Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

ПРОЧНОСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ ПРИ КРАТКОВРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

Х.А. Рахматулин, Е.И. Шемякин,
Ю.А. Демьянов, А.В. Звягин

ПРОЧНОСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ ПРИ КРАТКОВРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

Москва
Университетская книга
2008

УДК 531.3:536.66
ББК 34.41:22.251
Р27

Рецензенты:
Е.В. Ломакин, доктор физико-математических наук, профессор
А.Б. Киселев, доктор физико-математических наук, профессор

Рахматулин Х.А.
Прочность и разрушение при кратковременных нагрузках / Х.А. Рахматулин, Е.И. Шемякин, Ю.А. Демьянов, А.В. Звягин: учеб. пособие. — М: Университетская книга; Логос, 2008. — 624 с: ил.
ISBN 978-5-98704-278-X

Рассматриваются различные аспекты проблемы динамического деформирования и разрушения твердых тел. Излагаются основы динамического нагружения и прочности, закономерности распространения волн в средах с различной реологией, некоторые задачи динамики трещин, модели повреждаемых сред. Приведены необходимые экспериментальные результаты, являющиеся физической основой математических моделей сред и используемых на практике критериев динамического разрушения материалов. Особое внимание уделяется математической постановке задач, строгому изложению их решения, физической интерпретации результатов и их применению к практическим проблемам. Основное содержание излагается с учетом опыта чтения специальных курсов в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова и других вузах СССР и России.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям (специальностям) «Механика», «Механика. Прикладная математика».

ББК 34.41:22.251

ISBN 978-5-98704-278-X

Оглавление

Предисловие

В современной технике все чаще и чаще встречаются случаи действия интенсивных динамических нагрузок. В авиации и ракетной технике ими являются нерегулярно-циклические нагрузки, обусловленные действием ударных волн и порывов ветра. В гражданском, промышленном, гидротехническом строительстве и в горных разработках могут воздействовать сейсмические и взрывные, а также циклические нагрузки. Динамические нагрузки действуют во всех случаях, когда имеют место соударения частей работающих машин или их воздействие на объекты производства (например, удар батана по нити в текстильных машинах, удары пневмомолота по породе и др.). В этой связи расчет на прочность сооружений, машин и массивов, подверженных динамическим воздействиям, приобретает исключительно важное значение. Кроме того, разработка методики измерения динамических нагрузок связана с решением ряда теоретических задач о их воздействии на соответствующую аппаратуру.

Наука о динамической прочности, в которой изучаются указанные проблемы, развивается прежде всего в направлении разработки теоретических и экспериментальных методов расчета напряженного и деформированного состояний машин, сооружений и массивов. Дело в том, что статический расчет указанных состояний может привести к большим ошибкам, поскольку для времен, меньших времени пробега возникающих волн, внешнему воздействию сопротивляется лишь часть конструкции или сооружения.

Развитие науки о динамической прочности неразрывно связано с изучением поведения различных материалов при воздействии на них нагрузок указанного типа. Известно, что большинство материалов в условиях динамического воздействия ведет себя совершенно иначе, чем при статическом нагружении. Так, предел текучести металлов при динамических нагрузках может быть значительно выше статического предела текучести, а разрушение материала при больших скоростях деформаций как правило происходит хрупким образом.

Ввиду огромной сложности получения данных в динамических экспериментах и многообразия используемых материалов при создании экспериментальных методов необходимо отправляться от определенных теоретических предпосылок и пользоваться результатами со-

ответствующих расчетов. В настоящем учебном пособии излагаются основы динамического нагружения и прочности. Основная часть материалов в той или иной форме была апробирована при чтении специальных курсов на механико-математическом факультете Московского государственного Университета им. М. В. Ломоносова, в Новосибирском государственном университете, Московском физико-техническом институте, Московском государственном университете леса (бывшем Лесотехническом институте). Авторы старались изложить материал так, чтобы читающий их мог не обращаться к дополнительным источникам. Поскольку область исследований по прочности очень обширна, в пособии изложены лишь основные вопросы, или близкие к научным интересам авторов. Вместе с тем по ряду проблем, которые только затронуты в данном пособии, даются ссылки на соответствующую научную и учебную литературу.

В гл. 1 излагается теория распространения плоских волн в стержнях из нелинейно-упругого, упруго-пластического материалов и ее приложение к определению динамических диаграмм «напряжение – деформация» металлов при сжатии. Так как математическая часть теории сводится к нахождению решений нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа, то предварительно рассматривается применяемый для этих целей метод характеристик. Другие чисто математические вопросы, например использование разрывных решений, вопросы существования решений самостоятельно в книге не рассматриваются, представление о них читатель получает в ходе знакомства с отдельными разделами учебного пособия. В этой главе приведены также экспериментальные данные, подтверждающие упруго-пластическую теорию распространения волн.

В гл. 2 излагается теория распространения продольно-поперечных волн в упругих и упруго-пластических гибких связях, а также ее приложение к решению ряда вопросов: движения тормозных устройств, получения динамических диаграмм растяжения, деформации нитей основы в текстильном производстве, при анализе колебаний и звучания струнных музыкальных инструментов. В этой главе также приводятся решения некоторых задач динамического деформирования балок при поперечном ударе.

В гл. 3 рассматриваются задачи динамического деформирования объектов с осевой и сферической симметрией (включая мембраны и плиты) из упругого, упруго-пластического и жестко-пластического материалов, в гл. 4 — задачи распространения возмущений в других средах: упруговязкой, вязкопластической, упруговязкопластической, идеально пластическом газе и т.д. Приводятся некоторые экспериментальные данные, подтверждающие применимость определенных законов деформирования для описания поведения отдельных материалов.

При написании первых четырех глав данного пособия в основ-

ном было использовано доработанное, но, к сожалению не увидевшее свет, второе издание монографии Х.А.Рахматулина, Ю.А.Демьянова «Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках».

В гл. 5 излагаются основы линейной механики разрушения, основным предметом изучения в которой является эволюция микро- и макротрещин, которые моделируются разрезами в сплошной среде. Освещаются некоторые вопросы экспериментального определения констант механики разрушения, а также численные методы решения характерных для механики трещин задач.

В гл. 6 исследуются влияние скорости роста трещины и эффектов, связанных с наличием в вершине трещины зон пластического течения. Рассмотрен также вопрос учета физической нелинейности, который предполагает наличие областей ослабленных связей на продолжении трещины.

В гл. 7 приводятся сведения о критериях разрушения твердых тел в условиях кратковременных динамических нагрузок, предлагавшихся на разных этапах изучения динамического разрушения. Экспериментальной основой для них в основном являются данные по откольному разрушению пластин, приведенные в монографии Н.Х.Ахмадеева. Также изложены некоторые современные модели прочности, учитывающие кинетику зарождения и эволюции повреждений от микро- до макроразрушения. Это направление возникло из работ Л.М.Качанова, Ю.Н.Работнова (скалярный параметр поврежденности) и А.А.Ильюшина (тензорные меры поврежденности) и получило название механики континуального (или рассеянного) разрушения.

В гл. 8 излагаются вопросы постановки задач, возникающих при изучении распространения волн в телах разной геометрии, а также задач взаимодействия волн с границами раздела сред. Эти задачи важны для понимания и выделения наиболее существенных факторов волнового воздействия на элементы механизмов и массивы.

Настоящее учебное пособие ставит своей целью ознакомить студентов, инженеров и начинающих исследователей с основными проблемами динамической прочности. Их изучение в настоящее время охватывает очень большой круг механических и математических дисциплин, полное изложение которых в одной книге не представляется возможным. При написании этого пособия были использованы работы, в которых соответствующие разделы механики прочности изложены значительно более подробно. Ссылки на соответствующие монографии приведены в каждой из глав. Авторы будут считать свою задачу выполненной, если данное пособие окажется полезным и привлечет внимание исследователей к этому важному и интересному разделу механики сплошной среды.

Авторы благодарят Ученый совет механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова за предоставленную возможность

издания пособия, а также сотрудников кафедры газовой и волновой динамики за советы при обсуждении содержания пособия, И.Н.Звереву, А.Б.Киселеву, Н.Н.Смирнову, Б.В.Куксенко и др. за ценные советы и предоставленные материалы.

Особой благодарности заслуживают студенты кафедры прикладной математики МГУ леса А.Болотов, И.Погорнев, Д.Борисов, Д.Кириллов, Д.Малахов, И.Кулаковский и др. за создание компьютерной версии первых четырех глав и доцент кафедры математического моделирования МГУ леса А.А Малашин за организацию этой работы.

Качество представленной рукописи учебного пособия было значительно улучшено благодаря кропотливой и творческой работе редактора Е. В. Комаровой, которой авторы выражают глубокую признательность.

Авторы признательны А.И.Камзолову за поддержку этого издания.

Авторы

Глава 1

Распространения волн в стержнях из нелинейно-упругого и упругопластического материалов (теория продольного удара)

Эта глава посвящена исследованию характера динамического деформирования стержней при продольном ударе. В ней рассмотрены задачи распространения нелинейных волн нагружения и упругопластических волн разгрузки в стержнях при ударе по ним твердым телом и при соударении их между собой, исследован характер распространения волн разгрузки в стержнях с переменным пределом упругости, даны основы жесткопластического анализа динамического деформирования стержней.

Полученные результаты послужили основой для создания экспериментальных методов построения динамических диаграмм «напряжение – деформация» материалов при сжатии. Суть этих методов и результаты, полученные с их помощью, изложены в последнем параграфе настоящей главы. Там же приведены экспериментальные данные, подтверждающие упругопластическую теорию динамического деформирования таких металлов, как алюминий, сталь и медь.

§ 1.1. Метод характеристик для решения квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка в частных производных

При решении дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих процесс распространения волн в нелинейно-упругих, упругопластических и упруговязкопластических средах, широко используется метод характеристик. Для выяснения существа этого метода рассмотрим простейшее квазилинейное уравнение второго порядка в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$

где u – неизвестная функция; t и x – независимые переменные; коэффициент a^2 зависит от $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, u, x, t, т. е. $a^2 = a^2$ (u_t,

u_x, u, t, x). Здесь и далее частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ будут обозначаться соответственно u_t и u_x.

Поставим и решим следующую задачу: определить условия, при выполнении которых по заданным на некоторой кривой $C\,(x,\ t)$ значениям первых производных u_t и u_x можно найти бесконечное число значений вторых производных функций $u\,(x, t)$, удовлетворяющих (1.1). Вдоль линии C имеем:

$$du_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}dt,\ \ du_t = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dt. \qquad (1.2)$$

В уравнении (1.2) дифференциалы dx и dt связаны между собой уравнением линии C: $\dfrac{dx}{dt}$ – тангенс угла наклона этой линии к оси t в точке (t, x).

Так как du_x и du_t вдоль кривой C заданы, то в уравнениях (1.2) неизвестными являются значения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, которые должны, кроме того, удовлетворять уравнению (1.1). Но для того чтобы система трех линейных уравнений (1.1) – (1.2) для трех неизвестных $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ имела бесчисленное множество решений, требуется равенство нулю соответствующих определителей:

$$\begin{vmatrix} a^2 & 0 & -1 \\ dx & dt & 0 \\ 0 & dx & dt \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ dx & dt & du_x \\ 0 & dx & du_t \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим

$$a^2(dt)^2 - (dx)^2 = 0, \qquad a^2 du_t dt - a^2 dx du_x = 0 \qquad (1.3)$$

или

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a^2; \qquad du_t = \frac{dx}{dt}du_x.$$

Как видим, угловой коэффициент dx/dt удовлетворяет квадратному уравнению, имеющему действительные различные корни (за счет предположения о положительности коэффициента a^2 при второй производной в (1.1)).

Дифференциальные уравнения, для которых необходимое

при определении dx/dt соотношение имеет действительные и различные корни, относятся к гиперболическому типу.

Таким образом, поставленная задача имеет решение при условии выполнения следующих, так называемых характеристических соотношений, связывающих между собой угол наклона кривой C и первые производные функции $u(x, t)$:

$$\frac{dx}{dt} = a, \tag{1.4′}$$

$$du_t = a du_x, \tag{1.5′}$$

или

$$\frac{dx}{dt} = -a, \tag{1.4″}$$

$$du_t = -a du_x. \tag{1.5″}$$

Заметим, что в частном случае $a \equiv \text{const}$ уравнения (1.4) – (1.5) будут являться характеристическими соотношениями линейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных (1.1). Дифференциальные соотношения (1.4) и (1.5), вообще говоря, не являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. В частном случае, когда a^2 зависит только от u_x и u_t, соотношения (1.5′) и (1.5″) обращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения (зависимость $a^2 \equiv a^2(u_x)$ как раз имеет место в рассматриваемых здесь задачах).

Если предположить существование дважды дифференцируемого однозначного решения уравнения (1.1), то соотношения (1.4′) – (1.4″) при этом превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения. В силу однозначности функции $u(x, t)$ система

$$u_x = u_x(x,t), \quad u_t = u_t(x,t) \tag{1.6}$$

допускает решение $x = x(u_x,u_t)$, $t = t(u_x,u_t)$. Подстановка выражений для x и t через u_x и u_t в соотношения (1.5′) и (1.5″) делает последние обыкновенными дифференциальными уравнениями, а интегралы соотношений (1.4) и (1.5) в плоскостях x, t и u_x, u_t изображаются некоторыми кривыми, которые будем называть *характеристиками* в соответствующих плоскостях. В этой связи соотношения (1.4′) и (1.4″) называют *дифференциальными уравнениями характеристик*, а (1.5′) и (1.5″) – условиями на характеристиках или дифференциальными уравнениями характеристик в плоскости u_t и u_x для (1.1).

Докажем теперь, что дважды дифференцируемая функция $u(x, t)$, обращающая в некоторой области изменения переменных x, t в тождество одно из соотношений (1.5′), (1.5″), между дифференциалами независимых переменных dx и dt которой справедливы соответственно соотношения (1.4′) или (1.4″), удовлетворяет уравнению (1.1). С этой целью запишем оба уравнения (1.5′) и (1.5″) (после подстановки функции $u(x, t)$) в виде одного тождества:

$$du_t = \pm a du_x.$$

Так как функция $u(x, t)$ дважды дифференцируема, это тождество можно преобразовать:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx \equiv \pm a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dt + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right). \tag{1.7}$$

По условию, дифференциалы dx и dt в (1.7) удовлетворяют соответственно соотношениям (1.4′) или (1.5′), т.е. $dx = \pm a\, dt$. Следовательно, (1.7) можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \pm a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \equiv \pm a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \equiv a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Легко доказать и обратное утверждение: функция, удовлетворяющая уравнению (1.1), обращает в тождества соотношения (1.5′) и (1.5″), если при этом соблюдаются соотношения (1.4′) и (1.4″).

Доказанным выше утверждениям можно дать такое геометрическое истолкование. Функция, отображающая некоторую область G' плоскости u_t, u_x на область G плоскости x, t (рис. 1.1) и устанавливающая соответствие между точками характеристик C и C' (из одного семейства), является решением уравнения (1.1). Последнее заключение, очевидно, справедливо по отношению к характеристикам как первого (1.4), так и второго (1.5) семейства, а поэтому и по отношению к точкам их пересечения. Отсюда следует, что решением уравнения (1.1) является также функция, устанавливающая соответствие между точками

пересечения характеристик различных семейств в плоскостях x, t и u_t, u_x[1].

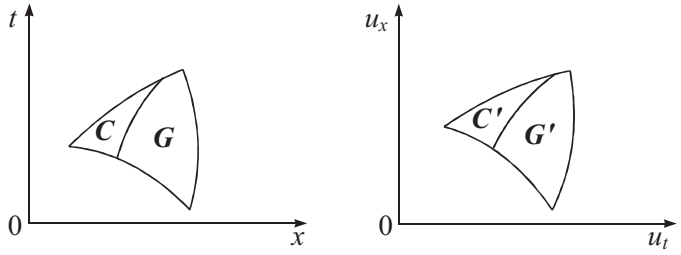


Рис. 1.1

Установленное свойство соответствия характеристик позволяет:

1) определить возможность решения тех или иных краевых задач (метод характеристик как метод рассуждения);

2) выявить качественный характер решения (метод характеристик как метод качественного анализа решения);

3) разработать различные способы решения уравнений в частных производных гиперболического типа (аналитические, численные, графические).

Покажем, в частности, как используется свойство соответствия при решении различных краевых задач математической физики. Начнем с решения задачи Коши. Последняя, как известно, состоит в определении решения уравнения в частных производных по значениям u_x и u_t, заданным на некоторой нехарактеристической кривой AB плоскости x, t (рис. 1.2). Очевидно, краевым условиям в плоскости u_x, u_t при этом соответствует некоторая кривая $A'B'$. Так как дифференциальные уравнения характеристик – первого порядка, то в плоскостях x, t и u_x, u_t можно привести два семейства характеристик (рис. 1.2). Указанные характеристики пересекаются в области ABC плоскости x, t и в области $A'B'C'$ плоскости u_x, u_t. Таким образом, установленное краевыми условиями взаимно-однозначное соответствие

[1] Можно показать, что свойство соответствия справедливо применительно к уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \varphi_0(u_x, u_t, u, x, t)$ — более общего вида, чем (1.1).

точек отрезков AB и $A'B'$ распространяется только на области ABC и $A'B'C'$. Следовательно, однозначное решение задачи Коши возможно только в криволинейном треугольнике ABC (или ABD).

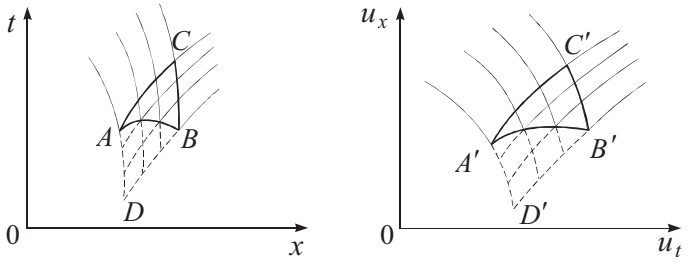


Рис. 1.2

Пользуясь свойством соответствия, легко показать, что если значения производных u_t и u_x заданы на характеристике, то задача Коши имеет бесчисленное множество решений.

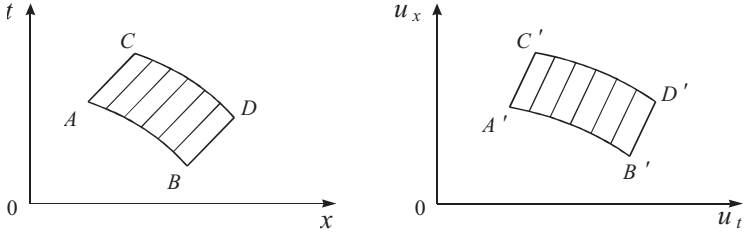


Рис. 1.3

В самом деле, через характеристики AB и $A'B'$ в обеих плоскостях можно провести другое семейство характеристик (рис. 1.3). При любом соответствии между точками этих семейств характеристик мы будем иметь решение уравнения (1.1), удовлетворяющее данному краевому условию. Поэтому для получения взаимно-однозначного решения в рассматриваемом случае необходимо задать, например, значения функций u_t и u_x (связанных между собой условиями (1.5′) или (1.5″)) на какой-либо характеристике второго семейства, т.е. установить дополнительное соответствие характеристик AC и $A'C'$. При этом установится взаимно-однозначное соответствие точек в криволинейных че-

тырехугольниках $ABCD$ и $A'B'C'D'$, что означает единственность решения сформулированной таким образом краевой задачи (называемой задачей Гурса, или характеристической задачей Коши) в области $ABCD$.

Рассмотрим, наконец, так называемую смешанную задачу, когда значение одной производной, например u_x, задано на нехарактеристической кривой AC, а значения двух других производных – на характеристике AB (рис. 1.4). Покажем, пользуясь свойством соответствия характеристик, принципиальную разрешимость смешанной задачи. Характеристика, исходящая из точки 1, пересекает кривую AC в некоторой точке 2. Так как в последней значение u_x известно, то соответствующая ей точка 2' находится на пересечении характеристики 1'–2' с линией $u_x = u_{x_2}$. Проводя далее характеристики 2–4, 2'–4', 3–4, 3'–4', установим соответствие точек 4 и 4'. В силу произвольности выбора точек 1, 2 и 3 принципиальная разрешимость смешанной задачи доказана.

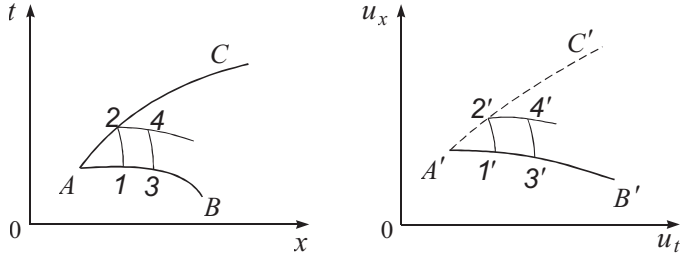


Рис. 1.4

Из проведенных рассуждений усматривается приближенный метод решения всех рассмотренных выше задач, основанный на замене кусочков характеристик отрезками их касательных. Аналитически это равносильно замене дифференциальных уравнений характеристик следующими уравнениями в конечных разностях:

$$x - x_1 = a(u_{x_1}, u_{t_1}, ...)(t - t_1); \quad u_t - u_{t_1} = a(u_{x_1}, u_{t_1}, ...)(u_x - u_{x_1}),$$

$$x - x_2 = a(u_{x_2}, u_{t_2}, ...)(t - t_2); \quad u_t - u_{t_2} = a(u_{x_2}, u_{t_2}, ...)(u_x - u_{x_2}).$$

Если значения t_1, x_1, u_{x_1}, u_{t_1}, u_1, t_2, x_2, u_{x_2}, u_{t_2}, u_2 известны, то, решая записанную систему, получим значения x, t и u_t, u_x, соответствующие точке пересечения характеристик (рис. 1.5).

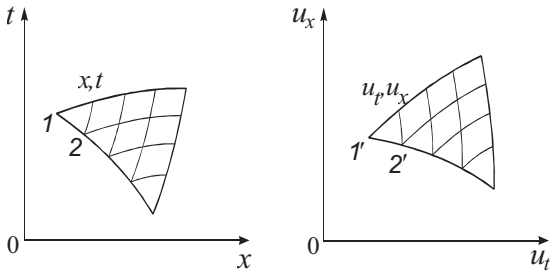


Рис. 1.5

В заключение следует заметить, что соотношения (1.4) – (1.5) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений в частных производных вдоль характеристических направлений. Она обладает той отличительной особенностью, что каждое ее уравнение содержит производные только по этому направлению. Указанное свойство характеристик может быть положено в основу при выводе характеристических соотношений, например для системы дифференциальных уравнений в частных производных[1].

§ 1.2. Распространение плоских нелинейных волн нагружения в длинных стержнях

В этом параграфе исследуется процесс динамического деформирования стержня, к одному концу которого приложено неубывающее напряжение $p(t)$. Покажем, что этот процесс в общем случае описывается нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка гиперболического типа и носит волновой характер.

Для вывода уравнения динамического деформирования стержня рассмотрим поведение его элемента, ограниченного в момент $t = 0$ плоскими сечениями x и $x + dx$. При таком определении x является лагранжевой координатой, жестко связанной с данным сечением во все моменты времени. Из условия сохранения массы этого элемента имеем:

---

[1] См., например, *Курант Г., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. — М.: ИЛ, 1950.

$$dx\rho_0 F_0 = [x + dx + u(x + dx, t) - x - u(x, t)]\rho F$$

или

$$\rho_0 F_0 = (1 + u_x)\rho F. \tag{1.8}$$

Здесь $u(x, t)$ и $u(x + dx, t)$ – смещения соответствующих сечений в момент t; ρ – плотность; F – площадь поперечного сечения; индексом 0 отмечены начальные параметры стержня.

Закон сохранения количества движения в применении к рассматриваемому элементу стержня дает

$$\rho_0 F_0 dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x + dx, t) - T(x, t),$$

где $T(x, t)$; $T(x + dx, t)$ – усилия, действующие в соответствующих сечениях.

Вводя условное напряжение $\sigma = T/F_0$, последнее уравнение преобразуем к виду

$$\rho_0 F_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(F_0 \sigma). \tag{1.9}$$

Для случая цилиндрического стержня ($F_0 = \text{const}$) уравнение (1.9) упрощается:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \tag{1.10}$$

Предположим, что напряжение σ является функцией только деформации $e = u_x$, т.е.

$$\sigma = \sigma(e). \tag{1.11}$$

При малых деформациях зависимость $\sigma(e)$ можно считать, согласно закону Гука, линейной:

$$\sigma = Ee, \tag{1.12}$$

где E – модуль Юнга. При больших значениях деформаций эта зависимость, будучи нелинейной, обладает следующей особенностью: вплоть до определенной величины e она имеет один и тот же вид при нагружении и разгружении (нелинейная упругость); в области больших деформаций виды функций $\sigma(e)$ при нагружении и разгружении значительно различаются между собой. В частности, при разгружении зависимость $\sigma = \sigma(e)$ представляется прямой, параллельной начальному участку диаграммы нагружения. Так как в этом параграфе рассматриваются

только случаи нагружения элементов стержня с течением времени, то можно считать, что зависимость $\sigma = \sigma(e)$ имеет одинаковый вид для всех значений x и t.

Будем полагать, что всегда, когда это не оговорено особо, производная $d\sigma/de$ – монотонно убывающая функция деформации. Последнее предположение, как будет показано ниже, обеспечивает непрерывный волновой процесс нагружения (без образования ударных волн).

Сделаем еще одно замечание относительно принятого закона деформирования $\sigma = \sigma(e)$. Последний хорошо подтвержден для ряда материалов (таких, как железо, сталь различных марок, медь, алюминий, резина и т.д.) экспериментами при медленном статическом нагружении соответствующих образцов. Возможность применения его к условиям рассматриваемого здесь быстрого динамического нагружения требует соответствующей экспериментальной проверки. Относя обсуждение этого вопроса в последний параграф главы, отметим здесь лишь сам факт возможности использования в динамических условиях закона $\sigma = \sigma(e)$ (*отличного, однако, от статического*) для ряда практически важных материалов.

Определение динамического напряженного и деформированного состояния стержней из таких материалов сводится, очевидно, к решению уравнения (1.10) при условии (1.11) или, что то же, уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.13}$$

где $a = \sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{d\sigma}{de}}$. Согласно сказанному в §1.1, уравнение (1.13) эквивалентно следующей системе характеристик:

$$dx = \pm a dt; \tag{1.14}$$

$$du_t = \pm a du_x. \tag{1.15}$$

Условия (1.15) могут быть проинтегрированы:

$$u_t = \psi(u_x) + c_{1,2}, \quad \psi(u_x) = \int_0^{u_x} a du_x$$

причем константы c_1, c_2 имеют, вообще говоря, различные значения на различных характеристиках.

Рассмотрим последовательность применения метода характеристик для решения задачи о динамическом нагружении стержня конечной длины под влиянием приложенного к его торцу $x = 0$ напряжения $\sigma(e) = p(t)$ (или деформации $u_x = e_0(t)$). Пусть в начальный момент $t = 0$ стержень не деформирован и находится в состоянии покоя. Удовлетворение начальным условиям связано с решением задачи Коши для области OAB, где OA – длина стержня, OB и BA – характеристики положительного и отрицательного направлений соответственно (рис. 1.6).

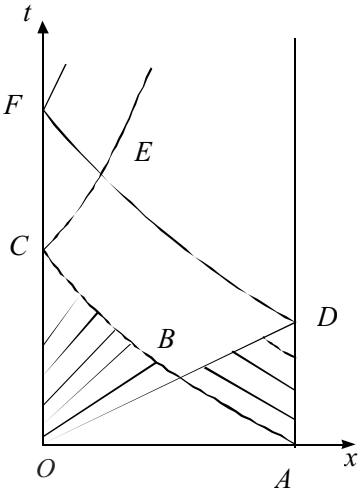


Рис. 1.6

Можно показать, что решением задачи Коши для уравнения (1.13) при нулевых начальных данных является $u(x,t) \equiv \text{const}$. Действительно, проводя через некоторую точку x, t этой области характеристики различных направлений вплоть до пересечения с осью $t = 0$, будем иметь:

$$u_t(x,t) = -\psi[u_x(x,t)]; \quad u_t(x,t) = \psi[u_x(x,t)], \tag{1.16}$$

так как c_1 и c_2 в силу начальных условий равны нулю. Из (1.16) следует, что u_t=u_x=0, поэтому в области OAB имеем $a \equiv a(0) = a_0$. Значит, все характеристики этой области (в том числе BA и OB) прямолинейны.

В плоскости годографа u_t,u_x области OAB соответствует начало координат (u_t=u_x=0). Смысл полученного решения очевиден: вплоть до момента $t = x/a_0$ сечение x остается в недеформированном состоянии.

Найдем теперь решение сформулированной задачи за фронтом волны, идущей со скоростью a_0, т.е. в области OBC, ограниченной осью Ot и характеристиками $x = a_0t$ и BC (см. рис. 1.6). Прежде всего покажем, что в области OBC имеет место интеграл

$$u_t = -\psi(u_x). \tag{1.17}$$

Действительно, покрыв рассматриваемую область характеристиками отрицательного направления, можем записать вдоль каждой из них соотношение $u_t = -\psi(u_x) + c_2$.

Так как все характеристики отрицательного направления пересекают линию $x = a_0 t$, на которой $u_x = u_t = 0$, то константа интегрирования c_2 вдоль каждой из них оказывается равной нулю, чем и доказывается сделанное утверждение. Следовательно, в плоскости годографа u_t, u_x области OBC соответствует линия $u_t = -\psi(u_x)$. Все характеристики положительного наклона в области OBC прямолинейны, поскольку при наличии интеграла (1.17) из характеристического условия $u_t = \psi(u_x) + c_1$ следует постоянство скоростей и деформаций (а значит, и углового коэффициента $a(u_x)$) вдоль каждой характеристики положительного наклона. Поэтому уравнение характеристик положительного наклона имеет вид

$$x = a(u_x)(t - t_0), \tag{1.18}$$

где t_0 – любая точка отрезка OC, для которой, согласно краевому условию, известно

$$u_x = e_0(t_0). \tag{1.19}$$

Исключив из (1.18) и (1.19) параметр t_0, получаем функциональное уравнение для определения деформации в любой точке рассматриваемой области:

$$u_x = e_0\left[t - \frac{x}{a(u_x)}\right]. \tag{1.20}$$

Скорость u_t определяется интегралом (1.17). Если напряжение $p(t)$ монотонно возрастает в течение времени t_0, а затем

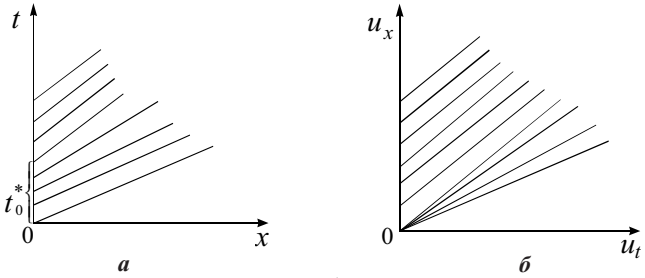


Рис. 1.7

остается постоянным, то семейство прямолинейных характеристик в плоскости x, t имеет вид, изображенный на рис. 1.7,*а*.

Следовательно, сечение x с момента $t = x/a_0$ деформируется в процессе распространения нелинейных волн нагружения, скорость которых монотонно падает от a_0 до $a = a[e(t_0^*)]$; величина деформации сечения x стержня после прохождения волн становится равной $e(t_0^*)$. Уменьшая t_0^* до нуля, приходим к случаю мгновенного приложения к концу стержня постоянного напряжения p, когда прямолинейные характеристики исходят из начала координат (рис. 1.7,*б*). Решение задачи при этом дается формулами

$$a(u_x) = x/t, \quad u_t = -\psi(u_x), \tag{1.21}$$

из которых следует, что скорости и деформации зависят только от отношения x/t.

Последний факт может быть установлен также анализом размерностей. В самом деле, решение поставленной задачи ищется в той области изменения переменных x и t, где не сказывается влияние второго конца стержня, а поэтому оно должно совпадать с соответствующим решением для полуограниченного стержня. В последнем же, ввиду отсутствия характерного размера и характерного времени, безразмерное смещение $u/(a_0t)$ может зависеть лишь от единственной безразмерной переменной $x/(a_0t)$.

У большинства материалов зависимость $\sigma = \sigma(e)$ на некотором интервале $0 \le e \le e_s$ удовлетворяет закону Гука $\sigma = Ee$. На этом интервале $a \equiv a_0 = \sqrt{E/\rho_0}$. Иногда зависимость $\sigma = \sigma(e)$ при $e \ge e_s$ приближенно заменяют в соответствии с предложением Л.Прандтля линейной $\sigma = Ee_s + E'(e - e_s)$, где E' называется модулем упрочнения ($E' < E$). Очевидно, при $e > e_s$ имеем $a^2 = a_1^2 = E'/\rho_0$. Повторяя для этого случая предыдущие рассуждения с уменьшением t_0^* до нуля, убедимся, что на волне $x = a_0t$ деформации скачком возрастают до e_s, а скорости — до $u_t = -a_0e_s$. На волне $x = a_1t$ деформации скачком возрастают от e_s до максимального значения $e_0(0)$. В области, ограниченной волнами $x = a_0t$ и $x = a_1t$ деформации и скорости частиц не меняются и равны, соответственно, e_s и $-a_0e_s$.

Формулы, аналогичные (1.17) и (1.20), были впервые получены Риманом при исследовании характера распространения

волн конечной амплитуды в газах. По этой причине волны, возникающие в стержне при динамическом нагружении и описывающиеся формулами (1.17) и (1.20), будем называть волнами Римана.

В области, расположенной выше характеристики *ABC*, сказывается условие, которое будет поставлено при $x = A$. Каким бы ни было это условие, в области *ABD* будем иметь решение в виде волны Римана, так как скорости и деформации частиц стержня на характеристике *AB* равны нулю. В результате параметры на характеристиках *CB* и *BD* известны, поэтому может быть решена задача Гурса в четырехугольнике *BCED*, затем смешанная задача в области *CEF*. Если стержень в сечении $x = A$ закреплен, то $u_t(x = A,\ t) = 0$ и решением в области *ABD* будет $u_t = u_x \equiv 0$. Тогда во всей области *DOF* решением будет волна Римана. В этом случае в дальнейшем необходимо решать только смешанные задачи (первая из них для области, ограниченной прямой $x = A$ и характеристикой *DF*).

В рассмотренных выше задачах[1] предполагалось, что $da/de < 0$; это условие обеспечивает непрерывный волновой процесс нагружения, так как последующие возмущения, соответствующие большим значениям деформаций, распространяются с меньшей скоростью и не могут догнать предыдущие. Если $da/de > 0$, то последующие возмущения распространяются с большей скоростью, чем предыдущие, складываясь в волны сильного разрыва. При монотонном возрастании приложенной нагрузки, как показано в [1], возникновение волны сильного разрыва происходит на некотором расстоянии x_0 от торца стержня; в области $0 \le x \le x_0$ распространяются непрерывные волны, описываемые по-прежнему формулами (1.17) и (1.20). В общем случае точка x_0 определяется как минимальное зна-

---

[1] Приведенные результаты получены в [4]. В зарубежной литературе соответствующие результаты обычно приписывают Т. Карману или Д. Тейлору со ссылками на их закрытые отчеты. Содержание последних, насколько известно авторам, до сих пор в открытой литературе нигде не опубликовано и о нем лишь приходится догадываться. В статье *Дюве П.* и *Кармана Т.* Распространение пластических деформаций в телах // Journ. of Appl. Physics. 1950. № 10 (См. Механика. 1951. № 2) рассмотрен случай мгновенного приложения постоянного давления к концу стержня в предположении $da/de < 0$.

чение координаты начала огибающей прямолинейного семейства волн нагружения, наклон которых к оси Ox плоскости x, t с увеличением времени непрерывно уменьшается.

Предварительно найдем пересечение двух близлежащих характеристик положительного направления $x = a(t_1 + \Delta t)\,(t - t_1 - \Delta t)$, $x = a(t_1)\,(t - t_1)$, исходящих из некоторой точки $x = 0$, $t = t_1$ и ее окрестности $x = 0$, $t = t_1 + \Delta t$. Очевидно, координаты точки пересечения $x(t_1)$, $t(t_1)$ находятся из условия

$$a(t_1)\,(t - t_1) = a(t_1 + \Delta t)\,(t - t_1 - \Delta t) =$$

$$= a(t_1)\,(t - t_1 - \Delta t) + a'(t_1)\,\Delta t(t - t_1) + O(\Delta t^2) \text{ при } \Delta t \to 0\,.$$

Отсюда

$$a(t_1)\,\Delta t = a'(t_1)\,\Delta t(t - t_1) \text{ при } \Delta t \to 0\,,$$

$$t(t_1) = t_1 + a(t_1)/a'(t_1),\; x(t_1) = a^2(t_1)/a'(t_1).$$

Минимальное значение $x(t_1)$ определяет x_0, т.е. звуковая волна, возникающая при $x = 0$ в момент $t = t_1$, приводит к появлению ударной волны в точке $x = x_0$ в момент $t = t(t_1)$.

Рассмотрим случай, когда деформация (или скорость) на торце стержня имеет вид $e_0(t) \sim t^m$, $m > 0$. При этом

$$x(t_1) = \frac{a^2(t_1)}{\left.\dfrac{da}{de_0}\right|_{t_1} \left.\dfrac{de_0}{dt}\right|_{t_1}} = \frac{a^2(t_1)}{\dot{a}[e_0(t_1)]\, m t_1^{m-1}}; \quad \dot{a} = da/de.$$

При $0 \le m < 1$ $t_1 = 0$, $x_0 = 0$ и волна сильного разрыва зарождается сразу в точке $x = 0$. При $m = 1$ $x(t_1) = a^2(t_1)/\dot{a}(e_0(t_1))$. В связи с ограниченностью $a^2(t_1)$ и $\dot{a}(e_0(t_1))$ $x_0 = \text{const}$, а момент t_1 определяется из условии обращения в минимум $x(t_1)$. Наконец, при $m > 1$ $x_0 \to 0$ при $t_1 \to \infty$. Так как случай бесконечного роста деформации физически нереален, то при $m > 1$ значение t_1 определяется моментом t_0 завершения роста деформации $e_0(t)$.

Случай $da/de > 0$ в задачах о мгновенном нагружении полубесконечного стержня постоянным напряжением p_0 исследован в [2]. В основе исследования лежит то соображение, что автомодельность рассматриваемой задачи имеет место при любой зависимости $\sigma(e)$. Полагая поэтому $u = vt\, f(\xi)$, $\xi = x/vt$ (v –

некоторая константа, имеющая размерность скорости), уравнение (1.13) приведем к обыкновенному, следующего вида:

$$v^2\xi^2 f'' = a^2(f')f''. \tag{1.22}$$

Решениями (1.22) являются

$$\xi^2 = \bar{a}^2(f'), \quad f = r + q\xi \quad (\bar{a}^2 = a^2/v^2),$$

где

$$\bar{a}^2 = \frac{1}{\rho_0 v^2}\frac{d\sigma}{de} = \varphi'(f').$$

Покажем непосредственными выкладками, что в данном случае решение поставленной задачи имеет следующий вид: в недеформированную часть стержня со скоростью $D = \text{const}$ распространяется волна сильного разрыва (на которой деформация частиц скачкообразно возрастает до значения e_0); в области между торцовым сечением $x = 0$ и волной сильного разрыва деформации и скорости элементов стержня постоянны. Прежде всего, запишем вытекающие из законов сохранения массы и количества движения основные соотношения на волне сильного разрыва:

$$\rho_1(D - v_1) = \rho_0 D; \quad \rho_0 D v_1 + \sigma_1 = 0 \tag{1.23}$$

(предполагается, что справа от поверхности сильного разрыва – покой и недеформированная среда). Здесь v_1 – скорость; ρ_1 – плотность; σ_1 – напряжение слева от поверхности сильного разрыва. С использованием (1.23) и (1.8) в форме $\rho_0 = \rho_1(1+e_0)$ получим

$$D - v_1 = D(1+e_0); \; v_1 = -De_0; \quad D^2 = \frac{\sigma_1(e_0)}{\rho_0 e_0}.$$

т. е. квадрат скорости ударной волны пропорционален тангенсу угла наклона к оси Oe — прямой, соединяющей на диаграмме $\sigma = \sigma(e)$ точку e_0, $\sigma(e_0)$ с точкой $\sigma = e = 0$.

В [2] рассмотрены еще два случая изменения $\varphi'(e)$, когда $\varphi'' = 0$ при некотором значении $e = e^*$.

Случай 1. Функция $\varphi''(e)$ сначала монотонно убывает, оставаясь положительной вплоть до $e = e^*$ (рис. 1.8,*а*). Очевидно, при $e_0 < e^*$ решение задачи описывается формулами (1.21).

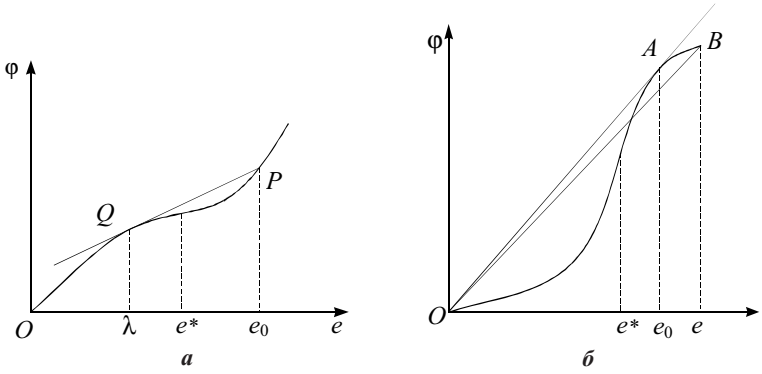


Рис. 1.8

При $e_0 > e^*$ возникает следующая волновая картина[1]: в недеформированную часть стержня распространяется непрерывная волна нагружения, за ней движется волна сильного разрыва, после прохождения которой имеет место область постоянных деформаций e_0. На функцию φ при этом должно быть наложено условие $\varphi'(e) < e_0\varphi'$, обеспечивающее недогон переднего фронта волны нагружения волной сильного разрыва. Непосредственными выкладками проверим правильность этого утверждения.

Пусть значение $\xi = \xi^*$ соответствует положению фронта волны сильного разрыва. Соотношения (1.23) для рассматриваемого случая несколько усложняются:

$$\rho_1(D - v_1) = \rho_2(D - v_2); \tag{1.24}$$

$$\rho_1 v_1(D - v_1) + \sigma_1 = \rho_2 v_2(D - v_2) + \sigma_2. \tag{1.25}$$

Здесь и в дальнейшем индексами 1 и 2 отмечаются параметры соответственно справа и слева от волны сильного разрыва. Далее,

---

[1] Наиболее просто понять, почему возникает такая картина, если, как и ранее, заменить скачкообразное изменение деформации непрерывным ее изменением в течение времени t_0^*, а затем устремить $t_0^* \to 0$. В этом случае вначале будут распространяться волны Римана. Скорость волн после достижения момента $d^2\sigma/de^2 = 0$ будет выше скорости предшествующих. Это приведет к возникновению ударной волны, которая будет увеличивать скорость, пересекая участки характеристик из области непрерывного нагружения. Аналогичным образом может быть проанализирован и случай 2.

$$D = v\xi^*; \;\; v_1 = (\partial u/\partial t)_1 = v[f_1(\xi^*) - \xi^* f_1'(\xi^*)];$$

$$v_2 = (\partial u/\partial t)_2 = v[f_2(\xi^*) - \xi^* f_2'(\xi^*)].$$

Отсюда, в силу непрерывности смещений на волне сильного разрыва $f_1(\xi^*) = f_2(\xi^*)$, следует, что

$$v_1 - v_2 = -D(e_1 - e_2); \;\; D - v_2 = D - v_1 - D(e_1 - e_2).$$

Из уравнения неразрывности имеем:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + f_1'(\xi^*)} = \frac{\rho_0}{1 + e_1}; \qquad \rho_2 = \frac{\rho_0}{1 + f_2'(\xi^*)} = \frac{\rho_0}{1 + e_2}.$$

Поэтому из соотношения (1.24) находим:

$$\frac{D - v_1}{1 + e_1} = \frac{D - v_2}{1 + e_2} = \frac{D - v_1 - D(e_1 - e_2)}{1 + e_2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{D - v_1}{1 + e_1} - \frac{D - v_1}{1 + e_2} = \frac{D(e_2 - e_1)}{1 + e_2}; \;\; \frac{D - v_1}{1 + e_1} = D.$$

Из соотношения (1.25) с учетом того, что $e_2 = e_0$, $\sigma(e_0) = p_0$, находим:

$$D^2 = \frac{\sigma_2(e_2) - \sigma_1(e_1)}{\rho_0[e_2 - e_1]} = \frac{\rho_0 - \sigma(e_1)}{\rho_0[e_2 - e_1]}. \tag{1.26}$$

Так как

$$a^2(e_1) = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{d\sigma}{de}\right)_{c_1} = \frac{1}{\rho_0}\varphi'(e_1),$$

то для существования описанной выше картины скорость распространения волны Римана при деформации e_1 должна быть больше или равна скорости волны сильного разрыва, т.е. $a^2(e_1) \geq D^2(e_1)$ или $\rho_0 D^2 \leq \varphi'(e_1)$. Максимальное значение $e_1 = \lambda$ находится из условия

$$a^2(\lambda) = D^2, \;\; \varphi'(\lambda) = \frac{p_0 - \sigma(\lambda)}{e_0 - \lambda}, \tag{1.27}$$

которое определяет следующее геометрическое построение для нахождения λ: из точки P, отвечающей данному e_0 на кривой $\sigma(e)$, проводим касательную PQ к этой кривой; абсцисса точки

касания определяет λ. При выполнении ограничений, наложенных на функцию $\varphi(e)$, λ всегда существует и притом единственное.

Принятое автором [2] допущение о совпадении скорости ударной волны со скоростью заднего фронта волны Римана не является обязательным. Поэтому может существовать любое движение следующего вида: в недеформированный стержень распространяется волна Римана, максимальная деформация на которой может достигать любого значения e, лежащего между 0 и λ; за волной Римана будет расположена область постоянных параметров; в нее распространяется ударная волна, скорость которой определяется по тангенсу угла наклона к оси Oe прямой, соединяющей точку P с точкой кривой $\varphi(e)$, имеющей абсциссу e.

Случай 2. Функция $\varphi(e)$ имеет вид, изображенный на рис. 1.8,*б*. Если деформация конца стержня не превосходит значения e^*, волновая картина будет состоять только из ударной волны, за которой всюду будет область постоянных параметров. Если деформация конца стержня e_0 превосходит значение e^*, волновая картина будет иметь следующий вид[1]: в недеформированную часть стержня распространяется ударная волна, за которой будет область постоянных параметров, сменяющаяся затем волной Римана, на которой деформации возрастают до величины e_0. Решение задачи опять-таки многозначно: скорость ударной волны может иметь любое значение, определяемое значениями тангенсов углов прямых OA и OB (см. рис. 1.8,*б*).

Неединственность решений задач для случаев 1 и 2 является следствием их неэволюционности. Для устранения неединственности решений или сокращения размеров областей, где имеет место неединственность, необходимо исследовать структуру волны сильного разрыва. Этот вопрос обстоятельно изложен в [5] применительно к различным сплошным средам. Применительно к рассматриваемой задаче это впервые сделано в [6] в предположении, что внутреняя энергия среды как функция деформации и энтропии известна, а также в [7] в предположении, что зависимость $\sigma(e)$ в волне сильного разрыва известна.

[1] В [2] при рассмотрении случая 2 допущена неточность, обнаруженная А. А. Павленко и исправленная в [3], где приводится, однако, лишь одно из возможных решений.

§ 1.3. Волна разгрузки. Решение задач динамического деформирования стержней при известной скорости волны разгрузки

Пусть на конце однородного, полубесконечного стержня мгновенно возникло достаточно большое давление, которое, монотонно убывая с течением времени, стремится к некоторому постоянному значению. Такой случай возможен, если на конце стержня инициировать взрыв или произвести удар по нему абсолютно твердым телом. Ниже излагаются результаты [4], справедливые для упругопластических материалов, у которых закон нагружения отличается от закона разгружения.

Предположим вначале, что диаграмма «напряжение – деформация» материала не имеет нелинейно-упругого участка. Дадим описание картины распространения деформаций в такой ситуации. Как следует из формулы (1.20), при максимальном значении давления взрыва, не превосходящем предела упругости материала, деформации конца будут передаваться по стержню со скоростью звука a_0. Некоторая частица стержня, находящаяся на расстоянии x от его конца, в момент $t = x/a_0$ после взрыва (или удара) приобретает скачком максимальную деформацию, соответствующую максимальному давлению. В последующие моменты эта частица в точности воспроизводит закон деформирования конца стержня. Если максимальное давление взрыва превосходит предел упругости материала, то картина распространения деформации будет совершенно иной: деформации некоторой частицы стержня с момента $t = x/a$ будут непрерывно возрастать по закону, зависящему от вида кривой $\sigma = \sigma(e)$, до некоторого значения, меньшего, однако, максимальной деформации конца стержня. Затем деформации этой частицы будут уменьшаться по закону, зависящему как от характера снижения давления на конце, так и от вида кривой $\sigma = \sigma(e)$.

Таким образом, в плоскости x, t для данного x существует некоторое t, после которого начинается разгрузка элемента. Следовательно, в плоскости x, t есть кривая, по одну сторону от которой происходит нагружение стержня, а по другую – его разгружение. Эту кривую назовем *волной разгрузки*.

Выведем дифференциальное уравнение, которое описывает деформирование элементов стержня после прохождения волны

разгрузки. Обозначим через $e_0(x)$, $\sigma_0(x)$ соответственно деформацию и напряжение элементов стержня на волне разгрузки. После прохождения последней величина деформации элемента стержня должна уменьшаться; следовательно, имеет место его разгрузка, при которой σ и e связаны линейным соотношением

$$\sigma - \sigma_0 = E(e - e_0). \tag{1.28}$$

Подставляя (1.28) в (1.10), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{d\sigma_0}{dx} - a_0^2 \frac{de_0}{dx} \left(a_0^2 = \frac{E}{\rho_0} \right). \tag{1.29}$$

Характеристики уравнения (1.29) и соответствующие условия запишутся так:

$$\frac{dx}{dt} = a_0; \;\; du_t - a_0 du_x = \frac{1}{a_0\rho_0} d\sigma_0 - a_0 de_0 \;\; \text{или} \;\; dv = \frac{1}{\rho_0 a_0} d\sigma, \tag{1.30}$$

$$\frac{dx}{dt} = -a_0; \;\; du_t + a_0 du_x = -\frac{1}{a_0\rho_0} d\sigma_0 + a_0 de_0 \;\; \text{или} \;\; dv = -\frac{1}{a_0\rho_0} d\sigma, \tag{1.31}$$

где $v = u_t$, $\sigma = E(u_x - e_0) + \sigma_0$.

В уравнении (1.29), описывающем движение за волной разгрузки, $e_0(x)$ является неизвестной (до решения задачи) функцией. Вид кривой $e_0(x)$ определяется после совместного решения дифференциальных уравнений, описывающих процесс деформирования в областях нагружения и разгружения, при удовлетворении граничных условий как на конце стержня, так и на волне разгрузки, где предполагается непрерывность скоростей и деформаций. Процесс деформирования стержня в рассматриваемой задаче удобно изобразить в плоскости x, t (рис. 1.9).

Поскольку давление на конце стержня возрастает скачком, то изменение деформаций в области ниже OBC (до момента прихода волны разгрузки) происходит так, как в соответствующей задаче §1.2. При этом, как следует из формул этого параграфа,

$$x/t = a(u_x), \; u_t = -\psi(u_x).$$

Если обозначить через $t = f(x)$, уравнение волны разгрузки, то на ней, очевидно,

$$u_x = e_0(x) \quad \left[\frac{x}{f(x)} = a(e_0)\right]; \; u_t = -\psi(e_0). \tag{1.32}$$

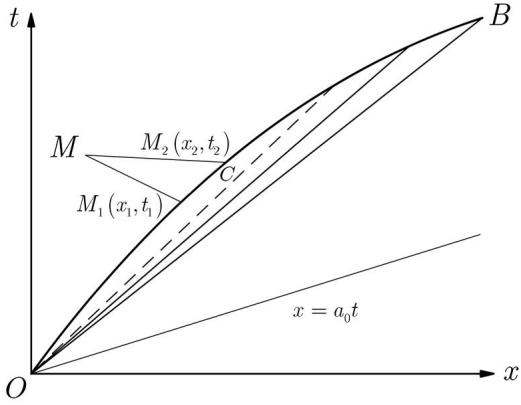


Рис. 1.9

Будем считать, кроме того, известной деформацию конца стержня $e(0, t) = e(t)$. При сформулированных краевых условиях найдем решение уравнения (1.29). Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u = F_1(a_0 t + x) + F_2(a_0 t - x) - \frac{1}{E}\int_0^x (\sigma_0 - Ee_0)dx. \tag{1.33}$$

Удовлетворяя краевому условию на конце $x = 0$, получим:

$$F_1'(a_0 t) - F_2'(a_0 t) - \frac{\sigma_0(0) - Ee_0(0)}{E} = \varepsilon(t).$$

Отсюда

$$F_1'(a_0 t + x) = F_2'(a_0 t + x) + \frac{\sigma_0(0)}{E} - e_0(0) = \varepsilon\left[\frac{a_0 t + x}{a_0}\right]$$

и условия (1.32) можно записать так:

$$F_2'\left[x\left(\frac{a_0}{a(e_0)}+1\right)\right]-F_2'\left[x\left(\frac{a_0}{a(e_0)}-1\right)\right]=\frac{\sigma_0(e_0)}{E}+e_0(0)-\frac{\sigma_0(0)}{E}-$$

$$-\varepsilon\left[x\left(\frac{1}{a(e_0)}-\frac{1}{a_0}\right)\right];\ F_2'\left[x\left(\frac{a_0}{a(e_0)}+1\right)\right]+F_2'\left[x\left(\frac{a_0}{a(e_0)}-1\right)\right]=$$

$$=e_0(0)-\frac{\sigma_0(0)}{E}-\int_0^{e_0}\frac{a}{a_0}de-\varepsilon\left[x\left(\frac{1}{a(e_0)}-\frac{1}{a_0}\right)\right]$$

или

$$F_2'\left[x\left(\frac{a_0}{a(e_0)}+1\right)\right]=e_0(0)-\frac{\sigma_0(0)}{E}-\varepsilon\left[x\left(\frac{1}{a(e_0)}-\frac{1}{a_0}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_0(e_0)}{E}-\int_0^{e_0}\frac{a}{a_0}de\right];\ F_2'\left[x\left(\frac{a_0}{a(e_0)}-1\right)\right]=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_0(e_0)}{E}+\int_0^{e_0}\frac{a}{a_0}de\right]. \tag{1.34}$$

Исключив F_2', получим следующее функциональное соотношение для определения e_0:

$$e_0(0)-\frac{\sigma_0(0)}{E}-\varepsilon\left(\frac{z}{a_0}\right)+\frac{1}{2}\int_0^{e_0[x_1(z)]}\left(\frac{a^2}{a_0^2}-\frac{a}{a_0}\right)de=$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^{e_0[x_2(z)]}\left(\frac{a^2}{a_0^2}+\frac{a}{a_0}\right)de, \tag{1.35}$$

где $x_1\left(\frac{a_0}{a[e_0(x_1)]}+1\right)=x_2\left(\frac{a_0}{a[e_0(x_2)]}-1\right)=z.$

На основании соотношения (1.35) можно сделать следующий важный для теории крешерных приборов вывод: по распределению остаточных деформаций в длинном упругопластическом стержне с известной динамической диаграммой $\sigma=\sigma(e)$ можно полностью восстановить характер изменения

деформации (напряжения) на конце стержня. Действительно, в этом случае соотношение (1.35) служит для определения $\varepsilon(z)$ по известному из эксперимента распределению остаточных деформаций $\tilde{e}(x)$, связанных с $e_0(x)$ очевидной зависимостью:

$$\tilde{e}(x) = e_0(x) - \sigma_0(e_0)/E.$$

Соотношение (1.35) для так называемой схемы Прандтля было получено в [4] и использовано ее автором для решения прямой задачи – нахождения волны разгрузки по заданной зависимости изменения давления $p(t)$. В этом случае кривая σ–e состоит из трех характерных частей: упругой ($\sigma = Ee$), пластической с резким падением $d\sigma/de$ и пластической с постоянным наклоном $E' = d\sigma/de$.

Следовательно, волны Римана для схемы Прандтля могут быть разбиты на три группы[1]: волны первой группы распространяются со скоростью $a_0 = \sqrt{E/\rho_0}$ и вызывают возрастание деформации от 0 до e_s; волны второй группы имеют резко переменную скорость звука, убывающую от a_0 до $a_1 = \sqrt{E'/\rho_0}$, и почти не изменяют деформацию элемента стержня; волны третьей группы распространяются со скоростью a_1 и вызывают изменение деформации от e_s до e_m.

Очевидно, волна разгрузки, на которой деформацию больше e_s, всегда пересекается лишь с волнами Римана третьей группы, поэтому $t = f(x) = x/a_1$. Учитывая, что при принятой схеме

$$p(t) - p_m = E[\varepsilon(t) - e_m], \quad a(e_0) \equiv a_1,$$

где p_m – максимальное давление взрыва, e_m – соответствующая ему деформация, соотношение (1.35) преобразуем к виду

$$p(t) = \frac{E}{2}\left(\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{a_1}{a_0}\right)e_0\left(\frac{a_0 a_1 t}{a_0 + a_1}\right) + \frac{E}{2}\left(\frac{a_1^2}{a_0^2} + \frac{a_1}{a_0}\right)e_0\left(\frac{a_0 a_1 t}{a_0 - a_1}\right) + \sigma_s - E' e_s. \tag{1.36}$$

Здесь учтено, что

---

[1] По-видимому, в [8] впервые рассмотрен процесс распространения волн нагружения в материале с билинейной зависимостью σ–e и предсказано существование двух различных фронтов, распространяющихся со скоростями соответственно a_0 и a_1.

$$\int_0^{e_0}\left(\frac{a^2}{a_0^2}+\frac{a}{a_0}\right)de=\left(\frac{a_1^2}{a_0^2}+\frac{a_1}{a_0}\right)(e_0-e_s)+2e_s\,,\quad p_m=\sigma_0(0),\ e_m=e_0(0).$$

Предположим, что функция $p(t)$ представима степенным рядом

$$p(t)=p_m+\sum_1^{\infty}p_nt^n. \tag{1.37}$$

При этом, как легко видеть из (1.36), решение для $e_0(x)$ надо искать в виде

$$e_0(x)=\sum_0^{\infty}b_nx^n.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим:

$$b_n=\frac{p_n}{A\alpha^n-B\beta^n};\quad A=\frac{E}{2}\left(\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_1^2}{a_0^2}\right);\quad B=\frac{E}{2}\left(\frac{a_1}{a_0}-\frac{a_1^2}{a_0^2}\right);$$

$$\alpha=\frac{a_0a_1}{a_0-a_1};\quad \beta=\frac{a_0a_1}{a_0+a_1}.$$

Для данного элемента стержня $e_0(x)$ является наибольшей деформацией, которая достигается в нем за время действия нагрузки. Поэтому остаточная деформация этого элемента выражается формулой

$$\tilde{e}=e_0-\frac{\sigma_0}{E}=\lambda\left(\sum b_nx^n-e_s\right),$$

где $\lambda=(E-E')/E$.

Остановимся подробнее на рассмотрении случая, когда давление $p(t)$ изменяется по степенному закону:

$$p(t)=p_m[1-(t/\tau)^n].$$

Из предыдущих формул имеем:

$$e_0(x)=e_m-\frac{2p_m(a_0^2-a_1^2)^nx^n}{a_0^na_1^{n+1}\rho_0[(a_0+a_1)^{n+1}-(a_0-a_1)^{n+1}]\tau^n}=e_m-Kx^n.$$

Приравнивая остаточные деформации нулю, получим уравнение для определения длины l зоны распространения пластических деформаций:

$$l = a_1 \tau_n \sqrt{\frac{a_0^n a_1 \rho_0 (e_m - e_s)[(a_0 + a_1)^{n+1} - (a_0 - a_1)^{n+1}]}{2 p_m \left(a_0^2 - a_1^2\right)^n}}.$$

Поскольку $p_m = \sigma_s + E'(e_m - e_s)$, то

$$l = a_1 \tau_n \sqrt{\left(1 - \frac{\sigma_s}{p_m}\right) \frac{a_0^n [(a_0 + a_1)^{n+1} - (a_0 - a_1)^{n+1}]}{2 a_1 \left(a_0^2 - a_1^2\right)^n}}.$$

Это выражение можно упростить, если учесть, что $a_1/a_0 \ll 1$. Тогда

$$l = a_1 \tau_n \sqrt{(n+1)\left(1 - \frac{\sigma_s}{p_m}\right)}. \qquad (1.38)$$

Из формулы (1.38) видно, что зона распространения остаточных деформаций не зависит от модуля упругости материала и тем больше, чем больше время действия τ, модуль упрочнения E' и максимальное давление p_m.

Следуя [9], покажем, что в рассматриваемом случае имеет место разгрузка элементов стержня всюду за волной разгрузки. С этой целью выразим функции $F_1'(a_0 t + x)$ и $F_2'(a_0 t - x)$, входящие в формулу

$$\frac{\partial e}{\partial t} = a_0 [F_1'(a_0 t + x) - F_2'(a_0 t - x)],$$

через $e_0'(a_0 t + x)$ и $e_0'(a_0 t - x)$, используя полученную зависимость для $e_0(x)$:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{a_1^{n+1} nK}{2a_0} \cdot \frac{(a_0 t - x)^{n-1}(a_0 + a_1)^{n+1} - (a_0 t + x)^{n-1}(a_0 - a_1)^{n+1}}{(a_0^2 - a_1^2)^n} = -\frac{nKa_1^{n+1}}{2a_0} \Phi(t, x).$$

Покажем также, что $\Phi(t, x) > 0$. Чтобы установить это, достаточно показать, что $\Phi(t, bt) > 0$ при $0 \le b \le a_1$, поскольку область изменения аргумента x ограничена неравенствами $0 \le x \le a_1 t$. При $x = 0$ и $x = a_1 t$ справедливость последнего неравенства очевидна; при $0 < b < a_1$ оно может быть доказано методом полной математической индукции. Действительно, при $n = 1$ и $n = 2$ имеем $\Phi(t, bt) > 0$; пусть это неравенство справедливо при $n = k$, т. е.

$$(a_0 - b)^{k-1}(a_0 + a_1)^{k+1} - (a_0 + b)^{k-1}(a_0 - a_1)^{k+1} > 0.$$

Справедливость его при $n = k + 1$ легко установить, если использовать очевидное неравенство $(a_0 - b)(a_0 + a_1) - (a_0 + b)(a_0 - a_1) > 0$.

Решим задачу о распределении остаточных деформаций в стержне после удара по нему твердым телом массой m. В этом случае уравнение движения

$$m\frac{d^2u(0,t)}{dt^2}=F_0p\,,$$

где F_0 – площадь поперечного сечения торца стержня, после подстановки в него выражения для p из (1.36) и ускорения

$$\frac{d^2u}{dt^2}=a_0^2\left[F_1''(a_0t)+F_2''(a_0t)\right]=\frac{a_0}{2}\left[\beta\left(\frac{a_1^2}{a_0^2}-\frac{a_1}{a_0}\right)e_0'(\beta t)-\alpha\left(\frac{a_1^2}{a_0^2}+\frac{a_1}{a_0}\right)e_0'(\alpha t)\right]$$

приводит к следующему соотношению для определения e_0:

$$\frac{m\beta}{2}\left(a_1-\frac{a_1^2}{a_0}\right)e_0'(\beta t)+\frac{m\alpha}{2}\left(a_1+\frac{a_1^2}{a_0}\right)e_0'(\alpha t)=$$
$$=-F_0(E-E')e_s-F_0Ae_0(\alpha t)+F_0Be_0(\beta t).$$

Снова разыскивая решение для деформации на волне разгрузки в виде $e_0(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$; $b_0=e_0(0)=e_m$, получим:

$$\frac{m}{2}\left[\left(a_1-\frac{a_1^2}{a_0}\right)\beta+\left(a_1+\frac{a_1^2}{a_0}\right)\alpha\right]b_1=-F_0(E-E')e_s-F_0(A-B)e_0(0);$$

$$\frac{nm}{2}\left[\left(a_1-\frac{a_1^2}{a_0}\right)\beta^n+\left(a_1+\frac{a_1^2}{a_0}\right)\alpha^n\right]b_n=F_0(B\beta^{n-1}-A\alpha^{n-1})b_{n-1}\,(n\geq 2).$$

Отсюда

$$b_1=-\frac{2p_mF_0}{m\left[a_1^2\dfrac{a_0-a_1}{a_0+a_1}+a_1^2\dfrac{a_0+a_1}{a_0-a_1}\right]}=-\frac{F_0p_m(a_0^2-a_1^2)}{ma_1^2(a_0^2+a_1^2)};$$

$$b_n=\frac{2F_0\left(B\beta^{n-1}-A\alpha^{n-1}\right)b_{n-1}}{nm\left[\left(a_1-\dfrac{a_1^2}{a_0}\right)\beta^n+\left(a_1+\dfrac{a_1^2}{a_0}\right)\alpha^n\right]}\quad(n\geq 2).$$

Определим скорость $v = u_t$ движения концевого сечения стержня при продольном ударе:

$$v = a_0\left[F_1'(a_0t) + F_2'(a_0t)\right] =$$

$$= -(a_0 - a_1)e_s + \frac{a_0}{2}\left(\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{a_1}{a_0}\right)e_0\left(\frac{a_0a_1t}{a_0 + a_1}\right) - \frac{a_0}{2}\left(\frac{a_1^2}{a_0^2} + \frac{a_1}{a_0}\right)e_0\left(\frac{a_0a_1t}{a_0 - a_1}\right) =$$

$$= -\frac{a_1}{2a_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_0 - a_1)^{n+1} + (a_0 + a_1)^{n+1}}{(a_0^2 - a_1^2)}a_0^na_1^nb_nt^n - (a_0 - a_1)e_s.$$

Подставляя вместо b_n их значения, получим:

$$v = -a_0e_s - a_1(e_m - e_s) - \frac{F_0p_mt}{m} - \frac{1}{m}\sum_{n-2}^{\infty}\frac{p_mF_0^nt^n}{n!}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{B\beta^k - A\alpha^k}{C\beta^{k-1} - D\alpha^{k-1}},$$

где знаком $\prod_{k=1}^{n}$ обозначено произведение n сомножителей.

Можно показать, что

$$\frac{B\beta^{n-1} - A\alpha^{n-1}}{C\beta^{n-2} - D\alpha^{n-2}} = -\frac{A_nE}{a_0m} = -\frac{E}{a_0m}\cdot\frac{(a_0 + a_1)^n - (a_0 - a_1)^n}{(a_0 + a_1)^n + (a_0 - a_1)^n}$$

и, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 1$.

Обозначив $B_n = A_2A_3A_4\ldots A_n$, $z = F_0Et/(a_0m)$, $v_0 = a_0e_s + a_1(e_m - e_s)$ преобразуем формулу для скорости v к следующему виду:

$$\frac{v}{v_0} = 1 - \frac{p_ma_0}{v_0E}\left[-z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_nz^n}{n!}\right]$$

или

$$\frac{v}{v_0} = 1 - \frac{1 + \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2\left(\frac{e_m}{e_s} - 1\right)}{1 + \frac{a_1}{a_0}\left(\frac{e_m}{e_s} - 1\right)} + \frac{1 + \frac{a_1^2}{a_0^2}\left(\frac{e_m}{e_s} - 1\right)}{1 + \frac{a_1}{a_0}\left(\frac{e_m}{e_s} - 1\right)}S(z),$$

$$S(z) = -1 + z + B_2\frac{z^2}{2!} - B_3\frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^nB_n\left(\frac{z^n}{n!}\right).$$

Применяя признак Д'Аламбера, легко показать сходимость ряда $S(z)$ во всей области изменения z. В табл. 1.1 приведены рассчитанные значения $S(z)$ для $(a_1/a)^2 = 0{,}03$ и $(a_1/a_0)^2 = 0{,}05$, соответствующих характеристикам определенной марки моды в стали.

Таблица 1.1

z	$a_1^2/a_0^2 = 0{,}03$	$a_1^2/a_0^2 = 0{,}05$	z	$a_1^2/a_0^2 = 0{,}03$	$a_1^2/a_0^2 = 0{,}05$
0,1	0,9006	0,9021	2,9	-1,5033	-0,7751
0,2	0,8022	0,8082	3,0	-1,5775	-0,8115
0,3	0,7048	0,7181	3,1	-1,6510	-0,8474
0,4	0,6086	0,6316	3,2	-1,7237	-0,8821
0,5	0,5133	0,5484	3,3	-1,7958	-0,9159
0,6	0,4190	0,4685	3,4	-1,8673	-0,9489
0,7	0,3258	0,3915	3,5	-1,9381	-0,9810
0,8	0,2335	0,3175	3,6	-2,0082	-1,0157
0,9	0,1422	0,2462	3,7	-2,0777	-1,0428
1,0	0,0518	0,1799	3,8	-2,1466	-1,0726
1,1	-0,0377	0,1111	4,9	-2,2148	-1,1016
1,2	-0,1262	0,0471	4,0	-2,2824	-1,1300
1,3	-0,2138	-0,0148	4,1	-2,3495	-1,1577
1,4	-0,3006	-0,0745	4,2	-2,4159	-1,1877
1,5	-0,3864	-0,1322	4,3	-2,4818	-1,2111
1,6	-0,4714	-0,1880	4,4	-2,5470	-1,2369
1,7	-0,5555	-0,2420	4,5	-2,6117	-1,2622
1,8	-0,6388	-0,2943	4,6	-2,6759	-1,2868
1,9	-0,7213	-0,3449	4,7	-2,7394	-1,3109
1,0	-0,8030	-0,3939	4,8	-2,8024	-13345
2,1	-0,8839	-0,4415	4,9	-2,8649	-1,3577
2,2	-0,9640	-0,4876	5,0	-2,9268	1,3802
2,3	-1,0432	-0,5324	6	-3,5180	-1,5274
2,4	-1,1218	-0,5760	7	-4,0622	-1,7488
2,5	-1,1996	-0,6180	8	-4,5643	-1,8884
2,6	-1,2766	-0,6589	9	-5,0282	-2,0084
2,7	-1,3529	-0,6929	10	-5,5565	-2,1159
2,8	-1,4285	-0,7375	15	-7,2322	-3,1634

Найдем длину зоны остаточных деформаций. Предварительно преобразуем ряд для $e_0(x)$ с использованием выражений для b_n к виду:

$$e_0(x) = e_m - \frac{2p_m a_0}{Ea_1}\left[C_1 Y - C_2 B_2 \frac{Y^2}{2!} + C_3 B_3 \frac{Y^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1} C_n B_n \frac{Y^n}{n!} + \ldots\right],$$

где

$$Y = F_0 Ex/(ma_0 a_1); \quad C_n = (1 - a_1^2/a_0^2)^2/[(1 + a_1/a_0)^{n+1} + (1 - a_1/a_0)^{n+1}].$$

Очевидно, $C_n \to 0$ при $n \to \infty$. Формулу для $e_0(x)$ целесообразно записать следующим образом:

$$e_0(x) = e_m - \frac{2p_m a_0}{a_1 E} + \frac{2p_m a_0}{a_1 E} T(Y),$$

где

$$T(Y) = 1 - C_1 Y + C_2 B_2 \frac{Y^2}{2!} - C_3 B_3 \frac{Y^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1} C_n B_n \frac{Y^n}{n!} + \ldots \cdot$$

Можно показать, что ряд для $T(Y)$ абсолютно сходится во всей области изменения Y. В табл. 1.2, заимствованной из [9], приведены рассчитанные значения $T(Y)$.

Таблица 1.2

Y	$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 = 0{,}003$	$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 = 0{,}05$	Y	$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 = 0{,}003$	$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 = 0{,}05$
0,1	0,9506	0,9556	2,9	-0,2457	0,1568
0,2	0,9017	0,9128	3,0	-0,2826	0,1386
0,3	0,8533	0,8715	3,1	-0,3192	0,1208
0,4	0,8054	0,8316	3,2	-0,3555	0,1035
0,5	0,7580	0,7931	3,3	-0,3914	0,0866
0,6	0,7112	0,7559	3,4	-0,4270	0,0702
0,7	0,6648	0,7200	3,5	-0,4622	0,0540
0,8	0,6189	0,6853	3,6	-0,4972	0,0380
0,9	0,5735	0,6517	3,7	-0,5318	0,0231
1,0	0,5285	0,6191	3,8	-0,5662	0,0081
1,1	0,4840	0,5877	3,9	-0,6002	-0,0065
1,2	0,4400	0,5572	4,0	-0,6339	-0,0208
1,3	0,3964	0,5277	4,1	-0,6673	-0,0348
1,4	0,3532	0,4990	4,2	-0,7004	-0,0484
1,5	0,3105	0,4713	4,3	-0,7333	-0,0617
1,6	0,2682	0,4444	4,4	-0,7658	-0,0748
1,7	0,2263	0,4184	4,5	-0,7980	-0,0876
1,8	0,1849	0,3929	4,6	-0,8300	-0,1001
1,9	0,1438	0,3683	4,7	-0,8617	-0,1123
2,0	0,1031	0,3444	4,8	-0,8931	-0,1243
2,1	0,0629	0,3212	4,9	-0,9243	-0,1363
2,2	0,0230	0,2986	5,0	-0,9552	-0,1475
2,3	-0,0165	0,2767	6,0	-1,2501	-0,2473
2,4	-0,0556	0,2553	7,0	-1,5217	-0,3359
2,5	-0,0943	0,2346	8,0	-1,7722	-0,4076
2,6	-0,1327	0,2153	9,0	-2,0043	-0,4697
2,7	-0,1707	0,1956	10	-2.2185	-0,5238
2,8	-0,2084	0,1755	16	-3,1086	-1,1853

Значение Y_s, соответствующее длине остаточных деформаций, определяется из уравнения

$$\left(\frac{e_m}{e_s}-1\right)-2\left[\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{e_m}{e_s}-1\right)\right]+2\left[\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{e_m}{e_s}-1\right)\right]T(Y_s)=0$$

или

$$-\frac{v_0+a_0e_s}{a_1}-2\left[\frac{a_0}{a_1}e_s-\frac{v_0+a_0e_s}{a_0}\right]+\left[\frac{a_0}{a_1}e_s-\frac{v_0+a_0e_s}{a_0}\right]T(Y_s)=0.$$

Значения $T(Y_s)$ для тех же значений $(a_1/a_0)^2$ в зависимости от e_m/e_s приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

$\frac{e_m}{e_s}$	$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2=0{,}003$	$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2=0{,}05$	$\frac{e_m}{e_s}$	$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2=0{,}003$	$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2=0{,}05$
2	0,9727	0,8935	21	0,4833	-0,1180
3	0,9456	0,7967	26	0,3631	-0,2423
4	0.9186	0,7083	31	0,2463	-0,3416
5	0,8918	0,6273	36	0,1326	-0,4230
6	0,8651	0,5528	41	0,0220	-0,4907
1	0,8386	0,4840	46	-0,0858	-0,5484
8	0,8133	-0,4203	51	-0,1850	0,5972
9	0,7861	0,3611	101	-0,1066	-0,8634
10	0,7600	0,3060	1001	-5,8467	-1,1922
11	0,7341	0,2546	10001	-7,8346	-1,2316
16	0,6069	0,0417	100001	-8,0969	-1,2406

Рисунок 1.10 иллюстрирует этот процесс, точка C соответствует окончанию пластической области. В области $ABOCD$ $e\equiv e_s$ $v=-a_0e_s$ поэтому на характеристиках отрицательного наклона, начиная с точки C и выше, как отмечено в [10], согласно (1.31) имеем

$$v+a_0e_s=-\frac{1}{a_0\rho_0}(\sigma-\sigma_s)\,;\;\; v=-\frac{\sigma}{a_0\rho_0}\,,$$

и условие соударения при $t=t_s$ примет вид

$$m\frac{dv_w}{dt}=F_0\sigma_w=-a_0a_1F_0\sigma_w\,;\;\; v_w=v_s\exp(z_s-z)\,, \qquad (1.39)$$

где $z_s=F_0Et_s/(a_0m)$; $t_s=t_c+x_s/a_0$, $t_c=x/a_1$, $z_s=Y_s(1+a_1/a_0)$.

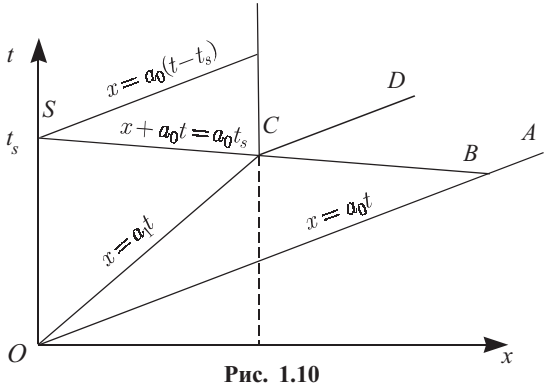


Рис. 1.10

В [11] показано, что скорость v_w при $t = t_s$ не терпит разрыва. Этот факт также следует из того обстоятельства, что характеристики отрицательного наклона, проходящие несколько ниже точки C, опираются на OC в тех точках, где напряжение бесконечно мало отличается от σ_s, а поэтому в окрестности $t = t_s$

$$v_w = \frac{\sigma_w}{a_0 \rho_0} + \varepsilon\,, \quad \frac{dv_w}{dt} = -\frac{EF_0}{a_0 m}(v_w - \varepsilon)\,.$$

Значения z_s, v_s находятся с использованием табл. 1.1–1.3. Из формул (1.39) следует, что скорость v_w никогда не обращается в нуль[1].

Зная коэффициенты b_0 и b_1 (последний определяется начальной скоростью v_0 по формуле $v_0 = a_0 e_s + a_1(e_0 - e_s)$), можно установить, как расклепывается конец стержня при ударе. С этой целью, предполагая материал стержня несжимаемым, выразим радиус $r(x)$ его сечения после удара через начальный радиус r_0:

$$\pi r^2[1 - \tilde{e}(x)] = \pi r_0^2\,.$$

Отсюда $r(x) = r_0/\sqrt{1 - \tilde{e}(x)}$; $r(0) = r_0/\sqrt{1 - \lambda(e_m - e_s)}$.

Тангенс угла наклона образующей в сечении $x = 0$ после удара равен

[1] Противоположный вывод, сделанный в [9], не учитывал того факта, что распространение формально сходящегося при всех z ряда $S(z)$ за характеристику SC неправомочно.

$$\mathrm{tg}\chi = \frac{1}{1-e}\left(\frac{dr}{dx}\right)_{x=0} = \frac{\lambda r_0 b_1}{2[1-e(0)]^{5/2}} = -\frac{r_0 F_0 p_m (a_0^2 - a_1^2)^2}{2ma_0^2 a_1^2 [1-\lambda(e_m - e_s)]^{5/2}}.$$

Таким образом, деформация конца стержня зависит только от скорости удара, в то время как угол χ зависит в основном от массы ударяющего тела.

Для произвольной зависимости $\sigma = \sigma(e)$ получить решение прямой задачи о волне разгрузки в явном виде не удается. В этом случае соотношение (1.35) служит основой метода решения обратной задачи, когда по заданному виду кривой $e_0(x)$, или, что то же самое, $f(x)$, определяется зависимость $\varepsilon(t)$.

Возникает вопрос: каким должен быть вид $t = f(x)$, чтобы за ней началась разгрузка. С этой целью продифференцируем равенство (1.33) по x и по t:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = a_0[F_2''(a_0 t + x) - F_2''(a_0 t + x)].$$

На волне разгрузки, согласно (1.32), имеем:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = a\frac{af'+1}{a_0^2 f' - 1}\frac{de_0}{dx}. \qquad (1.40)$$

Отсюда следует, что если скорость распространения волны разгрузки $b = 1/f'(x)$ меньше скорости звука, т. е. $b < a_0$, то знаки $\frac{\partial e}{\partial t}$ и $\frac{de_0}{dx}$ совпадают:

$$\mathrm{sign}\frac{\partial e}{\partial t} = \mathrm{sign}\frac{de_0}{dx}.$$

Найдем теперь знак $\frac{de_0}{dx}$, для чего соотношение $a(e_0) = x/f(x)$ продифференцируем по x:

$$\frac{de_0}{dx} = \frac{1-af'}{f}\frac{1}{da/de} = \frac{1-a/b}{f}\frac{1}{da/de}. \qquad (1.41)$$

Так как скорость звука a убывает с ростом $|e|$, то для $a < b$ $de_0/dx < 0$ при $e_0 > 0$; $de_0/dx > 0$ при $e_0 < 0$. Внося значение (1.40) в (1.41), получим:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{b^2 - a^2}{a_0^2 - b^2}\frac{a}{f}\frac{1}{da/de}. \qquad (1.42)$$

Таким образом, в некоторой окрестности волны разгрузки имеем для растягивающего удара ($e_0 > 0$) убывание деформации растяжения, для давления ($e_0 < 0$) – убывание деформации сжатия, т. е. в обоих случаях наблюдается процесс разгрузки:

$$\frac{\partial e}{\partial t} < 0 \text{ при } e_0 > 0; \quad \frac{\partial e}{\partial t} > 0 \text{ при } e_0 < 0.$$

Последние неравенства показывают, что каждой заданной волне разгрузки, удовлетворяющей условию $a < b < a_0$, соответствует ударная нагрузка, приложенная к концу стержня и убывающая со временем.

В [9] установлено, что при $a \le b < a_0$ производная по времени от деформации терпит разрыв на волне разгрузки. Действительно, дифференцируя соотношение $x/t = a(u_x)$ по времени и полагая затем $t = f(x)$, получим:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{a}{fa'(e_0)}.$$

Сопоставление последней формулы с (1.42) доказывает высказанное утверждение.

Для непосредственного расчета измения давления на конце стержня по заданной волне разгрузки $t = f(x)$ можно использовать также метод характеристик. Решение задачи о волне разгрузки таким способом дано в [4] и приводится ниже.

Обозначим координаты двух произвольных точек, лежащих на волне разгрузки, через x_1, t_1, x_2, t_2 (см. рис. 1.9). Пусть x,t – координаты точки пересечения характеристики положительного направления, исходящей из M_2, с характеристикой отрицательного направления, исходящей из M_1. Тогда в силу (1.30) и (1.31) можно написать:

$$x - x_2 = a_0(t - t_2); \quad x - x_1 = a_0(t - t_1);$$

$$u_t - u_{t_2} - a_0(u_x - u_{x_2}) = \frac{1}{a_0\rho_0}(\sigma_0(x) - \sigma_0(x_2)) - a_0(e_0(x) - e_0(x_2));$$

$$u_t - u_{t_1} + a_0(u_x - u_{x_1}) = -\frac{1}{a_0\rho_0}(\sigma_0(x) - \sigma_0(x_1)) + a_0(e_0(x) - e_0(x_1)).$$

Отсюда, учитывая, что $u_{x_2} = e_0(x_2)$, $u_{x_1} = e_0(x_1)$, $u_{t_2} = -\psi(e_0(x_2))$, $u_{t_1} = -\psi(e_0(x_1))$, найдем:

$$u_x(x,t) = e_0(x) - \frac{\sigma_0(x)}{E} + \frac{\sigma_0(x_1)+\sigma_0(x_2)}{2E} + \frac{\psi(e_0(x_2))-\psi(e_0(x_1))}{2a_0} \tag{1.43}$$

Формула (1.43) при заданном законе $t = f(x)$ определяет деформацию любого элемента стержня за волной разгрузки.

Используя формулу (1.43), решение приведенной выше задачи о волне разгрузки для схемы Прандтля можно получить в ином виде, предложенном в [12]. В этом случае из (1.43) вытекает, что

$$\sigma(0,t) = \frac{\sigma_0(x_1)+\sigma_0(x_2)}{2} + \frac{u_m}{2}(\sigma_0(x_2)-\sigma_0(x_1)), \quad u_m = \frac{a_0}{a_1}, \tag{1.44}$$

где x_1 и x_2 – точки пересечения характеристик отрицательного и положительного направлений, исходящих из точки $(0, t)$ области разгружения с волной разгрузки $x = a_1 t$.

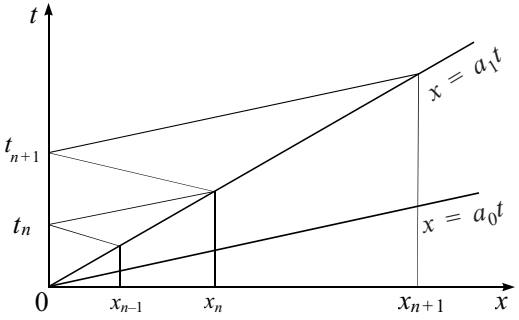


Рис. 1.11

Выполним следующее построение (рис. 1.11): из произвольной точки x_{n+1} на волне разгрузки проводим характеристику положительного направления до пересечения с линией $x = 0$ в точке t_{n+1}, из последней проводим характеристику отрицательного направления до пересечения с волной разгрузки в точке x_n и т. д. Процесс повторяется до тех пор, пока ближайшей к началу координат точкой на оси $x = 0$ не окажется точка t_1, а на волне разгрузки – точка x_1. Очевидно, к каждому шагу такого построения может быть применена формула (1.44) с заменой в ней x_1 и x_2 значениями соотвествующих координат на волне разгрузки, в частности

$$p(t_{n+1}) = \frac{\sigma_{0,n+1} + \sigma_{0,n}}{2} + \frac{u_m}{2}(\sigma_{0,n+1} - \sigma_{0,n}),$$

откуда

$$\sigma_{0,n+1} = \frac{2}{u_m + 1} p(t_{n+1}) + q\sigma_{0,n} \left(q = \frac{u_m - 1}{u_m + 1} < 1 \right). \qquad (1.45)$$

Рассматривая последнее соотношение как рекуррентную формулу, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{0,n+1} = \frac{2}{u_m + 1}[p(t_{n+1}) + qp(t_n) + q^2 p(t_{n-1}) + \ldots \\ \ldots + q^k p(t_{n+1-k}) + q^{n-1} p(t_2)] + q^n \sigma_{0,1}. \end{aligned} \qquad (1.46)$$

Координату t_{n+1} можно выразить через t_n. Для этого достаточно из двух уравнений прямых

$$x_n + a_0 \frac{x_n}{a_1} = a_0 t_{n+1}; \quad x_n - \frac{a_0}{a_1} x_n = -a_0 t_n$$

исключить x_n:

$$t_{n+1} = \frac{u_m + 1}{u_m - 1} t_n = \frac{t_n}{q}.$$

Следовательно, $t_{n+1} = t_1 / q^n$, и выражение (1.46) можно преобразовать к виду

$$\sigma_{0,n+1} = \frac{2}{u_m + 1}\left(p\left(\frac{t_1}{q^n}\right) + qp\left(\frac{t_1}{q^{n-1}}\right) + \ldots + q^{n-1} p\left(\frac{t_1}{q^n}\right)\right) + q^n \sigma_{0,1}.$$

Обозначая $\tau = t_1 / q^n$ и устремляя t_1 к нулю, видим, что $q^n \to 0$, т.е. $n \to \infty$. Учитывая, что при этом $q^n \sigma_{0,1} \to 0$, окончательно получим $\sigma_0 = \frac{2}{u_m + 1} \sum_0^\infty q^n p\,(q^n \tau)$.

До сих пор мы рассматривали задачу о распространении волны нагрузки для случая, когда на конце мгновенно возникало давление, впоследствии убывавшее со временем (рис. 1.12, *а*).

При этом в области нагружения характер изменения скоростей и деформации известен и определяется формулами (1.32) для центрированной волны Римана. Тем самым оказываются известными деформации и скорости на заданной волне разгрузки, что позволяет в области разгружения решать задачу предложенным выше методом характеристик.

Очевидно, аналогичным способом можно рассмотреть такие ситуации изменения давления на конце стержня, как на рис. 1.12, *б–г*. В координатах x, t картина распространения волн в области нагружения имеет следующий вид:

• случай *б* – волны Римана делятся на две группы, первая из которых представляет собой пучок прямых, исходящих из начала координат, вторая – семейство параллельных прямых, исходящих из различных точек оси Ot;

• случай *в* – волны Римана представляют собой семейство расходящихся прямых, начинающихся в различных точках оси Ot;

• случай *г* – волны Римана делятся на две группы: те, которые ближе к началу координат, – расходящиеся из разных точек оси Ot прямые; лежащие выше – параллельные прямые. Координата точки t_0 оси Ot (начало волны разгрузки) определяется из уравнения $p(t_0) = p_m$ (выбирается максимальная для случаев, показанных на рис. 1.12, *б* и *г*).

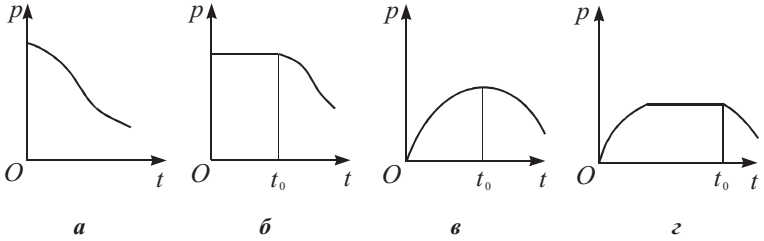


Рис. 1.12

§ 1.4. Применение метода характеристик для решения прямой задачи о волне разгрузки. Определение начальной скорости волны разгрузки. Случаи точных решений задачи

Выше было указано на возможность применения метода характеристик к решению задачи о волне разгрузки обратным способом, а именно к нахождению распределения давления $p(t)$ на конце стержня по заданному виду кривой $t = f(x)$. Эффективное использование метода характеристик для непосредственного численного решения прямой задачи о волне разгрузки дано в [13], где отмечается, что последняя не приводится непосредственно к известным краевым задачам теории гиперболических уравнений (к задачам Коши, Гурса или смешанной). Действительно, в этом случае в плоскости v, σ известен вид волны разгрузки, на которой задана зависимость между x и t в виде $x = a(u_x)(t - t_0)$. На отрезке прямой $x = 0$ задано $\sigma(t)$, но неизвестно v, т. е. неизвестна кривая в плоскости v, σ, соответствующая этой прямой.

В [13] при решении этим методом прямой задачи был сделан ряд ограничений о характере протекания давления на конце стержня. В дальнейшем эти ограничения были сняты автором [14], который получил в конечном виде выражение для начальной скорости волны разгрузки. Поэтому перед решением прямой задачи указанным методом рассмотрим движение волны разгрузки в окрестности переднего конца стержня. Очевидно, что волна разгрузки начинается в точке O, соответствующей максимальному значению приложенной нагрузки $\sigma_{\max}$ (рис. 1.13).

Пусть волна разгрузки за время dt^* переместилась в точку M с координатой dx^*. Через точку M можно провести отрезок характеристики MA, отвечающий области нагружения, а также отрезки характеристик MB и MC положительного и отрицательного направлений, отвечающие области разгружения (далее для краткости вместо «отрезок характеристики» будем употреблять «характеристика»). Ординаты точек A, B, C (рис. 1.13) следующие:

$$t_A = t_0 - \left(\frac{dx^*}{a_1} - dt^*\right); t_B = t_0 - \left(\frac{dx^*}{a_1} - dt^*\right); t_C = t_0 + \left(\frac{dx^*}{a_1} + dt^*\right).$$

Здесь t_0 – ордината точки O; a_0 – скорость распространения

упругих деформаций; a_1 – скорость распространения пластических деформаций при напряжении σ_{max}.

Пусть кривая изменения приложенной нагрузки имеет в точке $\sigma_0 = \sigma_{max}$ перелом. Тогда в окрестности точки $(0, t_0)$ можно положить $\sigma_0 = \sigma_{max} + k_1(t - t_0)$ при $t < t_0$; $\sigma_0 = \sigma_{max} + k_2(t - t_0)$ при $t > t_0$, где k_1 и k_2 – значения производной $d\sigma_0/dt$ при подходе к точке σ_0 соответственно снизу и сверху. Выразим значения скоростей и напряжений в точках A, B, C и M через соответствующие значения в точке O:

$$\sigma_A = \sigma_{max} - k_1(t_0 - t_A) = \sigma_{max} - k_1\left(\frac{dx^*}{a_1} - dt^*\right);$$

$$v_A = -\int_0^{\sigma_A} \frac{d\sigma}{\rho a} = -\left[\int_0^{\sigma_{max}} \frac{d\sigma}{\rho a} - \frac{\sigma_{max} - \sigma_A}{\rho a_1}\right] = v_{max} + \frac{k_1}{\rho a_1}\left(\frac{dx^*}{a_1} - dt^*\right);$$

$$\sigma_M = \sigma_A; \quad v_M = v_A;$$

$$\sigma_B = \sigma_{max} + k_2(t_B - t_0) = \sigma_{max} + k_2\left(dt^* - \frac{dx^*}{a_0}\right);$$

$$\sigma_C = \sigma_{max} + k_2(t_C - t_0) = \sigma_{max} + k_2\left(dt^* - \frac{dx^*}{a_0}\right); \tag{1.47}$$

$$v_B - v_M = \frac{1}{\rho a_0}(\sigma_B - \sigma_M) = \frac{1}{\rho a_0}\left[k_2\left(dt^* - \frac{dx^*}{a_0}\right) + k_1\left(\frac{dx^*}{a_1} - dt^*\right)\right];$$

$$v_C - v_M = \frac{1}{\rho a_0}(\sigma_C - \sigma_M) = \frac{1}{\rho a_0}\left[k_2\left(dt^* + \frac{dx^*}{a_0}\right) + k_1\left(\frac{dx^*}{a_1} - dt^*\right)\right],$$

где v_{max} – максимальная скорость точки $x = 0$.

При выводе этих формул были использованы условия на характеристиках в области нагружения и разгрузки и предположение, что на волне разгрузки скорость и деформации непрерывны (волна разгрузки не является поверхностью сильного разрыва).

Ввиду близости точек B и C к точке O можно установить, что

$$v_B - v_{max} = j(t_B - t_0) = j\left(dt^* - \frac{dx^*}{a_0}\right);$$

$$v_C - v_{\max} = j(t_C - t_0) = j\left(dt^* + \frac{dx^*}{a_0}\right),$$

где $j = \dfrac{\partial v}{\partial t}$ – ускорение конца стержня при $t \geq t_0$.

Следовательно,

$$\frac{v_B - v_{\max}}{v_C - v_{\max}} = \frac{dt^* - dx^*/a_0}{dt^* + dx^*/a_0} = \frac{1 - c/a_0}{1 + c/a_0}.$$

Подставляя вместо v_B и v_C их выражения из предыдущих формул, получим

$$c = \frac{dx^*}{dt^*} = \sqrt{\frac{a_1^2 a_0^2 (k_1 - k_2)}{a_0^2 k_1 - a_1^2 k_2}}. \qquad (1.48)$$

Очевидно, $c = \dfrac{dx^*}{dt^*}$ представляет собой не что иное, как начальную скорость волны разгрузки.

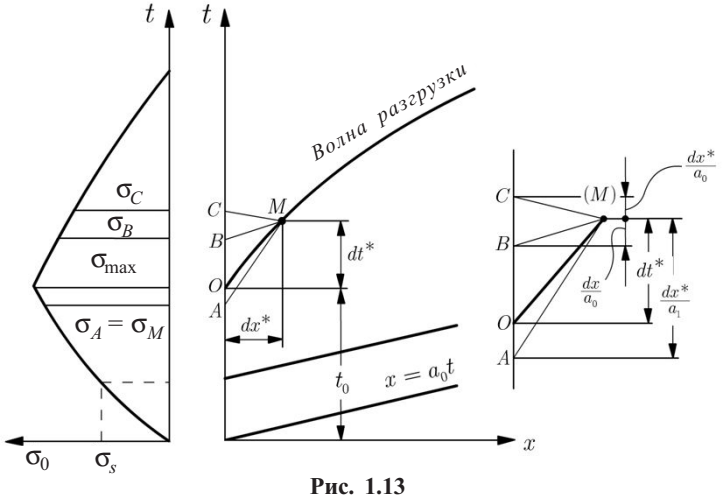


Рис. 1.13

Рассмотрим ряд частных случаев, вытекающих из формулы (1.48). Если $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, то $c = a_0$, т. е. направление начального участка волны разгрузки в плоскости x, t совпадает с направлением упругой волны. Тот же результат имеет место при $k_2 = \infty$.

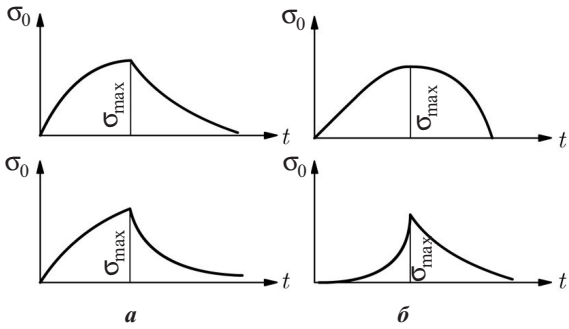


Рис. 1.14

Соответствующие законы изменения приложенной к концу стержня нагрузки изображены на рис. 1.14, *а*. Если $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$ или если $k_1 = \infty$ (рис. 1.14, *б*), то $c = a_1$ и начальная скорость волны разгрузки равна скорости распространения пластической волны. Если в точке $\sigma_0 = \sigma_{max}$, $k_1 = k_2 = 0$ (кривая изменения приложенного напряжения не имеет излома), то из формулы (1.48) определить c невозможно. В этом случае разложение $\sigma(t)$ в окрестности точки σ_{max} следует продолжить до квадратов dx^* включительно. Тогда способом, аналогичным предыдущему, в предположении непрерывности $\dfrac{d^2\sigma_0}{dt^2}$ в точке $\sigma_0 = \sigma_{max}$ можно получить следующее выражение:

$$c = a_0\left[\sqrt{(a_0/a_1)^2 + 3} - a_0/a_1\right].$$

Таким образом, направление волны разгрузки около точки O всегда можно определить. Для построения всей волны разгрузки в зависимости от характера приложенной нагрузки теперь можно применить следующий графоаналитический метод характеристик.

Найдя по приведенным выше формулам величину c, проводим из точки O отрезок прямой OM (рис. 1.15), угловой коэффициент которой равен c, и берем на нем точку M, достаточно близкую к точке O. При этом точку M можно считать расположенной на волне разгрузки и напряжение в ней определить по формуле (1.47). В координатах v, σ можно построить кривую $v = -\psi(\sigma)$, которая при $|\sigma| > |\sigma_s|$ является, очевидно, изображе-

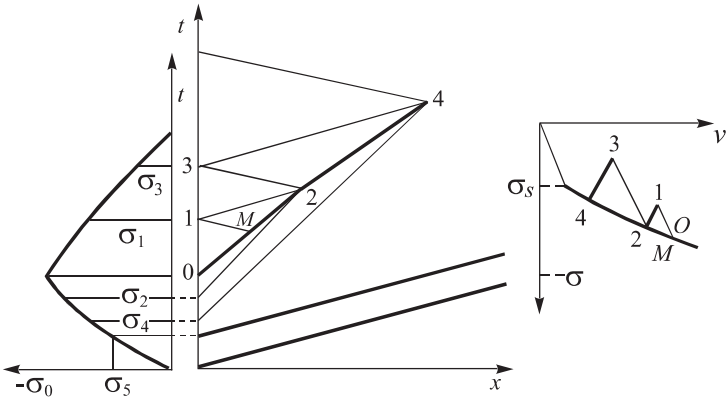


Рис. 1.15

нием волны разгрузки. Перенесем на эту кривую точки O и M. Проведем характеристики $M-1$ в плоскостях x, t и v, σ. Положение точки 1 в координатах v, σ определяется по величине напряжения σ_1, соответствующего точке 1 в плоскости x, t.

Проведем в обеих плоскостях характеристики 1–2. Напряжение в точке 2 найдем пересечением характеристики 1–2 с изображением волны разгрузки в плоскости v, σ. Точка 2 в плоскости x, t лежит на пересечении характеристики 1–2 с характеристикой $x - a(\sigma_2)t = \text{const}$ из области нагружения. Чтобы провести последнюю, необходимо лишь заметить, что она начинается в точке $x = 0$ в тот момент, когда приложенное на конце стержня напряжение равно σ_2. Поэтому достаточно на диаграмме $\sigma(t)$ отложить величину σ_2 и найти соответствующий ей момент времени. Последующие точки волны разгрузки можно определить с помощью построений, аналогичных предыдущим.

Расчет ряда конкретных примеров распространения волн методом характеристик для схемы Прандтля дан в [13], где, кроме того, приведено сопоставление полученных таким образом численных значений деформаций на волне разгрузки с их значениями, найденными по точным формулам. Совпадение между собой численных результатов, определенных обоими способами, оказалось вполне удовлетворительным.

Предложенный графоаналитический метод решения проиллюстрируем на одном примере численного расчета.

Пример. На конце полубесконечного стержня приложена нагрузка, изменяющаяся по параболическому закону:

$$-\sigma_0(t) = 8\sigma_s \frac{t}{T}\left(1 - \frac{1}{T}\right),$$

где σ_s – предел текучести материала на сжатие; T – время действия нагрузки. Зависимость $\sigma_0(t/T)$ изображена на рис. 1.16, *а*.

Очевидно, максимальное напряжение $\sigma_{\max} = -2\sigma_s$ достигается в момент $t = T/2$. Предположим, что материал стержня обладает линейным упрочнением, причем модуль упрочнения E' в 16 раз меньше модуля упругости E. Следовательно, $a_1/a_0 = 1/4$. Диаграмму x, t строим в безразмерных координатах $x/(a_1T)$, t/T (рис. 1.16, *б*).

Волна разгрузки $v = -\psi(\sigma)$ в плоскости v, σ для случая линейного упрочнения имеет вид прямолинейного отрезка

$$v/v_s = 1 - 4(\sigma/\sigma_s + 1); \quad v_s = \sigma_s/(a_0\rho_0)$$

и изображена на рис. 1.16, *в* (при $|\sigma| > \sigma_s$). Скорость волны разгрузки в окрестности конца стержня

$$c = \sqrt{a_0^2/a_1^2 + 3} - a_0/a_1 = a_0[\sqrt{19} - 4] = 0{,}359a_0 = 1{,}44a_1.$$

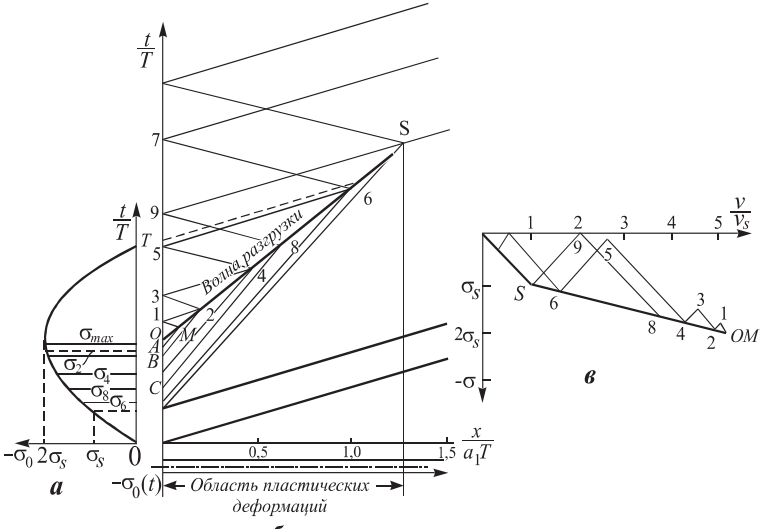


Рис. 1.16

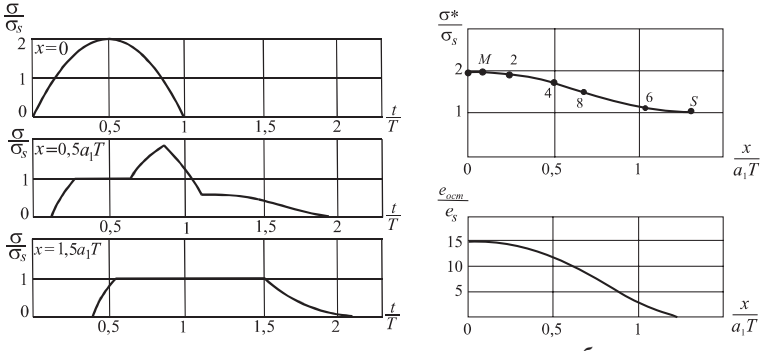
Проводим из точки O начальный участок волны разгрузки OM с наклоном $dx^*/dt^* = c$, затем из точки M – характеристику MA с наклоном a_1 (см. рис. 1.16, *б*). Из условия $\sigma_M = \sigma_A$ определяем напряжение в точке M на волне разгрузки. Это напряжение практически не отличается от $\sigma_{\max}$. Следовательно, в плоскости v, σ координаты точек M и O одинаковы (см. рис. 1.16, *в*). В плоскости x, t проводим характеристику M – 1 (с наклоном $-a_0$) и находим напряжение σ_1 в точке 1.

Скорость v_1 определяется ординатой точки, лежащей на характеристике M – 1 в плоскости v, σ, где $\sigma = \sigma_1$. В этой же плоскости проводим характеристику 1–2 и получаем напряжение в точке 2 ($\sigma_2 = 1{,}96\sigma_s$). Отложив σ_2 на графике $\sigma_0(t)$ (см. рис. 1.16, *а*), находим точку B, где $\sigma = \sigma_2$. Точку 2 в плоскости x, t определяем пересечением характеристики B – 2 из области нагрузки с характеристикой 1–2 области разгрузки.

Аналогично находим точки 4 и 6 волны разгрузки. Ее конечную точку S определяем с помощью характеристик S – 9 и 9 – 8, которые сначала строятся в плоскости v, σ для определения σ_8. После того как точка 8 плоскости x, t найдена на пересечении характеристики C – 8 с волной разгрузки O – 6, определение координат точек 9 и S не представляет труда (см. рис. 1.16). Зона пластических деформаций ограничена точкой S; лежащие от нее справа сечения стержня деформируются упруго.

На рис. 1.17, *а* приведены графики изменения напряжения со временем в различных сечениях стержня ($x/(a_1T)$ = 0; 0,5; 1,5), построенные по данным рис. 1.16.

На графиках рис. 1.17, *б* показано изменение по длине стержня максимальных напряжений $\sigma^*(x)$ и остаточных деформаций $e_{ост}(x)$.



а *б*

Рис. 1.17

Длина зоны пластических деформаций для рассматриваемого примера равна $1{,}32a_1T$, т. е. линейно зависит от времени действия нагрузки.

В некоторых случаях метод характеристик позволяет получить точное решение в конечном виде. В [15] рассмотрено два таких случая: 1) давление на конце стержня, достигнув максимального значения, остается некоторое время постоянным, а затем постепенно убывает до нуля; 2) давление, мгновенно достигнув максимального значения, остается постоянным, а затем сразу падает до нуля.

Случай 1. Решение в координатах x, t и v, σ приведено на рис. 1.18. В области 1–2–3, ограниченной характеристикой 1–3 волны Римана (с угловым наклоном a_1) и волной разгрузки 2–3, скорости и напряжения, очевидно, постоянны. Следовательно, в плоскости v, σ области 1–2–3 соответствует одна точка. В области 2–3–4 (где 3–4 есть отрезок характеристики отрицательного направления) разгрузка начинается от одного и того же значения σ_0 = const. Поэтому уравнение (1.29) для области 2–3–4 имеет вид $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; его решение представляет простую волну, изображенную в плоскости v, σ отрезком прямой 1, 2, 3–4, а граница 2–3 в плоскости x, t совпадает с участком характеристики: $t - t_2 = x/a_0$.

Координаты точки 3 следующие:

$$x_3 = \frac{a_0 a_1}{a_0 - a_1}(t_2 - t_1)\,; \quad t_3 = \frac{a_0 t_2 - a_1 t_1}{a_0 - a_1}\,.$$

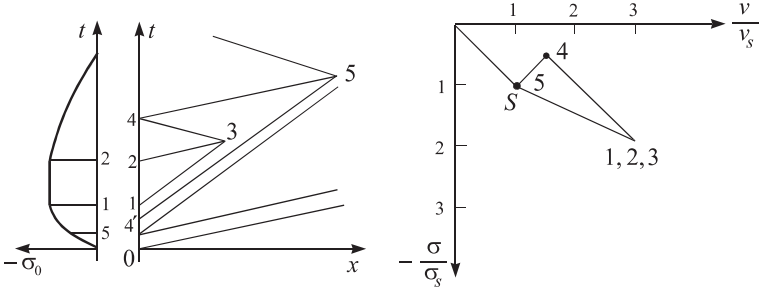


Рис. 1.18

Координаты точки 5 в плоскости v, σ определяются пересечением характеристики 4–5 с волной разгрузки. Точка 5 плоскости x, t, принадлежащая волне разгрузки, лежит на пересечении характеристик положительного направления, исходящих из точек 4 и 4' (где $\sigma = \sigma_s$). Дальнейшие построения очевидны.

Особенно простым оказывается решение в том случае, когда волна разгрузки не достигает точки 5, т. е. когда последняя находится уже в области упругих деформаций. При этом точка 5 в плоскости v, σ лежит на пересечении характеристики 4–5 с прямой $v/v_s = -\sigma/\sigma_s$, соответствующей характеристике $v = -a_0 e$. Предположим сначала, что характеристика 4–5 пересекает эту прямую в точке v_s, σ_s Тогда координаты точки 4 плоскости v, σ следующие:

$$v_4 = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_s}{2\rho_0 a_0} + \frac{v_{\max} + v_s}{2}; \qquad \sigma_4 = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_s}{2} + \rho_0 a_0 (v_m - v_s).$$

Длина участка, где имеют место остаточные деформации,

$$l_1 = \frac{a_0 a_1}{a_0 - a_1}(t_4 - t_s). \tag{1.49}$$

Здесь t_s определяется из условия $\sigma_0(t_s) = \sigma_s$. Если характеристика 4–5 пересекает отрезок прямой $v = -a_0 e_s$ где-то внутри, то для определения длины l_1 вместо (1.49) следует пользоваться формулой

$$l_1 = \frac{a_0 a_1}{a_0 - a_1}(t^* - t_s),$$

где t^* находится из условия $\sigma(t^*) = (\sigma_{\max} + \sigma_s)/2 + \rho_0 a_0 (v_m - v_s)$. Длина участка постоянных деформаций во всех случаях будет

$$l = \frac{a_0 a_1}{a_0 - a_1}(t_2 - t_1).$$

На рис. 1.18 давление постепенно достигает максимального значения. Если последнее достигается мгновенно, изложенное решение остается применимым; надо лишь иметь в виду, что волна разгрузки будет исходить из начала координат в плоскости x, t. Аналогичным образом может быть рассмотрена соответствующая задача для случая нелинейной зависимости $\sigma = \sigma(e)$, однако решение при этом непредставимо в конечном виде.

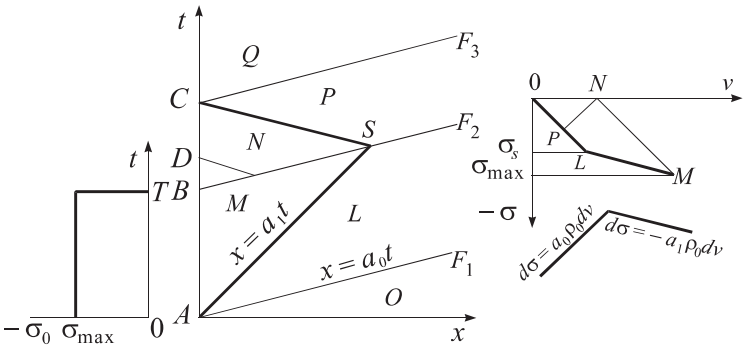


Рис. 1.19

Случай 2[1]. Решение задачи представлено на рис. 1.19 в координатах x, t и v, σ. В момент $t = 0$ от конца стержня начинают распространяться две волны – упругая $x = a_0 t$ и пластическая $x = a_1 t$. Волна разгрузки выходит из точки B и движется с постоянной скоростью $c = a_0$ до встречи с пластической волной в точке S (см. предыдущий случай). Треугольнику ABS в плоскости v, σ соответствует одна точка $M(v_{\max}, \sigma_{\max})$. Поэтому области BCS может соответствовать лишь отрезок характеристики MN отрицательного направления. Так как, отрезку BC в плоскости v, σ, кроме того отвечает точка $N\,(\sigma = 0)$, то последняя является отображением в этой плоскости всей области BCS (произвольная точка треугольника BCS лежит на пересечении характеристик, исходящих из двух точек отрезка BC). Области P в плоскости v, σ соответствует точка пересечения характеристик положительного NP и отрицательного OP направлений (в том случае, когда NP не пересекает изображение волны разгрузки ML, т. е. когда деформации вне треугольника ASC упругие). Тогда в области Q скорости и напряжения равны нулю.

Таким образом, в рассматриваемом примере во всех областях скорости и напряжения постоянны и изменяются скачкообразно при переходе из одной области в другую (через характеристики).

---

[1] Приводимый ниже графоаналитический способ решения заимствован из [12]. В [15] рассматриваемая задача была решена непосредственным применением закона изменения количества движения.

Участок пластических деформаций имеет длину

$$x_s = \frac{a_0 a_1}{a_0 - a_1} T.$$

Координаты точек N и P следующие:

$$v_N = \frac{(\sigma_{\max} - \sigma_s)(a_0 - a_1)}{a_0 a_1 \rho_0}; \quad \sigma_N = 0;$$

$$v_P = \frac{(\sigma_{\max} - \sigma_s)(a_0 - a_1)}{2 a_0 a_1 \rho_0}; \quad \sigma_P = \frac{(\sigma_{\max} - \sigma_s)(a_0 - a_1)}{2 a_1}.$$

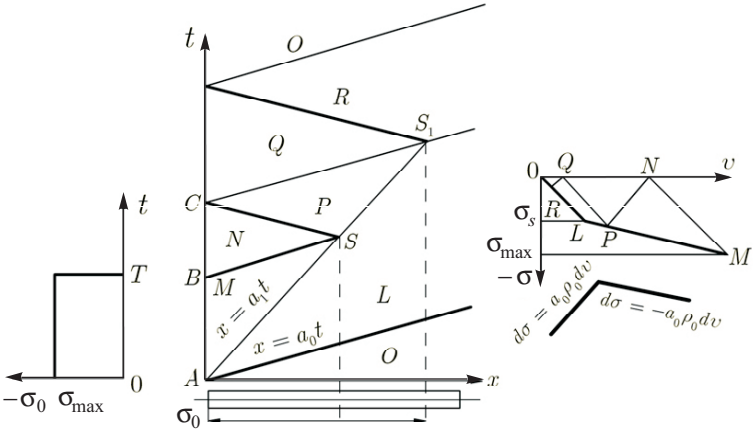
Очевидно, что при $|\sigma_P| > \sigma_s$, т. е. при $\sigma_{\max} > \frac{a_0 + a_1}{a_0 - a_1}\sigma_s$, области P соответствуют не упругие, а пластические деформации. В этом случае полученное выше решение для области P становится непригодным, так как точка P теперь лежит на пересечении характеристики NP с волной разгрузки. Решение задачи при условии

$$\sigma_s \left(\frac{a_0 + a_1}{a_0 - a_1} \right) < \sigma_{\max} < \sigma_s \left(\frac{a_0 + a_1}{a_0 - a_1} \right)^2$$

приведено на рис. 1.20 (при $\sigma_{\max} > \sigma_s \left(\frac{a_0 + a_1}{a_0 - a_1} \right)^2$ точка R снова оказывается на волне разгрузки). Как видно из построений рис. 1.20, точка P имеет следующие координаты:

$$\sigma_P = \frac{a_0 - a_1}{a_0 + a_1}\sigma_{\max}; \quad v_P = \frac{1}{a_0 \rho_0}\left[\frac{a_0 - a_1}{a_0 + a_1}\sigma_{\max} - \frac{(\sigma_{\max} - \sigma_s)(a_0 - a_1)}{a_1} \right].$$

В работах, изложенных выше, задачи распространения упругопластических волн решались либо графоаналитическим методом характеристик, либо путем непосредственного интегрирования уравнения (1.29). Возможен и иной подход к решению соответствующих задач, основанный на рассмотрении суммарного движения, обусловленного распространением прямых и обратных элементарных волн. Такой подход был применен в



Участки пластических деформаций

Рис. 1.20

[16–18]. В [16] таким образом рассмотрен случай 2 и рассчитаны зависимости скорости удара в функции напряжения (и деформации) торцового сечения, а также напряженно-деформированное состояние стержня из отожженной меди, подвергнутого удару со скоростью 61 м/с, продолжительностью в 1/160 с. Ценность расчетов, к сожалению, снижается из-за использования в них статической, а не динамической диаграммы $\sigma - e$. В [17] указанным способом решены основные задачи, рассмотренные в [1,13,15]. В [18] решена задача о распространении упругопластических волн нагружения и разгрузки при произвольной зависимости $\sigma = \Phi(e)$ для случая 2 и для монотонного возрастания приложенной нагрузки до максимального значения с последующим мгновенным спадом до нуля.

До сих пор предполагалось, что диаграмма $\sigma - e$ упругопластического материала не имеет нелинейно упругого участка. Если же он есть и занимает область $e_s \le e \le e_H$, то решение указанных задач осложняется, так как волна разгрузки, достигнув сечения $x = x_H$, где $e = e_H$, может приводить к возникновению волн сжатия или ударных волн. Их возникновение возможно также из-за распространения волн сжатия от сечения $x = 0$ с момента t_k, когда $e_0(t_k) = e_H$.

§ 1.5. Распространение упругопластических волн в среде с переменным пределом упругости. Задача о накоплении остаточных деформаций [19, 20]

В стержне после удара существуют зоны остаточных деформаций, убывающие с удалением от места приложения нагрузки. Наличие зон остаточных деформаций приводит к повышению предела упругости частиц в ней. Поэтому при повторном приложении нагрузки к такому стержню упругопластические волны в нем будут распространяться так же, как в среде с переменным пределом упругости. Если второй удар происходит с того же конца, что и первый, то упругопластические волны будут распространяться в среде, предел упругости которой убывает с удалением от конца; если с противоположного конца – упругопластические волны будут распространяться в среде с возрастающим пределом упругости. Начнем рассмотрение с последнего случая.

Покажем, что распространение волн при этом происходит, как изображено на рис 1.21. Передний фронт упругих волн движется со скоростью $a_0 = \sqrt{E/\rho_0}$, а задний, вообще говоря, с переменной скоростью b. Граница областей упругих и пластических деформаций является линией разрыва вторых производных от смещения (здесь x – лагранжева координата, определяющая расстояние частицы от конца стержня до первого удара). В начальный момент $t = 0$ в стержне задано распределение ос-

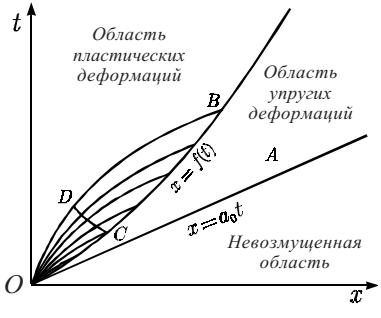


Рис. 1.21

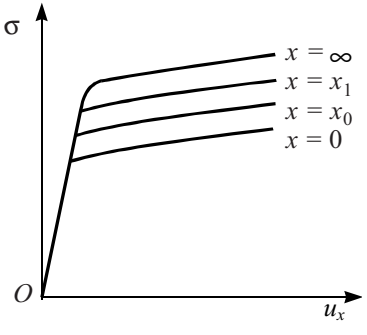


Рис. 1.22

таточных деформаций $\tilde{e}(x)$. Поэтому при вторичном нагружении переход за предел упругости элемента стержня в сечении $x = f(t)$ произойдет при значении деформации $e_1(x) = \tilde{e}(x) + e_s(x)$ и напряжении $\sigma_s = Ee_s(x) = E[e_1(x) - \tilde{e}(x)]$. Как видно из рис. 1.22, в области пластических деформаций зависимость между σ и u_x для различных сечений стержня можно представить в форме $\sigma(x, t) - \sigma_s = \Phi[u_x(x, t) - e_1(x)]$.

Для зависимости между напряжением σ и деформацией e в форме $\sigma = \Phi(e)$ при $e(x, t) > \tilde{e}(x) + e_s(x)$ все приведенные ниже результаты сохраняют силу. Так как уравнение распространения волн при втором ударе совпадает с (1.10) (если под ρ_0 понимать плотность до первого удара, под σ – напряжение, отнесенное к первоначальной площади F_0), то в рассматриваемом случае имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{d\tilde{e}}{dx}\right) \text{ при } u_x < e_1(x);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{de_1}{dx}\right] + a_0^2\frac{de_s}{dx} \text{ при } u_x > e_1(x).$$

Здесь

$$a^2 = \frac{1}{\rho_0}\frac{d\Phi[u_x - e_1(x)]}{d[u_x - e_1(x)]}.$$

Переходя в этих уравнениях к функции $u(x, t)$ по формуле

$$\bar{u}(x,t) = u(x,t) - u_0(x), \quad u_0(x) = \int_0^x \tilde{e}(x)dx,$$

получаем:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = a_0^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \quad \text{при } \bar{u}_x < e_s(x);$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = a_0^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \left(a_0^2 - a^2\right)\frac{de_s}{dx} \quad \text{при } \bar{u}_x > e_s(x), \tag{1.50}$$

причем для функции $\bar{u}(x,t)$ в начальный момент $\bar{u}_x = \bar{u}_t = 0$. Следовательно, в плоскости x, t при $a_0 t \le x \le \infty$ $\bar{u}_x = \bar{u}_t \equiv 0$, поэтому в области упругих деформаций AOB (рис. 1.21) имеет место интеграл

$$\bar{u} = \varphi\left(a_0 t - x\right), \tag{1.51}$$

из которого следует, что

$$\bar{u}_t = -a_0 \bar{u}_x . \tag{1.52}$$

Соотношение справедливо и на линии $x = f(t)$, на которой, очевидно, $\bar{u}_x = e_s(x)$. Наличие области *AOB* объясняется тем, что напряжение, несколько превосходящее предел упругости в сечении *x*, при дальнейшем распространении по частицам стержня будет деформировать их уже упруго $\left(e_s'(x) > 0\right)$.

При мгновенном приложении ударной нагрузки на конце можно ожидать появления пластической волны, обладающей особенностью центрированной волны Римана. Действительно, уравнения характеристик для (1.50)

$$d\bar{u}_t = \pm a d\bar{u}_x + \left(a^2 - a_0^2\right)\frac{de_s}{dx}dt , \quad dx = \pm a dt \tag{1.53}$$

в окрестности начала координат имеют тот же вид, что и в случае среды с постоянным пределом упругости. Поэтому, допуская наличие особенности в точке $x = t = 0$, из (1.53) получаем следующее соотношение для предельных значений скоростей и деформаций:

$$\bar{u}_t = -a_0 e_s(0) - \int_{e_s(0)}^{\bar{u}_x} a\left[\bar{u}_x - e_s(0)\right] d\bar{u}_x . \tag{1.54}$$

На кривой $x = f(t)$, как следует из предыдущего, имеем

$$\bar{u}_t = -a_0 \bar{u}_x ; \ \bar{u}_x = e_s(x). \tag{1.55}$$

Покажем, что условия (1.54) и (1.55) полностью определяют решения уравнения (1.50) в области, лежащей между кривой $x = f(t)$ и характеристикой ODB; одновременно определим и закон движения переднего фронта пластической волны $x = f(t)$. Рассмотрим в плоскости *x*, *t* на рис. 1.21 характеристику *OC*, достаточно близкую к прямой $x = a_0 t$. По заданному углу наклона этой характеристики определим деформацию $\bar{u}_x$ из уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{tg}\varphi = a\left[\bar{u}_x - \tilde{e}_s(x)\right]. \tag{1.56}$$

Следовательно, в плоскости $\bar{u}_x$, $\bar{u}_t$ на рис. 1.23 найдем точку *C*, соответствующую характеристике (1.56) в окрестности точки $x = t = 0$.

Решив совместно (1.55) и уравнение характеристики положительного направления (1.53) (например, в конечных разностях), найдем значения $\overline{u}_x$ и $\overline{u}_t$ в точке C на линии $x = f(t)$. Из уравнения $\overline{u}_{x_C} = e_s(x_C)$ определяем координаты точки C: x_C и $t_C = x_C / \operatorname{tg}\varphi$.

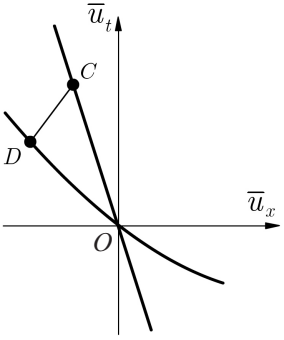


Рис. 1.23

Зная точку C, а также значения скорости и деформации в ней, методом характеристик определим деформации $\overline{u}_x$ и скорости $\overline{u}_t$ на кривой CD, а также вид последней. Тем же методом могут быть найдены решение уравнения (1.50) во всей области $OCBDO$ (см. рис. 1.21) и форма кривой $x = f(t)$.

Приведенное построение позволяет сделать существенный вывод: закон распространения переднего фронта пластических деформаций не зависит от характера изменения приложенной нагрузки и определяется только распределением переменного предела упругости и видом кривой $\sigma = \sigma(e)$. Нахождение скоростей и деформаций в области AOB (см. рис. 1.21) после построения кривой $x = f(t)$ сводится к определению вида функции $\varphi(a_0 t - x)$ из условия (1.55):

$$-\varphi'[a_0 t - f(t)] = \varepsilon_s[f(t)]. \qquad (1.57)$$

Решение уравнения (1.50) в области, ограниченной осью Ot и характеристикой ODB (см. рис. 1.21), существенно зависит от закона изменения приложенной к концу стержня нагрузки. Если последняя со временем возрастает, приходим к смешанной задаче для уравнения (1.50): на характеристике ODB заданы скорости и деформации, на оси Ot – напряжение или скорость.

Для схемы линейного упрочнения решение может быть получено в конечном виде. Действительно, в этом случае волны Римана, соответствующие неупругим деформациям, имеют скорость a_1, поэтому $f(t) = a_1 t$. Из условия (1.57) следует, что

$$-\varphi'(z) = e_s\left(\frac{a_1 z}{a_0 - a_1}\right),$$

отсюда

$$\varphi(a_0 t - x) = -\int_0^{a_0 t - x} e_s\left(\frac{\lambda z}{1-\lambda}\right)dz\,, \qquad (1.58)$$

где $\lambda = a_1 / a_0$.

Решение (1.58) показывает, что каждая частица излучает волну, по интенсивности деформации равную своему пределу упругости, причем эти волны распространяются со скоростью a_0.

В области нагружения из уравнения (1.50) находим

$$\bar{u} = F_1\left(a_1 t - x\right) + F_2\left(a_1 t + x\right) - \frac{a_0^2 - a_1^2}{a_1^2}\int_0^x e_s(x)dx\,.$$

Функции F_1 и F_2 определяются из условия непрерывности смещений на прямой $x = a_1 t$:

$$F_1(0) + F_2(2a_1 t) + \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\int_0^{a_1 t} e_s(x)dx = -\int_0^{(a_0 - a_1)t} e_s\left(\frac{\lambda z}{1-\lambda}\right)dz$$

и требования, чтобы скорость движения торца стержня $x = 0$ была задана и равна, например, $v_0(t)$:

$$a_1 F_1'\left(a_1 t\right) + a_1 F_2'\left(a_1 t\right) = v_0(t)\,.$$

Из двух последних формул легко найти

$$F_2(z) = \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right)\int_0^{z/2} e_s(x)dx - \int_0^{\xi} e_s\left(\frac{\lambda t}{1-\lambda}\right)dt =$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right)\int_0^{z/2} e_s(y)dy - \frac{1-\lambda}{\lambda}\int_0^{z/2} e_s(y)dy = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\int_0^{z/2} e_s(y)dy\,,$$

$$\xi = \frac{a_0 - a_1}{2a_1} z\,, \qquad F_1(z) = \frac{1}{a_1}\int_0^z v_0\left(\frac{y}{a}\right)dy - \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\int_0^z e_s\left(\frac{y}{2}\right)dy\,.$$

Если приложенная к концу стержня нагрузка со временем убывает, то в начале координат одновременно с волнами Римана возникает волна разгрузки. Так же, как и в §1.4, для решения задачи здесь может быть предложен или прямой или обратный метод определения волны разгрузки. Для схемы линейного упрочнения решение опять может быть получено в конечном виде.

В области разгружения для напряжения $\sigma(x,t)$ имеем

$$\sigma = Ee_s(x) + E'\left[e_0 - e_s(x)\right] + E\left(\overline{u}_x - e_0\right).$$

Следовательно, уравнение движения при этом запишется как:

$$\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \left(a_0^2 - a_1^2\right)\left(\frac{de_s}{dx} - \frac{de_0}{dx}\right), \qquad (1.59)$$

где $e_0(x)$ – деформация на волне разгрузки, отсчитываемая от положения после первого удара. Интеграл (1.59) имеет вид

$$\overline{u} = \Phi_1\left(a_0 t - x\right) + \Phi_2\left(a_0 t + x\right) + \left(1 - \lambda^2\right)\int_0^x \left[e_0(x) - e_s(x)\right]dx.$$

Если приложенная к торцу стержня ударная нагрузка мгновенно возрастает, а затем монотонно убывает, то волной разгрузки в этом случае является прямая $x = a_1 t$, на которой должны выполняться условия непрерывности смещений и равенство деформаций e_0:

$$-\Phi_1'\left[\left(a_0 - a_1\right)t\right] + \Phi_2'\left[\left(a_0 + a_1\right)t\right] + \left(1 - \lambda^2\right)\left[e_0\left(a_1 t\right) - e_s\left(a_1 t\right)\right] = e_0\left(a_1 t\right);$$

$$\Phi_1\left[\left(a_0 - a_1\right)t\right] + \Phi_2\left[\left(a_0 + a_1\right)t\right] + \left(1 - \lambda^2\right)\int_0^{a_1 t}\left[e_0(x) - e_s(x)\right]dx =$$

$$= -\int_0^{(a_0 - a_1)t} e_s\left(\frac{\lambda}{1-\lambda} z\right)dz.$$

Исключив отсюда $e_0\left(a_1 t\right)$ (предварительно продифференцировав второе соотношение по времени), получим:

$$-\left(1-\lambda\right)\Phi_1'\left[\left(a_0 - a_1\right)t\right] + \left(1+\lambda\right)\Phi_2'\left[\left(a_0 + a_1\right)t\right] = \left(1-\lambda\right)e_s\left(a_1 t\right). \qquad (1.60)$$

Условие на торце стержня дает

$$\Phi_1'\left(a_0 t\right) + \Phi_2'\left(a_0 t\right) = \frac{v_0\left(t\right)}{a_0}; \qquad \Phi_1'(z) = \frac{1}{a_0} v_0\left(\frac{z}{a_0}\right) - \Phi_2'(z). \qquad (1.61)$$

Исключив из (1.60) функцию Φ_1' с помощью (1.61), приходим к следующему уравнению для Φ_2':

$$(1-\lambda)\Phi_2'\left[(a_0-a_1)t\right]+(1+\lambda)\Phi_2'\left[(a_0+a_1)t\right]=$$
$$=(1-\lambda)e_s(a_1t)+(1-\lambda)\frac{v_0\left[(1-\lambda)t\right]}{a_0}.$$

Если функции $e_s(x)$ и $v_0(t)$ разложить в ряды Тейлора: $e_s(x)=\sum_0^\infty b_n x^n$, $v_0(t)=a_0\sum_0^\infty c_n t^n$, то для функции Φ_2' получим решение в виде

$$\Phi_2'(z)=\sum_0^\infty d_n z^n, \tag{1.62}$$

где коэффициенты d_n определяем из уравнения

$$d_n=\frac{(1-\lambda)\lambda^n b_n+c_n(1-\lambda)^{n+1}a_0^{-n}}{(1-\lambda)^{n+1}+(1+\lambda)^{n+1}}. \tag{1.63}$$

Пользуясь (1.61) – (1.63), можно решить различные задачи, связанные с распространением волны разгрузки, в частности задачу о продольном ударе по стержню твердым телом массы *m*.

Переходим к рассмотрению распространения волн в полубесконечном стержне, у которого предел упругости убывает с удалением от торца. Предположим вначале, что приложенное к торцу давление возрастает от нуля. В этом случае (при $e_s'(x)<0$) картина имеет вид, приведенный на рис. 1.24, *а*. Кривая *AB* является границей упругих и пластических деформаций.

Мгновенно приложенное давление можно рассматривать как предельный случай непрерывного нагружения. Предельный переход дает решение, приведенное на рис. 1.24, *б*. В пределе точка *A* перейдет в начало координат, а кривая *AB* – в прямую $x=a_0t$. На движущейся поверхности $x=a_0t$ каждая частица стержня скачком приобретает деформацию, равную собственному пределу упругости. Если существует излом касательной к кривой $\sigma=\sigma(e)$ при переходе от упругих к пластическим деформациям, то характеристика *AC* будет отлична от прямой $x=a_0t$. Следовательно, определение волн Римана сводится к интегрированию системы уравнений характеристик (1.53) при условии

$$\bar{u}_x=e_s(x);\quad \bar{u}_t=-a_0e_s(x)\ \text{ при }\ x=a_0t. \tag{1.64}$$

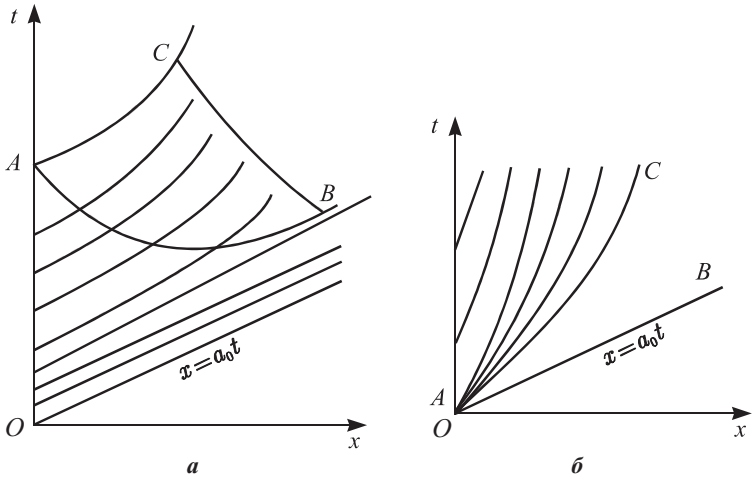


Рис. 1.24

Условие (1.64) опять-таки имеет место при подходе по различным направлениям к началу координат. Если диаграмма $\sigma - e$ задана в виде схемы Прандтля, то вместо пучка волн Римана, несущих пластическую деформацию, будет одна прямая $x = a_1 t$.

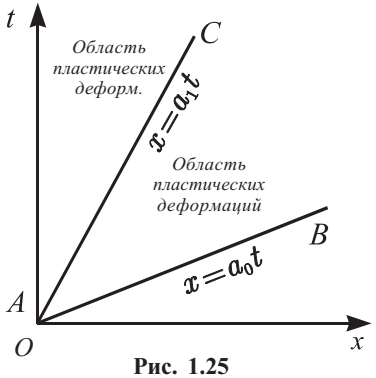


Рис. 1.25

Найдем решение поставленной задачи в этом случае (рис. 1.25). Для уравнения (1.50) (в котором надо положить $a = a_1$) в области BOC согласно (1.64) имеем задачу Коши. Решением ее согласно предыдущему является функция

$$\bar{u} = F_1\left(-a_1 t + x\right) + F_2\left(a_1 t + x\right) - \frac{a_0^2 - a_1^2}{a_1^2}\int_0^x e_s(x)dx\,, \qquad (1.65)$$

удовлетворяющая условиям

$$F_1'\left[\left(a_0 - a_1\right)t\right] + F_2'\left[\left(a_0 + a_1\right)t\right] - \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right)e_s\left(a_0 t\right) = e_s\left(a_0 t\right);$$

$$-a_1 F_1'\left[\left(a_0 - a_1\right)t\right] + a_1 F_2'\left[\left(a_0 + a_1\right)t\right] = -a_0 e_s\left(a_0 t\right).$$

Отсюда

$$F_1'\left[\left(a_0 - a_1\right)t\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\right]e_s\left(a_0 t\right);\ F_1'(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\right)e_s\left(\frac{a_0 z}{a_0 - a_1}\right);$$

$$F_2'\left[\left(a_0 + a_1\right)t\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\right]e_s\left(a_0 t\right);\ F_2'(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\right)e_s\left(\frac{a_0 z}{a_0 + a_1}\right).$$

Следовательно,

$$\bar{u}_{xt} = -\frac{a_1}{2\lambda^2}\left[\frac{1+\lambda}{1-\lambda}e_s'\left(\frac{x - a_1 t}{1-\lambda}\right) - \frac{1-\lambda}{1+\lambda}e_s'\left(\frac{x + a_1 t}{1+\lambda}\right)\right];$$

$$\bar{u}_x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\right)e_s\left[\frac{a_0\left(x - a_1 t\right)}{a_0 - a_1}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\right)e_s\left[\frac{a_0\left(x + a_1 t\right)}{a_0 + a_1}\right] - \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right)e_s(x)\,.$$

Из последней формулы легко усмотреть, что $\bar{u}_{xt} > 0$, т. е. после прохождения волны $x = a_0 t$ деформации растут по абсолютной величине. Следовательно, в области *BOC* происходит активное нагружение. В случае возрастания приложенной к торцу стержня нагрузки определение решения в области, ограниченной осью Ot и волной сильного разрыва *OC*, не представляет труда. Действительно, в этой области имеет место следующий интеграл уравнения (1.50):

$$\bar{u} = F_1\left(a_1 t - x\right) + F_2\left(a_1 t + x\right) - \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right)\int_0^x e_s(x)dx. \qquad (1.66)$$

В области *BOC*, согласно предыдущему,

$$\bar{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\right)\int_0^{x-a_1t} e_s\left(\frac{a_0 z}{a_0 - a_1}\right)dz + \tag{1.67}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\right)\int_0^{x+a_1t} e_s\left(\frac{a_0 z}{a_0 + a_1}\right)dz - \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right)\int_0^x e_s(x)dx.$$

Для определения функций F_1 и F_2 достаточно потребовать непрерывности смещений на линии $x = a_1 t$:

$$F_2\left(2a_1t\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\right)\int_0^{2a_1t} e_s\left(\frac{a_0 z}{a_0 - a_1}\right)dz, \tag{1.68}$$

и равенства скорости $\bar{u}_t$ в сечении $x = 0$ заданной скорости $v_0(t)$:

$$F_1'(a_1t) + F_2'(a_1t) = \frac{v_0(t)}{a_1}. \tag{1.69}$$

Из (1.67) с учетом (1.68) находим:

$$F_1'(a_1t) = \frac{v_0(t)}{a_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\right)e_s\left(\frac{a_0 a_1 t}{a_0 - a_1}\right). \tag{1.70}$$

Таким образом, решение задачи в области tOC получено в общем виде.

Если нагрузка на конце стержня мгновенно приняла значение, соответствующее деформации e_{m_1}, и затем начала монотонно убывать, то волной разгрузки по-прежнему будет прямая $x = a_1t$. Этот сразу не очевидный результат (в области BOC имеют место пластические деформации) докажем непосредственной проверкой.

В области разгружения, согласно предыдущему, имеем:

$$\bar{u} = \Phi_1\left(a_0t - x\right) + \Phi_2\left(a_0t + x\right) + \left(1 - \lambda^2\right)\int_0^x \left[e_0(x) - e_s(x)\right]dx. \tag{1.71}$$

На линии $x = a_1t$ необходимо потребовать непрерывность смещений $\bar{u}$ и равенства $\bar{u}_x = e_0(x)$, что с учетом (1.71) приводит к условиям

$$\Phi_1\left[\left(a_0-a_1\right)t\right]+\Phi_2\left[\left(a_0+a_1\right)t\right]+\left(1-\lambda^2\right)\int_0^{a_1t}\left[e_0(x)-e_s(x)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}\right)\int_0^{2a_1t}e_s\left(\frac{a_0z}{a_0+a_1}\right)dz-\left(\frac{1}{\lambda^2}-1\right)\int_0^{a_1t}e_s(x)dx\,;$$

$$-\Phi_1'\left[\left(a_0-a_1\right)t\right]+\Phi_2'\left[\left(a_0+a_1\right)t\right]+\left(1-\lambda^2\right)\left[e_0\left(a_1t\right)-e_s\left(a_1t\right)\right]=e_0\left(a_1t\right).$$

Исключив из этих соотношений $e_0(x)$, получим

$$-(1-\lambda)\Phi_1'\left[\left(a_0-a_1\right)t\right]+(1+\lambda)\Phi_1'\left[\left(a_0+a_1\right)t\right]=(1-\lambda)e_s\left[\frac{2a_1t}{1+\lambda}\right]. \quad (1.72)$$

Условие на конце стержня дает

$$\Phi_1'(z)=\frac{1}{a_0}v_0\left(\frac{z}{a_0}\right)-\Phi_2'(z). \quad (1.73)$$

Из (1.72) и (1.73) легко получить функциональное уравнение для Φ_2' (или Φ_1'):

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\Phi_2'\left[\left(a_0-a_1\right)t\right]+(1+\lambda)\Phi_2'\left[\left(a_0+a_1\right)t\right]&=\\ =(1-\lambda)e_s\left(\frac{2a_1t}{1+\lambda}\right)+\frac{1-\lambda}{a_0}v_0\left[(1-\lambda)t\right].&\end{aligned} \quad (1.74)$$

Если $e_s(x)$ и $v_0(t)$ разложены в ряды Тейлора:

$$e_s(x)=\sum_0^\infty b_nx^n,\quad v_0(t)=a_0\sum_0^\infty c_nt^n,$$

то для функции $\Phi_2'(z)$ решение имеет вид:

$$\Phi_2'(z)=\sum_0^\infty d_nz^n\,,$$

где

$$d_n=\frac{(2\lambda)^n(1-\lambda)(1+\lambda)^{-n}b_n+c_n(1-\lambda)^{n+1}a_0^{-n}}{(1-\lambda)^{n+1}+(1+\lambda)^{n+1}}. \quad (1.75)$$

Если рассматривается задача об ударе по концу стержня твердым телом массы m, то, очевидно,

$$c_0 = \frac{v_0}{a_0}; \quad c_1 = \frac{F_0 p_m}{m a_0}; \quad b_0 = e_s(0); \quad b_1 = \left(\frac{de_s}{dx}\right)_0$$

и для $e_0(x)$ получаем следующие выражения:

$$\lambda^2 e_0(x) = -\left(1-\lambda^2\right) e_s(x) - \frac{1}{a_0} v_0 \left(\frac{a_0 - a_1}{a_0 a_1} x\right) + \Phi_2'\left(\frac{a_0 - a_1}{a_1} x\right) + \Phi_2'\left(\frac{a_0 + a_1}{a_1} x\right);$$

$$\lambda^2 e_0(x) = -\,(1-\lambda^2)\; e_s(0) - \frac{v_0}{a_0} + 2d_0 +$$

$$+ x\left[-\,(1-\lambda^2)\left(\frac{de_s}{dx_0}\right) - \frac{F_0 p_m}{m a_0}\frac{a_0 - a_1}{a_0 a_1} + 2\frac{a_0}{a_1} d_1\right] + x^2\left[\ldots\right] + \ldots$$

Если учесть, что согласно (1.75)

$$2d_0 = (1-\lambda)(b_0 + c_0) = (1-\lambda)\left(e_s(0) + \frac{v_0}{a_0}\right),$$

$$2d_1 = \frac{(1-\lambda)^2 \dfrac{F_0 p_m}{m a_0^2} + \dfrac{2\lambda(1-\lambda)}{1+\lambda}\left(\dfrac{de_s}{dx}\right)_0}{1+\lambda^2},$$

то

$$\left(\frac{de_0}{dx}\right)_0 = -\frac{1-\lambda}{m a_1^2\left(1+\lambda^2\right)}\left[p_m F - \frac{m a_1^2}{\left(1+\lambda^2\right)}\frac{2-\left(1+\lambda^2\right)\left(1+\lambda^2\right)}{\lambda^2}\left(\frac{de_s}{dx}\right)_0\right], \tag{1.76}$$

$$e_0(0) = e_m(0).$$

Решение рассмотренных выше задач позволяет исследовать распространение волн в стержне при произвольном законе изменения предела упругих деформаций e_s. Для примера на рис. 1.26 приведены два различных случая изменения $e_s(x)$. В первом случае (кривая 1) волновой процесс в координатах x, t изображен на рис. 1.27, *а* (для схемы Прандтля). Для области OAC решение дается формулой (1.65), для области AML — формулой (1.58). Нахождение смещений в области $ACNM$ сво-

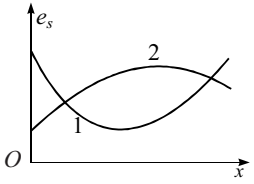
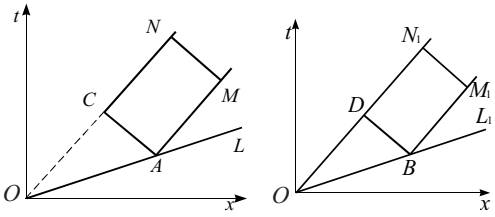


Рис. 1.26



а *б*

Рис. 1.27

дится к решению задачи Гурса. Исследование движения в следующих областях также сводится к известным задачам математической физики.

Во втором случае (также для схемы Прандтля) картина распространения волн имеет вид, представленный на рис. 1.27, *б*. Для области OBD решение дается формулой (1.58), для области BL_1M_1 — формулой (1.65). Нахождение решения в области BDN_1M_1 опять-таки сводится к решению задачи Гурса.

Задача о накоплении остаточных деформаций. Рассмотрим характер деформирования конца стержня при повторных ударах по нему. Предполагается, что последующий удар производится после того, как в стержне исчезли напряжения, обусловленные предыдущим ударом. В этом случае волна разгрузки будет распространяться в среде с убывающим пределом упругости. Для схемы Прандтля формула (1.54) принимает вид

$$\bar{u}_t = -a_0 e_s(0) - a_1\left[\bar{u}_x - e_s(0)\right]$$

или, в силу того, что $\bar{u}_x = u_x - \tilde{e}(x)$,

$$\bar{u}_t = -a_0 e_s(0) - a_1\left[u_x - \tilde{e}(x) - e_s(0)\right]. \qquad (1.77)$$

Для концевого сечения стержня при скорости удара v_0 максимальная деформация e_m определяется из (1.77):

$$v_0 = -a_0 e_s(0) - a_1\left[e_m - \tilde{e}(0) - e_s(0)\right]. \qquad (1.78)$$

Определим скорость v_{s1}, необходимую для достижения концевым сечением стержня при втором ударе предела упругости:

$$v_{s1} = -a_1 e_s(0) = -a_0\left[e_{s,0} + \frac{E'}{E}\left(e_{m,0} - e_{s,0}\right)\right] = -a_0 e_{s,0} - \lambda a_1\left(e_{m,0} - e_{s,0}\right). \tag{1.79}$$

Здесь $\lambda = a_1 / a_0$, $e_{s,0}$ и $e_{m,0}$ – соответственно первоначальный предел упругости стержня и максимальная деформация концевого сечения при первом ударе.

Из формул (1.78) и (1.79) легко установить, что скорость $v_0 = -a_0 e_{s,0} - a_1\left(e_{m,0} - e_{s,0}\right)$, необходимая для достижения деформации $e_{m,0}$ при первом ударе, значительно больше скорости $v_{s,1}$, необходимой для достижения предела упругости $e_s(0)$. (Заметим, что при скоростях v_0 и $v_{s,1}$ соответственно при первом и втором ударах на конце стержня возникают одинаковые максимальные напряжения.)

Представляет интерес решить вопрос о том, будет ли иметь предел указанное повышение предела упругости при многократных ударах по концу с одной и той же скоростью v_0. Заметим, что формула (1.78) справедлива для n-го по счету удара, если под $e_s(0)$ и $\tilde{e}(0)$ понимать соответственно предел упругости и остаточную деформацию конца после $(n-1)$-го удара, т. е.

$$v_0 = -a_0 e_{s,n-1} - a_1\left(e_{m,n} - \tilde{e}_{n-1} - e_{s,n-1}\right).$$

Последняя формула может быть преобразована к иному виду, если учесть, что $e_{m,n-1} = e_{s,n-1} + \tilde{e}_{n-1}$:

$$\bar{v}_0 = \frac{v_0}{a_0} = -e_{s,n-1} - \lambda\left(e_{m,n} - e_{m,n-1}\right). \tag{1.79'}$$

Но для схемы Прандтля между значениями $e_{s,n}$ и $e_{s,n-1}$ существует зависимость

$$E'\left(e_{m,n} - e_{m,n-1}\right) = E\left(e_{s,n} - e_{s,n-1}\right), \quad e_{m,n} - e_{m,n-1} = \frac{a_0^2}{a_1^2}\left(e_{s,n} - e_{s,n-1}\right),$$

поэтому формулу (1.79) можно преобразовать к виду

$$\bar{v}_0 = -\left[e_{s,n-1} + \frac{e_{s,n} - e_{s,n-1}}{\lambda}\right]. \tag{1.80}$$

Если под деформацией e при сжатии условно понимать ее абсолютное значение, то знак минус перед скобкой можно опустить, а (1.80) преобразовать к виду

$$e_{s,n} = \lambda\overline{v}_0 + (1-\lambda)e_{s,n-1} = \beta e_{s,n-1} + (1-\beta)\overline{v}_0\,;\ \ \beta = 1-\lambda\,. \quad (1.81)$$

Из этого рекуррентного соотношения получим

$$e_{s,n} = v_0(1-\beta^n) + \beta^n e_{s,0}\,, \quad (1.82)$$

откуда при $n \to \infty$ будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} e_{s,n} = \overline{v}_0\,. \quad (1.83)$$

Из формулы

$$e_{s,n} - e_{s,n-1} = \lambda(\overline{v}_0 - e_{s,n-1}) \quad (1.84)$$

следует, что пределы упругости при двух последовательных ударах могут быть одинаковы лишь при $e_{s,n-1} = \overline{v}_0$, т. е. в силу (1.83) при бесконечно большом числе ударов.

Найдем выражение для модуля остаточной деформации $\widetilde{e}_n$ после n-го удара:

$$\widetilde{e}_n = e_{m,n} - e_{s,n}\,. \quad (1.85)$$

Для этого преобразуем формулу (1.79) с учетом (1.85), (1.84) и (1.82) к виду

$$\overline{v}_0 = e_{s,n-1} + \lambda(e_{s,n} - e_{s,n-1}) + \lambda(\widetilde{e}_n - \widetilde{e}_{n-1}) =$$

$$= e_{s,n-1} + \lambda(\widetilde{e}_n - \widetilde{e}_{n-1}) + \lambda^2(\overline{v}_0 - e_{s,n-1}),$$

$$\widetilde{e}_n - \widetilde{e}_{n-1} = \frac{v_0(1-\lambda^2) - e_{s,n-1}(1-\lambda^2)}{\lambda} =$$

$$= \frac{\overline{v}_0(1-\lambda^2) - (1-\lambda^2)\left[\overline{v}_0(1-\beta^{n-1}) + \beta^{n-1}e_{s,0}\right]}{\lambda} =$$

$$= (1-\lambda^2)\frac{\beta^{n-1}\overline{v}_0 - \beta^{n-1}e_{s,0}}{\lambda} = \frac{(1-\lambda^2)}{\lambda}\beta^{n-1}(\overline{v}_0 - e_{s,0}). \quad (1.86)$$

Отсюда

$$\widetilde{e}_1 = \frac{1-\lambda^2}{\lambda}(\overline{v}_0 - e_{s,0})\,,$$

$$\widetilde{e}_{n+1} = \frac{1-\lambda^2}{\lambda}(\overline{v}_0 - e_{s,0})\sum_{k=0}^{m}\beta^k = \frac{(1-\lambda^2)(1-\beta^{n+1})}{\lambda^2}(\overline{v}_0 - e_{s,0})\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{e}_n = \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}(\overline{v}_0 - e_{s,0}) = \frac{\widetilde{e}_1}{\lambda}. \tag{1.87}$$

Радиус концевого сечения стержня после n-го удара определяется по формуле

$$r_n = r_0 / \sqrt{1-\widetilde{e}_n} \tag{1.88}$$

(материал предполагается несжимаемым). Предельное значение r_n будет равно

$$r_\infty = \frac{r_0}{\sqrt{1-\widetilde{e}_1/\lambda}} \tag{1.89}$$

или при малых значениях $\widetilde{e}_1/\lambda$

$$r_\infty = r_0\left(1+\frac{\widetilde{e}_1}{2\lambda}\right). \tag{1.90}$$

Найдем теперь угол наклона касательной к контуру стержня после n-го удара в сечении $x=0$ (на торце):

$$\operatorname{tg}\chi_n = \left(\frac{dr_n}{dx_n}\right)_{x_n=0} = \frac{1}{(1-\widetilde{e}_n)}\left(\frac{dr_n}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{r_0}{2(1-\widetilde{e}_n)^{5/2}}\left(\frac{d\widetilde{e}_n}{dx}\right)_{x=0}. \tag{1.91}$$

Но

$$p_m = Ee_{s,n-1} + E'(e_{m,n} - e_{s,n-1}) = Ee_{s,n}\,; e_{s,n} = (1-\lambda^2)e_{s,n-1} + \lambda^2 e_{m,n} \tag{1.92}$$

или

$$\widetilde{e}_n(x) = e_{m,n} - e_{s,n} = \frac{e_{s,n}}{\lambda^2} - \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}e_{s,n-1} - e_{s,n} = \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}(e_{s,n} - e_{s,n-1}). \tag{1.93}$$

Формула (1.76) в рассматриваемом случае примет вид

$$\left(\frac{de_{m,n}}{dx}\right)_0 = -ae_{s,n} + b\frac{de_{s,n-1}}{dx}, \tag{1.94}$$

где

$$a = \frac{EF(1-\lambda^2)}{ma_1^2(1+\lambda^2)}; \qquad b = \frac{(1-2\lambda^2-\lambda^4)(1-\lambda)}{\lambda^2(1+\lambda^2)(1+\lambda)}.$$

Дифференцируя (1.92), легко найти, что

$$\frac{de_{m,n}}{dx} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{de_{s,n}}{dx} - \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}\frac{de_{s,n-1}}{dx}.$$

Подставив это выражение для $\dfrac{de_{m,n}}{dx}$ в (1.94), получим

$$\frac{de_{s,n}}{dx} = -a\lambda^2 e_{s,n} + \left[b\lambda^2 + (1-\lambda^2)\right]\frac{de_{s,n-1}}{dx}$$

или

$$\frac{de_{s,n}}{dx} = -a\lambda^2 e_{s,n} + k_1\frac{de_{s,n-1}}{dx},$$

где

$$k_1 = \frac{(1-2\lambda^2-\lambda^4)(1-\lambda)+(1-\lambda^4)(1+\lambda)}{(1+\lambda^2)(1+\lambda)} = \frac{2(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2)}{(1+\lambda^2)(1+\lambda)}.$$

Следовательно,

$$\frac{de_{s,n}}{dx} = -a\lambda^2 e_{s,n} + k_1\left(-a_0\lambda^2 e_{s,n-1} + k_1\frac{de_{s,n-2}}{dx}\right) =$$

$$= -a\lambda^2(e_{s,n} + k_1 e_{s,n-1} + k_1^2 e_{s,n-2} + \ldots + k_1^{n-1} e_{s,1}),$$

или, согласно (1.82),

$$\frac{de_{s,n}}{dx} = -a\lambda^2\overline{v}_0\sum_{m=0}^{n-1}k_1^m + a\lambda^2(\overline{v}_0 - e_{s,0})\sum_{m=0}^{n-1}\beta^{n-1}k_1^m =$$

$$= -a\lambda^2\left[\overline{v}_0\frac{k_1^n-1}{k_1-1} - \beta(\overline{v}_0 - e_{s,0})\frac{k_1^n-\beta^n}{k_1-\beta}\right]. \quad (1.95)$$

При $k_1 > 1$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{de_{s,n}}{dx} = -\infty$. Так как

$$\frac{d\widetilde{e}_n}{dx} = \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}\left[\frac{de_{s,n}}{dx} - \frac{de_{s,n-1}}{dx}\right],$$

то отсюда, используя формулу (1.95), получаем

$$\frac{d\widetilde{e}_n}{dx} = -a(1-\lambda^2)\left[\overline{v}_0 k_1^{n-1} - \beta(\overline{v}_0 - e_{s,0})\frac{k_1^n - k_1^{n-1} - \beta^n + \beta^{n-1}}{k_1-\beta}\right]. \quad (1.96)$$

С помощью формул (1.91) и (1.96) легко рассчитать форму торца стержня после n-го удара.

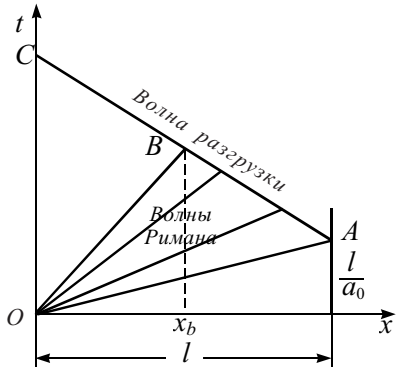


Рис. 1.28

До сих пор решались задачи о накоплении остаточных деформации в полуограниченном стержне, материал которого удовлетворяет схеме Прандтля. В [19] дано решение для стержня конечной длины l из упругопластического материала с произвольной зависимостью $\sigma = \Phi(e)$. Приведем это решение.

До тех пор, пока не скажется влияние отраженной от конца $x = l$ волны разгрузки (рис. 1.28), решение задачи при первом ударе выражается формулами для волны Римана:

$$\frac{x}{t} = a(u_x)\,; \qquad v_0 = \int_0^{e_{m,1}} a(e)\,de = a_0 e_{s,0} + \int_{e_{s,0}}^{e_{m,1}} a(e)\,de\,.$$

Возникшая у свободного конца стержня волна разгрузки является волной сильного разрыва[1], распространяющейся с постоянной скоростью a_0. Уравнение волны разгрузки имеет вид (рис. 1.28)

$$x + a_0 t = 2l\,. \tag{1.97}$$

Обозначив через e_0^0 значение деформации на волне разгрузки со стороны волн Римана, на основании предыдущего получим

[1] Этот результат, спустя 3 года, был повторен в работе *Ли Е*. Проблема граничных значений в теории распространения пластических волн //Quart. of Appl. Math., 1953, №10 (См. сборник переводов: Механика. 1954. №4).

$$a\left(e_0^0\right)=\frac{a_0 x}{2l-x}\cdot \tag{1.98}$$

Используя закон разгрузки и формулу (1.98), легко определим закон распределения предела упругости $\sigma_s(x)$ после первого удара:

$$\sigma_s\left(x\right)=\sigma\left[e_0^0(x)\right]=\sigma\left[a^{-1}\left(\frac{xa_0}{2l-x}\right)\right].$$

Так как в области *OBC* (см. рис. 1.28) при любой скорости удара деформации постоянны, то остаточные деформации в ней после первого удара также постоянны:

$$\widetilde{e}_1=e_{m,1}-\sigma_1(e_{m,1})/E\,.$$

Предел упругости в области $x\le x_b$ после первого удара $\sigma_{s,1}=\sigma_1(e_{m,1})$. Наличие в стержне после первого удара области постоянных остаточных деформаций приводит к тому, что после 2-го, 3-го, ..., *n*-го ударов по стержню в последнем по-прежнему будет существовать некоторая область постоянных остаточных деформаций, прилегающая к сечению $x=0$. Поэтому напряжение и деформации в сечении $x=0$ после *n*-го удара будут связаны со скоростью соотношением

$$v_0=a_0e_{s,n-1}+\int\limits_{e_{s,n-1}}^{e_{m,n}}a\left(e\right)de\,, \tag{1.99}$$

$$\widetilde{e}_n=e_{m,n}-\frac{\sigma_n(e_{m,n})}{E}=e_{m,n}-e_{s,n}\,. \tag{1.100}$$

Покажем, что процесс упрочнения заканчивается только после бесконечно большого числа ударов. По теореме о среднем из (1.99) следует:

$$v_0=a_0e_{s,n-1}+a_n(e_{m,n}-e_{s,n-1})\,. \tag{1.101}$$

Заметим, что $a_1<a_n<a_0$, где a_1 – минимальное значение, достижимое при данной величине скорости удара, или, вообще, минимум $a(e)$ для всех деформаций. Здесь существенно, что $a_1>0$. Проводя прямую через точки σ_{n-1}, σ_s и обозначая тангенс угла наклона ее к оси *e* через E_n, имеем:

$$e_{s,n} = e_{s,n-1} + \frac{E_n}{E}(e_{m,n} - e_{s,n-1}), \qquad (1.102)$$

причем $E_1 < E_n < E$, где E_1 – значение $d\sigma / de$, соответствующее a_1. Подставляя $e_{m,n}$ из (1.101) в (1.102), получим:

$$e_{s,n} = \lambda_n e_{s,n-1} + q_n;\ \lambda_n = 1 - \frac{a_0 E_n}{a_n E};\ q_n = \frac{v_0 E_n}{a_n E}. \qquad (1.103)$$

Предположим, что $0 < \lambda_n < 1$. Последнее условие накладывает некоторые ограничения на кривую сжатия, которые на практике почти всегда выполняются. В частности, для схемы Прандтля $\lambda_n = \lambda_1 = 1 - \sqrt{E'/E} < 1$.

Очевидно, для всех кривых сжатия, достаточно близких к этой схеме, условие $0 < \lambda_n < 1$ также будет выполнено. Рассматривая (1.103) как рекуррентную формулу, получим:

$$e_{s,n} = q_n + \lambda_n q_{n-1} + \lambda_n \lambda_{n-1} q_{n-2} + \lambda_n \lambda_{n-1} \lambda_{n-2} q_{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_n \lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \ldots \lambda_1 q_0 + \lambda_n \lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \ldots \lambda_1 e_{s,0}. \qquad (1.104)$$

Так как все члены этой суммы положительны, то деформация $e_{s,n}$ увеличивается с возрастанием числа ударов. Покажем, что возрастание $e_{s,n}$ имеет предел. Так как $\lambda_n < \lambda$, $q_n < q$ для любого n, то из (1.104) имеем:

$$e_{s,n} < q\left(1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^{n-1}\right) + \lambda^n e_{s,0},$$

откуда $\lim\limits_{n \to \infty} e_{s,n} < q/(1-\lambda)$.

Аналогично может быть решен вопрос об изменении формы торца стержня при многократных ударах.

§1.6. Волновой процесс в стержне при ударе им о преграду. Основы жесткопластического анализа. Соударение деформируемых стержней

В этом параграфе рассматриваются задачи деформирования упругопластических стержней конечной длины, в которых решение получается в явном виде.

1. ***Задача об ударе стержнем о преграду.*** Удар производится о неподвижную жесткую преграду с постоянной скоростью v_0 деформируемым стержнем длины l.

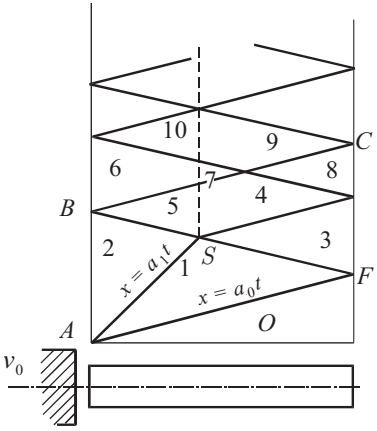


Рис. 1.29

Для удобства решения (рис. 1.29) будем рассматривать удар преградой по концу покоящегося стержня. Предположим сначала, что диаграмма «напряжения–деформации» удовлетворяет схеме Прандтля (в такой постановке задача решена в [21]). В областях 0, 1 и 2 скорости частиц и деформаций имеют соответственно следующие постоянные значения: $v = 0$; $e = 0$; $v_1 = a_0 e_s$; $e_1 = -e_s$; $v_2 = v_0$; $e_2 = -e_s + (a_0 e_s - v_0)/a_1$ (здесь e_s – абсолютное значение предела упругости при сжатии).

Приведенная на рис. 1.29 картина имеет место при $v_0 > a_0 e_s$. В точке F упругая волна отражается от свободного конца и движется обратно. Очевидно, в области 3 скорости и деформации постоянны: $v_3 = 2a_0 e_s$; $e_3 = 0$.

Поскольку слева от точки S частицы стержня находятся в сжатом состоянии, а справа – в недеформированном, то после взаимодействия волн AS и FS слева от S должна начаться разгрузка (уменьшение деформаций сжатия), а справа – нагрузка. Таким образом, частица x_s является стационарным фронтом разрыва по деформациям: напряжения и скорости справа и слева от нее одинаковы ($\sigma_5 = \sigma_4$, $v_5 = v_4$), но деформации различны.

Так как параметры области 2 постоянны, то волна разгрузки SB будет распространяться со скоростью a_0. Предположим вначале, что вправо от точки S распространяются лишь упругие

волны. Тогда для определения неизвестных значений v_4, v_5, σ_4, σ_5 имеем четыре следующих уравнения:

$$v_5 = v_0 + a_0\left(e_5 - e_2\right); \quad Ee_4 = Ee_5 - \left(E - E'\right)\left(e_s + e_2\right);$$

$$v_4 = v_3 - a_0\left(e_4 - e_3\right); \quad v_0 + a_0\left(e_5 - e_2\right) = v_3 - a_0\left(e_4 - e_3\right),$$

из которых, используя выражения для e_2, e_3, v_3, найдем:

$$e_4 = \frac{\left(a_0 e_s - v_0\right)\left(a_0 + a_1\right)}{2a_0^2}; \qquad e_5 = \frac{\left(2a_0^2 + a_0 a_1 - a_1^2\right)\left(a_0 e_s - v_0\right)}{2a_0^2 a_1};$$

$$v_5 = v_4 = \frac{\left(3a_0 - a_1\right)\left(a_0 e_s - v_0\right)}{2a_0} + 2v_0 \cdot$$

Из условий $-e_s < e_4 < e_s$; $e_2 < e_5 < e_k$ (e_k – новый предел упругости для части стержня левее S) получим следующее ограничение для скорости v_0, вызывающей упругие деформации в области 4:

$$v_0 < \left(1 + \frac{2a_0}{a_0 + a_1}\right) a_0 e_s.$$

При этом, как легко показать, $v_4 = v_5 > v_0$. Следовательно, при достижении волной разгрузки сечения $x = 0$ напряжения сжатия в последнем начнут уменьшаться и при некоторых значениях скорости v_0 могут смениться напряжениями растяжения – в этом случае стержень отскочит, вибрируя, от преграды. Определим условия обращения в нуль напряжения на торце $x = 0$ стержня после отражения от него волны разгрузки:

$$\tilde{e} = \frac{a_0^2 - a_1^2}{a_0^2 a_1}\left(a_0 e_s - v_0\right); \; \tilde{v} = v_5 - a_0\left[\frac{a_0^2 - a_1^2}{a_0^2 a_1}\left(a_0 e_s - v_0\right) - e_5\right] = 2a_0 e_s.$$

Таким образом, при $\tilde{v} = 2a_0 e_s > v_0$, т.е. при $a_0 e_s < v_0 < 2a_0 e_s$, соударение заканчивается через время $T = 2l / a_0$.

