А.Е.Зарянкин

Механика несжимаемых и сжимаемых жидкостей

Учебник для вузов

Допущено УМО вузов России по образованию в области энергетики и электротехники в качестве учебника для студентов, обучающихся по направлениям подготовки "Энергетическое машиностроение" и "Теплоэнергетика и теплотехника"

Москва
Издательский дом МЭИ
2014

УДК 532.5 (075.8)
ББК 22.253.3я73
З-365

Рецензенты:
доктор техн. наук, проф. **Б.А. Габараев** (ОАО «НИКИЭТ»);
доктор техн. наук, проф. **А.И. Трофимов** (НАТЭ НИЯТ МИФИ);
зав кафедрой «Тепловые электрические станции»,
доктор техн. наук **Е.В. Барочкин**
(Ивановский государственный энергетический университет);
зав. кафедрой «Тепловые двигатели и теплофизика»,
канд. техн. наук **А.А. Жинов**
(Калужский филиал МГТУ им. Баумана)

Зарянкин А.Е.

З-365 Механика несжимаемых и сжимаемых жидкостей: учебник для вузов / А.Е. Зарянкин. — М.: Издательский дом МЭИ, 2014. — 590 с.: ил.

ISBN 978-5-383-00903-1

Книга является учебником по одноименному курсу, читаемому для студентов, обучающихся по энергомашиностроительным и теплотехническим специальностям технических университетов, и в максимальной степени соответствует учебной программе указанного курса.

Содержит основные сведения по течению идеальных несжимаемых и сжимаемых жидкостей, несжимаемой вязкой жидкости, потенциальным, вихревым и сверхзвуковым течениям. Большое внимание уделяется вопросам пограничного слоя, турбулентности, течению в трубах, соплах и непрофилированных отверстиях, течению рабочих сред в диффузорах и решетках профилей турбомашин, а также рассматриваются некоторые прикладные задачи, включая задачи о течении двухфазных и двухкомпонентных сред.

Учебник предназначен для студентов энергомашиностроительных и теплотехнических специальностей энергетических и политехнических университетов и может быть полезен для инженерных и научных работников исследовательских лабораторий и конструкторских бюро энергомашиностроительных заводов.

УДК 532.5 (075.8)
ББК 22.253.3я73

ISBN 978-5-383-00903-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 8
Введение 9

Глава 1. **Основные понятия и определения механики несжимаемых и сжимаемых жидкостей** 17
1.1. Предмет механики несжимаемых и сжимаемых жидкостей и свойства текущих сред 17
1.2. Классификация сил, действующих в жидкости, и их определение 19
1.2.1. Напряжения поверхностных сил 19
1.2.2. Напряжения массовых сил 22
1.3. Параметры потока жидкой среды 23
1.4. Некоторые термодинамические соотношения для газовых сред 25
1.5. Скорость звука 29
1.6. Классификация движений жидкости 31
1.7. Вязкость в жидких средах 32
Вопросы для самоконтроля 36

Глава 2. **Элементы кинематики жидкости** 37
2.1. Методы изучения движения жидкости 37
2.2. Деформация жидких элементов и вращательное движение в жидкости 40
2.3. Скорость относительной объемной деформации жидкого элемента 45
2.4. Линия тока и вихревая линия 46
2.5. Трубка тока и вихревая трубка 49
2.6. Циркуляция скорости 50
Вопросы для самоконтроля 51

Глава 3. **Основные уравнения механики несжимаемых и сжимаемых жидкостей** 52
3.1. Уравнение неразрывности 52
3.2. Уравнения движения идеальной жидкости 55
3.3. Интегралы уравнений движения идеальной жидкости 59
3.4. Уравнение сохранения энергии 63
Вопросы для самоконтроля 68

Глава 4. **Элементы гидростатики** 70
4.1. Основные уравнения гидростатики 70
4.2. Равновесие жидкости в сообщающихся сосудах 71
4.3. Относительное равновесие жидкости 73
4.4. Силы давления жидкости на твердые стенки 76
4.5. Равновесие сжимаемой жидкости (газа) 79
Вопросы для самоконтроля 81

Глава 5. **Одномерное движение жидкости** 83
5.1. Основные уравнения одномерных течений 83
5.1.1. Уравнение неразрывности 83
5.1.2. Уравнение сохранения количества движения 84
5.1.3. Уравнение сохранения энергии 85
5.2. Максимальная и критическая скорости в газовых и паровых потоках 88
5.3. Безразмерные скорости потока М и λ 90

5.4. Связь безразмерных параметров потока с безразмерными скоростями M и λ 92
5.5. Распределение параметров потока и скоростей вдоль канала произвольной формы при различных внешних воздействиях 94
5.6. Удельный расход и приведенный удельный расход жидкости 103
5.7. Газодинамические функции одномерного газового потока 106
5.8. Способы приведения плоских и трехмерных потоков к одномерной схеме течения 110
Вопросы для самоконтроля 117

Глава 6. **Плоские дозвуковые течения идеальной жидкости** 118
6.1. Потенциальные течения жидкости 118
6.2. Примеры простейших потенциальных течений 124
6.2.1. Плоскопараллельное течение 124
6.2.2. Течение внутри прямого угла 126
6.2.3. Течение вдоль двух бесконечных пересекающихся плоскостей 127
6.2.4. Источник и сток 128
6.2.5. Циркуляционное течение 130
6.2.6. Диполь 132
6.3. Примеры сложения потенциальных течений 133
6.3.1. Вихреисточник и вихресток 133
6.3.2. Обтекание потенциальным потоком идеальной жидкости криволинейного полутела 134
6.3.3. Поперечное обтекание круглого цилиндра плоскопараллельным потоком 136
6.3.4. Поперечное обтекание круглого цилиндра плоскопараллельным потоком при наличии циркуляционного течения 141
6.4. Теорема Н.Е. Жуковского о подъемной силе 143
6.5. Потенциальное течение идеальной сжимаемой жидкости 147
6.6. Линеаризованное уравнение для потенциала скорости сжимаемой жидкости 149
Вопросы для самоконтроля 154

Глава 7. **Вихревые течения жидкостей** 156
7.1. Некоторые общие понятия о вихревых течениях 156
7.2. Основные теоремы вихревого течения идеальной жидкости 158
7.2.1. Теорема Стокса 158
7.2.2. Теорема Томсона 160
7.2.3. Теоремы Гельмгольца о вихревом движении 161
7.3. Особенности течения жидкости внутри вихревой трубки и за ее пределами 163
7.4. Скорости, индуцируемые элементами вихревых трубок, произвольно расположенными в пространстве 169
7.5. Расчет течения идеальной жидкости в плоском диффузоре при наличии в его проточной части плоского вихря 173
Вопросы для самоконтроля 180

Глава 8. **Плоские сверхзвуковые течения** 181
8.1. Особенности сверхзвуковых течений 181
8.2. Линии возмущения и характеристики в сверхзвуковом потоке 182
8.3. Уравнение характеристик в плоскости годографа скорости 186
8.4. Диаграмма характеристик 190
8.5. Расчет центрированных волн разрежения 193

8.6. Отражение, пересечение и гашение волн разрежения 196
8.7. Профилированное сопло Лаваля 200
8.8. Возникновение скачков уплотнения в сверхзвуковом потоке 201
8.9. Основные соотношения для расчета параметров потока и скоростей при переходе через плоские косые скачки уплотнения 202
8.10. Ударная поляра и диаграмма ударных поляр 205
8.11. Отражение и пересечение скачков уплотнения 210
8.12. Потери энергии в скачках уплотнения 214
8.13. Номограмма для расчета скачков уплотнения 217
8.14. Тепловые скачки 219
Вопросы для самоконтроля 226

Глава 9. **Истечение сжимаемой жидкости (газообразных и паровых сред) из сопл и непрофилированных отверстий** 228
9.1. Истечение сред из суживающихся сопл 228
9.2. Переменные режимы истечения из суживающихся сопл. Сетка расходов 233
9.3. Примеры использования сетки расходов для расчета переменных режимов суживающихся сопл 236
9.4. Истечение из расширяющихся сопл и их диаграмма режимов 237
9.5. Истечение из отверстий и щелей с острой кромкой 244
9.6. Лабиринтовые уплотнения и их расчет 249
Вопросы для самоконтроля 252

Глава 10. **Основы физического моделирования** 254
10.1. Значение и задачи физического моделирования 254
10.2. Размерные и безразмерные величины 255
10.3. П-теорема 258
10.4. Примеры практического использования П-теоремы 261
10.4.1. Уравнение расхода жидкости через поперечное сечение канала 261
10.4.2. Расчет гидравлического сопротивления в трубах произвольного поперечного сечения 262
10.4.3. Сопротивление тела, движущегося в жидкости 265
10.4.4. Форма свободной поверхности жидкости, находящейся во вращающемся цилиндрическом сосуде 267
10.5. Критерии подобия и моделирование течений жидкости 269
10.6. Частичное моделирование течений 271
Вопросы для самоконтроля 274

Глава 11. **Движение вязкой жидкости** 276
11.1. Уравнение движения вязкой жидкости (уравнение Навье—Стокса) 276
11.2. Примеры точных решений уравнений Навье—Стокса 285
11.2.1. Движение жидкости между двумя бесконечными параллельными плоскостями 287
11.2.2. Течение Куэтта 288
11.2.3. Движение жидкости в трубах 289
11.2.4. Движение жидкости между соосными цилиндрами 293
11.2.5. Течение смазки под колодкой подшипника скольжения 294
Вопросы для самоконтроля 299

Глава 12. **Пограничный слой** 300
12.1. Основные понятия о пограничном слое 300
12.2. Интегральные толщины пограничного слоя 301
12.2.1. Толщина вытеснения 302

12.2.2. Толщина потери импульса ... 304
12.2.3. Толщина потери энергии ... 306
12.3. Уравнение Прандтля для пограничного слоя ... 308
12.4. Уравнение Кармана для пограничного слоя ... 312
12.5. Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный ... 317
12.6. Основные характеристики турбулентных течений ... 326
12.7. Уравнения движения для турбулентных течений (уравнения Рейнольдса) ... 332
12.8. Логарифмический профиль скорости ... 338
12.9. Расчет пограничного слоя при безградиентном течении ... 343
12.9.1. Расчет ламинарного пограничного слоя ... 344
12.9.2. Расчет турбулентного пограничного слоя ... 347
12.10. Расчет пограничного слоя в общем случае ... 351
12.11. Отрыв пограничного слоя ... 357
12.12. Сопротивление тел, обтекаемых вязкой жидкостью ... 371
Вопросы для самоконтроля ... 375

***Глава 13.* Движение жидкости в трубах и трубопроводах** ... 376
13.1. Движение несжимаемой жидкости в трубах и коэффициент сопротивления труб ... 376
13.2. Движение сжимаемой жидкости в трубах с трением ... 385
13.3. Местные сопротивления ... 394
13.3.1. Поворотные колена ... 394
13.3.2. Внезапное расширение потока ... 399
13.3.3. Внезапное сужение потока ... 402
13.3.4. Слияние и разделение потоков ... 404
13.4. Элементы расчета сложных трубопроводов ... 406
Вопросы для самоконтроля ... 409

***Глава 14.* Движение жидкости в диффузорах** ... 410
14.1. Классификация диффузоров и их геометрические параметры ... 410
14.2. Процесс торможения потока в диффузорах в h, s-диаграмме и их аэродинамические характеристики ... 413
14.3. Экспериментальная и расчетная оценки аэродинамических характеристик диффузоров ... 416
14.4. Полуэмпирический метод расчета диффузоров ... 426
14.5. Влияние режимных параметров на характеристики диффузоров ... 430
14.5.1. Влияние числа Рейнольдса ... 430
14.5.2. Влияние безразмерных входных скоростей $\lambda_1(M_1)$ на аэродинамические характеристики диффузоров ... 432
14.6. Влияние геометрических параметров на характеристики диффузоров ... 435
14.6.1. Влияние угла раскрытия α ... 435
14.6.2. Влияние угла раскрытия плоских диффузоров на статические и динамические нагрузки, действующие на их стенки ... 438
14.6.3. Влияние степени расширения диффузоров ... 441
14.7. Методы повышения эффективности диффузорных каналов ... 443
14.8. Некоторые примеры практического использования диффузоров в турбомашинах ... 454
14.8.1. Конические диффузорные седла в регулирующих клапанах паровых турбин ... 454
14.8.2. Диффузоры в выхлопных патрубках паровых и газовых турбин ... 465
Вопросы для самоконтроля ... 474

***Глава 15.* Решетки профилей для ступеней паровых и газовых турбин** ... 475
15.1. Ступень турбины и преобразование энергии в этой ступени ... 475

15.2. Определение усилий, действующих на рабочие лопатки турбинной ступени и ее мощность 478
15.3. Коэффициент полезного действия турбинной ступени 483
15.4. Связь коэффициентов потерь энергии в сопловых и рабочих решетках профилей с коэффициентами скорости φ и ψ 486
15.5. Классификация решеток профилей, используемых в турбинных ступенях 488
15.6. Потери на трение и коэффициент потерь на трение в решетках профилей турбинной ступени 492
15.7. Кромочные потери энергии 494
15.8. Концевые потери энергии в турбинных решетках профилей 502
15.8.1. Физическая картина течения в решетках профилей конечной длины 502
15.8.2. Полуэмпирический метод расчета концевых потерь энергии 505
15.9. Влияние геометрических и режимных параметров на коэффициенты потерь в турбинных решетках профилей 511
15.9.1. Влияние относительного шага $\overline{t}$ решетки профилей на коэффициент профильных потерь энергии 511
15.9.2. Влияние относительной длины решетки профилей на коэффициент потерь энергии 514
15.9.3. Влияние угла установки профиля β_y в решетке на коэффициент профильных потерь энергии 517
15.9.4. Влияние режимных параметров на характеристики турбинных решеток профилей 518
15.10. Некоторые способы снижения профильных и концевых потерь энергии в решетках профилей 528
15.10.1. Пути снижения профильных потерь энергии 528
15.10.2. Пути снижения концевых потерь энергии 531
Вопросы для самоконтроля 536

***Глава 16.* Элементы двухфазных и двухкомпонентных течений** 537
16.1. Основные понятия и определения 537
16.2. Двухфазное течение пара при фазовом равновесии 540
16.3. Течение смеси жидкости с газовыми пузырьками 544
16.4. Скорость звука в жидкости, содержащей пузырьки газа 549
16.5. Скачки конденсации 550
16.6. Разгон капель влаги в одномерном потоке 555
16.7. Течение насыщенного и влажного пара в соплах паровых турбин 557
16.8. Влияние начальной влажности пара на характер течения в конических диффузорах (расширяющихся соплах) 562
Вопросы для самоконтроля 570

Приложение 571
Список литературы 589

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебный курс «Механика несжимаемых и сжимаемых жидкостей» (МНСЖ) является базовой дисциплиной при подготовке специалистов энергомашиностроительного и теплотехнического направлений. Альтернативное название этого же курса — «Механика жидкостей и газов» (МЖГ), которым в основном мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Круг вопросов, рассматриваемых в этом курсе, весьма широк и охватывает как общетеоретические положения, так и частные задачи, с которыми постоянно приходится сталкиваться при проектировании и эксплуатации тепломеханического оборудования тепловых электростанций, парогазовых установок и оборудования атомных электростанций.

Длительное время при подготовке специалистов в области теплоэнергетики в качестве основных учебных пособий использовались книги М.Е. Дейча и А.Е. Зарянкина «Гидрогазодинамика» и Г.С. Самойловича «Гидрогазодинамика». Однако с момента их выхода в свет прошло 29 и 20 лет соответственно. За это время произошли существенные изменения в программах подготовки специалистов, а указанные учебные пособия стали библиографической редкостью.

Предлагаемый читателю учебник призван восполнить возникший в последнее десятилетие дефицит учебной литературы, посвященной изучению проблем движения жидкостей и газов.

В основу учебника положены учебные курсы по гидрогазодинамике и механике жидкостей и газов, которые на протяжении 50 лет автор читал на теплоэнергетическом и энергомашиностроительном факультетах Московского энергетического института.

Основную работу при подготовке книги к печати выполнила инж. С.Ю. Батухтина. Кроме того, в оформлении графического материала принимали участие научный сотрудник В.Е. Каращук, инженеры Р.В. Фатеев, А.А. Магер, В.А. Щаулов, Д.А. Хлебников и А.И. Чукин. Всем указанным лицам автор приносит искреннюю благодарность.

Замечания и отзывы следует направлять по адресу: 111250, Москва, ул. Красноказарменная, д. 14а, Издательский дом МЭИ.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Механика несжимаемых и сжимаемых жидкостей является частью общей механики и посвящена изучению закономерностей движения жидких и газообразных сред как в каналах произвольной формы, так и в области расположения различных твердых тел при обтекании их указанными средами.

Связь рассматриваемой дисциплины с остальными курсами механики и ее различными направлениями показана на рис. В.1 [28].

При изучении механики несжимаемых и сжимаемых жидкостей или механики жидкостей и газов, как и механики твердого тела, исследуется макродвижение жидкостей и газов и не рассматривается микроструктура жидких сред. При таком подходе жидкости и газы представляются в виде некоторых сплошных сред с непрерывным распределением (за исключением особых случаев) основных физических величин и скоростей.

В отличие от твердых тел жидкие и газообразные среды характеризуются легкой подвижностью, обусловленной низкими межмолекулярными связями. В результате жидкость всегда принимает форму сосуда, в котором она

Рис. В.1. Связь гидродинамики с остальными направлениями общей механики

находится, с четко выраженной свободной поверхностью, а газ заполняет весь свободный объем сосуда. Кроме того, как жидкие, так и газообразные среды оказывают достаточно сильное противодействие их сжатию. При этом, однако, объем жидких сред меняется очень мало, а газообразные среды в зависимости от сжимающих усилий могут менять свой объем очень значительно.

Существующие отличия между жидкостями и газами привели в конечном счете к разделению МЖГ на гидромеханику и аэромеханику (см. рис. В.1). В свою очередь, гидромеханика подразделяется на гидростатику и гидродинамику, а аэромеханика — на аэростатику и аэродинамику.

Поскольку движение как жидких, так и газообразных сред подчиняется одним и тем же уравнениям сохранения, а для расчета этих сред в ряде случаев используются одни и те же формулы, то часто аэродинамика и гидродинамика рассматриваются совместно в виде единого направления — гидрогазодинамики.

В свою очередь, гидрогазодинамика как наука развивается в трех направлениях: теоретическая, экспериментальная и прикладная, причем в прикладной гидрогазодинамике решаются, в частности, задачи, связанные с гидротурбинами, паровыми и газовыми турбинами, авиацией, и самые разнообразные задачи промышленной гидравлики и аэродинамики.

Области практического использования гидрогазодинамики исключительно широки и разнообразны. Без знания законов движения жидкостей и газов невозможно развитие авиации, кораблестроения, паровых, газовых и гидравлических турбин, компрессоров, воздуходувных машин, систем кондиционирования воздуха, нефтяной и газовой промышленности и многих смежных технических направлений. При этом необходимо отметить, что успех решения прикладных задач МЖГ прямо зависит от уровня развития как теоретической, так и экспериментальной гидрогазодинамики. Оба эти направления теснейшим образом связаны между собой, но в разные периоды меняется их главенствующая роль.

Если в конце XIX — начале XX в. происходило бурное развитие теоретической гидродинамики, а теоретические основы экспериментальных исследований еще только разрабатывались, то к середине XX в. экспериментальная гидрогазодинамика уже оформилась в самостоятельное и очень важное направление механики жидкостей и газов.

Очередное смещение приоритетов произошло в конце XX в., когда развитие вычислительной техники позволило решать нерешаемые ранее задачи и на смену физическому эксперименту пришло математическое исследование (математический эксперимент) сложных течений самых разнообразных сред. Однако успехи чисто теоретической гидрогазодинамики в эти годы оказались достаточно скромными, поскольку вычислительная техника явилась эффективным инструментом решения самых разнообразных задач на базе уже разработанных в XIX и XX вв. классических положений и уравнений, описывающих самые разнообразные течения жидкостей и газов. В этой связи следует особо подчеркнуть необходимость глубокого изучения всего классического наследия механики жидкостей и газов, так как именно на базе классической гидрогазодинамики происходит сейчас бурное развитие ее вычислительного направления.

Успех решения любых практических задач с помощью дифференциальных уравнений зависит от правильно поставленных граничных, а при нестационарных течениях и начальных условий. В ряде случаев такие условия сформулировать оказывается весьма сложно. Здесь уместно привести следующее высказывание проф. Л.Г. Лойцянского (1950 г.): «Невозможность и бесполезность точного удовлетворения сложных граничных и, по существу, случайных начальных условий, имеющих место при так называемом «турбулентном» движении жидкости, привели к замене строгой постановки задачи грубой моделью «осредненного» движения с простыми элементарными законами силовых взаимодействий между слоями жидкости в этом «осредненном» движении» [25].

Необходимо отметить, что на основе указанной грубой «осредненной» модели движения жидких и газообразных сред сейчас строятся практически все сложные компьютерные расчетные программы, причем в случае, если результаты компьютерных расчетов не совпадают с данными немногочисленных физических исследований, предпочтение отдается расчетным данным. Такой перекос в оценке конечных результатов решаемых задач в значительной степени связан с коммерциализацией компьютерного программного обеспечения, стоимость которого уже приближается к стоимости полноценного физического эксперимента. Соответственно в настоящее время вновь возрождается интерес к развитию экспериментальной гидрогазодинамики на базе современной высокоточной измерительной техники.

В историческом плане механика жидкостей и газов как теоретическое научное направление сформировалась в XVIII в. в результате работ Л. Эйлера (1707—1783 гг.) и Д. Бернулли (1700—1782 гг.). Именно Л. Эйлеру принадлежат вывод дифференциальных уравнений движения жидкости, лишенной сил трения (идеальной жидкости), вывод «турбинного» уравнения и уравнения неразрывности, создание теории реактивного колеса Сегнера. Л. Эйлер впервые ввел понятие о давлении в жидкости, четко разъяснил парадокс Даламбера о равенстве нулю силы сопротивления тел, обтекаемых идеальной жидкостью без срыва струи, и в ряде работ определил роль сил трения в потоках реальной жидкости при обтекании ими различных тел.

Одновременно с Л. Эйлером не меньший вклад в создание теоретической гидромеханики внес и Д. Бернулли, опубликовав в 1738 г. свой трактат «Гидродинамика». Здесь впервые был приведен вывод знаменитой формулы Бернулли, которая устанавливала общую связь между давлением, скоростью движения жидкости и ее гидравлической высотой. В XIX в. эта формула была обобщена и на движение сжимаемых сред.

Необходимо также отметить и большую роль в развитии механики жидкости Даламбера (1717—1783 гг.), возглавлявшего обширные экспериментальные исследования по определению сопротивления тел, движущихся в жидкости.

Основные положения о сопротивлении тел и, в частности, кораблей были опубликованы Даламбером в 1744 г. («Трактат о равновесии и движении жидкости»), где и был получен парадоксальный результат о равенстве нулю сопротивления тел, обтекаемых идеальной жидкостью.

Работы Эйлера, Бернулли, Даламбера по существу завершили первоначальный этап развития механики идеальной жидкости, оставаясь почти столетие незыблемыми основами гидродинамики.

Следующий этап ее бурного развития связан с такими именами выдающихся ученых XIX столетия, как Лагранж, Коши, Кирхгоф, Рэлей, Лэмб, Грин, Ренкин, Дирехле, Стокс, Пуассон, Лаплас, Навье, Рейнольдс, Риман, Сен-Венан и др.

В этот период в рамках идеальной жидкости Лагранж сформулировал условия существования безвихревого (потенциального) движения жидкости и показал, что в этом случае все поле течения может быть определено с помощью одной функции — потенциала скорости. Строгое доказательство этого положения было дано в 1815 г. Коши.

Лагранжем, кроме потенциала скорости, была введена еще одна очень важная функция — функция тока. Обе эти функции, удовлетворяющие по отдельности уравнению Лапласа, позволили в конечном счете решить сложные гидродинамические задачи путем отыскания одной комплексной функции — комплексного потенциала. Этот метод расчета содержится в работах Кирхгофа (1876 г.) и Гельмгольца (1868 г.), а также был блестяще использован в ряде фундаментальных работ Н.Е. Жуковского (1842—1926 гг.).

Расчету пространственных безвихревых течений посвящены работы Пуассона (1827 г.), Дирихле (1852 г.), Стокса (1842 г.).

В 1845 г. Стоксом были опубликованы уравнения движения вязкой жидкости, которые до настоящего времени являются фундаментальной основой для расчета течений реальных жидкостей и газов. До Стокса уравнение движения для реальных сред выводили Навье (1828 г.), Пуассон (1831 г.), Сен-Венан (1843 г.).

Большой интерес к движению вязких жидкостей и газов в XIX в. прямо связан с интенсивным техническим прогрессом в этот период, причем с чисто практической точки зрения на первое место вышли проблемы о влиянии сил вязкости на гидравлическое сопротивление труб и каналов самой разнообразной формы.

В теоретическом плане эти задачи решались Стоксом (1846 г.), Стефаном (1862 г.), а обширные экспериментальные исследования течения жидкостей в трубах были проведены Пуазейлем (1840—1842 гг.), О. Рейнольдсом (1876—1883 гг.), открывшими существование в трубах двух форм течения — ламинарного и турбулентного.

О. Рейнольдсу принадлежит приоритет в выводе для турбулентного течения уравнений движения, представляющих собой осредненные по времени уравнения Навье—Стокса для вязкой жидкости. При этом О. Рейнольдсом были сформулированы простые и достаточно очевидные правила осреднения переменных по времени величин.

В конце XIX в. Н.П. Петровским (1883 г.) была создана гидродинамическая теория смазки подшипников. Строгое решение указанной проблемы содержится в работах Н.Е. Жуковского (1886 и 1887 гг.).

Повышенный интерес к полету аппаратов тяжелее воздуха, а также изобретение Лавалем (1883 г.) и Парсонсом (1884 г.) паровых турбин привели наряду с развитием гидродинамики вязкой жидкости к созданию теории движения сжимаемого газа и пара (газодинамики). При этом важным показателем сжимаемости газов стала скорость распространения звука. Впервые эта скорость была теоретически определена Ньютоном и впоследствии уточнена Лапласом.

К середине XIX в. уже была получена замкнутая система дифференциальных уравнений, описывающих течение сжимаемых газов, но их точные решения были найдены только для небольшого числа частных случаев. В этой связи широкое развитие получили различного рода приближенные методы решения задач о движении сред с большими дозвуковыми и сверхзвуковыми скоростями.

Как уже отмечалось, развитию газодинамики больших скоростей способствовало использование в турбинах Лаваля расширяющихся сопл со сверхзвуковыми скоростями истечения пара (сопл Лаваля). Эти сопла подробно исследовал чешский ученый Стодола, экспериментально обнаруживший возникновение в сверхзвуковых потоках поверхностей сильного разрыва, названных впоследствии ударными волнами или скачками уплотнения.

Ранее этих опытов существование в сверхзвуковых потоках скачков уплотнения теоретически обосновал Риман в 1860 г., а их простейший расчет был выполнен Ренкиным в 1870 г. и Гюгонио в 1887 г. Наиболее интенсивно газовая динамика развивалась в первой половине XX в. в связи с развитием не только турбиностроения, но и авиации (в том числе и сверхзвуковой), интерес к которой стал нарастать с конца XIX в. Здесь в первую очередь следует отметить книгу Ланчестера «Аэродинамика», вышедшую в свет в 1907 г., где теоретически были рассмотрены многие фундаментальные задачи, связанные с аэродинамикой крыла самолета. Однако книга была написана таким языком, что даже крупные специалисты не смогли понять многие важные решения Ланчестера. Весьма характерную оценку этой работы дал Прандтль, отметив следующее: «Трудно следить за мыслями Ланчестера, так как от читателей требуется большая интуиция. Мы смогли понять Ланчестера сразу только потому, что мы работали в том же направлении».

В результате реальный прорыв в области аэродинамики крыла самолета произошел в первые годы XX в. и связан в первую очередь с блестящими работами Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина. В 1906 г. Н.Е. Жуковский опубликовал знаменитую формулу о подъемной силе крыла, равной произведению скорости и плотности набегающего потока на циркуляцию скорости, возникающей вокруг крыла, а в 1908 г. С.А. Чаплыгин указал простой способ определения этой циркуляции, вошедший в научную литературу как «постулат Жуковского—Чаплыгина».

Для частного случая крылового профиля формулу о подъемной силе в 1904 г. получил немецкий ученый Кутта. По этой причине в мировой литературе указанная формула известна как формула Кутты—Жуковского.

Несомненный приоритет в создании нового направления аэромеханики— динамики полета принадлежит Н.Е. Жуковскому. Первой работой в этом направлении является его труд «О парении птиц», где, в частности, дано теоретическое обоснование «мертвой петли», а завершающая серия статей в указанном направлении была опубликована Н.Е. Жуковским в 1912—1913 гг. В 1912 г. вышел также ряд его статей, касающихся новой теории гребного винта, явившейся фундаментальной основой для развития современных методов расчета.

Н.Е. Жуковский является родоначальником российской экспериментальной аэродинамики, создавшим аэродинамические лаборатории при Московском университете, в г. Кучино (Московская область) и организованном им Центральном аэрогидродинамическом институте (ЦАГИ).

Громадный вклад в развитие отечественной и мировой гидроаэромеханики внес С.А. Чаплыгин, широко использовавший при разработке плоского безвихревого движения жидкостей комплексные функции и конформные отображения. В 1910 г. им были получены формулы, определяющие силы и моменты, действующие на крыло самолета. Совместно с Н.Е. Жуковским С.А. Чаплыгиным были созданы первые в мире теоретические крыловые профили с закругленной передней кромкой, разработана теория решетчатого крыла (1914 г.), проведено обобщение формул по расчету сил и моментов на случай нестационарного движения крыла (1926 г.).

Исключительно важное и актуальное до настоящего времени значение имеет диссертационная работа С.А. Чаплыгина «О газовых струях» (1901—1902 гг.), где с помощью метода годографа скорости рассматривалось обобщение струйного обтекания тел Кирхгофа—Жуковского на случай течения сжимаемого газа.

Анализируя историю развития гидроаэродинамики в XX в., можно отметить, что, начиная с работ Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина, ее становление происходило под мощным влиянием работ российских и советских ученых. Так, М.В. Келдыш и Ф.И. Франкль строго обосновали вихревую теорию Н.Е. Жуковского; В.П. Ветчинкин, Н.Н. Поляков и другие серьезно уточнили вихревую теорию винта; С.А. Христианович в 1941 г. дал подробный анализ трансзвуковых течений и в 1947 г. разработал приближенный метод расчета сверхзвуковых течений; Ф.И. Франкль получил важные результаты в решении задач с до- и сверхзвуковыми областями течения; Л.И. Седов впервые строго поставил и решил задачу о глиссировании по поверхности тяжелой жидкости. Движение подводного крыла подробно рассматривалось в работах М.В. Келдыша, Н.Е. Кочина, М.А. Лаврентьева. В 1935 г. Н.А. Слезкин обобщил теорему Жуковского на случай обтекания крыла сжимаемым газом.

Исключительно важное место в конце XIX и XX в. заняли работы по определению сопротивления тел, обтекаемых реальными жидкими и газообразными средами, и приближенные методы расчета таких течений.

Первой систематической работой, посвященной вопросу сопротивления жидкостей, является фундаментальная работа Д.И. Менделеева «О сопротивлении жидкостей в воздухоплавании» (1880 г.), где отмечалась очень важная роль «прилипшего» к твердому телу слоя жидкости. Эта гипотеза «прилипания» наряду с гипотезой «сплошности» стала впоследствии основным положением при расчете сопротивления тел и оценке сопротивления каналов произвольной формы. Действительно, если скорость потока на обтекаемой твердой поверхности равна нулю, то это означает, что вблизи поверхности находится область с очень большими поперечными градиентами скорости, и, следовательно, именно здесь, согласно гипотезе Ньютона о касательных напряжениях в жидкости, эти напряжения, пропорциональные поперечному градиенту скорости, достигают максимальных значений. В законченном виде отмеченная особенность поля скоростей в относительно тонком пристеночном (пограничном) слое и вытекающие отсюда выводы были положены Л. Прандтлем в основу разработанного им метода расчета вязких течений (1904 г.).

Применив к пограничному слою уравнение движения Навье—Стокса, Л. Прандтль показал возможность их существенного упрощения и доказал очень важное с практической точки зрения утверждение о том, что в любом поперечном сечении пограничного слоя (за исключением некоторых особых случаев) давление не меняется. Это положение лежит в основе всех измерений статических давлений с помощью дренажных отверстий, выполненных на обтекаемой поверхности и соединенных с любым прибором, измеряющим давление.

Предложенная Л. Прандтлем методология оказалась исключительно полезной, и очень быстро на этой основе оформилось самостоятельное направление в гидрогазодинамике, посвященное теоретическим и экспериментальным исследованиям особенностей течения в пограничном слое.

Большой вклад в эти расчеты внес Т. Карман, предложивший рассчитывать пограничный слой не на основе дифференциальных уравнений, а на основе полученного им интегрального соотношения (1928 г.).

Уравнение Кармана для пограничного слоя сняло ограничения, присущие уравнениям Прандтля, которые описывали только слоистые (ламинарные) течения в пограничном слое и не могли использоваться при турбулентном течении. Снятие указанного ограничения привело к интенсивному развитию простых инженерных методов расчета, позволяющих для течений в каналах определять действительный расход среды и потерю энергии, а при внешнем обтекании тел легко находить их сопротивление. Обобщению и дальнейшему развитию теории пограничного слоя посвящены классические исследования Г. Шлихтинга.

Наиболее интенсивно теоретические и экспериментальные исследования пограничного слоя велись в 30—60-е годы как за рубежом, так и в СССР, причем результаты этих исследований в СССР намного опережали результаты аналогичных исследований зарубежных ученых. Однако в связи с отсутствием в эти годы обмена научной информации с зарубежными странами полученные в СССР решения проблем пограничного слоя остались практически неизвестными мировой научной общественности.

Большой вклад в разработку методов расчета ламинарного и турбулентного пограничных слоев в несжимаемой жидкости внесли в 1930—1945 гг. А.П. Мельников, К.К. Федяевский, Л.Г. Лойцянский, Л.Е. Калихман,.

В 1939—1940 гг. А.А. Дородницином был предложен метод расчета пограничного слоя в сжимаемой жидкости.

В XX в. большое развитие получили работы, посвященные теоретическим и экспериментальным исследованиям турбулентных течений. Среди них необходимо отметить ряд классических работ Л. Прандтля, Т. Кармана, Р. Тейлора, Б.К. Батчелора, А.А. Таунсенда, Т. Эллиота, Г.Б. Шубауэра, Х.Л. Драйдена.

Основополагающее значение в развитии современной теории турбулентности имели работы советских ученых А.Н. Колмогорова, А.М. Обухова, А.С. Монина, Я.Б. Зельдовича, А.М. Яглома, А.А. Фридмана, Л.В. Келлера, М.Д. Миллионщикова и др.

В конце 50-х годов прошлого столетия в СССР начала интенсивно развиваться прикладная аэродинамика и сформировалось ее самостоятельное направление — аэродинамика турбомашин, что было вызвано бурным развитием в эти годы отечественного турбиностроения. Формирование указанного направления проходило под влиянием результатов многочисленных теоретических и экспериментальных исследований И.И. Кирилова, М.Е. Дейча, Г.С. Самойловича, Г.С. Степанова, Г.А. Филиппова, А.Н. Шерстюка, Л.М. Зысиной-Моложен и др., чьи работы до настоящего времени сохранили свою актуальность. Многие результаты, полученные 50 лет назад в СССР, только сейчас начинают обсуждаться в зарубежной научной литературе, посвященной аэродинамике турбомашин.

Следует особо отметить, что во второй половине XX в. развитие теоретической, экспериментальной и прикладной гидрогазодинамики проходило под очень сильным влиянием работ отечественных ученых, обеспечивших в этот период техническую безопасность России и всех республик, входивших в состав СССР.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕХАНИКИ НЕСЖИМАЕМЫХ И СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

1.1. Предмет механики несжимаемых и сжимаемых жидкостей и свойства текущих сред

В механике **несжимаемых и сжимаемых жидкостей** (МНСЖ) **рассматриваются основные закономерности движения жидких и газообразных сред**, позволяющие установить условия взаимодействия этих сред с обтекаемыми твердыми телами или с твердыми поверхностями, ограничивающими движущуюся среду.

Если в твердых телах имеют место очень большие межмолекулярные силы сцепления, то в жидкостях, и особенно в газах, эти силы оказываются относительно слабыми, что проявляется в легкой подвижности, т.е. текучести и деформируемости. В результате при движении жидкостей и газов под действием внешних сил происходит изменение формы, а в общем случае и объема выделенной части жидкости.

При рассмотрении движения жидкостей и газов обычно абстрагируются от молекулярной структуры исследуемых потоков и анализируют некоторую условную среду, которая обладает непрерывным распределением всех характеристик (параметров). Эта **гипотеза непрерывности (сплошности)** объединяет жидкости и газы в единую категорию текучих легко деформируемых сред.

Однако между жидкостями и газами имеется и принципиальное различие.

В жидких средах (капельные жидкости) межмолекулярные силы сцепления в связи с малыми расстояниями между молекулами оказываются существенно большими, чем у газов, где расстояния между молекулами намного больше, чем у жидкостей. В результате под действием внешних сил жидкости практически не изменяют свой объем, и по этой причине они относятся к слабосжимаемым или несжимаемым средам.

В отличие от жидких сред газы в связи с большим межмолекулярным расстоянием под действием внешних сил свой объем меняют, обладая таким свойством, как сжимаемость.

Это принципиальное различие приводит к тому, что **жидкости всегда принимают форму сосуда**, в которую они заключены, **и образуют поверхность свободного уровня**, отделяющую ее от других жидкостей или газов, заключенных в том же сосуде и имеющих иные физические свойства. На этой поверхности наиболее наглядно проявляется действие межмолекулярных сил сцепления, вызывающих явления капиллярности, смачиваемости и возникновение менисков и капель жидкости.

Газы в отличие от жидкостей **заполняют объем**, в котором они находятся, **полностью** и **не образуют поверхностей свободного уровня**, а при действии внешних сил они легко меняют свою форму и объем (эффект сжимаемости). В движущемся газе эффект сжимаемости наиболее отчетливо проявляется при больших скоростях. Если же движение газа происходит с малой скоростью, то при отсутствии теплообмена эффект сжимаемости газов очень мало влияет на характер течения.

В принципе сжимаемость свойственна и капельным жидкостям, но для них это свойство обнаруживается только при очень больших давлениях. Другими словами, сжимаемость свойственна всем жидкостям и газам, но количественный эффект прямо зависит от физических свойств среды. На этом основании все сплошные среды, обладающие легкой подвижностью, объединяются под общим названием **жидкость**, которая может быть **несжимаемой** (капельная жидкость и газы при малых скоростях) и **сжимаемой**.

Жидкость считается сжимаемой, если под действием внешних сил ее объем меняется более чем на $4 \div 5$ %. Можно показать, что в движущихся газовых средах указанный эффект сжимаемости начинает проявляться, если скорость этих сред превышает 30 % локальной скорости звука.

Все жидкости обладают внутренним трением, обусловленным их вязкими свойствами. Вязкие свойства движущейся среды в одних задачах могут принципиальным образом менять всю картину течения, а в других — практически не влиять на характер течения жидкости.

При аналитических исследованиях пренебрежение вязкими силами существенно облегчает теоретические расчеты, и для многих задач, где влияние вязкости на картину течения мало, вместо реальной жидкости целесообразно использовать модель идеальной жидкости.

Под **идеальной жидкостью** понимают абстрактную жидкость, лишенную внутренних сил трения. Эта модель является первым, но очень важным приближением к реальной модели жидкости.

Приведенные общие положения о свойствах жидкостей и газов позволяют выделить следующие **модели жидкостей**:

идеальная несжимаемая жидкость (идеальная капельная жидкость);
идеальная сжимаемая жидкость (идеальные паровые и газовые среды);
вязкая несжимаемая жидкость (реальная капельная жидкость);
вязкая сжимаемая жидкость (реальные паровые и газовые среды).

Приведенная классификация моделей жидкостей построена по принципу последовательного приближения рассматриваемых моделей к реальным легко деформируемым сплошным средам. В такой же последовательности целесообразно строить и процесс изучения движения каждой из приведенных моделей жидкостей.

Следует выделить **двухфазные среды**, где физически однородные (или неоднородные) вещества находятся в двух различных агрегатных состояниях. К таким средам, в частности, относится влажный пар, где паровая среда насыщена каплями жидкости, капельные жидкости с пузырьками газа, жидкости с твердыми частицами и др. В таких средах, по существу, нарушается условие неразрывности и по другому проявляются эффекты сжимаемости и вязкости. Кроме того, на характер течения двухфазных сред очень сильно влияет внутренний тепло- и массообмен.

1.2. Классификация сил, действующих в жидкости, и их определение

В отличие от твердых тел, где рассматриваются как сосредоточенные, так и распределенные по всей поверхности силы, в жидкости могут действовать только **распределенные силы**, так как сосредоточенные силы неизбежно ведут к ее разрыву.

В свою очередь, распределенные (рассредоточенные) силы делятся на поверхностные и массовые.

Если в движущейся жидкости выделить произвольный объем V, ограниченный замкнутой поверхностью F, то со стороны окружающей среды на эту поверхность будет действовать некоторая распределенная по поверхности сила, которая и называется **поверхностной**.

Кроме того, на все частицы жидкости, заключенные в выделенном объеме, могут действовать гравитационные силы, силы инерции, электромагнитные силы (для электропроводящей жидкости), силы Архимеда и др. Все эти силы, пропорциональные массе жидкости, заключенной в рассматриваемом объеме V, называются **массовыми**.

Как поверхностные, так и массовые силы характеризуются векторами напряжения, определяемыми в каждой точке поверхности F (векторы напряжения поверхностной силы) или в каждой точке выделенного объема (векторы напряжения массовых сил).

Остановимся на определении указанных векторов более подробно.

1.2.1. Напряжения поверхностных сил

Для определения вектора напряжения поверхностных сил рассмотрим в жидкости элементарную поверхность площадью ΔF с внешней нормалью $\vec{n}$ (рис. 1.1). Распределенные по этой площадке поверхностные силы представим в виде равнодействующего вектора силы $\vec{P}_n$, где индекс «n» указывает на то, что этот вектор действует на площадку с внешней нормалью $\vec{n}$.

Найдем далее предел отношения вектора $\vec{P}_n$ к площади ΔF при стремлении величины ΔF к нулю:

$$\overline{\overline{P}}_n = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\vec{P}_n}{\Delta F}.$$

Полученная в результате указанного предельного перехода величина $\overline{\overline{P}}_n$ и определяет напряжение поверхностной силы в некоторой точке рассматриваемой поверхности F.

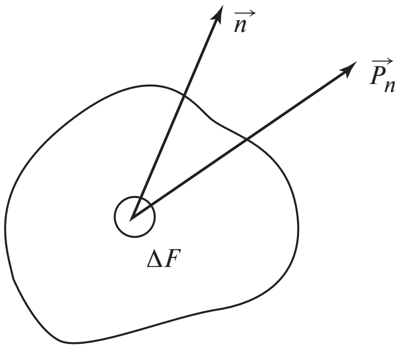


Рис. 1.1. К определению вектора напряжения поверхностной силы

В общем случае величина $\bar{\bar{P}}_n$ зависит не только от положения точки на поверхности F (координат x, y, z) и времени t, но и от ориентации в пространстве площадки ΔF, определяемой внешней нормалью $\vec{n}$, т.е.

$$\bar{\bar{P}}_n = f(x, y, z, t, \vec{n}).$$

В случае стационарного течения, когда напряжение $\bar{\bar{P}}_n$ не зависит от времени,

$$\bar{\bar{P}}_n = f(x, y, z, \vec{n}).$$

Следовательно, напряжение $\bar{\bar{P}}_n$ не является обычным вектором, так как может принимать совершенно различные значения в зависимости от положения площадки ΔF. Однако при фиксированном положении площадки его можно разложить на составляющие по координатным осям. Пусть, например, выбрана площадка, перпендикулярная оси x.

В общем случае вектор напряжения $\bar{\bar{P}}_n = \vec{P}_x$ не совпадает с направлением нормали (в данном случае с направлением оси x) и может быть разложен на нормальную σ_x и касательные τ_{xy}, τ_{xz} составляющие (рис. 1.2):

$$\vec{P}_x = \vec{i}\,\sigma_x + \vec{j}\,\tau_{xy} + \vec{k}\,\tau_{xz}. \tag{1.1}$$

Здесь $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные орты.

Второй индекс у касательных напряжений указывает ось, в направлении которой проектируется напряжение $\vec{P}_x$.

Располагая площадки перпендикулярно осям y и z, получим еще два разложения вектора поверхностного напряжения:

$$\vec{P}_y = \vec{i}\,\tau_{yx} + \vec{j}\,\sigma_y + \vec{k}\,\tau_{yz}; \tag{1.1a}$$

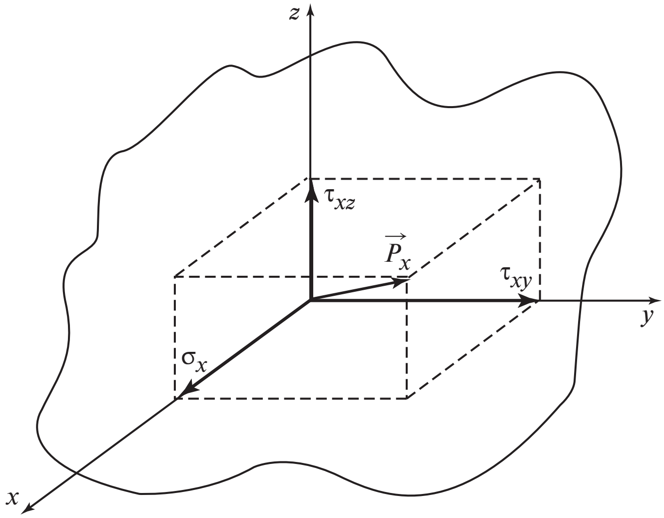


Рис. 1.2. Схема разложения вектора $\vec{P}_x$ на составляющие по координатным осям

$$\vec{P}_z = \vec{i}\,\tau_{zx} + \vec{j}\,\tau_{zy} + \vec{k}\,\sigma_z\,. \qquad (1.1б)$$

При произвольном расположении площадки с внешней нормалью $\vec{n}$ величина $\overline{\overline{P}}_n$ может быть выражена через векторы $\vec{P}_x$, $\vec{P}_y$, $\vec{P}_z$ по следующему соотношению:

$$\overline{\overline{P}}_n = \vec{n}\,P_{nn} = \vec{P}_x \cos\,(nx) + \vec{P}_y \cos\,(ny) + \vec{P}_z \cos\,(nz). \qquad (1.2)$$

Проектируя $\overline{\overline{P}}_n$ на координатные оси, получаем:

$$P_{nx} = \sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz);$$

$$P_{ny} = \tau_{xy} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) + \tau_{zy} \cos(nz);$$

$$P_{nz} = \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) + \sigma_z \cos(nz).$$

Физическая величина, характеризуемая в данной точке псевдовектором $\overline{\overline{P}}_n$, который принимает различные значения в зависимости от ориентации площадки, называется **тензором** напряжения поверхностной силы .

В данном случае поверхностное напряжение зависит от девяти скалярных величин: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{zy}, совокупность которых определяет **тензор напряжения второго ранга**.

Из условий равновесия жидкого элемента, приведенного на рис. 1.2, следует, что

$$\tau_{xy} = \tau_{yx};\ \tau_{xz} = \tau_{zx};\ \tau_{zy} = \tau_{yz}.$$

Следовательно, поверхностное напряжение в жидкости определяется не девятью, а шестью скалярными величинами: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, $_{yz}$, τ_{xz}.

Возникновение касательных напряжений на поверхности выделенного жидкого элемента обусловлено вязкостью жидкости, которая проявляется при ее движении (относительным сдвигом). В покоящейся жидкости при отсутствии относительного сдвига ее частиц касательные напряжения равны нулю. Эти напряжения всегда равны нулю и в идеальной жидкости, так как согласно определению указанная жидкость лишена сил вязкости.

Таким образом, в неподвижной жидкости, а также в движущейся жидкости, лишенной вязкости (идеальная жидкость), все касательные напряжения равны нулю ($\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$) и поверхностное напряжение $\overline{\overline{P}}_n$ [см. (1.2)] определяется только нормальными напряжениями (σ_x, σ_y, σ_z):

$$\vec{P}_x = \vec{i}\,\sigma_x; \quad \vec{P}_y = \vec{j}\,\sigma_y; \quad \vec{P}_z = \vec{k}\,\sigma_z; \tag{1.3}$$

$$\overline{\overline{P}}_n = \vec{n}\,P_{nn} = \vec{i}\,\sigma_x\cos(nx) + \vec{j}\,\sigma_y\cos(ny) + \vec{k}\,\sigma_z\cos(nz), \tag{1.4}$$

что существенно упрощает последующий анализ.

1.2.2. Напряжения массовых сил

Массовые силы, как и поверхностные, характеризуются вектором напряжения массовых сил $\vec{M}$. Если на некоторый элемент массы Δm, заключенный в объеме ΔV, действует массовая сила $\vec{R}$, то вектор напряжения $\vec{M}$ этой силы определяется как предел отношения величины $\vec{R}$ к элементу массы Δm при стремлении к нулю Δm:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\vec{R}}{\Delta m}.$$

Отсюда следует, что вектор напряжения массовых сил $\vec{M}$ имеет размерность ускорения. Разлагая вектор $\vec{M}$ на составляющие по координатным осям, получаем

$$\vec{M} = \vec{i}\,X + \vec{j}\,Y + \vec{k}\,Z,$$

где X, Y, Z — проекции напряжения массовых сил на прямоугольные оси координат (единичные массовые силы).

Если массовой силой является сила тяжести, то при направлении оси z нормально к поверхности земли

$$X = 0; \quad Y = 0, \ Z = -\frac{mg}{m} = g;$$

$$\vec{M} = -\vec{k}\,g.$$

В этом случае ускорение свободного падения является напряжением массовой силы тяжести.

1.3. Параметры потока жидкой среды

Термодинамическими параметрами потока жидкой среды являются: давление p, плотность ρ, температура T и энтропия S. В МНСЖ все эти параметры определяются в фиксированной точке.

Давление в жидкости является примером поверхностной силы и его гидродинамический смысл вытекает из рассмотрения поверхностного напряжения $\overline{\overline{P}}_n$ для случая, когда все касательные напряжения τ_{ij} равны нулю. Как уже отмечалось, этот случай соответствует неподвижной жидкости, а также движущейся жидкости, лишенной сил трения (идеальная жидкость).

Рассмотрим в движущейся идеальной или в неподвижной реальной (вязкой) жидкости элементарный жидкий объем в форме тетраэдра (рис. 1.3), грани которого имеют площади ΔF_x, ΔF_y, ΔF_z, ΔF_n.

Согласно формулам (1.3) на грани, перпендикулярные координатным осям, действуют только нормальные напряжения σ_x, σ_y, σ_z.

Напряжение $\vec{P}_n$ на грани с внешней нормалью $\vec{n}$ определяется по формуле

$$\vec{P}_n = \vec{i}\,\sigma_x \cos(nx) + \vec{j}\,\sigma_y \cos(ny) + \vec{k}\,\sigma_z \cos(nz). \tag{1.5}$$

Используя принцип Даламбера, запишем условие равновесия рассматриваемого жидкого элемента, имея в виду, что массовые силы (в том числе и силы инерции) имеют третий порядок малости, так как пропорциональны элементарному объему ΔV, а поверхностные силы, пропорциональные площади, являются малыми второго порядка.

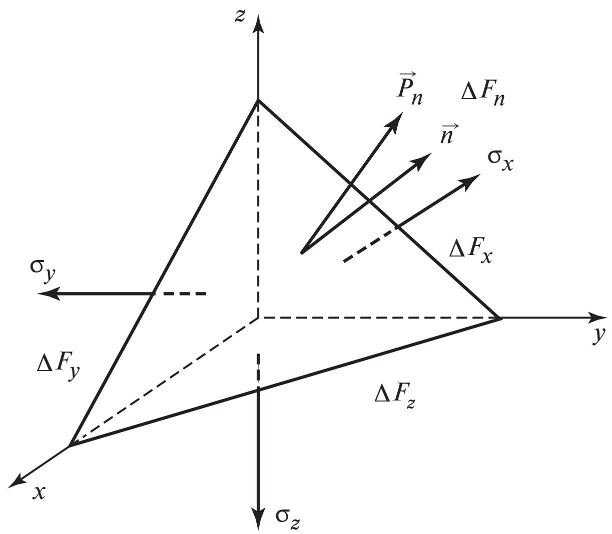


Рис. 1.3. К выводу уравнения равновесия жидкого элемента

С учетом изложенного условие равновесия рассматриваемого жидкого элемента сводится к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x \Delta F_x &= P_{nn} \Delta F_n \cos(nx) + A_x; \\ \sigma_y \Delta F_y &= P_{nn} \Delta F_n \cos(ny) + A_y; \\ \sigma_z \Delta F_z &= P_{nn} \Delta F_n \cos(nz) + A_z, \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

где A_x, A_y, A_z — бесконечно малые третьего порядка.

В свою очередь, из рис. 1.3 видно, что

$$\left.\begin{aligned} \Delta F_x &= \Delta F_n \cos(nx); \\ \Delta F_y &= \Delta F_n \cos(ny); \\ \Delta F_z &= \Delta F_n \cos(nz). \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Из сопоставления соотношений (1.6) и (1.7) при стягивании рассматриваемого тетраэдра в точку получаем

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = P_{nn} = \sigma.$$

Таким образом, если в жидкости отсутствуют касательные напряжения, то все нормальные напряжения в фиксированной точке равны между собой и не зависят от ориентации в пространстве рассматриваемой площадки, на которой расположена указанная точка. Полученный результат справедлив для любой неподвижной или идеальной движущейся жидкостей.

Как показывают опыты, капельные жидкости воспринимают сжимающие усилия, но терпят разрыв даже при малых растягивающих усилиях. Отсюда следует, что в сплошной жидкой среде могут действовать только нормальные сжимающие усилия.

На этом основании нормальное напряжение σ, равное нормальному напряжению поверхностной силы, взятому с обратным знаком, называют **напряжением давления** или просто **давлением** в точке, т.е. $p = -\sigma$.

В соответствии с указанным давление p не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует, и представляет собой величину, определяемую только положением точки (координатами x, y, z) и временем t. Другими словами, гидродинамическое давление является функцией координат и времени:

$$p = f(x, y, z, t).$$

Единица измерения давления p в системе СИ определяется давлением силы в 1 Н на площадку в 1 м^2, т.е. величина p выражается в Па = Н/м^2. Поскольку эта единица мала, то давление обычно измеряют более крупными единицами — кПа и МПа. Иногда используют внесистемную единицу давления — бар, равную 10^2 кПа, и еще более мелкие доли — мбар и мкбар.

На практике до настоящего времени часто в качестве единицы измерения давления используют техническую атмосферу и выражают ее в миллиметрах ртутного или водяного столба:

$$1 \text{ атм} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 736 \text{ мм рт. ст.} = 10\,000 \text{ мм вод. ст.}$$

Связь между указанными единицами давления следующая:

$$1 \text{ МПа} = 10^3 \text{ кПа} = 10^6 \text{ Па} = 10 \text{ бар} = 10{,}2 \text{ атм};$$

$$1 \text{ атм} = 9{,}8 \cdot 10^4 \text{ Па} = 98 \text{ кПа} = 0{,}098 \text{ МПа} = 0{,}98 \text{ бар}.$$

Для определения **плотности** ρ, кг/м^3, в точке рассмотрим массу жидкости Δm в объеме ΔV и перейдем к пределу при стремлении объема ΔV к нулю:

$$\rho = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Величина, обратная плотности, называется **удельным объемом** v, м^3/кг:

$$1/\rho = v.$$

Плотность ρ так же, как и давление p, будет в общем случае меняться при переходе от одной точки к другой. В фиксированной точке плотность может меняться в зависимости от времени. Следовательно,

$$\rho = \rho(x, y, z, t).$$

В частном случае несжимаемой жидкости плотность не меняется и, следовательно, $\rho = \text{const}$.

Температура жидкости T определяет ее термодинамическое состояние и так же, как давление и плотность, является функцией координат рассматриваемой точки (x, y, z) и времени t для нестационарных течений, т.е.

$$T = f(x, y, z, t).$$

Последний из указанных выше параметров потока — энтропия рассматривается ниже (см. § 1.4).

1.4. Некоторые термодинамические соотношения для газовых сред

Рассмотренные выше параметры (давление p, плотность ρ, температура T) связаны между собой известным **уравнением состояния**

$$p/\rho = RT, \tag{1.8}$$

или

$$pv = RT, \tag{1.8a}$$

где R — газовая постоянная, зависящая от физических свойств газообразной среды; для воздуха $R = 287{,}15$ м^2/(с$^2 \cdot$ К); для перегретого пара $R =$ $= 464$ м^2/(с$^2 \cdot$ К).

С помощью (1.8) по двум известным параметрам легко находится третья величина. Изменение параметров, связанных уравнением (1.8), происходит путем подвода к газу или перегретому пару либо отвода от них механической или тепловой энергии.

Механическая работа, которую производит газ, или работа, совершаемая над газом, представляет собой работу сил давления при его расширении или сжатии. Если в результате этого объем газа меняется от V_1 до V_2, то подведенная (+) или отведенная (–) работа A_p будет составлять

$$A_p = \pm \int p \, \mathrm{d}V .$$

Изменение тепловой энергии газа определяется изменением его температуры $\mathrm{d}T$ и удельной теплоемкостью c, которая представляет собой количество теплоты, необходимой для нагревания 1 кг газа на 1 градус.

Твердые тела и капельные жидкости имеют только одно значение теплоемкости, тогда как у газов существуют два значения удельной теплоемкости в связи с тем, что количество теплоты, необходимое для нагревания газа на 1 градус, зависит от того, при каких условиях это происходит.

Если газ нагревается при постоянном давлении, то его удельная теплоемкость c_p оказывается всегда больше удельной теплоемкости c_V, полученной при нагревании газа в постоянном объеме, так как в первом случае подведенная теплота расходуется не только на увеличение внутренней энергии газа (повышение его температуры), но и на совершение работы расширения.

Необходимо заметить, что та часть подводимой теплоты, которая идет на повышение температуры газа (увеличение внутренней энергии), не зависит от того, каким образом происходит нагревание газа: при постоянном давлении или при постоянном объеме.

Численные значения теплоемкостей c_p и c_v не зависят от давления и несколько увеличиваются с ростом температуры. Для воздуха c_p = = 1005,65 м^2/(с$^2 \cdot$ К); c_v = 718,5 м^2/(с$^2 \cdot$ К).

Отношение указанных теплоемкостей для воздуха и всех двухатомных газов

$$k = c_p/c_v \approx 1{,}4.$$

На основании первого начала термодинамики, выражающего закон сохранения энергии при переходе тепловой энергии в механическую и обратно, можно записать

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + p \, \mathrm{d}v, \qquad (1.9)$$

т.е. изменение тепловой энергии $\mathrm{d}Q$ идет на увеличение внутренней энергии газа $\mathrm{d}U$ и совершение элементарной работы $p \, \mathrm{d}v$.

Интегрируя (1.8), получаем

$$Q = (U_1 - U_2) + \int_{v_1}^{v_2} p \, \mathrm{d}v . \qquad (1.10)$$

Если над газом производится работа (происходит его сжатие), то совершаемая работа учитывается в уравнении (1.10) со знаком «минус». В этом случае сумма теплоты, подведенной к газу, и совершенной над ним работы равна увеличению его внутренней энергии.

Использовав понятия об удельных теплоемкостях c_p и c_v, при подводе теплоты к газу без изменения его объема (v = const, dv = 0) можно записать

$$\mathrm{d}Q_{v\,=\,\mathrm{const}} = c_v\,\mathrm{d}T.$$

Тогда из (1.9) следует, что

$$\mathrm{d}U = c_v\,\mathrm{d}T.$$

Если процесс нагревания газа идет при постоянном давлении, то элементарное количество подведенной теплоты dQ будет составлять

$$\mathrm{d}Q_{p\,=\,\mathrm{const}} = c_p\mathrm{d}T,$$

а внутренняя энергия при одинаковом (по сравнению с первым случаем v = = const) изменении температуры dT изменится на одно и то же значение ($\mathrm{d}U = c_v\,\mathrm{d}T$).

В результате из (1.9) получаем

$$c_p\,\mathrm{d}T = c_v\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}v,$$

или

$$p\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}T} = c_p - c_v. \qquad (1.11)$$

Возьмем далее полный дифференциал от уравнения состояния (1.8а) при p = const:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}T}\,p = R. \qquad (1.12)$$

Из сравнения (1.11) и (1.12) следует, что

$$R = c_p - c_v, \qquad (1.13)$$

или

$$R = c_p\left(1 - \frac{c_v}{c_p}\right) = c_p\,\frac{k-1}{k}, \qquad (1.14)$$

где, как и ранее, $k = c_p/c_v$.

Для определения четвертого термодинамического параметра — энтропии разделим все члены уравнения (1.9) на температуру T:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{\mathrm{d}U}{T} + \frac{p}{T}\,\mathrm{d}v. \qquad (1.15)$$

Согласно уравнению состояния (1.8а)

$$\frac{p}{T} = \frac{R}{v}, \text{ а } U = c_v T.$$

Тогда

$$\frac{\mathrm{d}Q}{T} = c_v \frac{\mathrm{d}T}{T} + R \frac{\mathrm{d}v}{v} = \mathrm{d}\ln\left(T^{c_v} v^{c_p - c_v}\right). \tag{1.15a}$$

Поскольку правая часть уравнения (1.15а) является полным дифференциалом некоторой функции, то левая его часть должна выражаться в виде полного дифференциала некоторой функции состояния газа S, т.е. $\mathrm{d}Q/T = \mathrm{d}s$ и, следовательно,

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}\ln\left(T^{c_v} v^{c_p - c_v}\right). \tag{1.16}$$

Введенная таким образом новая функция s в термодинамике называется **энтропией**. (Рассмотренная методология перехода к энтропии приведена в работе А.П. Мельникова [28].)

Интегрируя (1.16) с учетом (1.15а), получаем

$$s = c_v \ln\left(Tv^{k-1}\right) + \mathrm{const}.$$

Поскольку

$$v^{k-i} = \frac{1}{\rho^{k-i}} = \frac{\rho}{\rho^k} = \frac{p}{\rho^k RT},$$

то

$$s = c_v \ln\left(p/\rho^k\right) + \mathrm{const}. \tag{1.17}$$

В изолированной системе в соответствии со вторым началом термодинамики энтропия может или оставаться постоянной (обратимые процессы), или увеличиваться, т.е. всегда

$$\mathrm{d}s \geq 0.$$

В механике жидкостей и газов особый интерес представляют изоэнтропийные процессы ($S = \mathrm{const}$, $\mathrm{d}s = 0$). В этом случае $\mathrm{d}Q = 0$ и формула (1.17) может быть записана следующим образом:

$$p/\rho^k = \mathrm{const}. \tag{1.18}$$

Если формулу (1.18) записать для двух сечений, причем во втором сечении давление и плотность равны соответственно p_0 и ρ_0, то уравнение изоэнтропы (1.18) можно представить в следующем виде:

$$p/p_0 = (\rho/\rho_0)^k. \tag{1.19}$$

При использовании уравнения состояния (1.7) для изоэнтропийного процесса легко находится и связь отношения давлений с соответствующим отношением температур:

$$p/p_0 = (T/T_0)^{k/(k-1)}. \tag{1.20}$$

1.5. Скорость звука

Скорость звука — это скорость распространения в рассматриваемой среде малых возмущений.

Для нахождения скорости звука поместим источник малых возмущений в точку A (рис. 1.4). Возмущения, создаваемые в точке A, распространяются в пространстве в виде сферических волн и через некоторое время t область возмущений будет представлять собой сферу радиусом r с площадью поверхности F.

С внутренней стороны этой сферы на поверхность F будет действовать сила $F\,\mathrm{d}p$. Возникший малый перепад давления $\mathrm{d}p$ будет обеспечивать перенос через поверхность F некоторой массы жидкости $\mathrm{d}m$ со скоростью $\mathrm{d}c$.

Через время $\mathrm{d}t$ сферическая волна возмущений распространится на добавочное расстояние $\mathrm{d}r$. Таким образом, скорость звука a можно представить в виде производной по времени $\mathrm{d}t$ от размера $\mathrm{d}r$, т.е.

$$a = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t.$$

Теперь внешняя сфера радиусом $r + \mathrm{d}r$ отделяет возмущенную область от невозмущенной, и соответственно на ее внешней стороне давление p_2 будет равно давлению p в невозмущенном потоке, а скорость $c = 0$.

За рассматриваемое время $\mathrm{d}t$ в пространство между указанными на рис. 1.4 сферами войдет элементарная масса сжимаемой жидкости (газа)

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}c\,F\,\mathrm{d}t. \tag{1.21}$$

Поскольку из рассматриваемого объема между двумя сферами жидкость не вытекает, то плотность среды в этом объеме увеличится на $\mathrm{d}\rho$. Соответственно добавочная масса $\mathrm{d}m$ в пространстве между указанными сферами

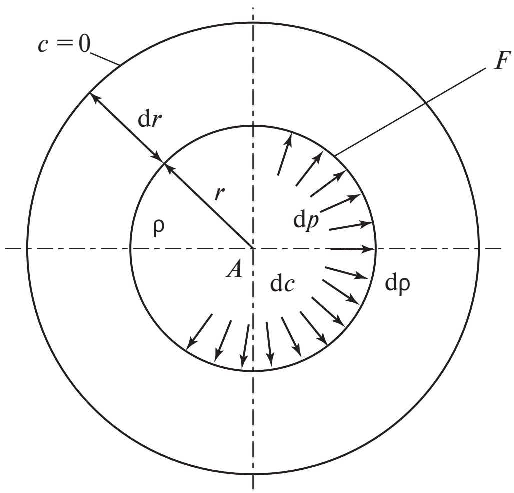


Рис. 1.4. Схема распространений малых возмущений

может быть представлена в виде произведения объема $\mathrm{d}V = F\mathrm{d}r$ на изменение плотности $\mathrm{d}\rho$ в нем:

$$\mathrm{d}m = F\mathrm{d}r\mathrm{d}\rho. \tag{1.22}$$

Приравнивая (1.21) и (1.22)

$$\rho\ \mathrm{d}c\ F\ \mathrm{d}t = F\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\rho,$$

получаем

$$\mathrm{d}c = \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = a\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}. \tag{1.23}$$

Для нахождения скорости $\mathrm{d}c$ применим к массе жидкости, заключенной между первой и второй сферами (рис. 1.4), закон об изменении количества движения, согласно которому изменение количества движения в рассматриваемой области равно импульсу всех внешних сил, действующих на массу жидкости, находящейся в этой области. Следовательно,

$$\underbrace{\underbrace{\rho F\ \mathrm{d}r}_{m}\ \mathrm{d}c}_{\substack{\text{Изменение}\\ \text{количества}\\ \text{движения}}} = \underbrace{\mathrm{d}pF\ \mathrm{d}t}_{\substack{\text{Импульс}\\ \text{силы}\\ \text{давления}}}$$

и

$$\mathrm{d}c = \frac{\mathrm{d}p}{\rho}\frac{1}{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\rho a}. \tag{1.24}$$

Подставим (1.24) в (1.23). Тогда

$$a = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}}. \tag{1.25}$$

Как показывают опыты, процесс распространения малых возмущений с большой точностью можно рассматривать как изоэнтропийный и для получения расчетной формулы может быть использовано соотношение (1.19):

$$p = \rho^k\mathrm{const}.$$

Дифференцируя последнее соотношение, получаем

$$\mathrm{d}p = k\rho^{k-1}\mathrm{d}\rho\ \mathrm{const} = k\rho^{k-1}\ \mathrm{d}\rho\frac{p}{\rho^k} = k\frac{p}{\rho}\ \mathrm{d}\rho.$$

Отсюда $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = k\frac{p}{\rho}$, следовательно, скорость звука

$$a = \sqrt{k\frac{p}{\rho}}. \tag{1.26}$$

Если воспользоваться уравнением состояния (1.8), то при подстановке вместо отношения p/ρ равной этому отношению величины RT, получаем еще одну формулу для определения скорости звука:

$$a = \sqrt{kRT}. \tag{1.27}$$

Соотношение (1.27) показывает, что в среде с заданными физическими свойствами скорость звука однозначно зависит от абсолютной температуры в точке, где определяется скорость звука. Чем выше температура среды T, тем выше скорость звука.

Так как, согласно определению, в движущемся потоке граница скорости, отделяющей сжимаемую жидкость от несжимаемой, составляет примерно 30 % скорости звука, то из формулы (1.27) вытекает, что по мере увеличения начальной температуры абсолютная скорость, при которой можно считать жидкость несжимаемой, может быть очень большой. В то же время при снижении температуры скорость звука уменьшается, и в вакууме, где абсолютная температура равна нулю, скорость звука также оказывается равной нулю.

1.6. Классификация движений жидкости

В общем случае в трехмерной системе координат скорость жидкости и все параметры, определяющие ее состояние, зависят как от координат точки (x, y, z), где эти величины находятся, так и от времени t, т.е.

$$\left.\begin{aligned} c &= f(x, y, z, t); \\ p &= f_1(x, y, z, t); \\ \rho &= f_2(x, y, z, t); \\ T &= f_3(x, y, z, t); \\ S &= f_4(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \qquad (1.28)$$

Течение жидкости, определяемое системой уравнений (1.28), называется **нестационарным трехмерным течением**.

Если все приведенные в (1.28) величины не меняются с течением времени (не зависят от времени):

$$\left.\begin{aligned} c &= f(x, y, z); \\ p &= f_1(x, y, z); \\ \rho &= f_2(x, y, z); \\ T &= f_3(x, y, z); \\ S &= f_4(x, y, z), \end{aligned}\right\} \qquad (1.29)$$

то течение называется **трехмерным стационарным**.

В частном случае возможно течение жидкости, параметры которой и скорость не меняются вдоль одной из координатных осей. Примером такого течения является течение между двумя бесконечными плоскостями, когда все рассматриваемые величины в направлении оси z будут одинаковыми. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} c &= f(x, y); \\ p &= f_1(x, y); \\ \rho &= f_2(x, y); \\ T &= f_3(x, y); \\ S &= f_4(x, y). \end{aligned}\right\} \qquad (1.30)$$

Течение жидкости, зависящее только от двух координат в трехмерном пространстве, называется **плоским стационарным**.

Во многих задачах МЖГ вместо локальных скоростей и параметров потока рассматриваются некоторые средние величины, меняющиеся только вдоль одной координатной оси. Такое простейшее течение называется **одномерным стационарным**.

Естественно, для одномерных течений все расчетные соотношения приобретают наиболее простую форму и физически ясный смысл. По этой причине именно одномерные течения используются для оценочных расчетов течений как в простых, так и в сложных каналах.

1.7. Вязкость в жидких средах

Вязкость жидкости проявляется в ее **способности оказывать сопротивление относительному сдвигу**. Это сопротивление характеризуется значением касательного напряжения τ. Указанное напряжение представляет собой предел отношения силы $F_{\text{тр}}$, необходимой для сдвига частиц жидкости, к площади ΔS поверхности, вдоль которой она действует:

$$\tau = \lim \frac{F_{\text{тр}}}{\Delta S},$$

т.е., касательное напряжение является примером поверхностной силы, обусловленной вязкими свойствами жидкости, и количественно характеризует внутреннее трение при относительном смещении соприкасающихся слоев жидкости.

Как и гидродинамическое давление, напряжение трения τ измеряется в Па = кг/(с^2 · м).

Если в твердых телах согласно закону Гука касательные напряжения пропорциональны угловым деформациям, то в жидкости согласно гипотезе Ньютона о внутреннем трении эти напряжения пропорциональны скоростям угловой деформации. Для ее определения рассмотрим распределение продольной скорости u в вязкой жидкости, движущейся вдоль плоской стенки.

Если в идеальной жидкости все скорости по нормали к стенке будут равны (рис. 1.5, *а*), то в вязкой жидкости картина будет иная.

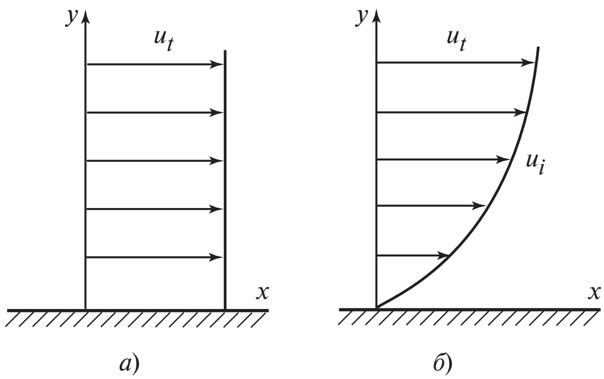


Рис. 1.5. Профили скорости в пристеночной области для идеальной (*а*) и реальной (*б*) жидкостей

Как показывают опыты, скорость в вязкой жидкости непосредственно на стенке всегда равна нулю. (Случай движения сильно разреженных газов мы не рассматриваем.) Частицы жидкости в результате действия межмолекулярных сил сцепления «прилипают» к стенке. (Этот опытный факт лежит в основе гипотезы «прилипания», постулирующей равенство нулю скорости вязкой жидкости на обтекаемых поверхностях.)

Слой жидкости, расположенный на небольшом расстоянии от стенки, уже будет иметь некоторую скорость, которая непрерывно увеличивается по направлению нормали к стенке, пока не достигнет скорости основного потока u_t. В результате профиль скорости у стенки будет иметь вид, показанный на рис. 1.5, *б*. Таким образом, из гипотезы «прилипания» следует, что любая обтекаемая поверхность является сильным источником воздействия на характер течения в пристеночной области. Это вызывает указанное изменение скорости вблизи стенок.

Слой жидкости, в пределах которого ее скорость меняется от нуля на стенке до скорости невозмущенного стенкой течения, получил название **пограничный слой**.

Выделим теперь около стенки два элементарных соседних слоя *I* и *II* шириной dn (рис. 1.6). В нижнем слое зафиксируем частицу жидкости a, а в верхнем — частицу b.

Через время dt частица a, имеющая скорость u, переместится в точку a_1, а частица b, находящаяся на большем расстоянии от стенки и обладающая большей скоростью, равной $u + \mathrm{d}u$, переместится в точку b_1.

В результате, за время dt произойдет сдвиг верхнего слоя относительно нижнего на величину $bb_1 - aa_1 = \mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$. Угол сдвига d$\alpha$ будет составлять

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}t}{\mathrm{d}n}.$$

(Из-за малости угла α $\quad \mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha$.)

Отсюда скорость угловой деформации $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ рассматриваемых слоев жидкости будет представлять собой поперечный градиент скорости $\mathrm{d}u/\mathrm{d}n$.

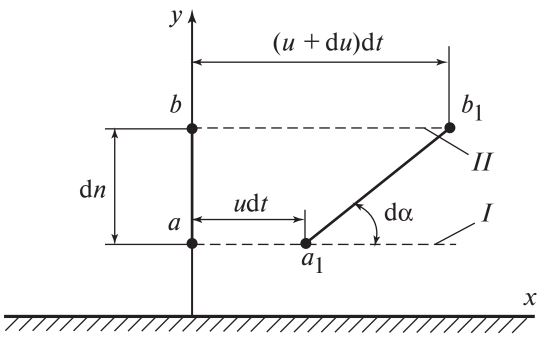


Рис. 1.6. К понятию о скорости угловой деформации

Таким образом, согласно гипотезе Ньютона напряжение внутреннего трения в жидкости будет определяться по следующей простой формуле

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}, \tag{1.31}$$

где коэффициент пропорциональности μ является размерной величиной и называется **динамической вязкостью**. В системе СИ вязкость μ измеряется в Па · с = Н · с/м^2 = кг/(м · с).

Динамическая вязкость μ зависит в основном от физических свойств жидкости и температуры, а с изменением давления эта величина меняется мало.

Для паровых и газообразных сред с ростом температуры имеет место интенсивное увеличение величины μ.

При теоретических расчетах зависимость динамической вязкости от температуры может быть учтена с помощью следующей приближенной формулы:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^n, \tag{1.32}$$

где μ_0 — динамическая вязкость при температуре T_0, а коэффициент n в зависимости от физических свойств среды меняется от 0,5 до 1,0. Для воздуха $n = 0{,}76$.

Для капельных сред рассматриваемая вязкость с ростом температуры снижается.

В механике жидкостей и газов наряду с динамической вязкостью широко используется и **кинематическая вязкость** ν, м^2/с:

$$\nu = \mu / \rho. \tag{1.33}$$

Если динамическая вязкость μ для конкретной среды зависит в основном только от температуры, то кинематическая вязкость меняется и с изменением давления, так как $\rho = f(p, T)$.

Таблица 1.1

Значения динамической, Па · с, и кинематической, м²/с, вязкостей при $p = 10^2$ кПа

Температура, °C	Вода		Воздух	
	$\mu \cdot 10^2$	$\nu \cdot 10^6$	$\mu \cdot 10^4$	$\nu \cdot 10^4$
0	0,179	1,790	0,171	0,132
20	0,100	1,000	0,181	0,150
40	0,066	0,666	0,190	0,169
60	0,047	0,478	0,200	0,188
80	0,036	0,367	0,209	0,209
100	0,028	0,300	0,248	0,210

Численные значения рассматриваемых вязкостей для воды и воздуха при давлении $p = 10^2$ кПа и различных температурах приведены в табл. 1.1.

