theta \frac{\sin q}{q} \int_{\pi}^{2\pi} e^{ip\sin\psi} \sin\psi d\psi, \quad (14.44)$$

где $p = ka(\sin\gamma - \sin\Theta)$, $q = kl(\cos\Theta - \cos\gamma)$. Здесь в соответствии со сделанными выше замечаниями мы сохраняем два первых члена в асимптотическом разложении для интеграла и получаем следующие приближенные оценки:

$$\Phi_s^{(0)} = -\frac{a}{\sqrt{2\pi p}} \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma - \sin\Theta} e^{i(q-p)+i\pi/4} - \\ -\frac{ikal}{\pi} \sin\gamma \frac{\sin q}{q} \sqrt{\frac{2\pi}{p}} \left(-1 + i\frac{3}{8p}\right) e^{-ip+i\pi/4}, \quad (14.45)$$

$$\Phi_h^{(0)} = -\frac{a}{\sqrt{2\pi p}} \frac{\cos\Theta}{\sin\gamma - \sin\Theta} e^{i(q-p)+i\pi/4} - \\ -\frac{ikal}{\pi} \sin\Theta \frac{\sin q}{q} \sqrt{\frac{2\pi}{p}} \left(-1 + i\frac{3}{8p}\right) e^{-ip+i\pi/4}. \quad (14.46)$$

Поле, излучаемое компонентой $j^{(1)}_{\text{кр}}$, определяется согласно разд. 14.1.4:

$$\Phi^{(1)}_{s,\,\text{кр}} = \frac{a}{\sqrt{2\pi p}}[f^{(1)}(2)\mathrm{e}^{iq} + f^{(1)}(3)\mathrm{e}^{-iq}]\mathrm{e}^{-ip+i\pi/4}, \qquad (14.47)$$

$$\Phi^{(1)}_{h,\,\text{кр}} = \frac{a}{\sqrt{2\pi p}}[g^{(1)}(2)\mathrm{e}^{iq} + g^{(1)}(3)\mathrm{e}^{-iq}]\mathrm{e}^{-ip+i\pi/4}. \qquad (14.48)$$

Функции $f^{(1)} = f - f^{(0)}$, $g^{(1)} = g - g^{(0)}$ описываются в главах 2, 3 и 4. Их аргументы определяются формулами (14.38–14.42).

Неравномерная компонента $j^{(1)}_{dif}$, обусловленная плавным искривлением цилиндрической поверхности, находится путем обобщения известных результатов работы (Franz and Galle, 1955) на случай наклонного падения плоской волны по отношению к оси цилиндра. Напоминаем, что данная компонента является следствием поперечной *диффузии* поля в отраженных лучах. Полученные при этом асимптотики имеют вид

$$j^{(1)}_{s,\,dif} = u_0\,\frac{1}{a\sin^2\psi}\,\mathrm{e}^{ik(z\cos\gamma + a\sin\gamma\sin\psi)}, \qquad (14.49)$$

$$j^{(1)}_{h,\,dif} = u_0\,\frac{i}{ka\sin\gamma\sin^3\psi}\,\mathrm{e}^{ik(z\cos\gamma + a\sin\gamma\sin\psi)}. \qquad (14.50)$$

Поле, излучаемое этими источниками, находится с применением формул (1.16), (1.17) и (14.20):

$$\Phi^{(1)}_{s,\,dif} = -\frac{l}{2\pi}\frac{\sin q}{q}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ip\sin\psi}}{\sin^2\psi}d\psi \sim -\frac{l}{2\pi}\frac{\sin q}{q}\sqrt{\frac{2\pi}{p}}\,\mathrm{e}^{-ip+i\pi/4}, \qquad (14.51)$$

$$\Phi^{(1)}_{h,\,dif} = \frac{l}{2\pi}\frac{\sin\Theta}{\sin\gamma}\frac{\sin q}{q}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ip\sin\psi}}{\sin^2\psi}d\psi \sim \frac{l}{2\pi}\frac{\sin\Theta}{\sin\gamma}\frac{\sin q}{q}\sqrt{\frac{2\pi}{p}}\,\mathrm{e}^{-ip+i\pi/4} \qquad (14.52)$$

при условии $p \gg 1$.

Полное рассеянное поле равно

$$\Phi^{tot} = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)}_{\text{кр}} + \Phi^{(1)}_{dif}. \qquad (14.53)$$

Вдали от зеркального направления это поле содержит величины порядка $(ka)^{-1/2}$ и $(kl\sqrt{ka})^{-1}$. Точно в зеркальном направлении $\Theta = 2\pi - \gamma$ оно имеет компоненты

$$\Phi^{(0)}_{s} = \frac{a}{\sqrt{\pi ka\sin\gamma}}\left(ikl\sin\gamma + \frac{3}{16}\frac{l}{a} - \frac{1}{4}\mathrm{ctg}\gamma\right)\mathrm{e}^{-i2ka\sin\gamma + i\pi/4}, \qquad (14.54)$$

$$\Phi^{(0)}_{h} = -\frac{a}{\sqrt{\pi ka\sin\gamma}}\left(ikl\sin\gamma + \frac{3}{16}\frac{l}{a} + \frac{1}{4}\mathrm{ctg}\gamma\right)\mathrm{e}^{-i2ka\sin\gamma + i\pi/4}, \qquad (14.55)$$

$$\Phi^{(1)}_{s,\,\text{кр}} = -\frac{a}{\sqrt{\pi ka\sin\gamma}}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{2(\pi-2\gamma)}{3}\right)\right]^{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\gamma\right\} \mathrm{e}^{-i2ka\sin\gamma + i\pi/4}, \tag{14.56}$$

$$\Phi^{(1)}_{h,\,\text{кр}} = -\frac{a}{\sqrt{\pi ka\sin\gamma}}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{2(\pi-2\gamma)}{3}\right)\right]^{-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\gamma\right\} \mathrm{e}^{-i2ka\sin\gamma + i\pi/4}, \tag{14.57}$$

$$\Phi^{(1)}_{s,dif} = \Phi^{(1)}_{h,dif} = -\frac{a}{\sqrt{\pi ka\sin\gamma}}\frac{l}{2a}\mathrm{e}^{-i2ka\sin\gamma + i\pi/4}. \tag{14.58}$$

Суммируя все эти компоненты, получаем полное поле в зеркальном направлении:

$$\Phi_s = \frac{a}{\sqrt{\pi ka\sin\gamma}}\left\{ikl\sin\gamma + \frac{3}{16}\frac{l}{a} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{2(\pi-2\gamma)}{3}\right)\right]^{-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{l}{2a}\right\} \mathrm{e}^{-i2ka\sin\gamma + i\pi/4}, \tag{14.59}$$

$$\Phi_h = \frac{a}{\sqrt{\pi ka\sin\gamma}}\left\{-ikl\sin\gamma - \frac{3}{16}\frac{l}{a} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{2(\pi-2\gamma)}{3}\right)\right]^{-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{l}{2a}\right\} \mathrm{e}^{-i2ka\sin\gamma + i\pi/4}. \tag{14.60}$$

Происхождение и физический смысл каждого слагаемого здесь ясен из предыдущих выражений для компонент поля. Первое и второе слагаемые в фигурных скобках относятся соответственно к первому и второму членам асимптотического разложения для поля ФО. Третье и четвертое слагаемые в фигурных скобках описывают вклад, создаваемый *краевой неравномерной* компонентой $j^{(1)}_{\text{кр}}$ поверхностных источников. Последнее слагаемое определяет вклад в рассеянное поле, создаваемый *неравномерной* компонентой $j^{(1)}_{dif}$ поверхностных источников, которая обусловлена плавным искривлением цилиндрической поверхности и является следствием поперечной диффузии поля в отраженных лучах.

Заметим, что первичные краевые волны, распространяющиеся вдоль торца цилиндра от точки 1 к точке 2 (рис. 14.1), испытывают там дифракцию и создают вторичные краевые волны в области $3\pi/2 < \Theta \leq 2\pi$. Эти вторичные волны можно определить, применяя теорию, развитую в главе 10. Их вклад в рассеянное поле имеет величину порядка $(ka)^{-3/2}$ при дифракции на акустически мягком цилиндре и порядка $(ka)^{-1}$ при дифракции на жестком цилиндре. Эти величины малы по сравнению с полями (14. 59), (14.60) и, следовательно, ими можно пренебречь.

Аналогичная теория для электромагнитных волн, рассеянных на идеально проводящем цилиндре конечного размера, опубликована в статье (Ufimtsev, 1981) и рассматривается ниже, в разделе 14.2.3.

## 14.2. Электромагнитные волны

### 14.2.1. *E*-поляризация

На поверхности идеально проводящего цилиндра (рис. 14.1) падающая волна

$$E_x^{inc} = E_{0x}\mathrm{e}^{ik(z\cos\gamma + y\sin\gamma)}, \quad E_{y,z}^{inc} = H_x^{inc} = 0 \tag{14.61}$$

возбуждает *равномерные* компоненты тока (13.43) и (13.44). Поле, излучаемое этими токами, определяется формулами (1.92) и (1.93). В плоскости $yOz$ ($\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$) это поле описывается выражениями, полностью идентичными соотношениям (14.3), (14.4) для акустических волн:

$$E_x^{(0)} = [E_{0x}/u_0]\cdot u_s^{(0)}. \tag{14.62}$$

В частности, это соотношение означает, что кривые ФО на рис. 14.2 и 14.3 для акустических волн, рассеянных на *акустически мягком* цилиндре, также изображают рассеяние электромагнитных волн (с $E_x$-поляризацией) на *идеально проводящем* цилиндре.

Поле, излучаемое *неравномерным* током $\vec{j}_{\text{кр}}^{(1)}$, определяется в соответствии с разд. 7.8:

$$E_x^{(1)} = E_x^{(1)left} + E_x^{(1)right}, \tag{14.63}$$

где функция

$$E_x^{(1)left} = E_{0x}\frac{a}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\mathrm{e}^{iq}\int_0^{2\pi}\{\sin\psi F_\theta^{(1)left}(\psi,\theta,\phi)\cdot\theta_x -$$
$$-\cos\gamma\cos\psi\,[G_\theta^{(1)left}(\psi,\theta,\phi)\cdot\theta_x + G_\phi^{(1)left}(\psi,\theta,\phi)\cdot\phi_x]\}\mathrm{e}^{ip\sin\psi}d\psi \tag{14.64}$$

описывает поле, рассеянное левым ребром, а функция

$$E_x^{(1)right} = E_{0x}\frac{a}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\mathrm{e}^{-iq}\int_\pi^{2\pi}\{\sin\psi F_\theta^{(1)right}(\psi,\theta,\phi)\cdot\theta_x -$$
$$-\cos\gamma\cos\psi[G_\theta^{(1)right}(\psi,\theta,\phi)\cdot\theta_x + G_\phi^{(1)right}(\psi,\theta,\phi)\cdot\phi_x]\}\mathrm{e}^{ip\sin\psi}d\psi \tag{14.65}$$

представляет поле, рассеянное правым ребром. Здесь $p = ka(\sin\gamma - \sin\Theta)$, $q = kl(\cos\Theta - \cos\gamma)$. Кроме того, выражеия (14.15–14.18) определяют локальные углы $\phi$, $\phi_0$ (различные для левого и правого ребер), а выражения (13.51), (13.52) определяют единичные векторы $\hat{\theta}, \hat{\phi}$ (одинаковые для обоих ребер).