Исследовать движение отскочившего стержня не представляет труда, если учесть, что оба его конца являются свободными от нагрузок. Длина зоны постоянных остаточных деформаций x_5 определяется по формуле $x_5 = 2la_1 / \left(a_0 + a_1\right)$. При $2a_0 e_s < v_0 < \left(1 + 2a_0 / \left(a_0 + a_1\right)\right) a_0 e_s$ величина скорости v_5 недостаточна для уничтожения давления между стержнем и пре-

градой. Волновая картина для этого случая изображена на рис. 1.29.

Из уравнений $v_0 = v_5 + a_0 e_5 - a_0 e_6$; $v_0 = v_4 + a_0 e_5 - a_0 e_7$ (условия $\sigma_6 = \sigma_7$; $v_6 = v_7$ при этом тождественно удовлетворены) с использованием предыдущих выражений для v_5, v_4, e_5, e_4 получим:

$$e_6 = \frac{a_0^2 + a_0 a_1 - a_1^2}{a_0^2 a_1}\left(a_0 e_s - v_0\right) + e_s > e_2; \qquad v_6 = v_0;$$

$$e_7 = \frac{1}{a_0}\left(a_0 e_s - v_0\right) + e_s > -e_s; \quad v_7 = v_0;$$

$$e_8 = 0; \qquad v_8 = \frac{a_0 - a_1}{a_0}\left(a_0 e_s - v_0\right) + 2v_0 > v_0.$$

Аналогично можно найти

$$e_9 = \frac{a_0 - a_1}{2a_0^2}\left(a_0 e_s - v_0\right) + e_s > -e_s; \quad v_9 = -\frac{a_0 + a_1}{2a_0}\left(a_0 e_s - v_0\right) + v_0 > v_0;$$

$$e_{10} = \frac{2a_0^2 + a_0 a_1 - 3a_1^2}{2a_0^2 a_1}\left(a_0 e_s - v_0\right) + e_s > e_2;$$

$$v_{10} = -\frac{a_0 + a_1}{2a_0}\left(a_0 e_s - v_0\right) + v_0 > v_0.$$

Остаточная деформация $\tilde{e}$ и скорость $\tilde{v}$ в сечении $x = 0$ после отражения от него упругой волны, движущейся по области 10, соответственно равны:

$$\tilde{e} = \frac{a_0^2 - a_1^2}{a_0^2 a_1}\left(a_0 e_s - v_0\right); \quad \tilde{v} = \frac{a_0 - a_1}{a_0}\left(a_0 e_s - v_0\right) + 2v_0 > v_0.$$

Из последней формулы следует, что соударение стержня с преградой на этом заканчивается. Как видно из построений рис. 1.29, соударение в этом случае длится время $T = 4l/\left(a_0 + a_1\right)$. В стержне по-прежнему оказывается лишь одна зона остаточных деформаций.

Рассмотрим теперь случай, когда вправо от точки S распространяются как упругая, так и пластическая волна (рис. 1.30).

В областях 0, 1, 2, 3 значения скоростей и деформаций такие же, как и в предыдущем случае; в области 4, очевидно, $e_4 = -e_s$;

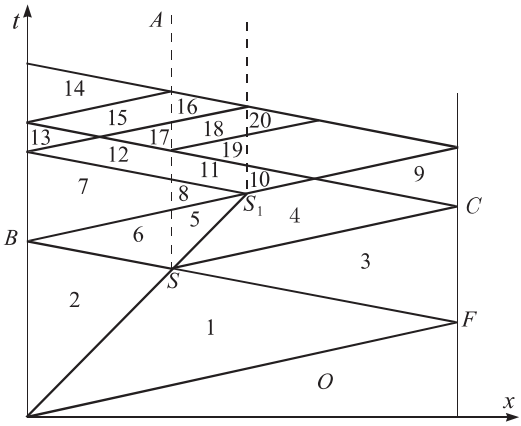


Рис. 1.30

$v_4 = 3a_0 e_s$. Из уравнений

$$v_6 = v_2 + a_0\left(e_6 - e_2\right),\ v_5 = v_4 - a_1\left(e_5 - e_4\right),\ v_6 = v_5,\ \sigma_6 = \sigma_5$$

найдем:

$$e_5 = \frac{3a_0^2 - a_1^2}{a_1\left(a_0 + a_1\right)} e_s - \frac{v_0}{a_1};\ e_6 = \frac{a_0^2 + a_1^2}{a_1\left(a_0 + a_1\right)} e_s - \frac{v_0}{a_1};\ v_5 = v_6 = \frac{2a_0 a_1}{a_0 + a_1} e_s + v_0.$$

Условия $e_2 < e_5 < -e_s$; $e_2 < e_6 < e_s$ приводят, как и следовало ожидать, к следующей оценке для скорости удара:

$$v_0 > \left(1 + \frac{2a_0}{a_0 + a_1}\right) a_0 e_s.$$

Можно показать, что окончание соударения в момент прихода волны разгрузки к сечению $x = 0$ при этом невозможно.

Если $a_0 / a_1 > 4{,}24$, то волна BS_1, отраженная от левого конца стержня, догонит пластическую волну SS_1 раньше, чем другая волна (картина на рис. 1.30 соответствует как раз этому случаю). При встрече волн BS_1 и SS_1 возникает второй стационарный фронт S_1 сильного разрыва по деформациям, влево от которого со скоростью a_0 движется волна разгрузки.

Предположим, что вправо от S_1 распространяется фронт упругой волны (см. рис. 1.30). Можно показать, что область 13

существует. Кроме того, легко установить, что при $a_0 / a_1 > 6,46$ отраженная от сечения $x = 0$ волна разгрузки достигает стационарный фронт S_1 быстрее, чем отраженная от правого конца стержня упругая волна (картина на рис. 1.30 относится к случаю $a_0 / a_1 > 6,46$). Найдем деформации и скорости в областях 7–20:

$$e_7 = \frac{4a_1}{a_0 + a_1} e_s + e_2 ; \quad v_7 = v_0 ; \quad e_8 = \frac{3a_0^2 + a_1^2}{a_1 \left(a_0 + a_1\right)} e_s - \frac{v_0}{a_1} ; \quad v_8 = v_0 ;$$

$$e_9 = 0 ; \quad v_9 = 4a_0 e_s ; \quad e_{10} = \frac{a_0 + a_1}{2a_0^2} \left(a_0 e_s - v_0\right) + \frac{2a_1}{a_0 + a_1} e_s ;$$

$$v_{10} = v_{11} = v_{12} = \frac{a_0 - a_1}{2a_0} \left(a_0 e_s - v_0\right) + \frac{a_0 - a_1}{a_0 + a_1} a_0 e_s + v_0 ;$$

$$e_{11} = \frac{2a_0^2 + a_0 a_1 - a_1^2}{2a_0^2 a_1} \left(a_0 e_s - v_0\right) + \frac{2a_0^2 e_s}{a_1 \left(a_0 + a_1\right)} ;$$

$$e_{12} = \frac{2a_0^2 + a_0 a_1 - a_1^2}{2a_0^2 a_1} \left(a_0 e_s - v_0\right) + \frac{2a_1}{a_0 + a_1} e_s ;$$

$$e_{13} = \frac{a_0^2 + a_0 a_1 - a_1^2}{a_0^2 a_1} \left(a_0 e_s - v_0\right) + e_s ; \quad v_{13} = v_{14} = v_0 ;$$

$$e_{14} = \frac{a_0^2 + a_0 a_1 - a_1^2}{a_0^2 a_1} \left(a_0 e_s - v_0\right) + \frac{2a_0^2 + a_0 a_1 - a_1^2}{a_1 \left(a_0 + a_1\right)} e_s ;$$

$$e_{15} = \frac{a_0 + a_1}{2a_0^2} \left(a_0 e_s - v_0\right) + \frac{a_0 + 3a_1}{a_0 + a_1} e_s ;$$

$$v_{15} = \frac{a_0 - a_1}{2a_0^2} \left(a_0 e_s - v_0\right) + \frac{2a_0^2}{a_0 + a_1} e_s + v_0 ; \quad e_{16} = \frac{1}{a_0} \left(a_0 e_s - v_0\right) + e_s ;$$

$$e_{17} = \frac{1}{a_0} \left(a_0 e_s - v_0\right) + 2e_s ; \quad v_{17} = v_{18} = v_{20} = a_0 e_s + v_0 ;$$

$$e_{18} = \frac{a_0^2 + a_0 a_1 - a_1^2}{a_0^2 a_1} \left(a_0 e_s - v_0\right) + \frac{2a_0}{a_1} e_s ;$$

$$e_{19}=0\,;\;\; v_{19}=-\frac{a_1}{a_0}\left(a_0e_s-v_0\right)+\frac{a_0\left(a_0-3a_1\right)}{a_0+a_1}e_s+v_0;$$

$$e_{20}=\frac{a_0^2+a_0a_1-a_1^2}{a_0^2a_1}\left(a_0e_s-v_0\right)+2e_s\,.$$

В тот момент, когда упругая волна, пройдя область 20, достигнет сечения $x=0$, возможен отскок стержня от преграды. Действительно, в этом случае

$$\tilde{e}=\frac{a_0^2-a_1^2}{a_0^2a_1}\left(a_0e_s-v_0\right);\;\; \tilde{v}=4a_0e_s\,.$$

Следовательно, при $v_0<4a_0e_s$ движение стержня и преграды как одного целого заканчивается областью 20.

Условие $e_{11}>-e_s$ приводит к ограничению на скорость удара:

$$v_0<\left[1+\frac{2a_0}{a_0+a_1}+\frac{4a_0a_1}{\left(a_0+a_1\right)^2}\right]a_0e_s.$$

Следующее ограничение на v_0 накладывается условием $e_{16}>-e_s$, откуда $v_0<3a_0e_s$. Это неравенство гарантирует выполнение указанных условий: $e_{14}>e_5$; $e_{17}>e_{16}$; $e_{18}>e_5$; $e_{20}>e_2$, т. е. дальнейшее разгружение частиц и отсутствие зон пластических деформаций.

Таким образом, при $a_0/a_1>6,46$ и $\left(1+2a_0/\left(a_0+a_1\right)\right)a_0e_s<$ $<v_0<3a_0e_s$ соударение заканчивается через время $T=4l/(a_0+a_1)$, причем в стержне оказываются две зоны пластических деформаций с координатами границ соответственно $x_{s_1}=2a_1l/(a_0+a_1)$; $x_{s_2}=2a_1l/(a_0-a_1)$. Остаточные деформации в этих зонах определяются формулами

$$\tilde{e}_1=\frac{a_0^2-a_1^2}{a_0^2a_1}(a_0e_s-v_0)\,;\;\; \tilde{e}_2=\tilde{e}_1+2\left(\frac{a_0}{a_1}-1\right)e_s\,.$$

Можно рассмотреть случаи больших скоростей удара, когда число участков, получающих различные остаточные деформации, увеличивается.

Для материала с линейным упрочнением в [22] использован графоаналитический метод характеристик. Суть метода проиллюстрируем на примере решения рассмотренной задачи. Следуя [22], вместо плоскости «напряжение σ – скорость v» вве-

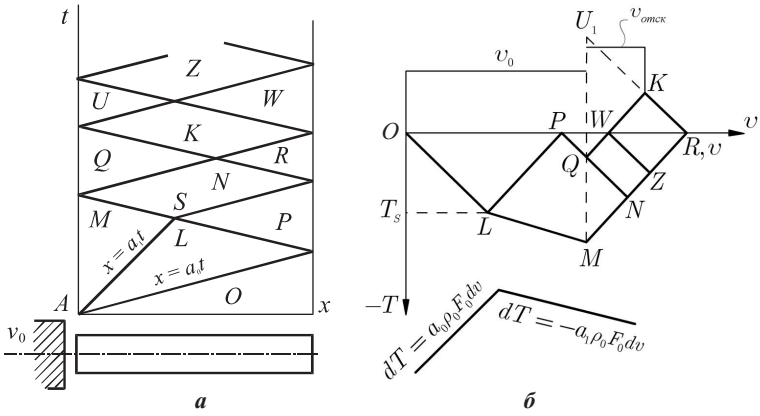


Рис. 1.31

дем в рассмотрение плоскость «сила T – скорость v» (рис. 1.31). Очевидно, при этом условия на характеристиках будут отличаться от использовавшихся ранее только заменой в них σ на T, a_0 и a_1 – на a_0F_0 и a_1F_0.

Области O на рис. 1.31, *а* соответствует начало координат в плоскости T, v (рис. 1.31, *б*), области L – точка L пересечения прямой $T = -T_s$ с характеристикой отрицательного направления, имеющей наклон $\rho_0 a_0 F_0$. Из рис. 1.31, *б* видно, в частности, что для появления пластических деформаций скорость удара v_0 должна быть больше величины $a_0 e_s$, так как в противном случае области M будет соответствовать некоторая точка отрезка OL. При $v_0 > a_0 e_s$ области M соответствует точка M пересечения прямой $v = v_0$ с характеристикой отрицательного направления, исходящей из точки L с наклоном $\rho_0 a_0 F_0$, области P – точка пересечения с осью Ov характеристики положительного направления с наклоном $\rho_0 a_0 F_0$.

Если величина силы T в точке N пересечения характеристик положительного и отрицательного направлений с наклоном $\rho_0 a_0 F_0$, исходящих соответственно из точек M и P, по абсолютной величине меньше T_s, то вправо от точки S распространяется только упругая волна (в соответствии с построениями на рис. 1.31).

Области Q на рис. 1.31, *а* соответствует на рис. 1.31, *б* точка Q пересечения характеристики PN с прямой $v = v_0$; области R –

точка R пересечения продолжения характеристики MN с осью Ov. Области U на рис. 1.31, *а*, вообще говоря, должна соответствовать точка U_1 пересечения с прямой $v = v_0$ характеристики отрицательного направления с наклоном $\rho_0 a_0 F_0$, исходящей из точки R на рис. 1.31, *б*.

Так как в области U сила оказалась положительной, что физически невозможно, то в момент появления этой области стержень отскочит от преграды. Поэтому напряжение в области U равно нулю (см. рис. 1.31, *б*), а скорость отскока определяется величиной скорости в области K. Если в точке N (см. рис. 1.31, *б*) сила по абсолютной величине окажется больше T_s, необходимо изменить способ нахождения этой точки и последующие построения, так как в этом случае вправо от S будет распространяться пластическая волна (рис. 1.32).

При этом области N_1 на рис. 1.32, *а* соответствует на рис. 1.32, *б* точка пересечения прямой $T = -T_s$ характеристикой отрицательного направления с наклоном $\rho_0 a_0 F_0$, исходящей из точки P, области N – точка N пересечения характеристик отрицательного и положительного направлений с наклонами $\rho_0 a_0 F_0$ и $\rho_0 a_0 F_0$ соответственно. Дальнейшие построения очевидны. Заметим, что различным областям плоскости x, t в координатах T, v соответствуют отдельные точки.

В [22] указанным способом рассмотрена также задача об ударе стержня из упругопластического материала с линейным

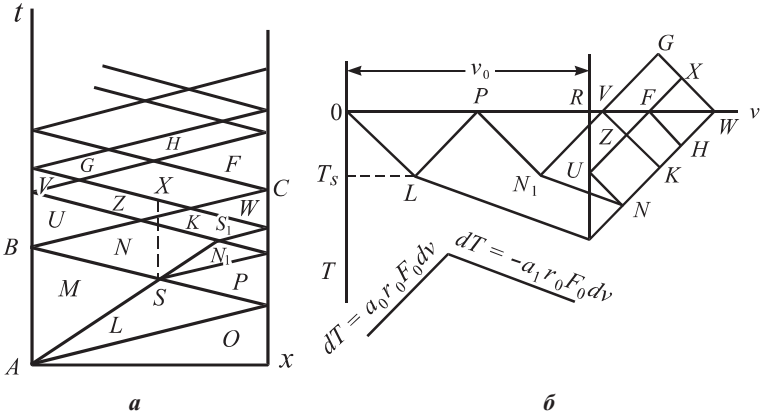


Рис. 1.32

упрочнением о вязкую преграду, когда скорость торца пропорциональна силе (областям плоскости x,t, прилегающим к ударяющему торцу стержня, в плоскости T,v соответствуют точки, лежащие на прямой $T = kv$).

До сих пор предполагалось, что материал стержня удовлетворяет схеме линейного упрочнения. Для случая, когда скорость удара такова, что стержень отскакивает от преграды после первого прихода к ней волны разгрузки, в [23] дано решение задачи в общем виде для упругопластического материала с произвольной зависимостью $\sigma = \Phi(e)$. Волновая картина движения при этом имеет вид, представленный на рис. 1.33. В областях OAB и ACB соответственно

$$\frac{x}{t} = a(u_x), \quad u_t = -\int_0^{u_x} a\,du_x,$$

$$u = F_1\left(a_0 t - x\right) + F_2\left(a_0 t + x\right) + f(x); \quad f(x) = \frac{1}{E}\int_0^x (\sigma_2 - Ee_2)dx,$$

где e_2 и σ_2 – абсолютные значения деформации и напряжения на волне разгрузки со стороны волны Римана.

Так как скорость волны разгрузки в рассматриваемом случае равна a_0, то в силу непрерывности на ней смещений получим

$$u_t - a_0 u_x = v_2 + a_0 e_2.$$

Отсюда

$$F_1'\left(2l - 2x\right) = \frac{v_2}{2a_0} + \frac{\sigma_2}{2E} = f_1(x). \tag{1.105}$$

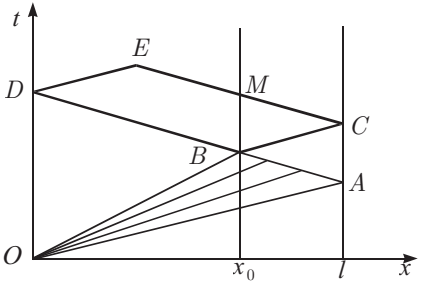


Рис. 1.33

На свободном конце стержня $x = l$, $\sigma_2 = Ee_s$, $e_2 = e_s$, поэтому

$$F_2'(a_0 t + l) = F_1'(a_0 t - l). \tag{1.106}$$

Из (1.105) и (1.106) находим

$$F_1'(z) = f_1(l - z/2); \quad F_2'(z) = F_1'(z - 2l) = f_1(2l - z/2).$$

Выражения для смещений в областях *BMC* и *BMED* соответственно таковы:

$$u = \Phi_1(a_0 t - x) + \Phi_2(a_0 t + x) + f(x), \quad u = \Phi_3(a_0 t - x) + \Phi_4(a_0 t + x).$$

Аналогично тому, как это сделано выше, найдем

$$\Phi_3'(2l - 2x) = (v_0 + a_0 e_m)/(2a_0). \tag{1.107}$$

Следовательно, $\Phi_3'(z)$ постоянно при $2l - 2x_0 \le z \le 2l$, т.е. вдоль *BD*. Из условия непрерывности смещений на *BC* имеем

$$u_t + a_0 u_x = \frac{\partial}{\partial t}\left[F_1(a_o t - x) + F_2(a_0 t + x) + f(x)\right] +$$

$$+ a_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[F_1(a_0 t - x) + F_2(a_0 t + x) + f(x)\right] =$$

$$= \left[2F_2'(a_0 t + x) + f'(x)\right] a_0 = a_0\left[2F_2'(2x + c) + f'(x)\right].$$

Аналогично:

$$u_t + a_0 u_x = a_0\left[2\Phi_2'(2x + c) + f'(x)\right].$$

Отсюда следует, что $\Phi_2'(2x + c) = F_2'(2x + c)$.

Условия непрерывности скоростей и деформаций на линии *BM*

$$\Phi_1'(a_0 t - x) + \Phi_2'(a_0 t - x) = \Phi_3'(a_0 t - x) + \Phi_4'(a_0 t - x),$$

$$\Phi_2'(a_0 t - x) - \Phi_1'(a_0 t - x) + \frac{\sigma_2 - Ee_2}{E} = \Phi_4'(a_0 t - x) - \Phi_3'(a_0 t - x),$$

дают (после сложения):

$$\Phi_4'(a_0 t + x_0) = \Phi_2'(a_0 t + x_0) + \frac{\sigma_m - Ee_m}{2E}.$$

Отсюда

$$\Phi_4'(2l) = \Phi_2'(2l) + \frac{\sigma_m - Ee_m}{2E} = f_1(l) + \frac{\sigma_m - Ee_m}{2E}.$$

Поскольку

$$f_1(l) = \frac{a_0 e_s}{2a_0} + \frac{Ee_s}{2E} = e_s,$$

то

$$\Phi_4'(2l) = e_s - \frac{e_m}{2} + \frac{\sigma_m}{2E}. \qquad (1.108)$$

Зная скорость и напряжение v_1, σ_1 в точке D области $BMED$, можно определить скорость v_3 конца стержня после отскока $v_3 = v_1 - \sigma_1/(\rho_0 a_0)$. Условием отскока стержня, очевидно, является неравенство $v_1 - \sigma_1/(\rho_0 a_0) > v_0$, которое с учетом предыдущих формул примет вид $v_0 \le 2a_0 e_s$.

Этот результат можно получить также следующим образом: на свободном конце скорость v_w находится из соотношения $v_w - v(A) = 0 - \sigma_s(A)/(\rho_0 a_0)$. Так как $v(A) = a_0 e_s = -\rho_0 a_0^2 e_s$, то $v_w = a_0 e_s + a_0 e_s = 2a_0 e_s$. Если после отражения волны разгрузки AD произойдет отскок стержня, то за точкой D $\sigma = 0$, и скорость свободного конца v_D находится из соотношении на характеристике отрицательного направления, проходящей параллельно и рядом с AD: $v_D - v_w = 0$, $v_D = v_w$, следовательно, при $v_0 < v_D = v_w = 2a_0 e_s$ стержень отскочит от преграды в момент отражения волны разгрузки от сечения $x = 0$.

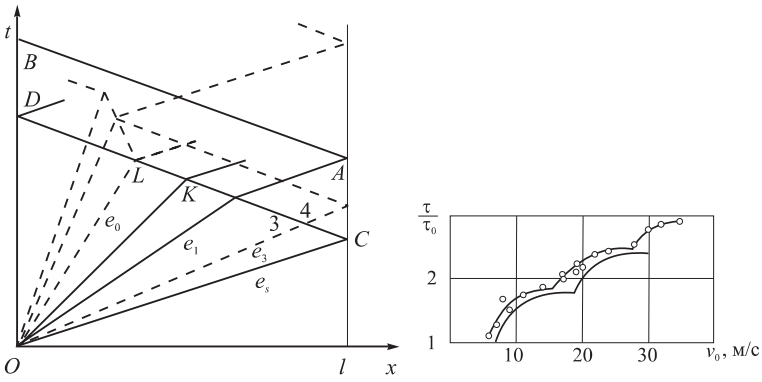
При $v_0 > 2a_0 e_s$ продолжительность соударения возрастает, причем вплоть до некоторого значения скорости v_0^* волна разгрузки, будучи фронтом разрыва скоростей и деформаций, движется со скоростью a_0.

Волновая картина для этого случая при растягивающем ударе показана сплошными линиями на рис. 1.34 [45]. При $v_0 > v_0^*$ разрыв параметров в некоторой точке L волны разгрузки исчезает, после чего ее скорость становится переменной (штриховая кривая, исходящая из L). Следуя [45], приведем решение для этих случаев.

Сначала определим скачок деформаций на волне разгрузки. Выберем на волне разгрузки точки 3, 4 (с координатами $x_3 = x_4$, $t_3 = t_4$) со стороны нагружения и разгрузки соответственно. Учитывая, что

$$v_4 - v_3 = (\sigma_4 - \sigma_3)/(\rho_0 a_0), \quad v_4 - v_C = -\sigma_4/(\rho_0 a_0),$$

$$v_C = 2a_0|e_s|, \; v_3 = \int_0^{|e_3|} a\,de, \; \sigma_3 - \sigma_4 = E(e_3 - e_4) = E\Delta e,$$



а *б*

Рис. 1.34

$$v_C - v_3 = v_C - v_4 + v_4 - v_3 = -\sigma_4 / (\rho_0 a_0) + \frac{\sigma_4 - \sigma_3}{\rho_0 a_0} = \frac{2\sigma_4 - \sigma_3}{\rho_0 a_0},$$

$$2\sigma_4 = \sigma_3 + \rho_0 a_0 (v_C - v_3),$$

получим:

$$E\Delta e = \sigma_3 - \sigma_4 = \frac{\sigma_3}{2} + \frac{\rho_0 a_0}{2}(v_3 - 2a_0 |e_s|)$$

или

$$\Delta e = -|e_s| + \frac{1}{2a_0}\int_0^{|e_3|} a\,d|e| - \frac{1}{2E}|\sigma_3| = -|e_s| + \frac{1}{2}\int_{|e_s|}^{|e_3|}\left(\frac{a}{a_0} - \frac{a^2}{a_0^2}\right)d|e|.$$

Для многих металлов (алюминий, медь, латунь) при некотором значении $e_3 = e_0$ имеем $\Delta e = 0$, и тогда можно определить режимы $v_0 < v_0^* = \int_0^{|e_0|} a\,d|e|$, при которых ударная волна разгрузки *CD* достигнет ударяемого торца. Если за ней не возникают повторно пластические деформации, продолжительность удара находим следующим образом. При некотором значении $e_3 = e_1$ скорость $v_A = v_0$. Но тогда соотношения на характеристике *AB* дают $\sigma_B = 0$. Этот момент будем считать концом удара. Начальная скорость при этом определяется соотношениями

$$v_0 - v_3 = -\sigma_3 / (\rho_0 a_0); \qquad v_0 = \int_0^{|e_1|} a\,d|e| + \frac{\sigma(|e_1|)}{\rho_0 a_0}.$$

Все сказанное выше имеет место и тогда, когда в точке L $\Delta e = 0$, но $|e_0| > |e_1|$. На рис. 1.34, *б* представлены кривые зависимости относительной продолжительности удара τ / τ_0 от скорости удара v_0 [45], теоретическая (сплошная) и экспериментальная (точки). Значение $\tau_0 = 2l / a_0$ соответствует продолжительности упругого удара.

Полученное решение справедливо для кривой $\sigma - e$, имеющей прямолинейный участок при $e \le e_s$ и удовлетворяющей условию $d^2\sigma / de^2 < 0$ при $e > e_s$. В [24] соответствующая задача решена для $d^2\sigma / de^2 \ge 0$ при $e > e_s$. Волновая картина для такого случая представлена на рис. 1.35 и 1.36; построения соответствуют скоростям удара 935 и 481 фут/с и выполнены для кри-

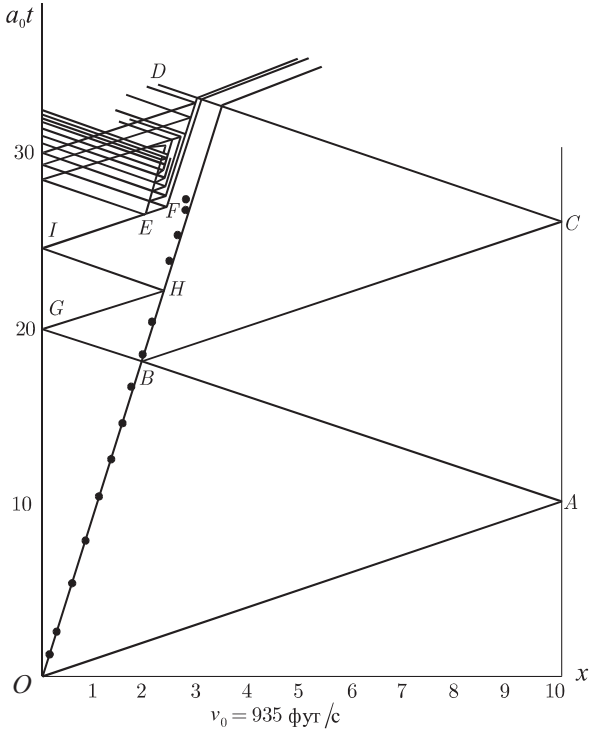


Рис. 1.35

вой $\sigma - e$, изображенной на рис. 1.37. Прямая *OA* соответствует упругой волне, прямая *OB* – пластической ударной волне. В области *OAB* (см. рис. 1.35) $\sigma = \sigma_s$ и $e = e_s$.

В момент встречи упругой волны разгрузки *AB* (см. рис. 1.35) с ударной волной *OB* происходит следующее. Влево от точки *B* распространяется упругая волна *BG*, приводящая к уменьшению пластических деформаций в область *BGH*. Поэтому скорость ударной волны на участке *BH* скачком принимает несколько уменьшенное новое постоянное значение, определяемое предложенным в §1.2 способом. Вправо от точки *B* снова распространяется упругая волна нагружения, за которой значения напряжений и деформаций равны соответственно σ_s и e_s.

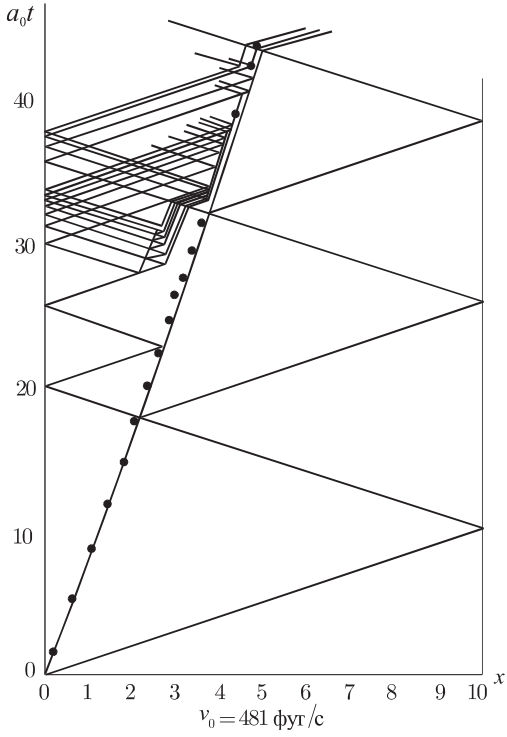


Рис. 1.36

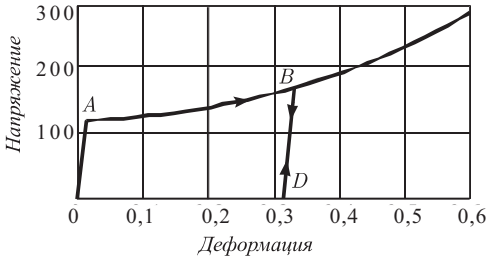


Рис. 1.37

После встречи упругой волны *GH* с ударной *BH* влево распространяется упругая волна, а вправо – ударная, имеющая иное, чем на участке *BH* постоянное значение скорости. Заметим, что частицы стержня в области $0 \le x \le x_B$ имеют более высокий, чем σ_s , предел упругости. Поэтому волна нагружения *IE* распространяется по области $0 \le x \le x_B$ со скоростью упругой волны; ударная пластическая волна возникает лишь в точке *E* с абсциссой $x_E = x_B$. Вторая ударная волна возникает в точке *F* с абсциссой $x_F = x_H$, ввиду разницы в характере нагружения областей $x_B \le x \le x_H$ и $x \ge x_H$. Дальнейшие построения, произведенные на рис. 1.35 и 1.36, очевидны.

2. ***Жесткопластический анализ остаточных деформаций в стержне при ударе им по твердой преграде.*** Суть метода заключается в замене части диаграммы $\sigma = \sigma(e)$ при $e < e_s$ условием $e = 0$, означающим, что при напряжениях $\sigma < \sigma_s$ упругий материал считается жестким, а при достижении значения σ_s и далее пластическим.

Один из основоположников этого метода А.А.Гвоздев при решении статических задач, по-видимому, впервые предложил применить жесткопластический анализ к динамическим задачам воздействия взрывных волн на конструкции [25]. При этом исследованию подлежал не сам процесс деформирования, а лишь остаточное состояние конструкции. Например, при падении груза массой *m* на вертикально стоящий стержень остаточное смещение последнего находилось путем применения теоремы живой силы к ударяющей массе:

$$md\frac{\dot{x}^2}{2} = \left(-mg + \sigma_s F_0\right)dx .$$

Отсюда после интегрирования имеем

$$m\frac{v_0^2}{2} = \left(-mg + F_0\sigma_s\right)\Delta_0, \quad \Delta_0 = \frac{s^2}{2m\left(F_0\sigma_s - mg\right)}.$$

Здесь v_0 – скорость удара; g – ускорение силы тяжести; $s = mv_0$ – начальный импульс; F_0 – площадь поперечного сечения; Δ_0 – остаточное смещение верхнего сечения стержня.

Д. Тейлор методом жесткопластического анализа исследовал характер распространения продольных волн в стержнях. Приводимые ниже результаты, полученные в [24] при решении задачи об ударе цилиндрического стержня о преграду, можно рассматривать как некоторое видоизменение выводов Тейлора.

В силу изложенного, часть стержня, до которой не дошла пластическая волна, ведет себя как жесткое тело. Обозначим абсолютную скорость этой части через u, а скорость распространения пластической волны от поверхности контакта цилиндра с преградой – через a. Часть стержня за фронтом этой волны остается в покое ввиду пренебрежения в жесткопластическом анализе упругими деформациями. Обозначив через F и σ, соответственно, площадь поперечного сечения стержня и условное напряжение за фронтом пластической волны, через F_0 и σ_s – те же характеристики перед этим фронтом, из условия несжимаемости получим

$$(u + a)F_0 = aF \tag{1.109}$$

или

$$e = \left(F - F_0\right)/F = u/(a + u), \tag{1.110}$$

где e – деформации за пластическим фронтом.

Если $x(t)$ – длина недеформированной части цилиндра в момент t, то, очевидно,

$$\frac{dx}{dt} = -\left(u + a\right). \tag{1.111}$$

Уравнение количества движения, примененное к частице, через которую проходит пластическая волна, запишется так:

$$\rho_0 u\left(u + a\right)\cdot F_0 = F_0\left(\sigma - \sigma_s\right). \tag{1.112}$$

Уравнение движения жесткой части цилиндра имеет вид

$$\rho_0 x\frac{du}{dt} = -\sigma_s. \tag{1.113}$$

Исключив dt из (1.111) и (1.113) и используя (1.110), получим:

$$\rho_0 x \frac{du}{dx} = \frac{\sigma_s}{u+a} = \frac{e\sigma_s}{u}.$$

Отсюда

$$d(\rho_0 u^2) = \frac{2\sigma_s e}{x} dx \tag{1.114}$$

или, согласно (1.110) и (1.112),

$$\ln x^2 = \Phi(\sigma) - \Phi(\sigma_1); \quad \Phi(\sigma) = \int_0^{\sigma} \frac{d\left[(\sigma - \sigma_s)e\right]}{\sigma_s e}. \tag{1.115}$$

Значение σ_1 определяется из соотношения

$$\rho_0 v_0^2 = (\sigma_1 - \sigma_s) e_1 \tag{1.116}$$

с помощью диаграммы «напряжение–деформация», которая предполагается известной.

В [24] проведено сопоставление результатов расчетов остаточных деформаций, выполненных на основе волновой теории и жесткопластического анализа. Расчеты проведены для диаграммы $\sigma - e$, представленной на рис. 1.37, и соответствующей статической диаграммы для $Ni - Cr$ стали.

Для указанного сорта стали разница между статической и динамической диаграммами, по мнению авторов [24], должна быть незначительной ввиду малой разницы в значениях статического и динамического пределов текучести. На рис. 1.35 и 1.36 изображен волновой процесс в стержне с диаграммой $\sigma - e$, представленной на рис. 1.37, при двух скоростях удара. Точками отмечена траектория фронта пластических деформаций, рассчитанная методом жесткопластического анализа. Как видно, совпадение результатов расчета обоими методами вполне удовлетворительно. На рис. 1.38 и 1.39 сопоставлены результаты соответствующих расчетов остаточных деформаций (штриховая линия – жесткопластический анализ). С увеличением скорости удара относительная ошибка при расчете на основе жесткопластического анализа уменьшается ввиду сокращения при этом относительной доли упругих деформаций в общих деформациях.

В [24] дано также сопоставление результатов расчета остаточных деформаций обоими способами с данными эксперимента.

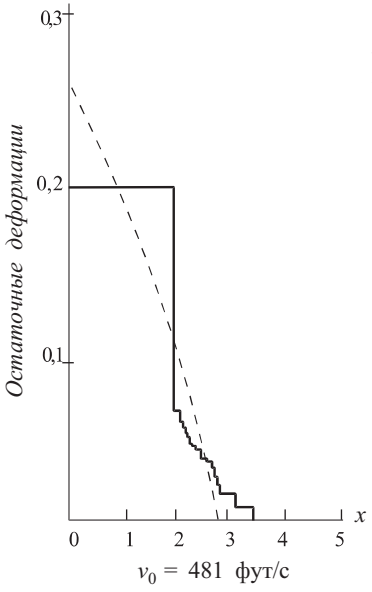


Рис. 1.38

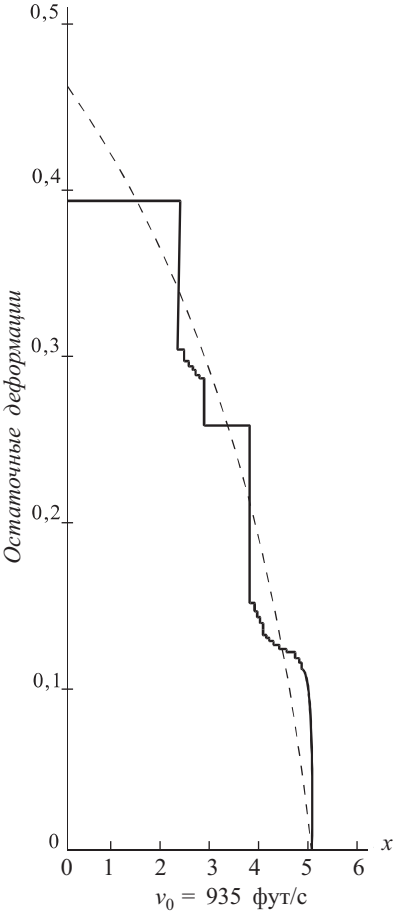


Рис. 1.39

Испытуемыми круговыми цилиндрами длиной 12,7 мм и диаметром 8,636 мм производился выстрел из пистолета по бронированной плите. Образцы после удара принимали форму, показанную на рис. 1.40. Форма образцов после удара сопоставлялась с расчетной. Результат такого сопоставления в увеличенном масштабе приведен на рис. 1.41 (небольшая разница между

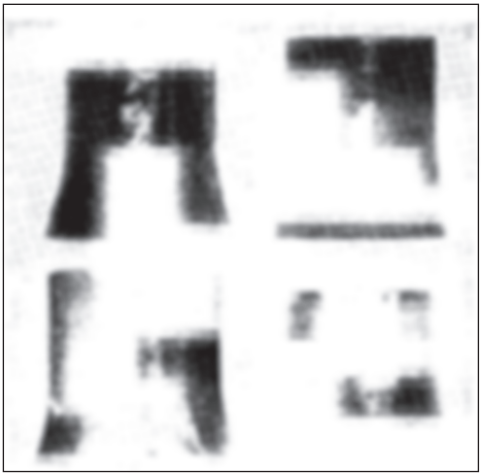


Рис. 1.40

расчетной и экспериментальной скоростями удара была обусловлена невозможностью обеспечить выстрел с требуемой скоростью). Расчет на основе жесткопластического анализа, как и следовало ожидать, дает несколько завышенное значение остаточных деформаций, так как вся энергия удара считается перешедшей в энергию пластического деформирования.

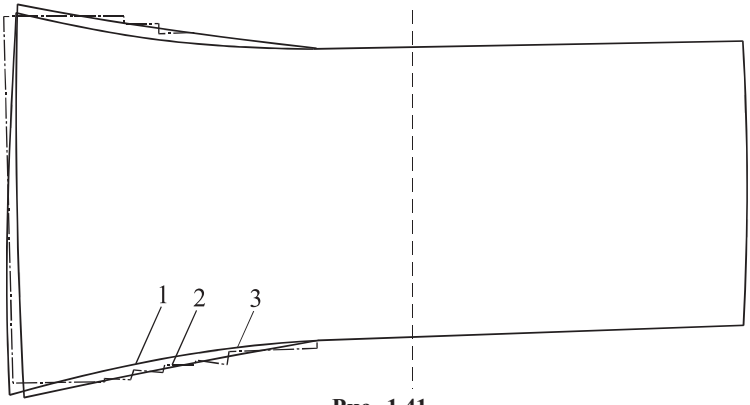


Рис. 1.41

3. ***Соударение деформируемых стержней.*** Пусть по полубесконечному стержню, материал которого характеризуется модулем Юнга E, модулем упрочнения E', пределом упругости e_s и плотностью ρ_0, производится удар стержнем конечной длины l, изготовленным из другого материала. Площади поперечных сечений обоих стержней будем считать одинаковыми, скорость удара v_0 – постоянной. В такой постановке эта задача рассмотрена в [26, 27].

Вначале исследуем простейший случай, когда скорость удара не столь велика, чтобы вызвать пластические деформации в каком-либо стержне. Схема распространения волн в этом случае представлена на рис. 1.42, где проставлены и номера соответствующих зон. Характеристики короткого стержня будем отмечать черточкой сверху. Очевидно, $\bar{v}_1 = v_0$, $\bar{e}_1 = e_1 = v_1 = 0$, $v_2 = -a_0 e_2$, $\bar{v}_2 = v_0 + \bar{a}_0 \bar{e}_2$, $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2$, $\bar{v}_2 = v_2$. Отсюда можно найти:

$$e_2 = -\frac{\bar{a}_0 \bar{\rho}_0 v_0}{a_0 A},\ v_2 = \bar{v}_2 = \frac{\bar{a}_0 \bar{\rho}_0 v_0}{A},\ \bar{e}_2 = -\frac{a_0 \rho_0 v_0}{\bar{a}_0 A};\quad A = a_0 \rho_0 + \bar{a}_0 \bar{\rho}_0.$$

Из условия $e_2 > -e_s$ получаем следующее ограничение на величину скорости удара:

$$v_0 < \frac{a_0 A}{\bar{a}_0 \bar{\rho}_0} e_s \ \text{ при } \ |\sigma_s| < |\bar{\sigma}_s|; \qquad v_0 < \frac{\bar{a}_0 A}{\bar{a}_0 \bar{\rho}_0} \bar{e}_s \ \text{ при } \ |\bar{\sigma}_s| < |\sigma_s|.$$

Определим $\bar{v}_3$:

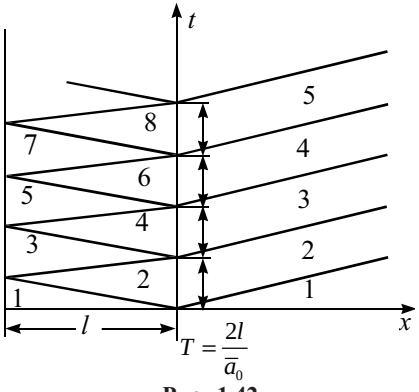


Рис. 1.42

$$\overline{v}_3 = \frac{v_0 B}{A}, \quad B = \overline{a}_0\overline{\rho}_0 - a_0\rho_0 .$$

По истечении времени $T = 2l / a_0$ возмущения, обусловленные скоростью $\overline{v}_0$, передадутся длинному стержню. Если предположить $e_3 = \overline{e}_4 = 0$ (напряжения в этих зонах отсутствуют), то для скоростей v_3 и $\overline{v}_4$ получим следующие выражения:

$$v_3 = 0; \quad \overline{v}_4 = \overline{v}_3 = \frac{\overline{a}_0\overline{\rho}_0 - a_0\rho_0}{\overline{a}_0\overline{\rho}_0 + a_0\rho_0} v_0 = \frac{B}{A} v_0 .$$

Следовательно, при $B = \overline{a}_0\overline{\rho}_0 - a_0\rho_0 < 0$ соударение стержней заканчивается по истечении времени $T = 2l / a_0$; при $B > 0$ процесс соударения к этому времени не закончится. В дальнейшем будем интересоваться последним случаем. Аналогично тому, как это сделано выше, определим следующие величины:

$$e_3 = \frac{B}{A} e_2 ; \quad \overline{e}_4 = \frac{B}{A}\overline{e}_2 ; \quad \overline{v}_3 = v_0 \left(\frac{B}{A}\right)^2 ; \quad \overline{v}_4 = v_3 = \frac{B}{A} v_2 ; \quad v_5 = \frac{B}{A} . \quad (1.117)$$

Рассматривая (1.117) как рекуррентные формулы, будем иметь:

$$v_4 = \left(\frac{B}{A}\right) v_3 = \left(\frac{B}{A}\right)^2 v_2 ; \quad e_4 = \left(\frac{B}{A}\right) e_3 = \left(\frac{B}{A}\right)^2 e_2 ;$$

$$\overline{v}_6 = \left(\frac{B}{A}\right)\overline{v}_4 = \left(\frac{B}{A}\right)^2 \overline{v}_2 ; \quad \overline{e}_6 = \left(\frac{B}{A}\right)\overline{e}_4 = \left(\frac{B}{A}\right)^2 \overline{e}_2 .$$

Вообще

$$v_{n+1} = \left(\frac{B}{A}\right)^{n-1} v_2 ; \quad \overline{v}_{2n} = \left(\frac{B}{A}\right)^{n-1} \overline{v}_2 ; \quad e_{n+1} = \left(\frac{B}{A}\right)^{n-1} e_2 ; \quad \overline{e}_{2n} = \left(\frac{B}{A}\right)^{n-1} \overline{e}_2 .$$

График падения давления p в месте соударения стержней изображен на рис. 1.43 (при $B = 0$ по истечении времени $T = 2l / a_0$ величина p падает до нуля, но стержни продолжают движение, оставаясь соединенными).

Рассмотрим более сложный случай, когда скорость удара v_0 и материал стержней таковы, что короткий стержень по-

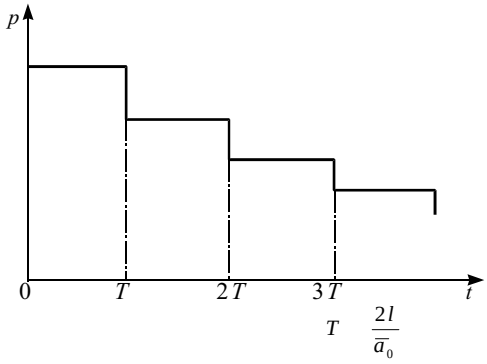


Рис. 1.43

прежнему деформируется упруго, а в длинном возникают пластические деформации. Волновая картина изображена на рис. 1.44. Используя соотношения на характеристиках и равенство скоростей и напряжений в областях 2 обоих стержней, получим:

$$\overline{e}_2 = -\frac{a_1\rho_0 v_0 + a_0\rho_0\left(a_0 - a_1\right)e_s}{C\overline{a}_0}; \quad e_2 = -e_s - \frac{v_0\overline{a}_0\overline{\rho}_0 - Aa_0 e_s}{Ca_1};$$

$$\overline{v}_2 = \frac{v_0\overline{a}_0\overline{\rho}_0 - a_0\rho_0\left(a_0 - a_1\right)e_s}{C}, \quad C = a_1\rho_0 + \overline{a}_0\overline{\rho}_0 \cdot$$

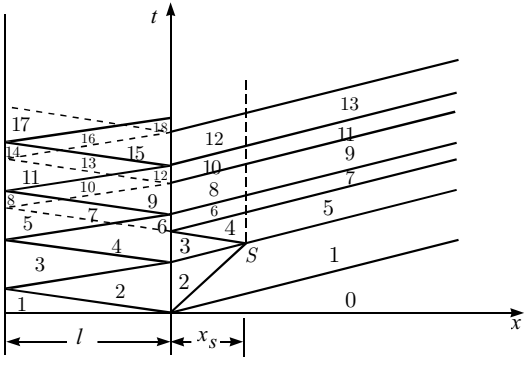


Рис. 1.44

Из условий $e_2 < -e_s$; $\bar{e}_2 > -\bar{e}_s$ находим диапазон изменения скорости удара, в котором реализуется рассматриваемый случай:

$$\frac{C\bar{a}_0\bar{e}_s - a_0\rho_0(a_0 - a_1)e_s}{a_1\rho_0} > v_0 > \frac{Aa_0}{\bar{a}_0\bar{\rho}_0}. \qquad (1.118)$$

Последнее неравенство справедливо, когда $\bar{\sigma}_s > \sigma_s$. Для величины $\bar{v}_3$ получим следующее выражение:

$$\bar{v}_3 = \frac{Dv_0 - 2a_0\rho_0(a_0 - a_1)e_s}{C}, \quad D = \bar{a}_0\bar{\rho}_0 - a_1\rho_0.$$

Предположение $\bar{\sigma}_4 = \sigma_3 = 0$ приводит к противоречию, следовательно, соударение стержней по истечении времени $T = 2l/a_0$ прекратиться не может. В момент $T = 2l/a_0$ в месте соударения стержней скачком уменьшается давление, что приводит к возникновению в длинном стержне волны разгрузки. Как следует из изложенного выше, скорость волны разгрузки в данном случае постоянна и равна a_0. Учитывая это, найдем:

$$\bar{e}_4 = \frac{-\rho_0 B(a_1 v_0 + a_0^2 e_s - a_0 a_1 e_s)}{ACa_0};$$

$$\bar{v}_4 = v_3 = \frac{\bar{a}_0\bar{\rho}_0(\bar{a}_0\bar{\rho}_0 - 2a_1\rho_0 + a_0\rho_0)v_0}{AC} - \frac{\rho_0(a_0 - a_1)(3\bar{a}_0\bar{\rho}_0 + a_0\rho_0)a_0 e_s}{AC}.$$

Легко видеть, что $\bar{e}_2 < \bar{e}_4$; $e_2 < e_3$.

Координаты точки возникновения стационарного фронта сильного разрыва по деформациям, образующегося при встрече волны разгрузки с пластической волной, следующие:

$$x_s = \frac{a_0 a_1}{a_0 - a_1}t_1; \; T = \frac{a_0}{a_0 - a_1}t_1 \quad \left(t_1 = \frac{2l}{\bar{a}_0}\right).$$

Предположим вначале, что вправо от S движется только упругая волна. Тогда нетрудно определить значения скоростей и деформаций v_4, v_5, e_4, e_5 по обе стороны от фронта стационарного разрыва. Условие $e_5 > -e_s$ накладывает следующее ограничение на скорость удара:

$$v_0 < \frac{(a_0^3\rho_0^2 + a_0^2 a_1\rho_0^2 - 2\bar{a}_0 a_0 a_1\rho_0\bar{\rho}_0 + 6a_0^2\bar{a}_0\rho_0\bar{\rho}_0 + \bar{a}_0^2 a_0\bar{\rho}_0^2 + \bar{a}_0^2 a_1\bar{\rho}_0^2)a_0 e_s}{\bar{a}_0\bar{\rho}_0(a_0^2\rho_0 + a_0\bar{a}_0\bar{\rho}_0 + \bar{a}_0 a_1\bar{\rho}_0 - 3a_0 a_1\rho_0)}. \qquad (1.119)$$

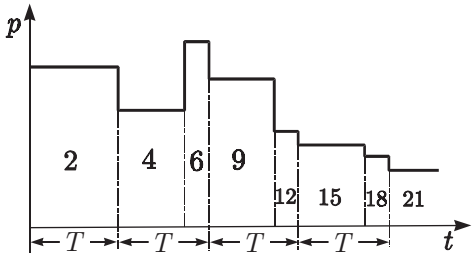


Рис. 1.45

При $a_0 > 3a_1$ возникающая в точке S волна разгрузки придет к месту соударения раньше, чем отраженная от свободного конца короткого стержня упругая волна. Для этого случая (которому удовлетворяет большинство встречающихся в практике материалов) картина распространения волн приведена на рис. 1.44. Вычисления показывают, что соударения стержней при этой схеме никогда не прекращаются: начиная с области 6 давление в месте соударения скачкообразно уменьшается, асимптотически стремясь к нулю (рис. 1.45).

Если величина v_0 превосходит значение, определяемое неравенством (1.119), то вправо от S будет распространяться пластическая волна. В длинном стержне возникает второй стационарный фронт разрыва по деформациям и вторая зона остаточных деформаций. Длина этой зоны

$$x_{s'} = \frac{a_0 a_1 (a_0 + a_1) \cdot 2l}{\bar{a}\,(a_0 - a_1)^2}\,.$$

Процесс соударения при этом никогда не заканчивается; схема распространения волн изображена на рис. 1.46 (для $a_0 / a_1 > 3$).

Если скорость удара столь велика, что неравенство (1.118) не выполняется, в коротком стержне, как и в длинном, будут распространяться упругопластические волны (рис. 1.47). Вычисления, в которых для упрощения выкладок принято, что материал обоих стержней одинаков, приводят к следующим выражениям:

$$\bar{e}_2 = e_2 = -e_s + (2a_0 e_s - v_0)/(2a_1)\,; \quad \bar{v}_2 = v_2 = v_0/2\,;$$

$$e_3 = 0\,; \quad \bar{v}_3 = v_0 - 2a_0 e_s\,; \qquad \bar{e}_4 = \frac{a_0 + a_1}{4a_0^2}(2a_0 e_s - v_0)\,;$$

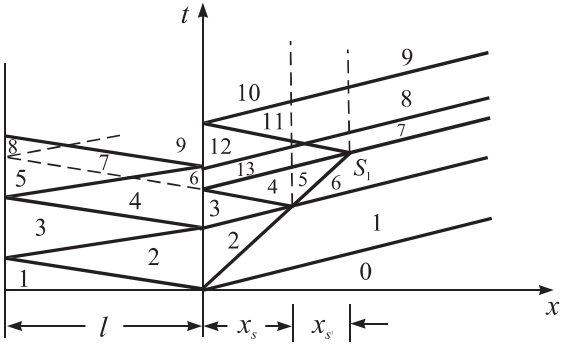


Рис. 1.46

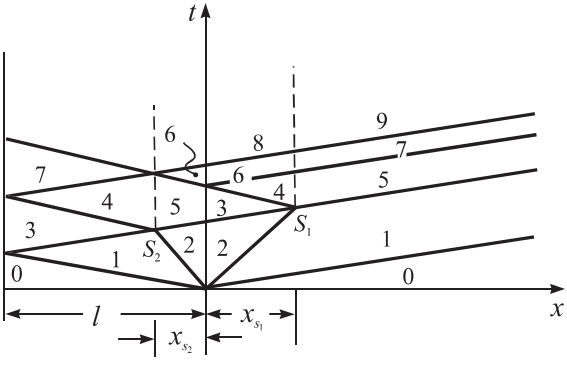


Рис. 1.47

$$\overline{v}_4 = \frac{3a_0 - a_1}{4a_0}\left(v_0 - 2a_0 e_s\right); \quad e_4 = (a_0^2 + a_0 a_1 - a_1^2)(2a_0 e_s - v_0)\big/(2a_0^2 a_1);$$

$$v_4 = v_5 = \left(-2a_0 e_s + v_0\right)/2; \qquad e_5 = \left(2a_0 e_s - v_0\right)/(2a_0).$$

Эти формулы справедливы для скорости удара v_0, удовлетворяющей неравенству

$$2a_0 e_s < v_0 < 4a_0 e_s, \tag{1.120}$$

которое обеспечивает невозникновение пластических волн в моменты образования обоих стационарных фронтов сильного разрыва по деформациям (см. рис. 1.47).

Вычисления показывают, что соударение при этом не заканчивается. Стержни не давят друг на друга, но и не отходят друг от друга, короткий стержень как бы «прилипает» к длинному.

При $4a_0e_s < v_0 < [1+2a_0/(a_0+a_1)]\cdot 2a_0e_s$ от точки S_2 по-прежнему будет распространяться упругая, а от S_1 пластическая волна нагружения; в длинном стержне возникает второй (а иногда и большее количество) стационарный фронт разрыва по деформациям. Как и прежде, короткий стержень не отскакивает от длинного. Если скорость удара $v_0 > [1+2a_0/(a_0+a_1)]\cdot 2a_0e_s$, то в коротком стержне от точки S_2 будет распространяться пластическая волна, приводящая к появлению в нем двух или большего числа зон остаточных деформаций. В длинном стержне таких зон будет еще больше.

Здесь также нет конца соударения. Процесс затухает, и стержни «прилипают» друг к другу. Аналогичным способом можно решить задачу об ударе упругопластическим стержнем длины l по полубесконечному упругому телу. Эта задача рассмотрена в [27]. Исследование задач соударения стержней, материал которых удовлетворяет схеме линейного упрочнения, удобно проводить графоаналитическим методом с использованием соответствия плоскостей x,t и T,v по аналогии с задачами, рассмотренными выше. Исследование такого рода было выполнено в [22] для задачи об ударе цилиндрических стержней различных площадей поперечного сечения и различных механических свойств. В этой работе был исследован также процесс деформирования стержня при многократных ударах путем рассмотрения однократно деформированного стержня, состоящего из двух разнородных по упругим свойствам частей.

4. ***Соударение цилиндрических стержней, один из которых – упругий, а другой – упругопластический, с произвольной диаграммой*** $\sigma - e$**.** Предполагается, что площади поперечных сечений, модули упругости и плотности обоих стержней одинаковы, так что они различаются между собой только значениями пределов упругости. Эти предположения легко обеспечить, если изготовить оба стержня из одинакового материала, а затем один из них закалить. Очевидно, необходимо потребовать выполнения неравенства

$$2a_0e_s > v_0 > 2a_0e_s\,.$$

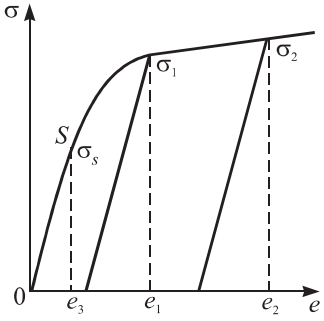


Рис. 1.48

Предполагается, что диаграмма $\sigma - e$ может быть представлена в виде двух прямолинейных участков и сопрягающей их криволинейной части (рис. 1.48). Решение поставленной задачи дано в [28], волновая картина изображена на рис. 1.49. В силу сделанных предположений отраженная от свободного конца упругого стержня волна $B'O_1$ проходит без изменения в упругопластический стержень. Следовательно, напряжение за волной $B'C$ равно нулю, и для упруго-пластического стержня мы приходим к задаче о внезапном приложении напряжения, остающегося постоянным в течение времени $t = OO_1$ и затем внезапно падающего до нуля.

В силу характера диаграммы $\sigma - e$ волна Римана начинается и заканчивается волнами сильного разрыва: на головной волне,

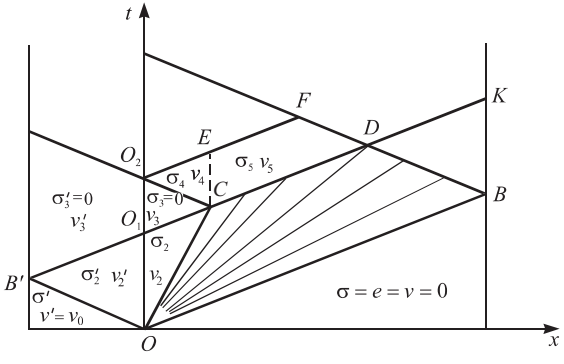


Рис. 1.49

движущейся со скоростью a_0, напряжения и деформации скачкообразно принимают значения e_s и σ_s; на хвостовой волне, движущейся со скоростью a_1, напряжения и деформации скачком изменяют свои значения от σ_1, e_1 до σ_2, e_2 (см. рис. 1.48 и 1.49).

Определение скоростей и напряжений в областях $OB'O_1$ и OO_1C не представляет труда. За фронтом упругой волны O_1C скорость

$$v_3 = \left[-2\sigma_1 + 2a_1\rho_0 v_1 + \rho_0 v_0 (a_0 - a_1)\right] / \left[\rho_0 (a_0 + a_1)\right].$$

Очевидно, точка C является стационарным фронтом разрыва по деформациям (который исчезает при отсутствии участка упрочнения на диаграмме $\sigma - e$).

Если $\sigma_{4,C} < \sigma_1$, то напряжение, возникшее после встречи волн сильного разрыва, не достигнет нового предела упругости, равного σ_1, и волны CO_2 и CD будут распространяться со скоростью a_0. В этом случае

$$v_{4,C} = \frac{v_3 + v_1}{2} - \frac{\sigma_1}{2a_0\rho_0}; \quad \sigma_{4,C} = \frac{a_0\rho_0\left(v_3 - v_1\right)}{2} + \frac{\sigma_1}{2}.$$

Тогда на скорость удара v_0 должно быть наложено условие $v_0 < v_0^*$, где значение v_0^* соответствует условию $\sigma_{4,C} = \sigma_1$:

$$v_0^* = v_1 + \frac{\sigma_1}{a_0\rho_0}\frac{3a_0 + a_1}{a_0 - a_1}.$$

Будем считать, что распространяющаяся вправо от точки C со скоростью a_0 волна разгрузки не истощается вплоть до встречи в точке D с волной растяжения, отраженной от свободного конца стержня.

Определение характеристик в областях CO_2E, $CEFD$ и BDK не представляет труда. Условие истощения волны разгрузки, очевидно, таково:

$$\Delta e = e_5 - e = 0 \text{ или } \int_0^e a\,de + \frac{\sigma}{a_0\rho_0} = v_3.$$

Используя выражение для v_3, условие истощения волны разгрузки в точке D запишем в виде:

$$v_{0D} = \frac{2a_0}{a_0 - a_1}v_s + \frac{a_0 + a_1}{a_0\left(a_0 - a_1\right)}\int_{e_s}^{e_D} a\left(a_0 + a\right)de + \frac{2}{a_0 - a_1}\int_{e_s}^{e_1} a\left(a - a_1\right)de.$$

§1.7. Удар твердым телом конечной массы по закрепленному стержню

Сен-Венан на основе одномерной волновой теории получил точное решение этой задачи для упругого удара [46], причем зависимость продолжительности удара от отношения масс стержня и тела оказалась разрывной.

Материал этого параграфа базируется на работе [47], где наряду с объяснением причины этой разрывности, обнаружена возможность повторного соударения с телом, а также приведено решение в случае упругопластического удара.

Волновая картина при упругом ударе приведена на рис. 1.50. Так как до удара стержень не деформирован, то $v_2 = -a_0 e_2$ и уравнение движения тела на участке *OB* имеет вид:

$$m\frac{dv}{dt} = -F_0 E v / a_0 = F_0 \sigma ; \qquad \frac{dv}{d\tau} = -\lambda v .$$

Здесь $\tau = t / t_0$, $t_0 = l / a_0$, $\lambda = F_0 \rho l / m = M / m$, m и M – массы тела и стержня соответственно. При $0 < \tau < 2$ $v = v_0 e^{-\lambda t}$; $\sigma = \sigma_0 e^{-\lambda t}$; $\sigma_0 = -\rho a_0 v_0$, где v_0 – начальная скорость тела в момент удара. На характеристиках 2–3, 3–4 имеем:

$$-v_2 = a_0 \left(e_3 - e_2\right); \quad a_0 e_3 = -2v_2 ; \quad v_4 = -a_0 \left(e_4 - e_3\right) = -a_0 e_4 - 2v_2 .$$

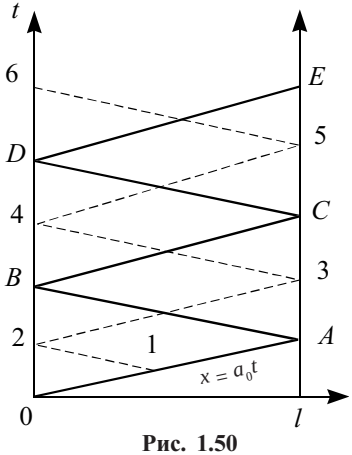


Рис. 1.50

Уравнение движения на участке BD имеет вид

$$m\left(\frac{dv}{dt}\right)_4 = F_0\sigma_4 = \frac{F_0E}{a_0}\left(-v_4 - 2v_2\right); \quad \frac{dv}{d\tau} = -\lambda v - 2v_0\lambda e^{-\lambda(\tau-2)}, \quad (1.121)$$

так как $t_2 = t_4 - 2t_0$.

При любом ограниченном значении v ускорение dv/dt ограничено, поэтому скорость в точке B непрерывна и равна $v(2) = v_0 e^{-2\lambda}$. Отрицательное ускорение $dv/d\tau$ в точке B за счет прихода отраженной от крепления $x = l$ волны сжатия скачком увеличивается на $-2v_0\lambda$, приводя к дополнительному торможению тела. Интегрируя уравнение (1.121), найдем, что при $2 < \tau < 4$

$$v = v_0\left(e^{-2\lambda} + 4\lambda - 2\lambda\tau\right)e^{-\lambda(2-\tau)}; \sigma = \sigma_0\left(e^{-2\lambda} + 4\lambda + 2 - 2\lambda\tau\right)e^{-\lambda(2-\tau)}. \quad (1.122)$$

Отсюда видно, что при некотором значении $\tau_y \le 4$ напряжение может обратиться в нуль:

$$\tau_y = 2 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda}e^{-2\lambda}, \quad (1.123)$$

а до этого момента скорость изменит знак.

Очевидно, $\tau_y = 2$ при $\lambda = \infty$ и растет с уменьшением λ. При $\tau_y = 4$ значение $\lambda = \lambda_1$ находится из уравнения

$$1 + \left(2 - 4\lambda_1\right)e^{2\lambda_1} = 0; \quad \lambda_1 = 0{,}5786. \quad (1.124)$$

Однако отскок при $\lambda = \lambda_1$, соответствующем $\tau_y = 4$, не происходит, так как в этот момент к точке D приходит волна сжатия. В самом деле, соотношения на характеристиках 4–5, 5–6 дают

$$v_6 = -a_0\left(e_6 - e_5\right); \quad v_4 = -a_0\left(e_5 - e_4\right);$$

$$v_6 = -a_0e_6 + a_0e_4 - v_4 = -a_0e_6 - 2v_2 - 2v_4 = -a_0e_6 - 2v(\tau - 2) - 2v(\tau - 4).$$

Так как скорости в точках B и D непрерывны, то

$$a_0e_6(D) = -v_6(D) - 2v_2(0) - 2v_4(B); \quad a_0e_4(D) = -v_4(D) - 2v_2(B),$$

откуда

$$a_0e_6(D) - a_0e_4(D) = -2v_2(0) = -2v_0.$$

Аналогично (1.122) может быть получен закон изменения $v(\tau)$, $\sigma(\tau)$ при $4 < \tau < 6$, в частности:

$$\sigma = \sigma_0 \left(e^{-4\lambda} + 4\lambda e^{-2\lambda} + 24\lambda + 32\lambda^2 - 2\tau\lambda e^{-2\lambda} - \right.$$
$$\left. -6\lambda\tau - 16\lambda^2\tau + 2\lambda^2\tau^2 + 2e^{-2\lambda} + 2 \right) e^{\lambda(4-\tau)}.$$

Приравнивая напряжение в этой формуле к нулю при $\lambda = \lambda_1$, определяем время отскока

$$\tau_y = 6 + \lambda_1^{-1}/2 - \left(4 + 2\lambda_1^{-1} - 3/4 \cdot \lambda_1^{-2}\right)^{1/2} = 4{,}5804 .$$

Сюда, с учетом (1.124) убеждаемся, что при $\lambda \to \lambda_1$ безразмерная продолжительность удара скачком изменяется от 4 до 4,5804. Следующий разрыв продолжительность τ терпит при $\lambda = \lambda_2 = 0{,}2409$ ($\tau_y = 6$ и $\tau_y = 6{,}708$ соответственно).

Характер изменения скоростей торца стержня и тела при $\lambda > \lambda_1$ изображен на рис. 1.51.

До момента отскока τ_y эти скорости совпадают, при $\tau > \tau_y$ скорость тела v_1 постоянна, а скорость стержня (штриховая кривая), которая определяется из соотношений на характеристиках 2–3 и 3–4 при $e_4 = 0$, равна $v_4 = -2v_2$ и убывает до $\tau = 4$. Максимальное расстояние d, на которое отходит тело от стержня после момента τ_y, определяется по формуле

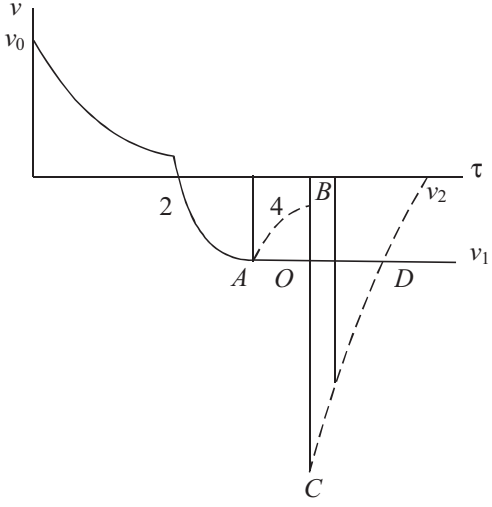


Рис. 1.51

$$d = 2l\left(\frac{e^{-2\lambda}}{\lambda} + \left(2 - \frac{e^{-2\lambda}}{2\lambda} - \frac{2}{\lambda}\right)e^{\lambda(2-\tau)}\right)\frac{v_0}{a_0}.$$

При $\tau > 4$ скорость стержня можно найти по формуле $v_6 = -2v_4 - 2v_2$ (при $e_6 = 0$); при $\tau = 4$ она скачком уменьшается на $2v_0$ и далее будет расти.

При $0,5786 < \lambda < 1,0091$ площадь криволинейного треугольника *ABO* меньше площади *OCD*, поэтому стержень успевает нагнать тело и осуществить повторное соударение. Продолжительность разрыва контакта Δt вычисляется из условия $\Delta t = (\tau_y - \tau^*)t_0$, где τ^* удовлетворяет уравнению

$$e^{-2\lambda} + e^{-\lambda(\tau^*-2)}(e^{-2\lambda} - 1 + 2\lambda(4 - \tau^*)) + \lambda\tau^* e^{-\lambda\tau_y} = (\lambda\tau_y + 1)e^{-\lambda\tau_y}.$$

Зависимость $\Delta\tau = \tau_y - \tau^*$ от λ приведена на рис. 1.52, причем, очевидно, что $\Delta\tau = 0$ при $\lambda = 5,786$. Аналогично проводится анализ вблизи других критических значений. Эксперименты, описанные в [47], подтвердили продолжительность τ_y при $\lambda = \lambda_1 = 0,5786$ и резкое сокращение времени τ_y (до 3,1–3,2) при небольшом увеличении λ (до 0,667).

Там же методом характеристик с использованием ЭВМ решена соответствующая задача для стержня, материал которого удовлетворяет схеме Прандтля, а начальная скорость тела $v_0 > v_s = -a_0 e_s$. Волновая картина, соответствующая случаю умеренных скоростей удара, когда пластическая волна *OD* вырождается до встречи с отраженной от торца пластической волной *NF* ($x_D < x_F$), приведена на рис. 1.53.

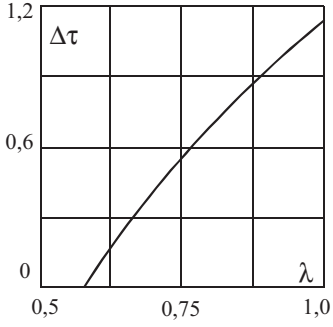


Рис. 1.52

Так как в области $ONQD$ $e = e_s$, то интенсивность отраженной от $x = l$ упругой волны, за которой в области однородных параметров NQF также имеем $e = e_s$, будет нулевой. Поэтому в области $ONFE_0$ решение совпадает с полученным ранее для удара по неограниченному стержню, в области NFM_0 частицы неподвижны и $\sigma = \sigma_s(1 + a_1 / a_0)$.

На участке E_0E движение происходит под влиянием волн, отраженных от пластического фронта FK. В точке 2 напряжение $\sigma_2 = \sigma_s$ для случая, изображенного на рис. 1.53, и $\sigma_2 = \sigma_s^*$, где σ_s^* – новый предел упругости для случая $x_2 < x_D$ (когда пластическая волна FK попадает в область за волной разгрузки OD). Разгрузка за волной FK является следствием уменьшения со временем интенсивности упругих волн, исходящих от места удара, а следовательно, и отраженных волн. Вычисления показывают, что на E_0E напряжение возрастает, на EE_1 – убывает, но не обращается в нуль. Начиная с некоторой скорости v_0 возможен отскок тела, он начинается вблизи E_1 и с ростом v_0 перемещается к E_2. В случае отскока вблизи E_2 происходит повторное соударение, причем продолжительность контакта тем меньше, чем ближе момент отскока к точке E_2. При достижении

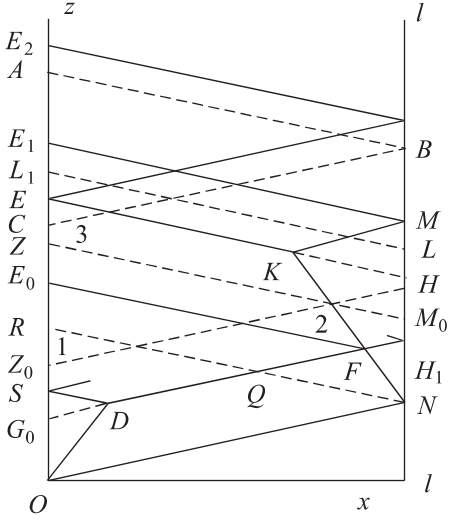


Рис. 1.53

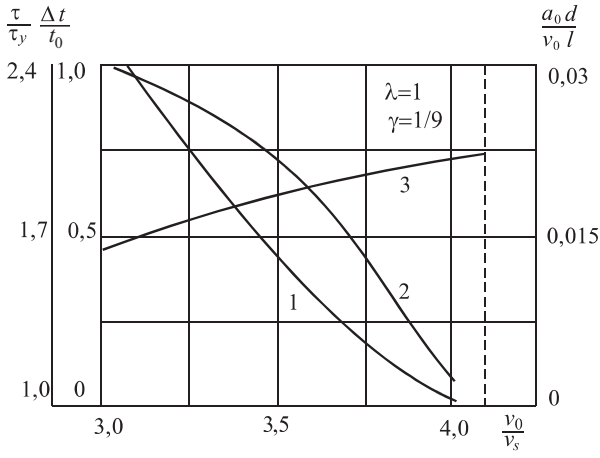


Рис. 1.54

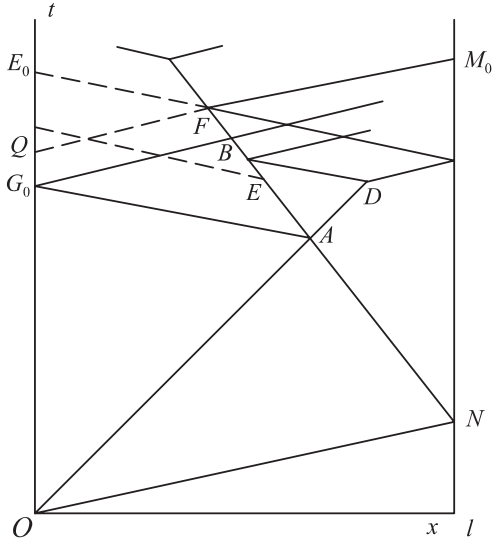


Рис. 1.55

им точки E_2 происходит скачкообразное увеличение продолжительности удара, так как в этот момент подходит волна сжатия, в результате чего тело отскочит несколько выше E_2.

На рис. 1.54 приведены кривые: безразмерной продолжительности удара τ/τ_y (кривая 1); продолжительности разрыва контакта $\Delta t/t_0$ (кривая 2) и максимального расстояния отхода (кривая 3) в зависимости от относительной скорости удара v_0/v_s. В случае $\gamma = 1/9$ разрыв t/t_y имеет место при $v_0/v_s = 4{,}99$ для $\lambda = 1{,}1$, при $v_0/v_s = 3{,}09$ для $\lambda = 0{,}9$ и не наступает при меньших значениях λ. Столкновение пластических волн *OD* и *NF*, соответствующее большим значениям начальной скорости и массы тела, иллюстрирует рис. 1.55.

§ 1.8. Приближенный метод исследования волнового процесса в затупленном стержне при продольном ударе

Эксперимент показывает, что обеспечение соосности при ударе стержней представляет сложную проблему, а небольшая несоосность приводит, например, к изменению времени отлета стержней из-за неплоскостности поверхностей соударяющихся торцов [38].

Имеется также много конструктивных узлов, работающих в ударном режиме (например, строительные сваи) и имеющих вид затупленных стержней. Для определения волновых процессов в этих случаях предлагается всюду использовать одномерный подход, за исключением затупления, напряжения и деформации в котором находятся по теории Герца в предположении квазистатичности этого участка стержня. Существо метода проиллюстрируем на примере решения двух задач.

1. Удар упругой плитой со скоростью v_0 по стержню, состоящему из цилиндрической части (радиуса R и длины l) и сферического затупления (рис. 1.56). Ось x направим по оси стержня в направлении удара, причем за $x = 0$ примем сечение, где цилиндрическая часть переходит в сферическую (x – лагранжева координата). До момента $t_0 = 2l/a_0$ скорость v_w и деформация e_w в сечении $x = 0$ связаны соотношением

$$v_w = -\int_0^{e_w} a\,de, \qquad (1.125)$$

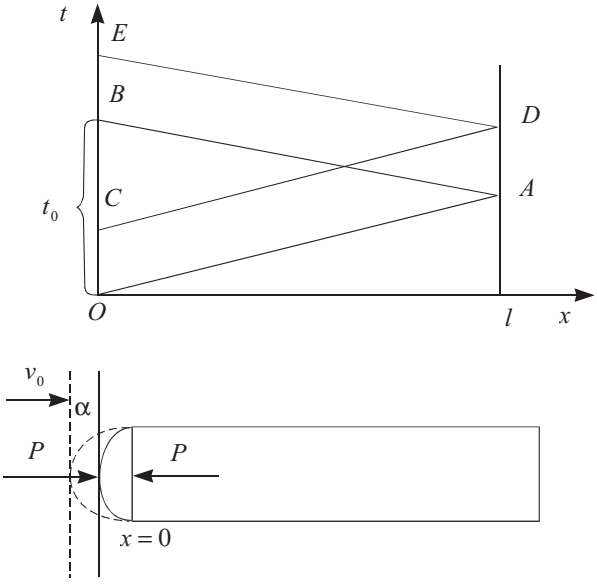


Рис. 1.56

где $a(e)$ – скорость звука в материале стержня $a_0 = a(0)$. Если обозначить через $\alpha(t)$ сближение затупления (сечения $x = 0$) с преградой, то в соответствии с теорией Герца сила сжатия затупления $P = \varphi(\alpha)$ [48]. Равенство сил и скоростей в сечении $x = 0$ приводит к условиям

$$P = -F_0\sigma_w = -F_0\Phi(e_w)\ ;\ v_w = v_0 - \dot{\alpha}, \qquad (1.126)$$

где $\sigma = \Phi(e)$ – диаграмма «напряжение – деформация»; F_0 – площадь сечения (в данном случае $F_0 = \pi R^2$).

Соотношения (1.125) – (1.126) приводят к обыкновенному дифференциальному уравнению $\dot{\alpha} = f(\alpha)$, которое решается при условии, что в момент касания стержня преградой $(t = 0)$ $\alpha = 0$, откуда $P = \sigma_w = e_w = v_w = 0$, $\dot{\alpha}(0) = v_0$.

Для упругого удара $\varphi(\alpha) = na^{3/2}$, $v_w = -a_0 e_w$, $\Phi(e_w) = Ee_w$, $n = \dfrac{4\sqrt{R}}{3\pi\left(k_1 + k_2\right)}$, и мы приходим к уравнению

$$\dot{\alpha} = v_0 - \gamma\alpha^{3/2}, \quad \gamma = \frac{na_0}{EF_0} \tag{1.127}$$

или

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \overline{v}_0 - \gamma_1\beta^{1/2}, \tag{1.127'}$$

где $\beta = \dfrac{\alpha}{R}$, $\tau = \dfrac{a_0 t}{R}$, $\overline{v}_0 = \dfrac{v_0}{a_0}$, $\gamma_1 = \dfrac{n}{EF_0}$, $k_1 = \dfrac{1-\nu^2}{\pi E}$, $k_2 = \dfrac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}$, E, E_2 – модули Юнга стержня и преграды; ν, ν_2 – соответствующие коэффициенты Пуассона. Решение уравнения (1.127) при $\beta(0) = 0$ имеет вид

$$\gamma_1\tau = \frac{2}{\sqrt{3}z_0}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3z_0}\ln\left(z^2 + z_0 z + z_0^2\right) - \frac{2}{3z_0}\ln\left|z - z_0\right| - \frac{2}{\sqrt{3}z_0}\operatorname{arctg}\frac{2z + z_0}{\sqrt{3}z_0}$$

$$z = \beta^{1/2}, \quad z_0 = \beta_0^{1/2} = \left(\frac{\overline{v}_0}{\gamma_1}\right)^{1/2}, \tag{1.128}$$

откуда видно, что процесс деформирования затупления длится неограниченно долго, причем при $\tau \to \infty$, $\beta \to \beta_0$.

Из формулы (1.128) легко оценить, когда величина $\dfrac{d\beta}{d\tau} = \dfrac{\dot{\alpha}}{a_0}$, характеризующая нестационарность процесса, станет достаточно малой величиной ε. Учитывая, что при этом $z_\varepsilon = z_0 - z$ также мало, для $E = E_2$, $\nu = \nu_2 \sim 1/3$, $\overline{v}_0 = 0{,}01$ получим при $\tau_\varepsilon < 10$ величину $\varepsilon = 10^{-3}$, т.е. такая ситуация будет после пробегания волной длины 10 калибров (или к моменту возвращения отраженной от торца стержня волны *AB* длиной 5 калибров). Так как интенсивность волны *AB* нулевая, а скорость $v_w(t_0) < v_0$, потребуется дополнительное время Δt, в течение которого за счет отраженных от сечения $x = l$ волн напряжение σ_w уменьшится до нуля и начнется отскок стержня. Это время можно найти, если учесть, что $v_D = 2v_C$, т.е. $v(l,t) = 2v_w(t - l/a_0)$, поэтому $v_E - v_D = -a_0 e_E$, откуда $v_w(t) = -a_0 e_w(t) + 2v_w(t - 2l/a_0)$.

Уравнение для $\dot{\alpha}$ при $t > 2l/a_0$ примет вид

$$\dot{\alpha} = v_0 - v_w = v_0 - 2v_w\left(t - \frac{2l}{a_0}\right) - \frac{a_0 n\alpha^{3/2}}{EF_0} \tag{1.129}$$

или

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \overline{v}_0 - 2\overline{v}_w\left(\frac{R\tau}{a_0} - \frac{2l}{a_0}\right) - \gamma_1\beta^{3/2}. \qquad (1.129')$$

В момент отскока $\tau_1 e_w = 0$, $v_w - v_0 \geq 0$, поэтому $\beta = 0$, $\dot{\beta} \leq 0$.

Интегрируя (1.129′) при начальном условии $\tau = \tau_0 = 2l/R$, $\beta = \beta_1$, определяемом по формуле (1.128), найдем τ_1, когда $\beta = 0$ (при этом $\dot{\beta} < 0$). Нетрудно оценить порядок Δt, если предположить, что к моменту $\tau = \tau_0$, $\beta_1 \sim \beta_0$, $\frac{d\beta}{d\tau} \sim 0$. Тогда

$$\beta - \beta_0 \sim -2\int_{\tau_0}^{\tau} \overline{v}_w\left(\frac{R\xi}{a_0} - \frac{2l}{a_0}\right)d\xi \sim -\overline{v}_0\left(\tau - \tau_0\right), \quad \beta_0 \sim \overline{v}_0\Delta\tau$$

при $\overline{v}_0 = 0{,}1$, $E = E_2$, $\nu = \nu_2 = 1/3$, $\Delta t \sim 5{,}5$.

Не следует забывать, что полная длина стержня $l + R$ и эффективная разгрузка торца начинаются при $\tau > \tau_0 + 2$.

2. Соударение затупленных стержней (рис. 1.57). Оси x для обоих стержней выберем как и раньше, причем для определенности будем считать, что правый стержень в момент времени $t = 0$, когда происходит соприкосновение, покоится, а левый

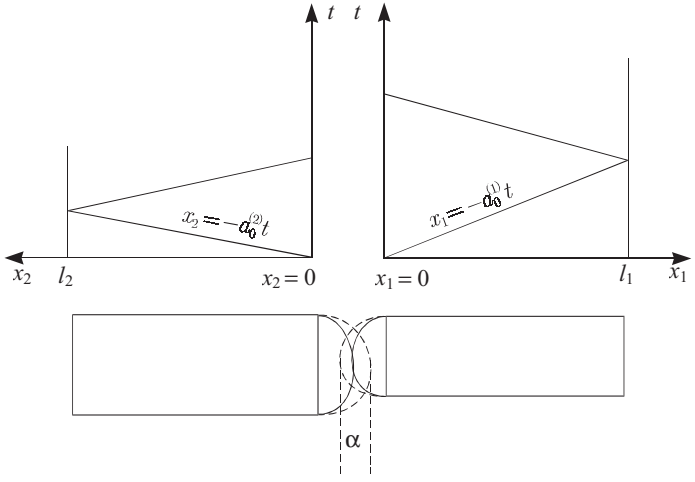


Рис. 1.57

имеет начальную скорость v_0. Обозначая параметры и свойства правого и левого стержней соответственно индексами 1 и 2, будем иметь

$$v_w^{(1)} = -\int_0^{e_w^{(1)}} a^{(1)} de; \quad v_w^{(1)} = v_0 + \int_0^{e_w^{(2)}} a^{(2)} de.$$

Сила сжатия затуплений $P = \varphi(\alpha)$, где $\alpha(t)$ – сближение сечений $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Из равенства сил в сечениях $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ следует, что

$$P = -F_0^{(1)}\sigma_w^{(1)} = -F_0^{(2)}\sigma_w^{(2)}, \quad \sigma^{(1)} = \Phi^{(1)}(e), \quad \sigma^{(2)} = \Phi^{(2)}(e),$$

а скорости связаны с $\dot{\alpha}$ соотношением $v_w^{(1)} = v_w^{(2)} - \dot{\alpha}$, снова приводящим к дифференциальному уравнению для $\dot{\alpha}$. Для упругого случая это уравнение будет иметь вид

$$v_0 - \dot{\alpha} = \left[\frac{a_0^{(1)}}{E_1 F_0^{(1)}} + \frac{a_0^{(2)}}{E_2 F_0^{(2)}}\right] n\alpha^{3/2}.$$

Дальнейший путь решения, как и в задаче 1.

Предложенный метод можно рассматривать как обобщение метода Тимошенко, справедливого для тел малого удлинения (в которых пренебрегается волновыми процессами) на случай тел большого удлинения.

§1.9. Динамическая диаграмма «напряжение – деформация». Методы ее экспериментального определения

В основу теоретических исследований этой и двух последующих глав положен закон упругопластического деформирования материала, предполагающий существование при быстром ударном нагружении некоторой зависимости $\sigma = \Phi(e)$, связывающей только напряжения и деформации. Функция $\Phi(e)$ предполагается нелинейной при нагрузке, причем $\Phi''(e) < 0$, и линейной при разгрузке (скорость звука в этом случае принимается совпадающей со скоростью звука в начале нагружения).

Возникает вопрос: насколько оправдано применение закона упругопластического деформирования, и если да, то для каких материалов? Перед тем как ответить на этот вопрос, необходи-

мо разобраться в понятии динамической диаграммы $\sigma - e$, имеющей первостепенное значение для всей теории упругопластического деформирования.

Можно ли использовать в теоретических решениях и расчетах на динамическую нагрузку зависимость $\sigma = \Phi(e)$, определяемую из экспериментов на медленное, статическое сжатие (растяжение) образцов? Приводимые ниже экспериментальные результаты убедительно доказывают, что *принципиально* этого делать нельзя.

А. ***Повышение предела текучести металлов при динамическом деформировании.*** Число экспериментальных исследований в этой области очень велико. Наиболее просто выполнимыми являются опыты по определению динамического предела текучести путем фиксирования вмятин от падающего с определенной высоты твердого шарика. Эти опыты впервые были проделаны А. Н. Динником [29], затем повторены Д. Тейлором [30]. Не останавливаясь на существе этого способа, основанного на использовании теории местных деформаций Герца, перейдем к описанию экспериментов, существо которых ясно из изложенного в настоящей книге.

Эксперименты Дж. Гопкинсона [31] *и Б. Гопкинсона* [32]. Вдоль вертикально подвешенной стальной проволоки, скользя, падал с заданной высоты груз с центральным отверстием и ударялся о закрепленную на нижнем конце проволоки плитку. Требовалось определить высоту, при которой в проволоке вследствие падения груза данного веса не возникали остаточные деформации (эксперименты Б. Гопкинсона).

На основании теории распространения упругих волн можно рассчитать характер изменения натяжения в проволоке вплоть до момента остановки падающего груза. В эксперименте Б. Гопкинсона (длина проволоки 9,14 м, масса 1 м ее длины m = 590 г, масса груза 454 г, начальная скорость груза v_0 = 5,2 м/с), как указано в [30], максимальное натяжение возникает при втором отражении упругой волны от верхнего конца проволоки и составляет величину $\sigma_{\max} = 2{,}15\, m a_0 v_0$. Сам исследователь считал, что максимальное натяжение возникает при первом отражении упругой волны от верхнего конца и равно $\sigma_{\max} = 2{,}0\, m a_0 v_0$. Неточность Б. Гопкинсона лишь увеличивает значение динамического предела текучести (совпадающее со значением максимального натяжения, при котором остаточные деформации

обнаружены не были), оказавшееся почти в 2 раза выше статического его значения (2800 кг/см^2).

Эксперименты Виффина [30]. Испытуемым цилиндрическим образцом длины L производился выстрел по твердой стальной плите. Измерялись начальная скорость образца v_0 (в момент соприкосновения с плитой) и распределение остаточных деформаций после удара. На основе жесткопластического анализа имеем:

$$\rho_0 |x| \frac{du}{dt} = -\sigma_s ,$$

где x – расстояние от заднего среза образца до упругопластической границы. Предполагая скорость c перемещения упругопластической границы постоянной, для длины образца z в процессе соударения получим $z = x + ct$. Длительность удара T определяется из формулы $cT = l_1 - x_1$, где l_1 и x_1 – длины соответственно образца и недеформированной части после удара.

Так как $\frac{dx}{dt} = -(u+c)$, то

$$\left(v_0 + c\right)^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2\sigma_s}{\rho_0} \ln \frac{L}{x} .$$

Учитывая, что $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=T} = -\ c$, получим:

$$\sigma_s = \frac{\rho_0 \left(v_0^2 + 2v_0 c\right)}{2\ln\left(L / x_1\right)} .$$

Неизвестная скорость c может быть найдена, если известно время T. Для его определения предположим, что замедление хвостовой части происходит равномерно. Тогда

$$L - l_1 = \frac{1}{2} v_0 T = \frac{v_0 (l_1 - x)}{2c} ,$$

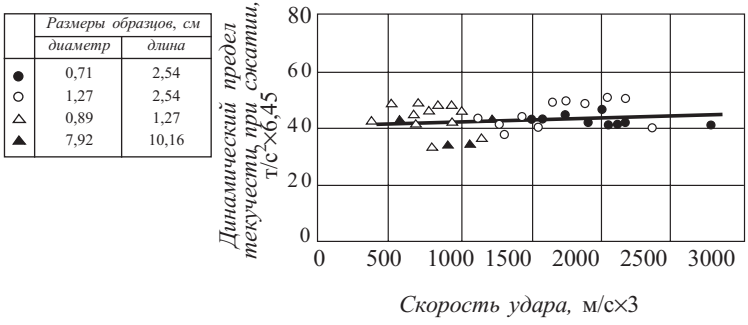
поэтому

$$c = \frac{v_0}{2} \frac{l_1 - x_1}{L - l_1} .$$

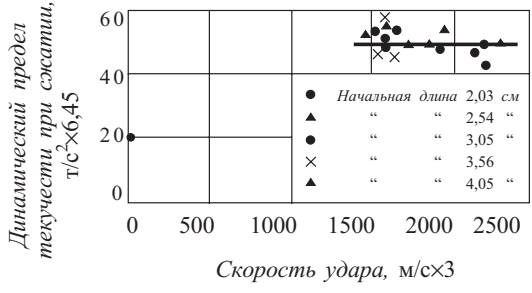
Для динамического предела текучести получаем следующую окончательную формулу:

$$\sigma_s = \frac{\rho_0 v_0^2}{2\ln(L / x_1)} \frac{L - x_1}{L - l_1}$$

Мягкоуглеродистая сталь



Среднеуглеродистая сталь



Дюралюминий

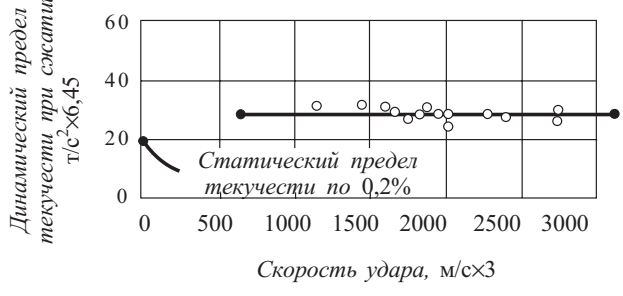


Рис. 1.58

или, если образец оставляет в плите отпечаток глубиной d,

$$\sigma_s = \frac{\rho_0 v_0^2}{2\ln\left(L/x_1\right)} \frac{L - x_1}{L - l_1 + d}.$$

На рис. 1.58 приведены результаты обработки соответствующих экспериментов с использованием приведенной выше формулы. Видно, что в довольно широком диапазоне скоростей 122–854 м/с изменение динамического предела текучести незначительно, хотя и превышает статическое значение более чем в 2 раза для сталей и в 1,5 для дюралюминия. Как указано в [30], в опытах Виффина длительность удара при постоянной длине образцов оставалась почти неизменной, чем можно объяснить и слабую зависимость динамического предела текучести от скорости удара.

Если под средней скоростью деформации понимать частное от деления средней пластической деформации на время удара, т.е. $v_0 / \left[2\left(L - x_1\right)\right]$, то при изменении скорости удара от 400 до 745 м/с скорость деформации в опытах Виффина остается почти постоянной, равной $1{,}35 \cdot 10^4\ c^{-1}$.

Б. ***Одновременная запись напряжений и деформаций в некотором сечении образца в процессе удара.*** В [33] описаны эксперименты, в которых осуществлялась одновременная запись напряжения и деформации в функции времени. По одному концу образца через скобу производится удар определенной интенсивности. Другой конец образца передает нагрузку на плиту через пьезокристалл; возникающий в последнем ток отклоняет луч осциллографа в вертикальном направлении. Деформация определяется по отклонению луча света, проходящего через щель, перемещающуюся по мере удлинения образца. Изменение при этом освещенности фотоэлектрической камеры вызывает ток, отклоняющий луч осциллографа в горизонтальном направлении. Таким образом, на экране осциллографа вычерчивается диаграмма $\sigma - e$ при ударе.

Типичные диаграммы такого рода приведены на рис. 1.59 и 1.60 [30]. Несмотря на большие помехи, имевшие место в этих экспериментах и зафиксированные на рис. 1.59 и 1.60, можно сделать вывод о некотором различии в характере динамической и статической диаграмм. Это особенно заметно для мягкой низкоуглеродистой магниевой стали (рис. 1.60), у которой динамический предел текучести значительно повышается.

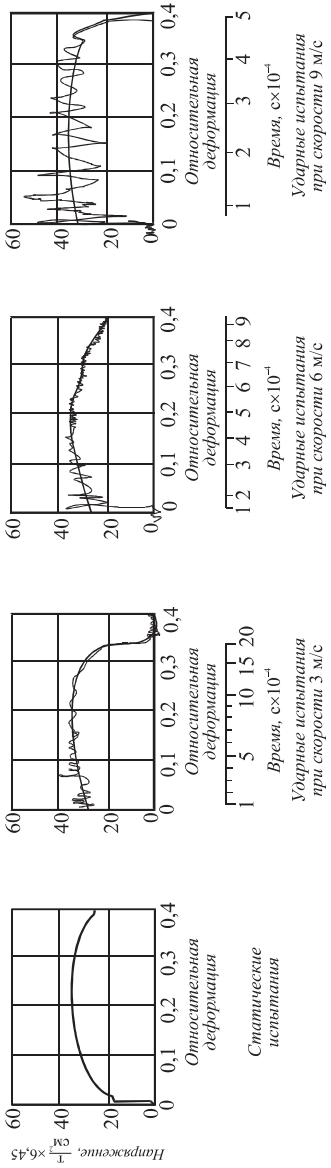


Рис. 1.59

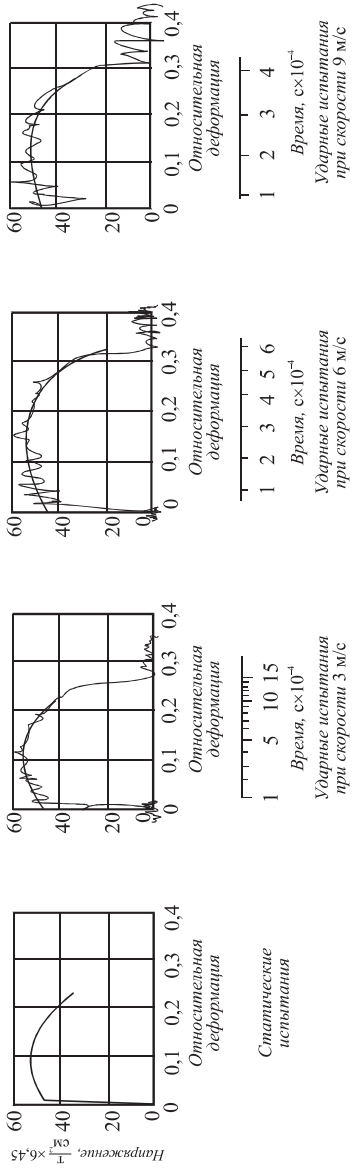


Рис. 1.60

В. ***Эксперименты по измерению скорости распространения малых приращений напряжений в образцах, предварительно приведенных в пластическое состояние.*** Эксперименты по определению скорости распространения волн в предварительно напряженных образцах представлены в [50, 51]. Так как скорость распространения заданного уровня напряжений зависит от $d\sigma / de$, ожидалось, что она будет меньше скорости упругой волны a_0, чего не произошло. Американские исследователи ссылаются на [52], где описаны эксперименты на предварительно напряженных стальных брусьях, которые показали, что при приращениях как нагружения, так и разгрузки волна приращения деформации всегда распространяется со скоростью a_0. В обоих случаях не наблюдалось резкого фронта пластической волны.

В серии тщательно поставленных экспериментов Sternglass'а и Stuart'а [34] длинный медный стержень (~ 3 м) укреплялся в захватах растягивающей машины, сообщавшей ему до эксперимента предварительное напряжение $\sigma_н$ и деформацию $e_н$, превосходившие соответственно пределы текучести и упругости. На некотором расстоянии от концов на стержне укреплялась наковальня, по которой производился удар заданной интенсивности. Определению подлежала скорость распространения волн, возникающих при ударе. Авторы [34] обнаружили, что скорость распространения переднего фронта волн в предварительно напряженном стержне не равна $\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{d\sigma_c}{de}}$ ($\sigma = \sigma_c(e)$ – статическая диаграмма меди), а совпадает со скоростью распространения упругих волн. Они установили, что все основные соотношения теории распространения упругопластических волн (в частности, зависимость максимальной скорости удара от величины максимальной деформации) при использовании статической диаграммы $\sigma - e$ не подтверждаются экспериментом (на этом основании авторы сделали вывод о непригодности этой теории).

Было обнаружено также, что скорость распространения любого уровня возмущения больше рассчитанной по теории упругопластической деформации. В описанных выше экспериментах пластическое состояние создавалось статически. Учитывая это, авторы [53] провели эксперименты, в которых по предварительно динамически нагруженному свинцовому бру-

су пропускались импульсы приращений напряжений, вызываемые нанесением двух ударов по образцу, следующих друг за другом с небольшим интервалом. Однако и в этих экспериментах возмущения распространялись со скоростью упругих волн, что привело их к выводу о необходимости использования теории, учитывающей влияние скорости деформации. В [54], где предварительное напряжение также создавалось динамически, был сделан вывод, что лишь начальная часть возмущения распространяется со скоростью a_0.

Следует отметить и работу [55], где на основании экспериментов с предварительно подвергнутыми напряжению образцами из обожженной меди сделан вывод, что хотя лучшее описание процесса дают уравнения состояния, учитывающие скорость деформации, результаты при больших временах, а также остаточные деформации согласуются с теорией упругопластического деформирования. В упомянутых работах анализ базировался на сопоставлении результатов с одномерной теорией, т.е. в них пренебрегалось радиальным движением и соответствующей поперечной инерцией.

В [56] на основании анализа волнового уравнения, содержащего поправки на поперечную инерцию, высказывается предположение, что при использовании одномерного подхода будет проявляться кажущаяся зависимость свойств материала, удовлетворяющего упругопластическому закону, от скорости деформации. В [57] экспериментально исследовалось геометрическое размывание волны приращения напряжений и было обнаружено, что возможны скорости, превосходящие скорость пластической волны, но не более $a_0/2$. Был сделан вывод, что при истолковании результатов работы [34] необходимо учитывать зависимость от скорости деформации.

Вместе с тем к настоящему времени имеется обширный экспериментальный материал, подтверждающий описываемые ниже основные выводы, вытекающие из теории распространения упругопластических волн.

1. ***Зависимость максимальной деформации конца стержня только от скорости удара.*** В предыдущих параграфах было установлено, что связь скорости удара v_0 с деформацией конца e_m может быть представлена формулой $v_0 = \int_0^{e_m} a de$, из которой следует, что при наличии некоторой зависимости

$\sigma = \Phi(e)$ деформация конца определяется только величиной скорости удара и не зависит от времени соударения. Для проверки этого утверждениям в статье Кармана и Дюве [58] сообщалость о следующих экспериментах, выполненных в период Второй мировой войны (первая публикация подобных материалов содержится в [59]). Кусок отожженной медной проволоки длиной около 2,5 м и диаметром 1,8 мм крепился верхним концом к падающей бабе, двигающейся в вертикальном копре. К нижнему концу проволоки привязывалось легкое, хрупкое основание, на которое ставился груз в форме пустотелого цилиндра с внутренним диаметром d (проволока проходила внутри цилиндра). Внизу, на некотором расстоянии от нижнего конца проволоки располагалась массивная наковальня в форме сплошного цилиндра с диаметром, несколько меньшим d. На проволоке перед экспериментом проставлялись метки, по изменению расстояния между которыми можно было рассчитать значение остаточных деформаций после удара.

Перед экспериментом верхняя баба с закрепленной проволокой, основанием и грузом поднималась на определенную высоту. В некоторый момент вся система начинала падать вниз, скользя по направляющим вертикального копра. На заданной высоте верхняя баба останавливалась (налетев на специально установленную преграду), и с этого момента груз начинал растягивать проволоку, причем скорость удара, очевидно, определялась высотой падения верхней бабы. Груз имел достаточно большую массу, что обеспечивало неизменяемость его скорости в процессе удара. По прошествии некоторого времени груз налетал на наковальню, которая разрушала хрупкое основание и тем самым освобождала проволоку от нагрузки. Меняя положение наковальни, можно было изменять продолжительность удара.

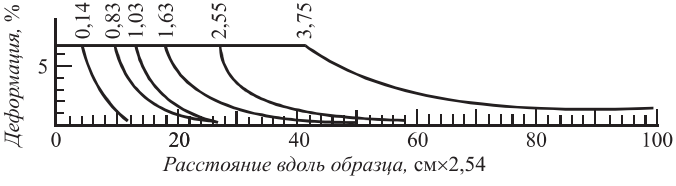


Рис. 1.61

На рис. 1.61 [58] приведено распределение остаточных деформаций при ударах различной продолжительности со скоростью 27,8 м/с. Как видно из рисунка, остаточные деформации конца проволоки не зависят от продолжительности соударения, как и предсказывает теория.

2. *Существование критической скорости удара.* Из формулы $v = \int_0^e a\,de$ следует, что для материала, обладающего упругопластическими свойствами, существует критическая скорость удара, соответствующая максимальному значению интеграла $\int_0^e a\,de$. При критической скорости удара деформация конца достигает максимального значения, отвечающего условию $d\sigma / de = 0$. При скорости удара выше критической, образец разрушается мгновенно, в его оставшейся части должны отсутствовать остаточные деформации.

Факт мгновенного разрушения медной проволоки при скорости удара выше 70 м/с был отмечен в экспериментах, описанных в [30]. Для сообщения необходимой скорости удара использовалось вращение тяжелого колеса копра Манна: в определенный момент захваты, расположенные на этом колесе, выходят и ударяют о скобу, укрепленную на конце исследуемого образца. (Другой конец образца закреплен в массивном маятнике.)

Заметим, что в [58] также проведено исследование дефор-

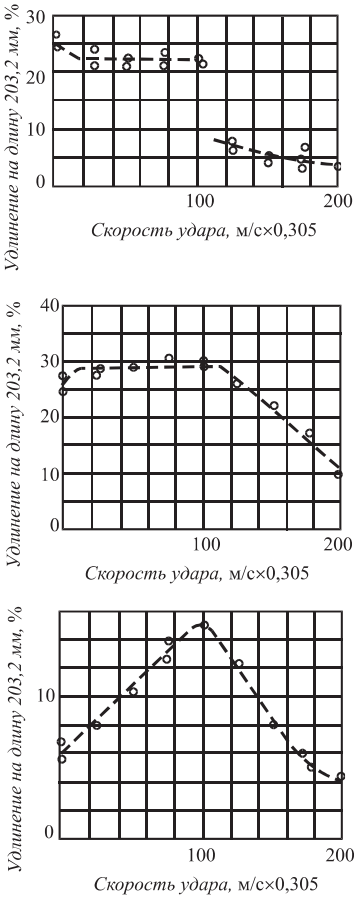


Рис. 1.62

Таблица 1.5

Материал	Предел прочности, кг/мм^2, при растяжении		Удлинение на 203,2 мм, %, при растяжении		Критическая скорость, м/с	
	статическом	динамическом	статическом	динамическом	экспериментальная	теоретическая
Железо отожженое	26	40,4	25,7	16,2	30,4	–
Сталь SAE 1015 отожженая	35,0	44,4	28	30	30,4	–
Сталь SAE 1022 холоднокатанная	58,8	73,5	6	15	30,4	9,5
Сталь SAE 1040 отожженая	54,8	64,2	20,4	20,7	> 60,8	–2
Сталь SAE 1045 закаленная и отпущенная	99,5	108,2	5,7	9,2	57,7	28,9
Сталь SAE 2345 закаленная и отпущенная	100,8	122,6	8,4	14,1	> 60,8	53
Сталь SAE 4140 закаленная и отпущенная	94	105,5	8,5	14,7	53,2	40,2
Сталь SAE 5150 закаленная и отпущенная	97,3	103,5	8,5	13,3	51,6	48,2
Сталь SAE 302 нержавеющая	65,2	78	58.5	46,6	> 60,8	149
Медь отожженая	20,8	18,6	32,7	43,8	> 60,8	70,1
Медь холоднокатанная	31,5	42	2,5	10,7	15,2	12,9
Алюмниевый сплав $2S$, отожженый	8,1	10,4	23,0	30,8	> 60,8	53,4
Алюминиевый сплав $2S\frac{1}{2}H$	12,2	15,4	4,6	10	33,4	10,8
Алюминиевый сплав $24S-T$	45,6	48	11,3	13,5	> 60,8	88
Магниевый сплав *Dov I*	30,6	36	9,6	10,9	> 60,8	92

мирования медной проволоки при скорости удара 57 м/с, принятой авторами за критическую на основании расчетов с использованием статической диаграммы «напряжение–деформация». Остаточные деформации при этой скорости распространяются на большое расстояние от точки удара, что лишний раз подтверждает невозможность при точных количественных расчетах использовать данную диаграмму.

В эксперименте, описанном в [35], измерялось общее удлинение образца (холоднокатаной стали марки SAE 1020) в зависимости от скорости удара. Соответствующий график приведен на рис. 1.62 и наглядно иллюстрирует уменьшение общего удлинения при увеличении скорости удара более 30,4 м/с.

Значительный экспериментальный материал по динамическим свойствам металлов собран в [35, 36]. В табл. 1.5 приведены данные по пределу прочности, критической скорости удара и общему удлинению образцов в динамических условиях с сопоставлением со статическими данными и результатами теоретических расчетов на основе статических диаграмм [35].

3. *Характер распределения остаточных деформаций в образце после удара.* Теория предсказывает, что распределение остаточных деформаций в полубесконечном стержне при ударе носит асимптотический характер (при скорости, меньше критической). Проведенные эксперименты подтверждают этот вывод теории. На рис. 1.63 и 1.64 приведены соответственно кривые распределения остаточных смещений по радиусу в алюминие-

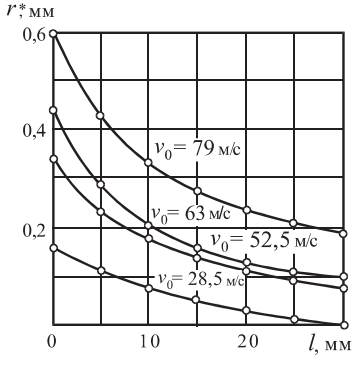


Рис. 1.63

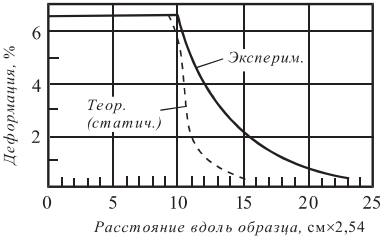


Рис. 1.64

вом стержне длиной 0,5 м и диаметром 20 мм [23] и медной проволоке при скорости удара 27,8 м/с, продолжительности 0,083 м/с [58]. На рис. 1.64 штриховая кривая построена на основе статической диаграммы $\sigma - e$. Характер распределения остаточных деформаций качественно соответствует расчету[1]. Кривая имеет участок постоянных остаточных деформаций, как и предсказывает теория. Наличие этого участка в настоящее время подтверждено многочисленными экспериментальными исследованиями [60].

4. *Характер зависимости остаточных деформаций конца стержня от величины скорости удара.* Ниже показано, что динамическая диаграмма $\sigma - e$ по форме мало отличается от статической и, как и последняя, может быть аппроксимирована схемой линейного упрочнения:

$$\sigma = Ee\,,\ \ e \le e_s;$$

$$\sigma = Ee_s + E'\left(e - e_s\right);\ \ e \ge e_s,$$

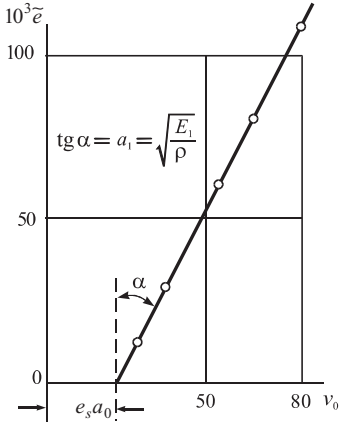


Рис. 1.65

где E и E' – динамические модули Юнга и упрочнения; e_s – динамический предел упругости. В этом случае формула $v_0 = \int_0^{e_m} a\,de$ может быть преобразована к виду $v_0 = a_0 e_s + a_1\left(e_m - e_s\right)$ и вследствие малого значения отношения E'/E заменена следующей:

$$v_0 = a_0 e_s + a_1 \tilde{e}, \quad (1.130)$$

из которой видно, что скорость удара линейно зависит от величины остаточных деформаций конца стержня. Эксперименты по проверке последнего соотноше-

[1] Авторы [58] не получили удовлетворительного совпадения данных эксперимента с результатами расчета. Последнее, как отмечено В. С. Ленским, обусловлено неучетом при расчете прохождения волны разгрузки.

ния проводились над алюминиевыми стержнями длиной 0,5 м и диаметром 20 мм и описаны в [23]. На рис. 1.65 [23] приведена экспериментальная зависимость $v = v_0(\tilde{e})$, хорошо подтверждающая формулу (1.130).

5. ***Характер изменения напряжения в некотором сечении стержня при ударе.*** В [58,59] дано сопоставление экспериментально замеренного изменения напряжения на закрепленном конце стержня с рассчитанным на основе статической диаграммы для удара с определенной скоростью по другому концу. Из рис. 1.66–1.69, иллюстрирующих это сопоставление, видно, что экспериментальная и теоретическая зависимости имеют одинаковый характер изменения и вместе с тем значительное количественное расхождение.

6. ***Характер изменения деформаций и скоростей в сечениях вдоль стержня.*** В [61] представлены результаты исследований распространения продольных волн в обожженных алюминиевых брусьях с помощью датчиков деформации и электромагнитных датчиков скорости частиц (принцип действия последних описан в [62, 63]). Результаты измерения скоростей согласуются с расчетами на основе упругопластической теории, если использовать диаграмму $\sigma - e$, лежащую несколько выше статической. Датчики деформации показали более низкие скорости распространения волн, чем датчики скоростей частиц, и работа их была поставлена под сомнение.

Наиболее широкое исследование распространения волн деформаций путем измерения перемещения было выполнено Беллом [64], разработанным им оптическим методом с помощью датчика очень малой длинны [65]. Ошибка измерения деформаций не превосходила 3%. В экспериментах торцам брусьев из отожженного алюминия ударом сообщалась постоянная скорость. Было обнаружено, что одинаковые уровни деформации распространяются с постоянной скоростью, хорошо согласующейся со скоростью, определяемой по местному наклону статической кривой $\sigma - e$ [66, 67]. Было обнаружено, что при удалении от торца больше двух калибров уровни деформации в зависимости от скорости удара также хорошо согласуются с соответствующей теоретической зависимостью, определенной по статической диаграмме $\sigma - e$. Белл [66–68] высказал предположение, что отклонения от теории на расстояниях меньше калибра могут быть обусловлены большими радиальными

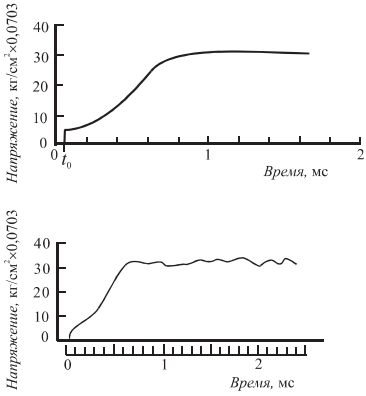


Рис. 1.66

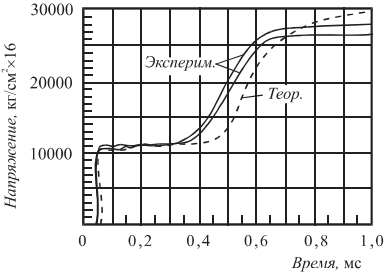


Рис. 1.68

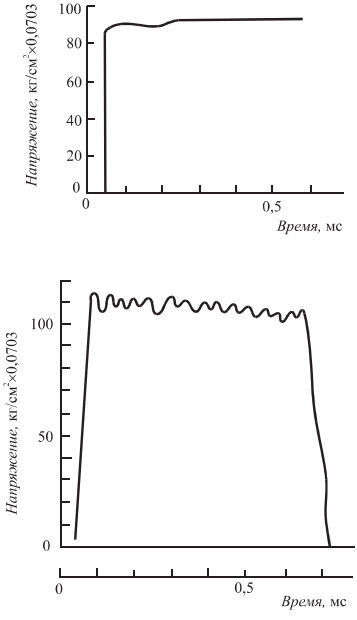


Рис. 1.67

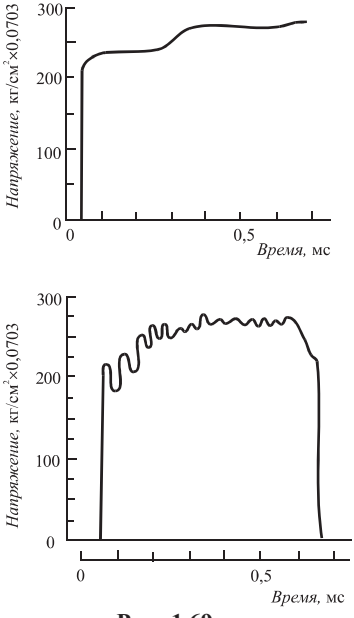


Рис. 1.69

ускорениями, связанными с быстрым нарастанием деформации и соответствующим сильным расширением, наблюдавшимся экспериментально. По его мнению, именно этим могут быть объяснены наблюдавшиеся ранее особенности формирования волн вблизи торца стержня (по которому наносится удар) образцов из меди и чистого алюминия, а не влиянием скорости деформации (в уравнении состояния).

Для полного соответствия теоретических результатов всем экспериментальным материалам, перечисленным в пунктах А–В, 1–6, предлагается использовать динамическую диаграмму $\sigma - e$, отличную, как показано выше, от статической. Таким образом, при данной скорости удара предполагается существование определенной зависимости $\sigma = \Phi(e)$.

Математически динамическая диаграмма $\sigma - e$ может быть интерпретирована следующим образом. Пусть зависимость между деформацией и напряжением дается, например, формулой

$$f_0(\sigma, e, t)\dot{\sigma} + f_1(\sigma, e, t)\dot{e} + f_2(\sigma, e, t) = 0,$$

в которую входят не только упомянутые характеристики, но и их производные по времени. Так как процесс удара характеризуется малой продолжительностью, то в последнем соотношении будут превалировать дифференциальные члены, что позволит упростить закон деформирования

$$f_0(\sigma, e, 0)\dot{\sigma} + f_1(\sigma, e, 0)\dot{e} = 0$$

и привести к виду $\sigma = \Phi(e)$.

Таким образом, на динамическую диаграмму можно смотреть как на предельный случай более общего соотношения $\varphi(\sigma, e, \dot{\sigma}, \dot{e}, t) = 0$, в котором сохранены главные дифференциальные члены.

Физически разница между статической и динамической диаграммами $\sigma - e$, возможно, объясняется тем, что первая получается при изотермическом, а вторая – при адиабатическом процессах нагружения. Процессы распространения нелинейных волн отличаются от процессов статического нагружения и нет основания ожидать совпадения соответствующих диаграмм $\sigma - e$. Относительно вида динамической диаграммы, по крайней мере для таких материалов, как сталь, медь, алюминий, можно сказать, что результаты сопоставления соответствующих

экспериментов с расчетами, в которых использовались статические диаграммы, уже косвенно указывают на то, что последние правильно воспроизводят основные закономерности динамических диаграмм.

Результаты приводимых ниже экспериментов, описанных в [37], указывают на полное совпадение статической и динамической диаграмм на начальном участке, вплоть до статического предела упругости, ввиду *совпадения статического и динамического модулей Юнга*. Все экспериментальные исследования, относящиеся к определению динамического модуля Юнга, основаны на определении скорости $a = \sqrt{E/\rho_0}$ распространения в стержне упругой волны или частоты многократных колебаний стержней.

Серс [38] горизонтально подвешивал два стержня одинаковой длины l таким образом, что они торцами плотно соприкасались между собой (рис. 1.70). Перед экспериментом один из стержней отводился, затем отпускался и ударял торцом по торцу второго. В этот момент по обоим стержням распространялись упругие волны, которые достигали свободных концов, отражались от них и затем двигались назад, к месту соударения. В момент встречи упругих волн в точке удара стержни расходились. Период соприкосновения T равнялся двойной продолжительности прохода волной вдоль стержня длины l, сложенной с некоторым поправочным членом e, обусловленным местными эффектами:

$$T = 2l/a_0 + \varepsilon .$$

Величина T определялась следующим путем: в момент соударения возникал контакт в электрической цепи, продолжи-

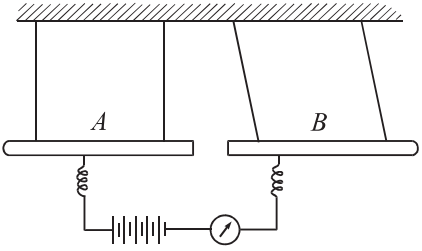


Рис. 1.70

тельность которого вычислялась по величине количества электричества, измеренного баллистическим гальванометром при известной силе тока. Влияние местного эффекта е исключалось после экспериментирования со стержнями различной длины. Параллельно проводился расчет статического модуля Юнга. Результаты обработки экспериментов по определению скорости звука a_0 для стали, меди и алюминия приведены в табл. 1.6 и указывают на полное совпадение соответствующих значений модулей Юнга.

Тот же результат был получен при определении динамического модуля Юнга акустическим способом [39–42]. Очевидно, динамическая кривая $\sigma - e$ продолжает оставаться прямолинейной вплоть до достижения динамического предела текучести. При дальнейшем увеличении динамических значений деформаций, как будет видно из дальнейшего, наклон этой кривой к оси деформаций быстро уменьшается.

Введение в рассмотрение и расчеты динамических диаграмм $\sigma - e$, очевидно, не изменяет выводов п. 1–6, полученных для произвольной зависимости $\sigma = \Phi(e)$, и улучшает те, которые относятся к количественным расчетам. При этом экспериментальные данные, приведенные в п. А и Б, могут служить фактическим материалом при построении указанных диаграмм. Следует отметить, что использование динамических диаграмм $\sigma - e$ сразу объясняет экспериментальные результаты п. В, которые тем самым могут служить дополнительным подтверждением справедливости теории распространения упругопластических волн (в противоположность выводам авторов [34]). Действительно, каковы бы ни были статические значения напряжений и деформаций, динамическая кривая $\sigma - e$ в начале будет иметь прямолинейный участок, которому будет соответствовать скорость распространения упругих волн. При этом, очевидно, сравнение экспериментальных результатов с данными

Таблица 1.6

Материал	**Значение a_0, фут/с**	
	экспериментальные	**расчетные**
Сталь	16820	16750
Медь	12060	12010
Алюминий	16620	16580

расчета по статической диаграмме $\sigma - e$ оказывается неправомерным.

Кроме непосредственного определения динамических диаграмм $\sigma - e$, изложенного в п. Б и требующего постановки сложного эксперимента, существует ряд других методов, более просто выполняемых в лабораторных условиях. Все они основаны на обработке данных по распределению остаточных деформаций в стержне после удара в соответствии с зависимостями, следующими из теории распространения упругопластических волн.

Метод, основанный на измерении остаточных деформаций концевого сечения в функции скорости удара. Впервые этот метод определения динамической диаграммы по распределению остаточных деформаций в длинном стержне был предложен в [23]. Предполагалось, что диаграмма допускает аппроксимацию схемой Прандтля. Необходимые значения динамического предела упругости и динамического модуля упрочнения находились с использованием формулы (1.130) и экспериментальной зависимости $v_0 = v_0\ (\tilde{e})$, приведенной на рис. 1.65. Продолжая экспериментальную кривую $v_0 = v_0\ (\tilde{e})$ до пересечения с осью Ov_0, определяли величину $a_0\ e_s$.

Если принять $a_0 = 4700$ м/с, то $e_s = 22 : 4700 = 0{,}47\%$, т. е. она значительно выше статического значения предела упругости алюминия (~0,2%). Измерив угол наклона прямолинейной части кривой рис. 1.65 к оси Ov_0, находим значение динамического модуля упрочнения. Может показаться, что зависимость $v_0 = v_0\ (\tilde{e})$ всюду прямолинейна. В действительности, в некоторой окрестности точки $v = a_0 e_s$ она имеет некоторое искривление[1]. Последний факт нисколько не противоречит теории, а лишь указывает на значительную ошибку аппроксимации динамической диаграммы схемой линейного упрочнения вблизи предела упругости.

В [23] было показано, как использовать экспериментально определенную зависимость $v_0 = v_0\ (\tilde{e})$ для построения точного вида истинной динамической диаграммы. С этой целью про-

---

[1] В силу этого обстоятельства истинное значение динамического предела упругости будет несколько меньше найденного выше значения.

дифференцируем формулу $(\widetilde{e}) = \int\limits_0^{e_m} a\,de$, учитывая, что $\widetilde{e} = e_m - \sigma(e_m)/E$:

$$\frac{dv_0}{d\widetilde{e}}\left[1 - \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{de}\right] = \sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{d\sigma}{de}}\,. \qquad (1.131)$$

Так как $dv_0/d\widetilde{e}$ – известная из эксперимента функция $e - \sigma/E$, то (1.131) является дифференциальным уравнением для определения вида динамической диаграммы $\sigma = \Phi(e)$.

Постоянная интегрирования уравнения (1.131) определяется из условия сопряжения кривой $\sigma = \Phi(e)$ с прямой $\sigma = Ee$, при этом координаты точки касания соответствуют динамическому пределу упругости. Значение динамического модуля E можно найти из соотношения

$$v_0^* = e_s\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{d\sigma(e,E)}{de}\right)_{e=e_s}}\,.$$

Здесь v_0^* – найденная опытным путем максимальная величина скорости, при которой отсутствуют остаточные деформации; $e_s(E)$ — предел упругости.

Недостатком предложенного метода является необходимость экспериментирования над серией одинаковых образцов. В практике лабораторных испытаний последнее обстоятельство может вызвать известные трудности. Из зарубежных изданий следует отметить работу [69], где на основе упругопластической теории была рассчитана зависимость $\sigma(e)$ для меди. Эксперименты по динамическому растяжению впервые показали, что эта зависимость отличается от статической.

Метод В. С. Ленского [43]. Это первый (в хронологической последовательности) метод, в котором было показано, как из одного эксперимента по измеренному распределению остаточных деформаций рассчитать весь вид динамической диаграммы $\sigma - e$. Преимущество метода заключается в возможности получения конечных размеров зоны остаточных деформаций благодаря экспериментированию над стержнями конечной длины, деформируемыми ударом о жесткую преграду (удар осуществлялся выстрелом образцов из пневмоустановки).

Построение ударной диаграммы базируются на том теоретическом факте (см. §1.5), что возникшая при отражении от свободного конца стержня волна разгрузки является волной сильного разрыва и распространяется со скоростью a_0 безотносительно к виду динамической зависимости $\sigma = \Phi(e)$.

Приведем еще одно доказательство этого факта [43]. Предполагая скорость волны разгрузки равной a, из уравнения количества движения имеем

$$\rho_0 a\left(v_2 - v_1\right) = \sigma_1 - \sigma_2 . \tag{1.132}$$

Здесь индексами 1 и 2 отмечены параметры по разные стороны от волны разгрузки. Но при разгрузке $\sigma_2 - \sigma_1 = E\left(e_2 - e_1\right)$, поэтому соотношение (1.132) можно записать так:

$$a\left(v_2 - v_1\right) = a_0^2\left(e_1 - e_2\right). \tag{1.133}$$

В то же время из условия непрерывности смещений на волне разгрузки следует $e_1 dx + v_1 dt = e_2 dx + v_2 dt$, или

$$a\left(e_1 - e_2\right) = v_2 - v_1 . \tag{1.134}$$

Комбинируя (1.133) с (1.134), получим[1] $a = a_0$. Следовательно, если скорость удара стержня о преграду такова, что после отражения волны разгрузки от преграды новых пластических волн не возникает, распределение остаточных деформаций $\tilde{e}(x)$ может быть найдено для любой зависимости $\sigma = \Phi(e)$.

Примерный вид функции $\tilde{e}(x)$ таков: имеется некоторая область постоянных остаточных деформаций x_1, за которой последние монотонно убывают до нуля. Выведем формулы, устанавливающие связь между видом кривой $\sigma = \Phi(e)$ и распределением остаточных деформаций $\tilde{e}(x)$ по длине стержня. Очевидно,

$$\tilde{e}(x) = e_m - \Phi(e_m)/E , \tag{1.135}$$

где e_m и $\sigma_m = \Phi(e_m)$ обозначают максимальную деформацию и напряжение в данном сечении x. На волне разгрузки имеем $x = -a_0 t + 2l$ и, кроме того, $x/t = a(e_m)$. Поэтому скорость звука $a(e_m)$ в сечении x определяется по формуле $x = -a_0 x/a + 2l$ или

[1] Изложенное доказательство, очевидно, относится только к рассматриваемому случаю, при котором мгновенному, скачкообразному понижению нагрузки предшествует монотонное нарастание пластических деформаций.

$$a / a_0 = x / (2l - x). \qquad (1.136)$$

Дифференцируя (1.135) и используя (1.136), найдем:

$$\frac{d\tilde{e}}{dx} = \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)\frac{de_m}{dx} = \left[1 - \left(\frac{x}{2l - x}\right)^2\right]\frac{de_m}{dx}.$$

Следовательно,

$$e_m(x) = e_s - \int_x^l \left(\frac{\frac{d\tilde{e}}{dx}}{1 - \left(\frac{x}{2l - x}\right)^2}\right)dx,$$

$$e_m(x) = e_s + \frac{\tilde{e}(x)}{1 - \left(\frac{x}{2l - x}\right)^2} + \int_x^l \left(\frac{x(2l - x)\tilde{e}(x)}{4l(x - l)^2}\right)dx. \qquad (1.137)$$

При выводе формулы (1.137) было использовано условие $\left.\frac{d\tilde{e}}{dx}\right|_{x=l} = 0$ вследствие плавного сопряжения прямолинейного участка с упругим.

Напряжение $\sigma_m(x)$ определяем из соотношения $\sigma_m = E(e_m - \tilde{e})$ с использованием (1.137):

$$\sigma_m(x) = \sigma_s + \frac{Ex^2\tilde{e}}{4l(l - x)} + E\int_x^l \left(\frac{x(2l - x)\tilde{e}(x)}{4l(l - x)^2}\right)dx. \qquad (1.138)$$

Формулы (1.137) и (1.138) можно рассматривать как параметрическое уравнение (x – параметр) для определения динамической диаграммы $\sigma_m = \Phi(e_m)$.

Значение динамического предела упругости e_s можно найти из соотношения $v_1 = a_0 e_s$, где v_1 – наименьшая скорость удара, приводящая к возникновению малых остаточных деформаций (например, порядка 0,2%).

В [43] указано на возможность некоторого видоизменения изложенного выше способа. При этом удар постоянной скорости продолжительностью τ производится по торцу длинного стержня. Картина распространения волн в этом случае имеет вид, представленный на рис. 1.71: волна разгрузки будет рас-

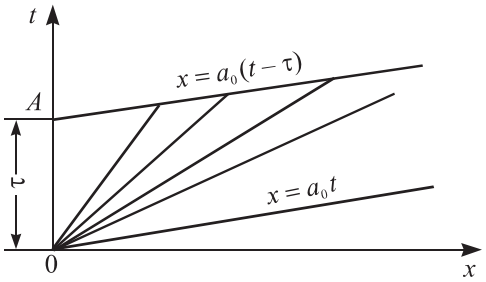


Рис. 1.71

пространяться с постоянной скоростью a_0 из точки A. Приведенные выше формулы заменяются теперь следующими:

$$a = \frac{a_0 x}{x + a_0\tau}, \quad \frac{de_m}{dx} = \frac{\dfrac{de}{dx}}{1 - \left(\dfrac{x}{x + a_0\tau}\right)^2},$$

$$e_m = e_s + \frac{\tilde{e}(x)}{1 - \left(\dfrac{x}{x + a_0\tau}\right)^2} - \frac{\tilde{e}(x_s)}{1 - \left(\dfrac{x_s}{x_s + a_0\tau}\right)^2} + \int_x^{x_s} \left(\frac{2x(x + a_0\tau)\tilde{e}(x)}{a_0\tau(2x + a_0\tau)^2} \right) dx, \tag{1.139}$$

$$\sigma_m = E(e_m - \tilde{e}). \tag{1.140}$$

Сечение x_s выбирается таким, чтобы величина e здесь была достаточно малой (например, 0,2%).

Соотношения (1.139) и (1.140) после исключения параметра x опять приводят к уравнению динамической диаграммы $\sigma = \Phi(e)$. В работе [43] приведены результаты обработки с помощью формул (1.137) и (1.138) экспериментов по определению динамических характеристик холоднокатаного неотожженного алюминия, проведенных в лаборатории испытания материалов Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Скорости удара были таковы, что вторичные пластические волны не возникали. Оказалось, что при этом предел текучести повышается на 30–40%, динамическое

напряжение при деформации 0,004 почти вдвое превосходит статическое.

Видоизменение метода В. С. Ленского и экспериментальная проверка выполненных на основе динамических диаграмм $\sigma - e$ расчетов распределения остаточных деформаций стержня при повторных ударах [44]. Способ основан на определении остаточных деформаций, возникающих в упругопластическом стержне при ударе по нему упругим стержнем. Как и выше, из соотношения

$$\sigma(e_m) = E(e_m - \tilde{e}) \tag{1.141}$$

имеем

$$\frac{de_m}{dx} = \frac{d\tilde{e}/dx}{1 - a^2/a_0^2}. \tag{1.142}$$

Используя результаты предыдущего параграфа, можно установить диапазон скоростей соударения v_0, в котором волны, отраженные от свободного конца упругопластического стержня длины L, будут являться волнами разгрузки. При этом для скорости звука $a(e_m)$ справедливы формулы:

$$a(e_m) = \frac{xa_0}{2L - x} \quad \text{при} \quad 0 < x < L, \tag{1.143}$$

$$a(e_m) = \frac{xa_0}{2l + x} \quad \text{при} \quad -l < x < 0, \tag{1.144}$$

где l – длина упругого стержня. Из формулы (1.142) после подстановки в нее (1.143) и (1.144) получим:

$$e_m = e_s + \int_L^{x_D} \frac{\frac{de}{dx}}{1 - \left(\frac{x}{2L - x}\right)^2} dx + \int_{x_D}^{x} \frac{\frac{de}{dx}}{1 - \left(\frac{x}{2L + x}\right)^2}. \tag{1.145}$$

Значение e_s определяется из соотношения $v_{0s} = 2ae_s$, где v_{0s} – скорость удара, соответствующая началу появления остаточных деформаций. Исключив из (1.141) и (1.145) параметр x, получим искомую диаграмму $\sigma = \Phi(e)$.

Соответствующие эксперименты проводились следующим образом. Упругим стержнем длиной l = 50 мм и диаметром 23 мм, изготовленным из закаленной стали, производили удары

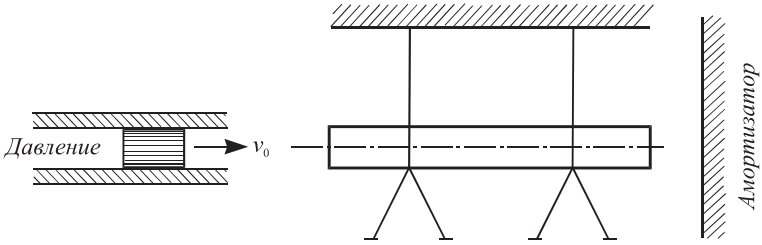


Рис. 1.72

с определенной скоростью v_0 по цилиндрическому образцу из мягкой стали (L = 250 мм, диаметр 21 мм). Удар осуществлялся выстрелом стержня меньшей длины из пневмоустановки (рис. 1.72). Для обеспечения центрального удара положение испытуемого образца тщательно регулировалось проволоками с тендерами, прикрепленными кольцами под углом 120° друг к другу. Скорость удара v_0 измерялась электронным счетчиком с точностью до 2%. Величина диаметра образца D до и после выстрела в точках, расположенных вдоль образующих стержня через 5 мм до удара, измерялась с точностью до 1 мк микронным индикатором. Остаточные деформации рассчитывались из условия несжимаемости материала: $\tilde{e}(x) = 2\Delta D / D$. Эксперименты проводились при скоростях удара 44–48 м/с, обеспечивающих применимость формул (1.141) и (1.145).

Характер распределения остаточных деформаций оказался полностью соответствующим представлениям упругопластической теории (рис. 1.73).

Динамическая диаграмма $\sigma - e$, построенная указанным способом, приведена на рис. 1.74 (ограничение на величину v_0 позволило рассчитать кривую $\sigma = \Phi(e)$ вплоть до значения $e = 2\%$). По данным рис. 1.74 было найдено, что отношение динамического предела упругости к статическому равно 1,6.

Затем было проведено исследование следующего рода. Измерялось распределение остаточных деформаций в образце из мягкой стали при повторном ударе. Параллельно был проведен соответствующий теоретический расчет, в котором использовалась полученная при первом ударе динамическая диаграмма $\sigma - e$. В расчете учитывалась переменность предела упругости по длине стержня. Скорость повторного удара была равна

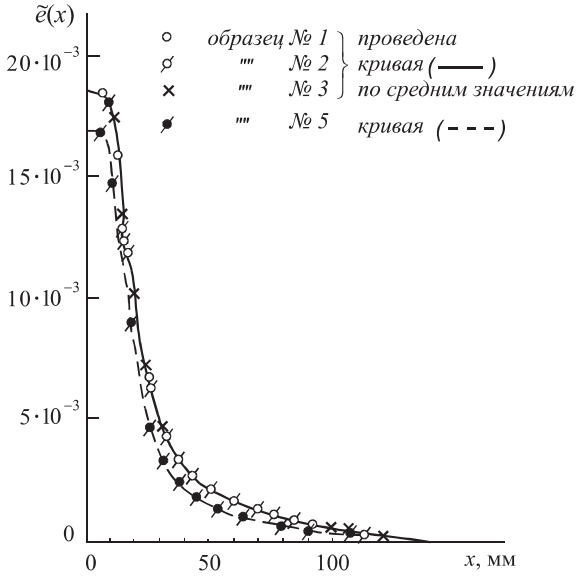


Рис. 1.73

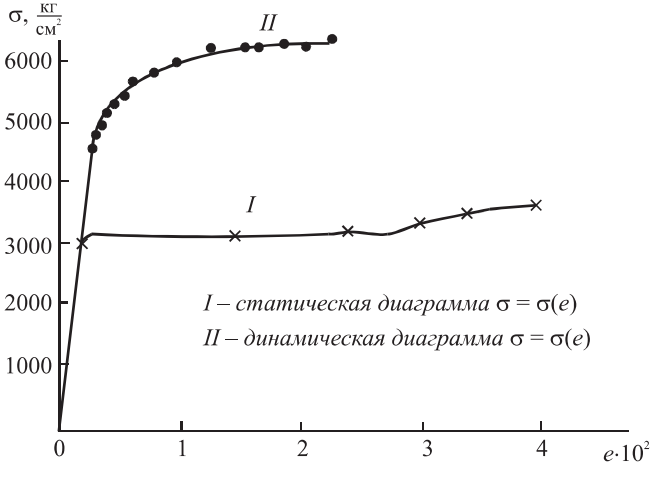


Рис. 1.74

33 м/с; при такой скорости все сечения стержня из мягкой стали, включая и начальное, выходят за предел упругости. (В малом стержне остаточные деформации обнаружены не были, что указывало на правомочность считать деформации в нем упругими.)

Результаты проведенного сопоставления приведены в табл. 1.7 (для двух типичных опытов). Данные экспериментов удовлетворительно согласуются с расчетами по упругопластической теории, являясь одновременно прямой ее проверкой.

Таблица 1.7

x, м	Образец № 1				Образец № 2			
	ΔD_1, мк	ΔD_2, мк	$\frac{\Delta D_1 + \Delta D_2}{2}$, мк	ΔD, мк	ΔD_1, мк	ΔD_2, мк	$\frac{\Delta D_1 + \Delta D_2}{2}$, мк	ΔD, мк
16	11	12	11,5	11	11	11	11	11
21	10	11	10,5	11	10	11	10,5	11
23	10	11	10,5	11	10	11	10,5	11
29	10	11	10,5	11	10	11	10,5	11
37	10	9	9,5	11	10	10	10,0	11
44	8	8	8,0	10	9	10	9,5	10
46	8	7	7,5	10	9	9	9,0	10
61	6	6	6,0	8	7	8	7,5	8
70	5	5	5,0	7	6	7	6,5	7
79	5	4	4,5	6	7	6	6,5	6
90	4	3	3,5	6	6	6	6,0	6
97	3	3	3,0	5	6	5	5,5	5

К настоящему времени накоплен большой экспериментальный материал, подтверждающий подобный вывод и для других веществ. Так, дальнейшие эксперименты Белла [70], где постоянство скорости торца достигалось путем продольного соударения стержней, показали, что зависимость $\sigma = \Phi(e)$ хорошо описывает поведение ряда полностью обожженных металлических поликристаллических и монокристаллических стержней из

алюминия. Сопоставление экспериментальной и теоретической кривых $e = e(t)$ приведено на рис. 1.75 (более низкая скорость при более высоких уровнях деформации, проявляющаяся в скруглении профиля, объясняется замедлением волны при прохождении начального участка длиной в один калибр из-за пространственных эффектов).

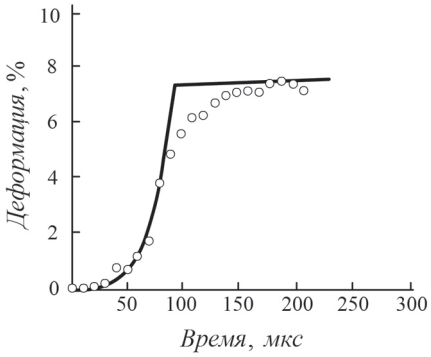


Рис. 1.75

В [71] экспериментами на брусьях из чистого свинца также была подтверждена теория с использованием динамической диаграммы $\sigma - e$. Такой же вывод сделан в [52, 72], где исследовались распространение волн в брусьях из коммерчески чистого алюминия. Богатый дополнительный экспериментальный материал содержится в обзоре [73], а также в монографии [74].

Итак, можно считать установленным, что, по крайней мере, для таких металлов, как сталь (различных марок), алюминий и медь упругопластическая теория распространения волн, основанная на использовании динамических диаграмм «напряжение – деформация», вполне удовлетворительно согласуется с имеющимся экспериментальным материалом.

Литература

1. *Рахматулин Х. А.* О распространении плоских волн в упругой среде при нелинейной зависимости напряжения от деформации // Ученые записки МГУ. 1951. Вып. 152, III.

2. *Баренблатт Г.И.* О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформации // ПММ. 1953. Т. XVII. № 4.

3. *Баренблатт Г. И.* ПММ. Т. XXI. 1957. № 6.

4. *Рахматулин Х.А.* О распространении волн разгрузки // ПММ. 1945. Т. IX. № 1.

5. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001.

6. *Галин Г.Я.* О распространении возмущений в средах с нелинейной зависимостью напряжений от деформации и температуры // Доклады АН СССР. 1958. Т. 120. №4. С. 730–733.

7. *Павленко А.Л.* О распространении разрывов в гибкой нити. Изв. АН СССР // Механика и машиностроение. 1959. №4. С. 112–122.

8. *Donnell L.H.* Trans. ASME. 1930. Вып. 52. № 153.

9. *Чебан В.Г.* О распространении продольных упруго-пластических волн // Ученые записки Киш. гос. ун-та. 1952. № 5.

10. *Веклич Н.А.* О распространениии упругопластических волн // МТТ. 1968. №1. С. 146–147.

11. *Нагрелли В.Э.* Распространение одномерных упругопластических волн при ударе массой // Вестник МГУ. 1973. №4. С. 87–89.

12. *Лебедев С.В.* ПММ. Т. XIX. Вып. 3.

13. *Шапиро Г.С.* Продольные колебания стержней // ПММ. 1946. Т.X. № 5 и 6.

14. *Бидерман В.Л.* Расчеты на ударную нагрузку. Основы современных методов расчетов на прочность в машиностроении / Под ред. С. Д. Пономарева.– М.: Машгиз, 1952.

15. *Рахматулин Х.А., Шапиро Г.С.* О распространении плоских упругопластических волн // ПММ. 1948. Т. XII. № 4.

16. *White M.P.* and *Le von Griffis.* Journ. of Appl. Mech. 1947. V. 14. № 4.

17. *Лебедев Н.Ф.* Распространение ударных волн в полубесконечном стержне // Инж. сб. 1952. Т. XI.

18. *Лазуткин Д.Ф.* Распространение упруго-пластических волн вдоль цилиндрического стержня // ПММ. 1952. Т. XVI. Вып. 1.

19. *Рахматулин Х.А.* О распространении волны разгрузки вдоль стержня переменного предела упругости (задача о накоплении остаточных деформации) // ПММ. 1946. Т. X. Вып. 3.

20. *Рахматулин Х.А.* Исследование законов распространения упруго-пластических волн в среде с переменным пределом упругости // ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 1.

21. *Ленский В.С.* Об упругопластическом ударе стержня о жесткую преграду // ПММ. 1949. Т. XIII. № 2.

22. *Мочалов С.Д.* Графический метод исследования продольного упруго-пластического удара стержней // Ученые записки Томск. гос. ун-та. 1952. № 17.

23. *Рахматулин Х.А.* К проблеме распространения волн в упруго-пластической среде. Сб. института механики АН СССР, 1949.

24. *Lee E., Tupper S.* Analysis of inelastic deformation in a steel cylinder striking a rigid Target // Journ. of Appl. Mech. 21. 1951. № 1.

25. *Гвоздев А.А.* К расчету конструкции на действие взрывной волны // Строительная промышленность. 1943. № 2.

26. *Чебан В.Г.* Об упруго-пластическом соударении двух стержней, Дис. канд. мех.-мат. наук.– М.: МГУ, 1949.

27. *Чебан В.Г.* Продольное соударение упруго-пластических стержней // Вестник МГУ. 1952. № 6.

28. *Надеева Р.И.* Соударение упругого и упруго-пластического стержней // Вестник МГУ. 1953. № 5.

29. *Динник А.Н.* Удар и сжатие упругих твердых тел // Изв. Киевского политех. ин-та, 1909.

30. *Тейлор Д.* Испытания материалов при высоких скоростях // Механика. 1950. № 3 (сб. переводов).

31. *Hopkinson G.* Collected Scientific Paper VII. 1872. P. 316.

32. *Hopkinson B.* Proc. Roy. Soc. ser. A. 1905. V. LXXIV. P. 498.

33. *Brown A.* and *Vineent.* Proc. Inst. Mech. Eng. V. 141.

34. *Sternglas E.S., Stuart D.A.* An experimentel study of the propogation of transient langitudinal deformations in elastoplastic media // Journ. of Appl. Mech. 1953. V. 20. № 3.

35. *Clark D.S.* Поведение металлов при динамическом нагружении//Metall Progress. 1953. V. 64. №5. (См. Прикладная механика и машиностроение. 1954. Вып. 13. №15).

36. *Clark D., Wood D.* Свойства некоторых металлов и сплавов при растягивающем ударе / Transactions of American Society for Metalls, 42, 1950. (См. Механика. 1952. Вып. 1).

37. *Давиденков Н.Н.* Динамические испытания материалов. – М.: ОНТИ, 1936.

38. *Sears S.* Proc. Cambr. Phil. Soc. 1908. V. 21. №49.

39. *Weartheim G.* Ann. de Chem. et de Phys. 1844. № 12.

40. *Gruneisen E.* Ann. de Physik 52 (1907), 801.

41. *Давиденков Н., Якутович М.* Динамические испытания материалов // Приклад. физика. 1946. Вып. 5.

42. *Томилина Л.И., Остроумов Б.* Вестник электротехники. 1930. № 4. С. 144–146.

43. *Ленский В.С.* Метод построения динамической зависимости между напряжениями и деформациями по распределению остаточных деформации // Вестник МГУ. 1951. № 5.

44. *Надеева Р.И.* Об определении динамической зависимости между напряжениями и деформациями // Вестник МГУ. 1953. № 10.

45. *Веклич Н.А., Малышев Б.М.* Продолжительность удара упруго-пластического стержня // МТТ. 1972. №2. С.193–197.

46. *Saint-Venant A., Flamant A.* Resistance veve ou dynamique des solides Representation graphique des lois du choc lengetudinal. C. r. Acad. sci. – Paris. 1883. T.97.

47. *Веклич Н.А., Малышев Б.М.* Продольный удар жесткого тела по закрепленному стрежню // МТТ. 1972. № 6. С. 140–146.

48. *Hertz H.* Gesammelte Werke. Leipzig. 1895. V. 1. № 15.

49. *Timoshenko S.* Theory of Elasticity. Mc. Crew. – N. Y., 1934.

50. *Бартенев Г.М.* Метод измерения динамического модуля упругости высокоэластичных материалов в зависимости от степени сжатия // Заводская лаборатория. 1949. №11.

51. *Ленский В.С., Тарасова М.А.* Определение динамической диаграммы «напряжение – деформация резины» // Вестник МГУ. 1950. №12.

52. *Bell J.F.* Tech Rpt US Navy Contract N6-ONR-243. Johns Hopkins University. 1951. № 5.

53. *Alter B.E.K., Curtis C.W.J.* Appl. Phys. 1956. № 27. P. 1097.

54. *Bell J.F., Stein A.J.* Mec., 1962. № 1. P. 395.

55. *Bianchi G.* Stress Waves in Anelastic Solids H. Kolsky, W. Prager (Eds.). Springer-Verlag – Berlin, 1964. P. 101.

56. *DeVault G.P.* J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13. № 55.

57. *Hunter S.C.* Progress in Solid Mechanics, I. N. Sneddon, R. Hill (Eds.) – North Holland, Amsterdam. 1960. V. 1. P. 3.

58. *Karman T., Duwez P.J.* Appl. Phys. 1950. № 21. P. 987.

59. *Duwez P.E., Clark D.S.* Proc. ASTM. 1947. № 47. P. 502.

60. *Cristescu N.* Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads / U. S. Lindholm (Ed.). – N. Y.: Springer-Verlag. 1968. P. 329.

61. *Malvern L.E.* Behaviour of Materials Under Dynamic Loading / N. J. Huffington, Jr. – N. Y.: ASME. 1965. P. 81.

62. *Efron L., Malvern L.E.* Proc, SESA. 1969. № 26. P. 255.

63. *Ripperger E.A., Yeakley L.M.* Exp. Mech. 1963. № 3. P. 47.

64. *Bell J.F.* The Physics of Large Deformation of Crystalline Solids. N. Y.: Springer-Verlag. – N.Y., 1968.

65. *Bell J.F.* J.Appl. Phys. 1956. № 27. P. 1109.

66. *Bell J.F.* J.Appl. Phys. 1959. № 30. P. 196.

67. *Bell J.F.* J.Appl. Phys. 1960. № 31. P. 277.

68. *Bell J.F.* J.Appl. Phys. 1960. № 31. P. 2188.

69. Campbell W, R. Proc. SESA. 1952. № 10. P. 113.

70. *Bell J.F.* Behaviour of Materials Under Dynamic Loading / N. J. Huffington, Jr. (Ed.) – N. Y.: ASME. 1965. P. 19.

71. *Sperazza J.* Proc. 4th U.S. Nat. Cong. Appl. Mech. 1962.

72. *Clifton R.J.* Bodner S. R./J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1966. №33. P. 248.

73. *Craggs J.W.* Progress in Solid Mechanics / I. N. Sneddon, R. Hill (Eds.). – North Holland, Amsterdam. 1961. V. II. P. 141.

74. *Зукас Дж. А., Николас Т., Свифт Х. Ф. и др.* Динамика удара: Пер. с англ.; Под ред. С.С. Григоряна. – М.: Мир, 1985.

75. *Гольдсмит Б.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Стройиздат, 1965.

Глава 2

Теория поперечного удара по гибким деформируемым связям и балкам

Следует отметить, что постановка приводимых в § 2.1–2.8 задач распространения волн в гибких деформируемых связях отлична от обычно принятой «линейной» постановки тем, что в ней учтены такие факторы, как значительное отклонение формы нити (или троса) от прямолинейной, нелинейность зависимости напряжения от деформации, а также специфика граничных условий в области соприкосновения нити с ударяемым телом. В результате решение задач в такой постановке позволяет получить ответ на ряд интересующих практику вопросов, например о величине критической скорости при поперечном ударе, о характере движения тормозных элементов, прикрепленных к концам троса, о деформациях нитей основы при зевообразовании в процессе ткачества, об уточнении колебаний музыкальных струн (§ 2.8). Наконец, теоретические результаты § 2.1–2.6 (кроме их непосредственного применения при решении соответствующих практических задач) позволяют предложить метод экспериментального определения динамической диаграммы растяжения материалов.

Естественно, что проблема распространения волн с учетом перечисленных выше факторов представляет в математическом отношении весьма сложную задачу, поскольку приходится иметь дело с системой нелинейных уравнений в частных производных. В общем случае эта проблема может быть решена лишь с помощью различных численных методов: метода характеристик, метода конечных разностей и т.д.

Особенность большинства рассмотренных в § 2.1–2.6 задач состоит в том, что в них, благодаря специфике граничных и начальных условий, удается математически отделить вопрос о поперечном движении нити от вопроса распространения по ней продольных волн. Тем самым устанавливается определенная взаимосвязь результатов, полученных в гл. 1 и 2. В § 2.7 рассматривается применение асимптотических методов к решению поставленных задач. В § 2.9 приведены результаты исследований работы балок за пределом упругости под действием динамических нагрузок и изложены применяемые для этой цели методы.

§ 2.1. Система уравнений, описывающих процесс распространения волн при поперечном ударе [1]. Характеристики системы. Соотношения на волне излома нити

Пусть на гибкую натянутую деформируемую нить (или трос) начала действовать некоторая система сил, обусловленная, например, ударяемым телом и приводящая нить в движение.

Примем далее [1], за независимые переменные, определяющие процесс движения, время t и расстояние s_0, отсчитываемое вдоль нити от некоторой ее фиксированной точки до данной частицы в начальный момент времени (s_0 – лагранжева координата частицы). Вектор напряжения $\boldsymbol{T}_0$, вектор смещения $\boldsymbol{l}$ и плотность ρ являются функциями лишь s_0 и t. Для вывода уравнения сохранения массы обратимся к рис. 2.1, из которого следует, что длина ds_0 первоначальной частицы нити AB в момент t стала равной CD.

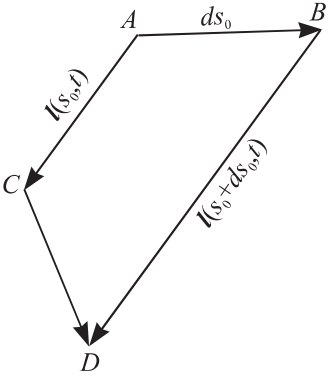


Рис. 2.1

Обозначая через $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{n}$ единичные орты соответственно вдоль и перпендикулярно к начальной прямолинейной форме нити и отмечая индексами τ и n проекции на них какого-либо вектора, можно для $\overline{CD}$ получить выражение

$$\overline{CD} = ds_0 \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{l}\left(s_0 + ds_0, t\right) - \boldsymbol{l}\left(s_0, t\right) = ds_0 \left[\boldsymbol{\tau} + \frac{\partial \boldsymbol{l}\left(s_0, t\right)}{\partial s_0} \right],$$

откуда имеем

$$\left|\overline{CD}\right| = ds_0 \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial s_0}\right)_{\boldsymbol{\tau}}\right]^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial s_0}\right)_n^2}.$$

Согласно условию сохранения массы частицы AB,

$$\rho_0 F_0 ds = ds \cdot \rho F \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial s_0}\right)_{\boldsymbol{\tau}}\right]^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial s_0}\right)_n^2}; \; \rho_0 F_0 = \rho F \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial s_0}\right)_{\boldsymbol{\tau}}\right]^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial s_0}\right)_n^2}. \quad (2.1)$$

Здесь $\rho_0(s_0)$ – начальная плотность; $F_0(s_0)$ – начальная и $F(s_0,t)$ – текущая площади поперечного сечения нити.

Применяя закон количества движения к частице AB, получим:

$$\rho_0 F_0 ds_0 \frac{\partial^2 \mathrm{l}}{\partial t^2} = (F\,\mathrm{T})_{s_0+\Delta s} - (F\,\mathrm{T})_{s_0} + \rho_0 F_0 ds_0\,\mathrm{P}\,;$$

$$\rho_0 F_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{l}}{\partial t^2} = \frac{\partial\left(F\boldsymbol{T}\right)}{\partial s_0} + \rho_0 F_0\,\boldsymbol{P}\,, \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{P}$ – вектор массовых сил, действующих на элемент $F_0 ds_0$.

В дальнейшем, если не оговорено особо, будем считать $\rho_0 = \mathrm{const}$, $\boldsymbol{P} = 0$, $F_0 = \mathrm{const}$; тогда уравнение (2.2) примет вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{l}}{\partial t^2} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial s_0}\,. \tag{2.3}$$

В этом уравнении и всюду в дальнейшем $\boldsymbol{T}$ обозначает напряжение, отнесенное к начальной площади, которое считается известной функцией относительного удлинения:

$$e = \frac{\left|\overline{CD}\right| - ds_0}{ds_0} = \sqrt{\left[1+\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial s_0}\right)_{\boldsymbol{\tau}}\right]^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial s_0}\right)_n^2} - 1\,.$$

Так как натяжение направлено вдоль нити, то $\boldsymbol{T} = T\boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{p}(t, s_0)$ – единичный вектор касательной к нити в момент t. Проектируя уравнение (2.3) на оси декартовой системы прямоугольных координат, будем иметь:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0}\left[T\cos(\boldsymbol{p}, x)\right];\ \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0}\left[T\cos(\boldsymbol{p}, y)\right];\ \rho_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0}\left[T\cos(\boldsymbol{p}, z)\right].$$

Здесь x, y, z – координаты вектора смещения $\boldsymbol{l}$. При движении нити в плоскости xOy предыдущие уравнения запишем следующим образом:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0}(T\cos\varphi)\,, \quad \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0}(T\sin\varphi)\,, \tag{2.4}$$

где φ – угол между осью Ox и ортом $\boldsymbol{p}$. Очевидно,

$$1 + \frac{\partial x}{\partial s_0} = (e+1)\cos\varphi\,; \quad \frac{\partial y}{\partial s_0} = (e+1)\sin\varphi\,.$$

Уравнения (2.4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cos\varphi \frac{\partial e}{\partial s_0} + \lambda^2 (1+e) \frac{\partial \cos\varphi}{\partial s_0}, \quad u = \frac{\partial x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \sin\varphi \frac{\partial e}{\partial s_0} + \lambda^2 (1+e) \frac{\partial \sin\varphi}{\partial s_0}, \quad v = \frac{\partial y}{\partial t},$$

где

$$a^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{dT}{de}; \quad \lambda^2 = \frac{T}{\rho_0 (1+e)}.$$

Так как

$$\frac{\partial \mu}{\partial s_0} = \frac{\partial e}{\partial s_0} \cos\varphi + (1+e) \frac{\partial \cos\varphi}{\partial s_0}, \quad \mu = \frac{\partial x}{\partial s_0},$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial s_0} = \frac{\partial e}{\partial s_0} \sin\varphi + (1+e) \frac{\partial \sin\varphi}{\partial s_0}, \quad \chi = \frac{\partial y}{\partial s_0},$$

то предыдущие уравнения могут быть преобразованы к следующим:

$$\begin{aligned} \cos\varphi \frac{\partial u}{\partial t} + \sin\varphi \frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \left(\cos\varphi \frac{\partial \mu}{\partial s_0} + \sin\varphi \frac{\partial \chi}{\partial s_0} \right), \\ \cos\varphi \frac{\partial v}{\partial t} - \sin\varphi \frac{\partial u}{\partial t} &= \lambda^2 \left(\cos\varphi \frac{\partial \chi}{\partial s_0} - \sin\varphi \frac{\partial \mu}{\partial s_0} \right). \end{aligned} \tag{2.4′}$$

С использованием очевидных соотношений

$$\frac{\partial u}{\partial s_0} = \frac{\partial \mu}{\partial t}; \quad \frac{\partial v}{\partial s_0} = \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{2.4″}$$

можно составить систему четырех дифференциальных уравнений в частных производных для функций u, v, μ, ν. Характеристики системы могут быть найдены способом, упомянутым в гл. 1, а именно из условия, что определенная комбинация ее уравнений должна содержать производные только по одной переменной; эта переменная соответствует одному из четырех семейств характеристик.

Общий способ нахождения характеристик весьма громоздок, поэтому мы применим прием, использованный в [4]. Пер-

вое уравнение системы с использованием третьего и четвертого запишем в виде

$$\cos\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial t}\pm a\frac{\partial u}{\partial s_0}\right)+\sin\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial t}\pm a\frac{\partial v}{\partial s_0}\right)=\pm a\left[\cos\varphi\left(\frac{\partial \mu}{\partial t}\pm a\frac{\partial \mu}{\partial s_0}\right)+\sin\varphi\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\pm a\frac{\partial \chi}{\partial s_0}\right)\right]$$

и аналогичным образом

$$\cos\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial t}\pm \lambda\frac{\partial v}{\partial s_0}\right)-\sin\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial t}\pm \lambda\frac{\partial u}{\partial s_0}\right)=\pm\lambda\left[\cos\varphi\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\pm \lambda\frac{\partial \chi}{\partial s_0}\right)-\sin\varphi\left(\frac{\partial \mu}{\partial t}\pm \lambda\frac{\partial \mu}{\partial s_0}\right)\right].$$

Отсюда видно, что характеристические переменные $\alpha_1(s_0,t)$, $\alpha_2(s_0,t)$, $\beta_1(s_0,t)$, $\beta_2(s_0,t)$ определяются уравнениями

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}-a\frac{\partial\alpha_1}{\partial s_0}=0;\ \frac{\partial\alpha_2}{\partial t}+a\frac{\partial\alpha_2}{\partial s_0}=0;\ \frac{\partial\beta_1}{\partial t}-\lambda\frac{\partial\beta_1}{\partial s_0}=0;\ \frac{\partial\beta_2}{\partial t}+\lambda\frac{\partial\beta_2}{\partial s_0}=0. \quad (2.5)$$

Соответствующие условия на характеристиках будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial\alpha_1}+a\cos\varphi\frac{\partial\mu}{\partial\alpha_1}+a\sin\varphi\frac{\partial\chi}{\partial\alpha_1}=0;\\
&\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial\alpha_2}+\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial\alpha_2}-a\cos\varphi\frac{\partial\mu}{\partial\alpha_2}-a\sin\varphi\frac{\partial\chi}{\partial\alpha_2}=0;\\
&\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial\beta_1}-\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\beta_1}+\lambda\cos\varphi\frac{\partial\chi}{\partial\beta_1}-\lambda\sin\varphi\frac{\partial\mu}{\partial\beta_1}=0;\\
&\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial\beta_2}-\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\beta_2}-\lambda\cos\varphi\frac{\partial\chi}{\partial\beta_2}+\lambda\sin\varphi\frac{\partial\mu}{\partial\beta_2}=0;
\end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

Рассмотрим линию $w(s_0,t)=0$, при переходе через которую составляющие относительного удлинения и скорости остаются непрерывными, а их производные могут испытывать разрыв ($w(s_0,t)=0$ – линия слабого разрыва). Можно показать (см., например, [2]), что скачки производных некоторой функции $\Phi(s_0,t)$ на линии слабого разрыва связаны соотношением

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial s_0}\right]:\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]=\frac{\partial w}{\partial s_0}:\frac{\partial w}{\partial t}=\alpha_\Phi,$$

где $\alpha_\Phi(s_0,t)$ – некоторая функция s_0 и t.

Из уравнений (2.4′) – (2.4″) легко найти величины разрывов производных u, v, μ, ν при переходе через линию $w(s_0,t)=0$, предварительно записав эти уравнения для точек справа и слева от линии слабого разрыва:

$$\cos\varphi\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]+\sin\varphi\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]=a^2\left(\cos\varphi\left[\frac{\partial\mu}{\partial s_0}\right]+\sin\varphi\left[\frac{\partial\chi}{\partial s_0}\right]\right);$$

$$\cos\varphi\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]-\sin\varphi\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\lambda^2\left(\cos\varphi\left[\frac{\partial\chi}{\partial s_0}\right]-\sin\varphi\left[\frac{\partial\mu}{\partial s_0}\right]\right);$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial s_0}\right]=\left[\frac{\partial\mu}{\partial t}\right];\quad \left[\frac{\partial v}{\partial s_0}\right]=\left[\frac{\partial\chi}{\partial t}\right].$$

Выражая разрывы производных с помощью этого соотношения, последние уравнения приведем к виду

$$(\cos\varphi\cdot\alpha_u+\sin\varphi\cdot\alpha_v)\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial w}{\partial s_0}\left(\cos\varphi\cdot\alpha_\mu+\sin\varphi\cdot\alpha_\chi\right);$$

$$(\cos\varphi\cdot\alpha_v-\sin\varphi\cdot\alpha_u)\frac{\partial w}{\partial t}=\lambda^2\frac{\partial w}{\partial s_0}\left(\cos\varphi\cdot\alpha_\chi-\sin\varphi\cdot\alpha_\mu\right);$$

$$\alpha_u\frac{\partial w}{\partial s_0}=\alpha_\mu\frac{\partial w}{\partial t};\quad \alpha_v\frac{\partial w}{\partial s_0}=\alpha_\chi\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Условием наличия линий слабого разрыва будет необращение в нуль хотя бы одной из функций α_u, α_v, α_μ, α_χ, для чего необходимо равенство нулю определителя написанной выше системы:

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi\dfrac{\partial w}{\partial t} & \sin\varphi\dfrac{\partial w}{\partial t} & -a^2\cos\varphi\dfrac{\partial w}{\partial s_0} & -a^2\sin\varphi\dfrac{\partial w}{\partial s_0} \\ -\sin\varphi\dfrac{\partial w}{\partial t} & \cos\varphi\dfrac{\partial w}{\partial t} & \lambda^2\sin\varphi\dfrac{\partial w}{\partial s_0} & \lambda^2\cos\varphi\dfrac{\partial w}{\partial s_0} \\ \dfrac{\partial w}{\partial s_0} & 0 & -\dfrac{\partial w}{\partial t} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial w}{\partial s_0} & 0 & -\dfrac{\partial w}{\partial t} \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда: 1) $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \pm\lambda \dfrac{\partial w}{\partial s_0}$; 2) $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \pm a \dfrac{\partial w}{\partial s_0}$.

Следовательно, скорость распространения волны слабого разрыва, как видно из сопоставления последней формулы с уравнением (2.5), равна характеристической скорости.

В случае 1 из приведенной выше системы уравнений найдем:

$$\alpha_u = \pm\lambda\alpha_\mu\,;\;\; \alpha_\nu = \pm\lambda\alpha_\chi\,;\;\; (a^2 - \lambda^2)(\cos\varphi\cdot\alpha_\mu + \sin\varphi\cdot\alpha_\chi) = 0.$$

Отсюда при $a \neq \lambda$ имеем $\cos\varphi\cdot\alpha_\mu + \sin\varphi\cdot\alpha_\chi = 0$ или

$$\cos\varphi\left[\frac{\partial\mu}{\partial s_0}\right] + \sin\varphi\left[\frac{\partial\nu}{\partial s_0}\right] = 0\,,\ \text{т. е.}\ \cos\varphi\left[\frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2}\right] + \sin\varphi\left[\frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2}\right] = 0\,.$$

Таким образом, с характеристической скоростью λ распространяются поперечные волны, причем они не вызывают разрыва $\dfrac{\partial e}{\partial s_0}$.

В случае 2 аналогичным образом при $\lambda^2 \neq a^2$ получим

$$\alpha_\mu\cos\varphi - \alpha_\chi\sin\varphi = 0\,;\quad \cos\varphi\left[\frac{\partial^2 x}{\partial s_0^2}\right] - \sin\varphi\left[\frac{\partial^2 y}{\partial s_0^2}\right] = 0\,.$$

Следовательно, с характеристической скоростью a распространяются продольные волны; на них производная $\dfrac{\partial e}{\partial s_0}$ терпит разрыв.