В случае трехмерного течения вязкой жидкости на каждой грани элементарного параллелепипеда будет действовать, вообще говоря, произвольно направленная сила трения $F_{\text{тр}}$. Если эти грани ориентировать по координатным плоскостям (см. рис. 1.2), то в каждой плоскости можно силу $F_{\text{тр}}$ разложить на две составляющие, как это показано на рис. 1.2, и соответственно получить составляющие напряжения трения по трем координатным осям:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}; \quad & \tau_{yx} &= \mu\gamma_{yx}; \\ \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}; \quad & \tau_{zy} &= \mu\gamma_{zy}; \\ \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx}; \quad & \tau_{xz} &= \mu\gamma_{xz}. \end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

В данном случае γ_{ij} представляют собой полные скорости угловых деформаций, которые складываются из градиентов скорости в направлении двух координатных осей i и j.

Если представить вектор скорости $\vec{c}$ в виде

$$\vec{c} = \vec{i}\,u + \vec{j}\,v + \vec{k}\,w,$$

где u, v, w — составляющие скорости в направлении координатных осей x, y, z, то

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right); \\ \tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right); \\ \tau_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

Отсюда при $w = v = 0$ автоматически получаем частную формулу Ньютона (1.31) для напряжения трения при плоском течении.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается в МЖГ под термином «жидкость» и как классифицируются модели жидкостей?
2. Какие величины относятся к параметрам потока и как они связаны между собой?
3. Охарактеризуйте поверхностные и массовые силы в жидкости.
4. Что такое напряжение давления в идеальной жидкости?
5. В каких случаях давление в жидкости не зависит от ориентации площадки в пространстве?
6. Дайте определение напряжению поверхностной силы.
7. Какие составляющие в декартовой системе координат определяют напряжение поверхностной силы?
8. Что такое напряжение трения в жидкости?
9. Как определяется напряжение массовых сил?
10. Что такое динамическая и кинематическая вязкости и как они взаимосвязаны между собой?
11. В чем суть гипотезы «сплошности»?

Глава 2
ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ ЖИДКОСТИ

2.1. Методы изучения движения жидкости

При математическом описании движения жидкости возможны два различных подхода, предложенных Лагранжем и Эйлером.

По Лагранжу в жидкости выделяется определенная фиксированная частица и задается ее траектория следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(a, b, c, t); \\ y &= f_2(a, b, c, t); \\ z &= f_3(a, b, c, t), \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

где a, b, c — параметры Лагранжа, характеризующие координаты выделенной частицы в начальный момент времени.

Используя зависимости (2.1), легко найти составляющие скорости u, v, w и ускорения выделенного объема жидкости в направлении декартовых осей координат:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}; \\ v &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t}; \\ w &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}t}; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2f_1}{\mathrm{d}t^2}; \\ a_y &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2f_2}{\mathrm{d}t^2}; \\ a_z &= \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2f_3}{\mathrm{d}t^2}. \end{aligned}\right\}$$

Абсолютная скорость в любой момент времени может быть записана в виде векторной суммы своих составляющих:

$$\vec{c} = \vec{i}\,u + \vec{j}\,v + \vec{k}\,w.$$

В отличие от метода Лагранжа **метод Эйлера** состоит в том, что задается не траектория конкретной частицы жидкости, а все поле скоростей как функция координат и времени:

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x, y, z, t); \\ v &= v(x, y, z, t); \\ w &= w(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

Для нахождения изменения скорости с течением времени в любой фиксированной точке рассматриваемого пространства необходимо только задать координаты этой точки. В частности, изменение скорости в точке с координатами $x = a$, $y = b$, $z = c$ будет определяться следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u(a, b, c, t); \\ v_1 &= v(a, b, c, t); \\ w_1 &= w(a, b, c, t). \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

Таким образом, составляющие скорости, являясь в общем случае функциями четырех переменных, в фиксированной точке пространства зависят только от времени.

Для нахождения траектории конкретной частицы необходимо проинтегрировать систему уравнений (2.3):

$$\left.\begin{aligned} x &= \int u\,\mathrm{d}t = f_1(a, b, c, t); \\ y &= \int v\,\mathrm{d}t = f_2(a, b, c, t); \\ z &= \int w\,\mathrm{d}t = f_3(a, b, c, t), \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

где a, b, c — постоянные интегрирования, определяющие, как и в методе Лагранжа, положение рассматриваемой частицы в начальный момент времени $t = t_0$.

Поле ускорений находится путем прямого дифференцирования зависимостей (2.2) по времени с учетом того, что каждая дифференцируемая функция зависит от четырех переменных. Тогда

$$a_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

Поскольку $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = v$, $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = w$, то

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}; \\ a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}; \\ a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

Видно, что в общем случае ускорение складывается из **локального изменения скорости** [первые члены правых частей (2.5)], определяемого частными производными ее составляющих по времени $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$, $\partial w/\partial t$, и изменения скорости, обусловленного перемещением частицы в пространстве [три следующие члена, правых частей (2.5)]. Последние составляющие полного ускорения называются конвективными.

Для стационарного трехмерного течения, когда скорости и ускорения не зависят от времени, локальные составляющие скорости равны нулю $\left(\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0\right)$ и в соотношениях (2.5) сохраняются только конвективные члены:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z};\\ a_y &= u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z};\\ a_z &= u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Частными случаями (2.6) являются плоские и одномерные течения. В первом случае скорость зависит только от двух координат. Например, все изменения скорости происходят только в плоскости переменных x и y, а при переходе к соседней плоскости (z = const) никакого изменения ее составляющих не происходит $\left(\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial z}=0\right)$.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} a_x &= u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y};\\ a_y &= u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Если течение одномерно, т.е. изменение скорости происходит только вдоль одной координаты (например, x), то

$$a_x = u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = c\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}.$$

Приведенные случаи движения жидкости существенно упрощают математическое исследование течения и часто сложное трехмерное течение сводят к плоскому или одномерному.

Конвективное ускорение, определяемое соотношениями (2.6), содержит компоненты скорости и их производные по одноименным $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)$ и разноименным $\left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right)$ координатам. В МЖГ приведенные **частные производные определяют относительные скорости линейных и угловых деформаций**, характеризуя в конечном счете **деформацию жидких элементов и их вращательное движение**.

2.2. Деформация жидких элементов и вращательное движение в жидкости

Для начала рассмотрим, как будет деформироваться линейный элемент жидкости AB (рис. 2.1) длиной dx, движущийся вдоль оси x. Пусть его левый конец (точка A) имеет скорость u_A. Тогда скорость правого конца (точка B) в направлении оси x будет складываться из скорости в точке A и приращения скорости на расстоянии dx, равного $\partial u / \partial x \; \mathrm{d}x$, т.е.

$$u_B = u_A + \frac{\partial u_A}{\partial x} \, \mathrm{d}x.$$

В результате разницы скоростей в точках A и B за время dt произойдет не только смещение выделенного элемента вдоль оси x, но и его линейная деформация. Эта деформация Δdx будет составлять

$$\Delta \mathrm{d}x = BB' - AA'.$$

Поскольку

$$BB' = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t,$$

а

$$AA' = u\mathrm{d}t,$$

то

$$\Delta \mathrm{d}x = \frac{\partial u}{\partial x} \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t.$$

Аналогичным образом получим абсолютные линейные деформации жидкости в направлении осей y и z. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \Delta \mathrm{d}x &= \frac{\partial u}{\partial x} \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t; \\ \Delta \mathrm{d}y &= \frac{\partial v}{\partial y} \, \mathrm{d}y \; \mathrm{d}t; \\ \Delta \mathrm{d}z &= \frac{\partial w}{\partial z} \, \mathrm{d}z \; \mathrm{d}t. \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

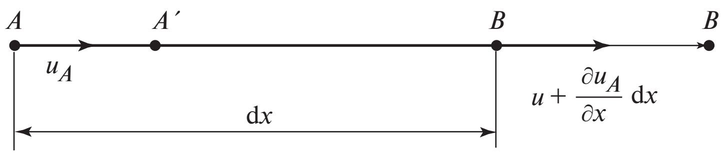


Рис. 2.1. Линейная деформация жидкого элемента

Относительные деформации жидкости вдоль осей x, y и z будут составлять:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}t;\\ \frac{\Delta \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} &= \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}t;\\ \frac{\Delta \mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} &= \frac{\partial w}{\partial z}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}\right\} \tag{2.8а}$$

Скорости относительных линейных деформаций жидкости вдоль осей x, y и z составляют:

$$\left.\begin{aligned}\overline{\Delta}_x &= \frac{\Delta \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x};\\ \overline{\Delta}_y &= \frac{\Delta \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial y};\\ \overline{\Delta}_z &= \frac{\Delta \mathrm{d}z}{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{2.8б}$$

Таким образом, **частные производные от составляющих скорости** c по одноименным координатам **определяют скорости относительных линейных деформаций**.

Если движение жидкого элемента, ориентированного вдоль оси x, происходит в направлении оси y (рис. 2.2), то за время $\mathrm{d}t$ он из положения AB переместится в положение $A'B'$, причем под действием разницы в скоростях точек A и B произойдет угловая деформация рассматриваемого элемента.

Эта деформация будет составлять

$$\operatorname{tg}\mathrm{d}\gamma \approx \mathrm{d}\gamma = \frac{BB' - AA'}{\mathrm{d}x} = \frac{\left(v + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}t - v\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial v\,\mathrm{d}t}{\partial x}. \tag{2.9}$$

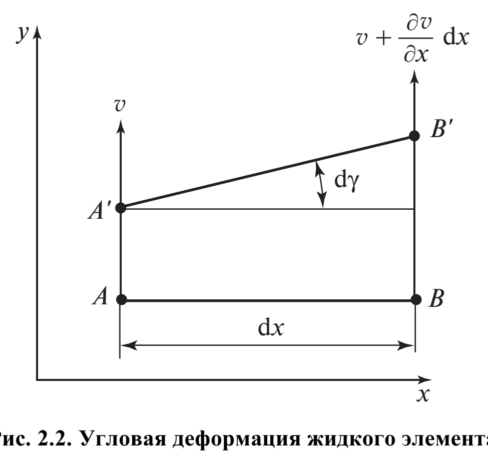


Рис. 2.2. Угловая деформация жидкого элемента

Отсюда

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} .$$

Следовательно, **производные от составляющих скорости по разноименным координатам** дают **скорости угловой деформации** жидкого элемента, что уже было показано ранее (см. § 1.7).

Рассматривая движение реальной вязкой жидкости, во многих случаях можно наблюдать области, где происходит интенсивное ее вращение, напоминающее вращение твердого тела.

Однако, если в твердом теле частицы при вращении не меняют своего расположения относительно друг друга, то в жидкости одновременно с вращением происходит и угловая деформация, меняющая первоначальную форму рассматриваемого элемента.

Для того чтобы разделить вращение жидкого элемента, характеризуемого вектором угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ и угловой деформации, спроектируем на плоскость $x0z$ элементарный жидкий параллелепипед (рис. 2.3).

При его перемещении из положения *I* в положение *II* прямые углы не сохранятся, и в новом положении проекция исходного параллелепипеда будет иметь вид $A'B'C'D'$.

Углы скашивания $d\gamma_1$ и $d\gamma_2$ согласно соотношению (2.9) связаны с проекциями скорости u и w следующим образом:

$$d\gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial z}\, dt; \quad d\gamma_2 = \frac{\partial w}{\partial x}\, dt. \tag{2.10}$$

Изменение углов исходного параллелепипеда происходит в результате сложения угла поворота $d\alpha$ и угла $d\beta$, определяемого деформацией скашивания. Если предположить, что деформация скашивания всех углов рассматриваемой грани одинакова и составляет угол $d\beta$, то

$$\left.\begin{aligned} d\gamma_1 &= d\alpha + d\beta; \\ -d\gamma_2 &= d\alpha + d\beta. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

При выборе знаков угол считается положительным, когда он отсчитывается в направлении круговой перестановки индексов координатных осей.

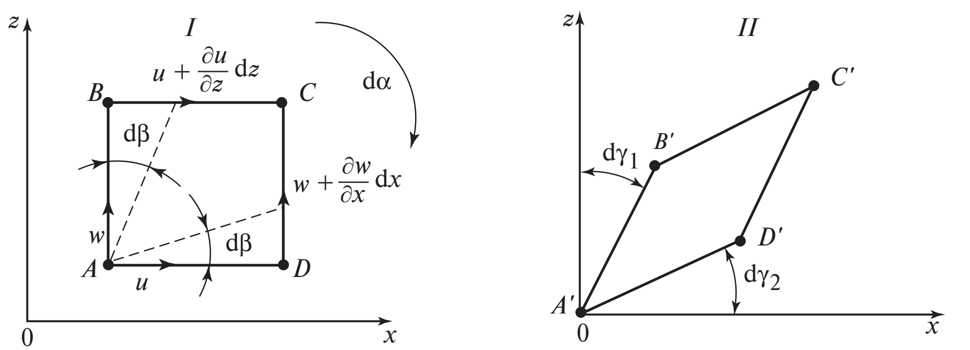


Рис. 2.3. Деформация плоского элемента жидкости

Если углы отсчитываются от оси z к оси x, от оси x к оси y и от оси y к оси z, то этим углам приписывают положительный знак.

При отсчете углов в обратном направлении их значения будут иметь отрицательный знак.

Складывая и вычитая соотношения (2.11), находим угол $d\alpha$, определяющего поворот, и величину $d\beta$, характеризующую деформацию граней каждого элемента:

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= \frac{1}{2}(d\gamma_1 - d\gamma_2); \\ d\beta &= \frac{1}{2}(d\gamma_1 + d\gamma_2). \end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

Используя (2.10), получаем

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) dt; \\ d\beta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dt. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда составляющие векторов скорости углового поворота (угловая скорость ω_z) и скорости деформации (δ_z) выразятся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \omega_y &= \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right); \\ \delta_y &= \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

Аналогичные рассуждения применительно к проекциям исходного параллелепипеда на остальные координатные плоскости дают возможность определить все составляющие вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ и вектора деформации $\vec{\delta}$:

$$\vec{\omega} = \vec{i}\,\omega_x + \vec{j}\,\omega_y + \vec{k}\,\omega_z;$$

$$\vec{\delta} = \vec{i}\,\delta_x + \vec{j}\,\delta_y + \vec{k}\,\delta_z.$$

Здесь составляющие рассматриваемых векторов будут определяться в виде:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right); \\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right); \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right); \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right); \\ \delta_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right); \\ \delta_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2.14а)$$

Индексы при указанных величинах соответствуют координатной оси, перпендикулярно которой расположена плоскость проекции исходного параллелепипеда, или оси, вокруг которой рассматривается поворот жидкой частицы.

Для запоминания выражений (2.14) и (2.14а) целесообразно пользоваться рис. 2.4, где показана схема перестановки индексов.

Например, если необходимо записать выражение для ω_x, то первым членом будет частная производная от составляющей скорости по оси, предшествующей оси x (т.е. w), по координате, следующей за осью x (т.е. y).

Используя выражение (2.14а) для составляющих вектора деформации $\vec{\delta}$, легко найти скорости скашивания прямых углов (суммарную скорость угловой деформации) в плоскостях xy; yz; zx.

Обозначая, как и ранее [см. (1.34)], эти скорости через γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2\delta_z = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \gamma_{yz} &= 2\delta_x = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \gamma_{zx} &= 2\delta_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

Таким образом, в общем случае движение жидкой частицы складывается из поступательного, вращательного и деформационного движений (теорема Гельмгольца).

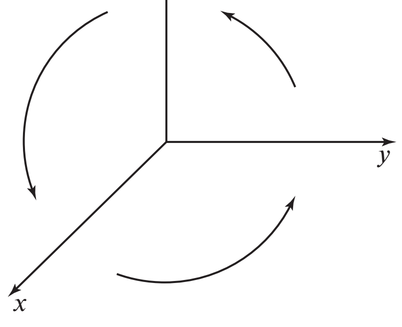


Рис. 2.4. Схема круговой перестановки индексов

2.3. Скорость относительной объемной деформации жидкого элемента

Выделим в движущейся жидкости элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz (рис. 2.5). Если в начальный момент времени он занимал положение *I*, то через промежуток времени dt произойдет его смещение в положение *II*. При этом за счет линейной деформации ребер рассматриваемого параллелепипеда изменится его первоначальный объем. Изменением длины ребер за счет их угловой деформации вследствие малости такого изменения можно пренебречь.

Найдем изменение первоначального объема $\mathrm{d}V_1 = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ при смещении его из положения *I* в положение *II*, имея в виду линейную деформацию ребер, определяемую выражениями (2.8):

$$\Delta(\mathrm{d}V) = \mathrm{d}V_2 - \mathrm{d}V_1 = (\mathrm{d}x + \Delta\mathrm{d}x)(\mathrm{d}y + \Delta\mathrm{d}y)(\mathrm{d}z + \Delta\mathrm{d}z) - \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \left(\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)\left(\mathrm{d}y + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\right)\left(\mathrm{d}z + \frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t\right) - \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Перемножив все члены в скобках и отбросив малые высших по сравнению с dV порядков, получим

$$\Delta(\mathrm{d}V) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t\,.$$

Отсюда относительное изменение первоначального объема за время dt

$$\frac{\Delta(\mathrm{d}V)}{\mathrm{d}V} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}t\,,$$

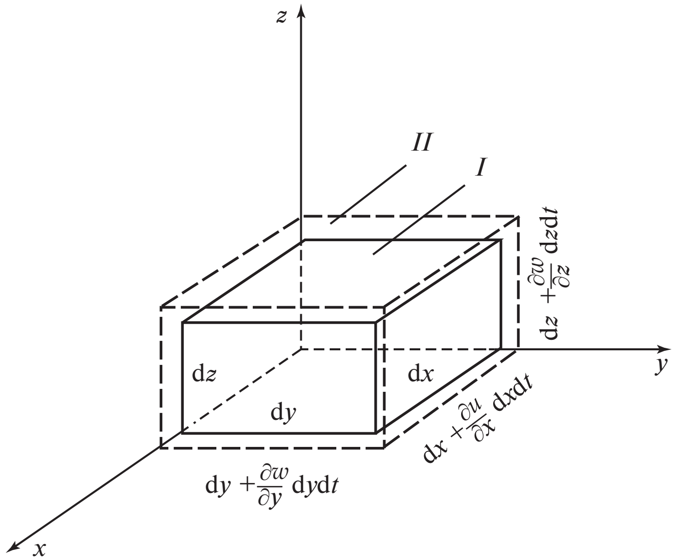


Рис. 2.5. Схема объемной деформации жидкого элемента

а скорость относительного изменения жидкого объема (скорость объемной деформации)

$$e = \frac{1}{\mathrm{d}V}\,\frac{\Delta(\mathrm{d}V)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\ .$$

Полученное соотношение представляет собой дивергенцию вектора скорости $\vec{c}$ и обозначается как div $\vec{c}$. Таким образом,

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \mathrm{div}\ \vec{c}\ . \qquad (2.16)$$

2.4. Линия тока и вихревая линия

Линия, касательная к которой в каждой точке дает направление вектора скорости, называется **линией тока** (рис. 2.6, *а*).

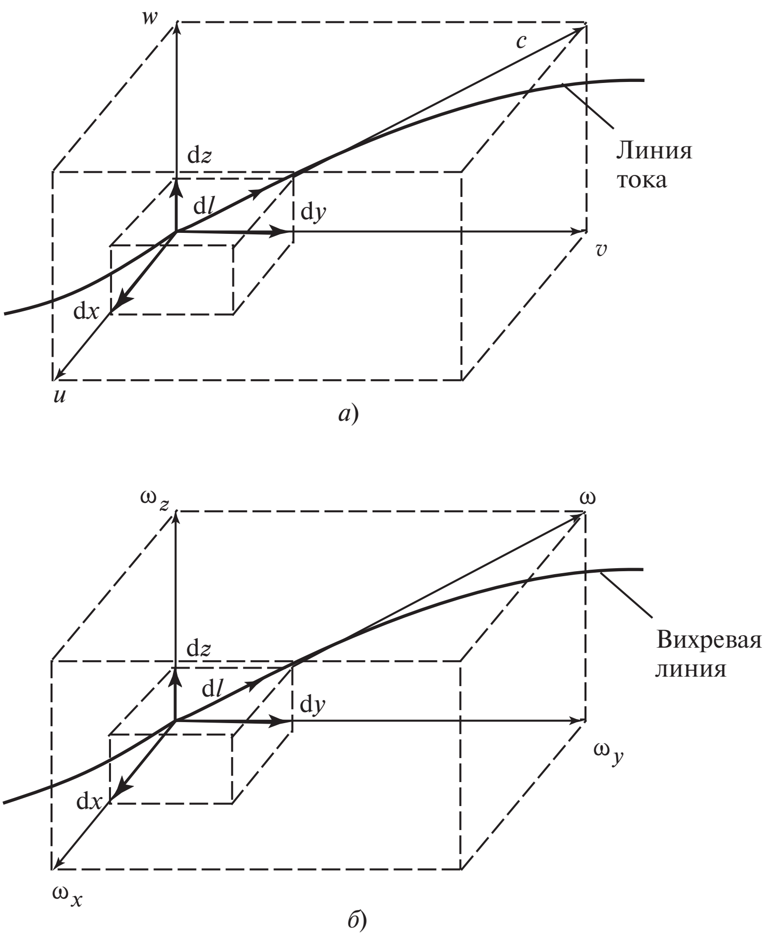


Рис. 2.6. Линии тока (*а*) и вихревые линии (*б*)

Линия, касательная к которой в каждой точке определяет направление вектора угловой скорости ω, называется **вихревой линией** (рис. 2.6, *б*).

Приведенные определения означают, что векторы скорости $\vec{c}$ и угловой скорости $\vec{\omega}$ коллинеарны с вектором $\mathrm{d}\vec{l}$.

Условие коллинеарности дает возможность определить уравнения линий тока и вихревых линий, так как в этом случае векторные произведения $\left|\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{c}\right|$ и $\left|\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{\omega}\right|$ должны обращаться в нуль.

Если

$$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{i}\,\mathrm{d}x + \vec{j}\,\mathrm{d}y + \vec{k}\,\mathrm{d}z,$$

то

$$\left|\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{c}\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & v & w \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{vmatrix} = 0, \tag{2.17}$$

$$\left|\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{\omega}\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{vmatrix} = 0. \tag{2.18}$$

Раскрывая определители, получаем

$$\vec{i}\,(v\,\mathrm{d}z - w\,\mathrm{d}y) + \vec{j}\,(w\,\mathrm{d}x - u\mathrm{d}z) + \vec{k}\,(u\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x) = 0;$$

$$\vec{i}\,(\omega_y\mathrm{d}z - \omega_z\mathrm{d}y) + \vec{j}\,(\omega_z\mathrm{d}x - \omega_x\mathrm{d}z) + \vec{k}\,(\omega_x\mathrm{d}y - \omega_y\mathrm{d}x) = 0.$$

Вектор, разложенный по трем взаимно ортогональным осям, равен нулю в случае, когда все его составляющие порознь обращаются в нуль. Следовательно,

$$\begin{aligned} &v\,\mathrm{d}z - w\,\mathrm{d}y = 0; \quad && \omega_y\mathrm{d}z - \omega_z\mathrm{d}y = 0; \\ &w\,\mathrm{d}x - u\mathrm{d}z = 0; && \omega_z\mathrm{d}x - \omega_x\mathrm{d}z = 0; \\ &u\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x = 0; && \omega_x\mathrm{d}y - \omega_y\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Отсюда для линии тока можно записать

$$\frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v} = \frac{\mathrm{d}z}{w}. \tag{2.19}$$

Для вихревой линии имеем

$$\frac{\mathrm{d}x}{\omega_x} = \frac{\mathrm{d}y}{\omega_y} = \frac{\mathrm{d}z}{\omega_z}. \tag{2.20}$$

Полученные соотношения по заданному полю скоростей или вихревому полю позволяют найти математическое выражение для линии тока или вихревой линии.

В качестве примера получим уравнения линий тока для течения, поле скоростей которого определяется следующими соотношениями:

$$u = 1 + y; \quad v = -x; \quad w = 0; \quad c = \sqrt{x^2 + (1 + y)^2}.$$

В данном случае течение установившееся (от времени не зависит) и плоское ($w = 0$). Из (2.19) получаем

$$\frac{dx}{1 + y} = \frac{dy}{-x}.$$

Отсюда

$$\frac{x^2}{2} + \left(y + \frac{y^2}{2}\right) = \text{const}$$

или

$$x^2 + (1 + y)^2 = \text{const}. \qquad (2.21)$$

Уравнение (2.21) определяет семейство окружностей, центр которых расположен в точке A с координатами (0, –1).

Направление движения жидкости можно найти по значению косинусов углов между вектором скорости и осями x и y. При этом

$$\cos(cx) = \frac{u}{c} = \frac{1 + y}{\sqrt{x^2 + (1 + y^2)}}.$$

Для произвольной точки N, лежащей в первой четверти координатной плоскости ($x > 0$, $y > 0$) $\cos(cx) > 0$. Следовательно, угол между осью x и направлением скорости $\vec{c}$ острый (рис. 2.7) и жидкость движется по круговым линиям тока в направлении движения часовой стрелки.

Рис. 2.7. Движение жидкости по концентрическим окружностям

Кроме линий тока при изучении движения жидкостей определенный интерес представляют и траектории жидких частиц, которые изображают форму пути, пройденного фиксированной частицей жидкости за некоторый отрезок времени.

Согласно уравнениям (2.19) дифференциальное уравнение траектории можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}x}{u(x,\,y,\,z,\,t)} = \frac{\mathrm{d}y}{v(x,\,y,\,z,\,t)} = \frac{\mathrm{d}z}{w(x,\,y,\,z,\,t)} = \mathrm{d}t\,. \qquad (2.22)$$

Математическая запись (2.22) отличается от записи (2.19) наличием полного дифференциала от времени. Физически это приводит к разнице в форме траектории и линии тока при неустановившемся течении жидкости.

При установившемся течении линии тока и траектории фиксированных частиц жидкости совпадают, так как в этом случае в уравнении траектории (2.22) полный дифференциал от времени $\mathrm{d}t$ обращается в нуль и уравнения (2.22) и (2.19) становятся тождественными.

2.5. Трубка тока и вихревая трубка

Если в жидкости выделить два произвольных контура L_1 и L_2 (рис. 2.8) с площадками F_1 и F_2 и соединить все точки этих контуров линиями тока, то образуется некоторая трубка.

Поскольку векторы скорости всегда касательны к линии тока (по определению), то совокупность линий тока, образующих поверхность **трубки тока**, аналогична некоторой твердой поверхности, расход через которую равен нулю. При стационарном течении жидкость как бы скользит вдоль поверхности трубки тока, все время оставаясь внутри нее.

Аналогичные рассуждения можно привести и в частном случае плоского течения, где любую линию тока можно рассматривать как результат проекции на рассматриваемую плоскость бесконечно широкой твердой поверхности.

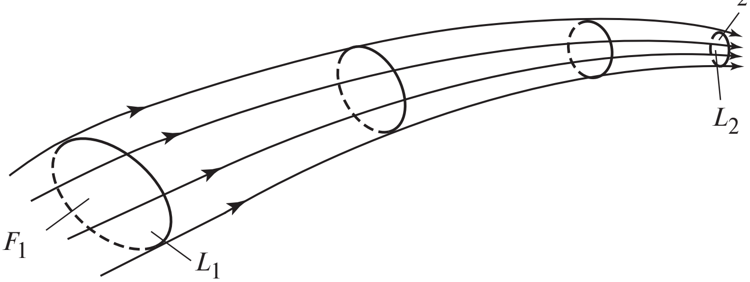


Рис. 2.8. К определению трубки тока

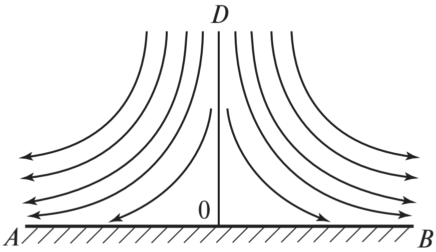


Рис. 2.9. Схема натекания потока на твердую стенку

Для примера на рис. 2.9 приведены линии тока безвихревого потока, натекающего на бесконечную плоскость, которая при проекции на плоскость xy обращается в линию AB.

Пользуясь указанным правилом и принимая за твердую стенку линию $D0B$, получим картину движения жидкости внутри прямого угла, образованного пересечением двух бесконечно широких плоскостей.

Рассматривая вихревое движение жидкости таким же образом, можно определить и **вихревую трубку**, т.е. трубку, поверхность которой образована вихревыми линиями. Поскольку вихревая линия в любой точке по направлению всегда совпадает с вектором $\vec{\omega}$, то **ни одна вихревая линия не может пересекать поверхность вихревой трубки**.

Если трубку тока в реальной жидкости можно сопоставить с поверхностью некоторого реального канала, то понятие вихревой трубки является в определенном смысле абстрактным, используемым для выяснения особенностей вихревого движения.

2.6. Циркуляция скорости

Понятие о циркуляции скорости широко используется при изучении вихревых движений жидкости, поскольку, как будет показано далее, циркуляция скорости является мерой интенсивности вихревого движения и с ее помощью определяется важная часть силового взаимодействия жидкости с обтекаемым телом.

Циркуляция скорости Γ представляет собой интеграл от скалярного произведения скорости $\vec{c}$ на элемент пути $\mathrm{d}\vec{S}$ вдоль всего отрезка пути L.

Если

$$\vec{c} = \vec{i}\,u + \vec{j}\,v + \vec{k}\,w,$$

а

$$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{i}\,\mathrm{d}x + \vec{j}\,\mathrm{d}y + \vec{k}\,\mathrm{d}z,$$

то

$$\Gamma = \int_L \vec{c}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_L c\cos(cS)\,\mathrm{d}S = \int_L (u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y + w\,\mathrm{d}z)\,. \qquad (2.23)$$

Формально выражение (2.23) совпадает с выражением для определения работы A, совершаемой силой F на пути L. Однако физический смысл работы A и циркуляции Γ совершенно различен.

При решении практических задач циркуляция скорости вычисляется обычно по замкнутому контуру L. При этом совершенно не безразлично, в каком направлении производится обход контура. Для определенности принято, что **циркуляции** Γ приписывается **положительный знак**, если при обходе контура его **внутренняя часть остается слева**.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем суть методов Лагранжа и Эйлера при изучении движения жидкости?
2. Что такое конвективное и локальное ускорения?
3. В чем состоит физический смысл частных производных от проекций скорости на оси координат?
4. Как связан вектор угловой скорости в жидкости с ее проекциями на координатные оси прямоугольной системы координат?
5. Что такое скорость объемной деформации жидкого элемента?
6. Сформулируйте теорему Гельмгольца о движении жидкой частицы в общем случае.
7. Дайте определение линии тока и вихревой линии.
8. Что такое трубка тока и вихревая трубка?
9. В чем разница между линией тока и траекторией жидкой частицы?
10. Что такое циркуляция скорости по контуру?

Глава 3

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ НЕСЖИМАЕМЫХ И СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

3.1. Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности представляет собой математическое выражение закона сохранения массы, записанное для движущейся среды. Согласно этому закону масса m изолированной системы за все время движения остается постоянной, т.е. полная производная от массы по времени должна равняться нулю:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Так как $m = \rho V$, где V — объем движущейся жидкости, то

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + V\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Отсюда

$$\rho\frac{\mathrm{d}V}{V\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{3.1}$$

Комплекс $\mathrm{d}V/(V\,\mathrm{d}t)$ представляет собой скорость относительной объемной деформации и согласно выражению (2.16) может быть представлен в виде

$$\frac{\mathrm{d}V}{V\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \mathrm{div}\ \vec{c}. \tag{3.2}$$

Поскольку плотность ρ является функцией координат и времени, то

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z}. \tag{3.3}$$

Подставляя (3.2) и (3.3) в (3.1), получаем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) является дифференциальным уравнением неразрывности нестационарного трехмерного течения.

После несложной группировки уравнение (3.4) может быть записано в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \tag{3.5}$$

Отсюда, используя операторы векторной алгебры, будем иметь

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\vec{c}) = 0. \tag{3.6}$$

При стационарном течении локальное изменение плотности по времени $\partial\rho/\partial t = 0$. Следовательно,

$$\operatorname{div}(\rho\vec{c}) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \qquad (3.7)$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \mathrm{const}$. В результате

$$\operatorname{div}\vec{c} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad (3.8)$$

Физически это означает, что при стационарном движении несжимаемой жидкости скорость ее объемной деформации равна нулю.

Если рассматривается плоское стационарное течение сжимаемой жидкости, то

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0. \qquad (3.9)$$

При $\rho = \mathrm{const}$ (*несжимаемая жидкость*)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \qquad (3.10)$$

Для инженерных расчетов в большинстве случаев используется не дифференциальная, а интегральная форма записи уравнения неразрывности. Для представления этого уравнения в интегральной записи рассмотрим элемент трубки тока, расположенный между контрольными сечениями *I* и *II* (рис. 3.1).

Согласно закону сохранения массы, при стационарном течении масса жидкости, втекающей внутрь рассматриваемого объема, должно равняться массе жидкости, покидающей этот объем. Другими словами, расход массы через поверхность рассматриваемого объема должен быть равен нулю, что эквивалентно следующей записи:

$$\int_F \rho_i c_{ni}\, \mathrm{d}F = 0. \qquad (3.11)$$

Рис. 3.1. Схема течения в трубке тока

Здесь F — площадь всей поверхности рассматриваемого объема; c_{ni} — скорость, вектор которой в каждой точке нормален к элементу поверхности $\mathrm{d}F$.

Представим уравнение (3.11) в виде суммы трех интегралов, взятых по площадям F_1, боковой поверхности $F_б$, и F_2 (рис. 3.1), причем знак интеграла будем считать положительным, если направление нормальной составляющей скорости совпадает с направлением нормали к поверхности, и отрицательным в случае различного направления указанных векторов. При направлении нормалей внутрь рассматриваемого объема, получим

$$\int\limits_{F_1} \rho_i c_{ni}\,\mathrm{d}F \pm \int\limits_{F_б} \rho_i c_{ni}\,\mathrm{d}F - \int\limits_{F_2} \rho_j c_{nj}\,\mathrm{d}F = 0.$$

Расход жидкости через боковую поверхность равен нулю, так как рассматривается трубка тока, и, следовательно, вектор скорости потока всюду направлен вдоль боковой поверхности ($c_n^б = 0$). Тогда

$$\int\limits_{F_1} \rho_i c_{ni}\,\mathrm{d}F = \int\limits_{F_2} \rho_j c_{nj}\,\mathrm{d}F. \tag{3.12}$$

Поскольку контрольные сечения были выбраны совершенно произвольно, то из (3.12) следует, что в трубке тока при установившемся течении жидкости ее массовый расход в каждом сечении остается постоянным, т.е.

$$\int\limits_{F} \rho_i c_{ni}\,\mathrm{d}F = \mathrm{const}. \tag{3.13}$$

Постоянная в (3.13) равна массовому расходу m (const = m).

Выражение (3.13) принимает особенно простой вид, если вектор скорости совпадает с направлением нормали к поверхности интегрирования и, кроме того, в поперечном сечении значения плотности и скорости не меняются. Тогда в любом сечении трубки тока

$$\rho_i c_i F_i = m. \tag{3.14}$$

Полученное уравнение называют **уравнением расхода для одномерного течения**. Заметим, что на практике зависимость (3.14) используется и при неравномерном распределении параметров в поперечном сечении канала. В этом случае вместо действительных значений скорости и плотности вводят некоторые средние значения, использование которых позволяет найти массовый расход по весьма простому уравнению (3.14).

Для несжимаемой жидкости (ρ = const) вместо уравнения массового расхода (3.14) часто используют **уравнение объемного расхода** Q:

$$c_i F_i = \frac{m}{\rho} = Q. \tag{3.15}$$

3.2. Уравнения движения идеальной жидкости

Для вывода уравнений движения идеальной жидкости применим закон о сохранении количества движения к элементарному жидкому элементу массой Δm.

Согласно этому закону скорость изменения вектора количества движения должна равняться сумме векторов всех массовых и поверхностных сил, действующих на выделенный жидкий элемент.

В качестве такого элемента примем жидкий прямоугольный параллелепипед с ребрами $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ (рис. 3.2).

В общем случае на этот элемент действует некоторый суммарный вектор поверхностных сил $\vec{P}$ и вектор массовых сил $\vec{M}$, отнесенных к единице объема $\Delta V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Математическая запись сформулированного выше закона с учетом введенных обозначений будет иметь следующий вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta m\,\vec{c}) = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\;\vec{P} + \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\;\vec{M}.$$

Дифференцируя вектор количества движения $(\Delta m\,\vec{c})$ по времени, получаем

$$\Delta m\frac{\mathrm{d}\vec{c}}{\mathrm{d}t} + \vec{c}\,\frac{\mathrm{d}\Delta m}{\mathrm{d}t} = \vec{P}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \rho\,\vec{M}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \qquad (3.16)$$

Согласно закону сохранения массы

$$\frac{\mathrm{d}\Delta m}{\mathrm{d}t} = 0.$$

В результате с учетом того, что для выделенного жидкого элемента $\Delta m =$ $= \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ зависимость (3.16) примет вид

$$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{c}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \rho\,\vec{M}, \qquad (3.17)$$

разложим векторы, входящие в уравнение (3.17), на составляющие по осям прямоугольной системы координат:

$$\left.\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{i}\,u + \vec{j}\,v + \vec{k}\,w;\\ \vec{P} &= \vec{i}\,P_x + \vec{j}\,P_y + \vec{k}\,P_z;\\ \vec{M} &= \vec{i}\,X + \vec{j}\,Y + \vec{k}\,Z. \end{aligned}\right\} \qquad (3.18)$$

Здесь, как и ранее, u, v, w — проекции вектора абсолютной скорости $\vec{c}$ на координатные оси, а P_x, P_y, P_z, X, Y, Z — проекции на эти оси поверхностных и массовых сил.

Используя разложения (3.18), спроектируем векторное уравнение (3.17) на координатные оси x, y, z. В результате получаем следующие три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= P_x + \rho X; \\ \rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= P_y + \rho Y; \\ \rho\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= P_z + \rho Z. \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

Найдем составляющие поверхностных сил P_x, P_y, P_z, действующие на грани выделенного жидкого параллелепипеда (рис. 3.2), имея в виду, что в идеальной жидкости на каждую грань действует только напряжение давления, направленное внутрь выделенного жидкого элемента.

Так, на правую грань, перпендикулярную оси x, будет действовать сила, равная произведению площади грани $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ на давление p, т.е. $p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Давление на левой грани изменится и, учитывая малые линейные размеры рассматриваемого жидкого элемента, его можно представить в виде $p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x$.

В результате на левую грань будет действовать сила $-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

(Знак «минус» указывает, что направление действия силы противоположно направлению координатной оси x.)

Суммируя приведенные силы, получаем поверхностную силу, действующую на грани, перпендикулярные оси x. Она будет равна $(-\partial p/\partial x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

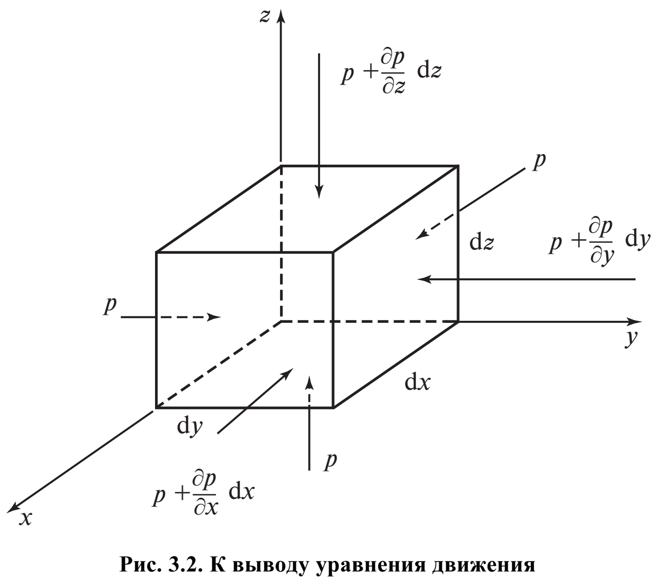


Рис. 3.2. К выводу уравнения движения

Отсюда составляющая поверхностной силы P_x, отнесенной к единице объема $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, будет иметь вид

$$P_x = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Аналогичным образом найдем

$$P_y = -\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$P_z = -\frac{\partial p}{\partial z}.$$

В результате уравнения (3.19) примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X;\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y;\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z.
\end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

Записывая ускорение в левой части в виде суммы локального и конвективного ускорений [см. (2.5)], получаем:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X;\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y;\\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z.
\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

Уравнения (3.21) являются уравнениями движения идеальной жидкости в форме, предложенной Эйлером.

Для *установившегося течения* локальные составляющие ускорений равны нулю и система (3.21) несколько упрощается:

$$\left.\begin{aligned}
u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X;\\
u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y;\\
u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z.
\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

В случае плоского стационарного течения остаются два уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X;\\
u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y.
\end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Наконец, при одномерном течении, когда параметры потока и скорость зависят только от одной координаты, система (3.22) сводится к одному простому уравнению

$$c\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + X. \tag{3.24}$$

Заметим, что в ряде задач МЖГ роль массовых сил весьма мала и ими без большой погрешности можно вообще пренебречь, считая $X = Y = Z = 0$. Тогда для одномерного течения

$$c\,\mathrm{d}c = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}p. \tag{3.25}$$

Полученные уравнения движения совместно с дифференциальным уравнением неразрывности, дополненные соответствующими начальными и граничными условиями, позволят, в принципе, решить задачу о движении несжимаемой идеальной жидкости в любом заданном канале или задачу обтекания идеальной жидкостью любого заданного тела.

В общем случае проинтегрировать нелинейные уравнения движения нельзя, но для некоторых частных случаев интегрирование уравнений движения (3.22) может быть выполнено. С этой целью преобразуем рассматриваемые уравнения (3.22) к виду, предложенному проф. И.С. Громеко в 1881 г.

Начнем преобразования с первого уравнения (3.22), вычитая и прибавляя к членам, содержащим производные по одноименным координатам, одни и те же величины, не нарушая тем самым значения конвективного ускорения:

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} - \underbrace{v\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial x}}_{0} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} - \underbrace{w\,\frac{\partial w}{\partial x} + w\,\frac{\partial w}{\partial x}}_{0} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} + X.$$

Сгруппируем далее члены в левой части последнего уравнения следующим образом:

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial x} + w\,\frac{\partial w}{\partial x} - v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + w\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} + X.$$

Легко видеть, что

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c^2}{2}\right);$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_z; \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 2\omega_y \quad [\text{см. } (2.14)].$$

Таким образом, первое уравнение движения системы (3.22) может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - X = 2v\omega_z - 2w\omega_y.$$

К левой части второго уравнения движения прибавим и вычтем из нее следующие члены: $\pm u\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\pm w\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

Тогда

$$u\frac{\partial v}{\partial x} - \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial u}{\partial y}}_{0} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - \underbrace{w\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial y}}_{0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y$$

или

$$u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial y} - w\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y,$$

в этом уравнении

$$u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c^2}{2}\right);$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\omega_x; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_z.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - Y = 2w\omega_x - 2u\omega_z.$$

Аналогичным образом преобразуется и третье уравнение. В результате система (3.22) принимает вид, впервые предложенный проф. И.С. Громеко в 1881 г.:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - X = 2v\omega_z - 2w\omega_y;\\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - Y = 2w\omega_x - 2u\omega_z;\\ &\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{c^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - Z = 2u\omega_y - 2v\omega_x. \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

3.3. Интегралы уравнений движения идеальной жидкости

Уравнения движения в форме уравнений Громеко (3.26) при некоторых дополнительных условиях позволяют представить их левую часть в виде полного дифференциала от суммы трех характерных величин: кинетической энергии единицы массы $c^2/2$, функции давления P и потенциала массовых сил U.

Одно из дополнительных условий состоит в том, что допускается существование некоторой функции $U(x, y, z)$, частные производные от которой по координатным осям равны проекциям массовых сил на эти оси, т.е.

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{3.27}$$

Функция U, удовлетворяющая указанным условиям, называется **потенциалом массовых сил**, а поле массовых сил — **потенциальным полем**.

В более общем случае все потенциальные поля некоторых векторных величин определяются своей потенциальной функцией и проекция этих величин на любое направление всегда равна частной производной от потенциальной функции по этому направлению.

Таким образом, одно из условий интегрируемости системы уравнений (3.26) сводится к тому, что *массовые силы* должны быть потенциальными.

Если каждое из соотношений (3.27) умножим соответственно на $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ и затем сложим их, то получим

$$X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z = \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}U. \tag{3.28}$$

Далее введем в рассмотрение еще одну **функцию** $P(x, y, z)$, **частная производная от которой по координатным осям равна вторым слагаемым в левой части уравнений** (3.26), т.е.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

Для нахождения введенной **функции давления** $P(x, y, z)$ умножим соотношения (3.29) на $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$. Их сложение дает

$$\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial p}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)$$

или

$$\mathrm{d}P = \frac{\mathrm{d}p}{\rho}.$$

Отсюда

$$P = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}. \tag{3.30}$$

Как следует из полученного соотношения (3.30), функция давления $P(x, y, z)$ может быть введена для всех баротропных сред, т.е. сред, характеризуемых однозначной связью между давлением и плотностью.

После сделанных допущений и преобразований умножим каждое уравнение системы (3.26) на $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ соответственно и проведем сложение всех полученных уравнений.

С учетом (3.28) и (3.30) будем иметь

$$\mathrm{d}\left(\frac{c^2}{2} + P - U\right) = 2\begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ u & v & w \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}. \tag{3.31}$$

Прямой проверкой легко убедиться, что определитель в правой части (3.31) действительно дает сумму всех членов правой части системы (3.26) после умножения на dx первого уравнения, на dy второго уравнения и на dz третьего уравнения. Так, раскрывая определитель по dx, находим

$$\mathrm{d}x(v\omega_z - w\omega_y),$$

что соответствует правой части первого уравнения рассматриваемой системы после умножения его на dx.

Уравнение (3.31) легко интегрируется, если определитель в его правой части равен нулю. Для этого необходимо, чтобы все члены любой строки или столбца обратились в нуль либо строки или столбцы оказались пропорциональными друг другу.

Таким образом, интегрирование уравнения (3.31) возможно в следующих пяти случаях:

1) $u = v = w = c = 0$. Движение жидкости отсутствует, и интеграл уравнения (3.31) выражает **условие статического равновесия** жидкости:

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} - U = 0;$$

2) $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. **Движение жидкости безвихревое**. В этом случае, как будет показано далее, все составляющие скорости могут быть выражены через одну функцию $\varphi(x, y, z)$, которая называется потенциалом скорости, а само течение жидкости называется потенциальным. Для него

$$\frac{c^2}{2} + \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} - U = \mathrm{const}. \tag{3.32}$$

Выражение (3.32) представляет собой интеграл Коши—Лагранжа.

В случае, когда массовыми силами являются силы тяжести, потенциал массовых сил U будет функцией только координаты z. Если ось z направить нормально к поверхности земли, то

$$U = -gz, \tag{3.33}$$

где g — ускорение свободного падения тел. Знак «минус» указывает, что направление массовой силы противоположно положительному направлению оси z.

С учетом (3.33) запишем интеграл (3.32) в виде

$$\frac{c^2}{2} + \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + gz = \mathrm{const}. \tag{3.34}$$

Постоянная в правой части (3.34) имеет одно и то же значение для всей плоскости течения;

3) $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$. Условие пропорциональности первых двух строк определителя (3.31) представляет собой **дифференциальное уравнение линии тока**. В этом случае формально интеграл уравнения (3.31) будет иметь вид (3.34), но постоянная интегрирования сохраняет свое значение только вдоль рассматриваемой линии тока. При переходе к соседней линии тока эта постоянная может изменяться;

4) $\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$. Условие пропорциональности первой и третьей строк определителя (3.31) представляет собой **дифференциальное уравнение вихревой линии**. Следовательно, здесь интегрирование осуществляется вдоль вихревой линии и постоянная в (3.34) не меняется вдоль выбранной вихревой линии, но принимает новое значение при переходе к другой вихревой линии;

5) $\frac{u}{\omega_x} = \frac{v}{\omega_y} = \frac{w}{\omega_z}$. Пропорциональность линейных и угловых скоростей в определителе (3.31) характерна для течения, при котором линии тока совпадают с вихревыми линиями. Такого рода течение называется винтовым и для него так же, как и в случае потенциального течения, **постоянная интегрирования** в (3.34) остается **неизменной по всему полю течения**.

В случае несжимаемой жидкости $\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$ уравнение (3.34) принимает особенно простой вид

$$\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}. \tag{3.35}$$

Впервые уравнение (3.35) было получено Д. Бернулли в 1738 г. и называется его именем. В дальнейшем и более общее выражение (3.34) будем называть интегралом Бернулли.

Уравнение (3.35) выражает по существу закон сохранения энергии: сумма кинетической ($c^2/2$) и потенциальной ($p/\rho + gz$) энергий не меняется вдоль вихревой линии или линии тока, а при потенциальном или винтовом движении полная энергия остается постоянной во всем поле течения жидкости.

В случае сжимаемой жидкости необходимо воспользоваться зависимостью плотности от давления.

Для изоэнтропийных процессов связь между указанными параметрами определяется уравнением изоэнтропы

$$\frac{p}{\rho^k} = A \quad \text{или} \quad p = \rho^k A.$$

Отсюда

$$dp = k\rho^{k-1}A\, d\rho. \tag{3.36}$$

Подставляя (3.36) в (3.35), получаем

$$\frac{c^2}{2} + Ak\int \rho^{k-2} d\rho + gz = \text{const}.$$

Поскольку постоянная $A = p/\rho^k$, то после интегрирования уравнение Бернулли для сжимаемой жидкости будет иметь следующий вид:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} + gz = \text{const}. \tag{3.37}$$

В задачах, где рассматривается движение газообразных сред, влиянием сил тяжести можно пренебречь. Тогда для сжимаемой жидкости

$$\frac{c^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \text{const}. \tag{3.38}$$

3.4. Уравнение сохранения энергии

Уравнение сохранения энергии представляет собой математическую формулировку закона сохранения энергии применительно к жидкому элементу: **изменение кинетической и внутренней (потенциальной) энергии жидкого элемента равно подведенному количеству теплоты и работе как внешних, так и внутренних сил**.

Для получения уравнения сохранения энергии выделим элементарный жидкий объем в виде параллелепипеда со сторонами dx, dy, dz и найдем работу поверхностных сил, действующих на грани параллелепипеда, за единицу времени. В общем случае вязкой жидкости в расчет следует принимать работу, обусловленную тремя касательными τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} и тремя нормальными σ_x, σ_y, σ_z напряжениями (см. рис. 1.2).

Вычисляя работу сил, действующих на грани, перпендикулярные оси x, для нормальных сил получаем

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\, dx\right) dy\, dz\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\right) - \sigma_x\, dy\, dz\, u = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u)\, dx\, dy\, dz,$$

при этом

$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\, dx\right) dy\, dz$ — сила, действующая на правую грань;

$u + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx$ — смещение правой грани в единицу времени;

$\sigma_x\, dy\, dz\, u$ — работа силы, действующей на левую грань.

Работа касательных сил на этих гранях будет составлять

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Определяя аналогичным образом работу сил, действующих на грани, перпендикулярные осям y и z, получаем полную совершенную поверхностными силами работу:

$$\sum A_{\text{пов}} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy}u + \sigma_y v + \tau_{yz}w) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{xz}u + \tau_{yz}v + \sigma_z w)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \qquad (3.39)$$

Работа массовых сил, имеющих составляющие по осям координат X, Y, Z, равна

$$\sum A_m = (Xu + Yv + Zw)\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \qquad (3.40)$$

В результате сформулированный выше закон сохранения энергии может быть записан в виде следующего уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{c^2}{2} + c_V T\right)\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \sum A_{\text{пов}} + \sum A_m + Q\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \qquad (3.41)$$

Здесь Q — количество теплоты, передаваемой в единицу времени единице массы; $c_V T = u$ — внутренняя энергия единицы массы; $\frac{c^2}{2}$ — кинетическая энергия.

Подставляя (3.39) и (3.40) в (3.41), получаем дифференциальное уравнение сохранения энергии:

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{c^2}{2} + c_V T\right) = \rho(Xu + Yv + Zw) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy}u + \sigma_y v + \tau_{yz}w) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{xz}u + \tau_{yz}v + \sigma_z w) + \rho Q. \qquad (3.42)$$

Введем далее в полученное уравнение (3.42) удельную энтальпию движущегося газа $h = c_p T$. С этой целью прибавим к левой и правой частям уравнения (3.42) одну и ту же величину

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \rho p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(RT)\,.$$

Тогда левая часть (3.42) преобразуется к виду

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{c^2}{2} + c_V T + RT\right) = \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{c^2}{2} + c_p T\right) = \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{c^2}{2} + h\right) = \rho\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}t}\,.$$

Здесь $h_0 = \frac{c^2}{2} + h$ — полная удельная энтальпия заторможенного газа.

Выразим далее количество подведенной теплоты $Q\rho\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ через вектор плотности теплового потока $\vec{q}$, представляющей собой количество теплоты, передаваемой на единицу поверхности выделенного элемента в единицу времени.

Тогда теплота, подведенная к граням, перпендикулярным оси x (приток или отвод теплоты), будет составлять

$$-\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + q_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\frac{\partial q_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

(Знак «минус» указывает на то, что теплота выводится из рассматриваемого жидкого элемента.)

Приток теплоты в направлении оси y будет равен

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

а в направлении оси z он будет составлять

$$-\frac{\partial q_z}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Таким образом, суммарное количество теплоты, воспринимаемой жидким элементом,

$$Q\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Отсюда

$$\rho Q = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) = -\mathrm{div}\,\vec{q}.$$

Вектор плотности теплового потока $\vec{q}$ однозначно связан с абсолютной температурой T **законом Фурье**:

$$\vec{q} = -\lambda\,\mathrm{grad}\,T,$$

где λ — коэффициент теплопроводности.

В результате

$$\rho Q = \mathrm{div}\,(\lambda\,\mathrm{grad}\,T).$$

С учетом сделанных преобразований, добавив новые компенсирующие друг друга члены $\pm\mathrm{div}\,(p\vec{c})$, запишем (3.42) в виде

$$\rho\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}t} = p\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - \mathrm{div}\,(p\vec{c}) + \mathrm{div}\,(p\vec{c}) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}(\vec{P}_x\vec{c}) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{P}_y\vec{c}) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{P}_z\vec{c}) + \rho\vec{M}\vec{c}.$$

Покажем, что

$$p\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - \mathrm{div}\,(p\vec{c}) = \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Действительно

$$p\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}; \tag{3.43}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(p\vec{c}\,) - p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \tag{3.44}$$

Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0$$

находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho}\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right). \tag{3.45}$$

Подставим далее (3.45) в (3.44). Тогда получим

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(p\vec{c}\,) + \frac{p}{\rho}\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) + \frac{p}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{3.46}$$

Таким образом, действительно

$$p\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - \operatorname{div}(p\vec{c}\,) = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{p}{\rho}\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial t} +$$

$$+ \operatorname{div}(p\vec{c}\,) + \frac{p}{\rho}\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) + \frac{p}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} - \operatorname{div}(p\vec{c}\,) = \frac{\partial p}{\partial t}.$$

С учетом проведенных преобразований уравнение сохранения энергии (3.42) примет вид

$$\rho\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(p\vec{c}\,) + \rho\vec{M}\vec{c} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\vec{P}_x\vec{c}\,) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{P}_y\vec{c}\,) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{P}_z\vec{c}\,)\right] +$$

$$+ \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T). \tag{3.47}$$

Отсюда следует, что в случае стационарного движения жидкости при отсутствии теплопроводности, если вектор массовых сил ортогонален вектору скорости, изменение энтальпии полного торможения равно нулю:

$$\rho\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}t} = 0$$

или, так как при указанных условиях работа внутренних сил трения эквивалентна внутреннему тепловыделению,

$$\frac{c^2}{2} + h = h_0. \tag{3.48}$$

Если векторы поверхностных сил выразим через соответствующие скорости относительных деформаций по соотношениям (2.8б) и (2.15), то вместо (3.47) получим

$$\rho \frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\lambda\ \mathrm{grad}\ T) - \frac{2}{3}\mu(\mathrm{div}\ \vec{c}\,)^2 - \rho\ \mathrm{div}\ \vec{c} + \Phi\,. \qquad (3.49)$$

Здесь функция

$$\Phi = 2\mu\Big[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + $$
$$+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\Big]$$

определяет диссипацию энергии и называется **диссипативной функцией**.

В дальнейшем для задач, рассматриваемых в настоящем курсе, будем в основном использовать частную форму уравнения сохранения энергии (3.48).

Интегральную форму (3.48) можно легко получить и более простым способом. С этой целью рассмотрим некоторую трубку тока (рис. 3.3), связь которой с окружающей средой осуществляется следующим образом.

1. Через сечение *I* в трубку тока за единицу времени втекает со скоростью c_1 удельная масса газа с параметрами p_1, T_1 и внутренней энергией U_1, а через сечение *II* вытекает со скоростью c_2 то же количество газа с параметрами p_2, T_2 и внутренней энергией U_2.

2. К каждому килограмму протекающего газа подводится теплота q.

3. При движении газа через трубку тока он совершает удельную работу l.

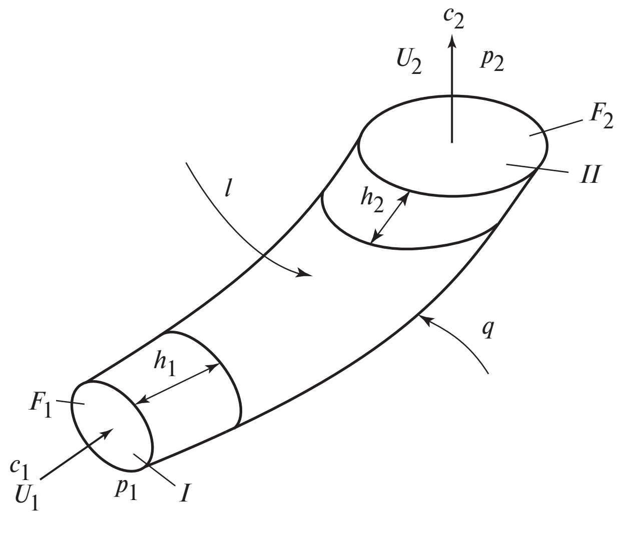


Рис. 3.3. К выводу интегральной формы уравнения энергии

Таким образом, в рассматриваемую систему вводятся внутренняя энергия U_1, удельное количество теплоты q_1, кинетическая энергия $c_1^2/2$. При вводе газа в систему совершается некоторая работа «ввода» A_1. Эта работа находится как произведение силы pF_1 на путь h_1, проходимый газом в единицу времени:

$$A_1 = p_1 F_1 h_1 = p_1 V_1 \text{ (здесь } V_1 = F_1 h_1\text{)}.$$

Поскольку рассматривается удельный расход газа, то V_1 представляет собой его удельный объем.

Одновременно систему покидает газ, совершивший работу l, с внутренней энергией U_2 и кинетической энергией $c_2^2/2$. При этом производится работа вывода $A_2 = p_2 V_2$, где $V_2 = F_2 h_2$ — удельный объем газа, покидающего систему. Поскольку при стационарном процессе энергия в системе не исчезает и не накапливается, можно записать

$$\frac{c_1^2}{2} + U_1 + p_1 V_1 + q = \frac{c_2^2}{2} + U_2 + p_2 V_2 + l.$$

Имея в виду, что

$$U + pV = c_V T + RT = c_p T = h,$$

получаем интегральную форму уравнения сохранения энергии:

$$\frac{c_1^2}{2} + h_1 + q = \frac{c_2^2}{2} + h_2 + l. \qquad (3.50)$$

При отсутствии теплообмена ($q = 0$) и равенстве нулю удельной работы l приходим к уравнению в форме (3.48).

Заметим, что если движение жидкости происходит с трением, то работа трения полностью переходит в теплоту: $q = l$. В результате формально снова получаем уравнение сохранения энергии в виде (3.48).

Таким образом, можно отметить, что при отсутствии теплообмена и отводимой работы форма уравнения (3.48) справедлива как для идеальной, так и для вязкой жидкости.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой закон сохранения отражает уравнение неразрывности?
2. Чему равняется div $\vec{c}$ в несжимаемой жидкости?
3. Как меняется уравнение неразрывности при переходе от несжимаемой к сжимаемой жидкости?
4. Запишите уравнения для массового и объемного расходов.
5. Чему равен расход жидкости через поверхность трубки тока?
6. Какой закон сохранения отражают уравнения движения жидкости?

7. В чем разница между уравнениями движения Эйлера и Громеко?
8. В каких случаях возможно интегрирование уравнений Эйлера?
9. Как записывается общий интеграл уравнений Эйлера?
10. В каких случаях постоянная в интеграле Бернулли сохраняется неизменной во всем поле течения?
11. Что такое функция давления и как она определяется?
12. Как выглядит интеграл Бернулли для сжимаемой жидкости?
13. Как записывается уравнение сохранения энергии при наличии теплообмена и совершении работы?
14. Можно ли использовать уравнение сохранения энергии, полученное для идеальной жидкости, при расчете течений с внутренним трением?

Глава 4
ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОСТАТИКИ

4.1. Основные уравнения гидростатики

Гидростатика — это раздел МЖГ, в котором рассматривается теория равновесия жидкостей и газов. Соответственно в задачах, связанных с гидростатикой, скорость рассматриваемой среды c всегда равна нулю. В этом случае уравнения движения (3.21) (уравнения Эйлера) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X; \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y; \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z. \tag{4.3}$$

Умножим, как и ранее, уравнение (4.1) на dx, (4.2) на dy, (4.3) на dz и проведем их сложение, имея в виду, что массовые силы X, Y, Z являются потенциальными и имеют потенциал U, т.е.

$$X = +\frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = +\frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = +\frac{\partial U}{\partial z}.$$

В результате сложения указанных уравнений получаем

$$\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial p}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \rho\left(\frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right).$$

Сумма членов в левой части представляет собой полный дифференциал от давления p, а в правой части — полный дифференциал от потенциала скорости U. Следовательно,

$$\mathrm{d}p = \rho\,\mathrm{d}U = \rho(X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z). \tag{4.4}$$

Из соотношения (4.4) следует важный вывод, суть которого сводится к тому, что только в случае, когда массовые силы являются потенциальными, жидкость может находиться в равновесии.

Если на какой-то поверхности в жидкости давление в каждой ее точке постоянно ($\mathrm{d}p = 0$), то такая поверхность называется поверхностью уровня и для нее

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathrm{d}z = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z = 0.$$

Следовательно, поверхности уровня одновременно являются и поверхностями равного давления (изобарическими поверхностями).

Интегрируя уравнение (4.4), получаем

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = U + \mathrm{const}.$$

При действии в жидкости только сил тяжести

$$U = -gz \quad [\text{соотношение (3.3)}];$$

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = -gz + \mathrm{const}. \tag{4.5}$$

Для несжимаемой жидкости ($\rho = \mathrm{const}$)

$$\frac{p}{\rho} + gz = \mathrm{const} \tag{4.6}$$

или

$$p + \rho gz = \mathrm{const}. \tag{4.7}$$

Величина, равная произведению ускорения свободного падения g на плотность ρ и расстояние z от рассматриваемой плоскости до свободной поверхности жидкости, называется **гидростатическим давлением**.

Таким образом, сумма давления на свободной поверхности жидкости p и гидростатического давления ρgz во всех точках фиксированной поверхности ($z = \mathrm{const}$), расположенной внутри жидкости, постоянна и определяет полное давление p_0 на этой поверхности, т.е.

$$p + \rho gz = p_0. \tag{4.8}$$

Для баротропной сжимаемой жидкости, т.е. жидкости, в которой плотность зависит только от давления [$\rho = f(p)$],

$$\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} + gz = \mathrm{const}. \tag{4.9}$$

Остановимся далее на некоторых примерах использования основных уравнений гидростатики (4.7) и (4.8)

4.2. Равновесие жидкости в сообщающихся сосудах

Простейшим примером сообщающихся сосудов является U-образная трубка. При заполнении такой трубки однородной жидкостью уровни ее в левой и правой частях будут одинаковы. Это общее свойство сообщающихся сосудов любой формы, которое реализуется в случае, если на свободных поверхностях этих сосудов поддерживается одинаковое давление и они заполнены одной и той же жидкостью. При нарушении указанных условий ситуация меняется. Так, например, если левое колено U-образной трубки, частично заполненной жидкостью, соединить с сосудом, где давление p_0 больше барометрического давления B, то в правом колене жидкость по отношению к левому колену поднимется на некоторую высоту z (рис. 4.1). Примем начальное сечение отсчета ($z = 0$) на поверхности жидкости левого колена и запишем уравнение (4.7) для сечения AC (рис. 4.1), в котором дав-

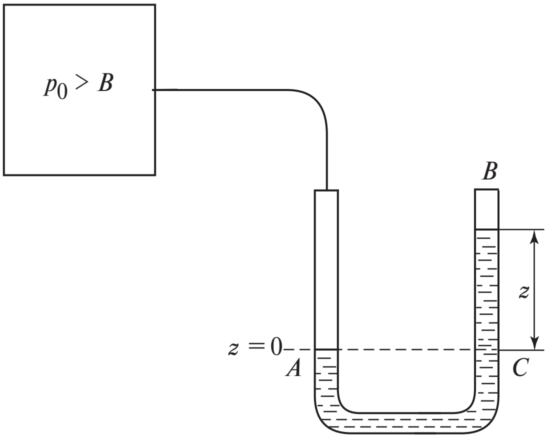


Рис. 4.1. Схема измерения давления в сосуде с помощью U-образной трубки

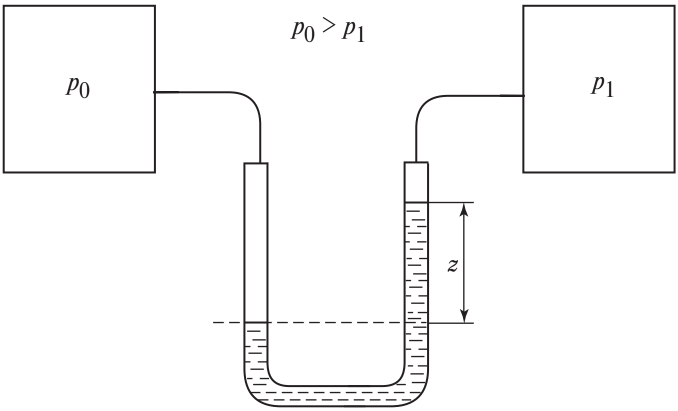


Рис. 4.2. Схема измерений разности давлений в двух сравниваемых сосудах

ление в обоих коленах одинаково. Тогда абсолютное давление p_0 в сосуде будет составлять

$$p_0 + 0 = B + \rho g z. \qquad (4.10)$$

Соответственно разность $p_0 - B = \rho g z$ определяет избыточное (по отношению к абсолютному) давление. Если U-образную трубку соединить с двумя сосудами, в которых имеются разные давления p_0 и p_1, как это показано на рис. 4.2, то в этом случае использование формулы (4.7) дает возможность по разности столба жидкости в U-образной трубке z найти разность давлений в рассматриваемых сосудах:

$$p_0 - p_1 = \rho g z.$$

Сформулированное выше свойство сообщающихся сосудов нарушается в случае, когда они заполняются жидкостью разной плотности. В примере,

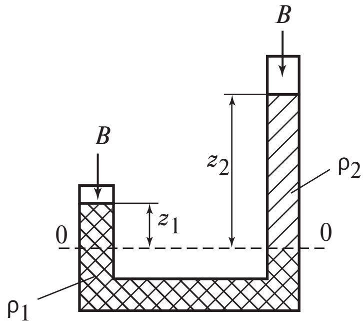


Рис. 4.3. Распределение уровней жидкости разной плотности в сообщающихся сосудах

показанном на рис. 4.3, в левом колене находится жидкость с плотностью ρ_1, превышающей плотность ρ_2 жидкости в правом колене.

Легко видеть, что плоскость, где имеет место одинаковое полное давление (плоскость 0-0), проходит через линию раздела жидкостей с различной плотностью. Записывая уравнение (4.7) для указанной плоскости в левом и правом сосудах, получаем

$$B + \rho_1 g z_1 = B + \rho_2 g z_2.$$

Отсюда

$$z_1/z_2 = \rho_2/\rho_1. \qquad (4.11)$$

Следовательно, в сообщающихся сосудах, содержащих жидкости с различной плотностью, высоты столбов жидкости над уровнем их раздела обратно пропорциональны плотностям этих жидкостей.

4.3. Относительное равновесие жидкости

Если сосуд, содержащий жидкость, движется с постоянным ускорением, то жидкость в нем находится в состоянии относительного равновесия. При таком движении сосуда к массовым гравитационным силам прибавляются силы инерции, определяемые ускорением a.

Рассмотрим условия относительного равновесия жидкости в сосуде, который скатывается по наклонной плоскости, имеющей угол наклона α (рис. 4.4) [13].

Свяжем оси координат с сосудом так, как показано на рис. 4.4. В этом случае жидкость находится под действием гравитационной массовой силы, характеризуемой напряжением $M_g = -g$, и инерционной силы с напряжением $M_{\text{ин}} = a$ (инерционная сила направлена против движения сосуда, и при его скатывании по наклонной плоскости напряжение $M_{\text{ин}}$ совпадает с принятым направлением оси x).

Проекции массовых сил на оси координат в рассматриваемой задаче будут составлять:

$$X = a - g \sin \alpha;$$

$$Y = 0;$$

$$Z = -g \cos \alpha.$$

Подставим эти величины в уравнение (4.4) и будем иметь

$$\mathrm{d}p = [(a - g \sin \alpha)\mathrm{d}x - g \cos \alpha \, \mathrm{d}z]\rho.$$

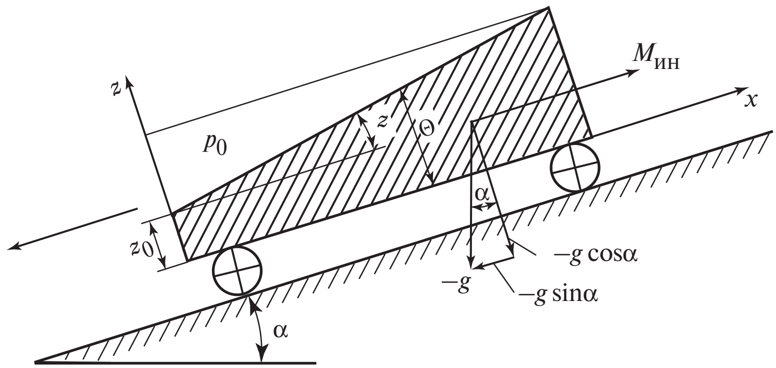


Рис. 4.4. К выводу условий относительного равновесия жидкости в сосуде, скатывающемся по наклонной плоскости

После интегрирования последнего уравнения получим

$$p = \rho(a - g \sin \alpha)x - \rho g z \cos \alpha + C. \tag{4.12}$$

Для определения уравнений поверхностей равного давления достаточно в (4.12) принять p = const. В результате семейство поверхностей, параллельных оси z, будет описываться следующим у

равнением:

$$\rho(a - g \sin \alpha)x - z\rho g \cos \alpha + C_1 = 0;$$

$$C_1 = C = p. \tag{4.13}$$

Отсюда легко получить и уравнение свободной поверхности жидкости, так как она является одной из поверхностей, определяемых уравнением (4.13).

В принятой на рис. 4.4 системе координат уровень жидкости в сосуде при $x = 0$ равен z_0. Подставив эти координаты в уравнение (4.13), найдем постоянную C_1:

$$C_1 = z_0 \rho g \cos \alpha.$$

Тогда

$$\rho(a - g \sin \alpha)x - \rho g \cos \alpha(z - z_0) = 0.$$

Отсюда

$$z - z_0 = \frac{a - g \sin \alpha}{g \cos \alpha}\, x. \tag{4.14}$$

При $\alpha = 0$ получим уравнение свободной поверхности жидкости в сосуде, который движется справа налево по горизонтальной плоскости:

$$z - z_0 = \frac{ax}{g}.$$

Как следует из формулы (4.14), поверхности уровня представляют собой плоскости, расположенные по отношению к оси x под углом Θ:

$$\Theta = \operatorname{arctg} \frac{a - g \sin \alpha}{g \cos \alpha}. \tag{4.15}$$

Для определения давления в жидкости, заключенной в движущемся с постоянным ускорением сосуде, найдем по (4.12) постоянную интегрирования C из условия, что при $x = 0$ и $z = z_0$ давление $p = B$. Тогда

$$C = B + \rho g z_0 \cos \alpha$$

и

$$p = B + \rho(a - g \sin \alpha)x + \rho g \cos \alpha (z_0 - z). \tag{4.16}$$

Если сосуд с жидкостью падает вниз с ускорением a, то проекции массовых сил на оси координат будут равны

$$X = Y = 0, \quad Z = g - a.$$

В результате интеграл уравнения (4.4) запишется в виде

$$p = \rho(g - a)z + C.$$

При $z = z_0$ $p = B$. Следовательно,

$$C = B - \rho(g - a)z_0$$

и давление в любой точке жидкости будет определяться в виде

$$p = B + \rho(g - a)(z - z_0).$$

В данном случае поверхности уровня (p = const) представляют собой горизонтальные плоскости (z = = const).

Аналогичным образом решается и задача о распределении давления в жидкости, находящейся во вращающемся относительно вертикальной оси цилиндрическом сосуде (рис. 4.5). Этот сосуд вращается с угловой скоростью ω. Здесь проекции массовых сил на оси координат будут составлять:

$$X = \omega^2 x;\ Y = \omega^2 y;\ Z = -g.$$

Интеграл уравнения (4.4) при этих значениях проекций массовых сил будет иметь вид

$$p = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho g z + C. \tag{4.17}$$

При $z = z_0$ и $x = y = 0$ (центральная точка свободной поверхности жидкости) $p = B$. Тогда постоянная

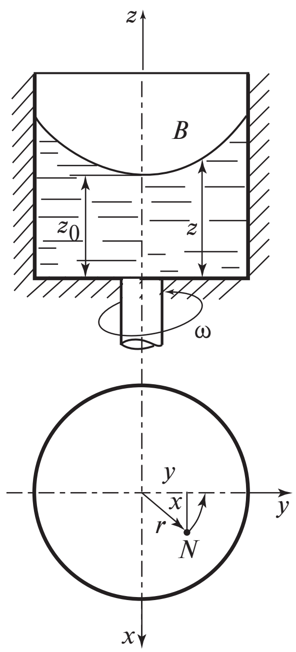


Рис. 4.5. К выводу условий относительного равновесия жидкости во вращающемся цилиндрическом сосуде

$C = B + \rho g z_0$. Подставив это соотношение для постоянной интегрирования в уравнение (4.17), получим

$$p = B + \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho g(z - z_0). \tag{4.18}$$

Отсюда уравнение поверхности уровня ($p = B$) запишется в виде

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - z_0). \tag{4.19}$$

Это уравнение представляет собой уравнение параболоида вращения.

При переходе к полярным координатам получим

$$z - z_0 = \frac{r^2\omega^2}{2g}.$$

4.4. Силы давления жидкости на твердые стенки

На любую твердую поверхность, погруженную в жидкость, действует совокупность сил, определяемых гидростатическим давлением p. Выделим на поверхности AB элементарную площадку $\mathrm{d}S$ с внешней нормалью $\vec{n}$ (рис. 4.6). Тогда элементарная сила $\mathrm{d}R$, действующая со стороны жидкости на эту площадку, будет составлять

$$\mathrm{d}\vec{R} = p\vec{n}\,\mathrm{d}\vec{S}. \tag{4.20}$$

Проектируя эту силу на оси координат, получаем

$$\mathrm{d}R_x = p\cos(nx)\,\mathrm{d}S; \quad \mathrm{d}R_y = p\cos(ny)\,\mathrm{d}S \quad \text{и} \quad \mathrm{d}R_z = p\cos(nz)\,\mathrm{d}S.$$

Поскольку

$$\mathrm{d}S\cos(nx) = \mathrm{d}S_x, \quad \mathrm{d}S\cos(ny) = \mathrm{d}S_y, \quad \mathrm{d}S\cos(nz) = \mathrm{d}S_z,$$

то $\mathrm{d}R_x = p\,\mathrm{d}S_x$; $\mathrm{d}R_y = p\,\mathrm{d}S_y$ и $\mathrm{d}R_z = p\,\mathrm{d}S_z$, где $\mathrm{d}S_x$, $\mathrm{d}S_y$, $\mathrm{d}S_z$ — проекции поверхности $\mathrm{d}S$ на координатные плоскости.