Для направления вперед ($\Theta = \gamma$), которое принадлежит к дифракционному конусу, из этих выражений следуют соотношения

$$E_x^{(1)left} = E_{0x}\,\frac{a}{2\pi}\,\frac{e^{ikR}}{R}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\gamma_0}f^{(1)}(\pi+\phi_0,\phi_0,3\pi/2)+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos^2\gamma\cos^2\psi}{\sin^2\gamma_0}g^{(1)}(\pi+\phi_0,\phi_0,3\pi/2)+\frac{\sin\gamma\cos\gamma\sin\psi\cos^2\psi}{\sin^2\gamma_0}\right\}d\psi, \quad (14.66)$$

$$E_x^{(1)right} = E_{0x}\,\frac{a}{2\pi}\,\frac{e^{ikR}}{R}\int_\pi^{2\pi}\left\{\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\gamma_0}f^{(1)}(\pi+\phi_0,\phi_0,3\pi/2)+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos^2\gamma\cos^2\psi}{\sin^2\gamma_0}g^{(1)}(\pi+\phi_0,\phi_0,3\pi/2)+\frac{\sin\gamma\cos\gamma\sin\psi\cos^2\psi}{\sin^2\gamma_0}\right\}d\psi. \quad (14.67)$$

Мы подчеркиваем опять, что углы $\phi$, $\phi_0$, используемые в функциях $E_x^{(1)left}$ и $E_x^{(1)right}$, отличаются друг от друга.

Отметим также, что в случае рассеяния на диске выражение типа (14.66) (но, разумеется, с углом $\alpha = 2\pi$) точно сводится к функции

$$E_x^{(1)} = E_{0x}\,\frac{a}{\pi\sin^2\gamma}\left[2\cos\gamma K\left(\frac{\pi}{2},\sin\gamma\right)-\frac{1+\cos^2\gamma}{\cos\gamma}E\left(\frac{\pi}{2},\sin\gamma\right)\right]\frac{e^{ikR}}{R}, \quad (14.68)$$

полученной ранее в работах (Уфимцев, 1962; Буторин et al., 1987). Здесь функции

$$K(\pi/2,x)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-x^2\cos^2\psi}}, \quad E(\pi/2,x)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-x^2\cos^2\psi}\,d\psi \quad (14.69)$$

являются полными эллиптическими интегралами (Gradshteyn and Ryzhik, 1994).

Чтобы упростить сравнительный анализ электромагнитных и акустических волн, рассеянных на конечном цилиндре, полное электромагнитное поле удобно представить в форме

$$E_x = E_x^{(0)} + E_x^{(1)} = E_{0x}[\Phi_{ex}^{(0)} + \Phi_{ex}^{(1)}]\frac{e^{ikR}}{R} = E_{0x}\Phi_{ex}(\Theta,\gamma)\frac{e^{ikR}}{R}, \quad (14.70)$$

аналогичной (14.20) для акустических волн. Согласно соотношению (14.62), все асимптотики для электромагнитных пучков и лучей в *приближении ФО* идентичны их акустическим аналогам, приведенным в разделе 14.1.4 для поля $u_s^{(0)}$:

$$\Phi_{ex}^{(0)}(\Theta,\gamma)=\Phi_s^{(0)}(\Theta,\gamma). \tag{14.71}$$

Лучевые асимптотики для поля $E_x^{(1)}$ также идентичны их акустическим аналогам для поля $u_s^{(1)}$, представленным в разделе 14.1.4:

$$\Phi_{ex}^{(1)}(\Theta,\gamma)=\Phi_s^{(1)}(\Theta,\gamma). \tag{14.72}$$

Однако асимптотики для дифракционных пучков, излучаемых *неравномерными краевыми* источниками $j_{\text{кр}}^{(1)}$, различны для электромагнитных и акустических волн:

$$\Phi_{ex}^{(1)beam}(\Theta,\gamma)\neq\Phi_s^{(1)beam}(\Theta,\gamma). \tag{14.73}$$

### 14.2.2. *H*-поляризация

На поверхности идеально проводящего цилиндра (рис. 14.1) падающая волна

$$H_x^{inc}=H_{0x}\mathrm{e}^{ik(z\cos\gamma+y\sin\gamma)},\quad H_{y,z}^{inc}=E_x^{inc}=0 \tag{14.74}$$

возбуждает равномерные компоненты тока (13.68) и (13.69). Излучаемое ими поле описывается формулами (1.92), (1.93). В плоскости $yOz$ ($\varphi=\pi/2$ и $\varphi=3\pi/2$) оно определяется выражениями, идентичными формулам (14.3), (14.5) для акустических волн:

$$H_x^{(0)}=[H_{0x}/u_0]\cdot u_h^{(0)}. \tag{14.75}$$

В частности, это соотношение означает, что кривые ФО на рис. 14.4–14.10 для акустических волн, рассеянных на *жестком* цилиндре, также изображают рассеяние электромагнитных волн (с $H_x$-поляризацией) на идеально проводящем цилиндре.

Поле, излучаемое неравномерной компонентой тока ($\vec{j}_{\text{кр}}^{(1)}$), вычисляется согласно разд. 7.8. Выражение

$$H_x^{(1)left}=H_{0x}\frac{a}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\mathrm{e}^{iq}\int_0^{2\pi}\{\cos\gamma\cos\psi\,F_\theta^{(1)left}(\psi,\theta,\phi)\cdot\phi_x+$$
$$+\sin\psi[G_\theta^{(1)left}(\psi,\theta,\phi)\cdot\phi_x-G_\phi^{(1)left}(\psi,\theta,\phi)\cdot\theta_x]\}\mathrm{e}^{ip\sin\psi}d\psi \tag{14.76}$$

описывает поле, рассеянное левым ребром, а выражение

$$H_x^{(1)right}=H_{0x}\frac{a}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\mathrm{e}^{-iq}\int_\pi^{2\pi}\{\cos\gamma\cos\psi\,F_\theta^{(1)right}(\psi,\theta,\phi)\cdot\phi_x+$$
$$+\sin\psi[G_\theta^{(1)right}(\psi,\theta,\phi)\cdot\phi_x-G_\phi^{(1)right}(\psi,\theta,\phi)\cdot\theta_x]\}\mathrm{e}^{ip\sin\psi}d\psi \tag{14.77}$$

представляет поле, рассеянное правым ребром. Здесь $p = ka(\sin\gamma - \sin\Theta)$, $q = kl(\cos\Theta - \cos\gamma)$. Кроме того, выражения (14.15–14.18) определяют локальные углы $\phi$, $\phi_0$ (различные для левого и правого ребер), а выражения (13.51), (13.52) определяют единичные векторы $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ (одинаковые для обоих ребер).

Для направления вперед ($\Theta = \gamma$), которое принадлежит к дифракционному конусу, из этих выражений следуют соотношения

$$H_x^{(1)left} = H_{0x}\frac{a}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\cos^2\gamma\cos^2\psi}{\sin^2\gamma_0}f^{(1)}(\pi+\phi_0,\phi_0,3\pi/2)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\gamma_0}g^{(1)}(\pi+\phi_0,\phi_0,3\pi/2)-\frac{\sin\gamma\cos\gamma\sin\psi\cos^2\psi}{\sin^2\gamma_0}\right\}d\psi, \quad (14.78)$$

$$H_x^{(1)right} = H_{0x}\frac{a}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}\int_\pi^{2\pi}\left\{\frac{\cos^2\gamma\cos^2\psi}{\sin^2\gamma_0}f^{(1)}(\pi+\phi_0,\phi_0,3\pi/2)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\gamma_0}g^{(1)}(\pi+\phi_0,\phi_0,3\pi/2)-\frac{\sin\gamma\cos\gamma\sin\psi\cos^2\psi}{\sin^2\gamma_0}\right\}d\psi. \quad (14.79)$$

Мы подчеркиваем опять, что углы $\phi$, $\phi_0$, используемые в функциях $H_x^{(1)left}$ и $H_x^{(1)right}$, отличаются друг от друга.

Отметим также, что в случае рассеяния на диске выражение типа (14.78) (но, разумеется, с углом $\alpha = 2\pi$) точно сводится к формуле

$$H_x^{(1)} = H_{0x}\frac{a}{\pi\sin^2\gamma}\left[\frac{1+\cos^2\gamma}{\cos\gamma}E\left(\frac{\pi}{2},\sin\gamma\right)-2\cos\gamma\,K\left(\frac{\pi}{2},\sin\gamma\right)\right]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \quad (14.80)$$

полученной ранее в работах (Уфимцев, 1962; Буторин et al., 1987), где функции $E(\pi/2, x)$ и $K(\pi/2, x)$ являются полными эллиптическими интегралами (14.69).

Чтобы упростить сравнительный анализ электромагнитных и акустических волн, рассеянных на конечном цилиндре, полное электромагнитное поле удобно представить в форме

$$H_x = H_x^{(0)} + H_x^{(1)} = H_{0x}[\Phi_{hx}^{(0)} + \Phi_{hx}^{(1)}]\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} = H_{0x}\Phi_{hx}(\Theta,\gamma)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \quad (14.81)$$

аналогичной (14.20) для акустических волн. Согласно соотношению (14.75), все асимптотики для электромагнитных пучков и лучей в *приближении ФО* идентичны их акустическим аналогам, приведенным в разделе 14.1.4 для поля $u_h^{(0)}$:

$$\Phi_{hx}^{(0)}(\Theta,\gamma) = \Phi_h^{(0)}(\Theta,\gamma). \quad (14.82)$$

Оказывается также, что лучевые асимптотики для электромагнитного поля $H_x^{(1)}$ идентичны соответствующим асимптотикам для акустического поля $u_h^{(1)}$:

$$\Phi_{hx}^{(1)}(\Theta,\gamma)=\Phi_{h}^{(1)}(\Theta,\gamma). \tag{14.83}$$

Однако дифракционные пучки в направлениях $\Theta=\gamma$ и $\Theta=\pi-\gamma$, излучаемые краевой неравномерной компонентой $j_{\text{кр}}^{(1)}$, различны для полей $H_x^{(1)}$ и $u_h^{(1)}$:

$$\Phi_{hx}^{(1)beam}(\Theta,\gamma)\neq\Phi_{h}^{(1)beam}(\Theta,\gamma), \tag{14.84}$$

хотя они имеют величину *одного и того же порядка*. Кроме того, анализ рис. 14.7 и 14.9 выявляет следующие детали:

- Уже в случае цилиндра с диаметром $d=\lambda$ и длиной $L=3\lambda$ величина $\Phi_h^{(1)}$ примерно на 18 дБ меньше по сравнению с ФО-пучками $\Phi_h^{(0)beam}$ в направлениях $\Theta=\gamma$ и $\Theta=\pi-\gamma$ и почти на 28 дБ меньше в направлении $\Theta=2\pi-\gamma$.
- В случае цилиндра с диаметром $d=3\lambda$ и длиной $L=9\lambda$ величина $\Phi_h^{(1)}$ примерно на 28 дБ меньше по сравнению с ФО-пучками $\Phi_h^{(0)beam}$ в направлениях $\Theta=\gamma$ и $\Theta=\pi-\gamma$ и почти на 35 дБ меньше в направлении $\Theta=2\pi-\gamma$.

Эти наблюдения ясно показывают, что для цилиндров таких размеров (и, разумеется, для цилиндров большего размера) различие между акустическим и электромагнитным рассеянием [в плоскости $yOz$ (рис.14.1)] практически пренебрежимо.

### 14.2.3. Уточненные асимптотики для пучка, зеркально отраженного от цилиндрической поверхности

Этот раздел представляет собой электромагнитную версию раздела 14.1.5.

Здесь изучается рассеяние электромагнитных волн на идеально проводящем цилиндре. Рассеянное поле исследуется в окрестности зеркального направления $\Theta=2\pi-\gamma$ в плоскости $\varphi=3\pi/2$. Исследование основано на статье (Уфимцев, 1981).