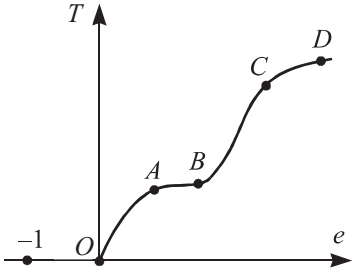


Рис. 2.2

При анализе случаев 1 и 2 предполагалось, что равенства $a^2 - \lambda^2 = 0$ и $(1+e)\dfrac{dT}{de} - T = 0$ не имеют места. Для материалов с упрочнением эти равенства определяют в плоскости e,T единственную точку встречи касательной, исходящей из точки (–1, 0), с диаграммой $T = T(e)$ (рис. 2.2). Сравним скорости распространения продольных и

поперечных волн в гибкой нити, выполненной из материала, характеризуемого этой диаграммой.

На отрезках OA и BC $(1+e)\dfrac{dT}{de} > T$, т. е. $\lambda < a$ и поперечные волны распространяются медленнее продольных. На отрезках AB и CD $(1+e)\dfrac{dT}{de} < T$, т. е. $a < \lambda$ и поперечные волны обгоняют продольные. В точках A, B, C $\lambda = a$, т. е. обе скорости одинаковы и соображения насчет двух типов волн теряют силу.

Очевидно, в идеально пластической нити (T = const) существуют лишь поперечные волны. Для упругих нитей поперечные волны распространяются медленнее продольных. Наконец, для пластических нитей с линейным упрочнением величина λ может быть как больше, так и меньше a: при $E' > T_s/(1+e_s)$ поперечные волны распространяются с большей скоростью, чем продольные, при $E' < T_s/(1+e_s)$ – картина обратная; при $E' = T_s/(1+e_s)$ обе волны накладываются друг на друга.

Приведенные результаты о типах волн, распространяющихся с характеристической скоростью, и их свойствах получены в [3]. Анализ проведен для общего, пространственного случая движения нити. Там же на основе выведенного уравнения характеристик проводится исследование различных типов волн для идеально пластической нити и для схемы линейного упрочнения при нагрузке или разгрузке в окрестности некоторой точки (s_0, t).

В соответствии с [1] рассмотрим условия в окрестности точки излома O, где части нити составляют между собой угол γ (рис. 2.3). Обозначим через b скорость абсолютного движения точки излома; индексами 1, 2 будем отмечать параметры соответственно слева и справа от этой точки. За время dt часть нити массой

$$\rho_2\left[b-\left(\frac{\partial 1}{\partial t}\right)_{2\tau}\right]F_2 dt$$

пройдет через точку излома и изменит под

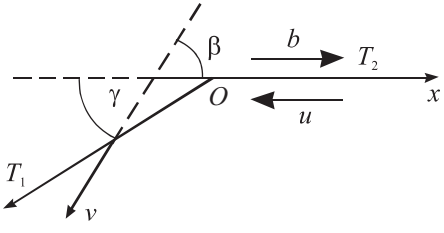


Рис. 2.3

влиянием импульса $\left(-\boldsymbol{T}_1+\boldsymbol{T}_2\right)dt\cdot F_0$ свою скорость на величину $\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_1-\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_2$, т. е.

$$F_2\rho_2\left[b-\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_{2\boldsymbol{\tau}}\right]\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_1-\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_2\right]=\left(\boldsymbol{T}_2-\boldsymbol{T}_1\right)F_0. \qquad (2.7)$$

За то же время dt масса $\rho_2F_2\left[b-\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_{2\tau}\right]dt$ займет слева объем $\left|b\boldsymbol{\tau}-\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_1\right|F_1dt$, поэтому

$$\rho_2F_2\left[b-\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_{2\tau}\right]=\rho_1\left|b\boldsymbol{\tau}-\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_1\right|F_1. \qquad (2.8)$$

Если учесть, что в силу (2.1)

$$\rho_0F_0=\rho_2F_2(1+e_2)=\rho_1F_1(1+e_1),$$

то условия (2.7) и (2.8) преобразуются соответственно к виду

$$\rho_0\left[b-\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_{2\tau}\right]\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_1-\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_2\right]=\left(\boldsymbol{T}_2-\boldsymbol{T}_1\right)(1+e_2); \qquad (2.9)$$

$$\frac{b-\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_{2\boldsymbol{\tau}}}{1+e_2}=\frac{\left|b\boldsymbol{\tau}-\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_1\right|}{1+e_1}. \qquad (2.10)$$

Докажем, что значения комбинаций $T/(1+e)$ справа и слева от точки излома одинаковы. В системе координат с началом в точке излома и направлением оси Ox, совпадающим с $\boldsymbol{\tau}$, уравнения (2.9) в проекциях запишутся так:

$$\rho_0\left(b+u\right)\left(v\cos\beta-u\right)=\left(T_1\cos\gamma-T_2\right)\left(1+e_2\right); \qquad (2.11)$$

$$\rho_0\left(b+u\right)v\sin\beta=T_1\sin\gamma\left(1+e_2\right). \qquad (2.12)$$

Здесь $\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_1=-v\cos\beta\boldsymbol{\tau}-v\sin\beta\boldsymbol{n}$; $\left(\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t}\right)_2=-u\boldsymbol{\tau}$. Уравнение (2.10) при этом примет вид

$$\frac{b+u}{1+e_2}=\frac{\sqrt{(b+v\cos\beta)^2+v^2\sin^2\beta}}{1+e_1}. \qquad (2.13)$$

Кроме того, имеет место кинематическое соотношение

$$b\sin\gamma=v\sin(\beta-\gamma), \qquad (2.14)$$

выражающее тот факт, что с точностью до $(dt)^2$ за время dt угол γ сохранит свою величину.

Умножив уравнения (2.11) и (2.12) соответственно на $\sin\gamma$ и $\cos\gamma$, сложим результаты, при этом получим:

$$\rho_0(b+u)\left[v\sin(\gamma-\beta)-u\sin\gamma\right]=-T_2\sin\gamma(1+e_2). \qquad (2.15)$$

Подставив (2.14) в (2.15), найдем:

$$\rho_0(b+u)^2=(1+e_2)T_2(e_2). \qquad (2.16)$$

Соотношение (2.16) устанавливает связь между скоростью b и деформацией e_2. Далее из уравнения (2.13) получаем

$$\frac{(b+u)^2(1+e_1)^2}{(1+e_2)^2}=v^2+2vb\cos\beta+b^2. \qquad (2.17)$$

Из (2.12) и (2.11) следует, что

$$v\sin\beta=\frac{T_1\sin\gamma(1+e_2)}{\rho_0(b+u)},$$

$$v\cos\beta=\frac{T_1\cos\gamma(1+e_2)}{\rho_0(b+u)}-\frac{T_2(1+e_2)}{\rho_0(b+u)}+u=\frac{T_1\cos\gamma(1+e_2)}{\rho_0(b+u)}-b.$$

Возведя два последних уравнения в квадрат и сложив, получим

$$v^2=\frac{T_1^2(1+e_2)^2}{\rho_0^2(b+u)^2}-\frac{2T_1\cos\gamma(1+e_2)}{\rho_0(b+u)}+b^2.$$

Подставим в (2.17) выражение для v^2 и $v\cos\beta$:

$$\frac{(b+u)\left(b+u\right)^2(1+e_1)^2}{(1+e_2)^2}=\frac{T_1^2(1+e_2)^2}{\rho_0^2(b+u)^2}-\frac{2bT_1\cos\gamma(1+e_2)}{\rho_0(b+u)}+$$

$$+b^2+\frac{2T_1\cos\gamma(1+e_2)}{\rho_0(b+u)}b-2b^2+b^2.$$

Приведя подобные члены и имея в виду (2.16), найдем:

$$\frac{T_2^2}{(1+e_2)^2}=\frac{T_1^2}{(1+e_1)^2}.$$

Последнее уравнение допускает решение $e_1=e_2=e$; $T_1=T_2=T$.

В ряде случаев возможно и другое решение, которое ясно из построений рис. 2.4 и может привести к иным картинам движения нити, отличным от изложенных ниже [6]. В дальнейшем ограничимся приведением результатов, основанных на использовании решения $e_1=e_2$; $T_1=T_2$. Очевидно, для упругих деформаций это решение единственное.

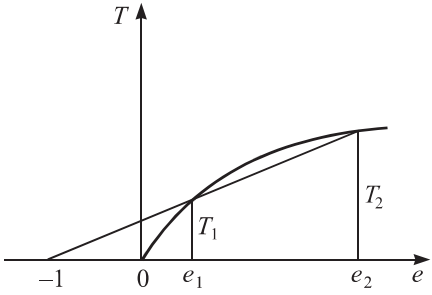


Рис. 2.4

Уравнения (2.11) и (2.12) теперь могут быть записаны в виде

$$\rho_0\left(b+u\right)\left(v\cos\beta-u\right)=T\left(1+e\right)\left(\cos\gamma-1\right); \qquad (2.18)$$

$$\rho_0\left(b+u\right)v\sin\beta=T\sin\gamma\left(1+e\right). \qquad (2.19)$$

В этом случае уравнение (2.13) является следствием (2.18), (2.19) и (2.14).

Определим теперь траекторию $s_0^*(t)$ движения по частицам нити точки излома. Очевидно,

$$b=\frac{d}{dt}\left[s_0^*(t)+x\left[s_0^*(t),t\right]\right]=\frac{ds_0^*}{dt}+\frac{\partial x}{\partial s_0}\frac{ds_0^*}{dt}-u$$

или

$$b+u=\frac{ds_0^*}{dt}(1+e).$$

Последнее равенство с учетом (2.16) преобразуем к виду

$$\frac{ds_0^*}{dt}=\pm\sqrt{\frac{T}{\rho_0(1+e)}}. \qquad (2.20)$$

Таким образом, скорость движения волны сильного разрыва (точки излома) по частицам нити совпадает со скоростью распространения поперечных волн.

§ 2.2. Точечный удар по гибкой деформируемой нити бесконечной длины

Если тело в процессе удара соприкасается с нитью на достаточно малом протяжении, область соприкосновения можно идеализировать состоящей из одной точки. Как будет показано далее, случай точечного удара будет иметь место еще и тогда, когда угол при вершине выпуклого тела таков, что при данной скорости удара тело соприкасается с нитью лишь в вершине.

Постановка и решение задачи о точечном ударе по гибкой деформируемой нити бесконечной длины для случая движения ударяемого тела с постоянной скоростью v_0 приведены в [1, 5][1].

Пусть β_0 – угол встречи ударяемого тела с натянутой нитью, начальные характеристики которой T_0, ρ_0, e_0 постоянны. Уравнения (2.4) для рассматриваемого случая запишем в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0}\left[\frac{T}{1+e}\left(1+\frac{\partial x}{\partial s_0}\right)\right]; \tag{2.21}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0}\left[\frac{T}{1+e}\frac{\partial y}{\partial s_0}\right]. \tag{2.22}$$

Введем новые безразмерные переменные $\bar{x} = x/(v_0 t)$; $\bar{y} = y/(v_0 t)$. Величины $\bar{x}$, $\bar{y}$ должны зависеть лишь от безразмерных параметров, которые можно составить из всех встречающихся в задаче величин. Таким единственным параметром является $z = s_0/(v_0 t)$. Следовательно, $\bar{x} = \bar{x}(z)$, $\bar{y} = \bar{y}(z)$ и уравнения (2.21), (2.22) принимают вид

$$z^2\bar{x}'' = \frac{d}{dz}\left[\frac{T(1+\bar{x}')}{\rho_0 v_0^2(1+e)}\right]; \quad z^2\bar{y}'' = \frac{d}{dz}\left[\frac{T\bar{y}'}{\rho_0 v_0^2(1+e)}\right].$$

---

[1] В зарубежных статьях встречаются ссылки на неопубликованную работу Тейлора, рассмотревшего в 1942 г. проблему распространения волн в упругопластической нити. В аналогичной литературе эта проблема была рассмотрена Х.А. Рахматулиным в 1939 г. Статья *Cole J.D.*, *Dougherty C.B.* and *Huth J.H.* Constant-Strain Waves in Strings // Jour. of Applied Mechanics. 1953. V. 20. № 4, повторяет результаты, полученные для упругой нити в [1].

Два последних уравнения можно переписать следующим образом:

$$\left[z^2-\frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+e)}\right]\overline{x}''=(1+\overline{x}')\frac{d}{dz}\left[\frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+e)}\right]; \qquad (2.23)$$

$$\left[z^2-\frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+e)}\right]\overline{y}''=\overline{y}'\frac{d}{dz}\left[\frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+e)}\right]. \qquad (2.24)$$

Если

$$z^2-\frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+e)}\neq 0\,,\ \ \frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+e)}\neq \text{const}\,, \qquad (2.25)$$

то, разделив (2.23) на (2.24), найдем:

$$\frac{\overline{x}''}{1+\overline{x}'}=\frac{\overline{y}''}{\overline{y}'}\,,\ \ 1+\overline{x}'=c_1\overline{y}'. \qquad (2.26)$$

Используя интеграл (2.26), уравнение (2.23) (или (2.24)) приведем к виду:

$$c_1\left[z^2-\frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+e)}\right]\overline{y}''=c_1\overline{y}'\,\overline{y}''\sqrt{1+c_1^2}\,\frac{d}{de}\left[\frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+e)}\right], \qquad (2.27)$$

причем $1+e=\overline{y}'\sqrt{1+c_1^2}$.

Уравнение (2.27) распадается на следующие:

$$z^2-\frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+e)}=(1+e)\frac{d}{de}\left[\frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+e)}\right], \qquad (2.28)$$

$$c_1=0\,,\ \ \overline{y}''=0\,. \qquad (2.29)$$

Необходим дополнительный анализ получения уравнений (2.29), так как первое из них является частным решением уравнения (2.26), а второе приводит к нарушению второго условия (2.25). При $c_1=0$ непосредственно из (2.23) и (2.24) видно, что уравнение (2.28) по-прежнему имеет место. Следовательно, общими интегралами системы (2.21) и (2.22) при выполнении условий (2.25) являются:

$$1+\overline{x}'=c_1\overline{y}';$$

$$z^2-\frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+e)}=(1+e)\frac{d}{de}\left[\frac{T}{\rho_0 v_0^2(1+e)}\right]. \qquad (2.30)$$

Рассмотрим теперь случай, когда хотя бы одно из условий (2.25) не выполнено. Допустим, например, что

$$z^2 - \frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1+e)} = 0 .$$

Учитывая, что $T = T(e)$, а следовательно, $e = e(z)$, из (2.23) и (2.24) имеем:

$$(1+\overline{x}')\frac{de}{dz}\frac{d}{de}\left[\frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1+e)}\right] = 0 ; \quad \overline{y}'\frac{de}{dz}\frac{d}{de}\left[\frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1+e)}\right] = 0 .$$

Легко видеть, что получаемые отсюда три решения:

$$1)\ \frac{de}{dz} = 0 ; \qquad 2)\ \frac{d}{de}\left[\frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1+e)}\right] = 0 ; \qquad 3)\ 1+\overline{x}' = 0 ;\ \overline{y}' = 0 ,$$

приводят к случаю, когда $c = \text{const}$, который имеет место и тогда, когда не выполняется второе условие (2.25). Как видно из уравнений (2.23) и (2.24), за исключением тривиального случая $z = \text{const}$, $e = \text{const}$, при невыполнении хотя бы одного из условий (2.25) решение системы (2.23), (2.24) будет следующим:

$$1 + x' = \text{const},\ \overline{y}' = \text{const}. \tag{2.31}$$

Таким образом, все нетривиальные решения уравнений (2.23) и (2.24) исчерпываются интегралами вида (2.30) или (2.31). Их удобно преобразовать соответственно к следующей форме:

$$x + s_0 = c_1 y + c_2 t ; \qquad \left(\frac{s_0}{t}\right)^2 = \frac{1}{\rho_0}\frac{dT}{de} = a^2(e); \tag{2.32}$$

$$x + s_0 = c_3 s_0 + c_4 t ; \qquad y = c_5 s_0 + c_6 t. \tag{2.33}$$

Решения (2.32) и (2.33) имеют простой физический смысл: первое означает, что часть нити в каждый момент решения имеет прямолинейную форму и по ней распространяется волна Римана; второе выражает условие равномерного движения прямолинейной части нити, имеющей постоянную деформацию.

Чтобы получить соотношение между деформацией и напряжением на волне Римана, продифференцируем первое соотношение (2.32) по s_0:

$$c_1 \frac{\partial y}{\partial s_0} = \frac{\partial x}{\partial s_0} + 1 .$$

Следовательно,

$$e=\sqrt{1+\frac{1}{c_1^2}}\left(1+\frac{d\overline{x}}{dz}\right)-1.$$

Отсюда

$$\alpha(z+\overline{x})-z=\int edz\ ;\ \ \alpha=\sqrt{1+1/c_1^2}\ .$$

Для скорости имеем

$$\frac{\partial x}{\partial t}=v_0\left(\overline{x}-z\frac{d\overline{x}}{dz}\right).$$

Подставив сюда выражение для $\overline{x}$ и $\frac{d\overline{x}}{dz}$, получим

$$\frac{\partial x}{\partial t}=v_0\left[\frac{1}{\alpha}\left(z+\int_0^z edz\right)-z-z\left(\frac{1+e}{\alpha}-1\right)\right].$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание соотношения (2.32), находим:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=-\frac{1}{\alpha}\int_0^e a(e)de+\text{const};\quad \frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{1}{c_1\alpha}\int_0^e a(e)de+\text{const}. \qquad (2.34)$$

При одномерном движении из (2.34) получаем известное (см. §1.2) соотношение между скоростью и деформацией на волне Римана:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\psi(e)-\psi(e_0)\,. \qquad (2.35)$$

Покажем, что интегралы (2.31) и (2.32) приводят к следующему решению поставленной задачи. В каждый момент времени нить имеет изображенную на рис. 2.5 форму; по начальным направлениям AB и $A'B'$ распространяются волны Римана, которые или заканчиваются до точек излома A и A', или захватывают часть отрезков OA и OA'. За волнами Римана, вплоть до точки удара, расположены области постоянных деформаций.

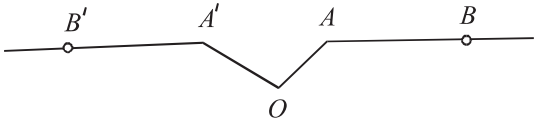


Рис. 2.5

Рассмотрим вначале тот случай, когда задний фронт волны Римана распространяется со скоростью, большей скорости перемещения волны сильного разрыва (точки излома, рис. 2.6). Толщина нити и ее изменение по длине показаны на рис. 2.6 утрировано. Принятые обозначения таковы: v и β – скорости и их направления для частицы нити на участках излома; u – максимальная скорость частицы в области продольного движения; b – абсолютная скорость распространения волны сильного разрыва; γ – угол наклона участков нити к первоначальному направлению; e,T – максимальные удлинение и натяжение. Индексами 1, 2 отмечаются параметры соответственно для правой и левой ветвей нити.

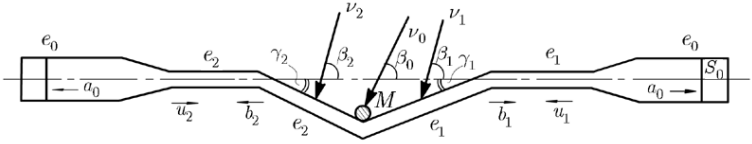


Рис. 2.6

Используя соотношение (2.35), находим:

$$u = \psi(e_1) - \psi(e_0)\,. \tag{2.36}$$

Уравнения (2.18), (2.19) и (2.14) в принятых обозначениях запишутся так:

$$\rho_0(b_1 + u_1)(v_1\cos\beta_1 - u_1) = T_1(\cos\gamma_1 - 1)(1 + e_1); \tag{2.37}$$

$$\rho_0(b_1 + u_1)v_1\sin\beta_1 = T_1\sin\gamma_1(1 + e_1); \tag{2.38}$$

$$b_1\sin\gamma_1 = v_1\sin(\beta_1 - \gamma_1). \tag{2.39}$$

Поскольку скорости v_0, v_1, b_1 и угол β_0 постоянны, из рис. 2.6 имеем следующее кинематическое соотношение:

$$\mathrm{tg}\gamma_1 = \frac{v_0\sin\beta_0}{b_1 + v_0\cos\beta_0}\,. \tag{2.40}$$

Кроме пяти уравнений (2.36)–(2.40), столько же аналогичных уравнений имеем для левой от ударяющего тела части нити:

$$u_2 = \psi(e_2) - \psi(e_0)\,; \tag{2.36′}$$

$$\rho_0(b_2 + u_2)(-v_2\cos\beta_2 - u_2) = T_2(\cos\gamma_2 - 1)(1 + e)\,; \tag{2.37′}$$

$$\rho_0(b_2 + u_2)v_2\sin\beta_2 = T_2\sin\gamma_2(1 + e_2)\,; \tag{2.38′}$$

$$b_2\sin\gamma_2 = v_2\sin(\beta_2 - \gamma_2)\,; \tag{2.39′}$$

$$\mathrm{tg}\gamma_2 = \frac{v_0 \sin\beta_0}{b_2 + v_0 \cos\beta_0}. \qquad (2.40')$$

К этим уравнениям необходимо добавить два условия в точке M (рис. 2.7): условие непрерывности смещения

$$\frac{MN}{1+e_2} = \frac{LK}{1+e_1},$$

принимающее вид

$$(1+e_1)\sqrt{v_2^2 + v_0^2 - 2v_0 v_2 \cos(\beta_2 - \beta_0)} = \\ = (1+e_2)\sqrt{v_1^2 + v_0^2 - 2v_0 v_1 \cos(\beta_1 - \beta_0)}, \qquad (2.41)$$

и формулу Эйлера для натяжения нити, переброшенной через шкив:

$$T_1 - \rho_0 u_s^2 = e^{f(\gamma_1+\gamma_2)}(T_2 - \rho_0 u_s^2), \qquad (2.42)$$

где f – коэффициент трения; $u_s = v_0 \cos\beta_0 - v_1 \cos\beta_1$ – скорость скольжения. Всего получено 12 уравнений со столькими же неизвестными, которые следует выразить через v_0, β_0, e_0.

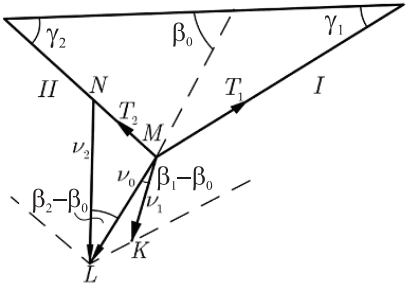


Рис. 2.7

Рассмотрим ряд конкретных случаев.

Удар при отсутствии трения. Если коэффициент трения $f = 0$, то из (2.42) имеем $T_1 = T_2 = T$, а следовательно, $e_1 = e_2 = e$; $u_1 = u_2 = u$; $b_1 = b_2 = b$. Тогда уравнение (2.41) принимает вид:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2v_0\left[\cos\beta_0\left(v_2\cos\beta_2 - v_1\cos\beta_1\right) + \sin\beta_0\left(v_2\sin\beta_2 - v_1\sin\beta_1\right)\right]. \qquad (2.43)$$

Из (2.37), (2.38), (2.37′), (2.38′) можно получить:

$$v_1\cos\beta_1 = u + \frac{T(1+e)(\cos\gamma_1 - 1)}{\rho_0(b+u)}, \quad v_1\sin\beta_1 = \frac{T(\ \ )(1+e)\sin\gamma_1}{\rho_0(b+u)};$$

$$v_2\cos\beta_2 = u - \frac{T(1+e)(\cos\gamma_2 - 1)}{\rho_0(b+u)}, \quad v_2\sin\beta_2 = \frac{T(1+e)\sin\gamma_2}{\rho_0(b+u)};$$

$$v_2^2 - v_1^2 = v_2^2(\cos^2\beta_2 + \sin^2\beta_2) - v_1^2(\cos^2\beta_1 + \sin^2\beta_1) =$$

$$= (v_2\cos\beta_2 - v_1\cos\beta_1)(v_2\cos\beta_2 + v_1\cos\beta_1) +$$

$$+ (v_2\sin\beta_2 - v_1\sin\beta_1)(v_2\sin\beta_2 + v_1\sin\beta_1),$$

а соотношение (2.43) преобразовать к виду

$$\frac{T(1+e)(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)}{\rho_0(b+u)}\left[2u + \frac{T(1+e)(\cos\gamma_2 + \cos\gamma_1 - 2)}{\rho_0(b+u)}\right] +$$

$$+ \frac{T(1+e)(\sin\gamma_2 - \sin\gamma_1)}{\rho_0(b+u)} \cdot \frac{T(1+e)(\sin\gamma_2 + \sin\gamma_1)}{\rho_0(b+u)} =$$

$$= 2v_0\left\{-\cos\beta_0\left[2u + \frac{T(1+e)(\cos\gamma_2 + \cos\gamma_1 - 2)}{\rho_0(b+u)}\right] +\right.$$

$$\left. + \sin\beta_0 \frac{T(1+e)(\sin\gamma_2 - \sin\gamma_1)}{\rho_0(b+u)}\right\}$$

или

$$(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)\left[2u + (b+u)(\cos\gamma_1 + \cos\gamma_2 - 2)\right] +$$

$$+ (\sin\gamma_2 - \sin\gamma_1)(\sin\gamma_2 + \sin\gamma_1)(b+u) =$$

$$= 2v_0\left[-\cos\beta_0(\cos\gamma_2 + \cos\gamma_1 - 2) - \frac{2u\cos\beta_0}{b+u} + \sin\beta_0(\sin\gamma_2 - \sin\gamma_1)\right].$$

Отсюда

$$b(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2) = v_0\sin\beta_0(\sin\gamma_2 - \sin\gamma_1) + v_0\cos\beta_0(\lambda - \cos\gamma_1 - \cos\gamma_2), \tag{2.44}$$

где $\lambda = 2b/(b+u)$.

Из (2.40) и (2.40′) имеем:

$$\left.\begin{aligned} &v_0\cos\beta_0 = \frac{b(\mathrm{tg}\gamma_2 - \mathrm{tg}\gamma_1)}{\mathrm{tg}\gamma_1 + \mathrm{tg}\gamma_2}; \quad v_0\sin\beta_0 = \frac{2b\,\mathrm{tg}\gamma_1\mathrm{tg}\gamma_2}{\mathrm{tg}\gamma_1 + \mathrm{tg}\gamma_2}; \\ &\mathrm{tg}\beta_0 = \frac{2\mathrm{tg}\gamma_1\mathrm{tg}\gamma_2}{\mathrm{tg}\gamma_2 - \mathrm{tg}\gamma_1}; \quad \mathrm{ctg}\gamma_1 = 2\mathrm{ctg}\beta_0 + \mathrm{ctg}\gamma_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

Окончательно уравнение (2.44) можно записать так:

$$\left(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2\right)\left(\mathrm{tg}\gamma_1 + \mathrm{tg}\gamma_2\right) =$$

$$= 2\left(\sin\gamma_2 - \sin\gamma_1\right)\mathrm{tg}\gamma_1\mathrm{tg}\gamma_2 + \left(\lambda - \cos\gamma_1 - \cos\gamma_2\right)\left(\mathrm{tg}\gamma_2 - \mathrm{tg}\gamma_1\right). \quad (2.46)$$

Уравнения (2.45) и (2.46) совместно с условиями (2.16) и (2.36) позволяют решить до конца задачу об определении возникающих при косом ударе деформаций по заданной скорости удара и углу β_0. При проведении расчетов целесообразно для некоторых e_0 и β_0 сначала задаться значением γ_1, из (2.45) определить соответствующее ему γ_2, а из (2.46) определить λ и, наконец, пользуясь заранее построенным графиком $\lambda = \lambda(e, e_0)$, найти e и b. Величина скорости v_0, вызывающая появление в нити максимальной деформации e, определяется из уравнения (2.45).

Для примера рассмотрим практически важный случай, когда диаграмма растяжения может быть представлена ломаной $T = Ee$ при $e < e_s$; $T = T_s + e_1(e - e_s)$ при $e > e_s$. В силу (2.36) имеем $u = a_0(e - e_0)$ при $e < e_s$; $u = a_0(e_s - e_0) + a_1(e - e_s)$ при $e > e_s$.

Если максимальная деформация e превосходит предел упругости, т. е. $e > e_s$, то

$$\lambda = \frac{2\bar{b}}{\bar{b} + e_s - e_0 + \bar{a}_1(e - e_s)}; \quad (2.47)$$

$$\left[\bar{b} + e_s - e_0 + \bar{a}_1(e - e_s)\right]^2 = (1 + e)\left[e_s + \bar{a}_1^2(e - e_s)\right], \quad (2.48)$$

где $\bar{b} = b / a_0$; $\bar{a}_1 = a_1 / a_0$; $a_1^2 = E_1 / \rho_0$; $a_0^2 = E / \rho_0$. Отсюда имеем следующее выражение для $\bar{b}$:

$$\bar{b} = \sqrt{(1 + e)\left[e_s + \bar{a}_1^2(e - e_s)\right]} - \left[e_s - e_0 + \bar{a}_1(e - e_s)\right]. \quad (2.49)$$

Исключив $\bar{b}$ из (2.47), приходим к квадратному уравнению, связывающему e с λ:

$$(\lambda^2 - 4\lambda)\bar{a}_1^2 e + (2 - \lambda)^2(\bar{a}_1^2 - \bar{a}_1^2 e_s + e_0) - 8\bar{a}_1(e_s - e_0) + 8\bar{u}^2 e_s +$$

$$+ (2 - \lambda)^2(e_s - \bar{a}_1^2 e_s) - 4(e_s - e_0)^2 + 8e_s(e_s - e_0) - 4\bar{a}_1^2 e_s^2 = 0. \quad (2.50)$$

В табл. 2.1 приведены значения γ_1, рассчитанные по формуле (2.45) для фиксированных значений β_0 и различных значениях γ_2. Для этих значений углов по формулам (2.46), (2.50), (2.49) и (2.45), поочередно вычисляются λ, e, $\bar{b}$ и, наконец, v.

Таблица 2.1

β_0	Значения γ_2								
	10°	**13°**	**18°**	**23°**	**30°**	**35°**	**40°**	**50°**	**55°**
90°	10°00'	13°00'	18°00'	23°00'	30°00'	35°00'	40°00'	50°	–
70°	8°50'	11°10'	14°40'	18°00'	22°10'	24°50'	27°30'	32°30'	–
50°	7°40'	9°20'	11°50'	14°00'	16°20'	17°50'	19°10'	21°40'	–
30°	6°10'	7°20'	8°40'	9°40'	10°50'	11°30'	12°10'	13°00'	13°30'

В табл. 2.2 дана зависимость деформации e и скорости $\overline{b}$ от скорости удара $\overline{v}_0 = v_0 / a_0$ для различных β_0.

Таблица 2.2

$\beta_0 = 90^\circ$; $e_0 = 0$; $\overline{a}_1^2 = 0{,}05$; $e_s = 0{,}002$											
$\overline{v}_0$	0,0135	0,0167	0,0192	0,0245	0,0347	0,045	0,0518	0,64	0,0661	0,0742	0,085
e	0,002	0,006	0,010	0,020	0,04	0,060	0,080	0,100	0,120	0,140	0,160
$\overline{b}$	0,0426	0,0441	0,0453	0,0481	0,0530	0,05696	0,06045	0,0656	0,0655	0,068	0,0707
$\beta_0 = 90^\circ$; $e_0 = 0$; $\overline{a}_1^2 = 0{,}05$; $e_s = 0{,}002$											
$\overline{v}_0$	0,00978	0,01295	0,0164	0,02035	0,0228	0,0283	0,0391	0,0381	0,0423	0,0511	
e	0,002	0,006	0,010	0,016	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,080	
$\overline{b}$	0,0436	0,0491	0,0463	0,0481	0,0491	0,0518	0,054	0,0563	0,0579	0,0614	
$\beta_0 = 70^\circ$; $e_0 = 0$; $\overline{a}_1^2 = 0{,}05$; $e_s = 0{,}002$											
$\overline{v}_0$	0,0139	0,0182	0,0254	0,0311	0,0376	0,0554					
e	0,006	0,010	0,0219	0,0326	0,0444	0,0787					
$\overline{b}$	0,0450	0,0464	0,0499	0,0525	0,0551	0,0612					
$\beta_0 = 50^\circ$; $e_0 = 0$; $\overline{a}_1^2 = 0{,}05$; $e_s = 0{,}002$											
$\overline{v}_0$	0,0113	0,0148	0,0188	0,02426	0,0286	0,0337	0,0423				
e	0,0002	0,0042	0,008	0,0146	0,0207	0,0323	0,0455				
$\overline{b}$	0,0431	0,0445	0,0458	0,0478	0,0496	0,00525	0,0555				
$\beta_0 = 30^\circ$; $e_0 = 0$; $\overline{a}_1^2 = 0{,}05$; $e_s = 0{,}002$											
$\overline{v}_0$	0,0142	0,0183	0,0217	0,0263	0,0297	0,0332	0,036	0,0388	0,0425		
e	0,0004	0,0023	0,0058	0,0082	0,0114	0,015	0,0185	0,0223	0,029		
$\overline{b}$	0,043	0,0439	0,0446	0,0458	0,0472	0,0487	0,049	0,051	0,0517		

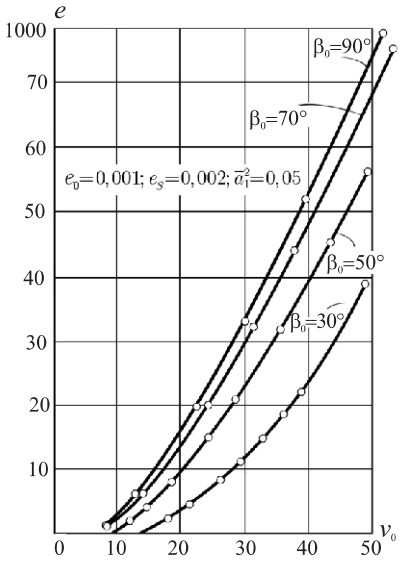


Рис. 2.8

На рис. 2.8 приведен график $e = e(v_0)$ при различных значениях β_0.

Нормальный удар. В этом случае, ввиду симметрии

$$T_1 = T_2 = T;\ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma;\ \beta_1 = \beta_2 = \beta_0 = \pi/2;$$
$$e_1 = e_2 = e;\ u_1 = u_2 = u;\ v_1 = v_2 = v_0;\ b_1 = b_2 = b. \tag{2.51}$$

Условия (2.51) заменяют уравнения (2.36′)–(2.40′), (2.40)–(2.42). Оставшиеся уравнения (2.36) – (2.39) значительно упрощаются:

$$u = \psi(e) - \psi(e_0)\ ;\ \rho_0(b+u)u = T(1-\cos\gamma)(1+e)\ ;$$
$$\rho_0(b+u)v_0 = T\sin\gamma(1+e)\ ,\ v_0 = b\,\mathrm{tg}\gamma$$

и после несложных преобразований принимают вид:

$$u = \psi(e) - \psi(e_0)\ , \tag{2.52}$$
$$\rho_0(b+u)^2 = T(1+e)\ , \tag{2.53}$$
$$b + u = b\sec\gamma\ , \tag{2.54}$$
$$v_0 = b\,\mathrm{tg}\gamma\ . \tag{2.55}$$

Если $T = Ee$, то из (2.52) и (2.53) находим:

$$u = a_0(e - e_0)\ ;\ \ b = a_0\sqrt{e(1+e)} - a_0(e - e_0)\ .$$

Из уравнений (2.53) – (2.55) получаем:

$$v_0^2 + b^2 = \frac{T}{\rho_0}(1+e) = a_0^2 e(1+e)$$

или

$$\overline{v}_0 = \sqrt{2(e - e_0)\sqrt{e(1+e)} - (e - e_0)^2}\ ;\ \ \overline{v}_0 = v_0 / a_0\ .$$

При отсутствии начальных натяжений и малых значениях e

$$e \approx \overline{v}_0^{4/3} / \sqrt[3]{4}\ ;\quad \overline{b} \approx \overline{v}_0^{2/3} / \sqrt[3]{2} = 0{,}8 v_0^{2/3} a_0^{1/3}\ ;\ \ \mathrm{tg}\gamma \approx 1{,}25 \cdot \sqrt[3]{v_0 / a_0}\ . \tag{2.56}$$

Уравнение (2.56) показывает, что угол γ имеет большую величину даже при малых скоростях. Определим скорость v_0, которая вызывала бы у железной проволоки предельные упругие деформации. Пусть $e_s \approx 0{,}002$, тогда из (2.56) имеем $\overline{v}_{0s} = \sqrt{2} e_s^{3/4} = 0{,}011$; $v_{0s} \approx 55$ м/с. Таким образом, для перехода материала проволоки за предел упругости требуются значительные скорости. Для сильно натянутой нити с малыми скоростями удара можно принять $e \approx e_0$. В этом случае $b = a_0\sqrt{e_0} = \sqrt{T_0 / \rho_0}$, т.е. скорость распространения волны сильного разрыва оказывается равной скорости звука в натянутой струне. Заметим, что при ударе по струне вдоль нее также побежит волна продольного растяжения, которая в обычной теории колебания струны во внимание не принимается.

Косой удар при отсутствии скольжения. В этом случае $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$; $v_1 = v_2 = v_0$; соотношения (2.40) и (2.40′) тождественны (2.39) и (2.39′), а уравнения связи (2.41) и (2.42) по смыслу постановки задачи не должны приниматься во внимание. Поэтому задача о косом ударе сводится к определению восьми неизвестных из восьми уравнений (2.36) – (2.39), (2.36′) – (2.39′), причем каждая из систем (2.36) – (2.39), (2.36′) – (2.39′) может быть решена независимо от другой. В предельном случае для $\beta_0 = 0$, т.е. при чисто продольном ударе, из уравнений (2.37) и (2.38), как и следовало ожидать, имеем $\gamma_1 = 0$; $v_1 = u_1$.

В задачах, рассмотренных выше, полагали, что задний фронт волны Римана распространяется со скоростью, большей скорости перемещения точки излома, т.е. в соответствии с (2.20) при

$$\frac{ds_0^*}{dt} = \sqrt{\frac{T}{\rho_0(1+e)}} < a\ ; \quad \frac{T}{\rho_0} < a^2(1+e)\,.$$

Интересно выяснить: для каких материалов реализуется такая схема распространения волн? Предположим, что материал нити обладает линейным упрочнением. Тогда последнее неравенство можно привести к виду

$$a_0^2 e_s < a_1^2(1+e_s)\,. \tag{2.57}$$

Для ряда практически важных материалов условие (2.57) выполняется, например, для стали ($a_1^2 / a_0^2 \approx 0{,}05,\ e_s \approx 0{,}002$) и меди ($a_1^2 / a_0^2 \approx 0{,}03,\ e_s \approx 0{,}001$). Лишь для материалов с весьма малым модулем упрочнения оно может не выполняться, т.е. часть нити за точкой излома будет иметь переменные деформации (рис. 2.9).

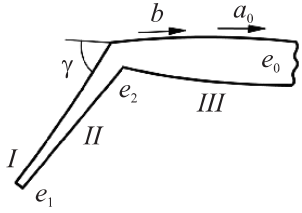


Рис. 2.9

Проанализируем этот случай. Обозначим индексами 1, 2, 3 параметры нити соответственно на участке постоянных деформаций *I*, на волне Римана до точки излома *II* и за ней *III*.

В области *III* движение чисто продольное, поэтому здесь выполнено условие (2.36). В области *II* имеют место зависимости (2.34):

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{\alpha}\int_e^{e_1} a(e)de + v_1\cos\beta_1\ ; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{c_1\alpha}\int_e^{e_1} a(e)de + v_1\sin\beta_1\,.$$

Так как $c_1 = -\mathrm{ctg}\gamma_1$, то $\alpha = \sqrt{1+1/c_1^2} = \sec\gamma$ и, следовательно,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \cos\gamma_1\int_e^{e_1} a(e)de + v_1\cos\beta_1\ ; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\sin\gamma_1\int_e^{e_1} a(e)de + v_1\sin\beta_1\,.$$

Уравнения (2.36) – (2.39) принимают вид:

$$u_1 = \phi(e_2) - \phi(e_0)\ ; \tag{2.58}$$

$$\rho_0(b_1+u_1)\left(v_1\cos\beta_1 + \cos\gamma_1\int_{e_2}^{e_1} a(e)de - u_1\right) = T(e_2)(\cos\gamma_1 - 1)(1+e_2)\,; \tag{2.59}$$

$$\rho_0(b_1+u_1)\left(v_1\sin\beta_1 - \sin\gamma_1\int_{e_2}^{e_1} a(e)de\right) = T(e_2)\sin\gamma_1(1+e_2)\,; \tag{2.60}$$

$$b_1 \sin\gamma_1 = v_1 \sin(\beta_1 - \gamma_1)\,. \qquad (2.61)$$

Без изменения остается кинематическое соотношение (2.40):

$$\mathrm{tg}\gamma_1 = v_0 \sin\beta_0 / (b_1 + v_0 \cos\beta_0)\,. \qquad (2.62)$$

Напишем уравнение, связывающее скорость распространения волн сильного разрыва с распространяющейся по частицам со скоростью $a_2(e_2)$ деформацией:

$$b_1 / v_0 = a_2(e_2) / v_0 + \overline{x}(a_2 / v)\,. \qquad (2.63)$$

С привлечением аналогичных условий для части нити, расположенной слева от ударяемого тела, а также зависимостей (2.41) и (2.42), приходим к решению 14 уравнений с 14 неизвестными.

Рассмотрим частный случай – нормальный удар по гибкой нити ($v_1 = v_0$; $\beta_1 = \pi/2$), материал которой обладает линейным упрочнением. Предварительно найдем выражение для смещения $\overline{x}$, входящее в (2.63). В области I из предыдущего имеем $\alpha(z + \overline{x}) - z = e_1 z + c$. Так как $\overline{x} = 0$ при $z = 0$, то $c = 0$; следовательно, на заднем фронте волны Римана при $z = a_1 / v_0 = a(e_1) / v_0$

$$\overline{x}\left(\frac{a_1}{v_0}\right) = \frac{1}{\alpha}(e_1 + 1)z - z = \frac{a_1}{v_0}\left[(e_1 + 1)\cos\gamma_1 - 1\right]. \qquad (2.64)$$

В случае линейного упрочнения $a_1 = a_2$, поэтому $\overline{x}(a_1 / v_0) = \overline{x}(a_2 / v_0)$ (заметим, что $e_1 \neq e_2$). Из (2.63) и (2.64) найдем, что

$$b_1 = a_1(e_1 + 1)\cos\gamma_1\,. \qquad (2.65)$$

Система (2.58)–(2.62) для нормального удара может быть приведена к виду, сходному с (2.52)–(2.55):

$$u_1 = a_1(e_2 - e_s) + a_0(e_s - e_0)\,; \qquad \rho_0(b_1 + u)^2 = T(e_2)(1 + e_2)\,;$$

$$b_1 + u_1 = b_1 \sec\gamma_1 - \int_{e_2}^{e_1} a(e)de\,; \quad v_0 = b_1 \mathrm{tg}\gamma_1\,.$$

Из второго и третьего уравнений этой системы с учетом (2.65) получаем:

$$a_0^2 e_s = a_1^2(1 + e_s)\,,$$

что заранее можно было ожидать, так как в рассматриваемом случае условие (2.57) вырождается в равенство. Получить решение написанной выше системы, очевидно, не представляет каких-либо трудностей.

§ 2.3. Удар по гибкой нити точкой конечной массы

Полученные выше результаты, строго говоря, справедливы лишь в том случае, когда масса ударяющего тела бесконечна. Возникшее в результате удара натяжение нити, воздействуя на точку конечной массы, уменьшает ее скорость сразу же после удара. В результате волна Римана и волна разгрузки одновременно начнут распространяться вправо и влево от точки удара (в такой постановке задача рассматривалась в [7]; в [6] деформации предполагались линейно упругими).

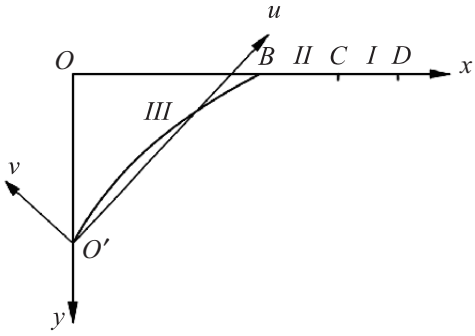


Рис. 2.10

Предположим, как и в [7], что волна сильного разрыва распространяется с меньшей скоростью, чем волна Римана. Тогда волна разгрузки находится в области продольного движения. На рис. 2.10 схематично показана картина движения нити. Здесь D – передний фронт волны Римана, C – волна разгрузки, B – волна сильного разрыва. Кроме неподвижной системы координат с осями Ox, Oy, соответственно по первоначальному направлению и перпендикулярно к нему, введем подвижную систему координат, связанную с ударяемой точкой. При этом ось $O'u$ будет расположена по направлению нити в случае удара точкой с постоянной скоростью $v_{00} = v_0(0)$; ось $O'v$ – перпендикулярно к $O'u$; $v_0(t)$ – неизвестная заранее скорость ударяемой точки. Введем следующие обозначения: a_0 – скорость переднего фронта волны Римана; a – скорость распространения пластической волны; b – скорость волны сильного разрыва;

u_1, u_2 – расстояния по оси x от точки удара соответственно до элементов *I* и *II*; e_0 и T_0' – деформация и натяжение при ударе со скоростью v_{00}; T_2, e_2, T, e, $\overline{T}$, $\overline{e}$ – напряжения и деформации соответственно в областях *II*, *III* и на волне разгрузки; γ – угол между направлениями элемента нити в области *III* при ударе по нему с постоянной скоростью v_{00} и переменной скоростью $v_0(t)$. Очевидно, в областях *I* и *II* имеют место следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial s_0^2}; \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial s_0^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{T}}{\partial s_0} - a_0^2 \frac{\partial \overline{e}}{\partial s_0}.$$

Выведем уравнения движения нити в области *III*. Предварительно отметим, что некоторый элемента нити ρds в системе $O'uv$ имеет координаты $u' = u + s_0\left(1 + e_0'\right)$; v, где u, v – смещения по соответствующим осям. На элемент ρds в подвижной системе координат действуют четыре силы: натяжения $-\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T} + \Delta\boldsymbol{T}$; сопротивления среды, перпендикулярная к нити, qds; инерции $\rho v_0' ds$. Следовательно, уравнение движения части нити в области *III* в проекциях на оси $O'u$, $O'v$ примет вид:

$$\rho ds \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = \Delta\left(T\cos\gamma\right) + \rho v_0' \sin\gamma_0 ds; \tag{2.66}$$

$$\rho ds \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\Delta\left(T\sin\gamma\right) + \rho v_0' \cos\gamma_0 ds + qds. \tag{2.67}$$

Используя соотношения

$$\rho ds = \rho_0 ds_0, \quad \cos\gamma = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \sin\gamma = -\frac{\partial v}{\partial s},$$

$$T = \overline{T} + E(e - \overline{e}), \quad e = \sqrt{\left[\frac{\partial u}{\partial s_0} + (1 + e_0')\right]^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_0}\right)^2} - 1,$$

преобразуем уравнения (2.66) и (2.67):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial s_0}\left[(\overline{T} + Ee - E\overline{e})\cos\gamma\right] + v_0' \sin\gamma_0;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial s_0}\left[(\overline{T} + Ee - E\overline{e})\sin\gamma\right] + v_0' \cos\gamma_0 + \frac{q}{\rho}.$$

Задача должна решаться с использованием условий непрерывности скоростей и деформаций на волне разгрузки *C*, соотношений на поперечной волне *B*, закона Ньютона, связывающего вертикальные составляющие натяжения нити в точке удара с ее ускорением.

Будем полагать в дальнейшем, что скорость ударяемого тела меняется незначительно. Тогда можно считать величины *u*, *v*, $\overline{T}+Ee-E\overline{e}-T_0'$ и их производные малыми. Поэтому квадратами этих величин пренебрегаем как при составлении граничных условий, так и в дифференциальных уравнениях движения[1]. Последние при этом принимают вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial s_0^2}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial s_0}(\overline{T}-E\overline{e})+v_0'\sin\gamma_0\,;\quad e=e_0'+\frac{\partial u}{\partial s_0}\,; \tag{2.68}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\lambda^2\frac{\partial^2 v}{\partial s_0^2}+v_0'\cos\gamma_0+\frac{q}{\rho}\,;\quad \lambda^2=\frac{T_0'}{\rho_0(1+e_0')}\,. \tag{2.69}$$

На волне сильного разрыва $s_0=s_0^*(t)$ должны быть выполнены условия (2.16) и $e=e_2$, которые при пренебрежении малыми второго порядка будут иметь вид:

$$b-\frac{\partial u_2}{\partial t}=\sqrt{\frac{T(e_2)(1+e_2)}{\rho_0}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(1+e_0')}{\rho_0}(\overline{T}+Ee_0'-E\overline{e})+\frac{\partial u}{\partial s_0}(1+e_0')(\lambda^2+a_0^2)}, \tag{2.70}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s_0}+e_0'=\frac{\partial u_2}{\partial s_0}-1. \tag{2.71}$$

Условиями непрерывности перемещений будут:

---

[1] Заметим, что в [7] при линеаризации уравнений были удержаны некоторые члены, имеющие второй порядок малости, что усложнило задачу. Ее решение предложено было искать методом характеристик. Кроме того, некоторые неточности были допущены при составлении граничных условий. В приведенном ниже решении отмеченные замечания устранены.

$$u_2 = \left[u + (1+e_0')s_0^*\right]\cos\gamma_0 - v_0\sin\gamma_0\,; \tag{2.72}$$

$$\int_0^t v_0 dt = \left[u + (1+e_0')s_0^*\right]\sin\gamma_0 + v_0\cos\gamma_0\,. \tag{2.73}$$

Кроме того, при $s_0 = s_0^*(t)$ справедливо соотношение $\int_0^t b(t)dt = u_2$. Дифференцируя его по времени и используя (2.70), находим, что с точностью до квадратов малых величин

$$\frac{\partial u_2}{\partial s_0}\frac{ds_0^*}{dt} = \left(1 + e_0' + \frac{\partial u}{\partial s_0}\right)\frac{ds_0^*}{dt} =$$

$$= \sqrt{(1+e_0')\frac{\overline{T} + Ee_0' - E\overline{e}}{\rho_0} + \frac{\partial u}{\partial s_0}(1+e_0')(\lambda^2 + a_0^2)}. \tag{2.74}$$

При $s_0 = 0$ добавочные смещения равны нулю:

$$u = v = 0\,. \tag{2.75}$$

Движение ударяющего тела описывается уравнением:

$$m\frac{dv}{dt} = -2T\sin(\gamma_0 - \gamma). \tag{2.76}$$

При данной постановке задачи ускорение dv_0/dt или, что эквивалентно, величину $T_0'\sin\gamma_0/m$ можно интерпретировать как малый параметр, а уравнения (2.68) и (2.69) – как уравнения для первого приближения по этому параметру. Поэтому условие (2.76) с точностью до квадрата малого параметра может быть заменено следующим:

$$\frac{dv_0}{dt} = -\frac{2T_0'\sin\gamma_0}{m} = v_{00}' = \text{const}. \tag{2.77}$$

Из сказанного следует также, что в уравнении (2.69) член q/ρ, который в дальнейшем будем считать постоянной величиной, должен быть одного порядка с составляющей силы инерции по оси Ov.

Последним граничным условием, которое необходимо использовать, является соотношение между деформациями и скоростями частиц на волне разгрузки $t = f(s_0)$. Оно, как известно (см. 1.3), может быть записано в виде:

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial s_0}\right|_{t=f(s_0)} = 1+\bar{e}\,; \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=f(s_0)} = -\int_{e_0}^{\bar{e}} a de\,. \tag{2.78}$$

Следовательно, задача о движении нити под влиянием поперечного удара точкой конечной массы свелась к решению четырех уравнений в частных производных в трех различных областях, причем границы областей – волна сильного разрыва и волна разгрузки – заранее не известны. Решением уравнений (2.68) и (2.69) являются:

$$\begin{aligned} u &= \phi_1(a_0 t + s_0) + \phi_2(a_0 t - s_0) + \Phi_0(t) + \Phi_1(s_0); \\ v &= f_1(\lambda t + s_0) + f_2(\lambda t - s_0) + \varphi_0(t), \end{aligned} \tag{2.79}$$

где

$$\Phi_0(t) = \sin\gamma_0 \int_0^l v_0 dt = \sin\gamma_0 \left(v_{00} t + v'_{00} t^2/2\right);$$

$$\Phi_1(s_0) = -\frac{1}{E}\int_0^{s_0} \left(\bar{T} - E\bar{e}\right) ds_0\,;$$

$$\varphi_0(t) = \cos\gamma_0 \int_0^t v_0 dt + \frac{q}{2\rho} t^2 = \cos\gamma_0 \left(v_{00} t + v'_{00} t^2/2\right) + \frac{q}{\rho}\frac{t^2}{2}.$$

При $s_0 = 0$ из условия (2.76) получаем

$$\phi_1(a_0 t) + \phi_2(a_0 t) + \Phi_0(t) = 0\,, \quad f_1(\lambda t) + f_2(\lambda t) + \varphi_0(t) = 0\,,$$

откуда имеем

$$\phi_2(a_0 t - s_0) = -\phi_1(a_0 t - s_0) - \Phi_0(t - s_0/a_0)\,;$$

$$f_2(\lambda t - s_0) = -f_1(\lambda t - s_0) - \varphi_0(t - s_0/\lambda),$$

и решение (2.79) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} u &= \phi_1(a_0 t + s_0) - \phi_1(a_0 t - s_0) - \Phi_0(t - s_0/a_0) + \Phi_0(t) + \Phi_1(s_0); \\ v &= f_1(\lambda t + s_0) - f_1(\lambda t - s_0) - \varphi_0(t - s_0/\lambda) + \varphi_0(t). \end{aligned}\right\} \tag{2.80}$$

Общее решение дифференциального уравнения в частных производных для u_2 таково:

$$u_2 = \varphi_1(a_0 t + s_0) + \varphi_2(a_0 t - s_0) + \Phi_1(s_0)\,.$$

Используя условия (2.71) – (2.74) на волне сильного разрыва $s_0 = s_0^*(t)$, получаем:

$$\varphi_1\left(a_0t+s_0^*\right)+\varphi_2\left(a_0t-s_0^*\right)+\Phi_1\left(s_0^*\right)=\Big[(1+e_0')s_0^*+\phi_1\left(a_0t+s_0^*\right)-$$

$$-\phi_1\left(a_0t-s_0^*\right)-\Phi_0\left(t-s_0^*/a_0\right)+\Phi_0(t)+\Phi_1\left(s_0^*\right)\Big]\cos\gamma_0-$$

$$-\Big[f_1\left(\lambda t+s_0^*\right)-f_1\left(\lambda t-s_0^*\right)-\varphi_0\left(t-s_0^*/\lambda\right)+\varphi_0(t)\Big]\sin\gamma_0\,; \quad (2.81)$$

$$\varphi_1'\left(a_0t+s_0^*\right)-\varphi_2'\left(a_0t-s_0^*\right)=$$

$$=1+e_0'+\phi_1'\left(a_0t+s_0^*\right)+\phi_1'\left(a_0t-s_0^*\right)+\frac{1}{a_0}\Phi_0'\left(t-s_0^*/a_0\right); \quad (2.82)$$

$$\int_0^t v_0dt=\Big[(1+e_0')s_0^*+\phi_1\left(a_0t+s_0^*\right)-\phi_1\left(a_0t-s_0^*\right)-$$

$$-\Phi_0\left(t-s_0^*/a_0\right)+\Phi_0(t)+\Phi_1\left(s_0^*\right)\Big]\sin\gamma_0+$$

$$+\Big[f_1\left(\lambda t+s_0^*\right)-f_1\left(\lambda t-s_0^*\right)-\varphi_0\left(t-s_0^*/\lambda\right)+\varphi_0(t)\Big]\cos\gamma_0; \quad (2.83)$$

$$\left[1+e_0'+\phi_1'\left(a_0t+s_0^*\right)+\phi_1'\left(a_0t-s_0^*\right)+\frac{1}{a_0}\Phi_0'\left(t-s_0^*/a_0\right)+\Phi_1'\left(s_0^*\right)\right]\frac{ds_0^*}{dt}=$$

$$=\sqrt{(1+e_0')\frac{\overline{T}+Ee_0'-E\overline{e}}{\rho_0}}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(1+e_0')\left(\lambda^2+a^2\right)\left[\phi_1'\left(a_0t+s_0^*\right)+\phi_1'\left(a_0t-s_0^*\right)+\frac{1}{a_0}\Phi_0'\left(t-s_0^*/a_0\right)+\Phi_1'\left(s_0^*\right)\right]}{\sqrt{\frac{1+e_0'}{\rho_0}(\overline{T}+Ee_0'-E\overline{e})}}. \quad (2.84)$$

Согласно принятой постановке задачи значения $\frac{\partial u_2}{\partial s}$ и $\frac{\partial u_2}{\partial t}$ в области разгружения меняются незначительно, а тогда, как следует из (2.78), деформации и скорости звука на волне разгрузки мало отличаются от значений e_0' и $a_1(e_0')$. Последнее обстоятельство в свою очередь приводит к тому, что волна разгрузки распространяется со скоростью, мало отличающейся от a_1, т. е.

$$t=f(s_0)=s_0/a_1+\varepsilon(s_0), \quad (2.85)$$

причем $a_1[1+a_1\varepsilon/s_0]^{-1}=a(\overline{e})$, где $a_1\varepsilon/s_0\ll 1$.

Условие (2.78) с учетом (2.85) можно записать так:

$$\varphi_1'\left[\left(\frac{a_0}{a_1}+1\right)s_0+a_0\varepsilon\right]-\varphi_2'\left[\left(\frac{a_0}{a_1}-1\right)s_0+a_0\varepsilon\right]=1+\frac{\overline{T}}{E};$$

$$\varphi_1'\left[\left(\frac{a_0}{a_1}+1\right)s_0+a_0\varepsilon\right]+\varphi_2'\left[\left(\frac{a_0}{a_1}-1\right)s_0+a_0\varepsilon\right]=-\int_{e_0}^{\overline{e}}\frac{a}{a_0}de. \qquad (2.86)$$

Если предположить, что в окрестности e_0' диаграмма «напряжение – деформация» может быть заменена прямолинейным участком, то $\overline{T}=T_0'+E'(\overline{e}-e_0')$, $a(\overline{e})\equiv a_1$, $\varepsilon\equiv 0$ и из (2.86) найдем:

$$\varphi_1'\left[\left(\frac{a_0}{a_1}+1\right)s_0\right]=\frac{1}{2}\left[1+\frac{T_0'}{E}-\int_{e_0}^{e_0'}\frac{a}{a_0}de-\frac{E'}{E}e_0'+\frac{a_1}{a_0}e_0'+\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}-1\right)\overline{e}(s_0)\right];$$

$$\varphi_2'\left[\left(\frac{a_0}{a_1}-1\right)s_0\right]=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{T_0'}{E}+\int_{e_0}^{e_0'}\frac{a}{a_0}de+\left(\frac{a_1}{a_0}+1\right)\frac{a_1}{a_0}(\overline{e}(s_0)-e_0')\right]. \qquad (2.87)$$

Тогда

$$\varphi_1(a_0t+s_0)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{T_0'}{E}-\int_{e_0}^{e_0'}\frac{a}{a_0}de+\frac{a_1}{a_0}\left(1-\frac{a_1}{a_0}\right)e_0'-\frac{a_1}{a_0}\left(1-\frac{a_1}{a_0}\right)\overline{e}\left(\frac{a_0t+s_0}{1+a_0/a_1}\right)\right];$$

$$\varphi_2'(a_0t-s_0)=$$
$$=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{T_0'}{E}+\int_{e_0}^{e_0'}\frac{a}{a_0}de-\frac{a_1}{a_0}\left(1+\frac{a_1}{a_0}\right)e_0'+\frac{a_1}{a_0}\left(1+\frac{a_1}{a_0}\right)\overline{e}\left(\frac{a_0t-s_0}{a_0/a_1-1}\right)\right].$$

Из уравнений (2.81) и (2.83) целесообразно выразить:

$$f_1(\lambda t+s_0^*)-f_1(\lambda t-s_0^*)=\frac{q}{2\rho}\frac{s_0^*}{\lambda}\left(\frac{s_0^*}{\lambda}-2t\right)+\cos\gamma_0\int_0^{t-\frac{s_0^*}{\lambda}}v_0dt-$$
$$-\left[\varphi_1(a_0t+s_0^*)+\varphi_2(a_0t-s_0^*)+\Phi_1(s_0^*)\right]\sin\gamma_0; \qquad (2.88)$$
$$(1+e_0')s_0^*+\phi_1(a_0t+s_0^*)-\phi_1(a_0t-s_0^*)+\Phi_1(s_0^*)=$$

$$=\left[\varphi_1\left(a_0t+s_0^*\right)+\varphi_2\left(a_0t-s_0^*\right)+\Phi_1\left(s_0^*\right)\right]\cos\gamma_0+\sin\gamma_0\int\limits_0^{t-\frac{s_0^*}{a_0}}v_0dt, \quad (2.89)$$

а из уравнений (2.82), (2.84) найти:

$$\frac{ds_0^*}{dt}=\frac{3}{2}\lambda-\frac{a_0^2}{2\lambda}+\frac{a_0^2-\lambda^2}{2\lambda(1+e_0')}\left[\varphi_1'\left(a_0t+s_0^*\right)-\varphi_2'\left(a_0t-s_0^*\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{T_0'}{E}+e_0'\right]+\frac{\lambda(E-E')\left[e_0'-\overline{e}\left(s_0^*\right)\right]}{2(1+e_0')E} \quad (2.90)$$

или

$$\frac{ds_0^*}{dt}=\lambda+\frac{a_0^2-\lambda^2}{4\lambda(1+e_0')}\frac{a_1}{a_0}\left[\left(1+\frac{a_1}{a_0}\right)\overline{e}(\xi)+\left(\frac{a_1}{a_0}-1\right)\overline{e}(\eta)-\frac{2a_1}{a_0}e_0'\right]+$$
$$+\frac{\lambda\left(a_0^2-a_1^2\right)\left[e_0'-\overline{e}\left(s_0^*\right)\right]}{2a_0^2(1+e_0')},$$

где $\xi=\dfrac{a_0t-s_0^*}{a_0/a_1-1}$, $\eta=\dfrac{a_0t+s_0^*}{a_0/a_1+1}$. После этого, дифференцируя (2.89) по времени и используя (2.82) и (2.90), получаем:

$$\phi_1'\left(a_0t+s_0^*\right)-\phi_1'\left(a_0t-s_0^*\right)=$$
$$=\cos\gamma_0\left[\frac{a_1}{a_0}e_0'-\int\limits_{e_0}^{e_0'}\frac{a}{a_0}de+\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}-1\right)\overline{e}(\eta)-\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}+1\right)\overline{e}(\xi)\right]+$$
$$+\sin\gamma_0\left[\frac{v_{00}}{a_0}+\frac{v_{00}'}{a_0}\left(t-\frac{s_0^*}{a_0}\right)\right]-\frac{1-\cos\gamma_0}{a_0}\left\{(1+e_0')\lambda+\frac{\lambda\left(a_1^2-a_0^2\right)}{2a_0^2}(e_0'-\overline{e})-\right.$$
$$\left.-\frac{a_1^2}{2a_0^2}\frac{a_0^2+\lambda^2}{\lambda}e_0'+\frac{a_0^2+\lambda^2}{4\lambda}\frac{a_1}{a_0}\left[\left(1+\frac{a_1}{a_0}\right)\overline{e}(\xi)+\left(\frac{a_1}{a_0}-1\right)\overline{e}(\eta)\right]\right\} \quad (2.91)$$

Условие (2.82) целесообразно преобразовать к виду

$$\phi_1'\left(a_0t+s_0^*\right)+\phi_1'\left(a_0t-s_0^*\right)=\frac{T_0'}{E}-\frac{a_1^2}{a_0^2}e_0'+\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}-1\right)\overline{e}(\eta)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}+1\right)\overline{e}(\xi)-e_0'-\frac{\sin\gamma_0}{a_0}\left[v_{00}+v_{00}'\left(t-\frac{s_0^*}{a_0}\right)\right]. \quad (2.92)$$

Система (2.90) – (2.92) может быть решена численно и, таким образом найдены $\phi_1'(x)$, $\overline{e}(x)$, $s_0^*(t)$. Однако такой путь решения чрезвычайно трудоемок, поэтому воспользуемся другим. Предварительно заметим, что в силу изложенного выше величина s_0^* мало отличается от значения λt, в связи с чем ее в первом приближении в уравнениях (2.91) и (2.92) можно положить равной последней. Тогда из этих уравнений можно определить аналитический вид $\overline{e}(x)$, $\phi_1'(x)$, после чего из (2.90) уточнить выражение для $s_0^*(t)$. Затем это уточненное выражение для $s_0^*(t)$ снова подставить в (2.91) и (2.92), найти второе приближение для $\overline{e}(x)$, $\phi_1'(x)$ и т. д.

Предлагаемый путь решения оказывается очень простым, потому что удается установить следующее: при принятой постановке задачи уже первое приближение для $\overline{e}(x)$, $\phi_1'(x)$, $s_0^*(t)$ можно считать решением уравнений (2.90) – (2.92).

Указанным способом предварительно найдем первое приближение для $\phi_1'(x)$, $\overline{e}(x)$; подставляя в уравнения (2.91) и (2.92) вместо s_0^* значение λt, получим два функциональных соотношения, решения которых, как легко заметить, имеют вид:

$$\overline{e}(x)=e_0'+b_1x\,;\;\; \phi_1(x)=c_0+c_1x\,.$$

Постоянные c_0, c_1, b_1 можно непосредственно определить после подстановки выражений для $\overline{e}(x)$ и $\phi_1'(x)$ в соответствующие соотношения:

$$c_0=\frac{1}{2}\left[\frac{T_0'}{E}-e_0'-\frac{\sin\gamma_0\cdot v_{00}}{a_0}\right];$$

$$b_1=\frac{v_0'\sin\gamma_0\left(a_0^2-a_1^2\right)\left(1-\lambda^2/a_0^2\right)}{\left(a_0^2-\lambda^2\right)\left(1+\frac{a_1^2}{a_0^2}\right)a_1^2+\frac{1-\cos\gamma_0}{2}\left[\lambda^2a_0^2+2\frac{a_0^2a_1^3}{\lambda}-3a_1^2a_0^2-3a_1^2\,(a_1-\lambda)^2\right]};$$

$$c_1=-\frac{v_0'\sin\gamma_0\left(1-\frac{\lambda}{a_0}\right)}{2a_0^2}\times$$

$$\times\frac{\left(1+\frac{\lambda}{a_0}\right)(a_0-a_1)^2+\frac{1-\cos\gamma_0}{2}\left[\frac{\lambda^2a_0^2}{a_1^2}+2\frac{a_0^2a_1}{\lambda}-3a_0^2-3(a_1-\lambda)^2\right]}{\left(a_0^2-\lambda^2\right)\left(1+\frac{a_1^2}{a_0^2}\right)+\frac{1-\cos\gamma_0}{2}\left[\frac{\lambda^2a_0^2}{a_1^2}+2\frac{a_0^2a_1}{\lambda}-3a_0^2-3(a_1-\lambda)^2\right]}.$$

Теперь легко найти из уравнения (2.90) первое приближение для $s_0^*(t)$:

$$s_0^*(t)=\lambda t+\frac{v_{00}'a_1^2\sin\gamma_0\left(1-\frac{\lambda^2}{a_0^2}\right)t^2}{4\lambda(1+e_0')}\times$$

$$\times\frac{2a_1a_0^2-\lambda a_1^2-\lambda a_0^2-2a_1\lambda^2+2\lambda^3-\lambda^3\left(\frac{a_0^2}{a_1^2}-1\right)}{\left(a_0^2-\lambda^2\right)\left(1+\frac{a_1^2}{a_0^2}\right)a_1^2+\frac{1-\cos\gamma_0}{2}\left[\lambda^2a_0^2+2\frac{a_0^2a_1^3}{\lambda}-3a_1^2a_0^2-3a_1^2(a_1-\lambda)^2\right]}.$$

Если попытаться уточнить формулы для $\overline{e}(x)$, $\phi_1'(x)$ путем решения системы (2.91)–(2.92) с использованием найденного выражения $s_0^*(t)$, то легко обнаружить, что соответствующая поправка будет порядка квадрата малого параметра v_{00}'.

Следовательно, при данной постановке задачи полученные для ϕ_1', $\overline{e}$, $s_0^*(t)$ выражения являются решениями уравнений (2.90)–(2.92). Из соотношения (2.88) можно теперь определить аналитический вид функции $f(x)$, которая, как нетрудно усмотреть, представляет собой полином второй степени относительно x. Мы не станем находить коэффициенты этого полинома, так как последние не используются при определении напряжения и деформации в нити. В самом деле, поскольку $e=e_0'+\frac{\partial u}{\partial s_0}$; $T=T_0'+E(e-\overline{e})+E'(\overline{e}-e_0')$, то для определения e и T требуется знать лишь $\phi_1'(x)$ и $\overline{e}(x)$:

$$e=e_0'+\phi_1'(a_0t+s_0)+\phi_1'(a_0t-s_0)+\frac{1}{a_0}\Phi_0'\left(t-\frac{s_0}{a_0}\right)+\Phi_1'(s_0)=$$

$$=e_0'+\phi_1'(a_0t+s_0)+\phi_1'(a_0t-s_0)+\frac{\sin\gamma_0}{a_0}\left[v_{00}+v_0'\left(t-\frac{s_0}{a_0}\right)\right]+\overline{e}-\frac{\overline{T}}{E};$$

$$e = e_0' + 2c_0 + 2c_1 a_0 t + \frac{\sin\gamma_0}{a_0}\left[v_{00} + v_0'\left(t - \frac{s_0}{a_0}\right)\right] + e_0' + b_1 s_0 - \frac{T_0'}{E} -$$

$$-\frac{E'}{E}(\overline{e} - e_0') = 2c_1 a_0 t + \frac{v_{00}'\sin\gamma_0}{a_0}\left(t - \frac{s_0}{a_0}\right) + e_0' + b_1 s_0 - \frac{b_1 a_1^2}{a_0^2} s_0 ,$$

где c_1 определяется из предыдущей формулы.

Для приращений Δe в точке удара, на волне сильного разрыва и на волне разгрузки получим следующие формулы (соответственно):

$$\Delta e = 2a_0 c_1 t + \frac{v_{00}' t \sin\gamma_0}{a_0} ;$$

$$\Delta e = 2a_0 c_1 t + \frac{v_{00}' t \sin\gamma_0}{a_0}\left(1 - \frac{\lambda}{a_0}\right) + b_1\left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right)\lambda t . \qquad (2.93)$$

В том случае, когда под действием ударяемого тела деформации в нити не превосходят допустимых для применения закона Гука, рассматриваемая задача упрощается. Действительно, тогда в предыдущих формулах можно положить: $T_0' = Ee_0'$; $\overline{T} = E\overline{e}$; $E' = E$; $a_1 = a_0$; $\Phi_1(s_0) = 0$, при этом согласно формуле (2.87) $\varphi_1'(2s_0) = (1 + e_0)/2 = \text{const}$; $\overline{e} = e_0'$; $\varphi_2'(0) = -(e_0' + (1 - e_0)/2)$, а коэффициенты b_1, c_0, c_1 могут быть представлены следующими выражениями:

$$b_1 = 0,\ c_0 = -\frac{1}{2}\frac{\sin\gamma_0 \cdot v_{00}}{a_0};\ c_1 = -\frac{v_0'\sin\gamma_0\left(1 - \frac{\lambda}{a_0}\right)}{2a_0^2}\times$$

$$\times\frac{\frac{1-\cos\gamma_0}{2}\left[\lambda^2 + \frac{3a_0^3}{\lambda} - 3a_0^2 - 3(a_0 - \lambda)^2\right]}{2\left(a_0^2 - \lambda^2\right) + \frac{1-\cos\gamma_0}{2}\left[\lambda^2 + \frac{2a_0^3}{\lambda} - 3a_0^2 - 3(a_0 - \lambda)^2\right]}.$$

Для координаты $s_0^*(t)$ волны сильного разрыва получаем формулу

$$s_0^*(t) = \lambda t + \frac{v_0' a_0^2 \sin\gamma_0\left(1 - \frac{\lambda^2}{a_0^2}\right)t^2}{4\lambda\left(1 + e_0'\right)} \cdot \frac{2a_0^3 - 2a_0\lambda^2 + 2\lambda a_0^2 + 2\lambda^3}{2a_0^2\left(a_0^2 - \lambda^2\right) + \frac{1-\cos\gamma_0}{2}\left[\lambda^2 a_0^2 + 2\frac{a_0^5}{\lambda} - 3a_0^4 - 3a_0^2\left(a_0 - \lambda\right)^2\right]}.$$

§ 2.4. Движение нити конечной длины при точечном ударе. Возникновение вторичных волн натяжения

Рассмотренная выше волновая картина справедлива и для нити конечной длины до тех пор, пока передний фронт волны Римана не достигнет конца нити. Начиная с этого момента продольные волны натяжения будут отражаться от концов нити. Возникающая при этом волновая картина аналогична той, которая имеет место при отражении волны Римана от конца стержня. В зависимости от того, закреплен ли жестко конец нити (троса) или свободен, натяжение в последней будет или возрастать, или сниматься. Указанный волновой процесс имеет место до того момента, когда отраженная продольная волна встретится с поперечной. С этого момента начинается процесс взаимодействия поперечной и отраженной продольной волн, приводящий к появлению вторичных продольных волн натяжения.

Вторичные продольные волны натяжения. Отраженная продольная волна натяжения, дойдя до переднего фронта поперечной волны, начнет частично отражаться от последней, частично продолжит движение дальше к точке удара. Поскольку скорость λ распространения поперечной волны зависит от деформации (или натяжения), то при действии отраженной продольной волны натяжения величина λ изменяется.

Задача взаимодействия поперечной волны с отраженной продольной при нелинейной зависимости натяжения от деформации может быть решена только численно. Ниже мы приводим аналитическое решение этой задачи при линейно-упругих деформациях[1].

Вначале ограничимся рассмотрением случая, когда конец нити свободен. При этом отраженная продольная волна будет распространяться со скоростью a_0, натяжения и деформации за ней будут равны нулю, а скорость — удвоенной скорости частиц в прямой волне.

---

[1] Возникновение вторичных продольных волн исследовано в 1954 г. в [4] и в неопубликованной работе Г. С. Мороза. В последней исследуемый вопрос изложен более детально, поэтому эта статья, любезно предоставленная нам ее автором, положена в основу дальнейшего изложения.

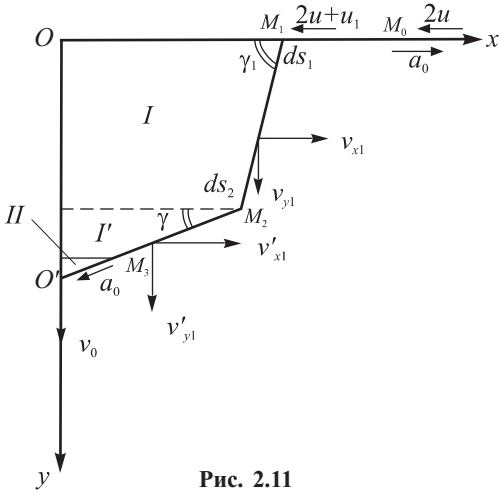


Рис. 2.11

Так как величина a_0 много больше скорости распространения поперечных волн, то после встречи отраженной продольной волны с передним фронтом поперечной возникают две вторичные продольные волны, одна из которых M_3 распространяется со скоростью a_0 к точке удара, а другая M_0 – с той же скоростью к свободному концу нити (рис. 2.11). За этими волнами образуется область постоянных деформаций и натяжений, поэтому образовавшиеся здесь две поперечные волны M_1 и M_2 с одинаковыми скоростями распространяются в разные стороны от места взаимодействия.

Угол отклонения нити γ_1 в зоне действия поперечной волны (зона *I*) значительно больше первоначального угла отклонения нити γ (зоны *I′* и *II*, рис. 2.11). Скорости перемещения элементов нити в зонах *I* и *I′* не равны первоначальной скорости v_0. Как углы γ_1, γ, так и скорости движения элементов нити в соответствующих зонах будут оставаться при v_0 = const постоянными до тех пор, пока вторичные продольные волны не отразятся от конца нити или от точки удара и не начнут вновь взаимодействовать с поперечными волнами.

Составим уравнение изменения количества движения для элементов нити ds_1 и ds_2 (см. рис. 2.11) при прохождении через них фронта поперечных волн:

$$
\begin{aligned}
&dm_1 v_{y1} = T_1 \sin\gamma_1 d\tau_1;\\
&dm_1 (v_{x1} + 2u + u_1) = T_1 (1 - \cos\gamma_1) d\tau_1;\\
&dm_2 \left(v'_{y1} - v_{y1}\right) = T_1 (\sin\gamma_1 - \sin\gamma) d\tau_2;\\
&dm_2 (v'_{x1} - v_{x1}) = T_1 (\cos\gamma - \cos\gamma_1) d\tau_2.
\end{aligned}
\tag{2.94}
$$

Здесь $v_{x1}, v_{y1}, v'_{x1}, v'_{y1}$ – компоненты скорости перемещения нити соответственно в зонах I и I'; T_1 – натяжение в этих зонах; dm_1 и dm_2 – массы элементов нити ds_1 и ds_2.

Возникающая при движении вторичной продольной волны добавочная скорость u_1 элемента ds_1 находится из уравнения количества движения, примененного к части нити, через которую проходит волна a_0:

$$
u_1 = \frac{T_1}{\rho_0 a_0 (1 + 2e)}. \tag{2.95}
$$

Так как натяжение T_1 в зонах I и I' одинаково, одинаковы и скорости распространения прямой и обратной поперечных волн, т. е.

$$
\sqrt{\frac{T_1}{\rho_0 (1 + e_1)}} = \lambda_1 = (1 + e_1) \frac{ds_1}{d\tau_1} = (1 + e_1) \frac{ds_2}{d\tau_2}. \tag{2.96}
$$

В зоне II, куда не пришла продольная волна, $v_x = 0, v_y = v_0$. Поэтому нормальная и тангенциальная составляющие скорости в этой зоне имеют соответственно вид: $v_{0n} = v_0 \cos\gamma$; $v_{0\tau} = v_0 \sin\gamma$.

В зоне I' нормальная составляющая скорости будет такая же, как и в зоне II, т. е. $v'_{n_1} = v_0 \cos\gamma$, а тангенциальная скорость увеличивается: $v'_{\tau 1} = v_0 \sin\gamma + \Delta v_\tau$.

Приращение Δv_τ может быть определено так же, как u_1:

$$
\Delta v_\tau = (1 + e) \frac{u - T_1 / (\rho_0 a_0)}{1 - v_0 \sin\gamma / a_0}. \tag{2.97}
$$

Компоненты v'_{x1}, v'_{y1} соответственно будут:

$$
\begin{aligned}
&v'_{x1} = -v'_{\tau 1} \cos\gamma + v'_{n1} \sin\gamma = -\Delta v_\tau \cos\gamma;\\
&v'_{y1} = v'_{\tau 1} \sin\gamma + v'_{n1} \cos\gamma = v_0 + \Delta v_\tau \sin\gamma.
\end{aligned}
\tag{2.98}
$$

С привлечением условий (2.95) – (2.98) уравнения (2.94) позволяют определить γ_1, T_1, v_{x1}, v_{y1}.

Решение системы (2.94) значительно упрощается, если предположить, что деформации много меньше единицы, т. е. $e \ll 1$, $e_1 \ll 1$. В этом случае условия (2.95) – (2.98) запишутся так:

$$u_1 = T_1 / \left(\rho_0 a_0\right); \tag{2.95′}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{T_1}{\rho_0}} = \frac{ds_1}{d\tau_1} = \frac{ds_2}{d\tau_2}; \tag{2.96′}$$

$$\Delta v_\tau = u - u_1; \tag{2.97′}$$

$$v'_{x1} = -(u - u_1)\cos\gamma; \;\; v'_{y1} = v_0 + (u - u_1)\sin\gamma, \tag{2.98′}$$

а уравнения (2.94) преобразуются к следующему виду:

$$v_{y1} = \lambda_1 \sin\gamma_1; \tag{2.99}$$

$$v_{x1} + 2u + u_1 = \lambda_1 (1 - \cos\gamma_1); \tag{2.100}$$

$$v_{x1} = v'_{x1} + \lambda_1 (\cos\gamma_1 - \cos\gamma); \tag{2.101}$$

$$v_{y1} = v_{y1} + \lambda_1 (\sin\gamma - \sin\gamma_t). \tag{2.102}$$

Складывая (2.99) и (2.102) и используя (2.98), получаем:

$$v_{y1} = \frac{1}{2}\left(v'_{y_1} + \lambda_1 \sin\gamma\right) = \frac{1}{2}[v_0 + (\lambda_1 + u - u_1)\sin\gamma]. \tag{2.103}$$

Аналогично

$$v_{x1} = \frac{1}{2}[\lambda_1 - 2u - u_1 - (\lambda_1 + u + u_1)\cos\gamma]. \tag{2.104}$$

Из уравнений (2.99) и (2.100) находим:

$$\sin\gamma_1 = v_{y1} / \lambda_1; \;\; \cos\gamma_1 = 1 - (v_{x1} + 2u + u_1) / \lambda_1. \tag{2.105}$$

Исключив из последних соотношений γ_1 (предварительно выразив v_{x1}, v_{y1} по формулам (2.103) и (2.104)), получаем

$$v_0^2 + 2v_0\left(\lambda_1 + u - u_1\right)\sin\gamma + \left(\lambda_1 + u - u_1\right)^2 +$$
$$+\left(\lambda_1 - 2u - u_1\right)^2 + 2\left(\lambda_1 - 2u - u_1\right)\left(\lambda_1 + u - u_1\right)\cos\gamma = 4\lambda_1^2. \tag{2.106}$$

Уравнение (2.106) можно значительно упростить, если подставить значения v_0^2, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$ из уравнений (2.52) – (2.55), предварительно преобразованных к виду

$$v_0^2 = 2\lambda u - u^2; \sin\gamma = v_0 / \lambda; \cos\gamma = 1 - u / \lambda; \; u = T/(p_0 a_0); \lambda = \sqrt{T / \rho_0}.$$

Тогда

$$2\lambda u - u^2 + 2\frac{u}{\lambda}\left(\lambda_1 + u - u_1\right)\left(2\lambda + u - \lambda_1 + u_1\right) + \left(2\lambda_1 - u - 2u_1\right)^2 - 4\lambda_1^2 = 0.$$

Вводя $\bar{u}_1 = u_1 / u$ и замечая, что при этом $\lambda_1 / \lambda = \sqrt{\bar{u}_1}$, последнее уравнение перепишем так:

$$\left(1-\bar{u}_1^2\right)\left(\frac{u}{\lambda}\right)^2 + 2\left[1+\bar{u}_1\sqrt{\bar{u}_1}+\bar{u}_1^2\right]\frac{u}{\lambda} - \left(4\sqrt{\bar{u}_1}\bar{u}_1+\bar{u}_1-1\right) = 0 . \quad (2.107)$$

Корень (2.107) с положительным знаком обозначим через $f(\bar{u}_1)$. Так как $\lambda = \sqrt{ua_0}$, то

$$u/\lambda = \sqrt{u/a_0}; \; u = a_0\,(u/\lambda)^2 = a_0 f^2(\bar{u}_1). \quad (2.108)$$

На рис. 2.12 приведен график u/λ в зависимости от $\bar{u}_1$. Зная величину $\bar{u}_1$, можно вычислить все остальные параметры при прохождении вторичной продольной волны, т. е.:

$$u_1 = u\bar{u}_1; \quad \lambda_1 = \sqrt{u\bar{u}_1 a_0};$$

$$\sin\gamma_1 = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{\sqrt{\bar{u}_1}}+\sqrt{\frac{u}{a_0}}\frac{1-\bar{u}_1}{\sqrt{\bar{u}_1}}\right];$$

$$v_{x1} = -\frac{u}{2}\left[3-\sqrt{\bar{u}_1}-\sqrt{\frac{u}{a_0}}(1-\bar{u}_1)\right];$$

$$v_{y1} = \frac{v_0}{2}\left[1+\sqrt{\bar{u}_1}+\sqrt{\frac{u}{a_0}}(1-\bar{u}_1)\right].$$

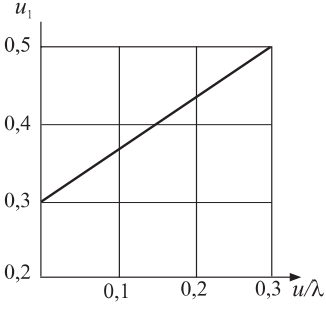


Рис. 2.12

На рис. 2.13 приведены графики зависимотсей $\bar{u}_1$, λ_1, $-v_{x1}$, v_{y1} от v_0 для стального троса, имеющего a_0 = 4700 м/с. При поперечном ударе по такому тросу со скоростью, вызывающей деформации, равные пределу упругости, u = 70 м/с и $\bar{u}_1$ = 0,381.

В момент отражения продольной волны от точки удара O' возможно проскальзывание нити по ударяющему телу, если во второй ветви нити продольная волна не успеет достигнуть точки удара, например из-за разности в длинах ветвей. Условие равновесия сил в точке O' следующее:

$$T - 2(T - T_1) + \rho_0 a_0 u_s = e^{-f\varphi_0}(T - \rho_0 a_0 u_s), \quad (2.109)$$

где u_s – скорость скольжения; φ_0 – угол обхвата нитью ударяющего тела; f – коэффициент трения.

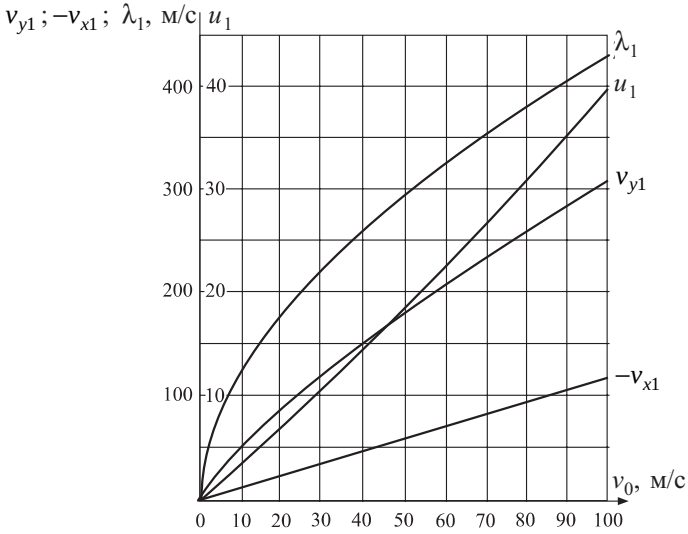


Рис. 2.13

Из формулы (2.109) легко найти $u_s = u - \frac{2}{1+k}u_1$, $k = e^{-f\varphi_0}$. Напряжение в первой ветви будет $T_1' = T - 2(T - T_1) + \rho_0 a_0 u_s = \frac{2k}{k+1}T_1$. Таким образом, при отражении вторичной продольной волны от ударяющего тела напряжение в первой ветви станет несколько меньше T_1, т. е. от точки удара пойдет отраженная разгрузочная волна. Если по стальному тросу производится прямой поперечный удар со скоростью $v_0 \approx 200$ м/с, то $\gamma \approx 30^\circ$ и $\varphi_0 \approx 60^\circ$. При $f = 0{,}2$ и $\varphi_0 \approx 60^\circ$ имеем $k \approx 0{,}8$, поэтому $T_1' = 0{,}9T_1$. Таким образом, отраженная разгрузочная волна незначительно меняет натяжение в тросе.

После того как эта волна достигнет точек излома нити, произойдут дальнейшие дробление и наложение продольных и поперечных волн. В свою очередь при отражении вторичной продольной волны от свободного конца нити снова произойдет падение напряжения до нуля с одновременным возрастанием скорости частиц вплоть до того момента, пока отраженная волна не достигнет переднего фронта поперечной волны. Тогда возникнет следующая волна, характеризующаяся напряжением T_2

и существенно влияющая на движение нити. При отражении последующих продольных волн от свободного конца скорость последнего скачкообразно возрастет и через некоторое время станет больше скорости v_0. Возникают условия для перебрасывания нити за линию движения ударяющего тела, наступает так называемое захлестывание концов нити при поперечном ударе.

Рассмотрение поперечного удара по нити, концы которой жестко закреплены, проводится аналогичным образом. В этом случае после отражения первичной продольной волны от конца нити напряжение в последней удваивается, а скорость падает до нуля. В момент встречи отраженной продольной волны с передним фронтом поперечной волны возникают две вторичные продольные и две поперечные волны, движущиеся в разные стороны. В дальнейшем вторичные продольные волны отражаются от концов нити и от точки удара, накладываются на поперечные волны, все более усложняя волновую картину процесса удара. Суммарное натяжение в нити будет скачкообразно возрастать до тех пор, пока нить не разрушится или в точке удара, или в точке закрепления концов нити.

§ 2.5. Переходные этапы движения гибкой нити с тормозящими элементами на концах

Захлестывание ветвей нити можно предотвратить, прикрепив, например, на ее концах тормозящие элементы. Заметим, что задача о волновом движении нити конечной длины в переходных этапах поперечного удара при произвольной зависимости напряжения от деформации, требует применения численных методов. Для нитей с малым удлинением, например для стальной струны, скорость распространения продольных упругих волн значительно больше (в 10–20 раз) скорости распространения поперечных. В этом случае задачу можно значительно упростить, учтя, что натяжение в ветвях нити будет быстро выравниваться по их длине и приближаться к величине силы сопротивления данного тормозного элемента. В такой постановке задача решена в [9] и изложена ниже.

Будем предполагать сопротивление тормозных элементов пропорциональным квадрату скорости, т. е.

$$T = \frac{c_x F \rho_\infty}{2F_н} u^2 .$$

Здесь T – напряжение в ветви; u – скорость перемещения концов нити; ρ_∞ – плотность среды; c_x – коэффициент лобового сопротивления тормозного элемента; F – его истинная площадь; $F_н$ – площадь сечения нити. В дальнейшем будем придерживаться двойной индексации, обозначая первым индексом номер ветви нити, вторым – номер переходного процесса.

Рассмотрим сначала первый переходный этап движения нити при прямом поперечном ударе, когда волны сильного разрыва еще не достигли тормозных элементов (рис. 2.14). Предположим, что скорость поперечного удара постоянна, а собственное сопротивление и вес нити малы, так что этими факторами можно пренебречь. Для верхней ветви (рис. 2.14) уравнения (2.37), (2.38), (2.39) можно записать так:

$$\rho_{11}\left(b_{11}+u_{11}\right)v_{11}=T_{11}\sin\gamma_{11};$$
$$\rho_{11}\left(b_{11}+u_{11}\right)\left(w_{11}-u_{11}\right)=T_{11}\left(\cos\gamma_{11}-1\right); \tag{2.110}$$

$$\operatorname{tg}\gamma_{11}=v_0/b_{11}, \tag{2.111}$$

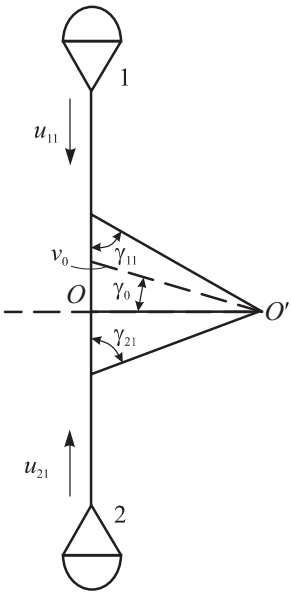


Рис. 2.14

где v, w – составляющие скорости движения элемента нити соответственно вдоль и перпендикулярно к направлению удара. Очевидно,

$$v_{11}=v_0-u_{s1}\sin\gamma_{11},\ \ \omega_{11}=-u_{s1}\cos\gamma_{11},$$

где u_{s1} – скорость скольжения нити в точке контакта с ударяющим телом.

Из приведенных выше формул легко получить формулу (2.16) и предполагая во всем дальнейшем исследовании, что $e \ll 1$, найти:

$$b_{11}+u_{11}=\sqrt{\frac{T_{11}}{\rho_0}}=\kappa_1 u_{11};\ \ \kappa_1=\sqrt{\frac{c_{x1}F_1\rho_\infty}{2\rho_0 F_н}},$$

$$\rho_{11}=\rho_0. \tag{2.112}$$

Деля первое из уравнений (2.110) на второе, получим:

$$\frac{v_{11}}{\sin\gamma_{11}}=\frac{\omega_{11}-u_{11}}{\cos\gamma_{11}-1}.$$

Подставляя в это соотношение выражения для v_{11} и w_{11} и используя (2.111) и (2.112), найдем:

$$\sin\gamma_{11} = \frac{v_0}{\kappa_1 u_{11} + u_{s1}}; \sin\gamma_{11} = \frac{1}{\kappa_1 U_{11} - U_{s1}}; U_{11} = u_{11}/v_0,\ U_{s1} = u_{s1}/v_0. \tag{2.113}$$

В то же время, из (2.110) с использованием (2.112) получим:

$$\cos\gamma_{11} = 1 - \frac{\rho_0(b_{11} + u_{11})(u_{11} + u_{s1}\cos\gamma_{11})}{T_{11}} = 1 - \frac{u_{11} + u_{s1}\cos\gamma_{11}}{\kappa_1 u_{11}};$$

$$\cos\gamma_{11} = \frac{(\kappa_1 - 1)U_{11}}{\kappa_1 U_{11} + U_{s1}} \tag{2.114}$$

Исключив γ_{11} из соотношений (2.113) и (2.114), приходим к следующему уравнению для определения U_{11}:

$$1 + (\kappa_1 - 1)^2 U_{11}^2 = (\kappa_1 U_{11} + U_{s1})^2. \tag{2.115}$$

Отсюда находим:

$$U_{11} = -\frac{\kappa_1}{2\kappa_1 - 1}U_{s1} + \sqrt{\frac{\kappa_1^2}{(2\kappa_1 - 1)^2}U_{s1}^2 + \frac{1 - U_{s1}^2}{2\kappa_1 - 1}}. \tag{2.116}$$

Второй корень отброшен, как не имеющий физического смысла.

Для нижней ветви нити соответствующее решение можно получить из формул (2.114), (2.116) после замены U_{s1} на $-U_{2s}$ и κ_1 на κ_2:

$$U_{21} = \frac{\kappa_2 U_{s2}}{2\kappa_2 - 1} + \sqrt{\frac{\kappa_2^2}{(2\kappa_2 - 1)^2}U_{s2}^2 + \frac{1 - U_{s2}^2}{2\kappa_2 - 1}}; \tag{2.117}$$

$$\cos\gamma_{21} = \frac{(\kappa_2 - 1)U_{21}}{\kappa_2 U_{21} - U_{s1}}. \tag{2.118}$$

Если $u_s \neq 0$ и $\kappa_1 > \kappa_2$, то между T_{11} и T_{21} существует связь, устанавливаемая формулой Эйлера:

$$T_{11} - \rho_0 u_{s1}^2 = e^{f(\gamma_{11} + \gamma_{21})}\left[T_{21} - \rho_0 u_{s1}^2\right],$$

где f – коэффициент трения нити о тело. Отсюда

$$e^{f(\gamma_{11} + \gamma_{21})} = \frac{\kappa_1^2 U_{11}^2 - U_{s1}^2}{\kappa_2^2 U_{21}^2 - U_{s1}^2} \quad \text{или} \quad f = \frac{1}{\gamma_{11} + \gamma_{21}}\ln\frac{\kappa_1^2 U_{11}^2 - U_{s1}^2}{\kappa_2^2 U_{21}^2 - U_{s1}^2}. \tag{2.119}$$

Таким образом, по формулам (2.114), (2.116), (2.117), (2.118), (2.119) можно вычислить U_{11}, U_{21}, γ_{11}, γ_{21} и U_{s1} при заданных κ_1, κ_2, f. При проведении конкретных расчетов удобнее задать значения κ_1, κ_2 и U_{s1} и вычислить U_{11}, U_{21}, γ_{11}, γ_{21} и f.

Полученные выше формулы позволяют провести анализ характера движения ветвей нити в зависимости от величины определяющего параметра κ. Если $\kappa_1 > 1$, то $b > 0$ и ветвь нити не перебрасывается за линию движения ударяющего тела (рис. 2.15, *а*). При $x_1 = 1$, $b = 0$, $\gamma_{11} = 90^\circ$ ветвь нити идет по линии удара (рис. 2.15, *б*); при $\kappa_1 < 1$, $b < 0$, $\gamma_{11} > 90^\circ$ имеет место переброс ветви за линию OO' (рис. 2.15, *в*). Если $\kappa_1 \le 1/2$ происходит захлестывание конца нити.

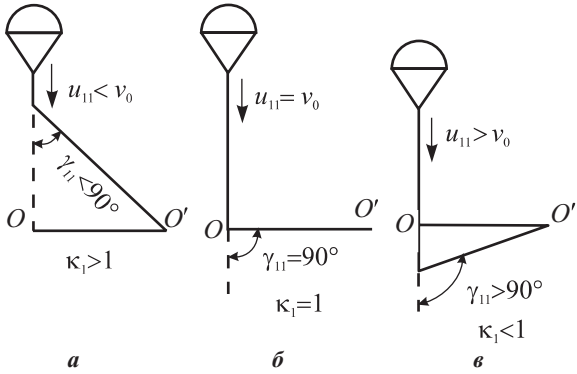


Рис. 2.15

Следовательно, для движения ветвей нити без захлестывания концов и без переброса за линию удара необходимо, чтобы $\kappa \ge 1$, или $c_x F \ge 2\rho_0 F_н / \rho_\infty$.

Отметим, что скольжение нити при заданных κ_1 и κ_2 возможно лишь при изменении коэффициента f в определенном диапазоне. Условие начала скольжения характеризуется величиной f_0 – коэффициента трения при трогании, который при заданных κ_1 и κ_2 определяется из условия $u_{s1} = 0$.

Формула для f_0 легко может быть получена из (2.119) с использованием (2.114), (2.116)–(2.118):

$$f_0 = \ln \frac{(2\kappa_2 - 1)\kappa_1^2}{(2\kappa_1 - 1)\kappa_2^2} \left(\arcsin \left[\frac{(\kappa_1 - 1)\sqrt{2\kappa_2 - 1} + (\kappa_2 - 1)\sqrt{2(\kappa_1 - 1)}}{\kappa_1 \kappa_2} \right] \right)^{-1}.$$

В табл. 2.3 приведены значения f_0 для различных значений κ_1 и κ_2. Отрицательным значениям f_0 соответствует движение нити сверху вниз (рис. 2.14).

Таблица 2.3

κ_2 \ κ_1	**1**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**	**3,5**	**4,0**
1	0	0,042	0,110	0,178	0,244	0,303	0,362
1,5	–0,042	0	0.075	0,152	0,227	0,296	0,364
2,0	–0,110	–0,075	0	0,082	0,160	0,234	0,305
2,5	–0,178	–0,152	–0,082	0	0,080	0,159	0,231
3,0	–0,244	–0,227	–0,160	–0,080	0	0,080	0,154
3,5	–0,303	–0,296	–0,234	–0,155	–0,080	0	0,070
4.0	–0,362	–0,364	–0,306	–0,231	–0,154	–0,070	0

Вывод формул для u_{11}, u_{21}, γ_{11}, γ_{21} при косом ударе отличается от проведенного выше лишь использованием выражений $v_{11} = v_0 \cos\gamma_0 - u_{s1} \sin\gamma_{11}$ и $w_{11} = v_0 \sin\gamma_0 - u_{s1} \cos\gamma_{11}$ вместо предыдущих. Здесь γ_0 – угол между вектором скорости ударяющего тела и плоскостью, проведенной перпендикулярно к первоначальному направлению нити (см. рис. 2.14). Формулы (2.113), (2.114) и (2.116) при этом заменяются на следующие:

$$\sin\gamma_{11} = \frac{\cos\gamma_0}{\kappa_1 U_{11} + U_{s1}}; \quad \cos\gamma_{11} = \frac{(\kappa_1 - 1) U_{11} \sin\gamma_0}{\kappa U_{11} + U_{s1}};$$

$$U_{11} = \frac{(\kappa_1 - 1)\sin\gamma_0 - \kappa_1 U_{s1}}{2\kappa_1 - 1} + \sqrt{\frac{[(\kappa - 1)\sin\gamma_0 - \kappa_1 U_{s1}]^2}{(2\kappa_1 - 1)^2} + \frac{1 - U_{s1}^2}{2\kappa_1 - 1}}.$$

Для нижней ветви формулы γ_{21} и U_{21} могут быть получены из предыдущих после замены γ_{11} на $-\gamma_{21}$ и U_{s1} на $-U_{s1}$. Зависимость U_s от f может быть определена по прежней формуле (2.119), которая также может быть использована для нахождения f_0 при косом ударе.

Характер движения ветвей гибкой нити при косом ударе попрежнему определяется параметрами κ_1 и κ_2. Переброс и захлестывание ветвей нити происходят при $\kappa < 1$. На рис. 2.16 приведена схема движения ветвей гибкой нити при нормальном и косом ударах при $\kappa_1 = 3$, $\kappa_2 = 1{,}5$ и $f = 0{,}15$. Расчетные данные для этих случаев при $\gamma_0 = 0$, $\pm 30^\circ$ приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Случай	γ_0	γ_{11}	γ_{21}	v_{11}	v_{21}	v_{31}
а	0	49,5	70	0,430	0,734	0,034
б	30	31,8	91,8	0,456	0,775	0,202
в	–30	80,6	44,7	0,326	0,760	–0,09

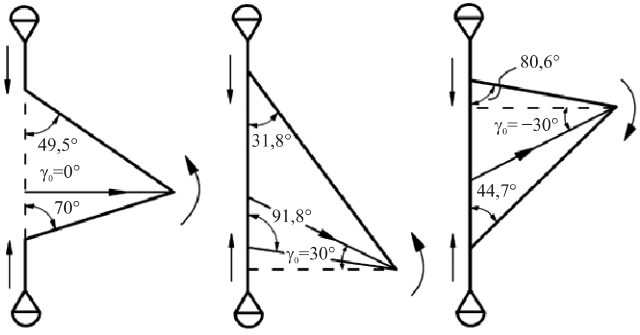
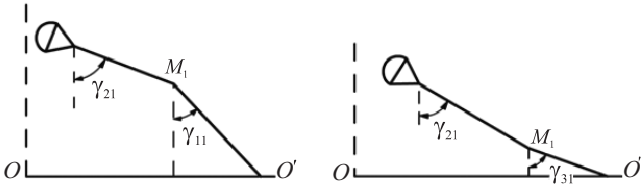


Рис. 2.16

Последующие переходные этапы движения нити при прямом поперечном ударе. После прихода поперечной волны к концу нити с тормозным элементом и ее отражения от последнего наступает второй переходной этап движения данной ветви. Этот этап характеризуется тем, что часть нити за отраженной поперечной волной приобретает некоторую новую скорость u_{12} и новое направление, характеризующееся углом γ_{12} (рис. 2.17, *а*).



а *б*

Рис. 2.17

Движение этой части нити происходит только в продольном направлении, так как предполагается, что сила сопротивления тормозного элемента всегда направлена вдоль нити. Система уравнений движения нити на втором этапе, заменяющая (2.110), (2.112), следующая:

$$\rho_{12}(b_{12}-u_{12})(v_0-u_{s2}\sin\gamma_{11}-u_{12}\sin\gamma_{12})=T_{12}(\sin\gamma_{12}-\sin\gamma_{11});\tag{2.120}$$

$$\rho_{12}(b_{12}-u_{12})(u_{12}\cos\gamma_{12}+u_{s2}\cos\gamma_{11})=T_{12}(\cos\gamma_{21}-\cos\gamma_{12});$$

$$b_{12}-u_{12}=\kappa_1 u_{12},\tag{2.121}$$

где $\rho_{12}=\rho_0$.

Из соотношений (2.120) с привлечением (2.121) получим:

$$\sin\gamma_{12}=\frac{1-(U_{s2}-\kappa_1 U_{12})\sin\gamma_{11}}{(1+\kappa_1)U_{12}};\ \cos\gamma_{12}=\frac{(\kappa_1 U_{12}-U_{s2})\cos\gamma_{11}}{(1+\kappa_1)U_{12}}.\tag{2.122}$$

Исключив отсюда угол γ_{12}, приходим к следующему квадратному уравнению для U_{12}:

$$U_{12}^2-\frac{2\kappa_1}{2\kappa_1+1}(\sin\gamma_{11}-U_{s2})U_{12}-\frac{1+U_{s2}^2-2U_{s2}\sin\gamma_{11}}{2\kappa_1+1}=0,$$

решая которое, находим:

$$U_{12}=\frac{\kappa_1}{2\kappa_1+1}\left[\sin\gamma_{11}-U_{s2}+\sqrt{(\sin\gamma_{11}-U_{s2})^2+\frac{2\kappa_1+1}{\kappa_1^2}\left(1+U_{s2}^2-2U_{s2}\sin\gamma_{11}\right)}\right].\tag{2.123}$$

Если скольжение нити на первом и втором этапах отсутствует, то

$$U_{s1}=U_{s2}=0;\qquad U_{11}=\frac{1}{\sqrt{2\kappa_1-1}};\qquad \sin\gamma_{11}=\frac{\sqrt{2\kappa_1-1}}{\kappa_1};$$

$$\cos\gamma_{11}=\frac{\kappa_1-1}{\kappa_1};\ \cos\gamma_{12}=\frac{\kappa_1-1}{\kappa_1+1};\ U_{12}=\frac{\sqrt{2\kappa_1-1}+2\sqrt{\kappa_1}}{2\kappa_1+1}.\tag{2.124}$$

Сравнивая формулы для U_{11} и U_{12}, легко убедиться, что при $\kappa_1>1$ $U_{12}>U_{11}$, при $\kappa_1<1$, наоборот, $U_{12}<U_{11}$. В том и другом случаях скорость движения нити на втором этапе ближе к скорости ударяющего тела, чем на первом этапе. Например, при $\kappa_1=2$ $U_{11}=0{,}578$, $\gamma_{11}=60^\circ$, $U_{12}=0{,}912$, $\gamma_{12}=70^\circ$; при $\kappa_1=0{,}6$ $U_{11}=1{,}58$, $\gamma_{11}=106{,}5^\circ$, $U_{12}=0{,}962$, $\gamma_{12}=100^\circ$.

Третий переходный этап движения нити начинается после того, как поперечная волна, отразившись от точки удара, начнет

распространяться к концу нити (рис. 2.17, *б*). При этом элементы нити скачком изменяют свою скорость и угол наклона. Компоненты скорости движения нити на этом этапе имеют вид:

$$v_{13} = v_0 - u_{s3}\sin\gamma_{13}\,; \qquad w_{13} = -u_{s3}\cos\gamma_{13}\,;$$

$$v_{12} = u_{13}\sin\gamma_{12}\,; \qquad w_{12} = u_{13}\cos\gamma_{12}\,;$$

где u_{s3} – скорость скольжения на третьем этапе.

Из уравнений количества движения

$$\rho_0\,(b_{13} - u_{13})(v_0 - u_{s3}\sin\gamma_{13} - u_{13}\sin\gamma_{12}) = T_{13}\,(-\sin\gamma_{12} + \sin\gamma_{13})\,;$$

$$\rho_0\,(b_{13} - u_{13})(u_{13}\cos\gamma_{12} + u_{s3}\cos\gamma_{13}) = T_{13}\,(\cos\gamma_{12} - \cos\gamma_{13})\,.$$

и формулы $b_{13} - u_{13} = \kappa_1 u_{13}$ найдем:

$$\sin\gamma_{13} = \frac{1 + U_{13}\,(\kappa_1 - 1)\sin\gamma_{12}}{\kappa_1 U_{13} + U_{s3}}\,; \qquad \cos\gamma_{13} = \frac{(\kappa_1 - 1)U_{13}}{U_{s3} + \kappa_1 U_{13}}\cos\gamma_{13}\,.$$

Отсюда, исключив γ_{13}, получим уравнение для U_{13}:

$$U_{13}^2 - \frac{2}{2\kappa_1 - 1}[(\kappa_1 - 1)\sin\gamma_{12} - \kappa_1 U_{s3}]U_{13} - \frac{1 - U_{s3}^2}{2\kappa_1 - 1} = 0\,,$$

решением которого является

$$U_{13} = \frac{(\kappa_1 - 1)\sin\gamma_{12} - \kappa_1 U_{s3}}{2\kappa_1 - 1} + \sqrt{\frac{[(\kappa_1 - 1)\sin\gamma_{12} - \kappa_1 U_{s3}]^2}{(2\kappa_1 - 1)^2} + \frac{1 - U_{s3}^2}{2\kappa_1 - 1}}\,.$$

Четвертый переходный этап движения ветви нити аналогичен второму, поэтому можно записать:

$$\cos\gamma_{14} = \frac{\kappa_1 U_{14} - U_{s4}}{(\kappa_1 + 1)U_{14}}\cos\gamma_{13}\,;$$

$$U_{14} = \frac{\kappa_1}{2\kappa_1 + 1}\left[\sin\gamma_{13} - U_{s4} + \sqrt{(\sin\gamma_{13} - U_{s4})^2 + \frac{2\kappa_1 + 1}{\kappa_1^2}\left(1 + U_{s4}^2 - 2U_{s4}\sin\gamma_{13}\right)}\right].$$

Вообще, для четного этапа

$$\cos\gamma_{1,2n} = \frac{\kappa_1 U_{1,2n} - U_{s2n}}{(\kappa_1 + 1)U_{1,2n}}\cos\gamma_{1,2n-1}\,; \tag{2.125}$$

$$U_{1,2n} = \frac{\kappa_1}{2\kappa_1 + 1}[\sin\gamma_{1,2n-1} - U_{s2n} +$$

$$+\sqrt{\left(\sin\gamma_{1,2n-1}-U_{s2n}\right)^2+\frac{2\kappa_1+1}{\kappa_1^2}\left(1+U_{s2n}^2-2U_{s2n}\sin\gamma_{1,2n-1}\right)}\Bigg];$$

(2.126)

для нечетного –

$$\cos\gamma_{1,2n+1}=\frac{(\kappa_1-1)U_{1,2n+1}}{U_{s,2n+1}+\kappa_1 U_{1,2n+1}}\cos\gamma_{1,2n}\,; \qquad (2.127)$$

$$U_{1,2n+1}=\frac{(\kappa_1-1)\sin\gamma_{1,2n}-\kappa_1 U_{s2n+1}}{2\kappa_1-1}+$$

$$+\sqrt{\frac{\left[(\kappa_1-1)\sin\gamma_{1,2n}-\kappa_1 U_{s2n+1}\right]^2}{(2\kappa_1-1)^2}+\frac{1-U_{s2n+1}^2}{(2\kappa_1-1)}}\,, \qquad (2.128)$$

т. е. имеем рекуррентные формулы для параметров последующего этапа.

Формулы, выведенные для верхней (первой) ветви нити, могут быть применены и для нижней (второй), если в них первый индекс элемента заменить на 2, а знак при U_s – на обратный.

Если для верхней ветви имеет место i-й переходный этап, а для нижней k-й ($k \neq i$ при разных длинах ветвей), то $u_{sk}=u_{si}$, и из формулы Эйлера получим:

$$f=\frac{1}{\gamma_{1i}+\gamma_{2k}}\ln\frac{\kappa_1^2U_{1i}^2-U_{si}^2}{\kappa_2^2U_{2k}^2-U_{si}^2}\,. \qquad (2.129)$$

Продолжительность переходных этапов, характеризующаяся временем прохождения поперечной волной данной ветви нити, неодинакова и при $\kappa>1$ убывает с увеличением номера этапа. Если l_{10} – начальная длина верхней ветви нити, τ_{11} – продолжительность первого переходного этапа, x_{11} – путь, пройденный за это время ударяющим телом, то

$$\tau_{11}=\frac{l_{10}}{b_{11}+u_{11}}=\frac{l_{10}}{\kappa_1 u_{11}}\,;\quad x_{11}=v_0\tau_{11}=\frac{l_{10}}{\kappa_1 U_{11}}\,;\quad \overline{x}_{11}=\frac{x_{11}}{l_{10}}=\frac{1}{\kappa_1 U_{11}}\,. \qquad (2.130)$$

Длина ветви к концу первого этапа

$$l_{11}=l_{10}+u_{s1}\tau_{11}=l_{10}\left(1+U_{s1}\overline{x}_{11}\right). \qquad (2.131)$$

Координаты конца ветви нити через время τ_{11} будут такими:

$$x'_{11} = 0\,; \quad y'_{11} = l_{10} - u_{11}\tau_{11}\,; \quad \overline{y}'_{11} = y'_{11}/l_{10} = 1 - U_{11}\overline{x}_{11} = 1 - 1/\kappa_1\,. \tag{2.132}$$

Продолжительность второго переходного этапа

$$\tau_{12} = \frac{l_{12}}{b_{12} - u_{12}} = \frac{l_{10} + u_{s1}\tau_{11} + u_{s2}\tau_{12}}{\kappa_1 u_{12}} \quad \text{или} \quad v_0\tau_{12} = \frac{l_{11}}{\kappa_1 U_{12} - U_{s2}}\,.$$

Отсюда

$$\overline{x}_{12} = \frac{x_{12}}{l_{10}} = \frac{1 + U_{s1}\overline{x}_{11}}{x_1 U_{12} - U_{s2}}\,; \quad l_{12} = l_{10}\left(1 + U_{s1}\overline{x}_{11} + U_{s2}\overline{x}_{12}\right)\cdot$$

Конец ветви с тормозным элементом при этом будет иметь координаты

$$\overline{x}'_{12} = U_{12}\overline{x}_{12}\sin\gamma_{12}\,; \quad \overline{y}'_{12} = \overline{y}'_{11} - U_{12}\overline{x}_{12}\cos\gamma_{12}\,.$$

Для третьего переходного этапа

$$\tau_{13} = \frac{l_{12}}{\kappa_1 u_{13}}\,; \quad \overline{x}_{13} = \frac{1 + U_{31}\overline{x}_{11} + U_{s2}\overline{x}_{12}}{\kappa_1 U_{13}}\,;$$

$$l_{13} = l_{10}\left(1 + U_{s1}\overline{x}_{11} + U_{s2}\overline{x}_{12} + U_{s2}\overline{x}_{13}\right);$$

$$\overline{x}'_{13} = \overline{x}'_{12} + U_{13}\overline{x}_{13}\sin\gamma_{12}\,; \quad \overline{y}'_{13} = \overline{y}'_{12} - U_{13}\overline{x}_{13}\cos\gamma_{12}\,.$$

Для четного переходного этапа будем иметь:

$$\overline{x}_{1,2n} = \frac{1}{\kappa_1 U_{1,2n} - U_{s2n}}\left(1 + \sum_{1}^{2n-1} U_{si}\overline{x}_{1i}\right); \quad l_{1,2n} = l_{10}\left(1 + \sum_{1}^{2n} U_{si}\overline{x}_{1i}\right);$$

$$\overline{x}'_{1,2n} = \overline{x}'_{1,2n-1} + U_{1,2n}\overline{x}_{1,2n}\sin\gamma_{1,2n}\,; \; \overline{y}'_{1,2n} = \overline{y}'_{1,2n-1} - U_{1,2n}\overline{x}_{1,2n}\cos\gamma_{1,2n}\,.$$

Для нечетного –

$$\overline{x}_{1,2n+1} = \frac{1}{\kappa_1 U_{1,2n+1}}\left(1 + \sum_{1}^{2n} U_{si}\overline{x}_{1i}\right); \quad l_{1,2n+1} = l_{10}\left(1 + \sum_{1}^{2n+1} U_{si}\overline{x}_{1i}\right);$$

$$\overline{x}'_{1,2n+1} = \overline{x}'_{1,2n} + U_{1,2n+1}\overline{x}_{1,2n+1}\sin\gamma_{1,2n}\,;$$

$$\overline{y}'_{1,2n+1} = \overline{y}'_{1,2n} - U_{1,2n+1}\overline{x}_{1,2n+1}\cos\gamma_{1,2n}\,.$$

Общий путь, пройденный телом за m переходных этапов,

$$x^* = l_{10}\left(\overline{x}_{11} + \overline{x}_{12} + \ldots + \overline{x}_{1m}\right).$$

Для второй (нижней) ветви аналогичные формулы могут быть получены из вышеприведенных после замены первого индекса на 2 и u_s на $-u_s$. В табл. 2.5 приводятся результаты

вычислений γ, U, $\bar{x}$, $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ в различных переходных этапах для ряда значений κ при $u_s = 0$.

Таблица 2.5

Этап	κ	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	4,0	2,5	3,0
1	γ	3,142	2,30	2,010	1,824	1,681	1,571	1,240	1,047	0,925	0,841
	U	∞	2,24	1,58	1,29	1,117	1	0,707	0,578	0,500	0,446
	$\bar{x}$	0	0,744	0,905	0,969	0,994	1	0,943	0,866	0,800	0,747
	$\bar{x}'$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\bar{y}'$	-1	-0,667	-0,43	-0,250	-0,11	0	0,334	0,5	0,6	0,667
2	γ	1,911	1,842	1,748	1,682	1,624	1,571	1,370	1,231	1,125	1,047
	U	0,707	0,908	0,961	0,987	0,997	1	0,966	0,912	0,862	0,815
	$\bar{x}$	2,830	1,834	1,488	1,267	1,112	1	0,690	0,548	0,464	0,409
	$\bar{x}'$	1,886	1,61	1,406	1,242	1,110	1	0,653	0,471	0,361	0,289
	$\bar{y}'$	-0,334	-0,251	-0,178	-0,111	-0,051	0	0,201	0,333	0,428	0,500
3	γ	1,231	1,403	1,495	1,543	1,565	1,571	1,504	1,403	1,310	1,231
	U	1,06	1,02	1,01	1,002	1,002	1	0,991	0,972	0,944	0,912
	$\bar{x}$	1,89	1,63	1,416	1,250	1,110	1	0,672	0,515	0,424	0,364
	$\bar{x}'$	3,772	3,22	2,812	2,487	2,220	2	1,306	0,942	0,722	0,577
	$\bar{y}'$	0,332	0,165	0,074	0,028	0,008	0	0,068	0,166	0,257	0,334
4	γ	1,460	1,508	1,540	1,559	1,568	1,571	1,531	1,460	1,386	1,318
	U	0,983	0,995	1	1	1	1	0,998	0,990	0,976	0,957
	$\bar{x}$	2,040	1,672	1,430	1,250	1,110	1	0,668	0,505	0,410	0,348
	$\bar{x}'$	5,762	4,888	4,242	3,737	3,330	3	1,971	1,438	1,116	0,899
	$\bar{y}'$	0,110	0,060	0,030	0,013	0,005	0	0,041	0,110	0,183	0,251

На рис. 2.18 приведены графики зависимости $U = u/v_0$ от $\bar{x}^* = x^*/l_{10}$ для различных значений κ. Как видно, при $\kappa = 1$ скорость тормозного элемента равна скорости ударяющего тела для всех переходных этапов; при $\kappa = 2$ скорость U скачкообразно увеличивается, уже при $\bar{x}^* \approx 2$ почти достигая предельного значения, равного v_0. Плавная кривая на рис. 2.18 соответствует зависимости u/v_0 от $\bar{x}^*$ для невесомой нити ($\kappa = \infty$). Для такой нити, несущей на концах тормозные элементы, переходный процесс при поперечном ударе характеризуется непрерывным изменением угла γ (от 0 до 90°) и скорости u, которая при отсутствии скольжения равна $v_0 \sin\gamma_0$. Так как при $u_s = 0$ имеем $ld\gamma = v_0 \cos\gamma d\tau$, то $u/v_0 = \sin\gamma = \operatorname{th}\bar{x}^*$ ($\bar{x}^* = v_0\tau/l$).

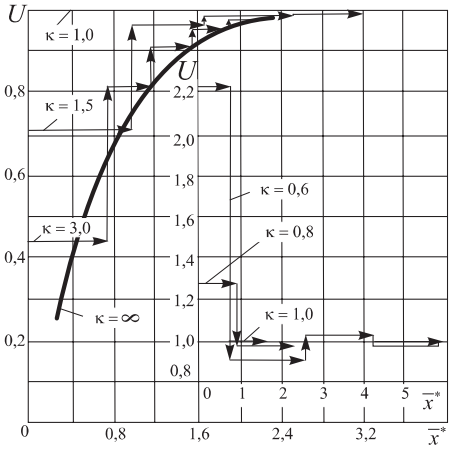


Рис. 2.18

При $\kappa < 1$ скорость движения ветви нити больше скорости ударяющего тела в нечетном переходном этапе и меньше – в четном; угол отклонения ветви γ при этом будет то больше, то меньше 90°. Ветвь будет совершать затухающее колебательное движение.

На рис. 2.19 приведен график траектории движения конца нити с тормозными элементами для различных κ и при отсутствии скольжения.

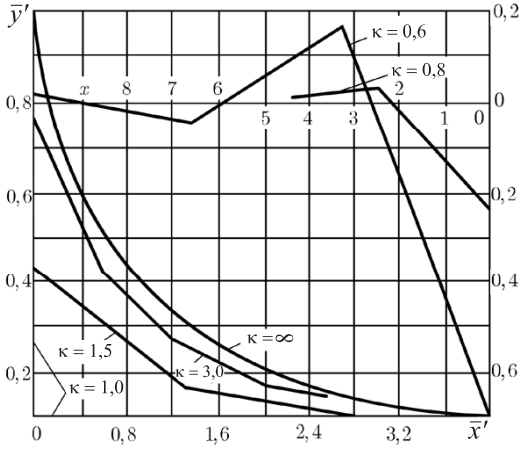


Рис. 2.19

§ 2.6. Поперечный удар по гибкой нити телом заданной формы

Рассмотрим волновую картину возникающую в гибкой нити при ударе выпуклым телом, имеющим некоторую область соприкосновения с нитью.

Удар тупым клином. В [10] рассмотрена задача об ударе столь тупым клином, что его щеки оказывают влияние на характер движения нити. При этом предполагалось, что скорость движения точки излома нити b меньше скорости распространения волн Римана. Особенность предложенной в [10] схемы решения поставленной задачи заключается в следующем: вводятся сосредоточенные силы Q_1 и Q_2 в точках B_1 и B_2 (рис. 2.20) перехода поперечного движения в продольное; предполагается, что в области поперечных движений нить прилегает к щеке клина. Таким образом, скорость волны сильного разрыва b за счет наличия сосредоточенных сил Q_1 и Q_2 будет больше, чем в соответствующей задаче § 2.2.

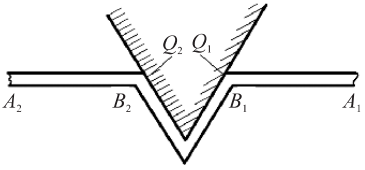


Рис. 2.20

Запишем уравнения количества движения и сохранения массы на волне сильного разрыва для данного случая:

$$\rho_0\left(b_1+u_1'\right)\left(v_1\cos\beta_1-u_1'\right)=\left(T_1\cos\gamma_1-T_1'-Q_1\sin\gamma_1\right)\left(1+e_1'\right); \quad (2.133)$$

$$\rho_0\left(b_1+u_1'\right)v_1\sin\beta_1=\left(T_1\sin\gamma_1+Q_1\cos\gamma_1\right)\left(1+e_1'\right); \quad (2.134)$$

$$\frac{b_1+u_1}{1+e_1'}=\frac{\sqrt{\left(b_1+v_1\cos\beta_1\right)^2+v_1^2\sin^2\beta_1}}{1+e_1}. \quad (2.135)$$

Здесь буквами без штриха и со штрихом обозначены параметры нити соответственно слева и справа от точки излома, движущейся по правой щеке клина. При этом (2.36) дает:

$$u_1'=\psi(e_1')-\psi\left(e_0\right).$$

Аналогичная система уравнений может быть записана для левой ветви нити. Очевидно, соотношения (2.39), (2.39′), (2.40), (2.40′), (2.41), (2.42) будут иметь место и для рассматриваемой задачи, которая, следовательно, сводится к решению 14 уравнений со столькими же неизвестными.

Остановимся подробнее на решении задачи в случае нормального удара, когда $\beta = \pi/2$ и $v = v_0$. Предположим, как в [10], что волна Римана не достигает щеки клина, так что на последней скорость частиц нити постоянна. В этом случае условие (2.135) с учетом соотношения $v_0 = b_1 tg\gamma_1$ преобразуется к виду

$$\frac{b_1 + u_1'}{1 + e_1'} = \frac{v_0}{(1 + e_1)\sin\gamma_1}. \qquad (2.136)$$

Из уравнений (2.133), (2.134) найдем:

$$\frac{\rho_0}{1 + e_1'}(b_1 + u_1')(u_1'\sin\gamma_1 + v_0\cos\gamma_1) - T_1'\sin\gamma_1 = Q_1; \qquad (2.137)$$

$$\frac{\rho_0}{1 + e_1'}(b_1 + u_1')(u_1'\cos\gamma_1 - v_0\sin\gamma_1) = T_1'\cos\gamma_1 - T_1 \qquad (2.138)$$

или

$$\frac{\rho_0 v_0}{(1 + e_1)\sin\gamma_1}(u_1'\sin\gamma_1 + v_0\cos\gamma_1) - T_1'\sin\gamma_1 = Q_1; \qquad (2.139)$$

$$\frac{\rho_0 v_0}{(1 + e_0)\sin\gamma_1}(u_1'\cos\gamma_1 - v_0\sin\gamma_1) = T_1'\cos\gamma_1 - T_1. \qquad (2\ 140)$$

Условие (2.135) целесообразно преобразовать к виду

$$v_0\cos\gamma_1 + u_1'\sin\gamma_1 = v_0\frac{1 + e_1'}{1 + e_1}. \qquad (2.141)$$

Важно отметить, что при ударе тупым клином по гибкой нити из-за наличия сосредоточенной силы Q_1 деформации по разные стороны от точки излома различны. Последний факт легко доказать от противного: если $e_1 = e_1' = e$, то $T_1 = T_1' = T$, из уравнений (2.139) – (2.141) получим соотношение

$$\frac{\rho_0 \upsilon_0^2}{\sin^2\gamma_1} = (1 + e)T(e), \qquad (2.142)$$

которое можно рассматривать как уравнение для определения деформации e.

Следовательно, возможны лишь некоторые значения e (кор-

ни уравнения (2.142)), которые приводят к равенству деформаций по обе стороны от точки перегиба. Однако легко обнаружить подстановкой выражения для T из (2.142) в формулу (2.139), что эти значения e приводят к условию $Q = 0$, противоречащему принятому допущению о наличии сосредоточенной силы. Если диаграмма $T - e$ может быть заменена схемой Прандтля, то

$$\begin{aligned} &u_1' = a_0\,(e_s - e_0) + a_1\,(e_1' - e_s), \\ &T_1' = Ee_s + E'(e_1' - e_s),\ \ T_1 = Ee_s + E'(e - e_s), \end{aligned} \tag{2.143}$$

и уравнения (2.140), (2.141) дают:

$$e_1 = \frac{v_0\,(1 + e_1')}{v_0 \cos\gamma_1 + u_1' \sin\gamma_1} - 1;$$

$$\frac{v_0 \cos\gamma_1 + u_1' \sin\gamma_1}{(1 + e_1')\sin\gamma_1}(u_1' \cos\gamma_1 - v_0 \sin\gamma_1) =$$

$$= \left(a_0^2 e_s - a_1^2 e_s + a_1^2 e_1'\right)\cos\gamma_1 - a_0^2 e_s + a_1^2 e_s + a_1^2 - \frac{v_0 a_1^2\,(1 + e_1')}{v_0 \cos\gamma_1 + u' \sin\gamma_1}. \tag{2.144}$$

Уравнение (2.144) целесообразно преобразовать к виду, при котором e_1' выражено через u_1' согласно (2.143):

$$\begin{gathered} u_1'^2[2v_0 a_1 \cos^2\gamma_1 - a_1^2\,(1 + e_s)(1 + \cos\gamma_1)\sin\gamma_1 + a_0^2 e_s\,(1 - \cos\gamma_1)\sin\gamma_1 - \\ -2a_0 a_1 \cos\gamma_1 \sin\gamma_1\,(e_0 - e_s)] + u_1'[a_0^2 v_o e_s \cos\gamma_1(1 - \cos\gamma_1) - \\ -a_1^2 v_0\,(1 + e_s)\left(\cos^2\gamma_1 + \cos\gamma_1 - 2\right) + 2a_0 a_1 v_0\,(e_0 - e_s)\sin^2\gamma_1 - \\ -a_1^3\,(1 + e_s)^2 \sin\gamma_1 + a_0^2 a_1 e_s\,(1 + e_s)(1 - \cos\gamma_1)\sin\gamma_1 - \\ -a_0 a_1^2\,(e_0 - e_s)(1 + e_s)\sin\gamma_1\,(1 + \cos\gamma_1) + a_0^3 e_s\,(e_0 - e_s)(1 - \cos\gamma_1)\sin\gamma_1 - \\ -a_1 a_0^2\,(e_0 - e_s)^2 \cos\gamma_1 \sin\gamma_1 + a_1 v_0^2 \operatorname{ctg}\gamma_1(1 - 3\sin^2\gamma_1)] + \\ +[a_1^3 v_0\,(1 + e_s)^2\,(1 - \cos\gamma_1) - a_1 v_0^3 \cos^3\gamma_1 + \\ +a_0^2 v_0 a_1 e_s\,(1 + e_s)\cos\gamma_1\,(1 - \cos\gamma_1) - \\ -a_1^2 a_0 v_0\,(e_0 - e_s)(1 + e_s)\left(\cos^2\gamma_1 + \cos\gamma_1 - 2\right) + a_0^2 v_0 a_1\,(e_0 - e_s)^2 \sin^2\gamma_1 + \\ +a_0^3 v_0 e_s\,(e_0 - e_s)(1 - \cos\gamma_1)\cos\gamma_1] = 0. \end{gathered}$$

После того как u_1' найдено, определение e_1', e_1, T_1, T' не представляет труда.

В [10] рассмотрен также случай косого удара (без трения), когда одна или две щеки клина соприкасаются с нитью.

Если угол γ меньше $\operatorname{arctg}\dfrac{v_0}{a_0(1+e_0)}$, то скорость движения точки излома нити больше скорости звука и мы приходим к случаю, рассмотренному в [11], когда возмущения локализованы в области щеки клина, а деформации и натяжения справа от точки излома такие же, как до удара.

Отмечая индексом 1 характеристики нити слева от точки излома, запишем для последней уравнения количества движения и сохранения массы:

$$\begin{gathered}\rho_0 b(v_0\sin\gamma-u_1)=(T_1-T_0\cos\gamma)(1+e_0);\\ \rho_0 b v_0\cos\gamma=(Q+T_0\sin\gamma)(1+e_0);\\ b(1+e_1)=\left(\frac{b}{\cos\gamma}-u_1\right)(1+e_0).\end{gathered}\tag{2.145}$$

Из уравнений (2.145) легко получить соотношение для определения деформации e_1:

$$\rho_0 b\left(v_0\sin\gamma+\frac{b(1+e_1)}{1+e_0}-\frac{b}{\cos\gamma}\right)=(T_1-T_0\cos\gamma)(1+e_0).\tag{2.146}$$

Предполагая деформации упругими, из (2.146) будем иметь:

$$\begin{gathered}\frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma}-\frac{1}{\cos\gamma}+\frac{1+e_1}{1+e_0}=(1+e_0)\frac{a_0^2}{b^2}(e_1-e_0\cos\gamma);\\ e_1=-\frac{[1-(1+e_0)\cos\gamma]\bar{\lambda}^2+e_0\cos\gamma}{\bar{\lambda}^2-1}.\end{gathered}\tag{2.147}$$

где $\bar{\lambda}=\lambda/a_0=b/[a_0(1+e_0)]$.

Для рассматриваемого случая $\bar{\lambda}>1$, поэтому знак величины e_1 определяется знаком выражения $[1-(1+e_0)\cos\gamma]\bar{\lambda}^2+e_0\cos\gamma$. При $e_0=0$, $e_1<0$, т. е. после удара о клин, частицы предварительно недеформированной нити в окрестности точки излома испытывают сжатие. Очевидно, сжатие будет иметь место и для отличных от нуля значений e_0, для которых $[1-(1+e_0)\cos\gamma]\bar{\lambda}^2+$ $+e_0\cos\gamma>0$.

Найдем выражение для скорости u_1, для чего в последнее соотношение (2.145) подставим значение e_1 из формулы (2.147):

$$u_1 = \frac{(1+e_0)\left(\bar{\lambda}^2 - 1\right) + \cos\gamma + e_0\cos^2\gamma - (1+e_0)\bar{\lambda}^2\cos^2\gamma}{(1+e_0)\left(\bar{\lambda}^2 - 1\right)\cos\gamma} b .$$

или, замечая, что $\bar{\lambda} = \dfrac{v_0 \operatorname{ctg}\gamma}{a_0(1+e_0)} = \dfrac{\bar{v}_0 \operatorname{ctg}\gamma}{1+e_0}$,

$$\frac{u_1}{v_0} = \frac{\sin\gamma\left[\bar{v}_0^2 - (1+e_0)^2\sec^2\gamma + (1+e_0)^2\sec\gamma + (1+e_0)^2 e_0\right]}{\bar{v}_0^2 - (1+e_0)^2\operatorname{tg}^2\gamma} . \quad (2.148)$$

Следовательно, частицы нити на щеке клина в окрестности точки излома имеют отличную от нуля скорость u_1. Так как в силу симметрии скорость частицы нити в вершине клина равна нулю, то состояние движения вблизи волны сильного разрыва не может распространиться на всю щеку клина. Следовательно, вдоль щеки клина должна возникнуть волна, «переводящая» состояние $u_t \neq 0$ в состояние $u_t = 0$. При упругих деформациях волна может быть только волной сильного разрыва, распространяющейся со скоростью a_0 (рис. 2.21).

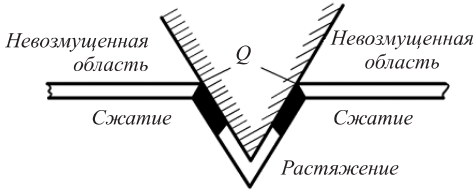


Рис. 2.21

Уравнение количества движения на этой волне имеет вид

$$(a_0 - u_1)\rho_1 u_1 = T_2 - T_1 ,$$

где T_2 – натяжение на участке растяжения. Подставив $T_1 = Ee_1$ и $\rho_1 = \rho_0/(1+e_1)$, получим:

$$T_2 = \rho_0 a_0^2 \frac{(1-\bar{u}_1)\bar{u}_1 + e_1(1+e_1)}{1+e_1} ; \quad \bar{u}_1 = \frac{u_1}{a_0} .$$

Таким образом, установлена схема движения при поперечном ударе, когда $\lambda > a_0$. При этом заметим, что хотя гибкая

нить при статическом нагружении продольного сжатия практически не воспринимает, можно полагать, что в динамическом состоянии наличие деформации сжатия в указанной схеме окажется вполне реальным [11]. Из формулы для e_1 видно, что для упругих деформаций при $b \to a_0(1+e_0)$ $\bar{\lambda} \to 1$, $e_1 \to \infty$. Следовательно, в этом случае существуют значения b, достаточно близкие к $a_0(1+e_0)$, когда деформации переходят за предел упругости. Поэтому при $b > a_0(1+e_0)$ целесообразно исследовать явления удара по нити, диаграмма «натяжение – деформация» которой представима схемой Прандтля:

$$T = T_s + E_1(e - e_s).$$

Из уравнения (2.146) при этом получаем:

$$\rho_0 v_0^2 \frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\left(\sin^2\gamma - 1 + \frac{1+e_1}{1+e_0}\cos\gamma\right) = (T_s + E_1 e_1 - E_1 e_s - T_0\cos\gamma)(1+e_0);$$

$$\rho_0 v_0^2 \operatorname{ctg}^2\gamma[1+e_1-(1+e_0)\cos\gamma] = (T_s + E_1 e_1 - E_1 e_s - T_0\cos\gamma)(1+e_0)^2.$$

Отсюда

$$e_1 = \frac{\left(\dfrac{T_s - T_0\cos\gamma}{\rho_0} - a_1^2 e_s\right)(1+e_0)^2 - (1-\cos\gamma - e_0\cos\gamma)v_0^2\operatorname{ctg}^2\gamma}{v_0^2\operatorname{ctg}^2\gamma - (1+e_0)^2 a_1^2}.$$

Из этой формулы видно, что при $b \to a_0(1+e_0)$ деформация e_1 остается конечной величиной. Таким образом, бесконечное сжатие, определенное по формуле (2.147), является следствием допущения только упругих напряжений при больших деформациях. При пластических деформациях за точкой излома возможно как растяжение, так и сжатие. Так как переход от сжатия к растяжению при пластических деформациях является процессом разгрузки, то для решения задачи в последнем случае придется иметь в виду наличие эффекта Баушингера.

Удар телом произвольной формы. После установления схемы движения волн по гибкой нити при ударе по ней тупым клином рассмотрим более общую задачу: удар телом произвольной формы, имеющим тупую головную часть [11]. Пусть на тело, имеющее произвольную форму, налетает бесконечно длинная гибкая прямолинейная нить (рис. 2.22). Допустим также, что после соприкосновения с телом частица нити остается

на его поверхности (случай абсолютно неупругого удара). В дальнейшем будет показано существование решений уравнений, описывающих движение нити для схемы, представленной на рис. 2.22. Этим самым будет доказана возможность указанной схемы движения, впервые предложенной в [11].

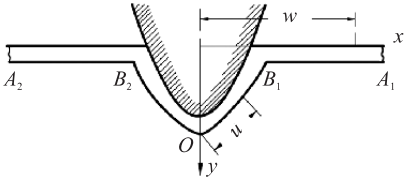


Рис. 2.22

Обозначим через u длину нити в области прилегания, отсчитываемую от точки O, где скорость частицы равна нулю, и через w – расстояние частицы нити от начала координатной системы, движущейся с нитью (рис. 2.22). Уравнения движения в областях OB и BA в соответствии с [11] имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial T}{\partial x}.$$

В области прилегания нити к телу имеем еще одно уравнение:

$$p = \frac{1}{r}\left(T - \frac{\rho_0 u_t^2}{1+e}\right); \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t},$$

где p – давление нити на тело; r – радиус кривизны тела.

Заметим, что реакция тела на нить может привести к некоторому отходу последней с поверхности тела. Однако и в этом случае форма нити будет близка к форме тела, а именно этот факт и важен для дальнейшего.

Запишем условия в окрестности точки излома, принимая, как и в [10], наличие в ней сосредоточенной силы Q, нормальной к поверхности:

$$\rho_0\left(b - \frac{\partial w}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t}\cos\gamma - v_0\sin\gamma\right) = (T_1'\cos\gamma - T_1)(1+e_1'); \quad (2.149)$$

$$\rho_0\left(b - \frac{\partial w}{\partial t}\right)\left(v_0\cos\gamma - \frac{\partial w}{\partial t}\sin\gamma\right) = (Q + T_1'\sin\gamma)(1+e_1'); \quad (2.150)$$

$$\left(b - \frac{\partial w}{\partial t}\right)(1+e_1) = \left(\frac{b}{\cos\gamma} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)(1+e_1'). \quad (2.151)$$

В этих уравнениях T_1', e_1', T_1, e_1 – натяжения и деформации соответственно в областях свободного движения и прилегания. Из кинематических соображений ясно, что

$$\operatorname{tg}\gamma = v_0 / b. \qquad (2.152)$$

Уравнение (2.152) может служить для вычисления одной из двух величин – γ или b, когда вторая задана.

Для иллюстрации метода решения задачи в случае удара по гибкой нити затупленным телом предположим, что последнее имеет форму круглого цилиндра. Для цилиндра радиуса r скорость волны сильного разрыва

$$b = \frac{d}{dt}\left[\sqrt{r^2 - (r - v_0 t)^2}\right] = \frac{(r - v_0 t) v_0}{\sqrt{r^2 - (r - v_0 t)^2}}.$$

Из этого выражения видно, что в начальный момент $b = \infty$. Следовательно, обязательно существует отрезок времени t_0, в продолжение которого скорость сильного разрыва b больше скорости звука a_0 в материале. В силу сказанного картина движения в плоскости x,t имеет вид, представленный на рис. 2.23. На линии сильного разрыва OA (рис. 2.23) соотношения между скоростью u_1, деформацией e_1 и углом наклона касательной γ, очевидно, будут такими же, что и при движении клина в случае $\lambda > a_0$. Итак, из (2.147) и (2.148) имеем:

$$e_1 = -\frac{(1-\cos\gamma)\bar{\lambda}^2}{\bar{\lambda}^2 - 1}; \quad \frac{u_1}{v_0} = \frac{\sin\gamma\left[\bar{v}_0^2 - \sec^2\gamma + \sec\gamma\right]}{\bar{v}_0^2 - \operatorname{tg}^2\gamma} = \varphi(t).$$

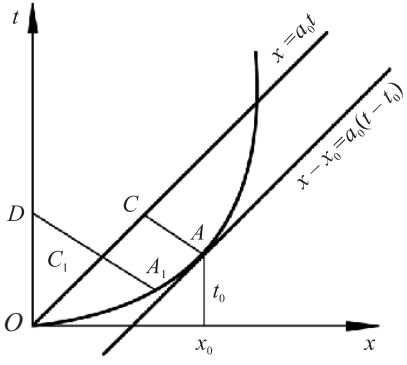


Рис. 2.23

Здесь и в дальнейшем положено $e_0 = 0$. Заметим, что в первый момент удара $\cos\gamma \approx 1$ и, следовательно, $e_1 = 0$, $u_1 = 0$. Если величина e_0 не превосходит значения e_s, то на кривой OA будет существовать участок OA_1, где деформации остаются упругими.

На всем участке OA деформации e_1 и скорости u_1 заданы как функции времени t, следовательно, задача об определении движения в области OAC (OA и AC – характеристики дифференциального уравнения для u) сводится к задаче Коши. Заметим, что для области OA_1D (A_1D – характеристика) уравнение движения будет линейным и допускает общий интеграл

$$u = f_1(x - a_0 t) + f_2(x + a_0 t).$$

Уравнение линии OA, очевидно, имеет вид:

$$x(t) = \sqrt{r^2 - (r - v_0 t)^2}. \tag{2.153}$$

Удовлетворяя граничным условиям на этой линии, приходим к следующим функциональным соотношениям для f_1 и f_2:

$$\left.\begin{aligned} &f_1'[x(t) - a_0 t] + f_2'[x(t) + a_0 t] - 1 = \frac{(1-\cos\gamma)\bar{\lambda}^2}{\bar{\lambda}^2 - 1}; \\ &-f_1'[x(t) - a_0 t] + f_2'[x(t) + a_0 t] = \bar{v}_0 \varphi(t) \end{aligned}\right\} \tag{2.154}$$

(здесь штрихи означают производные по аргументу, указанному в скобках).

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &x(t) - a_0 t = \sqrt{2v_0 tr - v_0^2 t^2} - a_0 t = \xi(t); \\ &\sqrt{2v_0 tr - v_0^2 t^2} + a_0 t = \eta(t). \end{aligned}\right\} \tag{2.155}$$

Тогда, для функций f_1 и f_2 из равенства (2.154) будем иметь следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} &f_2'(\eta) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(1-\cos\gamma)\bar{\lambda}^2}{\bar{\lambda}^2 - 1} + \bar{v}_0 \varphi(t)\right] = \psi_1(t); \\ &f_1'(\xi) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(1-\cos\gamma)\bar{\lambda}^2}{\bar{\lambda}^2 - 1} - \bar{v}_0 \varphi(t)\right] = \psi_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{2.156}$$

Из равенств (2.155) выразим t через ξ и η

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{v_0 r - a_0\xi}{a_0^2+v_0^2} - \sqrt{\frac{(v_0 r - a_0\xi)^2}{\left(a_0^2+v_0^2\right)^2} - \frac{\xi^2}{a_0^2+v_0^2}} = t^{\xi}(\xi); \\ t &= \frac{v_0 r + a_0\eta}{a_0^2+v_0^2} - \sqrt{\frac{(v_0 r + a_0\eta)^2}{\left(a_0^2+v_0^2\right)^2} - \frac{\eta^2}{a_0^2+v_0^2}} = t^{\eta}(\eta). \end{aligned}\right\} \quad (2.157)$$

Следовательно, из соотношений (2.156), преобразованных к виду

$$f_1'(\xi) = \psi_2\left[t^{\xi}(\xi)\right]; \quad f_2'(\eta) = \psi_1\left[t^{\eta}(\eta)\right]$$

найдем

$$f_1'(x-a_0t) = \psi_2\left[t^{\xi}(x-a_0t)\right]; \quad f_2'(x+a_0t) = \psi_1\left[t^{\eta}(x+a_0t)\right]. \quad (2.158)$$

Определение движения в области OC_1D сводится к решению смешанной задачи. Общее решение для u в рассматриваемой области имеет вид:

$$u = f_3(a_0t - x) + f_4(x + a_0t),$$

а функции f_3 и f_4 находятся при удовлетворении следующих граничных условий:

1) на характеристике $x = a_0t$ смещения должны быть непрерывны:

$$f_1(0) + f_2(2a_0t) = f_3(0) + f_4(2a_0t), \quad (2.159)$$

откуда

$$f_2'(2a_0t) = f_4'(2a_0t); \quad f_4'(x+a_0t) = f_2'(x+a_0t);$$

2) в точке удара, т. е. при $x = 0$, скорость частицы нити равна нулю:

$$f_3'(a_0t) = -f_4'(a_0t); \quad f_3'(a_0t - x) = -f_2(a_0t - x). \quad (2.160)$$

Так как из предыдущего решения для области OA_1C_1 функция $f_2'(x+a_0t)$ известна, то, пользуясь выражениями (2.159) и (2.160), можно вычислить деформации и скорости в области OC_1D. Найдем, в частности, деформации в точке $x = 0$:

$$e(0,t) = u_x(0,t) - 1 = -f_3'(a_0t) + f_4'(a_0t) - 1 = 2f_2'(a_0t) - 1.$$

Имея в виду (2.158), получим:

$$e(o,t)=\overline{v}_0\varphi(\tau)-\frac{[1-\cos\gamma(\tau)]\overline{\lambda}^2(\tau)}{\overline{\lambda}^2(\tau)-1}, \qquad (2.161)$$

причем τ определяется из (2.157):

$$\tau=\frac{r}{a_0\left(1+\overline{v}_0^2\right)}\left[\overline{v}_0+\frac{a_0t}{r}-\sqrt{\left(\overline{v}_0+\frac{a_0t}{r}\right)^2-\left(1+\overline{v}_0^2\right)\frac{a_0^2t^2}{r^2}}\right]. \qquad (2.162)$$

Для небольших значений времени t

$$\sin\gamma\approx\gamma;\ \cos\gamma\approx1;\ \tau=a_0^2t^2/2v_0r;\ \overline{v}_0\approx\gamma\overline{\lambda};\ e(0,t)\approx\overline{v}_0\gamma\approx\overline{v}_0^2/\overline{\lambda}.$$

Из формулы для скорости b волны сильного разрыва получим:

$$\overline{\lambda}(t)=\frac{\overline{v}_0}{\sqrt{2v_0rt}},$$

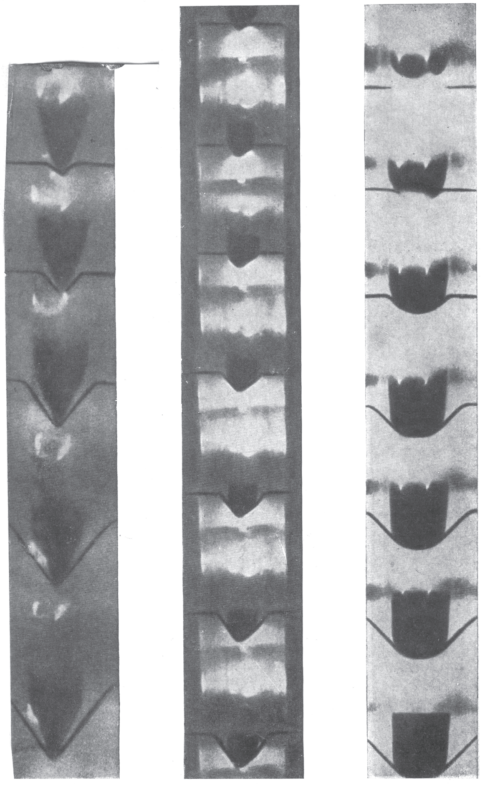
следовательно,

$$e(0,t)\approx\overline{v}_0\sqrt{2v_0\tau/r}\approx\overline{v}_0a_0t/r=v_0t/r\cdot \qquad (2.163)$$

Из последней формулы видно, что деформация в точке $x=0$ растет пропорционально первой степени скорости удара, первой степени времени и обратно пропорционально радиусу цилиндра. Очевидно, решение задачи об ударе тела любой формы по гибкой нити для случая упругих деформаций не представляет особой трудности. При достаточно малых временах формула (2.163) может быть применена для тела любой формы, причем под r при этом следует понимать радиус кривизны тела при $x=0$.

Заметим, что представляет интерес вычисление максимального значения $e(0,t)$. Из изложенного видно, что для этого необходимо решить соответствующую задачу с учетом пластических деформаций для схемы Прандтля; это проведено в [11].

Наличие при $b>a_0$ движения частиц нити за точкой ее излома делает естественным учет трения при ударе. Такое исследование проведено в [30], где рассмотрены ситуации, приводящие к покою частицы нити на поверхности тела за точкой излома, и справедливые, когда сосредоточенная сила трения Q_n^0 не превосходит $\mu^*Q_n^0$, где μ^* – коэффициент трения, Q_n^0 – нормальная составляющая сосредоточенной силы. В [31] результаты обобщены на случаи, когда при наличии сосредоточенной силы трения имеет место движение частиц нити за точкой ее излома.



а *б* *в*

Рис. 2.24

Если дана конкретная диаграмма растяжения нити, то задача о поперечном ударе по ней круглым цилиндром или другим телом может быть решена численными методами. На рис. 2.24 [11] приведены фотографии поперечного удара по резиновому жгуту диаметром 8 мм, полученные с использованием скоростного киноаппарата. Фото на рис. 2.24, *а* относится к тому случаю, когда скорость удара сравнительно невелика и имеет место волновая картина, рассмотренная в § 2.2. Фото на рис. 2.24, *б* получено в момент удара со скоростью 50 м/с клином, угол раствора которого 45°; фото на рис. 2.24, *в* соответ-

ствует удару цилиндром, диаметр которого 70 мм (белые пятна на фотографиях являются следами электроламп, освещающих область удара). Приведенные фотографии подтверждают правильность принятых в этом параграфе теоретических схем движения.

Вместе с тем экспериментальные исследования (в частности, представленные в [32]) указывают, что при некоторых условиях возможны ситуации с отскоком частиц нити от поверхности тела после удара. Таким образом, предположения об абсолютно неупругом ударе частиц нити о поверхность оправдываются лишь с определенной степенью точности и тем лучше, чем больше γ наклона клина к первоначальному направлению нити. В [32] решена задача об отскоке нити от поверхности клина в случае абсолютно упругого удара частиц о поверхность. В силу отсутствия характерного размера процесс отражения носит автомодельных характер.

§ 2.7. Применение асимптотических методов для решения задач распространения волн в нитях при воздействии движущихся тел

Теоретические решения приведенных выше задач распространения поперечно-продольных волн при ударах стали возможны либо для случая воздействия клиньев, двигающихся с постоянной скоростью, когда из соображений теории размерностей и подобия следует автомодельность волнового процесса, либо при использовании каких-либо оправданных механических допущений (например, малого отклонения скорости тела при точечном ударе от постоянного значения, допущения о расположении искривленной части нити на поверхности тела при движении точки излома со скоростью большей, чем скорость поперечной волны). Большие возможности получения аналитических решений в теории распространения поперечно-продольных волн дает поиск малых или больших параметров в соответствующих задачах и применение асимптотических методов для их решения.

Ниже кратко изложены результаты исследований, основанных на использовании в качестве малых параметров величины характерной деформации (случай 1, соответствующий слабо натянутой нити) и малого приращения деформации по сравне-

нию с начальной (случай 2, соответствующий предварительно сильно натянутой нити).

Применение асимптотических методов приводит к задаче нахождения в случае 1 нерегулярных асимптотических разложений, в случае 2 – регулярных асимптотических разложений.

Случай 1 продемонстрируем на примере решения следующей задачи [33]. Пусть в момент $t = 0$ по гибкой нити, расположенной вдоль оси Ox, наносится точечный удар, приводящий к перемещению точки $s = 0$ по закону $y = y_0(t)$, $x = x_0(t)$.

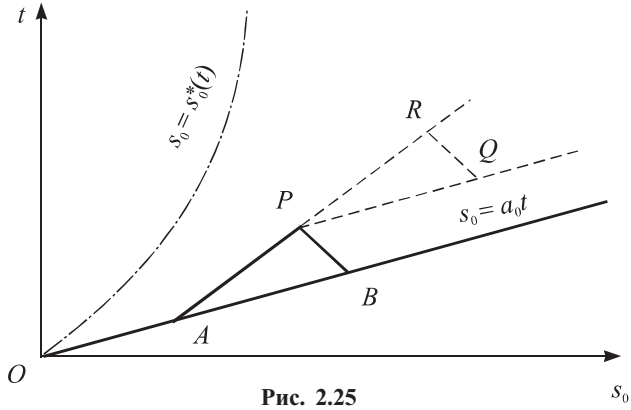


Рис. 2.25

Если предположить, что при $t = 0$ $u = \partial x / \partial t = u_0 = const$, $\mu = \partial x / \partial s = \mu_0 = \text{const}$, $v = \partial y / \partial t = 0$, $\nu = \partial y / \partial s = 0$, то так как линия $t = 0$ не является характеристикой, решением в области $0 < t < s_0 / a_0$ будет $u \equiv u_0$, $v \equiv 0$, $\nu = 0$, $\mu \equiv \mu_0$ (рис. 2.25). Здесь $s_0 > 0$, $a_0 = a(\mu_0)$. Этот вывод можно получить двояко: или учтя, что полученное решение удовлетворяет уравнениям системы (2.5), (2.6), переписанным в виде

$$\frac{ds_0}{da} = \pm a, \quad \cos\varphi\, du + \sin\varphi\, dv = \pm a\left(\cos\varphi\, d\mu + \sin\varphi\, d\nu\right), \quad (2.164)$$

$$\frac{ds_0}{da} = \pm\lambda, \quad \cos\varphi\, dv - \sin\varphi\, du = \pm\lambda\left(\cos\varphi\, d\nu + \sin\varphi\, d\mu\right), \quad (2.165)$$

начальным условиям и является единственным (для задачи Коши), или записав (2.164), (2.165) в конечных разностях и решив с учетом начальных условий при $\varphi = 0$.

За упругой волной $s_0 = a_0 t$ из соотношений на характеристиках $ds_0/dt = \pm\lambda$, записанных в конечных разностях с учетом того, что $\varphi(A) = \varphi(B) = 0$, следует

$$v(P) = \pm\lambda_0 \nu(P),\ \lambda_0 = \lambda(\mu_0),\ v(P) = \nu(P) = 0,\ \varphi(P) = 0, \quad (2.166)$$

если точка P достаточно близка к точкам A и B.

Из соотношения (2.164) на характеристике $ds_0/da = -a_0$ получим

$$du = -a_0 d\mu;\ u(P) = -a_0[\mu(P) - \mu_0] + u_0. \quad (2.167)$$

Соотношения (2.166), (2.167) будут выполняться, очевидно, для всех точек, расположенных на характеристике $s_0 - s_0(P) = a_0[t - t(P)]$. Выбирая на этой характеристике точку Q и проводя через точки P, Q характеристики $ds_0/dt = \lambda(P)$, $ds_0/dt = -\lambda(Q)$ с учетом равенства деформаций $\mu(P) = \mu(Q)$, а следовательно, $\lambda(P) = \lambda(Q)$, снова получим $v(R) = \nu(R) = \varphi(R) = 0$; $u(R) = -a_0[\mu(R) - \mu_0] + u_0$.

Таким образом, убеждаемся, что в области, ограниченной характеристиками $s_0 = a_0 t$ и $s_0 = s_0^*(t)$, где $ds_0^*/dt = \lambda$, $s_0^*(0) = 0$, нить не имеет поперечных скоростей и деформации, а продольные скорости и деформации связаны соотношением (2.167).

Протяженность области распространения поперечных волн значительно у́же, чем продольных, так как $\lambda \sim a_0\sqrt{e_0}$, $s_0^* \sim a_0 t\sqrt{e_0}$. В связи с тем, что при $e_0 \ll 1$ имеем $\cos\varphi \sim 1$, из первого уравнения (2.4) с учетом того, что $u \sim a_0 e_0$, получим:

$$T(s_0, t) - T(s_0^*, t) = \int_{s_0^*}^{s_0} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} ds_0, \quad e(s_0, t) - e(s_0^*, t) : e_0^{3/2}.$$

Следовательно, в главном приближении $e(s_0, t) \sim e(s_0^*, t)$, что приводит второе уравнение (2.4) к уравнению малых поперечных колебаний, скорость распространения которых зависит от времени. Этот результат может быть получен методом сращеваемых асимптотических разложений, если перейти к новым функциям $\bar{x} = x/(a_0 t_0 e_0)$, $\bar{y} = y/(v_0 t_0)$, $T = E e_0 \bar{e}$, переменным $z = s_0/s_0^*(t)$, $\bar{t} = t/t_0$, $s_0^* = a_0\sqrt{e_0} t_0$ и искать предельную форму уравнений (2.4) при $e_0 \to 0$, предполагая конечность введенных функций и их производных. Тогда первое уравнение (2.4) примет вид

$$e_0^{1/2}\frac{\partial^2\overline{x}}{\partial\overline{t}^2}=\frac{\partial\overline{e}}{\partial z}, \tag{2.168}$$

откуда при $e_0\to 0$ $\dfrac{\partial\overline{e}}{\partial z}=0,\ \overline{e}=\overline{e}(t)$.

Второе уравнение (2.4) можно представить так:

$$\frac{\partial^2\overline{y}}{\partial\overline{t}^2}=\overline{e}(t)\frac{\partial^2\overline{y}}{\partial z^2}. \tag{2.169}$$

Выражение для деформации

$$e_0\overline{e}=\sqrt{\left(1+e_0^{1/2}\frac{\partial\overline{x}}{\partial z}\right)^2+\frac{v_0^2}{a_0^2e_0}\left(\frac{\partial\overline{y}}{\partial z}\right)^2}-1\approx e_0^{1/2}\frac{\partial\overline{x}}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_0^2e_0}\left(\frac{\partial\overline{y}}{\partial z}\right)^2 \tag{2.170}$$

показывает, что член $e_0^{1/2}\dfrac{\partial\overline{x}}{\partial z}$ имеет в главном приближении порядок более низкий, чем $e_0\overline{e}$, и должен быть одного порядка с $\dfrac{1}{2}\dfrac{v_0^2}{a_0^2e_0}\left(\dfrac{\partial\overline{y}}{\partial z}\right)^2$. Более того, он равен главному приближению последнего с обратным знаком. В противном случае или $\partial\overline{x}/\partial z=0$, или $\partial\overline{y}/\partial z=0$, что не дает решения поставленной задачи. Следовательно, $\overline{v}_0=v_0/a_0\sim e_0^{3/4}$.

Заметим, что для случая постоянства скорости удара подобная зависимость скорости от деформации обнаруживается после нахождения решения (см. (2.56)).

Итак, из соотношения

$$\frac{\partial\overline{x}}{\partial z}=-\frac{v_0^2}{2a_0^2e_0^{3/2}}\left(\frac{\partial\overline{y}}{\partial z}\right)^2$$

после решения уравнения (2.169) в предположении, что $\overline{y}_0(t)$, $\overline{e}(t)$ и $\overline{x}_0(t)$ заданы, находим главное приближение для $\overline{x}(z,t)$. Из соотношения (2.167) определяем связь закона перемещения $\overline{y}_0(t)$ с деформацией $\overline{e}(t)$.

Из уравнения (2.170) может быть уточнен закон изменения общей деформации в области поперечного движения, из уравнения (2.168) найден следующий член асимптотического разложения для $\overline{y}$ и т. д.

Выполним решение задачи для случая, когда начальная деформация нити $\mu_0=0$, а $y_0(t)=At^m$ ($m\geq 1$). Задачу решаем полуобратным методом, предположив, что закон изменения

общей деформации при этом также степенной ($e = Bt^n$), и в дальнейшем подтвердив сделанное предположение.

Для рассматриваемого случая $e \ll 1$, $\dfrac{ds_0^*}{dt} = a_0\sqrt{B}t^{n/2}$, $s_0^* = \dfrac{a_0\sqrt{B}t^{1+n/2}}{1+n/2}$. Заметим, что при заданном $e(t)$ условия $y(s_0 = 0, t) = y_0(t)$, $y(s_0 = s_0^*, t) = 0$, $y(s = 0, t = 0) = 0$ определяют единственное решение уравнения (2.169), которым при $e(t) = Bt^n$, $y_0 = At^m$ будет функция $y_0 = At^m f(z)$, $z = s_0 / s_0^*(t)$.

Функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$m(m-1)f - (1+n/2)(2m-2-n/2)zf' = (1+n/2)^2(1-z^2)f'' \qquad (2.171)$$

и условиям $f(1) = 0$, $f(0) = 1$.

Рассмотрим поведение $f(z)$ при $z \to 1$, представив ее как $f(z) = A(1-z)^N + \ldots$ Тогда $N = (2m+n/2)/(2+n)$ и при $N > 1$ $f'(1) = 0$. В случае $N > 1$ излом на головной поперечной волне отсутствует, поэтому продольные составляющие скорости на ней не претерпевают разрыва.

Из соотношения (2.170) найдем

$$\frac{\partial x}{\partial s_0} = -\frac{1}{2}\frac{A^2}{a_0^2 B}\left(1+\frac{n}{2}\right)^2 t^{2(m-1-n/2)}(f')^2,$$

откуда определим

$$x = x_0(t) - \frac{A^2}{2a_0\sqrt{B}}\left(1+\frac{n}{2}\right)t^{2m-1-n/2}\int_0^z f'^2 dz,$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x_0' - \frac{A^2(1+n/2)(2m-1-n/2)}{2a_0\sqrt{B}}t^{2m-2-n/2}\int_0^z f'^2 dz +$$

$$+\frac{A(1+n/2)^2 t^{2m-z-n/2}}{2a_0\sqrt{B}}z(f')^2$$

Приняв для упрощения выкладок $x_0' = 0$, установим, что на головной волне $z = 1$ при $N > 1$ продольная составляющая скорость

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{z=1} = -\frac{A^2(1+n/2)(2m-1-n/2)}{2a_0\sqrt{B}}t^{2m-2-n/2}\int_0^1 f'^2 dz$$

равна $-a_0 e(t)$. Отсюда $2m-2-n/2=n$, $n=4(m-1)/3$, т. е. $e \sim (y')^{4/3}$, что и следовало ожидать в соответствии с асимптотикой задачи. При $m>1$ имеем $N-1=2(m-1)/(2m+1)>0$, что говорит об отсутствии излома на головной поперечной волне $z=1$ при всех $m>1$. В случае $m>1$ условие непрерывности продольных скоростей при $z=1$, вытекающее из факта непрерывности поперечных смещений, приводит к следующей связи коэффициентов в законах скорости и деформации:

$$\frac{A^2(1+2m)(4m-1)}{18a_0\sqrt{B}}\int_0^1 f'^2 dz = a_0 B;$$

$$18a_0^2 B^{3/2} = (1+2m)(4m-1)A^2\int_0^1 f'^2 dz.$$

Уравнение (2.171) при этом принимает вид

$$L(f) = m(m-1)f - \frac{4}{3}(1+2m)(m-1)zf' - \frac{(1+2m)^2}{9}\left(1-z^2\right)f'' = 0 \tag{2.172}$$

и может быть решено численно или приближенно. В последнем случае можно воспользоваться методом интегральных соотношений, представив приближенно решение для f в виде $f(z) = A(1-z)^N + (1-A)(1-z)^{N+1}$, обеспечивающем удовлетворение граничных условий при $z=0$, $z=1$ и асимптотике при $z \to 1$.

Удовлетворяя уравнению (2.172) интегрально, в виде $\int_0^1 L(f)dz = 0$, найдем неизвестную константу:

$$A = \frac{6m(23m^2+11m+2)}{(2m+1)(73m^2+m-2)}.$$

Численно уравнение (2.172) решено в [34], где приведено решение поставленной задачи для более общего случая $y_0 \sim t^m$, $x_0 \sim t^{n+1}$, $n=4(m-1)/3$, для которого сохраняется автомодельность волнового процесса.

Случай 2. Для этого случая ограничимся выводом соответствующих уравнений (которыми оказываются хорошо изученные уравнения математической физики) и специфических граничных условий для продольных составляющих скоростей и деформации на поперечных волнах, а также перечислением новых задач, которые поддаются решению при таком подходе (подробно решения даны в [35]).

Вывод линеаризированных уравнений распространения поперечно-продольных волн начнем с линеаризации выражения для полной деформации, как и в [36]. В рассматриваемом случае, когда струна имеет начальное натяжение $T_0 = Ee_0$, E – модуль Юнга, продольное смещение целесообразно представить в виде $x = e_0\left(s - s_0\right) + \overline{x}$, где s_0 – координата закрепления струны. Тогда возмущение деформации $\widetilde{e} = e - e_0$ имеет вид

$$\widetilde{e} = \sqrt{\left(1 + e_0 + \frac{\partial \overline{x}}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} - 1 - e_0 .$$

Если рассматривать задачи, в которых силовые воздействия на натянутую струну невелики, то $\widetilde{e} \ll 1$, а следовательно, $\partial \overline{x} / \partial s \ll 1$, $\partial y / \partial s \ll 1$, $\partial z / \partial s \ll 1$. Разлагая выражения для $\widetilde{e}$ в ряд и ограничивась первыми членами разложения, получим

$$\widetilde{e} = \frac{\partial \overline{x}}{\partial s} + \frac{1}{2\left(1 + e_0\right)}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2\right]. \qquad (2.173)$$

Отсюда следует, что вклад продольной и поперечной составляющих деформации в динамическое нагружение оказывается одного порядка, несмотря на то что поперечные смещения на порядок больше продольных (они входят в (2.173) квадратами производных)

Уравнения поперечно-продольных волн (2.4) в первом приближении, с учетом того, что

$$T\cos\left(\overline{j}, \overline{T}\right) \approx \frac{Ee_0}{1 + e_0}\frac{\partial y}{\partial s}; \quad T\cos\left(\overline{k}, \overline{T}\right) \approx \frac{Ee_0}{1 + e_0}\frac{\partial z}{\partial s};$$

$$T\cos\left(\overline{i}, \overline{T}\right) \approx Ee_0 + E\left\{\frac{\partial \overline{x}}{\partial s} + \frac{1}{2\left(1 + e_0\right)^2}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right]\right\},$$

принимают вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = b_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = b_0^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}; \qquad (2.174)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial \overline{x}}{\partial s} + \frac{1}{2\left(1 + e_0\right)^2}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right]\right], \qquad (2.175)$$

где $b_0^2 = \dfrac{Ee_0}{\rho_0(1+e_0)} = \dfrac{a_0^2 e_0}{1+e_0}$, $a_0^2 = E/\rho_0$.