Соответственно составляющие суммарной силы, действующие на рассматриваемую криволинейную поверхность, можно записать как

$$R_x = \int_S p\,\mathrm{d}S_x; \quad R_y = \int_S p\,\mathrm{d}S_y;$$

$$R_z = \int_S p\,\mathrm{d}S_z.$$

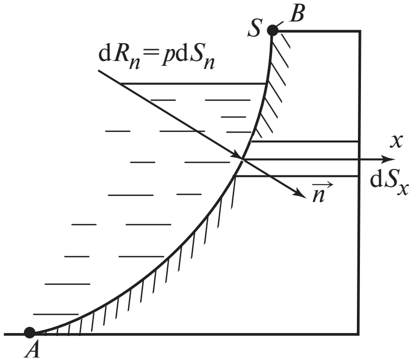


Рис. 4.6. Схема действия гидростатического давления на произвольно ориентированную площадку в жидкости

Если при оценке сил, действующих на поверхность со стороны жидкости, использовать только избыточное гидростатическое давление $p = \rho g z$, то

$$R_x = \rho g \int_S z\, \mathrm{d}S_x; \quad R_y = \rho g \int_S z\, \mathrm{d}S_y; \quad R_z = \rho g \int_S z\, \mathrm{d}S_z.$$

Интеграл $\int_S z\, \mathrm{d}S_z$ определяет объем жидкости V, заключенный между рассматриваемой поверхностью и свободной поверхностью жидкости. Тогда

$$R_z = \rho g V. \tag{4.21}$$

Остальные составляющие силы R также определяются произведением ρg на некоторые объемы жидкости.

Если найденные проекции приведенной силы гидростатического давления пересекаются в одной точке, то на рассматриваемую поверхность будет действовать только одна сила R, определяемая по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Если такого пересечения нет, то кроме силы R на поверхность будет действовать момент силы

$$\vec{M} = -\int_S (\vec{r} \times p\,\vec{n})\, \mathrm{d}S,$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор площадки $\mathrm{d}S$ относительно центра приведения системы гидростатических сил.

Точка приложения силы R к твердой поверхности называется **центром давления**.

При действии равномерного давления на плоскую стенку согласно формуле (4.20) сила $\vec{R}$ находится по формуле

$$\vec{R} = p\,\vec{n}\,S. \tag{4.22}$$

Равномерное давление действует на дно любого сосуда, находящегося в покое или совершающего ускоренное движение в вертикальной плоскости.

Для сосудов, установленных на горизонтальной плоскости, сила R_z, действующая на их дно, составляет

$$R_z = \rho h_0 S_0 g$$

и не зависит от формы стенок сосуда.

Если на плоскую стенку резервуара действует неравномерное давление p, то суммарная сила $\vec{R}$, направленная вдоль внешней нормали $\vec{n}$, будет составлять

$$\vec{R} = \vec{n} \int_S p\, \mathrm{d}S,$$

где S — площадь плоской стенки.

Абсолютная величина рассматриваемой силы

$$R = \int_S p \, \mathrm{d}S \qquad (4.23)$$

будет определяться законом распределения давления по всем бесконечно малым площадкам dS плоской стенки.

Для вычисления силы R направим ось x вдоль линии пересечения свободной поверхности жидкости (плоскость A-A на рис. 4.7) с плоскостью стенки (плоскость B-B), а ось y — вдоль стенки (плоскость B-B). Чтобы наглядно представить себе форму рассматриваемой стенки, ее плоскость повернем вокруг оси y на 90° [13] и совместим с плоскостью чертежа (рис. 4.7). При таком повороте стенки становятся ясными все характерные линейные размеры, лежащие в плоскости xy). Согласно основной формуле гидростатики (4.7) давление p в любой точке плоской стенки, расположенной под углом α к горизонтальной плоскости, будет вычисляться как

$$p_1 = p_0 + \rho g h, \qquad (4.24)$$

где p_0 — давление над свободной поверхностью (если рассматривать, как и ранее, открытый сосуд, то давление p_0 будет равно барометрическому давлению B).

Подставляя (4.24) в (4.23), получаем

$$R = \int_S (p_0 + \rho g h) \, \mathrm{d}S = p_0 S + \rho g \int_S h \, \mathrm{d}S.$$

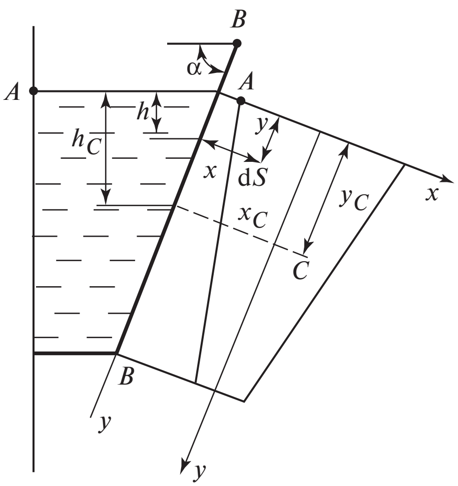


Рис. 4.7. К определению давления жидкости на стенки сосуда

Из рис. 4.7 видно, что $h = y\sin\alpha$. Тогда

$$\int_S h\,\mathrm{d}S = \sin\alpha \int_S y\,\mathrm{d}S = J\sin\alpha.$$

Здесь $J = \int_S y\,\mathrm{d}S$ представляет собой статический момент площади S относительно оси x, который может быть записан в виде произведения координаты y_C центра массы (точка C на рис. 4.7) на площадь S ($J = y_C S$). С учетом изложенного, сила R, действующая со стороны жидкости на плоскую стенку, будет определяться в виде

$$R = p_0 S + \rho g h_C S. \tag{4.25}$$

4.5. Равновесие сжимаемой жидкости (газа)

Условия равновесия газа существенно отличаются от рассмотренных условий равновесия капельной жидкости, если высота газового столба оказывается достаточно большой.

Для решения этой задачи воспользуемся уравнением (4.5):

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + gz = \text{const}.$$

Остановимся вначале на случае изотермического газа, подчиняющегося закону Бойля—Мариотта, согласно которому давление и плотность связаны следующим простым соотношением:

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0},$$

где ρ_0 и p_0 — плотность и давление в некотором исходном состоянии.

Подставляя это соотношение для плотности в (4.5), получаем

$$\frac{p_0}{\rho_0}\int \frac{\mathrm{d}p}{p} + gz = \text{const};$$

$$\frac{p_0}{\rho_0}\ln p + gz = \text{const}.$$

Примем, что при $z = 0$ $p = p_0$. Тогда постоянная интегрирования const = $= \frac{p_0}{\rho_0}\ln p_0$.

В результате

$$z = \frac{p_0}{g\rho_0}\ln\frac{p_0}{p}. \tag{4.26}$$

Если измерить давление p в двух точках, расположенных на разных высотах z_1 и z_2 (p_1 и p_2), то по формуле (4.26) можно найти расстояние между указанными точками:

$$z_2 - z_1 = \frac{p_0}{g\rho_0} \ln \frac{p_1}{p_2}. \qquad (4.27)$$

В свою очередь, выражая отношение p/p_0 из формулы (4.26), получаем барометрический закон изменения давления по высоте при постоянной температуре атмосферы:

$$\frac{p}{p_0} = \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} z}. \qquad (4.28)$$

Поскольку в изотермической атмосфере $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}$, то $\frac{\rho}{\rho_0} = \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} z}$.

Отношение $p_0/(g\rho_0)$ имеет линейную единицу измерения и его можно рассматривать в виде некоторой **изотермической высоты** H. Значения величин p_0 и ρ_0 принимаются обычно на уровне моря, и тогда высоту H можно рассматривать как высоту, которую имела бы земная атмосфера, если бы представляла собой однородную среду с плотностью ρ_0. Принимая стандартные значения для давления p_0 и плотности ρ_0, получаем

$$H = \frac{p_0}{\rho_0 g} = 8425 \text{ м};$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \mathrm{e}^{-z/H}. \qquad (4.29)$$

Формула (4.29) называется формулой Галлея.

В действительности даже в случае постоянной температуры давление в реальной атмосфере снижается медленнее, чем в случае несжимаемой среды, и ни при каком значении z не становится равным нулю.

Кроме того, в нижних слоях атмосферы с подъемом на высоту происходит снижение температуры приблизительно по линейному закону

$$T = T_0 - \beta z, \qquad (4.30)$$

где β — температурный градиент, показывающий, на сколько градусов меняется температура воздуха при подъеме на 1 м.

Используя уравнение состояния ($p/\rho = RT$), легко показать, что

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}.$$

Отсюда с учетом (4.30) находим закон изменения плотности:

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T_0 - \beta z} = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{1}{1 - \dfrac{\beta}{T_0} z}. \qquad (4.31)$$

Подставляя (4.31) в уравнение (4.4), получаем

$$\mathrm{d}p = -\rho g\, \mathrm{d}z = -g\rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{\mathrm{d}z}{1 - \dfrac{\beta}{T_0} z} \qquad (X = Y = 0, \quad Z = -\mathrm{g}).$$

Отсюда

$$\frac{p_0\, \mathrm{d}p}{g\rho_0 p} = -\frac{\mathrm{d}z}{1 - \dfrac{\beta}{T_0} z}.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{p_0}{\rho_0 g} \ln p = \frac{T_0}{\beta} \ln\left(1 - \frac{\beta}{T} z\right) + \mathrm{const}.$$

При $z = 0$ $p = p_0$. Из этого условия находим $\mathrm{const} = \dfrac{p_0}{\rho_0 g} \ln p_0$. В результате

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\beta}{T_0} z\right)^{\frac{T_0 \rho g}{\beta p_0}}; \qquad (4.32)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{p}{T_0} z\right)^{\frac{T_0 \rho g}{\beta p_0} - 1}. \qquad (4.33)$$

Зависимости (4.32) и (4.33) называются формулами Бьеркнеса и положены в основу построения международной стандартной атмосферы (МСА).

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте условие равновесия жидкости.
2. Что такое гидростатическое давление?
3. Что такое избыточное давление в сосуде?
4. Сформулируйте условие равновесия жидкости в сообщающихся сосудах.
5. В каком соотношении находятся высоты жидкости с различной плотностью в сообщающихся сосудах?

6. Как выглядит условие относительного равновесия жидкости в сосудах при их движении с постоянным ускорением?
7. Что такое центр давления в жидкости?
8. Как записывается уравнение равновесия для газовых сред (сжимаемая жидкость)?
9. Что такое изотермическая высота атмосферы?

Глава 5
ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

5.1. Основные уравнения одномерных течений

Одномерное движение жидкости характеризуется тем, что все ее параметры и скорость при стационарном течении меняются только в направлении одной координатной оси, т.е. являются функцией одной переменной. В этом случае существенно упрощаются все исходные уравнения и предельно упрощается анализ влияния различных внешних факторов, от которых зависят параметры и скорость движущихся сред. К таким факторам можно отнести изменение формы канала, по которому движется жидкость (геометрическое воздействие), подвод или отвод теплоты (тепловое воздействие), подвод или отвод из рассматриваемого канала жидкости (расходное воздействие) и др.

Осуществить одномерное течение в реальной вязкой жидкости нельзя. Однако в рамках идеальной жидкости одномерное течение имеет место в каналах с плавно изменяющимся поперечным сечением и прямолинейной осью, так как в этом случае все параметры потока и его скорость имеют одни и те же значения в любых точках поперечного сечения.

Если это требование распространить и на реальные потоки, принимая вместо действительного распределения скоростей в поперечном сечении канала некоторую среднюю для всего поперечного сечения скорость, то большинство практически важных задач можно решать в рамках одномерной схемы течения. Естественно, полученные в этом случае результаты будут являться приближенными, но для многих технических задач такого приближения оказывается достаточно, а расчетные соотношения будут предельно простыми.

Последнее обстоятельство, даже при наличии современной вычислительной техники, является весьма важным с точки зрения быстрого получения оценочной информации.

Все исходные уравнения одномерных течений являются частным случаем общих уравнений сохранения, рассмотренных в гл. 3.

5.1.1. Уравнение неразрывности

Поскольку при одномерном движении жидкости в каналах скорость c_i и плотность ρ_i в поперечном сечении, имеющем площадь F_i, не меняются, то уравнение массового расхода имеет то же вид, что и (3.14):

$$m = \rho_i c_i F_i. \tag{5.1}$$

Если это уравнение записать для двух разных сечений канала i—i и j—j, то

$$\rho_i c_i F_i = \rho_j c_j F_j. \tag{5.2}$$

Для несжимаемой жидкости (ρ = const)

$$c_i F_i = c_j F_j. \tag{5.3}$$

В некоторых случаях при анализе одномерного течения в каналах используется логарифмический дифференциал от уравнения (5.1):

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}c}{c} + \frac{\mathrm{d}F}{F} = 0. \tag{5.4}$$

В случае, когда при движении жидкости в канале имеет место массообмен с внешней средой, т.е. массовый расход вдоль канала не остается постоянным, вместо (5.4) можно записать

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}c}{c} + \frac{\mathrm{d}F}{F}. \tag{5.5}$$

5.1.2. Уравнение сохранения количества движения

Для одномерного установившегося энергоизолированного течения уравнение сохранения количества движения непосредственно вытекает из общих уравнений движения Эйлера. При отсутствии массовых сил из трех уравнений движения остается только одно, которое для рассматриваемого течения имеет следующий вид:

$$c\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad \text{или} \quad c\,\mathrm{d}c = -\frac{\mathrm{d}p}{\rho}. \tag{5.6}$$

Интегрируя (5.6), приходим к уже известному уравнению (3.32):

$$\frac{c^2}{2} + \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \text{const},$$

где постоянная в правой части при одномерном течении не меняется вдоль всей трубки тока.

Для реальной (вязкой) жидкости уравнение сохранения количества движения при ее одномерном течении в канале оказывается более сложным. Для его вывода рассмотрим элемент канала длиной $\mathrm{d}x$, приведенный на рис. 5.1. Если для входного сечения рассматриваемой элементарной части канала давление, плотность, скорость и площадь обозначить соответственно через p, ρ, c, F, то для выходного сечения эти величины будут равны $p + \mathrm{d}p$, $\rho + \mathrm{d}\rho$, $c + \mathrm{d}c$, $F + \mathrm{d}F$. Кроме того, на выделенный элемент жидкости со стороны ограничивающих стенок действует элементарная сила трения $\mathrm{d}X_{\text{тр}}$:

$$\mathrm{d}X_{\text{тр}} = \tau_w \mathrm{d}S,$$

где τ_w — напряжение трения на стенках; $\mathrm{d}S$ — элементарная площадь внутренней поверхности канала.

Согласно закону сохранения количества движения изменение количества движения ΔJ должно быть равно секундному импульсу всех внешних сил $\sum R_i$, действующих на выделенный элемент жидкости, т.е.

$$\Delta J = \sum R_i.$$

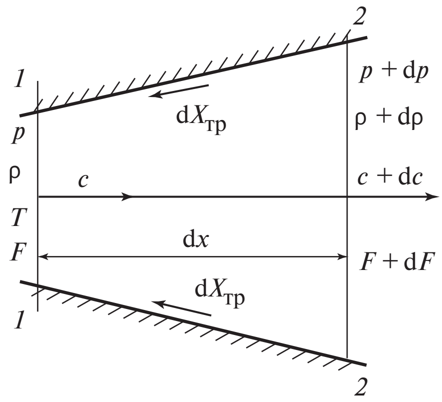


Рис. 5.1. К выводу уравнения количества движения вязкой несжимаемой жидкости при одномерном течении

Найдем эти величины:

$$\Delta J = m(c + \mathrm{d}c) - mc = m\,\mathrm{d}c = \rho c\,\mathrm{d}c\,F;$$

$$\sum R_i = pF + p\,\mathrm{d}F - (p + \mathrm{d}p)(F + \mathrm{d}F) - \mathrm{d}X_{\text{тр}} = -F\,\mathrm{d}p - \mathrm{d}p\mathrm{d}F - \mathrm{d}X_{\text{тр}}.$$

Пренебрегая малой второго порядка $\mathrm{d}p\,\mathrm{d}F$, получаем

$$c\,\mathrm{d}c = -\frac{\mathrm{d}p}{\rho} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}X_{\text{тр}}. \tag{5.7}$$

В случае, если движение жидкости в канале сопровождается массообменом (имеет место дополнительный подвод или отвод жидкости из канала), изменение количества движения будет определяться соотношением

$$\Delta J = (m + \mathrm{d}m)(c + \mathrm{d}c) - mc - \mathrm{d}m_i c_i \approx m\,\mathrm{d}c + \mathrm{d}m_i c - \mathrm{d}m_i c_i =$$
$$= \rho F c\,\mathrm{d}c + \rho c_a\,\mathrm{d}F_i\,c(1 - c_i/c).$$

В результате

$$c\,\mathrm{d}c + \frac{\mathrm{d}F_i}{F}\,c_a c_i\left(1 - \frac{c_i}{c}\right) = -\frac{\mathrm{d}p}{\rho} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}X_{\text{тр}}. \tag{5.8}$$

Здесь c_i — проекция вектора скорости подводимой или отводимой жидкости на продольную ось канала; $\mathrm{d}F_i$ — элементарная площадь, через которую осуществляется массообмен с основным потоком; c_a — скорость жидкости через элемент площадью $\mathrm{d}F_i$.

5.1.3. Уравнение сохранения энергии

При одномерном течении идеальной жидкости в энергоизолированной трубке тока, т.е. при отсутствии подводимых или отводимых работы и теплоты, уравнение сохранения количества движения в форме (3.38) и уравнение сохранения энергии тождественны.

То есть, для несжимаемой жидкости уравнение сохранения энергии может быть записано в том же виде, что и уравнение Бернулли

$$\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}.$$

Как уже отмечалось, для газообразных сред при отсутствии в движущейся жидкости свободной поверхности влиянием силы тяжести можно пренебречь. Тогда

$$\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}. \tag{5.9}$$

Для сжимаемых баротропных сред уравнение сохранения энергии имеет уже известный вид

$$\frac{c^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \text{const}. \tag{5.10}$$

Для нахождения постоянной в правой части уравнения (5.10) рассмотрим истечение идеальной жидкости из бесконечно большого резервуара через суживающееся сопло (рис. 5.2) и запишем уравнение сохранения энергии для сечений *0-0* и *1-1*. Тогда

$$\frac{c_0^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{c_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1}.$$

Поскольку $c_0 = 0$, то

$$\frac{c_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}.$$

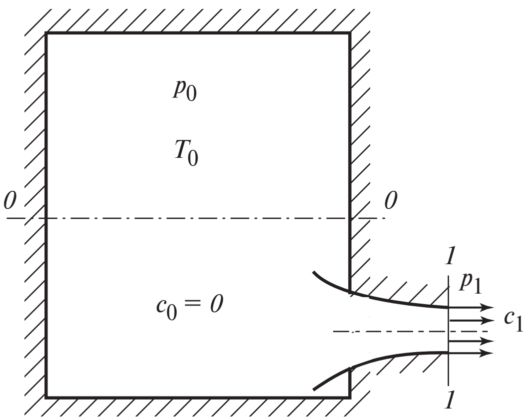


Рис. 5.2. Схема истечения идеальной жидкости из сосуда с постоянным внутренним давлением

В рассматриваемой задаче давление p_0 и плотность ρ_0 в резервуаре могут быть определены, если провести изоэнтропийное торможение скорости потока, вытекающего из сопла до нулевого значения.

Полученные в результате такого торможения давление p_0 и плотность ρ_0 называются **давлением** и **плотностью полного торможения**. Соответственно все параметры потока, которые получаются в результате изоэнтропийного торможения скорости энергоизолированного потока до нулевого значения в любой его точке, называются **параметрами полного торможения**.

Таким образом, постоянная в правой части уравнения сохранения энергии (5.10) согласно смыслу этого уравнения определяет запас полной энергии потока и зависит от параметров полного торможения. В результате рассматриваемая постоянная может быть записана в виде очевидных равенств

$$\text{const} = \frac{k}{k-1}\,\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k}{k-1}\,RT_0 = \frac{a_0^2}{k-1} = c_pT_0 = h_0.$$

Здесь $a_0 = \sqrt{kRT_0}$ — скорость звука в полностью заторможенном потоке; $h_0 = c_pT_0$ — энтальпия полного торможения потока, которая, как и все приведенные постоянные, определяет полную энергию потока в рассматриваемой его точке.

Используя приведенные записи рассматриваемой постоянной, уравнение сохранения энергии (5.10) может быть представлено в следующих очевидных формах:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{k}{k-1}\,\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k}{k-1}\,\frac{p_0}{\rho_0}; \qquad (5.11)$$

$$\frac{c^2}{2} + \frac{k}{k-1}\,RT = \frac{k}{k-1}\,RT_0; \qquad (5.12)$$

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}; \qquad (5.13)$$

$$\frac{c^2}{2} + c_pT = c_pT_0; \qquad (5.14)$$

$$\frac{c^2}{2} + h = h_0. \qquad (5.15)$$

Следует особо отметить, что уравнения (5.11)—(5.15) абсолютно равнозначны, а та или иная форма записи этих уравнений определяется удобством использования при решении конкретных задач. Например, при определении скорости парового потока наиболее целесообразно использовать уравнение (5.15), так как в этом случае энтальпия пара h_i в заданной точке и энтальпия полного торможения потока h_0 в этой точке легко находятся с помощью h, s-диаграммы. Тогда при изоэнтропийном расширении потока

$$c = \sqrt{2(h_0 - h_i)}\,. \tag{5.16}$$

Соотношение (5.16) наиболее часто используется при расчетах проточных частей паровых турбин.

5.2. Максимальная и критическая скорости в газовых и паровых потоках

Согласно формуле (5.16) скорость потока определяется **перепадом энтальпий**

$$\Delta h = h_0 - h_i,$$

представляющим собой разницу между энтальпией полного торможения потока h_0 и текущим значением энтальпии движущейся среды h_i, которая характеризует значение потенциальной энергии рассматриваемого потока.

Ясно, что максимальная скорость $c_{\max}$ достигается в том случае, если вся потенциальная энергия будет преобразована в кинетическую. В этом случае энтальпия h_i обращается в нуль ($h_i = 0$).

Соответственно во всех уравнениях (5.11)—(5.15) нулевые значения приобретают и все вторые члены в левой их части. Отсюда следует, что

$$c_{\max} = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\,\frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2kRT_0}{k-1}} = a_0\sqrt{\frac{2}{k-1}} = \sqrt{2c_pT_0} = \sqrt{2h_0}\,. \tag{5.17}$$

Используя максимальную скорость, уравнение сохранения энергии можно записать в виде, связывающем между собой скорость потока, скорость звука и максимальную скорость:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{c_{\max}^2}{2}\,. \tag{5.18}$$

Приведенное уравнение (5.18) показывает, что увеличение скорости потока всегда сопровождается снижением локальной скорости звука. Другими словами, если рассматривать схему истечения среды из очень большого резервуара (см. рис. 5.2) при условии, что скорость потока непрерывно увеличивается от нуля ($c_0 = 0$) до максимального значения $c_{\max}$, то при этом скорость звука должна падать от скорости звука в резервуаре a_0 до нуля.

Качественно характер изменения рассматриваемых скоростей вдоль продольной оси x при указанных условиях показан на рис. 5.3.

В рассматриваемом случае приведенные кривые неизбежно пересекутся в некоторой точке A, где скорость потока c становится равной местной ско-

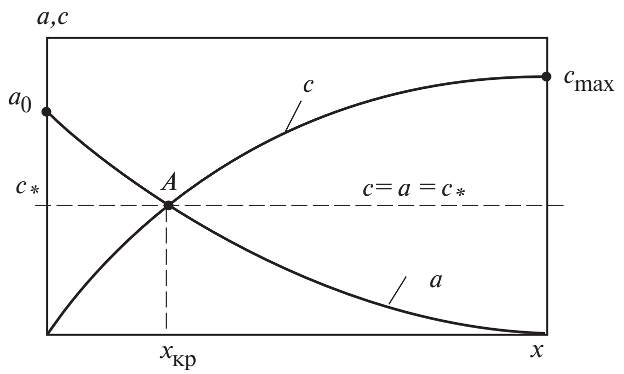


Рис. 5.3. Характер изменения скорости потока и скорости звука при истечении газообразной среды в пустоту (p_1 = 0, T_1 = 0)

рости звука a. Эта характерная скорость, играющая важную роль во всех газодинамических исследованиях и расчетах, получила название критической, а сечение канала, где она достигается, называется **критическим сечением**.

Все параметры потока в критическом сечении также называются критическими. Далее критические параметры и критическую скорость будем обозначать звездочкой в нижнем индексе соответствующей величины (c_*, p_*, ρ_*, T_*, F_*).

Таким образом, **критическая скорость — это скорость потока, численно равная местной скорости звука**, т.е. в критическом сечении $c = a = c_*$.

Записывая уравнение энергии (5.15) для критического сечения, получаем

$$\frac{c_*^2}{2} + \frac{c_*^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1} \quad \text{или} \quad \frac{c_*^2}{2}\frac{k+1}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}. \tag{5.19}$$

Отсюда следует, что критическая скорость, как и максимальная скорость, полностью определяется параметрами полного торможения и выражается через них с помощью следующих соотношений:

$$c_* = a_0\sqrt{\frac{2}{k+1}} = \sqrt{\frac{2kRT_0}{k+1}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}\frac{p_0}{\rho_0}}. \tag{5.20}$$

Заменяя правую часть в (5.13) с учетом соотношения (5.19), приходим к еще одной важной записи уравнения энергии:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1}\frac{c_*^2}{2}. \tag{5.21}$$

5.3. Безразмерные скорости потока M и λ

Ранее (см. гл. 1) все жидкости были разделены на несжимаемые и сжимаемые. Если законы движения несжимаемых жидкостей одинаковы как для капельных, так и для газообразных сред, то к сжимаемым жидкостям относятся только газообразные среды, характер движения которых может существенно отличаться от характера движения несжимаемых капельных жидкостей. В частности, при сверхзвуковых скоростях законы движения газовых сред принципиальным образом отличаются от законов движения несжимаемой жидкости.

В этой связи абсолютная скорость движения сжимаемых жидкостей не дает представления о той границе, за пределами которой уже нельзя использовать соотношения, полученные для несжимаемых жидкостей. Для оценки этой границы используется **относительная скорость M (число Маха)**, представляющая собой отношение абсолютной скорости c к местной скорости звука a, т.е.

$$\mathrm{M} = c/a.$$

При числах $\mathrm{M} \le 0{,}3$ сжимаемость практически не влияет на результаты расчетов газообразных сред и можно использовать все соотношения, полученные для несжимаемой жидкости.

При движении сжимаемой жидкости с относительной скоростью $\mathrm{M} > 0{,}3$ происходит заметное изменение ее плотности, которое уже необходимо учитывать при всех теоретических расчетах.

Введенная безразмерная скорость M (число Маха) может быть записана в следующем виде:

$$\mathrm{M} = \sqrt{\frac{c^2/2}{a^2/(k-1)}}\sqrt{\frac{2}{k-1}}\,. \qquad (5.22)$$

Отсюда следует, что число M определяет соотношение между кинетической и потенциальной энергиями в каждой точке потока.

Чем ниже запас потенциальной энергии $\left(E_\text{п} = \dfrac{a^2}{k-1}\right)$ в рассматриваемом сечении трубки тока, тем выше в этом сечении безразмерная скорость M. При этом абсолютная скорость c может оставаться неизменной. Такая ситуация имеет место при сравнении условий полета самолета вблизи Земли и на удалении от нее на 10—12 км при постоянной абсолютной скорости полета.

Если принять температуру воздуха вблизи земной поверхности $t_1 = 30$ °C ($T_1 = 303$ K), а на расстоянии 10 км от нее эта температура снижается до $t_2 =$ $= -50$ °C ($T_2 = 223$ K), то при подъеме самолета на 10 км скорость звука снизится на 16,6 %:

$$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{kRT_1}{kRT_2}} = \sqrt{\frac{303}{223}} = 1{,}166.$$

Соответственно при одной и той же абсолютной скорости полета самолета на рассматриваемом удалении от Земли его безразмерная скорость М увеличится на 16,6 %. В случае, если у Земли полет проходит с безразмерной скоростью $M_1 = 0{,}8$, то на расстоянии 10 км от Земли число M_2 увеличится до 0,93, что может существенно повлиять на безопасность полета, так как при столь высоком значении числа M_2 на крыле самолета возникают локальные сверхзвуковые области с $M_{2i} > 1$, способные спровоцировать срыв потока с крыла с последующим снижением его несущей способности.

Если запас потенциальной энергии в потоке приблизится к нулю, то число М, независимо от абсолютной скорости, будет неограниченно увеличиваться.

Таким образом, диапазон изменения введенной безразмерной скорости М оказывается неограниченным:

$$0 \le M < \infty.$$

В этой связи для практических расчетов более удобно относить абсолютную скорость потока c не к скорости звука, а к критической скорости c_*, определяемой запасом полной энергии. Тогда новая **безразмерная скорость** λ будет определяться в виде

$$\lambda = \frac{c}{c_*} = \frac{c}{\sqrt{\dfrac{2kRT_0}{k+1}}} = \frac{c}{c_{max}} \frac{c_{max}}{\sqrt{\dfrac{2kRT_0}{k+1}}} = \frac{c}{c_{max}} \frac{\sqrt{\dfrac{2kRT_0}{k-1}}}{\sqrt{\dfrac{2kRT_0}{k+1}}} = \frac{c}{c_{max}} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,. \quad (5.23)$$

Из записи (5.23) следует, что безразмерная скорость λ дает соотношение между кинетической и полной энергиями потока.

Максимального значения число λ достигает при скорости $c = c_{max}$. В этом случае $c/c_{max} = 1$ и согласно уравнению (5.23)

$$\lambda_{max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,. \quad (5.24)$$

Следовательно, диапазон изменения относительной скорости λ оказывается сравнительно небольшим и эта величина меняется в следующих пределах:

$$0 \le \lambda < \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,.$$

Связь между введенными безразмерными скоростями можно установить с помощью уравнения энергии, записанного в форме (5.21):

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1}\frac{c_*^2}{2}\,.$$

При делении левой и правой частей этого уравнения на c^2 получаем

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2}{c^2(k-1)} = \frac{k+1}{k-1}\frac{c_*^2}{2}\frac{1}{2}$$

или

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{M}^2(k-1)} = \frac{1}{2}\frac{k+1}{k-1}\frac{1}{\lambda^2}. \tag{5.25}$$

Отсюда

$$\mathrm{M}^2 = \frac{2\lambda^2}{(k+1)\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)}. \tag{5.26}$$

Из соотношения (5.26) следует, что в дозвуковой области ($\lambda < 1$) число M всегда меньше числа λ. При $\lambda = 1$ число M также равно единице, т.е. в критическом сечении обе безразмерные скорости равны между собой.

В сверхзвуковой области ($\mathrm{M} > 1$, $\lambda > 1$) $\mathrm{M} > \lambda$.

5.4. Связь безразмерных параметров потока с безразмерными скоростями M и λ

Связь безразмерных параметров потока с безразмерными скоростями легко устанавливается с помощью уравнения энергии, записанного в виде (5.14):

$$\frac{c^2}{2} + c_p T = c_p T_0.$$

После деления левой и правой частей этого уравнения на $c_p T$ получаем

$$\frac{c^2}{2c_p T} + 1 = \frac{T_0}{T}.$$

Поскольку газовая постоянная

$$R = c_p - c_V = c_p\left(1 - \frac{c_V}{c_p}\right) = c_p\left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

то

$$c_p = R\,\frac{k}{k-1}. \tag{5.27}$$

Тогда

$$\frac{c^2(k-1)}{2kRT} + 1 = \frac{T_0}{T}.$$

Учитывая, что скорость звука $a = \sqrt{kRT}$, получаем следующую связь безразмерной температуры с безразмерной скоростью М:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}^2. \tag{5.28}$$

Используя уравнение состояния $\frac{p}{\rho} = RT$ и уравнение изоэнтропы $\frac{p}{\rho^k} =$ $=$ const, находим связь относительной температуры T_0/T с относительным давлением p_0/p и относительной плотностью ρ_0/ρ.

Согласно уравнению состояния

$$\frac{T_0}{T} = \frac{p_0}{p}\,\frac{\rho}{\rho_0}.$$

В свою очередь, из уравнения изоэнтропы следует, что

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^k \quad \text{и} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/k}.$$

Тогда

$$\frac{T_0}{T} = \frac{p_0}{p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/k} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k}$$

и

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^k \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k-1}.$$

Отсюда с учетом формулы (5.28) получаем:

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \tag{5.29}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{5.30}$$

Аналогичным образом находится связь безразмерных параметров потока с безразмерной скоростью λ.

В этом случае уравнение энергии (5.14) делится на c_pT_0. Тогда можно записать

$$\frac{c^2}{2c_pT_0} + \frac{T}{T_0} = 1.$$

Используя (5.27), получаем

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{c^2(k-1)}{2kRT_0}.$$

Так как критическая скорость

$$c_* = \sqrt{\frac{2kRT_0}{k+1}}\ ,$$

то

$$2kRT_0 = c_*^2\,(k+1).$$

В результате имеем:

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\,\frac{c^2}{c_*^2} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\,\lambda^2\,; \tag{5.31}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\,\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \tag{5.32}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\,\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{5.33}$$

Приведенные соотношения позволяют по любой из приведенных безразмерных величин легко находить остальные. Необходимо отметить, что зависимости (5.31)—(5.33) справедливы не только при изоэнтропийном течении, но ими можно пользоваться и при неизоэнтропийном течении. Однако в этом случае применять их можно только локально в той или иной точке потока. При переходе от одной точки к другой в этом случае полная энергия потока, а следовательно, и параметры полного торможения могут меняться.

Так, например, если с помощью измерительных насадок в некоторой точке такого потока измерены статическое давление p и давление полного торможения p_0, то из уравнений (5.29) и (5.32) сразу можно найти безразмерные скорости M и λ в этой точке. Далее по этим скоростям определяются относительная температура T_0/T или T/T_0 и относительная плотность ρ_0/ρ или ρ/ρ_0. При переходе к другой точке необходимо вновь измерить давления p и p_0. В случае термически изолированного течения идеальной жидкости без внешних воздействий давление полного торможения остается постоянным во всей области течения и для оценки безразмерных параметров и скорости в любой произвольной точке достаточно измерить только статическое давление p, так как давление полного торможения p_0 постоянно по всему полю течения.

5.5. Распределение параметров потока и скоростей вдоль канала произвольной формы при различных внешних воздействиях

Характер движения жидкости в каналах определяется степенью внешних воздействий на нее. В практике наиболее часто используется геометрическое воздействие, когда меняется только проходная площадь канала. Этот случай оказывается и наиболее наглядным с физической точки зрения.

Для получения связи между скоростью потока и проходной площадью канала воспользуемся логарифмическим дифференциалом от уравнения расхода (5.4):

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}c}{c} + \frac{\mathrm{d}F}{F} = 0$$

и с помощью уравнения количества движения исключим отсюда член, учитывающий изменение плотности.

С этой целью, имея в виду, что **скорость звука** $a = \sqrt{\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho}$, представим (5.6) в виде

$$c\,\mathrm{d}c = -\frac{\mathrm{d}p}{\rho} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = a^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}.$$

Отсюда

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\frac{c\,\mathrm{d}c}{a^2}. \tag{5.34}$$

Подставляя (5.34) в (5.4), получаем

$$\frac{\mathrm{d}c}{c}\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = -\frac{\mathrm{d}F}{F}.$$

Отношение $c^2/a^2 = \mathrm{M}^2$, а $\dfrac{\mathrm{d}c}{c} = \dfrac{\mathrm{d}(c/c_*)}{c/c_*} = \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}$.

Тогда

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}(\mathrm{M}^2 - 1) = \frac{\mathrm{d}F}{F}. \tag{5.34a}$$

Используя далее уравнение (5.26), заменим безразмерную скорость M на безразмерную скорость λ и от дифференциалов перейдем к производным вдоль продольной оси x. В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение, связывающее изменение скорости с изменением площади:

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = \frac{\lambda\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)}{\lambda^2 - 1}\,\frac{1}{F}\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}. \tag{5.35}$$

Выражение (5.35) можно проинтегрировать, если известна зависимость $F = f(x)$, но анализ удобнее вести на основе дифференциального уравнения (5.35). Из этого уравнения следует, что скорость достигает экстремальных значений $\left(\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = 0\right)$ при а) $\lambda = 0$; б) $\lambda = \sqrt{\dfrac{k+1}{k-1}} = \lambda_{max}$; в) $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 0$.

Первый случай соответствует неподвижному газу и не представляет интереса. Во втором случае $\lambda = \lambda_{max}$ и дальнейшее увеличение скорости невозможно. Третий случай дает экстремальное значение скорости, если $\lambda \neq 1$, и показывает, что это ее значение может быть получено только в сечении, где достигается экстремальное значение площади $\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=0\right)$.

При $\lambda = 1$ и $\mathrm{d}F \neq 0$ $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} \to \infty$, что означает бесконечный разрыв скорости и, следовательно, в сечениях, где $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} \neq 0$, переход через скорость звука физически невозможен. Случай, когда $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 0$ и $\lambda = 1$, требует особого анализа, который показывает возможность существования точки перегиба на кривой $\lambda(x)$ в минимальном сечении канала. В этом сечении $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} \neq 0$ и дозвуковой поток переходит в сверхзвуковой, а сверхзвуковой — становится дозвуковым. Заметим, что полученный вывод формулирует только необходимое, но не достаточное условие перехода через критическую скорость.

Для осуществления такого перехода необходим вполне конкретный перепад давления, зависящий от степени расширения канала после минимального сечения. При меньшем перепаде давления за минимальным сечением произойдет торможение потока и кривая $\lambda(x)$ будет иметь в минимальном сечении только точку максимума скорости.

Изложенное может быть наглядно продемонстрировано графически. На рис. 5.4 приведены две диаграммы, соответствующие изменению скорости в каналах, имеющих максимальную (рис. 5.4, *а*) и минимальную (рис. 5.4, *б*) площади внутри канала.

Горизонтальная линия $\lambda = 1$ делит плоскость течения на сверхзвуковую область (вверх от этой линии) и дозвуковую.

Поскольку в уравнении (5.35) $\lambda > 0$; $1 - \frac{k-1}{k+1}\,1^2 > 0$, то знак производной $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}$ определяется знаком производной $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ и знаком члена $(\lambda^2 - 1)$. В дозвуковой области $(\lambda^2 - 1) < 0$ и знак изменения скорости $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}$ противоположен знаку изменения площади $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$.

В сверхзвуковой области $(\lambda^2 - 1) > 0$. Следовательно, закон изменения скорости совпадает с законом изменения площади.

Из приведенных кривых видно, что в первом случае (рис. 5.4, *а*) как в дозвуковой, так и в сверхзвуковой области с приближением к максимальному значению площади безразмерные скорости удаляются от значения $\lambda = 1$, т.е. в таком канале переход через скорость звука оказывается невозможным.

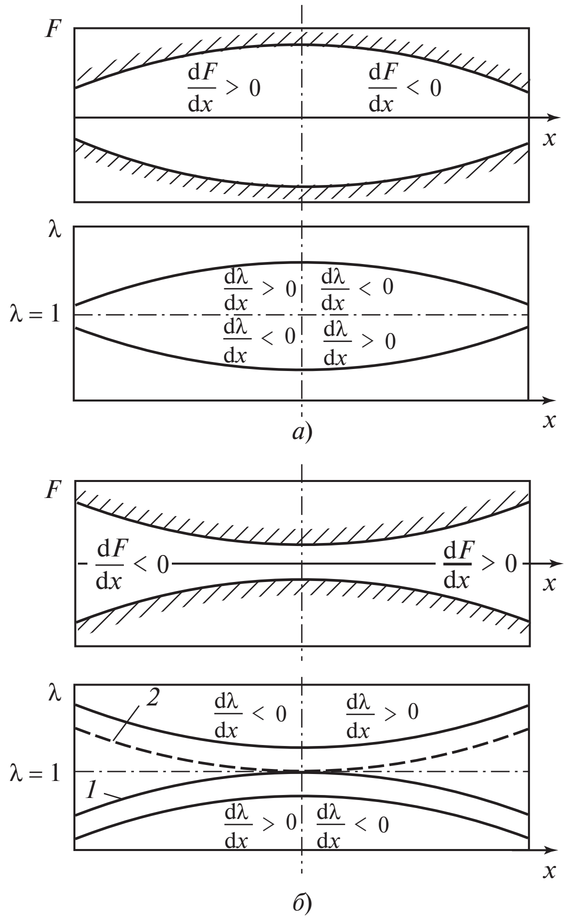


Рис. 5.4. Распределение безразмерной скорости λ_i в каналах с максимальной (*а*) и минимальной (*б*) площадями внутреннего сечения

Наоборот, в канале, имеющем минимальное сечение, скорости в обоих рассматриваемых случаях приближаются к скорости звука, и при определенных условиях в этом сечении совершается переход через скорость звука.

Формально, как это следует из уравнения (5.25), нет принципиальной разницы, с какой стороны происходит переход через скорость звука — при торможении сверхзвукового потока (кривая *2* на рис. 5.4, *б*) или при его ускорении от дозвуковых до сверхзвуковых скоростей (кривая *1* на рис. 5.4, *б*). Однако далее (см. гл. 8) будет показана физическая невозможность плавного торможения сверхзвукового потока, и, следовательно, на рис. 5.4, *б* реальным оказывается только ускорение потока от дозвуковых до сверхзвуковых скоростей (кривая *1*).

Таким образом, при наличии достаточного перепада давления между входным и выходным сечениями в минимальном сечении канала скорость потока достигает критического значения c_*, и это сечение является критическим ($F_{\min} = F_*$).

Используя зависимости (5.31)—(5.33), легко найти значения критических параметров в критическом сечении, подставив в эти зависимости $\lambda = 1$. Тогда

$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \tag{5.36}$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}; \tag{5.37}$$

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{k+1}. \tag{5.38}$$

Как следует из приведенных формул, относительные критические параметры определяются только физическими свойствами жидкости. В частности, для воздуха (k = 1,4) критический перепад давления $\varepsilon_* = p_*/p_0 =$ = 0,528. Для пара (k = 1,3) ε_* = 0,546.

Указанные значения ε_* позволяют в каждом конкретном случае судить о характере движения жидкости. Если в какой-либо точке известно локальное значение $\varepsilon_i = p_i/p_0$, то при $\varepsilon_i < \varepsilon_*$ течение — сверхзвуковое, а при $\varepsilon_i > \varepsilon_*$ имеют место дозвуковые скорости.

Для физического объяснения полученного формального условия перехода через скорость звука необходимо проанализировать характер изменения скорости и плотности как в дозвуковой, так и в сверхзвуковой области течения.

В дозвуковой области ($\lambda < 1$) интенсивность падения плотности оказывается ниже интенсивности нарастания скорости и для сохранения постоянного массового расхода в различных сечениях канала для увеличения скорости необходимо в направлении течения уменьшить проходную площадь. Другими словами, здесь снижение площади и плотности компенсируют возрастающую скорость, и, таким образом, сохраняется постоянство массового расхода.

Схематически этот процесс может быть изображен в виде соответствующих стрелок, приложенных к величинам, входящим в уравнение неразрывности:

$$\rho \downarrow c \uparrow F \downarrow = \text{const}.$$

С переходом через скорость звука решающей величиной в уравнении неразрывности становится плотность. Интенсивность ее снижения теперь существенно превосходит интенсивность нарастания скорости, и постоянство массового расхода при условии дальнейшего нарастания скорости вдоль энергоизолированного канала может быть достигнуто только за счет увеличения его проходной площади.

Здесь резко уменьшающаяся плотность компенсируется одновременным увеличением скорости и площади:

$$\rho \downarrow c \uparrow F \uparrow = \mathrm{const}.$$

Проведенный анализ течения в энергоизолированном канале при геометрическом воздействии на поток может быть распространен и на другие способы воздействия. Такими внешними воздействиями могут быть теплообмен, отбор из канала части движущей жидкости, подвод к потоку или отвод от него механической энергии.

При анализе каждого из указанных воздействий в целях исключения геометрического воздействия рассматривается течение в каналах с постоянной площадью сечения. В таких каналах при одномерном течении изменение скорости может иметь место только в результате изменения плотности вдоль рассматриваемого канала. При этом в зависимости от знака воздействия (подвод или отвод теплоты, подвод или отвод массы, подвод или отвод механической энергии) можно как ускорять, так и тормозить поток. Соответственно, как и при геометрическом воздействии, меняя в некотором сечении знак воздействия, в канале с постоянной площадью сечения (цилиндрическая труба) можно обеспечить переход от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям.

Для обеспечения перехода через скорость звука в цилиндрической трубе общим принципом воздействия является принцип, согласно которому необходимо вначале обеспечивать снижение плотности вдоль канала, а затем, при достижении критической скорости, меняя знак воздействия, столь же интенсивно ее увеличивать.

Так, при тепловом воздействии (тепловое сопло) вначале для обеспечения разгона потока необходимо подводить теплоту, а затем после достижения звуковой скорости обеспечить ее отвод.

В механическом сопле вначале необходимо отводить работу от газа, а затем сжимать его за счет подвода внешней работы. Легко видеть, что с физической точки зрения оба эти случая равнозначны, так как отвод или подвод теплоты эквивалентен подводимой или отводимой работе.

В расходном сопле плотность до сечения перехода через скорость звука падает за счет отвода части жидкости из канала, а затем возрастает в результате подвода в канал дополнительной жидкости. Этот случай эквивалентен случаю геометрического воздействия и легко к нему сводится в математическом отношении.

При одновременном воздействии всех или большей части указанных факторов затрудняется подробный качественный анализ и требуется использование определенных математических соотношений. Среди них основным является следующее уравнение, отражающее закон обращения воздействия, сформулированный Л.А. Вулисом:

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{\eta} = \sum g_m \frac{\mathrm{d}R_x}{\mathrm{d}x}, \tag{5.39}$$

где η — параметр течения, изменение которого подлежит анализу (это может быть скорость c, давление p, плотность ρ, температура T); $\mathrm{d}R_x$ — характеристика рассматриваемого воздействия на выбранный параметр течения η ($\frac{\mathrm{d}F}{F}$ — при геометрическом; $\mathrm{d}Q$ — при тепловом, $\mathrm{d}L_T$ или $\mathrm{d}L_k$ — при механическом и $\frac{\mathrm{d}m}{m}$ — при расходном воздействиях); g_m — коэффициенты влияния данного воздействия на поток. Значения этих коэффициентов определяются типом рассматриваемого воздействия. Их конкретный вид приведен в табл. 5.1. Принцип использования информации, содержащейся в табл. 5.1, достаточно прост. Так, если анализируется изменение скорости под воздействием всех указанных факторов, то каждый вид воздействия R_x, указанный в последней строке таблицы, умножается на соответствующий член, приведенный во второй строке. В результате получаем

$$(\mathrm{M}^2-1)\frac{\mathrm{d}c}{c\,\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}F}{F\,\mathrm{d}x}-\frac{k-1}{a^2}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{d}L_T}{\mathrm{d}x}-\frac{k}{a^2}\frac{\mathrm{d}L_k}{\mathrm{d}x}-\left[1+k(1-y)\mathrm{M}^2\right]\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\frac{1}{m}.$$

Таким же способом могут быть записаны и уравнения для остальных параметров течения. Для этого достаточно перед характеристиками воздействий поставить коэффициенты, взятые из строки, где стоит анализируемый параметр.

Рассмотрим частные случаи внешних воздействий на параметры течения и скорость, полагая для простоты анализа отсутствие сил трения и постоянство проходной площади канала ($\mathrm{d}F_0$).

Механическое воздействие. В данном случае воздействие характеризуется только одной величиной $\mathrm{d}R = \mathrm{d}L_T$. При этом если газ совершает работу против внешних сил, то $\mathrm{d}L_T > 0$, а если работа совершается над газом, то $\mathrm{d}L_T < 0$.

Таблица 5.1

Коэффициенты влияния воздействия на поток

η	$g_{1\eta}$	$g_{2\eta}$	$g_{3\eta}$	$g_{4\eta}$	$g_{5\eta}$
p	$-k\mathrm{M}^2$	$\frac{k(k-1)}{a^2}\mathrm{M}^2$	$\frac{k}{a^2}$	$\frac{k}{a^2}\,[1+(k-1)\mathrm{M}^2]$	$k\mathrm{M}^2\,[1+(k-1)](1-y)\mathrm{M}^2$
c	1	$-\frac{k-1}{a^2}$	$-\frac{1}{a^2}$	$-\frac{k}{a^2}$	$-[1+k(1-y)\mathrm{M}^2]$
ρ	$-\mathrm{M}^2$	$\frac{k-1}{a^2}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{k}{a^2}$	$\mathrm{M}^2\,[1+k(1-y)]$
T	$-(k-1)\mathrm{M}^2$	$\frac{k-1}{a^2}\,(k\mathrm{M}^2-1)$	$\frac{(k-1)}{a^2}$	$\frac{k(k-1)}{a^2}\mathrm{M}^2$	$(k-1)\mathrm{M}^2\,[1+k(1-y)\mathrm{M}^2]$
R	$\frac{\mathrm{d}F}{F}$	$\mathrm{d}Q$	$\mathrm{d}L_T$	$\mathrm{d}L_k$	$\frac{\mathrm{d}m}{m}$

Для рассматриваемого воздействия дифференциальные уравнения, определяющие изменение скорости и параметров потока в канале постоянного сечения, будут иметь следующий вид:

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{c} = -\,\frac{1}{a^2}\,\frac{\mathrm{d}L_T}{\mathrm{d}x};$$

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{p} = \frac{k}{a^2}\,\frac{\mathrm{d}L_T}{\mathrm{d}x};$$

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{\rho} = \frac{k-1}{a^2}\,\frac{\mathrm{d}L_T}{\mathrm{d}x};$$

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{T} = \frac{k-1}{a^2}\,(k\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{\mathrm{d}L_T}{\mathrm{d}x}.$$

Если газ совершает работу $\mathrm{d}L_T > 0$, то при $\mathrm{M} < 1$ $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} > 0$, т.е. имеет место ускорение потока. При сверхзвуковых скоростях ($\mathrm{M} > 1$) происходит торможение потока $\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} < 0\right)$. Пределом ускорения дозвукового потока и торможения сверхзвукового потока при совершении газом работы является достижение им звуковой скорости ($\mathrm{M} = 1$).

Для перехода в сверхзвуковую область течения согласно закону обращения воздействия необходимо изменить знак воздействия, т.е. совершить работу над газом ($\mathrm{d}L_T < 0$).

Канал постоянного сечения, в котором обеспечивается отвод механической энергии и соответственно происходит ускорение потока $\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} > 0\right)$, называется **механическим соплом**.

С этой точки зрения проточная часть турбины может рассматриваться как механическое сопло, где одновременно с отводом от газа или пара механической энергии осуществляется и геометрическое воздействие, состоящее в увеличении по ходу потока высот лопаточного аппарата (имеет место увеличение проходных площадей).

Канал постоянного сечения, в котором обеспечивается подвод механической работы к газу, в результате чего происходит его торможение, называется **механическим диффузором**. Подобное воздействие имеет место в осевых компрессорах, где подвод механической энергии к газу происходит одновременно с геометрическим воздействием (сужением проточной части компрессора). В результате наложения механического и геометрического воздействий удается сохранить примерно постоянной осевую скорость на всех ступенях компрессора.

При совершении газом внешней работы его энтальпия полного торможения снижается и достигает минимального значения в критическом сечении канала, где число М становится равным единице. Если, начиная с этого сечения, к газу подводить энергию, то произойдет переход к сверхзвуковой скорости. При этом будет расти энтальпия полного торможения h_0.

В механическом диффузоре при совершении над газом работы величина h_0 будет возрастать в направлении движения потока.

Термодинамические параметры p, ρ, T в механическом сопле уменьшаются по потоку, а в диффузоре возрастают.

Движение газа в канале постоянного сечения при наличии массообмена с внешней средой. В этом частном случае $\mathrm{d}Q = 0$, $\mathrm{d}L_T = 0$, $\mathrm{d}F = 0$ и дифференциальные уравнения, определяющие изменение скорости и параметров потока вдоль канала согласно коэффициентам табл. 5.1 (последний столбец), будут иметь следующий вид:

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = -\left[1 + k(1 - y)\mathrm{M}^2\right]\frac{1}{m}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x};$$

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{1}{p}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = k\mathrm{M}^2\left[1 + (k - 1)\right](1 - y)\mathrm{M}^2\,\frac{1}{m}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x};$$

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = \mathrm{M}^2\left[1 + k(1 - y)\right]\frac{1}{m}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x};$$

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{1}{T}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = (k - 1)\mathrm{M}^2\left[1 + k(1 - y)\mathrm{M}^2\right]\frac{1}{m}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x},$$

где y представляет собой отношение скорости подводимого или отводимого газа к продольной скорости основного потока.

При подводе добавочного газа к основному дозвуковому потоку ($\mathrm{M} < 1$ и $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} > 0$) согласно первому из приведенных уравнений величина $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} > 0$, т.е. происходит ускорение потока. При отводе из канала некоторой массы газа происходит торможение основного потока.

Как и ранее, максимальная скорость, которую можно получить внутри канала при подводе к нему добавочной массы газа, равна скорости звука ($\mathrm{M} = 1$). Для дальнейшего ускорения потока и перехода к сверхзвуковым скоростям за сечением, где достигается звуковая скорость, необходимо изменить знак воздействия и вместо подвода обеспечить отвод части газа из канала.

В расходном сопле (при подводе добавочного газа) на дозвуковом участке плотность тока ρc увеличивается, а температура, плотность и давление среды снижаются. В сверхзвуковой части канала плотность тока ρc, наоборот, уменьшается.

Тепловое воздействие и тепловые скачки. Если в канале с постоянным поперечным сечением имеет место только тепловое воздействие, то согласно третьему столбцу табл. 5.1 получаем:

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = -\,\frac{k-1}{a^2}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x};$$

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{1}{p}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{k(k-1)}{a^2}\,\mathrm{M}^2\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}.$$

Согласно первому уравнению при подводе к газу теплоты $\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} > 0\right)$ при дозвуковой скорости потока (М < 1) происходит его ускорение $\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} > 0\right)$, и в пределе скорость может достичь скорости звука (М = 1). Если при этом изменить знак воздействия (начать охлаждать поток), то произойдет переход к сверхзвуковым скоростям. Построенный по такому принципу канал называется **тепловым соплом**.

В сверхзвуковом потоке (М > 1) подвод теплоты приводит к его торможению до звуковой скорости (М = 1) и для дальнейшего торможения уже необходимо отводить от потока теплоту (менять знак воздействия). Построенный по этому принципу канал является тепловым диффузором.

В случае, если подвод теплоты к потоку осуществляется не дискретно, а на небольшом линейном расстоянии в результате горения, химической реакции, конденсации и других явлений, в потоке возможно появление тепловых скачков, когда все параметры скачком меняют свои значения. Этот практически важный случай теплового воздействия рассматривается ниже (см. гл. 8 и 15).

5.6. Удельный расход и приведенный удельный расход жидкости

Удельный массовый расход жидкости $\overline{m}$ представляет собой секундный расход массы через единицу площади: $\overline{m} = \frac{m}{F} = \rho c$.

С помощью формулы (5.33) свяжем эту величину с безразмерной скоростью λ:

$$\overline{m} = \rho c = \rho_0 c_* \frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{c}{c_*} = \frac{k-1}{k+1}\,\rho_0 c_* \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\,\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda. \qquad (5.40)$$

Полученная зависимость показывает, что удельный расход обращается в нуль при $\lambda = 0$ и $\lambda = \lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$. Следовательно, при некоторой промежуточной скорости λ функция (5.40) достигает максимального значения. Запишем условие экстремума:

$$\frac{\partial \overline{m}}{\partial \lambda} = \rho_0 c_* \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{2 - \frac{1}{k-1}} (1 - \lambda^2) = 0.$$

Отсюда следует существование двух экстремальных точек при $\lambda = 1$ и при $\lambda = \lambda_{\max}$. Последнему значению соответствует точка минимума, так как при $\lambda = \lambda_{\max}$ $\overline{m} = 0$. Следовательно, при $\lambda = 1$ рассматриваемая функция достигает максимального значения.

Подставив в (5.40) $\lambda = 1$, запишем формулу для максимального удельного расхода:

$$\overline{m}_{\max} = \rho_0 c_* \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \rho_0 c_* \frac{\rho_*}{\rho_0} = \rho_* c_*.$$

Выразив удельный расход в долях от максимальной величины, получим **приведенный удельный расход** q, зависящий только от скорости λ и показателя изоэнтропы k:

$$q = \frac{\overline{m}}{\overline{m}_{\max}} = \frac{\rho c}{\rho_* c_*} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (5.41)$$

В свою очередь, безразмерная скорость λ определяется относительным давлением $\varepsilon_i = \dfrac{p_i}{p_0}$ (p_i — давление в том сечении, где удельный приведенный расход определяется) по соотношению

$$\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}\left(1 - \varepsilon_i^{\frac{k-1}{k}}\right)}.$$

Тогда

$$q = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \varepsilon_i^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}\left(1 - \varepsilon_i^{\frac{k-1}{k}}\right)}. \qquad (5.42)$$

График изменения функции $q = f(\lambda)$ приведен на рис. 5.5. Важно отметить, что одно и то же значение приведенного расхода может быть при дозвуковой и сверхзвуковой скоростях. Эту неоднозначность необходимо всегда иметь в виду при решении конкретных задач, где приходится либо находить, либо использовать значение q.

С помощью приведенного расхода легко связываются геометрические характеристики канала с параметрами потока. С этой целью запишем усло-

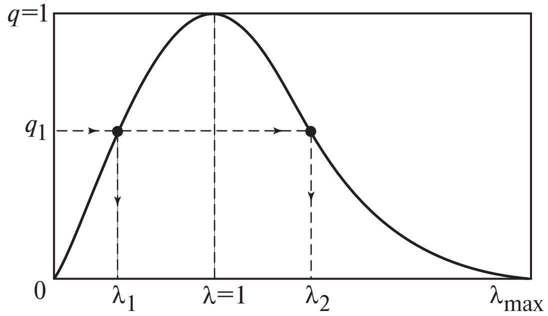


Рис. 5.5. Зависимость приведенного удельного расхода *q* от безразмерной скорости λ_i

вие постоянства расхода через произвольное сечение канала площадью F_i и его критическое сечение площадью F_*:

$$m = \rho_i c_i F_i = \rho_* c_* F_*.$$

Отсюда

$$q_i = \frac{\rho_i c_i}{\rho_* c_*} = \frac{F_*}{F_i}. \tag{5.43}$$

Таким образом, величина q оказывается не только газодинамической функцией, но и имеет геометрический смысл, позволяющий решать практически все задачи, связанные с одномерным течением идеальной жидкости в каналах произвольной формы. Алгоритм решения этих задач зависит от граничных условий и будет рассмотрен несколько позднее на конкретных примерах. Здесь же отметим, что поскольку в критическом сечении удельный расход $\overline{m}$ достигает максимального значения, то критический расход m_* также является максимально достижимым при заданных начальных параметрах и заданном критическом сечении. Его значение определяется по обычному уравнению расхода, записанному для критического сечения:

$$m_* = \rho_* c_* F_* = \frac{\rho_*}{\rho_0} c_* F_* \rho_0.$$

Заменяя здесь критическое отношение плотностей в соответствии с (5.37), критическую скорость с учетом (5.20) и выражая плотность ρ_0 из уравнения состояния, получаем

$$m_* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{2kRT}{k+1}} \frac{p_0}{RT_0} F_*.$$

Отсюда после очевидных сокращений будем иметь

$$m_* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2(k-1)}} \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} F_* = B \frac{p_0 F_*}{\sqrt{T_0}}. \tag{5.44}$$

Постоянная B зависит только от физических свойств жидкости и, если выражать давление p_0 в паскалях, площадь F_* в квадратных метрах, а температуру T_0 в кельвинах, то для воздуха $B = 0{,}0404$ с $\cdot$ К$^{1/2}$/м, а для перегретого пара $B = 0{,}0311$ с $\cdot$ К$^{1/2}$/м.

Из (5.44) следует весьма важный вывод: критический расход прямо пропорционален начальному давлению, обратно пропорционален корню квадратному из начальной температуры и не зависит от противодавления.

5.7. Газодинамические функции одномерного газового потока

Введенные выше зависимости относительных параметров потока от безразмерной скорости λ: $\overline{T} = \dfrac{T}{T_0} = f(\lambda)$, $\varepsilon = \dfrac{p}{p_0} = f(\lambda)$, $\overline{\rho} = \dfrac{\rho}{\rho_0} = f(\lambda)$, $q = f(\lambda)$ [см. формулы (5.31)—(5.33), (5.41)] позволяют в случае одномерного течения достаточно просто определять все параметры потока в каналах заданной геометрии.

При современном развитии вычислительной техники знание любого относительного параметра или скорости позволяет сразу находить все остальные величины. Однако число газодинамических функций не ограничивается приведенным соотношениями.

Помимо введенных газодинамических функций используются и другие функции скорости λ, встречающиеся при преобразованиях уравнений сохранения расхода, количества движения и энергии.

Найдем, в частности, массовый расход m через заданное сечение канала с помощью приведенного расхода q. Очевидно, что

$$m = \rho c F = \rho_* c_* F q = m_* q = B\,\frac{p_0 F}{\sqrt{T_0}}\,q. \tag{5.45}$$

Введем в рассмотрение статическое давление. С этой целью (5.45) умножим и разделим на p:

$$m = BF\,\frac{q}{\sqrt{T_0}}\,\frac{p_0}{p}\,p = BF\,\frac{p}{\sqrt{T_0}}\,\sigma, \tag{5.46}$$

где

$$\sigma = \frac{p_0 q}{p} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\,\lambda^2\right)^{-1} \tag{5.47}$$

— еще одна функция скорости λ и показателя изоэнтропы k.

Уравнение расхода в форме (5.45) или (5.46) удобно использовать для расчета течения в изолированной системе при наличии трения.

Действительно, записав (5.45) для двух сечений канала, получим

$$F_1 \frac{p_{01}}{\sqrt{T_{01}}} q_1 = F_2 \frac{p_{02}}{\sqrt{T_{02}}} q_2. \qquad (5.48)$$

Для изолированной системы $T_{01} = T_{02}$. Тогда

$$\frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{F_2}{F_1} \frac{q_2}{q_1}.$$

Если рассматривать канал постоянного сечения (F = const), то

$$\frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{q_2}{q_1}. \qquad (5.49)$$

Отсюда легко находится изменение давления полного торможения между двумя произвольными сечениями, обусловленное потерями трения, если известны средние безразмерные скорости λ в этих сечениях.

Используя (5.46), можно найти отношение статических давлений в двух различных сечениях канала при $T_{01} = T_{02}$:

$$F_1 p_1 \sigma_1 = F_2 p_2 \sigma_2.$$

Отсюда

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{F_2}{F_1} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \qquad (5.50)$$

При обработке опытных данных полезной может оказаться еще одна функция, определяемая следующим образом:

$$\pi = \frac{p}{\rho c c_*} = \frac{p}{\rho c^2} \lambda = \frac{RT}{c^2} \lambda = \frac{a^2}{c^2 k} \lambda = \frac{\lambda}{k\mathrm{M}^2}. \qquad (5.51)$$

Заменяя число М на число λ с учетом соотношения (5.26), получаем

$$\pi = \frac{k+1}{2k} \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right). \qquad (5.52)$$

Совместное использование зависимостей (5.51) и (5.52) позволяет выразить статическое давление p в долях от скоростного напора:

$$\overline{p} = \frac{p}{\rho \frac{c^2}{2}} = 2 \frac{\pi}{\lambda} = \frac{k+1}{k} \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{k-1}{k} \lambda^2\right). \qquad (5.53)$$

Часто используется обратное значение безразмерного давления, определяемого по (5.53):

$$j = \frac{\rho c^2}{2p} = \frac{k}{k+1} \frac{\lambda^2}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)}. \qquad (5.54)$$

Таблица 5.2

Схема использования таблиц газодинамических функций

λ	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	q	σ	j	j_0	M
0								
ε_i	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	q_i	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
ε_2	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	q_2	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\vdots$								
1								
$\vdots$								
λ_{max}								

Если скоростной напор $\rho c^2/2$ выразить в долях от давления полного торможения, то

$$j = \frac{\rho c^2}{2p_0} = \frac{\rho c^2}{2p}\,\frac{p}{p_0} = \frac{k}{k+1}\,\lambda^2\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (5.55)$$

Приведенные выражения не исчерпывают всех газодинамических функций, но эти величины используются наиболее часто. По этой причине указанные функции входят во все таблицы, которые приведены в приложении (см. табл. П.1 и П.2).

Рассмотрим несколько конкретных задач, иллюстрирующих практическое использование таблиц газодинамических функций. Для наглядности в табл. 5.2 приведена схема использования таких таблиц.

Задача 1. Найти распределение скоростей и параметров потока в канале, изображенном на рис. 5.6 (на рисунке задаются геометрические характеристики канала), если известно давление полного торможения перед каналом p_0 и давление в выходном сечении канала p_2.

Алгоритм решения можно представить в следующем виде.

1. Вычисляем отношение давлений на весь канал $\varepsilon_2 = p_2/p_0$.

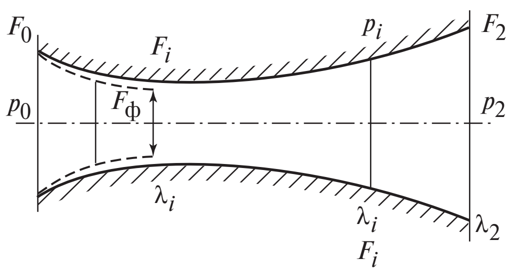


Рис. 5.6. К расчету параметров потока и скоростей в канале при одномерном течении

2. По ε_2 находим в таблицах газодинамических функций значение приведенного расхода q_2 в выходном сечении.

3. Зная $q_2 = F_{*ф}/F_2$, определяем значение площади в критическом сечении по формуле $F_{*ф} = q_2 F_2$. В данном случае критическая площадь не обязательно должна равняться площади минимального сечения F_1 и с этой точки зрения имеет условное «фиктивное» значение. Важно, однако, отметить, что для продолжения расчета необходимо, чтобы полученная величина $F_{*ф}$ была меньше или равна площади минимального сечения ($F_{*ф} \le F_1$). Если $F_{*ф} > F_1$, дальнейший расчет канала при заданном перепаде давления продолжать нельзя, так как в этом случае нарушается плавность изменения параметров потока вдоль канала, вызванная переходом к сверхзвуковым скоростям. Такой случай подробно излагается ниже (см. гл. 8), а здесь мы ограничимся рассмотрением только тех режимов, при которых не происходит переход к сверхзвуковым скоростям.

Величине $F_{*ф}$ можно дать определенную геометрическую трактовку. По существу критическая «фиктивная» площадь $F_{*ф}$ показывает, насколько должно быть уменьшено минимальное сечение канала, чтобы при данном перепаде давления осуществился переход к скорости звука. На рис. 5.6 это добавочное сужение показано штриховой линией.

4. В любом интересующем нас произвольном сечении канала находим удельный приведенный расход $q_i = F_{*ф}/F_i = q_2 F_2/F_i$.

5. По значению q_i прямым расчетом или с помощью таблиц газодинамических функций определяем все безразмерные параметры потока (λ_i, p_i/p_0, ρ_i/ρ_0, T_i/T_0, σ, j, j_0, M).

Задача 2. Для канала заданной геометрии (см. рис. 5.6) определить отношение давлений $\varepsilon_2 = p_2/p_0$, при котором в узком сечении скорость потока достигает критического значения.

По условиям данной задачи минимальное сечение совпадает с критическим, т.е. $F_{*ф} = F_* = F_1$. Следовательно, $q_2 = F_*/F_2 = F_1/F_2$, и далее из таблиц сразу находим интересующее нас значение ε_2.

Задача 3. Построить расширяющуюся часть осесимметричного канала, изображенного на рис. 5.6, если заданы диаметр узкого сечения d_1 и кривая изменения скорости вдоль оси канала (рис. 5.7).

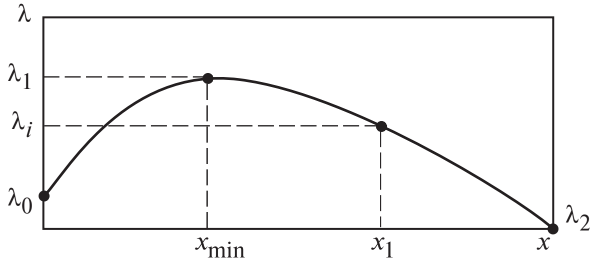


Рис. 5.7. К построению расширяющейся части канала по заданному распределению скорости вдоль его оси

Решение задачи выполним по следующей схеме.

1. Зная скорость λ_1 на входе в расширяющуюся часть канала, найдем

$$q_1 = \frac{d_{*ф}^2}{d_1^2} \text{ и } d_{1ф}^2 = q_1 d_1^2 .$$

2. Разбив рассматриваемую часть канала по оси x на ряд отрезков (закон деления на отрезки может быть произвольным, но для построения канала удобнее иметь равные интервалы изменения x), определим по заданному графику значения скорости λ_i в узловых точках.

3. По скоростям λ_i из таблиц найдем соответствующие им значения приведенных расходов:

$$q_i = \frac{d_{*ф}^2}{d_i^2} = q_1 \frac{d_1^2}{d_i^2} .$$

Вычислим диаметры канала d_i в принятых узловых точках по формуле

$$d_i = d_1 \sqrt{q_1 / q_i} .$$

При заданной длине канала L определим соответствующие значения координат $x_i = \bar{x} L$ в узловых точках и построим образующую канала.

5.8. Способы приведения плоских и трехмерных потоков к одномерной схеме течения

Одномерные течения, т.е. течения, для которых скорости и все параметры потока зависят только от одной координаты, в технических задачах не встречаются. Однако исключительная простота одномерных уравнений и возможность получения физически наглядных решений делают целесообразным поиск решений для сложных плоских и трехмерных течений в рамках одномерной схемы. При этом вместо реального поля скоростей в поперечном сечении рассматривается некоторая средняя скорость, значение которой зависит от принятого способа осреднения.

В гидравлических расчетах наиболее часто используется так называемая **среднерасходная скорость**. Пусть в некотором сечении канала *1-1* поле скоростей имеет вид, изображенный на рис. 5.8 (при одномерном течении продольная скорость u равна абсолютной скорости c).

Массовый расход жидкости в данном сечении может быть найден в виде следующего интеграла, взятого по всей площади F:

$$m = \int_{F_i} \rho_i c_i \, \mathrm{d}F .$$

Для несжимаемой жидкости $\rho_i = \rho = \mathrm{const}$, следовательно,

$$m = \rho \int_{F_i} c_i \, \mathrm{d}F .$$

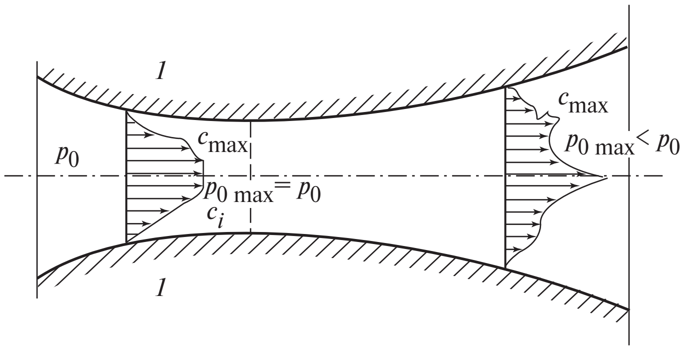


Рис. 5.8. К определению параметров потока при неравномерном поле скоростей в поперечном сечении канала

Поставим в соответствие рассматриваемому неравномерному полю скоростей некоторое равномерное поле, выбрав скорость $c_{ср}$ таким образом, чтобы расход жидкости через сечение *1-1* оставался неизменным. Тогда

$$m = \rho \int_{F_i} c_i \, \mathrm{d}F = \rho c_{ср} F.$$

Отсюда

$$c_{ср} = \frac{m}{\rho F_i} = \int_0^1 c_i \frac{\mathrm{d}F}{F}. \tag{5.56}$$

Область использования среднерасходной скорости $c_{ср}$, строго говоря, ограничена задачами, где конечной целью является оценка расхода жидкости. Если же необходимо находить силовое воздействие или энергетическое состояние потока, то неравномерному потоку необходимо ставить в соответствие условный равномерный поток, обладающий таким же количеством движения или такой же энергией, как и осредняемый поток.

При осреднении по количеству движения J исходное уравнение может быть записано в виде

$$J = \int_{F_i} \rho c_i^2 \, \mathrm{d}F = m c_J = \rho c_{J\,ср} c_{ср} F_i. \tag{5.57}$$

Здесь не только количество движения, но и расход потока в рассматриваемом сечении сохраняются такими же, как и при реальном поле скоростей.

В результате средняя скорость $c_{J\,ср}$ будет определяться так:

$$c_{J\,ср} = c_{ср} \int_0^1 \frac{c_J^2}{c_{ср}^2} \, \mathrm{d}\overline{F}. \tag{5.58}$$

Из (5.58) отчетливо видно, что скорость $c_{J\,\text{ср}}$ нельзя использовать для оценки массового расхода, так как она отличается от среднерасходной скорости $c_{\text{ср}}$. Следовательно, нет оснований накладывать ограничение на расход при осреднении потока по количеству движения. Тогда вместо (5.57) можно записать

$$J = \int\limits_{F_i} \rho_i c_i^2 \, \mathrm{d}F = \rho c_J^2 F_i \quad \text{и} \quad c_{J\,\text{ср}} = \sqrt{\int\limits_0^1 c_i^2 \mathrm{d}\overline{F}} \,. \tag{5.59}$$

Аналогичным образом находится и средняя скорость $c_{k\,\text{ср}}$ при осреднении по энергии:

$$c_{k\,\text{ср}} = \sqrt[3]{\int\limits_0^1 c_i^3 \mathrm{d}\overline{F}} \,. \tag{5.60}$$

К вопросу осреднения неравномерных полей скорости можно подойти и несколько с других позиций. Если при выводе соотношений (5.58)—(5.60) значения средних скоростей $c_{\text{ср}}$ были получены для реальной площади проходного сечения, то иногда при эквивалентной замене неравномерного поля скоростей равномерным целесообразно деформировать границы канала. В этом случае удается сохранить одну и ту же скорость приведения независимо от метода осреднения и за счет различной деформации границы получить равномерный поток, имеющий те же расход, количество движения и запас кинетической энергии, что и осредняемый неравномерный поток.

Пусть в рассматриваемом сечении вместо реального профиля скорости $c_i(y)$ и реального распределения плотности $\rho_i(y)$ скорость и плотность имеют постоянные значения c_x и ρ_x. Тогда условный расход, найденный по этим величинам, будет составлять

$$m_{tx} = \rho_x c_x F_i. \tag{5.61}$$

Действительный расход, как и ранее, будет определяться по формуле

$$m = \rho \int\limits_F c_i \, \mathrm{d}F \,.$$

Найдем разность Δm между расходом, определяемым по (5.61), и действительным расходом m:

$$\Delta m = m_{tx} - m = \int\limits_{F_i} \rho_x c_x \left(1 - \frac{\rho_i c_i}{\rho_x c_x}\right) \mathrm{d}F$$

или, так как ρ_x и c_x — величины постоянные, то

$$\Delta m = \rho_x c_x F_i \int_0^1 \left(1 - \frac{\rho_i c_i}{\rho_x c_x} \right) \mathrm{d}\overline{F} . \tag{5.62}$$

Интеграл в (5.62) определяет некоторую безразмерную площадь $\overline{\Delta}_x^*$, которую назовем безразмерной площадью вытеснения:

$$\overline{\Delta}_x^* = \frac{\Delta_x^*}{F_i} = \int_0^1 \left(1 - \frac{\rho_i c_i}{\rho_x c_x} \right) \mathrm{d}\overline{F} . \tag{5.63}$$

Тогда

$$\Delta m = m_{tx} - m = m_{tx} \overline{\Delta}_x^*$$

и действительный расход

$$m = m_{tx} - \Delta m = m_{tx} \left(1 - \overline{\Delta}_x^* \right). \tag{5.64}$$

Отсюда видно, что при указанном подходе существует неограниченная возможность расходного осреднения неравномерного поля скоростей, а введенная относительная площадь вытеснения $\overline{\Delta}_x^*$ является основным элементом такого осреднения и имеет вполне конкретный физический смысл, а именно: величина $\overline{\Delta}_x^*$ определяет то изменение относительной проходной площади в рассматриваемом сечении, которое необходимо провести, чтобы расход через нее при переходе к выбранному равномерному полю скоростей был равен действительному расходу, т.е. в данном случае вместо действительной площади F_i вводится некоторая условная площадь (назовем ее **эффективной**), определяемая по соотношению

$$F_{\text{эф}} = F_i \left(1 - \overline{\Delta}_x^* \right).$$

В качестве параметров приведения при расчете различных каналов наиболее удобно использовать теоретические значения плотности ρ_t и скорости c_t. Эти величины находятся по располагаемому перепаду энтальпий Δh между давлением полного торможения перед каналом и давлением в рассматриваемом сечении канала. В этом случае $\rho_x = \rho_t$, $m_x = m_t$. Следовательно,

$$\overline{\Delta}_i^* = \int_0^1 \left(1 - \frac{\rho_i c_i}{\rho_t c_t} \right) \mathrm{d}\overline{F} ; \tag{5.65}$$

$$m = \rho_t c_t F_i \left(1 - \overline{\Delta}_i^* \right) . \tag{5.66}$$

Величина $\left(1-\overline{\Delta}_i^{\,*}\right)$ показывает, насколько действительный расход в рассматриваемом сечении канала меньше теоретически возможного и называется **коэффициентом расхода** $\mu = 1 - \overline{\Delta}_i^{\,*}$.

В некоторых задачах целесообразно для скорости приведения реального профиля к равномерному использовать максимальное значение скорости $c_{i\,\max}$ и плотность ρ_j в точке, которой соответствует эта скорость.

Тогда

$$\overline{\delta}_j^{\,*} = \int_0^1 \left(1 - \frac{\rho_i c_i}{\rho_j c_{\max}}\right) \mathrm{d}\overline{F}\,; \tag{5.67}$$

$$m = \rho_t c_{\max} F_j \left(1 - \overline{\delta}_j^{\,*}\right). \tag{5.68}$$

В дальнейшем сохраним введенную разницу в обозначениях площади вытеснения, найденной по теоретическим величинам и по максимальному значению скорости.