Согласно разделам 14.2.1 и 14.2.2 существуют следующие асимптотические соотношения между электромагнитными и акустическими дифракционными волнами в указанной окрестности:

$$E_x=E_x^{(0)}+E_{x,\,\text{кр}}^{(1)}=[E_{0x}/u_0]\cdot u_s=[E_{0x}/u_0]\cdot[u_s^{(0)}+u_{s,\,\text{кр}}^{(1)}], \tag{14.85}$$

$$H_x=H_x^{(0)}+H_{x,\,\text{кр}}^{(1)}=[H_{0x}/u_0]\cdot u_h=[H_{0x}/u_0]\cdot[u_h^{(0)}+u_{h,\,\text{кр}}^{(1)}]. \tag{14.86}$$

Они справедливы при условиях $ka\sin\gamma\gg 1$ и $kl\gg 1$. Здесь величины с верхним индексом «0» обозначают поля, которые создаются равномерными источниками ($j^{(0)}$) и соответствуют приближению ФО. Величины $E_{x,\,\text{кр}}^{(1)}$, $H_{x,\,\text{кр}}^{(1)}$, $u_{s,\,\text{кр}}^{(1)}$ и $u_{h,\,\text{кр}}^{(1)}$ обозначают поля, создаваемые неравномерными краевыми компонентами $j_{\text{кр}}^{(1)}$, сосредоточенными вблизи ребер цилиндра.

Кроме того, в полном рассеянном поле существуют компоненты $E^{(1)}_{x,dif}$ и $H^{(1)}_{x,dif}$, излучаемые неравномерными источниками $j^{(1)}_{dif}$, которые обусловлены плавным искривлением цилиндрической поверхности. Как показано в разделе 14.1.5 на примере акустических волн, эти компоненты (в окрестности зеркального направления $\Theta = 2\pi - \gamma$) имеют величину того же порядка, что и поле, излучаемое краевыми неравномерными источниками $j^{(1)}_{\text{кр}}$. Главная цель этого раздела состоит в вычислении полей $E^{(1)}_{x,dif}$ и $H^{(1)}_{x,dif}$.

Сначала необходимо определить неравномерную компоненту тока $\vec{j}^{(1)}_{\text{кр}}$. Для этого мы используем результаты статьи (Franz and Galle, 1955), которые также можно найти в книге (Bowman et al., 1987). Эта статья содержит высокочастотные асимптотики для поверхностного тока, возбуждаемого плоской волной на бесконечном круглом цилиндре. В ней предполагается, что падающая волна распространяется в направлении, перпендикулярном к оси цилиндра. Приходится выполнить специальное исследование, чтобы обобщить результаты данной статьи на случай наклонного падения плоской волны. Мы опускаем все выкладки и приводим окончательные выражения для тока $\vec{j}^{(1)}_{dif}$:

$$j^{(1)}_{x,dif} = -Y_0 E_{0x} \frac{i}{ka\sin^2\psi} \mathrm{e}^{ik(z\cos\gamma + a\sin\gamma\sin\psi)}, \tag{14.87}$$

$$j^{(1)}_{y,dif} = Y_0 E_{0x} \frac{i\cos\psi}{ka\sin^3\psi} \mathrm{e}^{ik(z\cos\gamma + a\sin\gamma\sin\psi)}, \tag{14.88}$$

$$j^{(1)}_{z,dif} = Y_0 E_{0x} \frac{i\cos\gamma\cos\psi}{ka\sin\gamma\sin^3\psi} \mathrm{e}^{ik(z\cos\gamma + a\sin\gamma\sin\psi)} \tag{14.89}$$

в случае $E$-поляризации, и

$$j^{(1)}_{z,dif} = H_{0x} \frac{i}{ka\sin\gamma\sin^2\psi} \mathrm{e}^{ik(z\cos\gamma + a\sin\gamma\sin\psi)}, \quad j^{(1)}_{x,y,dif} = 0 \tag{14.90}$$

в случае $H$-поляризации. Затем мы следуем формуле (1.91) и вычисляем интегралы для запаздывающего векторного потенциала. Интегралы по переменной $\zeta$ вдоль образующей цилиндра вычисляются в явном виде. Интегралы по переменной $\psi$ по периметру цилиндра вычисляются асимптотически методом стационарной фазы.

Затем используются формулы (1.92), (1.93) и определяется рассеянное поле в дальней зоне от цилиндра:

$$E^{(1)}_{x,dif} = E_{0x}\Phi^{(1)}_{ex,dif}(\Theta,\gamma)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{14.91}$$

$$H^{(1)}_{x,dif} = H_{0x}\Phi^{(1)}_{hx,dif}(\Theta,\gamma)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{14.92}$$

где

$$\Phi^{(1)}_{ex,dif}(\Theta,\gamma) = l\frac{\sin q}{q}\frac{\mathrm{e}^{-ip+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi p}}, \tag{14.93}$$

$$\Phi^{(1)}_{hx,dif}(\Theta,\gamma) = -l\frac{\sin\Theta}{\sin\gamma}\frac{\sin q}{q}\frac{\mathrm{e}^{-ip+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi p}}, \tag{14.94}$$

причем $p = ka(\sin\gamma - \sin\Theta)$, $q = kl(\cos\Theta - \cos\gamma)$. Сравнение с аналогичными акустическими величинами (14.51), (14.52) показывает, что они отличаются только знаком.

Теперь можно вычислить полное рассеянное поле

$$E^{tot}_x = E_{0x}\Phi^{tot}_{ex}(\Theta,\gamma)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{14.95}$$

$$H^{tot}_x = H_{0x}\Phi^{tot}_{hx}(\Theta,\gamma)\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}, \tag{14.96}$$

где

$$\Phi^{tot}_{ex} = \Phi^{(0)}_{ex} + \Phi^{(1)}_{ex,\,\text{кр}} + \Phi^{(1)}_{ex,dif}, \tag{14.97}$$

$$\Phi^{tot}_{hx} = \Phi^{(0)}_{hx} + \Phi^{(1)}_{hx,\,\text{кр}} + \Phi^{(1)}_{hx,dif}. \tag{14.98}$$

Согласно формулам (14.85) и (14.86),

$$\Phi^{(0)}_{ex} = \Phi^{(0)}_{s}, \quad \Phi^{(1)}_{ex,\,\text{кр}} = \Phi^{(1)}_{s,\,\text{кр}}, \tag{14.99}$$

$$\Phi^{(0)}_{hx} = \Phi^{(0)}_{h}, \quad \Phi^{(1)}_{hx,\,\text{кр}} = \Phi^{(1)}_{h,\,\text{кр}}, \tag{14.100}$$

где $\Phi^{(0)}_{s,h}, \Phi^{(1)}_{s,h,\,\text{кр}}$ суть акустические величины, определенные в разделе 14.1.5.

Точно в зеркальном направлении $\Theta = 2\pi - \gamma$ рассеянное поле описывается выражениями

$$\Phi^{tot}_{ex} = \frac{a}{\sqrt{\pi ka\sin\gamma}}\left\{ikl\sin\gamma + \frac{3}{16}\frac{l}{a} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{2(\pi - 2\gamma)}{3}\right)\right]^{-1} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{l}{2a}\right\}\mathrm{e}^{-i2ka\sin\gamma + i\pi/4}, \tag{14.101}$$

$$\Phi^{tot}_{hx} = \frac{a}{\sqrt{\pi ka\sin\gamma}}\left\{-ikl\sin\gamma - \frac{3}{16}\frac{l}{a} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{2(\pi - 2\gamma)}{3}\right)\right]^{-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{l}{2a}\right\}\mathrm{e}^{-i2ka\sin\gamma + i\pi/4}. \tag{14.102}$$

Происхождение и физический смысл каждого слагаемого здесь ясен из предыдущих выражений для компонент поля. Первое и второе слагаемые в фигурных скобках относятся соответственно к первому и второму членам асимптотического разложения для поля ФО. Третье и четвертое слагаемые в фигурных скобках описывают вклад, создаваемый *краевой неравномерной* компонентой $j_{\text{кр}}^{(1)}$ поверхностных источников. Последнее слагаемое определяет вклад в рассеянное поле, создаваемый *неравномерной* компонентой $j_{dif}^{(1)}$ поверхностных источников, которая обусловлена плавным искривлением цилиндрической поверхности и является следствием поперечной диффузии поля в отраженных лучах.

Таким образом, исследование зеркально отраженного пучка электромагнитных волн в направлении $\Theta = 2\pi - \gamma$ можно считать завершенным.

## Задачи

**14.1.** Начните с формулы (1.33) и получите выражение (14.4) для диаграммы направленности акустических волн, рассеянных на мягком цилиндре. См. детали в разделах 6.2 и 13.1.1.

**14.2.** Начните с формулы (1.34) и получите выражение (14.5) для диаграммы направленности акустических волн, рассеянных на жестком цилиндре. См. детали в разделах 6.2 и 13.1.1.

**14.3.** Используйте формулы (1.53), (14.4) и получите выражение (14.7) для полного поперечника рассеяния акустически мягкого цилиндра.

**14.4.** Используйте формулы (1.53), (14.5) и получите выражение (14.7) для полного поперечника рассеяния акустически жесткого цилиндра.

**14.5.** Используйте выражение (14.4) и проведите численные расчеты нормированного поперечника рассеяния (14.9) для индивидуальных частей акустически мягкого цилиндра с диаметром $d = 2a = \lambda$ и с длиной $L = 2l = 3\lambda$. Задайте значение $\gamma = 45°$ для угла падения плоской волны. Представьте результаты расчетов графически в форме, показанной на рис. 14.2. Запишите выражение для электромагнитной волны, падающей на идеально проводящий цилиндр и возбуждающей рассеянное поле, которое в приближении ФО идентично изображенному на графике.

**14.6.** Используйте выражение (14.5) и проведите численные расчеты нормированного поперечника рассеяния (14.9) для индивидуальных частей акустически жесткого цилиндра с диаметром $d = 2a = \lambda$ и с длиной $L = 2l = 3\lambda$. Задайте значение $\gamma = 45°$ для угла падения плоской волны. Представьте результаты расчетов графически в форме, показанной на рис. 14.4. Запишите выражение для электромагнитной волны, падающей на идеально проводящий цилиндр и возбуждающей рассеянное поле, которое в приближении ФО идентично изображенному на графике.

**14.7.** Используйте формулы (14.4), (14.5) и проведите численные расчеты для нормированной диаграммы направлености (14.9) теневого излучения (14.10) для цилиндра с диаметром $d = 2a = \lambda$ и с длиной $L = 2l = 3\lambda$. Задайте значение $\gamma = 45°$ для угла падения плоской волны. Представьте результаты расчетов графически в форме, показанной на рис. 14.6. Запишите выражение для электромагнитной волны, падающей на идеально проводящий цилиндр и возбуждающей теневое излучение, которое идентично изображенному на графике.

**14.8.** Плоская волна (14.1) падает на акустически жесткий цилиндр (рис. 14.1). Используйте асимптотическое выражение (7.90) и получите формулу (14.12) для поля, излучаемого неравномерной компонентой $j_h^{(1)}$ поверхностных источников, которая сосредоточена вблизи левого ребра цилиндра. Запишите явное выражение для величины $F_h^{(1)}$ в терминах функций $V_t(\sigma_1, \varphi_0)$, $V_0(\beta_1, \varphi_0)$, $V_t(\sigma_2, \alpha-\varphi_0)$, $V_0(\beta_2, \alpha-\varphi_0)$ и определите параметры $\sigma_{1,2}, \beta_{1,2}$.

**14.9.** Элементарные краевые волны являются функциями локальных углов $\gamma_0$, $\theta$. Получите выражения (14.14) для этих углов. Используйте скалярные произведения единичных векторов $\hat{R}$, $\hat{t}$ и $\hat{t}$, $\hat{k}^i$. Вектор $\hat{R}$ показывает направление рассеяния в плоскости $yOz$, вектор $\hat{t}$ есть касательная к ребру и вектор $\hat{k}^i$ указывает направление падающей волны.

**14.10.** Элементарные краевые волны являются функциями локальных углов $\phi$, $\phi_0$. Получите выражения (14.15), (14.16) для этих углов. Используйте проекции единичных векторов $\hat{R} = \hat{y}\sin\Theta + \hat{z}\cos\Theta$ и $\hat{Q} = -\hat{k}^i = -\hat{y}\sin\gamma - \hat{z}\cos\gamma$ на плоскость, перпендикулярную к касательной $\hat{t}$. Обратите внимание на текст, сопровождающий формулу (7.131).

**14.11.** Примените метод стационарной фазы ко вторым слагаемым в формулах (14.4), (14.5) и получите асимптотики (14.22), (14.23) для дифракционного пучка, отраженного от боковой поверхности конечного цилиндра (рис. 14.1).