В [36] показано, что уравнения (2.174) и (2.175) могут быть получены из исходной системы (2.4) методом возмущений в предположении малости $\tilde{e} \sim \varepsilon$ (ε – характерное приращение деформации), как первое ее приближение. При этом неизвестные функции $\bar{x}$, y, z, $\tilde{e}$ разлагаются в ряды:

$$\bar{x} = \varepsilon\left(X_1 + \varepsilon X_2 + \ldots\right); \quad y = \varepsilon^{1/2}\left(Y_1 + \varepsilon Y_2 + \ldots\right);$$
$$z = \varepsilon^{1/2}\left(Z_1 + \varepsilon Z_2 + \ldots\right); \quad \tilde{e} = \varepsilon\left(E_1 + \varepsilon E_2 + \ldots\right).$$

Естественно, что функции X_1, Y_1, Z_1, E_1 удовлетворяют уравнениям (2.173) – (2.175).

Уравнение (2.174), представляющее уравнение поперечных колебаний струн, может быть решено традиционными методами, применяемыми в курсах «Уравнения математической физики». В том случае, когда задано точечное воздействие при $s = 0$ в виде $y = y_0(t)$ и начальное $y = y^0(s), dy^0/dt = v^0(s),$ получить решение не составляет труда как методом распространяющихся волн, так и методом разделения переменных (при этом область изменения переменной s ограничена и на границе $s = L$ поставлено соответствующее условие). Если $y^0(s) = v^0(s) \equiv 0$, то решение имеет вид бегущей волны. В случае воздействия на натянутую струну затупленным телом решение целесообразно получать с момента $t = t_0$, когда скорость точки излома сравняется со скоростью поперечной волны. Таким образом, методом возмущений возможно теоретически определять искривленную форму струны между поперечной волной и точкой схода струны с поверхности тела [37] (подробно об этом в [35]). В [37] рассмотрена задача удара по натянутой струне плоским или сильно затупленным торцом со скоростью, убывающей со временем. Установлено условие, при котором струна «оторвется» от поверхности торца всюду, за исключением его крайних точек.

При решений уравнения (2.175), представляющего собой линейное уравнение продольных колебаний, приходится учитывать следующие обстоятельства:

1. В области $b_0 \le s < \infty$ оно однородное; его решение известно, если известны начальные значения $\bar{x} = \bar{x}^0(s)$, $d\bar{x}/dt = \bar{u}^0(s)$ и какое-либо условие, содержащее $\bar{x}$, $\partial\bar{x}/\partial s$, $\partial\bar{x}/\partial t$ при $s = b_0 t$. В области $a_0 t \le s < \infty$ для нахождения решения знания

условия при $s = b_0 t$ не требуется, так как здесь имеет место задача с начальными данными (задача Коши). В том случае, когда $\overline{x}^0(s) \equiv 0$ или $\overline{u}^0(s) \equiv 0$, решением здесь является $\overline{x}(s,t) \equiv 0$.

2. В области $0 \le s \le b_0 t$ оно неоднородное, зависит от решений $y(s,t), z(s,t)$, условия $x = x_0(t)$ в точке удара и условий на поперечной волне $s = b_0 t$, которая не является характеристикой этого уравнения.

Условия на волне $s = b_0 t$ следуют из непрерывности на ней полной деформации и применения закона количества движения в направлении оси x. С точностью до первого приближения в плоскопараллельном случае они имеют, соответственно, вид:

$$\left[\frac{\partial \overline{x}}{\partial s} + \frac{1}{2(1+e_0)}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2\right] = 0; \quad \left[\frac{\partial \overline{x}}{\partial t}\right] = \frac{b_0}{2(1+e_0)}\left[\frac{\partial y}{\partial s}\right]^2.$$

Квадратные скобки обозначают разрывы соответствующих параметров справа и слева от поперечной волны $s = b_0 t$. В [38] установлено, что величины $\left[\frac{\partial \overline{x}}{\partial s}\right]$ и $\left[\frac{\partial \overline{x}}{\partial t}\right]$ не изменяются при прохождении через поперечную волну $s = b_0 t$ продольной волны (отраженной, например, от границы $s = L$). Это обстоятельство является определяющим для понимания причины возникновения вынужденных продольных колебаний натянутых струн на частотах их поперечных колебаний.

§ 2.8. Некоторые приложения теории продольно-поперечного удара

Метод экспериментального получения динамической диаграммы растяжения материала [23, гл. I]. С этой целью по нити из испытуемого материала производится удар с некоторой постоянной фиксированной скоростью v_0. Нить закрепляется на таком расстоянии от точки удара, чтобы волна растяжения за время эксперимента не успела отразиться от мест крепления и, взаимодействуя с волной сильного разрыва, повлиять на величину угла γ. В этом случае, фотографируя картину движения нити, легко экспериментально измерить угол γ в зависимости от скорости v_0, т. е. найти $v_0 = v_0(\gamma)$.

Для случая нормального удара по нити, как следует из предыдущего, имеет место следующая система уравнений:

$$\rho_0(b+u)^2 = (1+e)T(e);\ b = (b+u)\cos\gamma;\ v_0 = b\,\mathrm{tg}\,\gamma;\ u = \int_{e_0}^{e} a(e)de.$$

Отсюда легко найти, что

$$(1+e)T(e) = \frac{\rho_0 v_0^2}{\sin^2\gamma} = f(\gamma); \qquad \frac{(1-\cos\gamma)v_0(\gamma)}{\sin\gamma} = \int_{e_0}^{e} a(e)de = \varphi(\gamma). \quad (2.176)$$

Учитывая тот факт, что $a^2 = \sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{dT}{de}}$, из последних двух соотношений можно получить дифференциальное уравнение первого порядка, из которого можно найти зависимость $T = T(e)$. С этой целью продифференцируем второе соотношение по γ:

$$\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{dT}{de}}\frac{de}{d\gamma} = \frac{d\varphi}{d\gamma},$$

затем подставим в полученное равенство выражение для T из первого соотношения. Тогда после несложных преобразований получим:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{d}{de}\left[\frac{f(\gamma)}{1+e}\right]\left(\frac{de}{d\gamma}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{d\gamma}\right)^2; \quad \frac{(1+e)\frac{df}{de} - f(\gamma)}{\rho_0(1+e)^2}\left(\frac{de}{d\gamma}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{d\gamma}\right)^2;$$

$$\frac{df}{d\gamma}\frac{de}{d\gamma} - \frac{f(\gamma)}{1+e}\left(\frac{de}{d\gamma}\right)^2 = \rho_0(1+e)\left(\frac{d\varphi}{d\gamma}\right)^2.$$

Подставив сюда выражения для f, f', φ', приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно $\frac{de}{d\gamma}$:

$$2\left(\frac{v_0'}{v_0} - \mathrm{ctg}\,\gamma\right)\frac{de}{d\gamma} - \frac{1}{1+e}\left(\frac{de}{d\gamma}\right)^2 = \frac{(1+e)(\cos\gamma-1)^2}{v_0^2\sin^2\gamma}\left(v_0 + \sin\gamma\frac{dv_0}{d\gamma}\right)^2.$$

Интегрируя это уравнение, находим $e = e(\gamma, c)$.

Из опытов легко определить γ_0, соответствующий пределу упругости. Для этого достаточно измерить длину испытуемого куска нити после удара и определить, обладает ли он остаточным удлинением. Тот угол γ_0, при котором в нити после экс-

перимента появляются остаточные деформации, будет соответствовать деформации e_s. Следовательно,

$$e_s = e(\gamma_0, c)\,. \tag{2.177}$$

Обозначив через E модуль упругости, получим:

$$(1+e_s)Ee_s = \frac{\rho_0 v_0^2(\gamma_0)}{\sin^2\gamma_0}\,,$$

$$\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}(e_s - e_0) = \frac{1-\cos\gamma_0}{\sin\gamma_0} v_0(\gamma_0)\,.$$

Подставив найденные из двух последних соотношений значения для E и e_s в равенство (2.177), получим уравнение для определения постоянной интегрирования c.

Зная зависимость $e = e(\gamma)$, из первого уравнения (2.176) определяем $T(\gamma)$, т. е. получаем динамическую диаграмму растяжения материала нити, выраженную в параметрической форме. Зависимость $T = T(e)$ находится после исключения параметра γ.

Определение натяжений и деформаций нити основы, вызванных действием поперечных сил при зевообразовании в ткачестве. В процессе работы ткацких станков на нить основы действуют продольные и поперечные ударные силы, возникающие в момент прибоя батана и зевообразования. Эти силы приводят к дополнительной деформации нитей основы. Эти деформации, обусловленные ударом батана в момент прибоя, могут быть определены по формуле, следующей из теории удара [8]. Как показано в [8], процесс зевообразования представляет собой удар по нити со скоростью v_0 – скоростью движения основы в вертикальном направлении. Обычно деформации нитей в процессе зевообразования остаются упругими, а деформация e_0 до начала этого процесса мала. Поэтому для расчета максимальных деформаций нитей основы в процессе зевообразования можно воспользоваться формулой (2.56):

$$e = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{v_0}{a_0}\right)^{4/3},$$

где a_0 – скорость звука в нити.

В [8] описано также проведение экспериментов по определению максимальных деформаций в нитях основы из вискозно-

го шелка в моменты прибоя батана и зевообразования. Удлинение определялось в процессе работы ткацкого станка с помощью последовательной кинофотосъемки фиксированного участка нити вместе с шаблоном, равным его первоначальной длине.

Эксперименты подтвердили применимость теоретических формул, по которым определяется максимум деформации нити основы в процессе ткачества. (Для хлопчатобумажной нити эти формулы были проверены по экспериментальным данным аспиранта МТИ Колесникова [8].)

Уточненная теория колебаний музыкальных струн ([36, 37, 39–41]). Вплоть до последних лет в литературе, посвященной музыкальным струнам, их колебания предполагались только поперечными. Если закрепить натянутую струну в точках $s = 0$ и $s = L$, то ее свободные колебания, например, в плоскости yOx могут быть представлены в виде [42].

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin \frac{\pi n s}{l}; \varphi_n(t) = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t; \omega_n = \frac{\pi n b_0}{l}. \quad (2.178)$$

Так как $\frac{\partial y}{\partial s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} \varphi_n(t) \cos \frac{\pi n s}{l}$, то выражение $\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2$ будет представлять бесконечный ряд, содержащий члены типа

$$\frac{\pi^2 nm}{l^2} \varphi_n(t) \varphi_m(t) \cos \frac{\pi n s}{l} \cos \frac{\pi m s}{l} =$$

$$= \frac{\pi^2 nm}{2l^2} \varphi_n(t) \varphi_m(t) \left[\cos \frac{\pi s}{l}(n+m) + \cos \frac{\pi s}{l}(n-m) \right].$$

Аналогично произведение $\varphi_n(t)\varphi_m(t)$ можно представить в виде суммы тригонометрических функции, содержащих $\cos(\omega_n \pm \omega_m)t$ и $\sin(\omega_n \pm \omega_m)t$.

Заметим, что одному и тому же значению $n + m = k$ в выражении, например, $\cos \frac{\pi s}{l}(n+m)$ будет соответствовать сумма членов, у которых собственные значения n_i и m_i могут отличаться от n и m, но $n_i + m_i = k$. Таким образом, выражение $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2$ будет представлять собой бесконечный ряд членов

$\Phi_k(t)\sin\dfrac{k\pi s}{l}$, где Φ_k является суммой членов, содержащих $\varphi_{m_i}(t)\varphi_{n_i}(t)$.

Решениями неоднородного линейного уравнения (2.175), определяющего спектр продольных колебаний закрепленной натянутой струны, будут:

1) решения однородного уравнения, по виду не отличающемуся от (2.178), если b_0 заменить на a_0, а под a_n и b_n понимать коэффициенты, определяемые начальным распределением продольных составляющих смещений и скоростей;

2) частные решения неоднородного уравнения (2.175), которые можно искать в виде $\overline{x}_k = f_k(t)\sin(\pi ks/l)$.

В силу вида функции $\Phi_k(t)$ решениями для функции $f_k(t)$ будут тригонометрические функции $\cos\omega_k t$ и $\sin\omega_k t$. Следовательно, частоты вынужденных продольных колебаний совпадают с частотами собственных поперечных колебаний. В том случае, когда одна из частот собственных продольных колебаний совпадет с какой-либо частотой поперечных, возможно явление резонанса. Подробный анализ продольных колебаний струн щипковых и клавишных инструментов проведен в [39].

При постановке задач о свободных поперечных колебаниях музыкальных струн принимается, что начальное распределение поперечных скоростей и смещений известно. Например, еще в книге лорда Рэлея [43] предлагалось считать струну щипковых инструментов в начальный момент неподвижной, имеющей треугольную форму с вершинами в точках крепления и воздействия исполнителя. Для клавишных инструментов, наоборот, считается, что начальные смещения у струны отсутствует, но или имеется начальное распределение скоростей на участке воздействия молоточка, или на этом участке действует импульс.

В [37] показано, что для щипковых и клавишных инструментов возникающие при таких постановках движения струн не позволяют им «освободиться» от медиатора или молоточка. Поставленные А.В. Брюквиным, А.А. Малашиным эксперименты, описанные в [40], указывают, что время взаимодействия медиатора со струной составляет ~ 0,01–0,03 с; за это время развивается специфический волновой процесс и спектр колебаний. В монографии [44] отмечено, что за время воздействия молоточка фортепьяно поперечная волна один-два раза

отразится от крепления, создав к моменту отскока молоточка специфическое распределение скоростей и смещений в струне. Таким образом, для наиболее обоснованного определения распределения как поперечных, так и продольных смещений и скоростей частиц струн приходится рассматривать задачу взаимодействия струны с возбудителем ее колебаний. Отсылая к [39, 41, 45], где содержится подробное описание постановок задач и математические выкладки, приведем основные выводы из них.

1. В качестве исходной модели воздействия медиатора на струну можно принять точечное воздействие бесконечно тонкой палочки, которая имеет составляющие скорости по нормали к струне (v_n) и вдоль своей оси (v_τ). В зависимости от манеры игры исполнителя и свойств медиатора (или пальца исполнителя) возможны следующие волновые сценарии.

• если v_n не меняется, трения между палочкой и струной нет, имеем случай точечного удара с постоянной скоростью, при котором струна в каждый момент времени состоит из отрезков прямых, разделенных поперечной волной; отрезки, примыкающие к местам крепления покоятся, а примыкающие к палочке – двигаются со скоростью v_n. Отсюда находится спектр поперечно-продольных колебаний в период воздействия медиатора (более высокочастотный и зависящий от места воздействия исполнителя). Ситуация, возникающая к моменту схода палочки определяет распределение поперечных и продольных скоростей и смещений частиц свободной струны;

• в случае наличия трения между струной и палочкой возникает пространственная волновая картина, приводящая к пространственным свободным колебаниям;

• так как с каждым отражением поперечной волны от медиатора проекция силы натяжения, создающая момент силы, который должен удержать палец, возрастает, возможен проворот медиатора или пальца около соответствующих точек удержания. Такая ситуация возникает при манере игры с продолжительным удержанием медиатора или пальца на струне. Пространственная волновая картина при этом значительно усложняется, поскольку зависит от динамики вращения медиатора (или пальца) и перемещения по нему струны (подробно об этом в [41, 45]);

• при необходимости учет отклонения воздействия от точечного проводится или в точной постановке (например, для клинообразной формы медиатора в [41]) или при допущений, что эти отклонения малы.

2. В качестве исходной модели воздействия молоточка массой m принимается точечное воздействие такой массы с начальной скоростью, равной скорости падения молоточка на струну. В результате решения определяется распределение смещений и скоростей частиц струны в момент отскока молоточка, принимаемое за начальное при решении задачи о колебании свободной струны. Учет влияния формы молоточка проводится в рамках теории возмущений. Проведенные теоретические исследования были сопоставлены с экспериментом, отмечена высокая степень согласования расчетных и опытных данных по спектрам поперечно-продольных колебаний.

§ 2.9. Поперечные колебания балок под действием динамических нагрузок

Выше при изучении волнового процесса, сопровождающего продольно-поперечный удар, исходили из уравнений движения гибкой нити. Ниже приводится решение задачи об изгибе под действием динамических нагрузок длинной балки, которую можно рассматривать как нить, обладающую значительной жесткостью.

Уравнение движения балки под действием поперечной нагрузки. Явление изгиба, возникающее при действии поперечных нагрузок, характеризуется тем, что первоначально параллельные поперечные сечения балки наклоняются друг к другу, вызывая искривление ее оси. В сопротивлении материалов обычно принимается гипотеза плоских сечений, согласно которой поперечные сечения балки ab и cd при изгибе остаются плоскими ($a'b'$ и $c'd'$ на рис. 2.26). При этом если верхние слои элемента $acdb$ растягиваются, то нижние сжимаются. Существует некоторый слой OO', называемый нейтральным, который при изгибе не изменяет своей длины. Установлено, что нейтральный слой проходит через центр тяжести поперечных сечений. Зная радиус кривизны ρ линии OO', легко определить деформацию e_x слоя, отстоящего на расстоянии $\bar{y}$ от OO':

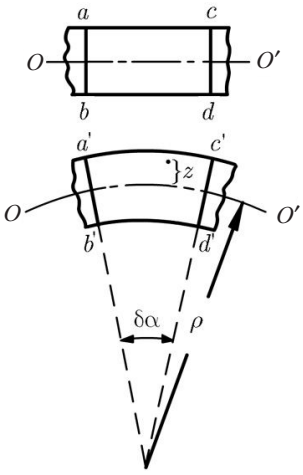


Рис. 2.26

$$e_x = \frac{(\bar{y}+\rho)\delta\alpha - \rho\delta\alpha}{\rho\delta\alpha} = \frac{\bar{y}}{\rho}.$$

Здесь $\delta\alpha$ – угол поворота двух близлежащих сечений балки. Напряжение растяжения (и сжатия) σ_x рассматриваемого слоя перпендикулярно к плоскости поперечного сечения: $\sigma_x = \sigma_x(e_x)$.

В задачах, рассматриваемых изгиб под действием ударных нагрузок, зависимость $\sigma_x(e_x)$ определяется при динамических испытаниях на растяжение (и сжатие) образцов из материала балки.

Для дальнейшего необходимо установить связь между величинами напряжений σ_x и изгибающего момента M, действующего в данном сечении балки. С этой целью поместим начало координат в центр тяжести этого сечения, ось Ox направим по оси балки, ось Oz – по линии пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения, ось Oy – перпендикулярно к Oz. Предположим, что Oy и Oz являются осями симметрии поперечного сечения. В этом случае изгиб происходит в плоскости xy и заключается в повороте поперечных сечений относительно оси Oz. При этом проекциями результирующей силы в поперечном сечении будут:

$$X = \int \sigma_x(y')dF\ ;\ \ Y = 0\ ;\ \ Z = 0\ .$$

Если $\sigma_x(-y') = -\sigma_x(y')$ (диаграмма «напряжение–деформация» антисимметрична относительно оси $e_x = 0$), то в силу сделанных выше предположений $X = 0$, т. е. продольная сила в балке отсутствует. Докажем теперь, что главный момент внутренних сил в каждом сечении балки направлен по оси Oz, т. е. моменты M_x, M_y относительно осей Ox и Oy равны нулю.

Равенство нулю M_x является следствием параллельности напряжений σ_x по оси Ox. Момент внутренних сил относитель-

но оси Oy, т. е. $M_y = \int z\sigma_x(\overline{y})dF$, равен нулю из-за симметрии поперечного сечения относительно этой оси. Таким образом, действие внутренних сил при чистом изгибе приводится к паре, причем плоскость пары совпадает с плоскостью xOy действия поперечных нагрузок.

Приравнивая момент внутренних сил изгибающему моменту внешних сил M:

$$M = \int \sigma_x \overline{y} \cdot dF ,$$

в результате получаем зависимость между радиусом кривизны ρ и величиной M.

Пусть к балке, находящейся в равновесии, приложены: некоторая система сосредоточенных сил $P_1, P_2, ..., P_n$, координаты точек приложения которых суть $l_1, l_2, ..., l_n$, и распределенная нагрузка $q(x)$. Отсечем часть балки по сечению x и заменим действие одной отброшенной (например, левой) части приложением в точке x силы

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{k} P_i + \int_0^x q(x_1)dx_1$$

и момента

$$M(x) = \sum_{i=1}^{k} P_i(x - l_i) + \int_0^x q(x_1)(x - x_1)dx_1 .$$

Если над сечением x не было сосредоточенной силы, то

$$Q(x) = dM/dx . \qquad (2.179)$$

Силу $Q(x)$ принято называть поперечной, или перерезывающей, силой. При выводе формулы (2.179), которую будем предполагать справедливой и в нестационарном случае, за положительное направление силы было принято направление сверху вниз, за положительное направление момента — направление вращения левой части балки против часовой стрелки. Составим уравнение движения длинной балки под действием изгибающего момента $M(x,t)$ и поперечной нагрузки $q(x,t)$, применив второй закон Ньютона к объему, заключенному между сечениями x и $x + dx$:

$$\rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx = q(x,t)\,dx + (Q(x+dx) - Q(x)) = \left[q(x,t) + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right]dx.$$

Отсюда

$$\rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q(x,t). \qquad (2.180)$$

Здесь ρ – плотность; F – площадь поперечного сечения; $y\,(x,t)$ – смещение центра тяжести сечения в точке x нейтрального слоя.

При выводе уравнения (2.180) не учитывались такие факторы, как вращение элемента объема балки между сечениями x и $x+dx$ при прогибе и его сдвиг под действием перерезывающих сил $Q(x+\Delta x), Q(x)$. Учет этих факторов, которые могут оказать определенное влияние на характеристики коротких балок, приводит к усложненному по сравнению с (2.180) уравнению движения, полученному в [12, 13]. Следует отметить, что, исходя из уравнения Тимошенко, мы получаем конечную скорость распространения возмущений в балке, в то время как уравнение (2.180), будучи параболического типа, приводит к бесконечной скорости распространения волн. Тем не менее разница в определении характеристик длинных балок, обусловленная применением того или иного уравнения, оказывается незначительной.

В дальнейшем ограничимся изложением работ, относящихся к исследованию поведения балок при динамических нагрузках за пределами линейной упругости и основанных на решении уравнения (2.180). Это объясняется тем, что в большинстве работ, посвященных решению уравнения Тимошенко [12–20], анализируется случай линейно-упругих деформаций.

Рассмотрим уравнение движения балки прямоугольного сечения (h – высота, b – ширина сечения), часть которого работает за пределом упругости. Предположим, что для растягивающих (сжимающих) напряжений σ_x справедлива схема Прандтля:

$$\sigma_x = Ee_x \text{ при } e_x \le e_s;\ \sigma_x = (E - E')e_s + E'e_x \text{ при } e_x \ge e_s.$$

Из уравнения $M = b\int \sigma_x \bar{y}d\bar{y}$ для изгибающего момента в балке прямоугольного сечения получим

$$M = 2b\int_0^{h/2} \sigma_x \overline{y} d\overline{y}\,. \qquad (2.181)$$

При малых величинах прогиба $y(x,t)$ кривизна равна $\kappa = 1/\rho \approx \partial^2 y/\partial x^2$ и деформация e_x при выбранном положительном направлении изгибающего момента определяется соотношением

$$e_x = -\overline{y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\overline{y}\kappa\,. \qquad (2.182)$$

Обозначая через $\overline{y}_s$ координату упругого слоя, из (2.181) находим:

$$M = -\left[\frac{2b\kappa E\overline{y}_s^3}{3} - \frac{\overline{y}_s b(E-E')e_s\kappa}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \overline{y}_s^2\right) + \frac{2b\kappa E'}{3}\left(\frac{h^3}{8} - \overline{y}_s^3\right)\right].$$

Наконец, учитывая, что $e_s = -\kappa\overline{y}_s$; $\lambda = (E-E')/E$; $J = bh^3/12$ (J – момент инерции поперечного сечения), последнюю формулу перепишем в виде

$$M = -EJ\kappa\left[1 - \lambda - 4\lambda\left(\frac{\overline{y}_s}{h}\right)^3 + 3\lambda\left(\frac{\overline{y}_s}{h}\right)\right]. \qquad (2.183)$$

Таким образом, даже в случае схемы Прандтля изгибающий момент M оказывается нелинейной функцией кривизны κ.

В [21], где получены (2.183) и соответствующее нелинейное уравнение в частных производных для смещения $y(x,t)$, рассмотрен также случай, когда в сечении x начинается разгрузка. При этом уравнение для $y(x,t)$ предлагается сводить к линейному, соответствующему упругому случаю, а все нелинейные члены и члены, зависящие от λ, переносить в правую часть уравнения, рассматривая их как фиктивную распределенную нагрузку. Далее используется метод последовательных приближений, в котором за нулевое приближение принимаются решения соответствующих задач для упругого случая.

Удар с постоянной скоростью по балке бесконечной длины. Предположим, что в некотором сечении $x = 0$, неограниченной в обе стороны балки, производится удар с постоянной скоростью v_1. Будем считать плотность ρ и площадь попе-

речного сечения F постоянными, а поперечную нагрузку $q\,(x,t)$ отсутствующей. При этом уравнение (2.180) принимает вид

$$\rho F\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\,, \qquad (2.180')$$

причем изгибающий момент M является заданной функцией кривизны $\kappa \approx \partial^2 y/\partial x^2$. Для линейноупругих деформаций сечения балки, $M = EJ\kappa$.

Рассматриваемая задача была решена Буссинеском [22], показавшим, что отношение y/t является функцией только x^2/t. Последний факт, как показано в [23], остается справедливым как при нелинейноупругих, так и при пластических деформациях. Введем новую переменную η:

$$\eta=\frac{1}{4a^2}\frac{x^2}{t}\,,$$

где $a^2=\sqrt{EJ/(\rho F)}$, и положим, что $y = tf(\eta)$. Тогда

$$\kappa=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{2a^2}\left(f'+2\eta f''\right);\ \ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\eta^2}{t}f''. \qquad (2.181)$$

Как видно, кривизна, а следовательно, и изгибающий момент зависят только от переменной η.

Вводя новую функцию

$$S=\frac{2a^3}{EJ}\sqrt{t}Q=\frac{2a^2}{EJ}\sqrt{\eta}\frac{dM}{d\eta}\,, \qquad (2.182)$$

уравнение (2.180′) с использованием (2.181) преобразуем в следующее:

$$S'+2\eta^{3/2}f''=0\,;\ S+\eta^{1/2}\left(2a^2k-f''\right)=0\,. \qquad (2.183)$$

Дифференцируя (2.183) и принимая во внимание (2.181) и (2.182), окончательно получаем:

$$S''+EJS\frac{d\kappa}{dM}=0\,. \qquad (2.184)$$

Уравнение (2.184) является по существу уравнением механики; закон деформирования учитывается через функцию

$d\kappa/dM$. Выразим теперь смещение $y\,(x,t)$ через $S\,(\eta)$. Из (2.183) находим:

$$y = tf\,(\eta) = -t\int d\eta \int \frac{S'(\eta)}{2\eta^{3/2}}\,d\eta + \text{const}$$

или

$$y = -t\int_{\eta}^{\infty} d\zeta \int_{\zeta}^{\infty} \frac{S'(\xi)}{2\xi^{3/2}}\,d\xi \qquad (2.185)$$

(таким выбором пределов интегрирования, как будет показано ниже, обеспечивается удовлетворение граничных условий на бесконечности).

Преобразуем (2.185), изменив порядок интегрирования (область интегрирования ABC в (2.185) изображена на рис. 2.27). Тогда

$$y = -t\int_{\eta}^{\infty} \frac{S'(\xi)\,d\xi}{2\xi^{3/2}} \int_{\eta}^{\xi} d\zeta = -\frac{t}{2}\int_{\eta}^{\infty} \frac{S'(\xi)\,d\xi}{\xi^{1/2}} + \frac{t}{2}\eta\int_{\eta}^{\infty} \frac{S'(\xi)\,d\xi}{\xi^{3/2}}. \qquad (2.186)$$

Покажем теперь, что (2.186) удовлетворяет граничным и начальным условиям при любой функции $S\,(\eta)$, обеспечивающей существование интегралов (2.186). Из уравнения (2.186) непосредственно видно, что

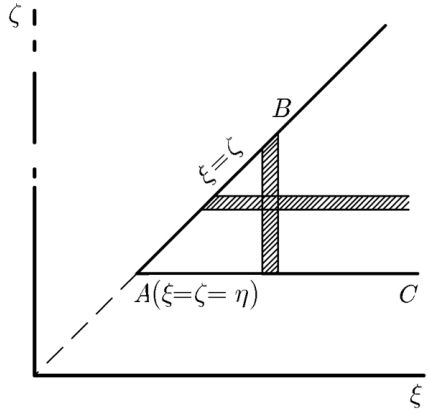


Рис. 2.27

$$y(x,0)=0\,;\;\; y(0,t)=-\frac{t}{2}\int_0^\infty \frac{S'(\xi)}{\xi^{1/2}}d\xi\,.$$

Следовательно, скорость удара при выбранном виде решения для всех моментов времени t постоянна и равна

$$v_1=-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{S'(\xi)}{\xi^{1/2}}d\xi\,.$$

Наконец,

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{x}{4a^2}\int_\eta^\infty \frac{S'(\xi)}{\xi^{3/2}}d\xi\,,\;\; \frac{\partial y(x,0)}{\partial x}=0\,.$$

Чтобы определить угол наклона балки в точке $x=0$, необходимо найти предел выражения

$$\lim_{\eta\to 0}\sqrt{\eta}\int_\eta^\infty \frac{S'(\xi)d\xi}{\xi^{3/2}}=A\,. \qquad (2.187)$$

Это выражение при ограниченности $S'(\xi)$ конечно, поэтому $\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=\frac{A\sqrt{t}}{2a}$ и при $A\neq 0$ неограниченно возрастает с течением времени.

Преобразуем (2.187) к виду

$$\sqrt{\eta}\int_\eta^\infty \frac{S'(\xi)}{\xi^{3/2}}d\xi=-\left.\frac{2S'(\xi)}{\sqrt{\xi}}\right|_\eta^\infty\sqrt{\eta}+2\sqrt{\eta}\int_\eta^\infty \frac{S''(\xi)}{\sqrt{\xi}}d\xi,$$

из которого видно, что для функции $S''(\xi)$, удовлетворяющей условию

$$S'(0)=0 \qquad (2.188)$$

и имеющей ограниченную первую производную, $A=0$, т. е. $\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=0$.

Аналогичным образом можно показать, что при $x=\infty$

$$y(\infty,t)=y'_x(\infty,t)=y''_{xx}(\infty,t)=y'''_{xxx}(\infty,t)=\ldots=0\,.$$

Для дальнейшего исследования нам понадобится выражение кривизны κ через функцию $S(\eta)$. Из (2.183) имеем:

$$\kappa = \frac{1}{2a^2}\left(f' - \frac{S'}{\sqrt{\eta}} \right).$$

Отсюда

$$\kappa = -\frac{1}{2a^2}\left[\frac{S'}{\sqrt{\eta}} + \int \frac{S'}{2\eta^{3/2}} d\eta \right] + \text{const}. \qquad (2.189)$$

Интегрируя (2.189) по частям и учитывая, что $\kappa(\infty, t) = 0$, находим:

$$\kappa = \frac{1}{2a^2}\int_{\eta}^{\infty} \frac{S'(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi. \qquad (2.190)$$

Аналогично

$$M = -\frac{EJ}{2a^2}\int_{\eta}^{\infty} \frac{S(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi; \quad Q = \frac{EJ}{2a^3}\frac{S(\eta)}{\sqrt{t}}. \qquad (2.191)$$

Сила $P(t)$, необходимая для совершения удара, равна удвоенной перерезывающей силе при $\eta = 0$:

$$P = \frac{EJ}{a^3}\frac{S(0)}{\sqrt{t}}. \qquad (2.192)$$

Для энергии W получаем выражение

$$W = 2\frac{EJ}{a^3} v_1 S(0)\sqrt{t}. \qquad (2.193)$$

При ударе с малыми скоростями, когда возникают только упругие деформации, уравнение (2.184) принимает вид $S'' + S = 0$. Его решением, удовлетворяющим условию (2.188), является $S = c\cos\eta$.

Из формулы для v_1 следует:

$$v_1 = \frac{c}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin\xi}{\xi^{1/2}} d\xi = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad S = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} v_1 \cos\eta. \qquad (2.194)$$

Уравнение (2.190) показывает, что максимальная кривизна достигается при $x = 0$ и равна

$$\kappa(0) = v_1\sqrt{\frac{\rho F}{EJ}}. \qquad (2.195)$$

Следовательно, при $\bar{y} = h/2$ будут максимальные деформации:

$$e_{\max} = \frac{h}{2} v_1 \sqrt{\frac{\rho F}{EJ}}\,.$$

Отсюда находим скорость удара v_e, при которой начинают возникать пластические деформации:

$$v_e = \frac{2e_s}{h}\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} = \frac{2\sigma_s}{Eh}\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}. \qquad (2.196)$$

При сосредоточенном ударе балка деформируется, принимая вид волнистой кривой. Волны распространяются от точки удара, причем в каждом сечении балки последовательно меняется знак кривизны. Последнее легко показать, если заметить, что функция S периодически обращается в нуль; следовательно, изгибающий момент и кривизна периодически достигают экстремумов. Непосредственными расчетами можно установить, что первая точка, где $y = 0$, имеет абсциссу

$$x_0 = 2{,}13\sqrt[4]{\frac{EJ}{\rho F}}\sqrt{t} = 2{,}13\sqrt[4]{\frac{J}{F}}\sqrt{a_0 t}, \qquad (2.197)$$

где a_0 – скорость звука в материале балки.

Покажем теперь, как определить функцию $S(\eta)$ при ударе, сопровождающемся пластическими деформациями с наличием зон разгрузки и повторного нагружения.

Очевидно, что после определения функции $S(\eta)$ смещение $y(x,t)$ рассчитывается по формуле (2.186). На границе зон разгружения и повторного нагружения y и y'_x должны быть непрерывны, следовательно, в силу (2.186) должны быть непрерывны $S(\eta)$ и $S'(\eta)$.

Уравнение (2.184) для определения функции S при произвольной зависимости изгибающего момента от кривизны может быть решено численно. Характер изменения M от κ приведен на рис. 2.28. Если кривизна убывает после достижения значения $|\kappa_1| > |\kappa_e|$, то соответствующая величина изгибающего момента находится на кривой разгрузки.

Решение уравнения (2.184) может быть получено при аппрок-

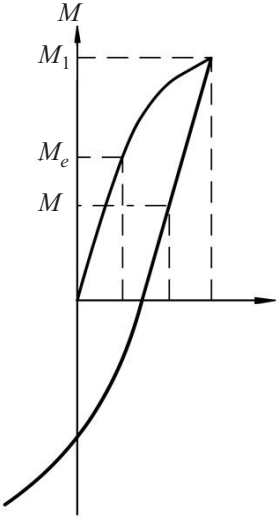


Рис. 2.28

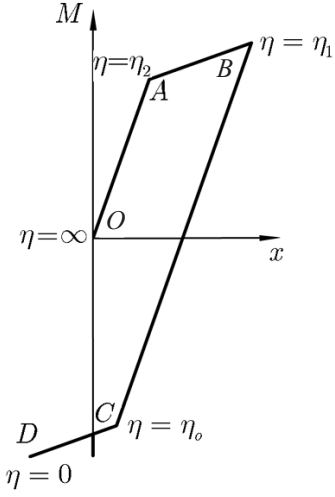


Рис. 2.29

симации кривой $M-\kappa$ указанным на рис. 2.29 образом. Наклоны отрезков OA, BC и AB, CD к оси κ равны соответственно EJ и EJa^2 (см. рис. 2.29). В этом случае функция $S(\eta)$ состоит из участков кривых вида $A\sin(\eta-\eta)$ или $A\sin\left((\eta-\bar{\eta})/a\right)$; кривизна κ будет функцией знакопеременной, убывающей по абсолютному значению с ростом η. В силу последнего обстоятельства пластические деформации возникают при возрастании скорости v_1 сначала в точке $x=0$, а затем распространяются от места удара.

Типичный случай изображен на рис. 2.30. В областях *I – IV* решение для S дается в виде

$$I:\ S=A\cos\frac{\eta}{a},\quad 0\le\eta\le\eta_0;\quad II:\ S=-B\sin(\eta-\eta_1),\quad \eta_0\le\eta\le\eta_1;$$

$$III:\ S=-C\sin\frac{1}{a}(\eta-\eta_1),\ \eta_1\le\eta\le\eta_2;IV:\ S=D\sin(\eta-\eta_3),\ \eta_2\le\eta. \tag{2.198}$$

Физический смысл выписанного решения ясен (см. рис. 2.29 и 2.30): в сечении κ до некоторого момента имеет место рассмотренный выше процесс упругого деформирования (зона *IV*);

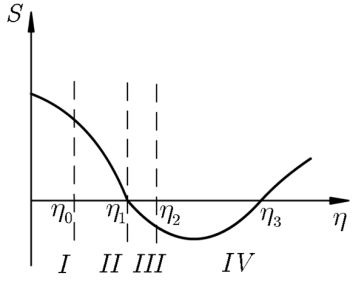


Рис. 2.30

при дальнейшем увеличении времени крайние волокна этого сечения получают деформации, превышающие e_s, после чего нагружение происходит в пластической части диаграммы $M-\kappa$ (зона *III*). Начиная с момента, определяемого условием $\eta=\eta_1$, в сечении x происходят разгружение и вторичное нагружение (с изменением знака изгибаюего момента). Этому процессу на рис. 2.30 соответствуют зоны *I* и *II*. В точке η_1, очевидно, $dM/d\eta=0$, поэтому $S(\eta_1)=0$.

При очень больших скоростях удара картина движения балки может осложниться из-за наличия большего числа зон. Наоборот, с уменьшением скорости v_1 зона *III* уменьшается и исчезает, а зоны *II* и *IV* объединяются в одну область. Наконец, при $v_1=v_e$ исчезает и область *I*.

Восемь неизвестных (η_0, η_1, η_2, η_3, A, B, C, D), входящих в (2.198), определяются из пяти условий непрерывности S и S':

$$A\cos\frac{\eta_0}{a}=-B\sin(\eta_0-\eta_1);\ \frac{A}{a}\sin\frac{\eta_0}{a}=B\cos(\eta_0-\eta_1);\ B=\frac{C}{a};$$
$$-C\sin\frac{\eta_2-\eta_1}{a}=D\sin(\eta_2-\eta_3);\ \frac{C}{a}\cos\frac{\eta_2-\eta_1}{a}=-D\cos(\eta_2-\eta_3), \tag{2.199}$$

и трех интегральных условий:

$$\int_0^\infty \frac{S'}{\sqrt{\eta}}d\eta=-2v_1; \tag{2.200}$$

$$\frac{EJ}{2a^2}\int_\infty^{\eta_2}\frac{S}{\sqrt{\eta}}d\eta=M_e \quad\text{или}\quad \int_\infty^{\eta_2}\frac{S(\eta)}{\sqrt{\eta}}d\eta=2v_e; \tag{2.201}$$

$$\frac{EJ}{2a^2}\int_{\eta_0}^{\eta_1}\frac{S}{\sqrt{\eta}}d\eta=2M_e \quad\text{или}\quad \int_{\eta_0}^{\eta_1}\frac{S(\eta)}{\sqrt{\eta}}d\eta=4v_e, \tag{2.202}$$

из которых первое уравнение для v_1, второе и третье выражают тот факт, что $M(\eta_2) = M_e$ и $M(\eta_1) - M(\eta_0) = 2M_e$. При выводе двух последних формул было учтено (2.195).

Конкретные расчеты неизвестных величин η_0, η_1, η_2, η_3, A, B, C, D значительно упрощаются, если $\alpha = 0$. При этом надо различать два случая в зависимости от значения скорости удара v_e.

Случай 1: $v_e < v_1 < 2{,}087 v_e$. Скорость удара выбрана так, чтобы существовала единственная область пластических деформаций, прилегающая к точке $x = 0$. Поскольку $\eta_0 < \eta_1$, то максимальное значение η_0, первый раз обращающее в нуль функцию S, есть $\alpha\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому $\eta < \alpha\dfrac{\pi}{2}$ и при $\alpha \to 0$ $\eta_0 \to 0$, т. е. зона *I* стягивается в точку. Но тогда из (2.199) следует, что производная S' в точке $\eta = 0$ стремится к конечному пределу, отличному от нуля. Вся балка, за исключением точки $\eta = 0$, занята зоной *II*, поэтому

$$S = -B\sin(\eta - \eta_1).$$

Для определения B и η_1 служат условия (2.200) и (2.201):

$$B\int_0^\infty \frac{\cos(\eta - \eta_1)\,d\eta}{\sqrt{\eta}} = 2v_1; \quad B\int_0^\infty \frac{\sin(\eta - \eta_1)\,d\eta}{\sqrt{\eta}} = -2v_e.$$

Отсюда имеем:

$$B = 2\sqrt{\frac{v_1^2 + v_e^2}{\pi}}; \quad \eta_1 = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{v_e}{v_1}. \tag{2.203}$$

Найдем выражения для тангенса угла наклона оси балки в точке удара. Из формулы (2.186) дифференцированием по x получаем

$$\operatorname{tg}\theta = \left(-\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{\sqrt{t}}{a}S'(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{v_1 - v_e}{a}\sqrt{t}.$$

Подставив сюда значение $1/\alpha = \sqrt{\kappa_e / v_e}$, находим:

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{2\kappa_e}{\pi v_e}}(v_1 - v_e)\sqrt{t}. \tag{2.204}$$

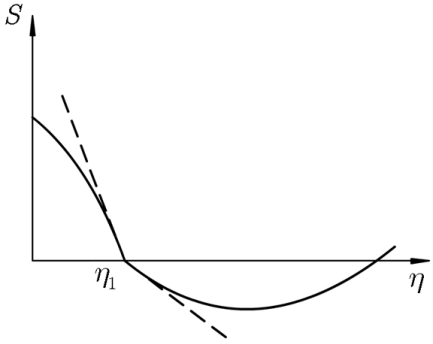


Рис. 2.31

Появление этого угла обусловлено специальным видом кривой $M-\kappa$: при $M = M_e$ материал начинает течь и кривизна может неограниченно возрастать.

Следующее сечение, где изгибающий момент достигает наибольшего значения, определяется условием $Q=0$, т. е. $S(\bar{\eta})=0$. В нашем случае такое сечение будет в точке $\eta=\eta_1$, изгибающий момент в которой достигнет величины – M_e, когда

$$\int_{\eta_1}^{\infty}\frac{\sin(\eta-\eta_1)}{\sqrt{\eta}}d\eta = 2v_e$$

или

$$\frac{\sin\eta_1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\eta_1}\frac{\cos\eta}{\sqrt{\eta}}d\eta-\frac{\cos\eta_1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\eta_1}\frac{\sin\eta}{\sqrt{\eta}}d\eta=\sin\eta_1-\cos\eta_1.$$

Решением последнего уравнения является $\eta_1 = 70,6^{\circ}$. При этом из (2.203) находим $v_1 = 2{,}087v_e$.

Случай 2: $v_1 > 2{,}087v_e$. Как и в предыдущем случае, можно показать, что зона *III* сведется в точку. Влияние этой точечной зоны приведет к разрыву непрерывности функции S в точке η_1. Итак, имеем следующее решение (рис. 2.31):

$$S=-B\sin(\eta-\eta_1),\ \ 0<\eta\le\eta_1;$$

$$S=-D\sin(\eta-\eta_1),\ \ \eta_1\le\eta.$$

Из интегральных соотношений (2.200)–(2.202) находим B, D, η_1:

$$B\int_0^{\eta_1}\frac{\cos(\eta-\eta_1)}{\sqrt{\eta}}d\eta+D\int_{\eta_1}^{\infty}\frac{\cos(\eta-\eta_1)}{\sqrt{\eta}}d\eta=2v_1;$$

$$2D\int_{\eta_1}^{\infty}\frac{\sin(\eta-\eta_1)}{\sqrt{\eta}}d\eta=-B\int_0^{\eta_1}\frac{\sin(\eta-\eta_1)}{\sqrt{\eta}}d\eta=4e_e. \qquad (2.205)$$

Кривая прогибов в точке $x=0$ имеет конечный угол наклона θ. Непосредственным дифференцированием (2.186) получаем:

$$\operatorname{tg}\theta=-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}=\frac{B}{a}\cos\eta_1\sqrt{t}=\sqrt{t}\sqrt{\frac{\kappa_e}{v_e}}B\cos\theta.$$

В точке $\kappa=2a\sqrt{\eta_1 t}$ угол наклона балки непрерывен, а кривизна имеет разрыв ввиду скачкообразного изменения S' в этой точке. Непосредственным вычислением найдем:

$$\Delta\kappa=\frac{\kappa_e}{2v_e}\frac{1}{\sqrt{\eta_1}}(B-D).$$

Величины η_1 и $\operatorname{tg}\theta\big/\sqrt{tv_e\kappa_e}$ могут быть определены как функции v_1/v_e из (2.196). При $v_1\gg v_e$ получаются следующие приближенные выражения:

$$\eta_1=\frac{3v_e}{v_1},\quad \operatorname{tg}\theta=\sqrt{t}\sqrt{\frac{\kappa_e}{3}}\frac{v_1^{3/2}}{v_e}.$$

Приведенные выше результаты, полученные в [23], были сопоставлены ее авторами с экспериментальными данными. Эксперименты проводились с образцами прямоугольного сечения (0,95×1,90 см и 0,95×2,54 см) и длиной 305 см. Удар проводился по узкой стороне балки. Путем соответствующей системы креплений концы балки удерживались от вертикального перемещения, и изгибающий момент в них был равен нулю.

Удар производился в середине балки молотком массой 2,6 кг. Длина участка соприкосновения молотка с балкой была равна 1,9 см. Скорость удара сообщалась молотку резиновым шнуром и измерялась электрическим способом. Продолжительность удара регулировалась приспособлением, которое задерживало молоток, но не мешало испытываемой балке продолжать ее движение вниз по инерции. Кривая прогибов в конце удара, т. е. в момент задержания молотка, регистрировалась искровой фотографией.

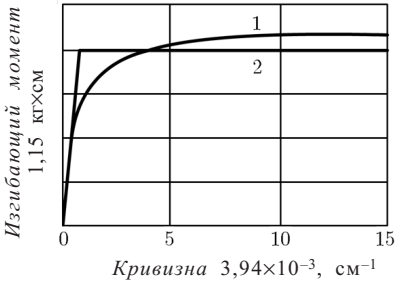


Рис. 2.32

На рис. 2.32 для балок из холоднокатаной низкоуглеродистой стали приведена кривая $M-\kappa$, построенная методом Надаи по экспериментальной зависимости напряжения от деформации для балки сечением 0,95×2,54 см. При проведении численных расчетов принималась приведенная на том же рисунке идеальная схема Прандтля. Величины изгибающего момента M_e и кривизны κ_e соответственно равны 9200 кг×см и 0,00336 см$^{-1}$.

На рис. 2.33 приведены экспериментальные и теоретические кривые прогибов. Последние рассчитаны для скорости $v_1 = 30,5$ м/с и прогиба 2,64 см в точке $x = 0$ при продолжительности удара 0,87 мс. Так как при этом $v_e = 12,5$ м/с, то в балке должны были возникнуть пластические деформации.

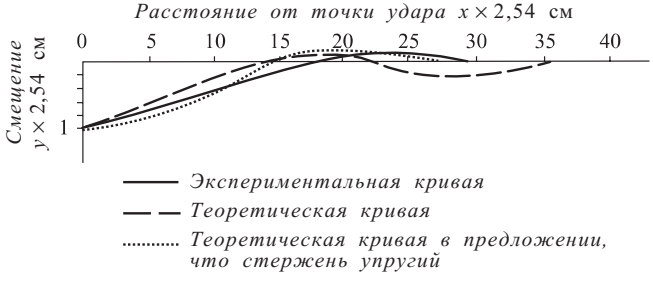


Рис. 2.33

На рис. 2.34 и 2.35 приведены графики зависимости от $\sqrt{t}$ угла наклона оси балки в месте удара θ и абсциссы x_0 первой точки, где прогиб равен нулю. Экспериментальные значения для θ близки к расчетным, что, видимо, объясняется слабой зависимостью этого параметра от предела упругости и вида кривой $M-\kappa$. Лучшее совпадение экспериментальных значений x_0 с расчетными по упругой теории, чем по пластической, вероятно, объясняется тем, что в расчетах авторы [23] использовали статическую диаграмму $M-\kappa$ вместо динамической.

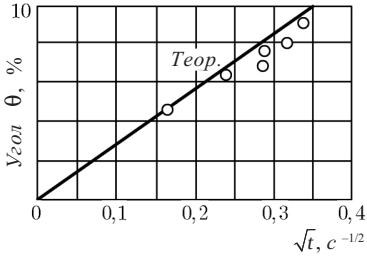


Рис. 2.34

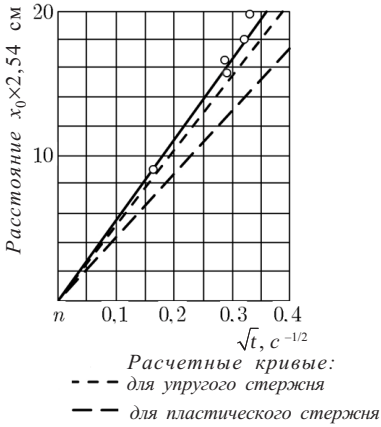


Рис. 2.35

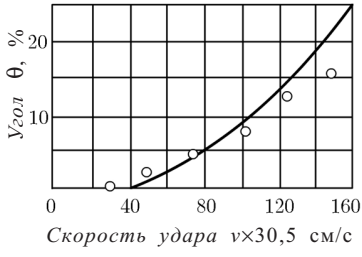


Рис. 2.36

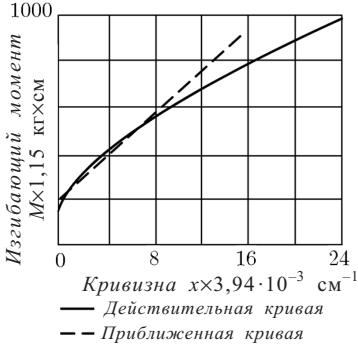


Рис. 2.37

На рис. 2.36 сопоставлены экспериментальная и теоретическая зависимости θ от скорости удара. Расхождение теоретических и экспериментальных данных увеличивается с ростом скорости удара. Значения x_0 в зависимости от скорости удара приведены в табл. 2.6.

Таблица 2.6

v_1, м/с	7,6	15,25	22,9	30,5	38,7	47,75
x_0, см	47,0	48,3	45,7	48,3	44,4	45,7

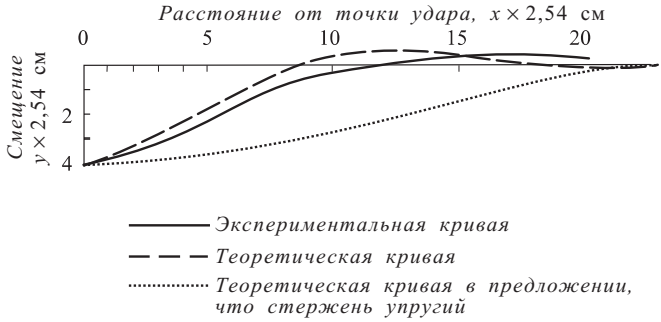


Рис. 2.38

Как видим, x_0 практически не зависит от скорости удара; этот результат согласуется со случаями как упругого, так и пластического удара.

Приведем результаты опытов с балками из отожженной меди; на рис. 2.37 представлена кривая $M-\kappa$, построенная по экспериментальной кривой «напряжение–деформация», и указана ее аппроксимация двумя отрезками прямых. На рис. 2.38 изображены экспериментальные и теоретические кривые динамического прогиба балки при скорости удара $v_1 = 2{,}96$ м/с и времени соударения $t = 3{,}44$ мкс. Как видим, расчеты для упругого случая значительно расходятся с экспериментальными данными. Последнее обстоятельство объясняется тем, что здесь пластические деформации не локализуются в точке удара, как это имело место для балки из холоднокатаной стали.

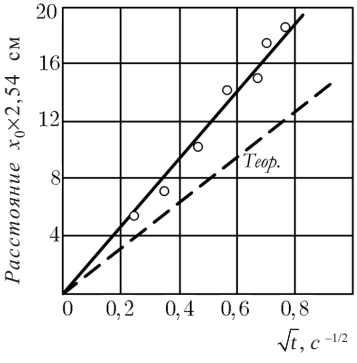


Рис. 2.39

На рис. 2.39 приведены зависимости x_0 от $\sqrt{t}$. Эксперименты вновь подтверждают, что x_0 зависит лишь от $\sqrt{t}$, хотя численные значения x_0 отличаются от экспериментальных. Причина этого, на наш взгляд, прежняя: использование статической, а не динамической диаграммы $M-\kappa$. Экспериментально полученные значения x_0

в зависимости от скорости удара v_1 приведены в табл. 2.7. Они снова подтверждают слабую зависимость x_0 от скорости удара.

Таблица 2.7

v_1, м/с	7,6	15,25	22,9	30,5	38,7	47,75
x_0, см	31	30,5	33	33	33,8	35

Жесткопластический анализ поведения балки при динамической нагрузке. Как видно из изложенного выше, исследование поведения балки при ударной нагрузке, когда деформации превосходят предел упругости, представляет собой сложную математическую задачу, точное решение которой удается получить только для простейших случаев или численными методами. Ниже приводится ряд приближенных решений некоторых задач динамики балки, основанных на применении жесткопластического анализа. Его сущность проиллюстрируем следующим примером.

Пусть посередине балки длиной $2l$ действует сосредоточенная сила $P(t)$. Принимается изображенная на рис. 2.40, *а* и предложенная в [24] аппроксимация диаграммы «изгибающий момент–кривизна». Очевидно, подобная аппроксимация будет тем более удовлетворительной, чем большая часть балки будет находиться в области пластических деформаций и чем меньше будут упругие деформации. Кроме того, предполагается, что:

1) до тех пор, пока изгибающий момент на некотором участке не достиг величины M_0, кривизна последнего остается неизменной, т.е. он ведет себя как твердое тело;

2) в сечении A (обычно называемом пластическим шарниром), где изгибающий момент достиг величины M_0, кривизна

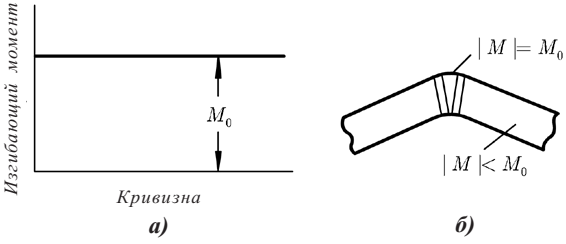


Рис. 2.40

может увеличиваться неограниченно (рис. 2.40, *б*); в действительности зона пластических деформаций занимает некоторую конечную, но малую длину;

3) изменением формы балки в процессе удара пренебрегают.

В рассматриваемом случае балка будет перемещаться как твердое тело до тех пор, пока изгибающий момент в каком-либо сечении не достигнет значения M_0 (рис. 2.41, *а*). Если a_0 – ускорение балки, то для этой фазы движения имеет место уравнение

$$P/(2ml) = a_0, \tag{2.206}$$

где m – масса единицы длины.

Если обратить движение и считать балку неподвижной, то мы придем к задаче о нагружении балки распределенной нагрузкой dv/dt. При этом, действующий на расстоянии x от середины балки изгибающий момент

$$M(x) = m\int_0^{l-x} a_0\xi d\xi = a_0 m(l-x)^2/2\cdot a_0 = P(l-x)^2/(4l).$$

Очевидно, что максимальный момент достигается в середине балки и равен $Pl/(4m)$. В тот момент, когда сила $P(t)$, которую пока предполагаем возрастающей, достигнет величины P_1, определяемой формулой

$$P_1 l/4 = M_0;\ \mu_1 = P_1 l/M_0 = 4,$$

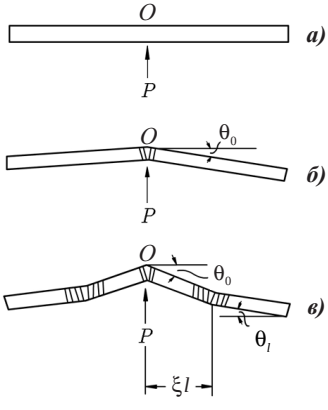


Рис. 2.41

в центре балки возникнет пластический шарнир. С этого времени начнется вторая фаза движения, характеризующаяся вращением обеих половин балки относительно O, в которой действует постоянный по величине момент M_0 (на рис. 2.41, *б* форма балки показана утрированно).

Составим уравнения движения балки в этой фазе. Если ко всем точкам балки приложить распределенную нагрузку ma_0dx, где a_0 – ускорение точки O, то рассматриваемая задача приводится к задаче о вращении под

действием распределенной нагрузки двух половин балки около точки O, в которой приложен момент M_0.

Уравнение количества движения, примененное ко всей балке, дает:

$$P - 2m\int_0^l a_0 dx = -2m\int_0^l \frac{d^2\theta_0}{dt^2} x dx\,; \quad \frac{P}{2} = ml\left(a_0 - \frac{l}{2}\frac{d^2\theta_0}{dt^2}\right). \quad (2.207)$$

Из формулы (2.207), в частности, видно, что сила, заменяющая действие правой отброшенной части на левую, равна $P/2$. Здесь θ_0 – угол поворота частей балки от своего первоначального положения (рис. 2.41, *б*).

Уравнение момента количества движения в применении к правой половине балки запишется так:

$$m\int_0^l \frac{d^2\theta_0}{dt^2} x^2 dx = m\int_0^l a_0 x dx - M_0\,; \quad \frac{ml^3}{3}\frac{d^2\theta_0}{dt^2} = \frac{ml^2}{2}a_0 - M_0\,. \quad (2.208)$$

Из уравнений (2.207) и (2.208) получим

$$\frac{ml^3}{M_0}\frac{d^2\theta_0}{dt^2} = 3\mu - 12\,; \quad \frac{ml^2}{M_0}a_0 = 2\mu - 6\,; \quad \mu = \frac{Pl}{M_0}\,.$$

Подсчитаем момент количества движения $M(x)$, действующий в сечении x. С этой целью отбросим как левую часть балки, так и правую часть (x,l) оставшейся правой половины, заменив действие отброшенных кусков введением сосредоточенных сил и моментов, соответственно равных $P/2$, $Q_1(x)$, M_0, $M(x)$. Тогда уравнения количества движения и момента количества движения, примененные к части $(0,x)$, дают:

$$m\int_0^x \frac{d^2\theta_0}{dt^2} z dz = m\int_0^x a_0 dz + Q_1(x) - \frac{P}{2}\,;$$

$$m\int_0^x \frac{d^2\theta_0}{dt^2} z^2 dz = m\int_0^x a_0 z dz - M_0 + M(x) + Px$$

или

$$Q_1 = \frac{P}{2} + \frac{mx^2}{2}\frac{d^2\theta_0}{dt^2} - ma_0 x\,; \quad M(x) = M_0 + \frac{mx^3}{3}\frac{d^2\theta_0}{dt^2} - \frac{ma_0 x^2}{2} - Q_1 x.$$

Отсюда

$$M(x) = -\frac{P}{2}x + M_0 + \frac{ma_0x^2}{2} - \frac{mx^3}{6}\frac{d^2\theta_0}{dt^2} = M_0\left(1-\frac{x}{l}\right)^2\left(1-\frac{\mu-4}{2}\frac{x}{l}\right).$$

Максимальное значение M достигается в сечении x_1, где $\left(\frac{dM}{dx}\right)_{x_1} = 0$, т. е. где

$$ma_0x_1 - \frac{mx_1^2}{2}\frac{d^2\theta_0}{dt^2} - \frac{P}{2} = 0; \quad \xi^2 - \frac{4}{3}\frac{\mu-3}{\mu-4}\xi + \frac{\mu}{3(\mu-4)} = 0, \quad \xi = \frac{x_1}{l}.$$

Корни этого уравнения: $\xi = 1$; $\mu/[3(\mu-4)]$. При этих значениях ξ моменты $M(x)$ соответственно будут равны:

$$M(1) = 0; \; M\left(\frac{\mu}{3(\mu-4)}\right) = M_0\left(1+\frac{9\mu^2-2\mu^3}{27(\mu-4)^2}\right).$$

Очевидно, следует исследовать поведение лишь второго значения $M(\xi)$, которое с возрастанием μ (т. е. $P(t)$) убывает. При $\mu = 4{,}5$ момент M становится равным 1; при $\mu = 6$ он обращается в нуль, после чего становится отрицательным.

В диапазоне $4 < \mu \le 6$ имеем: $\xi > 1$, причем $M(x) < M_0$ для $0 < x \le l$. Если $\mu > 6$, то при $0 < x \le l$ получаем $M(\xi) \le M(x) < M_0$.

Существует значение μ_{II}, определяемое условием

$M_0\left(1-\frac{9\mu_{II}^2-2\mu_{II}^3}{27(\mu_{II}-4)^2}\right) = -M_0$, т. е. $\mu_{II} = 22{,}89$, при котором изгибающий момент в сечении $\xi = \frac{\mu_{II}}{3(\mu_{II}-4)} = 0{,}404$ достигает величины $-M_0$. Следовательно, при значении $\mu_{II} = 22{,}89$ в точках $x = \pm 0{,}404l$ возникнут вторичные пластические шарниры (рис. 2.41, *в*). По мере увеличения нагрузки вторичные пластические шарниры перемещаются к середине балки, оставляя позади себя области остаточных деформаций. Последний факт, быть может, сразу не очевиден, но его легко установить решением динамических уравнений в третьей фазе движения. С этой целью обозначим через $x_ш$ расстояние от середины балки до вторичного шарнира и применим к участку длиной $x_ш$ уравнение количества движения

$$m\int_0^{x_ш}\frac{d^2\theta_0}{dt^2}zdz = m\int_0^{x_ш}a_0dz - \frac{P}{2} \tag{2.209}$$

и момента количества движения

$$m\int_0^{x_ш}\frac{d^2\theta_0}{dt^2}z^2dz = m\int_0^{x_ш}a_0zdz - 2M_0\ . \tag{2.210}$$

При выводе написанных выше соотношений было принято во внимание, что сосредоточенная сила во вторичном шарнире отсутствует (при $Q \neq 0$ из условий $Q = dM/dx$, $M(x_ш) < M_0$ следует, что в окрестности точки $x = x_ш$ имеем $|M| > M_0$).

Уравнения (2.209), (2.210) целесообразно разрешить относительно $\frac{d^2\theta_0}{dt^2}$ и a_0:

$$\frac{ml^2}{M_0}a_0 = \frac{2\mu}{\xi} - \frac{12}{\xi^2}\ ; \tag{2.211}$$

$$\frac{ml^3}{M_0}\frac{d^2\theta_0}{dt^2} = \frac{3\mu}{\xi^2} - \frac{24}{\xi^3}\ ,\ \xi = \frac{x_ш}{l}\ . \tag{2.212}$$

Аналогичным образом для участка балки справа от пластического шарнира получаем

$$\frac{ml^2}{M_0}a_l = -\frac{6}{(1-\xi)^2}\ ; \tag{2.213}$$

$$\frac{ml^3}{M_0}\frac{d^2\theta_l}{dt^2} = \frac{12}{(1-\xi)^3}\ . \tag{2.214}$$

Для того чтобы замкнуть систему уравнений (2.211) – (2.214), необходимо рассмотреть условия, связывающие кинематические величины при переходе через пластический шарнир. Если $y_0(t)$ – смещение сечения O, то смещение $y(x,t)$ некоторого сечения x может быть определено из условия

$$y(x,t) = y_0(t) - \int_0^x \theta(z,t)dz\ ,$$

где θ – угол прогиба балки.

Дифференцируя последнее соотношение по времени, будем иметь:

$$\dot{y} = \dot{y}_0 - \int_0^x \dot{\theta} dz = \dot{y}_0 - \frac{d\theta_0}{dt} x \quad \text{при} \quad x < x_{ш}, \tag{2.215}$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 - \int_0^{x_{ш}} \dot{\theta} dz - \int_{x_{ш}}^{x} \dot{\theta} dz + \frac{dx_{ш}}{dt}\left[\dot{\theta}(x_{ш+}) - \dot{\theta}(x_{ш-})\right], \tag{2.216}$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 - \frac{d\theta_0}{dt} x_{ш} - \frac{d\theta_l}{dt}(x - x_{ш}) \quad \text{при} \quad x > x_{ш}.$$

Здесь и в дальнейшем индексами «+» и «–» отмечаются параметры соответственно справа и слева от пластического шарнира. Можно предположить, как и в [27], что значительное возрастание кривизны в точке $x_{ш}$ не приводит, тем не менее, к разрыву угла наклона, т. е. $\theta(x_{ш+}) = \theta(x_{ш-})$. При этом из (2.215) и (2.216) получаем $\dot{y}(x_{ш+}) = \dot{y}(x_{ш-}) = v_{ш}$ т. е. поперечные скорости остаются непрерывными при переходе через пластический шарнир.

Дифференцируя соотношения (2.215) и (2.216) по времени и принимая во внимание сказанное выше, имеем:

$$\ddot{y}(x_{ш-}) = \ddot{y}_0 - \int_0^{x_{ш}} \ddot{\theta} dz = \ddot{y}_0 + \frac{d^2\theta_0}{dt^2} x_{ш}, \tag{2.217}$$

$$\ddot{y}(x_{ш+}) = \ddot{y}_0 - \int_0^{x_{ш}} \ddot{\theta} dz + \dot{x}_{ш}\left[\dot{\theta}(x_{ш+}) - \dot{\theta}(x_{ш-})\right], \tag{2.218}$$

$$\ddot{y}(x_{ш+}) = \ddot{y}_0 + \frac{d^2\theta}{dt^2} x_{ш} + \frac{dx_{ш}}{dt}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{x_{ш+}} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{x_{ш-}}\right].$$

Так как

$$\ddot{y}(x_{ш-}) = a_0 - \frac{d^2\theta_0}{dt^2} x_{ш}; \quad \ddot{y}(x_{ш+}) = a_0 + \frac{d^2\theta_0}{dt^2}(l - x_{ш}),$$

то из соотношений (2.217), (2.218) найдем:

$$a_0 - \frac{d^2\theta_0}{dt^2} x_{ш} - a_l - \frac{d^2\theta_l}{dt^2}\left(l - x_{ш}\right) = \frac{dx_{ш}}{dt}\left[\frac{d\theta_0}{dt} - \frac{d\theta_l}{dt}\right].$$

С учетом (2.211) – (2.214) это соотношение принимает вид:

$$\frac{M_0}{ml^3}\left[\frac{\mu}{\xi} - \frac{12}{\xi^2} + \frac{6}{(1-\xi)^2}\right] = -\frac{d\xi}{dt}\left(\frac{d\theta_0}{dt} - \frac{d\theta_l}{dt}\right). \tag{2.219}$$

Уравнения (2.211) – (2.214) и (2.219) позволяют определить движение балки в третьей фазе и справедливы как при возрастающей, так и при убывающей с некоторого значения $\mu > 22{,}98$ нагрузки до тех пор, пока $d\theta_0/dl > d\theta_l/dt$.

Определение поведения балки в третьей фазе более затруднительно, чем в первой и второй. Дело в том, что в предыдущих фазах ускорения зависели только от мгновенного значения нагрузки, следовательно, скорости и смещения при этом могли быть найдены последовательными квадратурами. Когда же появляются вторичные шарниры, то определение угловых ускорений невозможно без рассмотрения угловых скоростей; в этом случае необходимо решать совместно уравнения (2.212), (2.214) и (2.219). Для дальнейшего целесообразно несколько видоизменить условие (2.219), что можно сделать либо путем математических манипуляций над ним, либо, как в [25], непосредственным применением уравнений количества движения и момента количества движения к правой половине балки, чем мы и воспользуемся.

Теорема об изменении импульса количества движения за время t приводит к соотношению

$$\frac{1}{2}\int_0^t P dt = m\left[v_{ш} l + \frac{1}{2}\xi^2 l^2 \frac{d\theta_0}{dt} - \frac{1}{2}(1-\xi)^2 l^2 \frac{d\theta_l}{dt}\right]. \qquad (2.220)$$

Для применения теоремы об изменении импульса момента количества движения необходимо предварительно найти величину последнего в течение t_1, соответствующего изменению μ от 0 до 4. Так как к концу первой фазы скорость

$$v_1 = \frac{M_0}{2ml^2}\int_0^{t_1} \mu dt,$$

то импульс количества движения относительно точки O за это время равен $\frac{1}{4}M_0\int_0^{t_1}\mu dt$.

Теорема об изменении импульса момента количества движения за время t дает:

$$\frac{1}{4}M_0\int_0^{t_1}\mu dt + M_0(t-t_1) = m\left[\frac{l^2}{2}v_{ш} + \frac{\xi^3 l^3}{6}\frac{d\theta_0}{dt} + \left(\frac{\xi l^3}{2} - \frac{l^3}{3} - \frac{\xi^3 l^3}{6}\right)\frac{d\theta_l}{dt}\right]. \qquad (2.221)$$

Исключив из уравнений (2.220) и (2.221) скорость $v_{ш}$, получим

$$3\int_{t_1}^{t}\mu dt-12\left(t-t_1\right)=\frac{ml^3}{M_0}\left[\left(3\xi^2-2\xi^3\right)\left(\frac{d\theta_0}{dt}-\frac{d\theta_l}{dt}\right)+\frac{d\theta_l}{dt}\right]. \quad (2.222)$$

Вводя безразмерное время и безразмерные угловые скорости и смещения

$$\eta=\frac{t}{T},\ \Omega=\frac{ml^3}{M_0T}\frac{d\theta_0}{dt},\ \psi=\frac{ml^3}{M_0T}\frac{d\theta_t}{dt},\ \theta=\frac{ml^3}{M_0T^2}\theta_0,\ \varphi\equiv\frac{ml^3}{M_0T^2}\theta_l.$$

уравнения (2.212), (2.214), (2.219), (2.222) запишем в виде:

$$\frac{d\Omega}{d\eta}=\frac{3\mu}{\xi^2}-\frac{24}{\xi^3}; \quad (2.212')$$

$$\frac{d\psi}{d\eta}=\frac{12}{\left(1-\xi\right)^3}; \quad (2.214')$$

$$\mu\xi+\frac{6\xi^2}{\left(1-\xi\right)^2}-12=-\left(\Omega-\psi\right)\xi^2\frac{d\xi}{d\eta}; \quad (2.219')$$

$$3\int_{\eta_1}^{\eta}\mu d\eta-12\left(\eta-\eta_1\right)=\left(3\xi^2-2\xi^3\right)\left(\Omega-\psi\right)+\psi. \quad (2.222')$$

Здесь T – характерное время. Смещения θ и φ находятся из уравнений

$$\frac{d\theta}{d\eta}=\Omega;\ \frac{d\varphi}{d\eta}=\psi.$$

В общем случае система (2.212′), (2.214′), (2.219′) может быть проинтегрирована только для моментов времени $\eta\geq\eta_\tau$, где η_τ – момент окончания действия приложенной силы.

Вычитая (2.212′) из (2.214′), определяем

$$\frac{d\left(\Omega-\psi\right)}{d\eta}=-\frac{24}{\xi^3}-\frac{12}{\left(1-\xi\right)^3}. \quad (2.223)$$

Дифференцируя (2.219′) по ξ (при $\mu=0$) и используя (2.223), приходим к выражению

$$\frac{24}{\xi}-\frac{12\xi}{\left(1-\xi\right)^2}=\left(\Omega-\psi\right)\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\xi}{d\eta}\right). \quad (2.224)$$

Наконец, деля (2.224) на (2.219′), находим первый интеграл:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{C} = \text{const}\,.$$

Из (2.222′) следует:

$$C = \frac{\xi_\tau^2(\Omega_\tau - \psi_t)}{12 - 6\xi_\tau^2/(1-\xi_\tau)^2}\,.$$

При этом $\eta = \eta_\tau + C(\xi - \xi_\tau)$; $\Omega = \Omega_\tau + C(12/\xi^2 - 12/\xi_\tau^2)$; $\psi = \psi_\tau + C\left[6/(1-\xi)^2 - 6/(1-\xi_\tau)^2\right]$. Здесь и в дальнейшем индексом τ обозначаются параметры в момент времени η_τ.

Уравнения (2.211) – (2.214) и (2.219) справедливы до момента времени η_s, когда $\Omega = \psi$ и вторичные пластические шарниры исчезают (при условии, что при $\eta_s > \eta \geq \eta_\tau$ они существовали). Значение ξ_s при τ_s находим из (2.219′):

$$\xi_s = 2 - \sqrt{2} = 0{,}586\,.$$

Значение ξ_s определяет максимальное расстояние от центра, достигаемое вторичным шарниром, при условии, что сила обратится в нуль раньше, чем величина $\frac{d\theta_0}{dt} - \frac{d\theta_t}{dt}$. При этом

$$\begin{aligned}
&\eta_s = \eta_\tau + C(0{,}586 - \xi_\tau); \quad \Omega_s = \Omega_\tau + C\left(34{,}97 - \frac{12}{\xi_\tau^2}\right);\\
&\psi_s = \psi_\tau + C\left[34{,}97 - \frac{6}{(1-\xi_\tau)^2}\right];\\
&\theta_s = \theta_\tau + C\left[\Omega_\tau - \frac{12C}{\xi_\tau^2}\right](0{,}586 - \xi_\tau) + C^2\left(\frac{12}{\xi_\tau} - 20{,}48\right);\\
&\varphi_s = \varphi_\tau + C\left[\psi_\tau - \frac{6C}{(1-\xi_\tau)^2}\right](0{,}586 - \xi_\tau) + C^2\left[14{,}49 - \frac{6}{(1-\xi_\tau)^2}\right].
\end{aligned} \tag{2.225}$$

Другое выражение для $\Omega_s = \psi_s$ может быть получено из уравнения (2.222′) подстановкой $\eta = \eta_s$, $\Omega = \psi$:

$$\Omega_s = \psi_s = 3\int_{\eta_1}^{\eta_s} \mu d\eta - 12(\eta_s - \eta_1).$$

Рассмотрим, наконец, интервал $\eta_s \le \eta \le \eta_f$, ($\eta_f$ – момент обращения в нуль угловых скоростей обеих половин балки), соответствующий второй фазе движения, когда справедливы уравнения (2.207) и (2.208). Из этих уравнений легко получить:

$$\eta_f = \eta_s + \frac{1}{12}\Omega_s\,; \quad \theta_f = \theta_s + \frac{1}{24}\Omega_s^2\,. \tag{2.226}$$

Приращение $\theta_f - \theta_s$ часто оказывает существенное влияние на величину окончательной пластической деформации. Определение величины θ_f особенно важно, так как последняя определяет максимальные пластические деформации, возникающие в балке.

Переходим к вычислению кинематических величин в интервале $\eta \le \eta_\tau$ действия приложенной силы. Рассмотрим вначале случай, когда последняя при $\eta \le \eta_\tau$ постоянна. Легко проверить, что уравнения (2.212′), (2.214′), (2.219′) удовлетворяются при $\xi = \xi_1 = \text{const}$, где ξ_1 связано с $\mu_ш$ соотношением

$$\mu_ш \xi_1 + \frac{6\xi_1^2}{(1-\xi_1)^2} - 12 = 0\,. \tag{2.227}$$

При этом

$$\Omega = \left(\frac{3\mu_ш}{\xi_1^2} - \frac{24}{\xi_1^3}\right)\eta\,; \quad \varphi = \frac{6\eta^2}{(1-\xi_1)^3}\,; \tag{2.228}$$

$$\psi = \frac{12\eta}{(1-\xi_1)^3}\,; \quad \theta = \frac{1}{2}\left(\frac{3\mu_ш}{\xi_1^2} - \frac{24}{\xi_1^3}\right)\eta^2\,, \tag{2.229}$$

поскольку в начальный момент скорости и перемещения равны нулю.

Неизвестные величины при $\eta = \eta_\tau = 1$ (за время T выбрано время действия импульса) находим из уравнений (2.225); очевидно, $\xi_1 = \xi_\tau$.

После определения кинематических характеристик при $\eta = \eta_\tau$ найти η_f и θ_f не представляет труда. На рис. 2.42 кривая A изображает для рассматриваемого случая зависимость окончательного пластического угла θ_{0f} от $\mu_ш$.

В случае действия силы, произвольно изменяющейся во

---

[1] В [25] эту систему предложено решать методом последовательных приближений, причем в качестве нулевого приближения берется решение, полученное приравниванием к нулю правой части (2.219′).

времени, может быть предложено два способа численного расчета системы (2.212′), (2.214′), (2.219′)[1] (или (2.222′)). Первый способ заключается в том, что после дифференцирования (2.219′) и исключения Ω, ψ, $\frac{d\Omega}{d\eta}$, $\frac{d\psi}{d\eta}$ с помощью (2.212′) и (2.214′) полученное дифференциальное уравнение второго порядка решается численно, шаг за шагом, начиная от значения η_0, соответствующего $\mu_0 = 22{,}89$, $\xi_0 = 0{,}404$. Однако этот способ имеет те неудобства, что коэффициент при старшей производной обращается в нуль как раз при $\eta = \eta_0$ и η, соответствующем $\xi' = 0$ (т. е. когда вторичные шарниры меняют направление движения). Поэтому при численных расчетах указанным способом определение ξ'' из уравнения не точно, если не сохранять большого количества значащих цифр. Более предпочтителен второй способ численного расчета, когда для определения последовательности значений ξ используется уравнение количества движения (2.222′). При этом с помощью (2.211′), (2.214′) и (2.222′) сначала подсчитываются пробные значения ξ, Ω и ψ на *n*-м шаге, которые корректируются затем до тех пор,

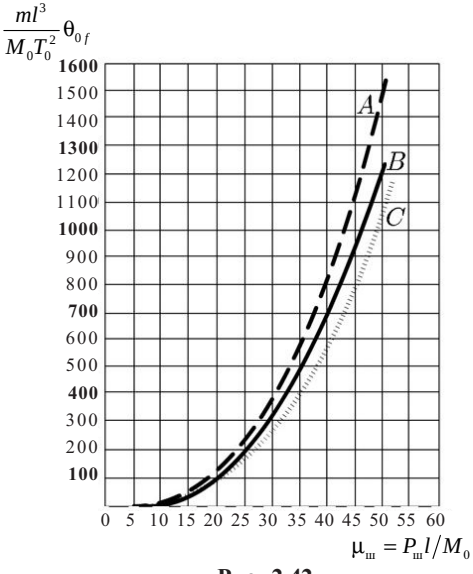


Рис. 2.42

пока соотношение (2.222′) не будет удовлетворено с достаточной степенью точности.

На рис. 2.42, заимствованном из [25], приведены кривые безразмерной величины $ml^3\theta_{0f}/\left(M_0T_0^2\right)$ в функции $\mu_ш$ для трех графиков изменения со временем приложенной силы: прямоугольника (*A*), синусоидальной полуволны (*B*) и равнобедренного треугольника (*C*). За характерное время принята величина T_0, определяемая соотношением

$$P_ш T_0 = \int_0^\tau P dt = I$$

Как видно из рис. 2.42, для одинаковых $\mu_ш$ и T_0 действие силы, неизменяющейся со временем (по прямоугольному графику), вызывает наибольшую пластическую деформацию, а изменяющейся по треугольному – наименьшую.

В [25] предложено аппроксимировать кривые на рис. 2.42 аналитическими зависимостями

$$\frac{ml^3}{M_0T_0^2}\theta_{0f} = D\mu_ш^n .$$

где $n = 8/3$; $D = 0{,}043$; 0,037; 0,031 для прямоугольного, синусоидального и треугольного *A*, *B*, *C* графиков изменения приложенной силы соответственно. Отсюда

$$\theta_{0f} = \frac{D}{mM_0^{2/3}l^{1/3}} I^2 P_ш^{1/3} .$$

Полученные результаты справедливы до тех пор, пока изгибающий момент *M* не достигнет величины M_0 в каком-либо сечении, несовпадающем с центром и двумя боковыми шарнирами. Условием непоявления такого сечения является неравенство [25]

$$\mu\xi - 12 \le 0 , \qquad (2.230)$$

вытекающее из требования наличия отрицательной нагрузки в точке ξ (в противном случае изгибающий момент *M* имеет максимум, превосходящий M_0).

Таким образом, приведенный выше анализ, справедлив для динамических нагрузок пока $\mu\xi \le 12$. При более высоком значении $\mu(t)$ положение на рис. 2.41, *в* заменяется таким, при котором два твердых отрезка в каждой половине бруса отделяются коротким участком, где изгибающий момент постоянен и

равен M_0. Для графика изменения силы в виде прямоугольника условие (2.224) всегда выполнено, для других видов изменения приложенной силы возможно нарушение этого условия.

В [26] теми же методами, что и выше, исследовано поведение балки под действием начального распределения скоростей:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{v_0}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\right], \quad -l \le x \le l .$$

В [24] считается, что метод жесткопластического анализа дает удовлетворительные результаты, когда работа, производимая в центральном пластическом шарнире много больше максимальной упругой энергии, запасенной при достижении всей балкой изгибающего момента M_0, т.е. когда

$$M_0\theta_0 >> \frac{M_0^2 l}{2EJ}; \quad \frac{\theta_0}{M_0 T^2/(ml^3)} >> \frac{1}{2{,}5}\frac{\tau^2}{T^2},$$

где τ – основной период упругих колебаний свободной балки. Кроме того, очевидным ограничением является малость угла $\theta_0\,(\theta_0 \le 10^\circ)$.

В [27] жесткопластический анализ работы балки проведен при допущении следующей зависимости между изгибающим моментом и кривизной (рис. 2.43):

$$M = \pm M_0 + b\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{2.231}$$

При этом уравнение движения (2.167) запишется так:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \left(\frac{1}{c^2} = \frac{m}{b}\right); \tag{2.232}$$

оно имеет тот же вид, что в теории упругости, с той разницей, что жесткость на изгиб заменена величиной b.

Условие (2.231) и уравнение (2.232) накладывают определенные ограничения на класс рассматриваемых движений балки, которые должны удовлетворять условию, чтобы скорость изменения кривизны в исследуемый пе-

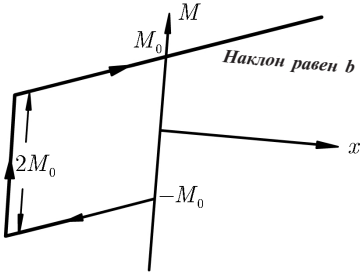


Рис. 2.43

риод времени была либо всюду больше или равна нулю, либо всюду меньше или равна нулю (условие отсутствия разгрузки). При этом M_0 в (2.231) имеет тот же знак, что и скорость изменения кривизны балки. В [27] дано решение ряда задач, в которых начальные и граничные условия удовлетворяют этим ограничениям. В [28] исследуется поведение балок в ситуации, когда допустимо сделать следующие предположения:

- область пластического состояния сечения представляет собой пластический шарнир;
- положение пластических шарниров остается неизменным (например, в местах заделки концов балки);
- сечения балки между пластическими шарнирами находятся в упругом состоянии.

При этих условиях исследование может быть проведено для балки с произвольным распределением жесткости, массы и нагрузки. До момента t_1, пока не возникли пластические деформации, решение для кривой прогиба ищется в виде разложения по фундаментальным функциям $\varphi(x)$ упругих колебаний балки с соответствующими граничными условиями. После момента t_1 решение для кривой прогиба выражается в функциях $\psi_i(x)$ колебания балки с пластическими шарнирами, причем значения прогибов и скоростей, найденные из упругого решения в момент t_1, являются для этого случая начальными условиями.

Разложение решения по функциям $\psi_i(t)$, очевидно, возможно вплоть до момента t_2 образования или исчезновения какого-либо пластического шарнира. С момента t_2 задача может решаться аналогичным образом. Однако в общем случае математические трудности при решении таким способом чрезвычайно велики, особенно в связи с удовлетворением начальных условий при переходе от одной системы фундаментальных функций к другой. Способ решения задач указанным методом с помощью ЭВМ, в котором отсутствуют трудности перехода от конфигурации $\psi_i(t)$ к конфигурации $\psi_i(t)$, предложен в [29].

Литература

1. *Рахматулин Х.А.* О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения // ПММ. 1945. Т. IX. № 6.

2. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидродинамика. – М.: Гостехиздат, 1948. Т. 2. С. 19–20.

3. *Кристеску Н.* О волнах нагрузки и разгрузки в упругой или пластической гибкой нити // ПММ. 1954. Т. XVIII. Вып. 3.

4. *Craggs J.W.* Wave motion in plastic-elastic strings // Journ. of the Mech. and Phys. of Solids. 1954. № 4.

5. *Рахматулин Х.А.* Об ударе по гибкой нити // ПММ. 1947. Т. XI. № 3.

6. *Рахматулин Х.А.* Поперечный удар по гибкой нити с переменной скоростью // Ученые записки МГУ. 1951. Т. IV.

7. *Рябова Е.В.* Поперечный удар с переменной скоростью по гибкой нити // Вестник МГУ. 1953. № 10.

8. *Григорьев В.С.* Исследования натяжения и удлинения нити основы на ткацком станке КР-46. – М.: Моск. текст. ин-т, 1949.

9. *Мороз. Г.С.* Переходные этапы движения гибкой нити конечной длины при поперечном ударе // ПММ. 1956. Т. XX. Вып. 6.

10. *Зверев И.Н.* Некоторые задачи о распространении волн при ударе. – М.: МГУ, 1949.

11. *Рахматулин Х.А.* Поперечный удар по гибкой нити телом заданной формы // ПММ. 1952. Т. XVI. Вып. 1.

12. *Timoshenko S.P.* Philosophical Magazine. 1929. Ser. 6. V. 41. P. 744–746.

13. *Timoshenko S.P.* Philosophical Magazine. 1931. Ser. 6. V. 43. P. 125.

14. *Тимошенко С.П.* Теория колебаний в инженерном деле. – М.–Л.: Гостехиздат, 1934.

15. *Уфлянд Я.С.* Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 3.

16. *Mindlin R.T.* Influence of rotatory inertia and shear on flelxural motions of isotropic. elastic plates // Journ. of Appl. Mech. Trans. A. S. M. E. 1951. V. 73.

17. *Dengler M.A., Goland M.* Transverse impact of long beams, including rotatory inertia and shear effects, proceedings of the First National Congress on Applied Mechanics, 1951 // The American Society of Mechanical Engineers».– New York, 1952.

18. *Jones R.P.N.* Transient flexural stresses in an infinite beam // Journ. of Appl. Mech. 1954. V. 21.

19. *Herrann G.* Forced Motions of Timoshenko beams // Journ. of Appl. Mech. 1955. V. 22. № 1.

20. *Howe C.E., Howe R.M.* Application of the electronic differential analyzer to the oscillation of Beams, including shear and rotatory inertia. 1955. V. 22. № 1.

21. *Галин М.П.* Поперечные колебания блок и плит за пределом упругости под действием взрывных и ударных нагрузок // ПММ. 1953. V. XVII. № 4.

22. *Boussinesq M.* Application dis Potentiels a l'Etude de Equlibre et du Movement des Solides E'lastiques. Paris, Gauthier-Villars, 1885. P. 444.

23. *Duwer P.E., Clark D.S., Bohnenblust M.F.* Поведение длинных балок при ударной нагрузке // Journ. of Appl. Mech. 1950. T. 17. № 1.

24. *Lee E.H., Symonds P.S.* Large plastic deformations of beams under transverse impact // Journ. of Appl. Mech. 1952. V. 19. № 13.

25. *Symonds P.* Характеристики динамической нагрузки при пластическом изгибе брусьев // Journ. of Appl. Mech. 1953. V. 20. № 4. (См. Механика. 1954. Т. 5. №27).

26. *Cotter B.A., Symonds P.S.* Пластические деформации балки при ударной нагрузке // Proceedings American Society of Civil Engineers. 1955. V. 81. № 675.

27. *Conroy M.F.* Пластически жесткий анализ особого класса задач о балках, подвергнутых действию поперечной динамической нагрузки // Journ. of Appl. Mech. 1955. V. 22. № 1 (см. Механика. 1956. № 35).

28. *Bleich H., Salvadori M.* Импульсное движение упруго-пластических балок // Proc. Amer. Soc. Civil Eng. 1953. V. 79. № 287.

29. *Thomson W.T.* Поведение балок при ударе в упругой и пластической областях // Journ. of Appl. Mech. 1954. V. 21. № 3 (См. Механика. 1956. V. 1. № 35).

30. *Рябис А.А.* Поперечный удар притупленным телом по гибкой связи при наличии трения // Вестник МГУ. Сер. «Математика, механика». 1966. №6.

31. *Григорян С.С., Муталимов Ш.М.* О динамике соударения твердого тела с гибкой нитью и мембраной // ПММ. 1978. №4.

32. *Ленский Э.В.* Вынужденные движения поперечной волны в гибкой растяжимой нити // Механика твердого тела. 1968. №6.

33. *Демьянов Ю.А.* Асимптотический метод решения задач распространения волн в нити // ПММ. 1993. №4. С.146–149.

34. *Лобанова С.С.* Удар по нити // Сб. науч. тр. аспирантов и докторантов МГУЛ. 1999.

35. *Демьянова Ю.А., Демьянова Е.Г., Лобанова С.С.* Распространение поперечно-продольных волн в натянутой струне при ударе по ней телом произвольной формы // МТТ. 2003. №2. С. 26–39.

36. *Демьянов Ю.А.* К уточненной теории колебаний музыкальных струн // Доклады РАН. 1999. Т. 369. №4. С.461–465.

37. *Демьянов Ю.А.* Постановка задач взаимодействия струны с возбудителем ее колебаний // Доклады РАН. 2000. Т. 372. №6. С.743–748.

38. *Демьянов Ю.А., Малашин А.А.* Вынужденные продольные колебания музыкальных струн, обусловленные их поперечными колебаниями. Газовая и волновая динамика: Сб. ст. – М.: Изд-во МГУ (Сайрес-пресс). 2005. С.178–187.

39. *Демьянов Ю.А., Кокорева Д.В., Малашин А.А.* Взаимовлияние поперечных и продольных колебаний в музыкальных инструментах // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 272–282.

40. *Демьянов Ю.А., Малашин А.А.* О взаимосвязи волновых и колебательных процессов в струнах щипковых музыкальных инструментах с манерой игры исполнителя // Доклады РАН. 2002. Т. 387. №3. С. 333–337.

41. *Демьянов Ю.А., Малашин А.А.* Поперечно-продольные волны в струне щипкового инструмента при воздействии медиатора // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 464–471.

42. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.

43. *Рэлей Д.В.* Теория звука. – Л.-М.: Гостехиздат. 1940. Т. 1.

44. *Римский-Корсаков А.В., Дъяконов Н.А.* Музыкальные инструменты. – Н.: Росгизместпром. 1952.

45. *Демьянов Ю.А., Малашин А.А.* О влиянии волновых процессов в струнах щипковых музыкальных инструментов на характер движения медиатора. Проблемы механики: Сб. ст. к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского).– М.: Физматлит, 2003. С. 350–357.

Глава 3

Распространение волн возмущения с полярной, осевой и сферической симметрией

В этой главе дано решение ряда задач динамического деформирования пространственных объектов, геометрия которых обладает осевой или сферической симметрией. По этой причине напряжения и деформации в рассматриваемых задачах зависят лишь от одной пространственной координаты. Следует заметить, однако, что, в отличие от первых двух глав, поле напряжения при этом не является однокомпонентным. Если предположить, что все составляющие напряжения при динамическом деформировании изменяются пропорционально одному параметру, то имеет место простое нагружение, при котором можно использовать, например, теорию малых упругопластических деформаций Генки-Ильюшина. Именно в такой постановке решены приводимые в настоящей главе задачи, в которых имеет место трехосное напряженное состояние; рассмотрены вопросы распространения в упругопластической среде плоских, цилиндрических и сферических волн давления, цилиндрических волн сдвига, а также приведено решение ряда задач динамического деформирования круглых пластин и мембран.

§ 3.1. Плоские продольные упругопластические волны

Рассмотренная в первой главе одномерная теория распространения продольных волн в стержнях, строго говоря, – приближенная, так как в ней не учитывается движение материала в поперечном направлении. Строго одномерным, как показано в [1] и [2], является процесс распространения продольных плоских волн в безграничной среде и цилиндрическом стержне, заключенном в жесткую оболочку. При этом уравнение, описывающее волновой процесс, оказывается по форме совпадающим с уравнением (1.10) распространения продольных волн в стержнях, если под σ и e понимать напряжение σ_{xx} и деформацию e_{xx} в направлении движения плоского фронта:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d\sigma_{xx}}{de_{xx}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Зависимость $\sigma_{xx} = f(e_{xx})$ легко может быть найдена из экспериментов на простое растяжение (сжатие). Действительно, в рассматриваемом случае $e_{yy} = e_{zz} = 0$, $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$, поэтому согласно [3]

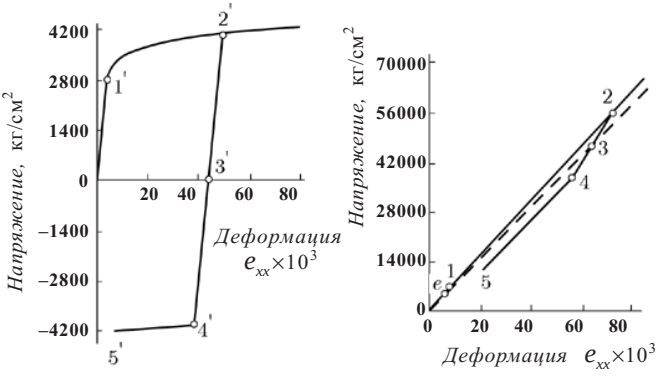
$$\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} = 3Ke_{xx}; \quad \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \Phi_i(2e_{xx}/3),$$

откуда

$$\sigma_{xx} = Ke_{xx} + 2\Phi_i(2e_{xx}/3)/3. \tag{3.1}$$

Можно определить, что $\sigma_{xx} = E(1-\nu)/((1+\nu)(1-2\nu))$ для упругой области (здесь E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, найденные из экспериментов на растяжение (сжатие)). На рис. 3.1, *а* изображена зависимость $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(e_{xx})$, построенная в [1] для алюминиевого сплава 24 $S-T$; расчеты проведены для случая постоянных $E = 0{,}74 \cdot 10^6$ кг/см^2, $\nu = 0{,}33$, что справедливо при небольших значениях среднего гидростатического напряжения. Использовавшаяся в расчетах зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций $\Phi_i(e_i)$ была найдена из статических испытаний.

Из графика на рис. 3.1, *б* видно, что кривая $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(e_{xx})$ достаточно хорошо аппроксимируется двумя отрезками прямых: 0–1 и 1–2, причем их пересечение определяет приближен-



а) *б)*

Рис. 3.1

ное значение предела упругости. При этом скорость упругих волн $a_0 = 6,25 \cdot 10^3$ м/с, пластических – $a_i = 5,11 \cdot 10^3$ м/с (при удельном весе 2,77 г/мм^3).

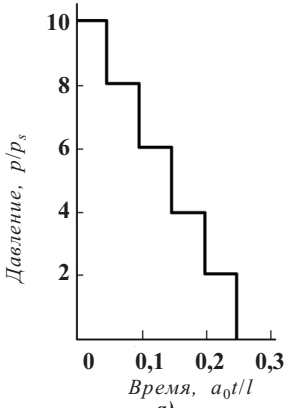
Таким образом, скорость распространения плоских продольных пластических волн лишь на 18% меньше скорости упругих волн, в то время как в тонких стержнях отношение $a / a_0 \approx 0,1$.

Предположим, что с некоторого момента времени начинается разгрузка элемента, расположенного в сечении x. Связь между напряжениями и деформациями при разгрузке, очевидно, следующая:

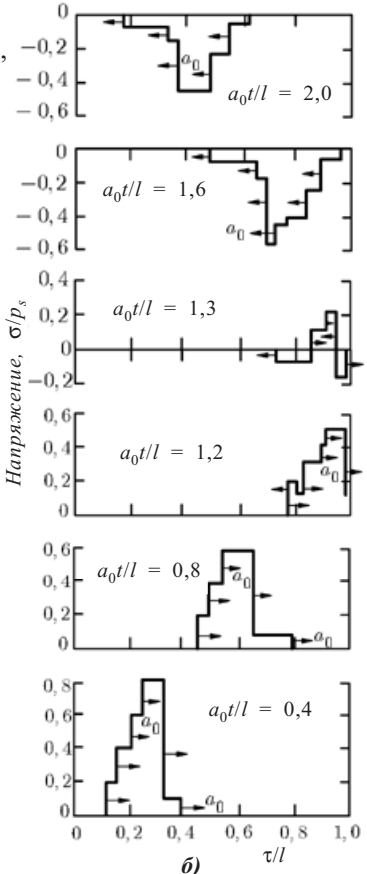
$$\sigma_{xx} - \sigma_{xx_2} = E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (e_{xx} - e_{xx_2}),$$

где σ_{xx}, e_{xx} – напряжение и деформация, соответствующие началу разгрузки (рис. 3.1).

В тот момент, когда $\Phi_i\,(2e_{xx}/3)$ станет равным нулю, $\sigma = \sigma_{xx_3} = \sigma_{yy_3} = Ke_{xx_3}$. Таким образом, если в длинном стержне при $\Phi_i = 0$ напряжение также равно нулю, то в рассматриваемом случае оно равно среднему гидростатическому давлению.



а)



б)

Рис. 3.2

Предположим, что разгрузка продолжается далее; при этом необходимо рассмотреть отрицательную ветвь функции Φ_i.

Легко видеть, что в ряде случаев (это зависит от величин E и ν) продолжающаяся разгрузка приводит к тому, что переход на пластическую ветвь петли гистерезиса для функции Φ_i совершается раньше, чем будет полностью снято σ_{xx}. Следовательно, при этом разгрузка связана как с упругими, так и с пластическими деформациями. Это вторая характерная особенность распространения плоских продольных волн, не возникавшая при деформации тонких упругопластических стержней, где волновой процесс разгрузки является полностью упругим.

На рис. 3.2, *б* [1] схематически изображен волновой процесс в упругопластической плите конечной толщины l, к одной плоскости которой приложено постоянное в каждый момент времени давление $p(t)$. Характер изменения давления $p(t)$ изображен на рис 3.2, *а*; оно мгновенно возникает, а затем ступенчатообразно убывает. Предполагается, что максимальное значение приложенного давления в 10 раз превосходит напряжение, соответствующее пределу упругости; продолжительность приложенного импульса равна четверти времени, необходимого для прохождения упругими волнами длины l.

Затухание импульса осуществляется волнами частичной разгрузки упругой природы, которые догоняют пластические волны первичного нагружения. Растягивающие напряжения, связанные с отражением импульса от свободной поверхности пластины, могут привести к явлению откола, экспериментально наблюдавшемуся и описанному в [4,5] (рис. 3.3). Трехосность напряженного состояния растяжения и очень большая скорость приложения напряжения, как отмечено в [1], являются условиями, способствующими хрупкой природе разрушения при отколе даже в материалах нормальной вязкости. Приведенная на рис. 3.1 диаграмма $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(e_{xx})$ была построена в предположении

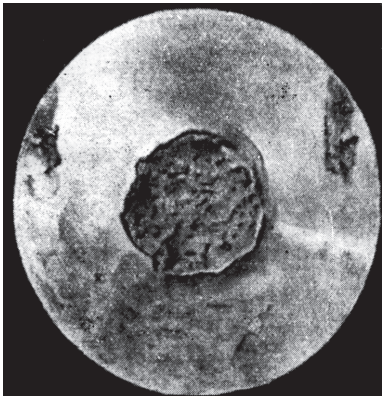


Рис. 3.3

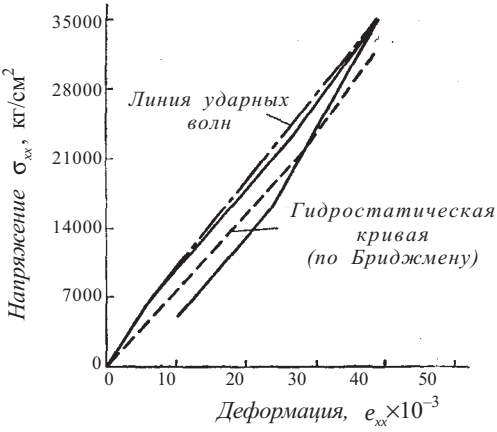


Рис. 3.4

постоянства модуля объемной деформации K. При высоких значениях среднего гидростатического напряжения необходимо учесть изменяемость величины K (что сделано в [1] с использованием экспериментальных данных Бриджмена [6] для чистого алюминия при давлениях до 30000 кг/см^2). Соответствующая диаграмма $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(e_{xx})$ приведена на рис. 3.4; из нее видно, что рост всестороннего давления приводит к возможности возникновения ударных волн, аналогичных тем, которые наблюдаются в газах. Учет переменности модуля объемной деформации K (для алюминия) приводит к изменению и вида волны разгрузки, упругая часть которой будет распространяться со скоростью, большей чем a_0, пластическая же часть обнаруживает непрерывное изменение скорости, которая убывает с уменьшением деформации. Рост температур, обусловленный быстрым сжатием материала при динамических нагрузках, как отмечается в [1], приводит к увеличению наклона кривой $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(e_{xx})$ вследствие теплового расширения, а это в свою очередь повышает тенденции к образованию ударных волн.

Исследование одномерных нестационарных движений упругой среды (волн Римана, ударных волн, квазипоперечных волн), когда упругий потенциал зависит от компонент тензора деформации и энтропии (включая случаи малой анизотропии) обстоятельно изложено в [22].

§ 3.2. Цилиндрические волны сдвига (задача о скручивающем ударе) [7]

Пусть в упругопластическое пространство заделан абсолютно твердый бесконечно длинный цилиндр радиуса r_0. Исследуем характер распространения волн в пространстве при мгновенном приложении к цилиндру скручивающего момента.

Пусть $w(r,t)$ и $\tau(r,t)$ – соответственно тангенциальное смещение и напряжение сдвига в некоторой точке. Из постановки задачи ясно, что эти функции могут зависеть только от двух переменных: удаления r точки от оси цилиндра и времени t. Применяя уравнения момента количества движения к цилиндру, имеющему радиусы $r > r_0$ и $r + dr$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(2\pi r^2 dr\rho\frac{\partial w}{\partial t}\right) = -2\pi r^2\tau - \frac{\partial}{\partial r}\left(2\pi r^2\tau\right)dr + 2\pi r^2\tau$$

или

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau). \tag{3.2}$$

Так как $\tau = \tau(e)$, где деформация

$$e = \frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r}, \tag{3.3}$$

то (3.2) можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + b, \tag{3.4}$$

где $b = \dfrac{a^2 w}{r^2} - \dfrac{a^2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} - \dfrac{2\tau}{\rho r}$, $a^2 = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\tau}{de}$.

Характеристиками этого уравнения являются

$$dr = \pm a\,dt;\ \ dw_t = \pm a\,dw_r + b\,dt, \tag{3.5}$$

где $w_r = \dfrac{\partial w}{\partial r}$, $w_t = \dfrac{\partial w}{\partial t}$.

Предположим, что внезапно приложенный на цилиндрической поверхности радиуса r_0 крутящий момент создает напряжения, превосходящие предел упругости материала на сдвиг. Для исследования характера распространения волн в этом случае необходимо найти решение уравнения (3.4), удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям:

$$w_t = w_r = 0 \text{ при } t = 0; \; r_0 \le r < \infty;$$
$$\frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} = f(t) \text{ при } r = r_0.$$

С помощью метода характеристик можно показать, что в области между осью r и прямой $r = r_0 + a_0(0)t$ скорости и деформации имеют нулевые значения. Следовательно, максимальная скорость распространения возмущений $a_0 = a(0)$.

Разрывность краевых условий в точке $r = r_0$, $t = 0$ приводит к тому, что для случая схемы Прандтля волна a_0 является волной сильного разрыва. Ниже будет показано, что за фронтом этой волны остается область упругих деформаций, в которой, очевидно, уравнение (3.4) будет линейным. Следовательно, волна сильного разрыва $r = r_0 + a_0 t$ совпадает с характеристикой этого уравнения. Поэтому на прямой $r = r_0 + a_0 t$ имеем три условия:

1) непрерывность смещений

$$w = 0; \tag{3.6}$$

2) сохранение количества движения

$$r = r_0 + a_0 t; \tag{3.7}$$

3) соотношение на характеристике $r = r_0 + a_0 t$:

$$dw_t = a_0 dw_r + b\,dt. \tag{3.8}$$

Можно показать тождественность (3.6) и (3.7). Для этого достаточно продифференцировать (3.6) вдоль указанной прямой и учесть, что на последней $dr/dt = a_0$.

Уравнения (3.8) и (3.7) на волне $r = r_0 + a_0 t$ в силу (3.6) приводятся к виду

$$-2a_0^2 dw_r = \left(-\frac{a_0^2}{r} w_r + \frac{2a_0^2 w_r}{r}\right) dr = \frac{a_0^2 w_r}{r} dr,$$

откуда $w_t = c\sqrt{r_0 / r}$. Учитывая, что на волне сильного разрыва при $r = r_0$ деформация возрастает до величины $-e_s$, имеем

$$w_t = -e_s \sqrt{r_0 / r}; \;\; w_t = a_0 e_s \sqrt{r_0 / r}.$$

Таким образом, интенсивность переднего фронта упругой волны убывает обратно пропорционально корню квадратному из расстояния от центра симметрии.

Очевидно, задача определения движения в упругой области сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{a_0^2}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{a_0^2}{r^2} w \qquad (3.4')$$

при следующих граничных условиях:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0 + a_0 t\,; \qquad (3.9)$$

$$\frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} = e_s \quad \text{при} \quad r = r_0 + a_1 t\,.$$

Введем безразмерные переменные $\bar{t} = a_0 t / r_0$; $\bar{r} = r / r_0$; $\bar{w} = w / r_0 e_s$; $\lambda = a_1 / a_0$, в которых уравнение (3.4′) и граничные условия (3.9) принимают вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{w}}{\bar{r}^2}\,; \qquad (3.10)$$

$$\bar{w} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{r} = 1 + \bar{t}\,;$$

$$\frac{\bar{w}}{\bar{r}} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} = 1 \quad \text{при} \quad \bar{r} = 1 + \lambda \bar{t}\,. \qquad (3.11)$$

Уравнения характеристик в новых переменных запишутся так:

$$d\bar{r} = \pm d\bar{t}\,; \quad d\bar{w}_{\bar{t}} = \pm d\bar{w}_{\bar{t}} + \left[\frac{\bar{w}_{\bar{r}}}{\bar{r}} - \frac{\bar{w}}{\bar{r}^2}\right] d\bar{t}\,. \qquad (3.12)$$

Ввиду того что $\bar{w}(\bar{r}, \bar{t}, \lambda)$ зависит только от параметра λ, построим решение задачи методом конечных разностей для реально встречающихся значений λ. С этой целью угол между лучами $\bar{r} = 1 + \bar{t}$, $\bar{r} = 1 + \lambda \bar{t}$ разбивается характеристической сеткой (рис. 3.5). Пользуясь ею и уравнениями в конечных разностях, соответствующими (3.12), получим данные (табл. 3.1) для

$$\lambda = \sqrt{0{,}003} = 0{,}0548\,;$$

$$\mu = 1/\lambda = 18{,}25\,;$$

$$\bar{r}_{n,m} - \bar{r}_{n-1,m} = 0{,}2\,.$$

Исследуем распространение пластических волн в случае мгновенно возникшего крутящего момента, превосходящего предел упругости, затем возрастающего со временем. Покажем, что при этом значения скорости и деформации на переднем фронте пластической вол-

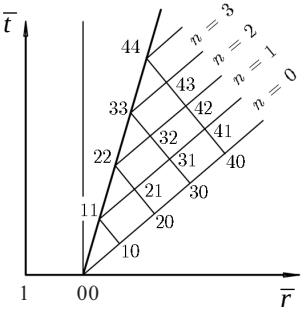


Рис. 3.5

ны сильного разрыва, а также радиус распространения последней не зависят от закона нарастания крутящего момента. Ограничимся рассмотрением схемы линейного упрочнения. В области пластических деформаций уравнение движения (3.4) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{a_1^2}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{a_1^2 w}{r^2} - \frac{2e_s(a_0^2 - a_1^2)}{r}.$$

Таблица 3.1

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Значения $-\bar{w}_{\bar{r}} \cdot 10^4$											
0	20,0	18,28	16,90	15,82	14,88	14,15	13,48	12,91	12,40	11,95	11,55
1		13,58	12,46	11,64	11,01	10,51	10,09	9,74	9,44	9,17	8,95
2			9,84	8,64	7,79	7,17	6,68	6,35	6,07	5,84	5,635
3				7,90	6,63	5,76	5,07	4,58	4,19	3,89	3,64
4					6,21	5,62	4,67	4,04	3,57	3,20	2,90
5						6,45	5,07	4,18	3,49	3,03	2,66
6							6,28	4,96	4,02	3,40	2,91
7								6,21	4,85	3,97	3,3
8									6,23	4,94	4,02
9										6,27	4,95
10											6,35
Значения $-\bar{w}_{\bar{t}} \cdot 10^4$											
0	20,0	18,28	16,90	15,82	14,88	14,15	13,48	12,91	12,40	11,95	11,55
1		12,22	11,38	10,76	10.27	9,87	9,55	9,26	9,01	8,79	8,61
2			7,47	6,75	6,24	5,86	5,56	5,37	5,21	5,07	4,95
3				4,80	4,18	3,73	3,48	3,22	3,00	2,84	2,71
4					3,31	2,75	2,44	2,17	1,97	1,81	1,68
5						2,46	2,03	1,70	1,46	1,26	1,12
6							2,15	1,69	1,41	1,16	1,01
7								1,86	1,47	1,16	0,97
8									1,78	1,36	1,10
9										1,64	1,28
10											1,64
Значения $\bar{w} \cdot 10^4$											
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		6,55	6,31	6,09	5,92	5,77	5,64	5,53	5,43	5,34	5,26
2			10,58	10,11	9,73	9,42	5,38	5,15	4,96	4,79	4,64
3				12,86	12,24	11,75	11,34	11,03	10,77	10,53	10,32
4					14,18	13,46	12,89	12,44	12,07	11,75	11,47
5						4,96	14,16	13,55	13,06	12,85	12,50
6							15,43	14,61	13,95	13,43	12,98
7								15,80	14,93	14,25	13,69
8									16,06	15,17	14,46
9										16,30	15,37
10											16,49

Его характеристиками согласно (3.5) являются

$$dr = \pm a_1 dt;$$
$$dw_t = \pm a_1 dw_r + \left[\frac{a_1^2}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}\right) - \frac{2e_s}{r}(a_0^2 - a_1^2)\right]dt. \tag{3.13}$$

При переходе через фронт волны сильного разрыва $r = r_0 + a_1 t$ смещение $w(r,t)$ должно оставаться непрерывным:

$$w^0(r,t) = w(r,t),$$

отсюда

$$w_r^0 dr + w_t^0 dr = w_r dr + w_t dt$$

или

$$w_t - w_r^0 = -(w_r - w_r^0)a_1 . \tag{3.14}$$

(Условие (3.14) может быть получено и непосредственным применением закона количества движения к частице, проходящей через волну сильного разрыва.)

Так как линия $r = r_0 + a_1 t$ является характеристикой, то на ней имеем

$$dw_t = a_1 dw_r + \left[a_1^2\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w^0}{r}\right) - 2e_s(a_0^2 - a_1^2)\right]\frac{dt}{r}.$$

Исключив отсюда w_t, с учетом (3.14) будем иметь:

$$-2a_1 dw_r = a_1\frac{w_r}{r}dr - a_1\frac{w^2}{r^2}dr - \frac{2e_s(a_0^2 - a_1^2)}{a_1 r}dr - d(w_t^0 + a_1 w_t^0).$$

Отсюда

$$w_r = \frac{c_1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{2\sqrt{r}}\int^r \frac{w_0}{r^{3/2}}dr + 2e_s(\mu^2 - 1) + \frac{w_t^0 + a_1 w_r^0}{2a_1} - \frac{1}{4a_1\sqrt{r}}\int^r \frac{w_t^0 + a_1 w_r^0}{\sqrt{r}}dr.$$

Определяя c_1 из условия $w_r = -e_m$ при $r = r_0$, получаем

$$w_r = -e_0\sqrt{\frac{r_0}{r}} + \frac{1}{2\sqrt{r}}\int_{r_0}^r \frac{w_0}{r^{3/2}}dr + 2e_s(\mu^2 - 1)\left(1 - \sqrt{\frac{r_0}{r}}\right) +$$
$$+ \frac{w_t^0 + a_1 w_r^0}{2a_1} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_0}{r}}(\mu - 1)e_s - \frac{1}{4a_1\sqrt{r}}\int_{r_0}^r \frac{w_t^0 + a_1 w_r^0}{\sqrt{r}}dr .$$

Вводя безразмерные величины $\overline{w} = w/(r_0 e_s)$; $\overline{t} = a_0 t/r_0$; $\overline{r} = r/r_0$, последнее выражение преобразуем к виду:

$$\overline{w}_{\overline{r}} = -\frac{e_0}{e_s\sqrt{\overline{r}}} + \frac{J_1}{2\sqrt{\overline{r}}} + 2\left(\mu^2 - 1\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\overline{r}}}\right) +$$

$$+\frac{\overline{w}_{\overline{r}}^0 + \mu\overline{w}_{\overline{t}}^0}{2} - \frac{\mu - 1}{2\sqrt{\overline{r}}} - \frac{J_2}{4\sqrt{\overline{r}}} = -\frac{e_0}{e_s\sqrt{\overline{r}}} + f\left(\overline{r}\right),$$

где

$$J_1 = \int_1^{\overline{r}} \frac{\overline{w}_0}{\overline{r}^{3/2}} d\overline{r}; \quad J_2 = \int_1^{\overline{r}} \left(\overline{w}_{\overline{r}}^0 + \mu\overline{w}_{\overline{t}}^0\right) \frac{d\overline{r}}{\sqrt{\overline{r}}}. \qquad (3.15)$$

Результаты численных расчетов, входящих в формулу (3.15) функций для $\mu = 1/\lambda = 18{,}25$, приведены в табл. 3.2. Здесь

$$A_n = \frac{\overline{w}_{n,n}^0}{\overline{r}_{n,n}^{3/2}}; \Delta_n = \frac{A_{n,1} + A_n}{2}\Delta\overline{r}_{n,n}; B_n = \left(18{,}25\,\overline{w}_{\overline{t}}^0 + \overline{w}_{\overline{r}}^0\right)\overline{r}_{n,n};$$

$$C_n = \frac{B_n}{\sqrt{\overline{r}_{n,n}}}; \Delta_C = \frac{C_{n+1} + C_n}{2}\Delta\overline{r}_{n,n}.$$

Таблица 3.2

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\overline{r}_{nn}$	1	1,0208	1,0413	1,0624	1,0832	1,1040
$\overline{w}_{nn}^0$	0	0,3276	0,5290	0,6430	0,7090	0,7480
$\overline{r}_{nn}^{1/2}$	1	1,0104	1,0209	1,0312	1,0416	1,051
$\overline{r}_{nn}^{3/2}$	1	1,03	1,062	1,093	1,13	1,156
A_n	0	0,3185	0,499	0,588	0,627	1,645
Δ_n	0,0331	0,0167	0,0338	0,0505	0,0662	–
J_1	0	0,0331	0,0200	0,0538	0,1043	0,1705
$\overline{w}_{\overline{t}}^0$	1	0,611	0,3734	0,2399	0,1652	0,1208
$18{,}25\,\overline{w}_{\overline{t}}^0$	18,25	11,12	6,81	4,37	2,96	2,2
$\overline{w}_{\overline{r}}^0$	–1	–0,679	–0,492	–0,395	–0,3455	–0,3225
B_n	17,25	10,441	6,318	3,975	2,6145	1,8775
C_n	17,25	10,34	6,200	3,84	2,500	1,788
Δ_n	27,59	1,654	1,002	0,634	0,4288	–
J_2	0	0,279	0,638	0,901	1,164	1,386

Для определения значения e_0 / e_s, при котором данное значение $\overline{r}^*$ является радиусом распространения волны сильного разрыва, пользуемся уравнением

$$\overline{w}_0 / \overline{r}^* - \overline{w}_{\overline{r}^*} = 1$$

или

$$e_0 / e_s = \sqrt{\overline{r}^*}\ [1 + f(\overline{r}^*) - \overline{w}_0 / \overline{r}^*].$$

Результаты расчетов выражения $\overline{w}_0 / \overline{r}^* - f\left(\overline{r}^*\right)$ для $\mu = 1/\lambda = 18,25$ приведены в табл. 3.3, где введены обозначения:

$$A_1 = \frac{8,625}{\sqrt{\overline{r}_{n,n}}};\quad A_2 = 664\left(1 - \overline{r}_{n,n}^{-1/2}\right);\quad A_3 = \frac{J_1}{2\sqrt{\overline{r}_{n,n}}};\quad A_4 = A_2 - A_1 + A_3;$$

$$A_5 = \frac{\overline{w}_{\overline{r}}^0 + \mu \overline{w}_{\overline{t}}^0}{2};\ A_6 = \frac{J_2}{4\sqrt{\overline{r}_{n,n}}};\ f = A_4 + A_5 - A_6;\ d = \frac{\overline{w}^0}{\overline{r}_{n,n}} - f(\overline{r}).$$

Таблица 3.3

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$r_{n,n}^{-1/2}$	1	1,01	1,0209	1,0312	1,0416	1,051
A_1	8,625	8,54	8,45	8,35	8,26	8,17
$\overline{r}_{n,n}^{-1/2}$	1	0,99	0,979	0,969	0,958	0,95
$1 - \overline{r}_{n,n}^{-1/2}$	0	0,00992	0,0202	0,0302	0,0410	0,0485
A_2	0	0,64	3,4	20	26,5	32,2
$A_2 - A_1$	–8,625	–1,90	4,95	11,65	18,24	24
A_3	0	0,00163	0,0098	0,0260	0,0500	0,081
A_4	–8,625	–1,8981	4,960	11,676	18,29	24,08
A_5	8,625	5,22	3,159	1,987	1,307	0,938
A_6	0	0,069	0,1565	0,218	0,279	0,329
$A_5 - A_6$	8,625	5,151	3,003	1,769	1,028	0,609
$f\left(\overline{r}\right)$	0	3,253	7,963	13,445	19,318	24,690
$\overline{w}^0 / \overline{r}$	0	0,32	0,57	0,605	0,605	0,677
d	0	–2,933	–7,393	–12,840	–18,666	–24,023

Пользуясь этой таблицей, определим значения $\overline{r}^*$ в зависимости от e_0 / e_s (табл. 3.4).

Таблица 3.4

e_0 / e_s	1	3,97	8,56	14,25	20,40	26,20
$\overline{r}^*$	1	1,0208	1,0413	1,0624	1,0832	1,104

Мы видим, что радиус $\overline{r}^*$ распространения пластической волны сильного разрыва не зависит от закона нарастания приложенного крутящего момента, определяясь его начальным значением. Вне окружности радиуса $\overline{r}^*$ волна сильного разрыва может выродиться в волну слабого разрыва. Естественно предположить, что последняя распространяется со скоростью, меньшей a_1, так как в противном случае величина $\overline{r}^*$ не являлась бы радиусом прекращения действия пластической волны сильного разрыва. Заметим, что величина $\overline{r}^*$ может быть экспериментально наблюдаемой при воздействии кратковременного крутящего момента.

Переходим к рассмотрению движения волны разгрузки, возникающей при мгновенном приложении к цилиндру крутящего момента монотонно убывающего в дальнейшем со временем. Принимая линейным закон упрочнения для области разгрузки

$$\tau = \tau_0 - E\left(e_0 - e\right) = \tau_0 - E\left(e_0 - \frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r}\right),$$

уравнение движения (3.4) преобразуем к виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_0^2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2}\right] - \frac{d}{dr}\frac{\left(\tau_0 - Ee_0\right)}{\rho_0} - \frac{2\left(\tau_0 - Ee_0\right)}{\rho_0 r}, \quad (3.16)$$

где τ_0 и e_0 – напряжение и деформация на волне разгрузки.

Предположим вначале, что линия $r = r_0 + a_1 t$ является волной разгрузки; при переходе через нее смещения должны оставаться непрерывными, поэтому $w_t + a_1 w_r = w_1^* + a_1 w_r^*$ (индексом «0» отмечены характеристики области упругих деформаций).

Имея в виду, что на линии $r = r_0 + a_1 t$ скачок деформаций равен $e_0 - e_s$, получим:

$$w_t = w_t^* + a_1\left(e_0 - e_s\right); \quad \frac{w_0}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} = e_0 . \quad (3.17)$$

Если предположить, что $e_0(r)$ известной, то из (3.17) можно найти w_t и w_r, а следовательно, поставить задачу Коши для уравнения (3.16).

Существование решения задачи Коши доказано, поэтому остается найти лишь соотношение, которому должна удовлетворять $e_0(r)$, чтобы в области, лежащей выше линии $r = r_0 + a_1 t$, происходила разгрузка, т. е. чтобы эта линия действительно являлась волной разгрузки. С этой целью продифференцируем (3.17) вдоль упомянутой линии:

$$de_0 = \frac{\partial e}{\partial t} dt - \frac{e}{r} dr - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr \ ;$$

$$-a_1 de_0 = dw_t^* + \frac{\partial e}{\partial t} dr - \frac{w_t}{r} dr - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dt \quad \left(e = \frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} \right). \quad (3.18)$$

Определив из этих уравнений $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, подставив их в (3.16) и использовав тот факт, что $\tau_0 = \tau_s + E'(e_0 - e_s)$, $dt = \frac{dr}{a_1}$, получим

$$a_1 \frac{dw_t^0}{dr} + a_1 \frac{\partial e}{\partial t} - a_1 \frac{w_t}{r} + a_1^2 \frac{de_o}{dr} =$$

$$= \frac{a_0^2}{a_1} \frac{\partial e}{\partial t} - a_0^2 \frac{de_0}{dr} - \frac{2a_0^2 e_0}{r} - \frac{2\left(\tau_s - E' e_s\right)}{\rho r} + 2\left(a_0^2 - a_1^2\right) \frac{e_0}{r} \ . \quad (3.19)$$

Здесь производная dw_t^0 / dr является заданной функцией времени, а w_t, согласно (3.17), — линейной функцией e_0. Следовательно, для заданной $\partial e / \partial t$ уравнение (3.19) является линейным относительно e_0 и имеет единственное решение, так как значение $e_0(r_0)$ известно. Таким образом, существует некоторая область разгрузки вблизи прямой $r = r_0 + a_1 t$; следовательно, эта прямая может быть волной разгрузки. Не исключена возможность, что начиная с некоторого момента времени прямая $r = r_0 + a_1 t$ перестает быть волной разгрузки; последняя будет некоторой кривой, причем волной слабого разрыва.

Отметим, что предложенная постановка не учитывает области радиальных скоростей и деформаций, обусловленной распространением продольной волны впереди сдвиговой [22].

§ 3.3. Сферические волны

Пусть на границе сферической полости единичного радиуса, расположенной в упругопластическом пространстве, в некоторый момент возникает равномерное давление $p(t)$, превосходящее предел упругости. Эта задача для случая нагружения была поставлена вначале в [8], но, как показано автором [10], она рассмотрена неправильно из-за несовместимости поставленных на ударной волне граничных условий с условием пластичности. Исследование распространения сферических волн нагружения при конечных деформациях было проведено в [9]. Построенное там решение справедливо до момента размыва волны сильного разрыва, отделяющей области упругих и пластических деформаций. В [10] дано решение задачи о распространении сферической упругопластической волны нагружения с расчетом момента размыва волны сильного разрыва и, кроме того, рассмотрена более сложная задача о распространении сферической волны разгрузки.

В основу этого параграфа положена [10]. Рассмотрим характер распространения волн в данном случае. Если характеристики упругопластической среды до приложения давления были постоянными, то решение поставленной задачи вследствие симметрии может зависеть лишь от двух переменных: времени t и расстояния r точки от центра сферы. При этом, очевидно, напряжения σ_r, σ_θ, σ_φ будут главными и связаны с деформациями e_r, e_ϑ, e_φ следующим образом [3]:

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta;\ e_\varphi = e_\theta;\ e_r = \frac{\partial u}{\partial r};\ e_\varphi = \frac{u}{r};$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_\varphi - \sigma_r);\ \ e_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right); \tag{3.20}$$

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \sqrt{3}F(e_i);\ \sigma_r + 2\sigma_\varphi = 3K\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right),$$

где u – смещение в направлении радиуса (выражения $\sigma_\varphi - \sigma_r$ и $e_\varphi - e_r$ в рассматриваемых случаях будут всегда положительными). Применяя уравнение количества движения к элементу объема, ограниченному поверхностью конуса телесного угла $d\Omega$ и концентрическими сферами радиусов r и $r + dr$, легко получить

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\varphi)}{r}. \tag{3.21}$$

Подставив в (3.21) выражения для σ_r и σ_φ из (3.20)*, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{2}{\sqrt{3}\rho_0} F\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right)\right] - \frac{K}{\rho_0}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right)\right] -$$

$$-\frac{2\sqrt{3}}{\rho_0 r} F\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]$$

или в ином виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial f(\vartheta)}{\partial r} - \frac{3 f(\vartheta)}{r} \tag{3.22}$$

где $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}\rho_0} F\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{Kx}{\rho_0}$; $\theta = \frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}$.

Характеристиками этого уравнения являются:

$$dr = \pm a(\theta) dt;$$

$$du_t = \pm a(\theta) du_r + \left(\frac{a^2 u}{r^2} - \frac{a^2 u_r}{r} - \frac{3f}{r}\right) dt, \tag{3.23}$$

где $a^2(\theta) = f'(\theta)$. В области упругих деформаций $a(\theta) = a_0$.

В дальнейшем будем рассматривать только такие функции $f(\theta)$, которые удовлетворяют неравенствам $0 < a_1^2 \le f'(\theta) \le a_0^2$; $f''(\theta) \le 0$ при $\theta \ge \theta_0$ и $f'(\theta) \equiv a_0^2$ при $\theta \le \theta_0$.

Граничные и начальные условия для уравнения (3.22) следующие:

$$u(r,t) = \frac{\partial u(r,t)}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0; \tag{3.24}$$

---

* Заметим, что в уравнение (3.21), вообще говоря, нельзя подставлять величины σ_r и σ_φ из (3.20), так как r, входящая в (3.20), есть лагранжева координата частицы, в то время как в (3.21) r – эйлерова координата, или текущее расстояние частицы от центра симметрии. В [10] этот факт не оговаривается, что является упущением автора работы.

$$\sigma_r = p(t) < 0 \quad \text{при} \quad r = 1. \tag{3.25}$$

С учетом (3.20) граничное условие (3.25) примет вид:

$$-\rho f\left(u - \frac{\partial u}{\partial r}\right) + 3Ku = p(t) \text{ при } r = 1. \tag{3.25′}$$

Рассмотрим вначале случай нагружения ($dp/dt < 0$). Если $p(0) \neq 0$ (мгновенное возрастание давления), то аналогично тому, что это сделано в §1.5, можно установить, что точка $A(r = 1, t = 0)$ (рис. 3.6) является точкой многозначности для функций u_t и u_r. При стремлении к A по различным лучам величины u_t и u_r связаны между собой соотношением

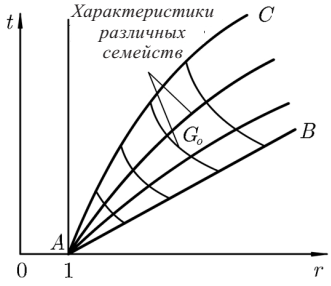


Рис. 3.6

$$u_t = -\int_0^{u_r} a\,du_r. \tag{3.26}$$

Характеристики в плоскости r, t, исходящие из точки A, покрывают некоторую область, лежащую между крайними характеристиками AB и AC. Уравнение волны AB, бегущей в покоящуюся среду, как можно показать, будет иметь вид: $r = 1 + a_0 t$. Прямая AB является линией разрыва для функций u_t и u_r; смещение же $u(r, t)$ при переходе через AB разрыва не испытывает. В силу этого вдоль прямой AB имеем $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$, или

$$u_t + a_0 u_r = 0. \tag{3.27}$$

Так как прямая AB является одновременно характеристикой уравнения (3.22), вдоль нее имеет место соотношение (3.23):

$$du_t = a_0 du_r - \left[\frac{a_0^2 u_r}{r} + \frac{3f(-u_r)}{r}\right]dt,$$

которое с учетом (3.27) запишется так:

$$-2a_0 du_r - \frac{2a_0 u_r}{r}dr = 0; \quad u_t = a_0\theta_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} a(z)dz.$$

Отсюда вдоль линии AB

$$u_r = c/r = -\theta_0/r$$

(здесь использован тот факт, что на AB при $r=1$, $\theta=\theta_0$). Из (3.26) следует, что $u_t > 0$ на AB при $r \to 1$, с другой стороны из (3.25′) имеем:

$$\rho_0 \frac{\partial\theta}{\partial t} f'(\theta) = -\frac{dp}{dt} + 3K\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Из этого можно заключить, что при $\rho' < 0$ в некоторой окрестности особой точки A имеем $\partial\theta/\partial t > 0$, т.е. происходит процесс активной деформации.

Существование решения уравнения (3.22) при граничных условиях (3.25′) и (3.27) можно доказать или непосредственным его построением с помощью метода характеристик (аналогично тому, как это сделано в § 1.4), или способом, предложенным в [10]. Не останавливаясь на этом подробно, перейдем к рассмотрению волновой картины для схемы линейного упрочнения.

Пусть функция $f(\theta)$ задана в виде

$$f(\theta) = a_0^2\theta \quad \text{при} \quad \theta \le \theta_0;$$

$$f(\theta) = a_0^2\theta + (a_0^2 - a_1^2)\theta_0 \quad \text{при} \quad \theta \ge \theta_0.$$

В дальнейшем будет показано, что непосредственно за волной AB существует область, в которой $\theta \le \theta_0$ и, следовательно, имеет место линейное уравнение распространения волн:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{u_r}{r} + \frac{u}{r^2}\right) - \frac{3a_0^2}{r}\left(\frac{u}{r} - u_r\right);$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \qquad (3.28)$$

Эта область сверху ограничена прямой $r = 1 + a_1 t$, соответствующей пластической волне (AC на рис. 3.7). Граничные условия для решения $u(r, t)$ уравнения (3.28) в области ABC следующие:

$$u(r, t) = 0 \quad \text{при} \quad r = 1 + a_0 t; \qquad (3.29)$$

$$\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} = \theta_0 \quad \text{при} \quad r = 1 + a_1 t. \qquad (3.30)$$

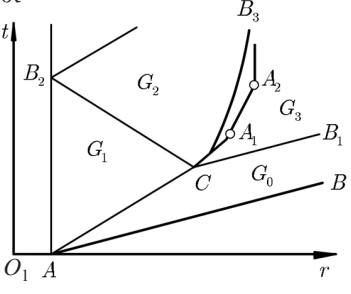


Рис. 3.7

Уравнение (3.28) и условие (3.29) тождественно удовлетворяются, если положить

$$u(r,t)=\frac{\phi'(r-a_0t-1)}{r}-\frac{\phi(r-a_0t-1)}{r^2}\,; \tag{3.31}$$

$$\phi'(0)=\phi(0)=0 \tag{3.32}$$

(здесь и в дальнейшем штрих означает производную по всему аргументу). Остается удовлетворить условию (3.30):

$$\frac{\phi''(x)}{\lambda x+1}-\frac{3\phi'(x)}{(\lambda x+1)^2}+\frac{3\phi(x)}{(\lambda x+1)^3}=-\theta_0\,. \tag{3.33}$$

Решение уравнения (3.33) при условии (3.32) имеет вид

$$\phi(x)=\frac{\theta_0}{(\lambda-1)(6\lambda-3)}\Big[-(\lambda x+1)^3+$$

$$+(\lambda x+1)^{\mu}\left(\cos(\nu\log(\lambda x+1))+\frac{3-\mu}{\nu}\sin(\nu\log(\lambda x+1))\right)\Big],$$

где $\mu=(\lambda+3)/2\lambda;\ \nu=-\sqrt{12-(\lambda+3)^2}\,/\,2\lambda.$

Тогда смещение u (r, t) в области ABC выразится формулой

$$u(r,t)=\frac{\theta_0}{(\lambda-1)(6\lambda-3)}\left\{\frac{\lambda}{r}\left[-3\xi^2+\xi^{\mu-1}\left(3\cos(\nu\log\xi)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{3\mu-\nu^2-\mu^2}{\nu}\sin(\nu\log\varepsilon)\right)\right]-\frac{1}{r^2}\left[-\xi^2+\xi^{\mu}\left(\cos(\nu\log\varepsilon)+\frac{3-\mu}{\nu}\sin(\nu\log\varepsilon)\right)\right]\right\}.$$

Здесь $\xi=\lambda x+1$; $x=r-a_0t-1$.

На прямой $r=1+a_1t$ функция u равна

$$g(r)=\frac{\theta_0}{(\lambda-1)(6\lambda-3)}\Big[(-3\lambda+1)r+r^{\mu-2}\left[(3\lambda-1)\cos(\nu\log r)-\sigma\sin(\nu\log r)\right]\Big];$$

$$\sigma=(-3\lambda^2-4\lambda+3)/(2\lambda\nu)\,. \tag{3.34}$$

Переходим к определению смещения u (r, t) в области пластических деформаций, где для u (r, t) справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2u}{r^2}-\frac{3(a_0^2-a_1^2)\theta_0}{a_1^2r}=\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\,. \tag{3.35}$$

Условие (3.25′) для схемы линейного упрочнения запишется так:

$$a_1^2\rho + (3K - \rho a_1^2)u - \rho\theta_0(a_0^2 - a_1^2) = p(t) \quad \text{при} \quad r = 1. \qquad (3.36)$$

Таким образом, смещение $u(r, t)$ в области пластических деформаций должно удовлетворять уравнению (3.35), граничному условию (3.36) и быть непрерывным на пластической волне, т. е.

$$u(r, t) = g(r) \text{ при } r = 1 - a_1 t. \qquad (3.37)$$

Решение для u ищем в виде

$$u(r, t) = u_1(r, t) - hr\ln r; \quad h = -\theta_0(a_0^2 - a_1^2)/a_1^2,$$

где $u_1(r, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \qquad (3.38)$$

и граничным условиям

$$u_1(r, t) = g(r) + hr\ln r \quad \text{при} \quad r - 1 = a_1 t;$$

$$\rho a_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial r} + u_1(3K - \rho a_1^2) = p(t) \quad \text{при} \quad r = 1.$$

Решение $u_1(r, t)$ ищем в виде

$$u_1(r,t) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\Phi_1(r + a_1 t - 1) + \psi_1(r - a_1 t - 1)}{r}\right],$$

при котором (3.38) удовлетворяется тождественно. Подстановка $u_1(r, t)$ в (3.37) дает

$$\frac{\Phi_1'(2r-2) + \psi_1'(0)}{r} - \frac{\Phi_1(2r-2) + \psi_1(0)}{r^2} = g(r) + hr\ln r.$$

Решением этого уравнения при условии $\Phi_1(0) = \psi_1(0) = \psi'(0) = 0$ является функция

$$\Phi_1(x) = \frac{(x+2)^2}{2}\int_0^x \frac{g_1(\tau)}{\tau + 2}\,d\tau,$$

где

$$g_1(\tau) = g\left(\frac{x}{2} + 1\right) + h\left(\frac{x}{2} + 1\right)\ln\left(\frac{x}{2} + 1\right).$$

Условие (3.36) приводит к следующему уравнению для определения $\psi_1(x)$:

$$\psi_1''(x) - x\psi_1'(x) + x\psi(x) = p_1(x) - \left[\frac{d^2\Phi_1(-x)}{dx^2} + x\frac{d\Phi_1(-x)}{dx} + x\Phi_1(-x)\right];$$

$$x = 3\left(1 - \frac{K}{\rho a_1^2}\right); \quad p_1(x) = \frac{1}{\rho a_1^2}\, p\left(-\frac{x}{a_1}\right), \tag{3.39}$$

причем $\psi'(0) = \psi_1(0) = 0$. Его решением является

$$\phi_1(x) = -\Phi_1(-x) + \frac{1}{\gamma}\int_0^x \Big[(p_1(\tau) - x^2\Phi_1(-\tau))\sin\gamma(x-\tau) -$$

$$-2x\Phi_1(x)\cos\gamma(x-\tau)\Big]\exp\frac{\kappa(x-\tau)}{2}\,d\tau,$$

где $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{4\kappa - \kappa^2}$.

Найденное выражение для функции $u(x,t)$ справедливо в области, ограниченной прямой AC и характеристикой отрицательного направления, проходящей через точку C, в которой θ становится равным θ_0. Можно показать, что координата $r_{\max}$ точки C удовлетворяет уравнению

$$b_0 + b_1 r + r^{\mu-2}\left[b_2\cos(\nu\ln r) + b_3\sin(\nu\ln r)\right] = \frac{p(0)}{p_s}.$$

Здесь p_s – давление, соответствующее пределу упругости:

$$b_0 = \frac{10\lambda - 22\lambda^2 + 15\lambda - 3}{2(\lambda-1)^2(2\lambda^2 - 6\lambda + 3)}; \quad b_1 = \frac{2\lambda^2 - 6\lambda + 3}{2(\lambda-1)^2};$$

$$b_2 = \frac{6\lambda^2 - 8\lambda + 3}{2(\lambda-1)^2(2\lambda^2 - 6\lambda + 3)}; \quad b_3 = -\frac{6\lambda^3 + 2\lambda^2 - 9\lambda + 3}{4\nu(2\lambda^2 - 6\lambda + 3)(\lambda-1)^2}.$$

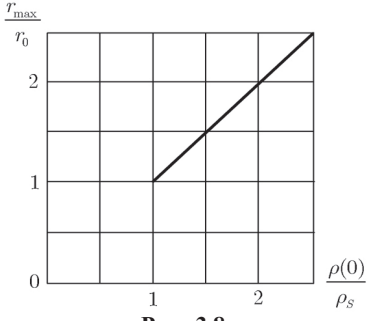


Рис. 3.8

График $r_{\max}/r_0$ (r_0 – радиус полости) в зависимости от $p(0)/p_s$ для $a_0/a_1 = 1{,}2;\ 1{,}34$ приведен на рис. 3.8 (указанным значениям a_0/a_1 для случая идеальной пластичности соответствуют значения коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}35;\ 0{,}25$). График на рис. 3.8 показывает, что в соответствующем диапазоне изменения $p(0)/p_s$ зависимость $r_{\max}/r_0$ от этого отношения линейная: $r_{\max}/r_0 = p(0)/p_s$.

Определение смещений в областях G_2 и G_3 (см. рис. 3.7) сводится к нахождению функций u_2 и u_3, удовлетворяющих, соответственно, уравнениям (3.28) и (3.35) и граничным условиям

$$u_2 = f_2(t) \text{ на } B_2C;\ u_2 = u_3;\ \theta_2 = \theta_3 = \theta_0 \text{ на } B_3C;\ u_3 = f_3(t) \text{ на } B_1C,$$

где $f_2(t)$ и $f_3(t)$ известны из решения задачи в областях G_1 и G_0.

Получить решение сформулированной задачи для функций u_2 и u_3 в конечном виде не удается. В областях G_2 и G_3 для определения функций u_2, u_3 и уравнения линии B_3C приходится использовать численные методы расчета. Расчет продолжается до тех пор, пока нагрузка не сменится разгрузкой. С этого момента применение уравнения (3.35) в области пластических деформаций становится недопустимым.

Переходим к рассмотрению характера распространения волн при разгрузке. В этом случае

$$f(\theta) = a_0^2\theta + (a_1^2 - a_0^2)(\theta_1 - \theta_0),$$

где $\theta_1(r)$ – значение $\theta(r,t)$ на волне разгрузки.

Уравнение (3.22) для безразмерных величин $u^* = u/\theta_0$, $\theta^* = \theta/\theta_0$, $\theta_1^* = \theta_1/\theta_0$ в переменных $\tau = a_0 t$, r принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} - \frac{2u^*}{r^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} + h_0\left[\frac{d\theta_1^0}{dr} + \frac{3(\theta_1^* - 1)}{r}\right]; \qquad (3.40)$$

где $h_0 = \dfrac{a_1^2 - a_0^2}{a_0^2}$.

Рассмотрим случай монотонной разгрузки после мгновенного приложения давления. Выше было показано, что при мгновенном нагружении независимо от последующего характера возрастания давления образуется область упругих деформаций, ограниченная упругой и пластической волнами. При этом на пластической волне $r = 1 + a_1\tau/a_0$ при подходе к ней со стороны области упругих деформаций $\theta^* = 1$. Это наводит на мысль искать решение уравнения (3.40), для которого прямая $r = 1 + a_1\tau/a_0$ является волной разгрузки. Предварительно с помощью замены $u^* = U(r,\tau) + v(r)$, где v удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{2v}{r^2} = h_0\left(\frac{d\theta_1^*}{dr} + \frac{3(\theta_1^* - 1)}{r}\right), \qquad (3.41)$$

перейдем к линейному однородному уравнению для функции $U(r,\tau)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{2U}{r^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}. \qquad (3.42)$$

За функцию $v(r)$ выберем следующее частное решение (3.41):

$$\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r}=h_0(\theta_1^*-1);\ v(1)=0.$$

Тогда граничные условия для $U(r,t)$ на предполагаемой волне разгрузки $r=1+a_1\tau/a_0$ запишутся так:

$$U=g(r)/\theta_0-v(r); \qquad (3.43)$$

$$\frac{U}{r}-\frac{\partial U}{\partial r}=\theta_1^*-\frac{v}{r}+\frac{dv}{dr}=1+\frac{a_1^2}{a_1^2-a_0^2}\left(\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r}\right). \qquad (3.44)$$

После исключения неизвестной функции v и подстановки вместо $g(r)$ его выражения, согласно (3.34), будем иметь:

$$\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{a_1}{a_0}\frac{\partial U}{\partial \tau}-\frac{U}{r}=h_0\left[1+ar^{\mu-3}(\cos(\nu\ln r)+b\sin(\nu\ln r))\right]$$

$$\text{при}\ \ r=1+\frac{a_1}{a_0}\tau, \qquad (3.45)$$

где $a=\lambda/(1-2\lambda)$; $b=(2\lambda^2+\lambda-1)/[2\lambda\nu(2\lambda-1)]$.

Граничное условие на поверхности сферы при разгрузке преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial r}+\left(\frac{3k}{\rho a_0^2}-1\right)U=\frac{1}{\rho a_0^2\theta_0}p\left(\frac{\tau}{a_0}\right). \qquad (3.46)$$

Можно показать, что всякое решение уравнения (3.42) представимо в виде:

$$U(r,t)=\frac{\Phi'(r+\tau-1)+\psi'(r-\tau-1)}{r}-\frac{\Phi(r+\tau-1)+\psi'(r-\tau-1)}{r^2}, \qquad (3.47)$$

где Φ, ψ – произвольные, трижды дифференцируемые функции. В точке, выбираемой за начальную, трем значениям из четырех (ψ, Φ, ψ', Φ') можно придать произвольные значения. Последнее утверждение следует из того факта, что решение в некоторой точке r, t можно получить интегрированием обыкновенного уравнения первого порядка любой из двух характе-

ристик, проходящих через эту точку. При этом значения функций ψ и ψ' (или Φ и Φ') на этих характеристиках оказываются произвольными постоянными.

Если бы удалось каким-либо методом получить решение рассматриваемой задачи в некоторой малой окрестности 012 точки A (рис. 3.9), то можно показать, что дальнейшие решения находятся в квадратурах. Докажем это утверждение для двух характеристических треугольников – 123 и 234; для следующих треугольников можно сделать аналогичный вывод.

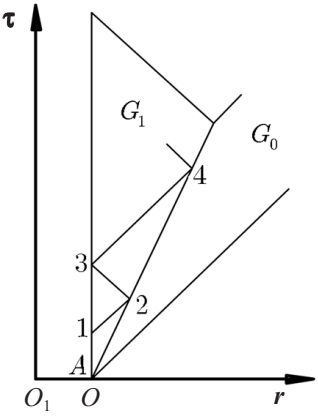


Рис. 3.9

Пусть нам известно решение $U(r,t)$ в области 012 вплоть до характеристики 1–2; значение $U(r,t)$ на последней пусть будет равно $U_1(r)$. Решение для треугольников 123 ищем в виде (3.47). Тогда на прямых 1–2 и 1–3 имеем соответственно:

$$\frac{\Phi'\left[2(r-1)+\tau_1\right]}{r}-\frac{\Phi\left[2(r-1)+\tau_1\right]}{r^2}=U_1(r)\,; \qquad (3.48)$$

$$\Phi(\tau_1=0)\,;$$

$$\Phi''(\tau)+\psi''(-\tau)-x_1\left[\Phi'(\tau)+\psi'(-\tau)\right]+x_1\left[\Phi(\tau)+\psi(-\tau)\right]=p_1(\tau)\,; \qquad (3.49)$$

$$\psi'(-\tau_1)=\psi(-\tau_1)=0\,;\quad x_1=3(1-k/(\rho a_0^2))\,;$$

$$p_1(\tau)=\frac{1}{\rho a_0^2\theta_0}\,p\left(-\frac{\tau}{a_0}\right).$$

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (3.48), (3.49) в треугольнике 123 существует, единственно и имеет такой вид:

$$\Phi(x)=\left(\frac{x-\tau_1}{2}\right)^2\int_0^x\frac{U_1(0,5(x-\tau_1)+1)}{0,5(x-\tau_1)+1}\,dx\,;$$

$$\psi(x)=-\Phi(-x)-\frac{U_1(1)}{\gamma_1}\exp\frac{\kappa_1(x-\tau_1)}{2}\sin\gamma_1(x-\tau)+\frac{1}{\gamma_1}\int_{-\gamma_1}^{x}\Big[(p_1(\tau)-$$

$$-\kappa_1^2\Phi(-\tau))\sin\gamma_1(x-\tau)-2\kappa_1\gamma_1\Phi(-\tau)\cos\gamma_1(x-\tau)\Big]\exp\frac{\kappa_1(x-\tau)}{2}d\tau,$$

где $\gamma_1=\sqrt{4\kappa_1-\kappa_1^2}\big/2$.

Следовательно, решение $U(r,t)$ в 123 найдено:

$$U(r,\tau)=\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\left[\Phi(x)-\Phi(-y)-\frac{U_1(1)}{\gamma_1}\exp\frac{\kappa_1(y+\tau_1)}{2}\sin\gamma_1(y+\tau_1)+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{\gamma_1}\int_{-\tau_1}^{y}(p_1(\tau)-\kappa_1^2\Phi(-\tau)\sin\gamma_1(y-\tau)-$$

$$\left.\left.-2\kappa_1\gamma_1\Phi(-\tau)\cos\gamma_1(y-\tau))\exp\frac{\kappa_1(y-\tau)}{2}d\tau\right]\right\},$$

где $x=r+\tau-1$; $y=r-\tau-1$.

На прямой 2–3 решение теперь известно; обозначим его $U_2(r)$. Тогда, полагая $\psi(r_2-\tau_2-1)=\Phi(r_2+\tau_2-1)-\Phi'(r_2+\tau_2-1)$, для функции ψ будем иметь следующее уравнение:

$$\frac{\psi'\left[2(r-1)-(r_2+\tau_2-1)\right]}{r}-\frac{\psi\left[2(r-1)-(r_2+\tau_2-1)\right]}{r^2}=U_2(r),$$

откуда

$$\psi(x)=\left[\frac{x+(r_2+\tau_2-1)}{2}+1\right]^2\int_{r_2-\tau_2-1}^{x}\frac{U_2(0,5(x+r_2+\tau_2-1)+1)}{0,5(x+r_2+\tau_2-1)+1}dx.$$

Из условия (3.36) получаем дифференциальное уравнение для функции Φ:

$$\frac{1}{r}\left[\left(1+\frac{a_1}{a_0}\right)\Phi''(x)+\left(1-\frac{a_1}{a_0}\right)\psi''(y)\right]-\frac{1}{r^2}\left[\left(3+\frac{a_1}{a_0}\right)\Phi'(x)+\left(3-\frac{a_1}{a_0}\right)\psi'(y)\right]+$$

$$+\frac{3}{r^3}\left[\Phi(x)+\psi(y)\right]=f(r),$$

где $f(r)$ – правая часть (3.36), $x=(r-1)(1+a_0/a_1)$, $y=(r-1)(1-a_0/a_1)$. После довольно длинных выкладок можно получить:

$$\Phi_1(r)=\Phi\left[(r-1)\left(1+\frac{a_0}{a_1}\right)\right]=\frac{a_1+a_0}{a_1-a_0}\phi\left[(r-1)\left(1-\frac{a_0}{a_1}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{\nu}\left(1+\frac{a_0}{a_1}\right)r_2^2U_2(r_2)\left(\frac{r}{r_2}\right)^{\varepsilon}\sin\left(\nu\ln\frac{r}{r_2}\right)+$$

$$+\frac{1}{\nu}\frac{a_0}{a_1}\left(1+\frac{a_0}{a_1}\right)\int_{r_2}^{r}\left(\frac{r}{z}\right)^2 z^2 f(z)\sin\left(\nu\ln\frac{r}{z}\right)+$$

$$+\frac{1}{\nu}\frac{a_1+a_0}{a_1-a_0}\int_{r_z}^{r}\left(\frac{r}{z}\right)^{\varepsilon}\frac{\phi_1(z)}{z}\left[9\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^r\sin\left(\nu\ln\frac{r}{z}\right)+6\frac{a_0}{a_1}\cos\left(\nu\ln\frac{r}{z}\right)\right]dz,$$

где $\nu=\frac{1}{2}\sqrt{3\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2-4};\ \varepsilon=\frac{1}{2}\left(3\frac{a_0}{a_1}+2\right).$

Таким образом, решение уравнения (3.40) в 234 также найдено. Для получения решения (3.40) в треугольнике 012 в [10] предложено использовать численный метод интегрирования для случая $p_1(\tau)=a\tau+b$, с помощью которого, очевидно, всегда можно представить функцию $p_1(\tau)$ в малой окрестности точки O.

В силу линейности уравнения (3.42) решение для $U(r,t)$ ищется в виде

$$U=U_1(r,t)-(b+1)U_2(r,t)-aU_3(r,t),$$

где U_1, U_2, U_3 – частные решения (3.42), удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial U_1}{\partial r}+\frac{a_1}{a_0}\frac{\partial U_1}{\partial\tau}-\frac{U_1}{r}=f(r)\ \text{при}\ r-1=\frac{a_1}{a_0}\tau;$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial r}+\left(\frac{3K}{\rho a_0^2}-1\right)U_1=-1\ \text{при}\ r=1;$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial r}+\frac{a_1}{a_0}\frac{\partial U_2}{\partial\tau}-\frac{U_2}{r}=0\ \text{при}\ r-1=\frac{a_1}{a_0}\tau;$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial r}+\left(\frac{3K}{\rho a_0^2}-1\right)U_2=-1\ \text{при}\ r=1;$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial r}+\frac{a_1}{a_0}\frac{\partial U_3}{\partial\tau}-\frac{U_3}{r}=0\ \text{при}\ r-1=\frac{a_1}{a_0}\tau;$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial r}+\left(\frac{3K}{\rho a_0^2}-1\right)U_3=-\tau\ \text{при}\ r=1.$$

В [10] наряду с изложенными выше теоретическими результатами численно рассчитаны (уравнения характеристик заменялись уравнениями в конечных разностях) функции U_1, U_2, U_3 для идеально пластического материала при $a_0 / a_1 = 1,34$ (коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$). При этих данных

$$f(r) = -0,445\left[1 - \frac{0,425}{r^{3,01}}\left(0,55\sin\left(0,55\ln r\right) + \cos\left(0,59\ln r\right)\right)\right].$$

Значения функции $f(r)$ при $1 \le r \le 2$ приведены в табл. 3.5.

Таблица 3.5

r	1	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14
$-f(r)$	0,256	0,266	0,275	0,284	0,292	0,299	0,306	0,312
r	1,16	1,18	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70
$-f(r)$	0,318	0,324	0,330	0,353	0,370	0,383	0,393	0,402

В табл. 3.6–3.8 соответственно приведены значения функций U_1, U_2, U_3 и их первых производных, вычисленных для указанного случая в треугольнике 023 (см. рис. 3.9), причем $r_2 = 1,2$. В расчетах принималось: $r_{m,0} = r_{m-1,0} = 0,02$; $\tau_{m,0} - \tau_{m-1,0} = a_0 / a_1 = 0,02678$; $r_{m,n} = r_{m,n-1} = 0,0234$ ($n \ne 0$); построение объяснено на рис. 3.10. В окрестности точки $r = 1$, $\tau = 0$ было использовано представление решения рядом Тейлора до квадратов включительно.

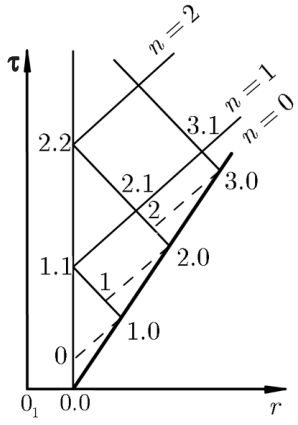


Рис. 3.10

Для того чтобы решение давало в окрестности точки 0 разгрузку, необходимо и достаточно выполнение условия $\dfrac{\partial\theta^*}{\partial\tau} < 0$, или $\dfrac{u_\tau}{r} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial\tau} < 0$, которое с учетом (3.42) и (3.43) может быть преобразовано к виду

$$\left(\frac{dp_1}{d\tau_1}\right)_{\tau=0} > \frac{3K}{\rho a_0^{\,2}}\frac{a_0}{a_1}\left[f(1) - p_1(0)\right];$$

$f(1) = \dfrac{1}{\lambda - 1}$, (предполагается, что $p(0) < p_s$, $p_1(0) < -1$).

Таблица 3.6

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	0	0,006	0,012	0,018	0,024	0,030	0,035	0,040	0,044	0,048	0,052	U
	1	0,985	0,970	0,955	0,941	0,926	0,914	0,902	0,889	0,877	0,864	$-U_r$
	1	0,976	0,901	0,927	0,902	0,878	0,857	0,836	0,815	0,796	0,778	U_τ
1		0,045	0,044	0,043	0,043	0,042	0,041					U
		1,031	1,010	0,988	0,966	0,944	0,923					$-U_r$
		0,979	0,952	0,928	0,904	0,880	0,857					U_τ
2			0,090	0,087	0,085	0,082	0,079	0,076	0,073	0,070	0,068	U
			1,060	1,036	1,012	0,989	0,975	0,951	0,928	0,905	0,882	$-U_r$
			0,956	0,931	0,907	0,882	0,858	0,837	0,816	0,796	0,777	U_τ
3				0,132	0,128	0,124	0,121	0,117	0,114	0,111	0,108	U
				1,089	1,062	1,036	1,011	0,987	0,963	0,940	0,917	$-U_r$
				0,933	0,907	0,882	0,859	0,837	0,815	0,794	0,773	U_τ
4					0,175	0,170	0,165	0,161	0,157	0,152	0,148	U
					1,116	1,086	1,048	1,021	0,696	0,973	0,952	$-U_r$
					0,905	0,880	0,856	0,833	0,810	0,788	0,765	U_τ
5						0,218	0,212	0,206	0,200	0,194	0,189	U
						1,145	1,112	1,080	1,048	1,019	0,989	$-U_r$
						0,877	0,851	0,825	0,801	0,780	0,758	U_τ
6							0,256	0,249	0,242	0,236	0,230	U
							1,170	1,162	1,153	1,145	1,087	$-U_r$
							0,849	0,824	0,800	0,775	1,745	U_τ
7								0,295	0,287	0,279	0,272	U
								1,196	1,159	1,122	1,085	$-U_r$
								0,821	0,795	0,770	0,745	U_τ
8									0,333	0,324	0,315	U
									1,221	1,180	1,140	$-U_r$
									0,792	0,765	0,740	U_τ
9										0,370	0,360	U
										1,245	1,204	$-U_r$
										0,762	0,735	U_τ
10											0,406	U
											1,270	$-U_r$
											0,731	U_τ

Таблица 3.7

n \ m	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
0	0.000	0,016	0,032	0,048	0,064	0,080	0,096	0,113	0,131	0,148	0,166	U
	1,000	0,979	0,958	0,937	0,916	0,895	0,874	0,854	0,833	0,812	0,792	$-U_r$
	1,340	1,330	1,320	1,310	1,300	1,290	1,280	1,271	1,263	1,256	1,249	U_τ
1		0,063	0,071	0,079	0,087	0,095	0,104					U
		1,042	0,989	0,951	0,921	0,898	0,876	—	—	—	—	$-U_r$
		1,345	1,333	1,321	1,308	1,296	1,283					U_τ
2			0,126	0,135	0,144	0,153	0,162	0,172	0,182	0,192	0,202	U
			1,084	1,018	0,969	0,929	0,898	0,874	0,852	0,832	0,815	$-U_r$
			1,349	1,338	1,327	1,315	1,303	1,291	1,279	1,267	1,255	U_τ
3				0,189	0,197	0,205	0,214	0,282	0,231	0,240	0,250	U
				1,126	1,057	1,002	0,960	0,928	0,903	0,880	0,860	$-U_r$
				1,352	1,340	1,328	1,316	1,304	1,292	1,280	1,268	U_τ
4					0,252	0,260	0,268	0,276	0,284	0,292	0,298	U
					1,168	1,095	1,042	0,999	0,965	0,939	0,915	$-U_r$
					1,354	1,341	1,329	1,317	1,305	1,292	1,280	U_τ
5						0,316	0,321	0,326	0,332	0,337	0,342	U
						1,209	1,151	1,100	1,053	1,012	0,981	$-U_r$
						1,355	1,392	1,329	1,316	1,304	1,292	U_τ
6							0,379	0,382	0,385	0,388	0,390	U
							1,252	1,194	1,144	1,099	1,060	$-U_r$
							1,355	1,343	1,330	1,317	1,304	U_τ
7								0,442	0,443	0,444	0,445	U
								1,294	1,230	1,175	1,130	$-U_r$
								1,355	1,342	1,329	1,316	U_τ
8									0,506	0,506	0,505	U
									1,336	1,273	1,230	$-U_r$
									1,354	1,341	1,328	U_τ
9										0,570	0,570	U
										1,378	1,320	$-U_r$
										1,353	1,341	U_τ
10											0,633	U
											1,421	$-U_r$
											1,352	U_τ

Таблица 3.8

n \ m	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	U
0	0,000	0,006	0,092	0,018	0,034	0,028	0,033	0,038	0,042	0,046	0,049	$-U_r$
	0,000	0,008	0,036	0,024	0,031	0,039	0,045	0,052	0,058	0,065	0,071	U_τ
		0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002					U
1		0,048	0,046	0,044	0,043	0,041	0,039	—	—	—	—	$-U_r$
		0,048	0,049	0,050	0,050	0,051	0,051					U_τ
			0,004	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006	0,006	0,007	0,007	U
2			0,097	0,094	0,090	0,087	0,083	0,080	0,077	0,074	0,070	$-U_r$
			0,096	0,095	0,095	0,094	0,093	0,092	0,092	0,091	0,091	U_τ
				0,010	0,010	0,010	0,011	0,011	0,011	0,012	0,012	U
3				0,148	0,144	0,139	0,135	0,031	0,127	0,123	0,119	$-U_r$
				0,143	0,141	0,140	0,139	0,137	0,136	0,134	0,133	U_τ
					0,018	0,018	0,018	0,019	0,019	0,019	0,020	U
4					0,200	0,195	0,189	0,184	0,178	0,173	0,168	$-U_r$
					0,189	0,182	0,184	0,182	0,179	0,177	0,175	U_τ
						0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	0,028	U
5						0,253	0,244	0,236	0,229	0,223	0,216	$-U_r$
						0,235	0,232	0,229	0,225	0,221	0,217	U_τ
							0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	U
6							0,298	0,293	0,288	0,283	0,277	$-U_r$
							0,280	0,276	0,272	0,268	0,265	U_τ
								0,055	0,055	0,055	0,055	U
7								0,355	0,350	0,345	0,339	$-U_r$
								0,324	0,320	0,315	0,311	U_τ
									0,072	0,071	0,071	U
8									0,414	0,412	0,409	$-U_r$
									0,367	0,361	0,355	U_τ
										0,091	0,089	U
9										0,476	0,473	$-U_r$
										0,409	0,378	U_τ
											0,110	U
10											0,543	$-U_r$
											0,447	U_τ

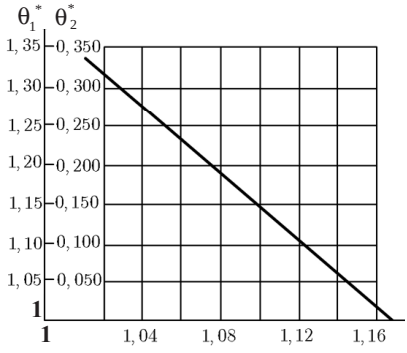


Рис. 3.11

Граница распространения волны разгрузки $r_{\max}$ определяется из условия исчезновения скачка деформации $\theta_1^*(r_m)=1$, т. е. из уравнения

$$\left(\frac{u}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r-1=\frac{a_1}{a_0}\tau}=1.$$

Зная $\theta_1^*(r)$ на волне разгрузки, можно определить остаточные напряжения и смещения.

Рассмотрим следующий численный пример: $p_1(\tau)=1,2(-1+2\tau)$; $a_0/a_1=1,34$; материал предполагается идеально пластическим. Пользуясь табл. 3.6, определяем $U=U_1+0,2U_2-2,4U_3$ и $\theta_1^*(r)$.

Из уравнения $\frac{U}{r}-\frac{\partial U}{\partial r}=1$ графически находим $r_{\max}=1,17$. График $\theta_1^*(r)$ приведен на рис. 3.11. Условие пассивности деформаций здесь выполнено:

$$\frac{dp_1}{d\tau}=2,4;\quad p_1(0)=-1,2;\quad 2,4>\frac{3}{1,34}(-0,256+1,2)=2,12.$$

Расчет при больших нагрузках потребовал бы привлечения формул (3.48) и (3.49).

§ 3.4. Распространение волн в стержнях переменного сечения [11]

Для стержня переменного начального сечения $F_0(x)$ уравнение (1.9)

$$\rho_0 F_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial T}{\partial x}$$

принимает вид

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{F_0'}{F_0}\sigma;\quad \sigma=T/F_0. \tag{3.50}$$

Для материала, удовлетворяющего схеме Прандтля, уравнение (3.50) преобразуется так:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau^2}=\alpha^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}+\frac{F_0'(\xi)}{F_0(\xi)}\left[e_s(1-\alpha^2)+\alpha^2\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right]. \qquad (3.51)$$

Здесь $\zeta=u/h$; $\xi=x/h$; $\tau=a_0t/h$; $\alpha=a_1/a_0$, h – характерный размер стержня. Характеристиками (3.51) будут:

$$d\xi=\pm\alpha d\tau;\ \ d\zeta_\tau=\pm\alpha d\zeta_\xi+\frac{F_0'}{F_0}\left[e_s+\alpha^2\left(\zeta_\xi-e_s\right)\right]d\tau. \qquad (3.52)$$

Пусть на конце стержня мгновенно приложено давление, которое в дальнейшем возрастает. Тогда вдоль стержня будут распространяться две волны: упругая и пластическая со скоростями соответственно a_0 и a_1.

Решение как для упругой, так и для пластической областей можно получить аналогично тому, как это сделано в предыдущих параграфах. На переднем фронте упругой волны $\xi=1+\tau$:

$$\zeta_\tau=-\zeta_\xi;\quad d\zeta_\tau=d\zeta_\xi+\frac{F_0'}{F_0}\zeta_\xi d\xi. \qquad (3.53)$$

Интегрируя (3.53) и учитывая, что на торце стержня при $F_0=\bar{F}_0$ $\zeta_\xi=-e_s$, получаем:

$$\zeta_\xi=-e_s\sqrt{\bar{F}_0/F_0};\quad \zeta_\tau=e_s\sqrt{\bar{F}_0/F_0}. \qquad (3.54)$$

Решение задачи в упругой области сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau^2}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}+\frac{F_0'}{F_0}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$$

при условии $\zeta=0$ на линии $\xi=1+\tau$ и при условии $\zeta_\xi=-e_s$ на переднем фронте пластической волны $\xi=1+\alpha\tau$. Пусть ζ_0 – значение ζ на линии $\xi=1+\alpha\tau$; следовательно, на ней $\zeta_\tau-\zeta_\tau^0=-\alpha\left(\zeta_\xi-\zeta_\xi^0\right)$. Дифференцируя это соотношение и исключая из него с помощью (3.52) величины $d\zeta_\tau$ и $d\tau$, имеем:

$$-2\alpha d\zeta_\xi=-d\left(\zeta_\tau^0+\alpha\zeta_\xi^0\right)+\frac{F_0'}{F_0}\alpha\zeta_\xi d\xi+\frac{1-\alpha^2}{\alpha}e_s\frac{F_0'}{F_0}d\xi.$$

Интегрирование этого уравнения при начальном условии $\xi=1$, $F_0=\bar{F}_0$, $\zeta_\xi=-e_0$ дает

$$\zeta_\xi=-e_0\sqrt{\bar{F}_0/F_0}+f(\xi);$$

$$f(\xi)=-\frac{1}{2\pi}\left(\zeta_\tau^0+\alpha\zeta_\xi^0\right)\left(1-\sqrt{\frac{\bar{F}_0}{F_0}}\right)-\frac{1-\alpha^2}{2\alpha^2}\left(1-\sqrt{\frac{\bar{F}_0}{F_0}}\right)e_s-$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{F_0}}\int\limits_{\bar{F}_0}^{F_0}\left(\zeta_\tau^0+\alpha\zeta_\xi^0\right)\frac{dF_0}{\sqrt{F_0}}.$$

Отсюда видно, что деформации и скорости на фронте пластической волны $\xi=1+\alpha\tau$ зависят лишь от начального значения деформации e_0 или давления p_0.

Зона распространения пластической волны сильного разрыва определяется из условия

$$\zeta_{\xi^*}=-e_s \quad \text{или} \quad \frac{e_0}{e_s}=\sqrt{\frac{F_0\left(\xi^*\right)}{\bar{F}_0}}\left[1+\frac{1}{e_s}f\left(\xi^*\right)\right]. \tag{3.55}$$

Нахождение решения в пластической области для стержня произвольного сечения требует привлечения метода характеристик. Однако в некоторых частных случаях решение рассматриваемой задачи может быть получено в замкнутой аналитической форме, например для конического стержня. В последнем случае уравнения колебаний в упругой и пластической областях совпадают с соответствующими уравнениями для сферических волн. В упругой области имеем:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}+\frac{2}{\xi}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau^2}. \tag{3.56}$$

Решением (3.55) будет $\zeta=\left[\Phi\left(1+\xi+\tau\right)+\psi\left(1+\tau-\xi\right)\right]/\xi$.

Удовлетворение граничным условиям для ζ, а именно:

$$\zeta=0,\ \zeta_\tau+\zeta_\xi=0 \ \text{ при } \ \xi=1+\tau,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}=-e_s \ \text{ при } \ \xi=1+\alpha\tau,$$

приводит к следующим выражениям для функций Φ и ψ:

$$\Phi\equiv 0;\ \psi(0)=0;\ \psi'(\eta)+\frac{1}{1+\lambda\eta}\psi(\eta)=(1+\lambda\eta)e_s.$$

Отсюда

$$\psi(\eta)=\frac{e_s}{1+2\lambda}\left[(1+\lambda\eta)^2-(1+\lambda\eta)^{-\frac{1}{\lambda}}\right].$$

Здесь $\lambda=a_1/(a_0-a_1)$; $\eta=1+\tau-\xi$.