Ясно, что в случае, когда потери энергии хотя бы на одной линии тока в рассматриваемом сечении будут равны нулю, $c_{\max} = c_t$ и, следовательно, $\overline{\Delta}_i^{\,*} = \overline{\delta}_i^{\,*}$. В остальных случаях $\overline{\delta}_i^{\,*} < \overline{\Delta}_i^{\,*}$.

Аналогичным образом можно подойти и к осреднению неравномерного потока по количеству движения и энергии.

Представим себе такой равномерный поток, который при заданном расходе обладал бы тем же количеством движения, что и действительный неравномерный поток. Если в качестве параметров приведения использовать ρ_t и c_t, то теоретическое значение J_t в рассматриваемом сечении j — j будет определяться в виде

$$J_{jt} = m c_{jt} = \int_{F_j} \rho_i c_i c_{jt}\, \mathrm{d}F.$$

Действительная величина $J_j = \int_{F_i} \rho_i c_i^2\, \mathrm{d}F$.

Разность этих величин

$$\Delta J = J_{jt} - J_j = \int_{F_i} \rho_i c_i c_{jt} \left(1 - \frac{c_i}{c_{jt}}\right) \mathrm{d}F.$$

После очевидных преобразований будет иметь

$$\Delta J = \rho_{jt} c_{jt}^2 F_j \int_0^1 \frac{\rho_i c_i}{\rho_{jt} c_{jt}} \left(1 - \frac{c_i}{c_{jt}}\right) \mathrm{d}\overline{F}. \tag{5.69}$$

Безразмерную площадь

$$\overline{\Delta}_j^{**} = \int_0^1 \frac{\rho_i c_i}{\rho_{jt} c_{jt}} \left(1 - \frac{c_i}{c_{jt}}\right) \mathrm{d}\overline{F} = \frac{\Delta_j^{**}}{F_j} \qquad (5.70)$$

назовем **относительной площадью потери импульса**. Масса жидкости, протекающей через площадь Δ_j^{**} при скорости c_{jt} и плотности ρ_{jt}, несет количество движения, определяемое соотношением (5.69). В результате

$$\Delta J_j = \rho_{jt} c_{jt}^2 F_j \overline{\Delta}_j^{**} = \rho_{jt} c_{jt}^2 \Delta_j^{**} \qquad (5.71)$$

определяет количество движения, потерянное в потоке до рассматриваемого сечения j — j, а количество движения J_j в этом сечении может быть найдено по принятым параметрам осреднения с помощью следующего соотношения:

$$J_j = J_{jt} - \Delta J_j = \rho_{jt} c_{jt}^2 F_j \left(1 - \overline{\Delta}_j^{*} - \overline{\Delta}_j^{**}\right). \qquad (5.72)$$

При использовании для осреднения максимальной скорости будет иметь

$$\overline{\delta}_j^{**} = \int_0^1 \frac{\rho_i c_i}{\rho_j c_{j\,\max}} \left(1 - \frac{c_i}{c_{j\,\max}}\right) \mathrm{d}\overline{F}\,; \qquad (5.73)$$

$$\Delta J_j = \rho_j c_{j\,\max}^2 \,\overline{\delta}_j^{**}\,; \qquad (5.74)$$

$$J_j = \rho_j c_{j\,\max}^2 F_j \left(1 - \overline{\delta}_j^{*} - \overline{\delta}_j^{**}\right). \qquad (5.75)$$

Таким же образом проведем осреднение потока и по энергии.

Теоретическая кинетическая энергия в сечении j — j будет составлять

$$K_{jt} = \frac{m c_{jt}^2}{2} = \frac{1}{2} \int_{F_j} \rho_i c_i c_{jt}^2 \mathrm{d}F, \qquad (5.76)$$

а ее действительное значение определяется в виде

$$K_{ji} = \frac{1}{2} \int_{F_j} \rho_i c_i^3 \mathrm{d}F.$$

Разность этих величин дает

$$\Delta K = K_{jt} - K_j = \frac{1}{2}\, \rho_{jt} c_{jt}^3 F_j \int_0^1 \frac{\rho_i c_i}{\rho_{jt} c_{jt}} \left(1 - \frac{c_i^2}{c_{jt}^2}\right) \mathrm{d}\overline{F}\,. \qquad (5.77)$$

Обозначим интеграл в (5.77) через $\overline{\Delta}_j^{***}$. Тогда

$$\Delta K = \frac{1}{2}\ \rho_{jt} c_{jt}^3 F_j \overline{\Delta}_j^{***}, \tag{5.77а}$$

$$K_j = K_{jt} - \Delta K = K_{jt}\left(1 - \frac{\Delta K}{K_{jt}}\right) = \frac{1}{2}\ m c_{jt}^2 \left(1 - \frac{\rho_{jt} c_{jt}^3 F_i \overline{\Delta}_j^{***}}{m c_{jt}^2}\right). \tag{5.78}$$

Заменив в (5.78) массу m с учетом (5.66), получим

$$K_j = \frac{1}{2}\ \rho_{jt} c_{jt}^3 F_j \left(1 - \frac{\overline{\Delta}_j^{***}}{1 - \overline{\Delta}_j^{*}}\right)\left(1 - \overline{\Delta}_j^{*}\right). \tag{5.79}$$

Если осреднение вести по максимальной скорости, то

$$K_j = \frac{1}{2}\ \rho_j c_{j\,\max}^3\ F_i \left(1 - \frac{\overline{\delta}_j^{***}}{1 - \overline{\delta}_j^{*}}\right)\left(1 - \overline{\delta}_j^{*}\right). \tag{5.80}$$

Условие постоянства массового расхода m, количества движения J_j и кинетической энергии K_j в сечении осреднения позволяет легко установить связь между величинами $\overline{\delta}_j^{*}$, $\overline{\delta}_j^{**}$ и $\overline{\delta}_j^{***}$, с одной стороны, и величинами $\overline{\Delta}_j^{*}$, $\overline{\Delta}_j^{**}$ и $\overline{\Delta}_j^{***}$, с другой.

Так, приравняв (5.66) и (5.68), получим

$$\rho_{jt} c_{jt}\left(1 - \overline{\Delta}_j^{*}\right) = \rho_j c_{j\,\max}\left(1 - \overline{\delta}_j^{*}\right).$$

Если обозначить отношение $c_{j\,\max}/c_{jt} = \varphi_0$ и пренебречь разницей плотностей, найдем, что

$$\overline{\Delta}_j^{*} = 1 - \varphi_0\left(1 - \overline{\delta}_j^{*}\right). \tag{5.81}$$

Приравняем далее (5.75) и (5.79):

$$\rho_{jt} c_{jt}^2 F_j\left(1 - \overline{\Delta}_j^{*} - \overline{\Delta}_j^{**}\right) = \rho_j c_{j\,\max}^2 F_j\left(1 - \overline{\delta}_j^{*} - \overline{\delta}_j^{**}\right).$$

Тогда

$$\overline{\Delta}_j^{**} = 1 - \overline{\Delta}_j^{*} - \varphi_0^2\left(1 - \overline{\delta}_j^{*} - \overline{\delta}_j^{**}\right)$$

или с учетом (5.81)

$$\overline{\Delta}_j^{**} = \varphi_0\left(1 - \overline{\delta}_j^{*}\right) - \varphi_0^2\left(1 - \overline{\delta}_j^{*} - \overline{\delta}_j^{**}\right).$$

Сравнение выражений (5.79) и (5.80) дает

$$\rho_{jt} c_{jt}^3 F_j \left[1 - \frac{\overline{\Delta}_j^{***}}{(1 - \overline{\delta}_j^*)\varphi_0} \right] = \rho_j c_{j\,\max}^3 F_j \left[1 - \frac{\overline{\delta}_j^{***}}{1 - \overline{\delta}_j^*} \right].$$

Здесь величина $\overline{\Delta}_j^*$ заменена соотношением (5.81). Отсюда

$$\overline{\Delta}_j^{***} = \varphi_0 \left(1 - \overline{\delta}_j^* \right) - \varphi_0^3 \left(1 - \overline{\delta}_j^* - \overline{\delta}_j^{***} \right).$$

При $\varphi_0 = 1$ $\overline{\Delta}_j^* = \overline{\delta}_j^*$; $\overline{\Delta}_j^{**} = \overline{\delta}_j^{**}$; $\overline{\Delta}_j^{***} = \overline{\delta}_j^{***}$.

При использовании рассмотренного метода осреднения оказывается возможным перейти к одномерной схеме течения в достаточно сложных случаях и тем самым, упростив задачу, получить ее приближенное решение. Степень приближения, естественно, определяется степенью правомерности перехода к одномерной схеме течения.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем разница между одномерным, плоским и пространственным течениями?
2. Как выглядит логарифмическая производная от уравнения расхода?
3. Что такое параметры полного торможения потока?
4. Дайте определения максимальной скорости и скорости звука.
5. Что такое критическая скорость?
6. Какая скорость эквивалентна полной энергии потока?
7. Какую энергию определяет скорость звука в потоке?
8. Чем различаются безразмерные скорости М и λ?
9. Как связаны безразмерные параметры потока с безразмерными скоростями М и λ?
10. Что такое безразмерные критические параметры потока?
11. Сформулируйте необходимые и достаточные условия перехода от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям.
12. Что такое удельный и приведенный удельный массовые расходы?
13. Как меняется приведенный удельный расход с изменением безразмерной скорости λ?
14. В чем геометрический смысл приведенного удельного расхода?
15. Какие величины содержатся в простейших таблицах газодинамических функций?
16. Какие данные необходимы для расчета безразмерных параметров потока в расширяющемся сопле?
17. Что такое среднерасходная скорость?

Глава 6

ПЛОСКИЕ ДОЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

6.1. Потенциальные течения жидкости

Течения жидкостей и газов, для которых вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ равен нулю, называются **потенциальными**.

В случае плоского течения вектор $\vec{\omega}$ имеет только одну составляющую:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{6.1}$$

Следовательно, условие потенциальности сводится к равенству между собой «косых» производных, входящих в (6.1), т.е.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} . \tag{6.2}$$

Покажем, что при выполнении условия (6.2) существует функция двух переменных $\varphi(x, y)$, частные производные от которой по координатным осям определяют проекцию скорости c на эти оси. С этой целью рассмотрим следующую сумму двух членов:

$$u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y.$$

Как известно, в случае, если для приведенного двучлена выполняется условие (6.2), то он является полным дифференциалом некоторой функции $\varphi(x, y)$:

$$u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\varphi(x, y). \tag{6.3}$$

В свою очередь,

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y. \tag{6.4}$$

Сравнивая между собой (6.3) и (6.4), получаем

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Введенная таким образом функция $\varphi(x, y)$ называется потенциалом скорости.

Полученная связь потенциала скорости $\varphi(x, y)$ с проекциями скорости u, v на координатные оси является частным случаем следующего свойства введенной функции: **частная производная от потенциала скорости по любому направлению дает значение проекции скорости на это направление**. Для доказательства этого утверждения рассмотрим на плоскости некоторую кри-

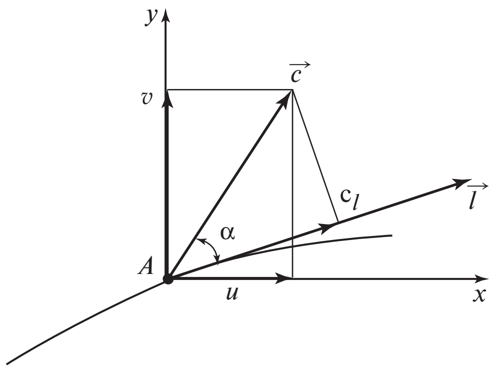


Рис. 6.1. К выводу основного свойства потенциала скорости

вую, касательная к которой в точке A имеет направление $\vec{l}$ (рис. 6.1), и пусть вектор скорости $\vec{c}$ в точке A направлен под углом α к направлению $\vec{l}$.

Поместив начало координат в точку A, спроектируем вектор скорости $\vec{c}$ на координатные оси x, y и на касательную к кривой $\vec{l}$.

Найдем далее частную производную от потенциала скорости по направлению $\vec{l}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} = u\cos(x, l) + v\cos(y, l) = c_l. \tag{6.6}$$

Таким образом, согласно (6.6) действительно рассматриваемая частная производная равна проекции скорости c на касательную $\vec{l}$ к рассматриваемой кривой в точке A.

Используя указанное свойство потенциала скорости, легко получить уравнение, которому должна удовлетворять функция $\varphi(x, y)$. Для этого достаточно в уравнении неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

заменить проекции скоростей u, v на оси x, y их выражениями через потенциал скорости φ [см. (6.5)].

В результате получаем известное уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{6.7}$$

При заданных граничных условиях это уравнение может быть проинтегрировано и по известной функции $\varphi(x, y)$ найдено соответствующее поле скоростей.

Запишем далее дифференциальное уравнение линии тока:

$$u\,\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x = 0. \tag{6.8}$$

При условии, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad (6.9)$$

двучлен в левой части (6.8) равен полному дифференциалу некоторой функции $\psi(x, y)$, значение которой вдоль линии тока не меняется ($\mathrm{d}\psi = 0$). Поскольку условие (6.9) представляет собой уравнение неразрывности для плоского течения несжимаемой жидкости и, следовательно, выполняется всегда, то

$$u\,\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\psi. \qquad (6.10)$$

Введенная таким образом новая функция $\psi(x, y)$ называется **функцией тока**. Ее полный дифференциал имеет вид

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,\mathrm{d}y. \qquad (6.11)$$

Из сравнения (6.10) и (6.11) следует, что

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.12)$$

Из сравнения выражений (6.5) и (6.12) вытекает следующая связь между введенными функциями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.13)$$

Полученные соотношения между функцией тока и потенциалом скорости представляют собой известное условие Коши—Римана, определяющее класс так называемых аналитических функций.

Уравнение, которому должна удовлетворять функция тока ψ, непосредственно вытекает из условия отсутствия в потоке вихревого движения (6.2). Заменяя в этом уравнении проекции скорости u, v их выражениями через функцию тока [см. (6.12)], получаем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \qquad (6.14)$$

т.е., как и потенциал скорости, функция тока удовлетворяет уравнению Лапласа.

При формальном сходстве доказательств возможности введения функции тока и потенциала скорости между ними имеется принципиальное различие.

Если потенциал скорости описывает поле скоростей только безвихревого (потенциального) течения, то функция тока может быть введена всегда, так как условие ее существования вытекает из уравнения неразрывности, справедливого для любых течений. Однако уравнению Лапласа эта функция будет удовлетворять только для потенциального потока.

Поскольку согласно приведенному доказательству

$$u\,\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\psi(x, y),$$

то условие $\psi(x, y) = \text{const}$ всегда определяет уравнение линии тока.

Каждому значению постоянной соответствует своя линия тока. Отсюда можно ожидать, что функция тока должна быть связана каким-то образом с расходом жидкости. Для нахождения этой связи вычислим **объемный расход жидкости** Q через произвольную поверхность единичной высотой, которая проецируется на плоскость x-y в виде контура $L_1 - L_2$ (рис. 6.2), где $\vec{l}$ — направление касательной к элементу дуги контура, а $\vec{n}$ — нормаль. Тогда

$$Q = \int_{L_1}^{L_2} c_n\,\mathrm{d}l.$$

Согласно основному свойству потенциала скорости $c_n = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$. Тогда с учетом (6.13) получим следующее выражение для скорости c_n:

$$c_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}n} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}n} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos(\widehat{n\,x}) - \frac{\partial\psi}{\partial x}\cos(\widehat{n\,y}).$$

Из рис. 6.2 следует, что

$$\cos(\widehat{n\,x}) = \cos(\widehat{l\,x}) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l},$$

$$\cos(\widehat{n\,y}) = -\cos(\widehat{x\,l}) = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}.$$

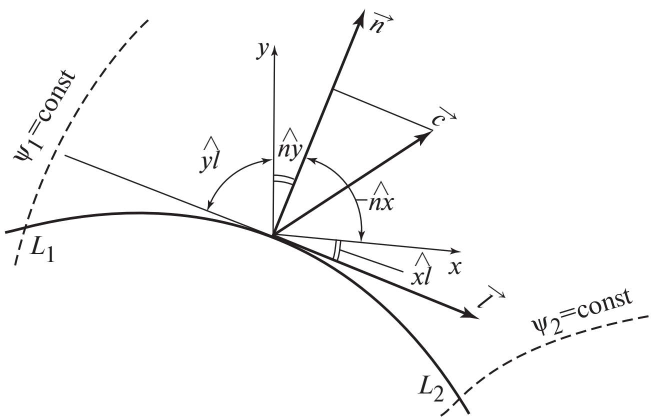


Рис 6.2. К выводу основного свойства функции тока

В результате

$$Q = \int\limits_{L_1}^{L_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} \right) \mathrm{d}l = \int\limits_{L_1}^{L_2} \mathrm{d}\psi \quad \text{и} \quad Q = \psi_1 - \psi_2. \qquad (6.15)$$

Таким образом, объемный расход жидкости через произвольный контур единичной высотой, проведенный между двумя линиями тока $\psi_1 = \text{const}$ и $\psi_2 = \text{const}$, определяется только значениями функций тока на этих линиях и совершенно не зависит от формы контура, по которому проводится интегрирование. Если начальная и конечная точки контура лежат на одной и той же линии тока, то расход жидкости через такой контур будет равен нулю, так как $\psi_1 = \psi_2$.

Покажем, что потенциал скорости и функция тока взаимно ортогональны.

Для доказательства этого свойства перемножим скалярным образом градиенты от функции тока и потенциала скорости:

$$\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} \right) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Равенство нулю скалярного произведения двух векторов grad φ и grad ψ является условием их ортогональности.

Таким образом, эквипотенциальные линии ($\varphi = \text{const}$) и линии тока ($\psi = \text{const}$) образуют взаимно ортогональную сетку.

Условие Коши—Римана (6.13) имеет важное практическое значение, так как функции, для которых оно выполняется, на комплексной плоскости могут быть представлены в виде зависимости только от одной комплексной переменной. Указанная функция для рассматриваемого случая $W(z)$ называется **комплексным потенциалом** или **характеристической функцией** и обладает тем свойством, что ее действительная часть равна потенциалу скорости, а мнимая часть — функции тока, т.е.

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Здесь

$$z = x + iy = r\mathrm{e}^{i\theta} = r \cos \theta + ir \sin \theta$$

является координатой точки на комплексной плоскости. Отсюда можно сделать следующий вывод: любое потенциальное течение может быть представлено аналитической функцией одной комплексной переменной и любая комплексная аналитическая функция определяет некоторое потенциальное течение.

Поскольку значение комплексного потенциала $W(z)$ определяется только координатой, то, очевидно, и производная от $W(z)$ будет зависеть от положения выбранной точки, а не от того, по какому направлению берется эта производная. Следовательно,

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial x} = i\,\frac{\partial W}{\partial y},$$

или

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,i + \frac{\partial \psi}{\partial y} = u - iv. \tag{6.16}$$

Абсолютная скорость c на комплексной плоскости находится по формуле

$$c = u + iv.$$

Производная от комплексного потенциала дает те же самые составляющие скорости, но в этом случае вектор скорости $\vec{c}$ зеркально отражается относительно оси u (рис. 6.3).

По аналогии с комплексно сопряженным числом и скорость, определяемую выражением (6.16), называют **сопряженной скоростью** $\overline{c}$

$$\overline{c} = u - iv.$$

Легко заметить, что при умножении комплексного потенциала на мнимую единицу получаем потенциал, описывающий новое течение, для которого потенциал скорости предшествующего течения становится функцией тока, а функция тока определяет потенциал скорости, т.е. ортогональная сетка линий тока и эквипотенциальных линий взаимно обратима.

Значение контурного интеграла от сопряженной скорости вычисляется так

$$\oint \frac{\partial W}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \oint (u - iv)\,\mathrm{d}(x + iy) = \oint (u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y) + i\oint (u\,\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x).$$

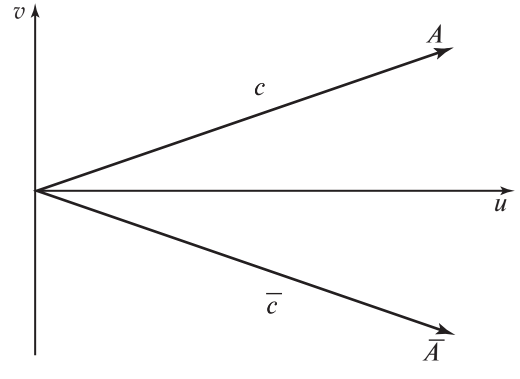


Рис. 6.3. Положения вектора скорости и сопряженной скорости на комплексной плоскости

Действительная часть этого интеграла согласно формуле (2.23) определяет циркуляцию скорости Г. При нахождении мнимой части с учетом (6.12) получаем

$$\oint(u\,\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x) = \oint\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right) = \oint \mathrm{d}\psi = \psi_1 - \psi_2 = Q.$$

Таким образом,

$$\oint \frac{\partial W}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \Gamma + iQ. \tag{6.17}$$

Отметим, наконец, еще одно важное свойство функции тока и потенциала скорости, состоящее в том, что если известны указанные функции для двух течений (ψ_1, ψ_2, φ_1, φ_2), то их сумма определяет новое потенциальное течение с комплексным потенциалом $W_3(z)$:

$$W_3(z) = \varphi_3 + i\psi_3 = (\varphi_1 + \varphi_2) + i(\psi_1 + \psi_2).$$

Указанное свойство непосредственно следует из линейности уравнения Лапласа, которому обе рассматриваемые функции удовлетворяют.

Приведенные соотношения показывают возможность широкого использования функций комплексного переменного для исследования потенциальных течений. При этом можно по заданному комплексному потенциалу определить вид течения и поле скоростей либо при заданной скорости на бесконечности построить картину течения (найти комплексный потенциал) около интересующего нас тела. Рассмотрим некоторые простейшие потенциальные течения.

6.2. Примеры простейших потенциальных течений

6.2.1. Плоскопараллельное течение

Пусть комплексный потенциал представляет собой простейшую линейную функцию

$$W(z) = az = (a_1 + ia_2)(x + iy).$$

Здесь a — комплексная постоянная; a_1 и a_2 — постоянные действительные величины. Разделяя действительную и мнимую части, получаем

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = (a_1x - a_2y) + i(a_1y + a_2x).$$

Следовательно, в данном случае

$$\varphi = a_1x - a_2y,$$

$$\psi = a_2x + a_1y.$$

Уравнения линий тока и эквипотенциальных линий

$$a_2x + a_1y = \mathrm{const},$$

$$a_1x - a_2y = \mathrm{const}$$

определяют собой взаимно перпендикулярные линии, приведенные на рис. 6.4, а составляющие скорости и ее направление находятся по сопряженной скорости

$$\bar{c} = \frac{\partial W}{\partial z} = a = a_1 + i a_2 = u - i v.$$

Отсюда

$$u = a_1, \quad v = -a_2.$$

При $a_2 = 0$ получаем частный случай течения жидкости вдоль оси x со скоростью $u = c_\infty$ (любое плоскопараллельное течение путем поворота

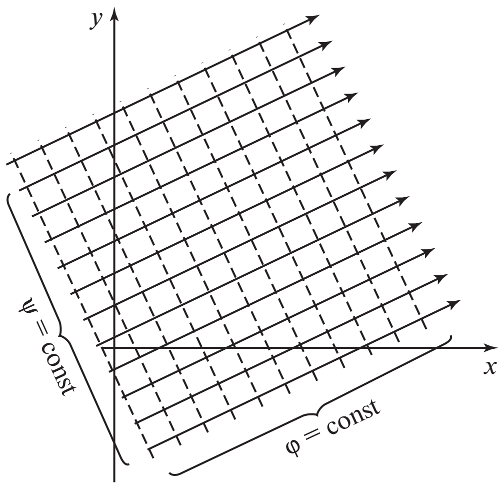


Рис. 6.4. Линии тока и эквипотенциальные линии для плоскопараллельного течения в общем случае

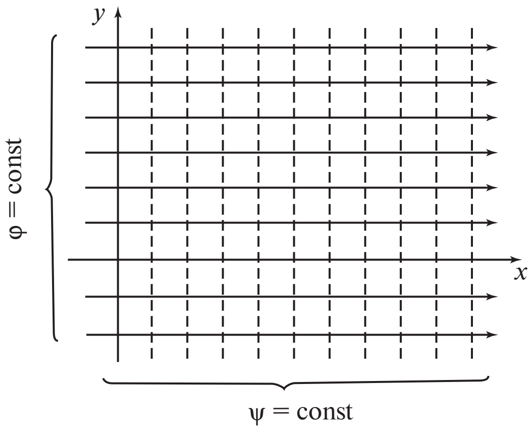


Рис. 6.5. Линии тока и эквипотенциальные линии для плоскопараллельного течения вдоль оси *x*

координатных осей всегда можно свести к этому частному случаю). Потенциал скорости и функция тока в этом случае равны

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= c_\infty x;\\ \psi &= c_\infty y.\end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

На рис. 6.5 приведены линии тока и эквипотенциальные линии для этого течения.

6.2.2. Течение внутри прямого угла

Усложним вид комплексного потенциала и рассмотрим течение, определяемое степенной функцией

$$W(z) = az^2.$$

Для простоты анализа будем считать постоянную a действительным положительным числом. Тогда

$$W(z) = a(x + iy)^2 = a(x^2 - y^2) + i2axy.$$

и

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= a(x^2 - y^2);\\ \psi &= 2axy.\end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

Линиями тока для данного течения является семейство гипербол

$$y = \frac{A_1}{2ax} = \frac{A_2}{x},$$

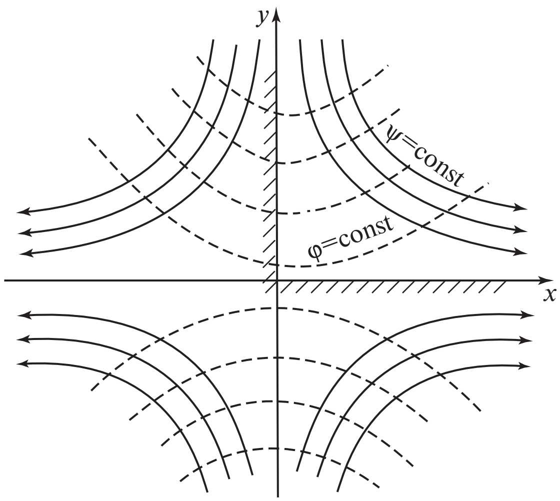


Рис. 6.6. Картина течения внутри прямого угла, образованного пересекающимися плоскостями

а эквипотенциальными линиями — параболы

$$y = \sqrt{x^2 - A}\ .$$

Картина полученного течения изображена на рис. 6.6. Составляющие скорости u и v находятся по известному потенциалу скорости обычным образом:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2ax; \\ v &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2ay. \end{aligned}\right\} \qquad (6.20)$$

Поскольку здесь оси координат являются линиями тока и, как уже отмечалось ранее (см. гл. 2), любая линия тока может быть принята за твердую стенку, то, выделяя один из квадрантов, получим картину течения внутри прямого угла.

6.2.3. Течение вдоль двух бесконечных пересекающихся плоскостей

Течение вдоль двух бесконечных пересекающихся плоскостей при их проекции на плоскость описывается следующим комплексным потенциалом:

$$W(z) = \frac{a}{n} z^n, \qquad (6.21)$$

где $n = \pi/\alpha$; α — угол между стенками (рис. 6.7).

Для выделения действительной и мнимой частей в (6.21) перейдем от декартовых к полярным координатам, имея в виду, что

$$x = r\cos\theta;$$

$$y = r\sin\theta.$$

Тогда

$$z = xiy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\mathrm{e}^{i\theta}.$$

В результате

$$W(z) = \frac{a}{n} r^n \mathrm{e}^{in\theta} = \frac{a}{n} r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{a}{n} r^n \cos n\theta; \\ \psi &= \frac{a}{n} r^n \sin n\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

Нулевым линиям тока ($\psi = 0$), т.е. линиям тока, совпадающим со стенками, соответствуют углы $\theta = 0$; π/n; $2\pi/n$ … Поскольку $n = \pi/\alpha$, то $\theta = 0$; α; 2α …

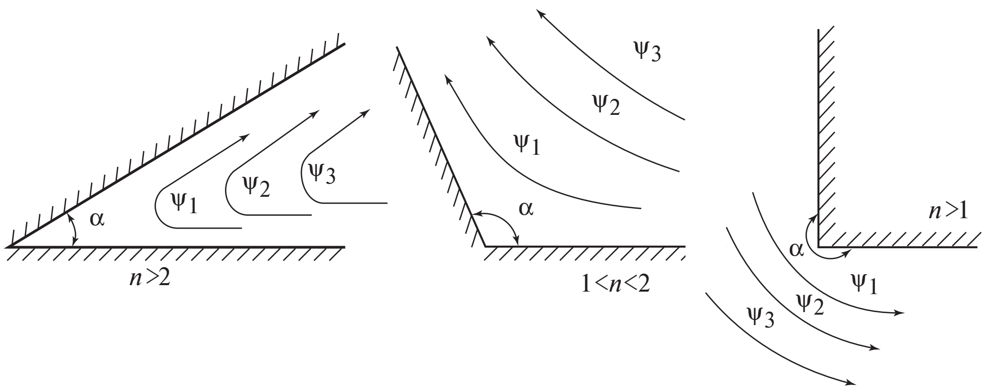


Рис. 6.7. Течение внутри произвольного угла

Течения, соответствующие углам $\alpha = \frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi; \frac{3}{2}\pi$ изображены на рис. 6.7.

Используя свойство потенциала скорости, находим радиальные c_r и тангенциальные c_θ составляющие скорости рассматриваемого течения:

$$c_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = ar^{n-1}\cos(n\theta);$$

$$c_\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -ar^{n-1}\sin(n\theta).$$

Отсюда следует что при углах $\alpha < \pi$ ($n > 1$) скорости в начале координат всегда равны нулю, а для углов $\alpha > \pi$ ($n < 1$) они становятся бесконечно большими. Другими словами, такие угловые точки для течения жидкости становятся особыми точками, плавное обтекание которых невозможно.

Легко видеть, что рассмотренное выше течение внутри прямого угла является частным случаем более общего течения. описываемого комплексным потенциалом (6.21) при $n = 2$.

6.2.4. Источник и сток

Рассмотрим течение, комплексный потенциал которого

$$W(z) = a\ln z,$$

где a — действительное число.

В полярных координатах $z = re^{i\theta}$ (r — радиус до рассматриваемой точки на комплексной плоскости, а θ — полярный угол).

Тогда

$$W(z) = a\ln re^{i\theta} = a\ln r + ia\theta. \qquad (6.23)$$

Следовательно, потенциал скорости φ и функция тока данного течения определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= a \ln r;\\ \psi &= a\theta.\end{aligned}\right\}$$

В данном случае эквипотенциальные линии (φ = const) представляют собой окружности, а линиями тока (ψ = const) являются прямые линии, проходящие через начало координат (рис. 6.8).

Радиальные c_r и окружные c_θ составляющие скорости c определяются следующими соотношениями:

$$c_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{a}{r}; \quad c_\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial S} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0\,.$$

При $a > 0$ жидкость движется вдоль прямых линий тока от центра (рис. 6.8, *а*, источник), а при $a < 0$ — к центру (рис. 6.8, *б*, сток).

Найдем объемный расход жидкости через цилиндрическую поверхность, образованную произвольной окружностью радиусом r и имеющую единичную высоту:

$$Q = \int_0^{2\pi} c_r r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi a.$$

Отсюда постоянная $a = Q/(2\pi)$, где Q определяет мощность источника или стока, следовательно,

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \pm\frac{Q}{2\pi}\ln r;\\ \psi &= \pm\frac{Q}{2\pi}\theta.\end{aligned}\right\}. \tag{6.24}$$

(Знак «плюс» относится к источнику, а «минус» — к стоку.)

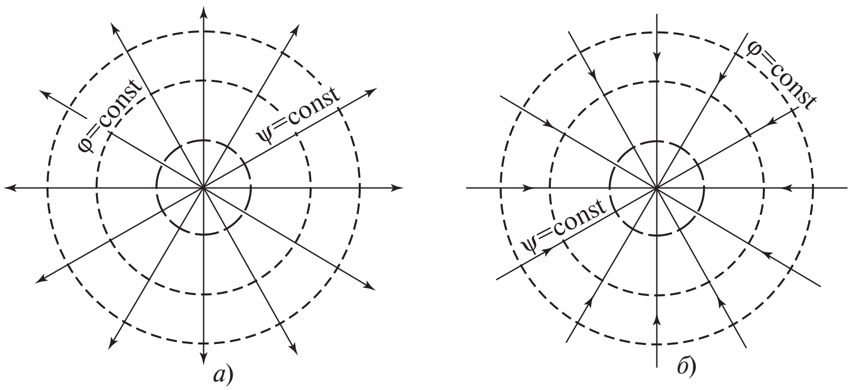


Рис. 6.8. Источник (*а*) и сток (*б*)

6.2.5. Циркуляционное течение

Циркуляционное течение также определяется комплексным потенциалом (6.23), но постоянная $a = ia_1$ является комплексным числом (a_1 — число действительное). Тогда

$$W(z) = ia_1 \ln z = ia_1 \ln (r + i\theta) = -a_1 Q + ia_1 \ln r;$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -a_1\theta; \\ \psi &= a_1 \ln r. \end{aligned}\right\}$$

По сравнению с предыдущим случаем теперь окружности представляют собой линии тока, а семейство прямых, проходящих через начало координат, — семейством эквипотенциальных линий (рис. 6.9).

Здесь поле скоростей имеет следующие составляющие:

$$c_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0; \quad c_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{a_1}{r}.$$

Определяя циркуляцию по любой из окружностей, получаем

$$\Gamma = 2\pi r c_\theta = -2\pi a_1.$$

Отсюда $a_1 = -\dfrac{\Gamma}{2\pi}$, и, следовательно,

$$W = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln z;$$

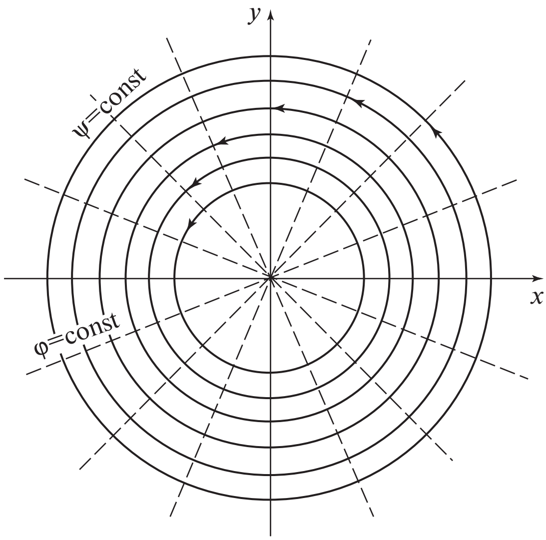


Рис. 6.9. Линии тока и эквипотенциальные линии для циркуляционного течения

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\Gamma}{2\pi}\theta; \\ \psi &= -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r. \end{aligned}\right\} \tag{6.25}$$

$$c_\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial S} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \tag{6.26}$$

Скорость движения жидкости вдоль линии тока меняется обратно пропорционально расстоянию от центра.

В начале координат располагается особая точка рассматриваемого течения, так как с приближением к центру c_θ неограниченно возрастает. Исключив эту точку из рассмотрения с помощью окружности радиусом ядра $r_я$, получим распределение скоростей, изображенное на рис. 6.10. Направление скорости определяется знаком циркуляции. Будем считать величину $\Gamma > 0$ в случае, когда вращение жидкости происходит против часовой стрелки. Подобное поле скоростей имеет место вокруг вихревой трубки, проходящей перпендикулярно плоскости чертежа. В центральной области вихревой трубки при $r < r_я$ течение вихревое, и окружные скорости c_θ с удалением от центра растут, как и у вращающегося твердого цилиндра, по линейному закону.

На рис. 6.10 область вихревого течения условно отделена от области потенциального течения окружностью радиусом $r_я$. За пределами ядра частицы жидкости, двигаясь по криволинейным траекториям, не вращаются вокруг собственных осей. Характер такого движения частицы жидкости по окружности показан на рис. 6.10.

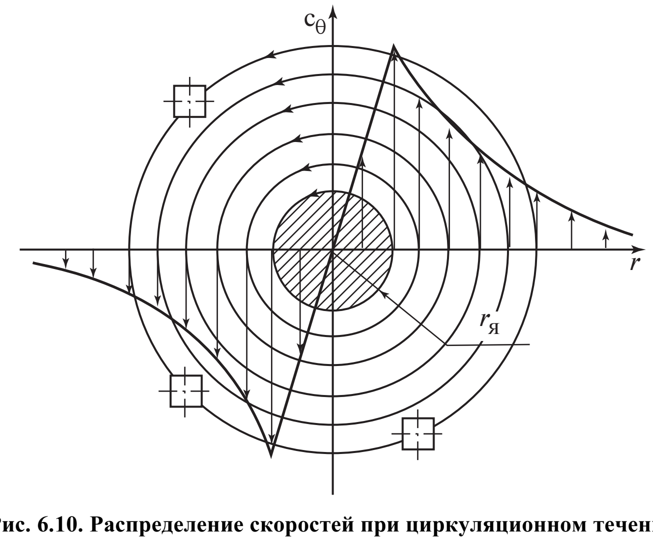


Рис. 6.10. Распределение скоростей при циркуляционном течении

6.2.6. Диполь

При построении схем течений методом сложения простейших потенциальных потоков важную роль играет течение, получившее название **диполь**. Его комплексный потенциал имеет вид

$$W(z) = \frac{M}{2\pi z}\,. \tag{6.27}$$

Здесь действительная постоянная M называется **моментом диполя**.

Выделяя действительную и мнимую части в (6.27), будем иметь

$$W(z) = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\,.$$

Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}; \\ \psi &= -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6.28}$$

Для эквипотенциальных линий (φ = const) и линий тока (ψ = const) из (6.28) получаем уравнения, определяющие систему окружностей с центрами, расположенными на осях x и y (рис. 6.11):

$$x^2 + y^2 = cy \ (\psi = \text{const});$$

$$x^2 + y^2 = cx \ (\varphi = \text{const}).$$

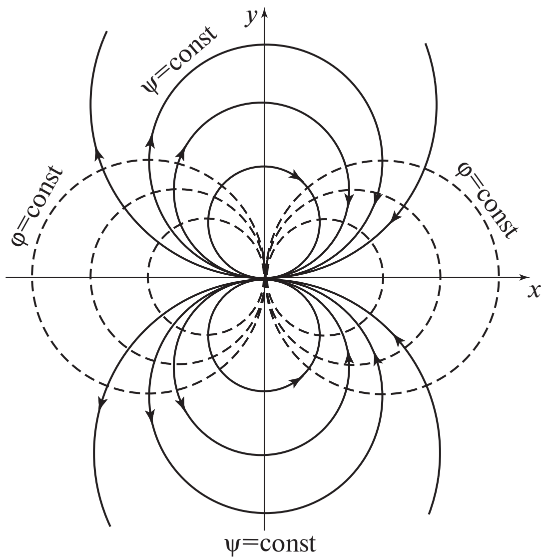


Рис. 6.11. Диполь

В данном случае жидкость вытекает из центра и вновь возвращается к центру. Подобное течение можно получить в результате сложения источника и стока при наложении их центров. В этом смысле диполь по существу является уже сложным течением.

6.3. Примеры сложения потенциальных течений

6.3.1. Вихреисточник и вихресток

Воспользуемся отмеченным ранее принципом сложения потенциальных потоков и рассмотрим течение, которое получается при сложении источника или стока с циркуляционным течением. Потенциал скорости и функция тока в этом случае будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \pm\frac{Q}{2\pi}\ln r + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta; \\ \psi &= \pm\frac{Q}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда получаем следующее уравнение для линии тока:

$$\pm\frac{Q}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r = \text{const}.$$

Запишем постоянную в этом уравнении следующим образом:

$$\text{const} = \ln A.$$

Тогда

$$\ln A = \pm\frac{Q}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r.$$

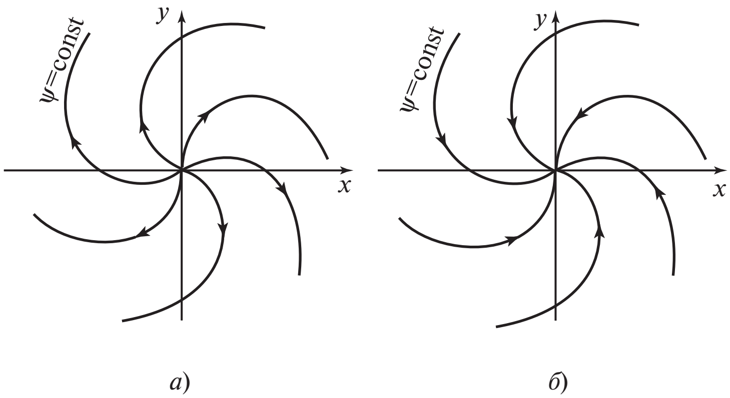


Рис. 6.12. Вихреисточник (*а*) и вихресток (*б*)

Если в качестве исходной точки для построения конкретной линии тока принять точку с координатами $\theta = 0$, $r = r_0$, то $A = r_0^{-\frac{\Gamma}{2\pi}}$. Следовательно, линия тока будет определяться уравнением

$$r = r_0 \mathrm{e}^{\pm\frac{Q}{\Gamma}\theta}. \tag{6.29}$$

Уравнение (6.29) является уравнением логарифмической спирали. При $Q > 0$ жидкость будет двигаться по логарифмической спирали от центра (вихреисточник), а при $Q < 0$ — к центру (вихресток). Соответствующая картина течения показана на рис. 6.12. Иногда по линиям тока вихрестока проектируются входные патрубки насосов и гидротурбин.

6.3.2. Обтекание потенциальным потоком идеальной жидкости криволинейного полутела

Рассмотрим течение идеальной жидкости, которое получается, если в поступательный поток, движущийся в положительном направлении оси x со скоростью c_∞, поместить источник с объемным расходом Q. При этом источник расположим в начале координат (рис. 6.13).

При сложении плоскопараллельного потока и источника потенциал скорости φ и функция тока ψ в этом случае будут определяться следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= c_\infty x + \frac{Q}{2\pi}\ln r = c_\infty r\cos\theta + \frac{Q}{2\pi}\ln r;\\ \psi &= c_\infty y + \frac{Q}{2\pi}\theta = c_\infty r\sin\theta + \frac{Q}{2\pi}\theta.\end{aligned}\right\}$$

Найдем радиальную c_r и окружную c_θ составляющие поля скоростей рассматриваемого течения:

$$\left.\begin{aligned}c_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = c_\infty\cos\theta + \frac{Q}{2\pi r};\\ c_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\,c_\infty r\sin\theta.\end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

Отсюда для определения координаты точки A, где скорость обращается в нуль ($c_r = c_\theta = 0$), получаем два уравнения

$$c_\infty\cos\theta + \frac{Q}{2\pi r_A} = 0,$$

$$-\,c_\infty r\sin\theta = 0.$$

Решая эти уравнения, получаем, что нулевая скорость имеет место в точке с координатами $\theta = \pi$ и $r_A = -\dfrac{Q}{2\pi c_\infty}$.

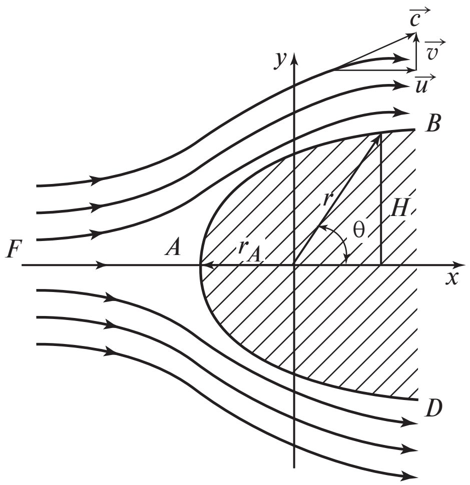


Рис. 6.13. Обтекание идеальной жидкостью криволинейного полутела

Семейство линий тока рассматриваемого течения определяется уравнением

$$c_\infty r \sin\theta + \frac{Q}{2\pi}\theta = \text{const}. \tag{6.31}$$

Выделим из этого семейства ту линию тока, на которой скорость в точке с координатами $\theta = \pi$ и $r_A = -\dfrac{Q}{2\pi c_\infty}$ обращается в нуль.

Введя эти координаты в (6.31), получим

$$\text{const} = Q/2.$$

Таким образом, указанная линия тока будет определяться следующим уравнением:

$$c_\infty r \sin\theta + \frac{Q}{2\pi}\theta = \frac{Q}{2}. \tag{6.32}$$

Построенная по этому уравнению линия тока состоит из двух ветвей: линии $\theta = \pi$, которая представляет собой часть отрицательной оси x от бесконечности до точки A, и кривой DAB. Ее уравнение (6.32) удобнее представить в виде

$$r = \frac{Q}{2\pi c_\infty}\,\frac{\pi - \theta}{\sin\theta}. \tag{6.33}$$

Полученная линия тока отделяет плоскопараллельный поток от потока, создаваемого источником.

Поскольку, как уже было отмечено ранее (см. гл. 2), любую линию тока можно сопоставить с непроницаемой границей, то, рассматривая линию

DAB в виде такой границы, получаем картину обтекания плоскопараллельным потоком криволинейного полутела или обтекания ветром криволинейного склона возвышенности.

Высота этой возвышенности H (рис. 6.13) определяется очевидным уравнением

$$H = r \sin \theta.$$

Заменяя здесь r с учетом (6.33), получаем

$$H = \frac{Q}{2\pi c_\infty} (\pi - \theta) . \tag{6.34}$$

При $\theta = 0$

$$H = H_{\max} = \frac{Q}{2 c_\infty} . \tag{6.35}$$

Уравнение (6.35) позволяет по заданной высоте возвышенности $H_{\max}$ найти мощность источника ($Q = 2c_\infty H_{\max}$), с помощью которого и провести расчет скоростей в любой точке поля течения.

6.3.3. Поперечное обтекание круглого цилиндра плоскопараллельным потоком

Поперечное обтекание плоскопараллельным потоком круглого цилиндра можно получить в результате наложения плоскопараллельного течения на диполь.

В этом случае комплексный потенциал будет иметь вид

$$W(z) = c_\infty z + \frac{M}{2\pi z} = \left(c_\infty x + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(c_\infty y - \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}\right) .$$

Отсюда получаем

$$\varphi = c_\infty x + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} ;$$

$$\psi = c_\infty y - \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} .$$

Если воспользоваться полярными координатами ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$), то

$$\varphi = c_\infty r \cos \left(1 + \frac{M}{2\pi c_\infty} \frac{1}{r^2}\right) ;$$

$$\psi = c_\infty r \sin \left(1 - \frac{M}{2\pi c_\infty} \frac{1}{r^2}\right) .$$

Комплекс $M/(2\pi c_\infty)$ состоит из постоянных величин. Обозначим его через r_0^2. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= c_\infty r \cos\theta\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right); \\ \psi &= c_\infty r \sin\theta\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6.36}$$

Для нахождения формы линий тока приравняем, как обычно, функцию тока к постоянной величине A:

$$c_\infty r \sin\theta\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) = A.$$

При $A = 0$ получаем уравнение нулевой линии тока:

$$c_\infty r \sin\theta\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) = 0,$$

которое распадается на два самостоятельных уравнения

$$\sin\theta = 0 \quad \text{и} \quad 1 - \frac{r_0^2}{r^2} = 0.$$

Отсюда следует, что нулевая линия тока представляет собой два отрезка оси x, между которыми располагается окружность радиусом $r = r_0$ (рис. 6.14).

Принимая нулевую линию тока за непроницаемую поверхность, получаем решение задачи о движении жидкости вокруг произвольного цилиндра

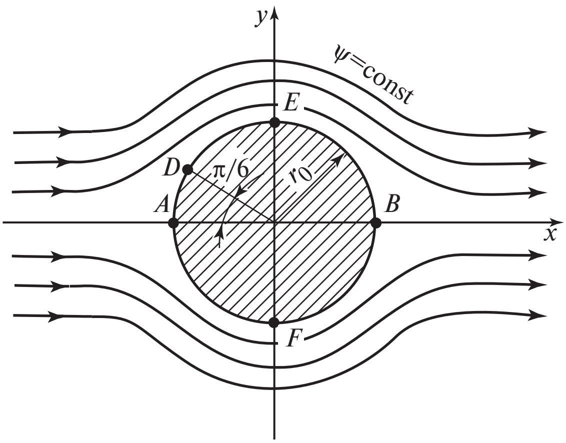


Рис. 6.14. Поперечное обтекание цилиндра плоскопараллельным потоком идеальной жидкости

при его поперечном обтекании плоскопараллельным потоком. Зная радиус цилиндра $r_0 = \sqrt{\dfrac{M}{2\pi c_\infty}}$, можно найти необходимый для этого случая момент диполя M.

Поле скоростей по обе стороны от нулевой линии тока определяется обычным образом путем дифференцирования потенциала скорости φ [см. (6.36)] по координатам r и $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta$:

$$c_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = c_\infty \cos\theta\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right);$$

$$c_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\,c_\infty \sin\theta\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right).$$

На поверхности цилиндра

$$c_r\big|_{r=r_0} = 0;$$

$$c_\theta\big|_{r=r_0} = -\,2c_\infty \sin\theta. \tag{6.37}$$

Максимум скорости достигается при угле $\theta \pm \dfrac{\pi}{2}$, а в точках A и B [$\theta = 0$, $\theta = \pi$ (см. рис. 6.14)] $c_\theta\big|_{r=r_0} = 0$. Эти точки принято называть **передней** (точка A) и **задней** (точка B) **критическими точками**.

Характер распределения давлений по поверхности цилиндра легко находится из уравнения Бернулли, записанного для нулевой линии тока:

$$\frac{c_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{c_\theta^2}{2} + \frac{p}{\rho}.$$

Отсюда

$$p - p_\infty = \frac{\rho c_\infty^2}{2}\left(1 - \frac{c_\theta^2}{c_\infty^2}\right) \tag{6.38}$$

или, переходя к безразмерному давлению $\bar{p}$ и заменяя c_θ в соответствии с формулой (6.37), получаем

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho c_\infty^2/2} = 1 - \frac{c_\theta^2}{c_\infty^2} = 1 - 4\sin^2\theta. \tag{6.39}$$

Зависимость (6.39), представленная графически на рис. 6.15 (кривая *1*), показывает, что максимальное значение **коэффициента давления** $\bar{p}$ достигается в передней и задней критических точках ($\bar{p} = 1$). В точках E и F (см. рис. 6.14), где скорость максимальна ($\theta = \pm\pi/2$), величина $\bar{p}$ имеет

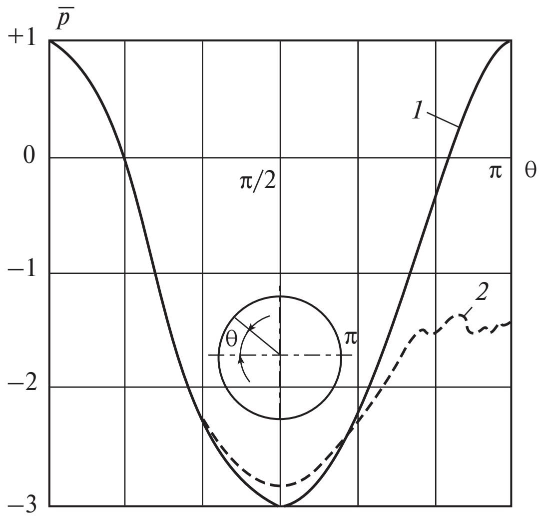


Рис. 6.15. Распределение коэффициента давления по поверхности цилиндра:
1 — для идеальной жидкости; *2* — для вязкой жидкости

минимальное значение $\bar{p}_{\min} = -3$. Следовательно, до миделевого сечения поток ускоряется, а затем происходит его торможение до нулевой скорости в задней критической точке *B*. Участки, где скорости в направлении движения жидкости растут ($\mathrm{d}c/\mathrm{d}x > 0$), называются **конфузорными**, а участки, где скорости падают ($\mathrm{d}c/\mathrm{d}x < 0$), — **диффузорными**.

Заметим, что при $\theta = \pi/6$ коэффициент давления $\bar{p}$ на поверхности цилиндра обращается в нуль, и, следовательно, абсолютное давление p в этой точке становится равным давлению набегающего потока p_∞. Указанное обстоятельство иногда используют для измерения давлений в движущемся потоке. С этой целью в точке *D* (см. рис. 6.14) выполняется отверстие, которое непосредственно или через специальный преобразователь соединяется с регистрирующим прибором.

Воспользуемся полученными соотношениями для расчета сил R_x и R_y, действующих на единицу длины цилиндра, помещенного в плоскопараллельный поток. Схема разложения давления на горизонтальную p_x и вертикальную p_y составляющие показана на рис. 6.16. Интегрируя эти составляющие по всей окружности, получаем

$$R_y = -\int_0^{2\pi} p_y \cdot 1\,\mathrm{d}S = -\int_0^{2\pi} p_y r_0\,\mathrm{d}\theta = -\int_0^{2\pi} p r_0 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta;$$

$$R_x = -\int_0^{2\pi} p r_0 \cos\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

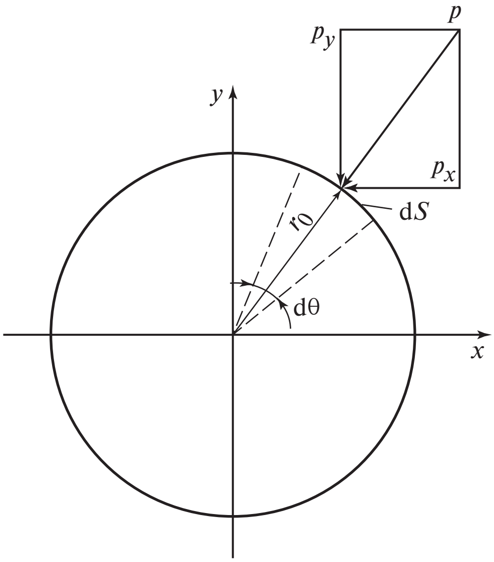


Рис. 6.16. К определению силы сопротивления R_x и подъемной силы R_y, действующих на поперечно обтекаемый идеальной жидкостью цилиндр

Поскольку согласно (6.39) давление

$$p = p_\infty - \frac{\rho c_\infty^2}{2}\,(1 - 4\sin\theta)\,,$$

то

$$R_y = -r_0\int_0^{2\pi}\left[p_\infty - \frac{\rho c_\infty^2}{2}\,(1 - 4\sin^2\theta)\right]\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\, = 0;$$

$$R_x = -r_0\int_0^{2\pi}\left[p_\infty - \frac{\rho c_\infty^2}{2}\,(1 - 4\sin^2\theta)\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\, = 0.$$

Результат оказался необычным, так как сопротивление любого тела, а тем более цилиндра, в действительности заметно отличается от нулевого значения. Однако не следует забывать, что мы пока рассматриваем движение идеальной жидкости, т.е. жидкости, лишенной сил трения, и, следовательно, в самой исходной стадии исключили возникновение сил сопротивления.

Факт отсутствия сопротивления при обтекании любых тел потоком идеальной жидкости в гидродинамике называется парадоксом Эйлера—Даламбера.

В реальной жидкости рассмотренное выше распределение давления по поверхности цилиндра не реализуется. В диффузорной области (за миделевым сечением) поток отрывается от стенок и опытное распределение давления оказывается несимметричным (кривая *2* на рис. 6.15).

В кормовой части цилиндра устанавливается вихревой характер течения и давление оказывается значительно ниже, чем это можно было ожидать на основе теоретического анализа. Суммирование сил на основе опытного распределения давления, естественно, приведет к появлению силы сопротивления ($R_x \neq 0$).

Таким образом, если, оставаясь в рамках идеальной жидкости, решать задачу о сопротивлении тел различной формы, необходимо отказаться от схемы с безотрывным течением и ввести в рассмотрение точки отрыва жидкости от поверхности. Подобные задачи составляют самостоятельный раздел газодинамики и выходят за рамки данного курса.

6.3.4. Поперечное обтекание круглого цилиндра плоскопараллельным потоком при наличии циркуляционного течения

Рассмотрим картину течения, которая получается при сложении плоскопараллельного течения, диполя и циркуляционного течения.

В этом случае суммарный потенциал скорости и функция тока будут определяться следующими выражениями:

$$\varphi = c_\infty r \cos\theta\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\,\theta;$$

$$\psi = c_\infty r \sin\theta\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r.$$

Здесь принято положительное значение циркуляции ($\Gamma > 0$), т.е. вращение жидкости происходит против движения часовой стрелки. Найдем далее радиальную и окружную составляющие скорости на внешней поверхности цилиндра при $r = r_0$.

Тогда

$$c_r\Big|_{r=r_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = c_\infty \cos\theta\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\bigg|_{r=r_0} = 0,$$

$$c_\theta\Big|_{r=r_0} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\bigg|_{r=r_0} = -2c_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}. \qquad (6.40)$$

Из равенства нулю радиальной скорости на поверхности цилиндра ($r = r_0$) следует, что, как и в предыдущем случае, окружность цилиндра является нулевой линией тока. Однако добавление циркуляционного течения изменило распределение окружной скорости на поверхности цилиндра и привело к смещению положения критических точек. Приравняв (6.40) к нулю, найдем их положение:

$$-2c_\infty \sin\theta_{кр} + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} = 0;$$

$$\sin\theta_{кр} = \frac{\Gamma}{4\pi c_\infty r_0}. \tag{6.41}$$

Здесь возможны следующие случаи:

1) циркуляция скорости $\Gamma < 4\pi c_\infty r_0$. Обе критические точки будут расположены симметрично относительно оси y и сдвинуты при выбранном направлении вращения цилиндра кверху от оси x (рис. 6.17, *а*);

2) при $\Gamma = 4\pi c_\infty r_0$ критические точки A и B совпадают ($\theta_{кр} = \pi/0$). Картина течения соответствует схеме, представленной на рис. 6.17, *б*;

3) в случае, когда $\Gamma > 4\pi c_\infty r_0$, ни одна критическая точка не располагается на цилиндре. Происходит «перехлест» нулевой линии тока, и образуется течение, изображенное на рис. 6.17, *в*.

Приведенные на рис. 6.17 схемы течения показывают, что при наложении циркуляционного течения сохраняется симметрия относительно оси y, но эта симметрия по отношению к горизонтальной оси x отсутствует. Отсюда следует ожидать появления вертикальной составляющей силы.

Найдем эту силу путем прямого интегрирования сил давления по поверхности цилиндра. Распределение давлений на этой поверхности с учетом (6.40) будет определяться следующей зависимостью, вытекающей из уравнения Бернулли:

$$p_i = p_\infty + \frac{\rho c_\infty^2}{2} - \frac{\rho c_\infty^2}{2}\left(-\frac{\Gamma}{2\pi r_0 c_\infty} + 2\sin\theta\right)^2.$$

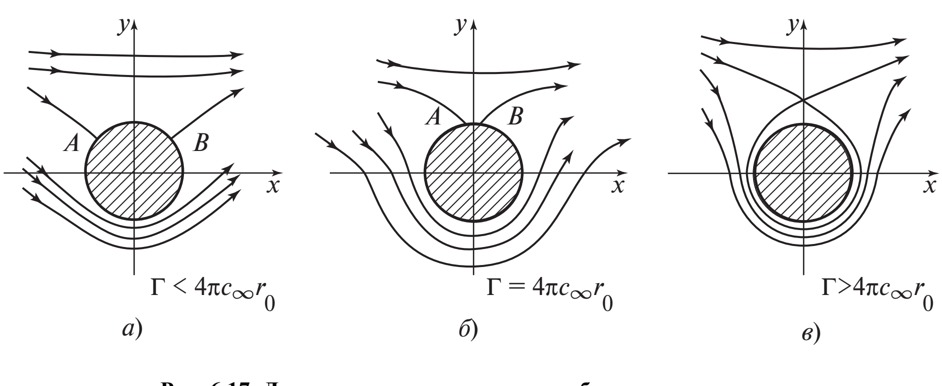


Рис. 6.17. Линии тока при поперечном обтекании цилиндра

Используя разложение силы dR на составляющие R_x и R_y, получаем

$$R_y = \int_0^{2\pi} p r_0 \sin\theta \, d\theta =$$

$$= -r_0 \int_0^{2\pi} \left[p_\infty + \frac{\rho c_\infty^2}{2} - \frac{\rho c_\infty^2}{2} \left(2\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0 c_\infty} \right)^2 \right] \sin\theta \, d\theta.$$

В результате почленного интегрирования ряд слагаемых обращается в нуль. Ненулевым остается только один член

$$R_y = -\frac{\rho \Gamma c_\infty}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta,$$

вычисление которого дает

$$R_y = -\rho c_\infty \Gamma. \qquad (6.42)$$

Формула (6.42) определяет подъемную силу, действующую на единицу длины цилиндра при наличии вокруг него циркуляционного течения, и является частным случаем теоремы Н.Е. Жуковского о подъемной силе.

Интересно отметить, что факт появления подъемной силы на вращающемся цилиндре, помещенном в плоскопараллельный поток, может быть использован для создания роторного «паруса», когда несколько вращающихся цилиндрических роторов, расположенных вертикально на палубе корабля, при наличии ветра обеспечивают его движение и хорошую маневренность. Эта идея ветрового двигателя была впервые использована в 1923 г. на норвежском пароходе «Букау».

6.4. Теорема Н.Е. Жуковского о подъемной силе

Покажем, что полученное при решении частной задачи уравнение (6.42) пригодно для вычисления подъемной силы, возникающей при обтекании плоскопараллельным потоком тел произвольной формы. С этой целью воспользуемся схемой, показанной на рис. 6.18. Здесь крыловой профиль располагается в плоском потоке между двумя бесконечно длинными непроницаемыми плоскими поверхностями, ориентированными по потоку и удаленными друг от друга на расстояние H. Свяжем систему координат с профилем и направим ось x по направлению движения потока. Далее проведем далеко перед профилем и за ним два контрольных сечения AB и CD на таком расстоянии от профиля, чтобы возмущения, вносимые профилем в этих сечениях, были бесконечно малыми и, следовательно, все скорости и параметры потока в этих сечениях были одинаковыми.

К массе жидкости, ограниченной принятыми контрольными поверхностями, применим теорему изменения количества движения, считая, что рассматриваемый профиль обтекается безотрывно. При этом необходимо учесть и силовое воздействие профиля на рассматриваемую массу жидкости. Эта суммарная сила на рис. 6.18 разложена по осям координат и составляющие ее изображены штриховыми линиями.

Записав уравнение количества движения в проекциях на ось x, получим

$$\int\limits_H (p_1 - p_2)\,\mathrm{d}y - R'_x = \int\limits_H \rho_1 c_1 (c_1 - c_2)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Поскольку, согласно принятому расположению сечений AB и $СД$, $c_1 = c_2 = c_\infty$ и $p_1 = p_2 = p_\infty$, то $R'_x = 0$, а следовательно, равна нулю и сила воздействия потока на профиль в направлении оси x ($R_x = -R'_x = 0$). Этот результат обобщает рассмотренный ранее парадокс Эйлера—Даламбера на тела произвольной формы, обтекаемые идеальной жидкостью без ее отрыва от обтекаемой поверхности.

Вертикальную составляющую силы воздействия потока на профиль ($R_y = -R'_y$) найдем, записав уравнение количества движения в проекциях на ось y:

$$-R'_y + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (p_\text{в} - p_\text{н})\,\mathrm{d}x = 0.$$

Отсюда

$$R_y = -R'_y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (p_\text{н} - p_\text{в})\,\mathrm{d}x\,. \tag{6.43}$$

Если расстояние H между поверхностями AD и BC (рис. 6.18) сделать достаточно большим, то скорости вдоль этих поверхностей будут отли-

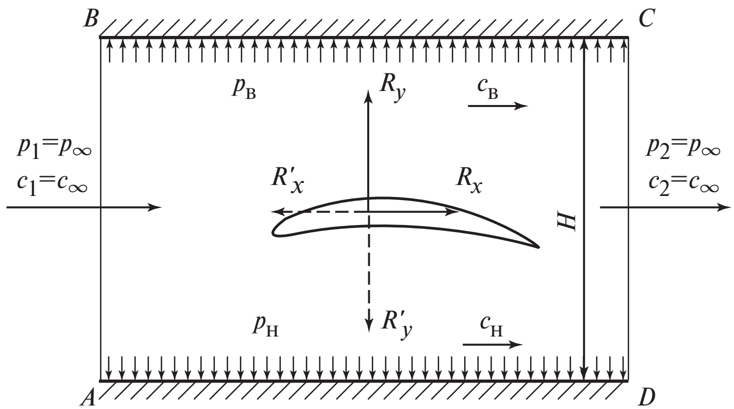


Рис. 6.18. К выводу теоремы Н.Е. Жуковского о подъемной силе

чаться от скорости набегающего потока на малые величины $c'_н$ и $c'_в$. Тогда действительные скорости $c_н$ и $c_в$ на горизонтальных поверхностях AD и BC рассматриваемого контура можно представить в виде суммы постоянной составляющей c_∞ и малых величин $c'_н$ и $c'_в$:

$$\left.\begin{aligned} c_н &= c_\infty + c'_н; \\ c_в &= c_\infty + c'_в. \end{aligned}\right\} \tag{6.44}$$

Другими словами, в случае малых возмущений действительная скорость потока c представляет собой сумму скорости невозмущенного плоскопараллельного потока c_∞ и некоторой малой величины c':

$$c = c_\infty + c'. \tag{6.45}$$

Используя соотношение (6.45) и уравнение энергии в виде

$$\frac{c_\infty^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty} = \frac{c^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}, \tag{6.46}$$

находим давление p_i в произвольной точке слабо возмущенного потока.

Из (6.45) с учетом (6.44) получаем

$$\frac{p_i}{\rho_i} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \frac{k-1}{2k}\left(c_\infty^2 - c^2\right) = \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \left(c_\infty^2 - c_\infty^2 - 2c_\infty c' - c'^2\right) \approx$$

$$\approx \frac{p_\infty}{\rho_\infty} - \frac{k-1}{k}c_\infty c',$$

или

$$\frac{p_i}{p_\infty} = \frac{\rho_i}{\rho_\infty} - \frac{k-1}{k}\frac{c_\infty c'\rho_i}{p_\infty}. \tag{6.47}$$

Согласно уравнению изоэнтропы

$$\frac{\rho_i}{\rho_\infty} = \left(\frac{p_i}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Подставим это соотношение для плотности в (6.47). Тогда

$$\frac{p_i}{p_\infty} = \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{k}} - (k-1)\frac{c_\infty^2\rho_\infty c'}{kp_\infty c_\infty}\left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Отсюда с учетом того, что $\dfrac{kp_\infty}{\rho_\infty} = a_\infty$ (a_∞ — скорость звука в набегающем потоке), приходим к следующему соотношению:

$$\frac{p_i}{p_\infty} = \left[1 - (k-1)\mathrm{M}_\infty^2\frac{c'}{c_\infty}\right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

Разлагая выражение в квадратных скобках в ряд и ограничиваясь двумя членами разложения, получаем

$$\frac{p_i}{p_\infty} \approx 1 - k\mathrm{M}_\infty^2 \frac{c'}{c_\infty} = 1 - \frac{kc'}{c_\infty}\frac{c_\infty^2}{a^2} = 1 - \frac{kc'c_\infty}{kp_\infty}\rho_\infty = 1 - \frac{c'c_\infty\rho_\infty}{p_\infty} \quad \left(a^2 = k\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\right)$$

или

$$p = p_\infty - \rho_\infty c_\infty c'_{\text{в}}. \tag{6.48}$$

Уравнение (6.48) представляет собой линеаризованное уравнение Бернулли, справедливое как для сжимаемой, так и для несжимаемой жидкости.

Действительно, для несжимаемой жидкости это соотношение сразу вытекает из уравнения Бернулли:

$$p = p_\infty + \frac{\rho_\infty}{2}(c_\infty^2 - c^2) = p_\infty + \frac{\rho_\infty}{2}[c_\infty^2 - (c_\infty + c')^2] =$$

$$= p_\infty + \frac{\rho_\infty}{2}[c_\infty^2 - c_\infty^2 - 2c'c_\infty - c'^2] \approx p_\infty - \rho_\infty c'c_\infty.$$

Запишем (6.48) для верхней BC и нижней AD контрольных поверхностей (см. рис. 6.18):

$$\left.\begin{aligned} p_{\text{в}} &= p_\infty - \rho_\infty c_\infty c'_{\text{в}}; \\ p_{\text{н}} &= p_\infty - \rho_\infty c_\infty c'_{\text{н}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.49}$$

Подстановка зависимостей (6.49) в уравнение (6.43) дает

$$R_y = \rho_\infty c_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (c'_{\text{в}} - c'_{\text{н}})\,\mathrm{d}x.$$

Покажем, что интеграл в этом уравнении можно выразить через циркуляцию скорости по замкнутому контуру $ABCDA$ (см. рис. 6.18). Эта циркуляция равна сумме циркуляций по сторонам рассматриваемого контура:

$$\Gamma_{ABCD} = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC} + \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA}.$$

Так как

$$\Gamma_{AB} = \int_{-\infty}^{+\infty} (c_\infty + c'_{\text{в}})\,\mathrm{d}x; \quad \Gamma_{DA} = -\int_{-\infty}^{+\infty} (c_{\text{н}} + c'_{\text{н}})\,\mathrm{d}x; \quad \Gamma_{AB} = -\Gamma_{CD},$$

то

$$\Gamma_{ABCD} = \int_{-\infty}^{+\infty} (c'_{\text{в}} - c'_{\text{н}})\,\mathrm{d}x.$$

Из (6.45) следует, что

$$c'_{\text{в}} - c'_{\text{н}} = c_{\text{в}} - c_{\text{н}},$$

т.е. действительно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (c'_{\text{в}} - c'_{\text{н}})\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (c_{\text{в}} - c_{\text{н}})\,\mathrm{d}x = -\Gamma_{ABCDA}.$$

Следовательно,

$$R_y = -\rho_\infty c_\infty \Gamma, \tag{6.50}$$

что полностью совпадает с формулой (6.42) и выражает следующую фундаментальную теорему гидрогазодинамики.

При обтекании тела плоскопараллельным безграничным потоком идеальной жидкости (сжимаемой или несжимаемой) на тело единичной длины действует сила, равная произведению плотности и скорости набегающего потока на циркуляцию скорости вокруг обтекаемого тела, направленная перпендикулярно скорости набегающего потока.

Для определения направления рассматриваемой силы необходимо вектор скорости набегающего потока $\vec{c}_\infty$ развернуть на 90° против направления циркуляции скорости.

Знак «минус» в формуле (6.50) соответствует принятому правилу знаков для циркуляции скоростей. Если, например, скорость c_∞ направлена вдоль положительного направления оси x, а циркуляция скорости отрицательна (обход контура совершается по часовой стрелке), то сила R_y, действующая на тело, будет положительной и направленной вдоль оси y.

6.5. Потенциальное течение идеальной сжимаемой жидкости

Рассматривая потенциальное течение, мы не делали никаких оговорок относительно сжимаемости жидкости. Следовательно, зависимости (6.5), определяющие проекции скорости через потенциал скорости, справедливы и для сжимаемого потока. Однако уравнение, которому теперь должен удовлетворять потенциал скорости, будет другим, так как в дифференциальное уравнение неразрывности, на основании которого выводится уравнение для потенциала скорости, в случае сжимаемой жидкости входит ее плотность ρ.

Запишем это уравнение в виде

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0. \tag{6.51}$$

Для исключения из (6.51) плотности проведем следующие очевидные преобразования уравнений Эйлера:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y};$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial x} &= -\frac{\rho}{a^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right);\\ \frac{\partial\rho}{\partial y} &= -\frac{\rho}{a^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right).\end{aligned}\right\}. \qquad (6.52)$$

Подставив (6.52) в (6.51), получим

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\rho u}{a^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\rho v}{a^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)-\frac{uv}{a^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)=0.$$

Воспользуемся далее зависимостями (6.2) и выразим скорости под знаками дифференцирования через потенциал скорости φ. Тогда

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\,\frac{uv}{a^2}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \qquad (6.53)$$

Уравнение (6.53) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка для потенциала скорости в сжимаемом потоке.

Граничные условия для потенциала скорости определяются условиями конкретной задачи. В случае плоского потока, параллельного на бесконечности оси x, потенциал скорости должен отвечать следующим условиям:

$$u_\infty=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=\infty}=c_\infty;\quad v_\infty=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{x=\infty}=0\,.$$

На поверхности обтекаемого тела при условии безотрывного течения нормальная составляющая скорости c_n должна быть равна нулю, и, следовательно, $c_n=\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{y=0}=0\,.$

Анализируя уравнение (6.53), можно отметить, что его тип зависит от соотношения между составляющими скорости и скоростью звука. В случае дозвуковой области оно относится к типу эллиптических уравнений, а при очень малых отношениях скоростей к скорости звука ($u^2/a^2 \ll 1$; $uv/a^2 \ll 1$; $v^2/a^2 \ll 1$), когда этими отношениями можно пренебречь, уравнение (6.53) сводится к уже рассматриваемому линейному уравнению Лапласа (6.7)

Указанный переход от нелинейного к линейному уравнению не является единственным. Если в потоке находится тело малых поперечных размеров, то вносимое им в поток возмущение оказывается достаточно малым.

В результате исходное нелинейное уравнение (6.53) сводится к линейному, и на основе этого более простого уравнения можно провести учет влияния сжимаемости на распределение скоростей и давлений в интересующей нас области.

6.6. Линеаризованное уравнение для потенциала скорости сжимаемой жидкости

В случае малых возмущений потока, как и при выводе линеаризованного уравнения Бернулли (6.48), скорость жидкости и ее составляющие при условии, что направление оси x совпадает с направлением вектора скорости в бесконечности $\vec{c}_\infty$, могут быть представлены в следующем виде:

$$c = c_\infty + c'; \quad u = u_\infty + u'; \quad v = v' \; (v_\infty = 0),$$

где c', u', v' — малые величины порядка Δ.

Оценим теперь порядок коэффициентов, входящих в уравнение (6.53):

$$1 - \frac{u^2}{a^2} = 1 - \frac{u_\infty^2}{a^2} - 2\frac{u_\infty}{a}\frac{\Delta}{a} - \frac{\Delta^2}{a^2};$$

$$1 - \frac{v^2}{a^2} = 1 - \frac{\Delta^2}{a^2}; \quad \frac{uv}{a^2} = \frac{u_\infty}{a}\frac{\Delta}{a} + \frac{\Delta^2}{a^2}.$$

Пренебрегая членами, имеющими порядок $\frac{\Delta}{a}$ и $\frac{\Delta^2}{a^2}$, приходим к линеаризованному уравнению для потенциала скорости:

$$(1 - \mathrm{M}_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{6.54}$$

Рассмотренный метод может дать удовлетворительные результаты не только для решения задач внешней аэродинамики, но оказывается полезным при исследовании потока в каналах с малой кривизной ограничивающих стенок. Заметим, однако, что исследовать течение вблизи критических точек, где происходит торможение потока до нулевого значения, с помощью уравнения (6.54) нельзя, так как в окрестностях этих точек изменение скорости соизмеримо со скоростью на бесконечности и принятое нами допущение о малых изменениях скорости здесь не выполняется.

Уравнение (6.54) путем соответствующей деформации осей координат может быть сведено к уравнению Лапласа. С этой целью перейдем к новой системе координат $x_{\text{н}}$ и $y_{\text{н}}$, которая связана с исходной системой линейной зависимостью:

$$x_{\text{н}} = x; \quad y_{\text{н}} = ky. \tag{6.55}$$

В новой системе координат линейные размеры вдоль оси x не меняются, а поперечные деформируются с постоянным коэффициентом деформации k.

При переходе к новой системе координат изменится и потенциал скорости. Это изменение будем учитывать с помощью пока неизвестного коэффициента σ. Тогда потенциал скорости $\varphi(x, y)$ будет связан с потенциалом $\varphi_н$ в новой системе координат следующим соотношением:

$$\varphi_н(x_н y_н) = \sigma\varphi(x, y). \tag{6.56}$$

Используя зависимости (6.55) и (6.56), находим вторые производные от потенциала скорости $\varphi(x, y)$, входящие в линеаризованное уравнение для потенциала скорости в сжимаемом потоке:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi_н}{\partial x} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi_н}{\partial x_н}\frac{\mathrm{d}x_н}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi_н}{\partial x_н}, \quad \text{где} \quad \frac{\mathrm{d}x_н}{\mathrm{d}x} = 1;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2\varphi_н}{\partial x_н^2};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi_н}{\partial y_н} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial y_н}{\partial y_н}\frac{\mathrm{d}y_н}{\mathrm{d}y} = \frac{k}{\sigma}\frac{\partial\varphi_н}{\partial y_н}, \quad \text{где} \quad \frac{\mathrm{d}y_н}{\mathrm{d}y} = k;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{k^2}{\sigma}\frac{\partial^2\varphi_н}{\partial y_н^2}.$$

Подставляя полученные производные в (6.54), получаем

$$(1 - \mathrm{M}_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi_н}{\partial x_н^2}\frac{1}{\sigma} + \frac{k^2}{\sigma}\frac{\partial^2\varphi_н}{\partial y_н^2} = 0.$$

Если теперь неопределенный выше коэффициент преобразования оси ординат k принять

$$k = \sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2}, \tag{6.57}$$

то в новых координатах получим уравнение Лапласа, совпадающее с уравнением для потенциала скорости в несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial^2\varphi_н}{\partial x_н^2} + \frac{\partial^2\varphi_н}{\partial y_н^2} = 0. \tag{6.58}$$

Таким образом, исходную задачу о течении сжимаемой жидкости можно свести к рассмотренному ранее движению несжимаемого потока. При этом необходимо учесть, что при переходе к новой системе координат могут измениться и граничные условия, определяющие решение уравнения Лапласа. На бесконечном удалении от обтекаемого тела эти условия не меняются, поскольку как в сжимаемом, так и в несжимаемом потоке будем считать скорости сравниваемых плоскопараллельных потоков одинаковыми ($c_\infty = c_{\infty\,н}$).