**14.12.** Примените метод стационарной фазы к интегралу (14.12) и получите для него асимптотику, аналогичную (14.31) для дифракционных лучей, расходящихся от стационарной точки 1 (рис. 14.1).

**14.13.** Проверьте, что падающая волна (13.42) возбуждает на левом торце (диске) идеально проводящего цилиндра (рис. 13.1) электрический ток (13.43). Используйте формулы (1.91), (1.92), (1.93) и получите явные выражения для электромагнитного поля в плоскости $yOz$. Сравните $E_x$-компоненту с акустическим полем (14.3), (14.4), рассеянным на мягком цилиндре. Подтвердите соотношение эквивалентности (14.62).

**14.14.** Проверьте, что падающая волна (13.42) возбуждает электрический ток (13.44) на боковой (цилиндрической) поверхности идеально проводящего цилиндра (рис. 13.1). Используйте формулы (1.91), (1.92), (1.93) и получите явные выражения для электромагнитного поля в плоскости $yOz$ . Сравните $E_x$-компоненту с акустическим полем (14.3), (14.4), рассеянным на мягком цилиндре. Подтвердите соотношение эквивалентности (14.62).

**14.15.** Используйте уравнения (13.50) и получите выражения (13.51), (13.52) для единичных векторов $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$.

**14.16.** Используйте формулы (7.130), (7.131). Обратите внимание на текст, сопровождающий формулу (7.131). Используйте локальные координаты $\phi$, $\phi_0$, $\theta$, введенные в разд. 13.2.1, и получите функцию (14.64) для поля, рассеянного левым ребром идеально проводящего цилиндра (рис. 14.1).

**14.17.** Используйте формулу (14.64) и получите выражение (14.66) для дифракционного пучка в теневом направлении ($\Theta = \gamma$).

**14.18.** Проверьте, что падающая волна (13.67) возбуждает ток (13.68) на левом торце (диске) идеально проводящего цилиндра (рис. 13.1). Используйте формулы (1.91), (1.92), (1.93) и получите явные выражения для электромагнитного поля в плоскости $yOz$. Сравните $H_x$-компоненту с акустическим полем (14.3), (14.5). Подтвердите соотношение эквивалентности (14.75).

**14.19.** Проверьте, что падающая волна (13.67) возбуждает ток (13.69) на боковой (цилиндрической) поверхности идеально проводящего цилиндра (рис. 13.1). Используйте формулы (1.91), (1.92), (1.93) и получите явные выражения для электромагнитного поля в плоскости $yOz$. Сравните $H_x$-компоненту с акустическим полем (14.3), (14.5). Подтвердите соотношение эквивалентности (14.75).

**14.20.** Используйте формулы (7.130), (7.131). Обратите внимание на текст, сопровождающий формулу (7.131). Используйте локальные координаты $\phi$, $\phi_0$, $\theta$, введенные в разделе 13.2.1, и получите выражение (14.76) для поля, рассеянного левым ребром идеально проводящего цилиндра (рис. 14.1).

**14.21.** Используйте формулу (14.76) и получите выражение (14.78) для дифракционного пучка в теневом направлении ($\Theta = \gamma$).

# Заключение

Физическая теория дифракции (ФТД), развитая в этой книге, проясняет физику рассеяния высокочастотных акустических и электромагнитных волн. Вводя понятие теневого излучения, она объясняет природу дифракции Френеля, рассеяния вперед (*forward scattering*) и физическое содержание оптической теоремы. ФТД также устанавливает дифракционный предел снижения полной мощности, рассеянной большими (*по сравнению с длиной волны*) телами, покрытыми поглощающими материалами. Эта теория показывает, что даже при нанесении абсолютно поглощающих покрытий на идеально отражающие тела их полная рассеянная мощность может быть уменьшена только в два раза. Это означает, что против бистатических радаров и сонаров невозможно полностью замаскировать рассеивающий объект любыми поглощающими материалами (Ufimtsev, 1968, 1996).

Основанная на концепции эквивалентных поверхностных источников, ФТД позволяет вычислять рассеянние от индивидуальных элементов отражающего тела. Такие данные полезны при конструировании антенн и объектов с заданными характеристиками излучения и рассеяния.

ФТД — довольно гибкая теоретическая концепция, доступная для различных модификаций и обобщений. В комбинации с другими аналитическими и численными подходами она может быть использована при разработке эффективных гибридных методик для решения сложных задач дифракции. Некоторые примеры использования концепции ФТД содержатся в работах, указанных в конце книги, в дополнительном списке литературы.

# Литература


А. Г. Алексеев, Е. А. Штагер, С. В. Козырев (2007): Физические основы технологии Stealth, Санкт-Петербург, ВВМ.

В. А. Боровиков (1966): Дифракция на многоугольниках и многогранниках. Наука, Москва.

И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев (1953): Справочник по математике. Издательство технико-теоретической литературы, Москва.

Д. И. Буторин и П. Я. Уфимцев (1986): «Явные выражения для акустических краевых волн, рассеянных бесконечно малым элементом ребра». *Акустический журнал,* том 32, № 4, с. 459–456.

Д. И. Буторин, Н. А. Мартынов, П. Я. Уфимцев (1987): «Асимптотические выражения для элементарной краевой волны». *Радиотехника и электроника,* том 32, № 9, с. 1818–1828.

А. Зоммерфельд (1937): «Теория дифракции», глава 20 в книге *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики*. Редакторы: Ф. Франк и Р. Мизес, ОНТИ, Москва.

Э. Т. Копсон (1966): Асимптотические разложения. Издательство «Мир», Москва.

Ю. А. Кравцов и Ю. И. Орлов (1983): «Каустики, катастрофы и волновые поля». *Успехи физических наук,* том 141, № 4, с. 591–627.

Е. И. Нефедов, Ф. Т. Фиалковский (1972): Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на конечных структурах. Издательство «Наука», Москва, с. 1–204.

П. Я. Уфимцев (1957): «Приближенный расчет дифракции плоских электромагнитных волн на некоторых металлических телах. Часть 1. Дифракция на клине и ленте». *ЖТФ*, том 27, № 8, с. 1840–1849.

П. Я. Уфимцев (1958 а): «Приближенный расчет дифракции плоских электромагнитных волн на некоторых металлических телах. Часть 2. Дифракция на диске и конечном цилиндре». *ЖТФ*, том 28, № 11, с. 2604–2616.

П. Я. Уфимцев (1958 б): «Вторичная дифракция на ленте». *ЖТФ*, том 28, № 3, с. 569–582.

П. Я. Уфимцев (1958 в): «Вторичная дифракция на диске». *ЖТФ*, том 28, № 3, с. 583–591.

П. Я. Уфимцев (1961): «Симметричное облучение конечных тел вращения». *Радиотехника и электроника*, том 6, № 4, с. 559–567.

П. Я. Уфимцев (1962): *Метод краевых волн в физической теории дифракции*. Советское радио, Москва.

П. Я. Уфимцев (1968): «Дифракция электромагнитных волн на черных телах и полупрозрачных пластинах». *Радиофизика,* том 11, № 6, с. 912–931.

П. Я. Уфимцев (1969): «Асимптотическое исследование задачи о дифракции на ленте». *Радиотехника и электроника,* том 14, № 7, с. 1173–1185.

П. Я. Уфимцев (1970): «Асимптотическое решение задачи о дифракции на ленте в случае граничных условий Дирихле». *Радиотехника и электроника,* том 15, № 5, с. 914–923.

П. Я. Уфимцев (1981): «Отражение электромагнитных волн от конечного цилиндра». *Радиотехника и электроника,* том 16, № 2, с. 286–293.

П. Я. Уфимцев (1989): «Черные тела и теневое излучение». *Радиотехника и электроника,* том 34, № 12, с. 2519–2527.

П. Я. Уфимцев (2007 а): Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. БИНОМ, Лаборатория знаний, Москва.

В. А. Фок (1970): Проблемы дифракции и распространения волн. Советское радио, Москва.

А. П. Ярыгин (1972): «Применение метода краевых волн в задачах дифракции на телах, находящихся в неоднородной среде». *Радиотехника и электроника*, том 17, № 10, с. 1601–1609.

А. П. Ярыгин и В. Б. Авдеев (2005): Редакторы и соавторы коллективной монографии «Распространение радиоволн в неоднородных средах и рассеяние на ионизированных образованиях», Воронежский государственный технический университет, Воронежский институт радиоэлектроники МО РФ, Воронеж, с. 1–362.

M. Abramowitz and I. A. Stegun (1972): Handbook of Mathematical Functions. Dover Publication, Inc., New York.

D. S. Ahluwalia, R. M. Lewis, and J. Boersma (1968): «Uniform asymptotic theory of diffraction by a plane screen». *SIAM Journal Appl. Math.* vol. 16, no. 4, pp. 783–807.

J. S. Asvestas (1985 a): «Line integrals and Physical Optics. Part 1: The transformation of the solid-angle surface integral to a line integral». *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 2, no. 6, pp. 891–895.

J. S. Asvestas (1985 b): «Line integrals and Physical Optics. Part II: The conversion of the Kirchhoff surface integral to a line integral». *J. Opt. Soc. Am.,* vol. 2, no. 6, pp. 896–902.

J. S. Asvestas (1986): «The Physical Optics fields of an aperture on perfectly conducting screen in terms of line integrals». *IEEE Trans. Antennas Propagat.* vol. AP-34, no. 9, pp. 1155–1158.

J. S. Asvestas (1995): «The Physical Optics integral and computer graphics». *IEEE Trans. Antennas Propagat.* vol. 43, no. 12, pp. 1459–1460.

B. B. Bakker and E. T. Copson (1939): The Mathematical Theory of Huygens' Principle. Oxford.

C. A. Balanis (1989): Advanced Engineering Electromagnetics. John Wiley & Sons, Inc., New York.

H. Bateman (1955): The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-Motion on the Basis of Maxwell's Equations. Dover Publications Inc., pp. 90–94.

J. M. L. Bernard, M. A. Lyalinov, and N. Y. Zhu (2008): «Analytical-numerical calculation of diffraction coefficients for a circular impedance cone». *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 56 (6), 1616–1623.

J. Boersma and Y. Rahmat-Samii (1980): «Comparison of two leading uniform series of edge diffraction with the exact uniform asymptotic expansion». *Radio Sci.*, vol. 15, pp. 1179–1194.

V. A. Borovikov and B. E. Kinber (1994): Geometrical Theory of Diffraction. *The Institution of Electrical Engineering*, London, UK.

M. Born and E. Wolf (1980): Principles of Optics. Pergamon Press.

J. J. Bowman, T. B. A. Senior, and P. L. E. Uslenghi, Editors (1987): *E*lectromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes. Hemisphere Publishing Corp., New York.

O. Breinbjerg (1992): «Higher order equivalent edge currents for fringe wave radar scattering by perfectly conducting polygonal plates». *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 40, no. 12, pp. 1543–1554.

D. Brill and G. C. Gaunaurd (1993): «Approximate description of the sound fields scattered by insonified, submerged, ribbed, flat-ended cylindrical structures», *J. Acoust. Soc. Am*. vol. 93, no. 1, pp. 71–79.

I. N. Bronshtein and K. A. Semendyaev (1985): Handbook of Mathematics. Van Nostrand Reinhold Company, New York.

M. W. Browne (1991 a): «Two rival designers led the way to stealthy warplanes». *New York Times,* Sci. Times Sec., May 14, 1991.

M. W. Browne (1991 b): «Lockheed credits Soviet theory in design of F-117». *Aviation Week Space Technol.,* p. 27, December 1991.

C. Chester, B. Friedman, and F. Ursell (1957): «An extension of the method of steepest descents». *Proc. Camb. Phil. Soc.,* vol. 54, pp. 599–611.

P. C. Clemmow (1950): «Some extensions to the method of integration by steepest descents». *Quart. J. Mech. Appl. Math.,* vol. 3, part 2, pp. 241–256.