Окончательное выражение для безразмерных смещений ζ будет следующим:

$$\zeta = \frac{e_s}{\xi(1+2\lambda)}\left[(1+\lambda\eta)^2 - (1+\lambda\eta)^{-\frac{1}{\lambda}}\right].$$

В пластической области уравнение распространения волн в коническом стержне имеет вид:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau^2} = \alpha^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2} + \frac{2}{\xi}(1-\alpha^2)e_s + \frac{2\alpha^2}{\xi}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}.$$

Его решение:

$$\zeta = -2e_s\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\xi\ln\xi + \frac{1}{\xi}\left[\Phi_1(1+\alpha\tau+\xi) + \psi_1(1+\alpha\tau-\xi)\right].$$

Из условия непрерывности смещений на переднем фронте пластической волны $\xi = 1+\alpha\tau$, полагая $\psi_1(0) = 0$, находим Φ_1:

$$\Phi_1(\xi) = \frac{e_s}{2(1+2\lambda)}\left[\xi^2 - \xi^{-\frac{1}{\lambda}}\right] + e_s\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\xi^2\ln\xi.$$

Функция ψ_1 определяется из граничного условия на торце стержня:

$$p(\tau) = \sigma_s + E'\left(\zeta_\xi - e_s\right) \text{ при } \xi = 1$$

или

$$\pi(\tau) = 1-\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{e_s}\zeta_\xi, \quad \pi(\tau) = p(t)/\sigma_s.$$

Последнее соотношение приводит к следующему дифференциальному уравнению для ψ_1:

$$\psi_1'(\gamma) + \psi_1(\gamma) = \Phi_1'(\gamma+2) - \Phi_1(\gamma+2) - e_s\left[\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} + \pi\left(\frac{h}{a_1}\gamma\right)\right].$$

Длина участка пластических деформаций, по которому распространяется пластическая волна сильного разрыва, определяется из (3.55). При малых α и ($\xi^* - 1$) значение $\xi^* \approx \pi(0)$.

Численные значения ξ^* при $\alpha = 1/3$, рассчитанные по точной и приближенной формулам, приведены в табл. 3.9.

Таблица 3.9

ξ^*	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
$\pi(0)$	1,0	1,225	1,397	1,541	1,663

§ 3.5. Распространение цилиндрических волн давления при внезапном приложении нагрузки

Рассмотрим процесс деформирования круглой цилиндрической трубы, обусловленный действием мгновенно возникшего, равномерно распределенного по ее внутренней границе давления p, в дальнейшем остающегося постоянным. Эта задача решена в [12] для условий плоской деформации трубы, материал которой предполагается несжимаемым. Из условия несжимаемости имеем

$$\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}=0,$$

где $U(r,t)$ – радиальное смещение трубы; r – расстояние от данной точки до центра трубы. Отсюда

$$U(r,t)=C(t)/r.$$

Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид[1]

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=\rho_0\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \qquad (3.57)$$

Для упругих деформаций

$$\sigma_r-\sigma_\theta=2\mu\left(\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{U}{r}\right)=-4\mu\frac{C(t)}{r^2}$$

и (3.57) преобразуется к виду

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}=\rho_0\frac{C''(t)}{r}+4\mu\frac{C(t)}{r^3}.$$

Интегрируя его и используя тот факт, что на внешней поверхности трубы радиуса $r=b$ $\sigma_r=0$, получаем:

$$\sigma_r=\rho_0 C''(t)\ln\frac{r}{b}-2\mu\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b^2}\right)C(t).$$

Так как на внутренней поверхности радиуса $r=a$ напряжение $\sigma_r=-p$, то

[1] Так как в условие несжимаемости входит лангранжева координата r, то в уравнении движения также используется эта переменная.

$$p = \rho_0 \ln\frac{b}{a} C''(t) + 2\mu\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) C(t). \tag{3.58}$$

Последнее выражение можно рассматривать как дифференциальное уравнение для определения функции $C(t)$, удовлетворяющей, очевидно, следующим начальным условиям: $t = 0$; $C = 0$; $C' = 0$. Отсюда

$$C(t) = \frac{pa^2b^2}{2\mu(b^2 - a^2)}(1 - \cos\omega t), \tag{3.59}$$

где $\omega = 2\mu(b^2 - a^2)/(\rho_0 a^2 b^2 \ln(b/a))$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{a^2b^2p}{b^2 - a^2}\left\{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} - \left[\frac{(b^2 - a^2)(\ln b - \ln r)}{a^2b^2(\ln b - \ln a)} - \frac{b^2 - r^2}{b^2r^2}\right]\cos\omega t\right\}; \\ \sigma_\theta &= \frac{a^2b^2p}{b^2 - a^2}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{b^2} - -\left[\frac{(b^2 - a^2)(\ln b - \ln r)}{a^2b^2(\ln b - \ln a)} - \frac{b^2 + r^2}{b^2r^2}\right]\cos\omega t\right\}, \end{aligned} \tag{3.60}$$

т. е. труба совершает колебания с частотой ω около состояния, соответствующего решению статической задачи Ляме. Очевидно, упругие колебания возможны лишь при условии

$$(\sigma_r - \sigma_\theta) = -4\mu C/r^2 < 2\sigma_0, \tag{3.61}$$

где σ_0 — пластическая постоянная.

Из (3.61) следует, что переход материала в пластическое состояние начинается с внутренней поверхности трубы в момент t^*, определяемый равенством

$$\sin^2\frac{\omega t^*}{2} = \frac{\sigma_0(b^2 - a^2)}{2b^2p}$$

при $p > \sigma_0(b^2 - a^2)/(2b^2)$.

Для пластической области дифференциальное уравнение движения (3.57) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} = \rho_0\frac{C''(t)}{r} + \frac{2\sigma_0}{r}.$$

Интегрируя его и используя граничное условие $\sigma_r = -p$ при $r = a$, находим

$$\sigma_r = -p + \left[2\sigma_0 + \rho_0 C''(t)\right] \ln \frac{r}{a}. \tag{3.62}$$

На границе $r^*(t)$ пластической области значения σ_r, определенные по формулам (3.60) и (3.62), должны совпадать:

$$p - \left[2\sigma_0 + \rho_0 C''(t)\right] \ln \frac{r^*}{a} = \left[\frac{1}{r^{*2}} - \frac{1}{b^2}\right] 2\mu C(t) + \rho_0 C''(t) \ln \frac{b}{r^*},$$

и, кроме того,

$$4\mu C(t) / r^{*2} = 2\sigma_0.$$

Последние два соотношения приводят к следующему дифференциальному уравнению для $r^*(t)$:

$$\frac{a^2 \rho_0}{2\mu} \ln \beta \cdot x''(t) + \ln x(t) - \frac{x(t)}{\beta^2} = \frac{p}{\sigma_0} - 1, \tag{3.63}$$

где $x^*(t) = r^{*2}/a^2$; $\beta = b/a$. Начальные условия для $x^*(t)$ при $t = t^*$ следующие:

$$x = 1, \; x' = \frac{2\mu}{\sigma_0 a^2} C'(t^*). \tag{3.64}$$

Формулы для напряжения σ_r в упругой и пластической областях могут быть преобразованы путем перехода в них от $C(t)$ к $x(t)$:

$$\sigma_r = -\sigma_0 \left[\left(\frac{a^2 x}{b^2} - 1 - \ln x + \frac{p}{\sigma_0}\right) \frac{\ln b - \ln r}{\ln b - \ln a} + \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^2}{b^2}\right) x\right]; \tag{3.65}$$

$$\sigma_r = \sigma_0 \left[2 + \frac{\frac{p}{K} + \frac{a^2}{b^2} x - 1 - \ln x}{\ln b - \ln a}\right] \ln \frac{r}{a} - p, \tag{3.66}$$

причем формула (3.65) справедлива при $r \geq a\sqrt{x}$, (3.66) – при $r \leq a\sqrt{x}$.

Касательное напряжение $\tau = (\sigma_r - \sigma_\theta)/2$ в упругой и пластической областях выражается соответственно формулами:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)/2 = -\sigma_0 a^2 x / r^2; \;\; (\sigma_r - \sigma_\theta)/2 = -\sigma_0.$$

Как следует из изложенного, задача определения напряженного состояния сводится к решению дифференциального урав-

нения (3.63) при граничных условиях (3.64). Если в начальный момент $t=0$ к внутренней поверхности трубы приложен равномерно распределенный импульс давления I, то решение поставленной задачи значительно упрощается. В этом случае в формулах для компонентов напряжения (выведенных при использовании лишь исходных дифференциальных уравнений и граничных условий на поверхности) надо положить $p=0$. При этом интеграция уравнения (3.58) в малом интервале изменения времени при условиях $C'(-0)=C(0)=0$ дает $I=\rho_0 \ln\dfrac{b}{a}$.

Для $t>0$ из (3.58) имеем:

$$\rho_0 C'' \ln\frac{b}{a}+2\mu\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)C(t)=0,$$

откуда

$$C(t)=\frac{I\sin\omega t}{\rho_0\omega(\ln b-\ln a)}.$$

Здесь использован тот факт, что $C(0)=0$ и $C'(+0)=I\big/\left[\rho_0(\ln b-\right.$ $\left.-\ln a)\right]$. В момент t^*, определенный из соотношения $\sin\omega t^*=$ $=\omega\rho_0\sigma_0 a^2(\ln b-\ln a)\big/(2I\mu)$, на внутренней поверхности трубы появляется пластическая область.

Закон распространения пластической волны определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{a^2\rho_0}{2\mu}\ln\beta x''(t)+\ln x(t)-\frac{x(t)}{\beta^2}=-1$$

с граничными условиями

$$t=t^*;\ \ x=1;\ \ x'(t^*)=\frac{2\mu\cos\omega t^*}{\sigma a^2\rho_0(\ln b-\ln a)}.$$

Интегралом этого уравнения является

$$\frac{a^2\rho_0\ln\beta}{2\mu}(x')^2=\frac{a^2\rho_0\ln\beta}{2\mu}\left[x'(t^*)^2\right]-2x\ln x+\frac{x^2-1}{\beta^2}.$$

Найдем минимальное значение $x'(t^*)$, при котором пластическая область захватывает всю трубу. В этом случае $x=\beta^2$ и

$$\frac{a^2\rho_0\ln\beta}{2\mu}\left[x'(t^*)\right]^2=2\beta^2\ln\beta^2-\frac{\beta^4-1}{\beta^2}.$$

Используя предыдущие формулы, определим, какой при этом требуется импульс давления I:

$$I = \sigma_0 \ln\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\rho_0}{2\mu}\left(4b^2 - \frac{b^2 - a^2}{\ln b - \ln a}\right)}.$$

С того момента, когда пластическая зона достигает внешней границы, как следует из (3.62),

$$\sigma_r(b,t) = \left[2K + \rho C''(t)\right]\ln\frac{b}{a} = 0, \tag{3.67}$$

т. е. $2K + \rho C''(t) \equiv 0$. Отсюда $\sigma_r(r,t) \equiv 0$, т. е. всюду напряжение $\sigma_r = 0$.

Из (3.67) находим пластическое расширение трубы:

$$C''(t) = -2K/\rho.$$

В момент t^{**}, при котором

$$C'(t^{**}) = 0,\ C = C_1, \tag{3.68}$$

пластическая деформация во всех точках трубы сменится упругой разгрузкой:

$$\sigma_r - \sigma_\theta - (\sigma_r' - \sigma_\theta') = 2\mu\left[(e_r - e_\theta) - (e_r' - e_\theta')\right],$$

где индексом штрих отмечены параметры, достигнутые в конце пластического расширения (при $t = t^{**}$).

Так как

$$\sigma_r' - \sigma_\theta' = -2\sigma_0,\ e_r - e_\theta = -2C(t)/r^2,\ e_r' - e_\theta' = 2C_1/r^2,$$

то

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -2\sigma_0 + \frac{4\mu}{r^2}\left[C_1 - C(t)\right]$$

и дифференциальное уравнение движения (3.57) при разгрузке примет вид

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} = \frac{2K}{r} - \frac{4\mu}{r^3}\left[C_1 - C(t)\right] + \rho_0\frac{C''(t)}{r}. \tag{3.69}$$

Интегрируя это уравнение при граничном условии $r = a$, $\sigma_r = 0$ (в общем случае $\sigma_r = -p$), получаем:

$$\sigma_r = 2\sigma_0 \ln\frac{r}{a} + 2\mu\left[C_1 - C(t)\right]\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \rho_0 C''(t)\ln\frac{r}{a}.$$

Удовлетворение второму граничному условию: $r = b$;

$\sigma_r = 0$ приводит к следующему дифференциальному уравнению для $C(t)$:

$$\rho_0 C''(t)\ln\frac{b}{a} + 2\mu\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left[C_1 - C(t)\right] = -2K\ln\frac{b}{a},$$

решением которого, удовлетворяющим (3.68), будет

$$C(t) = C_1 - \frac{2K\ln\dfrac{b}{a}}{2\mu(1/a^2 - 1/b^2)}\left[1 - \cos\omega\,(t - t^{**})\right].$$

Вторичная пластическая деформация возникает в момент $t = -t^{***}$, при котором $\sigma_r - \sigma_\theta = 2\sigma_0$, или согласно предыдущему,

$$\frac{\mu}{a^2}\left[C_1 - C(t^{***})\right] = \sigma_0\,; \qquad \sin^2\frac{\omega(t^{***} - t^{**})}{2} = \frac{b^2 - a^2}{b^2\ln(b/a)^2}\,.$$

§ 3.6. Удар с постоянной скоростью по гибкой мембране

1. ***Точечный удар по гибкой мембране***. Пусть по гибкой мембране бесконечной протяженности производится прямой удар острым телом, имеющим с ней лишь одну точку соприкосновения. Предполагается, что в процессе соударения скорость ударяющего тела v_0 остается неизменной, начальная толщина мембраны δ_0 постоянна, а сама она до удара не деформирована и расположена в одной плоскости.

Для решения поставленной задачи целесообразно ввести цилиндрическую систему координат (r, y) с началом в точке удара, осью Or, расположенной в плоскости мембраны, и осью Oy, перпендикулярной к последней и имеющей направление скорости v_0.

Составим уравнения движения элемента гибкой мембраны, вырезанного двумя меридиональными сечениями и двумя сферами, центры которых лежат на оси Oy и совпадают с вершинами конусов, касающихся указанного элемента. В силу закона сохранения массы:

$$\rho_0\delta_0 r dr d\theta = \rho\delta d\theta\sqrt{\left(1 + \frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2}\,dr(r + w)\,. \qquad (3.70)$$

Здесь r – координата частицы мембраны до удара (лагранжева координата); w, u – соответственно радиальное и поперечное смещения частицы; ρ – плотность; θ – полярный угол.

Если обозначить через e_t и e_θ меридиональную и тангенциальную кольцевые деформации соответственно, то

$$e_t = \frac{ds - dr}{dr} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2} - 1; \quad e_\theta = w / r .$$

В некоторый момент на деформированный элемент мембраны воздействуют меридиональные силы $-\bar{\sigma}_t \delta (r + w) d\theta$ и $\bar{\sigma}_t \delta (r + w)\, d\theta + \frac{\partial}{\partial r}\left[\bar{\sigma}_t \delta (r + w)\right] d\theta dr$, и кольцевая сила $\bar{\sigma}_\theta ds \delta d\theta$. По этой причине уравнение количества движения элемента $\rho_0 r dr \delta_0 d\theta$ в проекциях на оси Or и Oy будет иметь соответственно вид:

$$\rho_0 \delta_0 r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\theta_0 = \frac{\partial}{\partial r}\left[(r + w)\bar{\sigma}_t \delta \cos\gamma\right] dr d\theta - \bar{\sigma}_\theta ds d\theta \delta_0 ; \qquad (3.73)$$

$$\rho_0 \delta_0 r dr \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d\theta = -\frac{\partial}{\partial r}\left[(r + w)\bar{\sigma}_t \delta \sin\gamma\right] dr d\theta . \qquad (3.74)$$

Здесь γ – угол между касательной к меридиональному сечению мембраны и осью Or.

Введя напряжения σ_t и σ_θ, отнесенные к первоначальной площади соответствующих граней, получим

$$\sigma_t = \frac{(r + w)\bar{\sigma}_t \delta d\theta}{r \delta_0 d\theta}; \quad \sigma_\theta = \frac{\bar{\sigma}_\theta ds \delta}{dr \delta_0} . \qquad (3.75)$$

Уравнения (3.73) и (3.74) преобразуем к окончательному виду:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_t r \cos\gamma) - \frac{\sigma_\theta}{r_0} ; \qquad (3.76)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_t r \sin\gamma) ; \qquad (3.77)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r}(\sigma_t \cos\gamma) + \frac{\sigma_t \cos\gamma - \sigma_\theta}{r} ; \qquad (3.76')$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_t \sin\gamma) - \frac{\sigma_t \sin\gamma}{r}. \qquad (3.77')$$

Очевидно,

$$\sin\gamma = -\frac{1}{1+e_t}\frac{\partial u}{\partial r}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{1+e_t}\left(1+\frac{\partial w}{\partial r}\right).$$

Зависимость напряжения σ_t от производных $\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial r}$ проявляется через зависимость σ_t от e_t. Поэтому члены со вторыми производными $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ в правой части уравнений (3.76′), (3.77′), определяющие вид их характеристик, таковы:

$$\cos\gamma \frac{\partial \sigma_t}{\partial e_t}\frac{\partial e_t}{\partial r} + \sigma_t \frac{\partial \cos\gamma}{\partial r}; \quad \sin\gamma \frac{\partial \sigma_t}{\partial e_t}\frac{\partial e_t}{\partial r} + \sigma_t \frac{\partial \sin\gamma}{\partial r}.$$

Те же члены определяют вид уравнения характеристик продольно-поперечного движения нити, если σ_t заменить на T, e_t на e, $\frac{\partial \sigma_t}{\partial e_t}$ на $\frac{dT}{de}$. Следовательно, характеристики продольно-поперечного движения мембраны имеют вид

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \sigma_t}{\partial e_t}}; \quad \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{\sigma_t}{\rho(1+e_t)}},$$

причем первые определяют распространение продольных волн; вторые – поперечных.

Если ввести, в соответствии с [3,7] тангенциальную и нормальную составляющие скорости частиц мембраны v_τ и v_n, определяемые по формулам

$$v_\tau = \frac{\partial w}{\partial t}\cos\gamma - \frac{\partial u}{\partial t}\sin\gamma; \quad v_n = -\frac{\partial w}{\partial t}\sin\gamma - \frac{\partial u}{\partial t}\cos\gamma,$$

то из (3.76′), (3.77′), с использованием выражений для e_t и e_θ можно получить

$$\rho_0\left(\frac{\partial v_\tau}{\partial t} - v_n\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) = \frac{\partial \sigma_t}{\partial r} + \frac{\sigma_t - \sigma_\theta\cos\gamma}{r}; \qquad (3.78)$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + v_n\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) = \sigma_t\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\sigma_\theta}{r}\sin\gamma; \qquad (3.79)$$

$$\frac{\partial v_\tau}{\partial r} - v_n \frac{\partial \gamma}{\partial r} = \frac{\partial e_t}{\partial t}; \quad \frac{\partial v_n}{\partial r} + v_\tau \frac{\partial \gamma}{\partial r} = (1+e_t)\frac{\partial \gamma}{\partial t}; \quad \frac{\partial e_\theta}{\partial t} = \frac{1}{2}(v_\tau \cos\gamma - v_n \sin\gamma). \tag{3.80}$$

Решение поставленной задачи о точечном ударе в предположении отсутствия кольцевых напряжений ($\sigma_\theta = 0$) было дано в [13]. Полученное при этом решение в ряде случаев приводит к мнимой скорости удара, что подтверждает необходимость учета кольцевых напряжений. В [14] было дано приближенное решение данной задачи без каких-либо ограничений, накладываемых на величины σ_t и σ_θ, причем было показано, что ни при каких скоростях удара пренебрегать кольцевыми напряжениями нельзя. Однако исходная система уравнений, принятая в [14], содержала неточности, исправленные ниже.

Очевидно, рассматриваемая задача является автомодельной, все неизвестные функции которой зависят только от переменной $z = r/(a_0 t)$, где a_0 – характерная скорость звука, определяемая ниже.

Вводя функции $X(z)$ и $Y(z)$, выражаемые формулами

$$X(z) = (w+r)/(a_0 t); \quad Y(z) = u/(a_0 t),$$

уравнения (3.76′) и (3.77′) приведем к виду:

$$\rho_0 a_0^2 z^2 X'' = \frac{1}{z}\sigma_t \cos\gamma + \frac{d}{dz}(\sigma_t \cos\gamma) - \frac{\sigma_\theta}{z}; \tag{3.81}$$

$$\rho_0 a_0^2 z^2 Y'' = -\frac{\sigma_t \sin\gamma}{z} - \frac{d}{dz}(\sigma_t \sin\gamma), \tag{3.82}$$

причем

$$\sin\gamma = -\frac{Y'}{\sqrt{X'^2 + Y'^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{X'}{\sqrt{X'^2 + Y'^2}},$$

$$e_t = \sqrt{X'^2 + Y'^2} - 1; \quad e_\theta = X/z - 1.$$

Подставив значения $\sin\gamma$ и $\cos\gamma$ в уравнения (3.81) и (3.82), получим:

$$\rho_0 a_0^2 z^2 X'' = \frac{X'\sigma_t}{z\sqrt{X'^2 + Y'^2}} + \frac{d}{dz}\left(\frac{\sigma_t X'}{\sqrt{X'^2 + Y'^2}}\right) - \frac{\sigma_\theta}{z};$$

$$\rho_0 a_0^2 z^2 Y'' = \frac{Y'\sigma_t}{z\sqrt{X'^2 + Y'^2}} + \frac{d}{dz}\left(\frac{\sigma_t Y'}{\sqrt{X'^2 + Y'^2}}\right)$$

или

$$\rho_0 a_0^2 z^2 X'' = \frac{X'\sigma_t}{z\sqrt{X'^2+Y'^2}} + X'\frac{d}{dz}\left(\frac{\sigma_t}{\sqrt{X'^2+Y'^2}}\right) + \frac{X''\sigma_t}{\sqrt{X'^2+Y'^2}} - \frac{\sigma_\theta}{z}; \tag{3.81′}$$

$$\rho_0 a_0^2 z^2 Y'' = \frac{Y'\sigma_t}{z\sqrt{X'^2+Y'^2}} + Y'\frac{d}{dz}\left(\frac{\sigma_t}{\sqrt{X'^2+Y'^2}}\right) + Y''\frac{\sigma_t}{\sqrt{X'^2+Y'^2}}. \tag{3.82′}$$

Так как σ_t и σ_θ зависят только от X/z и $R=\sqrt{X'^2+Y'^2}$, целесообразно в последних уравнениях перейти от функций X и Y к функциям X и R. С этой целью умножим первое уравнение на X', второе на Y' и сложим. Тогда

$$\rho_0 a_0^2 z^3 \frac{dR}{dz} = \sigma_t + z\frac{d\sigma_t}{dz} - \frac{\sigma_\theta X'}{R}. \tag{3.83}$$

В дальнейшем вместо уравнений (3.81′) и (3.82′) будем исследовать уравнения (3.81′) и (3.83). Ограничимся рассмотрением случая линейной зависимости между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}(e_t+\nu e_\theta) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(R+\frac{\nu X}{z}-1-\nu\right);$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(e_\theta+\nu e_t) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{X}{z}+\nu R-1-\nu\right).$$

Тогда уравнения (3.81′) и (3.83) при $a_0^2 = E/\left[\rho_0(1-\nu^2)\right]$ запишутся так:

$$zX'' = \frac{\nu X'^2}{Rz} - \frac{\nu XX'}{zR^2}\frac{dR}{dz} + \frac{(\nu+1)X'}{R}\frac{dR}{dz} + X'' +$$

$$+\frac{\nu XX''}{Rz} - \frac{(1+\nu)X''}{R} - \frac{X''}{z^2} - \frac{\nu R}{z} - \frac{1+\nu}{z} + \frac{X'}{z} - \frac{(1+\nu)X'}{zR};$$

$$z^3\frac{dR}{dz} = R + z\frac{dR}{dz} - \frac{XX'}{zR} + (1+\nu)\left(\frac{X'}{R}-1\right).$$

Анализ уравнений (3.81), (3.83) в окрестности точки $z = 0$, в работе [3, 9], показывает, что попытка найти при этом связь типа $Y' = bX'$; $b = \text{const}$; $b < 0$, приводит к $b = -\infty$, т.е. невозможно обеспечить точечный удар заостренным телом сколь угодно малого угла раствора конуса. При этом деформации и напряжения в точке удара неограниченно растут.

Следует отметить, что в [3, 9] найдено решение уравнений (3.81) – (3.82), имеющее вид $\gamma = 0$; $e_\theta = e_t = \alpha$; $\alpha > 0$, причем скорость точки $r = 0$ в данном случае может отличаться от v_0. Это решение будет существовать в некоторой области изменения $0 \le z \le z_0$ и может перейти в другое, если $z = z_0$ – фронт поперечной волны. Его нельзя использовать для построения общего решения о точечном ударе, хотя, как будет видно из дальнейшего, оно имеет смысл при ударе по мембране тупым конусом.

2. *Прямой удар телом вращения по гибкой мембране.* Приводимое ниже решение дано в [15]. Предполагается, что:

а) часть мембраны, частицы которой приобретают после удара поперечную составляющую скорости, облегает движущееся тело;

б) скорость распространения цилиндрической волны сильного разрыва не превышает скорости распространения упругой цилиндрической волны.

Следовательно, предполагается, что существует две области: чисто радиального ($\gamma \equiv 0$) и поперечно-радиального движения, которые в дальнейшем будем называть соответственно областями радиального и меридионального движения и отмечать характеристики в них индексами 1 и 2. Распространение волн в области радиального движения, как следует из (3.76′), описывается уравнением

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{t1}}{\partial r} + \frac{\sigma_{t1} - \sigma_{\theta 1}}{r} \tag{3.84}$$

(при постоянстве начальной толщины мембраны), которое при линейной зависимости напряжения от деформаций принимает вид

$$\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2},$$

где $a_0 = \sqrt{E / \left[\rho_0 (1 - \nu^2)\right]}$.

При нелинейной зависимости напряжений σ_{t1} и $\sigma_{\theta 1}$ от деформаций $e_{t1} = \partial w/\partial r$, $e_{\theta 1} = w/r_0$ уравнение (3.94) можно записать так:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{\rho_0 r}\left[(e_{r1} - e_{\theta 1})\frac{\partial \sigma_{t1}}{\partial e_{\theta 1}} + \sigma_{t1} - \sigma_{\theta 1}\right],$$

где $a_1 = \sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \sigma_{t1}}{\partial e_{t1}}}$ – местная скорость звука.

Для вывода уравнения меридионального движения мембраны наряду с системой координат θ, u (u – расстояние элемента от вершины ударяющего тела вращения, измеряемое вдоль его образующей) введем еще полярную систему координат $Oyx\theta$. За начало этой системы возьмем вершину ударяющего тела, ось Oy направим по оси тела противоположно движению, ось Ox – перпендикулярно к ней, причем так, что в обеих системах координат углы θ одинаковы.

Очевидно, меридиональная и кольцевая деформации элемента мембраны соответственно будут:

$$e_{r2} = \frac{\partial u}{\partial r} - 1; \quad e_{\theta 2} = \frac{x(u)}{r} - 1, \tag{3.85}$$

причем $x = x(u)$, $y = y(u)$.

Рассматривая равновесие элемента мембраны под действием меридиональных кольцевых напряжений и сил инерции, нетрудно получить следующее уравнение движения:

$$\rho_0 r \delta_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r}(r\delta_0 \sigma_{r2}) - \delta_0 \sigma_{\theta 2}\cos\theta, \tag{3.86}$$

где θ – угол между касательной к меридиональному сечению мембраны в точке x, y и направлением оси Ox; напряжения σ_{r2} и $\sigma_{\theta 2}$ отнесены к первоначальным площадям граней их действия. При постоянстве первоначальной толщины мембраны уравнение (3.86) принимает вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{r2}}{\partial r} + \frac{\sigma_{r2} - \sigma_{\theta 2}\cos\theta}{r}. \tag{3.87}$$

При линейной зависимости напряжений $\sigma_{r2}, \sigma_{\theta 2}$ от деформаций $e_{r2}, e_{\theta 2}$ уравнение (3.87) можно записать так:

$$\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{x}{r^2}\cos\theta-\frac{(1+\nu)(1-\cos\theta)}{r}. \qquad (3.88)$$

Здесь учтено, что $\partial x/\partial u=\cos\theta$.

В уравнении (3.88) величины x и $\cos v$ являются известными (для данного профиля тела) функциями u. Для случая удара, например, тупым конусом уравнение (3.88) примет вид

$$\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\cos^2\theta-\frac{(1+\nu)(1-\cos\theta)}{r}; \qquad (3.89)$$

$$\theta=\text{const}.$$

Начальные и граничные условия для рассматриваемой задачи следующие:

1) $w_t = w_r = 0$ при $t=0$, $0\le r\le\infty$;

2) на волне сильного разрыва $r=r^*(t)$, очевидно, имеют место те же условия, которые были выведены в предыдущей главе при рассмотрении перехода элемента нити через точку излома:

$$\frac{b-w_t}{1+e_{r1}}=\frac{b/\cos\theta-u_t}{1+e_{r2}}; \qquad (3.90)$$

$$v_0=b\,\mathrm{tg}\,\theta; \qquad (3.91)$$

$$\rho_1(b-w_t)(u_t-w_t\cos\theta-v_0\sin\theta)=\sigma_{r2}\cos\theta-\sigma_{r2}; \qquad (3.92)$$

$$\rho_1(b-w_t)(v_0\cos\theta-w_t\sin\theta)=\bar{\sigma}_{r1}\sin\theta-Q_n/\delta_1. \qquad (3.93)$$

Здесь Q_n – сосредоточенная нормальная ударная сила воздействия мембраны на тело, отнесенная к единице длины; b – скорость волны сильного разрыва; черточками сверху отмечены истинные напряжения; кроме того, $\int bdt=r+w=x(u)$ при $r=r^*$ и $u=0$ при $r=0$.

Исходя из условия 1 можно показать, что вплоть до момента $t=r/a_0$ данный элемент мембраны находится в покое. Тем же способом, который применялся в предыдущих параграфах, можно показать, что на звуковой волне $r=a_0t$ функции w_r и w_t изменяются следующим образом:

$$w_r=c/\sqrt{r},\ w_t=-ca_0/\sqrt{r},$$

где c – произвольная постоянная интеграции.

После того, как начальные и граничные условия для функций, удовлетворяющих уравнениям (3.84) и (3.87), сформулированы, переходим к решению поставленной задачи. Отметим,

что математическая задача об ударе телом произвольной формы по гибкой мембране не сводится к известным краевым задачам математической физики. Вначале рассмотрим удар по гибкой мембране тупым конусом. Очевидно, в этом случае задача будет автомодельна, так как деформации и напряжения могут зависеть только от комбинации $\xi = r^2 / s^2$, $s = a_0 t$.

В переменных r, s исходные уравнения и краевые условия примут вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2}; \tag{3.94}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\lambda^2 u}{r^2} - \frac{(1+\nu)(1-\lambda)}{r} \quad (\lambda = \cos\theta); \tag{3.95}$$

$$w = 0 \text{ при } s = r, u = 0 \text{ при } r = 0.$$

Соотношения (3.92) и (3.93) полностью сохраняются.

Для конуса, очевидно, $\lambda = \text{const}$, и уравнение (3.94) является частным случаем (3.95) при $\lambda = 1$. Полагая $u = r^m \varphi(\xi)$, преобразуем (3.95) к виду

$$4\xi^2(1-\xi)\varphi'' + 2\xi\left[2(m+1) - (1+2m)\xi\right]\varphi' +$$
$$+\left[m^2 - \lambda^2 - m(m-1)\xi\right]\varphi = (1+\nu)(1-\lambda)\xi^{\frac{1-m}{2}}.$$

Переходя к новой функции $\phi(\xi)$ по формуле $\varphi(\xi) = \xi^{\frac{\lambda-m}{2}}\phi(\xi)$, предыдущее уравнение приводим к виду

$$\xi(1-\xi)\phi'' + \left[1 - \lambda - \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)\xi\right]\phi' - \frac{\lambda(\lambda-1)}{4}\phi = \frac{(1+\nu)(1-\lambda)}{4}\xi^{-\frac{1+\lambda}{2}}. \tag{3.96}$$

Частным решением (3.106) является

$$\bar{\phi} = \frac{1+\nu}{1+\lambda}\xi^{\frac{1-\lambda}{2}}.$$

Общим решением однородного уравнения (3.96), как известно, будет

$$\phi = c_1 F\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, 1+\lambda, \xi\right) + c_2 \xi^{-\lambda} F\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda+1}{2}, 1-\lambda, \xi\right), \tag{3.97}$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ – гипергеометрический ряд

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots,$$

который сходится при $|x|<1$ для всех конечных значений α и β и всех конечных значений γ за исключением нуля и отрицательных целых чисел. Если α, β, γ вещественны, то ряд сходится при $x=1$ и $\gamma>\alpha+\beta$ и расходится при $\gamma\le\alpha+\beta$. Следовательно, для рассматриваемого случая $0\le\xi\le1$ оба ряда (3.97) сходятся.

Общим решением уравнения (3.96) является

$$\phi=c_1F\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda-1}{2},1+\lambda,\xi\right)+c_2\xi^{-1}F\left(-\frac{\lambda}{2},-\frac{\lambda+1}{2},1-\lambda,\xi\right)+\frac{1+\nu}{1+\lambda}\xi^{\frac{1-\lambda}{2}}. \tag{3.98}$$

В силу граничного условия ($u=0$ при $r=0$) $c_2=0$, т. е.

$$\phi=c_1F\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda-1}{2},\lambda+1,\xi\right)+\frac{1+\nu}{1+\lambda}\xi^{\frac{1-\lambda}{2}},$$

при этом

$$u=s\left(c_1F_1+\frac{1+\nu}{1+\lambda}z^{1-\lambda}\right)z^{\lambda}=s\left(c_1\tau_1+\frac{1+\nu}{1+\lambda}z\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1+\nu}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{2}c_1\left(2F_1-\frac{1-\lambda}{1+\lambda}z^2F_2\right)z^{\lambda-1}=c_1\tau_2+\frac{1+\nu}{1+\lambda};$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{1-\lambda}{2}c_1z^{\lambda}\left(2F_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}z^2F_2\right)=c_1\tau_3,$$

где

$$F_1=F\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda-1}{2},\lambda+1,z^2\right);\quad F_2=F\left(\frac{\lambda+1}{2},\frac{\lambda+2}{2},\lambda+2,z^2\right).$$

Для решения уравнения радиального движения достаточно заменить u на w и в (3.98) положить $\lambda=1$. Тогда

$$\phi=\overline{c}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{\xi}}-\frac{\sqrt{1-\xi}}{\xi}\right)+\overline{c}_1, \tag{3.99}$$

а из граничного условия $w=0$ при $s=r$ следует, что $\overline{c}_1=0$. Таким образом, окончательно имеем:

$$w=\overline{c}r\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}-\frac{\sqrt{1-z^2}}{z^2}\right)=-\overline{c}s\omega_1;$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\overline{c}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}+\frac{\sqrt{1-z^2}}{z^2}\right)=-\overline{c}\omega_2;\quad \frac{\partial w}{\partial s}=-2\overline{c}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}=-\overline{c}\omega_3.$$

Из этих формул видно, что $\dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{\partial w}{\partial s} = 0$ при $z = 1$, т. е. упругоцилиндрическая волна $r = s$ является волной слабого разрыва, на которой скорости и деформации не испытывают разрыва. На волне сильного разрыва имеем:

$$bt = r^* + w = r^* - \bar{c}s^*\omega_1^* = \lambda s^*\left(c_1\tau_1^* + \frac{1+\nu}{1+\lambda}z^*\right)$$

или

$$\bar{b} = z^* - \bar{c}\omega_1^* = \lambda\left(c_1\tau_1^* + \frac{1+\nu}{1+\lambda}z^*\right), \quad \bar{b} = b/a_0 .$$

Отсюда получаем:

$$c_1 = \frac{\bar{b} - \dfrac{1+\nu}{1+\lambda}\lambda z^*}{\lambda\tau_1^*}; \quad \bar{c} = \frac{z^* - \bar{b}}{\omega_1^*}. \tag{3.100}$$

Если ввести кольцевую деформацию $e_\theta^* = \bar{b}/z^* - 1$, остающуюся непрерывной на волне сильного разрыва, то формулы (3.100) примут вид:

$$c_1 = \frac{e_\theta^* - \dfrac{1-\nu\lambda}{1+\lambda}}{\lambda\tau_1^*}z^*; \quad \bar{c} = -\frac{e_\theta^* z^*}{\omega_1^*}. \tag{3.101}$$

Для исследования характера распространения волн нам потребуется исследовать поведение функций τ_i, ω_i (i = 1, 2, 3) в их интервале изменения. С этой целью исследуем гипергеометрические ряды F_1 и F_2. Функция F_2 и ее производные положительны, следовательно, в закрытом интервале [0, 1] она монотонно возрастает, в то время как $F_1(\xi)$ в этом интервале монотонно убывает ($F_1' = -F_2\lambda(1-\lambda)/[4(1+\lambda)] < 0$).

Известно [16], что $F_1(0) = F_2(0) = 1$; $F_1(1) = 2^\lambda/(1+\lambda)$; $F_2(1) = 2^{\lambda+1}$. В силу изложенного выше

$$2^\lambda/(1+\lambda) \le F_1(\xi) \le 1; \quad 1 \le F_2(\xi) \le 2^{\lambda+1},$$

или, учитывая характер изменения функций $2^\lambda/(1+\lambda)$ и $2^{\lambda+1}$,

$$e\ln\sqrt{2} \le F_1(\xi) \le 1; \quad 1 \le F_1(\xi) \le 4 .$$

Значению $e\ln\sqrt{2} = 0{,}9422$ соответствует $\lambda\cos\theta = 0{,}4428$, т. е. $\theta = 63°43'$.

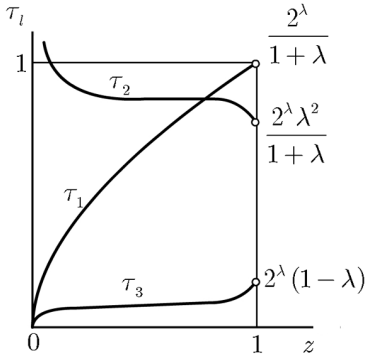


Рис. 3.12

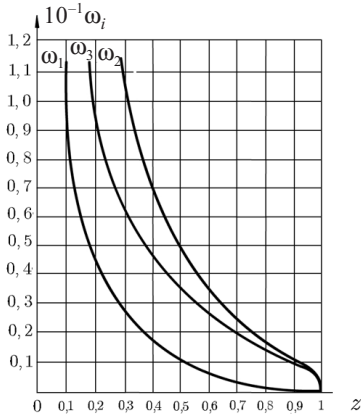


Рис. 3.13

Используя очевидные соотношения $\tau_1 - \tau_3 = z\tau_2$; $\tau_1' = \tau_2$ и их следствие $\tau_3' + z\tau_2' = 0$, а также тот факт, что τ_2' в интервале (0, 1) является отрицательной функцией, можно показать, что τ_1 и τ_3 являются возрастающими, а τ_2 – убывающей функциями в этом интервале. Примерные графики данных функций изображены на рис. 3.12.

Аналогичным образом с использованием тождеств $\omega_3 - \omega_1 = z\omega_2$; $\omega_1' = -\omega_2$, $\omega_3' = z\omega_2'$ и условий $\omega_1(1) = \omega_2(1) = \omega_3(1) = 0$; $\omega_2'(z) < 0$ можно показать, что ω_1, ω_2, ω_3 являются положительными убывающими функциями z. Графики этих функций приведены на рис. 3.13.

Используя приведенные выше результаты, формулы для смещения, деформации, скорости и напряжения частиц мембраны запишем так:

- в области радиального движения

$$w = -\bar{c}s\omega_1; \quad w_t = -\bar{c}a_0\omega_3; \quad e_{r1} = \bar{c}\omega_2; \quad e_{\theta 1} = -\frac{\bar{c}\omega_1}{z};$$

$$\bar{\sigma}_{r1} = \rho_0 a_0^2 \bar{c}(\omega_2 - \nu\omega_1 / z); \quad \sigma_{\theta 1} = \rho_0 a_0^2 \bar{c}(\nu\omega_2 - \omega_1 / z);$$

- в области меридионального движения

$$u = s\left(c_1\tau_1 + \frac{1+\nu}{1+\lambda}z\right); \quad u_t = c_1 a_0 \tau_3; \quad e_{r2} = c_1\tau_2 - \frac{\lambda - \nu}{1+\lambda};$$

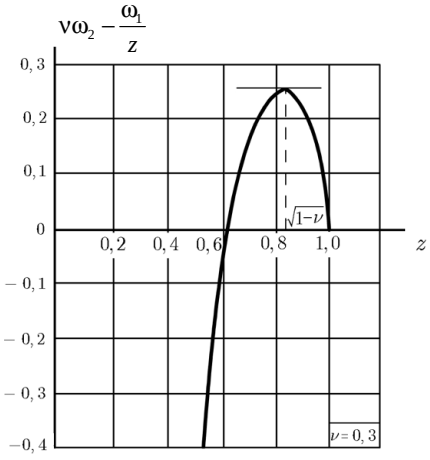


Рис. 3.14

$$e_{\theta 2} = c_1 \lambda \frac{\tau_1}{z} - \frac{1-\nu\lambda}{1+\lambda}\ ;\ \ \bar{\sigma}_{r2} = \rho_0 a_0^2 \left[c_1 \left(\tau_2 + \nu\lambda \frac{\tau_1}{z} \right) - \frac{\lambda(1-\nu^2)}{1+\lambda} \right]; \quad (3.102)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta 2} = \rho_0 a_0^2 \left[c_1 \left(\lambda \frac{\tau_1}{z} + \nu\tau_2 \right) - \frac{1-\nu^2}{1+\lambda} \right].$$

Функции τ_1 / z; $\tau_2 + \nu\lambda\tau_1 / z$; $\lambda\tau_1 / z + \nu\tau_2$; w_1 / z; $\omega_2 - \nu\omega_1 / z$ в интервале (0, 1) являются положительными убывающими функциями z неограниченно возрастающими при $z \to 0$. При $z = 1$ первые три из них принимают значения $2^\lambda / (1+\lambda)$, $\lambda(\lambda+\nu) 2^\lambda / (1+\lambda)$, $\lambda(1+\lambda\nu) 2^\lambda / (1+\lambda)$ соответственно, две последние обращаются в нуль. Примерное поведение функции $\nu\omega_2 - \omega_1 / z$ изображено на графике рис. 3.14.

Определим z^* (или e_θ^*) из соотношения (3.92). Последнее соотношение можно представить в виде

$$\rho_1 (b - w_t) \left(u_t - \lambda w_t - \frac{1-\lambda^2}{\lambda} b \right) = \lambda \bar{\sigma}_{r1} - \bar{\sigma}_{r2}$$

или

$$\left[\bar{b}(1-\bar{\omega}^*) + \omega^* z^* \right] \left[\frac{\tau^* - 1 + \lambda^2 (1-\bar{\omega}^*)}{\lambda} \bar{b} + \left(\lambda\bar{\omega}^* - \frac{1+\nu}{1+\lambda} \bar{\tau}^* \right) z^* \right] =$$

$$=\left(\lambda\omega^*+\frac{1+\nu}{1+\lambda}\tau^*\right)z^*-\left[\lambda\omega^*+\frac{\tau^*}{\lambda}+\frac{\nu(1-\lambda)}{z^*}\right]\bar{b}+\frac{\lambda(1-\lambda\nu)}{1+\lambda}. \quad (3.103)$$

Здесь положено: $\rho_1=\rho_0$; $\omega^*=\omega_2/\omega_1^*$; $\bar{\omega}^*=\omega_3/\omega_1^*$; $\tau^*=\tau_2/\tau_1^*$; $\bar{\tau}^*=\tau_3^*/\tau_1^*$.

Непосредственно решить уравнение (3.103) относительно z^* не представляется возможным, но оно легко разрешается относительно $\bar{b}$:

$$M\bar{b}^2+N\bar{b}+L=0; \quad b=-\frac{N}{2M}\pm\sqrt{\frac{N^2}{4M^2}-\frac{L}{M}}; \quad (3.104)$$

$$M=\frac{1}{\lambda}(1-\bar{\omega}^*)\left[\bar{\tau}^*-1+\lambda^2(1-\bar{w}^*)\right];$$

$$N=(1-\bar{\omega}^*)\left(\lambda\bar{\omega}^*-\frac{1+\nu}{1+\lambda}\bar{\tau}^*\right)z^*+\frac{\bar{\omega}^*}{\lambda}\left[\bar{\tau}^*-1+\lambda^2(1-\bar{\omega}^*)\right]z^*+\lambda\omega+\frac{\tau^*}{\lambda}+\frac{\nu(1-\lambda)}{z^*};$$

$$L=\bar{\omega}^*\left(\lambda\bar{\omega}^*-\frac{1+\nu}{1+\lambda}\bar{\tau}^*\right)(z^*)^2-\left(\lambda\omega^*+\frac{1+\nu}{1+\lambda}\tau^*\right)z^*-\frac{\lambda(1-\lambda\nu)}{1+\lambda}.$$

Для существования положительного корня $\bar{b}(z^*)$ этого уравнения ввиду положительности коэффициента M необходимо выполнение условия $L<0$ или

$$(1-\bar{\omega}^*(z^*)^2)\left(\frac{1+\nu}{1+\lambda}\bar{\tau}^*-\lambda\bar{\omega}^*\right)<(1+\nu)(1-\lambda).$$

Сосредоточенная сила Q определяется из равенства (3.93), которому можно придать следующий вид (при $\rho_1=\rho_0$):

$$Q=\rho_0 a_0^2\delta_1\left[(\bar{b}-z^*)\left(\frac{\nu}{z^*}-\omega^*\right)-(\bar{b}\omega^*-\bar{\omega}^*)^2 z^*\right]\sin\theta. \quad (3.104)$$

Отсюда получаем условие отрыва мембраны от поверхности ударяющего конуса

$$(z^*-\bar{b})\left(\omega^*-\frac{\nu}{z^*}\right)-z^*(\bar{b}\omega^*-\bar{\omega}^*)^2\le 0, \quad (3.105)$$

определяющее для $\theta=\text{const}$ диапазон изменения v_0, в котором возможно существование безотрывного движения мембраны.

В работе [16] предложены также численные методы расчета задачи при ударе по гибкой мембране выпуклым телом произвольной геометрии, имеющим в вершине конусообразный уча-

сток. В окрестности вершины за исходное решение принимается решение рассмотренное выше для случая конуса; характеристическая система уравнений использована для применения метода конечных разностей.

Предложенная в [15] схема фактически предполагает, что скорость фронта излома больше скорости поперечной волны $\sqrt{\sigma_+ / \rho_0 (ue_t)}$. Очевидно, более общим случаем является схема, предложенная в [25] и допускающая существование области поперечного движения $z^{**} \le z \le z^*$, предшествующей попаданию частиц мембраны на поверхность тела (область $z^* \le z \le 1$ соответствует чисто радиальному движению, где по-прежнему справедливо решение (3.99)). В качестве условий в точке z^* в [25] ставились соотношения на поперечной волне типа (3.90)–(3.93), где $Q_1 = Q_2 = 0$, и требования непрерывности функций x, y, дающие, в частности, $x_1 = x_2$, $y_1 = 0$, $x_2 = \beta = b / a_0$, а также кинематические соотношения $\sin\gamma = -y' / R_1$ и $\cos\gamma = -x' / R_1$.

Аналогичные соотношения имеют место и в точке излома мембраны на теле z^{**}. Было показано, что в определенных случаях на фронте поперечных волн, где $\sigma_0 = 0$, $\gamma = 0$, т.е. имеем волну слабого разрыва. Приведем доказательство этого факта, заимствованного из [24]. В автомодельном случае уравнения (3.78)–(3.80) для безразмерных функций v_τ^0, v_n^0, σ_τ^0, σ_θ^0 (отнесенных соответственно к a_0 и $\rho_0 a_0^2$) принимают следующий вид:

$$-z(\dot{v}_\tau^0 - \gamma' v_n^0) = \dot{\sigma}_z^0 + (\sigma_\tau^0 - \sigma_\theta^0 \cos\gamma) ; \tag{3.106}$$

$$-z(v_n^0 + \gamma' v_\tau^0) = \sigma_\theta^0 \sin\gamma / z ; \tag{3.107}$$

$$\dot{v}_\tau^0 - \gamma' v_n^0 = -z\dot{e}_t ; \tag{3.108}$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = -\frac{1}{z^2}(v_\tau^0 \cos\gamma - v_n^0 \sin\gamma) ; \quad \dot{v}_n^0 + \gamma' v_\tau^0 = -(1+et)\gamma .$$

Подставляя в два первых уравнения выражения из (3.108), получаем:

$$z^2 \frac{de_t}{dz} = \frac{d\sigma_t^0}{dz} + \frac{\sigma_t^0 - \cos\gamma\,\sigma_\theta^0}{z} ;$$

$$\left(z^2 - \frac{\sigma_t^0}{1+e_t} \right) \frac{d\gamma}{dz} = \frac{\sigma_\theta^0}{1+e_t} \frac{\sin\gamma}{z} .$$

Из последнего уравнения, учитывая, что на фронте поперечной волны $z^2 - \sigma_t^0/(1+e_t) = 0$, следует, что при $\sigma_\theta^0 \neq 0$ имеем $\gamma = 0$.

При $z > z^* = \sqrt{\sigma_t^0/(1+e_t)}$ движение частиц мембраны чисто радиально, поэтому в соответствии с приведенными выше формулами

$$w = \frac{\omega}{a_0 t} = z + c_1 z\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z} - \frac{\sqrt{1-z^2}}{z^2}\right).$$

Вычисляя $e_t = \dfrac{dw}{dz} - 1$; $e_\theta = w/z - 1$, легко получить [24] явные выражения для σ_t, σ_θ, из которых видно, что $\sigma_\theta < 0$ при $z < \bar{z}$, где $\bar{z}$ – корень уравнения

$$(1+\nu)\ln\frac{1+\sqrt{1-\bar{z}^2}}{\bar{z}} - (1-\nu)\frac{\sqrt{1-\bar{z}^2}}{\bar{z}^2} = 0, \qquad (3.109)$$

зависящий только от коэффициента Пуассона. При $\nu = 0{,}38$; $0{,}42$; $0{,}45$; $0{,}48$ $\bar{z}$ соответственно равен 0,5612, 0,5253, 0,4992, 0,4734. Предположим вначале, что $z^* > \bar{z}$. Тогда $\sigma_\theta(z^*) > 0$, $\gamma(\bar{z}) = 0$ и в этой точке

$$e_t = c_1\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-z^{*2}}}{z^*} + \frac{\sqrt{1-z^{*2}}}{z^{*2}}\right); e_\theta = c_1\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-z^{*2}}}{z^*} - \frac{\sqrt{1-z^{*2}}}{z^{*2}}\right);$$

$$v_n^0 = 0;\ \sigma_t^0(z^*) = e_t + \nu e_\theta;\ \sigma_\theta^0 = e_\theta + \nu e_t;\ v_t^0 = -2c_1\frac{\sqrt{1-z^{*2}}}{z^*}.$$

Так как $z^{*2} = \dfrac{\sigma_t^0}{1+e_t(z^*)}$, то

$$c_1 = \frac{(z^*)^2}{(1+\nu z^*)\ln\dfrac{1+\sqrt{1-z^{*2}}}{z^*} + (1-\nu-z^{*2})\dfrac{\sqrt{1-z^{*2}}}{z^{*2}}}.$$

Из соотношения (3.108) следует, что при $z \to z^*$, $\gamma \to 0$ ...

$$2z^*\left(z-\sqrt{\frac{\sigma_t^0}{1+e_t}}\right)\frac{d\gamma}{dz}\sim\frac{\sigma_\theta^0}{1+e_t}\frac{\gamma}{z^*};$$

$$\ln|\gamma|\sim\frac{\sigma_\theta^0}{2\sigma_t^0}\ln\left|z-\sqrt{\frac{\sigma_t^0}{1+e_t}}\right|+\ln C_2;\ |\gamma|\sim C_2\left|z-\sqrt{\frac{\sigma_t^0}{1+e_t}}\right|^{\frac{\sigma_\theta^0}{2\sigma_t^0}}, \tag{3.110}$$

При заданных значениях z_* и C_2 определение $v_\tau^0(z)$, $\gamma(z)$, $e_t(z)$, $e_\theta(z)$ сводится к задаче Коши для системы уравнений (3.106)–(3.108). Вычисления, проделанные автором [24] для достаточно большой области исходных данных, показали, что $z_*<\overline{z}$. Но тогда в области $z_*\le z\le\overline{z}$ было бы $\sigma_\theta<0$, т. е. кольцевое сжатие мембраны, которое приводит, по мнению авторов [26], к появлению морщин и постановке нового условия $\sigma_\theta=0$ (как и в случае сверхзвуковых скоростей удара тупым телом по нити). При этом формула для e_θ не верна. Вместо нее из закона Гука получим $e_\theta=-\nu e_t$, $\sigma_t=Ee_t$, а из уравнения движения –

$$W_1=z+c_2\left(\sqrt{1-\nu^2-z^2}-\sqrt{1-\nu^2}\ \ln\frac{\sqrt{1-z^2}-\sqrt{1-\nu^2-z^2}}{z}\right)+c_3.$$

Очевидно, в точке $z=\overline{z}$, где e_θ меняет знак, e_t и W_1 непрерывны. Следовательно,

$$c_1=c_2\frac{1+\nu}{2}\overline{z}\sqrt{\frac{1-\nu^2-\overline{z}^2}{1-\overline{z}^2}};$$

$$c_3=c_2\left(\sqrt{1-\nu^2}\ \ln\frac{\sqrt{1-\nu^2}-\sqrt{1-\nu^2-\overline{z}^2}}{\overline{z}}-(1+\nu)\sqrt{1-\nu^2-\overline{z}^2}\right).$$

Вблизи точки $z=z^*$ при $z<z^*$, согласно расчетам авторов [27], $\sigma_\theta<0$. Полагая, поэтому здесь $\sigma_\theta=0$, получим $\gamma=\text{const}$,

$$\frac{\omega}{a_0t}=\cos\gamma\left[z+c_2\sqrt{1-\nu^2-z^2}-\sqrt{1-\nu^2}\ \ln\frac{\sqrt{1-\nu^2}+\sqrt{1-\nu^2-z^2}}{z}\right]+c_4;$$

$$\frac{u}{a_0t}=\left(-\frac{\omega}{a_0t}+\frac{b}{a_0}\right)\operatorname{tg}\gamma.$$

Из условия непрерывности перемещений на фронте поперечных волн имеем:

$$c_4 = c_3 + (1-\cos\gamma)\left[z^* + c_2\sqrt{1-\nu^2 - z^{*2}} - \sqrt{1-\nu^2}\ln\frac{\sqrt{1-\nu^2}+\sqrt{1-\nu^2-z^{*2}}}{z^*}\right],$$

так как

$$z^{*2} = \frac{\sigma_t^0}{1+e_t} = (1-\nu^2)\left(1-\frac{1}{1+e_t}\right); \quad e_t(z^*) = c_2\frac{\sqrt{1-\nu^2-z^{*2}}}{z^*},$$

то

$$c_2 = \left(\frac{z^*}{\sqrt{1-\nu^2}\sqrt{1-\nu^2-z^{*2}}}\right)^3.$$

Так как $\sigma_\theta(z^*) = 0$, то фронт $z = z_*$ является волной сильного разрыва. На нем $bt = \omega$; $b = a_0 z^*(1+e_t)\cos\gamma$, откуда, получим связь γ с z_*:

$$\left(z^* + c_2\sqrt{1-\nu^2+z^{*2}}\right)\cos\gamma =$$

$$= z^{*2} + c_2\left(\sqrt{1-\nu^2-z^{*2}} - \sqrt{1-\nu^2}\ln\frac{\sqrt{1-\nu^2}+\sqrt{1-\nu^2-z^{*2}}}{z^*}\right) + c_3. \quad (3.111)$$

Так как значение $\overline{z}$ известно, то постоянные c_1, c_2, c_3, c_4, γ являются известными функциями z_*. Для некоторой точки $z \le z^{**}$ при $z^{**} \le z^*$ имеем $e_\theta + \nu e_t > 0$ и приведенное выше решение теряет силу, поскольку здесь надо воспользоваться исходной системой уравнений при $\sigma_\theta \ne 0$. Из (3.110) имеем

$$f(z) = \frac{c_4}{z^{**}} + \cos\gamma +$$

$$+\frac{c_2}{z^{**}}\left[\left(1+\nu^2\right)\sqrt{1-\nu^2-z^{**2}} - \sqrt{1-\nu^2}\ln\frac{\sqrt{1-\nu^2}-\sqrt{1-\nu^2-z^{**2}}}{z^{**}}\right] - 1 = 0. \quad (3.112)$$

Поскольку $f(z^*) < 0$, $f'(z^*) > 0$, то решение $f(z^{**}) = 0$ существует и оно единственное. В области $z < z^{**}$ уравнения (3.106)–(3.108) интегрируются численно. При $r \to 0$, т. е. при $z \to 0$ из уравнения (3.108) следует, что $e_r \to \infty$, а e_θ ограниче-

на, так как $\omega < r$. Следовательно, при $z \to 0$ $\sigma_t^0 \sim e_t, \sigma_\theta^0 \sim \nu e_t$. Тогда из уравнения (3.110) $(z^2-1)\dfrac{d\gamma}{dz} \sim \gamma \dfrac{\sin\gamma}{z}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} \sim c_5 \left(\dfrac{1-z^2}{z^2}\right)^{\frac{\nu}{2}}$, $\gamma(z \to 0) \to \pi$. Значит, каким бы малым ни был бы угол полураствора конуса α, контакт его с мембраной произойдет в некоторой области, что уже отмечалось выше. Предположение о постоянстве в этой области компонент скоростей и деформаций противоречит уравнениям движения, из которых следует, что частицы мембраны двигаются с ускорением. Поэтому в [24] предлагается воспользоваться приведенным выше решением, когда горизонтальная часть мембраны при $0 \le z \le z_k$ (z_k – положение фронта поперечной волны) с постоянной скоростью $v_1 > v_0$ движется вниз.

Вторым способом, позволяющим избавиться от бесконечных напряжений в точке удара, является рассмотренный в [27] мгновенный прокол мембраны.

В других случаях представленные решения удовлетворительно описывают процесс динамического деформирования мембран везде, за исключением окрестности точки удара.

§ 3.7. Некоторые задачи динамического деформирования при наличии течения пластического материала

Исследование работы тонкой круглой пластинки при динамической нагрузке является обобщением на осесимметрический случай соответствующих исследований для балки. В частности, при ударе тела с постоянной скоростью о неограниченную пластинку решение задачи оказывается автомодельным [17].

Жесткопластический анализ работы тонкой круглой пластинки под действием динамической нагрузки. Задача о динамическом деформировании тонкой круглой пластинки радиуса R и толщины $2h$ рассмотрена в [18, 19].

Предполагается, что до удара пластинка не деформирована и ее срединная поверхность совпадает с плоскостью r, φ цилиндрической системы координат, ось z которой направлена вниз. Поскольку нагрузка и условия опирания являются осесимметричными, то касательные напряжения $\tau_{r\varphi}$ и $\tau_{\varphi z}$ тождественно

равны нулю. Так как толщина пластинки много меньше ее радиуса, то вертикально направленное нормальное напряжение σ_z и касательное напряжение τ_{rz} можно считать малыми по сравнению с напряжениями изгиба σ_r и σ_φ. Тогда поле напряжений пластинки является двумерным с главными напряжениями σ_r и σ_φ. Эти напряжения создают главные изгибающие моменты

$$M_r = \int_{-h}^{h} \sigma_r z dz; \quad M_\varphi = \int_{-h}^{h} \sigma_\varphi z dz .$$

Касательные напряжения τ_{rz} создают перерезывающую силу

$$Q_r = \int_{-h}^{h} \tau_{rz} dz .$$

В дальнейшем принимается следующее правило знаков для моментов и перерезывающей силы: изгибающие моменты будут положительными, когда они вызывают растяжение в нижнем слое пластинки; перерезывающая сила, действующая в сечении $r = \text{const}$ со стороны больших значений r будет положительной, если она направлена вертикально вниз.

Из уравнений количества движения и момента количества движения в рассматриваемом случае получим:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rQ_r) + rp = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r ; \tag{3.113}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_r) - M_\varphi = rQ_r , \tag{3.114}$$

где p – интенсивность приложенной нагрузки; μ – масса, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности; w – прогиб.

Заметим, что хотя в уравнениях (3.113) и (3.114) перерезывающая сила Q_r принимается во внимание, тем не менее при определении условий пластичности соответствующими касательными напряжениями будем пренебрегать.

Если сосредоточенная сила в точке $r = 0$ отсутствует, то из (3.113) и (3.114) найдем:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_r) - M_\varphi = -\int_0^r \left(p - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) r dr . \tag{3.115}$$

Уравнение (3.115) не зависит от механических свойств материала пластинки.

Предположим теперь, что рассматриваемый идеально пластический материал подчиняется условию пластичности Треска (постоянство максимального касательного напряжения $\tau_{max} = \sigma_0/2$) и соответствующему закону течения.

Как известно, сочетания главных напряжений σ_r и σ_φ, вызывающих пластическое течение, изображаются точками шестиугольника *ABCDEF* (рис. 3.15). Точки *F* и *B* (*C* и *E*), например, отвечают одноосному растяжению (сжатию) в радиальном или окружном направлении соответственно, причем предел текучести равен σ_0.

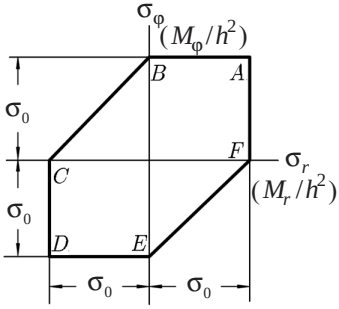


Рис. 3.15

При изгибе элемента пластически жесткой пластинки условие пластичности должно выполняться в каждом горизонтальном слое. Кроме того, должно оставаться постоянным отношение главных скоростей деформаций $e_r : e_\varphi$ вдоль каждой нормали. Оба указанных условия будут выполнены, если для всех положительных значений *z* вдоль данной нормали поле напряжения будет представлено одной точкой шестиугольника текучести, а для отрицательных значений *z* – диаметрально противоположной точкой. Тем самым возникает разрыв напряжений на срединной поверхности, что является следствием применения жесткопластической теории.

Главные изгибающие моменты, соответствующие установленному распределению напряжений σ_r и σ_φ, равны:

$$M_r = \sigma_r h^2; \quad M_\varphi = \sigma_\varphi h^2,$$

следовательно, шестиугольник на рис. 3.15 представляет также условие текучести для изгибающих моментов, если по осям координат откладывать значения M_r/h^2 и M_φ/h^2.

Скорости кривизны $k_r = -w_{r,r,t}$; $k_\varphi = -w_{r,t}/r$, соответствующие некоторому состоянию текучести M_r и M_φ, определяют в точке $P(M_r, M_\varphi)$ «вектор течения» с составляющими k_r и k_φ по осям координат. Если рассматриваемое пластическое состо-

яние представляется точкой P, отличной от вершины шестиугольника, то вектор течения будет нормален к стороне, которой принадлежит эта точка, и направлен наружу шестиугольника. Если точка P является вершиной шестиугольника, то вектор течения должен иметь направление внешней нормали к любой из его двух сторон, прилежащих к P, или любое направление, промежуточное между этими двумя предельными направлениями.

В силу изложенного выше для точки P, лежащей, например, на отрезке AB, имеем:

$$P = A: \quad M_r = M_\varphi = M_0, \ k_r \geq 0, \ k_\varphi \geq 0;$$

$$P \in AB: \quad 0 < M_r < M_0, \ M_\varphi = M_0, \ k_r = 0, \ k_\varphi \geq 0;$$

$$P = B: \quad M_r = 0, \ M_\varphi = M_0, \ 0 \geq k_r \geq -k_\varphi.$$

Часть пластинки, не находящаяся в пластическом состоянии, должна двигаться как твердое тело (в силу пренебрежения упругими деформациями в жесткопластическом анализе). Поэтому в этой части $k_r = k_\varphi \equiv 0$, или $w_t = f(t)$.

Если вся пластинка в любой момент времени относится к пластическому состоянию, характеризующемуся точками лишь одной стороны шестиугольника $ABCDEF$, определение M_r, M_φ и w в функции r и t не представляет труда. Однако в большинстве задач пластинка делится на ряд кольцевых зон, в каждой из которых пластическое состояние характеризуется определенной стороной шестиугольника текучести. Более того, число таких зон и расположение их границ могут зависеть от времени. Установим соотношение между механическими величинами по обе стороны окружности c, разделяющей такие зоны. Из динамических уравнений (3.113) и (3.114) следует, что при переходе через окружность c величины Q_r и M_r должны оставаться непрерывными, а величина M_φ может претерпевать разрыв. Так как пластинка непрерывна, то w и w_t при переходе через окружность c остаются непрерывными, ускорение же $w_{r,t}$ и скорости кривизны k_r и k_φ на ней могут претерпевать разрыв. Если скорость кривизны k_φ испытывает разрыв на окружности c, то последняя называется «шарнирной» окружностью (по аналогии с пластическим шарниром в теории изгиба балок). Шарнирную окружность можно рассматривать как предельный случай кольцевой области уменьшающейся ширины, внутри

которой имеет место резкое, хотя и непрерывное, изменение скорости $w_{r,t}$. В пределе на шарнирной окружности отношение $k_r / k_\varphi \to \infty$.

Следовательно, напряженное состояние на шарнирной окружности должно изображаться на шестиугольнике *ABCDEF* или точками *A*, *C*, *D*, *F*, или точками отрезков *CD* и *FA*. Вне окружностей, характеризующихся указанными точками (где $M_r = M_0$), скорость $w_{r,t}$ должна быть непрерывной. Радиус ρ окружности *c*, вообще говоря, является функцией времени *t*; окружность называется стационарной, если $\rho_t = 0$. Из условия непрерывности смещения $w(r,t)$ при переходе через *c* имеем

$$[w_t] + \rho_t [w_r] = 0, \tag{3.116}$$

где скобки отмечают скачки соответствующих величин. Так как $[w_t] = 0$, то $[w_r] = 0$, если $\rho_t \neq 0$. Следовательно, наклон w_r претерпевает разрыв только на стационарной окружности.

Для нестационарной окружности из условия $[w_r] = 0$, следует:

$$[w_{r,t}] + \rho_t [w_{rr}] = 0. \tag{3.117}$$

Так как на окружности *c* $[w_t] = 0$, то

$$[w_{tt}] + \rho_t [w_{rt}] = 0. \tag{3.118}$$

На основании последнего соотношения заключаем, что на стационарной окружности $[w_{tt}] = 0$, а на шарнирной нестационарной окружности $[w_{tt}] \neq 0$.

Из условия непрерывности M_r при переходе через окружность *c* следует:

$$[M_{rt}] + \rho_t [M_{rr}] = 0.$$

Вообще говоря, возможны случаи встречи двух окружностей c' и c'', динамические и кинематические условия при этом могут видоизмениться. Мы опускаем рассмотрение этого вопроса, так как при решении излагаемых ниже задач подобные случаи не имеют места.

Пусть на свободно опертую по краям круглую пластинку в некоторый момент начала действовать равномерно распределенная нагрузка постоянной интенсивности *p*. Пластинка будет в состоянии покоя до тех пор, пока в ней не возникнут пластические деформации. Для появления последних, очевидно, вели-

чина интенсивности p должна быть достаточно велика. Кроме того, очевидно, что существует область приложенных нагрузок, которые, вызывая пластическое течение материала пластинки, не приводят последнюю в движение. Для определения максимальной величины, при которой возможно бесконечно медленное пластическое течение материала пластинки, необходимо решить соответствующую краевую задачу для уравнения (3.115), в котором отброшены инерционные члены.

В данном случае пластинка не может достигнуть предела текучести без образования пластической зоны в его центре, следовательно, в центре $M_r = M_\varphi = M_0$, т.е. имеет место состояние A. Поэтому вблизи центра напряженное состояние может характеризоваться точками отрезков AF, AB и вершины A. Из уравнения (3.115) для рассматриваемого случая получаем:

$$rM_r = \int_0^r M_\varphi dr \,. \tag{3.119}$$

Отсюда следует, что напряженные состояния, характеризующиеся точками A и отрезка AF, в окрестности центра не могут существовать. Таким образом, напряженное состояние в окрестности центра представляется точками отрезка AB и скорость кривизны k_r здесь равна нулю. При возрастании r точка, характеризующая напряженное состояние пластинки, смещается к точке B, которая в рассматриваемом случае ($M_r = 0$) соответствует краю $r = R$.

Из уравнения (3.119) легко найти, что $p_0 = 6M_0 / R^2$. Таким образом, движение пластинки при динамической нагрузке начнется лишь тогда, когда $p > p_0$.

Примем за момент $t = 0$ момент возникновения пластических деформаций; интервал времени действия нагрузки p обозначим через τ. Так как при $r = 0$, $M_r = M_\varphi = M_0$ и, кроме того, $p - \mu w_{tt} > 0$ (по крайней мере, для нагрузки p, незначительно превышающей значение p_0), то из уравнения (3.115) можно установить, что из напряженных состояний, характеризующихся точками отрезков AB, AF и вершины A, в окрестности центра возможно лишь первое, т. е. $M_\varphi = M_0$, $M_r < M_0$. Это состояние для свободно опертой пластины может быть распространено вплоть края $r = R$, где $M_r = 0$. Но в таком случае $\omega_{rrt} \equiv 0$, т. е. $w_t = c_1(t) + rf_0(t)/R$. Учитывая тот факт, что $w_t = 0$

при $r = R$, получаем: $w_t = f_0(t)(1 - r/R)$. Интегрируя уравнение (3.115), находим:

$$M_r = M_0 - \frac{pr^2}{6} + \frac{\mu}{12} f_0' r^2 \left(2 - \frac{r}{R}\right).$$

Поскольку $M_r = 0$ при $r = R$, то $f_0' = 2(p - p_0)/\mu$. Используя начальные условия $\omega = \omega_t = 0$ при $t = 0$, определяем:

$$w(r,t) = \frac{p - p_0}{\mu}\left(1 - \frac{r}{R}\right)t^2. \tag{3.120}$$

При этом

$$\frac{M_r}{M_0} = 1 - \frac{pr^2}{p_0 R^2} + \left(\frac{p}{p_0} - 1\right)\frac{r^2}{R^2}\left(2 - \frac{r}{R}\right). \tag{3.121}$$

При $t = \tau$ нагрузка p снимается, однако движение пластинки в этот момент не заканчивается. Вторая фаза движения при $\tau < t < T$, где T удовлетворяет условию $w_t(r,T) = 0$, характеризуется тем, что $p \equiv 0$. В этой фазе, как нетрудно показать, напряженное состояние при пластическом течении по-прежнему характеризуется точками отрезка AB. Следовательно, опять

$$w_t = f_0(t)\left(1 - \frac{r}{R}\right); \quad M_r = M_0 + \frac{\mu}{12} f_0' r^2 \left(2 - \frac{r}{R}\right); \quad f_0' = -\frac{2p_0}{\mu}. \tag{3.122}$$

Из условия непрерывности w и w_r при $t = \tau$ найдем:

$$\begin{gathered} w = \left[\frac{p}{\mu}\tau(2t - \tau) - \frac{p_0}{\mu}t^2\right]\left(1 - \frac{r}{R}\right); \\ \frac{M_r}{M_0} = 1 - \frac{r^2}{R^2}\left(2 - \frac{r}{R}\right). \end{gathered} \tag{3.123}$$

Из (3.123) следует, что $w_t = 0$ при $T = p\tau/p_0$. Максимальный прогиб, соответствующий, очевидно, моменту $t = T$,

$$w(r,t) = \left[\frac{p}{\mu}\tau\left(\frac{2p\tau}{p_0} - \tau\right) + \frac{p_0}{\mu}\frac{p^2\tau^2}{p_0^2}\right] = \frac{p(p - p_0)}{\mu p_0}\tau^2\left(1 - \frac{r}{R}\right). \tag{3.124}$$

Остаточный прогиб центра пластинки будет

$$w(0,t) = p(p - p_0)\tau^2 / \mu p_0. \tag{3.125}$$

Из формулы (3.121) следует:

$$M_{rr}(0,t)=0\,;\;\; M_{rrr}(0,t)=2\frac{M_0}{R^2}\left(\frac{p}{p_0}-2\right).$$

Эти зависимости указывают на то, что значение $M_r(0,t)$ является максимальным лишь при $p \le 2p_0$ и минимальным при $p > 2p_0$. Так как в последнем случае нарушается условие пластичности (изгибающий момент в окрестности $r=0$ превышает величину M_0), приходится сделать заключение, что при этом предыдущие соотношения неприменимы. Поскольку последние получены на основании единственного предположения о том, что напряженное состояние характеризуется только точками отрезка *AB*, остается предположить, что это утверждение при $p > 2p_0$ не имеет места.

Следовательно, при $p > 2p_0$ в некоторой области $r < \rho_0$ около центра напряженное состояние должно характеризоваться точкой *A*, в остальной части пластинки – точками отрезка *AB*. Из уравнения (3.115) вытекает, что при $0 \le r \le \rho_0$ $w_{11} = p/\mu$, т. е. все точки этой области двигаются с постоянным ускорением.

Для рассматриваемой задачи следует различать три фазы движения пластинки.

Первая фаза $(0 < t < \tau)$. В этой фазе область $R \ge r \ge \rho_0$ характеризуется точками отрезка *AB*, поэтому для нее на основании предыдущих результатов можно записать:

$$w_t = f_0(t)\left(1 - r/R\right),$$

причем функция $f_0(t)$, определенная из условия непрерывности скорости w_t при переходе через окружность ρ_0, имеет вид:

$$f_0(t) = \frac{p}{\mu}\frac{R}{R-\rho_0}t\,. \qquad (3.126)$$

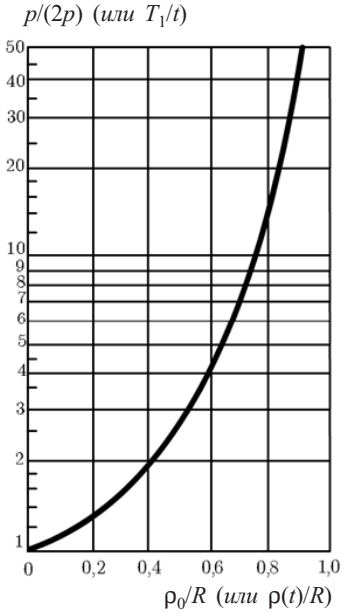


Рис. 3.16

Так как w_r испытывает разрыв при $r=\rho_0$, то в силу уравнения (3.116) окружность $r=\rho_0$ должна быть стационарной шарнирной окружностью.

Для области $\rho \le r \le R$ интегрированием (3.115) при граничных условиях $M_r(\rho_0,t)=M_0$ и $M_r(R,t)=0$ находим:

$$\frac{p}{2p_0}=\frac{R^3}{(R-\rho_0)^2(R+\rho_0)}\,; \tag{3.127}$$

$$\frac{M_r}{M_0}=1-\frac{R(r-\rho_0)^3(r+\rho_0)}{r(R-\rho_0)^3(R+\rho_0)}. \tag{3.128}$$

На графике рис. 3.16 построена зависимость (3.127).

Вторая фаза $(\tau<t<T)$. В течение этой фазы радиус $\rho=\rho(t)$ шарнирной окружности уменьшается от $\rho(\tau)=\rho_0$ до $\rho(T_1)=0$. Тем же способом, что и выше, легко получить формулы, определяющие распределение скорости:

$$w_t(r,t)=\begin{cases}\dfrac{pT}{\mu},\ 0\le r\le\rho(t); & (3.129)\\[2ex] \dfrac{pT}{\mu}\dfrac{R-r}{R-\rho(t)},\ \rho(t)\le r\le R. & (3.130)\end{cases}$$

Интегрируя (3.115) при граничных условиях $M_r(\rho,t)=M_0$, $M_r(R,t)=0$, получаем:

$$\rho_t(R^2+2R\rho-3\rho^2)=-2p_0R^3\big/p\tau\,; \tag{3.131}$$

$$\frac{M}{M_0}=1+\frac{R(r-\rho)^2\left[r^2-2(R-\rho)r-\rho(4R-3\rho)\right]}{r(R-\rho)^3(R+3\rho)}. \tag{3.132}$$

Начальным условием для дифференциального уравнения (3.131) является $\rho(\tau)=\rho_0$, где ρ_0 удовлетворяет соотношению (3.127). Интегрируя (3.131) при этом начальном условии, определяем ρ/R как функцию времени:

$$(\rho/R)^3-(\rho/R)^2-\rho/R=2p_0t/(p\tau)-1\,. \tag{3.133}$$

Отсюда

$$T_1=p\tau/(2p_0)\,.$$

Соотношение (3.133) может быть записано следующим образом:

$$T_1/t = R^3/[(\rho - R)^2(R+\rho)]$$

и совпадает с (3.127), если $2p/p_0$ и ρ_0/R обозначить соответственно T_1/t и ρ/R.

Учитывая отмеченный факт, график рис. 3.16 можно одновременно интерпретировать как зависимость между T_1/t и ρ/R.

Определим прогиб $w(r,T_1)$ в конце второй фазы. В конце первой фазы, как следует из предыдущего, срединная поверхность пластинки принимает форму усеченного конуса, причем смещения точек, расположенных внутри шарнирной окружности $r=\rho_0$, равны $p\tau^2/(2\mu)$, при этом $[w_r] = -p\tau^2/[2\mu(R-\rho_0)]$. Так как на нестационарной окружности $\rho=\rho(t)$ разрыва у функции w_r быть не может, то во второй фазе стационарная шарнирная окружность $r=\rho_0$ продолжает существовать. Из формул (3.124) следует, что при $r=\rho(t)$

$$[w_{rt}] = -\frac{p\tau}{\mu(R-\rho)}.$$

Отсюда согласно (3.118) и (3.131)

$$[w_{rr}] = -\frac{p\tau^2}{2\mu}\frac{p}{p_0}\frac{R+3p}{R^3}.$$

Поскольку при $r<\rho(t)$ $w_{rr}\equiv 0$, то

$$w_{rr}(\rho+0,t) = -\frac{p\tau^2}{2\mu}\frac{p}{p_0}\frac{R+3\rho}{R^3}. \qquad (3.134)$$

Вторая из формул (3.124) показывает, что $w_{rrt}\equiv 0$ при $R\ge r\ge\rho(t)$, поэтому в этой области $w_{rr}(r,t)=\varphi_0(r)$, где функция $\varphi_0(r)$ должна удовлетворять граничному условию (3.121):

$$\varphi_0(\rho) = -\frac{p\tau^2}{2\mu}\frac{p}{p_0}\frac{R+3\rho}{R^3}.$$

Следовательно, при $\rho\le r\le\rho_0$

$$w_{rr}(r,t) = -\frac{p\tau^2}{2\mu}\frac{p}{p_0}\frac{R+3r}{R^3}. \qquad (3.135)$$

В конце второй фазы равенство (3.135) имеет место вплоть до центра пластинки. Так как

$$w_r(0,T_1)=0\,;\quad w(0,T_1)=\frac{p\tau^2}{2\mu}\left(\frac{p}{p_0}-1\right), \tag{3.136}$$

то, интегрируя (3.135) при начальных условиях (3.136), получаем:

$$w(r,T_1)=\frac{p\tau^2}{2\mu}\left[\frac{p}{2p_0}\left(2-\frac{r^2}{R^2}-\frac{r^3}{R^3}\right)-1\right]\ (0\le r\le\rho_0).$$

Вне окружности $r=\rho_0$ срединная поверхность пластинки принимает форму прямого кругового конуса. Ее вид определяется прогибом $w(\rho_0,T_1)$, определяемым согласно (3.128), и условием $w(R,T_1)=0$. Разрыв w_r на стационарной шарнирной окружности $r=\rho_0$ в момент $t=T_1$ определяется по формуле (3.130).

Третья фаза $(T_1<t<T_2)$. В этой фазе напряженное состояние пластинки, за исключением ее центра и края, характеризуется точками отрезка *AB*. Тем же способом, который применялся выше, можно получить формулы (3.122) и (3.123) для скорости w_t и момента M_r:

$$w_t=f_0(t)(1-r/R)\,;\quad M_r=M_0+\mu\,f_0'r^2(2-r/R)/12\,.$$

Отсюда

$$f_0'(t)=-12M_0/(\mu R^2)\,;\quad f_0(t)=-2p_0t/\mu+c_1\,,$$

где константа c_1 находится из условия непрерывности скоростей в момент $t=T_1$:

$$-2p_0T/\mu+c_1=p\tau/\mu\,;\quad c_1=4p_0T_1/\mu\,.$$

Пластинка приходит в состояние покоя в момент T_2, когда $f_0(T_2)=0$, т. е. при $T_2=2T_1$. Для прогиба $w(r,t)$ получаем следующее выражение:

$$w(r,t)=\frac{2p_0}{\mu}\left(2T_1t-\frac{t^2}{2}\right)\left(1-\frac{r}{R}\right)+\varphi_0(r)\,.$$

Из условия непрерывности прогиба в момент T_1 имеем:

$$\frac{2p_0T_1^2}{\mu}\left(1-\frac{r}{R}\right)+\varphi_0(r)=\frac{p\tau^2}{2\mu}\left[\frac{p}{2p_0}\left(2-\frac{r^2}{R^2}-\frac{r^3}{R^3}\right)-1\right];$$

$$T_1=\frac{p\tau}{2p_0}\,,\quad 0\le r\le\rho_0\,;$$

$$w(r,T_2)=\frac{2p_0}{\mu}2T_1^2\left(1-\frac{r}{R}\right)+\frac{p\tau^2}{2\mu}\left[\frac{p}{2p_0}\left(2-\frac{r^2}{R^2}-\frac{r^3}{R^3}\right)-1\right]-\frac{3p_0T_1^2}{\mu}\left(1-\frac{r}{R}\right);$$

$$w(r,T_2)=\frac{p\tau^2}{2\mu}\left[\frac{p}{2p_0}\left(3-\frac{r}{R}-\frac{r^2}{R^2}-\frac{r^3}{R^3}\right)-1\right].$$

Остаточный прогиб в центре $w(0,\tau)=I^2\left(\frac{3}{2}-\frac{p_0}{p}\right)/(2\mu p_0)$, где $I=p\tau$. Вне окружности $r=\rho_0$ прогиб линейно зависит от r.

Меридиан пластически деформированной пластинки имеет излом при $r=\rho_0$. На рис. 3.17 представлена зависимость $w(r,T_2)/w(0,T_2)$ от r/R для различных значений $2p_0/p$.

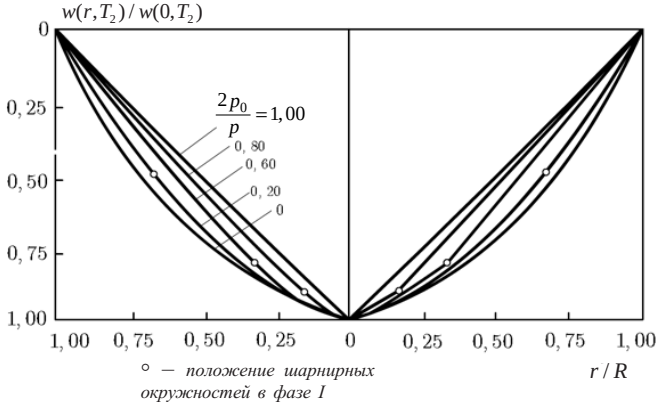


Рис. 3.17

Выше был рассмотрен случай работы свободно опертой круглой пластинки под действием постоянной во время действия импульса и равномерно распределенной по площади нагрузки. Аналогичным методом в [19] исследовано поведение круглой, заделанной по краям пластинки, всем точкам которой, за исключением крайних, сообщена постоянная скорость v_0. Как отмечают авторы этой работы, поставленная задача представляет существенное упрощение чрезвычайно сложной задачи о взаимодействии плоской ударной волны с твердым объектом.

2. Расширение круглого отверстия в плоском листе. В [20, 21] рассмотрена задача о расширении круглого отверстия в плоском листе первоначальной толщины h_0, материал которого пластически течет при постоянном касательном напряжении.

Пластинка разделяется на три области: упругую *III*; пластическую *II*, в которой пренебрегается инерционными членами; пластическую *I*, в которой полагается $\sigma_\theta = 0$ (рис. 3.18), кроме

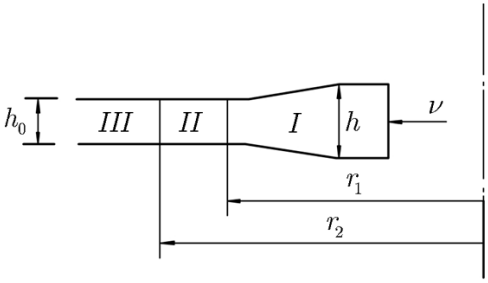


Рис. 3.18

того, предполагается всюду $\sigma_z = 0$. В силу сделанных допущений в области *II* $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0$; а в области *I* $\sigma_r = -\sigma_0$. Уравнением равновесия пластины постоянной толщины, как следует из предыдущего, является

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \cdot$$

Его решение для области *II* имеет вид:

$$\sigma_r = \sigma_\theta \left(\ln \frac{r}{r_2} - \frac{1}{2} \right); \;\; \sigma_\theta = \sigma_0 \left(\ln \frac{r}{r_2} + \frac{1}{2} \right),$$

где r_2 – радиус внешней границы *II* (рис. 3.18). В упругой области *III*

$$\sigma_r = -A/r^2; \;\; \sigma_\theta = A/r^2; \;\; \sigma_z = 0,$$

причем из условия непрерывности при $r = r_2$ имеем: $A = r_2^2 \sigma_0 / 2$. Так как $\sigma_\theta(r_1, t) = 0$, то

$$\ln(r_1 / r_2) = -1/2; \;\; r_1 = 0{,}606 r_2 .$$

Таким образом, определение движения в областях *II* и *III* не представляет труда, если получено решение задачи в области *I*. Для последней уравнение движения имеет вид:

$$\frac{\partial(h\sigma_r)}{\partial r}+\frac{h(\sigma_r-\sigma_\theta)}{r}=\rho_0 h\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}\right), \qquad (3.137)$$

где $h(r,t)$ – переменная толщина пластины; u – радиальная компонента скорости (другие компоненты предполагаются ничтожно малыми). В силу сделанных допущений уравнение (3.137) упрощается:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{c^2}{h}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{c^2}{r}=0 \quad (c^2=\sigma_0/\rho_0). \qquad (3.138)$$

Уравнение неразрывности дает

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial r}+h\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{hu}{r}=0\,. \qquad (3.139)$$

Уравнения (3.138) и (3.139), как нетрудно показать, гиперболического типа. Найдем характеристики этой системы:

$$du+\frac{c}{h}dh+\frac{c}{r}(u+c)dt \quad \text{при} \quad dr=(u+c)dt\,;$$

$$du-\frac{c}{h}dh-\frac{c}{r}(u-c)dt \quad \text{при} \quad dr=(u-c)dt\,.$$

Для дальнейшего нам потребуется вывести соотношения, имеющие место на ударном фронте, распространяющемся с радиальной скоростью U в область *II*. Согласно законам сохранения массы и количества движения

$$h(U-u)=h_0U\,;\quad h\sigma_0+\rho h(U-u)^2=h_0\sigma_0+\rho_0 h_0 U^2\,.$$

Здесь u – скорость частиц за ударным фронтом, индексами «0» отмечаются параметры в области *II*. Отсюда

$$\frac{U}{c}=\frac{1}{2}\frac{u}{c}+\sqrt{\frac{1}{4}\frac{u^2}{c^2}+1}\,;\quad \frac{h}{h_0}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2+\frac{u}{c}\sqrt{\frac{u^2}{4c^2}+1}\,.$$

Предположим, что отверстие в начале точечного размера начинает расширяться с постоянной скоростью v. Будем искать автомодельное решение поставленной задачи, зависящее от переменной $\xi=\dfrac{r}{ct}$:

$$\bar{h} = h / h_0 = f_1\left(\frac{r}{ct}\right); \ \bar{u} = u / c = f_2\left(\frac{r}{ct}\right).$$

В этом случае уравнения (3.138) и (3.139) принимают вид:

$$(\bar{u} - \xi)\frac{d\bar{u}}{d\xi} + \frac{d\ln\bar{h}}{d\xi} = -\frac{1}{\xi}; \tag{3.142}$$

$$(\bar{u} - \xi)\frac{d\ln\bar{h}}{d\xi} + \frac{d\bar{u}}{d\xi} = -\frac{\bar{u}}{\xi}. \tag{3.143}$$

Исключив из этих уравнений $\frac{d\ln\bar{h}}{d\xi}$, получим:

$$\frac{d\bar{u}}{d\xi} = \frac{1}{(\bar{u} - \xi)^2 - 1}.$$

Отсюда

$$\bar{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2} + \bar{u} - \xi}{\sqrt{2} - \bar{u} + \xi} + c_1.$$

Из условия $\bar{u} = v / c$ при $\xi = v / c$ определим константу интегрирования $c_1 = v / c$. Следовательно,

$$\bar{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2} + \bar{u} - \xi}{\sqrt{2} - \bar{u} + \xi} + \frac{v}{c}$$

или

$$\frac{r}{ct} = \frac{u}{c} - \sqrt{2}th\left[\sqrt{2}\frac{u}{c} - \frac{v}{c}\right]. \tag{3.144}$$

Из соотношений на ударной волне ясно, что $U \geq c$, т. е. $u \geq 0$. При $u = 0$, очевидно, $\xi = 1$. Подставляя эти значения в формулу (3.144), максимальное значение скорости v_m, при которой возможен принятый автомодельный режим движения: $v_m / c = 0,623$.

Из уравнения для h / h_0 после исключения ξ и удовлетворения граничному условию на ударной волне получим:

$$\frac{h}{h_0} = \frac{ct}{r}\frac{\sqrt{2}sh\left(\sqrt{2}\frac{v}{c}\right)}{\frac{v}{c}ch\left[\sqrt{2}\left(\frac{v}{c} - \frac{u}{c}\right)\right]}.$$

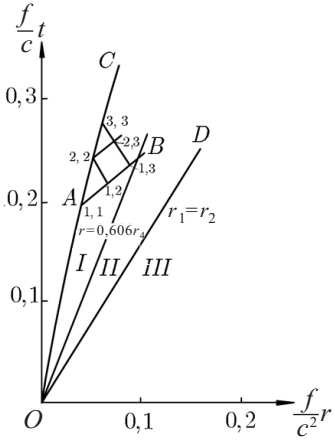
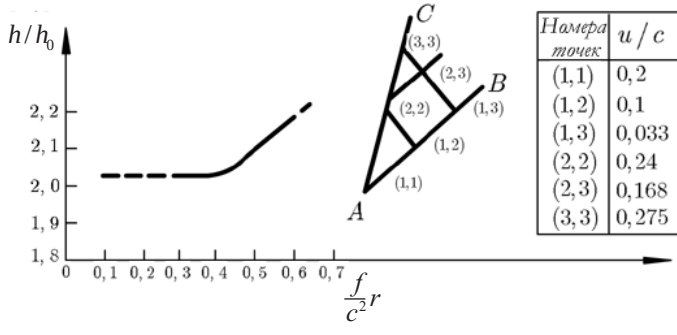


Рис. 3.19

В [20] предложено использовать графоаналитический метод характеристик для решения задачи в том случае, когда скорость расширяющегося отверстия некоторое время постоянна, а затем увеличивается по линейному закону. На рис. 3.19 приведено изображение движения, обусловленного расширением отверстия сначала с постоянной скорость $v/c = 0,2$ (до момента времени $ft/c = 0,2$) а затем с постоянным ускорением f. Отрезок прямой *OA* изображает первоначальное равномерное движение контура отверстия, кривая *AC* – его дальнейшее равноускоренное движение. Отрезки *OB* и *OD* соответствуют положению ударной волны и границы областей *II* и *III*.

График изменения h/h_0 вдоль *AC* для этого случая представлен на рис. 3.20. Вид характеристической сетки, выбранной таким образом, что луч *AB* был разбит отрезками длиной $ft/c = 0,02$, представлен в правом углу рис. 3.20, где, кроме того, дана таблица и h/h_0 в углах рассматриваемой сетки.



Номера точек	u/c	h/h_0
(1,1)	0,2	2,03
(1,2)	0,1	1,35
(1,3)	0,033	1,1
(2,2)	0,24	2,08
(2,3)	0,168	1,61
(3,3)	0,275	2,18

Рис. 3.20

Литература

1. *Wood D.* Продольные плоские волны упругопластических деформации в твердых телах // Journ. of Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. (См. Механика. 1953. № 5).

2. *Шапиро Г.С.* Распространение упругопластических волн в стержнях переменного сечения // ПММ. 1952. Т. XVI. № 3.

3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948.

4. *Райнхарт Д.* Некоторые количественные данные об отколе металла, подвергнутого взрывному нагружению // Механика. 1953. № 3.

5. *Райнхарт Д.* Некоторые количественные данные об отколе металла, подвергнутого взрывному нагружению // Механика. 1953. № 3.

6. Бриджмен П. Физика высоких давлений. – М.: ОНТИ, 1935.

7. *Рахматуллин Х. А.* О распространении цилиндрических волн при пластических деформациях – скручивающий удар // ПММ. 1948. Т. XII. № 1.

8. *Альтшулер Л.В.* О взрыве в сжимаемой пластической среде.– М.: ДАН СССР. 1946. Т. 2. № 3.

9. *Бахшиян Ф.А.* Упругопластическая сферическая волна нагружения // ПММ. 1948. Т. XII. № 3.

10. *Лунц Я.Б.* О распространении сферических волн в упругопластической среде // ПММ. 1949. Т. XII. № 1.

11. *Шапиро Г.С.* Распространение упругопластических волн в стержнях переменного сечения // ПММ. 1952. Т. XVI. № 3.

12. *Агабабян Е.Х.* Напряжения в трубе при внезапном приложении нагрузки// Украинский математический журнал. 1953. Т. 5. № 3.

13. *Григорян Д.М.* Нормальный удар по неограниченной тонкой мембране // ПММ. 1949. Т. XII. № 3.

14. *Галин М.П.* Удар по гибкой пластинке. Сб. статей Института механики АН СССР, 1949.

15. *Павленко А.А.* Прямой удар по гибкой пластине телом вращения заданного профиля. – М.: МГУ, 1952.

16. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1939. С. 218.

17. *Демьянов Ю.А.* Автомодельные задачи динамического изгиба пластин.– М.: ДАН СССР, 1958. № 4.

18. *Hopkins H., Prager W.* Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik, 1954. V. 5. № 4. S. 317–330.

19. *Wang A., Hopkins H.* О пластической деформации заделанной по краю круглой пластинки под действием импульсной нагрузки // Механика. 1953. №3. S. 18.

20. *Фрейбергер У.* Расширение отверстия в плоском листе // Механика. 1953. №3. S. 18.

21. *Taylor G.* Proceed of Roy. Soc., 1941. V. 280.

22. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. – М.: Московский лицей, 1998.

23. Малашин А.А. Продрольно-крутильные волны и колебания в напряженных тонкостенных трубах //Доклады РАН, 2005. Т. 401. № 1.

24. *Куксенко Б.В.* О некоторых эффектах, сопровождающих движение свободной мембраны, где на ней нет морщин. Сб. «Газовая и волновая динамика». – М.: Изд-во МГУ. 1979. Вып. 3.

25. *Григорян С.С., Григорян Д.М.* Об ударе конусом по тонкой упругой мембране // ПММ. 1966. Т. 30. № 6.

26. *Григорян С.С., Куксенко Б.В.* О возможности существования фронтов появления и исчезновения морщин на мембране при нормальном ударе по ней конусом. Сб. «Газовая и волновая динамика». – М.: Изд-во МГУ. 1979. Вып. 3.

27. *Голенева Л.А., Куксенко Б.В.* Исследование удара конусом по мембране с учетом прокола и отхода. Деп. ВНИИТИ. 1986. № 1934-86 ДЕП.

Глава 4

Распространение возмущений в упругих и пластических средах, обладающих вязкостными свойствами и эффектами последействия и релаксации

Эта глава посвящена исследованию процессов распространения возмущений в различных средах: упруговязкой, вязкопластической, упруговязкопластической, в среде, описываемой законом наследственности Больцмана, и в пластическом газе. Такое обилие рассматриваемых сред, различающихся между собой характером принятого закона деформирования, обусловлено необходимостью феноменологически описать свойства разнообразных веществ и материалов (таких, как металлы, пластики, полимеры, битумы, бетоны, грунты и др.). встречающихся в природе и важных для практики.

В главе приводятся экспериментальные данные, подтверждающие правильность использования того или иного закона деформирования для описания поведения конкретных материалов при действии динамических нагрузок. Для рассматриваемых сред, кроме задач, решенных в той же постановке, что и в предыдущих главах, изучены удар цилиндром по работающей на сдвиг пластине и распространение ударных волн взрыва в пластическом газе.

§ 4.1. Классификация сред и сфера их применимости

Как известно, в наиболее общем виде решение любой задачи механики сплошной среды сводится к определению поля напряжений и смещений (а следовательно, скоростей и деформаций) всех ее точек в функции времени. При этом использование одних лишь основных законов механики – закона сохранения массы, энергии и количества движения – оказывается недостаточным и требуются дополнительные гипотезы о связи между тензорами напряжений и деформаций, а также скоростями деформаций. Эти гипотезы и определяют специфику данной среды. Для рассматриваемых ниже сред предполагается упругая связь между средним гидростатическим напряжением σ и объемной деформацией e:

$$\sigma = ke,\ \sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3;\ e = (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})/3, \quad (4.1)$$

где k – модуль всестороннего сжатия. Для несжимаемого материала соотношение (4.1) заменяется следующим:

$$e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 0.$$

Для жидкостей, свойства которых определяются зависимостью тензора напряжений от тензора скоростей деформаций, условие несжимаемости сводится к равенству нулю дивергенции вектора скорости:

$$\dot{e}_{xx} + \dot{e}_{yy} + \dot{e}_{zz} = 0. \tag{4.2}$$

Другой гипотезой, которую вместе с (4.1) приходится вводить при построении механики сплошной среды, является гипотеза о характере зависимости между девиаторами напряжений и деформаций. Последняя сводится к установлению связи между их вторыми и третьими инвариантами (как известно, первый инвариант девиатора равен нулю). В теориях сплошной среды обычно предполагается, что подобная связь существует только между вторыми инвариантами девиаторов и их производными по времени. Для случая однокомпонентного поля деформаций и напряжений, которым ограничимся при дальнейшем изложении, эта связь выражается соотношением

$$\varphi(\sigma, e, \dot{\sigma}, \dot{e}, \ddot{\sigma}, \ddot{e}, .. \ \sigma^{(n)}, e^{(n)}) = 0 \tag{4.3}$$

между напряжением σ (или τ), деформацией e (или γ) и их производными по времени[1].

Обычно ограничиваются рассмотрением зависимости (4.3) в форме

$$\varphi(\sigma, e, \dot{\sigma}, \dot{e}) = 0. \tag{4.4}$$

Классификация сред, характеризующихся линейной зависимостью между напряжениями, деформациями и их первыми производными,

$$\sigma + c_1\dot{\sigma} + c_2 e + c_2\dot{e} + c_1 = 0 \tag{4.5}$$

дана в [1].

Варьируя значения постоянных материала c_1 в соотношении (4.5), получаем восемь уравнений для различных идеальных веществ:

---

[1] О том, как по соотношениям между инвариантами устанавливается зависимость между компонентами тензоров напряжений и деформаций, см., например [3, литература к гл. III].

$$\sigma = \mu \dot{e}; \quad (4.6)$$

$$\sigma - \sigma_0 = \mu \dot{e}; \quad (4.7)$$

$$\sigma - \sigma_0 - \alpha e = \mu \dot{e}; \quad (4.8)$$

$$\sigma - \alpha e = \mu \dot{e}; \quad (4.9)$$

$$\sigma = \mu \dot{e} - (\mu/\beta)\dot{\sigma}; \quad (4.10)$$

$$\sigma - \sigma_0 = \mu \dot{e} - (\mu/\beta)\dot{\sigma}; \quad (4.11)$$

$$\sigma - \alpha e = \mu \dot{e} - (\mu/\beta)\dot{\sigma}; \quad (4.12)$$

$$\sigma - \sigma_0 - \alpha e = \mu \dot{e} - (\mu/\beta)\dot{\sigma} \quad (4.13)$$

Уравнение (4.6) представляет течение вязкой жидкости. Если использовать закон (4.6) для связи касательного напряжения со скоростью деформации в уравнении количества движения, то получим уравнение Навье – Стокса.

Уравнение (4.7) описывает так называемое вязкопластическое течение вещества, которое при малых скоростях деформирования ведет себя как идеально пластическое тело ($\sigma = \sigma_0$). Это уравнение предложено профессором Ф.Н. Шведовым (1899), а затем известным русским исследователем физических свойств льда Б. П. Вейнбергом (1912). Оно широко использовалось Е. Бингамом в реологии [2]. Уравнения пространственного деформирования вязкопластического тела были даны Г. Генки (1925), теоретические и экспериментальные исследования по вязкопластическому течению выполнены А. А. Ильюшиным [3–5]. Последним, в частности, было установлено, что в диапазоне скоростей деформации 10^2–10^4 $с^{-1}$ поведение таких металлов, как сталь и алюминий, хорошо описывается уравнением (4.7) (см. § 4.3).

Заметим, что уравнение (4.7) описывает такое явление, как повышение предела текучести металлов, при увеличении скорости деформирования. Правда, факт увеличения предела текучести с ростом скорости деформирования может быть объяснен и тем, что процесс нагружения в данном случае от изотермического все более и более приближается к адиабатическому. В этой связи важно установить, будет ли при бесконечной скорости деформирования напряжение бесконечно (как это следует из уравнения (4.7)) или оно окажется ограниченным. Судя по некоторым имеющимся экспериментальным данным, уравнения вязкопластической среды справедливы для красок и битумов.

Уравнение (4.8), являющееся некоторым усложнением (4.7), описывает поведение вязкопластического вещества,

которое при малых скоростях деформирования удовлетворяет схеме линейного упрочнения.

Уравнение упруговязкого течения (4.9) введено Томпсоном [6]. Положив в (4.9) $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, получим:

$$e = c \exp\left(-\frac{\alpha}{\mu} t\right) + \frac{\sigma_1}{\alpha}.$$

Следовательно, закон деформирования (4.9) описывает явление последействия (изменение деформированного состояния при неизменном поле напряжений). По мнению автора [7], этот закон деформирования приложим к различным пористым, волокнистым веществам, пропитанным вязким наполнителем, ко многим почвам и строительным материалам.

Уравнение (4.10) введено Максвеллом [8]. Положив в (4.10) $e = \text{const}$, найдем, что напряжение при постоянной деформации уменьшается по закону

$$\sigma = c\mu \exp\left(-\frac{\beta}{\mu} t\right).$$

Следовательно, уравнение (4.10) описывает явление релаксации μ/β (величина называется *периодом релаксации*). При постоянной скорости деформирования $\dot{e} = c$ напряжение изменяется по закону

$$\sigma = c\mu \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\mu} t\right)\right].$$

Заметим, что при очень быстром приложении нагрузки, когда значения производных по времени от деформации и напряжения много больше соответствующего значения напряжения, закон деформирования (4.10) дает $\sigma \to \beta e$. Таким образом, материал, удовлетворяющий закону (4.10), при очень быстром деформировании ведет себя упруго; наоборот, при очень медленном деформировании он оказывается в ненапряженном состоянии. Согласно данным [7], подобно среде Максвелла ведут себя такие вещества, как стекло в нагретом состоянии, пластмассы, растворы полимеров.

Уравнению (4.11), являющемуся некоторым усложнением (4.10), удовлетворяют вещества, которые при малой ско-

рости деформирования ведут себя как идеально пластическая среда.

Уравнения (4.12) и (4.13) рассматривались Ишлинским [9]. Положив в (4.12) $\sigma = \sigma_1 = \text{const}$, получим:

$$e = c\exp\left(-\frac{\alpha}{\mu}t\right) + \frac{\sigma_1}{\alpha},$$

т.е. описание процесса последействия со скоростью α/μ. В то же время при $e = e_1 = \text{const}$ из уравнения (4.12) можно получить:

$$\sigma = c\exp\left(-\frac{\beta}{\mu}t\right) + \alpha e_1,$$

т. е. описание процесса релаксации со скоростью β/μ. При медленном деформировании вещество, удовлетворяющее закону (4.12), ведет себя упруго с модулем упругости α, при очень быстром деформировании оно опять-таки работает упруго, но с модулем упругости β. По мнению автора [7], закону деформирования (4.12) удовлетворяют каучуки и некоторые полимеры, обладающие вторым модулем сдвига.

Закон деформирования (4.13) тем отличается от (4.12), что подчиняющееся ему вещество при малых скоростях деформирования ведет себя как пластическое тело с модулем упрочнения α. Заметим, что явления наследственности (последействия и релаксации) наиболее точно описываются интегральным уравнением Больцмана – Вольтерра [10, 11]:

$$e(t) = \frac{1}{\beta}\sigma(t) + \int_{-\infty}^{t}\varphi(t,\tau)\,e(\tau)\,d\tau, \tag{4.14}$$

где $\varphi(t,\tau)$ – так называемая функция наследственности.

В [9] показано, что закон деформирования (4.12) следует из интегрального уравнения (4.14), если функцию наследственности выбрать в виде

$$\varphi(t,\tau) = A\exp\left[-\alpha(t-\tau)\right], \tag{4.15}$$

где $A = \frac{\beta}{\mu}(\beta - \alpha)$, $a = \beta/\mu$.

Действительно, подставив это выражение для $\varphi(t,\tau)$ в уравнение (4.14), производя его однократное дифференциро-

вание и исключив затем интегральный член с помощью (4.14), придем к закону деформирования (4.12).

Интересные экспериментальные данные о поведении некоторых материалов при больших скоростях нагружения и соответствии их закона деформирования формуле (4.15) приведены в [12]. Образцы в виде тонких дисков ($l \approx 0{,}25$–3 мм) помещались между плоскими торцами двух цилиндрических стержней из серебристой стали ($\sigma_S = 6400$ кг/см^2, $\rho_S = 7{,}89$ г/см^3, $a_0 = 5320$ м/с) диаметром 25 мм. Мгновенное давление прилагалось посредством взрыва детонатора на конце длинного (180-сантиметрового) стержня; смещение свободного конца короткого стержня (длиной 10 – 20 см) замерялось параллельно-пластинчатым конденсорным микрофоном. Ввиду малой длины образца напряжение в нем при прохождении волны сжатия считалось постоянным. Предполагалось, что распространение волн в стержнях происходит линейно-упруго. В этом случае можно установить, что деформация образца

$$e = \left(\xi_1 - \xi_2\right)/z, \tag{4.16}$$

где ξ_1 и ξ_2 – смещения свободного конца короткого стержня соответственно при наличии и отсутствии (т. е. когда длинный и короткий стержни находятся в контакте между собой) образца; z – длина образца.

Напряжение $p(t)$ в образце может быть легко рассчитано после определения производной по формуле

$$p = \frac{1}{2}\rho_0 a_0 \frac{d\xi_1}{dt}. \tag{4.17}$$

Исключая из (4.16) и (4.17) время, находим экспериментальную зависимость «напряжение – деформация» в образце. Изменение скорости деформирования достигается изменением толщины образцов. Подробности эксперимента и особенности применявшегося измерительного оборудования описаны в [12], здесь приведем лишь ее окончательные результаты.

Диаграмма, полученная при испытании политена (полимеризованного этилена), приведена на рис. 4.1; четырем кривым соответствуют четыре различные длины испытанных образцов: 0,025; 0,048; 0,086; 0,268 см. Точками на кривых отмечены интервалы времени 2 мкс. Характер изменения кривых указывает на то, что, во-первых, динамический

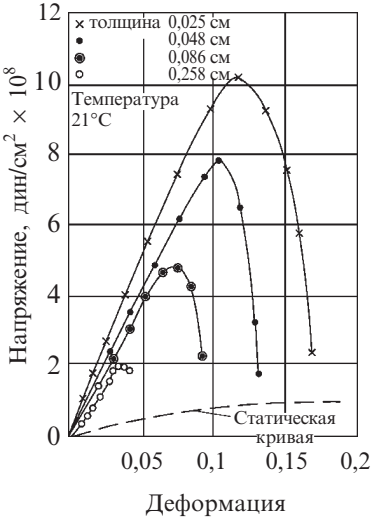


Рис. 4.1

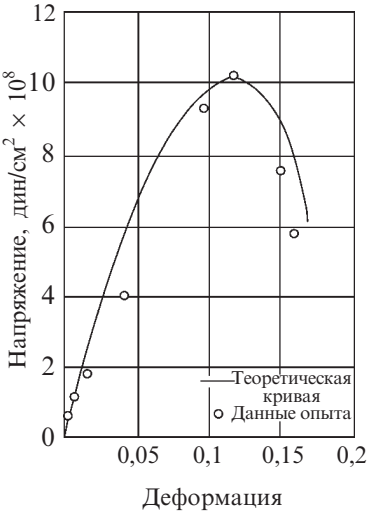


Рис. 4.2

модуль упругости значительно превосходит статический (статическая диаграмма на рис. 4.1 отмечена штриховой линией) и, во-вторых, деформации возрастают после того, как напряжения начинают падать. Кроме того, следует заметить, что в образцах после испытания не было остаточных деформаций (они сохраняли без изменения свои размеры).

На рис. 4.2 приведено сопоставление экспериментальных данных с теоретической зависимостью, рассчитанной из (4.14) при использовании функции наследственности в форме (4.15). При записи закона деформирования в форме

$$\sigma = Ee + B\int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\alpha}\right)\frac{de}{d\tau}\,d\tau \qquad (4.18)$$

соответствующие константы для политена имеют значения: $B = 4{,}6 \cdot 10^{10}$, $E = 10^9$ дин/см^2, $\alpha = 2$ мкс.

Результаты соответствующих испытаний натурального и синтетического каучуков (механические свойства которых оказались одинаковыми) приведены на рис. 4.3; испытываемые образцы имели длину 0,03 см. После эксперимента ос-

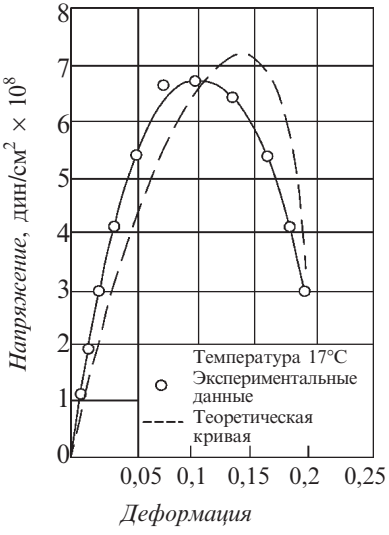


Рис. 4.3

таточных деформаций в них не оказалось. Диаграмма статических испытаний на рис. 4.3 не показана, так как она почти совпадает с осью деформации ($E_{ст} = 2 \cdot 10^7$ дин/см^2). Результаты сопоставления экспериментальных данных с теоретической кривой, рассчитанной согласно (4.18) при $B = 2{,}4 \cdot 10^{10}$, $E = 10^8$ дин/см^2, $\alpha = 2$ мкс, приведены на том же рисунке.

Результаты соответствующих испытаний полиметилметакрилата (твердый, стекловидный пластикат, видоизменением которого является плексиглас) приведены на рис. 4.4. При снятии напряжения деформации уменьшаются, хотя заметной петли гистерезиса не обнаруживается. Сопоставление экспериментальных данных с результатами теоретического расчета при при $B = 14{,}5 \cdot 10^{11}$, $E = 8 \cdot 10^{10}$ дин/см^2, $\alpha = 0{,}5$ мкс представлено на рис. 4.4.

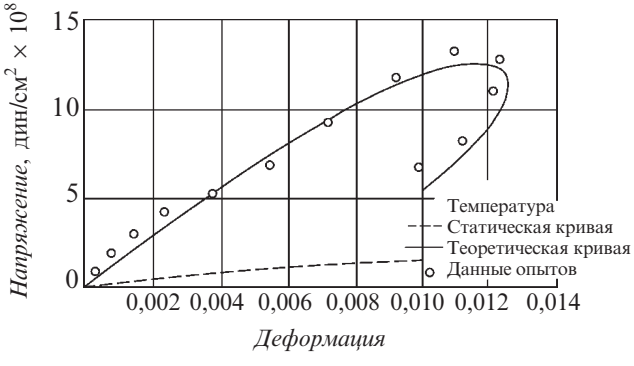


Рис. 4.4

Следует заметить, что аппроксимация функции наследственности одной экспоненциальной функцией, вообще говоря, мало эффективна. Дело в том, что удовлетворительное совпадение на рис. 4.2–4.4 экспериментальных диаграмм «деформация – напряжение» с теоретическими, рассчитанными согласно (4.15), обусловлено тем, что в рассматриваемом диапазоне времени (~20 мкс) соответствующим образом подобраны константы B и α. Если изменение интервала времени эксперимента мало бы изменяло значения этих констант, можно было сделать заключение об эффективности соответствующей аппроксимации. Однако эксперименты опровергают такого рода утверждения. Например, для политена по опытам Вольтерра и Тейлора, описанным в [24], при времени эксперимента порядка 10 мс получены меньшие значения величин B и E, а постоянная α оказалась равной 1,7 мс.

В [12] приведены также результаты экспериментов по определению динамических диаграмм «напряжение – деформация» некоторых металлов.

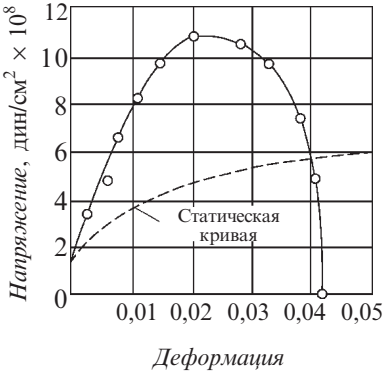


Рис. 4.5

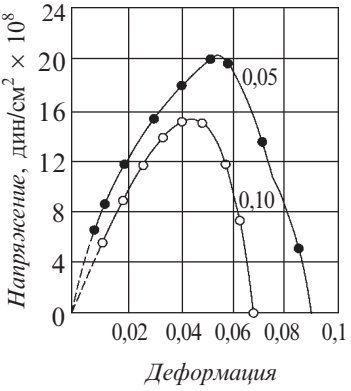


Рис. 4.6

В ряде случаев эксперименты не имели успеха ввиду малости разности $\xi_1 - \xi_2$. Полученные диаграммы «напряжение–деформация» для меди и свинца приведены соответственно на рис. 4.5 и 4.6. Медные образцы длиной 0,05 см после эксперимента обнаружили остаточную деформацию ~4%, причем упругая часть деформации оказалась весьма малой.

Образцы из свинца (длиной 0,05 и 0,1 см) имели остаточные деформации даже при незначительных напряжениях, предел текучести свинца оказался очень малым, а напряжения приблизительно пропорциональными скорости деформирования. Поэтому в [12] сделан вывод, что в динамических условиях свинец ведет себя как вязкая жидкость (его статическая диаграмма почти совпадает с осью деформаций).

Приведенные выше законы деформирования не могут описать таких явлений, как чистая упругость, упрочнение, наклеп. Учет последних может быть произведен использованием предложенного в [9] закона деформирования

$$E\dot{e} = \dot{\sigma} \text{ при } |\sigma| \le \sigma_s \tag{4.19}$$

$$E\dot{e} = \dot{\sigma} + n(\sigma - \sigma_s - E'e) \text{ при } |\sigma| \ge \sigma_s. \tag{4.20}$$

В несколько более общей форме он имеет вид, предложенный Соколовским [13] (при $\varphi(e) = \sigma_s$) и Мальверном [14]:

$$E\dot{e} = \dot{\sigma} \text{ при } |\sigma| \le \sigma_s; \tag{4.21}$$

$$E\dot{e} = \dot{\sigma} + \Phi[\sigma - \varphi(e)] \text{ при } |\sigma| \ge \sigma_s. \tag{4.22}$$

Для выяснения существа закона деформирования, определенного зависимостями (4.21) и (4.22), рассмотрим два характерных примера для случая $\varphi(e) = \sigma_s$ [13].

1. Пусть деформация происходит по закону $e = \lambda t$. Соотношения (4.21) и (4.22) после подстановки $t = e/\lambda$ и интеграции дают

$$\begin{gathered} Ee = \sigma \text{ при } 0 \le \sigma \le \sigma_s; \\ Ee = \sigma_s + \lambda E \int_0^{\sigma-\sigma_s} \frac{dz}{\lambda E - \Phi(z)} \text{ при } \sigma \ge \sigma_s. \end{gathered} \tag{4.23}$$

Зависимость между σ и e, устанавливаемая последними равенствами, представлена графически линией OAB на рис. 4.7. При $\Phi(z) \equiv kz$ соотношения (4.23) принимают вид:

$$Ee = \sigma \text{ при } 0 \le \sigma \le \sigma_s; Ee = \sigma_s + \frac{\lambda E}{k} \ln\left(\frac{\lambda E}{\lambda E - k(\sigma - \sigma_s)}\right).$$

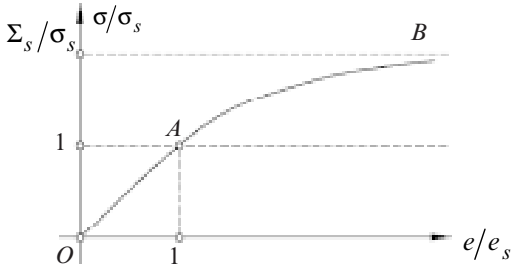


Рис. 4.7

При $e \to \infty$, $\sigma \to \sigma_s + \lambda E/k = \Sigma_s$.

2. Пусть напряжение σ изменяется по закону

$$\sigma = p\frac{t}{t_0} \text{ при } 0 \le t \le t_0;$$

$$\sigma = p\left(1 - \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\right) \text{ при } t_1 \le t \le t_0,$$

т. е. сначала возрастает до величины $\sigma = p > \sigma_s$, а затем убывает до нуля. Соотношения (4.21) и (4.22) после перехода от переменной t к переменной σ легко интегрируются:
при нагружении

$$Ee = \sigma \text{ при } 0 \le \sigma \le \sigma_s,$$

$$Ee = \sigma + \frac{t_0}{p}\left(\int_0^{\sigma-\sigma_s} \Phi(z)\,dz\right) \text{ при } \sigma_s \le \sigma \le p;$$

при разгружении

$$E(e - e_r) = \sigma - \frac{t_1 - t_0}{p}\int_0^{\sigma-\sigma_s} \Phi(z)\,dz \quad \text{при } \sigma_s \le \sigma \le p;$$

$$E(e - e_r) = \sigma \text{ при } 0 \le \sigma \le \sigma_s,$$

где $e_r = \dfrac{t_1}{p}\displaystyle\int_0^{p-\sigma_s} \Phi(z)\,dz.$

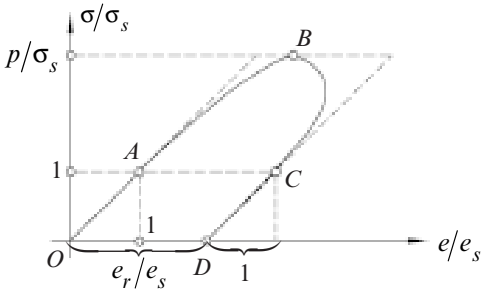


Рис. 4.8

Зависимость между σ и e, устанавливаемая этими соотношениями, представлена графически линией $OABCD$ на рис. 4.8 (участки OAB и BCD соответствуют нагружению и разгружению). При $\Phi(z) \equiv kz$ последние формулы упрощаются: при нагружении

$$Ee = \sigma \text{ при } (0 \le \sigma \le \sigma_s),$$

$$Ee = \sigma + \frac{kt_0}{2p}(\sigma - \sigma_s) \text{ при } \sigma_s \le \sigma \le p;$$

при разгружении

$$E(e - e_r) = \sigma - \frac{k(t_1 - t_0)}{2p}(\sigma - \sigma_0)^2 \text{ при } \sigma_s \le \sigma \le p,$$

$$E(e - e_r) = \sigma, \text{ при } 0 \le \sigma \le \sigma_s,$$

где $e_r = \dfrac{kt_1}{2p}(p - \sigma_s)^2$.

Использование уравнений упруговязкопластической среды в наибольшей мере оправдывается для пластмасс.

Следует отметить, что материалы, удовлетворяющие соотношениям (4.21) и (4.22), обладают упруговязкопластическими свойствами только при умеренных скоростях деформирования. При больших скоростях деформирования соотношение (4.22), как легко видеть, приводит к линейной зависимости между напряжением и деформацией. Поэтому заранее можно утверждать, что использование закона де-

формирования (4.22) для описания поведения тех материалов, которые при больших скоростях нагружения обладают упругопластическими свойствами, будет приводить к расхождениям соответствующих теоретических расчетов с результатами экспериментов (в сторону завышения расчетных значений напряжения). Приводимые в § 4.4 результаты конкретных расчетов с большой наглядностью подкрепляют это утверждение.

Упруговязкопластическая среда, обладающая при больших скоростях деформирования упругопластическими свойствами, может быть описана уравнением

$$\frac{d}{dt}\left[\sigma - \varphi_{\text{дин}}(e)\right] = \Phi\left[\sigma - f_{\text{ст}}(e)\right],$$

где $\sigma = \varphi_{\text{дин}}(e)$ – динамическая диаграмма «напряжение – деформация», полученная при очень больших скоростях нагружения; $\sigma = f_{\text{ст}}(e)$ – соответствующая статическая диаграмма; $\Phi(z)$ – некоторая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(0) = 0$. В первом приближении функцию $\Phi(z)$ можно считать линейной $\Phi(z) = kz$ тогда коэффициент k выражается через коэффициент абсолютной вязкости материала.

Отметим, что подробное описание свойств упруговязкопластических сред, характеризующихся как соотношениями вида (4.4), так и более общими зависимостями типа (4.3), дано в работе [7]. В последней, кроме того, приведены механические модели рассмотренных сред и некоторые данные об их приложении к описанию механических свойств ряда веществ. Большой фактический материал об упруговязких свойствах полимеров (полистирен, полиизобутилен, поливинил и т. д.) содержится в зарубежной литературе[1].

Следует иметь в виду, что все сказанное выше о механическом поведении материалов справедливо только при нормальных температурах. Вопрос о применении того или другого закона деформирования к материалам при повышенных температурах здесь не обсуждается. Надо помнить, что материалы,

[1] См. Journal of Appl. Phys. 1953. 24. № 6–12; 1954. 25.

удовлетворяющие в некотором диапазоне скоростей деформирования какому-либо закону деформирования, в другом диапазоне могут следовать иному закону деформирования.

В заключение отметим, что распространение получил закон деформирования так называемого пластического газа, частицы которого обладают тем свойством, что при прохождении ударной волны мгновенно меняют свою плотность с одного постоянного значения на другое. Как будет показано далее, схемой пластического газа можно описать поведение некоторых грунтов под действием взрывных нагрузок.

§ 4.2. Распространение возмущений в стержнях, материал которых обладает вязкостными свойствами и эффектами последействия и релаксации

Так как рассматриваемые ниже среды характеризуются линейными соотношениями между напряжением, деформацией и их производными (или интегралами) по времени, то уравнение продольных движений частиц стержня

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

при использовании этих соотношений становится линейным. Для трех законов деформирования (4.8) и (4.9), (4.10) и (4.11), (4.12) и (4.13) оно принимает соответственно вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}; \; a^2 = \frac{\alpha}{\rho_0}, \; \nu = \frac{\mu}{\rho_0}; \qquad (4.24)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = a_0^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \; a_0^2 = \frac{\beta}{\rho_0}; \qquad (4.25)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\alpha\beta}{\mu\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \; a_0^2 = \frac{\beta}{\rho_0}. \qquad (4.26)$$

Линейность уравнений (4.24) – (4.26) позволяет применить для их решения операционный метод и метод разделения переменных. Решение уравнений (4.8) и (4.9) для случая полуограниченного стержня при граничных и начальных условиях

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0;\ u_t(0,t) = \varphi(t) \tag{4.27}$$

приведено в [15].

Переходя от оригинала[1] $u(x,t)$ к изображению по формуле

$$u(x,t) \div U(x,p) = p\int_0^\infty e^{-pt}u(x,t)\,dt$$

и принимая во внимание нулевые начальные данные, вместо (4.24) получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$p^2U = \left(a^2 + vp\right)\frac{d^2U}{dx^2}.$$

Решение этого уравнения, ограниченное при $x \to \infty$, имеет вид

$$U(x,p) = A(p)\exp\left(-\frac{xp}{\sqrt{a^2+vp}}\right),$$

причем $A(p) = \dfrac{\Phi(p)}{p}$, где $\varphi(t) \div \Phi(p)$. Если обозначит через $\psi(x,t) \div \exp\left(-\dfrac{xp}{\sqrt{a^2+vp}}\right)$, то по теореме умножения

$$u(x,t) = \int_0^t \varphi(\tau)\psi(x,t-\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, определение смещения u сводится к нахождению $\psi(x,t)$ по ее изображению. Последнее целесообразно представить в виде

$$\exp\left(-\frac{xp}{\sqrt{a^2+vp}}\right) = \exp\left[-x_1\sqrt{p+\alpha} + \frac{x_1\alpha}{\sqrt{p+\alpha}}\right], \tag{4.28}$$

---

[1] Здесь и в дальнейшем будем использовать терминологию и основные теоремы операционного исчисления, о которых неосведомленный читатель может прочесть в соответствующих курсах, например: *Эфрос А.М., Данилевский А.М.* Операционное исчисление и контурные интегралы. – Харьков, 1937.

где $\alpha = a^2/v$, $x_1 = x/\sqrt{v}$.

Соотношение (4.28) согласно теореме смещения может быть заменено следующим:

$$\psi\left(x, \frac{t}{\alpha}\right) \div \frac{q}{q-1} \exp\left(-\xi\sqrt{q} + \frac{\xi}{\sqrt{q}}\right),$$

где $\xi = x_1/\sqrt{\alpha}$, $q = p/\alpha$.

Введем в рассмотрение функции $\varphi_1(t) \div \exp\left(-\xi\sqrt{q} + \xi/\sqrt{q}\right)$, и $\varphi_2(t) = e^t \div q/(q-1)$. Легко установить (с использованием теоремы запаздывания), что оригиналом для изображения

$$\exp\left(-\xi r + \xi/r\right)$$

является функция

$$\varphi_1^*(t) = \begin{cases} 0, & t < \xi; \\ I_0\left[2\sqrt{\xi(t-\xi)}\right], & t > \xi. \end{cases}$$

Поэтому согласно преобразованию Эфроса

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_\xi^\infty I_0\left[2\sqrt{\xi(s-\xi)}\right] \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) ds.$$

На основании теоремы Бореля нетрудно записать теперь выражение для $\psi(x,t)$:

$$\psi\left(x, \frac{t}{a}\right) e^t = \int_0^t \varphi_1(z)\varphi_2'(t-z)\,dz + \varphi_2(0)\varphi_1(t);$$

отсюда

$$\psi(x,t) = e^{-\alpha t} \int_\xi^\infty \frac{I_0\left[2\sqrt{\xi(s-\xi)}\right]}{\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{s^2}{4\alpha t}\right) ds +$$

$$+ \int_0^{\alpha t} dz \int_\xi^\infty \frac{I_0\left[2\sqrt{\xi(s-\xi)}\right]}{\sqrt{\pi z}} \exp\left(-\frac{s^2}{4z} - z\right) ds.$$

Меняя порядок интегрирования в последней формуле, окончательно получаем:

$$\psi(x,t) = \int_{\xi}^{\infty} I_0\left[2\sqrt{\xi(s-\xi)}\right]\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\exp\left(-\frac{s^2}{4\tau}-\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left[e^{-s}\operatorname{erfc}\left(\frac{s}{2\sqrt{\tau}}-\sqrt{\tau}\right)-e^{-s}\operatorname{erfc}\left(\frac{s}{2\sqrt{\tau}}+\sqrt{\tau}\right)\right]\right\}ds.$$

В табл. 4.1 приведены значения функции $\psi(x,t)$.

Таблица 4.1

τ	ε					
	0	**0,25**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**
0	1	0	0	0	0	0
0,01	1	0,102	0,001	0	0	0
0,0625	1	0,488	0,080	0,020	0	0
0,25	1	0,762	0,525	0,182	0,039	0,005
0,5625	1	0,880	0,733	0,441	0,214	0,084
1	1	0,924	0,853	0,648	0,435	0,258

Аналогичным образом может быть решена задача об ударе по полубесконечному вязкопластическому стержню абсолютно твердым телом массой m, имевшим начальную скорость v_0.

Изображение смещения $U(x,p)$ по-прежнему описывается формулой

$$U(x,p) = A(p)\ \exp\left(-\frac{xp}{\sqrt{a^2+vp}}\right).$$

Граничное условие для конца стержня $x = 0$

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_0\sigma.$$

при законе деформирования $\sigma = C + Be + \mu\dot{e}$ после перехода к изображению $U(x,p)$ имеет вид

$$p^2A(p) - v_0 p = [C + (B+\mu p)U_x(0,p)]\frac{F_0}{m} \qquad (4.29)$$

(здесь уже учтено, что $u(0,0) = u_x(0,0) = 0$). Так как

$$U_x(x,p) = -\frac{Ap}{\sqrt{a^2+vp}}\exp\left(-\frac{xp}{\sqrt{a^2+vp}}\right),$$

то соотношение (4.29) используется для определения функции $A(p)$:

$$A(p)=A_1(p)+A_2(p);\ A_1(p)=\frac{v_0}{p+b\sqrt{p+\alpha}};$$

$$A_2(p)=\frac{w_0}{p\left(p+b\sqrt{p+\alpha}\right)};\ w_0=F_0C/m;\ b=F_0\rho_0\sqrt{v}/m.$$

Следовательно,

$$u(x,t)\div A_1\exp\left(-\frac{xp}{\sqrt{a^2+vp}}\right)+A_2\exp\left(-\frac{xp}{\sqrt{a^2+vp}}\right);$$

$$-e(x,t)\div\frac{A_1p}{\sqrt{a^2+vp}}\exp\left(-\frac{xp}{\sqrt{a^2+vp}}\right)+$$
$$+\frac{A_2p}{\sqrt{a^2+vp}}\exp\left(-\frac{xp}{\sqrt{a^2+vp}}\right). \qquad (4.30)$$

Найдем изображение $-e_1(x,t)$ оригинала:

$$\frac{A_1p}{\sqrt{a^2+vp}}\exp\left(-\frac{xp}{\sqrt{a^2+vp}}\right)=$$
$$=\frac{v_0p}{\sqrt{p+\alpha}\left(p+b\sqrt{p+\alpha}\right)}\exp\left(-\frac{x_1p}{\sqrt{p+\alpha}}\right).$$

Легко видеть, что функция $e_1(x,t)$ является решением задачи об ударе твердым телом массы m по упруговязкому стержню ($C=0$, $B=E$, $a^2=a_0^2=E/\rho_0$). По теореме смещения

$$-e_1(x,t)\exp(\alpha t)\div\frac{v_0\sqrt{p}}{p+b\sqrt{p-\alpha}}\exp\left(-x_1\sqrt{p}+\frac{x_1\alpha}{\sqrt{p}}\right).$$

Начальная функция второго множителя определяется без труда способом, указанным выше. Найдем поэтому изображение $f_1(t)$ первого множителя. С этой целью представим его в виде

$$f_1(t) \div \frac{v_0}{p_1 - p_2}\left[\frac{p\sqrt{p}}{p-p_1} - \frac{p\sqrt{p}}{p-p_2} - \frac{\alpha\sqrt{p}}{p-p_1} + \frac{\alpha\sqrt{p}}{p-p_2} - \frac{bp}{p-p_1} + \frac{bp}{p-p_2}\right],$$

где $p_{1,2} = \left(2a + b^2 \pm b\sqrt{4a + b^2}\right)/2$.

С использованием обозначений для изображений оригиналов $p/(p-p_i)$, $p\sqrt{p}/(p-p_i)$, $\sqrt{p}/(p-p_i)$ $(i = 1,2)$ получим

$$f_1(t) = \frac{v_0}{p_1 - p_2}\left\{e^{p_1 t}\left[\left(\sqrt{p_1} - \frac{\alpha}{\sqrt{p_1}}\right)\operatorname{erfc}\sqrt{p_1 t} - b\right] - \right.$$

$$\left. - e^{p_2 t}\left[\left(\sqrt{p_2} - \frac{\alpha}{\sqrt{p_2}}\right)\operatorname{erfc}\sqrt{p_2 t} - b\right]\right\}$$

или с учетом выражений для p_1, p_2, α

$$f_1(t) = \frac{v_0 b}{p_1 - p_2}\left[2e^{p_2 t} - e^{p_2 t}\operatorname{erfc}\sqrt{p_2 t} - e^{p_1 t}\operatorname{erfc}\sqrt{p_1 t}\right], f_1(t) = 0.$$

По теореме Бореля

$$-\frac{e_1(x,t)}{e_0} = \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{4\alpha}}}\int_0^{\tau}\left\{\left[\frac{p_2}{\alpha}\exp\left(\frac{p_2 z}{\alpha}\right) - \frac{p_2}{2\alpha}\exp\left(\frac{p_2 z}{\alpha}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{p_2 z}{\alpha}\right) - \right.\right.$$

$$- \frac{p_1}{2\alpha}\exp\left(\frac{p_1 z}{\alpha}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{p_1 z}{\alpha}\right) + \tag{4.31}$$

$$\left.\left.\frac{\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}}{2\sqrt{\pi\alpha z}}\right]\int_{\xi}^{\infty} I_0\left[2\sqrt{\xi(s-\xi)}\right]\exp\left(-\frac{s^2}{4(\tau - z)}\right)\frac{ds}{\sqrt{\pi(t-z)}}\right\}dz,$$

$$e_0 = v_0/a_0.$$

Изображение $e_2(x,t)$ второго слагаемого (4.30) находится аналогичным образом:

$$e_2(x,t)\exp(\alpha t) \div \left[\frac{w_1\sqrt{p}}{(p-p_1)(p-p_2)} - \right.$$

$$\left. -\frac{w_1 bp}{(p-p_1)(p-p_2)(p-\alpha)}\right]\exp\left(\frac{x_1\alpha}{\sqrt{p}} - x_1\sqrt{p}\right);$$

$$\frac{w_1\sqrt{p}}{(p-p_1)(p-p_2)} \div \frac{w_1}{p_1-p_2}\left[\frac{e^{p_1 t}}{\sqrt{p_1}}\operatorname{efrc}\sqrt{p_1 t} - \frac{e^{p_2 t}}{\sqrt{p_2}}\operatorname{efrc}\sqrt{p_2 t}\right] = \varphi_1(t);$$

$$\frac{w_1 bp}{(p-p_1)(p-p_2)(p-\alpha)} \div \frac{w_1 b}{p_1-p_2}\left[\frac{e^{p_1 t}}{p_1-\alpha} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2-\alpha} + \right.$$

$$\left. \frac{(p_1-p_2)e^{at}}{(p_1-\alpha)(p_2-\alpha)}\right] = \varphi_2(t);$$

$$\exp\left(\frac{x_1\alpha}{\sqrt{p}} - x_1\sqrt{p}\right) \div \int_{\xi}^{\infty} I_0\left[2\sqrt{\xi(s-\xi)}\right]\exp\left(-\frac{s^2}{4\alpha t}\right)\frac{ds}{\sqrt{\pi\alpha t}} = f_2(t),$$

где $p_{1,2} = \left(2\alpha + b \pm b\sqrt{4\alpha + b^2}\right)/2$; $w_1 = w_0/\sqrt{v} = F_0 C/(m\sqrt{v})$.

Отсюда

$$e_2(x,t) = \int_0^t \varphi'_{12}(z)\, f_2(t-z)\, dz, \quad \varphi_{12} = \varphi_1(t) - \varphi_2(t). \qquad (4.32)$$

Исследуем характер изменения деформации концевого сечения $x = 0$ стержня во времени. Для упруговязкого стержня формула (4.31) дает

$$-\frac{e_1(0,\tau/\alpha)}{e_0} = \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{4\alpha}}}\int_0^{\tau}\left[\frac{p_2}{\alpha}\exp\frac{p_2 z}{\alpha} + \frac{\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}}{2\sqrt{\pi\alpha z}} - \right.$$

$$-\frac{p_2}{2\alpha}\exp\left(\frac{p_2 z}{\alpha}\right)\operatorname{erfc}\sqrt{\frac{p_2 z}{\alpha}}-\frac{p_1}{2a}\exp\frac{p_1 z}{\alpha}\operatorname{erfc}\sqrt{\frac{p_1 z}{\alpha}}\Bigg]dz$$

или

$$-\frac{e_1(0,\tau/\alpha)}{e_0}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda/2}}\Bigg[e^{(k-1)\tau}-\frac{e^{(k-1)\tau}\operatorname{erfc}\sqrt{k\tau}}{2}-$$

$$-\frac{e^{\frac{\tau}{k-1}}\operatorname{erfc}\sqrt{\tau/k}}{2}\Bigg], \qquad (4.33)$$

где $\lambda=\left(\rho_0\mu^2F_0^2\right)/\left(2Em^2\right)$, $k=1+\lambda-\sqrt{\lambda^2+2\lambda}$. Из формулы (4.33) следует:

1) в случае бесконечной массы ($m\to\infty$) $e_1=-\frac{v_0}{a_0}\operatorname{erfc}\sqrt{a_0^2t/v}$, т. е. деформация концевого сечения довольно быстро растет до значения v_0/a_0, соответствующего упругому случаю;

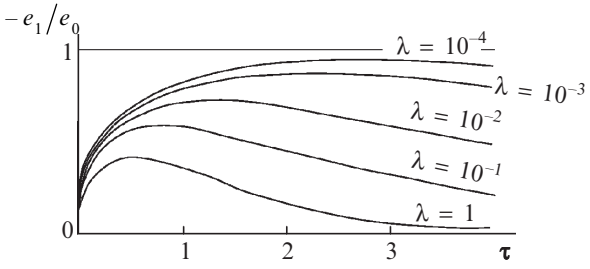


Рис. 4.9

2) для упругого стержня ($\mu = 0$), как и следовало ожидать, $e_1(o,t) = -v_0/a_0$;

3) при ударе телом конечной массы $k < 1$ и деформация концевого сечения асимптотически стремится к нулю.

Кривые изменения деформации концевого сечения в зависимости от времени приведены на рис. 4.9. Как видно из графиков, для больших значений λ (малых масс ударяющего тела) пренебрегать поперечным сжатием нельзя ввиду мало-

сти времени действия удара. Дифференцируя формулу (4.33) по времени, легко установить, что скорость деформации в начальный момент имеет неограниченное значение.

Для больших значений масс ударяющего тела параметр λ мал и вместо формулы (4.33) можно пользоваться приближенной, полученной разложением последней в ряд по λ:

$$\frac{e_1(0,\tau/a)}{e_0}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda/2}}\{\exp[(k-1)\tau]-\operatorname{erfc}\sqrt{\tau}\}. \qquad (4.34)$$

Максимальное значение деформации $e_{\max}$ и соответствующий ей момент времени $\tau_{\max}$ определяются из (4.34) и условия $\pi(k-1)^2\tau_{\max}=\exp(-2k\tau_{\max})$. Зависимость $e_{1\max}$ от λ приведена на рис. 4.10.

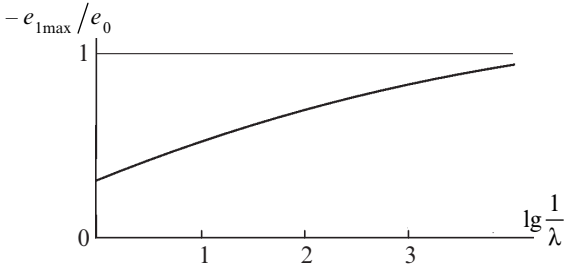


Рис. 4.10

Заметим, что при малых значениях λ аналогичным образом может быть упрощена формула (4.31):

$$-\frac{e_1(x,\tau/a)}{e_0}=\frac{e^{-\tau}}{\sqrt{1+\lambda/2}}\int_0^{\tau}\left[ke^{kz}-e^{z}\operatorname{erfc}\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt{\pi z}}\right]\times$$

$$\times\left\{\int_0^{\infty}I_0\left(2\sqrt{\xi(s-\xi)}\right)\exp\left(-\frac{s^2}{4(\tau-s)}\right)\frac{ds}{\sqrt{\pi(\tau-z)}}\right\}dz.$$

Если упругими свойствами стержня можно пренебречь, то для деформации $e_1(x,t)$ получим выражение

$$e_1(x,t) = -\frac{v_1}{b}\left[\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{vt}} - \exp\left(\frac{xb}{\sqrt{v}} + b^2 t\right)\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{vt}} + b\sqrt{t}\right],$$

из которого легко усмотреть возрастание со временем деформации в любом сечении стержня, причем при $t \to \infty$ имеем $e_1 \to -v_0 m/(\mu F_0)$.

До сих пор предполагалось, что стержень до удара не деформирован, а в процессе удара работает в упруговязком состоянии. В [15] рассмотрен также случай удара абсолютно твердым телом по полубесконечному стержню, предварительно сжатому до предела упругости. Очевидно, при этом $u_x(x,0) = e_s$, $u_t(x,0) = 0$, а зависимость между напряжением и деформацией выражается законом

$$\sigma = \sigma_s + E'(e - e_s) + \mu\frac{\partial e}{\partial t}, \tag{4.35}$$

где E' – модуль упрочнения.

Переходя от функции $u(x,t)$ к новой функции $u^*(x,t) = u(x,t) - e_s x$, для u^* получим нулевые начальные условия, соотношение же (4.35) преобразуется к виду

$$\sigma = \sigma_s + E'e^* + \mu\frac{\partial e^*}{\partial t}.$$

Дифференциальное уравнение (4.24) и полученные выше формулы (4.31), (4.32) останутся без изменения, если считать $C = \sigma_s$, $B = E'$ (при этом $a^2 = a_1^2 = E'/\rho_0$). В частности, на основании (4.33) для остаточной деформации $e^*(0,t)$ концевого сечения стержня получим формулу

$$-e_1^*(0,t) = -\frac{v_1 b}{p_1 - p_2}\left\{2\exp[(p_2 - \alpha_1)t] - \exp[(p_2 - \alpha_1)t]\operatorname{erfc}\sqrt{p_2 t} - \right.$$

$$\left. -\exp[(p_2 - \alpha_1)t]\operatorname{erfc}\sqrt{p_1 t}\right\} + \frac{w_1 b}{p_1 - p_2}\left\{\frac{2}{p_2 - p_1}\exp[(p_2 - \alpha_1)t] - \right.$$

$$\left. -\frac{\operatorname{erfc}\sqrt{p_2 t}}{p_2 - \alpha_1}\exp[(p_2 - p_1)t] - \frac{\operatorname{erfc}\sqrt{p_1 t}}{p_1 - \alpha_1}\exp[(p_2 - \alpha_1)]\right\} + \frac{p_1 - p_2}{\alpha_1 b^2}, \tag{4.36}$$

где $\alpha_1 = a_1^2/v$, $w_1 = F_0\sigma_s/\left(m\sqrt{v}\right)$. При очень большой массе $m \to \infty$ ударяющего тела ( ) последняя формула значительно упрощается:

$$e^*(0,t) = \frac{v_0}{\alpha_1}\operatorname{erf}\sqrt{\alpha_1 t}. \tag{4.37}$$

Формулы (4.36) и (4.37) могут быть использованы для вычисления экспериментальных значений коэффициента вязкости μ по измеренным в процессе удара величинам деформаций концевого сечения исследуемого образца.

Задача о распространении возмущений в упруговязком стержне конечной длины l при нулевых начальных и следующих граничных условиях:

$$\sigma = 0 \text{ при } x = 0;\ m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -F_0\sigma,\ u_t(0,l) = -v_0 \text{ при } x = l$$

рассматривалась в [16]. Результаты этой работы с исправлением отмеченных в ней неточностей (обусловленных ошибочным видом коэффициентов в уравнении колебаний стержня) приводятся ниже. Предварительно запишем граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0 \text{ при } x = 0; \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) \text{ при } x = l, \tag{4.39}$$

где $H = \alpha F_0/m$.

Применяя метод разделения переменных Фурье, ищем решение задачи в виде

$$u(x,t) = \sum_1^\infty T_n(t)\,X_n(x),$$

где $T_n(t)\,X_n(x)$ – частное решение уравнения (4.24), удовлетворяющее граничным условиям (4.38) и (4.39). Следовательно,

$$T''_n(t)\,X_n(x) = a^2 T_n\,X''_n + vT'_n\,X'_n;$$

$$X''_n / X_n = T''_n / (a^2 T_n + vT'_n) = -\lambda_n^2;$$

$$X_n = a_n \cos\lambda_n x + b_n \sin\lambda_n x;\ T_n = c_n e^{r_{1,n}t} + d_n e^{r_{2,n}t},$$

где $r_{1,n}$, $r_{2,n}$ – корни уравнения

$$r_n^2 + \lambda_n^2 (a^2 + vr_n) = 0. \qquad (4.40)$$

Удовлетворение граничному условию (4.38) приводит к необходимости положить $b_n = 0$; граничное условие на ударяемом конце дает уравнение для определения собственных значений λ_n:

$$T''_n X_n = -HX'_n \left(T_n + \frac{\mu}{\alpha}\right) T'_n;$$

$$T''_n = \lambda_n H \left(T_n + \frac{\mu}{\alpha} T'_n\right) \operatorname{tg}\lambda_n l \ \text{ при } x = l,$$

откуда

$$r_n^2 = \lambda_n H \operatorname{tg}\lambda_n l \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} r_n\right),$$

или с использованием (4.40)

$$p_n \operatorname{ctg} p_n = -\gamma,\ (p_n = l\lambda_n,\ \gamma = Hl/a^2)\ . \qquad (4.41)$$

Значение одного из корней уравнения (4.40) возрастает с увеличением номера n как n^2; значение второго корня при этом стремится к некоторому пределу. Если $\lambda_n = 0$, то $T_n = a_0 t + b$.

Выражение для смещения $u(x,t)$, удовлетворяющее всем поставленным начальным и граничным условиям, имеет вид

$$u(x,t) = a_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{p_n x}{l}\left[e^{r_{1,n}t} - e^{r_{2,n}t}\right],$$

где коэффициенты a_n находятся из соотношений

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{p_n x}{l}(r_{1,n} - r_{2,n}) = 0;\ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos p_n (r_{1,n} - r_{2,n}) = -v_0.$$

Второе соотношение с использованием первого удобно преобразовать к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (r_{1,n} - r_{2,n}) \left(\cos \frac{p_n x}{l} - \cos p_n \right) = v_0 .$$

Определив из последних соотношений значения коэффициентов a_n, приходим к следующей формуле:

$$u(x,t) = -\frac{v_0}{1+\gamma} t - 4 v_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin p_n \cos \frac{p_n x}{l} \left(e^{r_{1,n} t} - e^{r_{2,n} t} \right)}{(2 p_n - \sin 2 p_n)(r_{1,n} - r_{2,n})} . \quad (4.42)$$

Проведенный в [16] анализ показывает, что при $t > 0$ для $0 \le x \le 1$ функции $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ есть непрерывные функции обоих переменных и могут быть получены почленным дифференцированием (4.42). Аналогичными свойствами обладают функции $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}$ при $t > 0$ в интервале $0 \le x \le l$; при $x = l$ они претерпевают разрыв. При $t \to \infty$ функции $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}$ стремятся к нулю, а скорость $\frac{\partial u}{\partial t}$ стремится к значению

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\text{пред}} = -\frac{v_0}{1+\gamma} = -\frac{v_0}{1 + Hl/a^2} = -\frac{v_0}{1 + M/m} ,$$

где M – масса стержня.

Метод решения задач распространения пространственных возмущений в неидеально упругих средах (вязкоупругой, среде с упругим последействием), в частности в полупространстве при сосредоточенных воздействиях на его границы (или во внутренних точках), с использованием определенной информации о волнах в упругой среде изложен в [43–45].

Исследуем теперь характер распространения возмущений в стержнях, материал которых ведет себя как тело Максвелла (4.10). Уравнение движения (4.26) для этого случая решено в

[17] операционным методом как для полуограниченного стержня, так и для стержня конечной длины. Предварительно проинтегрируем (4.26) один раз по времени. Тогда получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\beta}{\mu}\frac{\partial u}{\partial t} + \varphi_0(x).$$

Будем считать, что скорость и деформация частиц стержня в начальный момент равны нулю, при этом последнее уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\beta}{\mu}\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{4.43}$$

Можно показать, что уравнению (4.43) удовлетворяют не только скорости $v = u_t(x,t)$ и смещения $u(x,t)$, но также деформации $e = u_x(x,t)$ и напряжения $\sigma(x,t)$.

Применяя оператор Хэвисайда к уравнению (4.43) для напряжения σ и уравнению продольных колебаний стержня, получаем

$$\bar{\sigma}_x = \rho_0 p \bar{v}; \tag{4.44}$$

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{1}{a_0^2}\left(p^2 + \frac{\beta}{\mu}p\right)\bar{\sigma}, \tag{4.45}$$

где черточками над буквами обозначены изображения соответствующих величин. При выводе уравнений (4.44) предполагалось, что $v = \sigma = 0$ при $t = 0$.

Предположим теперь, что граничным условием является

$$v = V(t) = V(t)H(t) \text{ при } x = 0 \text{ и } t > 0. \tag{4.46}$$

Здесь $H(t)$ – единичная функция Хэвисайда. При переходе от оригинала к изображению условие (4.46) преобразуется так:

$$\bar{v} = \frac{V(p)}{p} \text{ при } x = 0, \tag{4.47}$$

причем для постоянной скорости удара $V(p) = v_0$. С использованием (4.47) условие (4.44) может быть преобразовано к виду:

$$\bar{\sigma}_x = \rho_0 V(p). \tag{4.48}$$

Решением уравнения (4.45) является

$$\overline{\sigma} = c_0 \exp\left(\sqrt{\frac{p^2 + \frac{\beta}{\mu}p}{a_0^2}}\right) + c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{p^2 + \frac{\beta}{\mu}p}{a_0^2}}x\right).$$

Предположим, что рассматривается полуограниченный стержень. В случае ограниченности напряжения при $x \to \infty$ имеем

$$\overline{\sigma} = c_1 \exp\left(-\sqrt{p^2 + \frac{\beta}{\mu}p}\,\frac{x}{a_0}\right)$$

или с учетом (4.48)

$$\overline{\sigma} = -\frac{\rho_0 a_0 V(p)}{\left(p^2 + \frac{\beta}{\mu}p\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\sqrt{p^2 + \frac{\beta}{\mu}p}\,\frac{x}{a_0}\right]. \qquad (4.49)$$

Замечая, что $p^2 + \frac{\beta}{\mu}p = \left(p + \frac{\beta}{2\mu}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2$, и применяя теорему обращения, получаем окончательную формулу для напряжения:

$$\sigma = -\rho_0 a_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t V(t-\tau)\, e^{-\frac{\beta t}{2\mu}} I_0\left[\frac{\beta}{2\mu}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{a_0}\right)^2}\right] H\left(\tau - \frac{x}{a_0}\right) d\tau =$$

$$= -\rho_0 a_0 \left\{\int_0^t V'(t-\tau)\, e^{-\frac{\beta t}{2\mu}} I_0\left[\frac{\beta}{2\mu}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{a_0}\right)^2}\right] H\left(\tau - \frac{x}{a_0}\right) d\tau + \right.$$

$$\left. + V_0 e^{-\frac{\beta t}{2\mu}} I_0\left[\frac{\beta}{2\mu}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{a_0}\right)^2}\right] H\left(\tau - \frac{x}{a_0}\right)\right\}. \qquad (4.50)$$

При постоянной скорости удара последняя формула значительно упрощается:

$$\sigma = -\rho_0 a_0 v_0 e^{-\frac{\beta t}{2\mu}} I_0\left[\frac{\beta}{2\mu}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x}{a_0}\right)^2}\right] H\left(\tau - \frac{x}{a_0}\right) \qquad (4.51)$$

или

$$\frac{\sigma}{-\rho_0 a_0 v_0} = f = e^{-\frac{\tau}{2}} I_0\left[\frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 - \xi^2}\right] H(\tau - \xi), \qquad (4.52)$$

где $\tau = t/t_0$, $\xi = x/(a_0 t_0)$, $t_0 = \mu/\beta$.

График функции $f(\tau,\xi)$ приведен на рис. 4.11. Из последней формулы, в частности, видно, что на переднем фронте упругой волны $\tau = \xi$, распространяющейся в стержне, материал которого ведет себя как тело Максвелла, напряжение в $e^{-\tau/2}$ раз меньше, чем в упругом стержне.

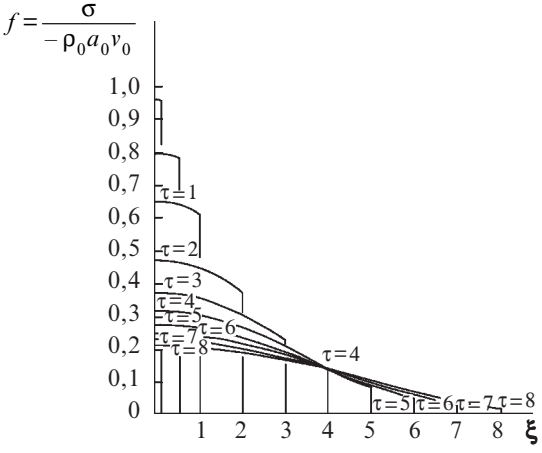


Рис. 4.11

Таким образом, при времени удара порядка времени релаксации имеет место значительное затухание напряжения.

Для стержня конечной длины l_1, второй конец которого свободен ($\sigma = 0$ при $x = l$, решение уравнения (4.45), удовлетворяющее условию (4.46), имеет вид:

$$\overline{\sigma} = -\frac{\rho_0 a_0 V(p)}{\left(p^2+\frac{\beta p}{\mu}\right)^{1/2}} \frac{\exp\left[\frac{l-x}{a_0}\sqrt{p^2+\frac{\beta}{\mu}p}\right]-\exp\left[-\frac{l-x}{a_0}\sqrt{p^2+\frac{\beta}{\mu}p}\right]}{\exp\left[\frac{l}{a_0}\sqrt{p^2+\frac{\beta}{\mu}p}\right]+\exp\left[-\frac{l}{a_0}\sqrt{p^2+\frac{\beta}{\mu}p}\right]}$$

или

$$\overline{\sigma} = -\frac{\rho_0 a_0 V(p)}{\left(p^2+\frac{\beta}{\mu}p\right)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left\{\exp\left[-\frac{2nl+x}{a_0}\sqrt{p^2+\frac{\beta}{\mu}p}\right]-\right.$$

$$\left.-\exp\left[-\frac{2(n+1)l-x}{a_0}\sqrt{p^2+\frac{\beta}{\mu}p}\right]\right\}. \qquad (4.53)$$

Применяя теорему обращения, получаем окончательную формулу для напряжения:

$$\overline{\sigma} = -\rho_0 a_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t V(t-\tau)e^{-\frac{\beta\tau}{2\mu}} \sum_0^{\infty}(-1^n)\left[I_0\left(\frac{\beta}{2\mu}\sqrt{\tau^2-\left(\frac{2l+x}{a_0}\right)^2}\right)\times\right.$$

$$\times H\left(\tau-\frac{2l+x}{a_0}\right)-I_0\left(\frac{\beta}{2\mu}\sqrt{\tau^2-\left(\frac{2(n+1)l-x}{a_0}\right)^2}\right)\times$$

$$\left.\times H\left(\tau-\frac{2(n+1)l-x}{a_0}\right)\right]d\tau. \qquad (4.54)$$

При постоянной скорости удара формуле для напряжения можно придать иной, более наглядный вид. При этом будем исходить не из формулы (4.54), а, как и авторы [17], непосредственно из рассмотрения картины распространения волн. Очевидно, до момента $t = l/a_0$ для распределения напряжений $\sigma_1(x,t)$ в стержне конечной длины справедлива формула (4.51). В интервале $l/a_0 \le t \le 2l/a_0$ напряжение является суперпозицией двух решений для полуограниченного стержня

$$\sigma(x,t) = \sigma_1(x,t) - \sigma_1(2l - x,t);$$

в интервале $2l/a_0 \le t \le 3l/a_0$ – суперпозицией трех решений:

$$\sigma(x,t) = \sigma_1(x,t) - \sigma_1(2l - x,t) - \sigma_1(2l + x,t);$$

в интервале $3l/a_0 \le t \le 4l/a_0$ – суперпозицией четырех решений:

$$\sigma(x,t) = \sigma_1(x,t) - \sigma_1(2l - x,t) - \sigma_1(2l + x,t) + \sigma_1(4l - x,t);$$

и т. д. Аналогичным образом могут быть получены формулы для случая закрепленного конца.

На рис. 4.12 приведен график распределения относительного напряжения в конечном стержне длиной $l = 2a_0\tau_0$ при ударе с постоянной скоростью (конец $\xi = 2$ свободен от напряжений). Очевидно, при $\tau \le 2$ распределение напряжений соответствует случаю неограниченного стержня. При достижении конца интенсивность напряжения на переднем волновом фронте уже упала ниже 0,5. Если растягивающие напря-

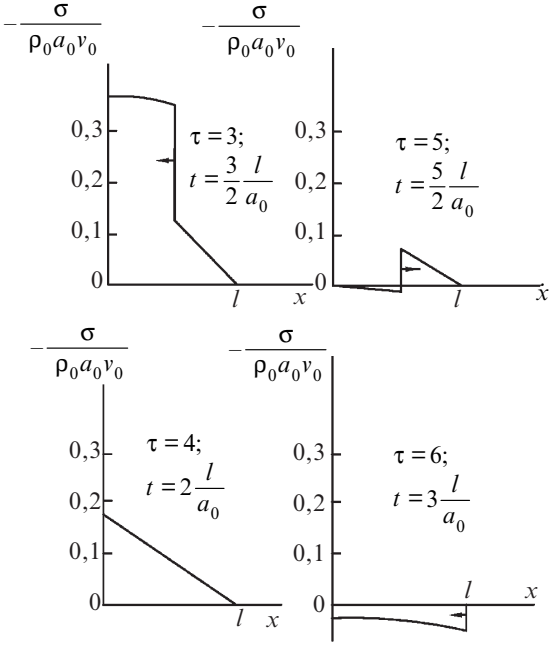


Рис. 4.12

жения на конце, подвергнувшемся удару в упругом стержне, возникают при $\tau = 4$, то здесь они возникают значительно позднее (последний факт может служить основой для экспериментов по определению коэффициента вязкости).

На рис. 4.13 приведен график изменения относительного напряжения в стержне такой же длины, как и в предыдущем примере, но с закрепленным концом $\xi = 2$ (напомним, что для упругого стержня $f = 1$ при $\tau < 2$, $f = 2$ при $2 < \tau < 6$, $f = 3$ при $6 < \tau < 10$ и т. д.).

Исследование характера распространения возмущений в стержне конечной длины (уравнение продольных колебаний которого – (4.11)) проведено в [9]. Исследованию распространений возмущений в телах, закон деформирования которых описывается уравнением (4.14), посвящена работа [18], в которой рассмотрены задачи о поперечных колебаниях балок, плит и радиальных колебаниях полого шара.

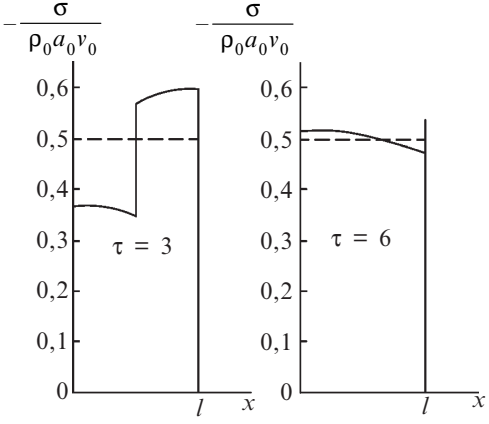


Рис. 4.13

§ 4.3. Распространение возмущений в вязкопластической среде

Рассмотрим сначала задачу, поставленную в [4] и имеющую большое методологическое значение в теории вязкопластического течения. Пусть по цилиндрическому образцу длиной L_0 и радиуса R_0, стоящему на массивной цилиндри-

ческой плите (рис. 4.14), производится удар с начальной скоростью v_0 твердым телом массы M. Требуется определить изменение длины образца во времени. Предполагается, что масса образца мала в сравнении с массой ударяющего тела.

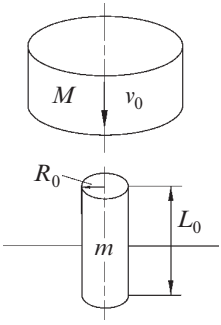


Рис. 4.14

Обозначим через w и v компоненты скорости соответственно в направлении оси образца Ox и его радиуса r. Из условия несжимаемости материала имеем

$$\frac{dw}{dx} + \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} = 0 . \qquad (4.55)$$

Можно предположить, что напряжения σ_1 и σ_0, являющиеся главными, равны нулю. Отсюда в предположении вязкопластического характера течения, как нетрудно показать, следует, что окружная и радиальные скорости $\frac{v}{r}$ и $\frac{dv}{dr}$ одинаковы, т. е.

$$\frac{dv}{dr} = \frac{v}{r} .$$

В результате уравнение неразрывности упрощается:

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{2v}{r} .$$

Предположив также, что $\frac{dw}{dx}$ зависит только от времени:

$$\frac{dw}{dx} = -\omega(t),$$

получим следующие формулы для скоростей:

$$w = -x\,\omega(t); \quad v = -\frac{r}{2}\,\omega(t). \qquad (4.56)$$

Формулу для напряжения σ_x запишем в виде:

$$\sigma_x = -(\sigma_k + 3\mu\,\omega).$$

Здесь σ_k – пластическое сопротивление, μ – коэффициент абсолютной вязкости. Из соотношения (4.56) имеем:

$$\frac{dL}{dt} = -L\,\omega(t); \quad \frac{dR}{dt} = \frac{R}{2}\,\omega(t),$$

где L и R – переменные длина и радиус образца. Отсюда

$$L = L_0 \exp\left(-\int_0^t w\, dt \right); \; R = R_0 \exp\left(-\int_0^t \frac{w}{2}\, dt \right).$$

Из дифференциального уравнения движения твердого тела следует, что

$$M \frac{d^2 L}{dt^2} = -\pi R^2 \sigma_x = \pi R_0^2 (\sigma_k + 3\mu\omega) \exp\left(\int_0^t \omega\, dt \right)$$

или

$$\frac{\sigma_k}{L} = \rho \frac{d^2 L}{dt^2} + \frac{3\mu}{L^2} \frac{dL}{dt},$$

где $\rho = M / \left(\pi R_0^2 L_0\right)$ – отношение массы тела к объему образца.

Полагая, что $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3\mu}{L\sqrt{\sigma_k p}} - \sqrt{\frac{p}{\sigma_k}} \frac{dL}{dt} \right)$, последнее уравнение преобразуем к виду

$$\frac{dL}{dy} - 2yL = -\frac{3\mu}{\sqrt{\sigma_k \; p/2}}.$$

Его решением, удовлетворяющим начальному условию $L = L_0, \frac{dL}{dy} = -v_0$, является

$$L / L_0 = \exp(y^2 - y_0^2) - a\sqrt{\pi}\left[\Phi(y) - \Phi(y_0)\right]\exp(y^2),$$

$$a = 3\mu / L_0 \sqrt{2\sigma_k \rho};$$

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^y e^{-z^2} dz; \; y_0 = a(1 + \mathrm{Re}/3); \; \mathrm{Re} = v_0 L_0 \rho / \mu.$$

Наибольшее укорочение образца до длины L_1 будет в момент полной потери скорости ударяющим телом, т.е. при $y_1 = 3\mu / \left(L_1 \sqrt{2\sigma_k p}\right) = aL_0 / L_1 = a/(1-e)$, где $e = (L_0 - L_1)/L_n$.

Следовательно,

$$L_1 / L_0 = \exp(y_1^2 - y_0^2) - \alpha\sqrt{\pi}[\Phi(y_1) - \Phi(y_0)]\exp(y_1^2).$$

Полагая

$$F(y) = \Phi(y) + \frac{1}{2y}\Phi'(y) = \Phi(y) + \frac{1}{y\sqrt{\pi}}\exp(-y^2),$$

последнее выражение представим в виде

$$F(y_1) = F(y_0) + \frac{\mathrm{Re}}{3}\frac{\Phi'(y_0)}{2y_0}. \qquad (4.57)$$

Соотношение (4.57) при заданных L_0, R_0, v_0, M и L_1 является уравнением для определения экспериментального значения коэффициента абсолютной вязкости μ.

Эксперименты по определению абсолютного коэффициента вязкости алюминия и стали, описанные в [4, 5, 20], проводились на пневматическом копре[1] конструкции А.А. Ильюшина. Эксперимент, поставленный в соответствии с описанной выше задачей, преследовал две цели. Во-первых, на основании измерения укорочения какого-либо образца определить, согласно (4.57), абсолютный коэффициент вязкости металла; во-вторых, используя найденное значение коэффициента абсолютной вязкости в теоретических расчетах зависимости $L(t)$, сравнить с ней характер изменения во времени длины образцов других размеров (с иными значениями L_0 и R_0) в эксперименте.

Для определения коэффициента абсолютной вязкости алюминия были использованы данные двух опытов, результаты которых приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

№	σ_k, кг/см^2	L_0, см	R_0, см	v_0, см/с	$\omega_0 = v_0 / L_0$, с$^{-1}$	L_1, см	$e_{эксп}$
1	1000	4,262	1,900	1685	396	2,591	0,3923
2	1000	4,260	1,925	1685	396	2,540	0,4037

По средним значениям параметров $L_{0\,ср}$ = 4,261 см, $R_{0\,ср}$ = = 1,912 см, $e_{ср}$ = 0,394 было подсчитано μ = 0,302 кг с/см^2.

[1] Подробное описание конструкции копра дано, например, в [4|.

Затем были проведены эксперименты по определению $e_{эксп}$ с образцами других размеров; одновременно было рассчитано теоретическое значение e для этих экспериментов (при μ = = 0,302 кг с/см^2). Результаты экспериментов и теоретического расчета, как видно из табл. 4.3, показывают вполне удовлетворительное согласование.

Таблица 4.3

№	L_0, см	R_0, см	v_0, см/с	ω_0, с$^{-1}$	$e_{эксп}$	$e_{теор}$
1	4,250	1,900	2060	485	0,4804	0,5005
2	3,500	1,753	1710	487	0,5030	0,4960
3	3,510	1,753	840	239	0,1872	0,1710
4	5,000	2,001	2400	480	0,516	0,5090
5	5,000	2,001	1082	216	0,1735	0,1710

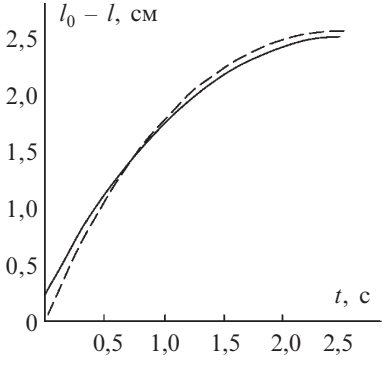


Рис. 4.15

В некоторых экспериментах была записана не только начальная скорость удара, но и весь процесс изменения длины во времени. Результаты теоретического расчета и эксперимента с алюминиевым образцом при L_0 = 8 см, R_0 = 2,36 см, v_0 = 2390 см/с приведены на рис. 4.15. Почти полное совпадение теоретической и экспериментальной кривых на рис. 4.15 является еще одним подтверждением положенных в основу решения гипотез.