Второе граничное условие состоит в том, что контур обтекаемого тела является нулевой линией тока.

Если уравнение $y = f(x)$ определяет заданный контур, то в новой системе координат, относящейся к обтеканию его в несжимаемой жидкости, произойдет некоторая деформация контура, и он будет определяться уравнением $y_н = f_н(x_н)$.

Тангенс угла наклона вектора скорости $\vec{c}$ к поверхности исходного профиля будет, очевидно, вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v'}{c_\infty + u'},$$

и одновременно $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, так как согласно граничному условию контур обтекаемого тела должен совпадать с линией тока.

Следовательно,

$$\frac{v'}{c_\infty + u'} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x).$$

Поскольку мы рассматриваем тонкие тела, то вносимые в поток этими телами малые возмущения скоростей будут существенно меньше скорости набегающего потока, т.е. $u' \ll c_\infty$. Тогда приближенно можно записать, что

$$v' \approx c_\infty \frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx c_\infty f'(x), \qquad (6.59)$$

где $f(x)$ — функция, описывающая геометрическую форму обтекаемого тела.

Аналогичным образом можно показать, что и в потоке несжимаемой жидкости для деформированного профиля

$$v'_н \approx c_\infty f'_н(x_н). \qquad (6.60)$$

Установим далее связь между вертикальными составляющими скорости v' и $v'_н$ на поверхностях обтекаемых тел в сходственных точках. С этой целью представим потенциал скорости φ в сжимаемом потоке в виде суммы $\varphi = \varphi_\infty + \varphi'$, где $\varphi_\infty = c_\infty x$ — потенциал плоскопараллельного невозмущенного течения; φ' — потенциал «возмущенного» потока. Тогда будем иметь:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_\infty}{\partial x} + \frac{\partial\varphi'}{\partial x} = c_\infty + u';$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} = \frac{\partial u'}{\partial x}; \qquad (6.61)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi'}{\partial y} = v';$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}. \qquad (6.62)$$

Подставив (6.61) и (6.62) в уравнение Лапласа (6.54), увидим, что при использовании метода малых возмущений потенциал невозмущенного течения φ не входит в это уравнение. Следовательно,

$$v' = \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = \frac{k}{\sigma}\frac{\partial \varphi'_{\text{н}}}{\partial y_{\text{н}}} = \frac{k}{\sigma} v'_{\text{н}}.$$

С учетом (6.59) и (6.60) получаем

$$c_\infty f'(x) = \frac{k}{\sigma} c_\infty f'_{\text{н}}(x_{\text{н}})$$

или

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{k}{\sigma}\frac{\mathrm{d}f_{\text{н}}}{\mathrm{d}x_{\text{н}}}. \tag{6.63}$$

Полученное соотношение (6.63) позволяет установить, как изменится распределение скоростей около одного и того же тела при переходе от сжимаемой жидкости к несжимаемой. Если рассматривается одно и то же тело, то для равенства тангенсов углов наклона в сходственных точках $\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f_{\text{н}}}{\mathrm{d}x_{\text{н}}}\right)$ необходимо, чтобы в формуле (6.63) коэффициенты k и σ были равны.

Исходя из этого условия ($k = \sigma$), получаем, что переходной коэффициент σ в формуле (6.57) должен иметь вид

$$\sigma = k = \sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2}. \tag{6.64}$$

Далее, поскольку

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \varphi'_{\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}},$$

то

$$u' = \frac{u'_{\text{н}}}{\sigma} = \frac{u'_{\text{н}}}{\sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2}}. \tag{6.65}$$

Отсюда следует, что скорость в сжимаемом потоке будет всегда больше, чем в несжимаемом, и эта разница нарастает по мере увеличения безразмерной скорости M_∞.

Таким же образом изменяются и локальные коэффициенты давления $\bar{p}$. Действительно, согласно определению,

$$\bar{p}_{\text{сж}} = \frac{p_\infty - p_i}{\rho_\infty c_\infty^2 / 2}.$$

Локальное давление p_i на поверхности обтекаемого тела в случае малых возмущений определяется по формуле (6.48):

$$p_i = p_\infty - \rho_\infty c_\infty u'.$$

Отсюда

$$\bar{p}_{\text{сж}} = \frac{p_\infty - p_i}{\rho_\infty c_\infty^2/2} = 2\frac{u'}{c_\infty}.$$

Тогда, используя (6.65), получаем

$$\bar{p}_{\text{сж}} = \frac{2u'_{\text{н}}}{c_\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\text{M}_\infty^2}} = \frac{\bar{p}_{\text{н}}}{\sqrt{1-\text{M}_\infty^2}}. \tag{6.66}$$

Возьмем производную по продольной координате x от левой и правой частей выражения (6.66):

$$\frac{\mathrm{d}\bar{p}_{\text{н}}}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}p_{\text{н}}}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1-\text{M}_\infty^2}}. \tag{6.67}$$

Отсюда следует, что в сжимаемом потоке по сравнению с несжимаемой жидкостью происходит увеличение не только коэффициентов давления, но и продольных градиентов давления. Качественно этот вывод оказывается справедливым и в случае движения жидкости в каналах, где с ростом числа М также имеет место значительное возрастание отрицательных продольных градиентов давления в суживающихся каналах и более резкое увеличение положительных градиентов давления в диффузорах. Последнее обстоятельство в ряде случаев оказывается решающим с точки зрения сохранения безотрывного течения жидкости.

Задачу о влиянии сжимаемости жидкости на характер течения вблизи тонких тел можно видоизменить, т.е. рассматривать те изменения геометрических характеристик тела, которые необходимо произвести, чтобы сохранить примерно одинаковые поля скоростей и давлений в сжимаемых и несжимаемых потоках.

Из условия равных продольных скоростей ($u' = u'_{\text{н}}$) следует, что одинаковыми должны быть и потенциалы скорости ($\varphi = \varphi_{\text{н}}$). Для выполнения этого условия согласно формуле (6.56) необходимо, чтобы переходный коэффициент $\sigma = 1$. В этом случае соотношение (6.63) примет следующий вид:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1-\text{M}_\infty^2}\,\frac{\mathrm{d}f_{\text{н}}}{\mathrm{d}x_{\text{н}}}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, а $\operatorname{tg}\alpha_{\text{н}} = \dfrac{\mathrm{d}f_{\text{н}}}{\mathrm{d}x_{\text{н}}}$, то $\operatorname{tg}\alpha_{\text{н}} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 - \mathrm{M}_{\infty}^2}}$. Отсюда следует, что каждый элемент обтекаемого контура в несжимаемой жидкости имеет больший наклон, чем соответствующий элемент в сжимаемой жидкости. Следовательно, для обеспечения условия $(u' = u'_{\text{н}})$ необходимо ординаты всех точек профиля увеличить в $\dfrac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{M}_{\infty}^2}}$ раз. Увеличение толщины тонкого профиля влечет за собой и повышение местной скорости потока.

Приведенные соотношения (6.66) и (6.67) являются приближенными, и практическое их применение ограничено принятыми выше условиями малых возмущений. Кроме того, в зоне околозвуковых скоростей сходимость опытных и расчетных значений коэффициентов давления $\overline{p}_{\text{сж}}$ резко ухудшается и практическое использование формулы (6.66) ограничено по числу M_{∞}.

При $\mathrm{M}_{\infty} = 1$ значение $\overline{p}_{\text{сж}}$, рассчитанное по (6.66), неограниченно возрастает. В действительности величина $\overline{p}_{\text{сж}}$ и при $\mathrm{M}_{\infty} = 1$ имеет конечное значение.

Удовлетворительные количественные результаты расчетов с использованием метода малых возмущений могут быть получены в случае, когда $\mathrm{M}_{\infty} < \mathrm{M}_{\infty\,\text{кр}}$ (здесь $\mathrm{M}_{\infty\,\text{кр}}$ — такая безразмерная скорость набегающего потока, при которой локальная скорость c_i на поверхности обтекаемого тела становится равной местной скорости звука).

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте условие потенциальности течения.
2. Какова математическая запись условия потенциальности течения?
3. Какие величины находятся с помощью потенциала скорости?
4. Какому уравнению удовлетворяет потенциал скорости?
5. Что такое функция тока?
6. Какова связь между функцией тока и потенциалом скорости?
7. Сформулируйте основное свойство потенциала скорости.
8. Что определяет разность функций тока в двух точках?
9. Что такое комплексный потенциал?
10. Что такое комплексная скорость?
11. В чем суть теоремы о сложении потенциальных течений?
12. Назовите примеры простейших потенциальных течений.
13. Какие течения необходимо сложить для получения вихреисточника или вихрестока?
14. Как получить картину поперечного обтекания цилиндра?
15. Какие потоки необходимо сложить для получения картины обтекания цилиндра при наличии циркуляции?

16. Что такое критические точки на обтекаемом теле?
17. Чему равно сопротивление цилиндра в потоке идеальной жидкости?
18. Что такое коэффициент давления и как он меняется по окружности цилиндра?
19. Как найти подъемную силу, действующую на поперечно обтекаемый цилиндр при наличии циркуляции?
20. В чем суть теоремы Н.Е. Жуковского о подъемной силе?
21. В чем различия уравнений для потенциала скорости в сжимаемом и несжимаемом потоках?
22. В чем состоит суть линеаризации уравнения для потенциала скорости?
23. Запишите линеаризованное уравнение Бернулли.
24. В каком случае можно использовать метод малых возмущений?
25. Как выглядит линеаризованное уравнение для потенциала скорости в сжимаемом потоке?
26. Каким образом линеаризованное уравнение для потенциала скорости можно свести к уравнению Лапласа?
27. Как связаны между собой коэффициенты давления в сжимаемой и несжимаемой жидкостях?
28. Каковы границы применения линеаризованного уравнения для потенциала скорости?
29. Как нужно изменить форму профиля, чтобы распределение скоростей по его обводу совпадало с распределением скорости в сжимаемой среде?

Глава 7
ВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

7.1. Некоторые общие понятия о вихревых течениях

Вихревые течения характеризуются **вектором угловой скорости** $\vec{\omega}$. Составляющие этого вектора ω_x, ω_y, ω_z, как было показано ранее (см. гл. 2), связаны с составляющими вектора скорости $\vec{c}$ следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right); \\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right); \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

Для плоского течения $w = 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, так как проекции вектора скорости $\vec{c}$ на координатные оси x и y в этом случае от z не зависят. Следовательно,

$$\vec{\omega} = \vec{k}\ \omega,$$

т.е. вектор $\vec{\omega}$ направлен перпендикулярно плоскости течения xy.

Из приведенных соотношений следует, что вихревые течения прямо связаны с наличием в потоке поперечных градиентов скорости, вызывающих вращение жидких частиц вокруг локальных центров вращения.

Типичным примером вихревого течения является течение жидкости вблизи обтекаемых поверхностей, где согласно гипотезе «прилипания» скорость на этих поверхностях равна нулю и далее в поперечном направлении имеет место плавное увеличение скорости до значения, соответствующего скорости невозмущенного стенкой течения.

Качественная картина изменения продольной составляющей скорости в рассматриваемой области показана на рис. 7.1, где u_i — скорости в пристеночной области, а u_t — скорость невозмущенного течения.

В данном случае продольный градиент вертикальной составляющей скорости $\partial v/\partial x$ близок к нулю, и для плоского течения

$$\omega = -\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{7.2}$$

т.е. вектор угловой скорости вращения частиц $\vec{\omega}$ определяется только поперечным градиентом составляющей скорости u и направлен перпендикулярно плоскости xy.

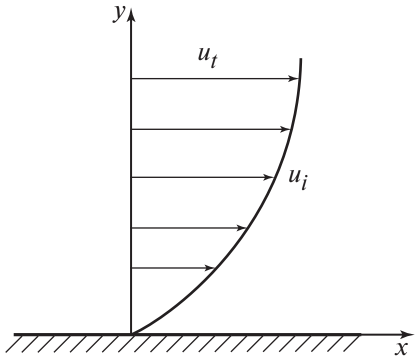


Рис. 7.1. Распределение скоростей вблизи стенки при течении реальной (вязкой) жидкости

В рассматриваемом примере имеет место непрерывно распределенная в плоскопараллельном потоке завихренность, определяемая соотношением (7.2).

Во многих практически важных случаях, наряду с распределенной по всему потоку завихренностью, возникают дискретные вихревые образования и вихревые шнуры, представляющие собой хорошо выраженную вихревую трубку, поверхность которой образована вихревыми линиями.

Если такой вихревой шнур пересечь перпендикулярной к продольной оси шнура плоскостью, то отпечатанная на ней картина течения будет соответствовать рассмотренной ранее картине (см. рис. 6.10), характерной для циркуляционного течения, где ядром является поперечное сечение вихревого шнура. Возникающее при этом потенциальное поле скоростей за пределами вихревого шнура, где скорость изменяется обратно пропорционально расстоянию r от центра вихревого шнура, индуцируется непотенциальным ядром, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω. При этом в пределах ядра циркуляционного течения (в поперечном сечении вихревой трубки), как и в твердом теле, окружная скорость жидкости c_θ меняется в зависимости от радиуса по линейному закону

$$c_\theta = \omega r. \tag{7.3}$$

Мерой завихренности жидкости, заключенной внутри вихревой трубки, является ее интенсивность или напряженность.

Напряженность или интенсивность вихревой трубки $\varkappa$ представляет собой произведение угловой скорости ω на площадь поперечного сечения этой трубки σ, т.е.

$$\varkappa = \omega\sigma. \tag{7.4}$$

Покажем, что величина $\varkappa$ находится в прямой связи с циркуляцией скорости Γ. С этой целью найдем циркуляцию скорости по внешней окружности вихревого ядра радиусом $r_я$:

$$\Gamma = 2\pi r_я c_\theta.$$

Используя (7.3), получаем

$$\Gamma = 2\pi r_{я}^{2}\omega = 2\sigma\omega \quad (\sigma = \pi r^{2}). \tag{7.5}$$

Зависимость (7.5) показывает, что циркуляция скорости определяет меру интенсивности (или напряженности) вихревого движения

7.2. Основные теоремы вихревого течения идеальной жидкости

Вихревые течения характеризуются рядом особенностей, некоторые из которых нашли свое отражение в рассматриваемых далее теоремах.

7.2.1. Теорема Стокса

Теорема Стокса: **циркуляция скорости по замкнутому контуру равна удвоенной интенсивности вихрей, охватываемых этим контуром**.

Докажем вначале рассматриваемую теорему для бесконечно малого прямоугольного контура, изображенного на рис. 7.2, *а*. Здесь же указаны направления скоростей вдоль образующих контура.

Прямое вычисление циркуляции дает

$$d\Gamma = u\,dx + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\,dx\right)dy - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right)dx - v\,dy.$$

Знак «минус» при суммировании членов появляется в связи с тем, что направление обхода контура (против часовой стрелки) противоположно направлению вектора скорости на соответствующей стороне контура.

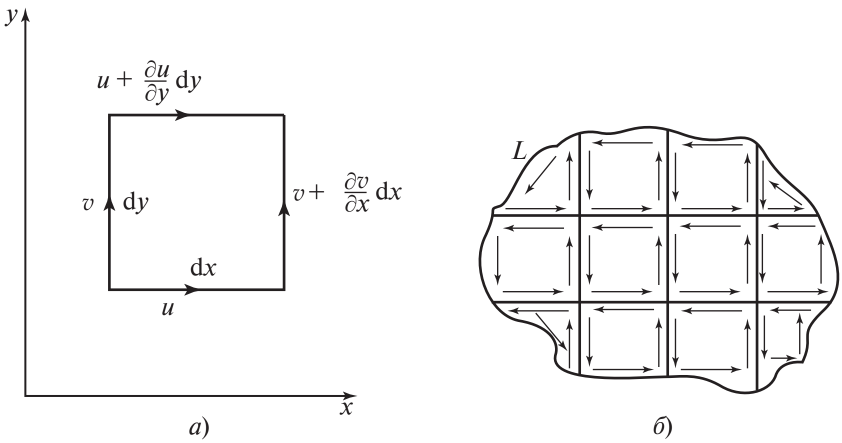


Рис. 7.2. К доказательству теоремы Стокса

После сокращения подобных членов получаем

$$\mathrm{d}\Gamma = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ = 2\omega\,\mathrm{d}\sigma = 2\mathrm{d}\varkappa. \tag{7.6}$$

Если площадка $\mathrm{d}\sigma$, ограниченная элементарным контуром, ориентирована в пространстве произвольным образом, то

$$\mathrm{d}\Gamma = 2\omega_n \mathrm{d}\sigma, \tag{7.7}$$

где ω_n — составляющая вектора $\vec{\omega}$, нормальная к рассматриваемой площадке.

Таким образом, циркуляция скорости по бесконечно малому контуру действительно равна удвоенной интенсивности вихря, находящегося внутри этого контура.

Этот результат легко обобщается и на произвольный плоский контур L конечных размеров (рис. 7.2, *б*). С этой целью разобьем всю площадь, охватываемую контуром L, прямоугольной сеткой на ряд малых контуров и проведем сложение циркуляций по указанным контурам, сохраняя одно и то же направление обхода. Тогда согласно зависимости (7.7)

$$\sum_1^n \Delta\Gamma_i\ = 2\sum \omega_{ni}\Delta\sigma_i\,.$$

Как видно из рис. 7.2, *б*, циркуляции по всем внутренним линиям малых контуров взаимно уничтожаются и суммарная циркуляция Γ оказывается равной циркуляции по всему внешнему контуру. В результате

$$\Gamma = 2\sum \omega_{ni}\Delta\sigma_i\,. \tag{7.8}$$

При непрерывном распределении вихревого движения по площадке, ограниченной контуром L,

$$\Gamma = 2\int_\sigma \omega_n\ \mathrm{d}\sigma\,. \tag{7.9}$$

В общем случае при наличии всех трех составляющих скорости формула (7.9), записанная в векторной форме, имеет вид

$$\oint_L \vec{c}\ \mathrm{d}l = \iint \mathrm{rot}\ \vec{c}\ \mathrm{d}\sigma\,.$$

Если контур пронизывается только отдельными вихревыми трубками, то циркуляция по такому контуру равна сумме удвоенной интенсивности вихревых трубок:

$$\Gamma = 2\sum_{i=1}^{n} \chi_i\ = 2\sum_{i=1}^{n} \omega_i\sigma_i\,.$$

7.2.2. Теорема Томсона

Теорема Томсона: **в потоке идеальной баротропной жидкости, обладающей однозначным массовым потенциалом, циркуляция скорости по замкнутому контуру не меняется с течением времени**, т.е.

$$\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}t = 0.$$

Доказательство теоремы сводится к прямому вычислению производной $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}t$.

Согласно определению

$$\Gamma = \int_A^B u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y + w\,\mathrm{d}z\,.$$

Отсюда в результате почленного дифференцирования произведений двух переменных, стоящих под знаком интеграла, получаем

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \int_A^B \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x + \int_A^B \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}y + \int_A^B \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}z + \int_A^B u\,\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) + \int_A^B v\,\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + \int_A^B w\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right).$$

Производные $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ выразим из уравнений Эйлера (3.21), а производные от координат по времени заменим соответствующими проекциями скоростей. Тогда

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \int_L (X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z) - \frac{1}{\rho}\int_L \left(\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial p}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) +$$

$$+ \int_L (u\,\mathrm{d}u + v\,\mathrm{d}v + w\,\mathrm{d}w)\,.$$

Согласно условию теоремы массовые силы обладают **однозначным массовым потенциалом** U. Следовательно, $X = \frac{\partial U}{\partial x}$; $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$; $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$. Таким образом, под интегралами стоят полные дифференциалы от потенциала массовых сил U, от давления p и от $\frac{c^2}{2}$, .т.е.

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \int_A^B \mathrm{d}\left(\frac{c^2}{2} - \frac{p}{\rho} + U\right) = \left(\frac{c^2}{2} - \frac{p}{\rho} + U\right)_B - \left(\frac{c^2}{2} - \frac{p}{\rho} + U\right)_A.$$

Если рассматривается циркуляция по замкнутому контуру L, то точки A и B совпадают.

Соответственно, поскольку потенциал массовых сил однозначен, действительно $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}t = 0$.

7.2.3. Теоремы Гельмгольца о вихревом движении

Теоремы Гельмгольца о вихревом движении базируются на теоремах Стокса и Томсона и устанавливают условия сохраняемости вихревого движения жидкости.

Первая теорема Гельмгольца: **интенсивность вихревой трубки не меняется по ее длине**.

Рассмотрим элемент вихревой трубки и проведем двойной разрез вдоль ее образующей так, как это показано на рис. 7.3. В результате этого разреза образовалась поверхность, охватывающая вихревую трубку в виде манжеты. Если эту «манжету» развернуть и вычислить циркуляцию скорости по ее контуру *ABCDA*, двигаясь по направлениям, указанным стрелками, то

$$\Gamma = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC} - \Gamma_{CD} - \Gamma_{DA}.$$

Ясно, что $|\Gamma_{BC}| = |\Gamma_{DA}|$ и взаимно уничтожаются. Следовательно, $\Gamma = \Gamma_{AB} - \Gamma_{CD}$. Поскольку рассматриваемый контур только охватывает вихревую трубку, его поверхность не пересекает ни одна вихревая трубка. Тогда по теореме Стокса найденная выше циркуляция скорости Γ должна равняться нулю, т.е.

$$\Gamma = \Gamma_{AB} - \Gamma_{CD} = 0.$$

Отсюда

$$\Gamma_{AB} = \Gamma_{CD}.$$

Теперь, однако, поверхности, охватываемые контурами *AB* и *DC*, пересекают всю вихревую трубку, и согласно теореме Стокса

$$\Gamma_{AB} = 2\omega_1\sigma_1 = \Gamma_{CD} = 2\omega_2\sigma_2.$$

Так как сечения вихревой трубки были выбраны совершенно произвольно, то

$$\omega\sigma = \text{const}. \tag{7.10}$$

Полученное уравнение (7.10) аналогично уравнению расхода для несжимаемой жидкости ($c\sigma = \text{const}$), но в данном случае вдоль вихревой трубки переносится не расход жидкости, а интенсивность вихревого движения и согласно доказанной теореме эта интенсивность остается постоянной в каждом ее сечении.

Отсюда можно сделать весьма важный вывод о сохранении в пространстве вихревых трубок. Действительно, если предположить, что в некотором месте она может выродиться в точку, то согласно (7.10) это должно приводить к бесконечно большому увеличению угловой скоро-

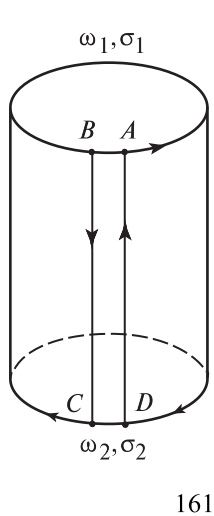


Рис. 7.3. Элемент вихревой трубки

сти вращения ω. Невозможность такого возрастания рассматриваемой величины следует из физической ограниченности линейных скоростей.

Таким образом, вихревая трубка в потоке идеальной жидкости не может возникнуть или исчезнуть. Для устойчивого состояния она должна либо опираться на некоторые ограничивающие поверхности, либо быть замкнутой сама на себя, т.е. образовывать вихревые кольца (рис. 7.4).

В реальных жидкостях зарождение вихревых трубок и их распад обусловлены наличием вязкости, но даже в этом случае, если вихревое движение возникло и соблюдается сформулированное выше условие его устойчивого существования, оно достаточно долго может наблюдаться, что обусловлено особым механизмом диссипации энергии в вихревых образованиях. Этот механизм состоит в том, что здесь осуществляется каскадный процесс передачи энергии от крупных вихревых образований к более мелким и только на последней стадии происходит диссипативный переход энергии вращения в тепловую энергию.

Вторая теорема Гельмгольца: **в идеальной жидкости, находящейся под действием потенциальных массовых сил, вихревая трубка не разрушается и всегда остается вихревой трубкой**.

Для доказательства этой теоремы выделим на поверхности вихревой трубки замкнутый жидкий контур L (рис. 7.5). Поскольку этот контур ограничивает часть поверхности вихревой трубки, то не охватывает ни одной вихревой линии (эти линии согласно определению вихревой трубки направлены по касательной к поверхности). Тогда по теореме Стокса в рассматриваемый момент времени ($t = t_0$) $\Gamma_L = 0$.

По теореме Томсона $\mathrm{d}\Gamma_L/\mathrm{d}t = 0$. Следовательно, $\Gamma_L = \mathrm{const}$ во все время движения. Так как начальное значение циркуляции было равно нулю, то и в произвольный момент времени ($t = t_n$) $\Gamma_L = 0$, и ни одна вихревая линия по-прежнему выделенную контуром L поверхность пересекать не будет, т.е. поверхность вихревой трубки во все время движения остается поверхностью вихревой трубки.

Рис. 7.4. Схемы устойчивого существования вихревой трубки

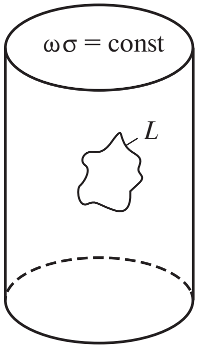


Рис. 7.5. К доказательству второй теоремы Гельмгольца о вихревом движении

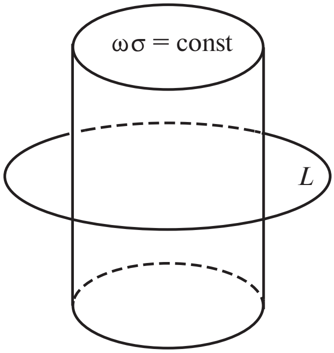


Рис. 7.6. К доказательству третьей теоремы Гельмгольца о вихревом движении

Третья теорема Гельмгольца: **в идеальной жидкости, находящейся под действием потенциальных массовых сил, интенсивность вихревой трубки не меняется с течением времени.**

Пусть контрольный контур L охватывает рассматриваемую вихревую трубку как показано на рис. 7.6. Тогда по теореме Стокса

$$\Gamma_L = 2\omega\sigma = 2\chi.$$

По теореме Томсона циркуляция скорости Γ с течением времени не меняется. Но тогда остается неизменной и интенсивность вихревой трубки, через которую выражается эта циркуляция.

7.3. Особенности течения жидкости внутри вихревой трубки и за ее пределами

Рассмотренные теоремы вихревых течений определяют основные закономерности существования этих течений в идеальной жидкости.

В вязкой жидкости вихревые течения являются преобладающими, причем здесь, как уже отмечалось ранее, имеют место как непрерывное распределение завихренности, так и дискретные вихревые шнуры и дискретные вихревые образования.

Закономерности вихревых течений, установленные на основе модели идеальной жидкости, дают возможность понять и многие особенности течения вязкой жидкости. Во многих случаях для этого достаточно подробно рассмотреть задачу о движении жидкости в плоском вихре и его окрестности.

Ранее при анализе циркуляционного течения было получено, что окружная скорость c_θ меняется обратно пропорционально расстоянию от центра круговых линий тока. Соответственно с приближением к центру скорость c_θ неограниченно возрастает. Физически неограниченное увеличение скорости невозможно, так как ее максимальное значения определяется только запасом полной энергии (параметрами полного торможения).

Следовательно, потенциальное циркуляционное течение на плоскости возможно только вне некоторого кругового цилиндра [на плоскости вне некоторой окружности радиусом $r = r_1$ (рис. 7.7)]. Внутри этой окружности устанавливается вихревое движение. При этом на границе вихревой области ($r = r_1$) с потенциальным циркуляционным течением скорости и давления с внешней и внутренней сторон рассматриваемой окружности должны совпадать, а во всех внутренних точках давление должно быть больше нуля.

Наиболее простым для анализа является случай, когда во всей вихревой области угловая скорость имеет одно и то же значение (ω = const). Тогда скорости c_θ на любой окружности радиусом r должны быть одинаковы и направлены по касательной к этой окружности, а радиальная составляющая скорости c_r должна равняться нулю, так как в противном случае неизбежно существовал бы расход жидкости через внешнюю границу вихревой области. Если радиусы всех окружностей внутри этой области обозначить через r_i ($r_i < r_1$), а за ее пределами очерчивать окружности радиусами r_j ($r_j > r_1$), то согласно теореме Стокса циркуляция скорости в области вихревого движения

$$\Gamma_i = 2\pi\omega r_i^2, \tag{7.11}$$

а за ее пределами

$$\Gamma_j = 2\pi\omega r_1^2 = \text{const}, \tag{7.11а}$$

так как в области потенциального течения вихревое течение отсутствует и соответственно при $r > r_1$ циркуляция скорости Γ_i уже не меняется.

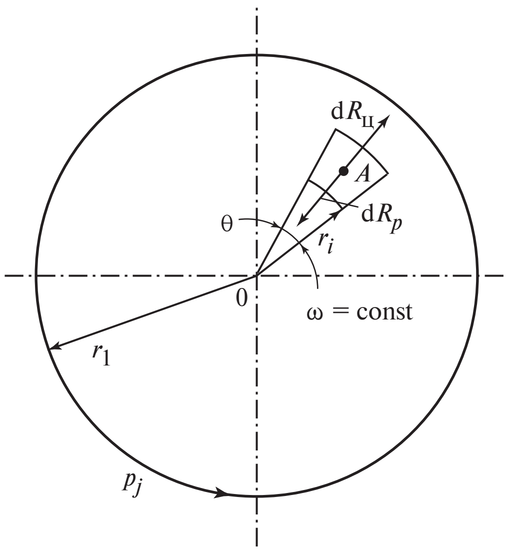


Рис. 7.7. К оценке скоростей и давлений внутри вихревого шнура

В то же время на соответствующих окружностях окружные скорости $c_{\theta i}$ и $c_{\theta j}$ постоянны, и тогда согласно смыслу циркуляции

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_i &= 2\pi r_i c_{\theta i}; \\ \Gamma_j &= 2\pi r_j c_{\theta j}. \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

Сравнивая (7.11), (7.11а) и (7.12), получаем

$$c_{\theta i} = \omega r_i \text{ при } r_i \le r_1 \tag{7.13}$$

и

$$c_{\theta j} = \frac{\omega r_1^2}{r_j} \text{ при } r_j \ge r_1. \tag{7.14}$$

На границе рассматриваемых областей ($r_i = r_j = r_1$) $c_{\theta j} = c_{\theta i} = \omega r_1$, т.е. здесь скорость от линейного распределения внутри вихревой области переходит к гиперболическому распределению в области потенциального течения. Таким образом, плоский вихрь, как уже отмечалось, создает вокруг себя (индуцирует) некоторое поле скоростей. Скорость в любой точке этого поля называется **индуцированной скоростью**, которая согласно формуле (7.14) обратно пропорциональна радиусу r и направлена перпендикулярно этому радиусу.

Внутри вихревого цилиндра (на плоскости это плоский вихрь, являющийся сечением вихревого цилиндра) жидкость вращается как твердое тело вокруг центральной оси с угловой скоростью ω.

В центре вихря (точка О на рис. 7.7) скорость, естественно, равна нулю, т.е. круговой вихрь не индуцирует скорости в своем центре, и в неподвижной жидкости этот центр остается неподвижным.

Распределение скоростей внутри плоского вихря и за его пределами показано на рис. 7.8 (кривая *1*).

Найдем далее как меняется давление внутри вихревой области и за ее пределами. В области циркуляционного течения распределение давлений в несжимаемой жидкости определяется уравнением Бернулли. В вихревой области распределение давлений находится из условия равновесия вращающихся частиц.

Выделим внутри этой области элементарную частицу A так, как это показано на рис. 7.7. На эту частицу с одной стороны действует центробежная сила $\mathrm{d}R_{\text{ц}}$:

$$\mathrm{d}R_{\text{ц}} = \rho r_i \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r_i \cdot 1\omega^2 r_i,$$

а с другой стороны — сила $\mathrm{d}R_p$, обусловленная разницей давлений на расстоянии $\mathrm{d}r$:

$$\mathrm{d}R_p = r_i \mathrm{d}\theta \cdot 1\mathrm{d}p.$$

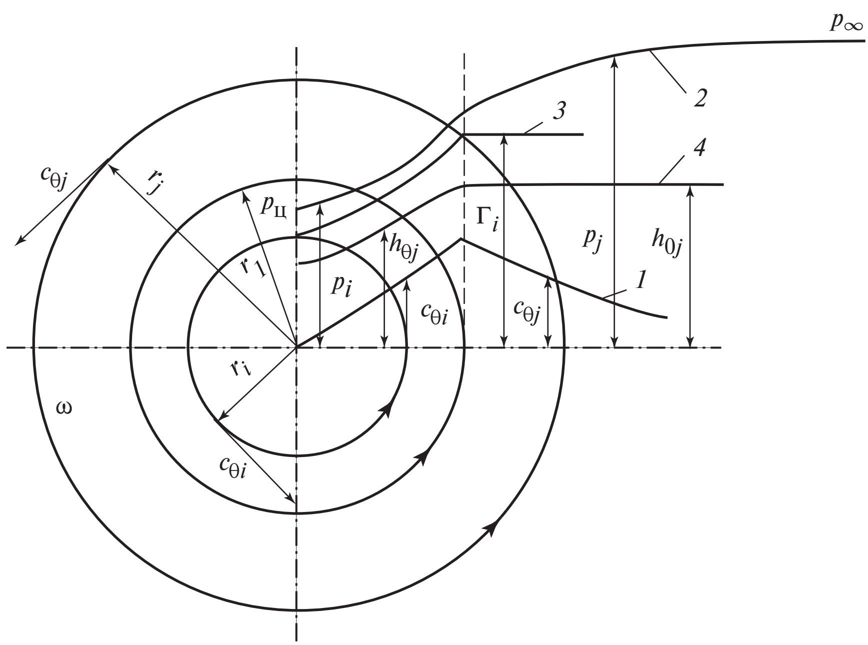


Рис. 7.8. Распределение скоростей c_θ (*1*), давлений p_j (*2*), циркуляции Г (*3*) и энтальпии полного торможения h_0 (*4*) в вихревом ядре и за его пределами

Приравнивая эти силы, получаем

$$dp = \rho\omega^2 r_i dr_i.$$

После интегрирования от $r = r_i$ до $r = r_1$, находим

$$p_1 - p_i = \frac{\rho}{2}\left(\omega^2 r_1^2 - \omega^2 r_i^2\right) = \frac{\rho}{2}\left(c_{\theta 1}^2 - c_{\theta i}^2\right), \qquad (7.15)$$

где p_1 и $c_{\theta 1}$ — давление и скорость на внешней границе вихревой области при $r_i = r_1$. На этой границе давление p_1 должно быть равно давлению на внешней (потенциальной) стороне, которое находится из уравнения Бернулли, т.е.

$$p_1 = p_\infty - \frac{\rho c_{\theta 1}^2}{2} = p_\infty - \frac{\rho}{2}\,\omega^2 r_1^2. \qquad (7.16)$$

Здесь p_∞ — давление на очень большом удалении от вихревой области, где при отсутствии поступательного течения скорость $c_\infty = 0$.

Подставим (7.16) в (7.15). Тогда

$$p_i = p_\infty - \frac{\rho}{2}\left(2c_{\theta 1}^2 - c_{\theta i}^2\right),$$

или

$$p_i = p_\infty - \rho\omega^2 r_1^2 \left(1 - \frac{r_i^2}{2r_1^2}\right). \qquad (7.17)$$

В центре вихря $c_{\theta i}\big|_{r_i=0} = 0$ и давление

$$p_ц = p_\infty - \rho c_{\theta 1}^2 = p_\infty - \rho\omega^2 r_1^2. \qquad (7.18)$$

Сравнивая давления на границе вихревой области [см. (7.16)] и в центре вихря [см. (7.18)], видим, что в центре снижение давления в 2 раза больше, чем на его внешней границе.

При заданном давлении в центре $p_ц$ уравнение (7.18) дает возможность найти радиус r_1 вихревой области, индуцирующей внешнее потенциальное циркуляционное течение.

В области циркуляционного течения ($r_j > r_1$)

$$p_j = p_\infty - \frac{\rho c_\theta^2}{2} = p_\infty - \frac{\rho\omega^2 r_1^4}{r_j^2}.$$

Распределение давлений в вихревой области и вне ее иллюстрируется кривой *2* на рис. 7.8.

Значительное падение давления по направлению к центру вихря объясняет сильный всасывающий эффект, которым обладают реальные атмосферные вихри-смерчи, часто приводящие к катастрофическим разрушениям.

Рассмотрим теперь, как меняется энтальпия полного торможения h_0 вдоль радиуса плоского вихря.

Если движение жидкости происходит в поле действия потенциальных массовых сил, то

$$h_0 = \frac{c^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U$$

и уравнение движения в форме Громеко—Лэмба для плоского течения имеет следующий вид:

$$dh_0 = 2\begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} = 2\omega(v\,dx - u\,dy).$$

При вращении жидкости против часовой стрелки $v = c_\theta \cos\theta$ и $u = -c_\theta \sin\theta$; $dx = dr\cos\theta$; $dy = dr\sin\theta$. Тогда

$$dh_0 = 2\omega c_{\theta i}\,dr_i = 2\omega^2 r_i\,dr_i. \qquad (7.19)$$

Интегрируя (7.19) в пределах изменения радиуса от нуля до r_i, получаем

$$h_{0i} = h_{0ц} + \omega^2 r_i^2. \qquad (7.20)$$

Здесь $h_{0ц}$ — энтальпия полного торможения в центре плоского вихря.

Полученное соотношение (7.20) показывает, что энтальпия полного торможения в области кругового вихревого движения меняется при переходе от одной линии тока к другой, причем имеет место ее непрерывное увеличение по направлению к внешней границе вихревой области.

В циркуляционной (безвихревой) области энтальпия остается постоянной на всех линиях тока этого течения и равняется энтальпии h_0 на внешней границе плоского вихря, т.е.

$$h_{0j} = h_{0i}\big|_{r_i = r_1} = h_{0ц} + \omega^2 r_1^2.$$

Изменение энтальпий h_{0i} и h_{0j} в зависимости от радиуса представлены на рис. 7.8 (кривая *4*). Здесь же показано и изменение циркуляции вдоль радиуса (кривая *3*).

Рассматривая вихревые течения в реальных условиях, следует отметить, что при этом весьма часто возникают парные вихревые шнуры и цепочки параллельных вихрей, характерных для кромочных областей симметричных тел, обтекаемых с отрывом потока от обтекаемых поверхностей.

Наличие в потоке дискретных вихрей приводит к их взаимодействию, так как каждый вихрь индуцирует собственное поле скоростей, под действием которого перемещаются центры остальных вихрей. В результате наложения индуцированных полей скоростей вся вихревая система может совершать весьма сложные движения.

Так, например, при взаимодействии двух вихрей равной интенсивности, вращающихся в одну сторону, оба вихря совершают вращение вокруг точки A, которая находится посередине прямой, соединяющей центры этих вихрей (рис. 7.9).

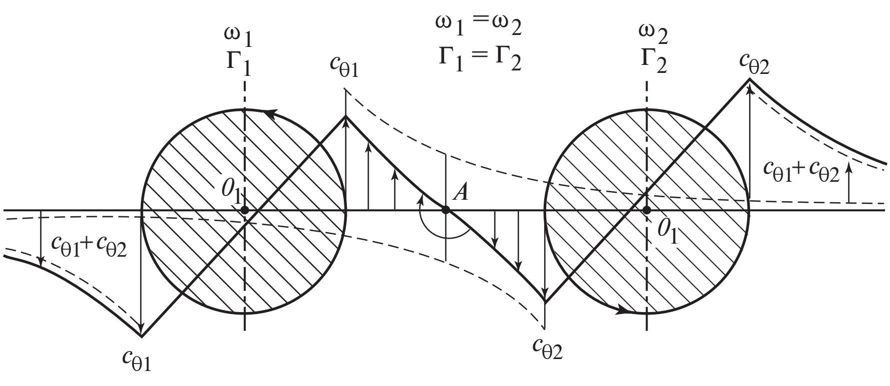


Рис. 7.9. Поле скоростей, индуцированное двумя вихревыми шнурами при их вращении в одну сторону

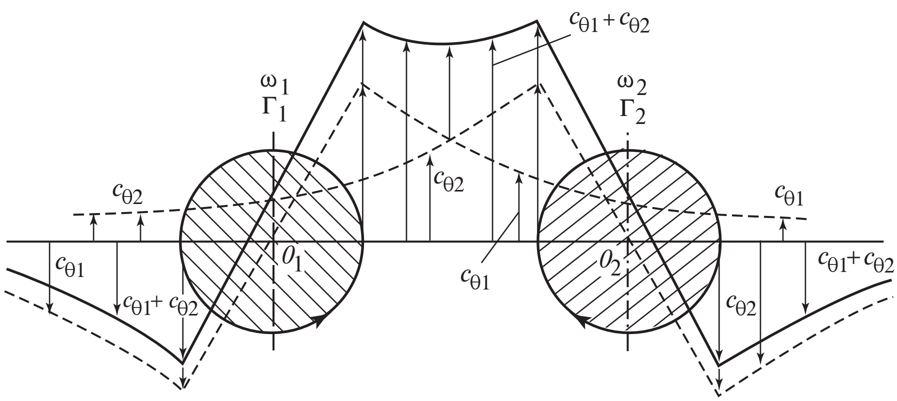


Рис. 7.10. Поле скоростей, индуцированное двумя вихревыми шнурами при их вращении в разные стороны

При различном направлении вращения системы из двух вихрей равной интенсивности последние будут двигаться поступательно (рис. 7.10).

7.4. Скорости, индуцируемые элементами вихревых трубок, произвольно расположенными в пространстве

Любой вихревой шнур, появившийся в жидкости, создает вокруг себя индуцированное поле скоростей, причем значение и направление скорости в различных точках этого поля определяются расстоянием от выделенной точки до оси вихревого шнура, его интенсивности и формы.

Рассмотренное ранее циркуляционное течение с выделенным вихревым ядром (плоский вихрь) изображается на плоскости, перпендикулярной оси вихря, бесконечно длинным прямым вихревым шнуром вместе с окружающим его потенциальным циркуляционным течением.

Индуцированная прямолинейным вихревым шнуром скорость c_θ в произвольной точке A (рис. 7.11) согласно формуле (6.26) будет определяться в виде

$$c_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r_A}. \tag{7.21}$$

Если вихревой шнур имеет произвольную криволинейную форму (рис. 7.12), то его элементы $\mathrm{d}l$, расположенные ближе к точке A и пересекающиеся с радиусами-векторами r, проведенными из точки A к данным элементам, будут влиять сильнее на значение индуцированной скорости, чем элементы вихревого шнура, расположенные под меньшим углом φ.

В частности, элементы $\mathrm{d}l_1$ и $\mathrm{d}l_2$, совпадающие с радиусом-вектором r, проведенным к ним из точки A, вообще не будут создавать в этой точке никакой скорости, а элемент $\mathrm{d}l_3$, перпендикулярный к радиусу r_3, будет индуцировать наибольшую скорость.

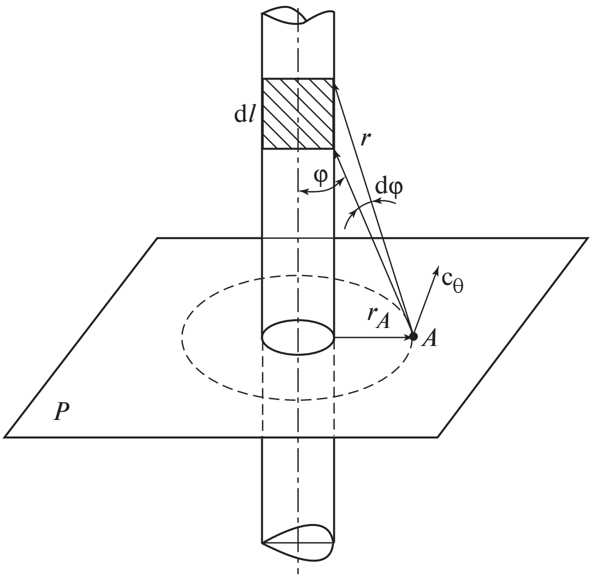


Рис. 7.11. К оценке скорости, индуцированной пространственным прямолинейным вихревым шнуром на плоскости, перпендикулярной оси этого шнура

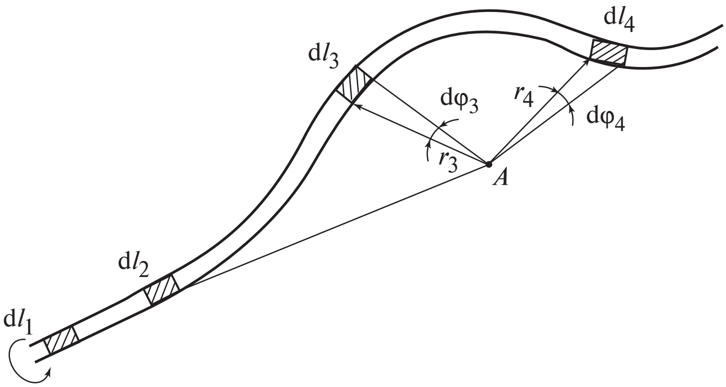


Рис. 7.12. К оценке скорости, индуцированной пространственным криволинейным вихревым шнуром в произвольной точке *A*

Таким образом, элементарная скорость $\mathrm{d}c_\theta$, индуцированная элементом вихря $\mathrm{d}l_i$, должна быть пропорциональна интенсивности вихря, характеризуемой циркуляцией Г, элементарному углу $\mathrm{d}\varphi_i$, под которым участок вихревого шнура $\mathrm{d}l_i$ виден из точки A, и обратно пропорциональна расстоянию r_i до точки A:

$$\mathrm{d}c_\theta = k\,\frac{\Gamma\,\mathrm{d}\varphi_i}{r_i}\,, \tag{7.22}$$

где k — подлежащий определению коэффициент пропорциональности.

Интегрируя (7.22), получаем

$$c_\theta = k \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\Gamma \mathrm{d}\varphi}{r}. \tag{7.23}$$

Для определения коэффициента пропорциональности k применим формулу (7.23) к бесконечному прямолинейному вихревому шнуру (рис. 7.11), для которого угол φ меняется от нуля до π. При этом индуцированная скорость c_θ будет определяться по формуле

$$c_\theta = k \int_0^\pi \frac{\Gamma \mathrm{d}\varphi}{r}.$$

Согласно теореме Гельмгольца о вихрях циркуляция скорости Γ вдоль вихревого шнура не меняется.

Радиус r (рис. 7.11) можно представить в виде

$$r = \frac{r_A}{\sin \varphi}.$$

Тогда

$$c_\theta = \frac{k\Gamma}{r_A} \int_0^\pi \sin \varphi \, \mathrm{d}\varphi = 2k \frac{\Gamma}{r_A}. \tag{7.24}$$

Приравнивая (7.21) и (7.24), получаем

$$2k \frac{\Gamma}{r_A} = \frac{\Gamma}{2\pi r_A}.$$

Отсюда

$$k = \frac{1}{4\pi}.$$

Таким образом, для произвольного вихревого шнура конечной длины скорость жидкости c_θ, индуцированная в фиксированной точке A, будет определяться следующим выражением:

$$c_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{r}.$$

Поскольку

$$r \, \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}l \sin (r \wedge \mathrm{d}l)$$

и

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}l \sin (r \wedge \mathrm{d}l)}{r},$$

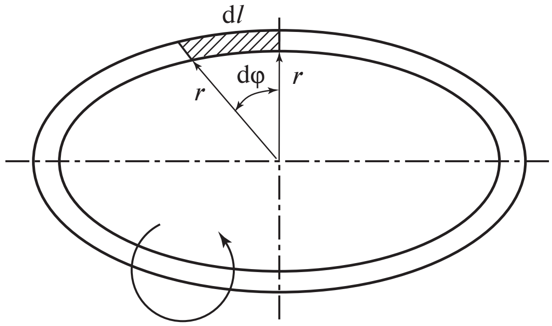


Рис. 7.13. Скорости, индуцированные в центре вихревого кольца

то

$$c_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\sin(\widehat{r\ \mathrm{d}l})\,\mathrm{d}l}{r^2}. \tag{7.25}$$

Полученная формула (7.25) называется **формулой вихревой индукции**. Рассмотрим два примера ее использования, заимствованных из [34].

1. Найдем скорость c_θ в точке A плоскости P (см. рис. 7.11), индуцируемую прямолинейным шнуром, один конец которого опирается на плоскость P, а другой уходит в бесконечность. В данном случае

$$\sin(r\ \mathrm{d}l) = \sin\varphi;$$

$$r = r_A/\sin\varphi;$$

$$\mathrm{d}l = \frac{r\,\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi} = \frac{a\,\mathrm{d}\varphi}{\sin^2\varphi};$$

$$c_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi r_A}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\Gamma}{4\pi r_A}. \tag{7.26}$$

Как и следовало ожидать, скорость, индуцируемая в точке A вихревым полушнуром, в 2 раза меньше скорости, индуцируемой бесконечным (в двух направлениях от плоскости P) вихревым шнуром [см. 7.21)].

2. Найдем скорость, индуцируемую в центре вихревого кольца (рис. 7.13). Здесь

$$\mathrm{d}l = r\,\mathrm{d}\varphi; \quad \sin(\widehat{r\ \mathrm{d}l}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1;$$

$$c_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi r}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{\Gamma}{2r}.$$

7.5. Расчет течения идеальной жидкости в плоском диффузоре при наличии в его проточной части плоского вихря

Рассмотрим течение идеальной жидкости в плоскости комплексного переменного z от источника мощностью Q, помещенного в точку 0, и от вихря интенсивностью Γ, расположенного в точке с координатой $z_в$ (рис. 7.14). Ограничим область течения сектором $B0B_1$ с углом $\alpha = \pi/m$ (m — целое действительное число). Тогда объемный расход жидкости на единицу высоты сектора будет равен $\overline{Q}/(2m)$ ($\overline{Q} = Q/l$, где l — высота сектора). Координата центра вихря $z_в$ в полярных координатах будет определяться по формуле

$$z_в = r_в e^{i\alpha_в}. \tag{7.27}$$

Отобразим рассматриваемую секторную область на бесконечное число полос шириной π. Такое отображение осуществляется с помощью следующей функции:

$$\zeta = m \ln z_в = m(\ln r_в + i\alpha);$$

$$\overline{\zeta} = m(\ln r_в - i\alpha); \tag{7.28}$$

$$\zeta - \overline{\zeta} = \frac{i\alpha m}{2}.$$

Взаимная однозначность этого отображения обеспечивается при условии, что $0 < \arg z < \alpha$.

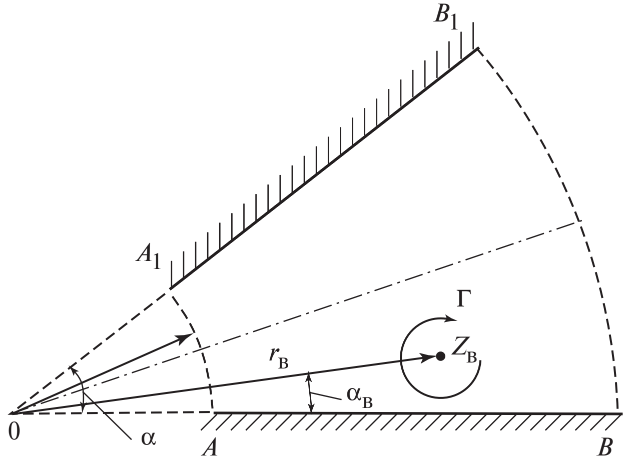


Рис. 7.14. Схема плоского диффузора с вихрем в точке с координатой $z_в$

При указанном отображении точка $z_в$ из плоскости z переходит в точку $\zeta_в$, точка 0 уходит в бесконечность, а мощность источника Q и интенсивность вихря Г при конформных отображениях не меняются. В результате исходная задача переходит в задачу об обтекании вихря интенсивностью Г, находящегося внутри бесконечной полосы шириной π, плоскопараллельным потоком идеальной жидкости со скоростью на бесконечности

$$c_\infty = \frac{Q}{2\pi m}. \tag{7.29}$$

Проведем далее аналитическое продолжение данной области на всю плоскость, отображая ее бесконечно большое число раз относительно каждой из плоскостей a_1b_1 и ab. При таком отображении получим на плоскости двойную вихревую цепочку из равноотстоящих вихрей с противоположными интенсивностями Г и –Г (рис. 7.15).

Обозначим координаты первой системы вихрей через ζ_{k1} и ζ_{-k1}, а второй — через ζ_{k2} и ζ_{-k2}. Эти координаты связаны с координатами вихря в заданной полосе очевидными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{k1} &= \zeta_в + 2\pi k i; \\ \zeta_{-k1} &= \zeta_в - 2\pi k i; \\ \zeta_{k2} &= \zeta_в + 2\pi k i; \\ \zeta_{-k2} &= \zeta_в - 2\pi k i. \end{aligned}\right\} \tag{7.30}$$

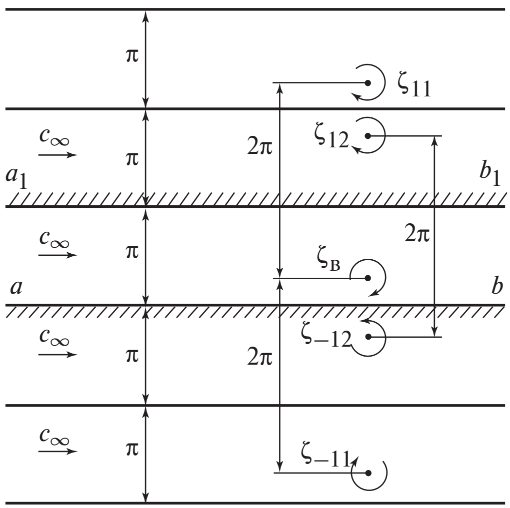


Рис. 7.15. Результат отображения внутреннего сектора диффузора на бесконечное число полос, шириной π

Комплексный потенциал первой системы вихрей будет иметь вид

$$W_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left[\frac{\zeta-\zeta_{\text{в}}}{2i}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{\zeta-\zeta_{\text{в}}}{2\pi i k}\right)^2\right)\right] .$$

Под знаком ln стоит разложение функции sin ($\pi\delta$) в ряд, где

$$\delta = \frac{\zeta-\zeta_{\text{в}}}{2\pi i} .$$

Таким образом,

$$W_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left[\sin\left(\frac{\zeta-\zeta_{\text{в}}}{2i}\right)\right]. \qquad (7.31)$$

Аналогичным образом получим и комплексный потенциал для второй системы вихрей:

$$W_2 = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left[\sin\left(\frac{\zeta-\overline{\zeta}_{\text{в}}}{2i}\right)\right]. \qquad (7.32)$$

Комплексный потенциал для плоскопараллельного течения

$$W_3 = c_\infty\zeta = \frac{Q}{2\pi m}\zeta. \qquad (7.33)$$

В результате сложное течение, вызванное двойной вихревой цепочкой и плоскопараллельным потоком, определяется следующим комплексным потенциалом:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(\frac{\sin\dfrac{\zeta-\overline{\zeta}_{\text{в}}}{2i}}{\sin\dfrac{\zeta-\zeta_{\text{в}}}{2i}}\right) + \frac{Q}{2\pi m}\zeta. \qquad (7.34)$$

Поскольку давления и скорости по обе стороны линий, делящих плоскость на полосы шириной π, одинаковы, то каждую такую линию можно рассматривать в качестве ограничивающей стенки. Следовательно, выражение (7.34) определяет комплексный потенциал для течения в безграничном по длине канале с единичным вихрем, находящимся в точке $\zeta_{\text{в}}$.

Подставим далее в (7.34) формулу для ζ [см. (7.28)]. Тогда

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left[\frac{\sin\left(\dfrac{m}{2i}\ln\dfrac{z}{\overline{z}_{\text{в}}}\right)}{\sin\left(\dfrac{m}{2i}\ln\dfrac{z}{z_{\text{в}}}\right)}\right] + \frac{Q}{2\pi}\ln z\,.$$

Переходя к полярным координатам $(z = z\mathrm{e}^{i\alpha})$ и имея в виду, что

$$\sin\left(\frac{m}{2i}\ln\frac{z}{\overline{z}_{\text{в}}}\right) = -i\,\mathrm{sh}\left(\frac{m}{2}\ln\frac{z}{z_{\text{в}}}\right),$$

получаем

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left[\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{m}{2} \ln \frac{r}{r_{\text{в}}} + i \frac{m}{2} (\alpha + \alpha_{\text{в}}) \right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{m}{2} \ln \frac{r}{r_{\text{в}}} + i \frac{m}{2} (\alpha - \alpha_{\text{в}}) \right)} \right] + \frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\alpha) . \qquad (7.35)$$

Мнимая часть комплексного потенциала (7.35) представляет собой функцию тока ψ, которая определяется по формуле

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left[\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{m}{2} \ln \frac{r}{r_{\text{в}}} + i \frac{m}{2} (\alpha + \alpha_{\text{в}}) \right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{m}{2} \ln \frac{r}{r_{\text{в}}} + i \frac{m}{2} (\alpha - \alpha_{\text{в}}) \right)} \right] + \frac{Q\alpha}{2\pi} .$$

После преобразований будем иметь

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left[\frac{\left(\frac{r}{r_{\text{в}}}\right)^m + \left(\frac{r}{r_{\text{в}}}\right)^{-m} + 4 \sin^2\left(\frac{m}{2} (\alpha + \alpha_{\text{в}}) \right) - 2}{\left(\frac{r}{r_{\text{в}}}\right)^m + \left(\frac{r}{r_{\text{в}}}\right)^{-m} + 4 \sin^2\left(\frac{m}{2} (\alpha - \alpha_{\text{в}}) \right) - 2} \right] + \frac{Q\alpha}{2\pi} . \qquad (7.36)$$

При $\psi = \text{const}$ выражение (7.36) определяет форму конкретной линии тока.

Найдем нулевую линию тока для $\psi_0 = \dfrac{Q\alpha_0}{2\pi}$. После очевидных преобразований получаем

$$\left(\frac{r}{r_{\text{в}}}\right)^m + \left(\frac{r}{r_{\text{в}}}\right)^{-m} =$$

$$= \frac{e^{\frac{Q}{\Gamma(\alpha - \alpha_0)}} \left[4 \sin^2\left(\frac{m}{2} (\alpha + \alpha_{\text{в}}) \right) - 2 \right] - \left[4 \sin^2\left(\frac{m}{2} (\alpha - \alpha_{\text{в}}) \right) - 2 \right]}{1 - e^{\frac{Q}{\Gamma(\alpha - \alpha_0)}}} . \qquad (7.37)$$

Правая часть выражения (7.37) является функцией угла α и трех параметров Q/Γ, α_0 и $\alpha_{\text{в}}$, т.е.

$$\varphi(\alpha) = \frac{e^{\frac{Q}{\Gamma(\alpha - \alpha_0)}} \left[4 \sin^2\left(\frac{m}{2} (\alpha + \alpha_{\text{в}}) \right) - 2 \right] - \left[4 \sin^2\left(\frac{m}{2} (\alpha - \alpha_{\text{в}}) \right) - 2 \right]}{1 - e^{\frac{Q}{\Gamma(\alpha - \alpha_0)}}} .$$

С учетом введенного обозначения уравнение (7.37) примет вид

$$\left(\frac{r}{r_{\text{в}}}\right)^{2m} - \varphi(\alpha) \left(\frac{r}{r_{\text{в}}}\right)^m + 1 = 0 .$$

Отсюда

$$\frac{r}{r_{\text{в}}} = \left(\frac{\varphi}{2} \pm \sqrt{\frac{\varphi^2}{4} - 1}\right)^{1/m}. \qquad (7.38)$$

Уравнение (7.38) определяет нулевую линию тока в плоском диффузоре с дискретным вихревым ядром, расположенным на луче $z = \alpha_{\text{в}}$. Эта линия состоит из отрезка оси x и замкнутой линии тока $BNMB$ (рис. 7.16), ограничивающей на оба смежных вихревых ядра («вихревая атмосфера»).

С небольшими допущениями можно считать, что вся «вихревая атмосфера» расположена в угле, определяемом следующими границами:

$$0 \le \arg z \le 2{,}1\alpha_{\text{в}}.$$

Касательная к контуру «вихревой атмосферы» $0L$ (рис. 7.16) имеет длину порядка $r_{\text{в}}$, т.е. для точки L $r_L/r_{\text{в}} = 1$. Тогда из (7.38) следует, что в этой точке

$$\varphi(\alpha) = 2. \qquad (7.39)$$

Для выполнения этого условия в уравнении (7.37) необходимо принять

$$\alpha_0 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha = 2{,}1\alpha_{\text{в}}.$$

Тогда из условия (7.39) и формулы (7.37) получаем

$$e^{\frac{2{,}1Q}{\Gamma}\alpha_{\text{в}}} = \frac{\sin(1{,}55m\alpha_{\text{в}})}{\sin(0{,}55m\alpha_{\text{в}})}. \qquad (7.40)$$

Уравнение (7.40) при фиксированном отношении Q/Γ дает возможность определить положение луча ($\alpha_{\text{в}} = \text{const}$), вдоль которого происходит перемещение центра вихря.

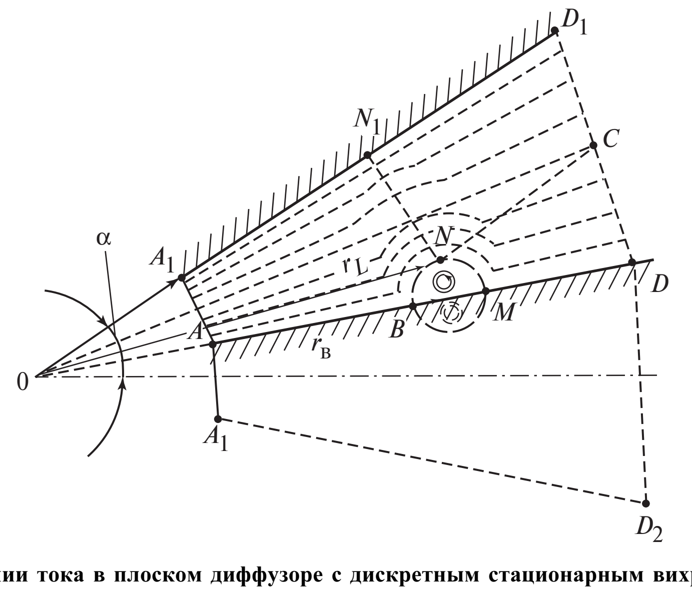


Рис. 7.16. Линии тока в плоском диффузоре с дискретным стационарным вихрем, расположенным у стенки

Как показывает решение рассматриваемого уравнения, с ростом отношения Q/Γ луч $\arg z = \alpha_\text{в}$ приближается к действительной оси x, т.е. происходит резкое снижение поперечных размеров «вихревой атмосферы».

Найдем далее скорость, с которой центр вихря будет сноситься потоком вниз по течению. С этой целью продифференцируем соотношение (7.34) по переменной ζ и положим $\zeta = \zeta_\text{в}$. Тогда

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\zeta} = c_{\text{в}\,r} - \mathrm{i}c_{\text{в}\theta} = \frac{\Gamma}{4\pi}\operatorname{ctg}\left(\frac{\zeta_\text{в} - \bar{\zeta}_\text{в}}{2i}\right) + \frac{\bar{Q}}{2\pi m}. \tag{7.41}$$

Поскольку аргумент $\dfrac{\zeta_\text{в} - \bar{\zeta}_\text{в}}{2i}$ представляет собой действительное число, то

$$c_{\text{в}\,r} = \frac{\bar{Q}}{2\pi m} - \frac{\Gamma}{4\pi}\operatorname{ctg}\left(\frac{\zeta_\text{в} - \bar{\zeta}_\text{в}}{2i}\right), \quad \text{а} \quad c_{\text{в}\theta} = 0. \tag{7.42}$$

В частном случае $\bar{Q} = 0$ решение (7.42) совпадает с решением Г.И. Шабата.

Подставляя в (7.42) соотношение для $\zeta_\text{в}$ [см. (7.28)] с использованием полярных координат, получаем

$$c_{\text{в}\,r} = \frac{\bar{Q}}{2\pi r} - \frac{\Gamma m}{4\pi r}\operatorname{ctg}(m\alpha_\text{в}). \tag{7.43}$$

Как следует из (7.43), скорость движения вихря вдоль луча $c_{\text{в}\,r} = \text{const}$ определяется удельным расходом $\bar{Q} = Q/l$ (l — поперечный размер канала; при плоском течении $l = 1$) и циркуляцией скорости Γ. При некотором соотношении этих величин скорость c_r обращается в нуль. Этот случай соответствует появлению в диффузоре стационарного вихря. Условие его существования согласно (7.43) сводится к следующему:

$$\frac{\bar{Q}}{\Gamma} = \frac{m}{2}\operatorname{ctg}(m\alpha_\text{в}). \tag{7.44}$$

Подставляя (7.44) в (7.40), получаем соотношение, определяющее положение луча, на котором должен располагаться центр стационарного вихря:

$$\mathrm{e}^{\frac{1{,}05 m\alpha_\text{в}}{\operatorname{tg}(m\alpha_\text{в})}} = \frac{\sin(1{,}55 m\alpha_\text{в})}{\sin(0{,}55 m\alpha_\text{в})}. \tag{7.45}$$

Отсюда

$$\alpha_\text{в} = 0{,}475/m. \tag{7.46}$$

Следовательно, для существования в диффузоре стационарного вихря необходимо, чтобы отношение циркуляции скорости в вихре к удельному расходу $\overline{Q}$ было равно

$$\frac{\Gamma}{\overline{Q}} = \frac{1{,}026}{m}. \tag{7.47}$$

Если $\frac{\Gamma}{\overline{Q}} < \frac{1{,}026}{m}$, то дискретный вихрь будет сноситься по потоку со скоростью, определяемой по формуле (7.43). Очевидно, чем меньше интенсивность вихря, тем меньше его скорость будет отличаться от скорости основного потока.

Рассмотренная задача о взаимодействии дискретного вихря интенсивностью Г с плоским потоком идеальной жидкости, характеризуемым удельным объемным расходом $\overline{Q}$, имеет важное практическое значение, так как позволяет дать качественные объяснения развитию нестационарного течения в реальном вязком потоке при возникновении его отрыва от стенок.

Как показывают многочисленные структурные исследования картины течения, за сечением отрыва потока от стенок канала устанавливается нестационарное течение с ярко выраженной вихревой структурой. В этом случае, согласно проведенному выше исследованию, вокруг любого дискретного вихря, находящегося в потоке, в случае плоского течения образуется замкнутая линия тока, отделяющая непотенциальное вихревое течение от основной (несущей) среды. Для несущего потока вихревая область («вихревая атмосфера») является «твердой» инородной средой, которая движется внутри потока со своей скоростью.

Другими словами, при возникновении в потоке дискретных вихревых образований движущуюся среду нельзя считать однородной (однокомпонентной). Наличие рассредоточенных вихрей приводит к необходимости рассматривать течения жидкостей с дискретными вихрями как двухкомпонентные. При этом собственная скорость вихрей согласно формуле (7.43) зависит как от расхода среды $\overline{Q}$, так и от интенсивности вихрей, определяемой циркуляцией скорости Г.

При большой разнице между скоростями основного потока и собственными скоростями вихрей возникают сильные низкочастотные пульсации давления и всех параметров потока. Если указанная разница мала (малая интенсивность вихрей) амплитуда пульсаций давления снижается с одновременным увеличением частоты пульсаций параметров потока.

Из изложенного ясно, что для обеспечения вибрационной надежности тех или иных устройств, где имеет место движение сред с дискретными вихревыми образованиями, необходимо стремиться к разрушению крупных вихревых образований с созданием мелких вихрей, имеющих малую интенсивность. В этом случае скорость вихрей приближается к скорости основного потока и его вновь можно рассматривать как однокомпонентную среду.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем суть теоремы Стокса о вихревом течении?
2. Как выразить вектор угловой скорости через линейные скорости?
3. Сформулируйте теорему Томсона о вихревом течении.
4. В чем суть теорем Гельмгольца о вихревых течениях?
5. Каковы условия существования вихревых трубок?
6. Как пояснить появление циркуляции вокруг крылового профиля в рамках идеальной жидкости?
7. Можно ли пользоваться уравнением Бернулли для расчета давлений в ядре вихревого течения?
8. Как меняется циркуляция скорости в ядре вихревой трубки?
9. Что такое индуцированная скорость?

Глава 8
ПЛОСКИЕ СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

8.1. Особенности сверхзвуковых течений

Сверхзвуковые течения характеризуются рядом особенностей, которые принципиальным образом отличают их от дозвуковых течений. Эти особенности состоят в следующем.

1. Как было показано ранее (см. гл. 5), в сверхзвуковом потоке закон изменения скорости соответствует закону изменения площади, например с увеличением проходной площади канала происходит повышение скорости (в дозвуковом потоке с увеличением площади средняя скорость течения всегда падает).

2. Сверхзвуковые течения сжимаемой жидкости характеризуются очень большой неоднородностью полей плотности, давления и температуры, причем степень этой неоднородности очень быстро растет с увеличением безразмерных скоростей М и λ.

3. При обтекании сверхзвуковым потоком различных твердых тел, как и при движении рабочих сред в каналах со сверхзвуковыми скоростями, в поле течения при определенных условиях возникают особые поверхности, при переходе через которые все параметры потока и скорость терпят конечный разрыв непрерывности на очень малом линейном расстоянии. Эти поверхности называют **скачками уплотнения**, так как при переходе через них происходит резкое увеличение плотности, давления и температуры при одновременном скачкообразном снижении скорости.

4. Наряду со скачками уплотнения в сверхзвуковом потоке возникают **волны разрежения** и **волны сжатия**, не имеющие места в дозвуковых течениях, т.е. поле течения сверхзвуковых потоков имеет ярко выраженную волновую структуру.

5. Возмущения, вносимые в сверхзвуковой поток, по сравнению с таковыми в потоках несжимаемой жидкости затухают при удалении от источника возмущения существенно медленнее.

В математическом плане многие из отмеченных особенностей являются следствием того, что при переходе от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям меняется тип дифференциального уравнения для потенциала скорости. Наиболее отчетливо это видно из линеаризованного уравнения (6.54). Действительно, если в дозвуковой области это уравнение является эллиптическим:

$$(1 - \mathrm{M}_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0,$$

то в сверхзвуковой области ($M_\infty > 1$) оно становится гиперболическим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - (M_\infty^2 - 1)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0.$$

Соответственно принципиальным образом меняется и решение этих уравнений.

8.2. Линии возмущения и характеристики в сверхзвуковом потоке

Рассмотрим каким образом распространяются звуковые волны в неподвижном, в дозвуковом, звуковом и сверхзвуковом потоках.

Если источник звуковых волн, находящийся в точке A (рис. 8.1, *а*), неподвижен, то картина распространения сферических волн будет симметричной относительно точки A и через время t зона возмущения будет находиться внутри сферы, очерченной радиусом, равным at (a — скорость распространения звука).

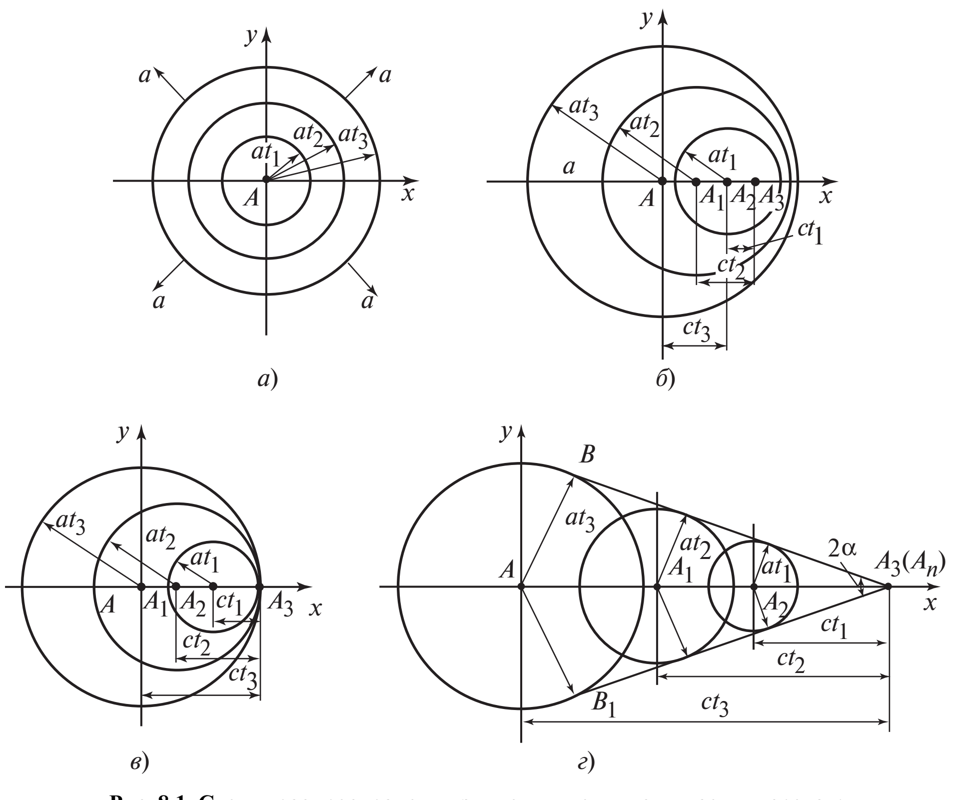


Рис. 8.1. Схемы распространения звуковых волн в сжимаемых средах:
$t_3 > t_2 > t_1$; *а* — $c_A = 0$; *б* — $c_A < a$; *в* — $c_A = a$; *г* — $c_A > a$

При движении точки A с дозвуковой скоростью ($c_A < a$) картина существенно меняется (рис. 8.1, *б*). Возмущенная звуковыми волнами область по-прежнему будет находиться внутри сферы радиусом at, но в связи с движением источника звуковых волн (точка A) со скоростью c_A, центры каждой индивидуальной сферической волны сдвигаются в направлении движения источника возмущения, и в этом направлении имеет место сгущение волн, а в кормовой области по сравнению с неподвижным источником возмущения создается разрежение волн.

В результате для неподвижного наблюдателя, находящегося в точке B, время, прошедшее от восприятия звуковой волны до соприкосновения с движущимся источником возмущения, с ростом скорости c будет непрерывно уменьшаться, и при $c = a$ такое условное соприкосновение наступит одновременно с восприятием звуковой волны. Волновая картина для этого случая изображена на рис. 8.1, *в*.

С переходом к сверхзвуковой скорости источника возмущений происходит принципиальное изменение волновой картины, так как область возмущения выходит за пределы начальной сферической звуковой волны. Источник возмущений, последовательно проходя точки A_1, A_2, A_3, …, A_n, оставляет волны позади себя, не сообщая вперед никакой информации. Происходит своего рода «слепое» движение, и вся волновая структура теперь концентрируется не внутри сферы, а внутри конуса, образованного огибающими сферических волн A_nB и A_nB_1 (рис. 8.1, *г*). Эти линии, отделяющие возмущенную область от невозмущенной, называются **линиями возмущения**, а угол полураствора конуса возмущения является **углом возмущения** α, причем через каждую точку в сверхзвуковом потоке можно провести две линии возмущения.

Легко показать, что этот угол полностью определяется скоростью движения тела или, что одно и то же, скоростью M натекания потока на источник возмущения. Действительно,

$$\sin\alpha = \frac{AB}{AA_n} = \frac{at}{ct} = \frac{1}{\mathrm{M}}. \tag{8.1}$$

Отсюда следует, что для равномерного потока (M = const) все линии возмущения идут под одним и тем же углом α, образуя равномерную сетку, изображенную на рис. 8.2.

Если скорость потока меняется от точки к точке, система линий возмущения в сверхзвуковом потоке образует значительно более сложную картину, которая определяется особыми линиями, получившими название характеристик сверхзвукового потока.

Характеристика — это линия, касательная к которой в каждой точке дает направление линии возмущения в рассматриваемой точке (рис. 8.3).

Поскольку линия возмущения отделяет область малых возмущений от невозмущенного течения, переход через нее сопровождается бесконечно

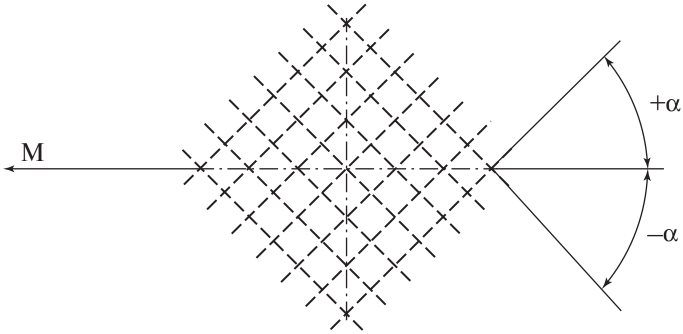


Рис. 8.2. Линии возмущения в равномерном сверхзвуковом потоке

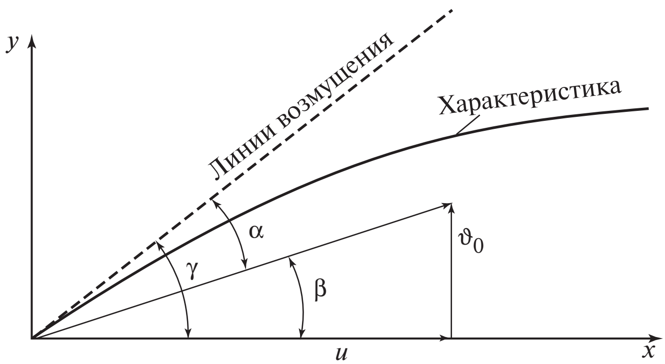


Рис. 8.3. Характеристики в сверхзвуковом потоке

малым изменением скорости. Тогда математически характеристики можно определять как систему особых линий в сверхзвуковом потоке, на которых терпят конечный разрыв непрерывности производные от скорости.