L. B. Felsen (1955): «Backscattering from wide-angle and narrow-angle cones». *Journal of Applied Physics*, vol. 26, no. 3, pp. 138–151.

V. A. Fock (1965): Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems. Pergamon Press, London, vol. 1 of the International Series of Monographs in Electromagnetic Waves.

W. Franz und R. Galle (1955): «Semiasymptotische Reihen für die Beugung einer ebenen Welle am Zylinder», *Z. Naturforschung*, 10a, no. 5, pp. 374–378.

J. I. Glaser (1985): «Bistatic RCS of complex objects near forward scatter». *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.,* vol. AES-21, no. 1, pp. 70–78.

W. B. Gordon (1994): «High frequency approximations to the Physical Optics scattering integral». *IEEE Trans. Antennas Propagat.* vol. 42, no. 3, pp. 427–432.

W. B. Gordon and H. J. B. Bilow (2002): «Reduction of surface integrals to contour integrals». *IEEE Trans. Antennas Propagat.* vol. 50, no. 3, pp. 308–311.

W. B. Gordon (2003): «Calculating scatter from surface with zero curvature». *IEEE Trans. Antennas Propagat.* vol. 51, no. 9, pp. 2506–2508.

I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik (1994): Tables of Integrals, Series, and Products. Academic Press, Inc., New York.

G. L. James (1980): Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves. *The Institution of Electrical Engineers*, Peter Peregrinus Ltd., Stevenage, UK, and New York.

P. M. Johansen (1996): «Uniform physical theory of diffraction equivalent edge currents for truncated wedge strips». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP–44, no. 7, pp. 989–995.

A. Kalashnikov (1912): «The Gouy–Sommerfeld diffraction». *Zhurnal Russkogo Fiziko-Khemicheskogo Obshchestva, Fizicheskyi Otdel* [*Journal of the Russian Physical-Chemical Society, Physical Division*] vol. 44, no. 3, pp. 137–144.

S. N. Karp and J. B. Keller (1961): «Multiple diffraction in a hard screen». *Optica Acta*, vol. 8, no. 1, pp. 61–72.

J. B. Keller (1962): «Geometrical theory of diffraction». *Journal of the Optical Society of America*, vol. 52, no. 2, pp. 116–130.

L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, and J. V. Sanders (1982): Fundamentals of Acoustics. John Wiley & Sons, New York.

E. F. Knott and T. B. A. Senior (1973): «Equivalent currents for a ring discontinuity». *IEEE Trans. Antennas Propagat.,* vol. AP-21, no. 9, pp. 698–696.

E. F. Knott (1985): «A progression of high-frequency RCS prediction techniques». *Proc. IEEE,* vol. 73, no. 2, pp. 252–264.

F. Kottler (1923 a): «Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen». *Annalen der Physik,* Band 70, Heft 6, pp. 405–456.

F. Kottler (1923 b): «Elektromagnetische Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen». *Annalen der Physik,* Band 71, Heft 15, pp. 457–508.

R. G. Kouyoumjian and P. H. Pathak (1974): «A uniform theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface». *Proc. IEEE ,* vol. 62, no. 11, pp. 1448–1461.

S. W. Lee and G. A. Deshamps (1976): «A uniform asymptotic theory of electromagnetic diffraction by a curved wedge». *IEEE Trans. Antennas Propagat.,* vol. AP-24, pp. 25–34.

H. M. Macdonald (1902): Electric Waves. The University Press, Cambridge, England, pp. 186–198.

H. M. Macdonald (1912): «The effect produced by an obstacle on a train of electric waves». *Phil. Trans. Royal Soc. London, Series A, Math. Phys. Sc.,* vol. 212, pp. 299–337.

G. A. Maggi (1888): «Sulla propagazione libra e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo». *Annali di Matematica,* vol. 16, no. 2, pp. 21–48.

D. A. McNamara, C. W. I. Pistorius, J. A. G. Malherbe (1990): *Introduction to the Uniform Geometrical Theory of Diffraction,* Artech House, Boston-London.

P. Meincke, O. Breinberg, and E. Jorgenson (2003): «An exact line integral representation of the magnetic field Physical Optics scattered field». *IEEE Trans. Antennas Propagat.* vol. 51, no. 6, pp. 1395–1398.

P. Menounou, M. R. Bailey, and D. T. Blackstock (2000): «Edge wave on axis behind an aperture or disk having a ragged edge». *J. Acoust. Soc. Am.,* vol. 107, no. 1, pp.103–111.

C. A. Mentzer, L. Peters Jr., R. C. Rudduck (1975): «Slope diffraction and its application to horns». *IEEE Trans. Antennas Propagat.,* vol. 23, no. 2. pp. 153–159.

A. Michaeli (1986): «Elimination of infinities in equivalent edge currents». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation,* vol. AP–34, no. 7, pp. 912–918.

A. Michaeli (1987): «Equivalent currents for second order diffraction by the edges of perfectly conducting polygonal surfaces». *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP–35, no. 2, pp. 183–190.

K. M. Mitzner (1974): «Incremental length diffraction coefficients». Technical Report AFAL–TR–73–26, Northrop Corporation, Aircraft Division.

F. A. Molinet (2005): «Edge-excited rays on convex and concave structures: A review». *IEEE Antennas & Propafation Magazine*, vol. 47, no. 5, pp. 34–46.

B. T. Morse (1964): «Diffraction by polygonal cylinders». *Journal of Math. Physics,* vol. 5, no. 2.

P. J. Moser, H. Uberall, and J. R. Yuan (1993): «Sound scattering from a finite cylinder with ribs». *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 94, no. 6, pp. 3342–3351.

J. D. Murray (1984): Asymptotic Analysis. Springer-Verlag, New York Inc.

P. H. Pathak (1988): «Techniques for high-frequency problems». Ch. 4 in *Antenna Handbook,* Edited by Y.T. Lo and S.W. Lee, Van Nostrand Reinhold Company, New York.

W. Pauli (1938): «On asymptotic series for functions in the theory of diffraction of light». *Physics Review*, vol. 54, no. 2, p. 924.

G. Pelosi, S. Selleri, and P. Ya. Ufimtsev (1998): «Newton's observations of diffracted rays». *IEEE Antennas and Propagation Magazine,* vol. 40, no. 2, pp. 7–14.

A. D. Pierce (1994): Acoustics, Introduction to Its Physical Concepts and Applications. *Acoustical Society of Americ*a, New York.

Y. Rahmat-Samii and R. Mittra (1978): «Analysis of high-frequency diffraction of an arbitrary incident field by a half-plane – Comparison with four asymptotic techniques». *Radio Sci.,* vol. 13, no. 1, pp. 31–48.

B. Rich (1994): «Inside the top secret skunk works». *Popular Sci.,* pp. 61-81, Oct. 1994.

B. Rich and L. Janos (1994): Skunk Works. Little Brown, Boston.

A. Rubinowicz (1917): «Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugungserscheinungen», *Annalen der Physik,* IV Folge, Band 53, Heft 12, pp. 257–278.

A. Rubinowicz (1924): «Zur Kirchhoffschen Beugungstheorie». *Annalen derPhysik*, Folge 4, Band 73 , pp. 339–364.

A. Rubinowicz (1965): «Darstellung der Sommerfeldschen Beugungswelle in einer Gestalt, die Beitrage der einzelnen Elemente der beugende Kante zur gesamten Beugungswelle erkennen last». *Acta Physica Polonica,* vol. 28, Fasc. 6(12), pp. 841–860.

G. T. Ruck, D. E. Barrick, W. D. Stuart, and C. K. Kirchbaum (1970): Radar Cross Section Handbook. vol. 1 and 2, Plenum Press, New York.

C. E. Schensted (1955): «Electromagnetic and acoustic scattering by a semi-infinite body of revolution». *Journal of Applied Physics*, vol. 26, no. 3, pp. 306–308.

K. Schwarzschild (1902): «Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt». *Mathematische Annalen*, vol. 55, pp. 177–247.

T. B. A. Senior and P. L. E. Uslenghi (1972): «Experimental detection of the edge-diffraction cone». *Proc. IEEE,* vol. PROC-60, p. 1448.

A. Sommerfeld (1896): «Mathematische Theorie der Diffraction». *Mathematische Annalen,* vol. 47, pp. 317–374.

A. Sommerfeld (1935): «Theorie der Beugung». Chapter 20 in the book *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik.* Vol. 2, *Physical Part*. Editors: F. Frank and R. V. Mizes. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Germany, 1935. American publications: New York, 1943, 1961.

R. Tiberio and S. Maci (1994): «An incremental theory of diffraction: Scalar Formulation». *IEEE Trans. Antennas Propagat.,* vol. 42, no. 5, pp. 600–612.

R. Tiberio, A. Toccafondi, A. Polemi, and S. Maci (2004): «Incremental theory of diffraction: A new improved formulation». *IEEE Trans. Antennas Propagat.,* vol. 52, no. 9, pp. 2234–2243.

M. Tran Van Nhieu (1995): «Diffraction by plane screens». *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 97, no. 2, pp. 796–806.

M. Tran Van Nhieu (1996): «Diffraction by the edge of a three-dimensional object». *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 99, no. 1, pp. 79–87.

P. Ya. Ufimtsev (1975): «Comments on comparison of three high-frequency diffraction techniques». *Proceedings IEEE,* vol. 63, no. 12, pp. 1734–1737.

P. Ya. Ufimtsev (1979): «Uniform asymptotic theory of diffraction by a finite cylinder». *SIAM*, vol. 37, no. 3, pp. 459–466.

P. Ya. Ufimtsev (1989): «Theory of acoustical edge waves». *Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 86, no. 2, pp. 463–474.

P. Ya. Ufimtsev (1991): «Elementary edge waves and the Physical Theory of Diffraction». *Electromagnetics,* vol. 11, no. 2, pp. 125–160.

P. Ya. Ufimtsev and Y. Rahmat-Samii (May-June 1995): «Physical theory of slope diffraction». Special issue on Radar Cross Section of Complex Objects, *Annales des Telecommunications* (*Annals of Telecommunications*), vol. 50, no. 5–6, pp. 487–498.

P. Ya. Ufimtsev (1995): «Rubinowicz and the modern theory of diffracted rays». *Electromagnetics*, vol. 15, no. 5, pp. 547–565.

P. Ya. Ufimtsev (1996): «Comments on diffraction principles and limitations for RCS reduction techniques». *Proc. IEEE,* vol. 84, no. 12, pp. 1828–1851.

P. Ya. Ufimtsev (1998): «Fast convergent integrals for nonuniform currents on wedge faces». *Electromagnetics,* vol. 18, no. 3, pp. 289–313. Corrections in *Electromagnetics*, vol. 19, no. 5 (1999), p. 473.

P. Ya. Ufimtsev (1999): «Backscatter», in «*Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*». John Wiley & Sons, Inc.

P. Ya. Ufimtsev (2003): Theory of Edge Diffraction in Electromagnetics. Tech. Science Press, Encino, California. Errata in http://www.techscience.com/books/edem_errata.pdf.url

P. Ya. Ufimtsev (2005): «Backscatter», in «*Wiley Encyclopedia of RF and Microwave Engineering*». John Wiley & Sons, Inc.

P. Ya. Ufimtsev (2006 a): «Improved theory of acoustic elementary edge waves». *J. Acoust. Soc. Amer.,*vol. 120, no. 2, pp. 631–635.

P. Ya. Ufimtsev (2006 b): «Improved physical theory of diffraction: Removal of the grazing singularity». *IEEE Trans. Antennas Propagat.,* vol. 54, no. 10, pp. 2698–2702.

P. Ya. Ufimtsev (2007 b): Fundamentals of the Physical Theory of Diffraction. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

P. Ya. Ufimtsev (2008 a): «New insight into the classical Macdonald physical optics approximation», *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, vol. 50, no. 3, June issue, pp. 11–20. Corrections in *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, vol. 50, no. 4, p. 65, August 2008.

P. Ya. Ufimtsev (2008 b): «On polarization coupling in the PO and PTD approximations». *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, vol. 56, no. 12, pp. 3883–3885, December, 2008.