Отметим интересный факт: образцы после эксперимента сохраняют строго цилиндрическую форму, как и предсказывает теория.

Приведем заимствованные из [20] результаты соответствующих экспериментов по определению абсолютной вязкости стали. Большинство образцов было изготовлено из стали 6 (C – 0,36%; M_n – 0,75%; S_i – 0,18%; P – 0,043%; S – 0,04%).

В качестве исходного для определения коэффициента абсолютной вязкости служил эксперимент со следующими данными: L_0 = 2,50 см; R_0 = 1 см; e = 0,556; v_0 = 2230 см/с. Значение коэффициента μ[1] оказалось равным 0,4 кг с/см^2 (при изменении ω_0 от 671 до 2931). В табл. 4.4 сопоставлены теоретически рассчитанные (при μ = 0,4 кг с/см^2) и экспериментально измеренные значения e при L_0 = 2,5 и 1,8 см и R_0 = 1 см и R_0 = 0,65 см соответственно.

Таблица 4.4

№ образца	L_0, см	R_0, см	ω_0, с$^{-1}$	v_0, см/с	L, см	$e_{эксп}$, %	$e_{теор}$, %
1	2,498	1,002	971	2420	0,938	62,3	61,4
2	2,491	1,002	1027	2560	0,936	62,4	65,5
3	2,500	1,002	891	2230	1,081	56,7	56,6
4	2,503	1,002	891	2230	1,077	57,0	56,6
5	2,500	1,002	867	2175	1,094	56,4	55,0
6	2,499	1,002	858	2145	1,175	53,0	54,2
7	2,503	1,002	858	2145	1,178	53,0	54,2
8	2,497	1,002	809	2020	1,285	48,5	47,8
9	2,497	1,002	671	1675	1,510	39,4	38,9
10	1,802	0,650	1965	3562	1,157	35,8	36,9
11	1,801	0,650	1965	3562	1,170	35,0	36,9
12	1,803	0,650	1965	3562	1,160	35,7	36,9
13	1,804	0,650	2254	4069	1,005	44,3	43,7
14	1,805	0,650	2271	4100	0,993	45,0	44,5
15	1,800	0,650	2550	4591	0,862	52,1	50,8
16	1,805	0,650	2534	4575	0,867	52,0	50,6
17	1,804	0,650	2930	5290	0,742	58,9	59,2
18	1,800	0,650	2910	5245	0,748	58,5	58,0
19	1,802	0,650	2850	5145	0,760	57,5	57,1

[1] Следует помнить, что рассчитанная по формуле (4.84) величина μ является средним значением коэффициента абсолютной вязкости в диапазоне скоростей деформирования от 0 до ω_0.

Дополнительные эксперименты, проведенные при $\omega_0 \approx \approx 6 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10^3$ с$^{-1}$, дали то же значение коэффициента абсолютной вязкости стали 6. Обработка ряда экспериментов с образцами из различных марок нормализованной стали ($C \approx \approx 0{,}12 - 1\%$, $\sigma_k \approx 4000 - 1000$ кг/см^2) дала для коэффициента μ последних значения 0,3 – 0,4 кг с/см^2.

Продолжим изложение теоретических исследований, относящихся к проблеме распространения возмущений в вязкопластической среде.

1. ***Деформирование цилиндра под действием внутреннего давления.*** Эта задача решена в [4]. Так как напряженное состояние здесь характеризуется главными напряжениями σ_r и σ_θ, то закон вязкопластического деформирования записывается в виде

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2K - 4\mu \frac{du_r}{dr},$$

где K – пластическая постоянная, а u_r – радиальная скорость, или с использованием уравнения неразрывности $du_r/dr + + u_r/r = 0$

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2K + 4\mu \frac{u_r}{r} = 2K + 4\mu \frac{c(t)}{r^2}.$$

Учитывая, кроме того, что гидростатическое давление p связано с главными напряжениями σ_r и σ_θ формулой

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2p,$$

получаем следующие формулы для последних:

$$\sigma_r = -p - \left(K + \frac{2\mu c}{r^2}\right); \ \sigma_\theta = -p + \left(K + \frac{2\mu c}{r^2}\right). \qquad (4.58)$$

Из уравнения количества движения

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r}\right) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}$$

получаем

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \rho_0 \left(\frac{1}{r}\frac{dc}{dt} - \frac{c^2}{r^3}\right) - \frac{2}{r}\left(K + \frac{2\mu c}{r^2}\right).$$

Если при $r = r_b(t)$ $\sigma_r = 0$, то

$$\sigma_r = -\left(K + \frac{\rho_0}{2}\frac{dc}{dt}\right)\ln\frac{r_b^2}{r^2} - \frac{4\mu c - \rho_0 c^2}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_b^2}\right). \quad (4.59)$$

Заметим, что в пренебрежении силами инерции формула для σ_r будет иметь вид:

$$\sigma_r = -K\ln\frac{r_b^2}{r^2} - 2\mu c\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_n^2}\right) \ (c = \text{const}).$$

Полагая здесь $\sigma_r = -p$ при $r = r_a(t)$, находим

$$\frac{c}{r_b^2} = \frac{c}{r_a^2} - \frac{p}{2\mu} + \frac{K}{2\mu}\ln\frac{r_b^2}{r_a^2}$$

или с использованием условия несжимаемости $r_a^2 - r_b^2 = a^2 - b^2$

$$\frac{c}{r_b^2} = \frac{r_a^2}{b^2 - a^2}\left[\frac{p}{2\mu} - \frac{K}{2\mu}\ln\frac{r_b^2}{r_a^2}\right].$$

Так как величина $\omega = c/r_b^2$ есть не что иное, как скорость деформирования, которая должна быть величиной положительной, то движение возможно лишь при условии $p \geq 2K\ln(r_b/r_a)$. Отсюда, в частности, следует, что для начала движения в момент $t = 0$ давление p_0 должно превосходить значение

$$2K\ln\frac{r_b(0)}{r_a(0)} = 2K\ln\frac{b}{a}.$$

Здесь a – внутренний, b – наружный радиусы цилиндра. Давление, действующее на внутренней поверхности цилиндра, удобно представить в форме

$$p = K\sigma(t)\ln\frac{b^2}{a^2}, \quad (4.60)$$

где коэффициент σ указывает, во сколько раз приложенное давление превосходит минимально допустимое для начала

движения значение. Возвращаясь теперь к формуле (4.59) и учитывая (4.60), получим

$$K\sigma \ln\frac{b^2}{a^2} = \left(K + \frac{\rho_0}{2}\frac{dc}{dt}\right)\ln\frac{r_b^2}{r_a^2} + \frac{4\mu c - \rho_0 c^2}{2}\left(\frac{1}{r_a^2} - \frac{1}{r_b^2}\right). \quad (4.61)$$

Интегрируя уравнение $u_r = c/r$, найдем законы изменения $r_a(t)$ и $r_b(t)$:

$$r_a(t) = \sqrt{a^2 + 2\int_0^t c\,dt}\,; \quad r_b(t) = \sqrt{b^2 + 2\int_0^t c\,dt}\,.$$

Подстановка этих выражений в соотношение (4.61) приводит к тому, что последнее становится интегродифференциальным уравнением для определения единственной неизвестной функции $c(t)$. Его можно привести к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$z\frac{dz}{dx} + z = f(x), \quad (4.62)$$

если положить, что

$$x = \frac{1}{2m}\left(1 - \sqrt{\frac{\ln r_b^2 - \ln r_a^2}{\ln\beta^2}}\right); \; m = \frac{\rho_0 K a^2}{16\mu^2}\frac{\beta^2 \ln\beta^2}{\beta^2 - 1}(\sigma_0 - 1);$$

$$\sigma_0 = \sigma(0); \; \beta = \frac{b}{a};$$

$$z = \frac{2(\beta^2 - 1)\mu r_b^2}{(a_0 - 1)K\beta^2 \ln\beta^2 a^2}(1 - 2mx)\,\omega(t); \; \omega(t) = \frac{r_a}{r_b^2}\frac{dr_a}{dt};$$

$$f(x) = \frac{\sigma - (1 - 2mx)^2}{\sigma_0 - 1}\frac{\beta^{2(1-2mx)^2}(\beta^2 - 1)^2}{\beta^2\left[\beta^{2(1-2mx)^2} - 1\right]}(1 - 2mx).$$

Очевидно, при $x = 0$ имеем $z = 0$.

В работе [4], во-первых, установлены рекуррентные формулы для коэффициентов c_n разложения функции $z(x)$ в ряд

$z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n/2}$ и, во-вторых, предложен эффективный метод графического построения искомой интегральной кривой уравнения (4.62).

2. ***Вращение цилиндра в вязкопластической среде.*** Пусть цилиндр радиуса a бесконечной протяженности, неизменно связанный с вязкопластической средой, с момента $t = 0$ начинает вращаться по определенному закону. Как известно (см. § 3.2), уравнение движения для рассматриваемого случая имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} = \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{4.63}$$

причем зависимость между касательным напряжением $\tau_{r\theta}$ и скоростью сдвига $e_{r\theta} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}$ определяется законом вязкопластического течения:

$$\tau_{r\theta} = \pm K + \mu e_{r\theta}. \tag{4.64}$$

Следовательно, уравнение движения может быть приведено к виду

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2}\right) - \frac{2K}{r} \tag{4.65}$$

(перед K в формуле (4.64) оставлен отрицательный знак, так как $\frac{\partial \omega}{\partial r} < 0$).

Для среды, движение которой начинается из состояния покоя, начальные и граничные условия можно записать следующим образом:

$$w(r,0) = 0 \text{ при } t = 0; \tag{4.66}$$

$$w(a,t) = \psi(t) \text{ при } r = a; \tag{4.67}$$

$$w(b,t) = \frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=b} = 0 \text{ при } r = b(t). \tag{4.68}$$

Здесь $b(t)$ – граница вязкопластического течения. Уравнение (4.65) и условия (4.66) –(4.68) для безразмерных величин $u = \omega/v_0$, $x = r/a$, $\tau = Kt/\mu$ принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = v_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x^2}\right) - \frac{2}{\mathrm{Re}\,x}; \tag{4.69}$$

$$u(x,0) = 0; \tag{4.70}$$

$$u(x,\tau) = \psi(\tau); \tag{4.71}$$

$$u(x_1,\tau) = u_x(x_1,\tau) \text{ при } x = x_1(\tau). \tag{4.72}$$

Условия (4.72) можно заменить одним: $u(\infty,t) = 0$ (по аналогии с задачами асимптотического пограничного слоя вязкой жидкости). При такой замене удается эффективно использовать математические методы решения линейных уравнений в частных производных для случая, когда краевые условия ставятся на неподвижных границах. Здесь

$$\mathrm{Re} = av_0\rho_0/\mu;\ v_1 = 1/(S\,\mathrm{Re});\ S = aK/(\mu v_0). \tag{4.73}$$

Постановка сформулированной задачи дана в [21], причем для более общего закона течения с упрочнением

$$\tau_{r\theta} = \pm K + \mu e_{r\theta} + E\int_0^t e_{r\theta}\,dt.$$

Там же получено ее приближенное решение на основе пренебрежения силами инерции. Последнее допущение хорошо себя оправдывает при определенных числах Re.

Решение нескольких частных случаев рассматриваемой задачи дано в [22], общее решение получено в [23] методом операционного исчисления и приводится ниже.

Уравнение (4.69) имеет частное решение $-\dfrac{2\tau}{x\,\mathrm{Re}}$. Следовательно, для функции $\omega(x,\tau)$, определяемой соотношением $u = -2\tau/(x\,\mathrm{Re}) + \omega(x,\tau)$, уравнение (4.69) приводится к однородному:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = v_1\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\omega}{x^2}\right). \tag{4.74}$$

Начальное и граничное условия для $\omega(x,\tau)$ таковы:

$$\omega(x,0)=0\ \ (x>1);\ \omega(1,\tau)=f(\tau)+2\tau/\mathrm{Re};\ \omega(\lambda,\tau)=2\tau/(\lambda\,\mathrm{Re}).$$

Здесь $\lambda = x$ и предполагается постоянным, поэтому второе граничное условие (4.72) не используется.

Вначале рассмотрим случай ограниченной среды, а затем предельным переходом $\lambda\to\infty$ из него получим решение для неограниченного пространства.

Применяя к функции ω преобразование Карсона – Лапласа

$$\Omega(x,p)=p\int_0^\infty e^{-p\tau}\,\omega(x,\tau)\,d\tau$$

для изображения $\Omega(x,p)$, получаем уравнение Бесселя

$$\Omega''+\frac{1}{x}\Omega'-\left(\frac{1}{x^2}+\varkappa^2\right)\Omega=0, \tag{4.75}$$

где $\varkappa^2=\mathrm{Re}\,Sp$, удовлетворяющее условиям $\Omega(1,p)=\varphi(p)$; $\Omega(\lambda,p)=2/(\lambda\,\mathrm{Re}\,p)$; $\Omega(x,\infty)=0\ (x>1)$. Здесь

$$\varphi(p)=p\int_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)\,d\tau+\frac{2}{\mathrm{Re}\,p}.$$

Уравнение (4.75) имеет решение

$$\Omega=C_1I_1(i\varkappa x)+C_2I_1(i\varkappa x),$$

где C_1 и C_2 – функции параметра p, определяемые из условий $C_1I_1(i\varkappa)+C_2N_1(i\varkappa)=\varphi(p)$; $C_1I_1(i\varkappa\lambda)+C_2N_1(i\varkappa\lambda)=2/(\lambda\,\mathrm{Re}\,p)$. Отсюда

$$\Omega(x,p)=\frac{I_1(i\varkappa\lambda)\,\varphi(p)-\dfrac{2}{\lambda\,\mathrm{Re}\,p}I_1(i\varkappa)}{I_1(i\varkappa\lambda)\,N_1(i\varkappa)-N_1(i\varkappa\lambda)\,I_1(i\varkappa)}N_1(i\varkappa x)+$$

$$+\frac{N_1(i\varkappa\lambda)\,\varphi(p)-\dfrac{2}{\lambda\,\mathrm{Re}\,p}N_1(i\varkappa)}{I_1(i\varkappa)\,N_1(i\varkappa\lambda)-I_1(i\varkappa\lambda)\,N_1(i\varkappa)}N_1(i\varkappa x)$$

или в более удобной форме

$$\Omega(x, p) = \varphi(p)\frac{D(i\varkappa, x, \lambda)}{D(i\varkappa, 1, \lambda)} + \frac{2}{\lambda \operatorname{Re} p}\cdot\frac{D(i\varkappa, 1, x)}{D(i\varkappa, 1, \lambda)};$$

$$D(i\varkappa, x, y) = I_1(i\varkappa, x)\, N_1(i\varkappa, y) - I_1(i\varkappa, y)\, N_1(i\varkappa, x).$$

Очевидно, что $D(i\varkappa, x, x) = 0$. Из асимптотических формул для бесселевых функций следует, что для больших значений аргумента

$$D(i\varkappa, x, y) = \frac{2}{\pi x\sqrt{xy}}\operatorname{sh}[\varkappa(y - x)].$$

Для перехода к оригиналу $\omega(x,\tau)$ воспользуемся второй теоремой разложения Хэвисайда, согласно которой оригинал, имеющий изображением дробь $F_1(p)/F_2(p)$, представим в виде

$$\frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_1^{\infty}\frac{F_1(p_n)}{p_n F_2'(p_n)}e^{p_n\tau},$$

где p_n – корень уравнения $F_2(p) = 0$.

Для рассматриваемого случая $D(i\varkappa, 1, \lambda)$ – четная функция $i\varkappa$, имеющая корни вида $\varkappa = \pm i\alpha$, где α – корень уравнения $I_1(\alpha)N_1(\alpha\lambda) - I_1(\lambda\alpha)N_1(\alpha) = 0$. Кроме того,

$$\frac{\partial D}{\partial(i\varkappa)} = Q(i\varkappa) = I_1(i\varkappa\lambda)\, N_0(i\varkappa) - I_0(i\varkappa)\, N_1(i\varkappa\lambda) +$$
$$+\lambda\left[I_0(i\varkappa\lambda)\, N_1(i\varkappa) - I_1(i\varkappa)\, N_0(i\varkappa\lambda)\right].$$

Так как $Q(i\varkappa)$ нечетная функция своего аргумента, то

$$\left[\varkappa\frac{\partial Q}{\partial\varkappa}\right]_{\varkappa=\pm\alpha} = -\alpha Q(\alpha),$$

причем при составлении оригинала необходимо попарно объединять члены, соответствующие $\pm\alpha$. Для малых значений $i\varkappa$ имеем $I_1(i\varkappa) \approx i\varkappa/2, N_1(i\varkappa) \approx -2/(\pi i\varkappa)$. Следовательно,

$$\frac{D(0,x,\lambda)}{D(0,1,\lambda)}=\frac{\lambda^2-x^2}{x(\lambda^2-1)};\ \frac{D(0,1,x)}{D(0,1,\lambda)}=\frac{\lambda(x^2-1)}{x(\lambda^2-1)};$$

поэтому

$$\frac{D(i\varkappa,x,\lambda)}{D(i\varkappa,1,\lambda)}\div\frac{\lambda^2-x^2}{x(\lambda^2-1)}-2\sum\frac{D(\alpha,x,\lambda)}{\alpha Q(\alpha)}e^{-\alpha^2\nu_1\tau}=f_1(\tau);$$

$$\frac{D(i\varkappa,1,x)}{D(i\varkappa,1,\lambda)}\div\frac{\lambda(x^2-1)}{x(\lambda^2-1)}-2\sum\frac{D(\alpha,1,x)}{\alpha Q(\alpha)}e^{-\alpha^2\nu_1\tau}=f_2(\tau).$$

Используя теперь теорему Бореля, найдем:

$$\omega(x,\tau)=\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau\varphi(\xi)f_1(\tau-\xi)d\xi+\frac{2}{\lambda\,\mathrm{Re}}\int_0^\tau f_2(\tau-\xi)d\xi\,.$$

Подставляя в последнюю формулу развернутые выражения для f_1, f_2 и φ, придем к окончательному выражению для скорости:

$$u(x,\tau)=2\nu_1\sum\frac{\alpha D(\alpha,x,\lambda)}{Q(\alpha)}-\alpha^2\nu_1\tau\int_0^\tau f(\xi)\,e^{-\alpha^2\nu_1\xi}\,d\xi-$$

$$-\frac{4S}{\lambda}\sum\frac{D(\alpha,1,x)+\lambda D(\alpha,x,\lambda)}{\alpha^3Q(\alpha)}\left[1-e^{-\alpha^2\nu_1\tau}\right]+\qquad(4.76)$$

$$+f(\tau)\left[\frac{\lambda^2-x^2}{x(\lambda^2-1)}-2\sum\frac{D(\alpha,x,\lambda)}{\alpha Q(\alpha)}\right].$$

Полагая в (4.76) $\lambda=\infty$, получим общее решение сформулированной выше задачи.

Для случая неограниченной среды ($\lambda=\infty$) и постоянства скорости вращения ($f(\tau)=1$) решением уравнения (4.75) является

$$\Omega=\left(1+\frac{2}{\mathrm{Re}\,p}\right)\frac{K_1(i\varkappa)}{K_1(\varkappa)},$$

где K_1 – функция Бесселя второго рода от мнимого аргумента. Для малых значений τ после перехода от изображения к оригиналу получаем

$$\omega(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Phi\left(\frac{x-1}{2\sqrt{\nu_1\tau}}\right) + \frac{2}{\mathrm{Re}\sqrt{x}}\int_0^\tau \Phi\left(\frac{x-1}{2\sqrt{\nu_1(\tau-y)}}\right)dy,$$

где $\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-y^2}\,dy$. Из последнего выражения легко установить, что $\partial\omega/\partial x$ стремится к $-\infty$ как $-\tau^{-1/2}$.

При постоянной скорости вращения цилиндра ($f(\tau) = 1$) формула (4.76) значительно упрощается:

$$u = \frac{\lambda^2 - x^2}{x(\lambda^2-1)} - 2\sum\frac{D(\alpha,x,\lambda)}{\alpha Q(\alpha)}e^{\alpha^2\nu_1\tau} -$$

$$-\frac{4S}{\lambda}\sum\frac{D(\alpha,1,x)+\lambda D(\alpha,x,\lambda)}{\alpha^3 Q(\alpha)}\left(1-e^{-\alpha^2\nu_1\tau}\right).$$

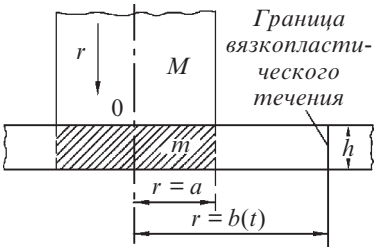


Рис. 4.16

В работе [23] решение поставленной задачи сведено к решению интегрального уравнения Вольтерра.

3. ***Удар цилиндром по вязкопластической пластинке.*** Пусть цилиндр радиуса a и массы M ударяется со скоростью $v(t)$ по пластинке толщиной h из вязкопластического материала. Предполагается, что пластинка работает только на сдвиг, т.е. каждый ее элемент $hrdrd\theta$ перемещается со скоростью $\omega(r,t)$ в направлении удара под действием касательных напряжений τ_{rz} (начало цилиндрической системы координат zOr^θ совпадает с центром основания цилиндра (рис. 4.16) в момент контакта). Заметим, что сделанное предположение справедливо при больших скоростях v или при массе M, значительно превосходящей массу m пластинки под площадью основания цилиндра.

Решение сформулированной выше задачи дано в [24]. Из уравнения количества движения, примененного к элементу $hrdrd\theta$, будем иметь:

$$h\rho_0 r\,dr\,d\theta\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial r}(\tau_{rz}r)\,h\,dr\,d\theta;\ \rho_0\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\tau_{rz}}{r}.$$

Закон деформирования для вязкопластического течения $\tau_{rz}=\pm K+\mu\frac{\partial w}{\partial r}$ с учетом того факта, что в пластической среде $|\tau_{rz}|\geq K$ и, кроме того, в рассматриваемом случае $\frac{\partial\omega}{\partial t}<0$, примет вид:

$$\tau_{rz}=-K+\mu\frac{\partial w}{\partial r}. \tag{4.77}$$

Уравнение движения после подстановки в него значения τ_{rz} согласно (4.77) примет вид

$$\rho_0\frac{\partial w}{\partial t}=\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)-\frac{K}{r}. \tag{4.78}$$

Начальные и граничные условия задачи таковы:

$$w=\begin{cases}0\ (r>0)\\ v\ (r=a)\end{cases}\quad \text{при } t=0; \tag{4.79}$$

$$M\frac{\partial w}{\partial t}=2\pi ah\left(-K+\frac{\partial w}{\partial r}\right)\quad \text{при } r=a; \tag{4.80}$$

$$\omega(b,t)=0;\ \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=b}=0\quad \text{при } r=b(t). \tag{4.81}$$

Здесь $b(t)$ – граница вязкопластического течения.

Рассмотрим вначале, следуя [24], случай закрепленной границы (b = const). При этом второе из условий (4.81), очевидно, отпадает. Вводя безразмерные величины $x=r/a$, $\tau=Kt/\mu$, $u=w/v_0$, уравнение (4.78) и условия (4.79) – (4.81) преобразуем к виду:

$$\mathrm{Re}\,S\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{S}{x}; \tag{4.82}$$

$$u(x,0)=\begin{cases}0\ (x>1)\\ 1\ (x=1)\end{cases}\ \text{при}\ \tau=0; \tag{4.83}$$

$$\mathrm{Re}\,SM\frac{\partial u}{\partial \tau}=2m\left(-S+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\ \text{при}\ x=1; \tag{4.84}$$

$$u(\lambda,\tau)=0\ \text{при}\ x=\lambda=b/a. \tag{4.85}$$

Здесь $\mathrm{Re}=av_0\rho_0/\mu$ и $S=aK/(\mu v_0)$ – так называемые числа Рейнольдса и Сен-Венана. При больших значениях начальной скорости цилиндра, а также в том случае, когда отношение M/m достаточно велико, условие (4.84) может быть приближенно заменено следующим:

$$u\,(1,\tau)=1. \tag{4.86}$$

Интегрирование уравнения (4.82) при условиях (4.83), (4.85) и (4.86) не представляет труда. Действительно, полагая $u=f(x)-u_1(x,\tau)$, где функции f и u_1 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{S}{x}=0;\ \mathrm{Re}\,S\frac{\partial u_1}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u_1}{\partial x},$$

находим:

$$f(x)=C_0+Sx+C_1\ln x;\ u_1=\sum A_n Z_0(\alpha_n x)e^{-\alpha^2 v_1\tau},$$

где C_0, C_1, A_n, a_n – произвольные постоянные, которые должны быть определены таким образом, чтобы удовлетворить начальным и граничным условиям; $Z_0=I_0+qN_0$ – цилиндрическая функция нулевого порядка (q – параметр). Подчиним функцию $f(x)$ граничным условиям $f(1)=1$, $f(\lambda)=0$, тогда $C_0=1-S$, $C_1=-(1+S(\lambda-1))/\ln\lambda$, причем

$$u_1\,(1,\tau)=0,\ u_1\,(1,\lambda)=0. \tag{4.87}$$

Условия (4.87) служат для определения собственных значений α_n:

$$I_0(\alpha_n)N_0(\lambda\alpha_n) = I_0(\lambda\alpha_n)N_0(\alpha_n). \qquad (4.88)$$

Уравнение (4.88) имеет бесчисленное множество положительных корней α_n, которые для больших значений n определяются формулой $\alpha_n = \pi n/(\lambda - 1)$.

Постоянные A_n в выражении для u_1 находим из начального условия $u(x,0) = f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_0(\alpha_n x) = 0$ как коэффициенты разложения функции $f(x)$ в ряд по функциям Z_0. Используя свойства функции $Z_0(x)$ [29], легко найти, что

$$A_n = \frac{2B_n}{\lambda^2 Z_1^2(\lambda\alpha_n) - Z_1^2(\alpha_n)}; \quad B_n = \int_1^{\lambda} x f(x) Z_0(\alpha_n x)dx.$$

После интегрирования B_n по частям приходим к окончательному выражению для скорости:

$$u(x,\tau) = f(x) + 2\sum_1^{\infty} \frac{\alpha Z_1(\alpha_n) + SC_n}{\alpha^2\left[\lambda^2 Z_1^2(\alpha_n\lambda) - Z_1^2(\alpha_n)\right]} \times \\ \times Z_0(\alpha_n x)e^{-\alpha^2 \nu_1 \tau}, \qquad (4.89)$$

где $C_n = \int_1^{\lambda} Z_0(\alpha_n x)dx$, $Z_1(x)$ – цилиндрическая функция первого порядка.

Можно показать, что входящие в (4.89) постоянные $Z_1(\alpha_n)$ и $Z_1(\alpha_n\lambda)$, выражаются через $N_0(\alpha_n)$ и $N_0(\alpha_n\lambda)$ по формулам

$$Z_1(\alpha_n) = \frac{2}{\pi\alpha_n N_0(\lambda\alpha_n)}; \quad Z_1(\lambda\alpha_n) = \frac{2}{\pi\lambda\alpha_n N_0(\lambda\alpha_n)}.$$

Скорость деформации $\frac{\partial u}{\partial x}$ определяем путем дифференцирования (4.89):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x) - 2\sum_{1}^{\infty}\frac{Z_1(\alpha_n)Z_1(\alpha_n x)}{\lambda^2 Z_1^2(\alpha_n\lambda) - Z_1^2(\alpha_n)} -$$

$$- 2S\sum_{1}^{\infty}\frac{C_n Z_1(\alpha_n x)}{\alpha_n\left[\lambda^2 Z_1^2(\alpha_n x) - Z_1^2(\alpha_n)\right]}.$$

Последняя формула при использовании выражения для $C_n = (\lambda_n - 1)\, Z_0(\lambda_n\alpha_n)$ согласно теореме о среднем примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x) - 2\sum_{1}^{\infty}\frac{Z_1(\alpha_n)Z_1(\alpha_n x)}{\lambda^2 Z_1^2(\alpha_n\lambda) - Z_1^2(\alpha_n)} -$$

$$- 2S\sum\frac{(\lambda_n - 1)\, Z_0(\lambda_n\alpha_n)\, Z_1(\alpha_n x)}{\alpha_n\left[\lambda^2 Z_1^2(\alpha_n\lambda) - Z_1^2(\alpha_n)\right]}\quad (1 < \lambda_n < \lambda).$$

Для больших значений n (практически при $n > 5$), используя асимптотическое представление для бесселевых функций [25], будем иметь:

$$\frac{N_0(\alpha_n)}{N_0(\lambda\alpha_n)} = (-1^n)\sqrt{\lambda};$$

$$\frac{Z_1(\alpha_n x)Z_1(\alpha_n)}{\lambda^2 Z_1^2(\lambda\alpha_\pi) - Z_1^2(\alpha_\pi)} = \frac{1}{(\lambda - 1)\sqrt{x}}\cos\frac{(x-1)\,\pi n}{\lambda - 1};$$

$$\frac{Z_1(\alpha_n x)\, Z_0(\lambda_n\alpha_n)}{\alpha_n\left[\lambda^2 Z_1^2(\lambda_n\alpha_n) - Z_1^2(\alpha_n)\right]} =$$

$$= -\frac{1}{\pi n\sqrt{\lambda_\pi x}}\cos\frac{(x-1)\, n x}{\lambda - 1}\sin\frac{(\lambda_n - 1)\,\pi n}{\lambda_n - 1}.$$

Следовательно, в начальный момент времени напряжение бесконечно велико при $x = 1$ и конечно при $x \neq 1$.

Полученное решение позволяет судить о распространении вязкопластического состояния в неограниченной пластинке,

которое в отличие от вязкой жидкости охватывает конечную область в начальный момент времени. Решение, как уже отмечалось, получено при использовании вместо условия (4.84) условия постоянства скорости удара. В [24] решение задачи при краевом условии (4.84) сведено к определению постоянных A_n из бесконечной системы линейных уравнений.

Используя решение (4.89) для скорости $u(x,t)$, можно приближенно определить значение скорости v, необходимое для пробивания пластинки. С этой целью подставим в уравнение (4.84) выражение для $\dot{y} = u(1,t)$ согласно (4.89), предположив, кроме того, что при переменной скорости удара $t = y/\dot{y}$. В результате получим:

$$M\ddot{y} + 2\pi\alpha hK\left\{n_1 + n_2\dot{y} + \sum_{n=1}^{\infty}(E_n + F_n\dot{y})\exp\left(-\frac{N_n y}{\dot{y}}\right)\right\} = 0.$$

Здесь $n_1 = (\lambda - 1)/\ln\lambda$; $n_2 = \mu/(\alpha K\ln\lambda)$; $N_n t = \alpha_n^2 v_1 \tau_1$;

$$E_n = \frac{2Z_1(\alpha_n)}{\alpha_n\left[\lambda^2 Z_1^2(\lambda\alpha_n) - Z_1^2(\alpha_n)\right]}\int_1^{\lambda} Z_0(\alpha_n x)\,dx;$$

$$F_n = \frac{2M}{\alpha K}\,\frac{Z_1^2(\alpha_n)}{\lambda^2 Z_1^2(\lambda\alpha_n) - Z_1^2(\alpha_n)}.$$

Полагая в последнем уравнении $p = \dot{y}$, приходим к дифференциальному уравнению первого порядка, решение которого должно удовлетворять граничному условию $p = v$ при $y = 0$. После построения интегральной кривой $p = \dfrac{dy}{dt} = f(y)$ не представляет труда определить прогиб $y(t)$ из соотношения

$$t = \int_0^y \frac{dy}{f(y)}. \qquad (4.90)$$

Можно определить момент t^*, в который при $x = 1$ сдвиг γ достигает критического значения γ^*. Подставляя это значе-

ние t^*, выясняем, может ли выбранное значение v привести к пробиванию пластинки.

В [24] поставленная задача решена для случая закрепленной границы (b = const). В [26] дано ее приближенное решение при наличии переменной границы $b(t)$ и найден закон движения последней. При этом для получения приближенного решения применяется, согласно предложению В. В. Соколовского, метод М. Е. Швеца [27], разработанный для аналогичных задач гидродинамики пограничного слоя. В этом методе за первое приближение уравнения (4.82):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \operatorname{Re} S \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{S}{x} \tag{4.91}$$

принимается $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Удовлетворяя условиям $u_1(\lambda(\tau), \tau) = 0$, $u_1(1, \tau) = 1$, находим:

$$u_1 = \frac{\lambda(\tau) - x}{\lambda(\tau) - 1}.$$

Подставляя первое приближение для u в правую часть уравнения (4.91) и осуществляя две квадратуры, получаем второе приближение:

$$u_2 = \frac{\operatorname{Re} S \lambda'(x-1)}{6}\left[\left(\frac{x-1}{\lambda-1}\right)^2 - 1\right] + \\ + \frac{1+\lambda S - S}{(\lambda-1)^2}\ln\left[\lambda^{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{x\lambda} x^{-x}\right] + \frac{\lambda - x}{\lambda - 1}. \tag{4.92}$$

Учитывая хорошую сходимость метода Швеца, ограничимся рассмотрением второго приближения. Входящая в формулу (4.92) неизвестная функция $\lambda(t)$ находится из граничного условия $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\lambda} = 0$, которое дает

$$\lambda' = \frac{3}{\operatorname{Re} S}\left[-S + \frac{1+\lambda S - S}{(\lambda-1)^2}\ln\lambda\right]$$

или

$$\xi' = \frac{3}{\mathrm{Re}\, S}\left[-S + \frac{1+\xi S}{\xi^2}\ln(\xi+1)\right], \tag{4.93}$$

где $\xi = \lambda - 1$.

Интегрируя это уравнение при условии $\xi = t = 0$, устанавливаем закон распространения вязкопластического состояния в пластине в процессе удара. Подставляя найденное выражение для $\lambda(t)$ в формулу (4.92), определяем характер изменения скоростей (а из (4.77) – напряжений) при ударе с постоянной скоростью.

На рис. 4.17 приведены графики функции $\xi(\tau)$, рассчитанные с помощью уравнения (4.93) и, исходя из точного решения, при $\mathrm{Re} = S = 1$.

Данные решения относятся к случаю нормального удара по пластинке. Задача о тангенциальном ударе по прямоугольной пластинке из вязкопластического материала с линейным упрочнением, жестко закрепленной одним концом, решена в [21].

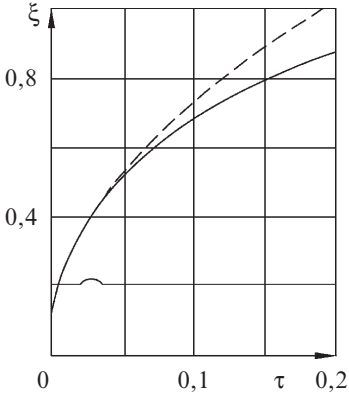


Рис. 4.17

4. ***Нестационарные движения вязкопластической среды, обладающей при малых значениях напряжения жесткопластическими свойствами.*** В рассмотренных выше работах предполагалось, что исследуемое пространство целиком заполнено вязкопластическим материалом. Очевидно, лучшим приближением к действительности будет такая схема деформирования, которая допускает жесткопластическое движение среды при напряжении меньше пластической постоянной, т. е.

$$\frac{\partial e}{\partial t} = 0 \text{ при } |\sigma| \le K;$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\varkappa}{\mu}(|\sigma| - K) \text{ при } |\sigma| \ge K;\ \varkappa = \operatorname{sing}\sigma. \tag{4.94}$$

Исследованию движений среды, удовлетворяющей приведенной схеме, посвящена работа [28], результаты которой приводятся ниже.

Рассмотрим вначале одномерное течение среды, параллельное оси Oy декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$ и не зависящее от переменных y и z. Очевидно, при таком течении существующие компоненты напряжения τ_{xy}, деформации γ_{xy}, скорости v_y и смещения u_y могут быть функциями только координаты x и времени t. Подставляя в уравнение движения

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$$

и в соотношение (4.94) значения $\gamma_{xy} = \dfrac{\partial u_y}{\partial x}$, $u_y = \dfrac{\partial u_y}{\partial t}$, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}; \quad \mu \frac{\partial v_y}{\partial x} = \varkappa \varphi\left(|\tau_{xy}| - K\right). \qquad (4.95)$$

Функция φ во втором из уравнений системы (4.95) имеет вид: $\varphi(z) = 0$ при $z \le 0$; $\varphi(z) = z$ при $z \ge 0$.

Величина деформации γ_{xy} определяется из соотношения

$$\mu \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} = \varkappa \varphi\left(|\tau_{xy}| - K\right). \qquad (4.96)$$

Система уравнений (4.95) принадлежит к параболическому типу, имея одно семейство характеристик $t = \text{const}$. Вводя безразмерные величины

$$\xi = \frac{\sqrt{\nu \rho_0 K}}{\mu} x, \ \tau = \frac{\nu K}{\mu} t, \ T = \frac{|\tau_{xy}|}{K}, \ G = \varkappa \nu \gamma_{xy},$$

$$v = \varkappa \sqrt{\frac{\nu \rho_0}{K}}\, v_y, \ U = \varkappa \frac{\nu}{\mu} \sqrt{\nu \rho_0 K}\, u_y,$$

где ν – наперед выбранное для удобства большое число, систему (4.95) и соотношение (4.96) приведем к виду:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \tau}; \ \frac{\partial v}{\partial \xi} = \varphi(T-1); \ \frac{\partial G}{\partial \tau} = \varphi(T-1). \qquad (4.97)$$

Система уравнений (4.97) при $T \le 1$ легко интегрируется:

$$v = v(\tau); \ T = T_0(\tau) + \xi v'(\tau);$$

при $T > 1$ она принимает вид линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau}, \text{ или } \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{\partial v}{\partial \tau}, \qquad (4.98)$$

поэтому в задачах о нестационарном течении вязкопластической среды могут быть использованы решения соответствующих задач теории теплопроводности.

Для решения полученных дифференциальных уравнений можно использовать метод конечных разностей, заменяя систему (4.97) следующей системой разностных уравнений:

$$(T_{k-1,l+1} - T_{k-1,l-1})/2h = (v_{k,l} - v_{k-1,l})/m;$$

$$(v_{k-1,l+1} - v_{k-1,l-1})/2h = \varphi(T_{k-1,l-1}).$$

Здесь m и h обозначают величины выбранного шага по осям τ и ξ соответственно.

Для деформации G в сечении ξ при непрерывном возрастании напряжения T имеем выражения:

$$G = 0 \text{ при } T \le 1; G = \int_0^{\tau} T d\tau - \tau \text{ при } T \ge 1.$$

Если к моменту $\tau = \tau(\xi)$ напряжение уменьшается до значения $T \le 1$, то в сечении ξ возникает остаточная деформация

$$G_r(\xi) = \int_0^{\tau(\xi)} T d\tau - \tau(\xi).$$

Рассмотрим распространение плоских возмущений сдвига в вязкопластической среде, занимающей полупространство $0 \le x < \infty$. При этом ограничимся двумя простейшими случаями изменения напряжения и скорости, приложенных к плоскости $x = 0$.

Случай 1: $T = T_0$, $0 < \tau \le \tau_0$; $T = 0$, $\tau > \tau_0$ при $\xi = 0$. В начальный момент времени ($\tau = 0$) скорость $v = 0$. Поскольку $\tau = \tau_0$ является характеристикой системы уравнений (4.97), то до момента τ_0 всюду имеет место вязкопластическое течение. Напряжение T поэтому удовлетворяет уравнению (4.198) и граничным условиям: $T = 1$ при $\tau = 0$ и $T = T_0$ при $\xi = 0$. Таким образом, определение T сводится к решенной в теории теплопроводности задаче о нахождении температуры в полубесконечном твердом теле при постоянных начальной и граничной температурах [29]. Следовательно, имеем:

$$T = 1 + (T_0 - 1)\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]; \ \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp\left(-z^2\right)dz. \quad (4.99)$$

Для скорости v согласно (4.97) получим формулу

$$v = 2(T_0 - 1)\sqrt{\tau}\left\{X\left[1 - \operatorname{erf} X\right] - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-X^2)\right\}; \quad X = \xi/(2\sqrt{\tau}). \quad (4.100)$$

Здесь учтено, что $v = 0$ при $\tau = 0$. Величина деформации сдвига

$$G = (T_0 - 1)\tau\left\{X\left(1 + 2X^2\right)(1 - \operatorname{erf} X) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}X\exp\left(-X^2\right)\right\}.$$

На границе полупространства при $\xi = 0$ имеем $v = -2(T_0 - 1)\times$ $\times\sqrt{\tau/\pi}$; $G = (T_0 - 1)\tau$. При $\tau > \tau_0$ до некоторого момента $\tau = \tau(\xi)$ состояние среды по-прежнему вязкопластическое. Однако начиная с момента $\tau = \tau(\xi)$, когда $T = 1$, и в дальнейшем среда будет находиться в жестком состоянии. Построение решения задачи в области $\tau > \tau_0$ проводится методом конечных разностей с использованием граничных условий при $\tau = \tau_0$ и $\xi = 0$.

Результаты численных расчетов значений напряжений, деформаций и скоростей при $T_0 = 2$, $\tau_0 = 1$, иллюстрирующие рассмотренную задачу, приведены в табл. 4.5. На рис. 4.18 в плоскости $\tau\xi$ изображена граница между зонами $\tau = \tau(\xi)$ и нанесены линии $T = \text{const}$.

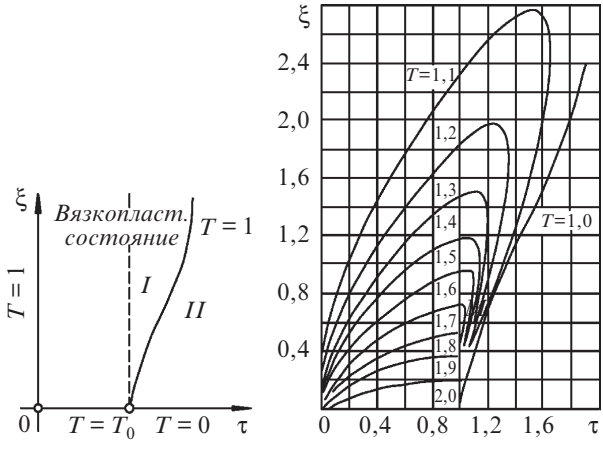


Рис. 4.18

Таблица 4.5.

Граница $\xi = 0$											
τ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$-v$	0,00	0,50	0,71	0,87	1,01	0,95	0,48	0,28	0,16	0,07	0,00
G	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	0,54	0,37	0,25	0,16	0,06

Момент времени $\tau = \tau_0 = 1$													
ξ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
T	2,00	1,86	1,76	1,67	1,57	1,48	1,40	1,32	1,27	1,20	1,17	1,14	1,09
$-v$	1,13	0,94	0,77	0,63	0,51	0,40	0,32	0,24	0,18	0,14	0,18	0,07	0,05
G	1,00	0,79	0,62	0,47	0,37	0,28	0,21	0,15	0,11	0,08	0,06	0,04	0,03

Граница $\tau = \tau(\xi) = 1$													
ξ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
τ	1,00	1,03	1,10	1,18	1,27	1,36	1,45	1,54	1,63	1,70	1,78	1,86	1,93
$-v$	0,95	0,80	0,64	0,49	0,39	0,31	0,25	0,20	0,15	0,10	0,07	0,04	0,02
G	1,00	0,82	0,68	0,56	0,48	0,41	0,34	0,28	0,25	0,21	0,17	0,13	0,10

Остаточная деформация													
ξ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0
G_r	1,00	0,82	0,68	0,56	0,48	0,41	0,34	0,28	0,25	0,21	0,17	0,08	0,04

Случай 2: $v = v_0$ при $\xi = 0$; $0 < \tau \le \tau_0$; $T = 0$ при $\xi = 0$, $\tau > \tau_0$. В начальный момент $\tau = 0$ скорость $v = 0$. До момента $\tau = \tau_0$ всюду в полупространстве имеет место вязкопластическое течение. Как и в предыдущем случае, для функции v можно использовать соответствующее решение теории теплопроводности:

$$v = v_0\left(1 - \operatorname{erf} X\right),\ X = \xi/\left(2\sqrt{\tau}\right). \tag{4.101}$$

Для напряжения T и деформации G можно получить формулы:

$$T = 1 - \frac{v_0}{\sqrt{\pi\tau}}\exp\left(-X^2\right); \tag{4.102}$$

$$G = 2\,v_0\sqrt{\tau}\left\{X\left(1 - \operatorname{erf} X\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp X\right\}. \tag{4.103}$$

На границе $\xi = 0$ имеем $T = 1 - v_0/\sqrt{\pi\tau}$; $G = -2\,v_0\sqrt{\tau/\pi}$, т. е. неограниченность напряжения в начальный момент времени. При $\tau > \tau_0$, как и в предыдущем случае, материал будет находиться в вязкопластическом состоянии вплоть до мо-

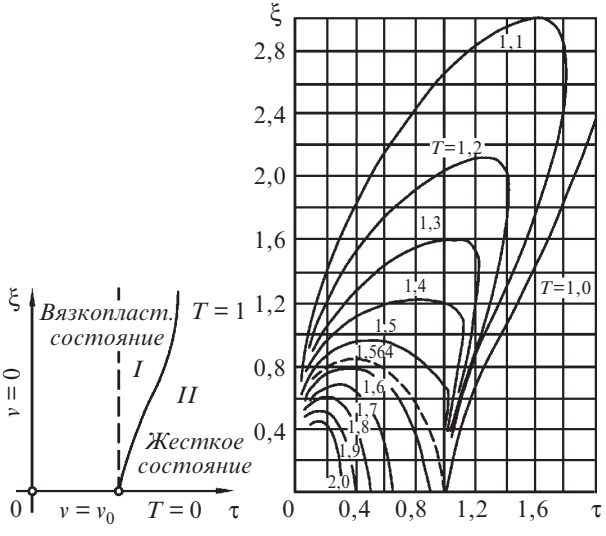


Рис. 4.18

мента $\tau = \tau(\xi)$, когда напряжение T станет равным единице. С этого момента будет иметь место жесткопластическое состояние среды. Результаты расчета напряжений, деформаций и скоростей при $v_0 = -1$, $\tau_0 = 1$, иллюстрирующих рассматриваемую задачу, приведены в табл. 4.6. На рис. 4.19 в плоскости $\xi\tau$ нанесены линии равных напряжений.

Таблица 4.6

Граница $\xi = 0$												
τ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	
T	∞	2,26	1,89	1,73	1,63	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
$-v$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,55	0,38	0,24	0,13	0,04	
G	0,00	0,51	0,71	0,87	1,01	1,13	0,64	0,48	0,36	0,26	0,17	
Момент времени $\tau = \tau_0 = 1$												
ξ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
T	1,56	1,56	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35	1,30	1,25	1,21	1,17	1,13
$-v$	1,00	0,89	0,78	0,67	0,57	0,48	0,40	0,32	0,26	0,20	0,16	0,12	0,09
G	1,13	0,94	0,77	0,63	0,51	0,40	0,32	0,24	0,18	0,14	0,10	0,08	0,05
Граница $\tau = \tau(\xi)$													
ξ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
τ	1,00	1,03	1,08	1,16	1,24	1,35	1,46	1,56	1,68	1,77	1,86	1,94	0,01
$-v$	0,92	0,81	0,70	0,59	0,49	0,40	0,31	0,26	0,20	0,15	0,11	0,07	0,04
G	1,13	0,95	0,81	0,69	0,59	0,51	0,44	0,38	0,33	0,28	0,23	0,19	0,16
Остаточная деформация													
ξ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
G_r	1,13	0,95	0,81	0,69	0,59	0,51	0,44	0,38	0,33	0,28	2,23	0,19	0,16

Перейдем к исследованию характера распространения цилиндрических волн сдвига; движение последних, очевидно, удовлетворяет уравнению (4.63). Закон деформирования (4.94) при этом остается тем же в применении к величинам $\gamma_{r\theta}$ и $\tau_{r\theta}$, а деформация $\gamma_{r\theta}$ выражается формулой

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u\theta}{r}.$$

Для безразмерных величин T, G, v, τ, с точностью до обозначений, совпадающих с введенными выше, получим:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi}+\frac{2T}{\xi}=\frac{\partial v}{\partial \tau};\ \frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{v}{\xi}=\varphi(T-1). \qquad (4.104)$$

Последнее уравнение системы (4.97) при этом останется без изменения.

Как и выше, система (4.104) при $T \le 1$ может быть проинтегрирована:

$$T=\frac{A(\tau)}{\xi^2}+\frac{\xi^2}{4}B'(\tau);\ v=\xi B(\tau).$$

При $T > 1$ она имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \xi}+\frac{2T}{\xi}=\frac{\partial v}{\partial \tau};\ \frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{v}{\xi}=T-1$$

и может быть приближенно решена методом конечных разностей. Если на некоторой цилиндрической поверхности ξ до момента $\tau = \tau_l(\xi)$ имеет место жесткопластическое состояние, которое благодаря увеличению напряжения T сменяется затем вязкопластическим вплоть до момента $\tau_2(\xi)$, когда вновь наступает жесткопластическое состояние материала, то деформация G при этом будет определяться формулами:

$$G = 0 \text{ при } 0 < \tau \le \tau_1(\xi);$$

$$G=\tau_1(\xi)-\tau+\int_{\tau_1(\xi)}^{\tau} T d\tau \quad \text{при } \tau_1(\xi) < \tau \le \tau_2(\xi);$$

$$G=\tau_1(\xi)-\tau_2(\xi)+\int_{\tau_1(\xi)}^{\tau_2(\xi)} T d\tau = G_r(\xi) \quad \text{при } \tau_2(\xi) < \tau \le \infty.$$

Исследуем характер распространения цилиндрических волн сдвига в вязкопластическом пространстве, обусловленных вращением в нем заделанного бесконечно длинного жесткого цилиндра радиусом r_0. Очевидно, в безразмерных

переменных ξ, τ граничное условие на поверхности цилиндра имеет вид $v = v(\tau)$ при $\xi = \xi_0$ или может быть заменено ему эквивалентным $T = T(\tau)$ при $\xi = \xi_0$.

Для примера рассмотрим следующий случай приложения нагрузки:

$$T = T_0(1 - \tau/\tau_0) \quad \text{при } \xi = \xi_0 \text{ и } \tau \le \tau_0;$$
$$T = 0 \text{ при } \xi = \xi_0 \text{ и } \tau \ge \tau_0. \tag{4.105}$$

Предполагается, что в начальный момент среда находилась в покое, т. е.

$$v = 0 \text{ при } \tau = 0. \tag{4.106}$$

В плоскости ξ, τ, (рис. 4.20) при этом имеются две зоны: зона жесткого состояния и зона вязкопластического состояния, которые отделены между собой кривой $\tau = \tau(\xi)$, вдоль которой $T = 1$.

Уравнение $\xi = \xi(\tau)$ при $0 < \tau < \tau^*$ устанавливает закон возникновения вязкопластического течения, уравнение $\xi = \xi(\tau)$ при $\tau > \tau^*$ устанавливает закон перехода материала из вязкопластического состояния снова в жесткопластическое.

Величины T и v находятся путем решения уравнений (4.104) при начальных и граничных условиях (4.105) и (4.106). Очевидно, в зоне жесткопластического состояния $T = \xi^2(\tau)/\xi^2$, $v = 0$; в зоне вязкопластического состояния напряжения и деформации рассчитываются численно с помощью метода конечных разностей.

Величина G определяется из последнего уравнения системы (4.97): в зоне жестко-пластического состояния $G = 0$; в областях I – III имеем $G = G_r(\xi)$; в области IV в зоне вязкопластического состояния рассчитывается по численным значениям для напряжения T.

Результаты вычислений для рассматриваемой задачи при $\xi_0 = 1$ приведены на рис. 4.21, где в плоскости ξ, τ нанесены линии $T = \text{const}$.

Решение задачи также может быть получено, как указано В.В. Соколовским, методом последовательных приближений М.Е. Швеца к системе (4.104). Последняя при $\varphi(T - 1) = T - 1$ и $T \ge 1$ сводится к одному уравнению:

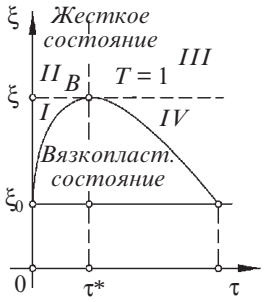


Рис. 4.20

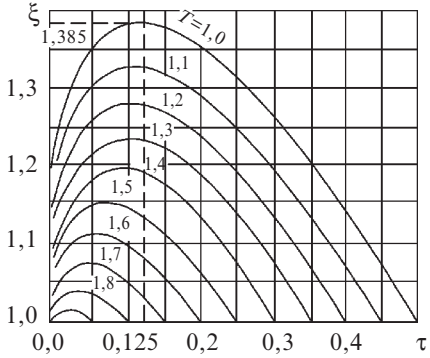


Рис. 4.21

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{4T}{\xi^2}, \tag{4.107}$$

решение которого ищется при следующих условиях:

$$v(\xi,0) = 0;\ T(\xi_0,\tau) = T_0(1-\tau/\tau_0);\ T(\delta(\tau),\tau) = 1. \tag{4.108}$$

Здесь $\xi = \delta(\tau)$ граница области вязкопластического состояния. Принимая за первое приближение решение уравнения $\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = 0$, удовлетворяющее двум последним условиям (4.108), находим:

$$T_1 = 1 + \frac{\delta-\xi}{\delta-\xi_0}\left[T_0\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)-1\right].$$

Подставляя первое приближение в правую часть (4.107) и осуществляя две квадратуры, после удовлетворения поставленным граничным условиям для напряжения T получаем:

$$T = 1 + \frac{T_0(\delta-\xi)(\xi-\xi_0)(2\delta-\xi-\xi_0)}{6\tau_0(\delta-\xi_0)} + \tag{4.109}$$

$$+\frac{u}{\delta-\xi_0}\ln\left[\left(\frac{\xi}{\delta}\right)^{\xi_0}\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^{\delta}\left(\frac{\delta}{\xi_0}\right)^{\xi}\right]+\left[T_0\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)-1\right]\Phi(\xi,\delta,\xi_0).$$

В жесткопластической области напряжение $T_e = \delta^2 / \xi^2$. Подставляя это значение T в условие, определяющее границу вязкопластического течения

$$\left(\frac{\partial T_e}{\partial \xi}\right)_{\xi=\delta} = \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{\xi=\delta},$$

получаем дифференциальное уравнение первого порядка для $\delta(\tau)$:

$$\frac{d\delta}{d\tau} = 3\left\{\frac{8}{\delta-\xi_0} - \frac{4\delta+3\xi_0}{(\delta-\xi_0)^2}\ln\frac{\delta}{\xi_0} + \right. \tag{4.110}$$

$$\left. + \frac{1}{T_0(1-\tau/\tau_0)-1}\left[\frac{2}{\delta} + \frac{T_e}{6\tau_0}(\delta-\xi_0) - \frac{4}{\delta-\xi_0}\ln\frac{\delta}{\xi_0}\right]\right\}.$$

Полагая $\delta - \xi_0 = \bar{\xi}$; $\xi - \xi_0 = x$ приведем формулы (4.109) и (4.110) к следующему виду:

$$T = 1 + \frac{T_0 x}{6\tau_0\bar{\xi}}(\bar{\xi}-x)(2\bar{\xi}-x) + \frac{4}{\bar{\xi}}\ln\left[\left(\frac{\xi_0+\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0}\right)^x\left(\frac{\xi_0}{\xi_0+x}\right)^{\xi}\right] +$$

$$+\left[T_0\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)-1\right]\Phi(x,\bar{\xi},\xi_0);$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} = 3\left\{\frac{8}{\bar{\xi}} - \frac{4\bar{\xi}+7\xi_0}{\bar{\xi}^2}\ln\frac{\xi_0+\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T_0\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)-1}\left[\frac{2}{\xi_0+\bar{\xi}} + \frac{T_0\bar{\xi}}{6\tau_0} - \frac{4}{\bar{\xi}}\ln\left(\frac{\xi_0+\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0}\right)\right]\right\};$$

$$\Phi(x,\bar{\xi},\xi_0) = \frac{\bar{\xi}-x}{\bar{\xi}} + \frac{x}{6}\left(\frac{x^2}{\bar{\xi}^2}-1\right)\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} +$$

$$+\ln\left[\left(\frac{\xi_0+\bar{\xi}}{\xi_0}\right)^{7\frac{x}{\bar{\xi}}\left(\frac{\xi_0}{\bar{\xi}}\right)}\left(\frac{\xi_0}{\xi_0+x}\right)^{4+7\frac{\xi_0}{\bar{\xi}}+3\frac{x}{\bar{\xi}}}\right].$$

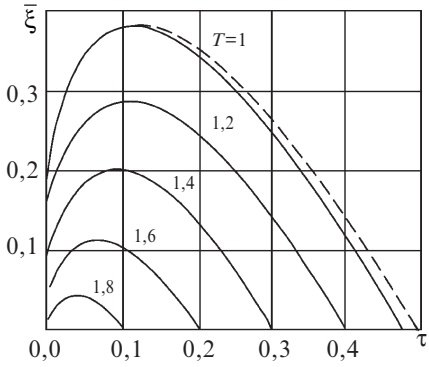


Рис. 4.22

На рис. 4.22 в плоскости ξ, τ, построены линии $T = \text{const}$ при $T_0 = 2$, $\xi_0 = 1$, $\tau_0 = 1$. Приведенные результаты взяты из [26].

§ 4.4. Распространение волн в упруговязкопластической среде

Начнем с изложения результатов работ [13, 20, 21], относящихся к проблеме распространения волн в упруговязкопластической среде без упрочнения.

Принимается следующая зависимость между напряжением σ (или τ) и деформацией e (или сдвигом γ):

$$E\frac{de}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \text{ при } |\sigma| \le \sigma_s, \tag{4.111}$$

$$E\frac{de}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \varkappa K f(|\sigma| - \sigma_s) \text{ при } |\sigma| \ge \sigma_s, \tag{4.112}$$

причем $f(0) = 0$; $f'(z) > 0$; $\varkappa = \operatorname{sign}\sigma$. Здесь K – физическая константа, имеющая размерность, обратную размерности времени; $f(z)$ – функция, найденная из эксперимента. В начале рассмотрим характер волнового процесса, возникающего при нагружении торца стержня переменного сечения $F(x)$.

Как известно (см. § 1.2), уравнение движения стержня имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma F) = \rho_0 F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4.113}$$

или

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{F'}{F}\sigma = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}; \; v = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{4.114}$$

Зависимости (4.111) и (4.112) приводят к соотношению

$$E\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varkappa K \Phi(|\sigma| - \sigma_s), \tag{4.115}$$

где $\Phi(z) = 0$ при $z \le 0$; $\Phi(z) = f(z)$ при $z \ge 0$.

Система уравнений (4.114) и (4.115) служит для определения напряжения σ и скорости v; деформация e определяется из соотношения (4.115), преобразованного к виду

$$E\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varkappa K \Phi(|\sigma| - \sigma_s). \tag{4.115'}$$

Система (4.114) и (4.115) может быть приведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка гиперболического типа, имеющему следующие семейства характеристик:

$$x = \pm a_0 t + \text{const};$$

$$a_0 d\sigma \mp E dv + \left\{ a_0 \sigma \frac{F'}{F} \pm \varkappa K \Phi(|\sigma| - \sigma_s) \right\} dx = 0. \tag{4.116}$$

Отсюда вытекает, что скорость распространения волн (в частности, волн сильного разрыва) постоянна и равна a_0.

Из непрерывности смещения u при переходе через волну $x = \pm a_0 t + \text{const}$, с одной стороны, следует, что:

$$du = vdt + edx = (v \pm a_0 e)dt = 0; \; [v] \pm a_0 [e] = 0, \tag{4.117}$$

где скобки обозначают, как и в гл. 1, разрывы соответствующих величин. С другой стороны, из условий (4.116) на линиях $x = \pm a_0 t + \text{const}$ соответственно имеем:

$$a_0 [\sigma] \mp E[v] = 0. \tag{4.118}$$

В сечении $x = l$, где происходит скачкообразное изменение площади F, усилия и скорости должны быть непрерывными:

$$[\sigma F] = 0;\ [v] = 0. \tag{4.119}$$

Переходя к безразмерным величинам

$$\tau = Kt;\ \xi = K\frac{x}{a_0};\ \delta = \frac{Kd}{a_0};\ \lambda = \frac{Kl}{a_0};\ \bar{u} = \frac{\varkappa K u}{a_0 e_s};\ \bar{v} = \frac{\varkappa v}{a_0 e_s};$$

$$\bar{\sigma} = \frac{|\sigma|}{\sigma_s};\ \bar{e} = \frac{\varkappa e}{e_s};\ f(\zeta) = \frac{1}{\sigma_s} f(z);\ \zeta = \frac{z}{\sigma_s};\ \Omega = \frac{a_0}{K}\frac{F'}{F}$$

(d – характерный размер),

уравнения (4.114), (4.115) и соотношения (4.115'), (4.116) – (4.119) запишем так:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \xi} + \Omega\bar{\sigma}; \tag{4.120}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \tau} + \varphi(\bar{\sigma} - 1); \tag{4.121}$$

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial \tau} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \tau} + \varphi(\bar{\sigma} - 1); \tag{4.122}$$

$$\xi = \pm\tau + \text{const};\ d\bar{\sigma} \mp d\bar{v} + \{\Omega\bar{\sigma} \pm \varphi(\bar{\sigma} - 1)\}d\xi = 0; \tag{4.123}$$

$$[\bar{e}] \pm [\bar{v}] = 0;\ [\bar{v}] \pm [\bar{\sigma}] = 0 \text{ при } \xi = \pm\tau + \text{const}; \tag{4.124}$$

$$[\bar{v}] = 0 \text{ при } \xi = \lambda. \tag{4.125}$$

Здесь $\varphi(\zeta) \equiv 0$ при $\zeta \le 0$; $\varphi(\zeta) \equiv f(\zeta)$ при $\zeta \ge 0$.

Пусть в момент $\tau = 0$ на конце стержня $\xi = 0$ мгновенно приложено напряжение $\bar{\sigma}_0$, которому соответствуют деформация $\bar{e}_0 = \bar{\sigma}_0$ и скорость $\bar{v}_0 = -\bar{\sigma}_0$. Аналогично тому, как это сделано в § 1.4, легко определить изменение напряжения на переднем фронте $\xi = \tau$, бегущем в недеформированную часть стержня. Учитывая тот факт, что на фронте $\xi = \tau$ $\bar{\sigma} = \bar{e} = -\bar{v}$, уравнение (4.123) приведем к виду

$$2\frac{d\bar{\sigma}}{d\xi} + \Omega\bar{\sigma} + \varphi(\bar{\sigma} - 1) = 0, \tag{4.126}$$

причем $\varphi(\bar{\sigma} - 1) \equiv 0$, при $\bar{\sigma} \le 1$.

Для цилиндрического стержня $\Omega \equiv 0$ и интеграл уравнения (4.126), удовлетворяющий граничному условию, имеет вид

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 \text{ при } \bar{\sigma} \le 1; \ \bar{\sigma} = \frac{\xi}{2} + \int\limits_{\bar{\sigma}_0 - 1}^{\bar{\sigma} - 1} \frac{d\xi}{f(\xi)} \text{ при } \bar{\sigma} \ge 1. \quad (4.127)$$

При $f(\zeta) \equiv \zeta$, $f(\zeta) \equiv \zeta^{\mu}$, $f(\zeta) \equiv \operatorname{sh}\frac{\zeta}{\mu}$ соотношение (4.127) принимает соответственно вид:

$$\bar{\sigma} = 1 + (\bar{\sigma}_0 - 1)\exp\left(-\frac{\xi}{2}\right); \ \bar{\sigma} = 1 + \left[(\bar{\sigma}_0 - 1)^{1-\mu} - (1-\mu)\frac{\xi}{2}\right]^{\frac{1}{1-\mu}};$$

$$\bar{\sigma} = 1 + 2\mu \operatorname{arcth}\left[\exp\left(-\frac{\xi}{2\mu}\right)\operatorname{th}\left(\frac{\sigma_0 - 1}{2\mu}\right)\right]. \quad (4.127')$$

(Необходимо помнить, что (4.127) имеет место лишь при $\bar{\sigma}_0 > 1$, т. е. когда приложенное к торцу стержня напряжение превосходит значение σ_s.)

Для конического стержня, когда $\Omega = 2/(\xi + \delta)$, уравнение (4.126) при $f(\zeta) \equiv \zeta$ также легко интегрируется:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 \frac{\delta}{\delta + \xi} \text{ при } \bar{\sigma} \le 1;$$

$$\bar{\sigma} = 1 + \frac{2}{\xi + \delta}\left(\exp\frac{\gamma - \xi}{2} - 1\right) \text{ при } \bar{\sigma} \ge 1;$$

$$\gamma = 2\ln\left[1 + (\bar{\sigma}_0 - 1)\frac{\delta}{2}\right].$$

Пусть в момент $\tau = \tau_0$ на конце стержня $\xi = 0$ произошло новое скачкообразное изменение напряжения. В этот момент возникает новый фронт разрыва $\xi = \tau - \tau_0$. Будем отмечать индексами «+», «–», «0» параметры соответственно слева, справа от волны разрыва и в сечении $\xi = 0$. Учитывая тот факт, что на новом фронте разрыва $[\bar{\sigma}] = [\bar{e}] = -[\bar{v}]$, из уравнения (4.123) найдем изменение напряжения на характерис-

тике $\xi = \tau - \tau_0$ (очевидно, в начальный момент на ней $[\bar{\sigma}_0] = [\bar{e}_0] = -[\bar{v}_0]$). Тогда

$$\frac{d\bar{\sigma}^+}{d\xi} - \frac{d\bar{v}^+}{d\xi} + \Omega\,\bar{\sigma}^+ + \varphi\left(\bar{\sigma}^+ - 1\right) = 0$$

или

$$2\frac{d\bar{\sigma}^+}{d\xi} + \Omega\,\bar{\sigma}^+ + \varphi(\bar{\sigma}^+ - 1) = \frac{d\bar{\sigma}^-}{d\xi} + \frac{d\bar{v}^-}{d\xi}.$$

Последнее уравнение для двух наиболее интересных вариантов запишется так:

$$2\frac{d\bar{\sigma}^+}{d\xi} + \Omega\,\bar{\sigma}^+ = \frac{d\bar{\sigma}^-}{d\xi} + \frac{d\bar{v}^-}{d\xi} \quad \text{при } \bar{\sigma}^+ \le 1,\ \bar{\sigma}^- \ge 1; \qquad (4.128)$$

$$2\frac{d\bar{\sigma}^+}{d\xi} + \Omega\,\bar{\sigma}^+ + f\left(\bar{\sigma}^+ - 1\right) = \frac{d\bar{\sigma}^-}{d\xi} + \frac{d\bar{v}^-}{d\xi} \quad \text{при } \bar{\sigma}^+ \ge 1,\ \bar{\sigma}^- \le 1; \qquad (4.129)$$

два остальных варианта могут быть рассмотрены аналогично.

Для цилиндрического стержня уравнение (4.128) после интеграции и удовлетворения граничному условию при $\xi = 0$ имеем:

$$2(\bar{\sigma}^+ - \bar{\sigma}^-) = (\bar{\sigma}^- - \bar{\sigma}_0) + (\bar{v}^- - \bar{v}_0) \quad \text{при } \bar{\sigma}^+ \le 1,\ \bar{\sigma}^- \ge 1.$$

Решение уравнения (4.129) при $f(\xi) \equiv \xi$ и $\bar{\sigma}^+ = \text{const}$, $\bar{v}^- = \text{const}$, не представляет труда:

$$\bar{\sigma}^+ = 1 + (\bar{\sigma}_0 - 1)\exp(-\xi/2) \quad \text{при } \bar{\sigma}^+ \ge 1,\ \bar{\sigma}^- \le 1.$$

Аналогичным образом можно определить изменение параметров на фронте волны, отразившейся или от конца стержня, или от сечения $\xi = \lambda$, в котором имеет место скачкообразное изменение поперечного сечения.

Для дальнейшего нам потребуются формулы, определяющие изменение деформации на переднем фронте волны $\xi = \tau$ и в сечении $\xi = \text{const}$. С использованием (4.115') и (4.123) эти формулы могут быть получены в следующем виде:

$$\bar{e} = \bar{\sigma}(\tau, \xi) + \int_{\xi}^{\tau} \varphi[\bar{\sigma}(z, \xi) - 1]\,dz; \qquad (4.130)$$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{e} = \bar{\sigma} \text{ при } \xi \le \tau \le \xi(\tau); \\ &\bar{e} = \bar{\sigma}(\tau,\xi) + \int\limits_{\tau(\xi)} f\,[\bar{\sigma}(z,\xi) - 1]\,dz \text{ при } \tau > \tau(\xi); \end{aligned}\right\} \qquad (4.131)$$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{e} = \bar{\sigma}(\tau,\xi) + \int\limits_{\xi}^{\tau} f\,[\sigma(z,\xi) - 1]\,dz \text{ при } \xi \le \tau < \tau(\xi); \\ &\bar{e} = \bar{\sigma}(\tau,\xi) + \bar{e}_r(\xi) \text{ при } \tau > \tau(\xi);\ \bar{e}_r(\xi) = \int\limits_{\xi}^{\tau(\xi)} f\,[\bar{\sigma}(z,\xi) - 1]\,dz. \end{aligned}\right\} \qquad (4.132)$$

Зависимости (4.130) имеют место в том случае, если с момента $\tau = \xi$ до момента $\tau = \tau(\xi)$ $\bar{\sigma} \le 1$, а с момента $\tau = \tau(\xi)$ $\bar{\sigma} > 1$. Зависимости (4.131) справедливы, когда $\bar{\sigma} \ge 1$ при $\xi \le \tau \le \xi(\tau)$, $\bar{\sigma} \le 1$ при $\tau \ge \tau(\xi)$.

Рассмотрим теперь основные задачи распространения упруговязкопластических волн в стержнях. Решение этих задач получено с помощью уравнений в конечных разностях, заменяющих систему (4.123).

Задача 1. Пусть на конце $\xi = 0$ полубесконечного цилиндрического стержня действует давление $p(\tau)$ по закону

$$\bar{\sigma} = p\ (0 \le \tau \le \tau_0);\ \ \bar{\sigma} = 0\ (\tau_0 \le \tau \le \infty).$$

Предполагается, что $f(\zeta) \equiv \zeta$.

На торце стержня согласно (4.130) имеем:

$$\begin{aligned} &\bar{e} = p + (p - 1)\,\tau \text{ при } 0 \le \tau \le \tau_0; \\ &\bar{e} = (p - 1)\,\tau_0 \text{ при } \tau_0 \le \tau \le \infty. \end{aligned} \qquad (4.133)$$

На переднем фронте $\xi = \tau$ ($\mu_{00}\mu_{20}$ на рис. 4.23) значение напряжений, деформаций и скоростей находятся по формуле (4.127'):

$$\bar{\sigma} = \bar{e} = -\bar{v} = 1 + (p-1)\exp(-\xi/2). \qquad (4.133')$$

Характеристики $\xi = \tau$ и $\xi = \tau - \tau_0$ в плоскости ξ,τ

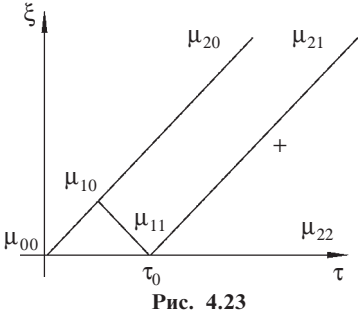


Рис. 4.23

(см. рис. 4.23) изображают волны сильного разрыва; в области $\mu_{20}\mu_{10}\mu_{00}\mu_{11}\mu_{21}$, ограниченной этими характеристиками и осью абсцисс $\xi = 0$, напряжение ($\overline{\sigma} > 1$) и скорость находятся путем построения решения (4.120) – (4.121) сначала в треугольнике $\mu_{00}\mu_{10}\mu_{11}$, а затем в полуполосе $\mu_{20}\mu_{10}\mu_{11}\mu_{21}$. Граничными условиями при этом являются (4.128) и (4.129). Деформация $\overline{e}$ определяется по формуле (4.131):

$$\overline{e} = \overline{\sigma}(\tau,\xi) + \int_{\xi}^{\tau} \sigma(z,\xi)\,dz + \xi - \tau.$$

В угле $\mu_{21}\mu_{11}\mu_{22}$ между характеристикой $\xi = \tau - \tau_0$ и торцом стержня напряжения ($\overline{\sigma} < 1$) и скорости определяются с использованием граничных условий при $\xi = \tau - \tau_0$ и $\xi = 0$. Деформация $\overline{e}$ здесь выражается формулой $\overline{e} = \overline{\sigma}(\tau,\xi) + \overline{e}_r$.

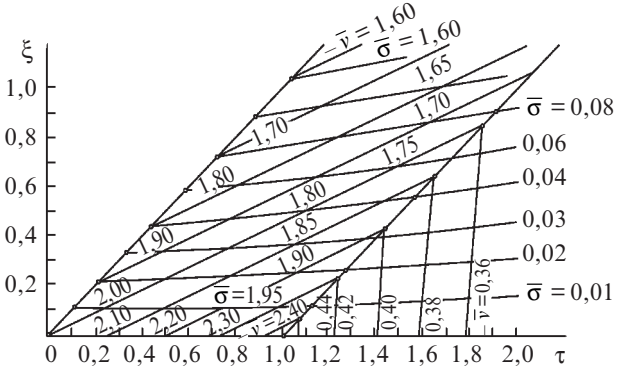


Рис. 4.24

Результаты численных расчетов рассматриваемой задачи при $p = 2$, $\tau_0 = 1$ приведены на рис. 4.24; в плоскости ξ,τ, нанесены линии равных напряжений $\overline{\sigma}$ = const и скоростей $\overline{v}$ = const.

На рис. 4.25 построены графики зависимостей между напряжениями и деформациями в сечениях $\xi = 0$; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1 при $\overline{\sigma} \geq 1$.

Задача 2. На конце $\xi = 0$ полубесконечного конического стержня действует напряжение

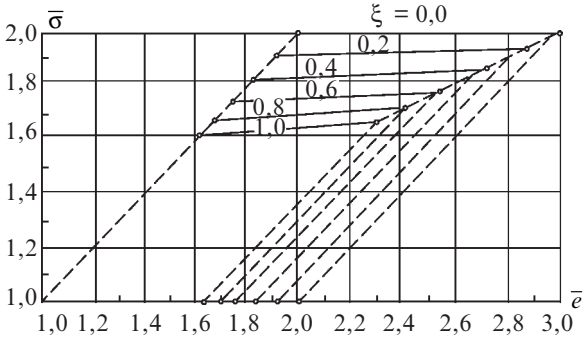


Рис. 4.25

$$\bar{\sigma} = p\,(1 - \tau/\tau_0) \;\text{ при } 0 \le \tau \le \tau_0;\;\; \bar{\sigma} = 0 \;\; \tau_0 \le \tau \le \infty.$$

Предполагая, что $f(\zeta) \equiv \zeta$, исследуем процесс распространения волн в этом случае. В сечении $\xi = 0$ деформации определяются по формуле (4.131), из которой следует:

$$\bar{e} = p\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) - \tau + p\,\tau\left(1 - \frac{1}{2\,\tau_0}\right) \;\text{ при } 0 \le \tau \le \tau_0;$$

$$\bar{e} = p\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) + p\,\frac{\tau_*^2}{2\,\tau_0} \;\text{ при } \tau_* \le \tau \le \tau_0;$$

$$\bar{e} = \frac{p\,\tau_*^2}{2\,\tau_0} \;\text{ при } \tau_0 \le \tau \le \infty;\;\; \tau_* = \frac{p-1}{p}\tau_0\,.$$

На волне сильного разрыва $\xi = \tau$ ($\mu_{00}\mu_{20}$ на рис. 4.26) напряжение, деформация и скорость выражаются формулами:

$$\bar{\sigma} = \bar{e} = -\bar{v} = 1 + \frac{2}{\xi + \delta}\left(\exp\frac{\gamma - \xi}{2} - 1\right) \;\text{ при } 0 \le \xi \le \gamma;$$

$$\bar{\sigma} = \bar{e} = -\bar{v} = \frac{\gamma + \delta}{\xi + \delta} \;\text{ при } \xi \ge \gamma;\;\; \gamma = 2\ln\left(1 + \frac{p-1}{2}\delta\right).$$

Область движения в плоскости ξ,τ изображена на рис. 4.26; точки μ_{10} и μ_* имеют координаты $\tau = \xi = \gamma_*$ и $\tau = \tau_*, \xi = 0$. В некоторой окрестности угла $\mu_{10}\mu_{00}\mu_*$, ограниченной кривой $\xi = \xi(\tau)$, проходящей через точки μ_{10} и μ_*, $\bar{\sigma} > 1$. Поэтому

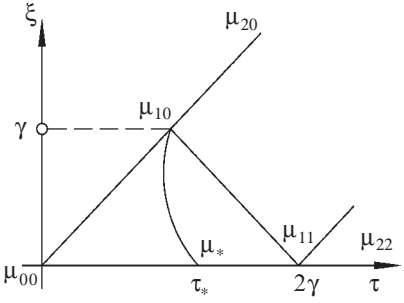


Рис. 4.26

при расчете поля скоростей и напряжений в этой области необходимо пользоваться соответствующими условиями на характеристиках для случая $\overline{\sigma} \geq 1$; деформация при этом определяется по формуле

$$\overline{e} = \overline{\sigma}(\tau, \xi) + \int_{\xi}^{\tau} \overline{\sigma}(z, \xi)\, dz + \xi - \tau.$$

Очевидно, в следующей области $\mu_{20}\mu_{10}\mu_{*}\mu_{22}$ напряжение $\overline{\sigma} \geq 1$. Результаты численных расчетов рассматриваемой задачи при $p = 2$, $\tau_0 = 2$ приведены на графиках рис. 4.27 и 4.28. На рис. 4.27 в плоскости ξ,τ нанесены линии равных напряжений и скоростей, на рис. 4.28 построены графики зависимостей между напряжениями и деформациями при $\overline{\sigma} \geq 1$ в различных сечениях стержня.

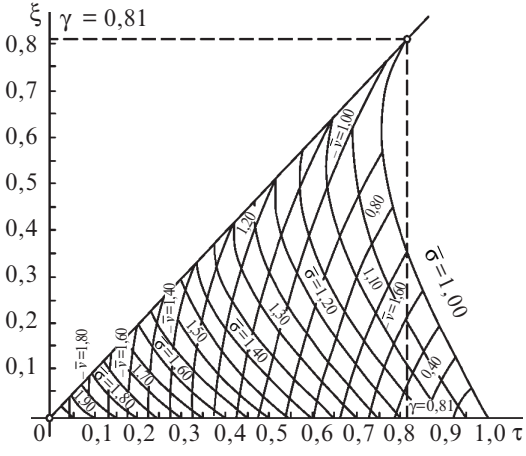


Рис. 4.27

Задача 3. Пусть на конце $\xi = 0$ цилиндрического стержня длиной l действует напряжение $\overline{\sigma} = p$, причем $1 < 2p < 2$; другой конец стержня будем считать закрепленным. Как и в двух предыдущих задачах, предполагаем, что $f(\zeta) \equiv \zeta$.

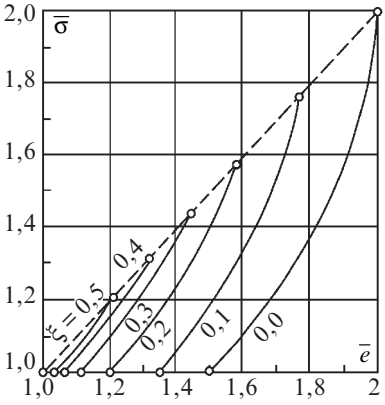


Рис. 4.28

Очевидно, в рассматриваемом случае от торца стержня ($\xi = 0$), где $\overline{e} = p$, будет распространяться упругая волна $\xi = \tau$, причем в области $\mu_{10}\mu_{00}\mu_{11}$ (рис. 4.29), ограниченной линиями $\xi = 0$ и $\xi = \tau$, напряжения, скорости и деформации будут постоянными, т. е. $\overline{\sigma} = \overline{e} = -\overline{v} = p$.

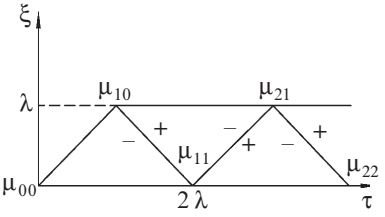


Рис. 4.29

На переднем фронте отраженной волны $\xi = 2\lambda - \tau$ напряжения, деформации и скорости связаны, с одной стороны, условиями $[\overline{\sigma}] = [\overline{e}] = [\overline{v}]$, с другой стороны, условием $\dfrac{d\overline{\sigma}}{d\xi} + \dfrac{d\overline{v}}{d\xi} - \overline{\sigma} + 1 = 0$. Отсюда $\overline{\sigma} = \overline{e}$, $\overline{\sigma} = \overline{v} + 2p$, $2\dfrac{d\overline{v}}{d\xi} - \overline{v} + 1 - 2p - 0$. Поэтому

$$\overline{v} = 1 - 2p + (2p - 1)\exp\left(\frac{\xi - \lambda}{2}\right), \quad \overline{\sigma} = 1 + (2p - 1)\exp\left(\frac{\xi - \lambda}{2}\right).$$

В треугольнике $\mu_{10}\mu_{11}\mu_{21}$, ограниченном характеристиками $\xi = 2\lambda - \tau$, $\xi = \tau - 2\lambda$ и прямой $\xi = \lambda$, напряжение $\overline{\sigma} > 1$. Расчет величин скорости и напряжения в этой области проводится численными методами. Деформацию $\overline{e}$ определяем по формуле (4.131), которая в данном случае принимает вид:

$$\overline{e} = \overline{\sigma}(\tau,\xi) + \int\limits_{2\lambda - E}^{\tau} \overline{\sigma}(z,\xi)\,dz - (\tau + \xi) + 2\lambda.$$

Результаты расчетов к рассматриваемой задаче при $\lambda = 1$, $p = 0{,}75$ приведены на рис. 4.30 и 4.31. На рис. 4.30 в плоскости ξ,τ нанесены линии равных скоростей и напряжений; на рис. 4.31 построены графики зависимостей между напряжениями и деформациями для $x = 0$ в различных сечениях стержня.

Аналогичным образом может быть рассмотрена соответствующая задача при других граничных условиях для $\xi = \lambda$.

Задача 4. Пусть полубесконечный стержень, двигавшийся с постоянной скоростью $-v_0$ в сторону отрицательных значений оси Ox, в момент $t = 0$ ударяется в неподвижную стенку. Значение скорости v_0 предполагается столь большим,

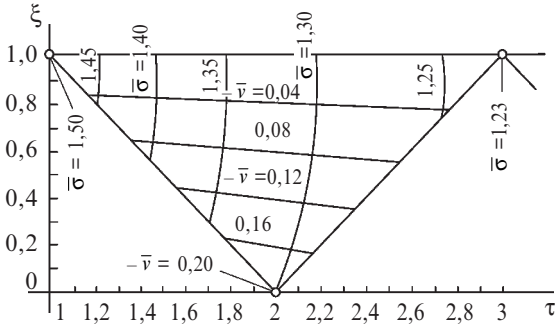


Рис. 4.30

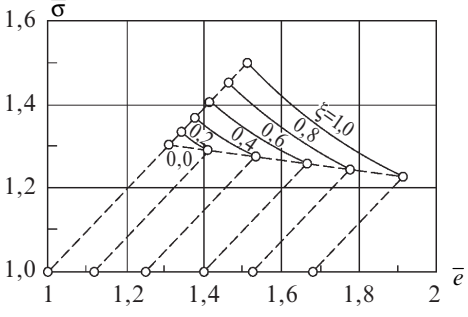


Рис. 4.31

чтобы возникшее в момент удара напряжение превзошло предел текучести σ_S. Легко показать, что последнее условие будет выполнено, если $v_0 > v_s = \sigma_s / (\rho_0 a_0)$. Исследование характера распространения волн в этом случае при $\varphi(z) \equiv z$ выполнено в [32]. Полагая $\bar{\xi} = (\xi + \tau)/4, \eta = (\tau - \xi)/4$, условия на характеристиках (4.123) приведем к тому же виду, что и в [32]:

$$\begin{aligned} &d(\sigma + \rho_0 a_0 v) + 2\varkappa \max[0, |\sigma| - \sigma_s] d\eta \quad \text{при } \bar{\xi} = \text{const}; \\ &d(\sigma - \rho_0 a_0 v) + 2\varkappa \max[0, |\sigma| - \sigma_s] d\xi \quad \text{при } \eta = \text{const}. \end{aligned} \tag{4.134}$$

Скорость v и напряжение σ могут быть определены по формулам

$$v = \frac{a_0}{4}(\chi_{\bar{\xi}} - \chi_\eta) \exp[-(\bar{\xi} + \eta)], \tag{4.135}$$

$$\sigma - \varkappa\sigma_s = \frac{E}{4}(\chi_{\bar{\xi}} - \chi_\eta - 2\chi) \exp[-(\bar{\xi} + \eta)] \tag{4.136}$$

через функцию $\chi(\xi, \eta)$, удовлетворяющую уравнению

$$\chi''_{\bar{\xi}\eta} = \chi \tag{4.137}$$

и условию $\chi(0,0) = 0$. Общее решение (4.137) может быть получено, например, применением метода Римана и имеет вид

$$\chi = \int_0^{\bar{\xi}} I_0\left(2i\sqrt{y\eta}\right) f'(\bar{\xi} - y) dy + \int_0^{\eta} I_0\left(2i\sqrt{\bar{\xi} y}\right) g'(\eta - y) dy, \tag{4.138}$$

где $\chi(\bar{\xi}, 0) = f(\xi)$; $\chi(0, \eta) = g(\eta)$.

Учитывая тот факт, что $\sigma_0 = -\rho_0 a_0 v_0$, формулу (4.136) для нашего случая запишем так:

$$\sigma_s + \sigma(\bar{\xi}, 0) = -\rho_0 a_0 (v_0 - v_s) \exp(-\bar{\xi}). \tag{4.139}$$

Аналогичным образом можно вывести закон изменения скорости:

$$v(\bar{\xi}, 0) = (v_0 - v_s)[-1 + \exp(-\bar{\xi})], \tag{4.140}$$

откуда видно, что при $x \to \infty$ скорость частиц на переднем фронте волны сильного разрыва стремится к величине $v_0 - v_s$ (будучи равна нулю при $x = 0$).

Чтобы установить характер изменения скорости и напряжения во всей области за фронтом сильного разрыва $\eta = 0$, надо определить вид функций $f(\bar{\xi})$ и $g(\eta)$ в (4.138) из условий (4.139) или (4.140) и краевого условия (4.91):

$$f'(0) - g'(0) + \int_0^{\bar{\xi}} [f''(\bar{\xi}) - f(\bar{\xi})] d\bar{\xi} = \frac{4(v_0 - v_s)}{a_0} [-1 + \exp(\bar{\xi})];$$

$$f'(0) - g'(0) + \int_0^{\bar{\xi}} [f(\bar{\xi}) - 2f'(\bar{\xi}) + f''(\bar{\xi})] d\bar{\xi} = \frac{4(v_0 - v_s)}{a_0};$$

$$z'(0) I_0(2i\bar{\xi}) + \int_0^{\bar{\xi}} I_0\left(2i\sqrt{\bar{\xi} y}\right)[z''(\bar{\xi} - y) - z(\bar{\xi} - y)] dy = 0;$$

при $z = f - g$. Данная система уравнений имеет решение

$$f(y) = g(y) = \frac{2(v_0 - v_s)}{a_0} y \exp y,$$

поэтому

$$-\frac{v}{v_0 - v_s} = 1 - I_0\left(2i\sqrt{\bar{\xi}\eta}\right)\exp[-(\bar{\xi} + \eta)] -$$

$$-2\exp(-\bar{\xi})\int_0^{\eta} I_0\left[2i\sqrt{\bar{\xi} y}\,\exp(-y)\right] dy;$$

$$-\frac{\sigma + \sigma_s}{\rho_0 a_0 (v_0 - v_s)} = I_0\left(2i\sqrt{\bar{\xi}\eta}\right)\exp[-(\bar{\xi} + \eta)]. \qquad (4.141)$$

Из (4.141) следует, что в каждом сечении x стержня значение v монотонно падает до нуля, причем при больших значениях как $t^{-1/2}$.

Характер изменения напряжения для различных значений x и τ представлен на рис. 4.32. Для сечений, удовлетворяющих условию $\frac{\rho_0 a_0}{2\mu} x \le 2$, напряжение с ростом t монотонно убывает до $-\sigma_s$; при $\frac{\rho_0 a_0}{2\mu} x \ge 2$ оно вначале несколько воз-

растает. Величина $\sigma + \sigma_s$ в обоих случаях при больших значениях времени убывает как $t^{-1/2}$.

Распределение остаточных деформаций $\tilde{e} = e - \sigma/E$ находится интегрированием соотношения $\dfrac{d\tilde{e}}{dt} = \dfrac{\sigma + \sigma_s}{\mu}$.

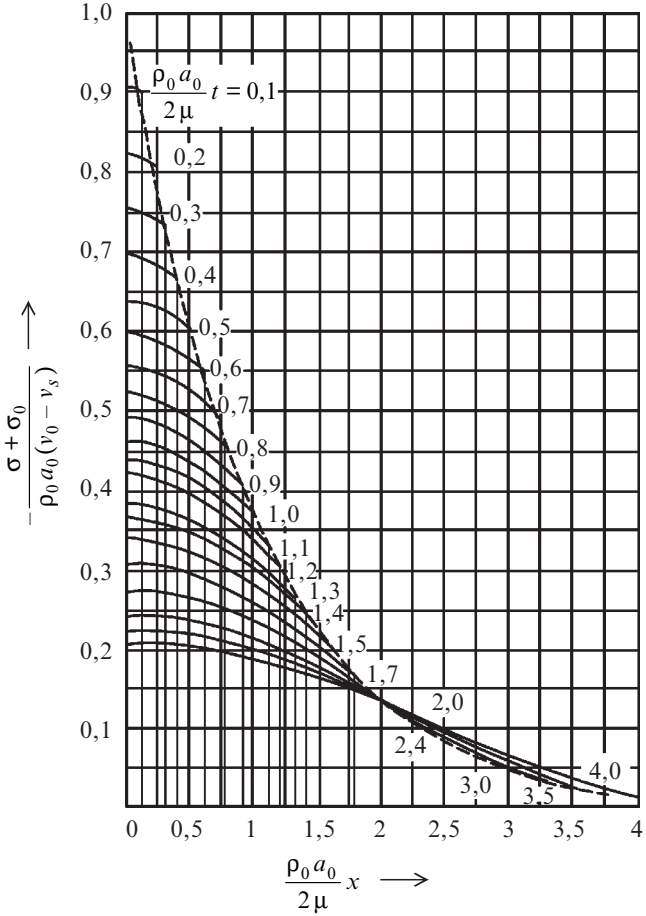


Рис. 4.32

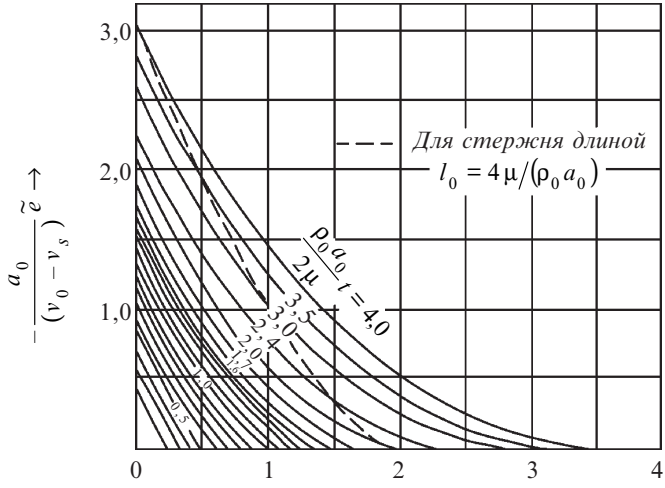


Рис. 4.33

На рис. 4.33 сплошными линиями изображены зависимости $\tilde{e}(x)$ для различных моментов времени, штриховой линии соответствует распределение $\tilde{e}(x)$ в стержне конечной длины $l_0 = 4\mu/(\rho_0 a_0)$, в котором процесс деформирования закончился благодаря приходу отразившейся от свободного конца волны растяжения (см. следующую задачу).

На рис. 4.34 изображена соответствующая форма цилиндрического стержня до и после удара. Отметим, что переданный стержню импульс

$$I(t) = \sigma_s t + \rho_0 a_0 (v_0 - v_s) \int_0^t I_0\left(i\frac{Ez}{2\mu}\right)\exp\left(-\frac{zE}{2\mu}\right)dz.$$

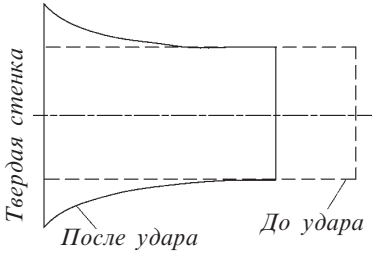


Рис. 4.34

Задача 5. Рассмотрим задачу, аналогичную предыдущей, но для стержня конечной длины l_0. В этом случае полученное выше решение (4.141) справедливо лишь в области *II* (рис. 4.35), ограниченной концевым сечением и характеристикой

$\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 = \rho_0 a_0 l_0/(2\mu)$. На заднем фронте отраженной волны $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0$, как нетрудно показать, напряжения и скорости частиц стержня изменяются по закону

$$\frac{\sigma}{\rho_0 a_0 (v_0 - v_s)} = \exp(-\bar{\xi}_0) - \varphi(\bar{\xi}_0, \eta), \tag{4.142}$$

$$\frac{v}{v_0 - v_s} = \frac{2v_s - v_0}{v_0 - v_s} + \exp(-\bar{\xi}_0) + \varphi(\bar{\xi}_0, \eta)$$

при $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 + 0$, где

$$\varphi(x, y) = I_0\left(2i\sqrt{xy}\right)\exp[-(x+y)] + \int_0^y I_0\left(2i\sqrt{xz}\right)\exp[-(x+z)]dz.$$

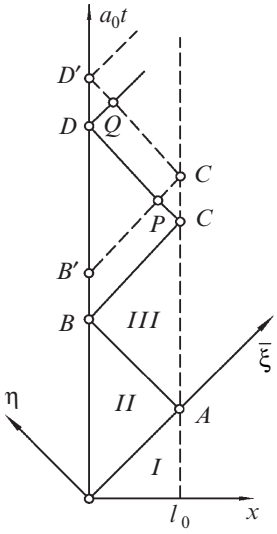


Рис. 4.35

Очевидно, $\varphi(x,0) = \exp(-x)$. Кроме того, $\varphi(x, x) = [1 + I_0(2ix)\exp(-2x)]/2$. Чтобы доказать последнее утверждение, достаточно заметить, что $\chi = \exp(\bar{\xi} + \eta)$ является решением уравнения (4.137), поэтому согласно (4.138)

$$\exp(\bar{\xi} + \eta) = I_0\left(2i\sqrt{\bar{\xi}\eta}\right) + \int_0^{\bar{\xi}} I_0\left(2i\sqrt{z\eta}\right)\exp(\bar{\xi} - z)dz + \int_0^{\eta} I_0\left(2i\sqrt{\bar{\xi}z}\right)\exp(\eta - z)dz,$$

откуда при $\bar{\xi} = \eta = x$

$$2\int_0^y I_0\left(2i\sqrt{xz}\right)\exp[-(x+z)]dz = 1 - I_0(2ix)\exp(-2x).$$

Из формулы (4.142) видно, что напряжение монотонно уменьшается, начиная со значения $\sigma = 0$.

Следует помнить, что формулы (4.142) справедливы лишь для области упругих деформаций. Как только напряжение

на заднем фронте волны $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0$ превысит по абсолютной величине указанное значение, в области *III* (см. рис. 4.35) возникнет волна, переводящая частицы стержня из упругого в упруговязкопластическое состояние. Так как при этом получить замкнутое решение поставленной задачи не удается (приходится прибегать, как и в задачах 1–3, к численному интегрированию системы характеристик), ограничимся, как и в [32], рассмотрением случая $|\sigma_B| \le \sigma_s$, обеспечивающего существование упругих деформаций в области *III*. Условие $|\sigma_B| \le \sigma_s$ накладывает, как нетрудно показать с использованием предыдущих формул, следующее ограничение на скорость удара:

$$v_0 \le v_{\text{кр}};\ \frac{v_{\text{кр}}}{v_s} = 1 + \left[0{,}5 - \exp\left(-\bar{\xi}_0\right) + 0{,}5 I_0\left(2i\bar{\xi}_0\right)\exp\left(-2\bar{\xi}_0\right)\right].$$

График функции $v_{\text{кр}}\left(-\bar{\xi}_0\right)/v_0$ приведен на рис. 4.36. Минимальное значение $v_{кр}/v_s$ = 2,79 достигается при $\bar{\xi}_0$ = 5,05, затем $v_{\text{кр}}\left(-\bar{\xi}_0\right)/v_s$ асимптотически стремится к значению 3. При скорости удара, меньшей $v_{\text{кр}}$, определить поле скоростей и напряжений в область *III* (см. рис. 4.35) с использованием решения Д'Аламбера для волнового уравнения не представляет труда:

$$\frac{\sigma}{\rho_0 a_0 (v_0 - v_s)} = \varphi\left(\bar{\xi}_0, \bar{\xi} - \xi_0\right) - \varphi\left(\bar{\xi}_0, \eta\right);$$

$$\frac{v}{v_0 - v_s} = \frac{2v_s - v_0}{v_0 - v_s} + \varphi\left(\bar{\xi}_0, \bar{\xi} - \xi_0\right) - \varphi\left(\bar{\xi}_0, \eta\right). \quad (4.143)$$

Из последней формулы для напряжения следует, что в области *III* $-\sigma_s \le \sigma \le 0$, т. е. имеет место упругое состояние стержня.

После отражения волны растяжения *AB* (см. рис. 4.35) от точки *B* возникает новый волновой фронт *BC*, после чего стержень или по-прежнему будет находиться в соприкосновении со стенкой ($v_{x=0}$ = 0), или отскочит от последней. Эле-

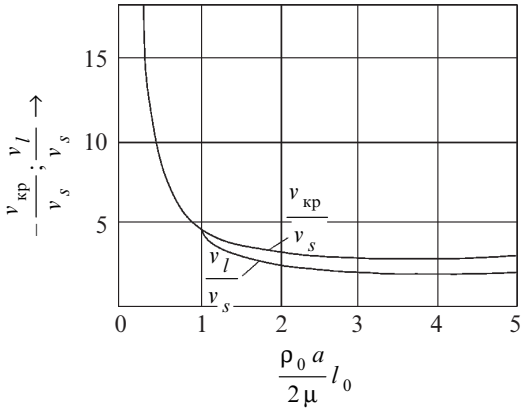


Рис. 4.36

ментарные выкладки, аналогичные проведенным в § 1.5, показывают, что соударение прекратится, если $v_0 \le v_l$, где $v_l / v_s = 1 + \left[1 - 2\exp\left(-\bar{\xi}_0\right)\right]^{-1}$.

На рис. 4.36 приведен график функции $v_l\left(\bar{\xi}_0\right)/v_s$, причем только для $\bar{\xi}_0 \ge 1{,}049$, когда $v_l \le v_{кр}$; при $\xi_0 \to \infty$ будет $v_l \to 2v_s$. Дальнейший расчет волнового процесса в стержне при $v_0 \le v_l$ не представляет труда и может быть произведен таким же способом, как в § 1.5.

В том случае, когда область *III* является областью полностью упругих деформаций, упруговязкопластическое состояние в дальнейшем возникнуть не может. Поэтому более детально остановимся на исследовании случая $v_l < v_0 \le v_{кр}$, который, как видно из графика рис. 4.36, возможен лишь для $\bar{\xi}_0 \ge 1{,}049$.

Определим напряжения и деформации в областях *IV* и *V* соответственно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma}{\rho_0 a_0 (v_0 - v_s)} &= \varphi\left(\bar{\xi}_0, \bar{\xi} - \bar{\xi}_0\right) + \varphi\left(\bar{\xi}_0, \eta - \bar{\xi}_0\right) + \frac{2v_s - v_0}{v_0 - v_s}; \\ \frac{v}{v_0 - v_s} &= \varphi\left(\bar{\xi}_0, \bar{\xi} - \bar{\xi}_0\right) - \varphi\left(\bar{\xi}_0, \eta - \bar{\xi}_0\right); \end{aligned}\right\} \quad (4.144)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma}{\rho_0 a_0 (v_0 - v_s)} &= \varphi(\bar{\xi}_0, \eta - \bar{\xi}_0) - \varphi(\bar{\xi}_0, \bar{\xi} - 2\bar{\xi}_0);\\ \frac{v}{v_0 - v_s} &= \frac{v_0 - 2v_s}{v_0 - v_s} - \varphi(\bar{\xi}_0, \bar{\xi} - 2\xi_0) - \varphi(\bar{\xi}_0, \eta - \bar{\xi}_0).\end{aligned}\right\} \quad (4.145)$$

Из формулы (4.144) следует, что напряжение σ на ударяемом торце стержня монотонно изменяется от значения $\sigma(B) > 0$ до $\sigma(D) > 0$. Значит, существует определенный момент, характеризующийся значениями $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 + z$, $\eta = \bar{\xi}_0 + z$, когда напряжение на торце в сечении $x = 0$ станет равным нулю, после чего стержень отскочит от преграды.

Для определения z получим трансцендентное уравнение

$$2\varphi(\bar{\xi}_0, z) = (v_0 - 2v_s)/(v_0 - v_s).$$

На рис. 4.35 точкой B' отмечен момент отскока стержня от преграды; очевидно, $B'C'$ выше характеристики формулы (4.144) и (4.145) неприменимы в силу изменения краевого условия в сечении $x = 0$.

Определим напряжения и скорости в областях $B'PD$, $PC'QD$ и DQD' соответственно:

$$\frac{\sigma}{\rho_0 a_0 (v_0 - v_s)} = \varphi(\bar{\xi}_0, \bar{\xi} - \bar{\xi}_0) - \varphi(\bar{\xi}_0, \eta - \bar{\xi}_0);$$

$$\frac{v}{v_0 - v_s} = \varphi(\bar{\xi}_0, \bar{\xi} - \bar{\xi}_0) + \varphi(\bar{\xi}_0, \eta - \bar{\xi}_0) + \frac{2v_s - v_0}{v_0 - v_s};$$

$$\frac{\sigma}{\rho_0 a_0 (v_0 - v_s)} = -\varphi(\bar{\xi}_0, \bar{\xi} - 2\bar{\xi}_0) - \varphi(\bar{\xi}_0, \eta - \bar{\xi}_0) + \frac{v_0 - 2v_s}{v_0 - v_s};$$

$$\frac{v}{v_0 - v_s} = -\varphi(\bar{\xi}_0, \bar{\xi} - 2\bar{\xi}_0) + \varphi(\bar{\xi}_0, \eta - \bar{\xi}_0);$$

$$\frac{\sigma}{\rho_0 a_0 (v_0 - v_s)} = -\varphi(\bar{\xi}_0, \bar{\xi} - 2\bar{\xi}_0) + \varphi(\bar{\xi}_0, \eta - 2\bar{\xi}_0);$$

$$\frac{v}{v_0 - v_s} = \varphi(\bar{\xi}_0, \bar{\xi} - \bar{\xi}_0) - \varphi(\bar{\xi}_0, \eta - 2\bar{\xi}_0) + \frac{v_0 - 2v_s}{v_0 - v_s}.$$

Можно показать, что во всех областях $|\sigma| \le \sigma_s$ и $v_{x=0} \ge 0$. На рис. 4.37–4.39 изображены траектории движения частиц стержня в течение соударения и после него, причем рис. 4.37 соответствует полностью упругому удару, рис. 4.38 – удару со скоростью $v_0 < v_l$, рис. 4.39 – удару со скоростью $v_l \le v_0 \le v_{\text{кр}}$ (чтобы оттенить различие, отношение $v_s/a_0 = \sigma_s/E$ значительно завышено).

На рис. 4.40 приведены графики изменения продолжительности удара T в зависимости от длины стержня l_0 и отношения v_0/v_s. На графиках рис. 4.41 представлена зависимость от тех же переменных коэффициента восстановления $R = v_l/v_0$ (v_l – скорость центра тяжести стержня после окончания соударения; очевидно, до удара она равна v_0). При $v_0 \le v_s$ $R = 0$; при $v_0/v_s > 1$ $R < 1$ ввиду перехода части энергии поступательного движения в тепловую, а части – в энергию колебания.

Скорость v_l определяется из закона сохранения количества движения

$$v_l l_0 \rho_0 = -\int_0^T \sigma|_{x=0}\, dt - v_l l_0 \rho_0$$

с использованием соответствующих зависимостей для напряжения в точке удара.

Рассмотрим теперь распространение в упруговязкопластической среде цилиндрических волн сдвига. Соотношения (4.111) и (4.112) для закона деформирования в этом случае можно записать так:

$$\mu \frac{d\gamma_{r\theta}}{dt} = \frac{d\tau_{r\theta}}{dt} \text{ при } |\tau_{r\theta}| \le \tau_s; \tag{4.146}$$

$$\mu \frac{d\gamma_{r\theta}}{dt} = \frac{d\tau_{r\theta}}{dt} + xKf\left(|\tau_{r\theta}| - \tau_s\right) \text{ при } |\tau_{r\theta}| \ge \tau_s, \tag{4.147}$$

где μ – модуль сдвига. Уравнение распространения цилиндрических волн сдвига имеет вид (см. §3.2):

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = -\rho_0 \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial t^2}. \tag{4.148}$$

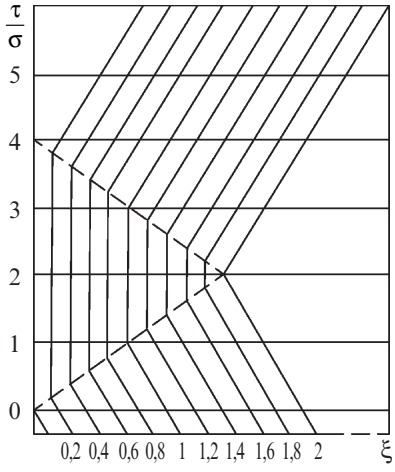


Рис. 4.37

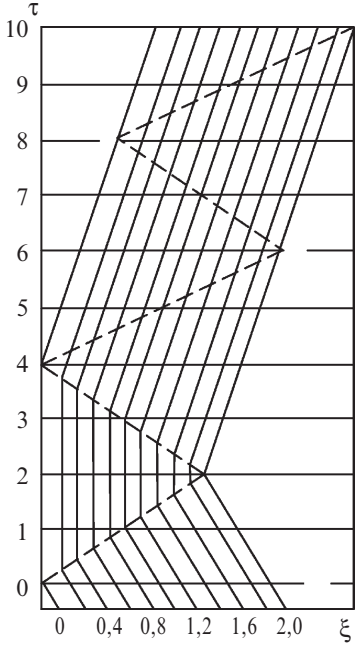


Рис. 4.38

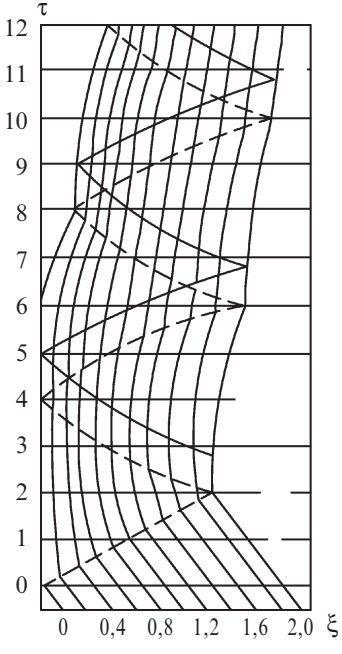


Рис. 4.39

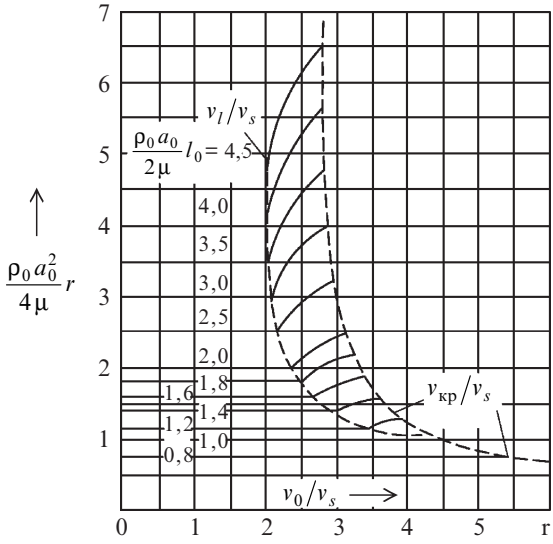


Рис. 4.40

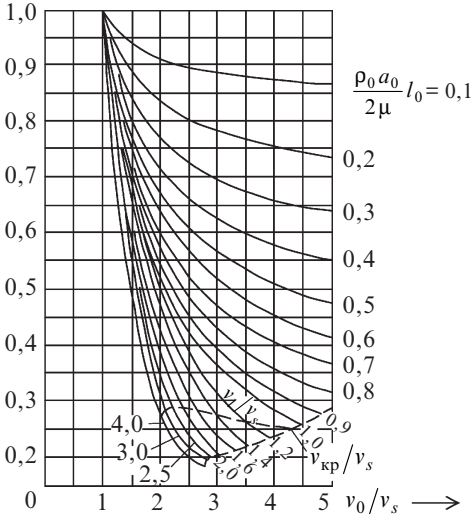


Рис. 4.41

Уравнения (4.146)–(4.148), если учесть, что $\gamma_{r\theta} = w_\theta / r - \partial w_\theta / \partial r$, $v_\theta = \partial w_\theta / \partial t$, можно привести к следующей системе уравнений для напряжения сдвига $\tau_{r\theta}$ и скорости v_θ:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = -\rho_0 \frac{\partial v_\theta}{\partial t};$$

$$\mu\left(\frac{v_\theta}{r} - \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial t} + xK\varphi(|\tau_{r\theta}| - \tau_s), \qquad (4.149)$$

где $\varphi(z) \equiv 0$ при $z \le 0$, $\varphi(z) = f(z)$ при $z \ge 0$ (в дальнейшем рассматривается случай $\varphi(z) = z$).

Не представляет труда получить характеристики этой системы, эквивалентной одному уравнению в частных производных второго порядка гиперболического типа:

$$r = \pm ct + \text{const}; \; c^2 = \mu / \rho_0;$$

$$\mu\left(\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r}\right) = \pm c\left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r}\right) + \varkappa K\varphi(|\tau_{r\theta}| - \tau_s). \qquad (4.150)$$

На переднем фронте $r = \pm ct + \text{const}$ цилиндрической волны сильного разрыва, бегущей в покоящуюся среду, имеем:

$$w_\theta = 0 \text{ или } c\gamma_{r\theta} + v_\theta = 0; \qquad (4.151)$$

$$\mu \frac{dv_\theta}{dr} + c\frac{d\tau_{r\theta}}{\partial r} = 0 \text{ или } \rho_0 c v_\theta + \tau_{r\theta} = 0. \qquad (4.152)$$

Воспользуемся безразмерными величинами: $\tau = Kt$; $\bar{r} = Kr/c$; $\delta = Kd/c$; $T = |\tau_{r\theta}|/\tau_s$; $G = \varkappa\gamma_{r\theta}/\gamma_s$; $\bar{v} = \varkappa v_\theta / c\gamma_s$ и запишем уравнения (4.149) – (4.152) следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{\bar{r}} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau}; \; \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{v}}{\bar{r}} = \frac{\partial T}{\partial \tau} + \varphi(T-1); \qquad (4.153)$$

$$\bar{r} = \pm\tau + \text{const}; \; \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{v}}{\bar{r}} = \pm\left(\frac{dT}{d\bar{r}} + \frac{2T}{\bar{r}}\right) + \varphi(T-1); \qquad (4.154)$$

$$G + \bar{v} = 0,\ \bar{v} + T = 0 \text{ при } \bar{r} = \tau + \text{const}. \qquad (4.155)$$

Пусть на цилиндрической поверхности $\bar{r} = \bar{r}_0$ в момент $\tau = 0$ внезапно возникло конечное напряжение сдвига, непрерывно изменяющееся при $\tau > 0$. В этом случае от сечения $\bar{r} = \bar{r}_0$ начинает распространяться волна сильного разрыва $r = r_0 + \tau$, на которой, согласно (4.155) $T = -\bar{v} = G$.

Аналогичным условием будут связаны значения напряжения T_0, скорости $\bar{v}_0$ и сдвига G_0 в начальный момент времени. Условие (4.154) на волне $\bar{r} = \bar{r}_0 + \tau$ с использованием (4.155) может быть преобразовано к виду

$$2\frac{dT}{d\bar{r}} + \frac{T}{\bar{r}} + \varphi(T-1) = 0;$$

его решение

$$T = 1 + \sqrt{\frac{2}{\bar{r}}}\exp(-\bar{r}/2)\int_{\bar{r}/2}^{e}\exp(\xi^2)d\xi \text{ при } \bar{r}_0 \le \bar{r} \le \gamma;$$
$$T = \sqrt{\gamma/\bar{r}}\ ; \text{ при } \bar{r} \ge \gamma, \qquad (4.156)$$

причем γ находится из уравнения

$$(T_0 - 1)\sqrt{\frac{\bar{r}_0}{2}}\exp(\bar{r}_0/2) = \int_{\bar{r}_0/2}^{c}\exp(\xi^2)d\xi, \qquad (4.157)$$

где $c = \sqrt{\gamma/2}$. Формулы (4.156) и (4.157) имеют место при $T_0 \ge 1$. Для деформации сдвига G на волне $\bar{r} = \bar{r}_0 + \tau$ получим формулу

$$G = T + \int_{\bar{r} = \bar{r}_0}^{\tau}\varphi(T(\tau, \bar{r}) - 1)\,d\tau. \qquad (4.158)$$

Пусть в некотором сечении $\bar{r}$ стержня величина напряжения T после прохождения волны сильного разрыва $\bar{r} = \bar{r}_0 + \tau$ изменяется непрерывно, причем $T \ge 1$ при $\bar{r} - \bar{r}_0 \le \tau \le \tau(\bar{r})$, $T \le 1$ при $\tau \ge \tau(\bar{r})$, где $\tau = \tau(\bar{r})$ – момент, когда $T = 1$. В этом случае деформация сдвига G будет выражаться формулами:

$$G = T + \bar{r} - \bar{r}_0 - \tau + \int\limits_{\bar{r}-\bar{r}_0}^{\tau} T(\tau,\bar{r})\,d\tau \ \text{ при } \ \bar{r} - \bar{r}_0 \le \tau \le \tau(\bar{r});$$

$$G = T + G_r(\bar{r});\ G = \bar{r} - \bar{r}_0 - \tau(\bar{r}) + \int\limits_{\bar{r}-\bar{r}_0}^{\tau(\bar{r})} T(\tau,\bar{r})\,d\tau = G(\tau,\tau(\bar{r})) - 1. \tag{4.159}$$

Предположим теперь, что на поверхности $\bar{r} = \bar{r}_0$ напряжение T изменяется по закону

$$T = T_0(1 - \tau/\tau_1) \ \text{ при } \ 0 \le \tau \le \tau_1;\ \ T_0 > 1.$$

Величину деформации сдвига G на поверхности $\bar{r} = \bar{r}_0$ определим по формуле (4.158):

$$G = T - \tau + T_0\tau\left(1 - \frac{\tau}{2\tau_1}\right) \ \text{ при } \ 0 \le \tau \le \tau_*;$$

$$G = T + T_0\frac{\tau_*^2}{2\tau_1} \ \text{ при } \ \tau_* \le \tau \le \tau_1,$$

где $\tau_* = \tau_1(T_0 - 1)/T_0$.

Процесс распространения волн в плоскости $\bar{r}, \tau$ изображен на рис. 4.42; точки μ_{20} и μ_{11} имеют координаты $\tau = \gamma - \bar{r}_0$, $\bar{r} = \gamma$ и $\tau = \tau_*$, $\bar{r} = \bar{r}_0 = \rho_0$.

Решение находим методом характеристик с использованием граничных условий для напряжения при $\bar{r} = \bar{r}_0 + \tau$ и

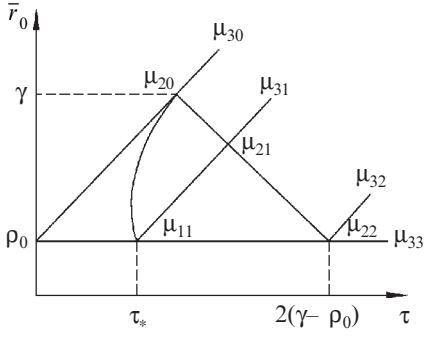


Рис. 4.42

$\bar{r} = \bar{r}_0$. Сначала строим решение уравнения (4.153) при $\varphi(z) \equiv 0$ в треугольнике $\rho_0\mu_{20}\mu_{11}$ и находим линию $\mu_{20}\mu_{11}$, вдоль которой $T = 1$. Построенное решение имеет смысл лишь в криволинейном треугольнике $\rho_0\mu_{20}\mu_{11}$; в остальной части при определении поля напряжений необходимо использовать уравнение (4.153), в котором $\varphi(z) \equiv 0$. При построении решения в последующих областях используется тот факт, что в них $\varphi(z) \equiv 0$.

Результаты расчета остаточных деформаций для случая $\bar{r}_0 = 1$, $T_0 = 2$, $\tau_1 = 2$ приведены в табл. 4.7.

Таблица 4.7

$\bar{r}$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,73
G_r	0,50	0,35	0,25	0,18	0,13	0,10	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00

$$G_r(\bar{r}) \equiv 0 \text{ при } \bar{r} \geq \gamma = 2{,}73.$$

На рис. 4.43 в плоскости $\tau, \bar{r}$ нанесены линии $T = \text{const}$, $\bar{v} = \text{const}$.

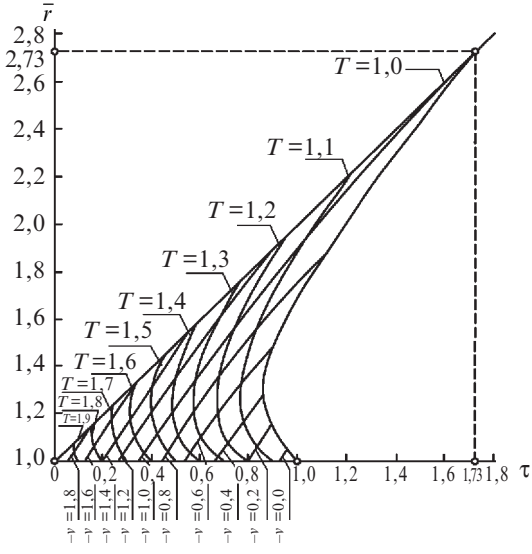


Рис. 4.43

Исследуем характер распространения волн при ударе цилиндром радиуса a по пластинке из упруговязкопластического материала. Эта задача решена в [30]. Как известно из предыдущего, уравнением движения для рассматриваемого случая является

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r}. \tag{4.150}$$

Закон деформирования, принятый в [37], имеет вид более общий, чем (4.147), а именно:

$$\mu \frac{d\gamma_{rz}}{dt} = \frac{d\tau_{rz}}{dt} \text{ при } |\tau_{rz}| \le \tau_s; \tag{4.161}$$

$$\mu \frac{d\gamma_{rz}}{dt} = \frac{d}{dt}[\tau_{rz} - f(\gamma_{rz})] + K[\tau_{rz} - f(\gamma_{rz})] \text{ при } |\tau_{rz}| \ge \tau_s,$$

где $\gamma_{rz} = \dfrac{\partial w}{\partial r}$.

Вводя безразмерные величины $T = \tau_{rz}/\tau_s$, $\gamma = \gamma_{rz}/\gamma_s$, $\tau = Kt$, $\bar{r} = Kr/a_0$, $w = Kw/(\gamma_s a_0)$, $v = \dfrac{1}{\gamma_s a_0}\dfrac{\partial w}{\partial t}$, $f(\gamma) = \dfrac{1}{\tau_s} f(\gamma_{rz})$, где $a_0 = \sqrt{\mu/\rho_0}$ – скорость распространения упругих волн при сдвиге, $\gamma_s = \tau_s/\mu$ – деформация сдвига, соответствующая пределу текучести, уравнение (4.160) и соотношения (4.161) запишем так:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} + \frac{T}{\bar{r}}; \tag{4.162}$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{dT}{d\tau} \text{ при } T \le 1; \tag{4.163}$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d}{dt}[T - f(\gamma)] + [T - f(\gamma)] \text{ при } T \ge 1. \tag{4.164}$$

Очевидно,

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \gamma}{\partial \tau}. \tag{4.165}$$

Начальные и граничные условия в безразмерном виде таковы:

$$v = 0,\ \bar{r} > \bar{r}_0;\ v = v_0, \text{ при } \tau = 0; \tag{4.166}$$

$$m\frac{dv}{d\tau}=T \quad \text{для} \quad \bar{r}=\bar{r}_0 \quad \left(m=Ma_0K/(2\pi ah\mu)\right). \qquad (4.167)$$

Заметим, что при $f(\gamma) = 1$ закон деформирования (4.161) совпадает с рассмотренным выше. В этом случае система уравнений (4.162) – (4.163) может быть преобразована к виду

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{r}}=\frac{\partial T}{\partial \tau}+\varphi(T-1); \quad \frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial T}{\partial \bar{r}}+\frac{T}{\bar{r}}, \qquad (4.168)$$

где $\varphi(T-1)$ определяется равенствами $\varphi(T-1)=0$ при $T \le 1$; $\varphi(T-1)=T-1$ при $T \ge 1$.

Для сдвига γ получаем формулу

$$\gamma=T+\int \varphi(T-1)\,d\tau+\chi(\bar{r}),$$

где $\chi(\bar{r})$ – произвольная функция. Система (4.168) эквивалентна следующей системе характеристик:

$$\tau \mp \bar{r}=\text{const}; \; dv \mp dT=\left[\frac{T}{\bar{r}} \pm \varphi(T-1)\right]d\tau. \qquad (4.169)$$

Из условий на характеристиках (4.169) легко получить соотношения для скачков деформаций, скоростей и напряжений на волнах сильного разрыва $\tau \mp \bar{r}=\text{const}$, а именно:

$$[v]+[T]=0; [\gamma]\pm[v]=0.$$

В частности, на фронте волны $\bar{r}=\tau+\bar{r}_0$, распространяющейся в невозмущенную область пластинки, имеем $T=-v=\gamma$. Учитывая последние соотношения, условия на характеристике $\bar{r}=\tau+\bar{r}_0$ можно преобразовать следующим образом:

$$2\frac{dT}{d\bar{r}}+\frac{T}{\bar{r}}+\varphi(T-1)=0. \qquad (4.170)$$

Решением уравнения (4.170) будет

$$T=\sqrt{\bar{r}^*/\bar{r}} \quad \text{при} \quad T \le 1;$$

$$T=1+\sqrt{2/\bar{r}}\,e^{-\bar{r}/2}\int_{\xi}^{\xi^*} e^{z^2}\,dz \quad \text{при} \quad T \ge 1, \qquad (4.171)$$

где $\xi = \sqrt{\bar{r}/2}$; $\xi^* = \sqrt{\bar{r}^*/2}$; $\bar{r}^*$ – граница упругой и пластической областей, определенная из уравнения

$$(T_0 - 1)\sqrt{\bar{r}_0/2}\, e^{-\bar{r}/2} = \int_{\xi}^{\xi^*} e^{z^2} dz. \qquad (4.172)$$

Поэтому окончательное выражение для закона изменения напряжения на фронте волны сильного разрыва $\bar{r} = \tau + \bar{r}_0$, бегущей в невозмущенную часть пластинки, будет определяться формулой (4.171). Формулы, аналогичные (4.171), могут быть получены и для более общей зависимости функции $f(\gamma)$, в частности для $f(\gamma) = 1 + (n^2 - 1)(\gamma - 1)$, рассмотренной в [30]:

$$T = 1 + (T_0 - 1)\sqrt{\bar{r}_0/\bar{r}}\, e^{(\bar{r} - \bar{r}_0)/2} + \sqrt{2/\bar{r}}\, e^{-\bar{r}/2} \int_{\xi}^{\xi_0} e^{z^2} \text{ при } T \geq 1; \quad (4.172')$$

$$T = \sqrt{\bar{r}^*/\bar{r}} \text{ при } T \leq 1.$$

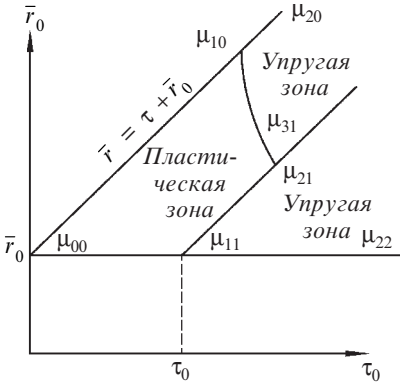


Рис. 4.44

На рис. 4.44 в плоскости $\tau, \bar{r}$ представлена схема распространения волн. Области движения соответствует треугольник $\mu_{20}\mu_{10}$ $\mu_{00}\mu_{11}\mu_{22}$. В том случае, когда в момент $\tau = \tau_0$ времени напряжение $T = T_0$ снято, возникает новая прямая волна $\bar{r} = \bar{r}_0 + (\tau - \tau_0)$, за которой состояние частиц пластины будет упругим (рис. 4.44). В полосе $\mu_{20}\mu_{10}\mu_{00}\mu_{11}\mu_{21}\mu_{31}$ решение уравнений строится численно по данным на фронте $\mu_{20}\mu_{10}$ μ_{00} и на границе $\mu_{00}\mu_{11}$. В результате решения находится, в частности, граница $\mu_{00}\mu_{21}$ упругой и пластической зон. В треугольнике $\mu_{31}\mu_{21}\mu_{11}\mu_{22}$ реше-

ние находится с использованием соотношений на волне сильного разрыва $\mu_{31}\mu_{21}\mu_{11}$ и на границе $\mu_{11}\mu_{22}$.

На рис. 4.45 и 4.46 сплошными и штриховыми линиями показаны соответственно линии равных напряжений и скоростей в плоскости $\bar{r}, \tau$ для $m = 2$ и $m = 4$ при $T_0 = 2$, $\bar{r}_0 = 1$. Сдвиг γ определяем по формуле

$$\gamma = T(\tau, \bar{r}) + \int_{\tilde{r}-\bar{r}_S}^{\tau(\bar{r})} \varphi[T(z, \bar{r}) - 1]\, dz.$$

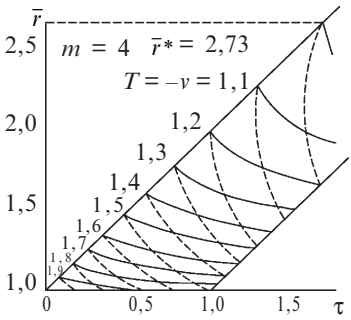


Рис. 4.45

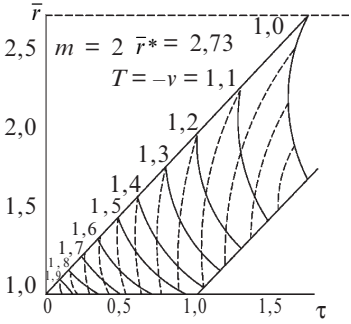


Рис. 4.46

Если для какого-либо значения $\bar{r}$ напряжение T при $\tau > \bar{r} - \bar{r}_0$ изменяется непрерывно, причем $T \geq 1$ при $r - r_0 \leq \tau \leq \tau(\bar{r})$, $T \leq 1$ при $\tau \geq \tau(\bar{r})$ (здесь $\tau = \tau(\bar{r})$ – момент времени, когда $T = 1$), то остаточная деформация сдвига

$$\gamma_r(\bar{r}) = \int_{\bar{r}-r_S}^{\tau(\bar{r})} \varphi[T(z, \bar{r}) - 1]\, dz = \gamma_-(\bar{r}) - T_-(\bar{r}). \quad (4.173)$$

Здесь индексом «–» обозначены деформации и напряжения в момент $\tau = \tau(\bar{r})$, подсчитанные со стороны $\tau \leq \tau(\bar{r})$. Приводим заимствованную из [30] табл. 4.8 значений остаточных деформаций, вычисленных по формуле (4.173) для некоторых значений m.

Таблица 4.8

$\bar{r}$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,73
$m = 1$	0,48	0,30	0,19	0,12	0,07	0,045	0,024	0,012	0,004	0
$m = 2$	0,78	0,53	0,35	0,24	0,16	0,092	0,050	0,025	0,010	0
$m = 4$	0,96	0,68	0,48	0,36	0,23	0,140	0,080	0,040	0,020	0
$m = \infty$	1,15	0,86	0,60	0,42	0,30	0,190	0,106	0,052	0,022	0

График $\gamma_r(\bar{r})$ для этого случая приведен на рис. 4.47.

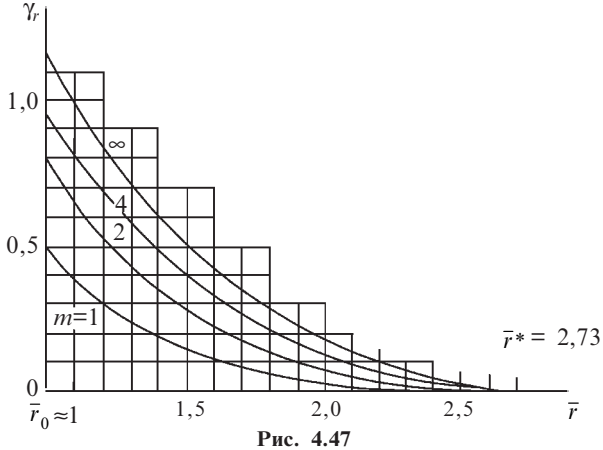


Рис. 4.47

В заключение приведем результаты сопоставления расчетов напряженного и деформируемого состояний по двум теориям: упругопластической и упруговязко-пластической. Сопоставление такого рода проведено в [33].

В качестве упруговязкопластического закона деформирования принят $E_0 e = \dot{\sigma} + K[\sigma - f(e)]$ при $e > e_s$. Расчеты проведены для частного вида функции $f(e) = 1400 - 0{,}7/e$, и значений $E_0 = 7 \cdot 10^5$ кг/см^2, $\sigma_s = 700$ кг/см^2, $\rho_0 = 27{,}3 \cdot 10^{-4}$ г с^2/см^4, $K = 10^6$ с$^{-1}$, по утверждению автора [38] характеризующих закаленный алюминий (рис. 4.48). Рассмотрены два случая ударного нагружения.

Случай 1. Удар с постоянной скоростью $v_0 = -15{,}25$ м/с.

На рис. 4.49 построены линии постоянных значений деформаций; штриховые линии соответствуют расчетам по уп-

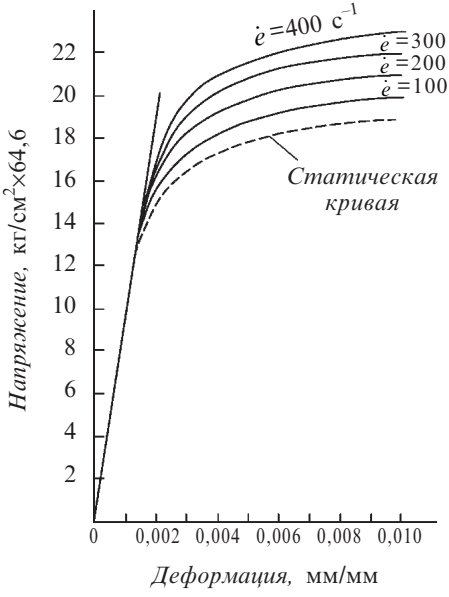


Рис. 4.48

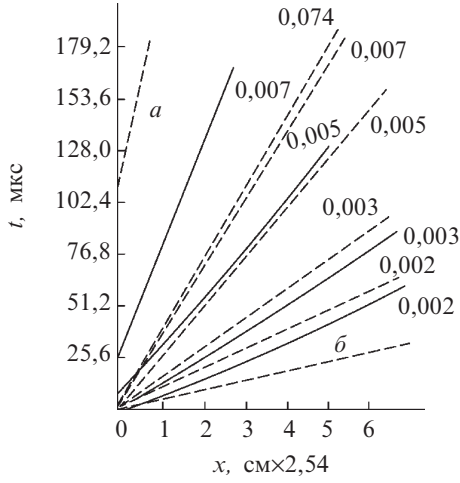


Рис. 4.49

ругопластической теории (с использованием статической диаграммы). Штриховая линия *a* соответствует переходу на кривую $\sigma = f(e)$.

На рис. 4.50 приведен график изменения напряжения на переднем фронте волны нагружения $x = a_0 t$. Значительное увеличение напряжения в окрестности точки удара обусловлено тем, что здесь ввиду очень больших значений скоростей деформирования диаграмма $\sigma - e$ фактически совпадает с прямой $\sigma = Ee$. Расчет по упругопластической теории вместо графика, изображенного на рис. 4.50, дает прямую $\sigma = \text{const}$, расположенную значительно ниже максимума напряжения.

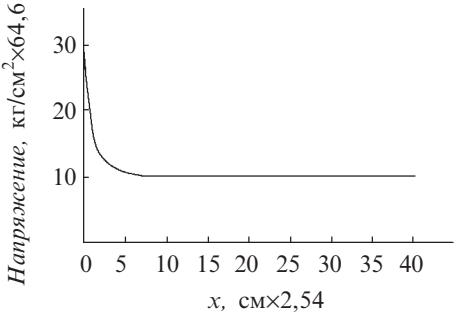


Рис. 4.50

Сравнение характера изменения напряжения в сечении $x = 16{,}2$ см, рассчитанного по обеим теориям, приведено на рис. 4.51. На рис. 4.52 построены кривые изменения напряжения в четырех сечениях стержня для рассматриваемого случая. Распределение деформаций в стержне в момент $t = 102{,}4$ мкс, рассчитанное по двум теориям, изображено на рис. 4.53. Расчеты по упруговязкопластической теории не позволяют получить область постоянных деформаций около ударяемого конца стержня, хотя последнее наблюдается экспериментально.

Случай 2. Постепенное возрастание скорости удара по закону $v_0 = -1525(1 - e^{-\sigma t})$ см/с.

Значение постоянной α выбрано таким образом, что 90% $v_{\max}$ будет достигнуто при $t = 0{,}1$ мкс. В этом случае на переднем фронте волны нагружения существенно будет ска-

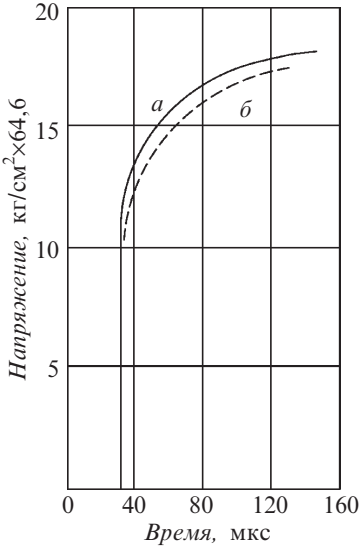


Рис. 4.51

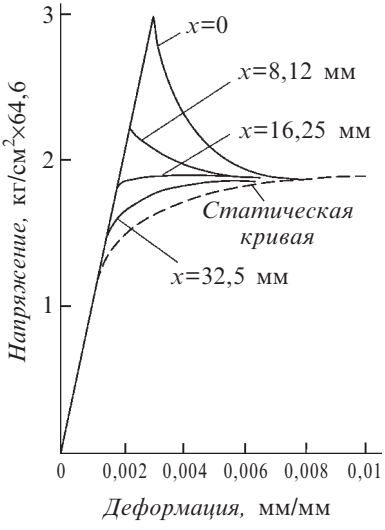


Рис. 4.52

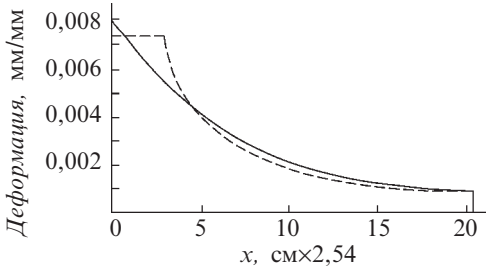


Рис. 4.53

зываться влияние скорости деформирования. Пластические деформации возникают при скорости $a_0 e_s = -510$ см/с, т. е. в момент $t = 17{,}61 \cdot 10^{-6}$ с.

На рис. 4.54 проведено сопоставление линий постоянных деформаций, рассчитанных по обеим теориям для удара, длящегося 0,3 мкс. Между линиями $x = a_0 t$ и $e = 0{,}001$ – область упругого нагружения, за прямой a – область упругой раз-

грузки. На рис. 4.55 построены графики распределения остаточных деформаций в случае, когда разгрузка началась через 0,3 мкс после начала удара. Расчеты по обеим теориям для рассматриваемого случая отличаются незначительно.

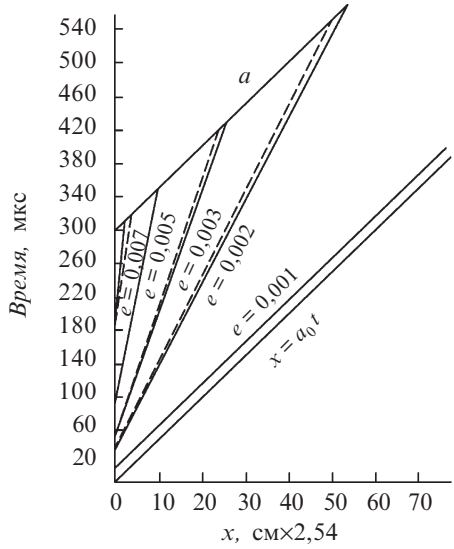


Рис. 4.54

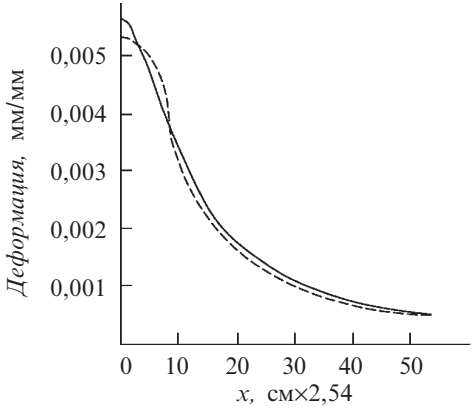


Рис. 4.55

§ 4.5. Сильный взрыв в грунте

Основные результаты [34], относящиеся к распространению плоской и сферической взрывных волн в грунтах, приведены ниже. В данном случае предполагалось, что грунт при больших давлениях ведет себя как идеальный пластический газ. Законность такого предположения подтверждается экспериментами, проведенными в лаборатории кафедры газовой и волновой динамики МГУ при исследовании распространения плоских взрывных волн в песке.

Перед тем как привести результаты экспериментов, выясним, какими специфическими чертами обладает волновой процесс в идеальном пластическом газе. С этой целью рассмотрим характер распространения плоских волн в полупространстве, занятом идеальным пластическим газом, при мгновенном приложении давления к его границе. Положим, что в последующие моменты времени приложенное давление монотонно убывает. В данном случае уравнение движения будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{4.174}$$

где u – смещение; ρ_0 – начальная плотность; p – давление, x – лагранжева координата, характеризующая расстояние данного сечения тела от сечения $x = 0$ в начальный момент времени. Из уравнения сохранения массы $\rho_0 = \rho(1 + u_x)$ с учетом того факта, что после прохождения ударной волной сечения x плотность в последнем не меняется (условие несжимаемости), получаем:

$$u_x = \frac{\rho_0}{\rho(x)} - 1 = f(x); \quad u(x,t) = \int_0^x f(x)\,dx + u_0(t), \tag{4.175}$$

где $u_0(t)$ – смещение границы полупространства. Следовательно, в каждый момент все частицы газа, расположенные между ударной волной и сечением $x = 0$, имеют одинаковую скорость.

Подставим (4.175) в (4.174). Тогда

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}; \; p = p_0(t) - \rho_0 x \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}. \tag{4.176}$$

Здесь $p_0(t)$ – закон изменения приложенного давления.

Обозначая индексом «*» параметры газа сразу за ударной волной, движущейся со скоростью $b(t)$ в покоящуюся его часть (с атмосферным давлением p_a), запишем законы сохранения массы и количества движения на ударном фронте:

$$b\rho_0 = \left(b - \frac{\partial u_0}{\partial t}\right)\rho^*; \tag{4.177}$$

$$b\rho_0 \frac{du_0}{dt} = p^* - p_a. \tag{4.178}$$

Зависимость между давлением и плотностью за ударной волной считается известной и может быть представлена формулой

$$p^* = p_a + k\left[(\rho^*/\rho_0)^n - 1\right]. \tag{4.179}$$

Кроме того, из соотношения (4.176) следует, что

$$p^* = \rho_0 - \rho_0 x^* \frac{d^2 u_0}{dt^2}, b = \frac{dx^*}{dt}. \tag{4.180}$$

Приведенная выше система уравнений позволяет определить зависимость $p^* = p^*(x)$.

Предварительно упростим формулу (4.179), используя тот факт, что величина $\rho^*/\rho_0 - 1$ мала (порядка 0,04–0,06):

$$p^* = p_a + k\left[(1 + \Delta\rho/\rho_0)^n - 1\right] = p_a + kn(\rho^* - \rho_0)/\rho_0. \tag{4.181}$$

Исключив $\dfrac{du_0}{dt}$ из (4.177) и (4.178), получим:

$$b^2 \rho_0 \frac{\rho^* - \rho_0}{\rho^*} = p^* - p_a$$

или с использованием (4.181)

$$b^2 \rho_0 \frac{\rho^* - \rho_0}{\rho^*} = kn \frac{\rho^* - \rho_0}{\rho^*}.$$

Следовательно,

$$b^2 = kn \frac{\rho^*}{\rho^2} \approx \frac{kn}{\rho_0} = \text{const}.$$

Учитывая этот факт и исключая p^* из соотношений (4.178) и (4.180), приходим к линейному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $u_0(t)$:

$$p_a + b\rho_0 \frac{du_0}{dt} = p_0(t) - \rho_0 bt \frac{d^2 u_0}{dt^2}. \qquad (4.182)$$

Линейность (4.182) является следствием допущения приближенной зависимости (4.181) между p^* и $(\rho^* - \rho_0)/\rho_0$, которая, как показывает эксперимент, справедлива для грунта вплоть до давлений порядка 10–15 кг/см^2.

Решением (4.182) является

$$\frac{du_0}{dt} = \frac{1}{\rho_0 bt} \int_0^t (p_0 - p_a)\, dt = F(t),$$

причем

$$\left(\frac{du_0}{dt}\right)_{t=0} = \frac{p_{0\max} - p_a}{b\rho_0}.$$

Из соотношения (4.178) находим:

$$p^*(x^*) - p_a = \frac{b}{x^*} \int_0^{x^*/b} (p_0 - p_a)\, dt. \qquad (4.183)$$

В тех случаях, когда давление $p_0(t)$ в течение некоторого времени τ остается почти постоянным, а потом быстро падает до нуля, интеграл в формуле (4.183) сохраняет почти постоянное значение и статическое давление за фронтом ударной волны должно уменьшаться обратно пропорционально ее удалению от поверхности, где был инициирован взрыв. Последний случай как раз имел место в экспериментах, проведенных в лаборатории кафедры волновой и газовой динамики МГУ, в которых на поверхность песчаной массы падала плоская воздушная ударная волна.

На рис. 4.56 приводится теоретическая зависимость перепада давлений $p^* - p_0$ на фронте ударной волны в функции величины I/x^*, где I – импульс. На том же рисунке отмечены результаты проведенных экспериментов, хорошо под-

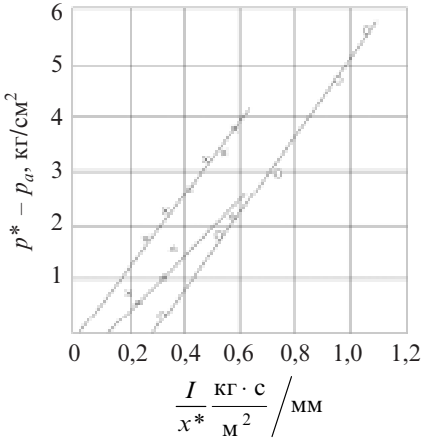


Рис. 4.56

тверждающих принятую гипотезу. Некоторое отклонение экспериментальных точек от прямой линии вблизи начала координат также следует из формулы (4.183).

Надо заметить, что песок ведет себя как идеально пластическое тело в течение времени распространения ударной волны; в последующем он несколько восстанавливает свою прежнюю плотность за счет упругости воздуха, находящегося в его порах.

Переходим теперь к рассмотрению характера распространения волн при сферическом взрыве. Будем считать, что давление взрывных газов в каверне в каждый момент времени выравнивается. Учет неравномерности распределения давления в каверне, произведенный в [34], приводит к необходимости дополнить рассмотрение волнового процесса в грунте исследованием распространения волн в газе при расширении каверны. Эта задача осложнена тем, что изменение размеров каверны со временем не известно до решения вопроса о распространении взрывной волны в грунте. Поэтому в задаче о взрыве в грунте с учетом переменности давления газов в каверне приходится использовать или графоаналитический, или конечноразностный метод решения соответствующих систем дифференциальных уравнений для характеристик газа и грунта.

Итак, пусть $p_0(t)$ – закон изменения давления в каверне. Из условия несжимаемости грунта имеем:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) = 0;\ r^2 v_r = c(t) = \dot{R}R^2, \qquad (4.184)$$

где r – эйлерова координата пространства; v_r – скорость частиц грунта; $R(t)$ – радиус каверны взрыва. Так как r =

$= r_0 + u_r(r_0,t)$, где u_r – смещение, r_0 – лагранжева координата частицы и $u_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial t} = \dfrac{\partial r}{\partial t}$ то

$$\frac{\partial r}{\partial t} r^2 = \dot{R} R^2 \; ; \; r^3 - R^3 = f(r_0). \tag{4.185}$$

Интеграл (4.185) существенно упрощает решение задачи.

Уравнение движения в переменных Лагранжа для сферического случая, очевидно, имеет вид

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r_0} \frac{r^2}{r_0^2},$$

откуда

$$p = p_0(t) - \rho_0 \int_{r_{00}}^{r} \frac{r_0^2}{r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dr_0, \tag{4.186}$$

где r_{00} – начальный радиус каверны.

Из (4.185) следует, что

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{R^2}{r^2} \dot{R},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{R^2 \ddot{R}}{r^2} + \frac{2 R \dot{R}^2}{r^2} - \frac{2 R^4 \dot{R}^2}{r^5},$$

поэтому формулу (4.186) можно преобразовать так:

$$p = p_0(t) - \rho_0 \left(R^2 \ddot{R} + R \dot{R}^2\right) \int_{r_{00}}^{r_0} \frac{r_0^2 dr_0}{r^4} + \\ + 2 \rho_0 R^4 \dot{R}^2 \int_{r_{00}}^{r_0} \frac{r_0^2 dr_0}{r^7}. \tag{4.187}$$

На фронте ударной волны давление и плотность связаны соотношением (4.179), которое можно рассматривать как ударную адиабату.

Кроме того, на фронте ударной волны, движущейся со скоростью b в покоящийся грунт, выполняются условия сохранения массы и количества движения:

$$\rho_0 b = \left(b - \frac{\partial r}{\partial t} \right) \rho^*; \tag{4.177'}$$

$$\rho_0 b \frac{\partial r}{\partial t} = p^* - p_a \tag{4.178'}$$

и, кроме того,

$$r(r_0^*, t) = r_0^*(t); \; b = \frac{dr_0^*}{dt} = \frac{\partial r}{\partial r_0^*} \frac{dr_0^*}{dt} + \frac{\partial r}{\partial t}. \tag{4.188}$$

Отсюда

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \frac{b}{b - \dfrac{\partial r}{\partial t}} = \frac{1}{\dfrac{\partial r}{\partial r_0}}; \; \frac{dr_0^*}{dt} = \frac{\dfrac{\partial r}{\partial t}}{1 - \dfrac{\partial r}{\partial r_0}} \tag{4.189}$$

или на основании предыдущего

$$\frac{dr_0^*}{dt} = \frac{R^2 \dot{R}}{r_0^{*2} - \dfrac{1}{3} f'(r_0)}. \tag{4.190}$$

Из (4.178), (4.179) и (4.189) получим:

$$\rho_0 b \frac{\partial r}{\partial t} = k \left[\left(\frac{\partial r}{\partial r_0} \right)^{-n} - 1 \right],$$

откуда

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = \frac{f'(r_0^*)}{3 r_0^{*2}} = \left[\frac{k}{k + \rho_0 \dfrac{dr_0^*}{dt} \dfrac{\partial r}{dt}} \right]^{1/n}$$

или

$$\left(\frac{df}{dr_0} \right)_{r_0 = r_0^*} = 3 r_0^{*2} \left[\frac{k \left(r_0^{*4} - \dfrac{r_0^{*2}}{3} f'(r_0) \right)}{k \left(r_0^{*4} - \dfrac{r_0^{*2}}{3} f'(r_0) \right) + \rho_0 R^4 \dot{R}^2} \right]^{1/n}. \tag{4.191}$$

Подставивя в (4.178) значение p^* из (4.187), получим:

$$\rho_0 \frac{dr_a}{dt}\frac{\partial r}{\partial t} = p_0 - r_a - \rho_0\left(R^2\ddot{R} + 2R\dot{R}^2\right)\int\limits_{r_{00}}^{r_0^*}\frac{r_0^2\,dr_0}{r^4} +$$

$$+ 2\rho_0 R^4\dot{R}^2\int\limits_{r_{00}}^{r_0^*}\frac{r_0^2\,dr_0}{r^7}. \qquad (4.192)$$

Система (4.190)–(4.192) является интегродифференциальным уравнением относительно функций $R(t)$, $r_0^*(t)$, $f(r_0)$. Она сравнительно легко решается численными методами, если задана зависимость давления от искомых функций.

Как уже отмечалось выше, здесь мы ограничиваемся случаем равномерного распределения давления в каверне. При этом зависимость между давлением p_0 и радиусом каверны $R(t)$ определяется из условия адиабатичности расширения взрывных газов

$$\frac{\rho_0}{\rho_{00}} = \left(\frac{r_{00}}{R}\right)^{3\gamma_0}. \qquad (4.193)$$

где γ_0 – показатель политропы; ρ_{00} – начальное давление взрыва. Использование условия (4.193) замыкает систему уравнений для определения R, r_0^*, $f(r_0^*)$, которую можно решить методом, аналогичным методу Эйлера. Так как входящие в правую часть (4.192) интегралы типа Вольтерра (с переменными пределами интегрирования), то они могут быть вычислены в процессе численного решения системы.

Отметим, что для указанной выше системы дифференциальных уравнений ставится не граничная задача, а задача Коши, причем значения искомых функций в начальный момент времени могут быть найдены из предыдущих формул:

$$\left(\frac{df}{dr_0}\right)_{r_0 = r_{00}} = 3\lambda r_{00}^2\,;\ \dot{R}(0) = \sqrt{(1-\lambda)\frac{p_{00} - p_a}{\rho_0}}\,;$$

$$\left(\frac{dr_0^*}{dt}\right)_{t=0} = \sqrt{\frac{\rho_{00}-\rho_a}{\rho_0(1-\lambda)}};$$

$$\ddot{R}(0) = \frac{F_1(1+\Delta) - F_2\dot{R}_0^2 \big/ 3r_{00}^2(1-\lambda)^2}{3+\Delta};$$

$$\Delta = \frac{\rho_0\lambda^{n+1}\dot{R}^2(0)}{nk(1-\lambda)^2};$$

$$F_1 = 6\lambda r_{00} - \frac{3\rho_0\lambda^{n+1}r_{00}^2}{nk}\left[\frac{4\dot{R}^2(0)}{r_{00}} - \frac{2(2-\lambda)\dot{R}^2(0)}{r_{00}(1-\lambda)^2}\right];$$

$$F_2 = \frac{2kp_{00}(1-\lambda)}{p_0 r_{00}} - \frac{4\dot{R}^2(0)}{r_{00}} + \frac{2(2-\lambda)\dot{R}^2(0)}{r_{00}(1-\lambda)^2}.$$

В [34] содержится также решение усложненной задачи, в которой пространство, занятое грунтом, разделяется на две части, одна из которых, находящаяся при больших давлениях, подчиняется закону деформирования идеального пластического газа, а вторая ведет себя как упругая твердая среда.

Задача о распространении цилиндрических волн в грунте рассмотрена в [35]. Предполагается следующая схема деформирования грунта, являющаяся частным случаем рассмотренной выше:

$$\begin{aligned} &\text{при } p < p_s \quad \rho = \rho_0 = \text{const}; \\ &\text{при } p > p_s \quad \rho = \rho_1 = \text{const}. \end{aligned} \tag{4.194}$$

Изменение плотности от ρ_0 до ρ_1, происходит при постоянном давлении p_s.

Указанная схема, по мнению авторов [35], позволяет описать процесс упаковки грунта при взрыве (в этом отношении показательны опыты Н. М. Сытого по получению широких и уплотненных стволов шахт путем взрыва длинных цилиндрических зарядов, помещаемых в узком и длинном цилиндрическом отверстии). Как показано в [36], принятое авторами [35] уравнение состояния не позволяет строго решить соответ-

ствующую задачу из-за нарушения закона возрастания энтропии в необратимых процессах (на ударной волне).

В [37] рассмотрена задача о сферическом взрыве в среде, удовлетворяющей схеме (4.194), у которой абсолютная величина наибольших касательных напряжений линейно зависит от среднего гидростатического напряжения. В [38] исследованы плоские движения песка, который рассматривается как сыпучая среда. Обстоятельные данные по динамике грунтов приведены в [39].

К настоящему времени решен большой комплекс задач о деформировании полупространства, занятого пластическим газом, как под действием приложенного к его поверхности давления, так и при проникании в него твердого тела. Результаты работ по этой теме здесь не приводится, с ними можно ознакомиться в [40, 41]. Обстоятельный анализ исследований по механике грунтов представлен в [42].

Литература

1. *Hohenemser K., Prager W.* Uber die Ansatze der Mechanik isotroper Kontinua. Zeitschr. fur Ang. // Math. und Mech. 1932. № 12. S. 4.

2. *Bingham E.* Plasticity and Fluidity, 1922.

3. *Ильюшин А. А.* К вопросу о вязкопластическом течении материала // Труды конференции по пластическим деформациям АН СССР. – М., 1938.

4. *Ильюшин А. А.* Деформации вязкопластического тела: Ученые записки МГУ // Механика. 1940. Вып. 39.

5. *Ильюшин А. А.* Об испытании металлов при больших скоростях: Инж. сб. 1941. Вып. 1. № 1.

6. *Tompson Philos.* Transactions of R. Soc. of London. Ser. A, 1932.

7. *Губанов А. М.* Механика упруговязкопластических тел // ЖТФ. 1949. Т. 19. Вып. 1.

8. *Clark J., Maxwell.* On the Dynamical Theory of Gase // Phylosophical Transactions of R. Soc. of London. 1867. V. 157. T. 1.

9. *Ишлинский А. Ю.* Продольные колебания стержня при наличии закона последействия и релаксации // ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 1.

10. *Boltzmann Wiss.* Abh. 1874. V. 1; Wien-Berlin. 1875. 20.

11. *Volterra V.* Lecons sur les functions de lignes (Coll. Borel). – Paris, 1913.

12. *Кольский Г.* Исследование механических свойств материалов при больших скоростях нагружения. Procees of the Phys. Soc., B. 62, № 359B. (Пер. с англ.: Механика. 1950. № 4.)

13. *Соколовский В.В.* Распространение упруговязкопластических волн в стержнях // ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 3.

14. *Malvern L.* Quart. of Appl. Math. 1951. Вып. 4 № 4. (См. Механика. 1951. Вып. 6.)

15. *Зверев И.Н.* Распространение возмущений в вязкоупругом и вязкопластическом стержне // ПММ. 1950. Т. XIV. № 3.

16. *Тверитин О.М.* Математичний розгляд задачі про поздовжний удар по пружновязкому стержню з вільними кінцями. Доповіді АН УССР. 1953. № 5.

17. *Lee E.H., Kanter J.* Wave Propogation on Finite Roads of Viscoelastic Material // Journ. of Appl. 1953. Phys. 24. № 9. (См. Механика. 1955. Вып. 4 (32).)

18. *Розовский М.И.* Приложение интегро-дифференциальных уравнений к некоторым динамическим задачам теории упругости при наличии последействия // ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 3.

19. *Volterra V.* Lecons sur les equations integrales et integro-differentiales. – Paris, 1913.

20. *Попов С.М.* Абсолютная вязкость стали: Инж. сб. 1941. № 1.

21. *Огибалов П.М.* О распространении вязкопластического течения с учетом упрочнения для случаев вращения и сдвига // ПММ. 1941. Т. V. № 1.

22. Finzi Atti della Academia Nazionale dei Lincei. 1936. V. 23. № 10.

23. *Бахшиян Ф.А.* Вращения жесткого цилиндра в вязкопластической среде // ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 6.

24. *Бахшиян Ф.А.* К вязкопластическому течению при ударе цилиндра по пластинке // ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 1.

25. *Кузьмин Р.О.* Бесселевы функции. – М.: ОНТИ, 1935.

26. *Кочетков А.М.* Приближенное решение некоторых задач нестационарного движения вязкопластической среды // ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5.

27. *Швец М.Е.* О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя // ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 3.

28. *Соколовский В.В.* Одномерные нестационарные течения вязкопластической среды // ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 6.

29. *Карслоу Г.С.* Теория теплопроводности. – М.: 1947.

30. *Соколовский В.В.* Распространение цилиндрических волн сдвига в упруговязкопластической среде // Дклады АН СССР. 1948. Т. X. № 8.

31. *Кочетков А.М.* О распространении упруговязкопластических волн сдвига в пластинке // ПММ. 1950. Т. XIV.

32. *Richter G.* Die elastich-plastische Reflexion eines Stabes. Zeitschr. fur angewandte Math. und Mech. 1953. V. 33. № 11. P. 7.

33. *Malvern L.* Распространение продольных пластических волн с учетом влияния скорости деформирования // Journ. of Appl. Mech. 1951. V. 18. № 2. (См. Механика. 1952. № 1.)

34. *Рахматулин Х.А., Степанова Л.И.* О распространении ударной волны взрыва в грунтах: Сб. статей по взрыву. – М.: Изд-во АН СССР, 1957.

35. *Ишлинский А.Ю., Зволинский Н.В., Степаненко И.З.* К динамике грунтовых масс // Доклады АН СССР. Сер. К. 1954. № 4.

36. *Григорян С.С.* О постановке динамических задач для идеальных пластических сред // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 6.

37. *Компонеец А.С.* Ударные волны в пластической уплотняющейся среде // Доклады АН СССР. 1956. Т. 109. № 1.

38. *Ишлинский А.Ю.* О плоском движении песка // Укр. мат. журнал. 1954. Т. 6. № 4.

39. *Рахматулин Х.А., Сагомонян. А.Я., Алексеев Н.А.* Вопросы динамики грунтов. – М.: Изд-во МГУ, 1964.

40. *Сагомонян А.Я.* Некоторые двумерные задачи нестационарного движения сжимаемых идеальных сплошных сред. Дис. докт. физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1953.

41. *Самогонян А.Я.* Проникание. – М.: Изд-во МГУ, 1974.

42. *Григорян С.С., Иоселевич А.А.* Успехи механики грунтов за последние 50 лет. – М.: Наука, 1976.

43. *Шемякин Е.И.* Распространение нестационарных возмущений в вязкоупругой среде // Доклады АН СССР. 1955. Т. 104. Вып. 1.

44. *Шемякин Е.И.* Задача Лэмба для среды с упругим последействием // Доклады АН СССР. 1955. Т. 104. Вып 2.

45. *Шемякин Е.И., Маркова К.И.* Распространение нестационарных возмущений в слое жидкости, находящемся в контакте с упругим полупространством // ПММ. 1957. Т. XXI.

Глава 5

Основы линейной механики разрушения

Разрушение – очень сложный процесс, который на разных стадиях своей эволюции может быть предметом изучения разных разделов физики. Мы будем касаться только той стадии процесса разрушения, для которой характерно наличие микро- и макротрещин.

Среда рассматривается как упругая при наличии в ней нарушений сплошности в виде разрезов, моделирующих трещины.

Предметом механики разрушения является изучение закономерностей возникновения, роста и взаимодействия трещин. В рамках одной главы невозможно представить все многообразие сложнейших проблем, стоящих перед этим разделом науки о прочности. Поэтому многие важные по практической значимости вопросы, такие, например, как разрушение в условиях ползучести, в композитных материалах, в средах со структурой, разрушение с учетом температурных эффектов, разрушение в модели нелинейной теории упругости, не рассматриваются. Детальное исследование этих проблем и соответствующие ссылки на литературу можно найти в монографиях [1–8].

Цель данной главы – попытка привлечь внимание молодых ученых к исследованию очень важных и во многом еще не решенных вопросов прочности материалов. При изложении материала авторы старались по возможности сделать его понятным без привлечения дополнительной литературы.

§ 5.1. Введение в механику разрушения

Как раздел науки о прочности механика разрушения возникла в начале XX века. К этому времени накопились экспериментальные факты, которые не объяснялись традиционными подходами науки о прочности, основой которых являлись уже хорошо развитая теория упругости и физика твердого тела. В эти годы общепринятыми были критерии прочности по предельно допустимым напряжениям или деформациям (силовые и деформационные).

На практике изделия, изготовленные с достаточно большим запасом прочности, разрушались при эксплутационных

нагрузках, явно меньших, чем предсказывали расчеты. Много вопросов накопилось и в физике твердого тела. В экспериментах прочность на сдвиг оказалась на три – четыре, а на разрыв – на два порядка меньше их теоретических значений.

В 1920 г. академик А.Ф. Иоффе провел эксперименты по определению прочности кристаллов каменной соли. Выяснилось, что при растворении поверхностного слоя прочность кристаллов возрастала на порядки и приближалась к ее теоретическому значению. Стало понятно, что причина малой прочности реальных материалов состоит в том, что они (даже кристаллы) содержат микродефекты, приводящие к локальной концентрации напряжений, намного превосходящих номинальные напряжения, а значит, к разрушению.

В 1909 г. Г.В. Колосов опубликовал работу с решением задачи о растяжении упругой пластины с эллиптическим отверстием. Согласно полученному решению, вблизи точек наименьшего радиуса кривизны эллипса отношение локальных напряжений к действующим номинальным составляет $\sigma/\sigma_0 = 1 + 2\,a/b$, где a, b – большая и меньшая полуоси эллипса. Соответственно это приводило к парадоксальному результату о бесконечных напряжениях, возникающих при стремлении меньшей из полуосей к нулю. Позднее, в 1913 г., решение той же задачи была опубликовано К. Инглисом.

В феврале 1920 г. в трудах Лондонского королевского общества появилась статья инженера одного из авиационных исследовательских центров А. Гриффитса «Явление разрушения и течения в твердых телах» [9], которая содержала первое математическое описание хрупкого разрушения тела с трещиной. Согласно его модели упругая энергия, накопленная материалом вследствие нагружения, из малой окрестности трещины, соизмеримой с ее размером, тратится на создание новой свободной поверхности трещины при ее росте. Энергия свободной поверхности была введена Гриффитсом по аналогии с энергией поверхностного натяжения в жидкости. Ее значения Гриффитс А.А. определил из экспериментов по измерению величины поверхностного натяжения для расплавленного стекла при разных температурах и проэкстраполировал полученные результаты для температуры плавления.

Проводя опыты по определению прочности стекляных нитей, он обратил внимание на сильную зависимость напряже-

ния разрыва от диаметра нити – чем меньше диаметр нити, тем она прочнее. Поскольку при уменьшении диаметра нити ее прочность резко возрастает и стремится к теоретической, Гриффитс объяснил отличие теоретического и практического значений прочности наличием в материале невидимых трещин, величина которых намного больше межмолекулярных расстояний.

Основная заслуга Гриффитса состоит в том, что он связал развитие трещины с процессом освобождения накопленной при нагружении энергии упругих деформаций. Кроме того, он распространил математическое решение Инглиса о концентрации напряжений на микротрещины. Эти две идеи привели его к пониманию того, что для распространения трещины необходимо затрачивать энергию на образование новых поверхностей. Главным итогом его работ является теоретическое обоснование возможности самопроизвольного распространения трещины без подкачки энергии из вне.

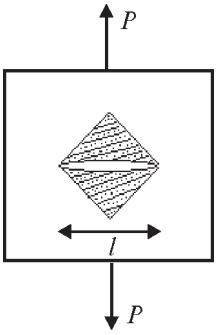


Рис. 5.1

Действительно, если предположить, что часть упругой энергии из заштрихованной области разгрузки (рис. 5.1) идет на образование трещины, то можно достаточно просто получить оценку величины энергии, необходимой для самопроизвольного роста трещины. Поскольку плотность упругой энергии очевидно равна $P^2/(2E)$, энергия заштрихованной области будет примерно равна $P^2l^2/(2E)$. Если размер трещины станет равным $l + dl$, изменение упругой энергии можно определить, как $P^2ldl/(E)$. Это уменьшение энергии пойдет на образование новой поверхности $2\gamma dl$, где γ – энергия единицы длины свободной поверхности. Если учитывать только эти два вида энергии, уравнение баланса позволяет оценить напряжения, необходимые для страгивания трещины, т.е. формулу Гриффитса:

$$P = C\sqrt{\gamma E/l}, \tag{5.1}$$

где C – безразмерный коэффициент, который может быть определен экспериментально.

Конечно, на практике все значительно сложнее. Если для стекла значение плотности поверхностной энергии, определенное различными физическими методами, дает достаточно хорошие результаты при применении формулы Гриффитса в механике разрушения, то для металлов величина γ в формуле Гриффитса должна быть на три порядка больше, чем удельная поверхностная энергия. Только в этом случае получается удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными. Именно поэтому теория Гриффитса была воспринята современниками весьма скептически. В результате и сам автор разочаровался в ней, т.е. на длительное время она была прочно забыта.

Интерес к теории Гриффитса возродился в 50-е годы XX в. после опубликования работ Дж. Ирвина и Е.О. Орована [10,11]. По их представлениям в конце трещины развивается пластическая область (рис. 5.2). Распространение трещины сопровождается работой на пластических деформациях. Если характерный размер пластической области d мал по сравнению с длиной трещины, то размерностный анализ вполне применим и в данном случае, но в балансном соотношении энергии должна участвовать работа, затраченная на пластические деформации. Если ввести в рассмотрение плотность этой работы, т.е. работу,приходящуюся на единицу длины трещины, то уравнение Гриффитса можно сохранить, заменив в нем плотность поверхностной энергии плотностью работы на пластических деформациях.