При равномерном поле скоростей характеристиками являются прямые линии, совпадающие с линиями возмущения (рис. 8.2). На этом основании иногда характеристики отождествляют с линиями возмущения, хотя в неравномерном поле характеристики только дают возможность определить положение линий возмущения.

Основываясь на приведенном определении характеристики и используя обозначения, данные на рис. 8.3, найдем ее уравнение. Для этого запишем очевидное равенство

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\gamma - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\gamma\ \operatorname{tg}\beta}. \tag{8.2}$$

Поскольку α — угол возмущения, β — угол между направлением вектора скорости и осью x, а γ определяет наклон характеристики по отношению к координатным осям, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{c^2/a^2 - 1}}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{v}{u}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

и равенство (8.2) можно представить в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{c^2/a^2-1}}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{v}{u}}{1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\dfrac{v}{u}}.$$

Проведем следующие преобразования:

$$1+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)\left[\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}\right]=$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\left(\frac{v^2}{u^2}+1+\frac{c^2}{a^2}\right)+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{u}\right)\frac{c^2}{a^2}+1+\frac{v^2}{u^2}-\frac{c^2}{a^2}\frac{v^2}{u^2}=0;$$

$$(a^2-u^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2uv\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(a^2-v^2)=0. \tag{8.3}$$

Отсюда

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{uv\pm a\sqrt{c^2-a^2}}{u^2-a^2}. \tag{8.4}$$

Сравнивая уравнение (8.3) с уравнением для потенциала скорости в сжимаемом потоке

$$(a^2-u^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2uv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+(a^2-v^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0, \tag{8.5}$$

легко видеть, что (8.3) служит характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (8.5) второго порядка в частных производных и определяет на плоскости совокупность некоторых кривых, являющихся решением характеристического уравнения (8.3) (отсюда и вытекает название этих линий — характеристики).

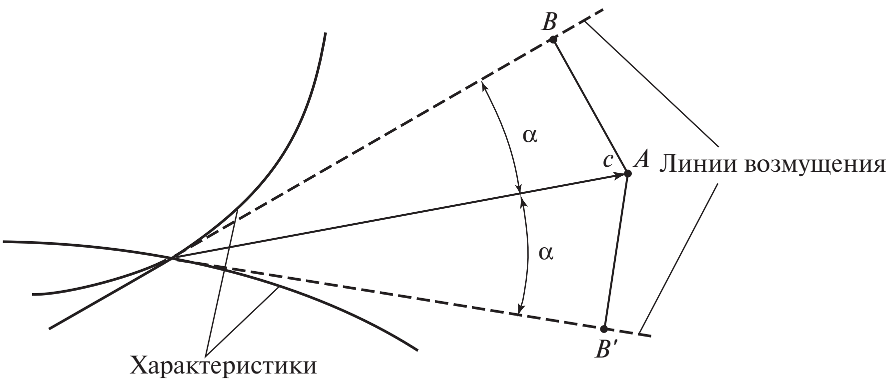


Рис. 8.4. Характеристики в фиксированной точке сверхзвукового потока

Из (8.4) следует, что характеристики существуют только в сверхзвуковой области течения ($c > a$), и через каждую точку плоскости течения проходят две характеристики, как это показано на рис. 8.4.

Кроме того, как видно из рис. 8.4, проекция скорости на нормаль к линии возмущения всегда равняется скорости звука. Действительно,

$$AB = AB' = c \sin \alpha = c \, \frac{a}{c} = a.$$

Вышеизложенным и ограничивается вся информация о характеристиках, вытекающая из дифференциального уравнения (8.4), так как в плоскости течения его проинтегрировать нельзя.

8.3. Уравнение характеристик в плоскости годографа скорости

Плоскость, где любой вектор, проведенный из начала координат в фиксированную точку a_i, определяет значение и направление скорости в этой точке, называется **плоскостью годографа скорости** (рис. 8.5). Ясно, что при таком определении координатными осями плоскости годографа являются составляющие скорости u (ось абсцисс) и v (ось ординат).

Если плоскость течения (xy) неограниченна, то плоскость годографа скорости конечна и ограничена окружностью, радиус которой равен максимальной скорости $c_{\max}$.

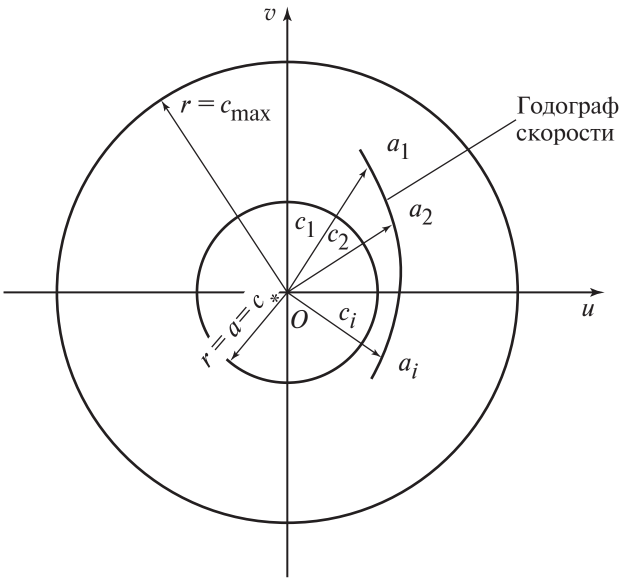


Рис. 8.5. Плоскость годографа скорости и годограф скорости

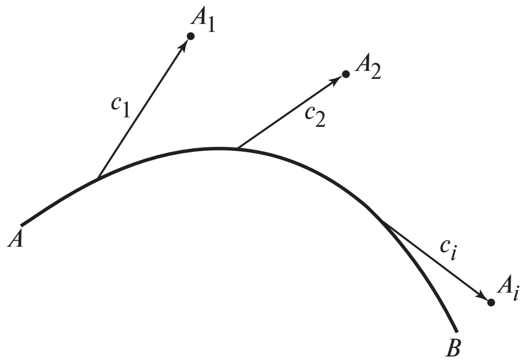


Рис. 8.6. Изменение векторов скорости вдоль произвольной кривой *AB*

На рассматриваемой плоскости окружность, очерченная радиусом, равным скорости звука a, будет отделять круговую (внутреннюю) область дозвуковых скоростей от кольцевой (внешней) области сверхзвуковых скоростей.

Пусть в плоскости течения (xy) вдоль некоторой кривой AB векторы скорости меняются так, как это показано на рис. 8.6. Перенесем эти векторы в плоскость годографа uv, откладывая их от общего центра (точка O на рис. 8.5). Тогда концы векторов скорости опишут некоторую кривую $a_1 a_i$, которая называется **годографом скорости**.

Получим теперь дифференциальное уравнение характеристик в плоскости годографа скорости. С этой целью воспользуемся формальным определением характеристики как особой линии, при переходе через которую первые производные от составляющих скорости u и v по координатным осям терпят конечный разрыв непрерывности.

Для нахождения уравнений таких линий будем считать, что дифференциальное уравнение для потенциала скорости в сжимаемом потоке (8.5) связывает между собой следующие три неизвестные величины:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \varphi_{xx}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = \varphi_{xy}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \varphi_{yy}.$$

Коэффициенты, которые стоят перед неизвестными величинами φ_{xx}, φ_{xy} и φ_{yy} в уравнении (8.5), обозначим следующим образом:

$$A = a^2 - u^2; \quad B = -uv; \quad C = a^2 - v^2.$$

С учетом введенных обозначений, дифференциальное уравнение (8.5) формально можно рассматривать как обычное алгебраическое уравнение с тремя неизвестными:

$$A\varphi_{xx} + 2B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} = 0. \qquad (8.6)$$

Если предположить, что коэффициенты A, B, C, являющиеся функциями координат и скорости, известны, то для решения уравнения (8.6) необходимо еще два алгебраических уравнения, связывающие между собой неизвестные величины φ_{xx}, φ_{xy} и φ_{yy}. Формально такие уравнения легко получить, записав полные дифференциалы от составляющих скорости u, v, т.е.

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \varphi_{xx}\,\mathrm{d}x + \varphi_{xy}\,\mathrm{d}y; \tag{8.7}$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \varphi_{yx}\,\mathrm{d}x + \varphi_{yy}\,\mathrm{d}y. \tag{8.8}$$

Три алгебраических уравнения (8.6), (8.7) и (8.8) позволяют найти три указанные выше неизвестные φ_{xx}, φ_{xy} и φ_{yy}. Запишем систему этих уравнений в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &A\varphi_{xx} + 2B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} = 0;\\ &\mathrm{d}x\,\varphi_{xx} + \mathrm{d}y\,\varphi_{xy} + 0\varphi_{yy} = \mathrm{d}u;\\ &0\varphi_{xx} + \mathrm{d}x\varphi_{xy} + \mathrm{d}y\varphi_{yy} = \mathrm{d}v. \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

Отсюда

$$\varphi_{xx} = \frac{\Delta_{xx}}{\Delta};\quad \varphi_{xy} = \frac{\Delta_{xy}}{\Delta};\quad \varphi_{yy} = \frac{\Delta_{yy}}{\Delta}, \tag{8.10}$$

где определитель системы Δ и определители неизвестных имеют вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & 2B & C\\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & 0\\ 0 & \mathrm{d}x & \mathrm{d}y \end{vmatrix} = A(\mathrm{d}y)^2 - 2B\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + C(\mathrm{d}x)^2; \tag{8.11}$$

$$\Delta_{xx} = \begin{vmatrix} 0 & 2B & C\\ \mathrm{d}u & \mathrm{d}y & 0\\ \mathrm{d}v & \mathrm{d}x & \mathrm{d}y \end{vmatrix} = -\,2\mathrm{B}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u + C(\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}v\,\mathrm{d}y); \tag{8.12}$$

$$\Delta_{xy} = \begin{vmatrix} A & 0 & C\\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}u & 0\\ 0 & \mathrm{d}v & \mathrm{d}y \end{vmatrix} = A\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y + C\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x; \tag{8.13}$$

$$\Delta_{yy} = \begin{vmatrix} A & 2B & C\\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}u\\ 0 & \mathrm{d}x & \mathrm{d}v \end{vmatrix} = A(\mathrm{d}v\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x) - 2\mathrm{B}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v. \tag{8.14}$$

Необходимое условие существования в потоке разрыва производных скорости $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} = \varphi_{xx};\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \varphi_{xy};\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \varphi_{yy}\right)$ сводится к равенству нулю определителя системы (8.9): $\Delta = 0$.

Приравнивая (8.11) к нулю, получаем

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

или после подстановки значений коэффициентов A, B и C будем иметь

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{uv \pm a\sqrt{c^2 - a^2}}{u^2 - a^2}. \tag{8.15}$$

Сравнивая (8.15) с уравнением (8.4), видна их тождественность.

Следовательно, из необходимого условия существования в сверхзвуковом потоке особых линий вытекает дифференциальное уравнение характеристик в плоскости течения.

Достаточным условием существования конечного разрыва производных является обращение в нуль любого из приведенных выше определителей Δ_{xx}, Δ_{xy}, Δ_{yy}. Простейшим из них является определитель Δ_{xy}. Тогда, приравнивая его к нулю:

$$\Delta_{xy} = A\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}y + C\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}x = 0,$$

получаем

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = -\frac{A}{C}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

С учетом (8.15) и обозначений коэффициентов A и C будем иметь

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{uv \pm a\sqrt{c^2 - a^2}}{a^2 - v^2}. \tag{8.16}$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (8.16) в плоскости переменных uv (плоскости годографа скорости) допускает интегрирование в квадратурах и показывает, что в плоскости годографа скорости вид всех характеристик одинаков.

Характеристики в плоскости течения xy и в плоскости годографа скорости uv находятся между собой в достаточно простой связи. Для ее установления перемножим между собой левые и правые части уравнений (8.4) и (8.16), использовав разноименные знаки в правых частях перемножаемых уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{uv \pm a\sqrt{c^2 - a^2}}{u^2 - a^2}\ \frac{uv \mp a\sqrt{c^2 - a^2}}{a^2 - v^2} = -1. \tag{8.17}$$

Поскольку производные $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ и $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$ определяют тангенсы угла наклона характеристик к оси абсцисс, то из полученного соотношения (8.17) следует, что характеристики первого семейства в плоскости течения [знак «плюс» в уравнении (8.4)] ортогональны к характеристикам второго семейства [знак «минус» в уравнении (8.16)] в плоскости годографа скорости и наоборот.

8.4. Диаграмма характеристик

Как уже отмечалось, уравнение (8.16), определяющее семейство характеристик в плоскости годографа скорости, является обыкновенным дифференциальным уравнением, допускающим интегрирование в квадратурах. После перехода от размерных к безразмерным скоростям с использованием очевидных соотношений $\lambda_u = \lambda \cos \theta$, $\lambda_v = \lambda \sin \theta$ ($\lambda_u = u/c_*$; $\lambda_v = v/c_*$; $\lambda = c/c_*$; θ — полярный угол) в результате интегрирования получаем

$$\theta = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\frac{k+1}{k-1}(\lambda^2 - 1)}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}} \pm \text{const}. \quad (8.18)$$

Уравнение (8.18) в координатах λ, θ (плоскость годографа скорости) является уравнением семейства эпициклоид, т.е. все характеристики в плоскости uv представляют собой **эпициклоиды**, определяющие геометрическое положение точек окружности, которая катится без скольжения по другой окружности.

Так как характеристики существуют только в сверхзвуковой области, то в плоскости годографа скорости ($\lambda_u \lambda_v$) окружность диаметром $D_1 = \lambda_{max} - 1$ должна катиться без скольжения по окружности, отделяющей дозвуковую область течения от сверхзвуковой и имеющей диаметр $D_2 = \lambda = 1$. Меняя начальное положение обкатываемой окружности и направление ее движения (по часовой стрелке или против нее), получаем оба семейства характеристик в плоскости годографа скорости (см. рис. П.1).

Каждый вектор, проведенный из начала координат в любую точку диаграммы характеристик, определяет значение и направление скорости, а нормали к характеристикам в конечной точке этого вектора дают направления линий возмущения в плоскости течения (рис. 8.7).

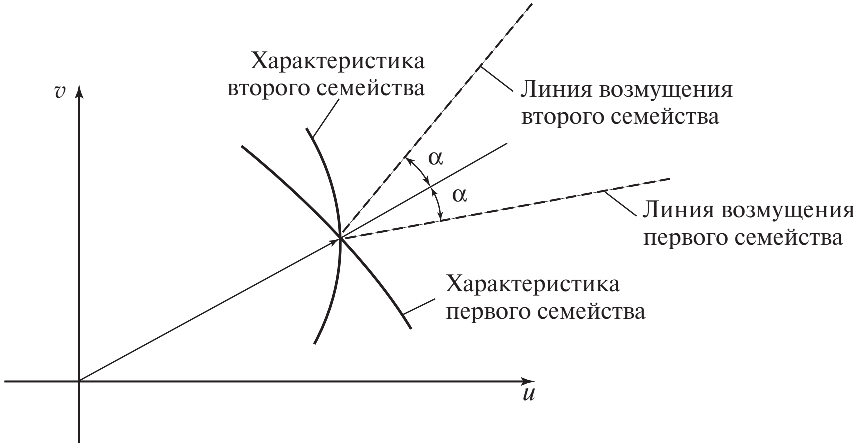
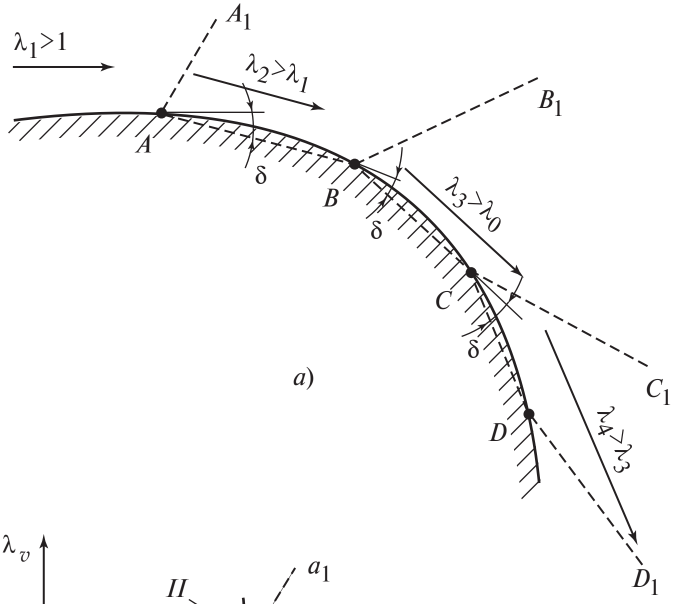


Рис. 8.7. Элемент диаграммы характеристик

В качестве примера использования диаграммы характеристик рассмотрим расчет течения вдоль выпуклой поверхности, показанной на рис. 8.8, *а*, при известной безразмерной скорости λ_1.

Исходную криволинейную поверхность *AD* заменим поверхностью, состоящей из отрезков прямых линий *AB*, *BC*, *CD*, расположенных относительно друг друга под малым углом δ.



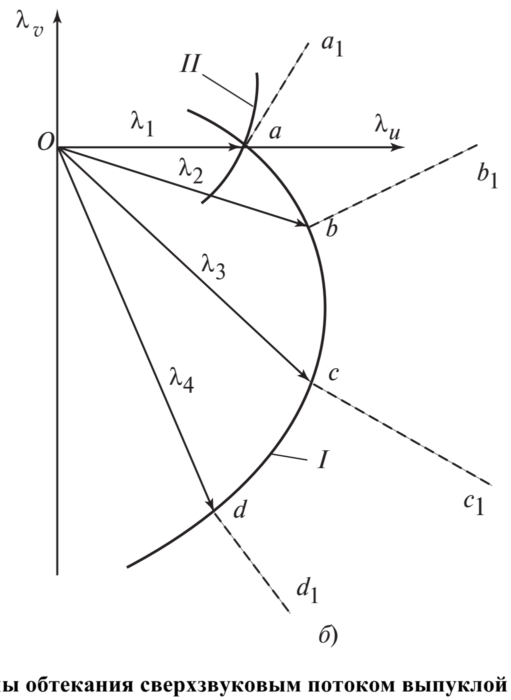


Рис. 8.8. Схемы обтекания сверхзвуковым потоком выпуклой стенки в плоскости течения (*а*) и в плоскости годографа скорости (в диаграмме характеристик) (*б*)

На диаграмме характеристик (рис. 8.8, *б*) откладываем известный вектор λ_1, через конец которого проходят две характеристики — *I* и *II*.

Нормаль aa_1 к характеристике *II* в точке *a* определяет линию возмущения AA_1 в плоскости течения (рис. 8.8, *а*). В точке *A* происходит поворот потока на угол δ и на участке *AB* известно направление скорости λ_2.

Для определения ее значения на диаграмме рис. 8.8, *б* из центра *O* проводим прямую, параллельную вектору λ_2, до пересечения с характеристикой второго семейства *II*. Полученный отрезок *Ob* определяет значение скорости λ_2 на участке *AB*, а нормаль к эпициклоиде *II* в точке *b* дает направление линии возмущения в точке *B* на плоскости течения ($bb_1 \| BB_1$). Аналогичным образом проводится расчет скоростей на участках *BC* (λ_3) и *CD* (λ_4).

Точность рассматриваемого графоаналитического расчета скоростей на выпуклой криволинейной поверхности зависит, очевидно, от того, насколько близко вписанный в эту поверхность многоугольник отражает ее геометрические характеристики.

Если радиус приведенной на рис. 8.8, *а* криволинейной поверхности уменьшится до нуля, то все волны, изображенные на этом рисунке, будут исходить из одной точки, и полученная волновая картина будет соответствовать обтеканию конечного выпуклого угла *ABD* сверхзвуковым потоком (рис. 8.9).

На рис. 8.9 все ускорение потока осуществляется в центрированном пучке волн разрежения. Первичная волна разрежения BK_1 направлена под углом $\alpha_1 = \arcsin \dfrac{1}{M_1}$ к скорости $\lambda_1(M_1)$. Соответственно конечный угол α_2 определяется безразмерной скоростью $M_2(\lambda_2)$: $\alpha_2 = \arcsin \dfrac{1}{M_2}$. Поскольку $M_2 > M_1$, то $\alpha_1 > \alpha_2$.

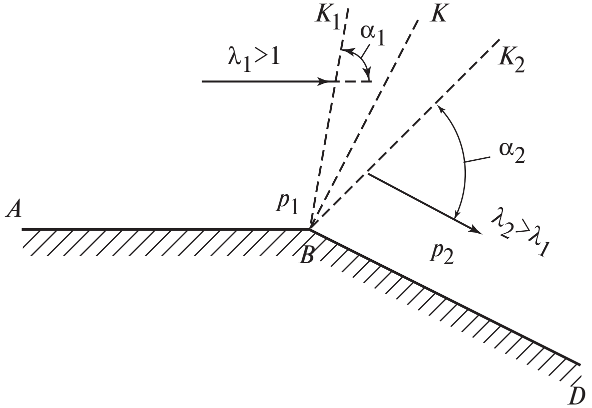


Рис. 8.9. Схема обтекания сверхзвуковым потоком выпуклого угла

Таким образом, при обтекании выпуклого угла ABD сверхзвуковым потоком все изменения параметров потока происходят внутри центрированных волн разрежения, ограниченных линиями возмущения BK_1 и BK_2.

8.5. Расчет центрированных волн разрежения

Центрированные волны разрежения возникают при сосредоточенном очаге возмущения. Таким очагом является любая точка в сверхзвуковом потоке, где происходит конечное изменение параметров потока. В частности, при обтекании выпуклого угла ABD (см. рис. 8.9) в его вершине B давления слева p_1 и справа p_2 отличаются на конечное значение, что и порождает систему центрированных волн разрежения, размеры пучка которых (угол K_1BK_2 на рис. 8.9) зависят от разности давлений $\Delta p = p_1 - p_2$. Чем больше значение Δp, тем шире угол раствора K_1BK_2.

Для расчета параметров потока в центрированном пучке волн разрежения рассмотрим промежуточную волну BK и в произвольной точке m разложим скорость потока c на две составляющие, направив их вдоль волны (скорость c_r) и по нормали к ней (скорость c_θ) (рис. 8.10).

Если φ — потенциал скорости, то согласно его основному свойству

$$c_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \tag{8.19}$$

$$c_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \tag{8.20}$$

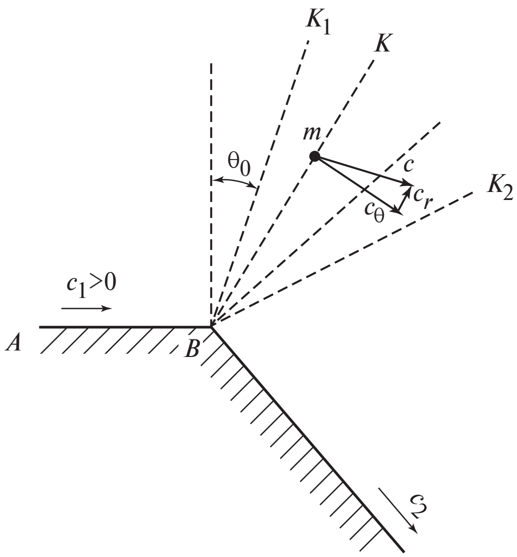


Рис. 8.10. К расчету центрированного пучка волн разрежения

Покажем, что эти составляющие скорости связаны между собой.

Для этого запишем (8.20) в виде $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = c_\theta r$ и возьмем частную производную по r:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial r}(c_\theta r) = c_\theta + r\,\frac{\partial c_\theta}{\partial r}\ .$$

Поскольку скорость c не меняется вдоль волны разрежения, то $\frac{\partial c_\theta}{\partial r} = 0$ и $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = c_\theta$.

Меняя порядок дифференцирования и учитывая соотношение (8.19), получаем

$$\frac{\mathrm{d}c_r}{\mathrm{d}\theta} = c_\theta. \tag{8.21}$$

(Частные производные здесь заменены на полные, так как скорости в центрированных волнах меняются только в зависимости от угла θ.) Кроме того, следует учесть, что составляющая скорости c_θ является проекцией скорости c на нормаль к линии возмущения и согласно сформулированному ранее свойству характеристик равна скорости звука:

$$c_\theta = a. \tag{8.22}$$

Используя полученные соотношения (8.21) и (8.22), проводим следующие преобразования уравнения энергии, записанного в виде

$$\frac{c^2}{2} + \frac{a}{k-1} = \frac{c_{\max}^2}{2}\,.$$

Поскольку $c^2 = c_r^2 + c_\theta^2$ и $a = c_\theta$, то $\frac{c_r^2}{2} + \frac{c_\theta^2}{2} + \frac{c_\theta^2}{k-1} = \frac{c_{\max}^2}{2}$. Отсюда $\frac{k+1}{k-1}\,c_\theta^2 = c_{\max}^2 - c_r^2$. Заменяя c_θ с учетом (8.21), получаем

$$\frac{k+1}{k-1}\left(\frac{\mathrm{d}c_r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = c_{\max}^2 - c_r^2\,.$$

Отсюда

$$\frac{\mathrm{d}c_r}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}\,(c_{\max}^2 - c_r^2)}$$

и

$$\frac{\mathrm{d}c_r}{\sqrt{c_{\max}^2 - c_r^2}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{8.23}$$

Интегрируя (8.23), находим зависимость, определяющую скорость c_r:

$$\arcsin\frac{c_r}{c_{\max}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,(\theta + \theta_0)$$

или

$$c_r = c_{\max}\sin\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,(\theta + \theta_0)\,.$$

Постоянная интегрирования θ_0 в случае, когда скорость потока на первой линии возмущения BK_1 (см. рис. 8.9) равна критической, обращается в нуль. Таким образом,

$$c_r = c_{\max}\sin\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,c_{\max}\,. \tag{8.24}$$

Используя соотношение (8.21), находим и составляющую скорости c_θ:

$$c_\theta = \frac{\mathrm{d}c_r}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,c_{\max}\cos\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\theta\,. \tag{8.25}$$

Максимальная ширина пучка волн разрежения достигается при расширении потока в абсолютный вакуум ($p = 0$, $T = 0$). В этом случае $c_\theta = a = 0$ и из соотношения (8.25) следует, что

$$\theta_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\frac{\pi}{2}\,. \tag{8.26}$$

Абсолютная скорость в любой точке центрированных волн разрежения определяется по соотношению

$$c^2 = c_r^2 + c_\theta^2 = c_{\max}^2\left(\sin^2\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\theta + \frac{k-1}{k+1}\cos^2\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\theta\right) =$$

$$= c_{\max}^2\left[\sin^2\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\theta\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\right) + \frac{k-1}{k+1}\right] =$$

$$= c_{\max}^2\left(1 + \frac{2}{k-1}\sin^2\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\theta\right).$$

Разделив левую и правую части последнего соотношения на критическую скорость в квадрате, получаем

$$\lambda^2 = 1 + \frac{2}{k-1}\sin^2\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\theta\,. \tag{8.27}$$

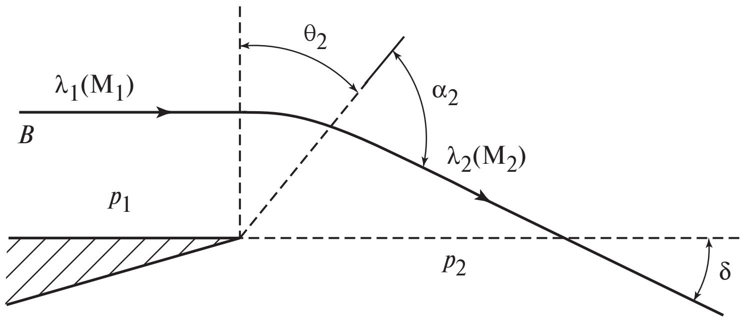


Рис. 8.11. Схема отклонения потока в центрированном пучке волн разрежения

Характер изменения давления в рассматриваемом случае находится из соотношения

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} - \frac{2}{k+1}\sin^2\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\theta\right)^{\frac{k}{k-1}} =$$

$$= \left(\frac{2}{k+1}\cos^2\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\theta\right)^{\frac{k}{k-1}}. \qquad (8.28)$$

Наконец, угол отклонения потока δ после прохождения последним центрированных волн разрежения с учетом обозначений, приведенных на рис. 8.11, будет определяться по формуле

$$\delta = \theta^2 + \alpha^2 - \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arcsin\sqrt{(\lambda_2^2 - 1)\frac{k-1}{2}} + \arcsin\frac{1}{M_2} - \frac{\pi}{2}.$$

Приведенный расчет является одним из немногих примеров точного аналитического расчета сверхзвукового потока.

8.6. Отражение, пересечение и гашение волн разрежения

С вопросами отражения волн от твердых границ, от свободных границ струй и взаимодействия волн между собой приходится сталкиваться практически во всех случаях, когда рассматриваются сверхзвуковые течения.

Остановимся на этих вопросах подробнее.

Отражение волны разрежения от твердой границы. Одна из возможных схем отражения волны разрежения от твердой границы показана на рис. 8.12.

Вершина выпуклого угла B является для скорости M_1 очагом возмущения, и соответственно из точки B выходит центрированный пучок волн разрежения, который встречает на своем пути твердую стенку и каким-то образом должен от нее отразиться. Характер этого отражения определяется следующим.

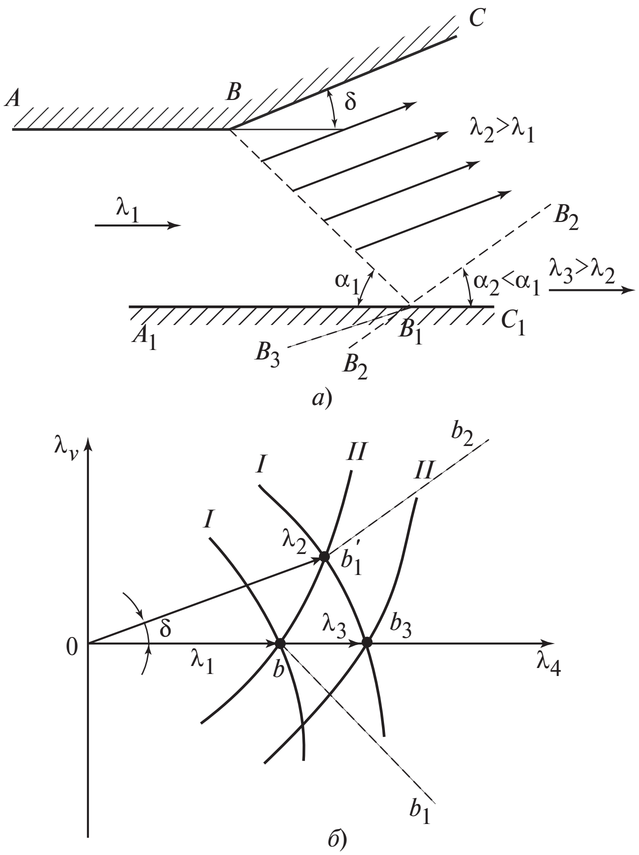


Рис. 8.12. Схема отражения волны разрежения от твердой границы в плоскости течения (*а*) и в плоскости годографа скорости (*б*)

При прохождении первичных волн сверхзвуковой поток ускоряется и одновременно отклоняется на угол δ. Соответственно по отношению к стенке B_1C_1 он движется под углом δ (на рис. 8.12, *а* это направление условно показано штриховой линией B_3B_1). Таким образом, для скорости $\lambda_2(\mathrm{M}_2)$ точка падения волны B_1 является также вершиной выпуклого угла $B_3B_1C_1$, и, следовательно, падающая волна отражается также волной, причем угол отражения α_2 всегда меньше угла падения α_1. Действительно, поскольку

$$\alpha_1 = \arcsin\frac{1}{\mathrm{M}_1},$$

$$\alpha_2 = \arcsin\frac{1}{\mathrm{M}_2},$$

а $\mathrm{M}_2(\lambda_2) > \mathrm{M}_1$, то и $\alpha_2 < \alpha_1$.

Рассматриваемая задача легко решается с помощью диаграммы характеристик. Схема ее решения показана на рис. 8.12, *б* и сводится к следующему.

На диаграмме характеристик откладываем вектор скорости λ_1. Через конец этого вектора (точку b) проходят две характеристики I и II первого и второго семейств. Поскольку при прохождении первичной волны поток отклоняется на угол δ, то, проводя из точки O луч под углом δ к вектору скорости λ_1, в точке пересечения его с характеристикой II получаем скорость $\lambda_2 = Ob_1'$. При прохождении через отраженный пучок волн поток принимает исходное направление (поворачивается вновь на угол δ, но по часовой стрелке). Тогда, смещаясь по характеристике I в точку b_3 получаем вектор Ob_3, равный скорости λ_3. Штриховыми линиями на рис. 8.12, *б* показаны начальные и конечные волны разрежения $(BB_1 \| bb_1;\ B_1B_2 \| b_1' b_2)$.

Пересечение волн разрежения и их отражение от свободной границы. Подобная задача возникает, в частности, при рассмотрении истечения сверхзвукового потока из сопл и отверстий. Для ее решения рассмотрим схему, изображенную на рис. 8.13, где показан волновой спектр на выходе из расширяющегося сопла в режиме, когда давление на его срезе p_1 больше давления окружающей среды p_a.

В этом случае в точках B возникает пучок центрированных волн, ширина которого определяется разностью давлений $\Delta p = p_1 - p_2$.

При прохождении этих волн давление за ними p_2 становится равным давлению p_a ($p_2 = p_a$). Возникающие волны пересекаются на оси сопла OO_1 в точках B_1 и B_2. В симметричных каналах линия OO_1 является линией тока. Так как согласно изложенному ранее любую линию тока можно принять за твердую границу, то рассматривая отдельно верхнюю и нижнюю части канала и считая линию OO_1 твердой границей, получим, что для каждого

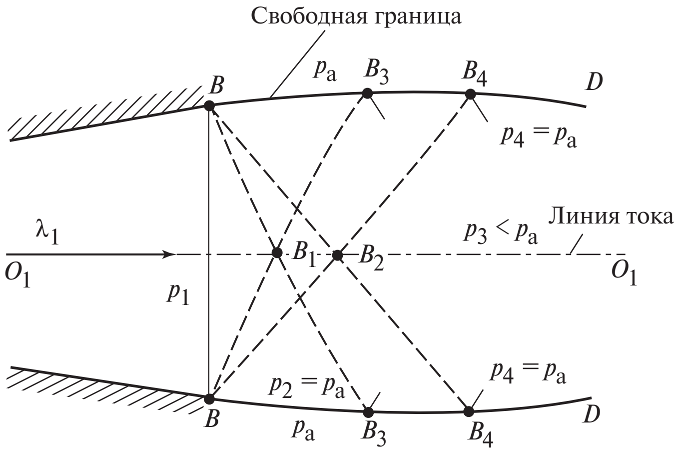


Рис. 8.13. Схема пересечения волн разрежения и отражения их от свободной границы

полуканала в точках B_1 и B_2 происходит указанное выше отражение волн от границы OO_1.

«Сращивая» затем эти частные решения, получаем картину пересечения волн разрежения, показанную на рис. 8.13. Отсюда следует, что после пересечения волны продолжаются в виде расходящегося пучка волн разрежения. Эти волны в точках B_3 и B_4 выходят на свободную границу струи BD. Рассмотрим, каково же дальнейшее распространение волновой структуры.

В данном случае после прохождения волн B_1B_3, B_2B_4 давление за ними p_3 оказывается ниже давления окружающей среды p_a ($p_3 < p_\text{a}$) и, таким образом, граничные точки B_3 и B_4 являются источниками возмущения, так как со стороны потока и со стороны окружающей среды давления в этих точках оказываются разными. В связи с тем, что на границе струи давление должно равняться давлению окружающей среды, волна разрежения, попадающая на эту границу, должна отразиться волной сжатия, после чего давление p_4 становится равным давлению p_a.

Гашение волн разрежения. Во многих задачах, связанных с проектированием сверхзвуковых каналов, приходится сталкиваться с проблемой гашения волн разрежения, попадающих на твердую стенку.

Рассмотрим для ясности одиночную волну, выходящую из вершины выпуклого угла (рис. 8.14) и попадающую на стенку в точке B_1.

Как уже отмечалось выше, для скорости λ_2 точка B_1 является вершиной выпуклого угла $A_2B_1D_2$, и в этом случае в точке B_1 возникает отражение волны разрежения. Если, однако, изменить граничные условия в точке B_1, отклонив стенку по направлению вектора скорости λ_2 (продолжив вообра-

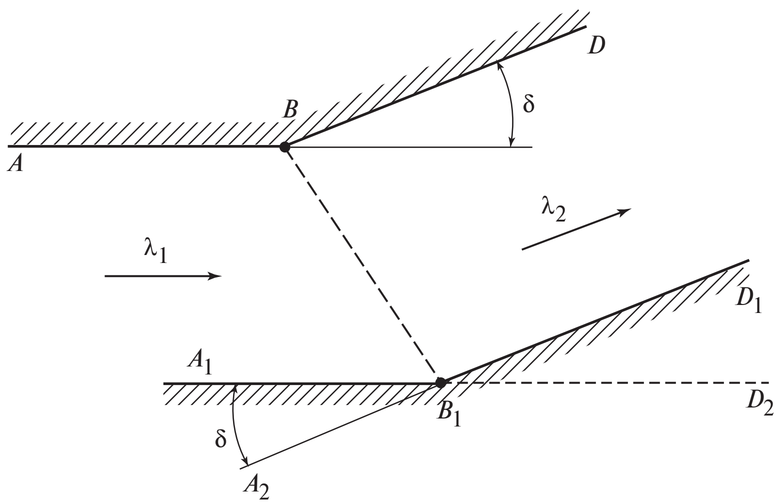


Рис. 8.14. Схема гашения волн разрежения

жаемую линию A_2B_1), то для скорости λ_2 рассматриваемая точка перестает быть особой и устраняется причина отражения падающей волны. Следовательно, для гашения волны разрежения необходимо стенку в месте падения этой волны развернуть по направлению вектора скорости λ_2 за первичной волной.

8.7. Профилированное сопло Лаваля

Сложная волновая структура в сверхзвуковых соплах порождает в конечном счете высокую неравномерность скоростей и всех параметров потока в выходном сечении таких сопл. Для снижения этой неравномерности используются специальные расширяющиеся сопла, стенки которых профилируются таким образом, чтобы на их выходных участка проходило гашение волн разрежения, обеспечивающих ускорение потока на входной части рассматриваемых сопл.

Рассмотрим принцип такого профилирования на простейшем примере плоского сопла Лаваля, изображенного на рис. 8.15.

Здесь после узкого сечения сопла *A-A* последующее расширение канала происходит за счет последовательного отклонения его стенок на угол в точках *A* и *B*. Соответственно в этих точках возникают центрированные волны разрежения, где и происходит расширение сверхзвукового потока. (Для ясности изложения пучки центрированных волн разрежения на рис. 8.15 заменим одной усредненной волной.)

Волны, выходящие из точек *A*, пересекаются между собой на оси сопла OO_1 и далее в точках A_1 отражаются от стенок сопла. После вторичного пересечения на оси OO_1 они достигают стенок в точках A_2. В этих точках осуществляется гашение волн, вышедших из точек *A* путем поворота стенок сопла на угол δ в направлении оси OO_1.

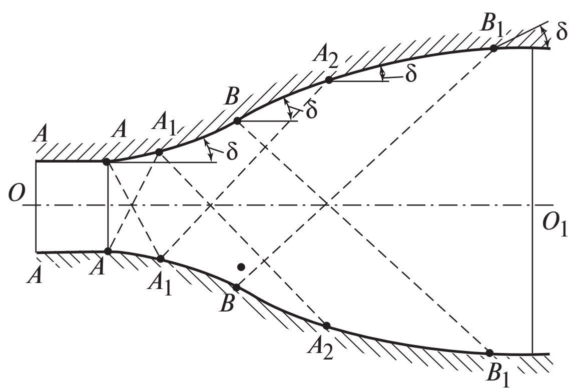


Рис. 8.15. Плоское профилированное сопло Лаваля

Волны, выходящие из точек B, после пересечения с волнами A_1A_2 и между собой, достигают стенок сопла в точках B_1, где путем еще одного поворота стенок на угол δ в направлении оси OO_1 происходит их гашение. В результате в выходном сечении сопла теоретически можно получить равномерный сверхзвуковой поток.

8.8. Возникновение скачков уплотнения в сверхзвуковом потоке

Формально возникновение скачков уплотнений в сверхзвуковом потоке можно проследить на примере обтекания им вогнутого угла ABD, показанного на рис. 8.16.

Вершина угла B, как и в случае обтекания выпуклого угла, является источником возмущения. Поскольку сверхзвуковой поток при сужении проходного сечения тормозится, то его скорость после прохождения волновой структуры снизится и $\lambda_2 < \lambda_1$. Соответственно первичная волна сжатия по отношению к вектору скорости λ_1 будет располагаться под углом $\alpha_1 = \arcsin \dfrac{1}{\mathrm{M}_1}$, а конечная волна — под углом $\alpha_2 = \arcsin \dfrac{1}{\mathrm{M}_2}$.

При $\mathrm{M}_2 < \mathrm{M}_1$ $\alpha_2 > \alpha_1$. В результате оказывается, что конечная волна BK_2 располагается впереди начальной волны BK_1. Таким образом, формальные рассуждения привели к физически нереальной картине, когда поток, достигая первичной волны BK_1, должен разворачиваться против течения для достижения конечной волны BK_2.

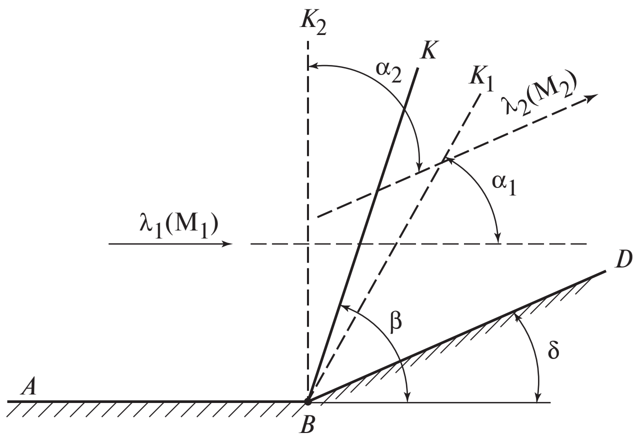


Рис. 8.16. Схема обтекания сверхзвуковым потоком вогнутого угла

В действительности вместо нереального плавного торможения в системе волн сжатия возникает поверхность сильного разрыва параметров потока BK, называемая **скачком уплотнения**. Приближенно угол наклона плоского скачка уплотнения

$$\beta = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2).$$

С физической точки зрения скачок уплотнения является следствием повышения температуры при сжатии потока. В этом случае каждая следующая волна возмущения, выходящая из точки B, распространяется с большей скоростью (скорость распространения возмущений пропорциональна $\sqrt{T}$), и происходит их неизбежное наложение.

Аналогом этой картины является картина движения автомобилей, когда в цепочке машин каждая из передних машин движется с меньшей скоростью, чем следующая за ней машина. Возникающий в этом случае неизбежный завал на дороге в какой-то степени иллюстрирует возникновение скачка уплотнения.

По виду поверхности скачки уплотнения делят на **плоские** и **криволинейные**.

Для плоского скачка уплотнения характерно одно и то же изменение параметров потока и скорости вдоль его фронта. При переходе через криволинейный скачок параметры потока и скорость за скачком непрерывно меняются вдоль его фронта.

В свою очередь, плоские скачки уплотнения делятся на **косые** (при $\beta < \pi/2$) и прямые ($\beta = \pi/2$).

8.9. Основные соотношения для расчета параметров потока и скоростей при переходе через плоские косые скачки уплотнения

Рассмотрим элемент фронта плоского косого скачка уплотнения (рис. 8.17) и запишем для единичной площади основные уравнения сохранения.

1. Уравнение неразрывности:

$$\rho_1 c_{1n} \cdot 1 = \rho_2 c_{2n} \cdot 1. \tag{8.29}$$

2. Уравнение количества движения в проекции на нормаль к фронту скачка:

$$\rho_1 c_{1n}^2 - \rho_2 c_{2n}^2 = p_2 - p_1.$$

Отсюда

$$\rho_1 c_{1n}^2 + p_1 = \rho_2 c_{2n}^2 + p_2. \tag{8.30}$$

3. Уравнение количества движения в проекциях на фронт скачка:

$$\rho_1 c_{1n}(c_{1t} - c_{2t}) = 0.$$

Отсюда $c_{1t} = c_{2t} = c_t$.

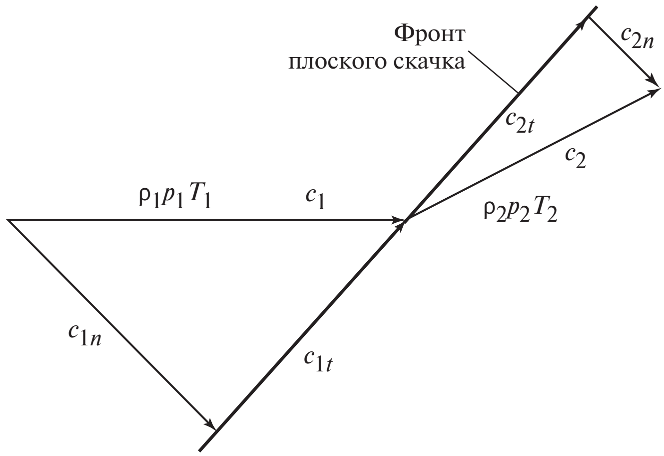


Рис. 8.17. Элемент фронта плоского косого скачка уплотнения

Таким образом, при переходе через фронт плоского косого скачка уплотнения меняется только нормальная составляющая скорости при неизменной тангенциальной составляющей.

4. Уравнение энергии:

$$\frac{c_{1n}^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{c_{2n}^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2}. \tag{8.31}$$

Полученные соотношения дают возможность по известным параметрам перед скачком найти их значения за скачком.

Формулы, по которым определяются относительные параметры потока за косыми скачками уплотнения, приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Формулы для определения относительных параметров потока за косыми скачками уплотнения

Величина	Расчетная формула
Отношение давлений	$\frac{p_2}{p_1} = \frac{k-1}{k+1}\left(\frac{2k}{k-1}\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta - 1\right)$
Отношение плотностей	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1}\left(\frac{2k}{k-1}\frac{1}{\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta} + 1\right)^{-1}$
Отношение температур	$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2\left(\frac{2k}{k-1}\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta - 1\right)\left(\frac{2}{k-1}\frac{1}{\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta} + 1\right)$
Число Маха за скачком уплотнения	$\mathrm{M}_2^2 = \left(\frac{2}{k-1} + \mathrm{M}_1^2\right)\left(\frac{2k}{k-1}\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta - 1\right)^{-1} + \mathrm{M}_1^2\cos^2\beta\left(\frac{k-1}{2}\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta + 1\right)^{-1}$

Используя уравнения (8.29)—(8.31), найдем связь между нормальными и тангенциальными составляющими скорости до косого скачка уплотнения и после него. С этой целью разделим левую и правую части (8.30) на левую и правую части (8.29). В результате получим

$$c_{1n} + \frac{p_1}{\rho_1 c_{1n}} = c_{2n} + \frac{p_2}{\rho_2 c_{2n}}.$$

Умножим это уравнение на произведение $c_{1n}c_{2n}$. Тогда будем иметь

$$c_{1n}^2 c_{2n} + \frac{p_1}{\rho_1} c_{2n} = c_{1n} c_{2n}^2 + \frac{p_1}{\rho_1} c_{1n}. \qquad (8.32)$$

Воспользуемся далее уравнениями сохранения энергии, использовав следующую их запись:

$$\frac{c_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1}\frac{c_*^2}{2};$$

$$\frac{c_2^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{k-1}\frac{c_*^2}{2}.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{k+1}{2k} c_*^2 - \frac{k-1}{2k} c_1^2 = \frac{k+1}{2k} c_*^2 - \frac{k-1}{2k} c_{1n}^2 - \frac{k-1}{2k} c_t^2; \\ \frac{p_2}{\rho_2} &= \frac{k+1}{2k} c_*^2 - \frac{k-1}{2k} c_{2n}^2 - \frac{k-1}{2k} c_t^2. \end{aligned}\right\} \qquad (8.33)$$

Подставим (8.33) в (8.32) и получим

$$c_{1n}^2 c_{2n} + \frac{k+1}{2k} c_*^2 c_{2n} - \frac{k-1}{2k} c_{1n}^2 c_{2n} - \frac{k-1}{2k} c_t^2 c_{2n} =$$
$$= c_{1n} c_{2n}^2 + \frac{k+1}{2k} c_*^2 c_{1n} - \frac{k-1}{2k} c_{2n}^2 c_{1n} - \frac{k-1}{2k} c_t^2 c_{1n}.$$

Сгруппируем далее все члены этого уравнения следующим образом:

$$-c_{1n}c_{2n}(c_{1n} - c_{2n}) + \frac{k+1}{2k} c_*^2 (c_{1n} - c_{2n}) + \frac{k-1}{2k} c_{1n} c_{2n} (c_{1n} - c_{2n}) -$$
$$- \frac{k-1}{2k} c_t^2 (c_{1n} - c_{2n}) = 0$$

и

$$(c_{1n} - c_{2n})\left(\frac{k+1}{2k} c_{1n} c_{2n} - \frac{k+1}{2k} c_*^2 + \frac{k-1}{2k} c_t^2\right) = 0.$$

Полученное уравнение имеет два решения. Первое $c_{1n} = c_{2n}$ соответствует течению без скачка. Второе решение дает искомую связь между нормальными проекциями скорости на фронт скачка:

$$c_{1n}c_{2n} = c_*^2 - \frac{k-1}{k+1}\,c_t^2\,. \tag{8.34}$$

Для прямого скачка $c_t = 0$, $c_{1n} = c_1$, $c_{2n} = c_2$ и $c_1c_2 = c_*^2$. Отсюда $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Таким образом, скорость за скачком

$$\lambda_2 = 1/\lambda_1. \tag{8.35}$$

Поскольку $\lambda_1 > 1$, то за прямым скачком скорость всегда дозвуковая.

8.10. Ударная поляра и диаграмма ударных поляр

Согласно вышеизложенному торможение сверхзвукового потока происходит в скачках уплотнения, где имеет место скачкообразное увеличение давления, плотности и температуры при резком снижении скорости потока.

При сравнительно низкой степени торможения сверхзвукового потока возникают плоские косые скачки уплотнения, которые с увеличением степени торможения потока переходят в криволинейные. Наибольшей интенсивностью обладают прямые скачки уплотнения, что прямо следует из формул, приведенных в табл. 8.1.

Для оценки границ существования плоских косых скачков уплотнения и их графического расчета изобразим картину течения сверхзвукового потока внутри вогнутого угла как в плоскости течения *xy* (рис. 8.18, *а*), так и в плоскости годографа скорости *uv* (рис. 8.18, *б*).

В данном случае сверхзвуковая скорость c_1 в плоскости годографа скорости будет направлена вдоль оси *u*, а скорость после скачка уплотнения c_2 отклоняется от первоначального направления на угол δ.

Так как при переходе через фронт скачка *BK* (рис. 8.18, *а*) тангенциальная скорость не меняется, то, соединив в плоскости годографа (рис. 8.18, *б*) концы векторов c_1 и c_2 отрезком прямой и опустив из центра *O* перпендикуляр на эту прямую, получим тангенциальную составляющую скорости c_t и положение скачка уплотнения *OK* (определяемого углом β). Соответственно отрезки прямой *KL* и *KN* будут равны нормальным составляющим скоростей c_{2n} и c_{1n}.

При изменении угла наклона стенки δ будут меняться значение и направление скорости c_2, а также угол наклона скачка β. Соответственно конец вектора скорости c_2 (точка *L*) в плоскости годографа скорости опишет некоторую кривую. Найдем вид этой кривой для фиксированного значения скорости c_1 перед скачком уплотнения, используя кинематическое соотношение (8.34), связывающее между собой нормальные составляющие скорости до скачка и после него с тангенциальной составляющей скорости c_t.

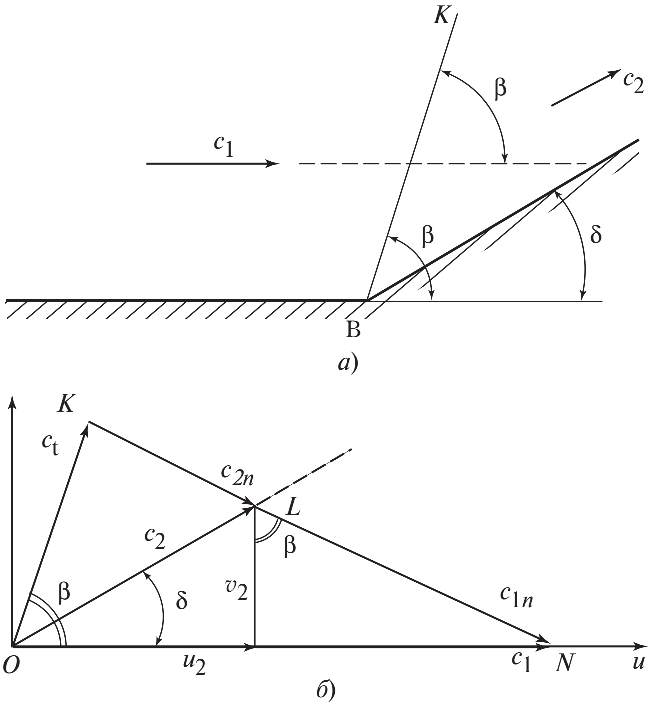


Рис. 8.18. Скачок уплотнения в плоскости течения (*а*) и в плоскости годографа скорости (*б*)

Используя обозначения, приведенные на рис. 8.18, *б*, представим составляющие скоростей до скачка уплотнения и после него в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} c_{1n} &= c_1 \sin\beta; \\ c_{2n} &= c_{1n} - \frac{v_2}{\cos\beta} = c_1 \sin\beta - \frac{v_2}{\cos\beta}; \\ c_t &= c_1 \cos\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (8.36)$$

Подставив (8.36) в (8.34), получим

$$c_1^2 \sin^2\beta - c_1 v_2 \operatorname{tg}\beta = c_*^2 - \frac{k-1}{k+1} c_1^2 \cos^2\beta .$$

Выразим далее в последнем уравнении $\sin\beta$ и $\cos\beta$ через $\operatorname{tg}\beta$:

$$\frac{c_1^2 \operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta} - c_1 v_2 \operatorname{tg}\beta = c_*^2 - \frac{k-1}{k+1} c_1^2 \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}$$

и избавимся от знаменателей:

$$c_1^2 \operatorname{tg}^2\beta - c_1 v_2 \operatorname{tg}\beta - c_1 v_2 \operatorname{tg}^3\beta = c_*^2(1+\operatorname{tg}^2\beta) - \frac{k-1}{k+1} c_1^2 .$$

Поскольку согласно рис. 8.18, *б* $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{c_1 - u_2}{v_2}$, то

$$\frac{c_1^2(c_1-u_2)^2}{v_2^2} - c_1(c_1-u_2) - \frac{c_1(c_1-u_2)^3}{v_2^2} = c_*^2 + c_*\frac{(c_1-u_2)^2}{v_2^2} - \frac{k-1}{k+1}c_1^2$$

или

$$(c_1-u_2)^2(c_1u_2 - c_*^2) = v_2^2\left(\frac{2}{k+1}c_1^2 - c_1u_2 + c_*^2\right).$$

Отсюда

$$v_2^2 = (c_1-u_2)^2\left(c_1 - \frac{c_*^2}{u_2}\right)\frac{1}{\dfrac{2}{k+1}c_1 - u_2 + \dfrac{c_*^2}{c_1}}. \qquad (8.37)$$

Кривая, описываемая уравнением (8.37), имеет две нулевые точки ($v_2 =$ $= 0$) и одну вертикальную асимптоту ($v_2 \to \infty$).

Вертикальная составляющая скорости v_2 в плоскости годографа скорости обращается в нуль при 1) $c_1 = u_2$ и 2) $u_2 = c_2 = c_*^2/c_1$. Первый случай соответствует слабой волне сжатия, а второй — прямому скачку уплотнения ($c_t = 0$).

Согласно формуле (8.37) вертикальная асимптота рассматриваемой кривой находится от начала координат на расстоянии u_2, равном

$$u_2 = \frac{c_*^2}{c_1} + \frac{2}{k+1}c_1.$$

Таким образом, кривая, соответствующая уравнению (8.37), должна иметь вид, показанный на рис. 8.19. Эта кривая в сверхзвуковой аэродинамике называется **ударной полярой**.

Напомним, что согласно поставленной задаче и рис. 8.18, *б* полученная кривая определяет геометрическое место точек, которые соответствуют в плоскости годографа концу вектора скорости $\vec{c}_2$ за плоским косым скачком уплотнения при непрерывном увеличении угла δ отклонения стенки *BD* (см. рис. 8.18, *а*) от нулевого значения. Однако полученное решение оказалось неоднозначным. Действительно, любой луч, проведенный из полюса *O* (рис. 8.19, *б*) под углом $\delta < \delta_{max}$, пересекает поляру в трех точках a_1, a_2, a_3. Точки на штриховой части поляры (a_3) физически нереальны, так как вектор $\overrightarrow{Oa_3}$ больше вектора $\vec{c}_1$, и, следовательно, эта часть рассматриваемой кривой соответствует скачку разрежения, существование которого невозможно

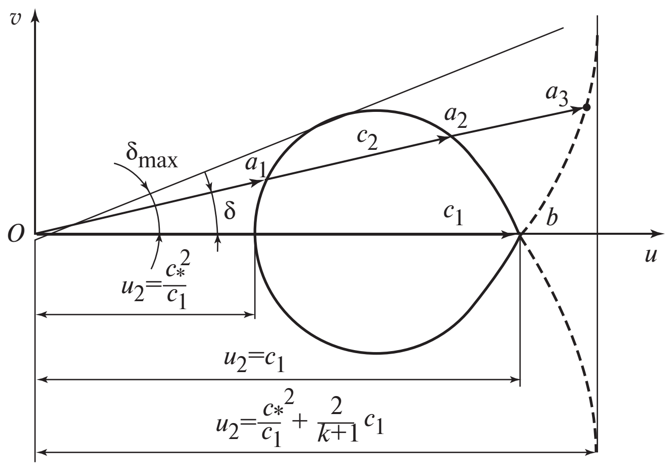


Рис. 8.19. Ударная поляра, соответствующая уравнению (8.37)

по термодинамическим условиям. (При таком скачке энтропия потока должна падать, что противоречит второму началу термодинамики.)

Если увеличивать угол δ от нулевого значения, то кривая, соответствующая уравнению (8.37), будет описывать ту часть поляры, которая начинается от точки b, и соответственно вектор $\overrightarrow{Oa_2}$ будет определять скорость потока c_2 за скачком уплотнения до тех пор, пока угол $\delta \le \delta_{max}$.

При $\delta > \delta_{max}$ существование плоских косых скачков уплотнения становится невозможным и возникают криволинейные скачки, для которых характерно непрерывное изменение скорости c_2 и всех параметров потока вдоль фронта такого скачка. В этом случае реализуется не одна точка a_2, а все точки ударной поляры.

Соответствие точек на криволинейном скачке уплотнения точкам ударной поляры показано на рис. 8.20. Здесь точке A на рис. 8.20, *а* (точке a на рис. 8.20, *б*) соответствует прямой скачок уплотнения в головной части криволинейного скачка. Затем его интенсивность вдоль фронта падает и в точке E (e) скачок вырождается в слабую волну сжатия.

Если в плоскости годографа скорости провести окружность радиусом $R = c_*$, то ударная поляра разделится на дозвуковую и сверхзвуковую части.

Поскольку участок поляры kb, где скорости c_2 становятся дозвуковыми, очень мал, то практически всегда за плоским косым скачком уплотнения сохранится сверхзвуковая скорость.

Пример использования ударной поляры для расчета косого скачка уплотнения показан на рис. 8.21.

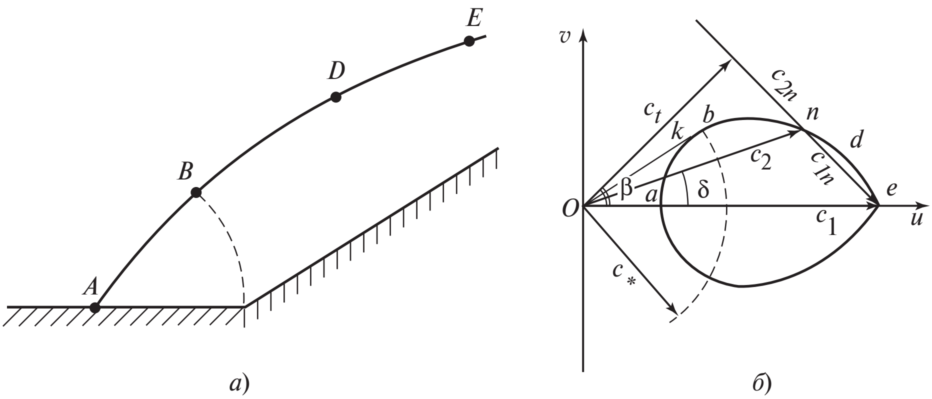


Рис. 8.20. Соответствие точек на криволинейном скачке уплотнения (*а*) точкам ударной поляры (*б*)

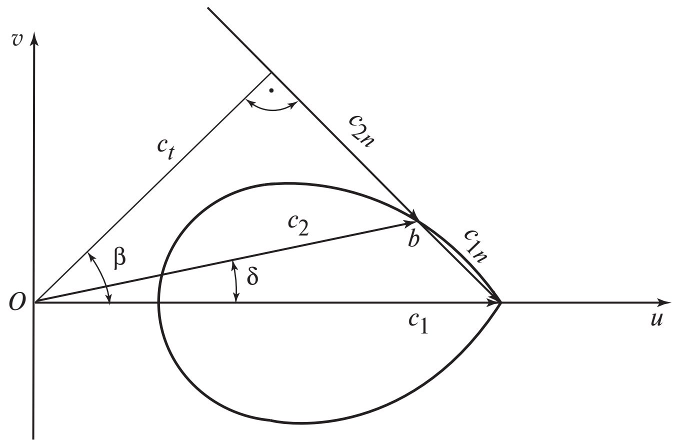


Рис. 8.21. Схема расчета плоского косого скачка уплотнения с помощью ударной поляры

Заданными величинами являются скорость потока перед скачком c_1 и угол δ. Построив для скорости c_1 ударную поляру (рис. 8.21), поведем из полюса *O* луч под углом δ.

Тогда отрезок луча *Ob* определит вектор скорости $\vec{c}_2$. Соединив концы векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ прямой линией и опустив из начала координат на эту линию перпендикуляр, получим положение скачка уплотнения (угол β) в плоскости течения.

Если для каждого значения скорости $c_1 > c_*$ построить в плоскости годографа соответствующую ей ударную поляру, то образуется диаграмма ударных поляр. Для удобства практических расчетов эта диаграмма строится не для абсолютных, а для безразмерных λ_{1i} скоростей (на рис. 8.22 схе-

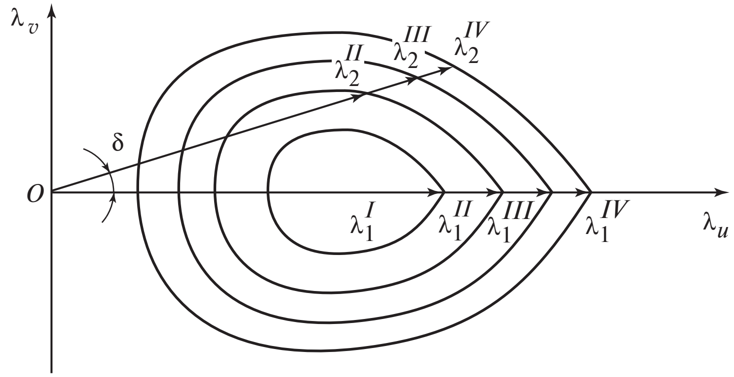


Рис. 8.22. Диаграммы ударных поляр

матически показаны четыре поляры, построенные для скоростей λ_1^{I}, λ_1^{II}, λ_1^{III}, λ_1^{IV}).

Эта диаграмма (см. рис. П.2) позволяет легко решать кинематические задачи, связанные с расчетом скачков уплотнения, а также показывает, что возникновение криволинейных скачков уплотнения обусловлено не только углом δ, но и начальным значением скорости λ_1. Если провести на диаграмме ударных поляр луч под углом δ, то, как следует из рис. 8.22, для скорости λ_1^{I} этот угол будет больше максимально допустимого, и вместо плоского образуется криволинейный скачок, но стоит увеличить скорость до λ_1^{II} и вместо криволинейного вновь появится плоский косой скачок уплотнения.

Таким образом, криволинейный скачок возникает в случае, когда энергии потока не хватает для одновременного изменения параметров потока по всему фронту скачка. При этом головная часть скачка смещается против потока и отходит от непосредственного источника возмущения. Образно говоря, при достаточно сильном внешнем воздействии «слепой» в общем случае сверхзвуковой поток начинает «чувствовать» преграду на некотором расстоянии от нее.

8.11. Отражение и пересечение скачков уплотнения

Отражение скачка уплотнения от твердой границы. Схемы отражения скачка от твердой границы показаны на рис. 8.23.

Скачок, возникающий в точке B, встречает на своем пути твердую стенку в точке B_1 и отражается от нее. Покажем, что при таком отражении скачок не меняет своего знака.

Действительно, после прохождения первичного скачка BB_1 вектор скорости λ_1 поворачивается на угол δ, и теперь точка B_1 для скорости λ_2 является

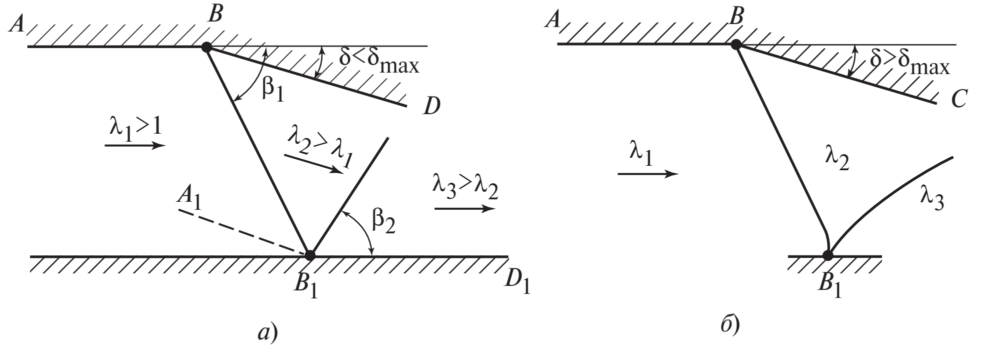


Рис. 8.23. Схемы отражения скачка уплотнения от твердой стенки:
а — «правильное» отражение; *б* — «неправильное» отражение

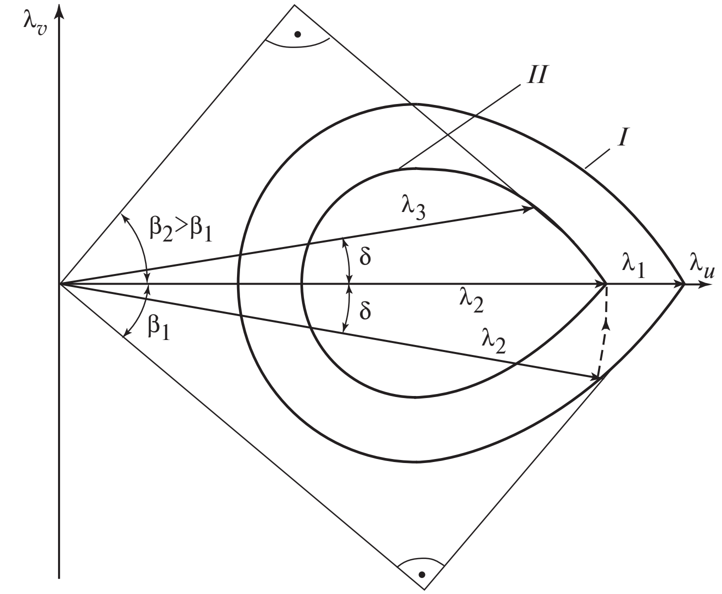


Рис. 8.24. Схема расчета «правильного» отражения скачка с помощью диаграммы ударных поляр

вершиной вогнутого угла $A_1B_1D_1$. Соответственно падающий скачок отражается также скачком уплотнения.

Схема расчета отраженного скачка с использованием диаграммы ударных поляр сводится к следующему. Для заданной скорости λ_1 перед скачком выбираем на диаграмме соответствующую ударную поляру *I* (рис. 8.24) и по рассмотренной на рис. 8.21 схеме находим λ_2 и угол β_1.

Откладываем далее на продольной оси диаграммы значение полученной скорости λ_2 и находим соответствующую этой скорости поляру (кривая *II* на рис. 8.24). Так как после отраженного скачка вектор скорости λ_3 вновь поворачивается на угол δ, но в противоположном направлении, то, проведя на рис. 8.24 прямую под углом δ до пересечения ее с полярой *II*, получим значение скорости λ_3 и угол β_2 положения отраженного скачка уплотнения.

Поскольку поляра *II* построена для меньшей скорости λ_1, чем поляра *I*, то угол отраженного скачка β_2 всегда оказывается больше угла падения β_1.

При решении задачи об отражении скачка от твердой стенки может возникнуть ситуация, когда исходный угол поворота потока δ может оказаться для скорости λ_2 больше максимально допустимого для этой скорости и соответственно прямая, проведенная под этим углом, не пересечет поляру *II*. В этом случае вместо «правильного» отражения (см. рис. 8.23, *а*), когда и падающий, и отраженный скачки остаются плоскими косыми, возникает «неправильное» отражение, когда плоский косой скачок отражается в виде криволинейного скачка (рис. 8.23, *б*). При этом первичный скачок вблизи стенки искривляется и возникает λ-образное отражение, изображенное на рис. 8.23, *б*.

Если при «правильном» отражении все параметры потока и скорость λ_1 за отраженным скачком имеют одно и то же значение, то при «неправильном» отражении они меняются вдоль фронта и за отраженным скачком образуется сложная волновая структура.

Пересечение скачков уплотнения и отражение их от свободной границы струи. Такая картина возникает в выходном сечении расширяющихся сопл, когда давление p_2 на срезе сопла оказывается ниже давления окружающей среды.

В этом случае в точках B и B_1 (рис. 8.25, *а*) возникают скачки уплотнения, которые пересекаются на оси симметрии OO_1. В симметричных каналах эта ось является центральной линией тока, которую, как уже неоднократно отмечалось ранее, можно рассматривать в виде непроницаемой (твердой) поверхности. От такой воображаемой поверхности падающий скачок уплотнения BA отразится скачком уплотнения AD, а скачок B_1A — скачком AD_1. Таким образом, после пересечения скачки уплотнения продолжаются скачками с увеличенными углами β_2 и β_2' относительно продольной оси OO_1.

В случае, если после пересечения скачков углы поворота потока δ в скачках за точкой их пересечения превышают максимальные значения, возникает более сложная картина (рис. 8.25, *б*). В центральной части образуется почти прямой скачок уплотнения AA_1, который продолжится криволинейными скачками AA и A_1A_1.

В ряде задач, связанных с истечением сверхзвукового потока из расширяющихся сопл в среду с более высоким давлением, чем давление на срезе сопла, возникающие скачки уплотнения взаимодействуют со свободной границей струи и происходит отражение скачка от свободной границы.

Схема такого отражения показана на примере приведенного на рис. 8.26 истечения из плоского канала.

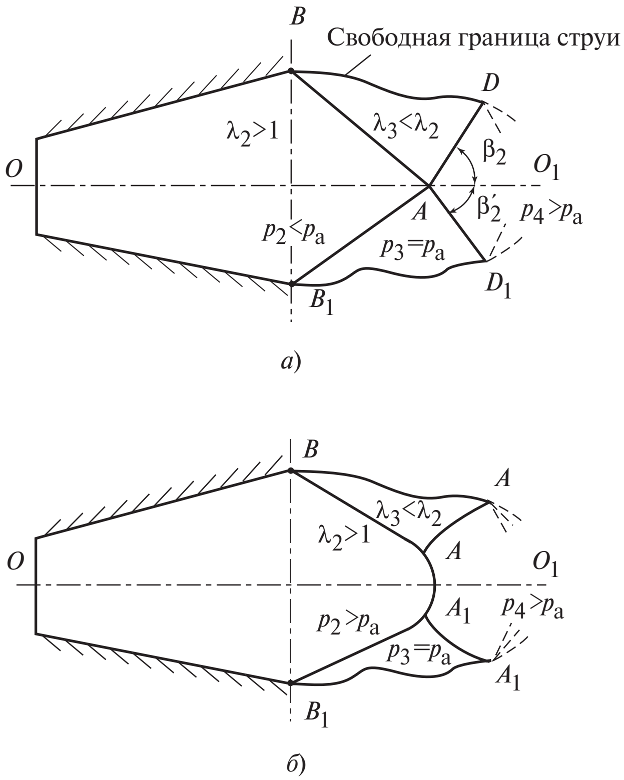


Рис. 8.25. Схемы пересечения скачков уплотнения:
а — «правильное» пересечение, *б* — «неправильное» пересечение

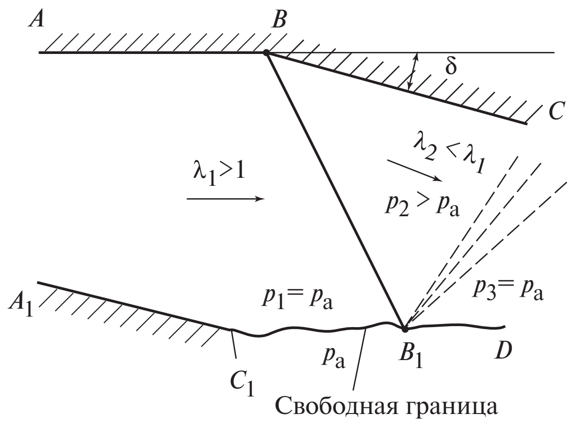


Рис. 8.26. Схема отражения скачка от свободной границы

В данном случае верхняя стенка канала ABC в точке B отклоняется в сторону нижней стенки A_1C_1 на угол δ, а нижняя стенка заканчивается в точке C_1. В результате образуется свободная граница C_1D вытекающей из канала струи.

Основное граничное условие в рассматриваемой задаче состоит в равенстве давления в струе давлению окружающей среды p_a.

При сверхзвуковой скорости на выходе из канала ($\lambda_1 > 1$) в точке B возникает плоский косой скачок уплотнения BB_1, попадающий в точке B_1 на свободную границу струи.

Если на участке струи C_1B_1 давление равняется давлению окружающей среды, то в точке B_1 указанное граничное условие нарушается, так как давление за скачком BB_1 возрастает до $p_2 > p_1 = p_a$, а скорость λ_2 падает ($\lambda_2 < \lambda_1$) и поворачивается на угол δ.

Таким образом, точка B_1 является источником возмущения, так как со стороны потока давление p_2 в этой точке оказывается выше давления окружающей среды p_a. Для выравнивания указанных давлений сверхзвуковой поток должен расшириться до давления p_a, что происходит в центрированных волнах разрежения. Следовательно, падающий на свободную границу струи скачок BB_1 отражается от этой границы центрированным пучком волн разрежения, ширина которого определяется перепадом давления $\Delta p = p_2 - p_a$.

8.12. Потери энергии в скачках уплотнения

Если расширение сверхзвукового потока происходит в волнах разрежения при постоянной энтропии, то его торможение происходит в скачках уплотнения различных интенсивности и формы, что сопровождается увеличением энтропии. Следовательно, процесс торможения в скачках уплотнения является необратимым. Это ведет в конечном счете к безвозвратным потерям энергии. При внешнем обтекании различных тел сверхзвуковым потоком эти потери вызывают увеличение аэродинамического сопротивления. Такое добавочное сопротивление получило название **волнового сопротивления**.

Возникновение скачков уплотнения внутри каналов или в решетках профилей турбомашин приводит к увеличению общих потерь энергии. Эти добавочные потери называются волновыми.

Для оценки значения указанных потерь энергии изобразим процесс преобразования энергии в скачке уплотнения на h, s-диаграмме (рис. 8.27).

Здесь точке O_1 соответствует давление p_{01} и температура T_{01} полного торможения потока перед скачком уплотнения, а точке *1* — давление p_1 перед скачком уплотнения.