N. J. Willis (1991): Bistatic Radars. Artech House, Boston-London.

H. H. Witte und K. Westpfahl (1970): «Hochfrequente Schallbeugung an der Kreisblende: numerische Ergebnisse». *Annalen der Physik*, 7. Folge, Band 25, Heft 4, pp. 375–382.

P. Wolf (1967): «A new approach to edge diffraction». *SIAM, J. Appl. Math*., vol. 15, no. 6, pp. 1434–1469.

## Дополнительный список литературы, относящейся к концепции ФТД: применения, модификации и обобщения

С. И. Переверзев, П. Я. Уфимцев (1976): «Отражение электромагнитных волн от металлических тел в плазме». *Радиотехника и электроника*, том 21, № 7, с. 1369–1379.

A. Altintas, O. M. Buyukdura, and P. H. Pathak (1994): «An extension of the PTD concept for aperture radiation problems». *Radio Science,* vol. 29, no. 6, pp. 1403–1407.

A. Altintas and P. Russer (2001): «Time-domain equivalent edge currents for transient scattering». *IEEE Trans.,* vol. 49, no. 4, pp. 602–606.

D. J. Andersh, M. Hazlett, S. W. Lee, D. D. Reeves, D. P. Sullivan, and Y. Chu (February 1984): «*X-PATCH*: A high-frequency electromagnetic-scattering code and environment for complex three-dimensional objects». *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, vol. 36, no.1, pp. 65–69.

T. Akashi, M. Ando, and T. Kinoshita (1989): «Effects of multiple diffraction in PTD analysis of scattered field from a conducting disk». *Trans. IEICE*, vol. E 72, no. 4, pp. 259–261.

M. Ando (1990): «Modified physical theory of diffraction», *in Analysis Methods for EM Wave Problems*, E. Yamashita, Ed. Boston/London: Artech House.

M. Ando and T. Kinoshita (1989): «PO and PTD analysis in polarization prediction for plane wave diffraction from large circular disk». *Digests of 1989 IEEE AP/S Int. Symp.,* June 26–30, 1989, San Jose, California.

M. Ando and T. Kinoshita (1989): «Accuracy comparison of PTD and PO for plane wave diffraction from large circular disk». *Trans. IEICE,* vol. E 72, no. 11, pp. 1212–1218.

J. S. Asvestas (1995): «A class of functions with removable singularities and their application in the physical theory of diffraction». *Electromagnetics*, vol. 15, no. 2, pp. 143–155.

P. Balling (1995): «Fringe-currents effects on reflector antenna crosspolarization». *Electromagnetics,* vol.15, no. 1, pp. 55–69.

S. S. Bor, S. Y. Yang, S. M. Yeth, S. R. Hwang, and C. C. Hwang (1996): «Electromagnetic backscattering of helicopter rotor». *Electromagnetics*, vol. 16, no. 1, pp. 63–74.

D. P. Bouche, J. J. Bouquet, H. Manene, and R. Mittra (1992): «Asymptotic computation of the RCS of low observable axisymmetric objects at high frequency». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. 40, no. 10, pp. 1165–1174.

D. P. Bouche, F. A. Molinet, and R. Mittra (1995): «Asymptotic and hybrid techniques for electromagnetic scattering». *Proceedings of the IEEE*, vol. 81, no. 12, pp. 1658–1684.

M. Boutillier and M. A. Blondell-Fournier (May-June 1995): «CAD based high-frequency RCS computing code for complex objects : Sermat». Special issue on Radar Cross Section of Complex Objects, *Annales des Telecommunications,* vol. 50, no. 5–6, pp. 536–539.

O. Breinbjerg and E. Jorgansen (1999): «Slope diffraction in the geometrical and physical theories of diffraction». *USNC/URSI Meeting,* July 11–16, Orlando, Florida. Digests, p. 90.

R. T. Brown (1984): «Treatment of singularities in the physical theory of diffraction». *IEEE Trans. Antennas & Propagation,* vol. AP-32, no. 6, pp. 640–641.

C. C. Cha, J. Michels and E. Starczewski (1988): «An analysis of airborne vehicles dependence on frequency and bistatic angle». *Proceedings of the 1988 IEEE National Radar Conference,* pp. 214–219. April 20–21, 1988. University of Michigan, Ann Arbor.

P. Corona, A. De Bonitatibus, G. Ferrara, C. Gennarelli (1993): «Accurate evaluation of backscattering by 90° dihedral corners». *Electromagnetics*, vol. 13, no. 1, pp. 23–36.

M. G. Cote, M. B. Woodworth, and A. D. Yaghjian (1988): «Scattering from perfectly conducting cube». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. 36, no. 9, pp. 1321–1329.

M. Domingo, R. P. Torres, and M. F. Catedra (1994): «Calculation of the RCS from the interaction of edges and faces». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. 42, no. 6, pp. 885–898.

M. Domingo, F. Rives, J. Perez, R. P. Torres, M. F. Catedra (1995): «Computation of the RCS of complex bodies modeled using NURBS surfaces». *IEEE Trans. Antennas & Propagation Magazine,* vol. 37, no. 6, pp. 36–47.

D. W. Duan, Y. Rahmat-Samii, and J. P. Mahon (1991): «Scattering from a circular disk: Comparative study of PTD and GTD techniques». *Proceedings of the IEEE*, vol. 79, no. 10, pp. 1472–1480.

D. D. Gabrielyan, O. M. Tarasenko, and V. V. Shatskyi (1991): «Ispol’zovanie predstavleniya kraevykh voln v sochetanii s metodom integral’nykh uravnenyi pri reshenii zadach difraktsii na ideal’no provodyaschikh telakh slozhnoi formy» [Usage of the edge-wave representation combined with the method of integral equations to solve problems of diffraction by ideally conducting bodies with a complicated shape]. *Radiotekhnika I Elektronika*, vol. 36, no. 6, pp. 1159–1163 [English translation *J. Commun. Technology and Electronics*].

J. L. Guiraud (1983): «Une approche spectrale de la theorie physique de la diffraction». *Annales des Telecommunications,* vol. 38, no. 3–4, pp. 145–157.

T. B. Hansen and R. A. Shore (1998): «Incremental length diffraction coefficients for the shadow boundary of a convex cylinder». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. 46, no. 10, pp. 1458–1466.

K. Hongo and H. Kobayashi (2001): «Evaluation of the surface field scattered by an impedance polygonal cylinder». *Electromagnetics,* vol. 21, pp. 319–339.

M. Idemen and A. Buyukaksoy (1984): «High-frequency surface currents induced on a perfectly conducting cylindrical reflector». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. AP-32, no. 5, pp. 501–507.

S. K. Jeng (1998): «Near-field scattering by PTD and shooting and bouncing rays». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. AP-46, no. 4, pp. 551–558.

P. M. Johansen (1996): «Uniform physical theory of diffraction equivalent edge currents for truncated wedge strips». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. 44, no. 7, pp. 989–995.

P. M. Johansen (1999): «Time-domain version of the PTD». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. 47, no. 2, pp. 261–270.

E. Jorgansen, A. Toccafondi and S. Maci (1999): «Integral equation for truncated slab structures by using a fringe current formulation». *IEEE APS Intern. Meeting*, July 11–16, Orlando, Florida. Digests, vol. 4, pp. 2546–2549.

E. Jorgansen, S. Maci and A. Toccafondi (2001): «Fringe integral equation method for a truncated grounded dielectric slab». *IEEE Trans. Antennas & Propagat.*, vol. 49, no. 8, pp. 1210–1217.

J. J. Kim and O. B. Kesler (1996): «Hybrid scattering analysis (PTD+UFIM) for large airframe with small details». *USNC/URSI Radio Science Meeting.* Digests, July 21–26 1996, Baltimore, MD, p. 263.

S. Y. Kim, J. W. Ra, and S. Y. Shin (1991): «Diffraction by an arbitrary-angled dielectric wedge: Part II — Corrections to physical optics solution». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. 39, no. 9, pp. 1282–1292.

H. Kobayashi and K. Hongo (1997): «Scattering of electromagnetic plane waves by conducting plates». *Electromagnetics*, vol. 17, no. 6, pp. 573–587.

I. L. Landsberg (1974): «O polarizatsionnoi structure izlucheniya osesymmetrichnogo zerkala vblizi osi» [Polarization structure of radiation by an axisymmetric reflector close to the symmetry axis]. *Radiotekhnika i Elektronika,* vol. 19, no. 9, pp. 1617–1623 [English translation published by *Soviet Physics–Technical Physics*].

I. L. Landsberg (1979): «Scattering of a plane wave at a metallic cone close to its symmetry axis» (in Russian) : *Radiotekhnika i Elektronika,* vol. 24, no. 5, p. 886 [English translation published by *Soviet Physics–Technical Physics*].

S. W. Lee (1977): «Comparison of uniform asymptotic theory and Ufimtsev’s theory of electromagnetic edge diffraction». *IEEE Trans. Antennas & Propagat.,* vol. AP-25, no. 2, p. 162.

M. Martinez-Burdalo, A. Martin, and R. Villar (1993): «Uniform PO and PTD solution for calculating plane wave backscattering from a finite cylindrical shell of arbitrary cross section». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. 41, no. 9, pp. 1336–1339.

F. A. Molinet (1991): «Modern high frequency techniques for RCS computation: A comparative analysis». Special issue on RCS, *ACS Journal*, September 1991.

A. Michaeli (1985): «A new asymptotic high-frequency analysis of electromagnetic scattering by a pair parallel wedges: closed form results». *Radio Science*, vol. 20, pp. 1537–1548.

A. Michaeli (1995): «Incremental diffraction coefficients for the extended physical theory of diffraction». *IEEE Trans. Antennas & Propagation,* vol. 43, no. 7, pp. 732–734.

N. Morita (1971): «Diffraction by arbitrary cross-sectional semi-infinite conductor». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. AP-19, no. 5, pp. 358–364.

P. K. Murthy and G. A. Thiele (1986): «Non-uniform currents on a wedge illuminated by a TE-plane wave». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. AP-34, no. 8, pp. 1038–1045.

G. Pelosi, S. Maci, R. Tiberio, and A. Michaeli (1992): «Incremental length diffraction coefficients for an impedance wedge». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. 40, no. 10, pp. 1201–1210.

A. C. Polycarpou, C. A. Balanis, and C. R. Bitcher (May-June 1995): «Radar cross section of trihedral corner reflectors using PO and MEC». Special issue on Radar Cross Section of Complex Objects, *Annales des Telecommunications*, vol. 50, no. 5–6, pp. 510–516.

J. M. Ruis, M. Ferrando, and L. Jofre (1993): «GRECO: Graphical electromagnetic computing for RCS prediction in real-time». *IEEE Trans. Antennas & Propagation Magazine,* vol. 35, no. 2, pp. 7–17.

J. M. Ruis, M. Ferrando, and L. Jofre (1993): «GRECO: High-frequency RCS of complex radar targets in real-time». *IEEE Trans. Antennas & Propagation,* vol. 41, no. 9, pp. 1308–1319.

J. M. Rius, M. Vall-Lossera, and A. Cardama (May-June 1995): «GRECO: Graphycal processing methods for high-frequency RCS prediction». Special issue on Radar Cross Section of Complex Objects, *Annales des Telecommunications*, vol. 50, no. 5–6, pp. 551–556.

S. S. Skyttemyr (1986): «Cross polarization in dual reflector antennas — A PO and PTD analysis». *IEEE Trans. Antennas & Propagation,* vol. AP-34, no. 6, pp. 849–853.

R. A. Shore and A. D. Yaghjian (1993): «Application of incremental length diffraction coefficients to calculate the pattern effects of the rim and surface cracks of the reflector antenna». *IEEE Trans. Antennas & Propagat.*, vol. 41, no.1, pp. 1–11.

R. A. Shore and A. D. Yaghjian (2004): «A comparison of high-frequency scattering determined from PO, enhanced with alternative ILDC's». *IEEE Trans. Antennas & Propagat.*, vol. 52, no. 1, pp. 336–341.