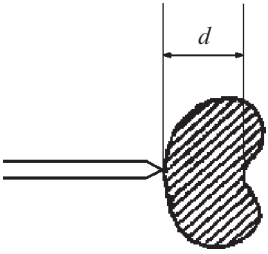


Рис. 5.2

Эту плотность принято называть *силой сопротивления движению трещины*, поскольку она имеет размерность силы, поделенной на длину. Если ее обозначить через G_c , то модифицированная формула Гриффитса – Ирвина – Орована будет иметь вид

$$\sigma = C\sqrt{G_c E / l}\,. \qquad (5.2)$$

По сути, формулы (5.1) и (5.2) являются идейной основой линейной механики разрушения.

Во второй половине XX в. благодаря труду многих ученых механика разрушения все больше из чисто теоретического раздела науки о прочности превращается в ее практическую ветвь. Для этого потребовались годы самоотверженной работы многих научных школ. Трудно перечислить тысячи работ, в которых переосмысливалась физика процессов разрушения, поэтому в дополнение к уже названным сделаем ссылки на монографии [12–18], в которых можно найти более подробный анализ истории вопроса.

Успехи фундаментальной математики [19–23] и механики в решении краевых задач уравнений теории упругости для областей с разрезами позволили ответить на часть вопросов механики разрушения в случае, когда область пластических деформаций мала по сравнению с длиной трещины. Следует выделить работы [24–31], в которых были впервые решены динамические задачи о движении трещин. Способы определения потока энергии в конец трещины обсуждались с различных позиций и были предложены в [13, 32–34]. Стационарные задачи рассматривались в [35]. Нужно отметить также учебные пособия, в которых обсуждаются вопросы механики разрушения [36–40], совершенно новым математическим методам описания разрушения посвящена работа [41].

Начнем экскурс в механику трещин с задач, уже ставших классическими, – со статики прямолинейных трещин. В них самыми важными с точки зрения практики являются ответы на два вопроса:

1) двинется или не двинется трещина при заданном уровне внешних воздействий;

2) будет ли она неустойчива, т.е. раз двинувшись трещина будет стремительно развиваться вплоть до разрушения всей конструкции.

В рамках линейной механики разрушения удается получить часть ответов на эти вопросы.

Рассмотрим статические задачи линейной теории упругости для плоскости с разрезами, моделирующими трещины. Для начала проведем общепринятую классификацию возможных простейших типов разрушения (рис. 5.3). На рисунке σ_{xy}, σ_{yz} – соответствующие компоненты напряжений.

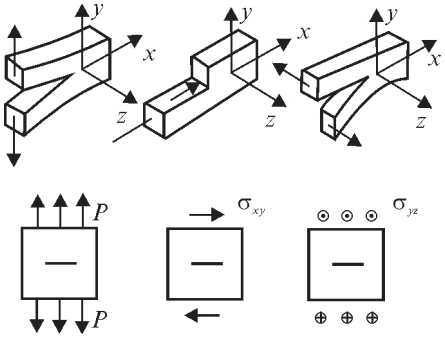


Рис. 5.3

К первому типу будем относить разрушение, возникающее при растяжении силами P, перпендикулярными плоскости трещины $y = 0$ (рис. 5.3, *а*), ко второму – разрушение сдвиговыми напряжениями в плоскости xy (рис. 5.3, *б*), к третьему – разрушение сдвиговыми напряжениями в плоскости xz (рис. 5.3, *в*). Третий тип нагружения называется *антиплоской деформацией*. В реальных условиях все три типа нагрузок могут присутствовать одновременно.

§ 5.2. Основные уравнения

В дальнейшем нам потребуются полная система уравнений теории упругости в отсутствии массовых сил [36]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho\ddot{u}_i,$$
$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \qquad (5.3)$$
$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}.$$

Здесь использованы следующие обозначения: запятая с последующим индексом означает производную по соответствующей коодинате – $f_{,j} = \partial f / \partial x_j$; σ_{ij} – компоненты напряжений; ρ – плотность материала; $\ddot{u}_i$ – проекции ускорения (точки означают производные по времени); $\lambda = \nu E/(1-\nu^2)$, $\mu = E/(2(1+\nu))$ – упругие постоянные (μ – модуль сдвига);

E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; ε_{ij} – компоненты деформаций.

В плоских задачах статической теории упругости более удобными являются уравнения в напряжениях. Компоненты тензора напряжений в этом случае , согласно (5.3), удовлетворяют уравнениям равновесия:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} &= 0, \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} &= 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Кроме того, должно быть выполнено условие совместности деформаций:

$$2\varepsilon_{xy,xy} = \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx}\,. \tag{5.5}$$

Уравнение совместности деформаций (5.5) с учетом закона Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}\,, \qquad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

и уравнений равновесия (5.4) можно привести к виду

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0, \tag{5.7}$$

где Δ – оператор Лапласа. Если ввести функцию напряжений

$$\sigma_{xx} = U_{,yy}\,,\ \sigma_{yy} = U_{,xx}\,,\ \sigma_{xy} = -U_{,xy}\,, \tag{5.8}$$

то уравнения равновесия (5.4) выполняются тождественно, а из (5.7) следует бигармоническое уравнение для определения функции напряжений $\Delta\Delta U = 0$.

Произведем в полученном бигармоническом уравнении замену переменных:

$$z = x + iy\,;\ \bar{z} = x - iy\,;\ x = \frac{1}{2}(z + \bar{z});\quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Тогда дифференциальные операторы заменятся на следующие:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}};\ \frac{\partial}{\partial y}=i\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right);$$
$$\Delta=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}};\ \Delta\Delta=16\frac{\partial^4}{\partial^2 z\partial^2 \bar{z}}. \tag{5.9}$$

Применяя операторы (5.9) к уравнению (5.7), получим бигармоническое уравнение в новых переменных:

$$16\frac{\partial^4 U(z,\bar{z})}{\partial^2 z\partial^2 \bar{z}}=0.$$

Это уравнение имеет общее решение:

$$U(z,\bar{z})=F_1(z)\bar{z}+F_2(z)+G_1(\bar{z})z+G_2(\bar{z}).$$

Если считать функцию напряжений действительной, то с учетом определения комплексно-сопряженных функций ее нужно искать в виде

$$U(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi(z)\bar{z}+\bar{\varphi}(\bar{z})z+\psi(z)+\bar{\psi}(\bar{z})]=$$
$$=\mathrm{Re}(\varphi(z)\bar{z}+\psi(z)). \tag{5.10}$$

Тогда из (5.8) – (5.10) следует:

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=\Delta U=2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\varphi'(z)\bar{z}+\bar{\varphi}(\bar{z})+\psi'(z))=$$
$$=2(\varphi'(z)+\bar{\varphi}'(\bar{z}))=4\,\mathrm{Re}\varphi'(z);$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}-2i\sigma_{xy}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+2i\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=$$
$$=2\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}-2\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}=4\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}=$$
$$=2(\bar{\varphi}''(\bar{z})z+\bar{\psi}''(\bar{z}).$$

Данные соотношения после комплексного сопряжения во втором уравнении позволяют найти все компоненты тен-

зора напряжений. Они получены Г.В. Колосовым (1914) и называются формулами Колосова–Мусхелишвили [19]:

$$\begin{gathered}\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=4\,\mathrm{Re}\varphi'(z)=4\,\mathrm{Re}\Phi(z);\\ \sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\sigma_{xy}=2\,(\varphi''(z)\bar{z}+\psi''(z))=\\ =2\,(\Phi'(z)\bar{z}+\Psi'(z)).\end{gathered}\tag{5.11}$$

Теперь определим компоненты вектора перемещений. Для этого воспользуемся законом Гука (5.6) для случая плоско-деформированного состояния:

$$\begin{gathered}\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xx}=\sigma_{xx}-\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=(1-\nu)(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})-\sigma_{yy};\\ \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{yy}=\sigma_{yy}-\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=\\ =(1-\nu)(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})-\sigma_{xx};\\ \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}=\sigma_{xy}.\end{gathered}\tag{5.12}$$

Подставим в (5.12) выражения напряжений через функцию Эри и компонент деформаций через перемещения. В результате получим:

$$\begin{gathered}\frac{E}{1+\nu}\frac{\partial u_x}{\partial x}=(1-\nu)\Delta U-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2};\\ \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial u_y}{\partial y}=(1-\nu)\Delta U-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2};\\ \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}.\end{gathered}\tag{5.13}$$

Учитывая (5.9) и условия Коши–Римана, определим:

$$\begin{gathered}\Delta U=4\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\bar{z}}=4(\varphi'(z)+\bar{\varphi}'(\bar{z}))=\\ =4\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z)=4\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\,\varphi(z)=4\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Im}\;\varphi(z).\end{gathered}$$

Тогда первые два уравнения (5.13) после интегрирования имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{E}{1+\nu} u_x &= 4(1-\nu)\operatorname{Re}\varphi(z) - \frac{\partial U}{\partial x} + f(y); \\ \frac{E}{1+\nu} u_y &= 4(1-\nu)\operatorname{Im}\varphi(z) - \frac{\partial U}{\partial y} + g(x). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Подстановка полученных значений перемещений в последнее уравнение (5.13) приводит к уравнению $f'(y) + g'(x) = 0$, из которого следует, что $f(y) = ky + b$, $g(x) = -kx + c$. Эти выражения определяют перенос и поворот тела как жесткого целого, поэтому функции $f(y)$, $g(x)$ можно положить равными нулю. С учетом этого соотношения (5.14) позволяют найти комбинацию $u_x + i u_y$:

$$\frac{E}{1+\nu}(u_x + i u_y) = 4(1-\nu)(\operatorname{Re}\varphi(z) + i \operatorname{Im}\varphi(z)) - \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = 2\frac{\partial U}{\partial z} = \varphi(z) + \overline{\varphi}'(\overline{z})\, z + \overline{\psi}'(\overline{z}),$$

окончательное выражение для перемещений имеет вид

$$\frac{E}{1+\nu}(u_x + i u_y) = (3-4\nu)\varphi(z) - \overline{\varphi}'(\overline{z})z - \overline{\psi}'(\overline{z}). \tag{5.15}$$

Проделав аналогичные выкладки в случае плосконапряженного состояния, получим следующее уравнение комплексного перемещения:

$$\frac{E}{1+\nu}(u_x + i u_y) = \frac{3-\nu}{1+\nu}\varphi(z) - \overline{\varphi}'(\overline{z})z - \overline{\psi}'(\overline{z}). \tag{5.16}$$

Таким образом, определение функции напряжения сводится к нахождению двух комплексных функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ по заданным краевым условиям. Напряжения и перемещения определяются согласно (5.11), (5.15), (5.16) по формулам Колосова – Мусхелишвили [19]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z);\\
&\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)];\\
&2\mu(u_x + i u_y) = k\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(z) - \bar{\psi}(z),
\end{aligned} \tag{5.17}$$

где μ – модуль сдвига; $k = 3 - 4\nu$ при плоской деформации и $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ в условиях плоского напряженного состояния.

В зависимости от рассматриваемой задачи на границе упругой среды могут быть заданы или вектор напряжений, или вектор перемещений, или комбинация напряжений и перемещений.

Рассмотрим контур AB в упругой среде. Вектор напряжений на площадке с нормалью $\bar{n} = \cos(n, x)\bar{e}_x + \cos(n, y)\bar{e}_y$ к контуру будет иметь составляющие:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_n = {} & (\sigma_{xx}\cos(n, x) + \sigma_{xy}\cos(n, y))\bar{e}_x + \\
& + (\sigma_{xy}\cos(n, x) + \sigma_{yy}\cos(n, y))\,\bar{e}_y,
\end{aligned}$$

где $\bar{e}_x, \bar{e}_y$ – векторы базиса.

Пусть s – длина дуги контура. Поскольку $\cos(n, x) = dy/ds$, $\cos(n, y) = -dx/ds$, с использованием (5.8) найдем:

$$\sigma_{nx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_{ny} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{dy}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

Эти выражения позволяют получить комплексное представление для вектора напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_{nx} + i\sigma_{ny} &= -i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \\
&= -i\frac{d}{ds}(\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Если на контуре задан вектор напряжений $\bar{\sigma}_n = p_x(s) + i p_y(s)$, то из (5.18) для точки $z = t$ контура имеем:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi}'(\overline{t}) + \overline{\psi}(\overline{t}) = i\int_A^B (p_x(s) + i\,p_y(s))\,ds + c, \qquad (5.19)$$

где c – постоянная интегрирования.

Рассмотрим функцию комплексного переменного, представленную интегралом типа Коши с плотностью $f(t)$:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_A^B \frac{f(t)\,dt}{t - z},$$

где AB – некоторая гладкая дуга плоскости z, а функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, т.е. для любых точек t_1, t_2 дуги AB $|f(t_1) - f(t_2)| \le A|t_1 - t_2|^{\gamma}$, $0 < \gamma \le 1$. Тогда функция $F(z)$ будет кусочно-голоморфной в плоскости z [20], а ее граничные значения при подходе к дуге AB задаются формулами Сохоцкого:

$$F^{\pm}(t_0) = \pm\frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_A^B \frac{f(t)\,dt}{t - t_0}, \qquad (5.20)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

§ 5.3. Прямолинейная трещина в условиях антиплоской деформации

Рассмотрим трещину третьего типа (см. рис. 5.3) в предположении, что она прямолинейна и имеет длину $2l$. Согласно рис. 5.3, *в*, *антиплоской деформацией* называется такое состояние среды, при котором единственной отличной от нуля компонентой вектора перемещений будет его составляющая по оси x_3, зависящая от координат (x,y). Назовем эту составляющую $u(x,y)$. Таким образом, в рассматриваемом случае отличными от нуля компонентами тензора напряжений будут:

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu\frac{\partial u}{\partial y},$$

причем перемещение $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. является гармонической функцией $\Delta u = 0$.

Введем в рассмотрение функцию $v(x,y)$, сопряженную с функцией u. Тогда функция $W(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ комплексной переменной $z = x + iy$ будет аналитической. Согласно условиям Коши-Римана,

$$\sigma_{13} - i\,\sigma_{23} = \mu W'(z). \tag{5.21}$$

Рассмотрим следующую краевую задачу. В бесконечной среде имеется трещина со свободными границами. На бесконечности действует напряжение $\sigma_{23} = \tau_0$, $\sigma_{13} = 0$.

Ось x направлена вдоль трещины размером $2l$, ось y перпендикулярна плоскости трещины. Тогда для определения функции $W(z)$ получается следующая краевая задача:

$$z \to \infty,\ \mu W'(z) \to -i\,\tau_0\ ;\ y = 0,\ |x| > l,\ \operatorname{Re} W = 0;$$
$$y = 0,\ |x| < l,\ \operatorname{Im} W' = 0.$$

Представим решение как сумму решений двух задач. В первой задаче будем считать,что плоскость без трещины находится в условиях антиплоской деформации. В этом случае решение очевидно дается формулами

$$u = \frac{\tau_0}{\mu}\,y,\ \sigma_{13} = 0,\ \sigma_{23} = \tau_0\ . \tag{5.22}$$

Во второй задаче напряжение на бесконечности следует положить равным нулю, а на берегах трещины оно должно быть равным $-\tau_0$. При этом граничные условия будут такими: $y = 0,\ |x| < l,\ \sigma_{23} = -\tau_0\ ;\ y = 0,\ |\,|x| > l,\ u = 0;\ z \to \infty,\ u \to 0.$

Поскольку для функции $W(z) = u + iv$ $\mu W'(z) = \sigma_{13} - i\,\sigma_{23}$, а также в силу того, что из условия $u(x,0) = 0$ следует условие $\partial u/\partial x = 0$, для искомой функции $\Phi(z) = W'(z)$ получается следующая краевая задача в верхней полуплоскости:

$$\begin{aligned} &y = 0,\ |x| < l,\ \operatorname{Im}\Phi(x) = -\tau_0/\mu, \\ &y = 0,\ |x| > l,\ \operatorname{Re}\Phi(x) = 0, \\ &z \to \infty,\ \Phi(z) \approx O(z^{-2}). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Как видим, наша задача свелась к задаче Римана–Гильберта с разрывными коэффициентами для полуплоскости

[19, 22]. В задаче (5.23) можно для большей общности рассматривать произвольную распределенную нагрузку на берегах трещины $\tau_0(x)$. Будем искать решение, неограниченное на концах трещины, тогда в качестве регуляризирующей функции необходимо взять $R(z) = \sqrt{(z-l)(z+l)}$.

Если искать функцию $F(z) = R(z)\,\Phi(z)$, то для нее в силу (5.23) получается краевая задача Дирихле для верхней полуплоскости:

$$y = 0^+,\ |x| < l,\ \operatorname{Re} F(x) = \frac{\tau_0}{\mu}\sqrt{l^2 - x^2},\ y = 0^+,$$

$$|x| > l,\ \operatorname{Re} F(x) = 0.$$

Решением данной задачи, согласно (5.20), для функции $F(z)$ является интеграл Коши, а функция $\Phi(z)$ имеет следующее выражение:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-l)(z+l)}}\left[\frac{1}{\mu\pi\, i}\int_{-l}^{l}\frac{\tau_0(x)\sqrt{l^2 - x^2}\,dx}{x - z}\right]. \qquad (5.24)$$

Если считать напряжение τ_0 постоянным, решение будет иметь следующий вид:

$$\Phi(z) = W'(z) = \frac{i}{\sqrt{z^2 - l^2}}\,\frac{\tau_0}{\mu}\left(\sqrt{z^2 - l^2} - z\right). \qquad (5.25)$$

Суммируя с комплексным решением (5.22), где $W'(z) = -i\,\tau_0/\mu$, получим решение задачи о трещине со свободными границами:

$$W'(z) = \frac{-iz}{\sqrt{z^2 - l^2}}\,\frac{\tau_0}{\mu},\quad W(z) = -i\sqrt{z^2 - l^2}\,\frac{\tau_0}{\mu}. \qquad (5.26)$$

Определим из решения (5.26) напряжение в точке $z = l + \rho$, $\rho > 0$, $\rho/l \ll 1$:

$$W'(x,0) = \frac{\tau_0}{\mu}\,\frac{x}{\sqrt{(x+l)(x-l)}} = \frac{\tau_0}{\mu}\,\frac{l+\rho}{\sqrt{(2l+\rho)\rho}} \approx \frac{\tau_0}{\mu}\sqrt{\frac{l}{2\rho}}.$$

Напряжение в окрестности точки $x = l$, $y = 0$ будет иметь при этом асимптотику

$$\sigma_{23} = \tau_0 \sqrt{\frac{l}{2\rho}} = \tau_0 \sqrt{\pi l} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\rho}}, \qquad (5.27)$$

где $K_{III} = \tau_0 \sqrt{\pi l}$.

Допустим, что трещина увеличилась и стала иметь полудлину $l + \Delta l$, тогда в точке с прежними координатами $x = l + \rho, y = 0$ появится перемещение

$$u \approx \frac{\tau_0 \sqrt{2l}}{\mu} \sqrt{\Delta l - \rho} = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\Delta l - \rho}.$$

Г. Ирвин [10] предложил вычислять работу, идущую на разрушение, исходя из следующих соображений. Принимается, что сила, действующая на один берег трещины, уменьшается от своего максимального значения до нуля, создавая при этом перемещение, которое увеличивается от нуля до своего максимального значения. Согласно (5.27) , в точке с локальной координатой ρ на длине $d\rho$ максимальное значение силы

$$dF = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\rho}} d\rho,$$

при этом максимальное перемещение можно определить по формуле

$$u = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\Delta l - \rho}.$$

Тогда элементарная работа силы на участке $d\rho$ равна $udF/2$. Для того чтобы подсчитать всю затраченную работу, надо проинтегрировать полученное выражение по переменной ρ от 0 до Δl, т.е.

$$A = \frac{K_{III}^2}{2\mu\pi} \int_0^{\Delta l} \sqrt{\frac{\Delta l - \rho}{\rho}} d\rho = \frac{K_{III}^2}{2\mu\pi} \frac{\pi}{2} \Delta l. \qquad (5.28)$$

Если учесть, что у трещины два края и два берега, то вся потраченная работа будет равна четырем подсчитанным величинам (5.28). Эта работа должна быть равной поверхностной энергии, умноженной на вновь созданную поверхность, т.е. $4\gamma\Delta l$. Отсюда получим критерий Гриффитса в виде

$$K_{III}^2/\mu = 4\lambda \quad \text{или} \quad \tau_0 = 2\sqrt{\gamma\mu/\pi l}\,. \tag{5.29}$$

Как видно из полученного выражения, работа по созданию трещины определяется фактически величиной из (5.27). В механике разрушения эта величина называется *коэффициентом интенсивности напряжений*. Если он мал, равенство (5.29) не выполняется и трещина стабильна. Если он достигает некоторой критической величины, трещина начинает расти. Такой критерий разрушения называют *силовым*. Сам характер вычислений показывает эквивалентность силового и энергетического критериев разрушения, поскольку в квазистатике энергия и коэффициент интенсивности напряжений связаны однозначной зависимостью.

Полученные предельные равенства (5.29) позволяют, в принципе, ответить на поставленные основные вопросы для трещины в условиях антиплоской деформации: во-первых, о возможности ее роста при данных внешних нагрузках; во-вторых, о статической устойчивости трещины при постоянной внешней нагрузке. Действительно, поскольку с ростом длины трещины критическое значение приложенных напряжений убывает, можно заключить, что при постоянном внешнем напряжении такая трещина будет неустойчивой.

§ 5.4. Трещина нормального отрыва

Из рассмотренного примера трещины в условиях антиплоской деформации следует, что нахождение потока энергии, идущей на ее образование, играет важную роль, так как именно этой энергией определяется критерий страгивания и движения трещины.

При энергетическом подходе за основу берется критерий, согласно которому на создание новой свободной поверхности должна затрачиваться эффективная поверхностная энергия, определенная для заданного материала. В [13] предложено вычислять поток энергии в край трещины через инвариантный Г-интеграл:

$$\Gamma = \lim_{\varepsilon\to 0} \oint_{s\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{\sigma}_n \, ds + W\, dy \right) ds. \tag{5.30}$$

Здесь $\overline{\sigma}_n$ – вектор напряжений; W – упругая энергия среды. На рис. 5.4 показан контур интегрирования для подсчета потока энергии на образование трещины. На контуре интегрирования $x = \varepsilon\cos\theta$, $y = \varepsilon\sin\theta$, $n_x = -\sin\theta$, $n_y = -\cos\theta$.

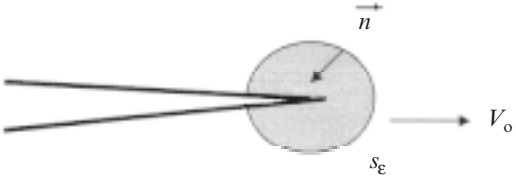


Рис. 5.4

Предлагаются разные методы вычисления этой важнейшей характеристики механики разрушения [32 – 34]. В линейном случае удобен метод, предложенный Л.И. Слепяном [42]. Он показал, что в линейных задачах поток энергии в вершину трещины может быть вычислен по формуле

$$\Gamma = \lim_{x\to 0} \frac{d}{dx}[\sigma_+(x)^* u_-(-x)] , \qquad (5.31)$$

где знак $[f(x)^* g(x)]$ означает свертку функций.

Рассмотрим теперь трещину, которая находится в напряженном состоянии, вызванном действующими на бесконечности растягивающими напряжениями. Будем считать, что на бесконечности вектор напряжений направлен по оси Oy ортогональной плоскости трещины, $y = 0$, $|x| < l$. Такая трещина называется *трещиной нормального отрыва*. При этом имеем следующую краевую задачу:

$$\begin{gathered} y = 0, \quad |x| < l, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0; \\ y = 0, \quad |x| > l, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad u_y = 0; \\ x^2 + y^2 \to \infty, \ \sigma_{xy} = 0, \ \sigma_{yy} = P_0 . \end{gathered} \qquad (5.32)$$

Поставленная задача о трещине отрыва (5.32), как и в предыдущем случае, может быть представлена в виде суммы решений двух задач. В первой задаче плоскость растягивается напряжением $\sigma_{yy} = P_0$, $\sigma_{xy} = 0$ в отсутствии трещи-

ны, во второй задаче на бесконечности перемещения и напряжения равны нулю, зато на берега трещины действует вектор напряжений $\sigma_{yy} = -P_0$, $\sigma_{xy} = 0$. При сложении двух этих решений будут выполнены условия задачи (5.32).

Поскольку в задаче есть сквозное (при $y = 0$ и всех x) условие $\sigma_{xy} = \mathrm{Im}\,(x\varphi''(x) + \psi'(x)) = 0$, то оно будет выполнено тождественно, если принять, как предложено в [43], что

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}T(z), \quad \psi(z) = -\frac{1}{2}zT'(z) + \frac{1}{2}T(z). \tag{5.33}$$

Действительно, в этом случае $\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) = -iy\,T''(z)$, а значит, при $y = 0$ $\sigma_{xy} = -y\,\mathrm{Re}\,T''(z) \equiv 0$. С использованием выражений (5.33) формулы Колосова – Мусхелишвили (5.17) приобретают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \mathrm{Re}\,T'(z) - y\,\mathrm{Im}\,T''(z); \\ \sigma_{yy} &= \mathrm{Re}\,T'(z) + y\,\mathrm{Im}\,T''(z); \\ \sigma_{xy} &= -y\,\mathrm{Re}\,T''(z). \end{aligned} \tag{5.34}$$

При этом перемещения будут вычисляться по формулам

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{k-1}{2}\mathrm{Re}\,T(z) - y\,\mathrm{Im}\,T'(z)\right); \\ u_y &= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{k+1}{2}\mathrm{Im}\,T(z) - y\mathrm{Re}\,T'(z)\right). \end{aligned} \tag{5.35}$$

С учетом (5.34), (5.35) краевая задача для определения функции $T(z)$ будет следующей:

$$\begin{aligned} &y = 0, \quad |x| < l, \quad \mathrm{Re}\,T'(z) = -P_0(x); \\ &y = 0, \quad |x| > l, \quad \mathrm{Im}\,T'(z) = 0; \\ &z \to \infty, \quad T'(z) \approx O(z^{-2}). \end{aligned} \tag{5.36}$$

Проблема свелась, как и в задаче для трещины с антиплоской деформацией, к решению задачи Римана – Гильберта с разрывными коэффициентами [22]. Для ее решения введем функцию

$$Q(z) = -i\sqrt{(z-l)(z+l)}T'(z). \tag{5.37}$$

Ее введение обусловлено тем, что:

$$y=0,\ |x|<l,\ \operatorname{Re}Q(z) = \sqrt{l^2-x^2}\operatorname{Re}T(z) = -\sqrt{l^2-x^2}\ P_0\ ;$$

$$y=0, |x|>l,\ \operatorname{Re}Q(z)=\sqrt{x^2-l^2}\ \operatorname{Im}T(z) = 0.$$

С учетом этого краевая задача определения функции $Q(z)$ сводится к задаче Дирихле для верхней полуплоскости:

$$y=0,\ \operatorname{Re}Q(x)=C(x),\ \ z\to\infty,\ \ Q(z)\approx O(z^{-1}),$$

где функция $C(x) = \begin{cases} 0, & |x|>l, \\ -P_0(x)\sqrt{l^2-x^2}, & |x|<l. \end{cases}$

Решение данной задачи, как и ранее для случая антиплоской деформации, представляет интеграл типа Коши:

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-l}^{l}\frac{-2P_0(x)\sqrt{l^2-x^2}}{x-z}dx.$$

Отсюда, учитывая (5.37), получим решение для функции $T'(z)$:

$$T'(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2-l^2}}\int_{-l}^{l}\frac{P_0(x)\sqrt{l^2-x^2}dx}{z-x}. \tag{5.38}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение функции $T(z)$ в окрестности правого края трещины $(z-l)=\rho\, e^{i\theta}, (z+l)\approx 2l$, $(z-x)\approx l-x$, $\rho \prec\prec l$. Тогда асимптотика функций $T(z)$, $T'(z)$, $T''(z)$ в конце трещины будет иметь следующий вид:

$$T'(z) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi(z-l)}},\ T''(z) = -\frac{1}{2}\frac{K_1}{\sqrt{2\pi(z-l)}(z-l)},$$

$$T(z) = \frac{2K_1\sqrt{z-l}}{\sqrt{2\pi}},\ K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l}}\int_{-l}^{l}P_0(x)\sqrt{\frac{l+x}{l-x}}dx. \tag{5.39}$$

Учитывая выражения для напряжений (5.34) и перемещений (5.35) , получим асимптотику напряжений

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I \cos(\theta/2)}{\sqrt{2\pi\rho}}(1 - \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)),$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I \cos(\theta/2)}{\sqrt{2\pi\rho}}(1 + \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)), \qquad (5.40)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_1 \cos(\theta/2)}{\sqrt{2\pi\rho}}\sin(\theta/2)\cos(3\theta/2)$$

и асимптотику перемещений для случая плоской деформации

$$u_x = \frac{K_1}{\mu}\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\cos(\theta/2)(1 - 2\nu + \sin^2(\theta/2)),$$

$$u_y = \frac{K_1}{\mu}\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\sin(\theta/2)(2 - 2\nu - \cos^2(\theta/2)). \qquad (5.41)$$

Воспользуемся для определения потока энергии в край трещины формулой (5.31). Согласно (5.40) и (5.41)

$$x < 0,\ \sigma_{yy} = 0,\ x > 0,\ \sigma_{yy}(x) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$x < 0,\ u_y(-x) = \frac{2K_I(1-\nu)}{\mu\sqrt{2\pi}}\sqrt{-x},\ x > 0,\ u_y = 0.$$

Если подставить данные значения в (5.31), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\int_0^x \sigma_{yy}(x)u_y(t-x)dt =$$

$$= \frac{K_I^2(1-\nu)}{\pi\mu}\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\sqrt{x-t}}{\sqrt{t}}dx =$$

$$= \frac{(1-\nu)K_I^2}{\pi\mu}\frac{d}{dx}\frac{\pi x}{2} = \frac{(1-\nu)K_I^2}{2\mu}.$$

Как видно из полученного выражения, и для трещины нормального отрыва поток энергии, идущей на образование трещины, связан с коэффициентом интенсивности напряжений:

$$(1 - \nu)\frac{K_I^{\ 2}}{\mu} = 4\gamma. \qquad (5.42)$$

В случае плоского напряженного состояния выражение для перемещения изменится:

$$u_y = K_I/\mu \ \sin(\theta/2)(2/(1+\nu) - \cos^2(\theta/2)),$$

соответствующим образом изменится выражение и для работы:

$$\frac{1}{(1+\nu)}\frac{K_I^2}{\mu} = 4\gamma. \tag{5.43}$$

При постоянном напряжении, согласно (5.39), коэффициент интенсивности напряжений

$$K_I = P_0\sqrt{\pi l}. \tag{5.44}$$

Рассмотрим действие расклинивающей сосредоточенной силы, приложенной в середине трещины к ее берегам, $P_0(x) = F_0\delta(x)$. В этом случае

$$K_I = \frac{F_0}{\sqrt{\pi l}}\int_{-l}^{l}\delta(x)\sqrt{\frac{l+x}{l-x}}dx = \frac{F_0}{\sqrt{\pi l}}. \tag{5.45}$$

Зададимся вопросом: как будет вести себя трещина при выполнении условия ее страгивания с места, т.е. условия разрушения?

Если оставаться в рамках квазистатической постановки, то следует принять тезис, что в том случае, когда с ростом длины трещины ее коэффициент интенсивности напряжений возрастает, при условии, что внешняя нагрузка не меняется, трещину можно считать *неустойчивой*. Наоборот, если коэффициент интенсивности напряжений с увеличением длины трещины снижается при сохранении величины внешней нагрузки, трещину можно считать *устойчивой*. В силу действия растягивающего напряжения, приложенного на бесконечности (см. (5.44)), трещина неустойчива, тогда как под действием расклинивающей силы, приложенной к ее берегам (см. (5.45)), она будет устойчивой. Поэтому критерий статической устойчивости трещины можно записать и для коэффициента интенсивности напряжений:

$$K_1 \geq K_{10},\ \partial K_1/\partial l < 0. \tag{5.46}$$

Подводя итоги, можно сказать, что линейные статические задачи механики разрушения позволяют ответить на следующие вопросы:

1) при каких внешних нагрузках трещина заданной длины начнет двигаться?

2) будет ли это движение малым, т.е. устойчивым, или трещина начнет спонтанно расти вплоть до возможного разрушения тела в том случае, когда она окажется статически неустойчивой?

§ 5.5 Асимптотическое поведение решения для трещин трех типов. Учет геометрии тела. Критерий разрушения при произвольном нагружении

Аналогично тому, как это было проделано для трещины нормального разрыва, можно определить поведение трещины при сдвиге. Ниже приводится асимптотическое поведение трещин всех трех типов окрестности в точки $z = l$, $(z - l = \rho\, e^{i\theta})$.

1. Трещины нормального отрыва:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) + \cdots;$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) + \cdots; \qquad (5.47)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\rho}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + \cdots,\ \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0;$$

$$u_x = \frac{K_I}{\mu}\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{k-1}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \cdots;$$

$$u_y = \frac{K_I}{\mu}\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{k+1}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right) + \cdots.$$

2. Трещины поперечного сдвига:

$$\sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\rho}} \sin\frac{\theta}{2}\left(2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) + \cdots;$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\rho}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + \cdots; \qquad (5.48)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) + \cdots,\ \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0;$$

$$u_x = \frac{K_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{k+1}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right) + \cdots;$$

$$u_y = \frac{K_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(-\frac{k-1}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right) + \cdots.$$

Напомним, что для плоской деформации

$$k = 3 - 4v;\ \sigma_{zz} = v(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

для плоского напряженного состояния

$$k = (3 - v)/(1 + v);\ \sigma_{zz} = 0.$$

Для антиплоской деформации

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{zz} = 0,$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\rho}}\sin\frac{\theta}{2} + \cdots,\ \sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\rho}}\cos\frac{\theta}{2} + \cdots; \tag{5.49}$$

$$u_x = u_y = 0,\ u_z = \frac{K_{III}}{\mu}\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2} + \cdots.$$

Выражения для коэффициентов интенсивности напряжений, входящих в выражения (5.47)–(5.49) будут соответственно равны:

$$K_I = P_0\sqrt{\pi l},\ K_{II} = q_0\sqrt{\pi l},\ K_{III} = \tau_0\sqrt{\pi l}, \tag{5.50}$$

где $2l$ длина трещины; P_0 – растягивающее напряжения на бесконечности для трещины нормального отрыва; q_0 – сдвиговое напряжения на бесконечности для трещины поперечного сдвига; τ_0 – сдвиговое напряжение на бесконечности для трещины продольного сдвига (антиплоская деформация).

В случае произвольной трехмерной трещины асимптотика напряжений и перемещений, как показано в [13], будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\sum_{\alpha} K_\alpha f_{ij}^{(\alpha)}(\theta) + \cdots; \\ u_i &= \frac{\sqrt{\rho}}{\mu\sqrt{2\pi}}\sum_{\alpha} K_\alpha \phi_i^{(\alpha)}(\theta) + \cdots, \end{aligned} \tag{5.51}$$

где $i, j = 1,2,3;\ \alpha = I, II, III$.

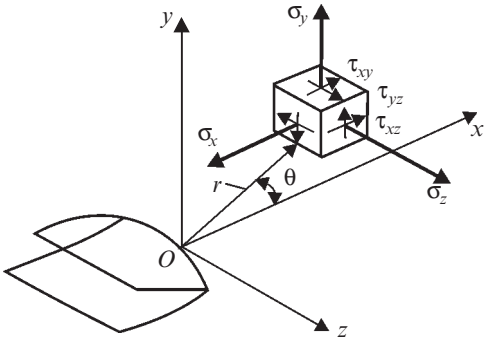


Рис. 5.5

Здесь система координат ориентирована таким образом, что плоскость трещины находится в плоскости xz, а ось y ортогональна этой плоскости. Угол θ отсчитывается от оси Ox, которая направлена по нормали к кривой края трещины в плоскости xz (рис 5.5). Коэффициенты интенсивности напряжений в (5.50) и (5.51) зависят от приложенных нагрузок, длины и формы трещины и геометрии тела; функции $f_{ij}^{(\alpha)}, \phi_i^{(\alpha)}$, наоборот, зависят только от угла θ.

Если экспериментальные значения критических коэффициентов интенсивности напряжений $K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}$ известны, то в качестве критерия разрушения в общем случае нагружения обычно используется критерий типа

$$F(K_I, K_{II}, K_{III}, K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}) = 0. \qquad (5.52)$$

Функция F в (5.52) предлагается из теории или определяется экспериментально.

На практике часто приходится решать задачи с похожей геометрией, но разными характерными размерами. В этом случае очень удобной является процедура, называемая К-тарировкой. Коэффициенты интенсивности напряжений представляются при этом в виде произведения основного коэффициента, характерного для данного типа разрушения, и безразмерной функции, которая зависит от безразмерных характеристик геометрии задачи:

$$K(P, l, L_1, L_2, \cdots) = P\sqrt{\pi l}\ Y(l/L_1,\ l/L_2, \cdots), \qquad (5.53)$$

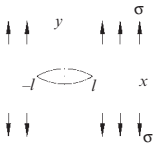
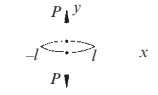
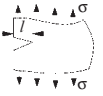
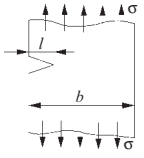
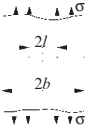
где L_i – размерные параметры геометрии тела. Безразмерные функции $Y(l\ /Li)$ приводятся в справочниках по механике разрушения.

Рассмотрим в качестве примера растяжение полосы шириной b с краевой поперечной трещиной длины l напряжениями σ. Как следует из данных таблицы, К-тарировка (5.53) для тела такой геометрии будет иметь следующий вид:

$$K = \sigma\sqrt{l}\ Y(\lambda),\ \ \lambda = l/b, (\lambda < 0{,}7),$$

$$Y(\lambda) = 1{,}99 - 0{,}41\,\lambda + 18{,}7\,\lambda^2 + 38{,}48\,\lambda^3 + 53{,}85\,\lambda^4.$$

Таблица 5.1

Номер схемы	**Форма образца и схема нагружения**	**Условия нагружения**	**Формула для расчета коэффициента интенсивности напряжений**
1		Неограниченная плоскость с трещиной растяжения. Растяжение приложено перпендикулярно плоскости трещины	$K = \sigma\sqrt{\pi l}$
2		Трещина, расклиниваемая сосредоточенными силами, приложенными в центре	$K = P/\sqrt{\pi l}$
3		Полуплоскость с краевой трещиной. Растяжение перпендикулярно трещине	$K = 1{,}12\sigma\sqrt{\pi l} =$ $= 1{,}99\sigma\sqrt{l}$
4		Полоса с краевой трещиной. Осевое растяжение	$K = \sigma\sqrt{l}\ Y(\lambda)$, $\lambda = l/b\ (\lambda < 0{,}7)$, $Y(\lambda) = 1{,}99 -$ $- 0{,}41\,\lambda + 18{,}7\,\lambda^2 -$ $- 38{,}48\,\lambda^3 + 53{,}85\,\lambda^4$
5		Полоса с центральной поперечной трещиной. Осевое растяжение	$K = \sigma\sqrt{l}\ Y(\lambda)$, $\lambda = l/b\ (\lambda < 0{,}7)$, $Y(\lambda) = 1 + 0{,}128\lambda -$ $- 0{,}288\lambda^2 + 1{,}525\lambda^3$

В этом случае задача проектировщика по расчету допустимых длин трещины сильно упрощается, поскольку, используя известную из экспериментов величину вязкости разрушения K_{Ic} для данного материала, он может определить допустимую длину трещины, решив алгебраическое уравнение $K_{Ic} = \sigma\sqrt{l}\ Y(l/b)$.

В табл. 5.1 приведены К-тарировки коэффициентов интенсивностии напряжений для некоторых образцов геометрии трещин.

§ 5.6. Силовой и энергетический критерии разрушения и их эквивалентность

На практике используется как силовой, так и энергетический критерии разрушения. В силовом критерии участвуют коэффициенты интенсивности напряжений, в энергетическом – энергия на создание трещины. Покажем, что эти подходы эквивалентны. Рассмотрим два состояния трещины – до и после ее роста на величину Δl. Будем считать, что величины напряжений, деформаций и перемещений приняли значения:

$$\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}\ ,\ \varepsilon_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij}\ ,\ u_i + \Delta u_i,\ \ i, j = 1,2,3. \qquad (5.54)$$

Если составить уравнение баланса энергии без учета динамических,тепловых и других возможных эффектов, то получим

$$\Delta U + \Delta \Pi = \Delta A, \qquad (5.55)$$

где ΔU – изменение упругой энергии; $\Delta \Pi$ – изменение поверхностной энергии (затраты энергии на создание дополнительных поверхностей); ΔA – работа внешних сил T_i .

Величину $Э = U - A$ принято называть *потенциальной энергией тела*. Тогда уравнение (5.55) баланса энергии можно переписать в виде

$$\Delta Э = -\ \Delta \Pi. \qquad (5.56)$$

Если моделировать трещину нормальным разрезом (приращение объема считается равным нулю), то уравнение (5.55), учитывая, что плотность упругой энергии равна $W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}$,

а потенциальная энергия соответственно $Э = \int\limits_V W(\varepsilon_{ij})dV - \int\limits_S T_i u_i dS$, можно записать следующим образом:

$$\int\limits_V W(\varepsilon_{ij})dV - \int\limits_{V-\Delta V} W(\varepsilon_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij})dV + \int\limits_S T_i \Delta u_i dS = \Delta П \tag{5.57}$$

Последний интеграл можно распространить на всю поверхность тела, в том числе и на поверхность трещины, учитывая, что там работа внешних сил равна нулю. Но на поверхности $T_i = \sigma_{ij} n_j$, поэтому

$$\int\limits_S T_i \Delta u_i dS = \int\limits_{V-\Delta V} (\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij})\Delta\varepsilon_{ij}\, dV,$$
$$\int\limits_V W(\varepsilon_{ij})dV = \int\limits_{V-\Delta V} W(\varepsilon_{ij})dV + \int\limits_{\Delta V} W(\varepsilon_{ij})dV. \tag{5.58}$$

Используем (5.58) в выражениях (5.57) и (5.56). Тогда

$$-\Delta Э = \int\limits_{\Delta V} W(\varepsilon_{ij})dV + \int\limits_{V-\Delta V} [(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij})\Delta\varepsilon_{ij} - \Delta W(\varepsilon_{ij})]\, dV.$$

Подынтегральное выражение во втором слагаемом с учетом выражения для плотности упругой энергии равно $\Delta\sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}/2$, поэтому после перехода от объемного интеграла к поверхностному получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V-\Delta V} \Delta\sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}\, dV = \frac{1}{2}\int\limits_{\Delta S} \Delta T_i \Delta u_i dS.$$

Поскольку для идеальной трещины $\Delta V = 0$, то

$$\Delta Э = \frac{1}{2}\int\limits_{\Delta S^+} T_i^+ \Delta u_i^+ dS + \frac{1}{2}\int\limits_{\Delta S^-} T_i^- \Delta u_i^- dS.$$

Учитывая симметрию трещины и то, что $T_1^+ = -T_1^- = -\sigma_{12}$, $T_2^+ = -T_2^- = -\sigma_{22}$, $[u_i] = u_i^+ - u_i^-$, получим:

$$\Delta Э = -\int_0^{\Delta l} (\sigma_{12} u_1^+ + \sigma_{22} u_2^+) dx_1. \qquad (5.59)$$

Применение полученного выражения (5.59) для трещин всех трех типов дает:

$$\Delta Э_I = -\frac{K_{Ic}^2}{8\mu}(k+1)\Delta l; \quad \Delta Э_{II} = -\frac{K_{IIc}^2}{8\mu}(k+1)\Delta l;$$

$$\Delta Э_{III} = -\frac{K_{IIIc}^2}{2\mu}\Delta l.$$

Если ввести удельную энергию G_c, необходимую для продвижения трещины на единицу длины, т.е. $\Delta П = G_c \Delta l$, можно прийти к следующим связям коэффициентов интенсивности напряжений и величин энергий:

$$\begin{aligned} &а)\ G_\alpha = (1-\nu^2)\frac{K_\alpha^2}{E}, \\ &б)\ G_\alpha = \frac{K_\alpha^2}{E},\ \alpha = I, II;\ G_{III} = \frac{(1+\nu)K_{III}^2}{E} \end{aligned} \qquad (5.60)$$

для плоской деформации (*а*) и плосконапряженного состояния (*б*).

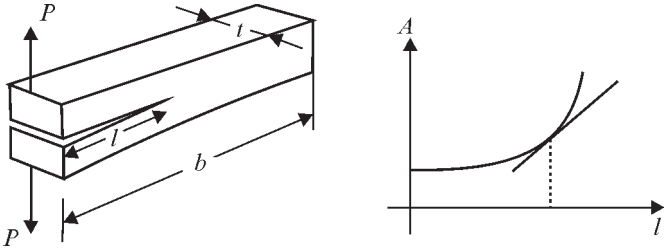
В частном случае, если считать, что энергия на продвижение трещины равна постоянной величине, можно, суммируя (5.60), получить критерий разрушения в форме

$$G_c = G_I + G_{II} + G_{III} = \frac{(1-\nu^2)}{E}\left(K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1-\nu}\right). \qquad (5.61)$$

Уравнение (5.61) является одной из возможных форм критерия разрушения при общем нагружении тела.

§ 5.7. Экспериментальное определение вязкости разрушения

Экспериментальное определение критических характеристик начала роста трещины – важнейшая часть прикладной механики разрушения (рис. 5.6).



а *б*

Рис. 5.6

В зависимости от выбора критерия разрушения определяемым является критическое значение выбранной физической величины. Если используется силовой критерий разрушения, то такой величиной будет критическое значение коэффициента интенсивности напряжений. Если выбран деформационный критерий разрушения, то определяемой величиной является предельное раскрытие трещины. Достаточно подробный обзор методов экспериментального определения критических характеристик и ссылки на литературу приведены в [38, 44]. Здесь с целью ознакомления приводится лишь один из методов определения трещиностойкости G и на ее основе вязкости разрушения K_I – метод податливости.

Рассмотрим упругое тело с трещиной площадью S, нагруженное силой P. Далее будем пользоваться балочным приближением в теории трещин, предложенным в [46]. Под действием силы точка ее приложения сместится на величину f, а в теле накопится упругая энергия $U = Pf/2$. Поскольку система упругая, то можно считать справедливым линейное соотношение $f = \lambda P$, где λ – податливость тела (величина обратная его жесткости). Упругую энергию можно выразить через податливость:

$$U = P^2 \lambda/2. \tag{5.62}$$

Если трещина продвинется, податливость возрастет и точка приложения силы получит дополнительное смещение $df = d(\lambda P)$, а сама сила совершит работу $dA = Pdf = Pd(\lambda P)$. Изменится также и упругая энергия. Подсчитаем приращения этих характеристик:

$$dA = Pd(\lambda P) = \left(P^2 \frac{\partial \lambda}{\partial l} + P\lambda \frac{\partial P}{\partial l} \right) dl,$$
$$dU = d\left(\frac{1}{2} P^2 \lambda \right) = \left(\frac{1}{2} P^2 \frac{\partial \lambda}{\partial l} + P\lambda \frac{\partial P}{\partial l} \right) dl. \qquad (5.63)$$

Согласно энергетическому критерию и уравнениям (5.63)

$$G = -\frac{d\text{Э}}{dl} = \frac{d}{dl}(A - U) = \frac{1}{2} P^2 \frac{\partial \lambda}{\partial l}. \qquad (5.64)$$

Выражение (5.64) позволяет подсчитывать текущее и критическое значения величины G. Для этого надо экспериментально определить кривую зависимости $\lambda(l)$ для тела постоянной ширины в зависимости от начальной длины трещины l. В некоторых случаях можно воспользоваться аналитическими зависимостями, если они определены. В работе [38] это показано на примере балочного приближения.

Имеется образец в виде полосы шириной $2h$ и толщиной t, содержащий трещину длины l, расположенную вдоль образца (рис. 5.6,*а*). К верхнему и нижнему торцевым краям трещины прикладываеются силы P. Части образца по разные стороны от трещины можно рассматривать как консоли длиной l, тогда прогиб определяют исходя из приближения балки Тимошенко:

$$f = \frac{8l^3}{Eh^3 t} P = \lambda P.$$

Согласно (5.64) получим:

$$G = \frac{1}{2} \frac{P^2}{t} \frac{\partial \lambda}{\partial l} = \frac{12 P^2 l^2}{t^2 h^3 E}.$$

Точность этой формулы возрастает с ростом начальной длины трещины, поскольку балочное приближение работает, когда длина балки является преобладающим размером тела. В табл. 5.2 приведены результаты экспериментов по определению вязкости разрушения некоторых конструкционных материалов при 20 °С, заимствованные из [20].

Таблица 5.2

Материал	K_{Ic}, МПа·м$^{1/2}$	σ_t, МПа	$(K_{Ic}/\sigma_t)^2$, мм
Мартенситностареющая сталь	76	1800	1,8
Высокопрочная легированная сталь:			
• обычная термообработка	98	1460	4,5
• повышенный предел текучести	51	1710	0,9
Алюминиевый сплав	30	540	3,1
Титановый сплав:			
• обычная термообработка	73	1060	4,8
• повышенный предел текучести	38	1100	1,2
Среднеуглеродистая сталь	54	260	43
Сталь для сосудов высокого давления	209	470	200

§ 5.8. Численные методы решения статических задач линейной механики разрушения

Для прямолинейной трещины в бесконечной области решение получается в конечном виде. Если тело конечно и трещина имеет сложную форму или трещин несколько, получить аналитическое решение часто невозможно. В этом случае используются различные численные методы решения. Теоретическим вопросам обоснования этих методов посвящены многие работы, например [23, 47, 48]. Достаточно обширные обзоры по применению этих методов можно найти в [44, 49, 50]. Остановимся подробно на одном из таких методов, удобном в приложениях к расчетам задач для тел с трещинами. Основой метода разрывных смещений является разложение искомых функций в ряды по некоторым базовым решениям. В качестве базовых берутся решения двух краевых задач:

Задача I.

$$y = 0;\ |x| < h:\ [u_y] = D_y;\ \sigma_{xy} = 0. \qquad (5.65)$$

Задача II.

$$y = 0;\ |x| < h:\ [u_x] = D_x;\ \sigma_{yy} = 0. \qquad (5.66)$$

В (5.65) и (5.66) знак скачка $[\cdots]$ используется в форме $[f] = f^{+} - f^{-}$, где $f^{\pm}$ – краевые значения функции при $y = 0^{\pm}$; D_x, D_y – скачки перемещений. Воспользуемся представлением Колосова – Мусхелишвили в случае плоской деформации (5.17). В первой краевой задаче $\sigma_{xy}(x,0) = 0$ при всех значениях x, т.е. $\operatorname{Im}\left(x\varphi''(x) + \psi'(x)\right) = 0$, что позволяет считать верным условие $\psi'(z) = -z\varphi''(z)$ на всей комплексной плоскости:

$$\begin{aligned} &\varphi'(z) = \frac{1}{2}T'(z), \quad \psi'(z) = -\frac{z}{2}T''(z); \\ &\psi(z) = -\frac{1}{2}zT'(z) + \frac{1}{2}T(z). \end{aligned} \tag{5.67}$$

Тогда выражения для напряжений и перемещений в силу (5.17) и (5.67) примут следующую форму:

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx} = \operatorname{Re}T'(z) - y\operatorname{Im}T''(z), \quad \sigma_{yy} = \operatorname{Re}T'(z) + y\operatorname{Im}T''(z), \\ &\sigma_{xy} = -y\operatorname{Re}T''(z), \quad 2\mu u_x = (1-2\nu)\operatorname{Re}T(z) - y\operatorname{Im}T'(z), \\ &2\mu u_y = 2(1-\nu)\operatorname{Im}T(z) - y\operatorname{Re}T'(z). \end{aligned} \tag{5.68}$$

Второе граничное условие в (5.65) выполняется автоматически, а первое приводит к решению краевой задачи для функции $T(z)$:

$$[\operatorname{Im}T(x)] = \frac{\mu}{1-\nu}D_y.$$

Ее решение дает интеграл типа Коши :

$$T(z) = \frac{\mu}{1-\nu}\frac{1}{2\pi}\int_{-h}^{h}\frac{D_y\,dt}{t-z} = \frac{\mu D_y}{2\pi(1-\nu)}\ln\frac{z-h}{z+h}. \tag{5.69}$$

Первая и вторая производные найденной функции будут соответственно иметь вид:

$$\begin{aligned} &T'(z) = \frac{\mu D_y}{2\pi(1-\nu)}\left(\frac{1}{z-h} - \frac{1}{z+h}\right), \\ &T''(z) = \frac{\mu D_y}{2\pi(1-\nu)}\left(-\frac{1}{(z-h)^2} + \frac{1}{(z+h)^2}\right). \end{aligned} \tag{5.70}$$

Напряжения и перемещения при известных функциях (5.69) и (5.70) могут быть вычислены по формулам (5.68).

Во второй краевой задаче будем искать потенциалы в форме

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2}Q(z), \qquad \psi(z) = -\frac{1}{2}(zQ)'. \tag{5.71}$$

В этом случае напряжения и перемещения имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = 2\,\mathrm{Re}\,Q'(z) - y\,\mathrm{Im}\,Q''(z);\\
&\sigma_{22} = y\,\mathrm{Im}\,Q''(z);\\
&\sigma_{12} = -\,\mathrm{Im}\,Q'(z) - y\,\mathrm{Re}\,Q''(z);\\
&2\mu u_x = 2(1-\nu)\,\mathrm{Re}\,Q(z) - y\,\mathrm{Im}\,Q'(z);\\
&2\mu u_y = (1-2\nu)\,\mathrm{Im}\,Q(z) - y\,\mathrm{Re}\,Q'(z).
\end{aligned} \tag{5.72}$$

За счет выбора вида функций (5.71) второе условие задачи выполняется автоматически, а первое приводит к краевой задаче для функции $Q(z)$:

$$[\mathrm{Re}\,Q(z)] = D_x\,\mu/(1-\nu),$$

решение которой, как и в предыдущем случае, дается интегралом типа Коши:

$$Q(z) = \frac{\mu D_x}{2\pi i\,(1-\nu)}\ln\frac{z-h}{z+h}. \tag{5.73}$$

Производные функции Q, входящие в (5.72), можно определить по формулам:

$$\begin{aligned}
&Q'(z) = \frac{\mu D_y}{2\pi i(1-\nu)}\left(\frac{1}{z-h} - \frac{1}{z+h}\right);\\
&Q''(z) = \frac{\mu D_y}{2\pi i(1-\nu)}\left(-\frac{1}{(z-h)^2} + \frac{1}{(z+h)^2}\right).
\end{aligned} \tag{5.74}$$

Полученные пробные решения дают возможность строить решения задач численно. Преимущество применения данного метода к механике разрушения состоит в том, что базовые решения позволяют считать трещины линиями с раз-

рывом перемещений, не различая берегов. Линии трещин разбиваются на линейные элементы выбранной длины $2h_i$. На каждом элементе неизвестны раскрытие D_{ni} и сдвиг $D_{\tau i}$. Для любой искомой функции решение в любой точке (x,y) можно представмть в виде суммы:

$$f(x,y) = \sum_{1}^{n} (D_{ni}\, A^i(x,y) + D_{\tau i}\, B^i(x,y)), \qquad (5.75)$$

где A^i, B^i – вклады i-го граничного элемента соответственно для первой и второй задач о единичном разрыве перемещения в вычисляемую в данной точке величину f.

Пусть вся граница области, включая трещины, содержит N граничных элементов. Для нахождения $2N$ неопределенных коэффициентов D_{ni}, $D_{\tau i}$ выполним граничные условия в центре каждого элемента. То есть плоская краевая задача в случае линейных граничных условий сводится к решению системы $2N$-линейных уравнений.

Рассмотрим в качестве примера криволинейную трещину, образующуюся под действием внутреннего давления P_0.

Апроксимируем линию трещины прямолинейными граничными элементами длиной $2h_i$. В глобальной системе координат – одной для всех граничных элементов – каждый элемент характеризуется координатами своего центра (x_{1i}, y_{1i}) и углом наклона γ_i (рис. 5.7).

В данной задаче в центре каждого элемента должны быть выполнены граничные условия $\sigma_{nn} = -P_0$, $\sigma_{n\tau} = 0$. Здесь

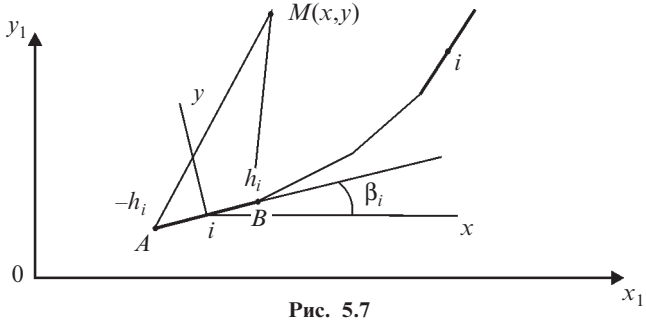


Рис. 5.7

вектор $\bar{\tau}$ направлен по касательной, а вектор $\bar{n}$ – по нормали к соответствующему граничному элементу. Введем локальную систему координат, связанную с этим элементом. Тогда положение точки M в локальной системе координат задается координатами (x,y). Введем для удобства записи модули и аргументы комплексных векторов AM и BM:

$$|AM| = a,\ \arg AM = \alpha;\ |BM| = b,\ \arg BM = \beta. \qquad (5.76)$$

При введенных обозначениях действительные и мнимые части функций, входящих в выражения для напряжений (5.68), (5.72), в соответствии с (5.69), (5.70), (5.73), (5.74) будут такими:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} T = N\ln(b/a);\ \operatorname{Im} T = N(\beta-\alpha);\\
&\operatorname{Re} T' = N(-\cos\alpha/a + \cos\beta/b);\\
&\operatorname{Im} T' = N(\sin\alpha/a - \sin\beta/b);\\
&\operatorname{Re} T'' = N\left(\cos 2\alpha/a^2 - \cos 2\beta/b^2\right);\\
&\operatorname{Im} T'' = N\left(-\sin 2\alpha/a^2 + \sin 2\beta/b^2\right);\\
&\operatorname{Re} Q = \operatorname{Im} T;\ \operatorname{Im} Q = -\operatorname{Re} T;\ \operatorname{Re} Q' = \operatorname{Im} T';\\
&\operatorname{Im} Q' = -\operatorname{Re} T';\ \operatorname{Re} Q'' = \operatorname{Im} T'';\ \operatorname{Im} Q'' = -\operatorname{Re} T''.
\end{aligned} \qquad (5.77)$$

В соотношениях (5.77) для сокращения записи введено обозначение $N = \mu/(2\pi(1-\nu))$.

Пусть в точке M введена локальная система координат с векторами базиса $\bar{\tau}, \bar{n}$. Обозначим через γ угол между вектором $\bar{\tau}$ и осью x. Тогда напряжения в этой системе координат определены через компоненты в системе координат (x,y) по формулам преобразования:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\tau\tau} &= \frac{\sigma_{yy}+\sigma_{xx}}{2} - \frac{\sigma_{yy}-\sigma_{xx}}{2}\cos 2\gamma + \sigma_{xy}\sin 2\gamma;\\
\sigma_{nn} &= \frac{\sigma_{yy}+\sigma_{xx}}{2} + \frac{\sigma_{yy}-\sigma_{xx}}{2}\cos 2\gamma - \sigma_{xy}\sin 2\gamma;\\
\sigma_{n\tau} &= \frac{\sigma_{yy}-\sigma_{xx}}{2}\sin 2\gamma + \sigma_{xy}\cos 2\gamma.
\end{aligned} \qquad (5.78)$$

В качестве точки M можно взять центр j-го граничного элемента. В этом случае выражения, позволяющие вычислить коэффициенты влияния i-го граничного элемента на j-й, будут такими:

$$\gamma = \gamma_j - \gamma_i\,;\; y = -(x_{1j} - x_{1i})\sin\gamma_i + (y_{1j} - y_{1i})\cos\gamma_i\,;$$

$$a = \sqrt{(x_{1j} - x_{1i} + h_i\cos\gamma_i)^2 + (y_{1j} - y_{1i} + h_i\sin\gamma_i)^2}\,; \qquad (5.79)$$

$$b = \sqrt{(x_{1j} - x_{1i} - h_i\cos\gamma_i)^2 + (y_{1j} - y_{1i} - h_i\sin\gamma_i)^2}\,;$$

$$\alpha = \mathrm{sign}(y)\times$$

$$\times\arccos\frac{(x_{1j} - x_{1i} + h_i\cos\gamma_i)\cos\gamma_i + (y_{1j} - y_{1i} + h_i\sin\gamma_i)\sin\gamma_i}{a}\,;$$

$$\beta = \mathrm{sign}(y)\times$$

$$\times\arccos\frac{(x_{1j} - x_{1i} - h_i\cos\gamma_i)\cos\gamma_i + (y_{1j} - y_{1i} - h_i\sin\gamma_i)\sin\gamma_i}{b}\,.$$

Подстановка выражений (5.79) в (5.77) и затем в (5.78) позволяет вычислить компоненты напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ в локальной системе координат i-го граничного элемента для нормального скачка перемещения. Подставив найденные значения напряжений в (5.75), получим соответствующие коэффициенты влияния при коэффициенте D_{n_i}. Проделав то же самое для решения второй задачи (5.73),(5.74), можно вычислить коэффициент влияния при D_{τ_i}.

Пусть NN_{ij}, NT_{ij} – коэффициенты влияния нормального и касательного скачков перемещений для величины σ_{nn} соответственно. Аналогично TN_{ij}, TT_{ij} – коэффициенты влияния для величины $\sigma_{n\tau}$. Тогда граничные условия в центре j-го граничного элемента позволяют получить два уравнения:

$$NN_{ij}\,D_{n\,i} + NT_{ij}\,D_{\tau\,i} = -P_0\,;$$

$$TN_{ij}\,D_{n\,i} + TT_{ij}\,D_{\tau\,i} = 0,\; i, j = 1, \cdots, K. \qquad (5.80)$$

В уравнениях (5.80) предполагается суммирование по повторяющемуся индексу i. Коэффициенты влияния элемента самого на себя ($i = j$) определяются предельным переходом при стремлении точки M к центру граничного элемента. После определения искомых скачков перемещения, выбирая в качестве точки M произвольную точку, можно вычислить интересующие компоненты напряжений.

Приведенные базовые решения имеют существенный недостаток, поскольку их асимптотическое поведение в окрестности краев граничных элементов отлично от асимптотики для края трещины. Поэтому для краевых граничных элементов трещины используется решение задачи с распределенным скачком перемещения, характерным для края трещины. Так, в задаче (5.65) для граничного элемента, соответствующего правому краю трещины, необходимо взять решение в виде

$$T_1(z) = \frac{\mu}{1-\nu}\frac{1}{2\pi\sqrt{h}}\int_{-h}^{h}\frac{\sqrt{h-x}\,dx}{x-z} =$$

$$= -\frac{\mu}{1-\nu}\frac{1}{\pi\sqrt{h}}\left(\sqrt{2h} + \frac{\sqrt{z-h}}{2}\ln\frac{\sqrt{z-h}-\sqrt{2h}}{\sqrt{z-h}+\sqrt{2h}}\right),$$

а для граничного элемента, соответствующего левому краю трещины,

$$T_2(z) = \frac{\mu}{1-\nu}\frac{1}{2\pi\sqrt{h}}\int_{-h}^{h}\frac{\sqrt{h+x}\,dx}{x-z} =$$

$$= \frac{\mu}{1-\nu}\frac{1}{\pi\sqrt{h}}\left(\sqrt{2h} + \frac{\sqrt{z+h}}{2}\ln\frac{\sqrt{z+h}-\sqrt{2h}}{\sqrt{z+h}+\sqrt{2h}}\right).$$

Аналогичными будут выражения и в задаче (5.66), так как $Q_i(z) = -iT_i(z),\ i = 1,2$.

Полученные функции используются при подсчете коэффициентов влияния соответствующих краевых граничных элементов, вместо функций $T(z), Q(z)$.

Для примера приведем сравнение результатов численного решения задачи для одиночной трещины с аналитическим

решением. Аналитическое решение представлено выражениями компонент напряжений:

$$\sigma_{xx}=P_0\frac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\left\{\cos\left(\theta-\frac{1}{2}\theta_1-\frac{1}{2}\theta_2\right)-\frac{\sqrt{r_1r_2}}{r}-\frac{a^2}{r_1r_2}\sin\theta\sin\left(\frac{3}{2}\theta_1+\frac{3}{2}\theta_2\right)\right\};$$

$$\sigma_{yy}=P_0\frac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\left\{\cos\left(\theta-\frac{1}{2}\theta_1-\frac{1}{2}\theta_2\right)-\frac{\sqrt{r_1r_2}}{r}+\frac{a^2}{r_1r_2}\sin\theta\sin\left(\frac{3}{2}\theta_1+\frac{3}{2}\theta_2\right)\right\};$$

$$\sigma_{xy}=P_0\frac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\left\{\frac{a^2}{r_1r_2}\sin\theta\cos\left(\frac{3}{2}\theta_1+\frac{3}{2}\theta_2\right)\right\}.$$

В формулах приняты следующие обозначения: a – половина длины трещины; $\theta = \mathrm{Arctg}(y/x)$; $\theta_1 = \mathrm{Arctg}(y/(x-a))$; $\theta_2 = \mathrm{Arctg}(y/(x+a))$; $r=\sqrt{x^2+y^2}$; $r_1=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$; $r_2=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$.

На продолжении трещины при $y=0, x>a$ определялись напряжения σ_{xx}, σ_{yy} численно и аналитически. Графики расчетов представлены на рис. 5.8 и 5.9 соответственно.

На рис. 5.10 – 5.12 приведены значения напряжений на линии $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1{,}1)$. Как показывают результаты сравнения, расчеты очень хорошо совпадают с аналитическим решением.

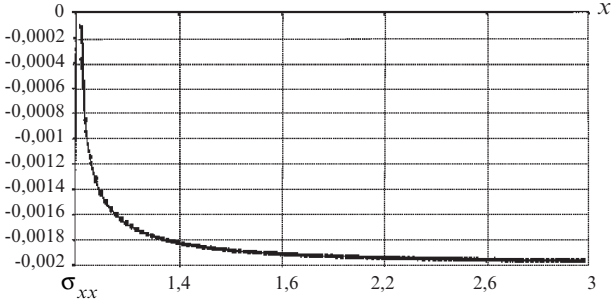


Рис. 5.8

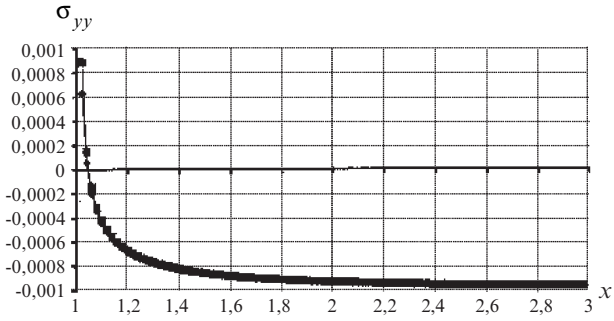


Рис. 5.9

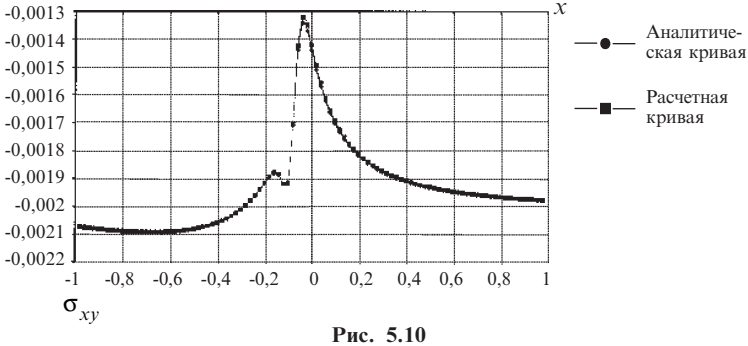


Рис. 5.10

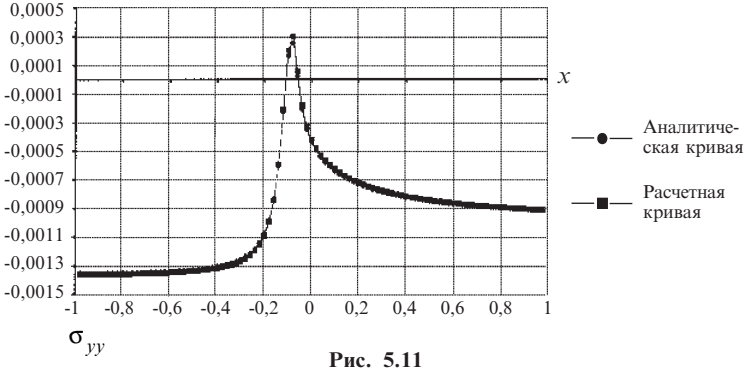


Рис. 5.11

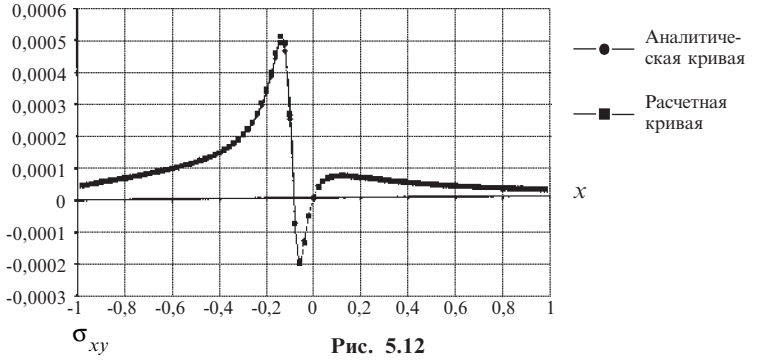


Рис. 5.12

Литература

1. *Работнов Ю.А.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. 752 с.

2. *Работнов Ю.А.* Введение в механику разрушения разрушения. – М.: Наука, 1987. 80 с.

3. *Черепанов Г.П.* Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Наука,1983. 296 с.

4. *Черепанов Г.П.* Механика разрушения горных пород в процессе бурения. – М.: Недра, 1987. 308 с.

5. *Ромалис Н.Б., Тамуж В.П.* Разрушение структурно неоднородных тел. – Рига: Зинатне, 1989. 224 с.

6. *Слепян Л.И.* Механика трещин. – М., 1990. 296 с.

7. *Кит Г.С., Хай М.В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Науковадумка, 1989. 288 с.

8. *Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н.* Теория больших упругих деформаций. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 254 с.

9. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // Philos. Trans. of Roy.Soc.of London. 1920. Ser. A. V. 221. P.163–198.

10. *Irvin G.* Analysis of stresses and straines near the and of a crack // J. Appl. Mech. 1957. V.24. № 3. P. 361–364.

11. *Orowan E.O.* Fundamentals of brittle behaviour in metals // Simp.Fatique and Fracture of Metals. – N.Y., 1952. P. 139–167.

12. *Никифоровский В.С., Шемякин Е.И.* Динамическое разрушение твердых тел. – Новосибирск: Наука,1979. 271 с.

13. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. 640 с.

14. *Слепян Л.И., Троянкина Л.В.* Теория трещин. – Л.: Судостроение, 1976. 44 с.

15. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упруго-пластического разрушения. – М.: Наука,1974. 416 с.

16. *Партон В.З.* Механика разрушения. От теории к практике. – М.: Наука, 1990. 240с.

17. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. 328 с.

18. *Райнхарт Дж.С., Пирсон Дж.* Поведение металлов при импульсивных нагрузках . – М.: ИЛ, 1958. 296 с.

19. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. 5-е изд. – М.: Наука, 1966. 707 с.

20. *Уайэтт О., Дью-Хьюз Д.* Металлы, керамики, полимеры. – М.: Атомиздат, 1979. 580 с.

21. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

22. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. 640 с.

23. *Михлин С.Г.* Прямые методы в математической физике. – М.: Гос. изд-во. техн.-теор. литературы, 1950. 428 с.

24. *Костров Б.В.* Осесимметрическая задача о распространении трещины нормального разрыва // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 644–652.

25. *Костров Б.В.* Распространение трещин с переменной скоростью // ПММ. 1974. Вып.3. С. 551–560.

26. *Костров Б.В., Никитин Л.В., Флитман Л.М.* // МТТ. 1969. № 3. С. 112–125.

27. *Слепян Л.И.* О волне хрупкого разрушения // МТТ. 1968. № 4. С. 190–192.

28. *Слепян Л.И.* Приближенная модель динамики трещин. Динамика сплошной среды. – Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР. М., 1974. Вып. 19. С. 101–110.

29. *Баренблатт Г.И.* Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С.3–56.

30. *Баренблатт Г.И.* О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций // ПММ. 1953. Т. 17. № 4. С. 455–460.

31. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Салганик Р.Л.* О кинетике распространения трещин // МТТ. 1966. № 5. С 82–92; № 6. С. 76–78; 1967. № 1. С. 122–129; № 2. С. 148–150.

32. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения // Разрушение / Под ред. Г. Либовица. Т.2. С. 204–335.

33. *Atkinson C., Eshelby J.D.* The flow of energy into the tip of moving crack // Int. J. Fracture Mechanics. 1968. V. 4. № 1. P. 3–18.

34. *Echelby J.D.* The force on an elastic singularity // Philos. Trans. Roi. Soc. 1951. V. A244. P. 87–111.

35. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.

36. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. 4-е изд. – М: Наука, 1983. Т. 1. 528 с.

37. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. 4-е изд. – М: Наука, 1984. Т. 2. 560 с.

38. *Керштейн И.М., Клюшников В.Д., Ломакин Е.В., Шестериков С.А.* Основы экспериментальной механики разрушения – М.: Изд-во МГУ, 1989. 140 с.

39. *Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В.* Прикладные задачи механики разрушения. Учеб. пособие. – Самара: Изд-во Самар. ун-та, 1999. 195 с.

40. *Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукшто М.В.* Граничные интегральные уравнения и задачи теории упругости. Учеб. пособие. – Л., 1986. 88 с.

41. *Миклашевич И.А.* Микромеханика разрушения в обобщенных пространствах. – М: Изд-во Логвинов, 2003. 208 с.

42. *Слепян Л.И.* Динамика хрупкого разрушения в средах со структурой // МТТ. 1984. № 6. С. 121–130.

43. *Westergaard H.M.* Bearing pressures and cracks // J. Appl. Mech. 1939. V.6. № 2. P. A49–A53.

44. *Плювинаж Г.* Механика упругопластического разрушения: Пер. с франц. – М.: Мир, 1993. 450 с.

45. *Сиратори М., Миёси Т., Мацусита Х.* Вычислительная механика разрушения: Пер.с японск. – М: Мир, 1986. 334 с.

46. *Ентов В.М., Салганик Р.Л.* О балочном приближении в теории трещин // Механика. 1965. № 5. С. 95–102.

47. *Алексидзе М.А.* Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. – М.: Наука. 1978. 351 с.

48. *Алексидзе М.А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. – М.: Наука. 1991. 352 с.

49. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. 494 с.

50. *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела: Пер.с англ. – М.: Мир, 1987. 328 с.

Глава 6

Влияние скорости движения трещин и физической нелинейности на асимптотику поведения решения задачи в вершине трещины

Вершина трещины является особой точкой, в которой нарушаются основные предположения линейной теории упругости о малости деформаций и поворотов. Практическое использование результатов линейного анализа возможно только в предположении малости области, в которой несправедливы предположения линейной теории упругости. Вопросы учета геометрической и физической нелинейностей являются предметом нелинейной механики разрушения. Так, фундаментальным проблемам геометрической и физической нелинейности целиком посвящена монография [1]. Полученные в ней решения основных задач механики разрушения в геометрически нелинейной постановке, учитывающей большие деформации и повороты, имеют особенности, характерные для задач разрушения, но с другой асимптотикой поведения решения в зависимости от угла подхода к вершине трещины.

Еще один из возможных подходов к учету физической нелинейности развит в [2–8, 27]. В них предполагается наличие области ослабленных связей (область предразрушения) на продолжении трещины. Величина области определяется из условия конечности напряжений. В [13–19] рассматривается поведение решения в вершине трещины в условиях пластического течения. Получение решения для полностью нелинейной постановки возможно лишь при численном анализе [9–12].

В данной главе исследуются влияние величины скорости роста трещины на поведение решения и эффекты, возникающие при наличии в вершине трещины пластического течения. Эти проблемы обсуждаются в [13–19].

Для исследования первой проблемы рассмотрим асимптотику решения в линейной стационарной постановке задачи, когда движение трещины происходит с постоянной скоростью.

§ 6.1. Стационарное движение полубесконечной трещины нормального отрыва

Рассмотрим задачу о движении в упругой среде с плотностью ρ и упругими постоянными λ, μ полубесконечной

трещины. Будем считать, что трещина растет с постоянной скоростью V_0 вдоль оси x, движение среды плоскопараллельное, а на берегах трещины действует постоянное давление P (рис. 6.1).

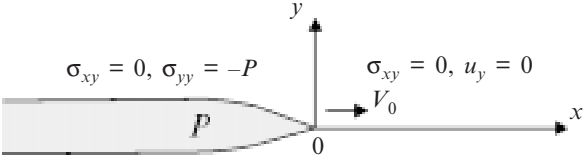


Рис. 6.1

Воспользуемся представлением Ляме [20] для вектора перемещений:

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{6.1}$$

Потенциалы вектора перемещений φ, ψ удовлетворяют волновым уравнениям

$$\begin{gathered} \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}; \; a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \\ \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}; \; b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{gathered} \tag{6.2}$$

для продольных и поперечных волн, скорости которых равны соответственно a и b. При этом компоненты тензора напряжений выражаются через потенциалы φ, ψ [20]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}; \\ \sigma_{yy} &= \lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}; \\ \sigma_{xy} &= \mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right). \end{aligned} \tag{6.3}$$

В подвижной системе координат, связанной с концом трещины, движение можно считать установившимся, поэтому если перейти к новым переменным

$$x^* = x - V_0 t,\ y^* = y,\ t^* = t, \tag{6.4}$$

то искомые функции не будут явно зависеть от времени, а дифференциальные операторы изменятся по следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^*};\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y^*};\ \frac{\partial}{\partial t} = -V_o \frac{\partial}{\partial x^*}. \tag{6.5}$$

С учетом (6.4),(6.5) волновые уравнения (6.2) преобразуются к виду

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0;\ \beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \tag{6.6}$$

где $\alpha^2 = 1 - V_0^2/a^2$, $\beta^2 = 1 - V_0^2/b^2$.

Здесь и в дальнейшем «*» не пишется для упрощения записи.

На берегах трещины и остальной части оси Ox в силу симметрии задачи должны быть выполнены следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &\text{при } y = 0,\ x < 0 \quad \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_{yy} = -P(x); \\ &\text{при } y = 0,\ x > 0 \quad \sigma_{xy} = 0,\ u_y = 0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Уравнениям (6.7) удовлетворяют функции $\varphi = \mathrm{Re}\,\Phi(z_1)$, $\psi = \mathrm{Re}\Psi(z_2)$, где $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$ – аналитические функции своих комплексных аргументов $z_1 = x + i\alpha y$, $z_2 = x + i\beta y$.

Отметим, что производные функций φ, ψ в силу условий Коши–Римана будут такими:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mathrm{Re}\,\Phi'(z_1),\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\alpha\,\mathrm{Im}\,\Phi'(z_1),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \mathrm{Re}\,\Psi'(z_2),\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\beta\,\mathrm{Im}\,\Psi'(z_2).$$

Тогда компоненты скорости и тензора напряжений можно выразить при помощи введенных функций комплексного переменного:

$$\frac{V_x}{V_o} = -\mathrm{Re}\Phi'' + \beta\mathrm{Re}\Psi''; \quad \frac{V_y}{V_o} = \alpha\,\mathrm{Im}\,\Phi'' + \mathrm{Re}\Psi'';$$

$$\frac{\sigma_{xx}}{\mu} = 2(\alpha^2 - \beta^2)\mathrm{Re}\Phi'' - \frac{\sigma_{yy}}{\mu};$$

$$\frac{\sigma_{yy}}{\mu} = -(1+\beta^2)\mathrm{Re}\Phi'' + 2\beta\,\mathrm{Im}\,\Psi''; \tag{6.8}$$

$$\frac{\sigma_{xy}}{\mu} = -2\alpha\,\mathrm{Im}\,\Phi'' - (1+\beta^2)\Psi''.$$

Учитывая выражения (6.8) и граничные условия (6.7), получаем следующую краевую задачу для определения аналитических функций $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$:

$$\text{при } y=0,\ x<0 \begin{cases} 2\alpha\,\mathrm{Im}\,\Phi''(x) + (1+\beta^2)\mathrm{Re}\Psi''(x) = 0, \\ -(1+\beta^2)\mathrm{Re}\Phi''(x) + 2\beta\,\mathrm{Im}\,\Psi''(x) = -P/\mu; \end{cases}$$

$$\text{при } y=0,\ x>0 \begin{cases} 2\alpha\,\mathrm{Im}\,\Phi''(x) + (1+\beta^2)\mathrm{Re}\,\Psi''(x) = 0, \\ \alpha\,\mathrm{Im}\,\Phi'(x) + \mathrm{Re}\,\Psi'(x) = 0. \end{cases} \tag{6.9}$$

Поскольку первое условие в (6.9) выполняется на всей оси x, можно искать функцию Ψ в виде

$$\Psi(z) = \frac{2\alpha}{(1+\beta^2)}\, i\,\Phi(z). \tag{6.10}$$

Подстановка (6.10) приводит к следующей краевой задаче для определения функции Φ'':

$$\text{при } y=0,\ x<0 \quad \frac{\Omega}{1+\beta^2}\mathrm{Re}\,\Phi''(x) = -\frac{P}{\mu};$$

$$\text{при } y=0,\ x>0 \quad \mathrm{Im}\,\Phi''(x) = 0, \tag{6.11}$$

где $\Omega = 4\alpha\beta - (1+\beta^2)^2$.

Воспользуемся методом, предложенным в [21] для получения решения в случае полубесконечной трещины. В ней предлагается найти решение для конечной трещины $-l < x < 0$ и затем перейти к предельному случаю $l \to \infty$.

Определение функции $T(z) = -i\sqrt{z(z+l)}\,\Phi''(z)$ сводится к задаче Дирихле

$$\operatorname{Re} T(z) = -\frac{(1+\beta^2)}{\mu\,\Omega}\sqrt{-x(x+l)}\,P_0(x),$$

где $P_0(x) = P(x)$ при $-l < x < 0$ и $P_0(x) = 0$ вне трещины $x < l$, $x > 0$.

Решением задачи является функция вида

$$\Phi''(z) = -\frac{1+\beta^2}{\mu\,\Omega\sqrt{z(z+l)}}\,\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{0}\frac{P(x)\sqrt{-x(x+l)}dx}{x-z},$$

где ветвь функции $\sqrt{z}$ фиксируется выбором аргумента $z = \sqrt{x^2+y^2}\,e^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$.

Если теперь в данном решении сделать предельный переход, мы получим решение для полубесконечной трещины:

$$\Phi''(z) = -\frac{1+\beta^2}{\mu\,\Omega\sqrt{z}}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{P(x)\sqrt{-x}dx}{x-z}.$$

Рассмотрим модельную задачу, в которой трещина расклинивается сосредоточенной силой, действующей на заданном расстоянии от ее конца: $P(x) = p_0\delta(x+L)$. Решение в конечном виде имеет вид

$$\Phi''(z_1) = \frac{p_0\sqrt{L}(1+\beta^2)}{\Omega\,\mu\pi}\,\frac{1}{(L+z_1)\sqrt{z_1}}.$$

Асимптотика решения в конце трещины $z_1 = r_1\exp(i\,\theta_1)$, $r_1 \to 0$ будет иметь вид

$$\Phi'' = \frac{p_0(1+\beta^2)}{\pi\sqrt{L}\Omega\mu}\,\frac{1}{\sqrt{r_1}}\left(\cos\frac{\theta_1}{2} - i\sin\frac{\theta_2}{2}\right). \qquad (6.12)$$

Тогда, согласно (6.10), получим

$$\Psi'' = \frac{2\alpha p_0}{\pi\sqrt{L}\mu\,\Omega}\,\frac{1}{\sqrt{r_2}}\left(\sin\frac{\theta_2}{2} + i\cos\frac{\theta_2}{2}\right). \qquad (6.13)$$

В (6.12) и (6.13) величины $r_1, \theta_1, r_2, \theta_2$ вычисляются по формулам

$$r_1 = \sqrt{x^2 + \alpha^2 y^2},\ \theta_1 = \mathrm{sgn}(y) \cdot arcctg\ \frac{x}{\alpha y},$$
$$r_2 = \sqrt{x^2 + \beta^2 y^2},\ \theta_2 = \mathrm{sgn}(y) \cdot arcctg\ \frac{x}{\beta y}. \qquad (6.14)$$

В статике при силовом критерии начала движения трещины за основу принимается градиент роста напряжений в окрестности особой точки. В этом случае условием движения трещины является равенство коэффициента интенсивности напряжений K_I его критическому значению. В динамических задачах [22] необходимо определить поток энергии в вершину трещины.

В приведенном решении

$$\frac{\sigma_{yy}}{\mu} = \frac{p_o}{\pi\sqrt{L}\mu\ \Omega}\left(-\frac{(1+\beta^2)^2\cos(\theta_1/2)}{\sqrt{r_1}} + \frac{4\alpha\beta\cos(\theta_2/2)}{\sqrt{r_2}}\right);$$

поэтому $K_I = \lim_{x\to 0}\sqrt{2\pi x}\,\sigma_{yy}(x,0) = p_0\sqrt{2}/\sqrt{\pi L}$ при $\theta_1 = \theta_2 = 0$, т.е. получим статическое значение коэффициента интенсивности напряжений. После введения коэффициента интенсивности напряжений компоненты вектора скорости и тензора напряжений будут иметь следующий вид:

$$\frac{V_x}{V_o} = -\frac{K_I}{\mu\Omega}((1+\beta^2)\frac{\cos(\theta_1/2)}{\sqrt{2\pi r_1}} - 2\alpha\beta\frac{\cos(\theta_2/2)}{\sqrt{2\pi r_2}});$$

$$\frac{V_y}{V_o} = -\frac{K_I\alpha}{\mu\Omega}\left((1+\beta^2)\frac{\sin(\theta_1/2)}{\sqrt{2\pi r_1}} - 2\frac{\sin(\theta_2/2)}{\sqrt{2\pi r_2}}\right);$$

$$\sigma_{xx} = 2(\alpha^2 - \beta^2)\frac{K_I}{\Omega}\frac{\cos(\theta_1/2)}{\sqrt{2\pi r_1}} -$$

$$-\frac{K_I}{\Omega}\left(-\frac{(1+\beta^2)^2\cos(\theta_1/2)}{\sqrt{2\pi r_1}} + \frac{4\alpha\beta\cos(\theta_2/2)}{\sqrt{2\pi r_2}}\right);$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\Omega}\left(-\frac{(1+\beta^2)^2\cos(\theta_1/2)}{\sqrt{2\pi r_1}} + \frac{4\alpha\beta\cos(\theta_2/2)}{\sqrt{2\pi r_2}}\right);$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{2\alpha(1+\beta^2)K_I}{\Omega}\left(-\frac{\sin(\theta_1/2)}{\sqrt{2\pi r_1}} + \frac{\sin(\theta_2/2)}{\sqrt{2\pi r_2}}\right);$$

Отметим, что при стремлении скорости трещины к нулю полученное решение совпадает со статическим.

Для определения потока энергии в край трещины рассмотрим закон изменения полной энергии для среды, ограниченной контуром, движущимся со скоростью трещины.

Полная энергия U состоит из упругой $W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}$ и кинетической $\rho\frac{v^2}{2}$ составляющих. Скорость изменения полной энергии происходит за счет ее потока через границы контура, а также мощности работы внешних сил. Если пренебречь действием массовых сил, получим $\int\limits_{\Omega}\frac{\partial U}{\partial t}dV = -\oint\limits_{\Sigma}Uv_n ds + \oint\limits_{\Sigma}\overline{\sigma}_n\overline{v}ds$,

где $\overline{n}$ – вектор внешней нормали; v_n – проекция вектора скорости $\overline{v}$ на нормаль; dV, ds – малые части объема Ω и площади Σ поверхности выделенной части среды. При стационарном движении $\partial U/\partial t = 0$ и левая часть уравнения энергии равна нулю.

Если контур не содержит особенностей, правая часть уравнения энергии тождественно равна нулю. При наличии особенностей правая часть может быть отличной от нуля и представлять собой поток энергии в особую точку. Для трещины, берега которой свободны от напряжений, интеграл в правой части не зависит от контура интегрирования [22]. Поэтому в качестве контура интегрирования (рис. 6.2) можно взять круг бесконечно малого радиуса (*a*) или прямоугольный контур (*b*).

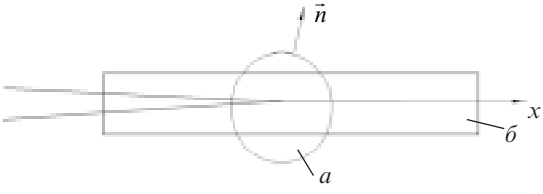


Рис. 6.2

При энергетическом способе определения за основу берется критерий, согласно которому на создание новой свободной поверхности должна затрачиваться эффективная поверхностная энергия, соответствующая заданному материалу. Обозначим через γ энергию, необходимую для образования единицы свободной поверхности. Тогда должно быть выполнено следующее энергетическое условие:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{s\varepsilon}\left(-\left(P_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+P_y\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)+\cos\theta\left(W+\frac{1}{2}\rho V^2\right)\right)ds=2\gamma, \quad (6.15)$$

где θ – угол между нормалью к контуру и осью направления движения трещины; P_x, P_y – компоненты вектора напряжений на контуре, соответственно равные $P_x = \sigma_{xx}\cos\theta + \sigma_{xy}\sin\theta$; $P_y = \sigma_{xy}\cos\theta + \sigma_{yy}\sin\theta$; V – скорость среды; W – плотность упругой энергии; $\frac{1}{2}\rho V^2$ – плотность кинетической энергии среды. На рис. 6.2 приведены различные контуры интегрирования для подсчета потока энергии в конце трещины. На контуре интегрирования *а* (см. рис. 6.2) имеем $x = \varepsilon\cos\theta$, $y = \varepsilon\sin\theta$, $n_x = \sin\theta, n_y = \cos\theta$.

Левая часть соотношения (6.15) представляет собой поток энергии в конец трещины, который расходуется на образование новой поверхности.

Для подсчета потока энергии через контур необходимо подставить в интеграл значения вектора напряжений и плотностей кинетической и упругой энергий. Поток энергии [22, 28] не зависит от контура, поэтому можно выбрать его в виде границ прямоугольника *б* на рис. 6.2 с $|x|<\varepsilon$, $|y|<\delta$, $\varepsilon\to 0$, $\delta/\varepsilon\to 0$. С учетом того, что плотность упругой энергии

$$W=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\nu}{2\mu}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})^2+\frac{1}{\mu}(\sigma_{xy}^2-\sigma_{xx}\sigma_{yy})\right),$$

определим значения напряжений и скоростей на границах контура при малых значениях ε.

- При $y\to 0^{\pm}$, $\theta=0$

$$\frac{V_x}{V_0}=-\frac{K_I}{\mu\Omega}((1+\beta^2)-2\alpha\beta)\frac{1}{\sqrt{2\pi x}};\quad \frac{V_y}{V_0}=0;$$

$$\frac{\sigma_{xx}}{\mu} = 2(\alpha^2 - \beta^2)\frac{V_0^2}{a^2}\frac{K_I}{\mu\Omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} - \frac{K_I}{\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi x}};$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}; \quad \sigma_{xy} = 0.$$

• При $y \to 0^{\pm}$, $\theta = \pm\pi$

$$\frac{V_x}{V_0} = 0; \ \frac{V_y}{V_0} = \pm\frac{\alpha(1-\beta^2)}{\mu\Omega}\frac{K_I}{\sqrt{2\pi|x|}}; \ \sigma_{yy} = \sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0.$$

Учитывая полученные значения напряжений и скоростей, находим зависимость потока энергии Γ от скорости V_0 для трещины нормального отрыва:

$$\Gamma(V_0) = -\frac{1}{2\mu}\frac{\alpha(1-\beta^2)}{\Omega}K_I^2.$$

Отсюда следует, что поток энергии неограниченно возрастает, если скорость трещины становится близкой к скорости поверхностных волн Рэлея. Кроме того, при скорости, большей скорости волн Рэлея, функция Ω меняет свой знак и поток энергии становится отрицательным. Если считать эффективную поверхностную энергию γ положительной величиной, то можно сделать вывод, что трещина не может распространяться со скоростью, большей скорости волн Рэлея. В экспериментах скорость свободных трещин не превышает половины скорости волн сдвига. При дальнейшем увеличении скорости начинается ветвление трещины и возникает множество микротрещин в окрестности поверхности ее берегов. Эти вопросы обсуждаются в [23, 24]. Многие считают, что эти факты свидетельствуют о необходимости учета структуры материала.

§ 6.2. Стационарное движение трещины в случае антиплоской деформации

Рассмотрим дозвуковое движение полубесконечной трещины со скоростью $V_0 < b$, где b – скорость поперечных волн. Для антиплоской деформации необходимо решить уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}; \ \sigma_{zx} = \mu \frac{\partial U}{\partial x'}; \ \sigma_{zy} = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \quad (6.16)$$

с граничными условиями

$$y = 0, \ x = x' - V_0 t < 0, \ \sigma_{zy} = 0, \ x = x' - V_0 t > 0, \ U = 0. \quad (6.17)$$

Если считать движение установившимся в подвижной системе координат, то из (6.16) получим уравнение

$$\beta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{b^2}},$$

решение которого можно искать в виде $U = \mathrm{Re} F(z), \ z = x + i\beta y$. Для функции $F(z)$ имеем краевую задачу:

$$y = 0, \ \mathrm{Im}\, F'(x) = 0, \ x < 0, \ \mathrm{Re} F'(x) = 0, \ x > 0. \quad (6.18)$$

Решением ее является функция $U(z) = \mathrm{Re}(-i\sqrt{L}\sqrt{z})$ с произвольной постоянной $\sqrt{L}$, вид которой выбран из соображений размерности. Тогда выражения для перемещения и напряжений будут такими:

$$U = \sqrt{L}\sqrt{r_2} \sin\frac{\theta_2}{2}; \ \sigma_{xz} = -\frac{\mu\sqrt{L}}{2\sqrt{r_2}} \sin\frac{\theta_2}{2};$$
$$\sigma_{yz} = \frac{\mu\beta\sqrt{L}}{2\sqrt{r_2}} \cos\frac{\theta_2}{2}; \ V = \frac{V_0\sqrt{L}}{2\sqrt{r_2}} \sin\frac{\theta_2}{2}. \quad (6.19)$$

Введем в рассмотрение коэффициент интенсивности напряжений $K_{III} = \lim_{x\to 0} \sqrt{2\pi x}\sigma_{yz}(x,0) = \mu\beta\sqrt{\pi L/2}$, $\sqrt{L} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{K_{III}}{\beta}$. Тогда выражения (6.19) примут вид:

$$U = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{r_2} \sin\frac{\theta_2}{2}; \ \sigma_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r_2}\beta} \sin\frac{\theta_2}{2};$$
$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r_2}} \cos\frac{\theta_2}{2}; \ \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r_2}\beta} \sin\frac{\theta_2}{2}. \quad (6.20)$$

Найдем теперь полный поток энергии в край трещины, используя Г-интеграл [22] по контуру в виде окружности:

$$\Gamma = \lim_{r\to 0}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(W+\rho\frac{V^2}{2}\right)\cos\theta-\left(\sigma_{xz}\cos\theta+\sigma_{yz}\sin\theta\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right]rd\theta. \quad (6.21)$$

Для этого нам потребуется найти плотности упругой и кинетической энергий. Для вычисления плотности внутренней энергии получим , используя определение и (5), следующее выражение:

$$W=\frac{1}{2\mu}(\sigma_{xz}^2+\sigma_{yz}^2)=\frac{K_{III}^2}{4\mu\pi}\frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{\beta^2}\sin^2\frac{\theta_2}{2}+\cos^2\frac{\theta_2}{2}\right)=$$
$$=\frac{K_{III}^2}{4\mu\pi\beta^2}\frac{1}{r_2}(1+\beta^2-(1-\beta^2)\cos\theta_2). \quad (6.22)$$

Для вычисления потоков воспользуемся значениями интегралов

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2\theta\, d\theta}{\beta^2\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\pi}{1+\beta};\ \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\beta^2\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\pi}{(1+\beta)\beta}. \quad (6.23)$$

Кроме того, учтем, что

$$\cos\theta_2=\frac{\cos\theta}{\sqrt{\beta^2\sin^2\theta+\cos^2\theta}},\ \sin\theta_2=\frac{\beta\sin\theta}{\sqrt{\beta^2\sin^2\theta+\cos^2\theta}},$$
$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{\beta^2\sin^2\theta+\cos^2\theta}}. \quad (6.24)$$

Если воспользоваться выражениями (6.21)–(6.24), поток упругой энергии будет равен

$$\Gamma_W=-\frac{K_{III}^2(1-\beta^2)}{8\pi\beta^2}\frac{2\pi}{(1+\beta)}=-\frac{K_{III}^2(1-\beta)}{4\mu\beta^2}. \quad (6.25)$$

Аналогично для плотности кинетической энергии и ее потока получим:

$$\rho\frac{V^2}{2}=\rho\frac{V_0^2K_{III}^2}{4\pi\beta^2\mu^2r_2}\sin^2\frac{\theta_2}{2}=\rho\frac{K_{III}^2(1-\beta^2)}{8\pi\mu\beta^2r_2}(1-\cos\theta_2),$$
$$\Gamma_k=-\frac{K_{III}^2(1-\beta)}{4\mu\beta^2}. \quad (6.26)$$

Осталось подсчитать работу напряжений:

$$\overline{\sigma}_n \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{K_{III}^2}{2\pi\mu\beta^2 r_2}\left(-\sin^2\frac{\theta_2}{2}\cos\theta + \beta\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\sin\theta\right) =$$

$$= \frac{K_{III}^2}{4\pi\mu\beta^2 r_2}(-\cos\theta + \cos\theta_2\cos\theta + \beta\sin\theta_2\sin\theta).$$

Отсюда, интегрируя по контуру, находим значение для потока:

$$\Gamma_\sigma = K_{III}^2 \big/ (2\mu\beta^2). \tag{6.27}$$

Суммируя потоки (6.25) – (6.27), находим выражение для общего потока энергии:

$$\Gamma = \Gamma_W + \Gamma_k + \Gamma_\sigma = \frac{K_{III}^2}{2\mu\beta} = \frac{K_{III}^2}{2\mu\sqrt{1-(V_0/b)^2}}. \tag{6.28}$$

При выводе формулы (6.28) учтено, что $\rho V_0^2/\mu = M_2^2 = 1-\beta^2$.

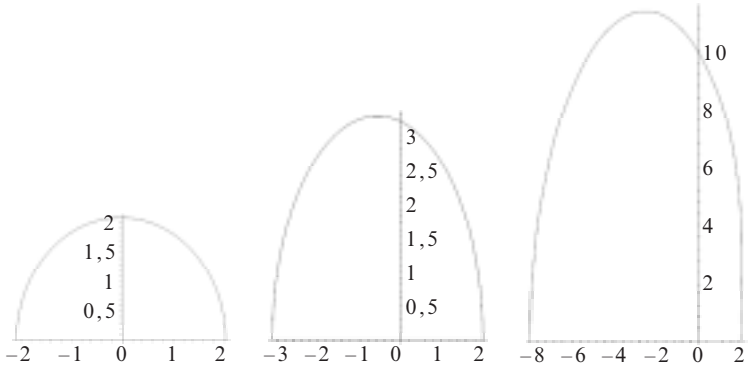
Учет динамических факторов приводит к тому, что мощность потока энергии зависит от скорости. Из (6.28) следует, что поток энергии Г возрастает с увеличением скорости трещины и стремится к бесконечности, когда она приближается к скорости поперечных волн. Интересно отметить, что потоки внутренней и кинетической энергий отрицательны, т.е. происходит унос кинетической и внутренней энергии волнами разгрузки, которые формируются при возникновении новой поверхности трещины.

Найдем границу пластичности из условия равенства максимального касательного напряжения его критическому значению k:

$$\tau = \sqrt{\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2} = k, \quad \frac{K_{III}^2}{2\pi\beta^2}\frac{1}{r_2}\left(\sin^2\frac{\theta_2}{2} + \beta^2\cos^2\frac{\theta_2}{2}\right) = k^2. \tag{6.29}$$

Формула (6.29) позволяет вычислить кривые зависимости $r(\theta)$ для разных значений скорости распространения трещины:

$$\frac{4\pi k^2}{K_{III}^2} r = \frac{1+\beta^2}{\beta^2\sqrt{\beta^2\sin^2\theta + \cos^2\theta}} - \frac{(1-\beta^2)\cos\theta}{\beta^2(\beta^2\sin^2\theta + \cos^2\theta)}. \tag{6.30}$$



а *б* *в*

Рис. 6.3

На рис. 6.3 изображены кривые пластичности для трех различных значений скорости трещины: *а* – при $\beta = 0{,}999$; *б* – при $\beta = 0{,}8$; *в* – при $\beta = 0{,}5$.

Как видно из графиков, область пластичности быстро увеличивается с ростом скорости трещины. Линейная теория применима только в тех случаях, когда область пластических деформаций составляет менее 20% длины трещины. Уравнение (6.30) показывает, что размер области увеличивается практически пропорционально квадрату скорости и значительно опережает скорость роста трещины. Так, размер области при $\theta = 0$ согласно (6.30) равен

$$\frac{\pi k^2}{K_{III}^2}\Delta x = \frac{2(1+\beta^2)}{\beta^2} \cong 2\left(2 + \frac{V_0^2}{b^2}\right).$$

По всей видимости, именно этим можно объяснить то, что в экспериментах значение скорости трещин не превышает половины скорости поперечных волн. Конечно, не надо полагать, что реальные области пластичности имеют именно такой вид, но все же тенденция быстрого роста пластической области в линейной постановке скорее всего справедлива.

§ 6.3. Уравнения пластического течения в окрестности вершины трещины

Как следовало из рассмотрения задач линейной механики разрушения, в окрестности трещины происходит неограниченный рост напряжений при любых приложенных внешних нагрузках. В реальных условиях напряжения ограниченны, так как при превышении ими некоторого предела материал перестает быть упругим. Возникают необратимые деформации, которые можно описывать в рамках одной из моделей упругопластического поведения среды. Задачи поведения трещин, в которых рассматриваются нелинейные уравнения состояния, составляют предмет нелинейной механики разрушения.

Поскольку в этом случае необходимо решать нелинейные задачи, возможности аналитического исследования весьма ограниченны и в целом задачи решаются численно. Однако в некоторых случаях возможен аналитический анализ качественного поведения среды в окрестности вершины трещины.

Будем описывать поведение среды как идеально пластическое с условием текучести Треска-Сен-Венана или Мизеса. Согласно модели Треска-Сен-Венана, пластическое течение материала обусловлено тем, что максимальное касательное напряжение достигает предела текучести на сдвиг [25]:

$$|\tau_{\max}| = k\,. \tag{6.31}$$

Пусть $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ – упорядоченные главные напряжения. Тогда максимальные касательные напряжения

$$\tau_3 = (\sigma_I - \sigma_{II})/2,\ \tau_1 = (\sigma_{II} - \sigma_{III})/2,\ \tau_2 = (\sigma_I - \sigma_{III})/2\,. \tag{6.32}$$

Площадки, на которых действуют данные максимальные касательные напряжения, задаются векторами единичных нормалей в главных осях:

для τ_3, $\overline{n} = \left(\pm 1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0\right)$;

для τ_1, $\overline{n} = \left(0; \pm 1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\right)$;

для τ_2, $\overline{n} = \left(\pm 1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2}\right)$.

Очевидно, что при равных главных напряжениях условие пластичности не может быть выполнено. Если $\sigma_I > \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$,

максимальным касательным напряжение будет τ_2, а при $\sigma_I = \sigma_{II} > \sigma_{III}$ будет два равных максимальных касательных напряжения: $\tau_1 = \tau_2 > \tau_3$. Это означает, что пластическое течение возможно или на одной площадке (конец вектора напряжений $\overline{OM}$ находится на грани призмы Треска), или на двух площадках (конец вектора напряжений $\overline{ON}$ находится на ребре этой призмы) (рис. 6.4).

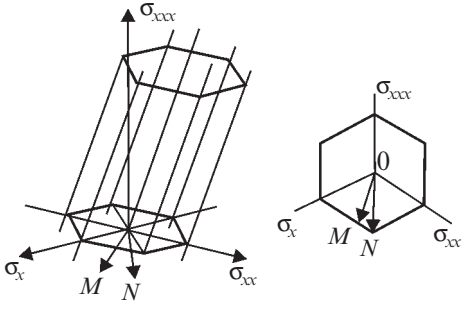


Рис. 6.4

Будем считать, что полные деформации представляются в виде суммы упругих и пластических деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^{(p)}, \tag{6.33}$$

причем упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука, а пластическое течение подчиняется ассоциированному закону течения пластически несжимаемой среды:

$$\dot{\varepsilon}_{kk}^{(p)} = 0,\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} = \lambda_\alpha \frac{\partial \tau_\alpha^2}{\partial \sigma_{ij}},\ \lambda_\alpha \geq 0,\ \alpha \in N,\ \alpha \leq 2. \tag{6.34}$$

В соотношениях (6.34) суммирование по индексу α производится для тех площадок, на которых выполнено условие пластичности Треска. Как было показано выше, максимальное число таких площадок равно двум. Поскольку упругая часть деформаций связана с напряжениями законом Гука, для упругой части тензора скоростей деформаций справедливо равенство

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)} = \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij} - \frac{3\nu}{E}\dot{p}\,\delta_{ij}\ ,\ p = \frac{\sigma_{kk}}{3}. \tag{6.35}$$

После сложения (6.34), (6.35) получим для тензора скоростей деформаций следующую зависимость:

$$\begin{gathered}\lambda_\alpha \frac{\partial \tau_\alpha^2}{\partial \sigma_{kk}} = 0,\\ \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}) = \lambda_\alpha \frac{\partial \tau^2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij} - \frac{3\nu}{E}\dot{p}\delta_{ij}\ .\end{gathered} \tag{6.36}$$

Если к уравнениям (6.36) добавить уравнения движения сплошной среды (предполагается, что массовые силы отсутствуют)

$$\rho \dot{V}_i = \sigma_{ij\ ,j} \tag{6.37}$$

и условие пластичности согласно (6.31)

$$\tau_\alpha^2 = k^2,\ \alpha \le 2\ , \tag{6.38}$$

то получим замкнутую систему уравнений относительно неизвестных $\sigma_{ij}\ , V_i\ , \lambda_\alpha$.

Рассмотрим теперь модель пластичности с условием Мизеса для несжимаемой среды $\nu = 0{,}5$. Уравнения получаются аналогичным образом, поэтому приведем их без подробного вывода [25]:

$V_{i,i} = 0$ – условие несжимаемости;

$$\frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}) = \lambda(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) + \frac{1+\nu}{E}(\dot{\sigma}_{ij} - \dot{p}\delta_{ij}) - \tag{6.39}$$

закон пластического течения;

$(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) = 2k^2$ – условие пластичности Мизеса; (6.39’)

$\rho \dot{V}_i = \sigma_{ij\ ,j}$ – уравнения движения.

В дальнейшем ограничимся исследованием разрушения двух типов – трещин антиплоской деформации и трещин отрыва для случая плоской деформации.

§ 6.4. Учет пластичности для трещины в условиях антиплоской деформации

При антиплоской деформации единственной составляющй скорости, отличной от нуля, является $V_3 = V(x_1, x_2, t)$. Вследствие этого ненулевыми компонентами тензора скоростей дефомаций будут

$$\dot{\varepsilon}_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \dot{\varepsilon}_{23} = \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x_2}. \tag{6.40}$$

Условие пластичности имеет вид

$$\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2. \tag{6.41}$$

Ассоциированный закон течения (6.36) в этом случае приводит к уравнениям:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V_3}{\partial x_1} = 2\lambda\sigma_{13} + \frac{1}{2\mu}\dot{\sigma}_{13}; \quad \frac{1}{2}\frac{\partial V_3}{\partial x_2} = 2\lambda\sigma_{23} + \frac{1}{2\mu}\dot{\sigma}_{23}. \tag{6.42}$$

Исследуем рост пластической области при квазистационарном нагружении, считая, что трещина неподвижна и силами инерции можно пренебречь. Будем рассматривать верхнюю полуплоскость. В этом случае условию пластичности (6.41) можно удовлетворить тождественно, приняв, что

$$\sigma_{13} = -k\sin\varphi, \quad \sigma_{23} = k\cos\varphi. \tag{6.43}$$

Подстановка этих значений в уравнения движения (6.37) в случае отсутствия сил инерции приводит к уравнению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cos\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\sin\varphi = 0. \tag{6.44}$$

Левую часть уравнения (6.44) можно рассматривать как производную по направлению $\overline{l} = (\cos\varphi;\ \sin\varphi)$, $d\varphi/dl = 0$. Таким образом, линиями течения будут прямые $\varphi = \text{const}$.

Рассмотрим центрированное поле линий течения с центром в начале координат (рис. 6.5) $\varphi = \angle MOA = \frac{1}{2}\angle MO_1A = \frac{\theta}{2}$, $O_1M = r$, $OM = 2r\cos\frac{\theta}{2}$.

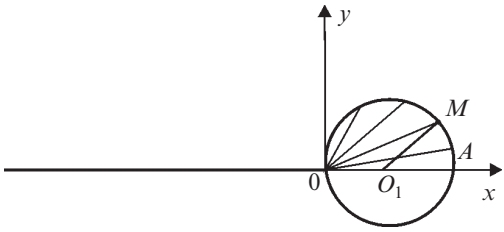


Рис. 6.5

При этом на площадке OM $(\overline{n} = (\sin\varphi; \cos\varphi; 0))$, т.е. на линии скольжения, вектор напряжения имеет согласно (6.43) составляющие (0; 0; k), а на ортогональной к ней площадке $(\overline{n} = (\cos\varphi; \sin\varphi; 0))$ вектор напряжений равен нулю. Это означает, что в полярной системе координат (R, φ) в пластической области

$$\sigma_{z\varphi} = k, \ \sigma_{zR} = 0. \tag{6.45}$$

Условия пластического течения (6.42) в этом случае будут иметь вид:

$$\dot{\varepsilon}_{z\varphi} = \frac{1}{2R}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \lambda\sigma_{z\varphi} = \lambda k, \ \dot{\varepsilon}_{zR} = \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial R} = \lambda\sigma_{zR} = 0. \tag{6.46}$$

В силу последнего соотношения (6.46) скорость, а значит, и перемещение зависят только от угла φ. Поскольку при переходе в пластическую область напряжения уже не меняются, уравнения (6.42) можно проинтегрировать по времени:

$$\varepsilon_{z\varphi} = \lambda_0 k + \frac{1}{2\mu}k = \frac{1}{2R}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \ \ \varepsilon_{zR} = 0 = \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial R}, \tag{6.47}$$

где $\lambda_0 = \int\limits_{t_1}^{t} \lambda dt$; t_1 – время перехода данной материальной точки из упругой области в пластическую. Поскольку перемещение в пластической области зависит только от угла φ, оно определяется из условия непрерывности на границе упругой и пластической областей. Воспользуемся решением статической упругой задачи для трещины в условиях антиплоской деформации, взяв начало координат для упругой среды на продолжении трещины в точке O_1 (см. рис. 6.5):

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2},\ \sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2};$$
$$U = \frac{K_{III}}{\mu}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\frac{\theta}{2};\ K_{III} = \tau\sqrt{\pi L}. \tag{6.48}$$

Учитывая равенство $\varphi = \theta/2$ и соотношения (6.43), (6.48), видим, что решения в упругой и пластической областях сопрягаются непрерывным образом, если принять, что в упругом решении

$$r = r_0 = \frac{K_{III}^2}{2\pi k^2} = \frac{\tau^2 L}{2k^2}. \tag{6.49}$$

С учетом (6.49) в пластической области получим

$$\frac{dU}{d\varphi} = 2r_0\frac{k}{\mu}\cos\varphi = \frac{\tau^2}{\mu k}L\cos\varphi,\ U = \frac{\tau^2}{\mu k}L\sin\varphi. \tag{6.50}$$

Согласно (6.47) величина плотности работы на пластических деформациях

$$\lambda_0 = \frac{1}{2Rk}\frac{dU}{d\varphi} - \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{R_0}{R} - 1\right) \geq 0,$$

где $R_0 = 2r_0\cos\varphi = OM$ – расстояние от края трещины до границы пластической области.

Интересно отметить, что раскрытие трещины в вершине получилось конечным. Согласно (6.49), (6.50)

$$\Delta U = 2\ U(0,0) = 2\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} U(\varphi) = \frac{2K_{III}^2}{\pi\mu k} = 4r_0\frac{k}{\mu} = \frac{2\tau^2}{\mu k}L. \tag{6.51}$$

Это означает, что трещина является затупленной. Если подсчитать формально поток энергии как Г-интеграл [22] для контура $y = \varepsilon \to 0,\ -\varepsilon_1 < x < \varepsilon_1, \varepsilon_1 \to \infty$, то найдем:

$$\gamma = -2\lim_{y\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{zy}\frac{\partial U}{\partial x}dx = 4\frac{k^2}{\mu}r_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi k^2 r_0}{\mu} = \frac{K_{III}^2}{2\mu}.$$

Полученное выражение совпадает с выведенным ранее для упругой среды. Это означает, что Г-интеграл сохраняет свое значение и в данном случае.

Следует учитывать, что приведеннные соотношения справедливы лишь в том случае, когда размеры пластической области малы по сравнению с длиной трещины. В силу условия (6.49) это означает малость параметра τ/k, т. е. отношения напряжения, приложенного на бесконечности, к пределу текучести на сдвиг.

Исследуем теперь движение трещины со скоростью V_0, настолько малой, что силами инерции можно пренебречь.

Умножив первое из уравнений (6.42) на σ_{13}, а второе – на σ_{23} и сложив, с учетом условия пластичности (6.41) получим:

$$\lambda = \frac{1}{4k^2}\left(\sigma_{13}\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \sigma_{23}\frac{\partial V_3}{\partial x_2}\right). \qquad (6.52)$$

Рассмотрим движение трещины с постоянной скоростью V_0. Стационарное решение задачи будет зависеть от переменных $x = x_1 - V_0 t$; $y = x_2$. Для новых переменных производная по времени будет выражаться через производную по x, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = -V_0\frac{\partial}{\partial x}.$$

Учет стационарности и подстановка значения λ из (6.52) в уравнения (6.41) приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_3}{\partial x} &= \frac{1}{k^2}\left(\sigma_{13}^2\frac{\partial V_3}{\partial x} + \sigma_{13}\sigma_{23}\frac{\partial V_3}{\partial y}\right) - \frac{V_0}{\mu}\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x}; \\ \frac{\partial V_3}{\partial y} &= \frac{1}{k^2}\left(\sigma_{13}\sigma_{23}\frac{\partial V_3}{\partial x} + \sigma_{23}^2\frac{\partial V_3}{\partial y}\right) - \frac{V_0}{\mu}\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x}. \end{aligned} \qquad (6.53)$$

Будем искать напряжения в виде (6.43), где φ – новая искомая функция. После подстановки (6.43) в (6.53) и (6.39), пренебрегая силами инерции, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial V_3}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial V_3}{\partial y}\sin\varphi - \frac{V_0 k}{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0;\ k\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\sin\varphi\right) = 0.$$

Если считать поле линий скольжения по-прежнему центрированным и перейти в полярную систему координат (φ, R), второе уравнение будет выполняться тождественно, а первое можно записать так:

$$\frac{\partial V_3}{\partial R} = \frac{V_0 k}{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{V_0 k}{\mu}\frac{\sin\varphi}{R}.$$

Отсюда после интегрирования по переменной R имеем:

$$V_3 = -\frac{V_0 k}{\mu}\sin\varphi(\ln R + f(\varphi)),$$

где $f(\varphi)$ – произвольная функция угла φ. С учетом непрерывности на границе пластической области $R = R_0 = 2r\cos\varphi$

$$V_3 = -\frac{V_0 k}{\mu}\left(\ln\frac{R}{R_0} - 1\right).$$

Так как $V_3 = -V_0\,\partial U_3/\partial x$, то можно определить деформацию $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{zx}$:

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial U_3}{\partial x} = -\frac{k}{2\mu}\sin\varphi\left(\ln\frac{R_0}{R} + 1\right). \qquad (6.54)$$

Из первого уравнения (6.42) следует, что

$$\frac{4\lambda}{V_0}k\sin\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_3}{\partial x}\right) - \frac{k}{\mu}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{R}. \qquad (6.55)$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial R},$$

то из (6.54) получаем

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} = \frac{k\sin\varphi}{\mu R}\left(\cos\varphi\left(\ln\frac{R_0}{R} + 1\right) + \sin\varphi\frac{R_0'(\varphi)}{R_0} + \cos\varphi\right).$$

Подставляя это выражение производной в (6.55), находим

$$\frac{4\lambda}{V_0} = \frac{1}{\mu R}\left(\cos\varphi\left(\ln\frac{R_0}{R} + 1\right) + \sin\varphi\frac{R_0'(\varphi)}{R_0}\right).$$

Если считать, как и в статике, расстояние до границы пластической области равным $R_0(\varphi) = 2r_0\cos\varphi$ (это справедливо только при малых значениях угла φ), то окончательно получим:

$$\frac{4\lambda}{V_0} = \frac{1}{\mu R}\left(\cos\varphi\left(\ln\frac{R_0}{R} + 1\right) - \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right). \qquad (6.56)$$

Данное выражение показывает, что при реализации установившегося течения неизбежна разгрузка, поскольку в области пластического течения должно быть выполнено неравенство $\lambda \geq 0$. Отсюда следует, что $\varphi \leq \pi/2$ [21].

Если скорость трещины достаточно велика, силами инерции пренебрегать нельзя. В этом случае из уравнений (6.53) и уравнения движения получаем систему

$$\frac{\partial V_3}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial V_3}{\partial y}\sin\varphi - \frac{V_0 k}{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0;$$
$$-\rho V_0 \frac{\partial V_3}{\partial x} + k\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\sin\varphi\right) = 0. \qquad (6.57)$$

Напомним, что характеристиками системы уравнений называются линии, на которых задача Коши не имеет единственного решения. Фактически это означает, что система (6.57) вместе с выражениями дифференциалов искомых функций

$$dV_3 = \frac{\partial V_3}{\partial x}dx + \frac{\partial V_3}{\partial y}dy, \quad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$$

имеет не единственное решение относительно четырех производных искомых функций. В матричном виде эта система уравнений может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & -V_0 k/\mu & 0 \\ -\rho V_0 & 0 & k\cos\varphi & k\sin\varphi \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial V_3/\partial x \\ \partial V_3/\partial y \\ \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dV_3 \\ d\varphi \end{pmatrix}. \qquad (6.58)$$

Приравнивая определитель системы (6.58) к нулю, приходим к уравнению для определения характеристик $(\cos^2\varphi - M^2)\,dy^2 - 2\sin\varphi\cos\varphi\,dx\,dy + \sin^2\varphi\,dx^2 = 0$, где $M = V_0/b$, $b = \sqrt{\mu/\rho}$. Решая это уравнение, получаем дифференциальные уравнения характеристик

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{ctg}\varphi \pm \frac{M}{\sin\varphi}. \qquad (6.59)$$

Учитывая (6.59), после вычисления определителей расширенной матрицы (6.58) находим условия на соответствующих по знаку характеристиках

$$\rho V_0 dV_3 \mp kMd\varphi = 0 \qquad (6.60)$$

или после интегрирования

$$\rho V_0 V_3 \mp kM\varphi = \text{const}.$$

В отличие от случая движения с малой скоростью имеем два семейства характеристик. Если считать одно из них центрированным пучком прямых $\varphi = \text{const}$, пересекающихся в одной точке, то вдоль каждой из этих прямых выполнено условие V_3 = const = $V_{3\varphi}$ (φ), т.е. скорость и здесь зависит только от угла.

В общем случае характеристики являются криволинейными и их определение возможно только при численном решении задачи в целом.

§ 6.5. Пластическая область в окрестности края трещины нормального отрыва

Рассмотрим трещину нормального отрыва в условиях плоскодеформированного состояния. В этом случае главные напряжения σ_α определяются как корни уравнения

$$(\sigma_{33} - \sigma)((\sigma_{11} - \sigma)(\sigma_{22} - \sigma) - \sigma_{12}^2) = 0.$$

После решения уравнения получаем:

$$\sigma_{III} = \sigma_{33}, \ \sigma_{I,II} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} \mp \sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 4\sigma_{12}^2}\right). \qquad (6.61)$$

При коэффициенте Пуассона , равном ν = 0,5, т.е. для несжимаемой среды, максимальное касательное напряжение, согласно (6.61), равно

$$\tau_{\max} = \tau_I = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \quad \tau_{II,III} = -\tau_{\max}/2.$$

Поэтому условие пластического течения будет иметь вид

$$\left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2 = k^2. \qquad (6.62)$$

В условиях плоской деформации для несжимаемой среды $d\varepsilon_{33} = 0$, отсюда

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -p. \qquad (6.63)$$

Условию пластичности (6.62) с учетом (6.63) удовлетворяют напряжения

$$\sigma_{11} = -p - k\sin 2\varphi,\ \sigma_{22} = -p + k\sin 2\varphi,\ \sigma_{12} = k\cos 2\varphi. \quad (6.64)$$

Подстановка (6.64) в уравнения равновесия приводит к системе уравнений для определения неизвестных функций (p, φ):

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} + 2k\cos 2\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + 2k\sin 2\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} - 2k\cos 2\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + 2k\sin 2\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0. \quad (6.65)$$

Введем ортогональные криволинейные координаты (α_1, α_2), соответствующие линиям скольжения (α_1 направлена под углом φ к оси x_1, α_2 ортогональна линии α_1). Тогда производные в новой системе координат преобразуются по закону

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\cos\varphi}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \frac{\sin\varphi}{H_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\sin\varphi}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{\cos\varphi}{H_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2},$$

где $H_i = \sqrt{(\partial x_1/\partial \alpha_i)^2 + (\partial x_2/\partial \alpha_i)^2}$.

Использование этих формул в (6.65) приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\cos\varphi}{H_1}\frac{\partial(p + 2k\varphi)}{\partial \alpha_1} + \frac{\sin\varphi}{H_2}\frac{\partial(-p + 2k\varphi)}{\partial \alpha_2} = 0;$$

$$\frac{\sin\varphi}{H_1}\frac{\partial(p + 2k\varphi)}{\partial \alpha_1} - \frac{\cos\varphi}{H_2}\frac{\partial(-p + 2k\varphi)}{\partial \alpha_2} = 0.$$

Отсюда получаем вдоль линий скольжения первого и второго семейств уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(-p - 2k\varphi) = 0;\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(-p + 2k\varphi) = 0.$$

После интегрирования имеем следующие зависимости:

$$-p - 2k\varphi = 2kf_2(\alpha_2); \quad -p + 2k\varphi = 2kf_1(\alpha_1).$$

Данные соотношения на линиях скольжения позволяют вывести формулы для давления и угла:

$$p = -k(f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2)), \quad \varphi = \frac{1}{2}(f_1(\alpha_1) - f_2(\alpha_2)). \qquad (6.66)$$

В соответствии с (6.66) разность значений угла φ на линиях первого семейства не зависит от α_1. Это означает, что если какая-то линия первого семейства является прямой, то и все остальные линии этого семейства также прямые. Таким образом, в плоской задаче, как и в случае антиплоской деформации, возможно центрированное поле напряжений и поле постоянных напряжений, когда $\varphi = \text{const}$.

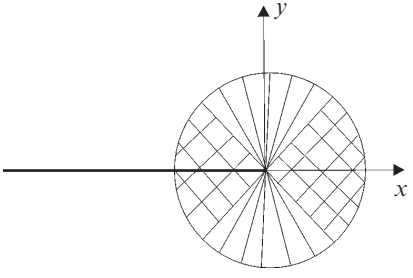


Рис. 6.6

На рис. 6.6 приведена конфигурация области пластического течения в окрестности трещины нормального отрыва. Для верхней полуплоскости в соответствии с (6.66) и граничными условиями на берегу трещины и на ее продолжении получим непрерывное поле напряжений:

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \ \sigma_{11} = \pi k, \ \sigma_{22} = (\pi + 2)k, \ \sigma_{12} = 0;$$

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}, \ \sigma_{11} = k(\frac{3\pi}{2} + 1 - 2\varphi - \sin 2\varphi),$$

$$\sigma_{22} = k(\frac{3\pi}{2} + 1 - 2\varphi + \sin 2\varphi), \ \sigma_{12} = k\cos 2\varphi;$$

$$\frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \pi, \ \sigma_{11} = 2k, \ \sigma_{22} = 0, \ \sigma_{12} = 0.$$

Рассмотрим стационарную задачу о движениии пластической области $\partial/\partial t = -V_0\,\partial/\partial x_1$. Из ассоциированного закона течения (6.35) и условия текучести (6.62) имеем:

$$
\begin{aligned}
&-V_0\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\lambda(\sigma_{11}-\sigma_{22}) - \frac{V_0}{2\mu}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right);\\
&-V_0\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}\lambda(\sigma_{11}-\sigma_{22}) + \frac{V_0}{2\mu}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right);\\
&-V_0\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_1} = \lambda\sigma_{12} - \frac{V_0}{2\mu}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}.
\end{aligned}
\tag{6.67}
$$

Учитывая в (6.67) выражения деформаций через перемещения и условие несжимаемости, приходим к уравнениям:

$$
\begin{aligned}
&V_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{1}{2}\lambda(\sigma_{11}-\sigma_{22}) + \frac{V_0}{2\mu}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right);\\
&-V_0\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}\right) = 2\lambda\sigma_{12} - \frac{V_0}{\mu}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1};\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0.
\end{aligned}
\tag{6.68}
$$

После исключения параметра λ из двух первых уравнений (6.68) и подстановки значений напряжений из (6.64), получаем уравнение для перемещения u_2:

$$
\sin 2\varphi\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \sin 2\varphi\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + 2\cos 2\varphi\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{2k}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}. \tag{6.69}
$$

Перейдем к полярной системе координат, учитывая формулы перехода:

$$
\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial R} - \frac{\sin\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi};\quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cos\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi};
$$

$$
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{R}\frac{\partial^2}{\partial R\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} +
$$

$$
+\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{R^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial R};
$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \sin^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{R}\frac{\partial^2}{\partial R\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} -$$

$$-\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{R^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial R};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} = 2\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\cos 2\varphi}{R}\frac{\partial^2}{\partial R\partial\varphi} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} -$$

$$-\frac{\cos 2\varphi}{R^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial R}.$$

В полярной системе координат уравнение (6.69) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u_2}{\partial R} - \frac{u_2}{R^2}\right) = -\frac{k}{\mu}\sin\varphi. \qquad (6.70)$$

После интегрирования (6.70) общий вид зависимости перемещения u_2 в случае центрированного поля напряжений имеет вид

$$u_2 = \frac{k}{\mu} R\ln R\cos\varphi + C_1(R) + RC_2(\varphi). \qquad (6.71)$$

Поскольку на продолжении трещины перемещение должно быть равным нулю, то функции $C_1(R)$, $C_2(\varphi)$ не могут быть произвольными и должны определяться из условий непрерывности при сопряжении с областями постояннных напряжений. В отличие от задачи для антиплоской деформации, перемещение (6.71) при стремлении к вершине трещины зависит только от радиуса R, так как $R\ln R \to 0$. Эти вопросы обсуждаются в [23, 24].

§ 6.6. Модели трещин с областями предразрушения

Учет пластичности в механике разрушения приводит к необходимости решать очень сложные нелинейные задачи динамики упругопластических материалов. Зоны пластичности по мере развития трещин могут стать соизмеримыми с их размерами и использование асимптотики упругих решений в этом случае неправомерно. Однако в задачах деформирования тонких пластин, когда работает гипотеза плоско-

напряженного состояния, возможна локализация пластических областей на продолжении трещины. В этом случае хорошо работают модели, в которых предполагается наличие узкой зоны ослабленных связей вблизи вершины трещины. Как показывают эксперименты, для вязких материалов всегда присутствует докритический рост трещины, сопровождаемый пластическими деформациями и разрыхлением материала в зоне развитых пластических деформаций. Рассмотрим длинную трещину отрыва в тонкой пластине (рис.6.7).

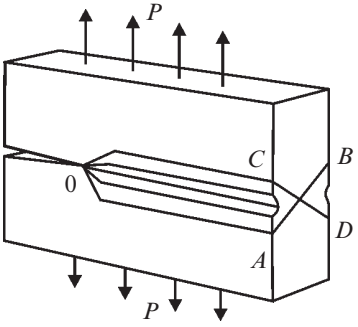


Рис. 6.7

На продолжении трещины формируется узкая зона пластичности OCA. Пластическое течение локализовано в плоскостях максимальных касательных напряжений AB и CD. Для тонкой пластины фактически реализуются условия плосконапряженного состояния. В некотором приближении считать можно, что в узкой зоне пластичности перед трещиной напряжение равно пределу текучести σ_t при растяжении. В модели с зоной предразрушения трещина длиной $2l_0$ заменяется фиктивной трещиной длиной $2l = 2(l_0 + \Delta l)$.

Основные преимущества данной модели заключаются в возможности моделирования нелинейного поведения материала задачей в линейной постановке. В русскоязычной литературе модели такого типа называются по именам их авторов – моделями Леонова–Панасюка–Дагдейла [2–8].

На рис. 6.8 представлена схема действующих напряжений для трещины $y = 0, |x| < l_0$ с областями ослабленных

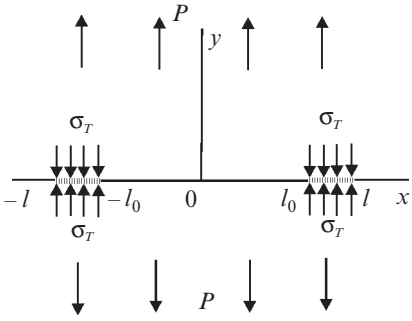


Рис. 6.8

связей $y = 0,\ l_0 < |x| < l$. Данной модели соответствуют следующие краевые условия:

$$
\begin{aligned}
&y^2 + x^2 \to \infty,\ \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_{yy} = P;\\
&y = 0,\ |x| < l_0,\ \sigma_{yy} = 0,\ \sigma_{xy} = 0;\\
&y = 0,\ l_0 < |x| < l,\ \sigma_{yy} = \sigma_T,\ \sigma_{xy} = 0;\\
&y = 0,\ |x| > l,\ u_y = 0,\ \sigma_{xy} = 0.
\end{aligned}
\tag{6.72}
$$

Пользуясь линейностью постановки (6.72), представим решение в виде суммы решений двух задач: $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}$. В первой задаче напряжения равны действующим напряжениям на бесконечности в отсутствии трещины, т.е.

$$
\sigma_{xx}^{(1)} = 0, \qquad \sigma_{xy}^{(1)} = 0, \qquad \sigma_{yy}^{(1)} = p. \tag{6.73}
$$

Во второй задаче напряжения на бесконечности будут равны нулю, и тогда согласно (6.72), (6.73) должны быть выполнены краевые условия:

$$
\begin{aligned}
&y^2 + x^2 \to \infty,\ \sigma_{ij}^{(2)} = 0;\\
&y = 0,\ |x| < l_0,\ \sigma_{yy} = -P,\ \sigma_{xy} = 0;\\
&y = 0,\ l_0 < |x| < l,\ \sigma_{yy} = -(P - \sigma_t),\ \sigma_{xy} = 0;\\
&y = 0,\ |x| > l,\ u_y = 0,\ \sigma_{xy} = 0.
\end{aligned}
\tag{6.74}
$$

В главе 5 (см. (5.34), (5.35), (5.38)) было получено решение краевой задачи (6.74) для произвольного граничного значения функции $\sigma_{yy} = -P_0(x)$ на берегу трещины. Рассмотрим решение при действии сосредоточенной силы $P_0(x) = \delta(x-\xi)$, $|\xi| < l$.

Согласно (5.38)

$$T'(z,\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{z^2-l^2}}\frac{\sqrt{l^2-\xi^2}}{z-\xi}. \qquad (6.75)$$

Подставив это выражение в (5.34), найдем напряжение на продолжении трещины $y=0$, $x>l$:

$$\sigma_{yy}^0(x,0,\xi) = \operatorname{Re} T(x,0,\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2-l^2}}\frac{\sqrt{l^2-\xi^2}}{x-\xi}. \qquad (6.76)$$

Тогда напряжение в задаче (6.74) можно определить путем интегрирования:

$$\sigma_{yy}(x,0) = \int_{-l}^{l} P(\xi)\,\sigma_{yy}^0(x,0,\xi)\,d\xi, \text{ где } P(\xi) = \begin{cases} P \text{ при} |\xi| < l_0; \\ P - \sigma_t \text{ при } l_0 < |\xi| < l. \end{cases}$$

Подстановка в интеграл, стоящий в правой части, σ_{yy}^0 из (6.76) позволяет найти значение напряжения на продолжении трещины:

$$\sigma_{yy}(x,0)) = \frac{1}{\pi\sqrt{x^2-l^2}}\left(2Px\int_0^l \frac{\sqrt{l^2-\xi^2}}{x^2-\xi^2}\,d\xi - 2\sigma_t\int_{l_0}^{l}\frac{\sqrt{l^2-\xi^2}}{x^2-\xi^2}\,d\xi\right).$$

Входящие в него интегралы соответственно равны:

$$\int_0^l \frac{\sqrt{l^2-\xi^2}}{x^2-\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{x^2-l^2}}{x}\frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^l \frac{\sqrt{l^2-\xi^2}}{x^2-\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{x^2-l^2}}{x}\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{l_0}{l}\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{x^2-l^2}}{x}\operatorname{arctg}\frac{l_0\sqrt{x^2-l^2}}{x\sqrt{l^2-l_0^2}}.$$

После подстановки найденных интегралов в выражение для $\sigma_{yy}(x,0)$, получим при $x > l$:

$$\sigma_{yy}(x,0) = \frac{(P-\sigma_T)}{\sqrt{x^2-l^2}}\left(x-\sqrt{x^2-l^2}\right)+ \\ + \frac{2x\sigma_T}{\pi\sqrt{x^2-l^2}}\arcsin\left(\frac{l_0}{l}\right)-\frac{2\sigma_T}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{l_0\sqrt{x^2-l^2}}{x\sqrt{l^2-l_0^2}}. \tag{6.77}$$

Напряжение в вершине трещины ($x \to l+0$) конечно при условии

$$\pi(P-\sigma_T)+2\sigma_T\arcsin\left(\frac{l_0}{l}\right)=0. \tag{6.78}$$

С помощью уравнения (6.78) можно определить величину области предразрушения:

$$l-l_0 = l_0\left(\sec\left(\frac{\pi P}{2\sigma_T}\right)-1\right). \tag{6.79}$$

При малом значении величины $P/\sigma_T \ll 1$, раскладывая (6.79) в ряд, получим

$$l-l_0 = l_0\frac{(\pi P)^2}{8\sigma_T^2} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{K_I(l_0)}{\sigma_T}\right)^2, \tag{6.80}$$

где $K_I(l_0)=P\sqrt{\pi l_0}$ – коэффициент интенсивности напряжений при хрупком разрушении для трещины длиной l_0.

Если определить размеры пластической области по упругому решению при плоском напряженном состоянии (см. асимптотику (5.48)) из условия пластичности Мизеса

$$(\sigma_I-\sigma_{II})^2+(\sigma_{II}-\sigma_{III})^2+(\sigma_{III}-\sigma_I)^2 = 2\sigma_T^2.$$

получим размеры области пластичности на продолжении трещины в виде

$$l-l_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_I(l_0)}{\sigma_T}\right)^2. \tag{6.81}$$

Отметим достаточно близкие значения найденных значений (6.80), (6.81), поскольку величины коэффициентов $(\pi/8=0{,}39\,;\,1/\pi=0{,}32)$ различаются незначительно.

Рассмотрим теперь зону раскрытия трещины $y = 0$, $|x| < l$. Выражения (6.75) и (5.35) позволяют определить производную перемещения u_y по переменной x при действии сосредоточенной силы. Действительно, согласно (5.35)

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{2}{1+\nu}\operatorname{Im} T'(z) - y \operatorname{Re} T''(z)\right).$$

Подстановка сюда значения $T'(z)$ из (6.75) при $y = 0$ дает следующее значение производной смещения $u_y^0(x,0)$:

$$\frac{\partial u_y^0(x,0)}{\partial x} = -\frac{2}{\pi E}\frac{\sqrt{l^2-\xi^2}}{(x-\xi)\sqrt{l^2-x^2}}.$$

Тогда в рассматриваемой задаче (6.74) производная перемещения

$$\frac{\partial u_y(x,0)}{\partial x} = \\ = -\frac{2}{\pi E}\frac{1}{\sqrt{l^2-x^2}}\left(2Px\int_0^l \frac{\sqrt{l^2-\xi^2}}{x^2-\xi^2}d\xi - 2\sigma_t x\int_{l_0}^l \frac{\sqrt{l^2-\xi^2}}{x^2-\xi^2}d\xi\right). \tag{6.82}$$

Главные значения интегралов, входящих в (6.82), будут равны:

$$\int_0^l \frac{\sqrt{l^2-\xi^2}}{x^2-\xi^2}d\xi = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{(x/l)^2-\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2}, \tag{6.83}$$

$$\int_{l_0}^l \frac{\sqrt{l^2-\xi^2}}{x^2-\xi^2}d\xi = \left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right) - \\ -\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{2x}\ln\left|\frac{l_0\sqrt{l^2-x^2}+x\sqrt{l^2-l_0^2}}{l_0\sqrt{l^2-x^2}-x\sqrt{l^2-l_0^2}}\right|, \tag{6.84}$$

где $\varphi_0 = \arcsin(l_0/l)$.

Подстановка значений (6.83), (6.84) в (6.82) приводит к выражению

$$\frac{\partial u_y(x,0)}{\partial x} = -\frac{2x}{\pi E\sqrt{l^2 - x^2}}\left(\pi(P - \sigma_T) + 2\sigma_T \arcsin\left(\frac{l_0}{l}\right)\right) +$$

$$+ \frac{2\sigma_T}{\pi E}\ln\left|\frac{l_0\sqrt{l^2 - x^2} - x\sqrt{l^2 - l_0^2}}{l_0\sqrt{l^2 - x^2} + x\sqrt{l^2 - l_0^2}}\right|.$$

Если учесть в полученном выражении соотношение (6.78), оно упростится и примет форму

$$\frac{\partial u_y(x,0)}{\partial x} = \frac{2\sigma_T}{\pi E}\ln\left|\frac{l_0\sqrt{l^2 - x^2} - x\sqrt{l^2 - l_0^2}}{l_0\sqrt{l^2 - x^2} + x\sqrt{l^2 - l_0^2}}\right|. \qquad (6.85)$$

Из (6.85) следует, что производная перемещения стремится к $-\infty$ при $x \to l_0$. При $x = l$ она равна нулю. Отсюда следует, что берега трещины смыкаются плавно.

На рис. 6.9 представлен график зависимости раскрытия трещины $Eu_y/(2\sigma_T l)$ от безразмерной переменной x/l при значении длины области предразрушения $(l - l_0)/l = 0{,}2$. Координата $x = 0{,}8$ соответствует границе области предразрушения и является точкой перегиба.

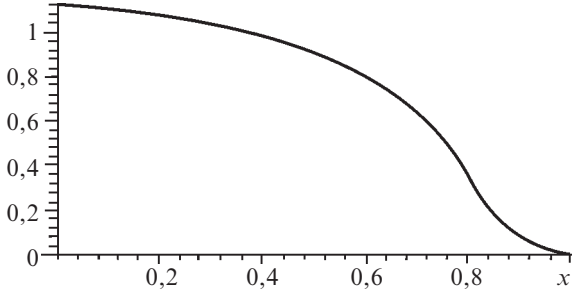


Рис. 6.9

Данная модель в различных модификациях [26, 27] широко используется при расчете на прочность тонкостенных конструкций. Ее применение при произвольном напряженном состоянии требует обоснования или экспериментальной проверки.

Подводя итоги, можно сказать, что при физически нелинейном поведении материалов меняется характер особенности в конце трещины, а построение аналитических решений в окрестности особых точек возможно только при дополнительных предположениях. Поэтому основными для решения таких задач в настоящее время являются численные методы. В то же время аналитические исследования часто позволяют найти асимптотику поведения решения в особых точках, что практически невозможно сделать при численном анализе.

Литература

1. *Черных К.Ф.* Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. – М.: Наука, Физматлит, 1996.

2. *Леонов М.Я., Панасюк В.В.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5. № 4. С. 391–401.

3. *Леонов М.Я.* Элементы теории хрупкого разрушения // МТФ. 1961. № 3. С. 85–92.

4. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phis. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.

5. *Панасюк В.В., Андрейкин А.Е., Партон В.З.* Основы механики разрушения материалов. Механика разрушения и прочность материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. Т. 1. С. 89–92.

6. *Леонов М.Я., Витвицкий П.М., Ярема С.Я.* Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиновидным концентратором // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 3. С. 541–544.

7. *Панасюк В.В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наукова думка, 1968.

8. *Баренблатт Г.И.* О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении // ПММ. 1959. Т. 23. № 3–5.

9. *Никишков Г.П., Морозов Е.М.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 1980.

10. *Сиратори М., Миёси Т., Мицусита Х.* Вычислительная механика разрушения: Пер. с японск. – М.: Мир, 1986.

11. *Плювинаж Г.П.* Механика упругопластического разрушения: Пер. с франц. – М.: Мир, 1993.

12. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985.

13. *Витвицкий П.М., Кривень В.А.* О структуре пластических зон у вершины трещины при антиплоской деформации // Докл. АН СССР. Сер. А. Физ.-мат.и техн.науки. 1981. № 4. С. 32–36.

14. *Витвицкий П.М., Панасюк В.В., Ярема С.Я.* Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения // Пробл. прочности. 1973. № 2. С. 3–18.

15. *Слепян Л.И.* О деформациях в окрестности особой точки // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 70–79.

16. *Слепян Л.И.* Деформация у края растущей трещины // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 139–148.

17. *Слепян Л.И.* Растущая трещина при плоской деформации упругопластического тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 1. С. 57–67.

18. *Слепян Л.И.* Динамика трещины в упругопластическом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 2. С. 144–153.

19. *Шер Е.Н.* Динамика растущего с постоянной скоростью прямолинейного изолированного разреза в условиях антиплоской деформации // ПМТФ. 1977. № 4. С. 166–177.

20. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир. 1975.

21. *Слепян Л.И.* Механика трещин. – Л.: Судостроение, 1990.

22. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974.

23. Разрушение. Т.1. Микроскопические и макроскопические основы механики разрушения. – М.: Мир, 1973.

24. Разрушение. Т.2. Математические основы механики разрушения. – М.: Мир, 1975.

25. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. – М.: Изд-во технико-теорет. лит., 1956.

26. *Панасюк В.В.* Деформационные критерии в механике разрушения // Физико-химическая механика материалов. 1986. № 1. С. 7–17.

27. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. № 2. P. 100–104.

28. *Rice J. R.* A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. Trans. ASME. // J Appl. Mech. 1968. № 35. P. 379–386.

Глава 7

Критерии разрушения твердых тел. Кинетические и континуальные модели разрушения

Механика динамического разрушения на современном этапе имеет несколько различных ветвей. Наряду с задачами механики трещин, некоторые из которых были рассмотрены в гл. 5 и 6, в ней активно используются и развиваются традиционные критериальные методы теории прочности [1–5], кинетические критерии разрушения, учитывающие возникновение микродефектов и их эволюцию в процессе нагружения [20, 22, 27–29]. Если в качестве критериев динамического разрушения выступают предельные значения напряжений, деформаций, энергии и т.д., то для их определения необходимы экспериментальные исследования. Использование предлагаемых кинетических моделей разрушения на практике также требует очень точных и трудоемких экспериментов, на основе которых могут быть найдены постоянные или функции, входящие в определяющие соотношения данных моделей.

На современном этапе измерение многих динамических характеристик в условиях больших скоростей деформаций практически неосуществимо. Одним из самых доступных и контролируемых уже многие годы является эксперимент по динамическому отколу. Именно поэтому эксперименты по отколу составляют основу проверки работоспособности предлагаемых моделей и критериев разрушения. В § 7.1 приведены некоторые данные [6–30] о критериях разрушения твердых тел в условиях кратковременных динамических нагрузок, предлагавшиеся на разных этапах изучения динамического разрушения. Более подробный и детальный анализ экспериментов по отколу и обширная библиография содержится в [6–20, 30].

Так как для многих материалов глобальному разрушению, сопровождающемуся магистральными трещинами, предшествует появление множества макропор, ослабляющих тела и приводящих в дальнейшем к их разрешению, в § 7.2 изложена одна из кинетических моделей разрушения [20, 23, 24, 26 – 29] и проведенные на ее основе исследования распространения волн в поврежденных средах.

Интенсивное экспериментальное исследование физических явлений, сопровождающих динамическое разрушение, показало, что термомеханические процессы, которые происходят в твердых телах под действием интенсивных динамических нагрузок, состоят из взаи-

мосвязанных механических, тепловых и структурных превращений. Последние включают формирование, движение и взаимодействие дефектов в кристаллах металлов, фазовые переходы, разрывы связей между молекулами в полимерах, накопление микроструктурных повреждений (пор, трещин) и т.п. Эти процессы проявляются как необратимые деформации, полосы адиабатического сдвига, микроразрушения.

Динамическое разрушение является сложным многостадийным процессом, включающим появление, развитие и слияние микродефектов, формирование зародышевых микротрещин, которые растут, объединяются, образуя макротрещины. В конечном счете тело распадается на отдельные фрагменты.

Решение задач, связанных с динамическим разрушением тел, требует рассмотрения широкого круга вопросов, связанных как с построением математических моделей деформируемых твердых тел, их разрушением от стадии накопления рассеянных по телу микроповреждений до появления макротрещин, так и с разработкой методов определения «нестандартных» констант моделей сред, связанных с параметрами поврежденности, и моделей фрагментации конструкций, а также методов численного моделирования процессов деформирования и разрушения.

В моделях механики континуального разрушения принято выделять три основных типа динамического разрушения твердых тел: вязкое, хрупкое и с образованием полос адиабатического сдвига.

Вязкое разрушение, наблюдаемое в таких металлах, как алюминий и медь, в твердых топливах и взрывчатых веществах, характеризуется образованием и развитием в процессе пластического деформирования пор, близких к сферическим.

Для *хрупкого разрушения* характерно образование в теле большого числа произвольно ориентированных монетообразных микротрещин, способных расти в течение всего времени протекания процесса деформирования. Разрушения такого типа отмечены в бериллии, ряде сталей, армко-железе.

При высоких скоростях деформирования процесс пластического течения является адиабатическим. В ряде случаев выделенное тепло концентрируется в тонких областях толщиной до нескольких десятков микрон, расположенных по поверхностям максимальных касательных напряжений, что приводит к значительному увеличению пластического течения вдоль этих поверхностей. Разрушения с *образования полос адиабатического сдвига* наблюдаются, в частности, в стальных цилиндрах, нагруженных взрывом, и при пробивании преград ударниками с плоским передним срезом (выбивание «пробки» из преграды).

Поскольку в процессе динамического деформирования образуется большое число дефектов среды, указанных выше типов, трудно

рассматривать каждое такое микроповреждение отдельно. Поэтому в последние годы для описания процессов микроразрушения развиваются подходы, согласно которым в определяющие уравнения вводят некоторые внутренние переменные, характеризующие развитие микроповреждений. Данное направление получило название *механики континуального (или рассеянного) разрушения*.

Развитие механики континуального разрушения началось с работ Л.М.Качанова [31] и Ю.Н. Работнова [32], посвященных теории ползучести материалов, в которых впервые был введен скалярный параметр поврежденности. Вскоре А.А. Ильюшиным было предложено рассматривать тензорные меры поврежденности [33]. Попытки введения тензоров поврежденности предпринимаются до сих пор (см., например, [34]).

В § 7.3. рассматриваются примеры термодинамически замкнутых моделей континуального разрушения, используемых в плоских и пространственных задачах для упругопластических и упруговязкопластических сред.

§ 7.1. Критерии разрушения твердых тел в условиях статического и квазистатического нагружения

Первые теории разрушения относились к анализу статических и квазистатических ситуаций и в дальнейшем получили название теорий предельного состояния, среди которых в зависимости от контролируемого при разрушении параметра можно отметить критерии наибольших нормальных напряжений, наибольших деформаций, наибольших энергий и ряд других.

Теория наибольших нормальных напряжений постулирует, что разрушение происходит в момент, когда наибольшее нормальное напряжение σ_1 достигает предельной для данного материала величины σ_0: $|\sigma_1| \le \sigma_0$. Главный недостаток этого критерия состоит в неучете двух других главных напряжений. Он противоречит экспериментам по всестороннему сжатию, когда разрушение не возникает вплоть до очень больших значений напряжений, а также экспериментам по одноосному растяжению материалов, когда разрыв происходит по плоскостям действия наибольших касательных напряжений и т.д. Тем не менее теория может быть применена к хрупким телам, таким как горные породы, если допустить разные значения пределов на разрушение и сжатие:

$$-\sigma_0' \le \sigma_1 \le \sigma_0''.$$

Это соотношение обобщается на случай сложного напряженного состояния $-\sigma_0' \le \sigma_i \le \sigma_0''$, $i = 1,2,3$, где σ_i – главные напряжения.

По теории *максимальных деформаций* разрушение материала происходит в тот момент, когда деформация ε_1 достигает предельного значения $|\varepsilon_1| \le \varepsilon_0$. Для горных пород $-\varepsilon_0' \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0''$. Для трехмерного случая эти условия часто записываются в виде $-\varepsilon_0' \le \varepsilon_i \le \varepsilon_0''$, $i = 1,2,3$, где ε_i – главные деформации. Для упругих тел эти условия равносильны соотношениям

$$-\sigma_0' \le \sigma_g \le \sigma_0'', \ \sigma_g = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3),$$

где v – коэффициент Пуассона; σ_g – приведенное напряжение. Поэтому эту теорию часто называют *теорией приведенных напряжений*.

По теории *максимальных касательных напряжений*, или критерию Кулона – Треска, началом разрушения служит момент достижения максимальным касательным напряжением $\tau_{\max}$ предельной величины τ_0:

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 \le \tau_0, \ \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3.$$

Величина предельного напряжения на сдвиг связана с предельным напряжением при растяжении $\tau_0 = \sigma_0/2$, σ_0 – предельное значение напряжения разрушения при растяжении.

В теории наибольшей энергии за основу разрушения принимается количество накопленной в единице объема энергии деформации. В предположении, что среда упруга до момента разрушения, имеем:

$$A = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right) \le A_0 = \frac{\sigma_0^2}{2E}.$$

Здесь E – модуль Юнга; A_0 – предельное значение энергии при растяжении.

Интересно отметить, что первые динамические критерии разрушения основывались на идеях, разработанных в статике.

Квазистатические критерии разрушения. Эти критерии разрушения основываются на введении предельного значе-

ния некоторой физической величины. Считается, как и в статике, что при достижении этого значения происходит разрушение материала. Такой физической величиной может быть напряжение, деформация, энергия.

Одним из основных экспериментальных методов изучения ударного разрушения материалов является эксперимент по откольному разрушению. Ударный импульс может производиться с помощью метаемой в мишень пластины, взрывом или другим способом. На рис. 7.1 приведена волновая схема одномерной задачи соударения двух пластин. Пластина длиной l_1 со скоростью V_0 ударяется по мишени длиной l_2. Место откола $x = x^*$, δ^* – длина откольной пластины. Основная идея метода заключается в том, что при встрече волн разгрузки в материале мишени возникают большие растягивающие усилия, приводящие при достаточно интенсивном воздействии к динамическому разрушению.

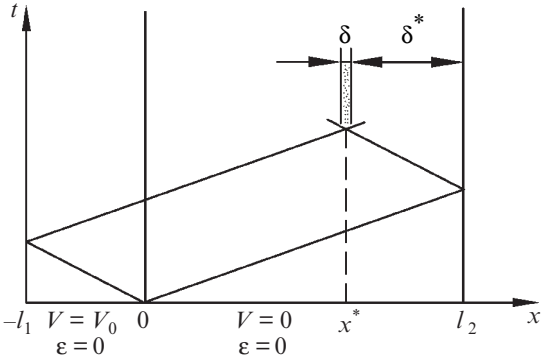


Рис. 7.1

Самыми первыми были модели с предельным напряжением разрушения и эксперименты по определению максимального (или критического) нормального напряжения растяжения σ^*, при котором происходит откол. При этом полагалось, что исследуемый материал является бездефектным, и не принималось во внимание влияние несовершенств структуры вещества на его прочность. Исследования по определению σ^* проведены для различных материалов (металлы, полимеры, горные породы). В виду того что непосредственно

измерить разрушающее напряжение в зоне откола не представляется возможным, для определения σ^* были разработаны три расчетно-экспериментальные методики.

Первая методика основана на расчетах, проводимых для условий экспериментов с целью определения напряжения в мишени в предполагаемой плоскости откола, которая определялась по экспериментально замеренной толщине откольного слоя пластины δ^*.

Образцы нагружались ударом или взрывом взрывчатых веществ (ВВ). Были получены эсперимeтальные значения величины разрушающего напряжения σ^*, ГПа, для различных материалов:

- для мягкой стали 6–7;
- для меди 30–60;
- для алюминия ..... 3–4.

Величина σ^* определялась по максимальным напряжениям растяжения без учета самого факта разрушения. Это было вызвано тем, что использовался лишь один экспериментально измеренный параметр – длина откола δ^*. Такая оценка (сверху) не учитывает возможности откола при меньших значениях σ^*, достаточных для отрыва откольного слоя. Для более точного определения величины σ^* необходимо знание еще одного параметра, например скорости свободной поверхности мишени $W(t)$ или средней скорости полета отколовшегося слоя W^*. При уточнении оказалось, например, для стали, что σ^* в зависимости от условий опытов меняется от 4 до 10 ГПа.

Вторая методика основана на применении к откольному слою закона сохранения количества движения. Имея в виду, что $m = \rho\delta^* S$ (m – масса откольного слоя, S – площадь поперечного сечения), и приняв $\rho = \rho_0$, имеем

$$\sigma^* = \rho\delta^* \frac{dW}{dt} \approx \rho_0 \delta^* \frac{\Delta W}{\Delta t}. \qquad (7.1)$$

Связывая Δt с разовым или двойным пробегом волны разгрузки вдоль откольного слоя, в акустическом приближении получаем два соотношения:

$$\sigma^* = \rho_0 c_0 (W - W^*); \ \sigma^* = \rho_0 c_0 (W_0 - W_1)/2 , \qquad (7.2)$$

где W_0 и W_1 – значения первого максимума и первого минимума на профиле $W(t)$; c_0 – скорость звука ($c_0 = \delta^*/\Delta t$).

В отличие от первой методики соотношение (7.2) дает для σ^* некоторую среднюю оценку растягивающего напряжения, реализуемого в откольной пластине за выбранное время Δt. Оценка (7.2) должна достаточно точно отражать отрывное напряжение σ^* при малых уровнях напряжений растяжения, реализующихся при отколе (σ^* = 2–4 ГПа), или очень малых длинах откола ($\delta^* \approx 0{,}1-0{,}3$ мм) и хуже при больших уровнях напряжений (≈ 6 ГПа), поскольку в этом случае возможно заметное затухание амплитуды импульса растяжения на длине $\delta^* \approx 1$ мм и более при его движении от плоскости откола к свободной поверхности.

Для более точного определения σ^* по (7.1) необходимо знать время разрушения τ^* и изменение скорости и плотности за это время в достаточно малом слое материала в зоне откола. Указанные величины современными экспериментальными методами определить не представляется возможным, поэтому для их оценок в ряде работ привлекались оба соотношения (7.2).

Применение уравнений (7.2) позволило сделать два важных вывода:

- для совершения откольного разрушения необходимо некоторое время выдержки материала под растягивающим напряжением, которое в течение этого времени не является постоянной величиной;
- разрушающее напряжение σ^* определяется условиями деформирования и зависит от скорости деформирования ε.

Для времени разрушения были получены следующие оценки: для стали марки Ст.3 $\tau^* = 1-0{,}05$ мкс при $\sigma^* = 1{,}5$–8 ГПа и для меди $\tau^* = 2{,}5-0{,}05$ мкс при $\sigma^* = 5{,}8-8{,}5$ ГПа.

Третья методика, используемая для определения σ^*, заключается в экспериментальном измерении в предполагаемой плоскости откола амплитуды сжимающих напряжений датчиками давления.

Дальнейшие исследования позволили определить такие условия нагружения, при которых наблюдался переход от неразрушенного состояния к разрушенному. Эксперименты показали, что начальный период разрушения характеризует-

ся образованием и ростом микротрещин или пор. Кроме того, оказалось, что возможен такой режим нагружения, при котором наблюдаются внутренние локальные области разрушения на глубине l^* без макроскопического разделения образца на отдельные части. Исследования позволили установить условия образования как макротрещины откола, разделяющей образец на части, так и локальных микротрещин, для чего потребовалось изучение микроструктуры образцов в зоне предполагаемого откола до и после нагружения.

Уровни откольных разрушений оценивались в основном качественно и разделялись на три группы: отсутствие разрушения, зарождающийся откол и полное отделение откольного слоя. Соответственно было введено два пороговых значения: скорости удара и разрушающего напряжения, отвечающих образованию единичных микротрещин (обозначим их V_m и σ_m^*) и начальному макроотколу (V_f, σ_f^*) при фиксированных длинах соударяющихся пластин. В рамках такого подхода удалось выявить важную особенность откольного разрушения – зависимость пороговых скоростей удара (V_m, V_f) и пороговых напряжений (σ_m^*, σ_f^*) от длительности действия импульса растяжения. Пороговое нагружение, когда на разрушение должен отработать весь импульс растяжения длительности τ_w, дает возможность достаточно надежно контролировать временную зависимость $V_m(\tau_w)$ и $V_f(\tau_w)$ поскольку при более интенсивном нагружении откол может произойти до завершения формирования импульса растяжения. Время действия τ_w и амплитуду растягивающего импульса σ_m^* можно оценивать в акустическом приближении:

$$\tau_w = 2l_I/c, \ \sigma_m^* = \rho c V_m/2; \tag{7.3}$$

полагая, что при зарождающемся отколе ослабляющее действие единичных микроповреждений на величину σ_m^* пренебрежимо мало. Варьированием длины ударника l_I было установлено, что скорость V_m растет с уменьшением l_I.

Пороговые значения величин $V_m, \sigma_m, V_f, \sigma_f$ для оргстекла, алюминия, стали и бериллия в зависимости от τ_w приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Материал	l_I, мм	l_{II}, мм	τ_m, мкс	V_m, м/с	V_f, м/с	$V_f - V_m$, м/с	σ^*_m ГПа	σ^*_f ГПа
Оргстекло (100, 120)	1 2 2,8	2 4 7	0,75 1,49 2,09	94 89 86	130 105 100	36 16 14	0,148 0,141 0,136	0,206 0,106 0,158
Сталь марки 08 кп (удар поперек прокатки)	0,5 1 2	1 2 4	0,17 0,34 0,67	225 195 160	250 217 170	25 22 10	5,32 4,64 3,81	5,94 5,17 4,04
Алюминий АМгб (удар поперек прокатки)	1 3	2 5	0,34 0,68	225 185	265 220	40 35	1,79 1,47	2,11 1,75
Алюминий АМгб (удар вдоль прокатки)	3 5	5 10	0,68 1,7	275 175	375 230	100 55	2,2 1,39	2,98 1,83
Бериллий	1,27 2,54 5,08	2,54 5,08 10,1	0,2 0,4 0,8	61 53 37	– – –	– – –	0,33 0,3 0,25	– – –

Наступление полного порогового откола связывалось с образованием в образце сквозной магистральной трещины по всему сечению образца . В табл.7.1 полный откол характеризуется двумя параметрами – V_f и σ^*_f, из которых V_f является экспериментально фиксируемой величиной, а σ^*_f – расчетной по (7.2), т.е. без учета ослабляющего действия развивающихся микроповреждений.

Данные, приведенные в табл. 7.1, позволяют сделать два вывода:

1) из сопоставления величин τ_w и $\Delta V = V_f - V_m$ следует, что во всех сериях экспериментов с уменьшением τ_w величина ΔV не остается постоянной, а растет с ростом V_m;

2) величина ΔV для образцов из стали (микротрещина) существенно меньше, чем для образцов из алюминия (микропоры) при сопоставимых условиях нагружения. К примеру, для стали и алюминия величины ΔV соответсвенно равны 10 и 35 м/с при τ_w = 0,68 мкс и 22 и 40 м/с при τ_w = 0,34 мкс.

В табл. 7.1 сопоставлены также результаты экспериментов для алюминия в зависимости от ориентации направления

прокатки относительно направления удара. Эти результаты показали, что откол легче произвести в образцах при ударе поперек направления прокатки (см. нагружение пары пластин толщиной 3–5 мм).

К середине 1960-х годов стало ясно, что динамическая прочность σ_m^* не является постоянной величиной, а меняется в значительных пределах не только при переходе от одного материала к другому, но даже для одного и того же материала в зависимости от конкретных условий эксперимента – от длительности и амплитуды импульса растяжения, предварительной механической и термической обработки образцов, температуры начального нагрева и т.д. Другим важным итогом работ этого периода явилось понимание того, что несмотря на очень малые временные масштабы разрушения откол в волнах умеренной интенсивности происходит в несколько этапов, соответствующих зарождению микроповреждений, а затем их росту и взаимодействию друг с другом вплоть до макроразрушения образца. При сильных воздействиях откол в образце с отрывом тыльного слоя может протекать и без фазы образования и роста микроповреждений. Отколы были разделены на три вида:

1) *отрывные*, при которых энергии импульса растяжения достаточно для преодоления сил взаимодействия между частицами по всему сечению испытываемого образца (очень высокие уровни растягивающих напряжений);

2) *зеркальные*, наблюдаемые в железе (также при очень высоких уровнях растягивающих напряжений) при взаимодействии ударных волн разрежения, на которых происходит обратный $\varepsilon \to \alpha$ фазовый переход;

3) *пластические*, по хрупкому (когда образуются микротрещины) или вязкому (когда образуются почти сферические микропоры) типу, ограниченные невысокими растягивающими напряжениями и характеризующиеся развитием микроповреждений.

Неудовлетворенность исследователей результатами статического подхода к откольному разрушению по критерию σ_m^* привела, с одной стороны, к необходимости поиска других критериев, а с другой – стимулировала изучение откола на микроуровне с разработкой количественного описания

микроповреждений и выявлением роли субмикроструктуры вещества в процессе разрушения. В целом этот период исследований дал чрезвычайно богатую информацию о динамическом разрушении и подготовил почву для разработки интегральных критериев разрушения (энергетического и временного), а также кинетического подхода для описания разрушения.

Энергетические критерии разрушения. Одним из возможных критериев разрушения является энергетический [30], в котором предельной величиной является запасенная в результате нагружения упругая энергия. Он относится к числу интегральных и основывается на определении той части потенциальной энергии нагруженного образца, которая достаточна для образования откольной макротрещины и равна работе разрушения отколом λ. Зная расход потенциальной энергии на откол, можно оценить возможность откольного разрушения в конкретных ударно-волновых экспериментах, сопоставляя запасенную потенциальную энергию в образце с величиной λ, т.е. критерием разрушения является достижение потенциальной энергией предельного значения.

Для расчета указанных величин использовался акустический подход. В предположении, что формирующийся в образце импульс напряжения упругий и создает в зоне откола однородное поле напряжений, упругая энергия (в единице объема) определяется по формуле $\sigma^2/(2E)$, где E – модуль Юнга. В импульсе длиной l_w отнесенная к единице площади запасенная упругая энергия

$$e = \sigma^2 l_w/(2E),$$

а для неоднородного поля напряжений (по длине импульса)

$$e = \int_0^{l_w} \frac{\sigma^2}{2E}\, dl.$$

Оценить пороговую энергию откола λ можно, зная условия экспериментов, в которых вся энергия импульса растяжения полностью расходуется на откол. В этом случае

$$\lambda = \int_0^{l_w} \frac{\sigma^2}{2E}\, dl. \qquad (7.4)$$

Необходимость привлечения экспериментов по пороговому отколу связана также с волновым характером явления. Выход импульса сжатия на свободную поверхность образца сопровождается в процессе разгрузки сжатых слоев переходом потенциальной энергии в кинетическую. Проявлением этого факта является рост массовой скорости частиц близ свободной поверхности до удвоенного значения скорости за ударной волной.

Затем, с появлением и ростом растягивающих напряжений идет обратное перераспределение части кинетической энергии в потенциальную, которое завершается формированием растягивающего импульса. Показано, что при пороговом отколе на профиле $W(t)$ нет крупномасштабных колебаний, что свидетельствует о полной релаксации напряжений растяжения до нуля по мере разрушения. В экспериментах с запороговым отколом, когда запас потенциальной энергии превышает величину λ, нереализованная при разрушении часть энергии проявляется в циркуляции остаточного импульса напряжений в разделившихся частях образца.

Следует также иметь в виду и то, что разрушение может произойти до завершения формирования растягивающего импульса. Поэтому использование соотношения (7.4) ведет к завышению значения λ, сложность коррекции которого определяется трудностями оценки оставшейся энергии $\Delta e = e - \lambda$, в каждой из разделившихся частей образца.

Величину растягивающих напряжений σ при акустическом анализе можно положить равной величине сжимающих напряжений. Тогда, зная параметры нагружающего импульса σ_s, l_w и значение энергии разрушения λ, условие откола можно записать в виде

$$\int_0^{l_w} \frac{\sigma^2}{AE}\, dl \geq \lambda, \tag{7.5}$$

где $A = 2(1-\nu)/[(1+\nu)(1-2\nu)]$; ν – коэффициент Пуассона. При обработке экспериментальных данных по (7.5) для некоторых металлов получены оценки $\lambda \approx (0{,}1\text{–}4)\cdot 10^5$ Дж/м^2.

Из (7.5) можно определить энергетический критерий

$$\int_0^{\tau} \frac{\sigma_c^2}{2E}\, dt \geq \frac{\gamma}{2c}, \quad \sigma_c^2 \tau \geq E\gamma / c, \tag{7.6}$$

при выполнении которого начальная трещина достаточно малых размеров потеряет устойчивость и начнет неограниченно расти. В соотношениях (7.6): γ – удельная поверхностная энергия трещины; σ_c – пороговое напряжение разрушения, а c – скорость звука.

Соотношения (7.6) по сути представляют собой условие Гриффитса для роста зародышевой трещины под действием приложенного напряжения. Следствием экспериментальной части исследований был вывод о зависимости энергии разрушения λ от исходной микроструктуры испытываемого образца.

Ограниченность энергетического критерия связана прежде всего с акустическим подходом к описанию процесса вплоть до разрушения. Другим его недостатком является то, что он не позволяет определить место положения откола. Тем не менее энергетический критерий дополняет представления о процессе откольного разрушения и широко используется в инженерной практике как надежное и оперативное средство определения возможности разрушения при ударном нагружении.