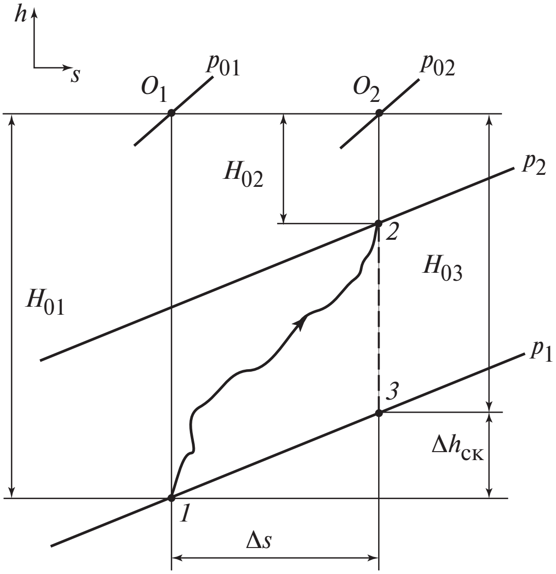


Рис. 8.27. Процесс преобразования энергии скачка уплотнения на *h*, *s*-диаграмме

После скачка уплотнения давление в потоке повышается до давления p_2, а сам процесс идет с возрастанием энтропии на Δs. Таким образом, состояние потока за скачком будет характеризоваться параметрами в точке *2*.

Поскольку в энергоизолированном потоке энтальпия полного торможения не меняется ($h_{01} = h_{02} = h_0$), то при изоэнтропийном торможении скорости потока c_2 за скачком до нуля его параметры будут определяться на h, s-диаграмме в точке O_2. [Перепад энтальпий H_{02} эквивалентен кинетической энергии потока за скачком уплотнения ($H_{02} = c_2^2/2$).]

Если теперь от этой точки провести изоэнтропийное расширение рассматриваемой среды до давления p_1, то перепад энтальпий H_{03} за скачком уплотнения окажется меньше перепада энтальпий перед скачком H_{01} на $\Delta h_{ск} = H_{01} - H_{03}$.

Полученная разница энтальпий $\Delta h_{ск}$ и определяет значение волновых потерь энергии в скачке уплотнения.

От абсолютных значений волновых потерь энергии $\Delta h_{ск}$ перейдем к коэффициенту волновых потерь $\zeta_в$, который определяется по следующему отношению:

$$\zeta_в = \frac{\Delta h_{ск}}{H_{01}} = \frac{H_{01} - H_{03}}{H_{01}} = 1 - \frac{H_{03}}{H_{01}}.$$

Так как $H_{01} = c_1^2/2$, а $H_{03} = c_3^2/2$ (c_3 — условная скорость, соответствующая изоэнтропийному расширению среды от точки O_2 до точки *3*), то

$$\zeta_{\text{в}} = 1 - \frac{c_3^2}{c_1^2} = 1 - \frac{\lambda_3^2}{\lambda_1^2} .$$

В свою очередь, из формулы (5.32) следует, что

$$\lambda_1^2 = \frac{k+1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right],$$

$$\lambda_3^2 = \frac{k+1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_{02}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right].$$

Следовательно,

$$\zeta_{\text{в}} = 1 - \frac{\lambda_3^2}{\lambda_1^2} = \frac{\left(\frac{p_1}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}} - \left(\frac{p_1}{p_{01}}\frac{p_{01}}{p_{02}}\right)^{\frac{k-1}{k}}}{1 - \left(\frac{p_1}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}} .$$

Обозначим относительное снижение давления полного торможения в скачке уплотнения через $\varepsilon_0 = p_{02}/p_{01}$ и выразим отношение давлений p_1/p_{01} через безразмерную скорость M_1, использовав формулу (5.29), согласно которой

$$\frac{p_1}{p_{01}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_1^2\right)^{\frac{k-1}{k}}} .$$

Тогда после ряда преобразований получим

$$\zeta_{\text{в}} = \frac{2}{k-1}\frac{1}{\mathrm{M}_1^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0^{\frac{k-1}{k}}} - 1\right). \tag{8.38}$$

Величина ε_0 в свою очередь зависит от скорости перед скачком $\mathrm{M}_1(\lambda_1)$ и угла скачка β. Действительно, представим ε_0 в виде

$$\varepsilon_0 = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2}\frac{p_2}{p_1}\frac{p_1}{p_{01}} .$$

Отношения давлений p_{02}/p_2 и p_{01}/p_1 определяются, как уже отмечалось, по формуле (5.29). Повышение давления в скачке p_2/p_1 вычисляется по формуле, приведенной в табл. 8.1:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{k-1}{k+1}\left(\frac{2k}{k-1}\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta - 1\right).$$

Таким образом,

$$\varepsilon_0 = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}_2^2\right)^{\frac{k-1}{k}}}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}_1^2\right)^{\frac{k-1}{k}}}\;\frac{k-1}{k+1}\left(\frac{2k}{k-1}\,\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta - 1\right). \qquad (8.39)$$

Безразмерная скорость за скачком уплотнения (см. табл. 8.1) находится по формуле

$$\mathrm{M}_2^2 = \frac{\mathrm{M}_1^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1}\,\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta - 1} + \frac{\mathrm{M}_1^2\cos^2\beta}{\frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta + 1}.$$

Подставив эту формулу в (8.39), получим

$$\varepsilon_0 = \frac{\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\left(\mathrm{M}_1^2\,\sin^2\beta\right)^{\frac{k}{k-1}}}{\left(\mathrm{M}_1^2\,\sin^2\beta + \frac{2}{k-1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(\frac{2k}{k-1}\,\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta - 1\right)^{\frac{k}{k-1}}}. \qquad (8.40)$$

Приведенные формулы (8.38)—(8.40) показывают, что как коэффициент снижения давления полного торможения в скачке уплотнения ε_0, так и коэффициент волновых потерь энергии $\zeta_{\text{в}}$ (коэффициент потерь в скачке) являются функциями двух величин — безразмерной скорости перед скачком M_1 или λ_1 и угла скачка β, т.е.

$$\varepsilon_0 = f_1(\mathrm{M}_1, \beta);$$

$$\zeta_{\text{в}} = \varphi_1(\mathrm{M}_1, \beta)$$

или

$$\varepsilon_0 = f_2(\lambda_1, \beta);$$

$$\zeta_{\text{в}} = \varphi_2(\lambda_1, \beta).$$

8.13. Номограмма для расчета скачков уплотнения

Как следует из вышеприведенных формул, расчет параметров потока за скачком (см. табл. 8.1) и определение коэффициента потерь энергии при переходе через фронт скачка связаны с достаточно трудоемкими вычислениями и даже при использовании современной вычислительной техники занимают сравнительно много времени. В этой связи для проведения расчетов скачков уплотнений целесообразно использовать номограмму А.Е. Зарянкина (см. П.3). Принцип построения указанной номограммы иллюстрирует рис. 8.28.

Здесь все расчетные зависимости расположены в четырех квадрантах. При этом в качестве параметра при построении рассматриваемых зависи-

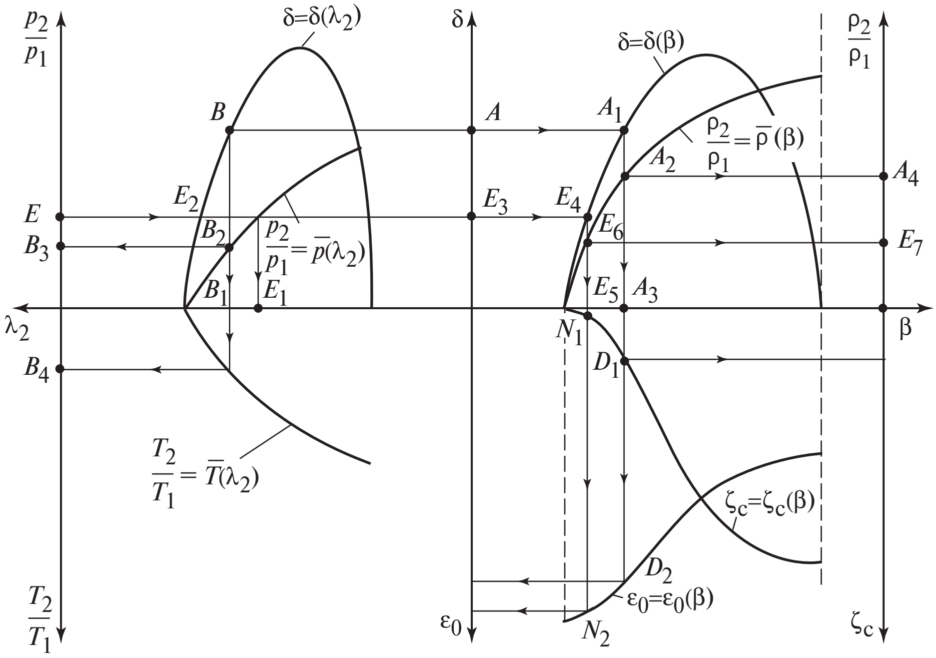


Рис. 8.28. Номограмма для расчета косых скачков уплотнения

мостей использована безразмерная скорость λ_1 перед скачком уплотнения, т.е. все кривые на приведенной в приложении номограмме (см. рис. П.3) построены при λ_1 = const. Конкретное значение скорости λ_1 указано на каждой кривой.

В верхнем левом квадранте номограммы (рис. 8.28) представлены зависимости $p_2/p_1 = \bar{p}(\lambda_2)$ при λ_1 = const и $\delta = \delta(\lambda_2)$ при λ_1 = const.

В верхнем правом квадранте расположены зависимости $\rho_2/\rho_1 = \bar{\rho}(\beta)$ и $\delta = \delta(\beta)$ при λ_1 = const.

В нижнем левом квадранте дана зависимость $T_2/T_1 = \bar{T}(\lambda_2)$ при λ_1 = = const. Наконец, в нижнем правом квадранте приведены зависимости $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\beta)$ и $\zeta_c = \zeta_c(\beta)$ при λ_1 = const.

С помощью приведенной номограммы по любым двум известным величинам могут быть получены все остальные параметры потока и его скорости. Поясним принцип использования номограммы на конкретных примерах.

Задача 1. Найти все относительные параметры потока за косым скачком уплотнения, если известны скорость потока перед скачком λ_1 и угол возмущения δ.

В данном случае исходной величиной для расчета является угол δ, который и откладываем на оси δ (точка A) (рис. 8.28). Двигаясь от точки A влево параллельно оси абсцисс до пересечения с кривой $\delta = \delta(\lambda_2)$ в точке B, соответствующей заданной скорости λ_1, находим скорость за скачком λ_2 (точка B_1). При движении от точки B к точке B_1 в точке B_2 пересекаем кривую $p_2/p_1 = \overline{p}(\lambda_2)$, построенную для заданной скорости λ_1 = const. Перемещаясь от точки B_2 влево до пересечения с осью ординат, находим относительное повышение давления p_2/p_1 в рассматриваемом косом скачке уплотнения (точка B_3). Продолжая движение вниз от точки B_1 в нижний левый квадрант до пересечения с кривой $T_2/T_1 = \overline{T}(\lambda_2)$, в точке B_4 на оси ординат определяем отношение температур T_2/T_1.

Для нахождения оставшихся неизвестных величин от точки A на оси δ движемся вправо до пересечения в точке A_1 с кривой $\delta = \delta(\beta)$, соответствующей заданной скорости λ_1. Опускаясь от точки A_1 вниз до оси абсцисс (оси β), находим в точке A_3 значение угла наклона косого скачка β. На пути от точки A_1 к точке A_3 пересекаем в точке A_2 зависимость $\rho_2/\rho_1 = \overline{\rho}(\beta)$, соответствующую скорости λ_1.

Перемещаясь от точки A_2 вправо до правой оси ординат, находим отношение ρ_2/ρ_1.

При движении от точки A_1 вниз в правый нижний квадрант в точке D_1 пересекаем зависимость $\zeta_c = \zeta_c(\beta)$, а в точке D_2 зависимость $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\beta)$. Перемещаясь от точки D_1 вправо, а от точки D_2 влево, находим на соответствующих осях значения ζ_c и ε_0.

Задача 2. Провести расчет косого скачка уплотнения по известной скорости λ_1 перед скачком и заданному отношению давлений p_2/p_1 в скачке.

В данном случае базовой величиной для расчета является относительное увеличение давления p_2/p_1, которое и откладываем в левом верхнем квадранте на оси p_2/p_1 (точка E). Двигаясь от точки E вправо до пересечения с зависимостью $p_2/p_1 = \overline{p}(\lambda_2)$, находим скорость λ_2 за скачком (точка E_1).

На пути от точки E до точки E_1 пересекаем в точке E_1 зависимость $\delta = \delta(\lambda_2)$ и находим угол δ (точка E_3), при котором создается заданное повышение давления в скачке.

Продолжая движение от точки E_3 в правую часть номограммы, в точке E_4 пересекаем нужную зависимость $\delta = \delta(\beta)$ и находим угол скачка β (точка E_5). В точке E_6 на пути от точки E_4 до точки E_5 пересекаем зависимость $\rho_2/\rho_1 = \overline{\rho}(\beta)$ в точке E_6 и находим относительное повышение плотности ρ_2/ρ_1 (точка E_7).

Переходя в нижнюю часть номограммы, по точкам N_1 и N_2 находим коэффициент потерь энергии в скачке ζ_c и относительное снижение давления полного торможения ε_0 после рассматриваемого скачка уплотнения.

Аналогичным образом решаются и все остальные возможные задачи по расчету косых скачков уплотнения.

8.14. Тепловые скачки

Рассмотренные скачки уплотнения при сверхзвуковых скоростях потока происходили в энергоизолированных каналах, исключающих внешний подвод тепловой энергии. На практике в некоторых задачах приходится сталкиваться с внезапным подводом теплоты на очень малых линейных участках каналов, где имеет место движение рабочих сред. В частности, такая ситуация возникает в камерах сгорания, при внезапной конденсации переохлажденного пара, при возникновении детонации топлива в двигателях внутреннего сгорания и т.д. В этом случае относительная длина участка, на котором подводится теплота, весьма мала, и этот участок можно рассматривать как поверхность разрыва скоростей и параметров потока.

Найдем в рамках одномерного течения, каким образом будут меняться безразмерные скорости λ_2 за тепловыми скачками. С этой целью в канале, изображенном на рис. 8.29, в сечении *a-a* подведем к потоку количество теплоты Q. Обозначим параметры потока и скорость перед тепловым скачком перед сечением *a-a*) через p_1, ρ_1, T_1, c_1, а за скачком через p_2, ρ_2, T_2, c_2 и запишем для принятого контрольного сечения *a-a* уравнения сохранения, имея в виду, что площади канала до теплового скачка и после него сохраняются неизменными. (Толщину скачка, как и ранее при рассмотрении адиабатических скачков принимаем бесконечно малой.)

При сделанных предположениях уравнения сохранения, записанные для единицы площади, примут следующий вид.

1. Уравнение сохранения массы (уравнение расхода):

$$\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2. \tag{8.41}$$

2. Уравнение сохранения количества движения:

$$p_1 + \rho_1 c_1^2 = p_2 + \rho_2 c_2^2. \tag{8.42}$$

3. Уравнение сохранения энергии:

$$Q + c_{p_1} T_1 + \frac{c_1^2}{2} = c_{p_2} T_2 + \frac{c_2^2}{2}, \tag{8.43}$$

где c_{p_1} и c_{p_2} — теплоемкости среды при постоянном давлении до теплового скачка и после него.

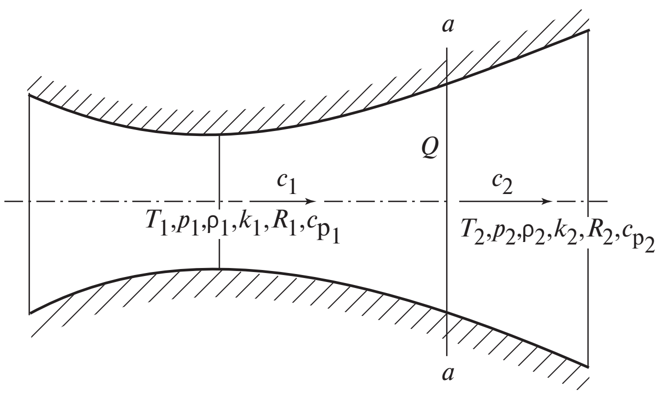


Рис. 8.29. К расчету теплового скачка

К приведенным уравнениям сохранения добавим и уравнения состояния:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \rho_1 R_1 T_1; \\ p_2 &= \rho_2 R_2 T_2. \end{aligned}\right\} \tag{8.44}$$

Здесь так же, как и для теплоемкостей, газовые постоянные R_1 и R_2 будем считать разными до скачка и после него.

Если поделить левую и правую части уравнения (8.42) на левую и правую части уравнения (8.41), то получим

$$\frac{p_1}{\rho_1 c_1} + c_1 = \frac{p_2}{\rho_2 c_2} + c_2. \tag{8.45}$$

Использовав уравнения состояния (8.44), запишем (8.45) в виде

$$\frac{R_1 T_1}{c_1} + c_1 = \frac{R_2 T_2}{c_2} + c_2$$

или

$$c_2^2 - c_2\left(\frac{R_1 T_1}{c_1} + c_1\right) + R_2 T_2 = 0. \tag{8.46}$$

Для нахождения температуры T_2 за скачком воспользуемся уравнением сохранения энергии (8.43), представив его в следующем виде:

$$Q + c_{p_1} T_{01} = c_{p_2} T_2 - \frac{c_2^2}{2}.$$

Отсюда

$$T_2 = \frac{c_{p_1} T_{01}}{c_{p_2}}\left(1 + \frac{Q}{c_{p_1} T_{01}}\right) - \frac{c_2^2}{2 c_{p_2}}.$$

Подставим далее полученное выражение для температуры T_2 за скачком в уравнение (8.46). Тогда будем иметь

$$c_2^2 - c_2\left(\frac{R_1 T_1}{c_1} + c_1\right) + \frac{c_{p_1} T_{01} R_2}{c_{p_2}}\left(1 + \frac{Q}{c_{p_1} T_{01}}\right) - \frac{R_2}{2 c_{p_2}} c_2^2 = 0;$$

$$c_2^2\left(1 - \frac{R_2}{2 c_{p_2}}\right) - c_2\left(\frac{R_1 T_1}{c_1} + c_1\right) + \frac{c_{p_1} T_{01} R_2}{c_{p_2}}\left(1 + \frac{Q}{c_{p_1} T_{01}}\right) = 0. \tag{8.47}$$

Перейдем далее от абсолютных скоростей c_1 и c_2 к безразмерным скоростям λ_1 и λ_2:

$$\lambda_1 = c_1 / c_{*1};\ \lambda_2 = c_2 / c_{*2}$$

и обозначим безразмерный комплекс $\dfrac{Q}{c_{p_1}T_{01}}$ через $\overline{Q}$ $\left(\overline{Q} = \dfrac{Q}{c_{p_1}T_{01}}\right)$. Тогда вместо (8.47) можно записать

$$\lambda_2^2 c_{*2}^2 \frac{2c_{p_2} - R_2}{c_{p_2}} - \frac{\lambda_2 c_{*2} c_{*1}}{\lambda_1}\left(\frac{R_1 T_1}{c_{*1}^2} + \lambda_1^2\right) + \frac{c_{p_1} T_{01} R_2}{c_{p_2}}(1 + \overline{Q}) = 0. \quad (8.48)$$

Поскольку $R_1 = c_{p_1} - c_{V_1}$, а $R_2 = c_{p_2} - c_{V_2}$, и отношение $c_{p_1}/c_{V_1} = k_1$, а $c_{p_2}/c_{V_2} = k_2$ (k_1 и k_2 — показатели изоэнтропы до теплового скачка и после него), то

$$\frac{2c_{p_2} - R_2}{c_{p_2}} = \frac{2c_{p_2} - c_{p_2} + 2c_{V_2}}{c_{p_2}} = \frac{k_2 + 1}{2k_2}.$$

После деления всех членов уравнения (8.48) на

$$c_{*2}^2 \frac{2c_{p_2} - R_2}{c_{p_2}} = c_{*2}^2 \frac{k_2 + 1}{2k_2}$$

получим

$$\lambda_2^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{c_{*1}}{c_{*2}}\frac{2k_2}{k_2 + 1}\left(\frac{R_1 T_1}{c_{*1}^2} + \lambda_1^2\right) + \frac{2k_2}{k_2 + 1}\frac{c_{p_1} T_{01} R_2}{c_{p_2} c_{*2}^2}(1 + \overline{Q}) = 0$$

или

$$\lambda_2^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} AB + D = 0, \quad (8.49)$$

где

$$A = \frac{c_{*1}}{c_{*2}}\frac{2k_2}{k_2 + 1}; \quad B = \frac{R_1 T_1}{c_{*1}^2} + \lambda_1^2; \quad D = \frac{2k_2}{k_2 + 1}\frac{c_{p_1} T_{01} R_2}{c_{p_2} c_{*2}^2}(1 + \overline{Q}).$$

Проведем далее очевидные преобразования введенных коэффициентов:

$$A = \frac{c_{*1}}{c_{*2}}\frac{2k_2}{k_2 + 1} = \sqrt{\frac{2k_1 R_1 T_{01}(k_2 + 1)}{(k_1 + 1)2k_2 R_2 T_{02}}}\,\frac{2k_2}{k_2 + 1}. \quad (8.50)$$

Использовав уравнение сохранения энергии, записанное в виде

$$c_{p_1} T_{01} + Q = c_{p_2} T_{02},$$

найдем, что

$$T_{02} = \frac{c_{p_1} T_{01}}{c_{p_2}} (1 + \bar{Q}).$$

Тогда с учетом того, что $R_1 = c_{p_1}\left(\frac{k_1 - 1}{k_1}\right)$ и $R_2 = c_{p_2}\left(\frac{k_2 - 1}{k_2}\right)$, из (8.50) получим

$$A = \frac{2k_2}{k_2 + 1} \sqrt{\frac{2k_1(k_2 - 1)}{2k_2(k_1 + 1)} \frac{c_{p_1}}{c_{p_2}} \frac{(k_1 - 1)k_2 c_{p_2} T_{01}}{k_1(k_2 - 1)c_{p_1} T_{01}(1 + \bar{Q})}} =$$

$$= \frac{2k_2}{k_2 + 1} \sqrt{\frac{(k_2 + 1)(k_1 - 1)}{(k_2 - 1)(k_1 + 1)}} \sqrt{\frac{1}{1 + \bar{Q}}};$$

$$B = \frac{R_1 T_1}{c_{*1}^2} + \lambda_1^2 = \frac{c_p(k_1 - 1)T_1(k_1 + 1)k_1}{k_1 2k_1 c_p(k_1 - 1)T_{01}} + \lambda_1^2 = \frac{k_1 + 1}{2k_1} \frac{T_1}{T_{01}} + \lambda_1^2 =$$

$$= \frac{k_1 + 1}{2k_1} - \frac{k_1 - 1}{2k_1} \lambda_1^2 = \frac{k_1 + 1}{2k_1}(1 + \lambda_1^2);$$

$$D = \frac{2k_2}{k_2 + 1} \frac{c_{p_1} T_{01} R_2 (1 + \bar{Q})}{c_{p_2} c_{*2}^2} = \frac{c_{p_1} T_{01} R_2 (k_1 + 1)}{c_{p_2} 2k_2 R_2 T_{02}} \frac{2k_2(1 + \bar{Q})}{k_2 + 1} =$$

$$= \frac{c_{p_1} T_{01} c_{p_2} (1 + \bar{Q})}{c_{p_2} c_{p_1} T_{01} (1 + \bar{Q})} = 1.$$

С учетом выражений для величин A, B и D уравнение (8.49), определяющее безразмерную скорость λ_2 за тепловым скачком, примет вид

$$\lambda_2^2 - \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{k_1^2 - 1}{k_2^2 - 1}} \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + \bar{Q}}} \lambda_2 + 1 + 0.$$

Отсюда

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{K(1 + \lambda_1^2)}{\lambda_1 \sqrt{1 + \bar{Q}}} \pm \left(\frac{K^2 (1 + \lambda_1^2)^2}{4\lambda_1^2 (1 + \bar{Q})} - 1\right)^{1/2}. \tag{8.51}$$

Здесь $K = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{k_1^2 - 1}{k_2^2 - 1}}$.

При отсутствии теплового скачка ($\bar{Q} = 0$) $k_1 = k_2$, а следовательно, $K = 1$. В этом случае

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + 2\lambda_1^2}{\lambda_1} \pm \frac{1 - \lambda_1^2}{2\lambda_1}\right).$$

Отсюда с использованием знака «плюс» (первое решение) $\lambda_2^I = \frac{1}{\lambda_1}$. При использовании знака «минус» $\lambda_2^{II} = \lambda_1$.

Первое решение соответствует прямому адиабатическому скачку уплотнения, имеющему место при сверхзвуковых скоростях ($\lambda_1 > 1$), а второе — течению при отсутствии скачков. Другими словами, полученное соотношение (8.51) является достаточно общим, определяющим связь между скоростями λ_1 и λ_2 как для адиабатических, так и для тепловых скачков.

Анализ этого соотношения показывает, что количество теплоты, которое можно подвести к потоку, не может быть произвольным, так как выражение под радикалом в формуле (8.51) не может быть отрицательным. Следовательно,

$$\frac{K^2(1 + \lambda_1^2)^2}{4\lambda_1^2(1 + \bar{Q})} \geq 1$$

или

$$K^2(1 + \lambda_1^2)^2 \geq 4\lambda_1^2 + 4\lambda^2\bar{Q}. \tag{8.52}$$

При $K = 1$

$$4\bar{Q} \leq \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)^2. \tag{8.53}$$

Отсюда следует, что в потоке, движущемся с критической скоростью ($\lambda_1 = 1$), тепловые скачки существовать не могут, поскольку к такому потоку нельзя подвести теплоту.

Максимальное количество теплоты, которое можно подвести к движущемуся потоку, согласно соотношению (8.52) будет определяться по формуле

$$\bar{Q}_{\max} = \frac{1}{4}K^2\left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}\right)^2 - 1. \tag{8.54}$$

Если (8.54) подставить в формулу (8.51), то для безразмерной скорости λ_2 получается единственное решение $\lambda_2 = 1$. Смысл этого решения состоит в том, что при подводе к потоку теплоты в дозвуковой области ($\lambda_1 < 1$) происходит его ускорение, а в сверхзвуковой области — торможение. Однако ни в первом, ни во втором случаях перехода через скорость звука произойти не может. Соответственно $\lambda_2 = 1$ является предельной скоростью, до которой можно ускорить дозвуковой поток или затормозить сверхзвуковой поток при тепловом скачке. Используя уравнение (8.51) при $K = 1$ ($k_1 = k_2$), можно построить диаграмму тепловых скачков, так как в этом случае скорость λ_2 является функцией всего двух аргументов λ_1 и $\bar{Q}$.

Такая качественная диаграмма приведена на рис. 8.30. Здесь по оси абсцисс отложена скорость λ_1 до теплового скачка, а по оси ординат — скорость λ_2 после скачка. Линия *OA* на диаграмме соответствует течению без скачков, когда $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\bar{Q} = 0$ (подвода теплоты нет).

Значение скорости λ_2 за прямым адиабатическим скачком уплотнения (в точке d_1) определяется по кривой *BC*, построенной по соотношению $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ ($\lambda_1 > 1$, $\bar{Q} = 0$).

При дозвуковых скоростях ($\lambda_1 < 1$) тепловые скачки существуют в области *OBD*. На диаграмме в этой области показаны две кривые OE_1 и OE_2 соответствующие тепловым скачкам для двух значений подводимой к потоку теплоты $\bar{Q}_1 = \text{const} > 0$ и $\bar{Q}_2 = \text{const} > 0$, причем $\bar{Q}_2 > \bar{Q}_1$.

В дозвуковой области течения, как уже отмечалось ранее, скорость за тепловыми скачками λ_2 всегда больше скорости перед ними λ_1. Чем больше количество подводимой теплоты, тем выше скорость за тепловым скачком и ниже давление за ним. Так, если перед тепловым скачком скорость равна λ_{1a} (скорость λ_1 в точке *a* на рис. 8.30) и скачок возникает

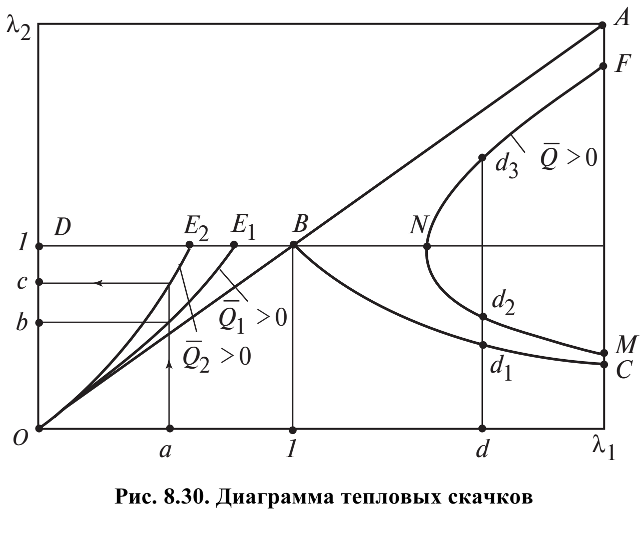


Рис. 8.30. Диаграмма тепловых скачков

в результате подвода теплоты $\bar{Q}_1$ (кривая OE_1), то за ним скорость $\lambda_{1b} > \lambda_{1a}$. При увеличении подвода теплоты до значения $\bar{Q}_2$ скорость за скачком увеличивается до значения $\lambda_{2c} > \lambda_{2b}$.

В точках E_1 и E_2 на рис. 8.30 определяется то максимальное количество теплоты, которое можно подвести к потоку при скоростях λ_{1E_1} и λ_{1E_2}.

В сверхзвуковой области ($\lambda_1 > 0$) скоростям λ_2 за тепловыми скачками при $\bar{Q} = \text{const} > 0$ соответствует кривая *FNM.* Ее верхняя ветвь *FN* относится к чисто тепловому скачку, за которым скорость λ_2 оказывается меньше скорости λ_1 ($\lambda_2 < \lambda_1$), но остается сверхзвуковой (в точке d_3 на рис. 8.30).

Ветвь *NM* соответствует скоростям λ_2 за тепловым скачком, совмещенным с адиабатическим прямым скачком уплотнения. При таком совмещенном скачке скорость за λ_2 (в точке d_2) оказывается дозвуковой ($\lambda_2 < \lambda_1$). Однако эта скорость будет больше скорости λ_2 в точке d_1, соответствующей чисто адиабатическому прямому скачку уплотнения. Этот результат является следствием того, что за прямым адиабатическим скачком скорости всегда дозвуковые, а подвод теплоты к дозвуковому потоку приводит к его ускорению. Соответственно скорость за скачком в точке d_2 оказывается выше скорости λ_2 в точке d_1.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое волны возмущения и конус возмущения?
2. Как связан угол возмущения α с безразмерной скоростью M?
3. Что такое характеристика сверхзвукового потока?
4. Что такое годограф скорости и плоскость годографа скорости?
5. Как связаны между собой характеристики в плоскости течения и в плоскости годографа скорости?
6. Какую форму имеют характеристики в плоскости годографа скорости?
7. Для расчета каких характеристик сверхзвукового потока используется диаграмма характеристик?
8. Чем отражается волна разрежения от твердой поверхности и свободной границы струи?
9. Что такое центрированный пучок волн разрежения?
10. Чем определяется ширина центрированного пучка волн разрежения?
11. Как найти предельный угол поворота потока в центрированном пучке волн разрежения?
12. Чему равна проекция скорости на нормаль к характеристике?
13. В чем физическая причина возникновения скачков уплотнения?
14. Как меняются до скачка уплотнения и после него проекции скорости на фронт скачка?
15. Как связаны между собой нормальные составляющие скорости до скачка уплотнения и после него?

16. Чему равна безразмерная скорость λ_2 за скачком уплотнения, если известна скорость λ_1 до скачка уплотнения?
17. Что такое ударная поляра и какие величины можно определить с ее помощью?
18. Каковы картины отражения скачка уплотнения от твердой стенки и свободной границы струи?
19. Каким способом можно погасить отражение волны и скачки?
20. Что такое профилированное сопло Лаваля?
21. Как классифицируются скачки уплотнения?

Глава 9

ИСТЕЧЕНИЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ (ГАЗООБРАЗНЫХ И ПАРОВЫХ СРЕД) ИЗ СОПЛ И НЕПРОФИЛИРОВАННЫХ ОТВЕРСТИЙ

Задачи, связанные с истечением различных сред из сопл и отверстий, имеют важное практическое значение и сводятся в конечном счете к определению либо массового или объемного расхода через конкретное устройство при известной разности давлений во входном и выходном сечениях, либо необходимой проходной площади сопл или отверстий, обеспечивающей заданный расход рабочей среды, либо перепада давления между контрольными сечениями, при котором через конкретное сопло или отверстие можно пропустить заданный расход рабочей среды. При этом сама форма сопл, отверстий или щелей может быть самой разнообразной.

Однако для решения указанных выше задач достаточно рассмотреть особенности истечения газообразных или паровых сред из суживающихся и расширяющихся сопл, а также из коротких цилиндрических отверстий и щелей с острой кромкой.

9.1. Истечение сред из суживающихся сопл

Идеальное плоское или осесимметричное суживающееся сопло с прямолинейной осью должно обеспечивать равномерное ускорение движущейся среды таким образом, чтобы в его выходном сечении формировалось равномерное выходное поле скоростей.

Этому условию в значительной степени соответствуют сопла, приведенные на рис. 9.1, образующие которых очерчены либо по лемнискате (*а*), либо радиусной кривой (*б*) или имеют более сложный профиль (*в*), рассчитанный по следующей формуле Витошинского для осесимметричного сопла:

$$r = \frac{r_1}{\sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2\right] \frac{(1 - 3x^2/l^2)^2}{(1 - x^2/3l^2)^2}}} . \tag{9.1}$$

Здесь r — радиус в текущем сечении сопла вдоль продольной оси x; r_1 — радиус сопла в выходном сечении; r_0 — радиус сопла в начальном сечении; l — общая длина сопла.

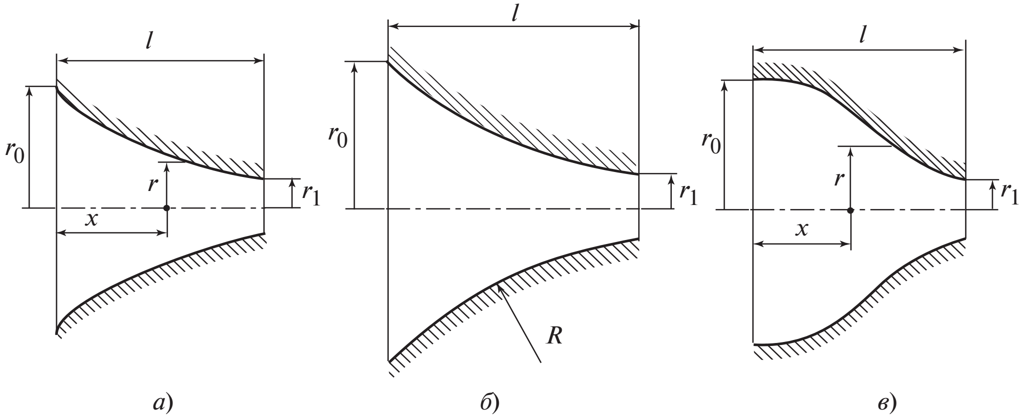


Рис. 9.1. Формы образующих суживающихся сопл:
а — профиль лемнискатный; *б* — профиль радиусный; *в* — профиль Витошинского

Сопла, рассчитанные по формуле (9.1), или близкие к ним по форме образующих используют для соединения труб при переходе от большого диаметра к меньшему в целях обеспечения плавного ускорения потока с минимальными потерями энергии.

При соединении суживающихся сопл с большими емкостями наиболее часто используются сопла с лемнискатными или радиусными образующими (рис. 9.1, *а* и *б*).

Как было показано ранее (см. гл. 5), в канале с постоянно уменьшающейся проходной площадью ускорение потока ограничено критической скоростью c_*, которая достигается в узком сечении сопла при критическом отношении давлений $\varepsilon_* = p_{1*}/p_{01}$, где p_{01} — давление полного торможения в выходном сечении; p_{1*} — давление за соплом, при котором начинается режим критического истечения из сопла.

Заметим, что для хорошо спроектированных сопл давление полного торможения за соплом p_{01} очень мало отличается от давления полного торможения p_0 перед соплом.

При уменьшении давления за соплом ниже p_{1*} ($p_1 < p_{1*}$) расширение потока от давления p_{1*} до давления p_1 происходит в волнах разрежения за пределами суживающегося сопла. При этом в его выходном сечении ни скорость, ни давление, ни плотность уже не меняются и их значения остаются равными критическим. Соответственно остается неизменным и расход среды через сопло.

Таким образом, в суживающихся соплах возможны два режима истечения — режим с дозвуковыми скоростями при $\varepsilon_{1*} < \varepsilon_1 < 1$ и режим критического истечения при $\varepsilon_1 \le \varepsilon_{1*}$.

Найдем, по какому закону меняется массовый расход рабочей среды m через суживающееся сопло при дозвуковых перепадах давления на нем.

Согласно уравнению расхода

$$m = \mu\rho_1 c_1 F_1, \tag{9.2}$$

где μ — коэффициент расхода, равный отношению действительного расхода m к теоретически возможному расходу идеальной жидкости при равномерном поле скоростей в выходном сечении сопла; ρ_1 и c_1 — некоторые средние плотность и скорость в этом сечении.

Проведем далее в формуле (9.2) следующие очевидные преобразования:

$$m = \mu \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{c_1}{c_{1*}} F_1 \rho_0 c_{1*} = \mu\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1/k} \lambda_1 F_1 \frac{p_0}{RT_0} \sqrt{\frac{2kRT_0}{k+1}},$$

где $\dfrac{\rho_1}{\rho_0} = \left(\dfrac{p_1}{p_0}\right)^{1/k} = \varepsilon_1$; $\rho_0 = \dfrac{p_0}{RT_0}$; $c_{1*} = \sqrt{\dfrac{2kRT_0}{k+1}}$,

или

$$m = \mu\varepsilon^{1/k}\lambda_1 F_1 \sqrt{\frac{2k}{k+1}} \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}}.$$

Безразмерная скорость λ_1 и отношение давлений ε_1 связаны между собой уравнением [см. (5.32)]

$$\varepsilon_1 = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}\left(1 - \varepsilon_1^{\frac{k-1}{k}}\right)}.$$

Таким образом,

$$m = \mu \sqrt{\frac{2k}{(k-1)R}} \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \varepsilon_1^{1/k} \sqrt{1 - \varepsilon_1^{\frac{k-1}{k}}}\; F_1. \tag{9.3}$$

Для воздуха $k = 1{,}4$ $R = 287{,}15$ м^2/(с$^2 \cdot$ К) и соответственно

$$m = 0{,}156\, \mu \frac{p_0 F_1}{\sqrt{T_0}} \varepsilon^{0{,}714} \sqrt{1 - \varepsilon_1^{0{,}286}}. \tag{9.4}$$

Для перегретого пара k = 1,3 R = 464 м^2/(с^2 · К) и

$$m = 0{,}137\,\mu\,\frac{p_0F_1}{\sqrt{T_0}}\ \varepsilon^{0{,}77}\ \sqrt{1-\varepsilon_1^{0{,}231}}\ . \tag{9.5}$$

В формулах (9.3)—(9.5) величины, определяющие массовый расход, имеют следующие единицы измерения:

$$[p_0] \text{ — Па; } [F_1] \text{ — м}^2\text{; } [T] \text{ — К; } [m] \text{ — кг/с.}$$

Как уже отмечалось, максимальный расход через суживающееся сопло достигается при критическом режиме истечения, когда

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \text{[см. (5.36)].}$$

В этом случае

$$m_* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}\sqrt{\frac{k}{R}}\ \mu\,\frac{p_0F_1}{\sqrt{T_0}}\,. \tag{9.6}$$

Для воздуха

$$m_* = 0{,}0404\mu\ \frac{p_0F_1}{\sqrt{T_0}}\,. \tag{9.7}$$

Для перегретого пара

$$m_* = 0{,}0311\mu\ \frac{p_0F_1}{\sqrt{T_0}}\,. \tag{9.8}$$

Коэффициент расхода μ для хорошо спрофилированных суживающихся сопл близок к единице, и обычно μ = 0,98÷0,985.

Как следует из формулы (9.6), при достижении критического истечения из суживающегося сопла массовый расход не зависит от давления p_1 за соплом и меняется прямо пропорционально давлению полного торможения p_0 и обратно пропорционально корню квадратному из абсолютной температуры полного торможения T_0.

Зависимость массового расхода m от относительного давления ε_1 при неизменных начальных параметрах рабочей среды качественно иллюстрируется кривой, изображенной на рис. 9.2

При $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_*$ с уменьшением относительного давления ε_1 происходит непрерывное увеличение расхода, причем участок расходной характеристики ab весьма точно описывается дугой эллипса. При наступлении критического режима истечения расход с уменьшением противодавления ($\varepsilon_1 < \varepsilon_*$) не меняется, поскольку все параметры потока в выходном сечении сопла

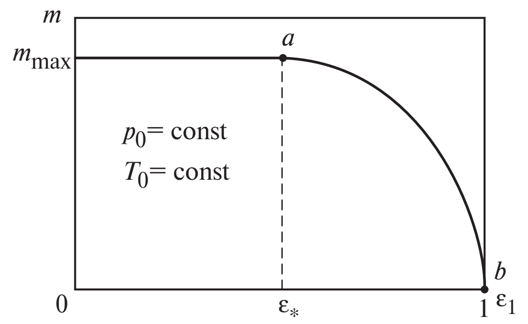


Рис. 9.2. Зависимость массового расхода сжимаемой жидкости через суживающееся сопло от относительного давления ε_1 за соплом

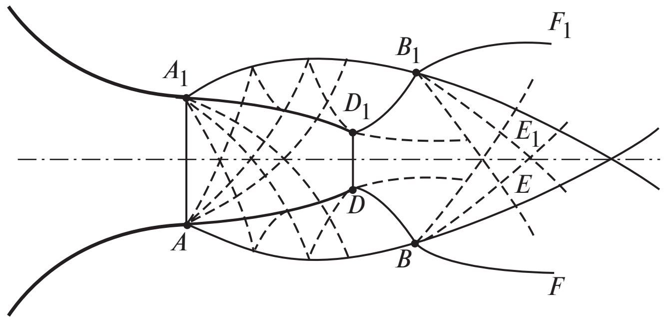


Рис. 9.3. Волновой спектр за суживающимся соплом при $\varepsilon_1 < \varepsilon_*$

остаются неизменными, а расширение потока происходит уже за пределами сопла в системе волн разрежения. На рис. 9.3 приведен волновой спектр, возникающий за соплом при $\varepsilon_1 < \varepsilon_*$.

Представленная волновая картина за осесимметричными соплами при снижении относительного давления ε_1 ниже критического значения ($\varepsilon_1 < \varepsilon_*$) оказывается более сложной, чем при истечении из плоских сопл.

При взаимном пересечении волн разрежения, выходящих из точек A_1 и A, происходит их непрерывное искривление с образованием внутри струи криволинейного клина разрежения A_1D_1DA с основанием в выходном сечении сопла. Внутри этого клина давление становится существенно ниже давления окружающей среды $p_\text{а}$. Волны разрежения, отраженные от свободной границы A_1B_1 и AB волнами сжатия, замыкаются скачками уплотнения B_1D_1 (криволинейный скачок), D_1D (прямой скачок) и DB (криволинейный скачок), образуя обратный криволинейный клин сжатия. В центральной области струи за прямым скачком D_1D скорость потока становится дозвуковой при сверхзвуковой скорости в остальной части струи. Далее вдоль струи процессы расширения и сжатия периодически повторяются.

9.2. Переменные режимы истечения из суживающихся сопл. Сетка расходов

Эксплуатация устройств, содержащих в проточных частях суживающиеся сопла, происходит в условиях переменных начальных и конечных давлений. При этом, естественно, в широком диапазоне меняются и расходы рабочих сред. Наиболее типичной эксплуатационной схемой, обеспечивающей переменные режимы истечения, является схема, приведенная на рис. 9.4.

Здесь с помощью задвижек N_1 и N_2 можно менять как начальное давление p_{0n} перед суживающимся соплом, так и давление p_{1n} за ним. Максимальные давление и температуру в подводящей магистрали обозначим через p_0 и T_0 соответственно.

Рассмотрим, как будет меняться массовый расход среды при изменении давлений p_{0n} и p_{1n}.

При сверхкритических перепадах давления $\left(\varepsilon_1 = \dfrac{p_{1n}}{p_{0n}} < \varepsilon_*\right)$ согласно формуле (9.6) расход будет определяться в виде

$$m_{*i} = A\mu \frac{p_{0n} F_1}{\sqrt{T_{0n}}} \quad \left(A = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{\frac{k}{R}}\right).$$

Максимальный критический расход в рассматриваемой системе достигается при полном открытии задвижки N_1, когда давление перед соплом p_{0n} достигает максимальной величины p_0. Тогда

$$m_{*\max} = A\mu \frac{p_0 F_1}{\sqrt{T_0}} \, . \tag{9.9}$$

Использовав в качестве нормирующих множителей величины $m_{*\max}$ и p_0, перейдем от абсолютных к относительным расходам q:

$$q = \frac{m_{*i}}{m_{*\max}} = \frac{p_{0n}}{p_0} \sqrt{\frac{T_0}{T_{0n}}} \, .$$

Рис. 9.4. Расчетная схема включения суживающегося сопла в трубопроводную систему

Поскольку при дросселировании среды на задвижке N_1 температуры торможения T_{0n} меняются очень мало, то можно принять, что

$$\sqrt{T_0/T_{0n}} \approx 1 .$$

В результате $q = \varepsilon_0 = p_{0n}/p_0$.

Таким образом, в области критических истечений относительный расход q меняется пропорционально относительному начальному давлению ε_0.

В области докритического истечения массовый расход через сопло определяется по формуле (9.3):

$$m = \mu \sqrt{\frac{2k}{(k-1)R}}\, \frac{p_{0n}F_1}{\sqrt{T_{0n}}} \left(\frac{p_{1n}}{p_{0n}}\right)^{1/k} \sqrt{1-\left(\frac{p_{1n}}{p_{0n}}\right)^{\frac{k-1}{k}}} . \qquad (9.10)$$

Перейдем в формуле (9.10) от абсолютных величин к относительным, разделив (9.10) на (9.9). В результате будем иметь

$$q = \frac{m_i}{m_{*\max}} = \left(\frac{2}{k-1}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{p_{0n}}{p_0} \left(\frac{p_{1n}/p_0}{p_{0n}/p_0}\right)^{1/k} \sqrt{1-\left(\frac{p_{1n}/p_0}{p_{0n}/p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}} \sqrt{\frac{T_0}{T_{0n}}} .$$

Обозначим относительное давление за соплом через ε_{1n} $\left(\varepsilon_{1n} = \dfrac{p_{1n}}{p_0}\right)$ и примем с учетом изложенного выше $\sqrt{T_0/T_{0n}} \approx 1$. Тогда

$$q = \left(\frac{2}{k-1}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{1n}}{\varepsilon_0}\right)^{1/k} \sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_{1n}}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}} .$$

Поскольку $\left(\dfrac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \varepsilon_*$, то

$$q = \left(\frac{2}{k-1}\right)^{1/2} \varepsilon_*^{\;-\frac{k+1}{2}}\, \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{1n}}{\varepsilon_0}\right)^{1/k} \sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_{1n}}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}} . \qquad (9.11)$$

Здесь $\varepsilon_0 = p_{0n}/p_0$.

Следует особо подчеркнуть, что в формуле (9.11) как расход среды, так и все давления выражены в долях от максимально возможных значений этих величин в показанной на рис. 9.4 схеме.

Расход m_i выражен в долях от максимально возможного расхода $m_{*\max}$ ($q = m/m_{*\max}$), давление p_{1n} отнесено к максимально возможному давлению в рассматриваемой системе p_0 ($\varepsilon_{1n} = p_{1n}/p_0$), и начальное давление полного торможения p_{0n} также отнесено к максимальному давлению p_0 ($\varepsilon_{0n} = p_{0n}/p_0$).

Таким образом, относительный расход q является функцией трех относительных давлений ε_{1n}, ε_0 и ε_*, т.е. $q = f(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_0, \varepsilon_*)$.

В [2, 31] показано, что с большой точностью зависимость (9.11) может быть аппроксимирована уравнением эллипса следующего вида:

$$q = \sqrt{\varepsilon_0^2 - \frac{(\varepsilon_{1n} - \varepsilon_0\varepsilon_*)^2}{(1 - \varepsilon_*)^2}}\,. \tag{9.12}$$

В [2] отмечается универсальность формулы (9.12) и возможность ее применения для истечений как из профилированных сопл, так и из отверстий и щелей различной формы. При этом, однако, для каждого устройства необходимо знать действительное значение критического отношения давлений ε_*, которое, как будет показано далее, существенно снижается при неравномерном поле скоростей в выходном сечении. Указанные ранее (см. гл. 5) значения критических отношений давлений имеют место только при равномерном выходном поле скоростей, когда одновременно по всему сечению достигается критическая скорость.

Согласно формуле (9.12) относительный расход q при фиксированном значении критического отношения давлений ε_* является функцией двух относительных давлений ε_{1n} и ε_0:

$$q = f(\varepsilon_{1n}\varepsilon_0). \tag{9.12а}$$

Таким образом, если в приведенной зависимости в качестве параметра принять величину ε_0, то на плоскости $q - \varepsilon_{1n}$ можно построить сетку кривых, которые будут отличаться друг от друга значением параметра ε_0. Эта сетка, приведенная на рис. 9.5, называется сеткой расходов и связывает между собой все три величины, входящие в функциональное соотношение (9.12а).

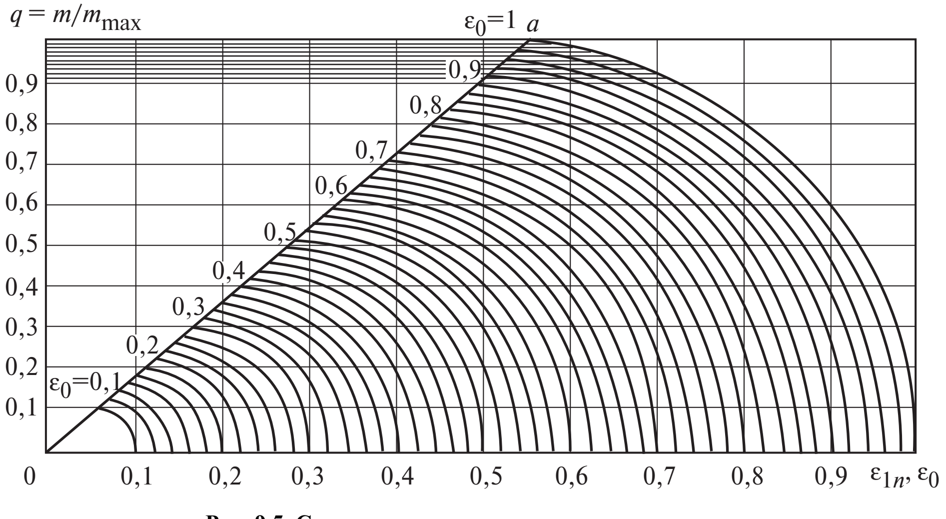


Рис. 9.5. Сетка расходов для суживающегося сопла

Вся плоскость $q - \varepsilon_{1n}$ линией $0a$, построенной по уравнению $q = \varepsilon_0$, делится на две части. Слева от этой линии лежит область критических истечений из суживающегося сопла, а справа — область докритических истечений.

Используя сетку расходов, по любым двум известным величинам легко можно найти третью величину.

Рассмотрим два характерных примера расчета переменных режимов суживающегося сопла.

9.3. Примеры использования сетки расходов для расчета переменных режимов суживающихся сопл

Задача 1. Найти, насколько изменится расход пара через суживающееся сопло, если давление полного торможения перед соплом увеличится с p_{01} до p_{02} при одновременном повышении давления за соплом с p_{11} до p_{12}.

До начала расчета заметим, что при решении любых задач с использованием сетки расходов необходимо определить максимальное давление p_0 в рассматриваемой задаче и это давление использовать в качестве нормирующей величины при оценке всех относительных давлений.

В данной задаче из четырех давлений (p_{01}, p_{02}, p_{11} и p_{12}) наибольшим является давление $p_0 = p_{02}$. Тогда для первого режима

$$\varepsilon_{01} = \frac{p_{01}}{p_0} = \frac{p_{01}}{p_{02}};$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{p_{11}}{p_0} = \frac{p_{11}}{p_{02}}.$$

Используя сетку расходов, по этим величинам находим значение относительного расхода q_1.

Для второго режима

$$\varepsilon_{02} = \frac{p_{02}}{p_0} = \frac{p_{02}}{p_{02}} = 1;$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{p_{12}}{p_0} = \frac{p_{12}}{p_{02}}.$$

По этим относительным давлениям находим значение относительного расхода q_1.

В результате

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{m_2/m_{*\max}}{m_1/m_{*\max}} = \frac{q_2}{q_1}.$$

Задача 2. Определить, при каком начальном давлении p_{02} массовый расход пара m_2 через суживающееся сопло изменится в 2 раза, если известно, что на первом режиме при начальном давлении p_{01} и противодавлении p_{11} расход пара был равен m_1. На втором режиме давление за соплом увеличилось до $p_{12} > p_{01}$.

Из условия задачи нельзя определить максимальное давление в системе, так как ясно, что неизвестное давление p_{02} должно быть существенно выше давления p_{12}. В этом случае значение максимального давления p_0 принимается произвольно, но так, чтобы оно было заведомо больше неизвестного давления p_{02} (при ошибочном выборе максимального давления либо относительные расходы q, либо относительное давление ε_{1n} окажутся больше единицы).

Относительно выбранного максимального давления p_0 и ведутся все последующие расчеты.

На первом режиме известны:

$$\varepsilon_{01} = p_{01}/p_0;\ \varepsilon_{11} = p_{11}/p_0.$$

На втором режиме

$$\varepsilon_{02} = p_{02}/p_0;\ \varepsilon_{12} = p_{12}/p_0.$$

Для первого режима q_1 определяется по сетке расходов. Тогда для второго режима $q_2 = 2q_1$ (по условию задачи).

Зная ε_{12} и q_2, по сетке расходов находим значение относительного давления ε_{02}, и давление $p_{02} = p_0\varepsilon_{02}$.

Все остальные задачи, связанные с использованием для расчетов сетки расходов, являются вариациями рассмотренных двух характерных задач.

9.4. Истечение из расширяющихся сопл и их диаграмма режимов

Классические расширяющиеся сопла (сопла Лаваля) состоят из суживающейся и расширяющейся частей (рис. 9.6). Характерными сечениями сопла являются входное сечение площадью F_0, минимальное сечение площадью F_1 и выходное сечение площадью F_2. Характерным безразмерным геометрическим параметром рассматриваемого сопла является его степень расширения $n = F_2/F_1$.

В отличие от суживающегося сопла в данном случае выполняется сформулированное выше (см. гл. 3) необходимое условие перехода от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям.

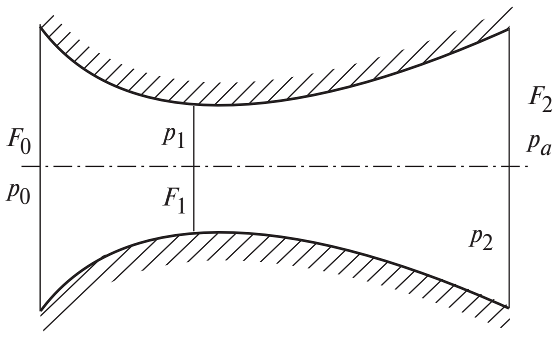


Рис. 9.6. Профиль сопла Лаваля

Для этого перехода необходимо обеспечить такое распределение проходных площадей по ходу потока, при котором минимальное сечение располагалось бы внутри канала и за ним имело бы место увеличение проходной площади.

В таких каналах минимальное сечение площадью F_1 лимитирует расход рабочей среды, значение которого при дозвуковых скоростях в этом сечении будет по-прежнему вычисляться по формуле (9.3), но теперь относительное давление ε_1 в данном сечении будет зависеть как от давления p_2 за соплом, так и от его степени расширения n.

При заданном отношении давлений $\varepsilon_2 = p_2/p_0$ методика определения относительного давления ε_1 при течении в сопле идеальной жидкости сводится к следующему.

По известному отношению давлений ε_2 с помощью таблиц газодинамических функций находится значение удельного приведенного расхода q_2.

Поскольку при дозвуковых скоростях минимальное сечение сопла не является критическим, то, используя геометрическую трактовку величины q_2, можно найти площадь $F_{*\text{ф}}$ некоторого «виртуального» критического сечения:

$$q_2 = F_{*\text{ф}}/F_2, \quad F_{*\text{ф}} = q_2F_2.$$

В результате удельный приведенный расход q_1 в узком сечении рассматриваемого сопла будет определяться по следующему соотношению:

$$q_{12} = \frac{F_{*\text{ф}}}{F_1} = q_2\frac{F_2}{F_1} = q_2n. \tag{9.13}$$

Далее из таблиц газодинамических функций по значению q_1 легко находится значение относительного давления ε_1, а затем вычисляется соответствующий этому давлению расход рабочей среды m [см. (9.3)]. При отсутствии таблиц газодинамических функций уравнение для определения величины ε_1 вытекает из (9.13) при подстановке в него соотношений для приведенных удельных расходов q_1 и q_2 [см. (5.41)]:

$$\varepsilon_1^{\frac{k-1}{k}}\sqrt{1-\varepsilon_1^{\frac{k-1}{k}}} = \left(\varepsilon_2^{\frac{k-1}{k}}\sqrt{1-\varepsilon_2^{\frac{k-1}{k}}}\right)n. \tag{9.14}$$

Для реальной среды значение относительного давления ε_1 будет заметно выше найденного указанным способом, так как в расширяющемся канале потери энергии оказываются достаточно большими и пренебрегать ими нельзя.

В целях упрощения задачи погрешность при оценке величины ε_1 можно компенсировать за счет более низкого коэффициента расхода μ в формуле (9.3). Если для суживающихся сопл значение коэффициента μ принимается равным 0,98—0,985, то для расширяющихся сопл $\mu = 0{,}75 \div 0{,}8$.

Снижение давления p_2 за соплом приводит и к уменьшению давления p_1 в узком сечении расширяющегося сопла, причем, чем больше степень расширения сопла, тем интенсивнее снижается давление в его узком сечении.

При некотором давлении $p_2 = p_a$ ($\varepsilon_2 = \varepsilon_a$) в узком сечении сопла давление снижается до критического давления p_*, а скорость потока достигает критической. Однако при относительном давлении $\varepsilon_a = p_a/p_0$ перехода внутри сопла к сверхзвуковым скоростям не происходит. При достижении критической скорости в последующей расширяющейся части происходят снижение скорости потока и плавное повышение давления до значения p_a в выходном сечении сопла. Таким образом, относительное давление $\varepsilon_2 = \varepsilon_a$ определяет границу дозвуковых режимов течения в расширяющемся сопле.

Поскольку при $p_2 = p_a$ в узком сечении сопла достигается критическая скорость, то для этого режима истечения узкое сечение становится критическим, следовательно,

$$q_2 = q_a = \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{n}.$$

Выражая далее q_a через относительное давление ε_a, получаем уравнение для определения граничной величины ε_a, отделяющей дозвуковые режимы истечения из расширяющегося сопла от сверхзвуковых режимов:

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \varepsilon_a^{\frac{k-1}{k}} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}\left(1 - \varepsilon_a^{\frac{k-1}{k}}\right)} = \frac{1}{n}. \tag{9.15}$$

При относительном давлении за соплом $\varepsilon_2 < \varepsilon_a$ в его расширяющейся части происходит переход к сверхзвуковым скоростям. Для всех $\varepsilon_2 < \varepsilon_a$ расход среды при снижении противодавления p_2 остается неизменным и определяется по формуле (9.6).

Наиболее ясное представление о характере течения рабочей среды в расширяющихся соплах (соплах Лаваля) дает диаграмма режимов, приведенная на рис. 9.7.

На этой диаграмме показано, как меняется распределение относительных давлений $\varepsilon_i = p_i/p_0$ вдоль продольной оси сопла при различных значениях относительных давлений ε_a за соплом. На рис. 9.7 также изображена проточная часть сопла, соответствующая приведенным на диаграмме кривым.

При снижении давления за соплом в пределах $\varepsilon_{a1} < \varepsilon_a < 1$, как уже отмечалось выше, в его проточной части имеет место дозвуковой режим течения. Соответственно в суживающейся части сопла скорость возрастает, а давление падает. В расширяющейся части, наоборот, скорость падает, а давление растет. При относительном давлении за соплом $\varepsilon_a < \varepsilon_{a1}$ в его узком сечении достигается критическая скорость и кривая *1* является границей между дозву-

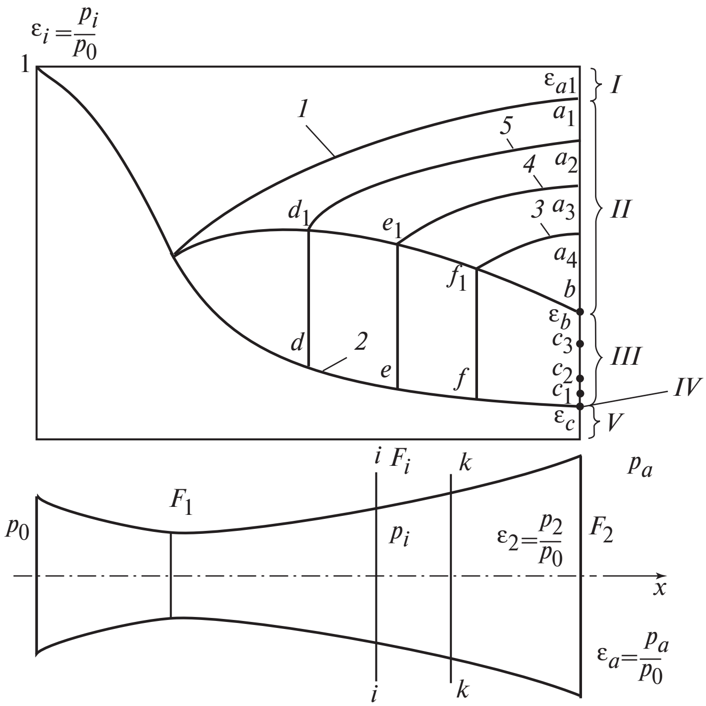


Рис. 9.7. Диаграмма режимов сопла Лаваля

ковыми и сверхзвуковыми режимами течения. Если относительное давление ε_a снижается до давления ε_c ($\varepsilon_a = \varepsilon_c$), то после узкого сечения сопла поток продолжает непрерывно расширяться до выходного сечения, а его скорость становится сверхзвуковой и непрерывно увеличивается вдоль продольной оси сопла. Этому режиму на рис. 9.7 соответствует кривая *2*.

При $\varepsilon_a < \varepsilon_c$ расширение потока продолжается уже за пределами сопла. В этом случае за ним возникает сложная волновая структура, т.е. волны разрежения чередуются с волнами сжатия так, как показано на рис. 9.8. Первичными здесь являются волны разрежения (штриховые линии), которые от свободной границы струи отражаются волнами сжатия (сплошные линии).

Методика расчета кривых *1* и *2* сводится к следующему.

Поскольку для режимов течения, соответствующих кривым *1* и *2*, в узком сечении сопла скорость становится критической, то это сечение является критическим (рис. 9.7). Тогда можно найти приведенный удельный расход q_i, используя его геометрическую интерпретацию :

$$q_i = \frac{F_*}{F_i} = \frac{F_1}{F_i} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_i \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_i^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (9.16)$$

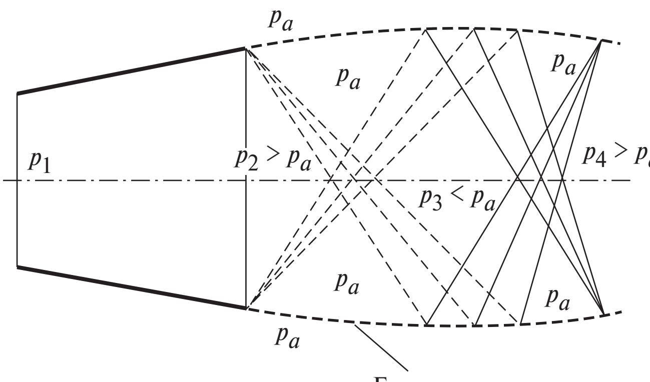


Рис. 9.8. Волновой спектр за соплом Лаваля при расширении потока за пределами сопла

По полученному значению q_i находятся относительная скорость λ_i и все параметры потока в этом сечении, причем следует иметь в виду, что одному и тому же значению приведенного расхода q_i соответствуют два значения скорости λ_i и два значения относительных давлений в дозвуковой и сверхзвуковой областях течения. По первому значению (ε_{i1}) строится кривая *1*, а по второму (ε_{i2}) — кривая *2*.

В случае, когда давление за соплом ε_a становится больше давления ε_c, происходит торможение сверхзвукового потока в возникающих на срезе сопла скачках уплотнения. Чем больше разница между давлениями ε_c и ε_a, тем большей интенсивностью обладают возникающие скачки уплотнения. Соответствующие волновые спектры за соплом показаны на рис. 9.9. При сравнительно небольшом перепаде давлений ($\Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_a - \varepsilon_{c1}$) за соплом возникают сравнительно слабые плоские косые скачки уплотнения (рис. 9.9, *а*). Их интенсивность растет при $\Delta\varepsilon_2 > \Delta\varepsilon_1$ (рис. 9.9, *б*), и при $\Delta\varepsilon_2 > \Delta\varepsilon_3$ за соплом вместо плоских возникает криволинейная система скачков (рис. 9.9, *в*). Наконец, при увеличении противодавления ε_a до некоторого значения ε_b (см. рис. 9.7) на срезе сопла возникает прямой скачок уплотнения, обеспечивающий повышение давления от ε_c до ε_b.

Алгоритм расчета характерного давления ε_b сводится к следующим операциям.

По известному давлению ε_c находится скорость λ_c в сверхзвуковой части таблиц газодинамических функций. В прямом скачке уплотнения скорость за ним ε_b становится дозвуковой и определяется по соотношению (8.35):

$$\lambda_b = 1/\lambda_c.$$

Далее либо по формулам, либо по таблицам находится относительное давление ε'_b, соответствующее скорости λ_b. При этом следует иметь в виду,

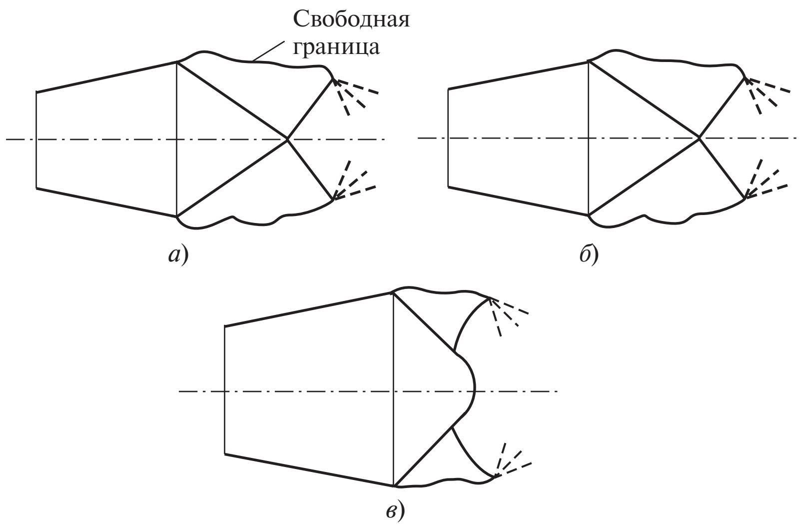


Рис. 9.9. Возможные схемы скачка уплотнения за соплом Лаваля:
а — плоские косые скачки, $\Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_a - \varepsilon_{c_1}$; *б* — плоские косые скачки, $\Delta\varepsilon_2 > \Delta\varepsilon_1$ ($\Delta\varepsilon_2 = \varepsilon_a - \varepsilon_{c_2}$); *в* — криволинейные (мостообразные скачки), $\Delta\varepsilon_3 > \Delta\varepsilon_2$ ($\Delta\varepsilon_3 = \varepsilon_a - \varepsilon_{c_3}$)

что процесс торможения потока в скачках уплотнения всегда сопровождается снижением давления полного торможения, и теперь найденное относительное давление $\varepsilon_b' = p_b/p_{02}$, где p_{02} — давление за прямым скачком уплотнения ($p_{02} < p_0$), которое больше давления $\varepsilon_b = p_b/p_0$.

Для перехода к относительному давлению $\varepsilon_b = p_b/p_0$ необходимо знать степень снижения давления полного торможения $\varepsilon_0 = p_{02}/p_0$ в прямом скачке, так как

$$\varepsilon_b = \frac{p_b}{p_{02}} \frac{p_{02}}{p_0} = \varepsilon_b'\varepsilon_0.$$

Величина ε_0 связана с безразмерной скоростью M_1 перед скачком уплотнения и углом наклона скачка β по формуле (8.40). При $\beta = 90°$ (прямой скачок)

$$\varepsilon_{01} = \frac{p_{02}}{p_0} = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{M_1^{2k/(k-1)}}{\left(M_1^2 + \frac{2}{k-1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{2k}{k-1} M_1^2 - 1\right)^{\frac{1}{k-1}}}. \qquad (9.17)$$

Для упрощения расчета вместо формулы (9.17) можно воспользоваться диаграммой скачков уплотнения, приведенной ниже (см. рис. П.2).

Если давление среды за соплом $\varepsilon_a > \varepsilon_b$, то прямой скачок смещается внутрь сопла, таким режимам соответствуют кривые *3*, *4*, *5*. В данном случае торможение потока происходит как в прямых скачках уплотнения ff_1, ee_1, dd_1, так и в последующей расширяющейся части сопла. Поскольку за прямым скачком уплотнения скорость потока становится дозвуковой, то далее она падает, а давление растет (линии f_1a_4; e_1a_3; d_1a_2).

Расчет прямого скачка уплотнения внутри сопла ведется по уже рассмотренной методике. Зная давление перед скачком ε_i, определяются скорость λ_i и скорость за прямым скачком $\lambda_j = 1/\lambda_i$ ($j = f_1$, e_1, d_1). Скорости λ_j соответствуют относительное давление ε'_j и относительный удельный расход q'_j. Как уже отмечалось, величина $\varepsilon_j = \varepsilon'_b\varepsilon_0$, где потеря давления полного торможения ε_0 находится для скорости $\lambda_j(\mathrm{M}_j)$ по формуле (9.17).

Расчет последующего за скачком уплотнения распределения давления требует некоторого пояснения. В связи с тем, что за скачком происходит снижение давления полного торможения, то относительный приведенный расход за скачком q'_j становится функцией не только отношения соответствующих площадей $\dfrac{F_*}{F_i} = \dfrac{F_1}{F_i}$, но и параметра ε_0:

$$q'_j = \frac{F_*}{\varepsilon_0 F_i} = \frac{F_{*\text{ф}}}{F_i} \qquad \left(F_{*\text{ф}} = \frac{F_1}{\varepsilon_0}\right).$$

Отсюда $F_{*\text{ф}} = F_i q'_j$, и для произвольного сечения сопла k — k (см. рис. 9.7)

$$q'_k = \frac{F_{*\text{ф}}}{F_k} = \frac{F_i}{F_k} q'_j .$$

Далее по известной величине q'_k в дозвуковой части таблиц газодинамических функций находится относительное давление ε'_k в рассматриваемом сечении, и затем определяется $\varepsilon_k = \varepsilon'_k\varepsilon_0$.

Аналогичным образом находятся и все остальные относительные давления для дозвуковых участков кривых *3*, *4*, *5* (см. рис. 9.7).

Если для заданного противодавления ε_{ak}, лежащего в диапазоне $\varepsilon_b < \varepsilon_a < \varepsilon_{a_1}$, требуется найти положение скачка внутри сопла, то расчет ведется методом последовательных приближений. В первом приближении положение скачка задается произвольно, и по приведенной методике расчета находится противодавление ε_{an}, соответствующее этому положению скачка. Если найденное давление $\varepsilon_{an} > \varepsilon_{ak}$, то во втором приближении положение скачка смещается к выходному сечению, если $\varepsilon_{an} < \varepsilon_{ak}$, то скачок нужно сместить против потока.

Положение скачка смещается до тех пор, пока расчетная величина ε_{an} не совпадет с заданным значением ε_{ak}.

Таким образом, на основе проведенного анализа режимов течения в расширяющемся сопле можно выделить пять характерных режимов.

1. Режим с дозвуковыми скоростями внутри сопла *I*, который имеет место при изменении относительного давления ε_a за соплом в диапазоне $\varepsilon_{a_1} < \varepsilon_a < 1$.

2. Сверхзвуковой режим со скачками уплотнения внутри сопла *II*. Этот режим имеет место при изменении противодавления ε_a в диапазоне $\varepsilon_b < \varepsilon_a < \varepsilon_{a_1}$.

3. Режим со скачками уплотнения на срезе сопла *III*, при котором величина ε_a меняется в пределах $\varepsilon_c < \varepsilon_a < \varepsilon_b$.

4. Расчетный режим расширяющегося сопла Лаваля *IV*. **Расчетным режимом сопла Лаваля называется режим, при котором давление на его выходном срезе p_2 равняется давлению окружающей среды p_a при сохранении сверхзвуковой скорости в выходном сечении сопла.**

На этом режиме за соплом возникает только очень слабая волновая структура, обусловленная естественным торможением вытекающей из сопла рабочей среды.

5. Режим с расширением потока за пределами сопла *V*. Для этого режима $0 < \varepsilon_a < \varepsilon_c$.

9.5. Истечение из отверстий и щелей с острой кромкой

Если характерной особенностью профилированных суживающихся сопл является практически равномерный профиль скорости в выходном сечении, то при истечении из непрофилированных отверстий выходное поле скоростей оказывается весьма неравномерным. Эта неравномерность оказывается максимальной при истечении рабочих сред из отверстий и щелей с острой кромкой. Форма такого отверстия и качественное распределение скоростей в его выходном сечении показаны на рис. 9.10.

Острые кромки отверстия являются особыми точками, вблизи которых происходит резкое локальное ускорение потока. В результате при истечении

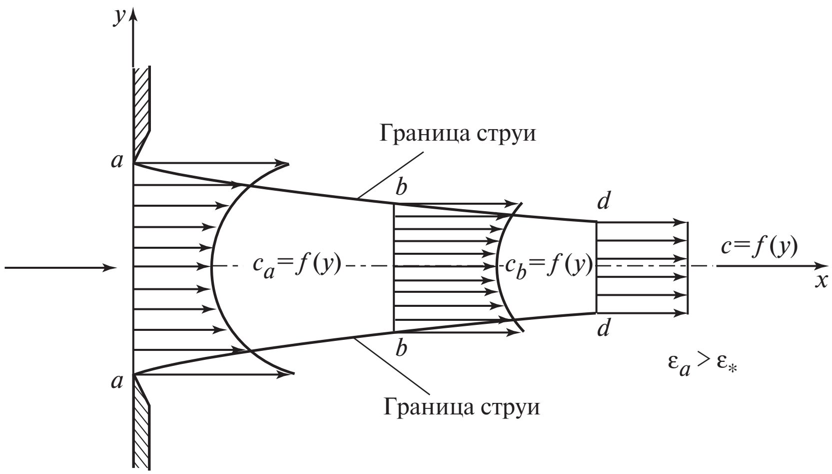


Рис. 9.10. Схема отверстия с острыми кромками и качественная картина профиля скорости в выходном сечении

рабочей среды (воздуха, пара, газа) скорости потока на периферии оказываются существенно выше скоростей в центре струи, и по мере удаления от выходного сечения поперечное сечение струи на некотором расстоянии сужается, а профиль скорости выравнивается. При этом степень сужения струи $F_a/F_1 = 0{,}8 \div 0{,}85$.

Отмеченная особенность истечения среды из отверстий с острой кромкой приводит к значительному снижению коэффициента расхода μ. Если для профилированных сопл действительный расход отличается от теоретического расхода идеальной жидкости всего на 2 %, то в данном случае для несжимаемой жидкости μ = 0,63 [2].

Неравномерность распределения скоростей в поперечном сечении струи приводит к серьезным изменениям картины перехода к критическим скоростям. Ряд характерных примеров такого перехода изображен на рис. 9.11.

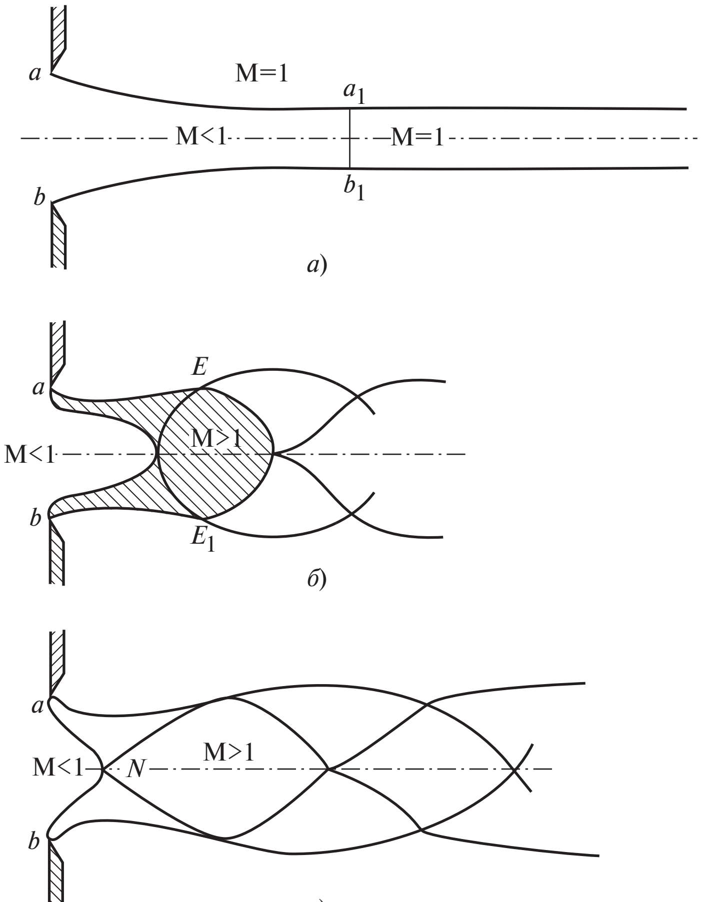


Рис. 9.11. Схемы истечения среды из отверстия с острой кромкой:
а — $\varepsilon_a = \varepsilon_*$; *б* — $\varepsilon_a < \varepsilon_*$; *в* — $\varepsilon_a \le \varepsilon_{**}$

Так как на границе струи давление равно давлению окружающей среды, то при снижении относительного давления ε_a до критического значения ($\varepsilon_a = \varepsilon_*$) при неравномерном выходном поле скоростей звуковая скорость (М = 1) будет вначале достигнута на границе струи при сохранении в ее внутренней части дозвуковых скоростей. По мере удаления от выходного отверстия поперечное сечение струи уменьшается и скорость внутри нее увеличивается до тех пор, пока не достигнет скорости звука (рис. 9.11, *а*). В результате линия перехода aa_1b_1b через скорость звука оказывается растянутой в осевом направлении.