V. A. Somov and Vyaz'mitinova (1990): «Primenenie metoda kraevykh voln pri chislennom analize zerkal'nykh antenn». [Application of the edge wave method for the numeric analysis of reflector antennas], *Radiotekhnika*, no. 1, pp. 69–71 [English translation in *Telecommunication and Radio Engineering,* vol. 45, no. 2, pp. 99–102, published by Scripta Technica, Inc.].

S. J. Schretter and D. M. Bolle (1969): «Surface currents on a wedge under plane wave illumination: an approximation». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. AP-17, pp. 246–248.

H. H. Syed and J. L. Volakis (1996): «PTD analysis of impedance structures». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. 44, no. 7, pp. 983–988.

H. B. Tran and T. J. Kim (1989): «The interior wedge scattering», Ch. 4 in «Monostatic and bistatic RCS analysis», vol. 1: «The high-frequency electromagnetic scattering theory». Northrop Corporation, Aircraft Division, Report NOR-82-215, Dec. 1989.

E. N. Vasil'ev, V. V. Solodukhov and A. I. Fedorenko (1991): «The integral equation method in the problem of electromagnetic waves diffraction by complex bodies». *Electromagnetics*, vol. 11, no. 2, pp. 161–182.

S. Vermersch, M. Sesques, and D. Bouche ( May-June 1995): «Computation of the RCS of coated objects by a generalized PTD approach». Special issue on Radar Cross Section of Complex Objects, *Annales des Telecommunications*, vol. 50, no. 5–6, pp. 563–572.

D. S. Wang, L. N. and Medgyesi-Mitschang (1985): «Electromagnetic scattering from finite circular and elliptic cone». *IEEE Trans. Antennas & Propagation,* vol. AP-33, no. 5, pp. 488–497.

S. Y. Wang and S. K. Jeng (1998): «A compact RCS formula for a dihedral corner reflector at arbitrary aspect angles». *IEEE Trans. Antennas & Propagation*, vol. AP-46, no. 7, pp. 1112–1113.

A. D. Yaghjian and R. V. McGahan (1985): «Broadside RCS of the perfectly conducting cube». *IEEE Trans. Antennas & Propagation,* vol. AP-33, no. 3, p. 321.

A. P. Yarygin (1972): «Primenenie metoda kraevykh voln v zadachakh difraktsii na telakh nakhodyaschikhsya v plavno neodnorodnoi srede» [Application of the edge waves method to problems of diffraction from bodies placed in smoothly inhomogeneous medium]. *Radiotekhnika i Elektronika*, vol. 17, no. 10, pp. 1601–1609 [English translation: *Radio Engineering and Electronic Physics*].

N. N. Youssef (May 1989): «Radar cross section of complex targets». *Proc. IEEE*, vol. 77, no. 5, pp. 722–734.

# Предметный указатель

fringe component 15, 93, 314
fringe waves 45
$j_{s,h}^{(1)}$, интегралы 194
slope diffraction 22, 251–253, 256–259, 261, 264, 267, 271, 272, 279, 286

**А**кустически жесткая поверхность 11, 18, 24, 30, 37, 50, 94, 95, 116, 124, 132–135, 155, 170, 172, 248, 250, 261, 269, 282, 283, 300, 314, 316, 332
Акустически мягкая поверхность 11, 18, 24, 30, 34, 50, 94, 95, 115, 124, 155, 170, 172, 248, 261, 271, 299, 300, 332
Акустические ЭКВ 189, 210, 218, 226, 234
Аппроксимация Кирхгофа 19, 29, 230, 240
Асимптотика Зоммерфельда 45, 53, 65, 67, 69, 71, 72, 78, 79
Асимптотики
– высокочастотные 15, 189, 318, 330
– каустические 218, 242, 243, 246, 247, 249
– лучевые 67, 74, 87, 93, 140, 148, 152, 154, 177, 180, 182, 218, 234, 235, 237, 239, 240, 241, 243, 246, 248, 249, 255–257, 259, 260, 264, 266, 267, 270–275, 277, 307, 308, 327, 329
– Паули 67–72, 76, 77
– равномерные 72, 73, 75, 105, 182, 243, 251, 271, 275
– уточненные 321, 329
– ФТД 182
– ФТД для тел вращения 22
Асимптотики Зоммерфельда 66

**Б**еcселя
– интерполяция 180, 181
– интерполяция для поля $u_{s,h}^{(1)}$ 148
– функции 55, 56, 60, 78, 148, 150, 180, 181, 293, 294, 304, 310, 322

**В**ектор Пойнтинга для электромагнитных волн 25
Возбуждаемые поля 20, 29, 43, 45, 60, 90, 157, 181, 232, 314
Волны
– акустические 15, 18–20, 23, 28, 29, 34, 39, 48, 49, 53, 54, 78, 79, 87, 90, 97, 105, 113, 121, 131, 137, 146, 150, 167, 172, 173, 189, 190, 192, 194, 196, 198, 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214–220, 222, 224, 226, 228, 230, 232, 234, 242, 247–249, 252, 256, 257, 260, 261, 264, 267, 268, 275, 289–291, 293, 295, 297, 299, 305–307, 309, 311, 313, 315, 317, 319, 321, 323, 325–332, 335
– краевые дифракционные 13, 53, 66, 77, 146, 189, 237, 241
– краевые элементарные 260
– многократные краевые 22, 111, 112, 250, 276–279, 281, 282, 284–286, 288, 290
– многократные электромагнитные 289
– электромагнитные 15, 18–20, 23, 25, 28, 29, 34, 38, 39, 46–49, 53, 54, 78, 79, 87, 94, 95, 101, 102, 105, 113, 115, 116, 121, 131, 132, 133, 136, 137, 146, 151, 155, 162, 163, 166, 167, 170–173, 189, 190, 192–194, 196, 198, 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214–218, 220, 222, 224, 226, 228, 230, 232, 234, 239, 242, 246–249, 251, 256, 260, 264, 268, 273, 275, 290, 300, 301, 303, 305–307, 311, 312, 315–317, 325, 326–329, 331–333, 335
– элементарные краевые 12, 15, 18, 21, 22, 97, 195, 197, 198, 207, 211–215, 217,

229, 230, 241, 247, 254, 256, 258, 265, 278, 307, 314, 333
– элементарные краевые 203, 205, 211, 213
Вронскиан, формула 57
Выпуклое тело вращения 276, 286

**Г**ельмгольца интегральное выражение 25, 34
Геометрическая акустика 19, 22, 28, 29, 75
Геометрическая оптика 19, 21, 22, 28, 63, 64, 66, 75, 219, 224
ГО, *см. геометрическая оптика*
ГО, границы 21, 42, 67, 69, 70, 71, 75, 76, 88, 89, 93, 104, 112, 128, 182, 184, 185, 241, 295
Градштейн и Рыжик, формула 82, 148, 150, 196, 326
Грина теорема 56, 59, 60

**Д**альняя зона 15, 24–27, 31, 32, 46, 47, 49, 51, 52, 95, 96, 106, 107, 110, 117, 118, 133, 134, 135, 136, 139, 146, 156, 165, 187, 217, 223, 227, 284, 302, 307, 330
Дирихле условия 18, 24, 230, 337
Дифракционное взаимодействие
– краев 268
Дифракционное поле 15, 19, 20, 40, 42, 72, 76, 77, 80, 87, 88, 97, 100, 102, 106, 116, 134, 144, 148, 149, 151, 152, 186, 192, 207, 230, 237, 238, 242, 243, 245, 247, 250, 264, 271, 277, 308
Дифракционные задачи 19, 20, 22–24, 105
Дифракция
– многократная 112, 128, 218, 250, 252, 278, 279, 285, 287, 289, 317
– на диске 22, 149, 150, 152, 282, 285–287, 289, 290
– на клине 20, 53, 60, 65, 76, 77, 79, 80, 82, 84, 86–90, 98, 230, 254, 269
– на конической поверхности 137, 139, 141, 143, 145, 147
– на ленте 22, 113, 117
– на трехгранном цилиндре 121, 123, 125, 127, 129, 131
– на цилиндре 313, 318, 324
– первичная на ленте 105, 106, 108, 110, 112, 114, 116, 118, 120, 122, 124, 126, 128, 130, 132, 134, 136
– скользящая 250–252, 256, 257, 259, 267

**З**еркальный пучок 321, 329, 332
Зоммерфельда интегралы 53, 60, 61, 63
Зоммерфельда условие излучения 24, 55, 59
Зоммерфельда формула 60, 82, 222

**И**деально проводящий клин 12, 54, 77, 78, 79, 87, 94, 214, 224, 248
Излучаемое поле 12, 30, 50, 51, 80, 81, 89, 90, 96, 97, 100, 102, 111, 126, 139, 152, 154, 156–158, 164, 206, 214, 221, 225, 226, 227, 229, 232, 237, 240, 242, 254, 277, 285, 294, 295, 301, 302, 314, 317, 323, 325, 327, 330, 333
Излучение, поверхностные источники 15, 19, 20, 22, 25, 31, 78, 80, 89, 90, 94–97, 100, 102, 105, 106, 111, 112, 116, 118, 121, 129, 135, 137, 139, 140, 143, 146, 150, 152, 154, 155–158, 160, 164, 166, 175, 181, 186, 192, 193, 210, 211, 218, 230, 231, 237, 263, 317, 319, 320, 324, 332, 333
Интерполяция Бесселя 148
– для поля ФО 180
– для поля ФТД 181
Источники рассеянного поля 15, 19, 20, 25, 26, 31, 32, 43, 50, 80, 106, 111, 121, 126, 150, 156, 230, 295, 301, 314, 315, 321, 324, 332

**К**аноническая коническая поверхность 137, 139, 141, 143, 145, 147
Конечной длины цилиндр 22, 291, 292, 294–296, 298, 300, 302, 304, 306, 308–310, 312, 313, 314, 316, 318, 320, 322, 324, 326, 328–330, 332, 334
Конус 15, 100, 156–159, 161, 162, 163, 169, 188, 235
– дифракционный 13, 101, 189, 190, 209–211, 213, 214, 216, 217, 218, 221, 225, 226, 229, 230, 231, 233, 241, 255, 268, 270, 272, 275, 277, 326, 328
Коши
– теорема 201, 233
– теорема о вычетах 62, 84, 200, 231
Краевые волны 12, 15, 18, 20–22, 39, 45, 53, 65–67, 77, 94, 95, 97, 106, 107, 109, 111, 112, 114, 120–122, 124, 125–129, 131, 133, 134–137, 144, 146, 189, 190, 195, 197, 198, 203, 205, 207, 209, 211–215, 217, 229, 237, 241, 243, 247, 250, 251, 254, 258, 260, 263, 265, 268, 273, 276–284, 286, 288, 290, 317, 324

Краевые дифракционные волны 53, 146, 189, 237, 241

**Л**инейчатая поверхность 268, 269
– взаимодействие краев 268
Луч
– асимптотики 65, 87, 144
– дифракционный 11–13, 16, 21, 39, 45, 65–67, 71, 75, 100, 101, 144, 151, 180, 182, 185, 190–192, 209, 238, 240–243, 251, 252, 255, 257, 261, 264, 266, 268, 276, 277, 282, 305, 319, 320
– зеркальный 112

**М**етод перевала 65

**Н**аклонное падение 80, 90, 97–103, 323, 330
Неймана условия 18, 24, 230
Ненулевая гауссова кривизна 15, 163, 164, 165, 167, 169, 171, 173, 176, 187
Неравномерная компонента $j^{(1)}$ 90, 97, 112, 146, 156, 191, 219, 229, 321

**О**бласть тени 21, 29, 33, 34, 39, 79, 186, 187, 247, 278, 295
Обобщение метода Паули 72, 73, 75, 77
Однократные интегралы 198, 199, 201, 304
Оптическая теорема 33, 47, 51, 52, 108, 123, 127, 335
Отраженные лучи 16, 21, 28, 41, 42, 50, 112, 166, 178, 180, 182, 185, 186, 209, 210, 226, 247, 278, 295, 318, 321, 323, 324, 332