Временные критерии разрушения. Следующим шагом было представление σ^* как функции от $\partial\sigma/\partial t$ или $\partial\sigma/\partial x$ в зоне откола. Использовались разные формы этой зависимости:

$$\sigma^* = \sigma_0 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)^n \quad \text{или} \quad \sigma^* = A + B\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^{1/2}.$$

Было установлено, что оба критерия дают одинаковые результаты, когда производные по x и по t связаны соотношением

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right)\frac{1}{u},$$

где u – массовая скорость.

Предлагались критерии другого рода, получившие название импульсных, в которых основой была зависимость $\sigma^* = f(J_R)$, где J_R – импульс растяжения. Условие наступления разрушения принималось в виде

$$\Delta t \exp\left(\alpha^\nu \sigma\right) \geq K,$$

где α^ν, K – константы материала; Δt – время нагружения.

В другой форме этот критерий может быть взят в виде $\Delta t\, \sigma^\lambda \geq K$. Впоследствии будет показано, что этот критерий можно свести к виду

$$\sigma = \left(K\lambda u \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^{1/1+\lambda}.$$

который при $\lambda = 1$ дает $\sigma = A + B\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^{1/2}$.

По результатам этих исследований впервые была введена в рассмотрение величина порогового напряжения σ_0, ниже которого разрушение не произойдет даже при действии очень длительных импульсов растяжения, и приведена новая форма критерия разрушения:

$$(\sigma - \sigma_0)^{\lambda} \Delta t = K.$$

Данная форма имеет следующее обобщение (связанное с переменностью при развитии откола и зависимостью времени разрушения от σ), получившее название *временно́го интегрального критерия*:

$$\int_0^{t_f} (\sigma - \sigma_0)^{\lambda}\, dt = K, \tag{7.7}$$

где t_f – время разрушения.

Временной критерий в форме (7.7) широко использовался во многих работах. В частности, детально временной критерий

$$\int_0^{\tau} \sigma(t)\, dt = J^*$$

анализировался в задачах теории упругости [6]. В расчетах получена оценка $J^* = (4–5)$ ГПа/мкс.

Пример расчетов при обработке экспериментов с использованием (7.7) дан в [35].

Для железа при $\lambda = 2$ получены следующие константы временно́го критерия: $\sigma_0 = 0{,}65$ ГПа и $K = 0{,}15 \cdot 10^{-6}$ ГПа^2·с. Результаты расчетов сопоставлялись с тремя экспериментальными профилями скорости свободной поверхности.

Остановимся теперь на временном критерии материала, в котором считается, что фундаментальной величиной, характеризующей интегральную скорость разрушения при данной на-

грузке σ и температуре T, является долговечность τ [25, 26]. Для данного параметра предлагается кинетическое уравнение

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{V_0 - \gamma\sigma}{kT}\right) \text{ или } \tau = A\exp(-\alpha\sigma), \qquad (7.8)$$

где k – постоянная Больцмана; $V_0, \tau_0, \gamma, A, \alpha$ – коэффициенты; τ_0 – постоянная, близкая к периоду тепловых колебаний атомов (для твердых тел $\approx 10^{-12} - 10^{-13} c$); V_0 – энергия активации, близкая к энергии сублимации для металлов и энергии химической связи для полимеров; γ – поправочный коэффициент, зависящий от свойств и структуры материалов.

Зависимость (7.8) стала результатом обобщения большого числа экспериментов с позиций представлений о ведущей роли термофлуктуационного механизма разрыва связей между атомами, для чего необходимо преодолеть потенциальный барьер $V = V_0 - \gamma\sigma$, создаваемый соседними атомами.

На рис. 7.2 представлено семейство прямых, сходящихся при очень малых τ к полюсу Π_0 с координатами $\sigma_0 = V_0/\gamma$, $\ln \tau_0$ (на рис. 7.2 кривые *a*, *b* и *c*). Прямые оценки привели к неравенству $\sigma_0 << \sigma_T$, где σ_T – теоретическая прочность на разрыв.

Дальнейшие исследования выявили необходимость излома веера изотерм (7.8) $\tau < \tau_{cd}$ (где $\tau_{cd} \approx 10^{-3} c$), как это показано на рис. 7.2, а также то, что в области напряжений порядка 1 ГПа появляется динамическая ветвь долговечности (на рисунке кривая *1*), слабо зависящая от температуры. Это позволило сделать вывод, что кинетическая стадия разрушения определяется термоактивационным механизмом и характеризуется значением кинетических параметров V_0, γ и τ_0, совпадающих со значением тех же коэффициентов в квазистатическом режиме разрушения.

Обработка экспериментальных данных для меди (М1), никеля (ВТ14) и стали (ХВГ) позволила получить временную зависимость σ от τ, схематично показанную на рис. 7.2 кривой *2* (разброс экспериментальных данных пока не позволяет более точно представить кривую *2*). Для снижения τ использовались ударники с уменьшающейся длиной l_I, при этом соотношение длин сохранялось. Одновременно для получения откола увеличивалась пороговая скорость удара пластины v_f, чем достигалось повышение σ.

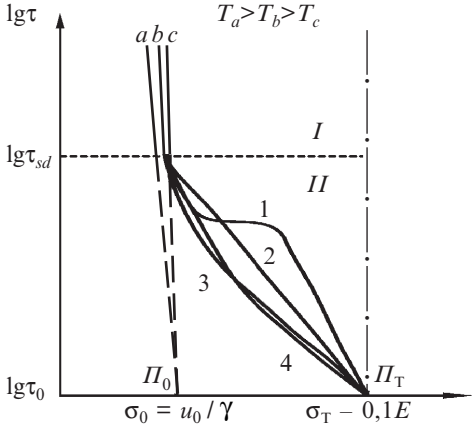


Рис. 7.2

В сравнении со статическими опытами при отколе возникает новая ситуация, когда возможно одновременное регулирование значений σ и τ. Выделим здесь два важных обстоятельства. Во-первых – кривая *2* при $\tau \to \tau_0$ идет к полюсу $П_т$, в котором $\sigma = \sigma_т$. Во-вторых – выбор скоростей удара $v > v_f$ для тех же пар пластин также ведет к отколу, но зависимость $\sigma(\tau)$ при этом будет иной.

Исследования в данном направлении были проведены на образцах из ПММА, алюминия и стали, причем в плоскости $(\sigma, \ln\tau)$ выделены две ветви, соответствующие начальному зарождению микроповреждений (σ_m) и пороговому отколу (σ_f). Их положение близко к кривым *2* и *3* на рис. 7.2. Выяснилось, что если фиксировать начальное повреждение и увеличивать скорость удара v, то (см. рис. 7.2) можно перейти к отколам без зарождения и развития повреждений. Но и тогда линия *3* должна перейти в линию *4*, а весь переход в целом от кривых *a*,*b* и *c* к полюсу $П_т$ может быть описан плавной кривой (например, огибающей прямые *3* и *4*).

В другом цикле работ данного направления процесс откольного разрушения разделяется на до- и закритическую стадии. Считается, что в докритической стадии происходит рост и накопление повреждений до момента τ^* – достижения значения максимального растягивающего напряжения σ^*, при-

нятого за критическое состояние. Величина σ^* определяется как откольная прочность. Закритическая стадия соответствует падению (в сечении откола) напряжения σ от σ^* до нуля. В докритической стадии предлагается ввести функцию повреждаемости φ, причем считается, что эта стадия протекает в соответствии с кинетической термофлуктуационной теорией [37].

По результатам исследований определена зависимость откольной прочности от скорости деформации $\sigma^* = f(\dot{\varepsilon})$ и дан анализ возможности экстраполяции полученной зависимости, с одной стороны, к величине теоретической прочности, а с другой – к величине квазистатической прочности. Предложенная зависимость $\sigma^*(\dot{\varepsilon})$ по характеру поведения близка к кривой *1* на рис. 7.2 и так же, как кривые на рисунке, имеет излом в переходной области.

В [38] описывается модель термоупруговязкопластической среды с учетом накопления повреждений. В качестве меры повреждении использовалась плотность субмикродефектов N, а критерием появления микродефектов является предельная мера N_p. Это и есть момент разделения разрушения на до- и закритические стадии, в которых соответственно растут суб- и микродефекты.

В закритической стадии предлагается выделить два этапа: первый, характеризующийся ростом истинных напряжений в волне растяжения от момента времени τ до τ^*, и второй, когда рост микроповреждений приводит к катастрофическому падению несущей способности сечения. Момент τ^* определяет не откольную прочность, а равновесие между ростом истинных напряжений и падением среднего по сечению напряжения, вызванного развитием микродефектов.

Существуют и другие представления, в которых многие факты временно́й зависимости прочности металлов объясняются дислокационным механизмом образования и накопления дефектов (как результата взаимодействия дислокаций с препятствиями и между собой), инициируемых пластической деформацией.

В [22, 23] ставится вопрос о том, что временно́й критерий (7.7) может быть результатом совмещения двух независимых соотношений: определяющего соотношения кинети-

ческой теории текучести и критерия разрушения по достижении критической пластической деформации. Этот критерий является временны́м деформационным критерием [6].

Следующей работой обобщающего характера была работа [39], в которой соотношение (7.7) было нормализовано относительно правой части и при $\sigma > \sigma_0 > 0$ получено выражение

$$\int_0^{t_f} \frac{(\sigma - \sigma_0)^\lambda}{k} dt = 1 \qquad (7.9)$$

Это соотношение вплотную подводит к возможности введения параметра или меры повреждаемости I_ω. Если считать, что подынтегральная функция в (7.9) описывает рост $\dot{\omega}$ повреждения , так что $\dot{\omega} = f(\sigma - \sigma_0)$, то формально из (7.9) следует критерий разрушения при накоплении меры повреждений до критической величины $\omega = 1$.

Подобная технология была реализована в [35], где был сделан еще один шаг, который заключался в учете обратного влияния повреждений на напряжение путем введения предложенного Р.И. Нигматулиным и Н.Х. Ахмадеевым среднего напряжения $\sigma = \sigma^0(1-\omega)$, где σ^0 – истинное напряжение в разрушаемой среде (($\sigma = 0$ при $\omega = 1$). Необходимость такого введения меры повреждения или функции повреждаемости исследователями давно и успешно развивалась в теории длительной прочности [31–33]. Таким образом, проведенные исследования привели к необходимости учета поврежденности материала в моделях разрушения.

Кинетические критерии разрушения. Первой полной и развернутой моделью откола с учетом образования и развития микроповреждений является модель *NAG* [27, 28, 40]. Она была построена на базе детальных экспериментальных исследований с количественным анализом микроповреждений в раличных сечениях образца. В модели выделяются два режима откола с повреждениями: вязкий, когда в материале растут микропоры сферической формы, и хрупкий, характеризующийся образованием плоских микротрещин в виде дисков. Кинетика вязкого разрушения была построена на основе наблюдений за разрушением алюминия и меди. Ис-

ходной посылкой при построении кинетики служило найденное распределение числа трещин N с радиусом R в виде

$$N_g(R) = N_0 \exp(-R/R_1),$$

где N_g – число пор с радиусом R; N_0 – общее число пор; R_1 – параметр распределения. Зная зависимость $N_g(R)$, легко определить общий объем пор по формуле $V_v = 8\pi N_0 R_1^3$.

Первое кинетическое соотношение в модели NAG относится к скорости зарождения пор

$$\dot{N} = N_0 \exp \frac{p_s - p_{n0}}{p_1} \text{ при } p_s > p_{n0}.$$

Здесь p_s – истинное давление растяжения; p_{n0} – порог зарождения пор; N_0, p_1 – константы материала (величины давлений должны браться по модулю, если считать, что давление растяжения меньше нуля). Зная $\dot{N}$, можно найти приращение объема пор по формуле $\Delta V_1 = 8\pi \dot{N} \Delta t R_1^3$.

Второе кинетическое соотношение касается скорости роста радиуса пор:

$$\dot{R} = \frac{p_s - p_{g0}}{4\eta} R.$$

где p_{g0} – пороговое давление роста пор; η – вязкость. Рост пор дает второе приращение объема ΔV_2. Общее приращение объема $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$.

Хрупкое разрушение, например в железе, в отличие от вязкого, разделяется на четыре стадии: зарождение (I) и рост (II) трещин, взаимодействие (III) трещин – коалесценция, дробление (IV) материала – фрагментация. Важным обстоятельством в данной кинетике является появление еще одной меры – углового положения трещины, регулируемого полярным и азимутальным углами φ и ψ. Таким образом, распределение плотности n или числа трещин N представляет собой функцию трех переменных p, φ и ψ. Специальная вычислительная процедура переводит непрерывную функцию N в дискретное распределение по элементам разбиения (i, j) области течения.

Зарождение и рост трещин (стадии I и II) определяются кинетическими функциями

$$\dot{N} = N_0 \exp \frac{\sigma_{\psi\psi} - \sigma_{n0}}{\sigma_1} \quad \text{и} \quad \dot{R} = T(\sigma - \sigma_{g0})R,$$

где $\sigma_{\psi\psi}$ – напряжение, перпендикулярное плоскости трещин; σ_{n0} и σ_{g0} – пороговые напряжения; T – коэффициент нарастания. По значениям $\dot{N}$ и $\dot{R}$ интегрированием находится общий объем трещин V_t.

Для стадии III вводится взаимодействие трещин. Полагая, что их зарождение и рост продолжаются, подсчитываем объем фрагмента V_f. На стадии IV трещины вступают в сильное взаимодействие; с помощью специальной процедуры на этом этапе подсчитываем окончательный объем фрагмента V_a. В модели предусматривается возможность вращения трещины при течении материала.

Параллельно с моделью *NAG* в [29] и последующих работах этого направления была разработана еще одна модель откольного разрушения, в которой предусмотрена возможность введения непрерывной меры повреждения для описания откольного разрушения в двух вариантах – при простом и сложном накоплениях повреждений.

Схема простого накопления базируется на экспериментальных фактах, свидетельствующих о том, что при большом времени действия нагрузки накапливается большое количество повреждений. Если считать, что время τ_0 необходимо для накопления повреждений уровня D_0, то гипотеза простого накопления подразумевает, что в течение интервала времени Δt образуются повреждения $\Delta D = D_0\, \Delta t/\tau_0$.

Эксперименты, в которых продолжительность фазы растяжения постоянна, а напряжение переменно, показали, что время τ_0 уменьшается с ростом σ, т.е. $\tau_0 = \tau_0(\sigma)$. Отсюда в соответствии с [29]

$$D = D_0 \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{t[\sigma(\tau)]}\, dt\,. \tag{7.10}$$

Особенность (7.10) заключается в постоянстве скорости накопления повреждений при фиксированном σ. Это легко увидеть, продифференцировав (7.10):

$$\dot{D} = D_0/t\,(\sigma) = \varphi(\sigma). \tag{7.11}$$

Критерий (7.10) включает в себя (7.9) [40] как частный случай, в котором $t(\sigma)$ изменяется обратно пропорционально избыточному растягивающему напряжению $(\sigma - \sigma_0)$ в степени λ (см. соотношение (7.9)).

Схема сложного накопления подразумевает, что скорость накопления параметра разрушения зависит от σ и имеющегося разрушения D, т.е. $\dot{D} = \varphi(\sigma, D)$ [27, 28]. В [27] рассмотрена общая теория сложного накопления и ее приближение при низком уровне разрушений, когда $D/D^* << 1$. Здесь D^* – уровень повреждений при отколе. Функцию $\varphi(\sigma, D)$ в данном случае можно разложить в ряд:

$$\varphi(\sigma, D) = \frac{D^*}{\tau_0}\left[\varphi_0(\sigma) + \varphi_1(\sigma)\frac{D}{D^*} + \varphi_2\left(\frac{D}{D^*}\right)^2 + \cdots\right]. \qquad (7.12)$$

Из (7.12) следует, что если ограничиться нулевым приближением, то получим (7.11). Включение следующего члена дает

$$\frac{\dot{D}}{D^*} = \frac{1}{\tau_0}\left[\varphi_0(\sigma) + \varphi_1(\sigma)\frac{D}{D^*}\right]. \qquad (7.13)$$

Соотношение (7.13) примечательно тем, что первый и второй члены правой части отождествляются соответственно со скоростями зарождения $\dot{N}$ (простое накопление) и роста $\dot{R}$ (сложное накопление) повреждений [27, 28]. С использованием схемы сложного накопления авторами данной модели были проанализированы экспериментальные результаты по отколу. Для описания разрушения образцов из бериллия предложена следующая кинетика роста повреждений:

$$\dot{D} = n\left[\frac{\alpha(\sigma - \sigma_0)}{(\sigma_c - \sigma_0)(D + \alpha\beta)^{n-1}}\right]^{1/n}, \qquad (7.14)$$

а для образцов из меди

$$\dot{D} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_c - \sigma}\right)^{\lambda}\frac{(D^* - D)^2}{D + D_0}. \qquad (7.15)$$

В формулах (7.14) и (7.15) σ_0, α, β, n, λ – константы материала; σ_c – предельная прочность; D_0 – начальное распределение повреждений.

Полную систему уравнений составляют кинетические уравнения, а также уравнения сохранения количества движения и энергии с привлечением второго закона термодинамики. Развитие разрушения задается как сложная функция скорости роста повреждений от основных переменных, характеризующих движение линейно-упругой среды от достигнутого разрушения. В свою очередь развитие разрушения вызывает отклик в материале, определяемый учетом полей разрушения в выписанных характеристических функциях.

Модели разрушения типа модели *NAG* требуют определения большого числа экспериментальных констант в кинетических соотношениях, что связано с трудностями и далеко не всегда осуществимо. Несмотря на это, кинетические модели являются на данном этапе единственным инструментом исследования для многих многомерных задач разрушения.

§ 7.2 Распространение волн в повреждаемой среде

Повреждаемую среду, в которой имеются микрополости, можно рассматривать как смесь двух фаз, каждая из которых занимает некоторую часть общего объема смеси V (на межфазных поверхностях макроскопические характеристики среды терпят разрыв). Первая фаза – неповрежденная часть несущей среды (называемой далее матрицей), занимающая объем V_m и характеризующаяся истинной плотностью ρ_0. Вторая фаза – микрополости, занимающие объем V_ξ с истинной плотностью материала полостей ρ_ξ^0 (например, газа), причем очевидно, что $\rho_\xi^0 << \rho_0$. Определим удельное объемное содержание микроповреждений как $\xi = V_\xi / V$, тогда для средней плотности повреждаемой среды ρ выполняется равенство

$$\rho = \rho_0(1-\xi) + \rho_\xi^0 \xi \cong \rho_0(1-\xi). \qquad (7.16)$$

Законы сохранения массы, импульса и энергии в одномерном случае для средних величин однородной повреждаемой среды можно представить в виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial v}{\partial r} = 0; \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial r}; \quad \rho_0 \frac{\partial e}{\partial t} = \sigma \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Здесь v – массовая скорость частиц смеси; e – внутренняя энергия; σ – осредненное напряжение в повреждаемой среде.

Осредненные характеристики представимы через соответствующие истинные величины e^0, σ^0 неповрежденного материала матрицы:

$$e = e^0 + e_\xi^0 + e_\xi^S; \quad \sigma = \sigma^0(1 - F(\xi)) + \sigma_\xi^0 \Phi(\xi), \qquad (7.17)$$

где e_ξ^0, σ_ξ^0 – удельная внутренняя энергия и напряжение для материала микрополостей объема V_ξ; e_ξ^S – энергия образования поверхностей при разрушении. Функции $F(\xi)$, $\Phi(\xi)$ в формулах (7.17) отражают геометрию повреждений, поскольку объем единичной микротрещины в виде диска меньше, чем объем сферической микропоры. При образовании плоских микротрещин ξ_c и сферических микропор ξ_p одинакового объемного содержания количество микротрещин N_c и их поверхность S_c (являющаяся межфазной в повреждаемой среде) превышают соответствующие величины N_p, S_p для микропор. Поэтому осредненное напряжение σ зависит от формы микроповреждений, а для микротрещин – и от их ориентации.

Фазы микроповреждений представляют собой растворенный в матрице газ или смесь газов, сопутствующих процессу изготовления конденсированной смеси. Для параметров этой фазы, если она химически инертна, можно считать, как и для плотности, справедливыми оценки: $e_\xi^0 << e^0; \sigma_\xi^0 << \sigma^0$. Вместе с тем при инициировании твердых взрывчатых веществ плотность, давление и внутренняя энергия образующихся газообразных продуктов сравнимы по порядку с соответствующими величинами твердой фазы и их следует учитывать.

Внутренняя энергия и напряжения в матрице определяются соотношениями

$$e^0 = e^0(\rho_0, T), \ \sigma^0 = -p^0(\rho_0, T) + \tau^0,$$

в которых функции $e^0(\rho_0, T)$, $p^0(\rho_0, T)$ могут быть найдены из уравнения состояния Ми-Грюнайзена. Для девиатора напряжений в упругой области справедлив закон Гука:

$$\dot{\tau} = -\frac{4}{3}\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\frac{\partial \rho^0}{\partial t} \ \text{ при } \ \tau < \tau_s. \qquad (7.18)$$

В области пластического течения в соответствии с условием текучести Мизеса девиатор $\tau^0 = \tau_s$.

В уравнении (7.18) μ и τ_s – эффективные модуль сдвига и предел текучести в макрочастице повреждаемой среды, учитывающие ослабление микроповреждениями и поэтому меньшие, чем соответствующие значения μ^0, τ_s^0 для неповрежденного материала. Положим, что они зависят от объемного содержания микроповреждений аналогично величине σ, т.е. $\mu = \mu^0(1 - F(\xi))$, $\tau_s = \tau_s^0(1 - F(\xi))$. Тогда соотношение (7.18) с учетом (7.16) и закона сохранения массы можно записать так:

$$\dot{\tau}^0 = \frac{4}{3}\mu\left(\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{1-\xi}\dot{\xi}\right), \tag{7.19}$$

откуда следует, что при определении девиатора τ^0 необходимо учитывать деформации за счет роста микропустот.

Будем считать, что предложенная модель справедлива до некоторого критического значения $\xi = \xi^*$ объемного содержания микроповреждений, начиная с которого происходит столь сильное ослабление прочности матрицы несущей среды, что ее скелет разрушается. Для функций $F(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ примем предположение:

$$F(\xi) = \Phi(\xi) = (\xi/\xi^*)^n, \quad n = \text{const}$$

Уравнения модели (7.16), (7.18) необходимо дополнить уравнениями кинетики роста микроповреждений

$$\dot{\xi} = f(\sigma^0, \xi, T_0, \eta_i), \tag{7.20}$$

где η_i – некоторые структурные параметры ($i = 1,2,...$).

Кинетику образования микроповреждений можно разбить на две стадии, т.е.

$$\dot{\xi} = \psi(\sigma^0, \xi_0, T_0, \eta_i) + f(\sigma^0, \xi). \tag{7.21}$$

Первая стадия – предварительный кинетический процесс, отвечающий образованию субмикрополостей размеров ξ ($\xi \ll \lambda$). На этой стадии под действием растягивающих напряжений σ^0 на имеющихся субмикродефектах твердого тела (частицы нерастворенных примесей, межзеренные поверхности и т.д.) в результате концентрации напряжений происходит нарушение сплошности несущей среды, а затем и их

раскрытие вместе с уже имеющимися в исходной среде зародышевыми субмикрополостями (газовые пузырьки и раковины) объемного содержания ξ_0.

На второй стадии происходит рост микроповреждений от субмикроразмеров до некоторых устойчивых микроразмеров λ. Образование макроповреждения с характерными размерами l в рамках данной модели не должно пониматься как рост единичной микрополости от размера λ до размера l. Макроразрушение в данной модели дает коллектив микроповреждений масштаба λ, когда будет достигнут критический уровень удельного объемного содержания $\xi^* = V_\xi^* / V$. В настоящее время, однако, для определения функции ψ практически нет опытных данных о параметрах разрушения на суб- и микроуровнях. Имеющийся экспериментальный материал в основном позволяет определить макроскопические параметры разрушения – длину отколовшегося слоя, его скорость – и лишь очень немногие работы содержат сведения о предельных размерах λ образующихся микроповреждений. Поэтому будем считать, что, когда в матрице несущей среды растягивающее напряжение σ^0 превышает некоторый уровень σ^L, образование микроповреждений происходит согласно кинетике

$$\dot{\xi} = f(\sigma^0 - \sigma^L, \xi) > 0 \tag{7.22}$$

при $\sigma^0 > \sigma^L$, $\xi < \xi^*$, где функцию f можно определить, моделируя условия реальных экспериментов по отколу. При таком подходе эта функция является интегральной характеристикой процесса разрушения. При $\xi = 0$ в макрочастице повреждаемой среды напряжение совпадает с истинным ($\sigma = \sigma^0$), а $F(\xi) = 0$. С ростом объема микроповреждений осредненное напряжение σ уменьшается и при значении $\xi = \xi^*$, когда $F(\xi) = 1$, напряжение становится равным нулю, что соответствует полному разрушению макрочастицы. С ростом ξ должен уменьшаться и пороговый уровень разразрушающих напряжений σ^L (по сравнению с уровнем, необходимым для образования повреждений в монолитном образце). Можно принять по аналогии с (7.17) $\sigma^L = \sigma^{0L}(1 - F(\xi))$, полагая, что в ослабленном образце дополнительные повреждения можно вызвать уже меньшими растягивающими усилиями.

Предложенная модель повреждаемой среды была использована в [30] для численного анализа откольного разрушения в железных образцах.

Разрушение повреждениями в армко-железе характеризуется образованием микротрещин в форме плоского диска и характеризуется как хрупкое, в отличие от вязкого разрушения, характерного для таких материалов, как алюминий и медь, где микроповреждения имеют вид почти сферических пор. Мишень из армко-железа нагружалась ударом алюминиевой пластины со скоростью ≈ 600 м/с. Опытным испытаниям подвергались три пары пластин $l_I - l_{III}$ с размерами: 5–10, 2–10, 2–20 мм, для которых емкостной методикой регистрировался профиль скорости внешней свободной поверхности мишени $W(t)$.

В модельных расчетах рассматривалось несколько вариантов кинетического уравнения, показавших, что с экспериментальными данными согласуется следующая кинетика:

$$\dot{\xi} = \frac{\sigma^0 - \sigma^L}{\tau\sigma^{0L}}(1+\xi) \text{ при } \sigma^0 > \sigma^L,\ \xi < \xi^*. \qquad (7.23)$$

Сооветствующее согласование расчетов (сплошные линии) и экспериментов (штриховые линии) представлено на рис. 7.3 при $\tau = 0{,}07$мкс, $\sigma^{0L} = 1{,}8$ ГПа, $\xi^* = 0{,}075$, $F(\xi) = (\xi/\xi^*)^{1/2}$, $e_\xi^S = 0$.

Большое рассогласование кривых *3* для мишени длиной 20 мм вызвано влиянием волн разгрузки с боковой поверх-

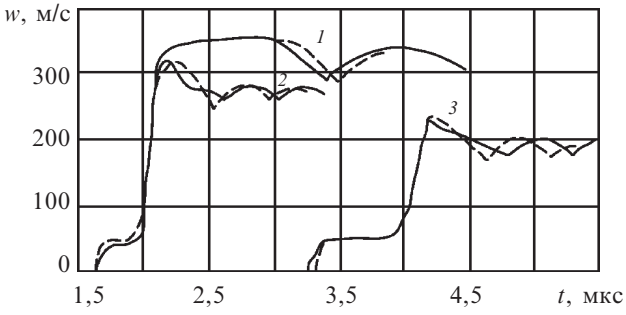


Рис. 7.3

ности. Анализ условий опытов показал, что реализуемая в них скорость удара v_0 больше соответствующей пороговой скорости v_f для испытываемых пластин. Для описания разрушений в более широком диапазоне нагружения необходима информация о соударении пластин с меньшими скоростями удара, когда реализуются частичные повреждения ($v_0 < v_f$) и начальный откол ($v_0 \approx v_f$).

На рис. 7.4, а показан полный импульс сжатия, сформировавшийся в мишени при испытании пластин с размерами 5–10. На эпюрах $\sigma(r)$ стрелками показано направление движения фронтов сжатия S_2 и разряжения R_1.

После выхода переднего фронта импульса сжатия S_2 на правую свободную поверхность мишени (эпюра $\sigma(r)$ при

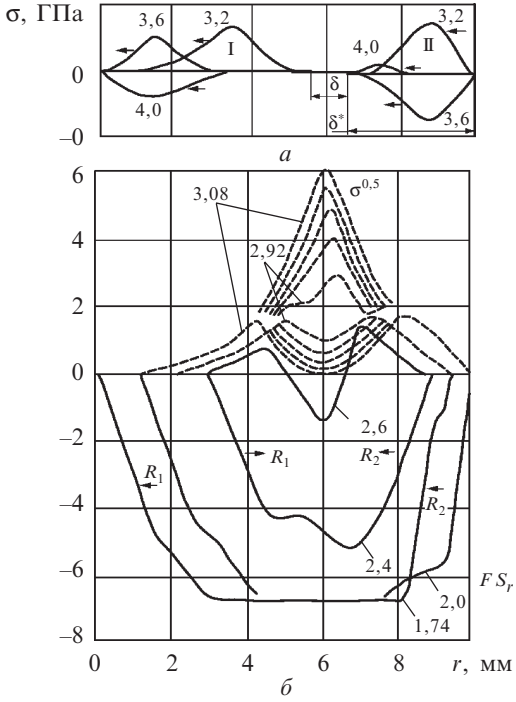


Рис. 7.4

t = 2 мкс) происходит формировние волны разгрузки R_2, движущейся назад. Положение встречных волн разряжения R_1 и R_2 показано эпюрой $\sigma(r)$ при t = 2,4 мкс. Взаимодействие волн R_1 и R_2 приводит к формированию импульса растяжения. Расчеты проводились как в предположении полной сохранности мишени ($\sigma^{0S}(r)$ пунктирные линии), так и для случая повреждаемой среды (штриховые линии, см. эпюры для моментов времени t = 2,92; 2,96; 3,04; 3,08 мкс (рис. 7.4, *б*). Из рисунка видно, что образующиеся микроповреждения сильно влияют на процесс соударения. Рост объемного удельного содержания микроповреждений в те же моменты времени, что и на рис. 7.4, показан на рис. 7.5.

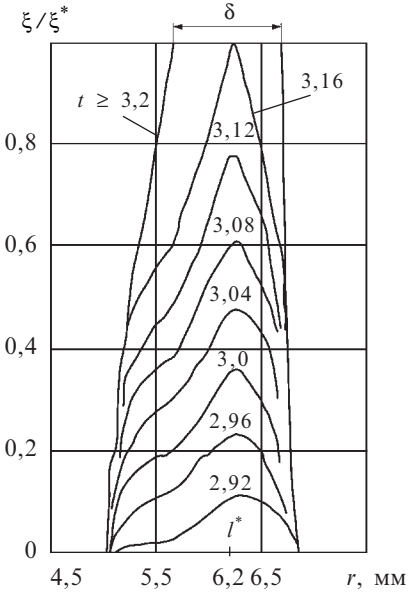


Рис.7.5

Как видно из эпюр объемного содержания повреждений (см. рис. 7.5), зона повреждений локализуется в средней части мишени, а наиболее опасное сечение находится на глубине l^* = 6,2 мм.

Эпюры $\sigma(r)$, $\xi(r)$ при t = 2,92 мкс показывают, что образование микроповреждений даже в очень малых количествах приводит к значительной релаксации напряжений $\sigma(r)$. В момент t = 3,16 мкс на глубине l^* происходят разрушение скелета матрицы мишени и образование сквозной макротрещины.

На рис. 7.4, *а* показаны область полного разрушения мишени δ и длина отлетающего слоя δ^*. Здесь же эпюрами $\sigma(r)$ показана дальнейшая эволюция разделившихся импульсов растяжения в оставшейся части мишени (I) и в отделившемся слое (II). При выходе импульса растяжения на внешнюю неповрежденную свободную поверхность FS_r происходит его отражение в виде импульса сжатия (t = 3,2 и t = 3,6 мкс). При возвратном движении и отражении импульса сжатия от внутренней свободной поверхности слоя δ^*, имеющего поврежденную трещиноватую структуру, наблюдается заметное ослабление вновь образовавшейся волны растяжения (см. t = 3,6 и t = 4,0 мкс).

На рис. 7.6 сопоставлены профили растягивающих напряжений в зависимости от времени в наиболее опасном

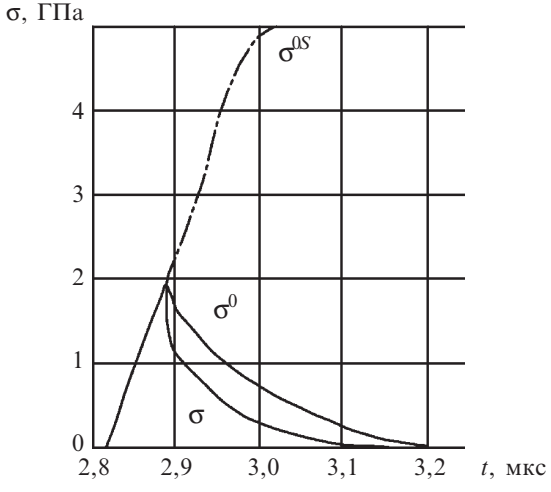


Рис. 7.6

сечении $r = l^* = 6{,}2$ мм. Штрихпунктирной линией изображен профиль истинного напряжения $\sigma^{0S}(t)$ в неразрушаемом материале; тонкой сплошной линией – значения истинных напряжений $\sigma^0(t)$, реализующихся в матрице повреждаемой среды; утолщенной линией – профиль среднего напряжения $\sigma(t)$ в макрочастице с учетом ослабляющего вклада повреждений. Именно в сечении, где реализуется максимум на эпюрах $\xi(r)$, напряжение $\sigma(t)$ падает и при $\xi = \xi^*$ становится равным нулю, хотя истинное напряжение $\sigma^0(t)$ в микрообъеме матрицы повреждаемой среды в этот момент отлично от нуля. В целом при затухании $\sigma^0(t)$ имеется некоторое запаздывание во времени относительно $\sigma(t)$.

Рассмотрим серию опытов, в которой мишень из стали марки Ст.3 различной длины (l_{II} = 5; 10; 20; 25; 30; 40 мм) нагружалась стальным ударником (l_I = 1,06 мм, v_0 = 960 м/с). На рис. 7.7 прямоугольниками (с учетом погрешности изме-

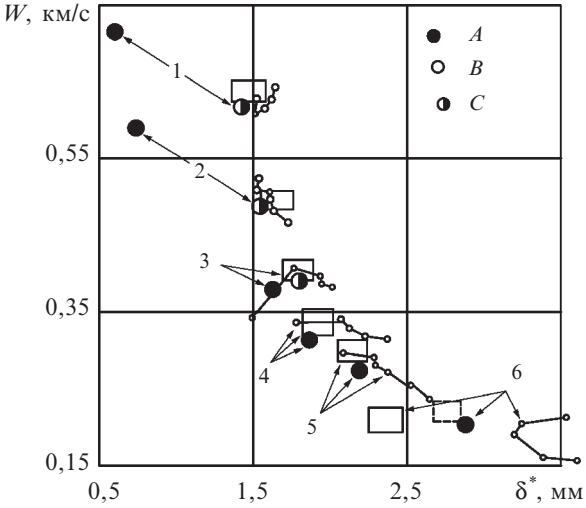


Рис.7.7

[1] *Рыбаков А.П.* ЖПМТФ. 1977. № 1. С. 151–153.

рения) представлены экспериментальные данные, обозначенные цифрами 1–6 соответственно длинам мишеней 5, 10, 20, 25, 30 и 40 мм. Точками *A* обозначены расчетные данные, полученные с использованием кинетики. Из рис. 7.7 видно, что удовлетворительное согласие имеется для экспериментов 4, 5 и 6, несколько худшее (по величине δ^*) для эксперимента 3 и значительное расхождение для экспериментов 1 и 2. Точками *B* отмечены результаты расчетов без учета кинетики по схеме мгновенного откола при разных σ^* (от 2 до 10 ГПа). Эти расчетные данные, в отличие от полученных с использованием кинетики разрушения, хорошо коррелируют с экспериментами 1 и 2, хуже с 3 и совсем плохо с 4, 5 и 6. Интересно отметить, что для эксперимента 1, где наблюдается гладкий откол, результаты расчета при разных σ^* (см. точки *B*) оказались очень близкими друг к другу, что свидетельствует о локализации области роста растягивающих напряжений. Откол, близкий к гладкому, имел место в эксперименте 2; в более длинных мишенях (эксперименты 3–6) отколы сопровождались образованием микроповреждений. В первых двух экспериментах оценка σ^* по расчетам дает величину 6 ГПа, для третьего – 3 ГПа и для остальных – 2 ГПа.

Приведенные факты свидетельствуют о том, что хотя схематизация мгновенного откола не отражает существа процессов накопления и образования микроповреждений, тем не менее при соответствующем подборе σ^* вполне пригодна для прогнозирования места откола при ударном нагружении.

Сопоставление на рис. 7.7 данных и их анализ дают сделать вывод, что рассматриваемые режимы откола – кинетический и мгновенный – должны быть взаимосвязаны, причем при больших амплитудах растягивающего импульса отрывной режим должен являться асимптотикой для кинетического.

Таким образом, кинетические модели разрушения позволяют достаточно полно учесть накопление повреждений и их эволюцию в процессе нагружения вплоть до разделения образца на части и возникновения поверхностей повторного откола, наблюдаемых в экспериментах. Это позволило построить модели разрушения для двух- и трехмерного нагружения.

§ 7.3 Модели континуального разрушения

Введение параметров поврежденности в систему внутренних переменных и использование термодинамических принципов механики сплошной среды делает возможным построение термодинамически корректных связанных моделей повреждаемых твердых тел. Одна из таких моделей развивалась учениками Х.А. Рахматулина (см. [44–52] и приведенную там библиографию). Ниже представлена модель среды с накоплением повреждений – термоупруговязкопластическая модель с двумя параметрами поврежденности, которая позволяет описывать микроразрушение как накопление микродефектов типа пор в областях интенсивного растяжения и их залечивание при сжатии, так и разрушение сдвигом [46–48]. При этом используется симметричный тензор поврежденности ω_{ij}.

Модель была предназначена для описания микроразрушений двух типов:

- вязкого с образованием микропор сферической формы;
- пластического с образованием полос адиабатического сдвига.

В качестве параметров поврежденности были выбраны два инварианта тензора ω_{ij}: скаляры $\omega = \omega_{kk}/3$ – объемная поврежденность и $\alpha = \sqrt{\omega'_{ij}\,\omega'_{ij}}$ – интенсивность девиатора тензора поврежденности ($\omega'_{ij} = \omega_{ij} - \omega\delta_{ij}$). При этом считалось, что параметр ω описывает накопление повреждений типа микропор в областях интенсивного растяжения, которые могут залечиваться при сжатии, а параметр α описывает сдвиговое разрушение.

Будем интерпретировать параметр ω как относительное уменьшение эффективной площади, несущей нагрузку, вследствие появления распределенных внутри образца микропор. Параметр ω можно считать объемным содержанием микропор в материале. В неповрежденном материале $\omega = \alpha = 0$, с накоплением повреждений величины ω и α растут, оставаясь меньше 1.

Система определяющих уравнений модели среды имеет следующий вид [48, 49]:

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma}{K} + \alpha_v (T - T_0) + \Lambda \int_0^{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} d\omega, \; e_{ij}^e = \frac{S_{ij}}{2\mu} + A \int_0^{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ij}} d\alpha,$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{S_{ij}}{2\eta} \frac{S_u - \sqrt{\frac{2}{3}} Y}{S_u} H\left(S_u - \sqrt{\frac{2}{3}} Y \right),$$

$$\dot{\omega} = \varphi(\omega, \sigma) = B\left(\frac{\sigma}{1-\omega} - \sigma_* \right) H\left(\frac{\sigma}{1-\omega} - \sigma_* \right) +$$

$$+ \omega \frac{\sigma - \sigma^+}{4\eta_0} H(\sigma - \sigma^+) + \omega \frac{\sigma - \sigma^-}{4\eta_0} H(\sigma^- - \sigma),$$

$$\sigma^+ = -\frac{2}{3} Y_0 \ln \omega, \quad \sigma^- = \frac{2}{3} Y_0 \ln \omega,$$

$$\dot{\alpha} = \psi(\omega, \alpha, S_u) = C\left(\frac{S_u}{(1-\omega)(1-\alpha)} - S_u^* \right) H\left(\frac{S_u}{(1-\omega)(1-\alpha)} - S_u^* \right),$$

$$K = K_0 (1 - \omega), \; \mu = \mu_0 (1 - \omega)(1 - \alpha),$$

$$\eta = \eta_0 (1 - \omega)(1 - \alpha), \; Y = Y_0 (1 - \omega)(1 - \alpha),$$

$$\rho c_\sigma \dot{T} + \alpha_v \dot{\sigma} T = \tau_{ij} \varepsilon_{ij}^p + \Lambda \dot{\omega}^2 + A \dot{\alpha}^2 - \operatorname{div} \vec{q}, \; \vec{q} = -k \operatorname{grad} T,$$

$$S_u = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \; \tau_{ij} = S_{ij} + \Gamma \varepsilon_{ij}^p.$$

Здесь $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p$ – напряжения, упругие и неупругие (вязкопластические) деформации соответственно ($\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + S_{ij}$, $\sigma = \sigma_{kk}/3$), при этом полные деформации ε_{ij} складываются из упругих ε_{ij}^e и неупругих ε_{ij}^e; T – абсолютная температура; $\vec{q}$ – тепловой поток; ρ – плотность; $\Gamma \geq 0$ – параметр деформационной анизотропии материала; $A, D, C, \Lambda, \sigma_*, S_u^*$ – константы материала, связанные с параметрами поврежденности; K_0, μ_0, η_0, Y_0 – объемный модуль, модуль сдвига, динамическая вязкость и статический предел текучести при простом растяжении для неповрежденного материала соответственно; c_σ – тепломкость при постоянных напряжениях; α_v – коэффициент

объемного расширения; k – коэффициент теплопроводности; $H(x)$ – единичная функция Хевисайда; точка над символом означает материальную производную по времени.

Кинетическое уравнение для объемной поврежденности ω состоит из трех слагаемых. Первое имеет вид уравнения Тулера – Бучера и описывает стадию зарождения и начального роста объемной поврежденности ω. Затем, по мере накопления ω, включается второй член, который описывает вязкий рост пор в областях растяжения материала. Третий член описывает вязкопластическое затекание пор при сжатии материала [46].

Отметим, что кинетическое уравнение для ω без первого члена получается при решении задачи динамики одной сферической поры внутреннего радиуса a и внешнего радиуса b в вязкопластическом несжимаемом материале при $\omega = (a/b)^3$.

Предел текучести Y_0, модуль сдвига μ_0 и динамическая вязкость η_0 могут зависеть от температуры, давления, других параметров состояния, например как в модели Штейнберга – Гуинана [44, 46].

Представленная модель является развитием модели упруговязкопластической среды типа Соколовского – Пэжины. Она учитывает тепловые эффекты, появление и накопление повреждений в областях интенсивного растяжения и их залечивание при сжатии, а также накопление повреждений при сдвиге. Механические, структурные и тепловые процессы взаимосвязанны.

Другой вариант модели повреждаемой среды – модель повреждаемой термоупругопластической среды, в основу которой положена теория течения типа Прандтля – Рейса с условием пластичности Мизеса. В этом случае третье уравнение из выше выписанной системы заменяется на следующие:

$$(\tau'_{ij})^{\nabla} + \lambda\tau'_{ij} = 2\mu_0\dot{e}_{ij}\ ,\ \tau'_{ij}\,\tau'_{ij} \le \frac{2}{3}Y_0^2\,.$$

Остальные уравнения такие же, как в первой модели. Значком ∇ обозначена яумановская производная по времени.

Критерий начала макроразрушения. Развитие интенсивного пластического течения, накопление микроструктурных повреждений является предразрушением материала. В качестве начала макроразрушения (появления трещин в матери-

але – новых свободных поверхностей) предлагается энтропийный критерий предельной удельной диссипации [44, 52]:

$$D = \int_0^{t_*} \frac{1}{\rho}(d_M + d_f + d_T)\,dt = D_*;$$

$$d_M = \tau_{ij}\,\varepsilon_{ij}^p\,.\;\; d_f = \Lambda\dot{\omega}^2 + A\dot{\alpha}^2,\; d_T = k(\mathrm{grad}\;T)^2 / T,$$

где t_* – время начала разрушения; D_* – константа материала (предельная удельная диссипация); d_M – механическая диссипация; d_f – диссипация континуального разрушения; d_T – термическая диссипация (в случае использования классического уравнения теплопроводности Фурье).

При появлении в теле зон больших растягивающих напряжений, как, например, в задаче плоского соударения пластин с откольным разрушением [44], основной вклад в диссипацию D дает член $\Lambda\dot{\omega}^2$ из d_f и d_M. В случае развитого сдвигового пластического течения по типу образования полос адиабатического сдвига так же, как в задаче выбивания «пробки» из преграды ударником с плоским передним срезом, основной вклад в диссипацию D дают члены $A\dot{\alpha}^2$ из d_f, d_M и d_T. В некоторой точке материала, где выполняется критерий разрушения, должна зародиться макротрещина, новая свободная поверхность, которая будет распространяться по телу. Задача расчета дальнейшего деформирования и разрушения становится самостоятельной проблемой вычислительной механики деформируемого твердого тела.

Методы расчета констант моделей повреждаемых сред. В модели таких сред входят «нестандартные» константы, связанные с параметрами поврежденности и подлежащие экспериментальному определению. В моделях с одним параметром поврежденности [44, 52] таких констант три. Кроме того, четвертой неизвестной константой является предельная удельная диссипация D_*. Для их определения использовался метод, основанный на численном и физическом моделировании процесса плоского соударения пластин с откольным разрушением [44, 52, 53]. Для модели пористой среды, предназначенной для описания динамики твердых топлив и ВВ, привлекалась также задача об ударном сжатии газонаполненной микропоры [53].

В модели с двумя параметрами поврежденности, представленной выше, таких констант уже семь: B, Λ, σ_*, A, C, S_u^*, D_*. Для их определения разработан метод, основанный на численном и физическом моделировании процессов квазидинамического кручения и растяжения тонкостенных трубчатых образцов с разрушением и последующей математической обработкой результатов численных и физических экспериментов [54]. Однако нам неизвестны опубликованные результаты таких экспериментов, которые позволили бы рассчитать константы для реальных материалов. Поэтому основным путем получения необходимых данных остаются уже отмеченные выше эксперименты по соударению пластин с отколом, проведенные в широком диапазоне скоростей соударения [55]. В частности, эти эксперименты были использованы в [56] для определения всех семи констант модели [49, 50].

Численное моделирование макроразрушения. Разработанные методы численного расчета динамического деформирования тел для в одно- , двух- и трехмерного случая разрушения вплоть до разделения тел на отдельные фрагменты основаны на процедуре перестройки расчетных лагранжевых сеток с явным выделением поверхностей разрушения [57–59]. Получены численные решения задач откольного разрушения при взрывном и ударном воздействиях, пробивания, в том числе наклонного, тонких преград. Исследовано распространение криволинейных трещин в нефтеносном пласте, который моделировался повреждаемой (микропористой) термоупруговязкопластической средой в процессе гидроразрыва пласта [60].

Особо отметим задачу нормального пробивания тонкой преграды деформируемым телом вращения сложной конструкции, решенную еще в 1980 г. под руководством академика Х.А. Рахматулина [61]. Преграда представляет собой круглую пластину, а ударник является оболочкой вращения переменной толщины с заполнителем. Типичная оболочка ударника состоит из головной части оживальной формы, переходящей вблизи носика в сферическую оболочку, и донной части той же формы, но малой кривизны, заканчивающейся жестким дном.

Задача динамики оболочки рассматривается как геометрически нелинейная в приближении С.П. Тимошенко. Пове-

дение материала оболочки описывается уравнениями теории малых упругопластических деформаций А.А. Ильюшина. При этом предполагаются разгрузка материала и возможность появления областей вторичных пластических деформаций. Заполнитель – линейно упругое тело. Учитываются также скольжение заполнителя вдоль внутренней поверхности оболочки, в том числе с трением, отрыв его от оболочки и восстановление контакта. Пластина, по которой производится удар, моделируется, как и корпус ударника, упругопластической оболочкой вращения. На контактной поверхности «ударник – преграда» ставятся граничные условия скольжения ударника вдоль преграды с трением. Описывается возможность разрушения тонкой преграды всех экспериментально наблюдаемых типов: прокол, выбивание пробки, лепестковое разрушение, отрыв лепестков.

Задача пробивания решается численно по явной конечно-разностной схеме типа Уилкинса. Из результатов решения этой задачи отметим один. Абсолютный максимум интенсивности деформаций в оболочке ударника $(\varepsilon_u)_{\max}$ достигается вблизи носика и с уменьшением скорости удара V_0 приближается к нему. При этом зависимость $(\varepsilon_u)_{\max}$ от V_0 не носит мотононно возрастающего характера. В частности, имеет место заметный всплеск функции $(\varepsilon_u)_{\max} = f\,(V_0)$ в области малых скоростей V_0 (порядка 200–250 м/с для рассмотренной конструкции). Объясняется это тем, что при таких скоростях значительно увеличиваются площадь области контакта ударника с преградой и продолжительность взаимодействия, хотя интегральная сила взаимодействия уменьшается.

Поскольку в качестве критерия разрушения оболочки ударника можно принять интенсивность деформаций, то напрашивается вывод: при $V_0 \approx$ 200–250 м/с должно произойти разрушение конструкции ударника, которое в случае дальнейшего увеличения скорости до величины порядка 450–500 м/с, не будет наблюдаться; при еще большем увеличении V_0 разрушение неизбежно. Такой теоретический результат нашел и экспериментальное подтверждение.

Идеи метода перестройки лагранжевых сеток были успешно использованы также при построении расчетных сеток

в двумерных областях сложной геометрии с выделением внутренних контактных границ раздела различных сред [62–67]. Дано обоснование корректности известной процедуры «приведения напряжений на поверхность текучести», используемой в численном методе Уилкинса [36], для упрочняющейся упругопластической среды в самом общем случае, когда предел текучести является функцией давления, плотности,-температуры, интенсивности пластических деформаций и, возможно, некоторых других параметров, как в модели Штейнберга–Гуинана [67]. Этим методом было решено большинство задач, затронутых в настоящем обзоре.

Метод Уилкинса для двух- и трехмерного пространства получил дальнейшее развитие в направлении учета сложных граничных условий на контактных поверхностях взаимодействующих тел (отрыв тел друг от друга, восстановление контакта, скольжение с трением), были введены специальные искусственные вязкости – тензорная, угловая, контурная. Кроме того, получены корректные граничные условия для задач с центральной и осевой симметриями при $r = 0$, где уравнения механики деформируемых сред имеют устранимую особенность типа 0/0 и предложены численные схемы для их реализации.

Указанные результаты позволяют составить на конкретных примерах некоторое представление о возможных приложениях моделей континуального разрушения. Подводя итоги, можно сказать следующее: при наличии экспериментальных данных, позволяющих определить набор постоянных величин, входящих в уравнения модели континуального разрушения, современными численными методами можно решать достаточно сложные задачи динамического нагружения.

Литература

1. *Гольденблат И.И., Копнов В.А.* Критерий прочности и пластичности конструкционных материалов. – М: Машиностроение, 1968. 191 с.

2. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Мир, 1969. 364 с.

3. *Поль Б.* Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение. – М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 336–520.

4. *Работнов Ю.Н.* Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1962. 456 с.

5. *Филоненко-Бородич М.М.* Механические теории прочности. – М.: Изд-во МГУ, 1961. 92 с.

6. *Никифоровский В.С., Шемякин Е.И.* Динамическое разрушение твердых тел. – Новосибирск; М: Наука, 1979.

7. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – М.; Л.: Судпромгиз, 1958. 372 с.

8. *Новожилов В.В.* О пластическом разрыхлении // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 681–689.

9. *Новожилов В.В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 212–222.

10. *Новожилов В.В.* О перспективах феноменологического подхода к проблеме разрушения // Механика деформируемых тел и конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. С 349–359.

11. *Броберг К.Б.* Ударные волны в упругой и упруго-пластической среде. – М.: Гостехиздат, 1959. 116 с.

12. *Glass C.M., Moss G.L., Golasky S.K.* Response of metals to high velocity deformation. – N.Y., 1961. P. 115–141.

13. *Зельдович Я.Б., Райзер Р.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Наука, 1966.

14. *Кольский Г.* Волны напряжений в твердых телах. – М.: ИЛ, 1955, 192 с.

15. *Райнхарт Дж., Пирсон Дж.* Поведение металлов при импульсивных нагрузках. – М.: ИЛ, 1958. 196 с.

16. *Райнхарт Дж., Пирсон Дж.* Взрывная обработка металлов. – М.: Мир, 1966. 392 с.

17. *Blinkow D.V., Keller D.V. Symp*. On Dynamic Behavior of Materials // ASTM. Spec. Tech. Publ. 1963. № 336. P. 252–263.

18. *Тарасов Б.А.* О количественном описании откольных повреждений // ЖПМТФ. 1973. № 6. С. 137–140.

19. *Никифоровский В.С.* Некоторые вопросы откольного разрушения в задачах механики горных пород. – Новосибирск: СО АН СССР, 1974. 27 с.

20. *Никифоровский В.С., Серяков В.М.* Откольные разрушения в телах с плоско-параллельными границами при динамических воздействиях // ФТРПИ. 1975. № 1. С. 28–32.

21. *Регель В.Р., Слуцкер А.И.* Кинетическая природа прочности твердых тел. – М.: Наука, 1974. 560 с.

22. *Скидмор И.* Ударные волны в твердых телах // Механика. 1968. № 4. С. 128–157.

23. *Фадеенко Ю.И.* Временные критерии разрушения в динамике твердого тела // Динамические задачи механики сплошной среды. 1977. Вып.32. С. 95–122.

24. *Фадеенко Ю.И.* Временные критерии разрушения взрывом // ПМТФ. 1977. № 6. С. 154–159.

25. *Smith J.N. Symp.* On Dynamic Behavior of Materials // ASTM, Spec. Tech. Publ. Philadelphia. 1963. № 336. P. 264–281.

26. *Журков С.Н., Нурзуллаев Б.Н.* Временная зависимость прочности твердых тел // ЖТФ. 1953. Т. 23. Вып. 10. С. 1677–1689.

27. *Журков С.Н., Томашевский Э.Е.* Временная зависимость прочности чистых материалов // Некоторые проблемы прочности твердого тела. – М.; Л., 1959. С. 68–75.

28. *Curran D. R.* Nonhydrodynamic Attenuation of Shock Waves in Aluminum // J. Appl. Phys. 1963. V. 34. № 9. P. 2677–2685.

29. *Curran D. R., Shockey D.A., Seamon L.* Dynamic fracture criteria for polycarbonate // J. Appl. Phys. 1973. V. 44. № 9. P. 4025–4038.

30. *Davison L., Stevens A.* Continuum Measures of Spall Damage // J. Appl. Phys. 1972. V. 43. № 3. P. 988–994.

31. *Ахмадеев Н.Х.* Динамическое разрушение твердых тел в волнах напряжений. – М.: УФА, 1988.

32. *Качанов Л.М.* О времени разрушения в условиях ползучести // Механика и машиностроение. 1958. № 8. С. 26–31.

33. *Работнов Ю.Н.* Механизм длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.

34. *Ильюшин А.А.* Об одной теории длительной прочности // Механика твердого тела. 1967. № 3. С. 21–35.

35. *Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В.* Нелинейная механика разрушения. – Самара: Изд-во Самар. ун-та, 2001.

36.*Волков И.А., Рузанов А.И.* Прикладные проблемы прочности и пластичности. – Горький, 1982. С. 30–36.

37. *Уилкинс М.* Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. С. 212–263.

38. *Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е.* Кинетическая природа прочности твердых тел. – М.: Наука, 1974. 560 с.

39. *Аптуков В.Н.* О термодинамике деформирования и разрушения твердых тел макротрещинами. – Свердловск, 1982.

40. *Gilman J.J., Tuler F.R.* // IJFM. 1970. V.6. № 2. P. 169–182.

41. *Tuler F.R. Butcher B.M.* // IJFM. 1968. V.4. № 4. P. 431–437.

42. *Coleman B.D., Gurtin H.E.* Thermodynamics with internal state variables // J. Chem. Phys. 1967. V. 47. № 2. C. 597–613.

43. *Кондауров В. И., Мухамедиев Ш.А., Никитин Л.В., Рыжак Е.И.* Механика разрушения горных пород. – М.: ИФЗ АН СССР, 1987.

44. *Кондауров В.И., Никитин Л.В.* Теоретические основы реологии геоматериалов. – М.: Наука, 1990.

45. *Киселев А.Б., Юмашев М.В.* Деформирование и разрушение при ударном нагружении. Модель повреждаемой термоупругопластической среды // ПМТФ. 1990. № 5. С. 116–123.

46. *Киселев А.Б., Юмашев М.В.* Уравнения состояния металлов при интенсивном динамическом нагружении. Модель повреждаемой термоупругопластической среды // Экстремальные уравнения состояния / Под ред. В.Е. Фортова и Е.А. Кузьменкова. – М.: ИВТАН, 1991. С. 202–209.

47. *Киселев А.Б., Юмашев М.В.* Математическая модель деформирования и разрушения твердого топлива при ударном нагружении // ПМТФ.1992. № 6. С. 126–134.

48. *Киселев А.Б., Юмашев М.В.* Численное исследование динамических процессов деформирования и микроразрушения повреждаемой термоупругопластической среды // Вестник МГУ. Матем. Механ. 1994. № 1. С. 69–77.

49. *Kiselev A.B., Yumashev M.V., Zeiensky A.S.* Mathematical modelling of dynamic processes of deformation and microfracture of thermoelastoplastic media // Advances in Fracture Resistance in Materials (Proc. of Eighth Int. Congress of Fracture). – New Delhi: McGraw Hill, 1996. V. 2. P. 281–286.

50. *Kiselev A.B.* Mathematical modelling of dynamical deforming and combined microfracture of damageable thermoelastoviscoplastic medium // Studies in Applied Mechanics 45: Advanced Methods in Materials Processing Defects. – Amsterdam: Elsevier, 1997. P. 43–50.

51. *Киселев А.Б.* Математическое моделирование динамического деформирования и комбинированного микроразрушения термоупруговязкопластической среды // Вестник МГУ. Матем. Механ. 1998. № 6. С. 32–40.

52. *Киселев А.Б.* Математическое моделирование динамических процессов необратимого деформирования и разрушения твердых тел // Математическое моделирование. 2000. № 6. С. 115–120.

53. *Киселев А.Б., Юмашев М.В.* О критериях динамического разрушения термоупругопластической среды // Вестник МГУ. Матем. Механ. 1990. № 4. С. 38–44.

54. *Киселев А.Б., Юмашев М.В.* Численное исследование ударного сжатия микропоры в термоупруговязкопластическом материале // Вестник МГУ. Матем. Механ. 1992. № 1. С. 78–83.

55. *Kiselev A.B., Yumashev M.V., Volod'ko O.V.* Deforming and fracture of metals. The model of damageable thermoelastoviscoplastic medium // Materials Processing Technology. 1998. V. 80–81. P. 585–590.

56. *Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортов В.Е.* Ударно-волновые явления в конденсированных средах. – М.: Янус-К, 1996.

57. Kiselev A.B., Lykyanov A.A. Mathematical modelling of irreversible deforming, micro- and macrofracture of solids and structures // J. of Forming Processes. 2002. V. 5. № 2. P. 3–4.

58. *Гулидов А.И., Шабалин И.И.* Численное моделирование криволинейной трещины откола при соударении пластин // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы IX Всес. конф. – Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986. С. 117–121.

59. *Фомин В.М., Гулидов А.И., Киселев А.Б.* и др.. Высокоскоростное взаимодействие тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.

60. *Киселев А.Б.* Численное моделирование в трехмерной постановке наклонного пробивания тонких преград // Численное решение задач волновой динамики. Математические исследования. – Кишинев: Штиинца, 1989. Вып.108. С. 19–26.

61. *Киселев А.Б., Лукьянов А.А., Тьерсилен М.* Численное моделирование распространения криволинейных трещин гидроразрыва // Вестник МГУ. Матем. Механ. 2004. № 1.

62. *Киселев А.Б., Максимов В.Ф.* Численное моделирование нормального пробивания тонкой преграды деформируемым телом вращения // МТТ. 1995. № 5. С. 162–171.

63. *Богданов В.И., Звягин А.В.* Штамповка взрывом // Вестник МГУ. Матем. Механ. 1990. № 2.

64. *Богданов В.И., Звягин А.В.* Метание пластины взрывом // Вестник МГУ. Матем. Механ. 1991. № 2.

65. *Богданов В.И., Звягин А.В.* Численное исследование пространственного проникания жесткого тела в упругопластическую плиту // Вестник МГУ. Матем. Механ. 1993. № 4.

66. *Киселев А.Б., Кабак Н.Е.* Метод построения расчетных сеток с выделением внутренних контактных границ // Моделирование в механике. 1990. Т. 4 (21). № 5. С. 96–110.

67. *Кабак Н.Е., Киселев А.Б., Максимов В.Ф.* Метод построения расчетных сеток в двумерных областях с выделением внутренних контактных границ // Вестник МГУ. 1992. № 3. С. 35–42.

68. *Киселев А.Б.* О численном интегрировании уравнений течения упрочняющейся упругопластической среды // Вестник МГУ. Матем. Механ. 1995. № 4. С. 71–74.

Глава 8

Распространение волн в упругой среде

Рассмотрение динамических задач прочности и разрушения для реальных конструкций во всей полноте в настоящее время и скорее всего в обозримом будущем – задача невыполнимая. Поэтому в исследованиях приходится разбивать решение динамической проблемы прочности на этапы. Цель этапа – получение информации для дальнейшего анализа. Каждый последующий этап, как правило, предполагает усложнение физической модели явления, но уже не для всей задачи в целом, а для выделенных в результате первого этапа областей экстремального поведения среды.

В предыдущих главах было показано, что разрушение материала начинается в областях значительных растягивающих и сдвиговых напряжений, если они сохраняют свои большие значения в течение времени, достаточного для формирования микро- и макротрещин. Поэтому весьма важен этап исследования, использующий упругую модель среды и позволяющий выделить опасные с точки зрения разрушения области.

Не менее важны для задач динамической прочности тел и конструкций проблемы потери устойчивости и резонансные явления. Для них первостепенную роль играет задача определения собственных частот, которые помимо геометрии зависят от скорости волн в этих конструкциях.

Динамика упругих тел во многом определяется распространением и взаимодействием волн с границами рассматриваемых тел конкретной геометрии. Границы могут различаться физическими условиями, которые должны быть на них выполнены.

Цель данной главы – ознакомление с основными эффектами, возникающими при распространении упругих волн и их взаимодействии с границами разного типа. Вопросы динамики упругих сред рассматривались многими авторами [1–6]. В указанных источниках можно ознакомиться с историей исследований и методами решения динамических задач.

§ 8.1. Волны в неограниченнной, изотропной, линейно-упругой среде. Основные характеристики волн

Рассмотрим изотропную линейно-упругую среду. В случае малых перемещений и деформаций модель, описывающая движение такой среды, задается:

• уравнением движения в проекции на i-ую ось

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i, \tag{8.1}$$

или в векторном виде $\rho \ddot{\vec{u}} = \operatorname{div} \vec{\vec{P}} + \vec{f}$;

• законом Гука для изотропной упругой среды

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}; \tag{8.2}$$

• выражениями для компонент тензора деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{8.3}$$

где ρ – плотность среды; u_i – компоненты вектора перемещения; $\vec{\vec{P}} = \sigma_{ij} e_i e_j$ – тензор напряжений с симметричной матрицей $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$; f_i – компоненты плотности объемных сил; ε_{ij} – компоненты тензора малых деформаций; λ, μ – упругие модули среды (μ – модуль сдвига).

После последовательной подстановки деформаций (8.3) в (8.2) и затем напряжений (8.2) в уравнения движения (8.3) получим уравнения движения упругой среды в перемещениях:

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) u_{kk,i} + \mu u_{i,jj} + f_i \text{ (в проекциях)}, \tag{8.4}$$

$$\rho \ddot{\vec{u}} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \vec{f} \text{ (в векторном виде)}. \tag{8.4'}$$

Если воспользоваться операторным тождеством $\Delta \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}$, уравнение (8.4) можно представить в эквивалентной форме:

$$\rho \ddot{\vec{u}} = (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \vec{f}. \tag{8.5}$$

Будем искать решение уравнения (8.4) в виде

$$\vec{u} = \vec{U}^0 F(\vec{n}_i x_i - ct), \tag{8.6}$$

где $\vec{U}^0$ – постоянный единичный вектор поляризации волны; $F(\xi)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция; $\vec{n}$ – постоянный единичный вектор. Поскольку уравнение $n_i x_i - ct =$

$=\text{const}$ представляет плоскость, движущуюся по нормали $\vec{n} = n_i e_i$ со скоростью c, такое решение называется *плоской волной*.

С учетом того, что $\dot{u}_i = -cF'U_i^0$, $u_{i,j} = F'U_i^0 n_j$, $n_k n_k = 1$, подстановка (8.6) в (8.4) дает соотношение

$$\rho\, c^2 F''\, U_i^0 = (\lambda+\mu)\, F''\, U_j^0\, n_j n_i + \mu F''\, U_i^0\, n_k n_k .$$

После простых преобразований приходим к системе уравнений

$$((\lambda+\mu)\, n_j n_i + \mu\,\delta_{ji} - \rho\, c^2 \delta_{ji})\, U_j^0 = 0. \qquad (8.7)$$

Полученная однородная система уравнений (8.7) имеет отличное от нуля решение только в том случае, когда ее определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} [(\lambda+\mu)n_1^2+\mu-\rho c^2] & (\lambda+\mu)n_1 n_2 & (\lambda+\mu)n_1 n_3 \\ (\lambda+\mu)n_1 n_2 & [(\lambda+\mu)n_2^2+\mu-\rho c^2] & (\lambda+\mu)n_2 n_3 \\ (\lambda+\mu)n_1 n_3 & (\lambda+\mu)n_2 n_3 & [(\lambda+\mu)n_3^2+\mu-\rho c^2] \end{vmatrix} = 0. \quad (8.8)$$

Отсюда следует, что вектор поляризации является собственным вектором матрицы

$$B = \begin{vmatrix} [(\lambda+\mu)n_1^2+\mu] & (\lambda+\mu)n_1 n_2 & (\lambda+\mu)n_1 n_3 \\ (\lambda+\mu)n_1 n_2 & [(\lambda+\mu)n_2^2+\mu] & (\lambda+\mu)n_2 n_3 \\ (\lambda+\mu)n_1 n_3 & (\lambda+\mu)n_2 n_3 & [(\lambda+\mu)n_3^2+\mu] \end{vmatrix},$$

а величина ρc^2 играет роль собственного значения.

Подставим в качестве вектора поляризации $\vec{U}^0 = \vec{n}$, тогда уравнение (8.7) выполнится тождественно при $\rho c^2 = \lambda + 2\mu$ или $c = \pm\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$.

Если взять в качестве вектора поляризации вектор, ортогональный вектору $\vec{n}$, то уравнение (8.7) также выполнено тождественно при $\rho c^2 = \mu$ или $c = \pm\sqrt{\mu/\rho}$. Это означает, что реализуется вырожденный случай, когда второе собственное значение является кратным корнем уравнения, поскольку

именно в этом случае любой вектор, ортогональный направлению $\vec{n}$, будет собственным. Этот результат можно получить прямым вычислением, упростив выкладки выбором системы координат. Ориентируем систему координат так, чтобы нормаль была направлена по оси x_1, тогда $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$.

Уравнение (8.8) имеет вид

$$\begin{vmatrix} [(\lambda+2\mu-\rho c^2] & 0 & 0 \\ 0 & [\mu-\rho c^2] & 0 \\ 0 & 0 & [\mu-\rho c^2] \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $(\rho c^2)_1 = \lambda + 2\mu$, $(\rho c^2)_{2,3} = \mu$.

Таким образом, плоские волны в неограниченной изотропной упругой среде могут быть только волнами двух типов:

- продольной поляризации, имеющие скорость

$$c_p = a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}; \tag{8.9}$$

- поперечной поляризации, имеющие скорость

$$c_S = b = \sqrt{\mu/\rho}. \tag{8.10}$$

Поскольку в выбранной системе координат решение имеет вид

- $u_1(x_1 - ct)$, $u_2 = u_3 \equiv 0$ (для продольных волн);
- $u_2(x_1 - ct)$, $u_1 = u_3 \equiv 0$ (для поперечных волн),

то отсюда следует, что на фронте продольных волны $\operatorname{div}\overline{u} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{11} \neq 0$, а на фронте поперечных волн $\operatorname{div}\overline{u} = 0$. Таким образом, продольная волна несет изменение объема, а поперечная – изменение формы при сохранении объема.

Рассмотрим волны произвольной геометрии фронта, для чего используем представление векторного поля в виде суммы двух полей. При этом воспользуемся линейностью уравнений. Любое непрерывное, ограниченное в области векторное поле $\vec{A}$ можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей:

$$\vec{A} = \operatorname{grad} Q + \operatorname{rot} \vec{W}, \ \operatorname{div} \vec{W} = 0. \tag{8.11}$$

Действительно, применяя к (8.11) сначала операцию div, а затем rot, для определения функции Q и вектор-функции $\vec{W}$ получим уравнения Пуассона:

$$\Delta Q = \operatorname{div}\vec{A}\,;\ \Delta\vec{W} = -\operatorname{rot}\vec{A}\,,$$

имеющие аналитическое решение:

$$\Delta F = g\,,\ \ F = -\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{g(\bar{\xi})d\xi_1\xi_2\xi_3}{R(\vec{x},\vec{\xi})},$$

$$R(\vec{x},\vec{\xi}) = \sqrt{(x_k - \xi_k)(x_k - \xi_k)}.$$

Воспользуемся представлением (8.11) для поля перемещений

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\ \varphi + \operatorname{rot}\ \vec{\psi},\ \operatorname{div}\ \vec{\psi} = 0 \tag{8.12}$$

и поля массовых сил

$$\vec{f} = \operatorname{grad}\ \theta + \operatorname{rot}\ \vec{X},\ \operatorname{div}\ \vec{X} = 0.$$

После подстановки данных представлений в уравнение (8.4′) и применения к нему операции div получим

$$\Delta(\rho\ddot{\varphi} - (\lambda + 2\mu)\Delta\varphi - \theta) = 0. \tag{8.13}$$

Подставим (8.12) в (8.5) и применим операцию rot. Тогда

$$\Delta(\rho\ddot{\vec{\psi}} - \mu\,\Delta\vec{\psi} - \vec{X}) = 0. \tag{8.14}$$

Уравнения (8.13), (8.14) приводят к выводу о том, что стоящие в скобках функции являются гармоническими во всем пространстве. Это означает, что они равны постоянной величине, которую, не теряя общности, можно принять равной нулю. Учитывая (8.9), (8.10), получим:

$$\ddot{\varphi} = a^2\Delta\varphi + \theta/\rho;\ \ \ddot{\vec{\psi}} = b^2\Delta\vec{\psi} + \vec{X}/\rho. \tag{8.15}$$

Если применить к уравнению (8.4) операцию div, получим для относительного изменения объема $\varepsilon = \varepsilon_{kk}$ волновое уравнение, где скорость волны равна скорости продольных волн:

$$\ddot{\varepsilon} = a^2\Delta\varepsilon + \operatorname{div}\ \vec{f}/\rho. \tag{8.16}$$

Если применить к уравнению (8.4) операцию 1/2rot, то для вектора поворота $\vec{\omega} = 1/2\,rot\ \vec{u}$ получим волновое уравнение, где скорость возмущений равна скорости поперечных волн:

$$\ddot{\vec{\omega}} = b^2 \Delta\vec{\omega} + rot\ \vec{f}/\rho. \qquad (8.16')$$

Таким образом, из (8.16) следует, что, как и в случае плоских волн, продольные волны изменяют объем, а поперечные волны – форму.

Одномерное волновое уравнение. Рассмотрим плоскую продольную волну в упругой среде в отсутствии объемных сил, движущуюся в направлении оси x. Тогда согласно (8.15) она описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad (8.17)$$

общее решение которого представляет собой сумму двух бегущих в противоположном направлении волн:

$$\varphi = f_1(x - at) + f_2(x + at).$$

При этом профиль и амплитуда волны не меняются. Будем искать ограниченные решения методом Фурье путем разделения переменных $\varphi = \Phi(x)T(t)$, при этом получим

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = a^2 \frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} = -\vec{\omega}^2,$$

откуда $\varphi = A\sin(kx \pm \vec{\omega}t)$, $k = \vec{\omega}/a$.

Величины, входящие в данное решение, имеют следующий физический смысл: $\vec{\omega}$ – круговая частота колебаний; k – волновое число. С помощью этих величин можно определить: $\lambda = 2\pi/k$ – длину волны; $T = 2\pi/\vec{\omega}$ – период колебаний; $f = 1/T$ – частоту колебаний.

Групповая скорость волн. Как правило, любое возмущение приводит к возникновению группы волн, имеющих разные частоты, амплитуды и волновые числа. Представим возмущения интегралом Фурье по переменной k:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(\omega t - kx)} dk,$$

где $A(k)$ – спектральная плотность амплитуды волнового пакета. Если фазовая скорость волн зависит от частоты, то среда в которой распространяются волны обладает диспер-

сией волн. В среде с дисперсией пакет волн размывается по мере их распространения, поскольку скорость волн зависит от их длины. Рассмотрим пакет волн в среде с дисперсией.

Пусть величина спектральной плотности $A(k)$ имеет существенную величину лишь в окрестности некоторого волнового числа $k_0 = \omega_0 / c(\omega_0)$, тогда частоту колебаний можно разложить в окрестности k_0, ограничившись первым членом разложения:

$$\omega(k) \cong \omega_0 + \frac{d\omega}{dk}_{|\,k=k_0}(k - k_0).$$

Введем величину

$$V_G = (d\omega/dk)_{k=k_0}, \tag{8.18}$$

имеющую размерность скорости. Тогда спектральное представление пакета волн примет следующий вид:

$$u(x,t) \cong \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\exp[i(\omega_0 t + V_G(k-k_0)t - kx)]\,dk =$$

$$= \exp[i\,(\omega_0 - k_0 V_G)\,t]\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\,e^{-ik\,(x - V_G t)}dk.$$

Если ввести обозначения $u(x,0) = F(x)$, $\Omega_0 = \omega_0 - k_0 V_G$, то его можно представить в форме

$$u(x,t) \cong \exp(i\,\Omega_0\,t)\;F(x - V_G t). \tag{8.19}$$

Выражение (8.19) показывает, что за время t группа волн смещается на расстояние $V_G\,t$, т.е. движется со скоростью V_G, поэтому эту скорость называют *групповой.*

Другой метод получения групповой скорости волн связан с исследованием движения точек, в которых амплитуда волн максимальна. Величина $\varphi = \omega(k)t - kx$ называется *фазой волны*. Поскольку амплитуда должна быть максимальной, то волны с волновыми числами, близкими к величине k_0, должны обладать одинаковой фазой. Отсюда следует, что

$$\varphi(k) = \omega(k)t - kx = \text{const} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dk} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} t - x = 0 \Rightarrow x/t = V_G.$$

Такой прием исследования пакета волн называется *методом стационарной фазы.* Он тоже приводит к выводу, что

основная часть волнового пакета перемещается со скоростью, равной V_G, т.е. с определенной по формуле (8.18) групповой скоростью.

В случае безграничной линейно-упругой среды полученные нами фазовые скорости продольных и поперечных волн не зависят от частоты, поэтому дисперсии волн в безграничной среде нет.

Влияние геометрии фронта волны. Мы рассмотрели плоские волны, но это идеализация. Поскольку возмущения всегда производятся в ограниченной области среды, то и фронты волн всегда имеют кривизну. Исследуем влияние геометрии фронта волны на примере сферических волн.

Рассмотрим продольные волны со сферической симметрией:

$$\varphi(x,y,z,t)=\varphi(R,t),\quad R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Поскольку $\partial\varphi/\partial x=\partial\varphi/\partial R\cdot x/R$,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{x^2}{R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}-\frac{x^2}{R^2}.$$

Отсюда волновое уравнение будет иметь вид

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}.$$

Замена искомой функции $\varphi(R,t)=p(R,t)/R$ приводит к знакомому волновому уравнению вида (8.17) для новой функции

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 p}{\partial R^2},$$

откуда следует, что общим решением в случае сферической симметрии будет сумма сходящихся и расходящихся сферических волн:

$$\varphi(R,t)=\frac{f_1(R-at)}{R}+\frac{f_2(R+at)}{R}.$$

Таким образом, для расходящихся волн амплитуда убывает, а для сходящихся – возрастает, как $1/R$. Физически это следует из того, что энергия, приходящаяся на единицу площади поверхности фронта, должна убывать для расходящихся и возрастать для сходящихся волн.

§ 8.2. Волны в неограниченной анизотропной линейно-упругой среде

Рассмотрев распространение малых возмущений в неограниченной изотропной упругой среде, мы убедились в том, что в ней возможны волны только двух типов – с продольной и поперечной поляризациями. Скорости волн не зависят от направления фронта волны и вполне определяются набором упругих постоянных и плотностью среды.

Волны в анизотропной упругой среде. Напомним коротко основные положения, используемые в модели упругой среды. Напряжения в такой среде при постоянной температуре определяются только деформациями, т.е.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}). \tag{8.20}$$

Раскладывая (8.20) в ряд, получим:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(0) + \left.\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\right|_{\varepsilon_{ij}=0} \varepsilon_{kl} + 0(\varepsilon).$$

Набор постоянных величин – $E_{ijk} = \partial\sigma_{ij} / \partial\varepsilon_{kl}$ при $\varepsilon_{kl} = 0$ образует тензор четвертого ранга, называемый *тензором упругих модулей*.

Таким образом, в случае произвольной упругой среды обобщенный закон Гука имеет вид

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}. \tag{8.21}$$

Для анизотропного тела тензор обладает следующими симметриями:

$E_{ijkl} = E_{ijlk}$, т.е. $k \leftrightarrow l$, как следствие симметрии тензора деформаций;

$E_{ijkl} = E_{jikl}$, т.е. $i \leftrightarrow j$, как следствие симметрии тензора напряжений.

Эти соотношения симметрии сводят количество независимых компонент тензора упругих модулей с 81 до 36. В шестимерном пространстве деформаций и напряжений, если принять следующую смену индексов (будем обозначать новые индексы римскими цифрами)

(11) = I, (22) = II, (33) = III, (23) = (32) = IV,

$$(31) = (13) = \mathrm{V},\ (12) = (21) = \mathrm{VI},$$

закон Гука (см. (8.21)) можно переписать в виде

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta}\,\varepsilon_\beta,\ (\alpha,\beta = \mathrm{I},\cdots,\mathrm{VI})\,. \tag{8.22}$$

В статике элементарная работа, совершаемая внешними массовыми ρg_i и поверхностными $P_i = \sigma_{ij}\,n_j$ силами над упругим телом и определяемая уравнением

$$\delta W = \int\limits_v \rho g_i\,du_i\,dv + \int\limits_v P_i\,du_i\,ds = \int\limits_v \left(\rho g_i\,du_i + \frac{\partial\left(\sigma_{ij}\,du_i\right)}{dx_i}\right)dv =$$

$$= \int\limits_v \left(\rho g_i + \frac{\partial\,\sigma_{ij}}{dx_i}\right)du_i\,dv + \int\limits_v \sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij}\,dv = \int\limits_v \sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij}\,dv\,,$$

накапливается в нем в виде потенциальной энергии, так как в силу уравнений равновесия

$$\rho g_i + \frac{\partial\,\sigma_{ij}}{dx_i} = 0.$$

Изменение внутренней энергии упругого тела определяется уравнением притока тепла для единицы объема

$$dU = \delta W + \delta Q^{(e)}.$$

Согласно первому началу термодинамики внутренняя энергия является функцией состояния тела, а dU полным дифференциалом, тогда как величины δW и $\delta Q^{(e)}$ по отдельности не будут полными дифференциалами. Из второго начала термодинамики для обратимых процессов следует соотношение $\delta Q^{(e)} = TdS$, где T – абсолютная температура, а S – энтропия. Тогда для единицы объема

$$dU = TdS + \sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij}\,. \tag{8.23}$$

Таким образом, внутренняя энергия деформированного тела является функцией энтропии и деформаций. Следовательно, в силу уравнения (8.23) напряжения и температура будут ее частными производными:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}},\ T = \frac{\partial U}{\partial S}. \tag{8.24}$$

Из (8.24), учитывая определение модулей упругости, получим

$$E_{ijkl} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij}\, \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = E_{klij} \qquad (8.25)$$

откуда следует еще одна симметрия тензора упругих постоянных $E_{ijkl} = E_{klij}$, т.е. $ij \leftrightarrow kl$ как следствие равенства смешанных производных энергии по деформациям. Симметрии (8.25) называются *соотношениями Максвелла*. Поскольку при распространении волн за период колебаний приток тепла практически равен нулю, т.е. процесс можно считать адиабатическим, именно эти упругие модули определяют скорость распространения волн в упругой среде. Симметрия Максвелла позволяет определить количество независимых модулей упругости в самом общем случае анизотропии, поскольку приводит к симметрии матрицы $C_{\alpha\beta}$ в записи (8.22).

Таким образом, для произвольного анизотропного тела число упругих модулей равно 21. При наличии дополнительных симметрий, обусловленных физическими свойствами среды, количество независимых модулей уменьшается.

В случае изотропной среды количество упругих модулей равно двум и тензор упругих модулей имеет следующий вид:

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk}). \qquad (8.26)$$

Преобразуем правую часть уравнений движения упругой среды

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j},$$

используя закон Гука в форме (8.21) и выражения деформаций через перемещения (8.3):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} E_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\, \partial x_l} + \frac{1}{2} E_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j\, \partial x_k} = E_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j\, \partial x_k}.$$

Тогда уравнения движения можно переписать в форме:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = E_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}. \qquad (8.27)$$

Будем искать решение уравнений (8.27) в форме бегущей плоской волны

$$u_i = U_i^0 F(\vec{x}\,\vec{n} - ct), \tag{8.28}$$

где $\vec{U}^0$ – вектор поляризации, $\vec{n}$ – нормаль к фронту волны, c – фазовая скорость волн.

Подстановка (8.28) в (8.27) приводит к уравнениям

$$\rho c^2 U_i^0 = U_l^0 E_{ijkl} n_j n_k$$

или, если ввести симметричный тензор Кристофеля $T_{il} = E_{ijkl}\, n_j\, n_l$

$$\rho c^2 U_i^0 = T_{il}\, U_l^0, \Rightarrow \left(T_{il} - \rho c^2 \delta_{il}\right) U_i^0 = 0. \tag{8.29}$$

Таким образом, величина ρc^2 является собственным значением введенного симметричного тензора второго ранга $\vec{\vec{T}}$, а вектор поляризации $\vec{U}_0$ соответственно будет собственным вектором этого тензора. Из общей теории следует, что для симметричного тензора существуют три собственных значения. Если мы покажем, что они положительны, то каждому собственному значению будет соответствовать своя фазовая скорость волн. Для этого воспользуемся тем, что плотность упругой энергии $U = 1/(2E_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl})$ является положительной величиной для любого симметричного тензора ε_{ij}. Произвольный тензор можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}),$$

$$a^+_{ij_{ij}} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right),\ a^-_{ij_{ij}} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right).$$

Если учесть, что свертка симметричного и антисимметричного тензоров равна нулю, то

$$E_{ijkl} a_{ij}\, a_{kl} = E_{ijkll}\,(a^+_{ij} + a^-_{ij})(a^+_{kl} + a^-_{kl}) = E_{ijkll} a^+_{ij}\, a^+_{kl} \geq 0. \tag{8.30}$$

Рассмотрим в качестве тензора $\vec{\vec{a}}$ тензор с компонентами $a_{ij} = U_i^0 n_j$. После умножения уравнения (8.29) на величину U_i^0, с учетом единичности вектора поляризации в силу неравенства (8.30) получим

$$\rho c^2 = T_{il} U_i^0 U_l^0 = U_i^0 n_j E_{ijkl} U_l^0 n_k = E_{ijkl} a_{ij} a_{lk} > 0.$$

Таким образом, можно считать доказанным, что в анизотропной среде есть три типа волн, скорость которых определяется тензором упругих модулей и нормалью к фронту, поскольку тензор Кристофеля T_{ij} зависит от нормали. В каждом направлении могут распространяться три волны. При этом вектор поляризации в общем случае не обязан совпадать с нормалью или быть перпендикулярным к ней, как это было для изотропной среды. Ту волну, для которой угол между векторамим поляризации и нормали является самым меньшим из трех, принято называть *квазипродольной*, а две другие – *квазипоперечными*. Обычно квазипродольная волна является и самой быстрой. Для анизотропной среды точечное возмущение приведет к возникновению несимметричных волновых фронтов, так как в каждом направлении скорость волн будет иметь свое, отличное от скорости волн в других направлениях значение.

Распространение упругих волн сопровождается переносом энергии. Рассмотрим кинетическую энергию среды. В случае динамического процесса работа, совершаемая над телом внешними силами, может быть представлена формулой:

$$\delta W = \int_{V_0} \left(\rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) du_i \, dv + \int_{V_0} \sigma_{ij} \, d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dv .$$

Поскольку выражение, стоящее в скобках в первом интеграле, согласно (8.20) равно $\rho \ddot{u}_i$, можно записать так:

$$\delta W = \int_{V_0} \left(d\left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 \right) + dU\big|_S \right) dv. \qquad (8.31)$$

Работа, определяемая (8.31), затрачивается на изменение кинетической и внутренней энергии среды. В то же время часть этой работы связана с работой поверхностных сил:

$$\delta \Phi = \int_S P_i(\vec{n}) \, du_i \, dS = \int_S \sigma_{ij} \, n_j \, du_i \, dS .$$

Тогда скорость изменения энергии за счет мощности поверхностных сил будет обусловлена выражением

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int_S \sigma_{ij}\, n_j\, \frac{\partial u_i}{\partial t}\, dS.$$

Фактически скорость изменения энергии определяется вектором

$$\vec{B}_i = -\sigma_{ij}\, \frac{\partial u_j}{\partial t}, \tag{8.32}$$

который называется *вектором потока энергии Умова–Пойнтинга*. Его проекция на нормаль к поверхности дает поток энергии через единицу поверхности в единицу времени.

Вектор

$$\overline{V}^{(e)} = \vec{B} / E, \tag{8.33}$$

где E – полная энергия, называется *вектором скорости потока энергии*. Для плоской волны получим:

- плотность кинетической энергии $E_c = \frac{1}{2}\rho c^2 F'^2$;
- плотность потенциальной энергии

$$\Phi = \frac{1}{2} E_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \frac{1}{2} E_{ijk}\, U_i^0 U_k^0 n_j n_l F'^2.$$

С учетом уравнения (8.29) плотность потенциальной энергии можно переписать в форме

$$\Phi = \frac{1}{2} E_{ijkl} U_i^0 U_k^0 n_j n_l F'^2 = \frac{1}{2} U_i^0 T_{il} U_l^0 F'^2 = \frac{1}{2}\rho c^2 F'^2.$$

Из полученных выражений следует, что плотность потенциальной упругой энергии и плотность кинетической энергии для плоской волны совпадают по величине. Таким образом, плотность полной энергии будет равна удвоенной величине любой из них:

$$E = \rho c^2 F'^2, \tag{8.34}$$

а вектор Умова-Пойнтинга для плоской волны

$$B_i = -\sigma_{ij}\, \frac{\partial u_j}{\partial t} = -E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \dot{u}_j = c\, E_{ijkll} U_j^0 U_l^0 n_k F'^2. \tag{8.35}$$

Из (8.34), (8.35) и определения (8.33) можно получить

$$\vec{V}^{(e)} \vec{n} = \overline{B} \vec{n} / E = \rho c^3 F'^2 / (\rho c^2 F'^2) = c,$$

т.е. проекция вектора скорости переноса энергии на нормаль к фронту равна фазовой скорости волны. Отсюда следует, что скорость переноса энергии не меньше фазовой скорости волны. Скорость $\vec{V}^{(e)}$ дает направление переноса энергии, т.е. направление акустического луча. В том случае, когда это направление перпендикулярно фронту волны, считается, что распространяется «чистая» мода.

Для геометрической иллюстрации волновых свойств можно рассмотреть несколько характерных поверхностей.

1. Поверхность, образованная концами вектора $\vec{C} = c\vec{n}$, называется *поверхностью скоростей*. Для изотропной среды эта поверхность состоит из двух коаксиальных сфер.

2. Геометрическое место концов вектора $\vec{L} = \vec{n}/c$ называется *поверхностью обратных скоростей*.

3. Геометрическое место точек, занимаемых концом вектора $\vec{N} = \vec{V}^{(e)}$, для всех направлений распространения волны называется *волновой поверхностью*.

Все эти поверхности связаны с распространением волн для данной анизотропной среды и обладают рядом интересных свойств. Поверхности скоростей и обратных скоростей связаны друг с другом операцией инверсии относительно единичной сферы, так как $\vec{C}\vec{L} = c\vec{n}\cdot\vec{n}/c = 1$.

Покажем, что вектор скорости переноса энергии перпендикулярен к поверхности обратных скоростей. Для этого найдем вектор касательный к поверхности обратных скоростей:

$$d\vec{L} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial n_k} dn_k, \quad \frac{\partial L_i}{\partial n_k} = \frac{\partial}{\partial n_k}\left(\frac{n_i}{c}\right) = \frac{\delta_{ik}}{c} - \frac{n_i}{c^2}\frac{\partial c}{\partial n_k}.$$

С другой стороны, имеем цепочку равенств:

$$\rho c^2 U_i^0 = U_l^0 E_{ijkl} n_j n_k \Rightarrow \rho c^2 = U_l^0 E_{ijkl} n_j n_k U_i^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial n_k} = \frac{1}{\rho c} U_l^0 E_{ijkl} n_j U_i^0;$$

$$B_i = -\sigma_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} = -E_{ijkl}\varepsilon_{kl}\dot{u}_j = cE_{ijkll} U_j^0 U_l^0 n_k F'^2,$$

$$E = \rho c^2 F'^2, \; V_i^{(e)} = \frac{1}{\rho c} E_{ijkl} U_j^0 U_l^0 n_k.$$

Отсюда следует, что

$$V_k^{(e)} = \frac{\partial c}{\partial n_k}. \tag{8.36}$$

Учитывая равенство (8.36), получим требуемое свойство:

$$d\vec{L} \cdot \vec{V}^{(e)} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial n_k} dn_k \cdot \vec{V}^{(e)},$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial n_k} dn_k V_i^{(e)} = \frac{1}{c}\left(V_k^{(e)} - \frac{n_i V_i^{(e)}}{c} \frac{\partial c}{\partial n_k} \right) \partial n_k = \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial n_k} \partial n_k - \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial n_k} \partial n_k = 0.$$

Из доказанного свойства следует, что знание поверхности обратных скоростей позволяет определить направление вектора скорости переноса энергии.

Покажем, что скорость переноса энергии совпадает с групповой скоростью. Поскольку определение фазовой скорости сводится к решению уравнения

$$\det (E_{ijkl}\, n_j\, n_k - \rho c^2 \delta_{ij}) = 0,$$

то скорость является однородной функцией переменных n_i: $c = f(n_i)$.

Если умножить каждую строку матрицы определителя на k^2 и учесть, что $\omega = kc$, получим в точности такую же функциональную зависимость:

$$\omega = f(k_i), \;\; k_i = kn_i.$$

Отсюда следует, что

$$V_i^G = \frac{\partial \omega}{\partial k_i} = \frac{\partial c}{\partial n_i} = \vec{V}_i^{(e)}. \tag{8.37}$$

Таким образом, согласно (8.37) групповая скорость совпадает со скоростью переноса энергии.

Волновая поверхность дает геометрическое место точек, до которых дойдут колебания от точечного источника за единицу времени, поэтому она также называется *поверхностью равных фаз*. Одним из важных свойств этой поверхности является то, что направление распространения плоской волны со скоростью переноса энергии $\vec{V}^{(e)}$ перпендикулярно волновой поверхности. Действительно, поскольку

$$\vec{N}\cdot\vec{L}=\vec{V}^{(e)}\,\vec{n}/c=c/c=1,\ \ \vec{V}^{(e)}d\vec{L}=0, d\left(\vec{L}\,\vec{V}^{(e)}\right)=\vec{L}\,d\vec{V}^{(e)}=0,$$

то $\vec{n}=c\vec{L}\perp d\vec{V}^{(e)}$. Другими словами, плоскость фронта волны всегда касательна к волновой поверхности в данной точке. Волновая поверхность и поверхность скоростей тесно связаны, так как проекция вектора переноса скорости на нормаль к фронту равна фазовой скорости. Таким образом, поверхность скоростей может быть образована ортогональными проекциями точки возмущений на множество плоскостей, касательных к волновой поверхности. Они совпадают в направлениях чистых мод, ибо в этом случае $\vec{V}^{(e)}=c\vec{n}$.

§ 8.3 Взаимодействие волн с границей раздела двух сред

При прохождении плоской монохроматической упругой волны с определенной поляризацией через границу двух разных упругих сред в общем случае возможно возникновение отраженных и преломленных волн всех типов. Например, падающая продольная волна может порождать квазипродольные и квазипоперечные отраженные и преломленные волны. В изотропном случае возникают продольные и поперечные волны, а их поляризация – чисто продольная или чисто поперечная. Амплитуды волн и их параметры зависят от типа граничных условий на поверхности раздела. В общем случае возможны разные типы граничных условий, например проскальзывание одной среды относительно другой при непрерывности нормального перемещения и вектора напряжений. Мы ограничимся случаем граничных условий типа «прилипания», когда на границе раздела непрерывны все компоненты вектора перемещений и вектора напряжений.

Примем следующие обозначения: все характеристики отраженной волны будут иметь верхний индекс «R_k», где k принимает значение 1 для квазипродольных волн, а 2 и 3 для квазипоперечных быстрой и медленной волн. Аналогично все характеристики преломленной волны будут иметь верхний индекс «T_k», а характеристики падающей волны – «I» (ее тип оговаривается отдельно).

Общие свойства волн, взаимодействующих с границей раздела сред. Рассмотрим падение волны на границу раздела

сред в случае, когда эта граница является плоскостью. Не ограничивая общности, можно поместить начало координат в этой плоскости. Тогда уравнение плоскости с единичным вектором нормали $\vec{l}$ будет иметь вид $\vec{l}\vec{x} = 0$. Граничные условия прилипания требуют, чтобы в каждой точке этой плоскости в каждый момент времени выполнялись условия непрерывности векторов перемещений и векторов напряжений. Пусть $P_i = \sigma_{ij} l_j$ – компоненты вектора напряжений на площадке с нормалью $\vec{l}$. Тогда из граничных условий имеем:

$$\begin{aligned} u_i^{(I)} + \sum_{k=1}^{3} u_i^{(R_k)} &= \sum_{k=1}^{3} u_i^{(T_k)}; \\ P_i^{(I)} + \sum_{k=1}^{3} P_i^{(R_k)} &= \sum_{k=1}^{3} P_i^{(T_k)}. \end{aligned} \tag{8.38}$$

Если рассматривать монохроматические волны, условие непрерывности вектора перемещений с учетом (8.38) примет вид:

$$\begin{aligned} &A^{(I)} U_i^{0(I)} \exp[i(\vec{k}^{(I)}\vec{x} - \omega^{(I)}t)] + \\ &+ \sum_{k=1}^{3} A^{(R_k)} U_i^{0(R_k)} \exp[i(\vec{k}^{(R_k)}\vec{x} - \omega^{(R_k)}t)] = \\ &= \sum_{k=1}^{3} A^{(T_k)} U_i^{0(T_k)} \exp[i(\vec{k}^{(T_k)}\vec{x} - \omega^{(T_k)}t)]. \end{aligned} \tag{8.39}$$

Отметим, что функции $e^{i\omega_1 t}$, $e^{i\omega_2 t}$ являются линейно независимымыми при $\omega_1 \neq \omega_2$ Поскольку условие (8.39) должно выполняться в любой момент времени, то это возможно только при равенствах

$$\omega^{(I)} = \omega^{(R_k)} = \omega^{(T_k)} = \omega. \tag{8.40}$$

Условие (8.40) отражает одно из общих свойств волнового взаимодействия: *при отражении и преломлении волн их частота не меняется*.

Аналогично рассуждая о том, что в фиксированный момент времени в любой точке плоскости $\vec{l}\vec{x} = 0$ должны выполняться условия (8.39), получим:

$$\vec{k}^{(I)}\vec{x} = \vec{k}^{(R_k)}\vec{x} = \vec{k}^{(T_k)}\vec{x}.$$

Эти условия при $\vec{l}\vec{x} = 0$ можно переписать следующим образом:

$$(\vec{k}^{(R_m)} - \vec{k}^{(I)})\vec{x} = 0; \quad (\vec{k}^{(T_m)} - \vec{k}^{(I)})\vec{x} = 0 . \qquad (8.41)$$

Из условий (8.41) следует, что векторы $(\vec{k}^{(R_m)} - \vec{k}^{(I)})$, $(\vec{k}^{(T_m)} - \vec{k}^{(I)})$ должны быть перпендикулярны самой плоскости раздела сред, т.е. параллельны вектору $\vec{l}$. Отсюда следуют два общих свойства волнового взаимодействия:

1. *Волновые векторы отраженных и преломленных волн всегда расположены в плоскости, определяемой вектором падающей волны и вектором нормали к поверхности раздела.*

2. *Проекции всех волновых векторов на поверхность раздела одинаковы*, т.е.

$$k^{(I)} \sin\theta^{(I)} = k^{(R_m)} \sin\theta^{(R_m)} = k^{(T_m)} \sin\theta^{(T_m)}, \qquad (8.42)$$

где $\theta^{(I)}, \theta^{(R)}, \theta^{(T)}$ – углы падения, отражения и преломления (рис. 8.1).

Поскольку частоты всех волн равны между собой, а фазовая скорость, волновое число и частота связаны зависимостью $\omega = kc$, из (8.42) следует закон «отражения – преломления»:

$$\frac{\sin\theta^{(I)}}{c(\theta^{(I)})} = \frac{\sin\theta^{(R_m)}}{c(\theta^{(R_m)})} = \frac{\sin\theta^{(T_m)}}{c(\theta^{(T_m)})}. \qquad (8.43)$$

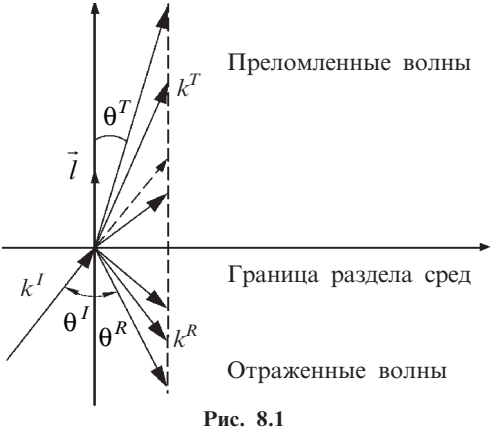


Рис. 8.1

Для изотропной среды он будет иметь более простой вид:

$$\frac{\sin\theta^{(I)}}{c^{(I)}} = \frac{\sin\alpha^{(R)}}{a^{(R)}} = \frac{\sin\beta^{(R)}}{b} = \frac{\sin\alpha^{(T)}}{a^{(T)}} = \frac{\sin\beta^{(T)}}{b^{(T)}}, \quad (8.44)$$

где $\alpha^{(R)}, \beta^{(R)}$ – углы отражения продольных и поперечных волн; $\alpha^{(T)}, \beta^{(T)}$ – углы преломления продольных и поперечных волн соответственно.

Удобными для анализа отражения и преломления волн являются поверхности обратных скоростей. На рис.8.2 схематично приведены примерные поверхности обратных скоростей для кубического кристалла кремния, граничащего с изотропной средой – плавленным кварцем. Падающая квазипродольная волна порождает отраженные квазипродольную и квазипоперечную волны, а также продольную и поперечную преломленные волны в изотропной среде; отраженная волна с поляризацией, перпендикулярной плоскости падения, не отражается, так как смещение падающей волны не содержит компоненты вдоль этого направления.

Построение поверхностей обратных скоростей позволяет также определить скорости переноса энергии для каждой из волн, поскольку вектор скорости переноса энергии перпендикулярен поверхности обратных скоростей.

Возможны различные случаи геометрического расположения поверхностей обратных скоростей и волновых векторов. Допустим, что перпендикуляр на границу раздела, проходящий через концы векторов обратной скорости, не пересекает одну из поверхностей обратных скоростей. Это озна-

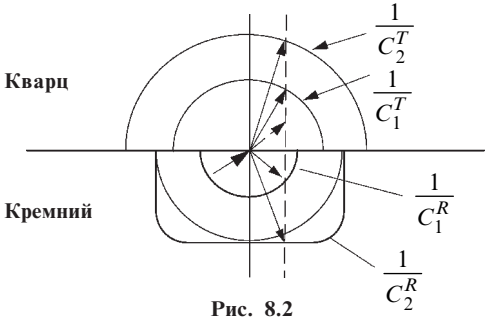


Рис. 8.2

чает, что амплитуда этой волны быстро убывает. Аналитически это выражается мнимым решением дисперсионного уравнения для прошедшей волны

$$\left(k^{(T)}\right)^2 = \left(k_\tau^{(T)}\right)^2 + \left(k_n^{(T)}\right)^2,$$

при этом критический угол падения $\theta_c^{(I)}$, при котром $k_n^{(T)} = 0$ и $\theta^{(T)} = \pi/2$, определяется соотношением

$$\sin\theta_c^{(I)} = \frac{c^{(I)}(\theta_c^{(I)})}{c^{(T)}(\pi/2)}.$$

Рассмотрим несколько примеров взаимодействия волн с границами раздела в изотропных средах.

1. *Падение волны поперечной поляризации с вектором поляризации, перпендикулярным плоскости падения.* Выберем оси координат так, чтобы плоскость падения соответствовала плоскости Oxy, а граница раздела плоскости – $y = 0$. При таком выборе осей координат нормаль к границе раздела соответствует орту оси y, а единственным отличным от нуля перемещением будет перемещение по оси z. Пусть: k – волновое число падающей волны; β – угол падения; k_1 – волновое число отраженной волны; b_1 – скорость поперечных волн в упругой среде падающей волны; β_1 – угол отражения; k_2 – волновое число преломленной волны; b_2 – скорость поперечных волн в упругой среде преломленной волны; β_2 – угол преломления; μ_1, μ_2 – модули сдвига упругих сред. Таким образом, решение можно искать в виде:

$$\begin{aligned} u_3^{(I)} &= A^{(I)}\exp[i\,k(x\sin\beta + y\cos\beta - b_1 t)]; \\ u_3^{(R)} &= A^{(R)}\exp[i\,k_1(x\sin\beta_1 - y\cos\beta_1 - b_1 t)]; \\ u_3^{(T)} &= A^{(T)}\exp[i\,k_2(x\sin\beta_2 + y\cos\beta_2 - b_2 t)]. \end{aligned} \tag{8.45}$$

Из условия (8.42) следует, что $k\sin\beta = k_1\sin\beta_1 = k_2\sin\beta_2 = K$. Из закона «отражения – преломления» (см. (8.44)) следует, что

$$\frac{1}{V} = \frac{\sin\beta}{b_1} = \frac{\sin\beta_1}{b_1} = \frac{\sin\beta_2}{b_2} \Rightarrow \beta_1 = \beta.$$

Учитывая это, можно переписать решение (8.45) в таком виде:

$$u_3^{(I)} = A^{(I)}\exp[i\,K(x + y\ \mathrm{ctg}\,\beta_1 - Vt)];$$

$$u_3^{(R)} = A^{(R)}\exp[i\,K(x - y\ \mathrm{ctg}\,\beta_1 - Vt)]; \qquad (8.46)$$

$$u_3^{(T)} = A^{(T)}\exp[i\,K(x + y\ \mathrm{ctg}\,\beta_2 - Vt)].$$

Тогда равенство перемещений (3.9) при $y = 0\pm$ дает уравнение

$$A^{(I)} + A^{(R)} = A^{(T)}. \qquad (8.47)$$

Отличными от нуля компонентами тензора деформаций будут

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_3}{\partial y}.$$

Соответствующими отличными от нуля будут компоненты тензора напряжений $\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu\varepsilon_{xz}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu\varepsilon_{yz}$. При этом единственным, отличным от нуля компонентом вектора напряжений на границе раздела будет σ_{yz}. Из условия непрерывности вектора напряжений имеем:

$$\mu_1 A^{(I)}\mathrm{ctg}\beta_1 - \mu_1 A^{(R)}\mathrm{ctg}\beta_1 = \mu_2 A^{(T)}\mathrm{ctg}\beta_2. \qquad (8.48)$$

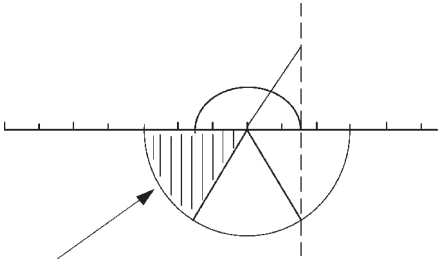
Решая систему уравнений (8.47), (8.48) относительно амплитуд отраженных и преломленных волн, получим:

$$\frac{A^{(R)}}{A^{(I)}} = \frac{\mu_1\,\mathrm{ctg}\,\beta_1 - \mu_2\,\mathrm{ctg}\,\beta_2}{\mu_1\,\mathrm{ctg}\,\beta_1 + \mu_2\,\mathrm{ctg}\,\beta_2}; \qquad (8.49)$$

$$\frac{A^{(T)}}{A^{(I)}} = \frac{2\mu_1\,\mathrm{ctg}\,\beta_1}{\mu_1\,\mathrm{ctg}\,\beta_1 + \mu_2\,\mathrm{ctg}\,\beta_2}. \qquad (8.50)$$

Рассмотрим два предельных случая, когда в (8.49), (8.50) $\mu_2 \to \infty$ и $\mu_2 \to 0$. Первый случай соответствует падению волны на жесткую стенку, а второй – падению волны на свободную поверхность. В первом случае получим в результате предельного перехода $A^{(R)}/A^{(I)} = -1$, во втором $A^{(R)}/A^{(I)} = 1$. Регулярного преломления может не существовать. Например, когда скорость волн во второй среде в 2 раза больше, чем

скорость волн в первой среде, т.е. $b_2 = 2b_1$, существует критический угол падения, при превышении которого регулярного преломления не будет (рис. 8.3).



Углы падения с полным отражением

Рис. 8.3

Падение продольной волны на границу раздела двух сред. Рассмотрим падение продольной волны на границу раздела двух сред под заданным углом $\alpha^{(I)} = \alpha^{(R_1)} = \alpha_1$. Обозначим угол отражения поперечной волны $\alpha^{(R_2)} = \beta_1$, а углы преломления продольной и поперечной волн соответственно через $\alpha^{(T_1)} = \alpha_2, \alpha^{(T_2)} = \beta_2$. Тогда решение можно искать в виде

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}(\vec{e}_z\psi),\ \ u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y},\ u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Потенциалы падающей, отраженных и преломленных волн записываются в виде:

- при $y < 0$

$$\varphi^{(I)} = A^{(I)}\exp[i\,K(x + \operatorname{ctg}\alpha_1 y - Vt)],$$

$$\varphi^{(R)} = A^{(R)}\exp[i\,K(x - \operatorname{ctg}\alpha_1 y - Vt)],$$

$$\psi^{(R)} = B^{(R)}\exp[i\,K(x - \operatorname{ctg}\beta_1 y - Vt)];$$

- при $y > 0$

$$\varphi^{(T)} = A^{(T)}\exp[i\,K(x + \operatorname{ctg}\alpha_2 y - Vt)],$$

$$\psi^{(T)} = B^{(T)}\exp[i\,K(x - \operatorname{ctg}\beta_2 y - Vt)].$$

При этом параметры связаны зависимостями

$$K = k^{(I)}\sin\alpha_1 = k^{(R)}\sin\alpha^{(R)} = k^{(T)}\sin\alpha^{(T)},$$

$$\frac{1}{V} = \frac{\sin\alpha_1}{a_1} = \frac{\sin\beta_1}{b_1} = \frac{\sin\alpha_2}{a_2} = \frac{\sin\beta_2}{b_2}.$$

Тогда перемещения по разные стороны от границы раздела будут равны:

• при $y = 0^-$

$$\begin{aligned} u_x &= i\,K\exp[i\,K(x - Vt)]\,(A^{(I)} + A^{(R)} - \operatorname{ctg}\beta_1 B^{(R)}),\\ u_y &= i\,K\exp[i\,K(x - Vt)]\,(\operatorname{ctg}\alpha_1 A^{(I)} - \operatorname{ctg}\alpha_1 A^{(R)} - B^{(R)}). \end{aligned} \tag{8.51}$$

• при $y = 0^+$

$$\begin{aligned} u_x &= i\,K\exp[i\,K(x - Vt)]\,(A^{(T)} + \operatorname{ctg}\beta_2 B^{(T)}),\\ u_y &= i\,K\exp[i\,K(x - Vt)]\,(\operatorname{ctg}\alpha_2 A^{(T)} - B^{(T)}). \end{aligned} \tag{8.52}$$

Выражения для напряжений через потенциалы имеют вид:

$$\sigma_{xx} = \lambda\Delta\varphi + 2\mu\varphi_{,xx} + 2\mu\psi_{,xy};$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\Delta\varphi + 2\mu\varphi_{,yy} + 2\mu\psi_{,xy};$$

$$\sigma_{xy} = \mu(2\varphi_{,xy} + \psi_{,yy} - \psi_{,xx}).$$

Подстановка в них потенциалов приводит к следующим значениям наряжений на границе:

• при $y = 0^-$

$$\sigma_{xx} = (i\,K)^2\exp[i\,K(x - Vt)]\,[\lambda_1(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha_1)(A^{(I)} + A^{(R)}) +$$

$$+ 2\mu_1(A^{(I)} + A^{(R)}) - 2\mu_1\operatorname{ctg}\beta_1 B^{(R)}],$$

$$\sigma_{yy} = (i\,K)^2\exp[i\,K(x - Vt)]\,[\lambda_1(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha_1)(A^{(I)} + A^{(R)}) +$$

$$+ 2\mu_1\operatorname{ctg}^2\alpha_1(A^{(I)} + A^{(R)}) + 2\mu_1\operatorname{ctg}\beta_1 B^{(R)}],$$

$$\sigma_{xy} = (i\,K)^2\exp[i\,K(x - Vt)]\,\mu_1[2\operatorname{ctg}\alpha_1(A^{(I)} - A^{(R)}) +$$

$$+ \operatorname{ctg}^2\beta_1 B^{(R)} - B^{(R)}];$$

• при $y = 0^+$ (8.53)

$$\sigma_{xx} = (i\,K)^2\exp[i\,K(x - Vt)]\,[\lambda_2(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha_2)A^{(T)} +$$

$$+ 2\mu_2 A^{(T)} + 2\mu_2\operatorname{ctg}\beta_2 B^{(T)}],$$

$$\sigma_{yy} = (i\,K)^2 \exp[i\,K(x - Vt)]\,[\lambda_2\,(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha_2)A^{(T)} +$$

$$+ 2\mu_2 \operatorname{ctg}^2\alpha_2\, A^{(T)} - 2\mu_2 \operatorname{ctg}\beta_2\, B^{(T)}],$$

$$\sigma_{xy} = (i\,K)^2 \exp[i\,K(x - Vt)]\,\mu_2\,[2\operatorname{ctg}\alpha_2 A^{(T)} +$$

$$+ \operatorname{ctg}^2\beta_2\, B^{(T)} - B^{(T)}].$$

Рассмотрим соотношение $\lambda + (\lambda + 2\mu)\operatorname{ctg}^2\alpha$, которое присутствует в выражениях для напряжений. Учитывая, что $\lambda = \rho a^2 - 2\rho b^2$, $\mu = \rho b^2$, $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b}$, получим:

$$\lambda + (\lambda + 2\mu)\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{\rho\,a^2}{\sin^2\alpha} - 2\rho\,b^2 = \frac{\rho\,b^2}{\sin^2\beta} - 2\rho\,b^2 = \rho\,b^2(\operatorname{ctg}^2\beta - 1).$$

Тогда выражения (8.53) можно переписать в форме:

• при $y = 0^-$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{yy} = \rho_1\,b_1^2\,(i\,K)^2 \exp[i\,K(x - Vt)] \times \\
&\times[(\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1)(A^{(I)} + A^{(R)}) + 2\operatorname{ctg}\beta_1\,B^{(R)}], \\
&\sigma_{xy} = \rho_1\,b_1^2\,(i\,K)^2 \exp[i\,K(x - Vt)] \times \\
&\times[2\operatorname{ctg}\alpha_1\,(A^{(I)} - A^{(R)}) + (\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1)\,B^{(R)}];
\end{aligned} \tag{8.54}$$

• при $y = 0^+$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{yy} = \rho_2\,b_2^2\,(i\,K)^2 \exp[i\,K(x - Vt)] \times \\
&\times[(\operatorname{ctg}^2\alpha_2 - 1)\,A^{(T)} - 2\operatorname{ctg}\beta_2\,B^{(T)}], \\
&\sigma_{xy} = \rho_2\,b_2^2\,(i\,K)^2 \exp[i\,K(x - Vt)] \times \\
&\times[2\operatorname{ctg}\alpha_2\,A^{(T)} + (\operatorname{ctg}^2\beta_2 - 1)\,B^{(T)}].
\end{aligned} \tag{8.55}$$

Равенство перемещений (8.51), (8.52) и компонент вектора напряжений на границе раздела (8.54), (8.55) приводит к системе уравнений для амплитуд отраженных $A^{(R)}$, $B^{(R)}$ и преломленных $A^{(T)}$, $B^{(T)}$ волн:

$$A^{(I)} + A^{(R)} - \operatorname{ctg}\beta_1 B^{(R)} = A^{(T)} + \operatorname{ctg}\beta_2 B^{(T)};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 A^{(I)} - \operatorname{ctg}\alpha_1 A^{(R)} - B^{(R)} = \operatorname{ctg}\alpha_2 A^{(T)} - B^{(T)};$$

$$\rho_1 b_1^2\,[(\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1)(A^{(I)} + A^{(R)}) + 2\operatorname{ctg}\,\beta_1 B^{(R)}] =$$

$$= \rho_2 b_2^2\,[(\operatorname{ctg}^2\beta_2 - 1)A^{(T)} - 2\operatorname{ctg}\beta_2\, B^{(T)}];$$

$$\rho_1 b_1^2[2\operatorname{ctg}\alpha_1(A^{(I)} - A^{(R)}) + (\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1)B^{(R)}] =$$

$$= \rho_2 b_2^2[2\operatorname{ctg}\alpha_2 A^{(T)} + (\operatorname{ctg}^2\beta_2 - 1)B^{(T)}].$$

Для упрощения записи введем в качестве новых неизвестных отношение амплитуд отраженных и преломленных волн к амплитуде падающей волны:

$$X_1 = A^{(R)}/A^{(I)};\ X_2 = B^{(R)}/A^{(I)};\ X_3 = A^{(T)}/A^{(I)};\ X_4 = B^{(T)}/A^{(I)}.$$

Тогда граничные приводят к системе уравнений :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{ctg}\beta_1 & -1 & -\operatorname{ctg}\beta_2 \\ -\operatorname{ctg}\alpha_1 & -1 & -\operatorname{ctg}\alpha_2 & 1 \\ \operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1 & 2\operatorname{ctg}\beta_1 & -m(\operatorname{ctg}^2\beta_2 - 1) & 2m\operatorname{ctg}\beta_2 \\ -2\operatorname{ctg}\alpha_1 & \operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1 & -2m\operatorname{ctg}\alpha_2 & -m(\operatorname{ctg}^2\beta_2 - 1) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -\operatorname{ctg}\alpha_1 \\ -(\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1) \\ -2\operatorname{ctg}\alpha_1 \end{bmatrix}. \qquad (8.56)$$

Полученная система уравнений (8.56) позволяет найти амплитуды отраженных и преломленных волн. Поскольку аналитические вычисления в общем случае громоздки, ограничимся предельными случаями падения волны на жесткую стенку и на свободную поверхность. В первом случае достаточно приравнять к нулю перемещения на границе при $y = 0^-$. Тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{ctg}\beta_1 \\ -\operatorname{ctg}\alpha_1 & -1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\operatorname{ctg}\alpha_1 \end{bmatrix},$$

а ее решения будут иметь вид

$$X_1 = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\beta_1 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\beta_1 + 1}, \quad X_2 = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha_1}{\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\beta_1 + 1}.$$

Отметим, что в предельном случае, когда $\alpha_1 \to 0$, получим $X_1 = 1$, $X_2 = 0$. Это означает, что при нормальном падении продольной волны поперечная волна не отражается, а отраженная продольная волна имеет амплитуду, равную амплитуде падающей волны.

Можно задаться вопросом: возможна ли реализация такого взаимодействия, при котором отражается только поперечная волна, а амплитуда продольной отраженной волны равна нулю? Это означает равенство $\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\beta_1 = 1$. Учитывая, что углы отражения связаны со скоростями волн соотношением

$$\sin\alpha_1/a = \sin\beta_1/b,$$

получим уравнение для $q = 1/\sin\alpha_1$.

$$\sqrt{q^2-1}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}q^2-1} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{a^2}{b^2}q^4 - \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)q^2 = 0, \; q \ge 1. \qquad (8.57)$$

Уравнение (8.57) имеет корни $q^2 = 0$, $q^2 = 1 + b^2/a^2$, из которых лишь последний является подходящим по физическому смыслу. Он соответсвует случаю, в котором отражается только поперечная волна, поскольку амплитуда отраженной продольной волны равна нулю. Угол, при котором это происходит, в случае $\lambda = \mu$ ($\nu = 0.25$, $a^2 = 3b^2$) равен $\alpha_1 = \arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.

Рассмотрим ситуацию падения продольной волны на свободную поверхность. В этом случае на границе должны быть равны нулю компоненты вектора напряжений σ_{yy}, σ_{yx}. Это приводит к системе уравнений

$$(\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1)X_1 + 2\operatorname{ctg}\beta_1 X_2 = -(\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1),$$

$$2\operatorname{ctg}\alpha_1 X_1 - (\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1)X_2 = 2\operatorname{ctg}\alpha_1,$$

решение которой дают выражения:

$$X_1 = \frac{4\,\mathrm{ctg}\,\alpha_1\,\mathrm{ctg}\,\beta_1 - (\mathrm{ctg}^2\,\beta_1 - 1)^2}{4\,\mathrm{ctg}\,\alpha_1\,\mathrm{ctg}\,\beta_1 + (\mathrm{ctg}^2\,\beta_1 - 1)^2};$$

$$X_2 = \frac{-4\,\mathrm{ctg}\,\alpha_1(\mathrm{ctg}^2\,\beta_1 - 1)}{4\,\mathrm{ctg}\,\alpha_1\,\mathrm{ctg}\,\beta_1 + (\mathrm{ctg}^2\,\beta_1 - 1)^2}. \qquad (8.58)$$

В предельном случае нормального падения продольной волны ($\mathrm{ctg}\,\alpha_1 \to \infty$, $\mathrm{ctg}\,\beta_1 \to \infty$) получим в (8.58) ожидаемый результат: $X_2 = 0$, $X_1 = -1$. Отражается только продольная волна с амплитудой, равной по величине амплитуде падающей волны. Проведем анализ вариантов возможного равенства нулю амплитуд отраженых волн.

При равенстве нулю амплитуды отраженной продольной волны получим из (8.58) уравнение

$$(\mathrm{ctg}^2\,\beta_1 - 1) = 4\,\mathrm{ctg}\,\alpha_1\,\mathrm{ctg}\,\beta_1. \qquad (8.59)$$

Рассмотрим случай грунтового приближения, когда полагается, что $\lambda = \mu$, $a = \sqrt{3}b$, $\mathrm{ctg}^2\,\beta_1 = 3\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha_1 + 2$. Подстановка этих соотношений в уравнение (8.59) приводит при $q = \mathrm{ctg}^2\,\alpha_1$ к уравнению

$$(3q+1)^4 = 16q(3q+2). \qquad (8.60)$$

Два корня этого уравнения $q = 1/3$ и $q = -1$ рациональны. В результате уравнение (8.60) раскладывается на множители $(q+1)(3q-1)(27q^2+18q-1) = 0$. Решая квадратное уравнение, находим оставшиеся корни $q = \left(-3 \pm 2\sqrt{3}\right)/9$.

Учитывая, что нас устраивают лишь положительные корни, находим значения углов падения, соответствующих отсутствию отраженных продольных волн:

$$q = 1/3,\ \mathrm{ctg}\ \alpha_1 = 1/\sqrt{3},\ \alpha_1 = 60^\circ;$$

$$q = \frac{2\sqrt{3}-3}{9},\ \mathrm{ctg}\ \alpha_1 = \sqrt{2\sqrt{3}-3}/3,\ \alpha_1 \cong 77{,}2^\circ.$$

При равенстве нулю амплитуды отраженной поперечной волны соответствующее уравнение решений не имеет:

$$\mathrm{ctg}^2\,\beta_1 = 1 \Rightarrow 3\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha_1 + 2 = 1 \Rightarrow \textit{решений нет}.$$

Таким образом, поперечные волны не отражаются только при нормальном падении продольной волны. Продольные волны не отражаются при двух углах падения (8.60).

Падение поперечной волны на жесткую стенку и свободную поверхность. Аналогично рассматривается случай, когда падающая волна является поперечной. В отличие от рассмотренной нами ситуации падения продольной волны, в этом случае существует предельный угол падения, который определяется уравнением

$$\sin\beta_1^* = b/a \cong 1/\sqrt{3},\ \beta_1^* = \arcsin(b/a) \cong \arcsin(\sqrt{3}/3) \cong 35{,}3^\circ. \quad (8.61)$$

Таким образом, регулярное отражение возможно только для углов падения $0 \le \beta_1 < \beta_1^*$. В данном случае потенциалы падающей и отраженных волн при $y < 0$ описываются формулами:

$$\psi^{(I)} = B^{(I)} \exp[i\,K(x + \operatorname{ctg}\beta_1 y - Vt)],$$

$$\varphi^{(R)} = A^{(R)} \exp[i\,K(x - \operatorname{ctg}\alpha_1 y - Vt)],$$

$$\psi^{(R)} = B^{(R)} \exp[i\,K(x - \operatorname{ctg}\beta_1 y - Vt)],$$

а выражения для перемещений и напряжений при $y = 0^-$, имеют соответственно вид:

$$u_x = iK \exp[iK\,(x - Vt)]\,(A^{(R)} + \operatorname{ctg}\beta_1 B^{(I)} - \operatorname{ctg}\beta_1 B^{(R)}),$$

$$u_y = iK \exp[i\,K(x - Vt)]\,(-\operatorname{ctg}\alpha_1 A^{(R)} - B^{(I)} - B^{(R)}),$$

$$\sigma_{yy} = \rho_1 b_1^2 (i\,K)^2 \exp[iK\,(x - Vt)] \times$$

$$\times [\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1)\,A^{(R)} - 2\operatorname{ctg}\beta_1 B^{(I)} + 2\operatorname{ctg}\beta_1 B^{(R)}],$$

$$\sigma_{xy} = \rho_1 b_1^2 (i\,K)^2 \exp[iK\,(x - Vt)] \times$$

$$\times [-2\operatorname{ctg}\alpha_1 A^{(R)} + (\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1)(B^{(I)} + B^{(R)})].$$

Если в качестве неизвестных ввести отношения амплитуд $X_1 = A^{(R)}/B^{(I)}$ и $X_2 = B^{(R)}/B^{(I)}$, получим при падении волны на жесткую стенку

$$\begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{ctg}\beta_1 \\ -\operatorname{ctg}\alpha_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{ctg}\beta_1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решения этой системы имеют вид:

$$X_1 = -\frac{2\operatorname{ctg}\beta_1}{\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\beta_1 + 1}, \quad X_2 = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\beta_1 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\beta_1 + 1}.$$

Аналогично уже рассмотренному случаю продольная волна не отражается только при нормальном падении поперечной волны на стенку. Если волна падает на свободную поверхность, система уравнений принимает вид

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1 & 2\operatorname{ctg}\beta_1 \\ -2\operatorname{ctg}\alpha_1 & \operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\operatorname{ctg}\beta_1 \\ -(\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1) \end{bmatrix}.$$

Решение данной системы дается выражениями:

$$X_1 = \frac{2\operatorname{ctg}\beta_1(\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1)}{4\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\beta_1 + (\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1)^2},$$

$$X_2 = \frac{4\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\beta_1 - (\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1)^2}{4\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\beta_1 + (\operatorname{ctg}^2\beta_1 - 1)^2}.$$

Рассмотрев аналогичную ситуацию для случая отсутствия поперечной волны, получаем такое же уравнение. Поэтому имеем: $\lambda = \mu$, $a = \sqrt{3}b$, $\operatorname{ctg}^2\beta_1 = 3\operatorname{ctg}^2\alpha_1 + 2$. Подстановка найденных значений угла α_1 дает:

$$\operatorname{ctg}\beta_1 = \sqrt{3}, \quad \beta_1 = 30^\circ;$$

$$\operatorname{ctg}\beta_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}+3}{3}}, \quad \beta_1 \cong 34{,}3^\circ. \tag{8.62}$$

Поскольку оба полученных угла (8.62) меньше предельного (см. (8.61)), оба эти случая реализуются. При таких углах падения поперечной волны отражается только продольная волна.

Приведенные примеры являются иллюстрацией исследований, которые необходимо проделать в общем случае взаимодействия волн с границей раздела двух сред.

§ 8.4. Поверхностные волны Рэлея и Лява

В предыдущих параграфах показано, что продольные или поперечные волны, бегущие раздельно в свободном пространстве при взаимодействии с границей, порождают волны другого типа, поскольку каждая из них в отдельности не позволяет выполнить соответствующие граничные условия. При регулярном отражении волны отражаются и преломляются, но возможны случаи, когда падающая волна порождает волны, бегущие вблизи поверхности и быстро затухающие с глубиной. Мы рассмотрим два примера таких волн, первыми из которых будут волны Рэлея, распространяющиеся вблизи поверхности, свободной от напряжений.

Рассмотрим решение волновых уравнений плоскопараллельного движения для потенциалов продольных и поперечных волн

$$\varphi_{,tt} = a^2(\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy}), \quad \psi_{,tt} = b^2(\psi_{,xx} + \psi_{,yy}), \tag{8.63}$$

бегущих вдоль поверхности $y = 0$ и быстро затухающих при $y \to -\infty$. Для этого необходимо подставить в уравнения (8.63) решения следующего типа:

$$\varphi = A\, e^{\varepsilon y} e^{iK(x-ct)}, \quad \psi = B\, e^{\eta y} e^{iK(x-ct)}.$$

Подстановка дает:

$$-K^2 \frac{c^2}{a^2} = \varepsilon^2 - K^2, \quad -K^2 \frac{c^2}{b^2} = \eta^2 - K^2.$$

Будем искать решение при условии $M_1 < M_2 < 1$ ($M_1 = c/a$, $M_2 = c/b$). Тогда при обозначениях

$$\alpha = \sqrt{1 - M_1^2}, \ \beta = \sqrt{1 - M_2^2}, \ \varepsilon = K\alpha, \ \eta = K\beta, \tag{8.64}$$

получим

$$\varphi = A\, e^{K\alpha y} e^{iK(x-ct)}, \quad \psi = B\, e^{K\beta y} e^{iK(x-ct)}. \tag{8.65}$$

Решения (8.65) с учетом соотношений (8.64) тождественно удовлетворяют волновым уравнениям и условиям их убывания при $y \to -\infty$. Они содержат произвольные комплексные постоянные A, B, а также неизвестную скорость волн c.

Если рассматривать упругое полупространство $y \le 0$ со свободной границей, то вектор напряжений на границе должен быть равен нулю:

$$\sigma_{xy}(x,0) = 0,\ \sigma_{yy}(x,0) = 0. \tag{8.66}$$

Учитывая представление Ляме для перемещений, выражения для деформаций и закон Гука, напряжения, входящие в граничные условия (8.66), можно предствить в виде

$$\sigma_{yy} = \lambda\varphi_{,xx} + (\lambda + 2\mu)\varphi_{,yy} - 2\mu\psi_{,xy};$$

$$\sigma_{xy} = \mu(2\varphi_{,xy} + \psi_{,yy} - \psi_{,xx}).$$

Или с учетом значения скоростей продольных и поперечных волн –

$$\sigma_{yy} = \rho b^2((\chi^{-1} - 2)\varphi_{,xx} + \chi^{-1}\varphi_{,yy} - 2\psi_{,xy});$$

$$\sigma_{xy} = \rho b^2(2\varphi_{,xy} + \psi_{,yy} - \psi_{,xx}), \tag{8.67}$$

где $\chi = b^2/a^2, \chi < 1$.

Подстановка решений (8.63) в (8.67) дает следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_{yy}/(\rho b^2) = \left\{\left[(\chi^{-1} - 2)(-K^2) + K^2\chi^{-1}\alpha^2\right]Ae^{K\alpha y} - i\,2K^2\beta B\right\}e^{iK(x-ct)};$$

$$\sigma_{xy}/(\rho b^2) = \left\{i\,2K^2\alpha A + K^2(\beta^2 + 1)B\right\}e^{iK(x-ct)}.$$

Учитывая (8.64), получим

$$(\chi^{-1} - 2)(-K^2) + 2K^2\alpha^2 = K^2\left(-\frac{a^2}{b^2} + 2 + \frac{a^2}{b^2} - \frac{c^2}{b^2}\right) = K^2(1 + \beta^2).$$

Тогда выражения для напряжений на границе $y = 0$ примут вид:

$$\sigma_{yy}/\mu = K^2\left[(1+\beta^2)A - i\,2\beta B\right];$$

$$\sigma_{xy}/\mu = K^2\left[i\,2\alpha A + (1+\beta^2)B\right]. \tag{8.68}$$

Подстановка выражений (8.68) в граничные условия (8.66) после упрощений дает систему уравнений для определения амплитуд A, B:

$$\left[(1+\beta^2)A - i\,2\beta B\right] = 0;\ \left[i\,2\alpha A + (1+\beta^2)B\right] = 0. \tag{8.69}$$

Поскольку система (8.69) однородна, она имеет ненулевое решение только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Это условие дает уравнение для определения скорости распространения искомых волн:

$$(1+\beta^2)^2 - 4\alpha\beta = 0. \qquad (8.70)$$

Уравнение (8.70) называется *уравнением Рэлея*, а искомая скорость *скоростью поверхностных волн Рэлея*. Для ее определения получается алгебраическое уравнение. Введем переменную $\xi = c^2/b^2$, тогда $1+\beta^2 = 2-\xi$, $\alpha^2 = 1-\chi\xi$, $\beta^2 = 1-\xi$. С учетом этого, уравнение (8.70) после простых преобразований принимает вид

$$(2-\xi)^4 = 16(1-\chi\xi)(1-\xi).$$

После приведения подобных членов имеем

$$\xi\, F(\xi) = 0, \text{ где } F(\xi) = \xi^3 - 8\xi^2 + 8(3-2\chi)\xi + 16(\chi-1). \qquad (8.71)$$

Отбрасывая в (8.71) посторонний корень $\xi = 0$, получаем уравнение для определения нужного корня $0 < \xi < 1$:

$$F(\xi) = 0. \qquad (8.72)$$

Исследуем уравнение на предмет наличия этого корня, для чего определим знаки многочлена на концах промежутка, т.е. при $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Несложные подсчеты дают $F(0) = 16(\chi-1) < 0$, $F(1) = 1 > 0$. Поскольку функция непрерывна и меняет свой знак, то отсюда следует, что хотя бы один корень на данном интервале есть. Значение χ зависит от коэффициента Пуассона упругой среды:

$$\chi = \frac{b^2}{a^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} = 1 - \frac{1}{2(1-\nu)} \Rightarrow 0 \le \chi \le 0{,}5.$$

При ν = 0,25, $\chi = 1/3$ уравнение (8.72) имеет вид

$$3\xi^3 - 24\xi^2 + 56\xi - 32 = 0.$$

Поскольку оно имеет корень $\xi = 4$, нахождение остальных корней сводится к решению уравнения

$$3\xi^2 - 12\xi + 8 = 0,\ \xi_1 = 2 - 2\sqrt{3}/3,\ \xi_2 = 2 + 2\sqrt{3}/3.$$

Таким образом, нужный корень ξ_1. Значение самого корня $\xi \approx 0{,}845$, откуда находим скорость волн Рэлея:

$$C_R \approx 0{,}9194\,b.$$

Для несжимаемой среды ($\nu = 0{,}5$, $\chi = 0$) уравнение будет таким:

$$\xi^3 - 8\xi^2 + 24\xi - 16 = 0.$$

Оно имеет всего один действительный корень, который можно вычислить.

При значении корня $\xi_R \approx 0{,}912$ величина скорости волн Рэлея $C_R = 0{,}955\,b$. При малых коэффициентах Пуассона $\chi = 0{,}5$ и уравнение имеет вид $\xi^3 - 8\xi^2 + 16\xi - 8 = 0$ с корнем $\xi_R = 0{,}764$. При этом $C_R = 0{,}87\,b$.

Таким образом, корень один, а скорость волн Рэлея изменяется в зависимости от коэффициента Пуассона в пределах $0{,}87 < C_R/b < 0{,}955$. Поскольку в задаче нет характерного линейного размера, скорость найденных волн Рэлея не зависит от длины волны и от частоты, т.е. дисперсии волн нет.

Рассмотрим движение частиц в волнах Рэлея. Для этого необходимо найти действительные перемещения. Так как определитель системы (8.69) равен нулю, комплексные коэффициенты связаны соотношением

$$A = i\frac{2\alpha\beta}{1+\beta^2}B.$$

Выделяя действительную часть в решениях (8.65), получим

$$\varphi = -B\frac{2\alpha\beta}{1+\beta^2}e^{K\alpha y}\sin(K(x-ct)); \quad \psi = B\,e^{K\beta y}\cos(K(x-ct)).$$

Перемещения будут равны:

$$u_x = X - x_0 = B\,K\cos(K(x_0 - ct))\frac{-2\alpha\beta\,e^{K\alpha y_0} + \beta(1+\beta^2)e^{K\beta y_0}}{1+\beta^2}.$$

$$u_y = Y - y_0 = -B\,K\sin(K(x_0 - ct))\frac{-2\alpha^2\beta\,e^{K\alpha y_0} + (1+\beta^2)e^{K\beta y_0}}{1+\beta^2}. \qquad (8.73)$$

Переменными X, Y здесь обозначены текущие координаты частицы, которая в невозмущенном состоянии имела коор-

динаты x_0, y_0. После простых преобразований (8.73) находим уравнения траекторий частиц. Они представляют собой эллипсы, полуоси которых меняются с глубиной $y = Kh$ и при больших ее значениях стремятся к нулю как экспоненты:

$$\frac{(X - x_0)^2}{p^2} + \frac{(Y - y_0)^2}{q^2} = 1.$$

Исследуем характер изменения полуосей от глубины:

$$p^2 = B^2K^2\left(\frac{\beta\left[\left(1+\beta^2\right)e^{K\beta y_0} - 2\alpha\beta e^{K\alpha y_0}\right]}{1+\beta^2}\right)^2,$$

$$q^2 = B^2K^2\left(\frac{\left(1+\beta^2\right)e^{K\beta y_0} - 2\alpha^2\beta e^{K\alpha y_0}}{1+\beta^2}\right)^2.$$

Рассмотрим их изменение при $\nu = 0{,}25$, когда $\xi = 0{,}845$, $\alpha = \sqrt{1-\xi/3} = 0{,}85$, $\beta = \sqrt{1-\xi} = 0{,}39$.

На графиках рис. 8.4 и 8.5 приведены зависимости значений амплитуд перемещений u_x, u_y и их отношения u_x/u_y в зависимости от глубины Kh. Характерно, что перемещение u_x, направленное вдоль поверхности, меняет свой знак. В геологии волны Рэлея возникают при землетрясениях и являются одной из главных причин разрушений зданий и соору-

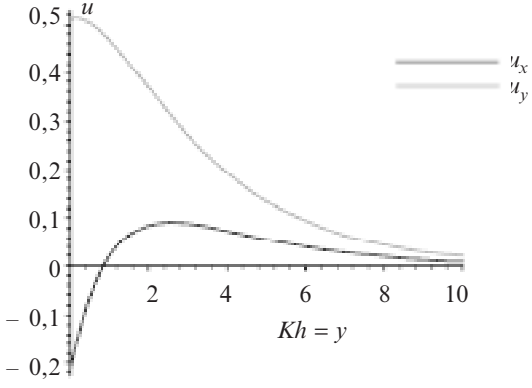


Рис. 8.4

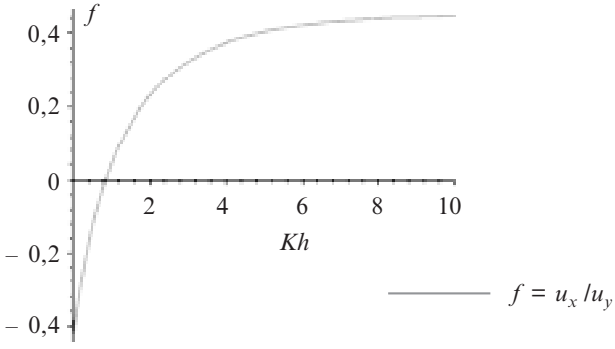


Рис. 8.5

жений, поскольку они слабо затухают с расстоянием и их волновые пакеты не размываются ввиду отсутствия дисперсии (скорость волн не зависит от их длины).

Таким образом, показано существование волн, бегущих вдоль свободной поверхности однородной упругой среды – волн Рэлея. Оказалось, что их скорость не зависит от длины волны и определяется только физическими постоянными среды: плотностью, модулем Юнга и коэффициентом Пуассона. Этот результат был ожидаем, поскольку в задаче отсутствовал характерный линейный размер.

Волны Лява. Рассмотрим пример задачи, в которой характерный линейный размер входит непосредственно в саму постановку. Будем искать волны поперечной поляризации, распространяющиеся по упругому слою, лежащему на полупространстве, заполненном более жестким упругим материалом (рис. 8.6).

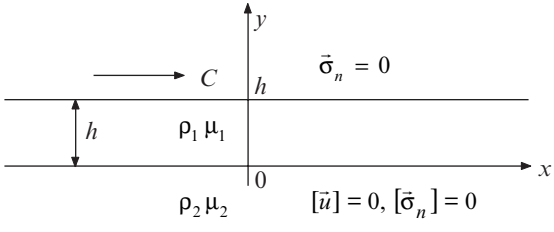


Рис. 8.6

Уравнения движения упругой среды в перемещениях в случае отсутствия массовых сил имеют вид:

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) u_{kk,\,i} + \mu u_{i\,,\,jj}\,. \tag{8.74}$$

Будем искать решение в виде волн поперечной поляризации, несущих возмущение единственной составляющей вектора перемещений $u_3 = u_z(x, y, t)$, $u_1 = u_2 \equiv 0$. При этом сами волны распространяются в плоскости xy и затухают с глубиной, т.е. при $y \to -\infty$. Подстановка единственной отличной от нуля компоненты вектора перемещений в (8.74) приводит к волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = b^2 \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right), \tag{8.75}$$

Отличными от нуля компонентами тензора напряжений в этом случае являются

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial x},\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial y}. \tag{8.76}$$

Будем искать решение в виде волны, бегущей по направлению оси Ox с неизвестной и подлежащей определению скоростью C:

$$u_z = Y(y)\, e^{iK\,(x - Ct)}. \tag{8.77}$$

Подстановка (8.77) в (8.75) приводит к следующему уравнению относительно неизвестной функции $Y(y)$:

$$-C^2 K^2 Y(y) = -K^2 b^2 Y(y) + b^2 Y''(y)$$

или

$$K^2 \left(1 - \frac{C^2}{b^2} \right) Y(y) = Y''(y)\,. \tag{8.78}$$

Уравнение (8.78) в зависимости от соотношения между скоростями искомой и поперечных волн в среде допускает разные решения. Если искомая скорость C меньше скорости поперечных волн, решением уравнения (8.78) будут экспоненты:

$$Y(y) = D_1 e^{K\eta y} + D_2 e^{-K\eta y},\ \eta = \sqrt{1 - C^2/b^2}. \tag{8.79}$$

Если искомая скорость C больше скорости поперечных волн, решение уравнения (8.78) будет иметь форму

$$Y(y) = A\ \sin(K\varepsilon y) + B\cos(K\varepsilon y),\ \ \varepsilon = \sqrt{C^2/b^2 - 1}. \quad (8.80)$$

При наших предположениях о характере искомой волны для полупространства $y < 0$ необходимо взять решение в виде (8.79) исходя из требования убывания возмущений с глубиной, причем постоянная D_2 должна быть тождественно равна нулю. Поэтому будем искать решение в виде (8.80) для слоя $0 \le y \le h$ и в виде (8.79) для упругого основания:

- при $0 \le y \le h$

$$u_z = (A\sin(K\varepsilon y) + B\cos(K\varepsilon y))\, e^{iK(x-Ct)},\ \varepsilon = \sqrt{\left(C^2/b_1^2\right) - 1};$$

- при $y < 0$ (8.81)

$$u_z = De^{K\eta y} e^{iK(x-Ct)},\ \eta = \sqrt{1 - \left(C^2/b_2^2\right)}.$$

Это означает, что искомая скорость волн должна удовлетворять неравенствам

$$b_1 < C < b_2. \quad (8.82)$$

Требование непрерывности перемещения u_z и единственной отличной от нуля компоненты вектора напряжений σ_{yz} на границе $y = 0$ с учетом (8.76) и (8.81) приводит к уравнениям

$$B = D;\ \mu_1 K\varepsilon A = \mu_2 K\eta D. \quad (8.83)$$

На свободной поверхности упругого слоя компонента вектора напряжений σ_{yz} должна быть равна нулю, что дает уравнение

$$\mu_1 K\varepsilon\,(A\cos(K\varepsilon h) - B\sin(K\varepsilon h)) = 0. \quad (8.84)$$

Соотношения (8.83), (8.84) после исключения амплитуды D и простых упрощений приводят к следующей системе двух уравнений для A, B:

$$\begin{aligned} &\cos(K\varepsilon h)\, A - \sin(K\varepsilon h)\, B = 0; \\ &\mu_1 \varepsilon A - \mu_2 \eta B = 0. \end{aligned} \quad (8.85)$$

Поскольку мы ищем нетривиальное решение (8.85), определитель системы должен быть равным нулю. Это условие дает дисперсионное уравнение, позволяющее определить скорость волн в зависимости от их длины:

$$\mu_2\sqrt{1-\left(C^2/b_2^2\right)}\cos\left(Kh\sqrt{\left(C^2/b_1^2\right)-1}\right)= \\ =\mu_1\sqrt{\left(C^2/b_1^2\right)-1}\sin\left(Kh\sqrt{\left(C^2/b_1^2\right)-1}\right). \tag{8.86}$$

Для исследования решения уравнения (8.86) введем вспомогательные обозначения:

$$\xi = c^2/b_2^2, \quad q = b_1^2/b_2^2, \quad q < 1. \tag{8.87}$$

По условиям нашей задачи (см. (8.82)) искомая величина ξ должна находится на интервале

$$q < \xi < 1. \tag{8.88}$$

Учитывая введенные обозначения, перепишем уравнение (8.86) в более удобной для исследования форме:

$$\frac{\mu_2 b_1}{\mu_1 b_2}\sqrt{\frac{1-\xi}{\xi-q}} = \operatorname{tg}\left(Kh\frac{b_2}{b_1}\sqrt{\xi-q}\right). \tag{8.89}$$

Уравнение (8.89) легко поддается графическому анализу на интервале (8.88). Действительно, даже в самой неблагоприятной ситуации, когда максимальное значение аргумента тангенса при $\xi = 1$ меньше $\pi/2$, т.е.

$$\frac{b_2}{b_1}Kh\sqrt{1-q} < \frac{\pi}{2}, \tag{8.90}$$

тангенс непрерывно изменяется от нуля на левой границе интервала (8.88) до некоторого заведомо положительного значения на правой границе области. При этом функция, стоящая в левой части уравнения (8.89), от бесконечно больших значений на левой границе непрерывно меняется до нуля на правой границе. Это позволяет сделать вывод о том, что хотя бы один корень уравнения (8.89) на требуемом интервале всегда есть.

Обратим внимание, что физически условие (8.90) означает или большую по сравнению с толщиной слоя длину волны или при фиксированной длине волны малую по сравнению с ней толщину слоя. Это следует из того, что $Kh = 2\pi h/\lambda$, где λ – длина волны. С увеличением максимального значения аргумента тангенса число корней уравнения (8.89) возрастает.

На рис. 8.7 приведены зависимости скорости волны от ее длины для трех первых мод колебаний. Это означает, что для данного значения длины волны может существовать дискретный набор значений скоростей.

Поскольку $KC = 2\pi C/\lambda = \omega$, то большим скоростям волны соответствуют большие частоты.

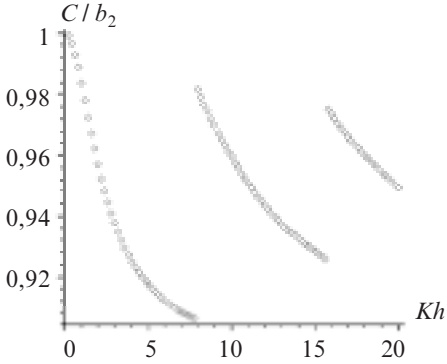


Рис. 8.7

Известно, что при распространении в реальных средах волны с большей частотой затухают быстрее, так как в реальных средах всегда есть диссипация энергии и неоднородности, на которых происходит рассеяние волн. Это приводит к тому, что в реальных средах очень быстро остаются только те волны, для которых частота минимальна. Поэтому на практике из дискретного набора реализуется меньшая скорость волн данной длины.

Как и следовало ожидать, скорость волн Лява зависит от длины волны. Это означает, что в отличие от волн Рэлея они имеют дисперсию и их волновой пакет будет со временем изменяться.

Еще одна особенность волн Лява – дискретный набор решений, характерный для волноводов, в которых распространяется однотипная волна. Рассмотрим распространение в пластине волны с поперечной поляризацией, которая бежит, многократно отражаясь от стенок жестко закрепленной пластины. Пусть падающая волна имеет волновой вектор с координатами (k_1, k_2), а отраженная волна – (k_1', k_2')

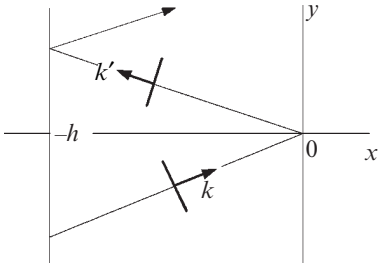


Рис. 8.8

(рис. 8.8). Тогда решение в выбранной системе координат можно искать в виде

$$u^{(I)} = A\cos(\omega t - k_1 x - k_2 y), \quad u^{(R)} = -A\cos(\omega t - k_1' x - k_2' y).$$

Для того чтобы результирующее колебание

$$u = 2A\sin\left(\omega t - \frac{k_1 + k_1'}{2}x - \frac{k_2 + k_2'}{2}y\right)\sin\left(\frac{k_1 - k_1'}{2}x + \frac{k_2 - k_2'}{2}y\right)$$

обращалось в нуль во всех точках плоскости $x = 0$, необходимо, чтобы $k_2' = k_2$, а из закона сохранения волнового числа $k = k' = \omega/b$ следует равенство $k_1' = \pm k_1$. К значению, не равному тождественному нулю, приводит только равенство $k_1' = -k_1$.

Используя полученные результаты, можно переписать решение в виде

$$u = 2A\sin(\omega t - k_2 y)\sin(k_1 x).$$

Для того чтобы удовлетворить граничному условию $u = 0$ и на второй границе $x = -h$, должно быть выполнено условие

$$k_1 = n(\pi/h).$$

Интересно отметить, что групповая скорость $V_G = \omega/k_2 > b = \omega/k$ для волн $u = 2A\sin(\omega t - k_2 y)\sin(n\pi x/h)$ больше скорости волн в безграничном пространстве. Волновые векторы в волноводе и в свободном пространстве связаны зависимостью

$$k_G^2 = k_2^2 = k^2 - k_1^2 = k^2 - (n\pi/h)^2.$$

Отсюда следует, что существует максимальная длина волны, соответствующая минимальному волновому числу $k_c = \pi/h$. Волны с длиной, большей $\lambda_c = 2h$, распространяться в волноводе не могут. Одновременно можно сказать, что волны с частотой, меньшей предельной $f = b/(2h)$, в данном волноводе не существуют. Соответствующая критической длина называется *длиной волны отсечки*.

§ 8.5 Волны в пластине и круглом стержне

Поскольку многие реальные конструкции содержат в качестве своих элементов стержни и оболочки, важен анализ их динамического поведения при распространении волн. Ограничимся рассмотрением оболочек и стержней самой простой геометрии – в виде пластин и стержней круглого сечения.

Волны в упругой пластине. Рассмотрим волны в слое упругой среды $|y| \le h$, считая отличными от нуля перемещения:

$$u_x = \varphi_{,x} + \psi_{,y}\,;\; u_y = \varphi_{,y} - \psi_{,x}.$$

Потенциалы продольных и поперечных волн должны удовлетворять волновым уравнениям

$$\varphi_{,tt} = a^2(\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy}),\;\; \psi_{,tt} = b^2(\varphi_{,xx} + \psi_{,yy}) \qquad (8.91)$$

и граничным условиям при $y = \pm h$

$$\sigma_{yy}(x,0,t) = 0,\; \sigma_{yx}(x,0,t) = 0. \qquad (8.92)$$

Если искать решение в виде бегущих вдоль слоя волн

$$\varphi = \Phi(y)\,e^{ik\,(x-ct)},\; \psi = \Psi(y)\,e^{ik\,(x-ct)}, \qquad (8.93)$$

то из (8.91) для функций $\Phi(y)$, $\Psi(y)$ получим уравнения:

$$\Phi''(y) = k^2\left(1 - c^2/a^2\right)\Phi(y);$$

$$\psi''(y) = k^2\left(1 - c^2/b^2\right)\psi(y).$$

Решениями данных уравнений являются функции:

$$\begin{aligned} &\Phi(y) = A\,\mathrm{sh}(kpy) + B\,\mathrm{ch}(kpy)\,; \\ &kp = k\sqrt{1 - \left(c^2/a^2\right)} = \sqrt{k^2 - \left(\omega^2/a^2\right)}; \end{aligned} \qquad (8.94)$$

$$\Psi(y) = C\,\mathrm{sh}\,(kqy) + D\,\mathrm{ch}(kqy);$$
$$kq = k\sqrt{1-\left(c^2/b^2\right)} = \sqrt{k^2-\left(\omega^2/b^2\right)}. \qquad (8.94')$$

Компоненты вектора напряжений на границах слоя имеют вид:

$$\sigma_{yy} = \mu\left(\left(a^2/b^2-2\right)\varphi_{,xx} + a^2/b^2\,\varphi_{,yy} - 2\psi_{,xy}\right);$$
$$\sigma_{xy} = \mu\left(2\varphi_{,xy} + \psi_{,yy} - \psi_{,xx}\right). \qquad (8.95)$$

Подстановка решений (8.94) в граничные условия (8.92) приводит к однородной системе четырех уравнений. Приравнивая определитель к нулю мы, как и в случае волн Рэлея и Лява, получим уравнение, связывающее скорость волны с ее частотными характеристиками. Поскольку задача получается достаточно громоздкой, исследуем отдельно решения двух типов. Сначала рассмотрим решение вида

$$\varphi(x,y,t) = B\,\mathrm{ch}\,(pky)\,e^{ik\,(x-ct)};$$
$$\psi(x,y,t) = C\,\mathrm{sh}\,(kqy)\,e^{ik\,(x-ct)}. \qquad (8.96)$$

Перемещения для данного решения имеют вид:

$$u_x = (i\,kB\,\mathrm{ch}\,(kpy) + kqC\,\mathrm{ch}\,(kqy))\,e^{ik\,(x-ct)};$$
$$u_y = (kpB\,\mathrm{sh}\,(kpy) - i\,kC\,\mathrm{sh}\,(kqy))\,e^{ik\,(x-ct)}. \qquad (8.97)$$

Подстановка (8.96) в (8.95) дает компоненты вектора напряжений:

$$\sigma_{yy}/\mu = \begin{bmatrix}\left(-k^2(a^2/b^2-2)+k^2p^2a^2/b^2\right)B\,\mathrm{ch}\,(kpy) - \\ -2i\,k^2qC\,\mathrm{ch}\,(kqy)\end{bmatrix} e^{ik\,(x-ct)}; \qquad (8.98)$$

$$\sigma_{xy}/\mu = [2i\,k^2p\,B\,\mathrm{sh}\,(kpy) + (k^2q^2+k^2)\,C\,\mathrm{sh}\,(kqy)]\,e^{ik\,(x-ct)}. \qquad (8.99)$$

Как видно из выражений (8.97) – (8.99), рассматриваемое решение соответствует модам колебаний, симметричным относительно плоскости $y = 0$ (рис. 8.9, *а*).

Учитывая симметрию, можно выполнить граничные условия (8.92) только на одной границе $y = h$:

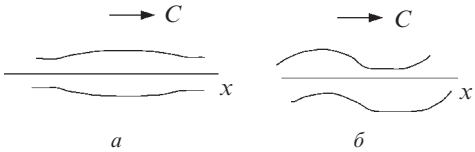


Рис. 8.9

$$(-k^2(a^2/b^2-2)+k^2p^2a^2/b^2)\,B\,\mathrm{ch}\,(kph)-2ik^2qC\,\mathrm{ch}\,(kqh)=0;$$

$$2ik^2p\,B\,\mathrm{sh}\,(kph)+(k^2q^2+k^2)\,C\,\mathrm{sh}\,(kqh)=0.$$

Приравнивая определитель данной системы к нулю, получим дисперсионное характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} (2-c^2/b^2)\,\mathrm{ch}\,(kph) & -2i\sqrt{1-c^2/b^2}\,\mathrm{ch}\,(kqh) \\ 2i\sqrt{1-c^2/a^2}\,\mathrm{sh}\,(kph) & (2-c^2/b^2)\,\mathrm{sh}\,(kqh) \end{vmatrix}=0,$$

которое приводится к виду

$$(2-c^2/b^2)^2\,\mathrm{sh}(kqh)\,\mathrm{ch}(kph)=$$

$$=4\sqrt{1-(c^2/a^2)}\sqrt{1-(c^2/b^2)}\,\mathrm{sh}(kph)\,\mathrm{ch}(kqh).$$

После деления на гиперболические косинусы получаем:

$$(2-(c^2/b^2))^2\,\mathrm{th}\,(kqh)=4\sqrt{1-(c^2/a^2)}\sqrt{1-(c^2/b^2)}\,\mathrm{th}\,(kph).$$

Принимая $\lambda=\mu$, $a^2=3b^2$, $\xi=c^2/b^2$ получим при больших значениях kh, когда гиперболический тангенс близок к единице, уравнение Рэлея

$$(2-\xi)^2=4\sqrt{(1-\xi)(1-\xi/3)}.$$

При малых значениях величины kh тангенсы можно заменить их аргументами:

$$(2-\xi)^2\,kh\sqrt{1-\xi}=4\sqrt{1-\xi/3}\sqrt{1-\xi}\,kh\sqrt{1-\xi/3}.$$

После упрощения получим

$$\xi^2-4\xi+4=4-\frac{4}{3}\xi\Rightarrow\xi=\frac{8}{3},\ C_p/b=2\sqrt{\frac{2}{3}}>1,\ C_p/a=\frac{2\sqrt{2}}{3}<1.$$

Таким образом, можно заключить, что первая мода симметричных колебаний распространяется при коротких волнах со скоростью, близкой к скорости волн Рэлея, а при волнах очень большой длины со скоростью C_p , большей, чем скорость поперечных волн, и меньшей, чем скорость продольных волн. Можно показать, что зависимость скорости от величины kh носит монотонный характер. С увеличением kh скорость асимптотически уменьшается от C_p до C_R.

Решение другого вида, а именно:

$$\varphi(x, y, t) = A\,\mathrm{sh}(pky)\,e^{ik\,(x-ct)},$$

$$\psi(x, y, t) = D\,\mathrm{ch}(kqy)\,e^{ik\,(x-ct)},$$

описывает несимметричные (изгибные) колебания пластины, поскольку перемещения при таком решении имеют следующий вид:

$$u_x = (i\,kA\,\mathrm{sh}(kpy) + kqD\,\mathrm{sh}(kqy))\,e^{ik\,(x-ct)};$$

$$u_y = (kpA\,\mathrm{ch}(kpy) - i\,kD\,\mathrm{ch}(kqy))\,e^{ik\,(x-ct)}.$$

Видно, что поперечные смещения одинаковы по разные стороны от плоскости $y = 0$, а продольные антисимметричны (рис. 8.9, *б*). Граничные условия (8.92) в этом случае дают систему уравнений:

$$(-k^2(a^2/b^2 - 2) + k^2p^2a^2/b^2)\,A\,\mathrm{sh}(kph) - 2\,i\,k^2qD\,\mathrm{sh}(kqh) = 0;$$

$$2\,i\,k^2p\,A\,\mathrm{ch}(kph) + (k^2q^2 + k^2)\,D\,\mathrm{ch}(kqh) = 0.$$

Приравнивая определитель к нулю, получим:

$$\begin{vmatrix} (2-(c^2/b^2))\mathrm{sh}(kph) & -2i\sqrt{1-(c^2/b^2)}\,\mathrm{sh}(kqh) \\ 2i\sqrt{1-(c^2/a^2)}\,\mathrm{ch}(kph) & (2-(c^2/b^2))\,\mathrm{ch}(kqh) \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение

$$(2-(c^2/b^2))^2\,\mathrm{ch}(kqh)\,\mathrm{sh}(kph) =$$

$$= 4\sqrt{1-(c^2/a^2)}\sqrt{1-(c^2/b^2)}\,\mathrm{ch}(kph)\,\mathrm{sh}(kqh)$$

приводится к виду

$$\left(2-\left(c^2/b^2\right)\right)^2 \operatorname{th}(kph) = 4\sqrt{1-\left(c^2/a^2\right)}\sqrt{1-\left(c^2/b^2\right)}\operatorname{th}(kqh).$$

При больших значениях kh (короткие волны) имеем уравнение Рэлея, при малых (длинные волны) уравнение

$$(2-\xi)^2\, kh\sqrt{1-\xi/3} = 4\sqrt{1-\xi/3}\sqrt{1-\xi}\, kh\sqrt{1-\xi}.$$

Решая его, находим: $\xi^2 - 4\xi + 4 = 4 - 4\xi,\ \xi = 0.$

Таким образом, длинноволновые изгибные волны могут распространяться по пластине со скоростью, сколь угодно близкой к нулю. Именно такие волны мы можем наблюдать в тонких листах из различных материалов (например, в листах кровельного железа). С уменьшением длины волны скорость возрастает, асимптотически приближаясь к скорости волн Рэлея.

Волны в стержнях с круглым сечением. Рассмотрим волны, бегущие по стержню круглого сечения, имеющего ось симметрии (рис. 8.10). Это означает, что решение не зависит от полярного угла.

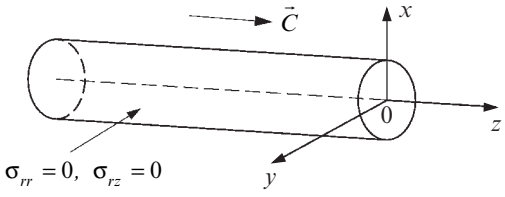


Рис. 8.10

В данном случае в цилиндрической системе координат (r, θ, z) отличными от нуля компонентами вектора перемещений будут $u_r(r,z,t),\ u_z(r,z,t)$, а отличными от нуля деформациями:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r},\ \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right).$$

Соответственно отличными от нуля напряжениями будут:

$$\sigma_{rr} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{rr},\ \sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{zz},\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta},$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = 2\mu\varepsilon_{rz},\ e = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}.$$

Перемещения должны удовлетворять уравнениям движения в цилиндрической системе координат:

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}\right);$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) - \tag{8.100}$$

$$-\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z\partial r}\right).$$

Будем искать их в форме

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r}. \tag{8.101}$$

Подстановка (8.101) в (8.100) приводит к следующим уравнениям для функций φ, Ψ:

$$\varphi_{,tt} = a^2\Delta\varphi; \qquad \psi_{,tt} = b^2\left(\Delta\psi - \psi/r^2\right), \tag{8.102}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Если ввести новую искомую функцию

$$\Psi = -\frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{8.103}$$

она будет удовлетворять волновому уравнению

$$\Psi_{,tt} = b^2\Delta\Psi. \tag{8.104}$$

При этом перемещения согласно (8.100), (8.101) будут такими:

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z\partial r}, \quad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}. \tag{8.105}$$

Напряжения, участвующие в граничных условиях, можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{rr} = \lambda\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}; \ \sigma_{zr} = \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right). \tag{8.106}$$

Таким образом, задача сводится к решению волновых уравнений (8.102),(8.104) с граничными условиями на боковой поверхности цилиндра

$$r = r_0, \quad \sigma_{rr}(r_0, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(r_0, z, t) = 0. \qquad (8.107)$$

Будем искать решение в виде волн, бегущих в направлении оси z с неизвестной скоростью C:

$$\varphi = P(r)\, e^{ik(z-Ct)}, \psi = Q(r)\, e^{ik(z-Ct)}. \qquad (8.108)$$

Подстановка выражений (8.108) в волновые уравнения (8.102), (8.104) приводит к следующим уравнениям для неизвестных функций $P(r), Q(r)$:

$$\begin{aligned} -\left((k^2C^2)/a^2\right)P(r) &= P''(r) + (1/r)P'(r) - k^2P(r); \\ -\left((k^2C^2)/b^2\right)Q(r) &= Q''(r) + (1/r)Q'(r) - k^2Q(r). \end{aligned} \qquad (8.109)$$

Поскольку уравнения функционально одинаковы, достаточно рассмотреть первое из них. Перепишем его в форме

$$P''(r) + (1/r)P'(r) + k^2p^2P(r) = 0, \; p^2 = C^2/a^2 - 1.$$

Замена $x = kpr$ приводит его к уравнению Бесселя

$$P''(x) + (1/x)P'(x) + P(x) = 0,$$

решениями которого будут функции Бесселя первого $J_0(x)$ и второго рода $N_0(x)$. Первая из этих функций ограничена при $x = 0$, вторая не ограничена. Поскольку нам необходимо решение, не имеющее особенности на оси цилиндра при $r = 0$, подходит функция $J_0(x)$. Функция Бесселя, как и остальные специальные функции, задается своим разложением в ряд:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \cdots. \qquad (8.110)$$

Таким образом, решениями волновых уравнений будут выражения

$$\begin{aligned} &\varphi = A\,J_0(kpr)\,e^{ik(z-Ct)}, \;\; \psi = B\,J_0(kqr)\,e^{ik(z-Ct)}; \\ &p^2 = \left(C^2/a^2\right) - 1, \;\; q^2 = \left(C^2/b^2\right) - 1. \end{aligned} \qquad (8.111)$$

Подставляя решения (8.111) в выражения для перемещений (8.105), получим:

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial r} = [kp\,J_0'(kpr)A + ik^2q\,J_0'(kqr)B]\,e^{ik(z-Ct)};$$
$$u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = [i\,kJ_0(kpr)A + k^2q^2\,J_0(kqr)B]\,e^{ik(z-Ct)}. \tag{8.112}$$

Учитывая выражения для деформаций и подставляя перемещения (8.112) в (8.105), последовательно находим:

$$\sigma_{rr} = \left[\begin{pmatrix}\lambda kp(1/r)J_0'(x_1) + (\lambda+2\mu)\\ k^2p^2J_0''(x_1) - \lambda k^2J_0(x_1)\end{pmatrix}\right]Ae^{ik(z-Ct)} +$$
$$+\left[\begin{pmatrix}\lambda i\,k^2q(1/r)J_0'(x_2) + (\lambda+2\mu)\\ ik^3q^2J_0''(x_2) + \lambda ik^3q^2J_0(x_2)\end{pmatrix}\right]B\,e^{ik(z-Ct)};$$
$$\sigma_{zr} = \mu\left(2i\,k^2p\,J_0'(x_1)\right)Ae^{ik(z-Ct)} +$$
$$+\left(-k^3q + k^3q^3\right)J_0'(x_2)Be^{ik(z-Ct)}, \tag{8.113}$$

где $x_1 = kpr$, $x_2 = kqr$.

Приравнивая напряжения (8.113) к нулю, при $r = r_0$ получим систему двух однородных уравнений:

$$\left[\left(\lambda kp\frac{1}{r}J_0'(x_{10}) + (\lambda+2\mu)k^2p^2J_0''(x_{10}) - \lambda k^2J_0(x_{10})\right)\right]A + i\,k^2\times$$
$$\times\left[\left(\lambda q\frac{1}{r}J_0'(x_{20}) + (\lambda+2\mu)kq^2J_0''(x_{20}) + \lambda kq^2J_0(x_{20})\right)\right]B = 0;$$
$$\left(2ik^2pJ_0'(x_{10})\right)A + \left(-k^3q + k^3q^3\right)J_0'(x_{20})\,B = 0. \tag{8.114}$$

Здесь $x_{10} = kpr_0$, $x_{20} = kqr_0$.

Равенство нулю определителя системы (8.114) позволяет получить дисперсионное уравнение. Оно достаточно громоздко, поэтому ограничимся первым приближением, когда удерживаются слагаемые только степени kr_0 меньше второй. Это

означает, что мы рассматриваем длины волн значительно большие, чем радиус стержня. Учитывая в (8.114) разложение (8.110) и отбрасывая малые величины, из равенства нулю определителя получаем уравнение

$$\left(\frac{C^2}{b^2}-2\right)\left(\frac{C^2}{a^2}-1+\frac{\lambda}{\mu}\frac{C^2}{b^2}\right)+2\left(\frac{C^2}{a^2}-1\right)=0,$$

решением которого будет значение

$$C=\sqrt{\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\rho(\lambda+\mu)}}=\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (8.115)$$

Следующее приближение, найденное Л. Похгаммером [8], дает более точное значение:

$$C\cong\sqrt{\frac{E}{\rho}\left(1-\frac{r_0^2k^2\nu^2}{4}\right)}. \qquad (8.116)$$

Скорость (8.115) , так называемая стержневая скорость, широко известна и фигурирует при одномерном рассмотрении движения стержня, когда принимается гипотеза плоских сечений. Она соответствует распространению длинных волн и в данном приближении не зависит от длины волны. Следующее приближение скорости (8.116) уже показывает на зависимость скорости волн от их длины. Таким образом, можно констатировать, что в телах, ограниченных поверхностями, при наличии характерных линейных размеров волны всегда обладают дисперсией.

Рассмотренные свойства волн в упругих средах позволяют делать приближенный анализ волновой картины в более сложных задачах, где аналитическое решение часто получить невозможно.

Литература

1. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах: Пер.с франц. – М.: Наука, 1982.

2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1987.

3. *Никифоровский В.С., Шемякин Е.И.* Динамическое разрушение твердых тел. – Новосибирск: Наука, 1979.

4. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975.

5. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости: Учеб.пособие. – М.: Наука, 1981.

6. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986.

7. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979.

8. *Pochhammer L.* Uber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrentzen isotropen Kreiszylinder. J. f. d. reine und angew. Math., 81 (1876). P. 324–326.