**П**адающая плоская волна 12, 27, 43, 48, 64, 75, 90, 113, 193, 207, 222, 271, 282
Параболоид 15, 167–172, 188
– обратное рассеяние 167, 169, 171
Паскаль, единица давления 25
Переходная область 182
Плоская волна 11, 12, 22, 27, 32, 43, 48, 50, 60, 64, 65, 67, 71, 74, 75, 77–80, 87, 90, 93, 97–101, 103, 113, 135–138, 190, 191, 193, 207, 219, 222, 224, 232, 234, 250, 253, 254, 265, 269, 271, 279, 280, 282, 289, 291, 313, 323, 330, 332, 333
– возбуждение 58, 60, 80
Поверхностные источники 19, 21, 25, 26, 31, 50, 78, 80, 91, 97, 98, 106, 109, 111, 115–118, 122, 126, 129, 133, 139, 143, 150, 164, 166, 210, 230, 231, 237, 259, 263
– неравномерная компонента 15, 20, 22, 43, 80, 89, 90, 94–96, 100, 105, 109, 112, 118, 121, 126, 135, 137, 140, 146, 152, 154, 155–158, 160, 175, 181, 186, 192, 193, 211, 218, 317, 319, 321, 324, 332, 333
Поверхностные поля 11–13, 29, 43–45, 219
Поле излучаемое 12, 30, 50, 51, 80, 81, 89, 90, 96, 97, 100, 102, 111, 126, 139, 152, 154, 156–158, 164, 166, 181, 186, 191, 206, 214, 221, 225–227, 229, 232, 237, 240, 242, 254, 277, 285, 294, 295, 301, 302, 314, 317, 321, 323, 325, 327, 330, 333
Поле ФО 12, 21, 31, 38, 42, 48, 51, 52, 80, 86, 91, 100, 102, 104, 106, 122, 127, 133–135, 150, 152, 156, 167, 177, 180, 182, 184, 186, 285, 289, 293, 299, 301, 307, 308, 310, 313, 314, 315, 317, 322, 324, 332
Поле ФТД 13, 19, 22, 45, 129, 135, 136, 154, 156, 181, 182, 186, 187, 230, 284, 314, 321, 322
Полигональные цилиндры 105, 106, 108, 110, 112, 114, 116, 118, 120, 122, 124, 126, 128, 130, 132, 134, 136
Полное поле 13, 20, 24, 25, 30, 34, 50, 58, 60, 69, 71, 75, 77, 79, 90, 91, 109, 110, 112, 119, 126, 127, 129, 154, 156, 166, 173, 187, 206, 210, 211, 214, 218, 229, 231, 232, 237, 240, 241, 247, 275, 278–280, 283, 284, 288–290, 293, 297, 299, 302, 313, 314, 323, 324, 328, 330, 331
Поперечник рассеяния 22, 47, 113, 120, 131, 132, 154, 155, 160, 161, 162, 166, 169, 170, 172, 174, 175, 293, 299, 307, 315, 332
– бистатический 27, 28, 42, 108, 109, 113, 310, 313
– моностатический 27, 28, 29, 42
– полный 21, 32, 33, 39, 42, 47, 51, 52, 108, 112, 134, 160, 279, 280, 281, 285, 288, 290, 310, 332
Поперечное сечение 21, 32, 33, 42, 49, 105, 106, 108, 121, 122, 177, 291, 310
Приближение ФО 11, 12, 15, 19, 21, 22, 29, 31–33, 38, 39, 42, 43, 47, 48, 51, 52, 80, 82, 84, 86–91, 97, 98, 100–102, 106, 114, 115, 122, 124, 125, 132–134, 150–152, 155, 156, 158, 160–162, 164, 167, 169–172, 174, 177, 180, 181, 184, 189, 214, 234, 240, 279, 285, 291, 293, 294, 301, 307, 308, 310, 311–314, 326, 328, 329, 332
Приближение ФТД первого порядка 114, 129, 154, 159, 169, 174, 181, 186

**Р**авномерная компонента 11, 12, 15, 19, 20, 30, 31, 43, 44, 45, 47, 50, 80, 90, 91, 102, 105, 109, 112, 118, 122, 126, 150, 156, 164, 166, 181, 206, 214, 216, 218–220, 223, 224, 226, 229, 270, 271, 299, 301, 305, 310, 314, 321, 325, 327
Разветвленные волновые функции 53
Рассеяние 10, 12, 13, 15, 16, 18, 20–22, 27, 29, 32, 33, 38, 39, 42, 43, 47, 50–52, 95, 108, 112, 113, 115, 116, 120, 131, 137, 154–157, 159, 161, 162, 169, 170, 173, 175, 216, 224, 229–231, 233, 235, 279–282, 285, 288, 290, 293, 299, 310, 313, 315, 317, 321, 325, 329, 333, 335
– бистатическое 22, 27, 28, 108, 109, 113, 129, 132, 176, 229, 309, 310, 312, 314, 315, 316, 318, 320, 322, 324, 326, 328, 330, 332, 334
– на диске 149, 151, 153, 155, 157, 160, 188, 248, 326, 328
– на жестких телах 39, 121, 132–134, 155, 161, 248, 281, 291, 300, 301, 305, 312, 314, 315, 316, 327, 332
– на мягких телах 39, 132, 134, 155, 248, 281, 291, 300, 302, 311, 332
– обратное 27, 31, 32, 38, 41, 42, 47, 48, 49, 109, 112, 121, 124, 129, 132, 133, 152, 157, 159, 160, 162, 163, 165–167, 169–175, 187, 291, 294, 299–302, 305–308, 314
– осесимметричное 137
– симметричное 121, 126, 131, 163
Рассеянного поля интегралы 25, 31, 138
Рассеянное поле 11, 15, 16, 19, 20–22, 25–28, 32–34, 37–39, 42, 43, 45, 50–52, 80, 86, 87, 91, 106, 107, 109–113, 115–117, 121–129, 131, 133, 134–136, 140, 149–151, 154, 156, 165–169, 171–174, 176, 178, 179, 181–189, 191, 195, 205, 218, 219, 221–223, 230, 231, 235, 241, 243, 278, 279, 282, 284–286, 288, 292, 295, 296, 299, 301, 302, 304, 305, 307–310, 313–315, 318, 320–334
Ряды, преобразованные в интегралы Зоммерфельда 53, 60, 61, 63

**С**калярная физическая оптика 29
Скользящая сингулярность 20, 95, 129, 209, 219, 223, 224, 226, 229, 233
– устранение 209, 218, 219, 221, 223, 225, 227, 229, 318, 320
Скользящее падение 79, 129, 207, 208, 223, 224, 229, 231, 233, 250, 254
Сферический сегмент 15, 172–174, 188

**Т**ейлора ряд 65, 68, 73, 75, 92, 95, 141, 252
Тела вращения 15, 22, 50, 137, 138, 149, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 176, 177, 187, 188, 276, 286
Теневое излучение 16, 21, 34, 36–43, 49–51, 123, 127, 157, 186, 278, 280, 313, 319, 332, 333, 335
Тень 11, 16, 19, 21, 29, 32–34, 36, 39, 42, 49, 64, 67, 71, 72, 78, 79, 93, 135, 136, 146, 157, 186, 187, 243, 247, 270–272, 273, 275, 278, 295, 310, 313
Теорема о теневом контуре 21, 39, 40, 157, 187, 313
Теорема эквивалентности Гельмгольца 35, 211
Теория Фока 29
ТКД
– аппроксимация 120
– приближение первого порядка 114
Трехгранный цилиндр 15, 20, 121, 123, 125, 127, 129, 131, 133
Трехкратные интегралы 198
– преобразование 198, 199, 201

**У**сеченные источники 116, 133
Условие излучения 24, 55, 59

**Ф**изико-оптические интегралы 32, 42, 43, 80, 81, 83, 85, 106
Физическая оптика 11, 12, 15, 19, 22, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41–43, 47, 80, 81, 98, 106, 150, 155, 160, 170, 171, 214, 234, 279, 291, 294, 310
Физическая теория дифракции 10, 11, 13, 15, 18, 22, 23, 29, 30, 34, 43, 335
ФО, *см. физическая оптика*
Фок, теория 29, 45
Фокальное поле 147, 148, 154, 156, 166, 188, 285, 286, 288–290
Френеля интеграл 70, 71, 73, 76, 77, 118, 184
ФТД, *см. физическая теория дифракции*
ФТД первого порядка 116, 126, 129, 137, 166, 167
ФТД-приближения 115, 116, 135, 136, 181, 317

Функции
– $f^{(1)}$, интегралы 95, 97
– $g^{(1)}$, интегралы 95, 97

**Х**анкеля функция 50, 51, 52, 55, 56, 58, 96, 99, 117, 133–136, 203
– интегральные формы 81

**Э**КВ, *см. элементарные краевые волны*
ЭКВ 15, 18, 21, 22, 189–191, 193, 195, 197, 206, 207, 209–211, 214–218, 221, 224, 226, 230, 231, 233–235, 239–241, 248, 249, 251, 256, 259, 266, 301, 302, 304, 306–308, 314, 315, 318
Электромагнитные волны 46, 47, 49, 79, 151, 239, 246, 256, 260, 264
– *E*-поляризация 301, 303, 305, 325, 327, 329, 331
– *H*-поляризация 305, 327
Электромагнитные ЭКВ 189, 193, 214, 215, 217, 218, 224, 226, 239
Элементарные краевые волны 21
Элементарные полоски 190–196, 203, 205, 206, 214, 220, 226, 230, 231, 232

*Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"*

*Электронное издание*

**Уфимцев** Петр Яковлевич

**ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ**

Ведущий редактор *Б. И. Копылов*
Художник *Н. В. Зотова*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Компьютерная верстка: *В. А. Носенко*

Подписано к использованию 19.03.15.
Формат 145×225 мм

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

Это первая книга, в которой дано полное изложение современной физической теории дифракции (ФТД), основанной на концепции элементарных краевых волн. Она существенно дополняет другую книгу автора (Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007), где содержатся первоначальные идеи и результаты ФТД, а также ее математическое обоснование.

Данная монография, в частности, может представлять интерес для конструкторов, проектирующих специальные виды вооружения с низкой радиолокационной видимостью и системы защиты от таких вооружений.

Книга предназначена для научных сотрудников исследовательских институтов и лабораторий, для преподавателей вузов, аспирантов и студентов старших курсов. Она также может быть полезна при создании разнообразных вузовских курсов, которые включают в себя асимптотические методы в теории дифракции.

## ОБ АВТОРЕ

**Петр Яковлевич Уфимцев** широко известен своими работами по теории дифракции и распространения электромагнитных и акустических волн. В частности, разработанная им ФТД была с успехом использована в США при создании военных самолетов, невидимых для радаров (stealth aircraft).

П. Я. Уфимцев сотрудничал с рядом исследовательских и научных институтов, включая Институт радиотехники и электроники Академии наук СССР (Москва), Московский авиационный институт, Калифорнийский университет (Лос-Анджелес, Ирвайн). Он читал курсы лекций по физической теории дифракции в Институте основных проблем техники (Варшава, 1979), в Калифорнийском университете (Лос-Анджелес, 1991), в Сингапурском национальном университете (1993), в Институте технологий ВВС США (Дэйтон, Огайо, 1994, 1999), в Московском государственном университете (2007) и в Университете Сиенны (Сиенна, Италия, 2008).

За выдающиеся научные достижения П.Я. Уфимцеву присуждена Государственная премия СССР (Москва, 1990), он награжден медалью Л. Р. Груммана (Нью-Йорк, 1991) и медалью за научные достижения XX века (Кембридж, Великобритания, 1996). Он также избран в Академию электромагнетизма (Массачусетский технологический институт, США, 1989), в Американский институт аэронавтики и астронавтики (Associated Fellow of AIAA, 1992) и в Институт инженеров по электротехнике и электронике (Fellow of IEEE, 1999).