При уменьшении относительного противодавления ε_a ниже критического значения ($\varepsilon_a < \varepsilon_*$) область сверхзвуковых скоростей распространяется на периферийную часть струи и частично захватывает область, расположенную до выходного сечения отверстия с острой кромкой (рис. 9.11, *б*). Дозвуковая область оказывается расположенной внутри сверхзвуковой части струи, а линия перехода через скорость звука (М = 1) принимает форму вытянутого «языка». Острые кромки отверстия становятся источником возмущения сверхзвукового потока, при обтекании которого происходит расширение потока в центрированных пучках волн разрежения. Эти волны с приближением к линии перехода (М = 1) постепенно затухают, а внешняя граница струи расширяется, принимая форму «бочки».

При дальнейшем снижении величины ε_a область сверхзвуковых скоростей расширяется за счет сокращения дозвуковой части струи.

Линия перехода ab постепенно приближается к выходному отверстию, и наступает такой момент, когда первая волна разрежения, выходящая из острой кромки отверстия, не пересекает, а только касается линии перехода (рис. 9.11, *в*). С этого момента при дальнейшем снижении противодавления форма линии перехода уже не меняется. Значение относительного давления, при котором линия перехода занимает стабильное положение, называют вторым критическим отношением давлений ε_{**}.

Основная особенность истечения газообразных или паровых сред из непрофилированных отверстий состоит в том, что при неравномерном выходном поле скоростей расход среды продолжает зависеть от противодавления и при снижении относительного давления ε_a ниже критической величины ε_*. (Напомним, что в суживающихся профилированных соплах при $\varepsilon_a \le \varepsilon_*$ расход с изменением противодавления не меняется.)

В рассматриваемом случае зависимость расхода среды от противодавления прекращается только с момента, когда относительное давление за отверстием с острой кромкой достигает второго критического отношения давлений ε_{**} и форма поверхности перехода через скорость звука перестает меняться при дальнейшем снижении противодавления p_a. Для перегретого пара $\varepsilon_{**} = 0{,}13$, а для воздуха $\varepsilon_{**} = 0{,}037$.

Наглядное представление о том, как меняется относительный расход q при снижении относительного давления ε_a за отверстием с острой кромкой и за суживающимся соплом, дают зависимости, изображенные на рис. 9.12. Здесь в обоих случаях действительный массовый расход m отнесен к теоретическому критическому расходу через равновеликое суживающееся сопло.

Если пренебречь очень маленькими потерями энергии в суживающемся сопле, то для каждого фиксированного отношения давлений ε_{ai} коэффициент расхода $\mu_{\text{отв}}$ через отверстие с острой кромкой будет определяться по формуле

$$\mu_{\text{отв}} = q_{\text{отв}}/q_{\text{с}} = m_{\text{отв}}/m_{\text{с}}.$$

Для воздуха значения величины $\mu_{\text{отв}}$, рассчитанные С.А. Чаплыгиным, приведены ниже:

$\varepsilon_a = p_a/p_0$	0,676	0,641	0,606	0,559	0,529	0,037
$\mu_{\text{отв}}$	0,68	0,70	0,71	0,73	0,74	0,85

При использовании введенного коэффициента расхода $\mu_{\text{отв}}$ и формулы (9.10) расход газа или пара через отверстие с острой кромкой будет определяться по следующей формуле:

$$m_{\text{отв}} = \mu_{\text{отв}} m_{\text{с}} = \mu_{\text{отв}}\mu_{\text{с}} \sqrt{\frac{2k}{(k-1)R}}\, \frac{p_0 F_{\text{отв}}}{\sqrt{T_0}}\, \varepsilon_a^{1/k} \sqrt{1 - \varepsilon_a^{\frac{k-1}{k}}}\; F_{\text{отв}}\,. \quad (9.18)$$

Максимальный расход через отверстие с острой кромкой достигается при $\varepsilon_a = \varepsilon_{**}$. Его значение, как и для сопла, определяется по формуле (9.8), но в этом случае коэффициент расхода $\mu_{\text{отв}} = \mu'_{\text{отв}}$ равен его значению при $\varepsilon_a = \varepsilon_{**}$ (для воздуха $\mu'_{\text{отв}} = 0{,}85$):

$$m_{**} = \mu'_{\text{отв}}\mu_{\text{с}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{\frac{k}{R}}\, \frac{p_0 F_{\text{отв}}}{\sqrt{T_0}}\,. \quad (9.19)$$

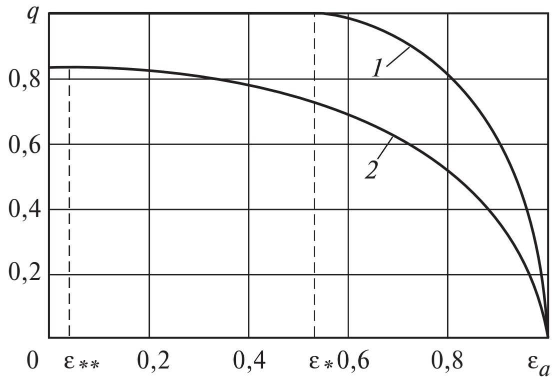


Рис. 9.12. Зависимости $q = f(\varepsilon_a)$ для профилированного суживающегося сопла (кривая *1*) и для отверстия с острой кромкой (кривая *2*)

Разделив (9.18) на (9.19), получим, что относительный расход среды q через отверстие с острой кромкой будет определяться в виде

$$q = \frac{m_{\text{отв}}}{m_{**}} = \frac{\mu_{\text{отв}}}{\mu'_{\text{отв}}} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{\frac{2}{k-1}}\, \varepsilon_a^{1/k} \sqrt{1-\varepsilon_a^{\frac{k-1}{k}}}\, F_{\text{отв}}\,. \tag{9.20}$$

Отсюда

$$m_{\text{отв}} = q m_{**} = \mu'_{\text{отв}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{\frac{k}{R}}\, \frac{p_0 F_{\text{отв}}}{\sqrt{T_0}}\, q\,. \tag{9.21}$$

Внесем в схему на рис. 9.4 вместо суживающегося сопла отверстие с острой кромкой и так же, как и для сопла, все давления будем относить к максимально возможному давлению $p_{0\max}$ в этой системе. Тогда

$$q = \left(\frac{2}{k-1}\right)^{1/2} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{an}}{\varepsilon_0}\right)^{1/k} \sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon_{an}}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}}\,. \tag{9.22}$$

Аппроксимируя эту зависимость уравнением эллипса, получим формулу, аналогичную (9.12), но вместо первого критического отношения давлений ε_* в эту формулу следует ввести второе критическое отношение давлений ε_{**}:

$$q = \sqrt{\varepsilon_0^2 - \frac{(\varepsilon_{an} - \varepsilon_0 \varepsilon_{**})^2}{(1-\varepsilon_{**})^2}}\,. \tag{9.23}$$

Рассмотренные особенности истечения из отверстия с острой кромкой обусловлены, как уже отмечалось, максимально возможной неравномерностью поля скоростей в выходном сечении этого отверстия, что существенно усложняет процесс перехода к звуковым скоростям при снижении противодавления ниже критических давлений. При равномерном выходном поле скоростей линия (точнее, поверхность) перехода к скорости звука располагается перпендикулярно продольной оси струи, выходящей из сопла. В то же время для отверстия с острой кромкой эта линия имеет сложную вытянутую вдоль оси струи форму, которая непрерывно меняется до тех пор, пока относительное давление ε_a не достигнет второго критического отношения давлений ε_{**}.

Отсюда следует, что при истечении из произвольных непрофилированных отверстий, для которых выходная неравномерность поля скоростей будет меньше, чем у отверстия с острой кромкой, второе критическое отношение давлений для первых отверстий будет выше указанных ранее величин.

Таким образом, если первое критическое отношение давлений имеет фиксированное значение, определяемое только физическими свойствами движущейся среды, то второе критическое отношение давлений существенно зависит от формы отверстий, из которых происходит истечение этой среды, причем чем меньше неравномерность выходного поля скоростей, тем меньше разница между первым и вторым критическими отношениями давлений.

9.6. Лабиринтовые уплотнения и их расчет

Рассмотренные особенности истечения газообразных и паровых сред из щелей и непрофилированных отверстий с острыми выходными кромками приводят в конечном счете к существенному снижению расхода этих сред по отношению к расходу через равновеликие (по выходным площадям) суживающиеся сопла.

В ряде случаев указанное свойство щелевых отверстий может быть использовано для снижения утечек газа или пара из внутренних полостей тех или иных роторных машин вдоль выходящих наружу вращающихся валов. В частности, в паровых и газовых турбинах для снижения таких утечек широко используют лабиринтовые уплотнения, схематическое изображение которых приведено на рис. 9.13. В этом случае часть вала в области расположения лабиринтовых уплотнений выполняется в виде последовательно чередующихся выступов и впадин. Над ними устанавливаются дисковые гребни уплотнений с острыми кромками, закрепленные в корпусе турбины. Между острыми кромками гребней уплотнения и валом сохраняется кольцевой зазор δ.

Гребни, выступы и впадины на валу образуют замкнутые камеры лабиринтовых уплотнений. Рабочая среда (в паровых турбинах это пар), проходя через кольцевой зазор между валом и гребнем уплотнения, в замкнутом пространстве камеры уплотнения полностью теряет свою скорость, причем процесс торможения потока происходит при постоянном давлении p_i. В результате давление полного торможения p_{0i} и статическое давление p_i в каждой камере уплотнения оказываются равными, т.е. $p_{01} = p_1$; $p_{02} = p_2$ … $p_{0i} = p_i$ … … $p_{0(z-1)} = p_{z-1}$.

Качественно картина течения рабочей среды через лабиринтовое уплотнение показана на рис. 9.13.

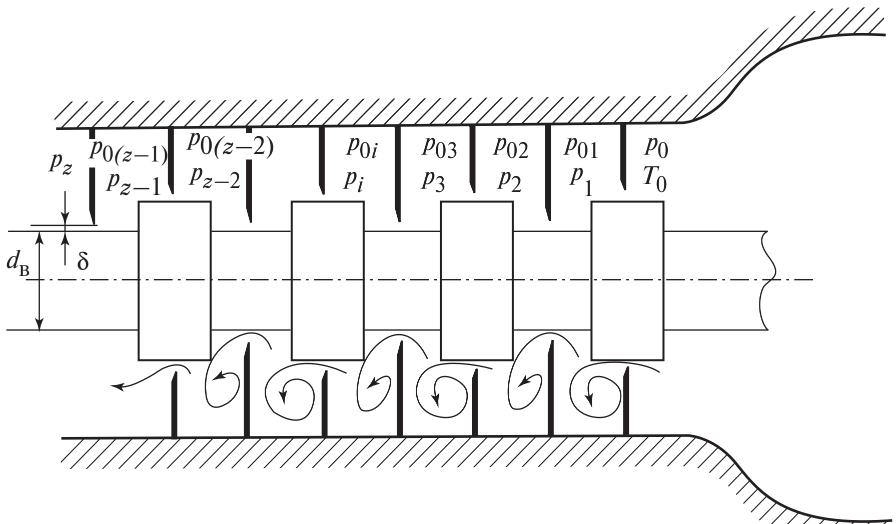


Рис. 9.13. Расчетная схема лабиринтового уплотнения

Давление в потоке при переходе из одной камеры в другую непрерывно снижается, а удельные объемы рабочей среды увеличиваются. Соответственно скорости потока в кольцевых зазорах уплотнений непрерывно повышаются и достигают максимальных значений в зазоре последнего гребня уплотнения. При фиксированном значении числа гребней при некотором относительном давлении $\varepsilon_z = p_z/p_0$ под последним гребнем максимальная скорость становится равной критической скорости c_*.

Процесс ускорения потока под гребнями и его последующего торможения при постоянном давлении в h, s-диаграмме показан на рис. 9.14.

Здесь линии перепадов энтальпий $\Delta h = h_j - h_{j+1} = \dfrac{c_{j+1}^2}{2}$ $[j = 0 \div (z-1)]$ определяют кинетическую энергию потока, выходящего из-под гребня, а на участках изобар $(j+1) - 0_{j+1}$ происходит полная диссипация этой энергии в камерах лабиринтовых уплотнений при постоянном давлении $p_{j+1} = \text{const}$.

Для расчета утечки среды через такое лабиринтовое уплотнение используем приведенную на рис. 9.13 схему и показанные на ней обозначения давлений.

При условии полного гашения скорости среды в камерах между кольцевыми щелями, как уже отмечалось, давление полного торможения в этих камерах p_{0i} и статическое давление p_i будут равны между собой ($p_{0i} = p_i$). Кроме того, равными будут и относительные массовые расходы $q = m/m_*$ через все щели уплотнения.

Величина q, определяемая по формуле (9.11), весьма точно аппроксимируется уравнением эллипса [см. (9.12)], которое, применительно к щели с острой кромкой, может быть записано в виде

$$q = \sqrt{\varepsilon_{01}^2 - \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_0\varepsilon_{**})^2}{(1-\varepsilon_{**})^2}}\,, \tag{9.24}$$

где $\varepsilon_0 = p_{0i}/p_0$ — относительное давление полного торможения в камерах гашения скорости; $\varepsilon_i = p_i/p_0$ — относительное статическое давление; ε_{**} —

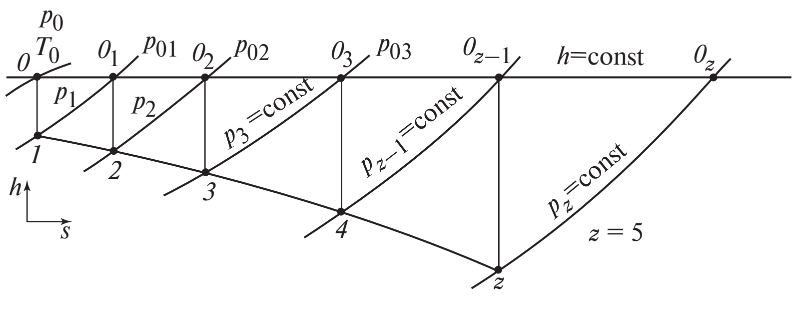


Рис. 9.14. Схема последовательного расширения рабочей среды в лабиринтовом уплотнении в *h*, *s*-диаграмме

второе критическое отношение давлений при истечении среды через щель с острой кромкой.

Представим формулу (9.24) в виде

$$q^2(1-\varepsilon_{**})^2 = \varepsilon_{0i}^2 - 2\varepsilon_{0i}^2\varepsilon_{**} + \varepsilon_{0i}^2\varepsilon_{**}^2 + \varepsilon_i^2 - 2\varepsilon_i\varepsilon_0\varepsilon_{**} + \varepsilon_0^2\varepsilon_*^2$$

и проведем следующие очевидные преобразования:

$$q^2(1-\varepsilon_{**})^2 = \varepsilon_{0i}^2(1-\varepsilon_{**}) - \varepsilon_{0i}^2\varepsilon_{**} + \varepsilon_i^2\varepsilon_{**} - \varepsilon_i^2\varepsilon_{**} + \varepsilon_i^2 - 2\varepsilon_i\varepsilon_0\varepsilon_{**} =$$

$$= \varepsilon_{0i}^2(1-\varepsilon_{**}) - \varepsilon_i^2(1-\varepsilon_{**}) + \varepsilon_{**}(\varepsilon_{0i}^2 - 2\varepsilon_{0i}\varepsilon_i + \varepsilon_i^2).$$

Отсюда

$$q^2(1-\varepsilon_{**})^2 = (1-\varepsilon_{**})(\varepsilon_{0i}^2 - \varepsilon_i^2) + \varepsilon_{**}(\varepsilon_{0i} - \varepsilon_i)^2. \qquad (9.25)$$

Применим далее формулу (9.25) последовательно к каждому гребню уплотнения:

для 1-го гребня $q^2(1-\varepsilon_{**})^2 = (1-\varepsilon_{**})(1-\varepsilon_1^2) + \varepsilon_{**}(1-\varepsilon_1)^2$;

для 2-го гребня $q^2(1-\varepsilon_{**})^2 = (1-\varepsilon_{**})(\varepsilon_{01}^2 - \varepsilon_2^2) + \varepsilon_{**}(\varepsilon_{01} - \varepsilon_2)^2$;

для 3-го гребня $q^2(1-\varepsilon_{**})^2 = (1-\varepsilon_{**})(\varepsilon_{02}^2 - \varepsilon_3^2) + \varepsilon_{**}(\varepsilon_{02} - \varepsilon_3)^2$;

…..................................

для $(z-1)$-го гребня $q^2(1-\varepsilon_{**})^2 =$

$$= (1-\varepsilon_{**})(\varepsilon_{0(z-2)}^2 - \varepsilon_{z-1}^2) + \varepsilon_{**}(\varepsilon_{0(z-2)} - \varepsilon_{z-1})^2;$$

для z -го гребня $q^2(1-\varepsilon_{**})^2 =$

$$= (1-\varepsilon_{**})(\varepsilon_{0(z-1)}^2 - \varepsilon_z^2) + \varepsilon_{**}(\varepsilon_{0(z-1)} - \varepsilon_z)^2.$$

Поскольку $\varepsilon_1 = \varepsilon_{01}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{02}$ … $\varepsilon_{z-1} = \varepsilon_{0(z-1)}$, то при сложении всех приведенных уравнений получим

$$zq^2(1-\varepsilon_{**})^2 = (1-\varepsilon_{**})(1-\varepsilon_z^2) + \varepsilon_{**}\sum_{i=1}^{z}(\varepsilon_{0(i-1)} - \varepsilon_i)^2.$$

При $z > 5$

$$(1-\varepsilon_{**})(1-\varepsilon_z^2) >> \varepsilon_{**}\sum_{i=1}^{z}(\varepsilon_{0(z-1)} - \varepsilon_2)^2,$$

и приближенно

$$zq^2(1-\varepsilon_{**}) = 1-\varepsilon_z^2.$$

Отсюда

$$q \approx \sqrt{\frac{1-\varepsilon_z^2}{z(1-\varepsilon_{**})}}. \qquad (9.26)$$

Так как относительный расход q равен отношению массового расхода через щель m к максимальному критическому расходу m_*, определяемому начальными параметрами пара перед лабиринтовым уплотнением $p_0 T_0$, то

$$m_{\text{у}} = \mu_{\text{у}} m_* q = A \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} F_{\text{у}} q \mu_{\text{у}} = A \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} F_{\text{у}} \mu_{\text{у}} \sqrt{\frac{1 - \varepsilon_z^2}{z(1 - \varepsilon_{**})}} \,. \qquad (9.27)$$

Здесь $\mu_{\text{у}}$ — коэффициент расхода для уплотнения, учитывающий реальный профиль скорости в щели уплотнения, степень гашения скорости в камерах уплотнений и форму кромок гребней. В процессе эксплуатации уплотнений их кромки сглаживаются, происходит постепенное увеличение второго критического отношения давлений ε_{**}. В этой связи при расчетах утечки среды через уплотнения вместо величины ε_{**} используют первое критическое отношение давлений ε_*.

С учетом этого замечания для перегретого пара формула (9.27) принимает следующий вид:

$$m_{\text{у}} = 0{,}046 \mu_{\text{у}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \pi d_{\text{в}} \delta \sqrt{\frac{1 - \varepsilon_z^2}{z}} \,, \qquad (9.28)$$

где δ — зазор между кромкой гребня и валом; $d_{\text{в}}$ — диаметр вала.

Если начальную температуру T_0 выразим из уравнения состояния $p_0 V_0 =$ $= R T_0$ и подставим ее в формулу (9.28), то получим

$$m_{\text{у}} = 0{,}99 \mu_{\text{у}} \frac{p_0}{\sqrt{V_0}} \pi d_{\text{в}} \delta \sqrt{\frac{1 - \varepsilon_z^2}{z}} \,. \qquad (9.29)$$

Здесь V_0 — удельный объем пара при давлении p_0 и температуре T_0.

Для воздуха

$$m_{\text{у}} = 0{,}0588 \mu_{\text{у}} \frac{p_0}{\sqrt{V_0}} \pi d_{\text{в}} \delta \sqrt{\frac{1 - \varepsilon_z^2}{z}} = 0{,}977 \mu_{\text{у}} \sqrt{\frac{p_0}{V_0}} \pi d_{\text{в}} \delta \sqrt{\frac{1 - \varepsilon_z^2}{z}} \,. \quad (9.30)$$

Из приведенных соотношений следует, что наибольшее влияние на расход рабочей среды через уплотнение оказывает радиальный зазор.

Вопросы для самоконтроля

1. Какова рациональная форма суживающегося сопла, соединяющего трубопроводы при переходе с большего диаметра к меньшему?
2. Как меняется расход среды в области, где относительное давление ε_i меньше критического ε_*?
3. Что такое относительный расход q?
4. Какие величины связывает сетка расходов для суживающихся сопл?

5. Какие характерные режимы истечения реализуются в суживающемся сопле?
6. Назовите характерные режимы истечения из расширяющихся сопл.
7. Что такое расчетный режим истечения из расширяющихся сопл?
8. На каких режимах истечения из расширяющихся сопл расход среды зависит от давления за соплом?
9. Как определить расход рабочей среды через расширяющееся сопло?
10. В чем принципиальная разница при истечении из профилированного суживающегося сопла и при истечении из щели с острой кромкой?
11. Что такое второе критическое отношение давлений?
12. В чем физическая причина изменения расхода при $\varepsilon_{**} < \varepsilon_a < \varepsilon_*$?
13. В чем причина ускорения потока под гребнями лабиринтовых уплотнений при движении его в направлении к последнему гребню?
14. Под каким гребнем лабиринтового уплотнения может быть достигнута критическая скорость?
15. По какому закону меняется расход рабочей среды через лабиринтовое уплотнение с изменением числа гребней в этом уплотнении?

Глава 10
ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

10.1. Значение и задачи физического моделирования

Экспериментальная гидрогазодинамика является самостоятельным разделом механики жидкостей и газов, определяющим в конечном счете правильность теоретических расчетов и способность машин и механизмов, созданных на основании этих расчетов, нормально функционировать в достаточно большой период времени.

Степень востребованных методов экспериментальной гидрогазодинамики (степень востребования прямого физического эксперимента) находится в прямой зависимости от уровня развития теоретической гидрогазомеханики. Чем выше степень ее развития и соответственно точность теоретических расчетов, тем в меньшей степени становится востребованным физический эксперимент на специальных модельных установках.

Однако технический прогресс всегда порождает новые задачи, теоретическое решение которых на базе существующих расчетных методов уже оказывается невозможным, и приоритет вновь переходит к экспериментальным методам исследований. Проводить такие исследования на реальных (натурных) объектах с технической точки зрения крайне сложно и экономически нецелесообразно.

По указанной причине основные экспериментальные исследования осуществляются на модельных установках, моделирующих в определенном масштабе геометрическую форму исследуемых объектов. Кроме того, сами исследования по ряду причин могут проводиться на другом рабочем теле, при скоростях, начальных и конечных параметрах жидкости, отличающихся от натурных.

В теоретическом плане **задача моделирования сводится к тому, чтобы сформулировать условия, при соблюдении которых на основании модельных испытаний можно получить необходимые сведения о протекании исследуемых явлений или процессов в натурных условиях**.

В основе гидрогазодинамического моделирования лежит представление о подобии сравниваемых течений. Суть этого подобия состоит в следующем. Два течения жидкости или газа **подобны**, если по характеристикам одного из них можно получить характеристики другого путем простого умножения характеристик модельного течения на некоторые постоянные коэффициенты, называемые **коэффициентами подобия**.

Подобие двух течений обеспечивается в случае геометрического подобия обтекаемых тел или границ каналов, по которым движется жидкость, а также подобия полей скоростей (кинематическое подобие) и силовых полей (динамическое подобие).

Два тела или канала геометрически подобны, если сходственные отрезки их пропорциональны, а углы между сходственными отрезками в сходственных точках одинаковы.

Для кинематического подобия сравниваемых полей скоростей необходимо, чтобы в сходственных точках скорости были пропорциональны, а углы векторов скоростей относительно осей координат в этих точках равны друг другу.

Наконец, для динамического подобия необходима пропорциональность сил, действующих на сходственные элементы, и равенство углов соответствующих векторов сил.

Таким образом, физическое (механическое) подобие двух течений обеспечивается геометрическим подобием обтекаемых тел или границ каналов, внутри которых движется жидкость, а также подобием силовых и скоростных полей.

В рамках приведенного определения необходимым условием физического подобия сравниваемых течений является геометрическое подобие, а достаточное условие обеспечивается кинематическим и динамическим подобиями.

Для достижения кинематического и динамического подобий сравниваемых течений необходимо обеспечить равенство между собой некоторых безразмерных комплексов, которые называются **числами подобия** или **критериями подобия**.

Число необходимых критериев подобия и их структура находятся в результате применения теории размерностей к функциональным соотношениям, описывающим исследуемое течение или явление. Остановимся на некоторых основных положениях указанной теории.

10.2. Размерные и безразмерные величины

При решении технических задач приходится использовать ряд самых разнообразных величин, входящих в расчетные формулы и соотношения для выполнения оценки. Эти величины могут быть как размерными, так и безразмерными.

Размерными считаются величины, численные значения которых зависят от принятой системы измерений.

Примером размерных величин могут служить длина, масса, сила, время, момент силы, скорость, работа, энергия и др. Численные значения всех этих величин меняются при изменении принятой системы единиц измерения. Так, например, при оценке расстояния в километрах и в метрах одно и то же расстояние будет иметь разное численное значение. Такая же ситуация будет иметь место и при оценке скорости, значение которой будет разное, если ее измерять в метрах в секунду или в километрах в час и т.д.

Безразмерные или отвлеченные величины не зависят от используемой системы измерений и сохраняют свои численные значения в любой принятой системе основных размерных единиц.

Переход от размерных величин к безразмерным осуществляется обычно путем выражения размерной величины в долях от некоторого базового значения этой величины. Например, если скорость потока c_i в некотором канале выражать в долях от ее максимального значения $c_{\max}$, то полученное значение относительной скорости $\bar{c} = c_i/c_{\max}$ будет уже безразмерной величиной, не зависящей от того, в каких единицах измерения приводятся значения скоростей.

Однако скорость, приведенная таким образом к безразмерному виду, естественно, будет зависеть от принятого масштаба приведения. В частности, если скорости выражать в долях от скорости звука a или от критической скорости c_*, то полученные таким образом безразмерные скорости M_i и λ_i при одном и том же значении абсолютной скорости c_i будут иметь разные численные значения.

Физические величины связаны обычно друг с другом различными соотношениями.

Размерности этих величин не могут быть произвольными, а должны подчиняться определенным правилам. Так, при записи уравнения Ньютона в обычной форме ($F = ma$) можно иметь только две независимые размерности: либо для силы F и ускорения a, либо для ускорения a и массы, либо для силы F и массы m. Размерность третьей величины автоматически определяется приведенным соотношением. Если всем трем величинам в уравнении Ньютона мы придадим независимые размерности, то для соблюдения одинаковых размерностей левой и правой частей этого уравнения необходимо ввести в рассмотрение размерную постоянную K_1 и записать $F = K_1 ma$.

Таким образом, для некоторых величин мы можем установить произвольным образом какие-то единицы измерения и эти единицы принять за основные, а размерности всех остальных величин выражать через основные, используя различные уравнения связи. По такому принципу строятся все используемые системы измерений.

У нас в стране государственным стандартом СССР (ГОСТ 9867—61) с 1 января 1963 г. введена единая Международная система единиц измерения (СИ), где в качестве основных механических единиц измерения приняты: для единицы длины — метр, для массы — килограмм-масса и для времени — секунда (за единицу температуры принят кельвин).

С помощью этих основных единиц измерения выражаются размерности всех остальных механических величин (силы, работы, энергии, скорости, ускорения и др.). Для обозначения размерности какой-либо величины a часто используют следующую символическую запись $[a]$.

Обозначим единицу длины через L, единицу массы через M и единицу времени через T. Тогда размерности скорости c, давления p, плотности ρ, силы F могут быть записаны в виде

$$[c] = \frac{L}{T}; \quad [p] = \frac{M}{LT^2}; \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}; \quad [F] = \frac{ML}{T^2}. \tag{10.1}$$

В данном случае все механические величины могут быть выражены через размерности трех основных величин. (В принципе число независимых размерностей может быть как больше, так и меньше трех. Этот вопрос подробно обсуждается в специальных работах по методам подобия и размерности*.)

Рассматривая символические записи размерностей (10.1), легко заметить, что производные размерности любых величин, полученные на основе принятых основных единиц измерения, могут быть записаны в виде степенного одночлена

$$L^{m_1} M^{m_2} T^{m_3}.$$

Формула, устанавливающая зависимость размерности какой-либо величины от размерностей основных единиц измерения, называется формулой размерности. В специальных курсах по теории размерностей можно найти строгое доказательство того, что все формулы размерности должны иметь вид степенных одночленов. Этот вывод вытекает из следующего очевидного положения, согласно которому отношение двух любых величин a и b, выраженных в одинаковых единицах измерения, представляет собой безразмерную величину $\overline{a} = a/b$, не зависящую от используемой системы измерений.

Указанное положение может быть реализовано только при условии, что формулы размерностей рассматриваемых величин являются степенным одночленом. Только при этом условии относительная величина $\overline{a}$ может иметь нулевую размерность.

Действительно, если $[a] = L^{m_1} M^{m_2} T^{m_3}$ и $[b] = L^{m_1} M^{m_2} T^{m_3}$, то

$$[\,\overline{a}\,] = \frac{[a]}{[b]} = \frac{L^{m_1} M^{m_2} T^{m_3}}{L^{m_1} M^{m_2} T^{m_3}} = L^0 M^0 T^0.$$

На этом основании при нормировании скоростей, давлений, сил и любых других величин принимают в качестве нормирующих масштабов в общем-то произвольные величины. Их выбор часто диктуется рядом добавочных непринципиальных рассуждений. Так, например, при построении кривых распределения безразмерных скоростей по обводам обтекаемого тела удобно в качестве нормирующего масштаба использовать максимальное значение скорости из рассматриваемого диапазона абсолютных скоростей. Тогда безразмерная величина $\overline{c}_i = c_i / c_{i\,\max}$ будет меняться в достаточно узком диапазоне $(0 \le \overline{c} \le 1)$.

Давление можно выражать не только в долях от скоростного напора, но и использовать для нормировки давление полного торможения p_0 ($\varepsilon_i = p_i / p_0$).

---

* См., например, книгу Л.И. Седова «Методы подобия и размерности в механике» (М.: Наука, 1972), основные положения которой использованы в данной главе.

Ясно, что все безразмерные величины не могут зависеть от принятой основной системы единиц измерения только в случае, если формулы размерностей будут иметь вид степенных одночленов.

10.3. П-теорема

Функциональные соотношения, отражающие некоторые физические закономерности, естественно, не должны зависеть от той или иной системы единиц измерений. Следовательно, их внутренняя структура должна допускать переход от одной системы единиц измерения к другой, в том числе и переход от размерных соотношений к безразмерным. Рассмотрим методологию такого перехода.

Пусть функциональная зависимость

$$a = f(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n), \tag{10.2}$$

связывающая между собой $n + 1$ размерную величину, определяет некоторую физическую характеристику исследуемого объекта или явления.

Эта характеристика a зависит от n независимых между собой аргументов $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$. Выделим из них k величин ($a_1, a_2, \ldots, a_k$), имеющих **независимые размерности**.

Это означает, что **размерности любой из этих *k* величин не могут быть получены в результате степенной комбинации размерностей оставшихся *k* – 1 величин**, т.е.

$$[a_1] \neq [a_2]^{m_2} \ldots [a_{k-1}]^{m_{k-1}}.$$

Независимыми размерностями обладают, например, диаметр d, плотность ρ, скорость c. Их формулы размерностей имеют вид:

$$[d] = L; \quad [\rho] = ML^{-3}; \quad [c] = LT^{-1}.$$

Ясно, что из этого ряда величин ($k = 3$) нельзя получить размерность скорости при любой степенной комбинации размерностей плотности и диаметра:

$$[c] \neq [\rho]^{n_1}[d]^{n_2} = (ML^{-3})^{n_1}(L)^{n_2}.$$

Точно так же нельзя получить размерность плотности, комбинируя размерности диаметра и скорости:

$$[\rho] \neq [c]^{m_1}[d]^{m_2} = (LT^{-1})^{m_1}(L)^{m_2}.$$

В то же время ряд $n - k$ величин имеют зависимые размерности, если размерность любой величины a_j из этого ряда может быть выражена через степенную комбинацию размерностей оставшихся $n - k - 1$ членов. т.е.

$$[a_j] = [a_{k+1}]^{q_1}[a_{k+2}]^{q_2} \ldots [a_{n-k-1}]^{q_{n-k-1}}.$$

Так, например, кинематическая вязкость ν, скорость c и длина l имеют зависимые размерности, так как

$$[l] = [c]^{q_1}[\nu]^{q_2} = (LT^{-1})^{q_1}(L^2T^{-1})^{q_2} \text{ (при } q_1 = -1 \text{ и } q_2 = 1\ \ [l] = L);$$

$$[c] = [l]^{q_1}[\nu]^{q_2} = (L)^{q_1}(L^2T^{-1})^{q_2} \text{ (при } q_1 = -1 \text{ и } q_2 = 1\ \ [c] = LT^{-1});$$

$$[\nu] = [l]^{q_1}[c]^{q_2} = (L)^{q_1}(LT^{-1})^{q_2} \text{ (при } q_1 = 1 \text{ и } q_2 = 1\ \ [\nu] = L^2T^{-1}).$$

Размерности всех величин, имеющих зависимые размерности, всегда можно выразить через размерности величин, имеющих независимые размерности.

Таким образом, если в функциональном соотношении первые k величин $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ имеют независимые размерности, то размерности остальных $n + 1 - k$ величин можно выразить в виде следующих формул размерностей основных величин, имеющих независимые размерности:

$$\left.\begin{array}{l} [a] = [a_1]^{m_1}[a_2]^{m_2}\ldots[a_k]^{m_k}; \\ [a_{k+1}] = [a_1]^{n_1}[a_2]^{n_2}\ldots[a_k]^{n_k}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [a_n] = [a_1]^{q_1}[a_2]^{q_2}\ldots[a_k]^{q_k}. \end{array}\right\} \tag{10.3}$$

Перейдем к некоторой новой системе единиц измерения. Тогда функциональное соотношение (10.2) примет вид $\gamma = f(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n)$. В этом случае масштабы величин с независимыми размерностями изменятся в β_i раз ($i = 1, 2, \ldots, k$), и в новой системе величины с независимыми единицами измерения γ_i будут равны

$$\gamma_1 = \beta_1 a_1; \quad \gamma_2 = \beta_2 a_2; \ldots; \quad \gamma_k = \beta_k a_k.$$

При этом зависимые размерности остальных величин $\gamma, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n$ с учетом соотношений (10.3) определяются следующим образом:

$$[\gamma] = [\gamma_1]^{m_1}[\gamma_2]^{m_2}\ldots[\gamma_k]^{m_k} = \beta_1^{m_1}\beta_2^{m_2}\ldots\beta_k^{m_k}[a_1]^{m_1}[a_2]^{m_2}\ldots[a_k]^{m_k}. \tag{10.4}$$

Сравнивая (10.4) и (10.3), получаем

$$\left.\begin{array}{l} [\gamma] = \beta_1^{m_1}\beta_2^{m_2}\ldots\beta_k^{m_k}[a]; \\ [\gamma_{k+1}] = \beta_1^{n_1}\beta_2^{n_2}\ldots\beta_k^{n_k}[a_{k+1}]; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\gamma_n] = \beta_1^{q_1}\beta_2^{q_2}\ldots\beta_k^{q_k}[a_n]. \end{array}\right\} \tag{10.5}$$

Проведенные преобразования показывают, что при переходе к новой системе единиц измерения величины, имеющие зависимые размерности, в новой системе измерений равны этим величинам в старой системе, умноженным на все переходные коэффициенты β_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) в степенях, соответствующих системе (10.5).

С учетом проведенных преобразований функциональное соотношение (10.2) в новой системе единиц измерения будет иметь следующий вид:

$$\gamma = f(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n)$$

или

$$\beta_1^{m_1}\beta_2^{m_2}\ldots\beta_k^{m_k}a =$$

$$= f\left(\beta_1 a_1, \beta_2 a_2, \ldots, \beta_k a_k, \beta_1^{n_1}\beta_2^{n_2}\ldots\beta_k^{n_k}a_{k+1}, \ldots, \beta_1^{q_1}\beta_2^{q_2}\ldots\beta_k^{q_k}a_n\right). \quad (10.6)$$

Коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ при переходе от старой к новой системе единиц измерения в принципе могут быть любыми, поскольку никаких ограничений на эти величины ранее не накладывались. Пользуясь этим, выберем их таким образом, чтобы все первые k аргументов в соотношении (10.6) обратились в единицу.

Для этого следует принять

$$\beta_1 = 1/a_1;\ \beta_2 = 1/a_2;\ \ldots;\ \beta_k = 1/a_k.$$

Тогда функциональное соотношение (10.6) принимает следующий вид:

$$\frac{a}{a_1^{m_1}a_1^{m_2}\ldots a_1^{m_k}} = f\left(1, 1, \ldots, 1, \frac{a_{k+1}}{a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_k^{n_k}}, \ldots, \frac{a_n}{a_1^{q_1}a_2^{q_2}\ldots a_k^{q_k}}\right).$$

В соответствии с формулами размерностей (10.3) входящие в это соотношение комплексы

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_k^{m_k}};\ \Pi_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_k^{n_k}};\ \Pi_n = \frac{a_n}{a_1^{q_1}a_2^{q_2}\ldots a_k^{q_k}} \quad (10.7)$$

имеют нулевую размерность, т.е. являются **безразмерными**. Следовательно, соотношение

$$\Pi = f(1, 1, \ldots, 1, \Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n) \quad (10.8)$$

представляет собой безразмерную запись исходного размерного функционального соотношения (10.2).

Проведенные преобразования представляют собой доказательство так называемой П**-теоремы**, которая может быть сформулирована следующим образом: **любое физическое функциональное соотношение, связывающее между собой $n + 1$ размерную величину, может быть представлено в виде соотношения между $n + 1 - k$ безразмерными комплексами, где $k \le n$ — число величин, имеющих независимые размерности.**

Таким образом, при переходе от размерной записи любого функционального соотношения к его безразмерному виду число аргументов сокращается на число аргументов, имеющих независимые размерности.

Использование П-теоремы позволяет во многих случаях получать важные структурные соотношения, а в случае, когда число величин, имеющих независимые размерности, совпадает с числом аргументов ($k = n$), получить соответствующую формулу с точностью до некоторого постоянного коэффициента, определяемого опытным путем.

В этом частном случае соотношение (10.8) записывается в виде

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}} = f\,(1,1,\,\dots,\,1) = \text{const}.$$

Отсюда

$$a = \text{const}\ a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}. \qquad (10.9)$$

Полученная формула (10.9) отражает вполне конкретную физическую закономерность при условии, что в исходном функциональном соотношении были учтены все факторы, определяющие исследуемое явление.

В этом смысле вопрос оценки всех параметров (аргументов), определяющих рассматриваемое явление или течение жидкости, имеет важное самостоятельное значение, и эффективность применения теории размерностей зависит от того, насколько полно сформулирована решаемая задача.

Если задача имеет математическое описание в виде дифференциальных уравнений, то для оценки определяющих аргументов и их числа достаточно выписать все размерные и безразмерные величины, входящие в указанные уравнения.

При отсутствии математического описания исследуемого явления необходимо установить главные факторы, влияющие на численное значение искомой величины. В этом случае приходится как-то схематизировать само явление, отбрасывая некоторые второстепенные факторы.

Справедливость выводов, следующих из теории размерностей, в значительной степени определяется тем, насколько правильно была схематизирована задача и насколько полно учтены основные величины, влияющие на искомый результат решаемой задачи.

В общем случае теория размерностей не позволяет в явном виде установить функциональные соотношения между безразмерными параметрами. Однако, используя теорию размерностей и экспериментальные данные, на основе логических рассуждений в ряде случаев удается получать вполне конкретные расчетные соотношения.

10.4. Примеры практического использования П-теоремы

10.4.1. Уравнение расхода жидкости через поперечное сечение канала

Уравнение расхода жидкости через поперечное сечение канала теоретически уже было получено выше (см. гл. 3). Покажем, что структура указанного уравнения легко находится на основании теории размерностей.

В данном случае на основании простых наблюдений и логических рассуждений можно утверждать, что массовый расход жидкости m зависит от ее плотности ρ, площади поперечного сечения канала F и нормальной составляющей скорости c_n к этому сечению, т.е. функциональное соотношение между массовым расходом m и аргументами, его определяющими, будет иметь вид

$$m = f(c_n, \rho, F). \tag{10.10}$$

Запишем размерности всех приведенных величин:

$$[m] = \frac{M}{T}; \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}; \quad [F] = L^2; \quad [c] = \frac{L}{T}.$$

Легко видеть, что все аргументы в соотношении (10.8) имеют независимые размерности, следовательно, $k = n$. Тогда, согласно П-теореме

$$\Pi = \frac{m}{c_m^{m_1} \rho^{m_2} F^{m_3}} = \text{const}. \tag{10.11}$$

Величина П, как было показано выше, является безразмерной (имеет нулевую размерность). Исходя из этого условия, найдем коэффициенты m_1, m_2, m_3.

Формула размерности для комплекса, определяемого по соотношению (10.11), будет иметь вид

$$[\Pi] = \frac{MT^{m_1}L^{3m_2}}{TL^{m_1}M^{m_2}L^{2m_3}} = M^{1-m_2}T^{m_1-1}L^{3m_2-2m_3-m_1}.$$

Отсюда, поскольку величина П имеет нулевую размерность, получим:

$$1 - m_2 = 0; \; m_1 - 1 = 0 \text{ и } 3m_2 - 2m_3 - m_1 = 0,$$

тогда

$$m_1 = 1, \; m_2 = 1, \; m_3 = 1.$$

Следовательно, из соотношения (10.11) вытекает, что

$$m = \text{const}\; c\rho F. \tag{10.12}$$

Сравнивая (10.12) с ранее полученным теоретическим путем уравнением расхода (3.14), находим, что постоянная в (10.12) равна единице.

При отсутствии теоретического решения это же значение постоянной можно было бы получить опытным путем.

10.4.2. Расчет гидравлического сопротивления в трубах произвольного поперечного сечения

Выполним расчет гидравлического сопротивления в трубе произвольного поперечного сечения. В данном случае на основании теории размерностей найдем снижение давления Δp на единицу длины трубы. Если длина трубы l, то будем искать величину $\Delta p/l$.

Определяющими факторами, влияющими на удельное сопротивление трубы, здесь являются: характерный поперечный размер трубы a, средняя скорость $c_{\text{ср}}$ и свойства жидкости, характеризуемые плотностью ρ и динамической вязкостью μ.

Таким образом, функциональное соотношение, определяющее удельное сопротивление трубы, будет иметь вид

$$\frac{\Delta p}{l} = f(c_{\text{ср}}, a, \rho, \mu). \qquad (10.13)$$

Величины, входящие в функциональное соотношение (10.13), имеют следующие размерности:

$$\left[\frac{\Delta p}{l}\right] = \frac{M}{T^2L^2}; \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}; \quad [a] = L; \quad [c_{\text{ср}}] = \frac{L}{T}; \quad [\mu] = \frac{M}{TL}.$$

Три аргумента ρ, a, $c_{\text{ср}}$ имеют независимые размерности, а вязкость μ — зависимую размерность, поскольку она может быть выражена через размерности указанных трех аргументов:

$$[\mu] = [\rho]\,[a]\,[c_{\text{ср}}] = \frac{M}{L^3}\,L\,\frac{L}{T} = \frac{M}{TL}.$$

Таким образом, здесь число аргументов $n = 4$. Из них три ($k = 3$) имеют независимые размерности.

Следовательно, безразмерная запись уравнения (10.13) будет иметь вид:

$$\Pi = f\,(1,\ 1,\ 1,\ \Pi_{k+1}), \qquad (10.14)$$

где

$$\Pi = \frac{\Delta p}{l\rho^{m_1}a^{m_2}c_{\text{ср}}^{m_3}}; \quad \Pi_{k+1} = \frac{\mu}{\rho^{n_1}a^{n_2}c_{\text{ср}}^{n_3}}.$$

Запишем далее размерности этих комплексов:

$$[\Pi] = \frac{ML^{3m_1}T^{m_3}}{T^2L^2M^{m_1}L^{m_2}L^{m_3}} = M^{1-m_1}L^{3m_1-2-m_2-m_3}T^{m_3-2};$$

$$[\Pi_{k+1}] = \frac{ML^{3n_1}T^{n_3}}{TLM^{n_1}L^{n_2}L^{n_3}} = M^{1-n_1}L^{3n_1-1-n_2-n_3}T^{n_3-1}.$$

Из условия нулевой размерности указанных комплексов получим следующие уравнения для нахождения показателей m_i и n_i:

$$1 - m_1 = 0;\ m_3 - 2 = 0;\ 3m_1 - 2 - m_3 - m_2 = 0;$$

$$1 - n_1 = 0;\ 3n_1 - 1 - n_2 - n_3 = 0;\ n_3 - 1 = 0.$$

Отсюда

$$m_1 = 1;\ m_3 = 2;\ m_2 = -1;$$

$$n_1 = 1;\ n_3 = 1;\ n_2 = 1.$$

Следовательно,

$$\Pi = \frac{\Delta p a}{l\rho c_{\text{ср}}^2}; \quad \Pi_{k+1} = \frac{\mu}{\rho a c_{\text{ср}}} = \frac{\nu}{a c_{\text{ср}}},$$

где ν — кинематическая вязкость.

Величина, обратная комплексу Π_{k+1} $\left(\mathrm{Re} = \dfrac{1}{\Pi_{k+1}}\right)$, впервые была использована при обработке опытных данных по течению жидкости в трубах О. Рейнольдсом и носит его имя, т.е. $\mathrm{Re} = ac_{\text{ср}}/\nu$.

В результате после подстановки в (10.14) комплексов Π и Π_{k+1} получим

$$\frac{\Delta p a}{l\rho c_{\text{ср}}^2} = f\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right).$$

Отсюда следует, что абсолютное снижение давления в трубопроводе длиной l будет определяться по широко используемой при гидравлических расчетах трубопроводов формуле

$$\Delta p = \zeta(\mathrm{Re})\,\frac{\rho c_{\text{ср}}^2}{2}\,\frac{l}{a}. \qquad (10.15)$$

Для цилиндрических труб характерным линейным размером a является диаметр трубы d ($a = d$). Тогда

$$\Delta p = \zeta(\mathrm{Re})\,\frac{\rho c_{\text{ср}}^2}{2}\,\frac{l}{d}. \qquad (10.16)$$

Здесь $\zeta(\mathrm{Re}) = 2f\left(\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\right)$ — коэффициент сопротивления, зависящий только от числа Рейнольдса.

Как показали опыты Рейнольдса, в трубе могут реализовываться два режима течения жидкости: **ламинарный (слоистый)**, когда линии тока имеют плавную форму, а течение является стационарным, и **турбулентный (нестационарный)**, когда частицы жидкости совершают хаотичное перемещение по всем трем координатным осям.

При выводе соотношения (10.16) не делалось никаких допущений относительно режима течения в трубе, и, следовательно, его структура должна сохраняться как при ламинарном, так и при турбулентном течении. Однако коэффициент сопротивления $\zeta(\mathrm{Re})$ при этом будет меняться с изменением числа Re по различным законам.

Опытные данные, приведенные на рис. 10.1, убедительно подтверждают, что коэффициент ζ действительно является функцией одного безразмерного комплекса — числа Рейнольдса. При $\mathrm{Re} \le 1500 \div 2000$ течение жидкости в трубе сохраняет слоистый, ламинарный характер, и с ростом числа Re коэффициент ζ снижается по гиперболическому закону (в логарифмических координатах на рис. 10.1 это прямая линия *1*).

Ламинарный режим течения обладает одним важным качеством: при равномерном движении жидкости все ее частицы движутся без локального ускорения. Следовательно, инерционные свойства жидкости здесь не должны проявляться. Для учета этих свойств в число определяющих параметров и вводят плотность жидкости ρ. При ламинарном режиме этот параметр

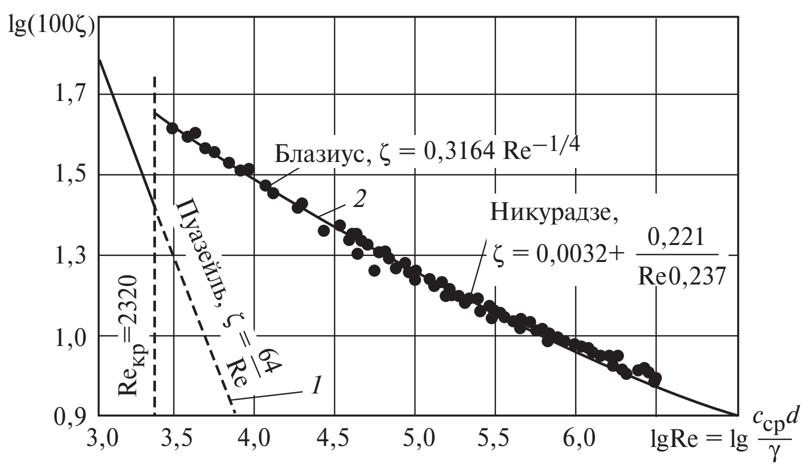


Рис. 10.1. Зависимость коэффициента сопротивления ζ в трубах от числа Рейнольдса

в формуле (10.16) должен отсутствовать, что возможно только в случае, если функция ζ(Re) будет иметь следующий вид:

$$\zeta = \frac{A}{\mathrm{Re}} = \frac{A\mu}{\rho c_{ср} d}. \qquad (10.17)$$

(Для цилиндрической трубы согласно теоретическим расчетам постоянная $A = 64$.)

Подставив (10.17) в (10.16), получим

$$\Delta p = \frac{A}{2}\,\frac{l}{d^2}\,\mu c_{ср}. \qquad (10.18)$$

Согласно (10.18) сопротивление цилиндрической трубы при ламинарном режиме течения пропорционально средней скорости движения жидкости.

При переходе к турбулентному течению из-за локальной нестационарности потока инерционные свойства жидкости играют главную роль и плотность ρ нельзя исключать из определяющих параметров. Соответственно заметно усложняется закон изменения коэффициента сопротивления ζ. В этом случае коэффициент сопротивления ζ(Re) определяется опытным путем и его изменение с изменением числа Re происходит в соответствии с кривой *2* на рис. 10.1.

10.4.3. Сопротивление тела, движущегося в жидкости

При движении произвольного тела в безграничном потоке несжимаемой жидкости его сопротивление R_x будет зависеть от некоторого линейного размера l, скорости движения c, угла атаки α, инерционных свойств жидкости, определяемых плотностью ρ, и ее вязкости μ*.

* Здесь имеется в виду безотрывное движение тела с гидравлически гладкой поверхностью при нулевой внешней турбулентности потока.

Таким образом, сопротивление тела R_x заданной формы при установившемся движении будет выражено следующей функциональной зависимостью:

$$R_x = f(\rho, c, l, \alpha, \mu). \tag{10.19}$$

Три параметра ρ, c и l имеют в данном случае независимые размерности:

$$[\rho] = \frac{M}{L^3}; \quad [c] = \frac{L}{T}; \quad [l] = L.$$

Размерности остальных величин оказываются зависимыми и выражаются через основные величины по следующим соотношениям:

$$[R_x] = [\rho]\,[c]^2\,[l]^2 = \frac{ML}{T^2}; \quad [\mu] = [\rho]\,[c]\,[l] = \frac{M}{TL}.$$

Оставшиеся три зависимые размерные величины R_x, α и μ образуют при переходе к безразмерной записи три безразмерных комплекса Π, Π_{k+1}, Π_{k+2}.

Тогда в безразмерной записи функциональное соотношение (10.19) будет иметь следующий вид:

$$\Pi = f\,(1,\ 1,\ 1,\ \Pi_{k+1},\ \Pi_{k+2}).$$

Поскольку угол α можно рассматривать как безразмерную величину, то $\Pi_{k+1} = \alpha$. Оставшиеся два безразмерных комплекса Π и Π_{k+2} будут определяться по формулам

$$\Pi = \frac{R_x}{\rho^{m_1} c^{m_2} l^{m_3}}; \quad \Pi_{k+2} = \frac{\mu}{\rho^{n_1} c^{n_2} l^{n_3}}.$$

Запишем далее формулу размерностей для комплекса Π:

$$[\Pi] = \frac{MLL^{3m_1}T^{m_2}}{T^2 M^{m_1} L^{m_2} L^{m_3}} = M^{1-m_1} T^{m_2-2} L^{1+3m_1-m_2-m_3}.$$

Из условия нулевой размерности величины Π получаем

$$m_1 = 1;\ m_2 = 2;\ m_3 = 2.$$

Комплекс Π_{k+2}, как и ранее (см. п. 10.4.2), будет иметь вид

$$\Pi_{k+2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}.$$

Таким образом, сопротивление произвольного тела в движущейся жидкости определяется по следующей формуле:

$$R_x = f\left(1,\ 1,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\right)\rho c^2 l^2 = C_x(\alpha, \mathrm{Re})\frac{\rho c^2}{2}\,l^2,$$

здесь $C_x(\alpha, \mathrm{Re}) = 2f\left(\alpha,\ \frac{1}{\mathrm{Re}}\right)$.

В рассматриваемой задаче коэффициент сопротивления произвольного тела зависит от его ориентации относительно вектора набегающего потока (от угла α) и от числа Рейнольдса.

В частном случае при поперечном обтекании цилиндра угол α выпадает из числа определяющих параметров и сопротивление цилиндра находится по более простой формуле

$$R_x = C_x(\mathrm{Re})\,\frac{\rho c^2}{2}\,\frac{\pi D^2}{4}. \qquad (10.20)$$

(Здесь характерным размером l является диаметр цилиндра D, а постоянная $\frac{\pi}{4}$ включена в коэффициент сопротивления C_x. Величина $C_x(\mathrm{Re}) = \dfrac{R}{\dfrac{\rho c^2}{2}\dfrac{\pi D^2}{4}}$ находится опытным путем, причем результаты опытов полностью подтверждают полученный вывод об однозначной зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса.)

10.4.4. Форма свободной поверхности жидкости, находящейся во вращающемся цилиндрическом сосуде

Точное теоретическое решение задачи о форме свободной поверхности жидкости, находящейся во вращающемся цилиндрическом сосуде, уже рассматривалось ранее (см. гл. 4).

Покажем, каким образом эта задача может быть решена при использовании теории размерностей.

Если разместить начало координат на дне вращающегося цилиндрического сосуда (рис. 10.2) и направить ось z вдоль центральной оси симметрии, то искомая функция $z - z_0 = h(r)$ должна зависеть от угловой скорости вращения ω, радиуса r, ускорения свободного падения g, плотности жидкости ρ. Тогда

$$h = f(r, \omega, g, \rho). \qquad (10.21)$$

В данном случае вязкость жидкости μ в число аргументов входить не должна, так как она проявляется только при раскрутке

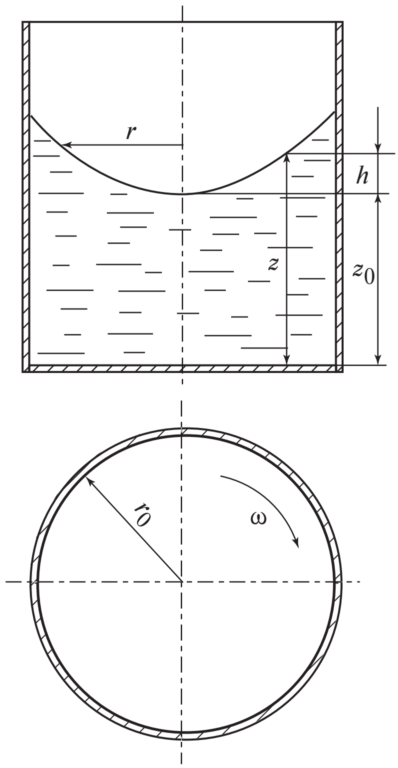


Рис. 10.2. К определению формы свободной поверхности жидкости во вращающемся сосуде

цилиндра. В это время за счет сил вязкости все частицы жидкости в конечном счете начинают вращаться с одной и той же скоростью ω, и силы вязкости не могут изменить форму свободной поверхности жидкости.

Среди аргументов функционального соотношения три величины r, g, и ρ имеют независимые размерности ($k = 3$). Тогда при переходе к безразмерной записи рассматриваемой зависимости получаем

$$\Pi = f\,(1,\ 1,\ 1,\ \Pi_{k+1}),$$

где

$$\Pi = \frac{h}{r^{m_1} g^{m_2} \rho^{m_3}}; \quad \Pi_{k+1} = \frac{\omega}{r^{n_1} g^{n_2} \rho^{n_3}}.$$

Запишем размерности всех величин, входящих в эти комплексы:

$$[h] = L; \quad [r] = L; \quad [g] = \frac{L}{T^2}; \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}.$$

Сопоставляя размерности величин, входящих в комплекс П, легко понять, что показатели степеней m_i здесь имеют следующие значения: $m_1 = 1$, а $m_2 = m_3 = 0$.

Запишем далее формулу размерности для комплекса Π_{k+1}:

$$[\Pi_{k+1}] = \frac{[\omega]}{[r]^{n_1}[g]^{n_2}[\rho]^{n_3}} = \frac{T^{2n_2} L^{3n_3}}{L^{n_1} L^{n_2} M^{n_3}}.$$

Отсюда, исходя из нулевой размерности рассматриваемого комплекса, получаем

$$n_1 = -\frac{1}{2}; \quad n_2 = \frac{1}{2}; \quad n_3 = 0.$$

Соответственно

$$\Pi_{k+1} = \frac{\omega r^{1/2}}{g^{1/2}} \quad \text{и} \quad \frac{h}{r} = f\left(\frac{\omega r^{1/2}}{g^{1/2}}\right).$$

Безразмерный комплекс $\dfrac{\omega r^{1/2}}{g^{1/2}}$ удобнее использовать в виде $\dfrac{\omega^2 r}{g}$. Тогда

$$\frac{z - z_0}{r} = \frac{h}{r} = f\left(\frac{\omega^2 r}{g}\right). \tag{10.22}$$

Математически оба приведенных функциональных соотношения идентичны.

Используя при обработке опытных данных в качестве аргумента безразмерный комплекс $\dfrac{\omega^2 r}{g}$ и аппроксимируя далее полученную зависимость степенным рядом следующего вида:

$$\frac{z}{r} = a_0 + a_1\left(\frac{\omega^2 r}{g}\right) + a_2\left(\frac{\omega^2 r}{g}\right) t \;\ldots,$$

можно найти значения коэффициентов a_i и приближенное математическое описание формы свободной поверхности жидкости во вращающемся цилиндрическом сосуде.

В рассматриваемой задаче формула этой поверхности может быть найдена и более простым способом.

Поскольку на свободной поверхности вращающейся жидкости $p_0 = B = \text{const}$ (B — барометрическое давление), то на этой поверхности уравнение Бернулли будет иметь вид

$$\frac{B}{\rho} + \frac{\omega^2 r^2}{2} - gh = \text{const}.$$

При $r = 0$ $h = 0$, и тогда постоянная в правой части будет равна B/ρ. Отсюда

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gh = 0 \quad \text{и} \quad \frac{h}{r} = \frac{\omega^2 r}{2g},$$

что совпадает с уравнением, полученным ранее (см. гл. 4).

10.5. Критерии подобия и моделирование течений жидкости

Как уже отмечалось ранее, необходимым условием обеспечения физического подобия двух течений является равенство чисел подобия для сравниваемых течений.

Структура этих чисел и их количество определяется в общем случае на основе тех функциональных уравнений, которые должны описывать исследуемое течение.

Необходимость равенства чисел подобия для модельного и натурного течений вытекает из приведенного ниже.

Пусть интересующая нас характеристика a некоторого течения зависит от n как размерных, так и безразмерных величин $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$, причем k из них имеют независимые размерности, т.е.

$$a = f(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

При переходе к безразмерной форме записи этого функционального соотношения согласно П-теореме безразмерная искомая характеристика П зависит уже от $n - k$ безразмерных аргументов:

$$\Pi = f(1, 1, \ldots, 1, \Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n). \tag{10.23}$$

Безразмерное соотношение (10.23) определяет безразмерную характеристику П для целого ряда течений. В частности, если для двух исследуемых течений обеспечить равенство между собой указанных величин, то тем самым будет достигнуто и подобие этих течений, так как согласно функциональному соотношению (10.23) при равенстве аргументов одинаковой оказывается и определяемая безразмерная величина П.

Безразмерные величины $\Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n$ являются указанными выше числами подобия или критериями подобия, а их совокупность определяет так называемую критериальную базу.

Таким образом, **для подобия двух течений или явлений необходимо обеспечить равенство критериальной базы для модельного и натурного течений**.

Конкретный вид критериев подобия, входящих в критериальную базу, и их число определяются сложностью решаемой задачи. В рассмотренном выше примере о движении жидкости в цилиндрических трубах критериальная база состояла всего из одного критерия — числа Рейнольдса, и равенство этого критерия в двух сравниваемых течениях гарантирует совпадение всех безразмерных характеристик, необходимых для практического расчета течения в трубах.

Естественно, что с ростом числа физических величин и постоянных, определяющих то или иное течение, происходит и увеличение числа критериев подобия, равенство которых для двух сравниваемых течений и обеспечивает подобие этих течений.

Например, нестационарное движение несжимаемой жидкости в канале определяется характерной скоростью c_0, линейным размером l, характерным временем t_0, вязкими и инерционными свойствами жидкости, определяемыми вязкостью μ и плотностью ρ, а также массовой силой, которая характеризуется ускорением свободного падения g. Таким образом, определяющими параметрами будут:

$$c_0,\ l,\ t_0,\ \rho,\ g,\ \mu.$$

Здесь три величины (c_0, l, ρ) имеют независимые размерности, следовательно, $k = 3$ при общем числе определяющих величин $n = 6$. Таким образом, в рассматриваемом случае критериальная база состоит из трех критериев подобия, получивших имя их авторов:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{l}{u_0 t_0} = \mathrm{Sh} \text{ — число Струхаля;}\\ &\frac{u_0 l \rho}{\mu} = \frac{u_0 l}{\nu} = \mathrm{Re} \text{ — число Рейнольдса, здесь } \nu = \frac{\mu}{\rho};\\ &\frac{u_0}{\sqrt{lg}} = \mathrm{Fr} \text{ — число Фруда.} \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

Если рассматривается нестационарное течение сжимаемой жидкости, то критериальная база должна быть дополнена числом M (числом Маха).

Приведенные критерии подобия являются базовыми при моделировании нестационарного течения однофазной жидкости без внешнего теплообмена.

При стационарном течении из этой базы, естественно, выпадает число Струхаля, а в задачах, где силы тяжести не влияют на исследуемые характеристики, из критериальной базы выпадает и число Фруда. В результате при моделировании таких течений необходимо обеспечивать подобие только по двум критериям — числу Рейнольдса и числу Маха.

Однако и в этом простейшем случае обеспечить одновременно равенство чисел M и Re на модели и натурном объекте оказывается достаточно сложно. Эти сложности многократно возрастают при моделировании течений двухфазных сред, при движении жидкости с внешним теплообменом и т.д. Для преодоления этих сложностей на практике вместо полного моделирования почти всегда используется частичное моделирование течений, что, естественно, увеличивает вероятность расхождения данных модельных испытаний с натурными результатами.

Остановимся на некоторых особенностях частичного моделирования.

10.6. Частичное моделирование течений

Обеспечить полное моделирование в задачах, связанных с движением жидких и газообразных сред, крайне сложно, а в некоторых случаях практически невозможно, причем это касается не только кинематического и динамического, но и геометрического моделирования.

Действительно, при выполнении моделей в существенно меньшем масштабе нельзя создать геометрически подобную шероховатость поверхности. В ряде случаев нельзя обеспечить геометрическое подобие зазоров в уплотнениях турбомашин. Открытым остается и вопрос о геометрическом моделировании отверстий на перфорированных поверхностях. При геометрическом моделировании решеток возникают большие технологические сложности при моделировании выходных кромок профилей.

Отмеченные обстоятельства являются причиной того, что при модельных исследованиях осуществляется в большинстве случаев только частичное моделирование. Соответственно полученные в результате такого исследования данные нуждаются в определенной корректировке. Степень этой корректировки может быть очень разной и зависит от степени влияния тех факторов, которые оказываются отброшенными при частичном моделировании.

Естественно, частичное моделирование течений или явлений — вынужденная мера, так как даже в некоторых сравнительно простых случаях осуществить полное моделирование невозможно.

Если не принимать во внимание отмеченных выше случаев нарушения геометрического подобия, то выполнение модельных установок, геометрически подобных натурным объектам, является в известной степени только технологической проблемой. Значительно сложнее достичь физического подобия исследуемых течений. С этими сложностями приходится сталкиваться при необходимости обеспечить равенство критериальной базы, состоящей из чисел Фруда Fr и Рейнольдса Re.

Действительно, если на основании модельных исследований необходимо найти некоторый безразмерный комплекс П, зависящий всего от двух указанных критериев подобия [$\Pi = f(\mathrm{Fr}, \mathrm{Re})$], то физическое подобие модельного и натурного течений или явлений будет обеспечено при условии, что

$$\mathrm{Re}_{\text{н}} = \mathrm{Re}_{\text{м}} \quad \text{и} \quad \mathrm{Fr}_{\text{н}} = \mathrm{Fr}_{\text{м}}, \tag{10.25}$$

здесь индексы «м» и «н» относятся соответственно к модельному и натурному объектам.

Равенство чисел Re и Fr означает равенство между собой следующих комплексов:

$$\frac{c_{\text{н}} l_{\text{н}}}{\nu_{\text{н}}} = \frac{c_{\text{м}} l_{\text{м}}}{\nu_{\text{м}}} \quad \text{и} \quad \frac{c_{\text{н}}}{\sqrt{l_{\text{н}} g_{\text{н}}}} = \frac{c_{\text{м}}}{\sqrt{l_{\text{м}} g_{\text{м}}}}.$$

Найдем отсюда, при каких скоростях $c_{\text{м}}$ необходимо проводить исследования на модели, выполненной в уменьшенном масштабе ($l_{\text{м}} < l_{\text{н}}$). Из первого равенства получим

$$c_{\text{м}} = c_{\text{н}} \frac{l_{\text{н}}}{l_{\text{м}}} \frac{\nu_{\text{м}}}{\nu_{\text{н}}}.$$

При $\dfrac{l_{\text{н}}}{l_{\text{м}}} > 1$ и одинаковом рабочем теле ($\nu_{\text{м}} = \nu_{\text{н}}$) скорость потока $c_{\text{м}}$ на модельной установке должна быть выше скорости в натурном объекте ($c_{\text{м}} > c_{\text{н}}$).

Если же определять скорость $c_{\text{м}}$ из условия равенства между собой чисел Фруда при неизменном значении ускорения свободного падения тел ($g_{\text{м}} = g_{\text{н}}$), то

$$c_{\text{м}} = c_{\text{н}} \sqrt{\frac{l_{\text{м}}}{l_{\text{н}}}},$$

и, следовательно, при $l_{\text{м}}/l_{\text{н}} < 1$ скорость на модельной установке по отношению к скорости на рассматриваемом натурном объекте необходимо уменьшить.

Полученные результаты свидетельствуют о невозможности при указанных условиях обеспечить полное моделирование изучаемого течения. Решить эту задачу можно только в результате использования при модельных исследованиях другой жидкости с существенно большим значением кинематической вязкости ($\nu_{\text{м}} >> \nu_{\text{н}}$) либо путем проведения исследования на вращающемся стенде, существенно увеличивая таким образом ускорение $g_{\text{м}}$. При этом, однако, не только резко увеличиваются стоимости экспериментальных стендов, но и значительно усложняется методика проведения исследований.

По указанной причине полное моделирование заменяется частичным в результате моделирования только по одному из двух рассматриваемых критериев подобия.

Предварительно на основании специальных опытов либо логических рассуждений необходимо установить приоритетное влияние одного из двух критериев на определяемую характеристику течения.

В случае, если на модели исследуется обтекание корпуса корабля, таким критерием является число Фруда, и, например, его коэффициент сопротивления представляется в виде зависимости от числа Fr, а затем с использованием расчетных или опытных данных по влиянию числа Рейнольдса на коэффициент сопротивления C_x, вносится соответствующая поправка в зависимость $C_x = f(\mathrm{Fr})$ в виде некоторого поправочного коэффициента.

На основании многочисленных опытных данных было установлено, что влияние числа Рейнольдса на такие характеристики, как коэффициент сопротивления, коэффициенты потерь энергии, коэффициенты расхода и другие, оказывается весьма большим в области сравнительно низких значений этого критерия и достаточно быстро снижается по мере его увеличения. Рассматриваемое влияние оказывается несущественным при $\mathrm{Re} > 5 \cdot 10^5$. Когда указанное условие выполняется, принято говорить об автомодельности (независимости) течения от числа Re. Во многих случаях наличие автомодельных течений существенно облегчает задачи частичного моделирования. Необходимо, правда, иметь в виду, что существование или отсутствие верхней границы автомодельности по числу Re пока еще не доказано.

Вторым не менее важным примером использования частичного моделирования течений является задача, когда исследуемая характеристика зависит от чисел M и Re.

В этом случае из равенства критериальной базы, состоящей из указанных двух критериев, для модели и натурного объекта вытекает, что

$$\frac{c_{\text{м}}}{a_{\text{м}}} = \frac{c_{\text{н}}}{a_{\text{н}}} \quad \text{и} \quad \frac{l_{\text{м}} c_{\text{м}}}{\nu_{\text{м}}} = \frac{l_{\text{н}} c_{\text{н}}}{\nu_{\text{н}}}.$$

Отсюда при соблюдении равенства чисел Рейнольдса следует, что скорость модельной среды

$$c_{\text{м}} = c_{\text{н}} \frac{l_{\text{н}}}{l_{\text{м}}} \frac{\nu_{\text{м}}}{\nu_{\text{н}}}.$$

При $l_{\text{н}}/l_{\text{м}} > 1$ и $\nu_{\text{м}} = \nu_{\text{н}}$ скорость потока при модельных испытаниях должна быть существенно больше скорости натурной среды.

В свою очередь, если исходить из условия равенства чисел Маха, то

$$c_{\text{м}} = c_{\text{н}} \frac{a_{\text{м}}}{a_{\text{н}}} = c_{\text{м}} = c_{\text{н}} \sqrt{\frac{T_{\text{м}}}{T_{\text{н}}}}.$$

Так как в большинстве случаев температура рабочего тела при модельных исследованиях $T_{\text{м}}$ обычно меньше температуры натурной среды $T_{\text{н}}$, то

$$c_{\text{м}} < c_{\text{н}}.$$

Таким образом, и в этом примере одновременное моделирование по рассматриваемым двум критериям M и Re при использовании одного и того же рабочего тела оказывается невозможным. Здесь задача может быть решена либо путем использования при моделировании другого рабочего тела (заменяя, например, воздушную среду на паровую), либо путем существенного повышения температуры модельной среды.

На практике и в этом случае чаще всего применяют частичное моделирование. Если скорость среды при модельных испытаниях не превышает 30—35 % скорости звука, то в качестве определяющего критерия используется число Re, так как при $M \le 0{,}3 \div 0{,}35$ сжимаемость потока еще слабо влияет на характеристики исследуемых течений. Иногда предельно допустимое значение скорости увеличивается до $M \approx 0{,}4 \div 0{,}45$.

При $M > 0{,}5$ определяющим критерием обычно является число M, поскольку при больших скоростях значения числа Рейнольдса почти всегда превышают нижнюю границу автомодельности по этому критерию ($Re > 5 \cdot 10^5$). (В данном случае имеются в виду исследования элементов теплотехнического оборудования электростанций.)

В случае, когда критериальная база оказывается достаточно большой (например, при исследовании двухфазных сред), частичное моделирование становится неизбежным и возможность последующего переноса результатов модельных исследований на реальный объект в значительной степени зависит от правильности оценок определяющих критериев подобия.

Таким образом, на практике критериальная база полностью обычно не сохраняется и осуществляется только частичное подобие.

Несмотря на это, при решении любой задачи моделирования всегда необходимо иметь полную базу. Отбрасывание того или иного критерия возможно только после детального анализа его роли в исследуемом процессе, причем совершенно ясно, что частичное моделирование является вынужденной мерой и в некоторых случаях может приводить к заметным ошибкам, которые далеко не всегда удается предвидеть.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое коэффициенты подобия и числа подобия?
2. Что определяет формула размерностей и какой вид она имеет?
3. Как формулируется П-теорема?
4. Дайте определения величин с независимыми формулами размерности.
5. В каких случаях применение П-теоремы дает возможность получить расчетную формулу с точностью до постоянной?
6. Что такое критериальная база и критерии подобия?

7. Перечислите наиболее часто используемые критерии подобия при гидрогазодинамических исследованиях.
8. Что такое частичное подобие?
9. Дайте определение безразмерных и размерных величин.
10. В каких случаях допускается нарушение подобия по числам Re и M?
11. Что такое число Струхаля?
12. Возможно ли в обычных условиях обеспечить подобие процессов по числам Re и M?
13. В чем сложность одновременного моделирования по числам Re и M?
14. По какому принципу формируются безразмерные комплексы при переходе от размерной записи функциональных соотношений к безразмерной?

Глава 11

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

11.1. Уравнение движения вязкой жидкости (уравнение Навье—Стокса)

Уравнения движения при учете сил вязкости существенно усложняются, так как в этом случае поверхностные силы не могут быть выражены в столь простой форме, как при выводе уравнений Эйлера. В отличие от идеальной жидкости теперь поверхностные силы направлены не нормально, а под произвольным углом к рассматриваемой площадке.

Выделим в вязкой жидкости элементарный прямоугольный параллелепипед (рис. 11.1) и найдем результирующую поверхностную силу, действующую на единицу объема этого параллелепипеда.

Согласно обозначениям, приведенным на рис. 11.1, на площадках, перпендикулярных оси x, действуют поверхностные напряжения $\vec{P}_x$ и $\vec{P}_x + \dfrac{\partial \vec{P}_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x$. Тогда суммарная поверхностная сила на этих площадках будет определяться по формуле

$$\left(\vec{P}_x + \frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \vec{P}_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

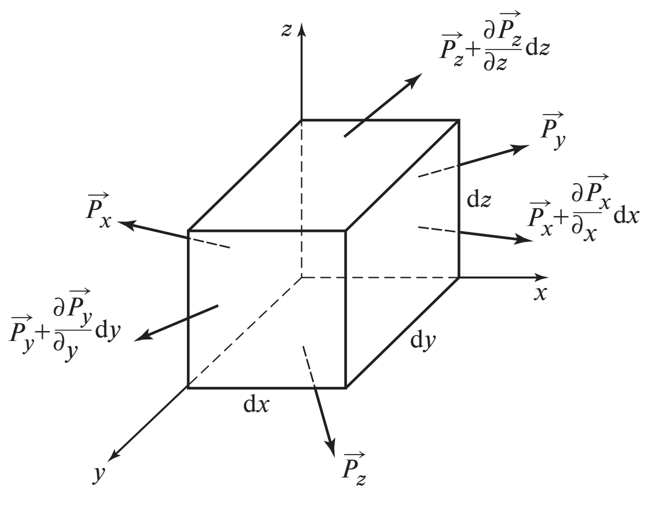


Рис. 11.1. Схема действия поверхностных сил на площадки элементарного параллелепипеда

Соответственно на площадках, перпендикулярных осям y и z, суммарные поверхностные силы оказываются равными $\dfrac{\partial \vec{P}_y}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ и $\dfrac{\partial \vec{P}_z}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Если сложить все силы, то получим общую поверхностную силу, действующую на рассматриваемый параллелепипед и равную

$$\left(\frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x}+\frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y}+\frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z .$$

Общая поверхностная сила, действующая на единицу объема, будет, очевидно, определяться по формуле

$$\overline{\overline{P}} = \frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x}+\frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y}+\frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z} . \tag{11.1}$$

(Нижний индекс у каждого вектора напряжения $\vec{P}_i$ обозначает ось, перпендикулярно которой располагается соответствующая площадка.)

Разложим далее каждую из векторных величин $\vec{P}_x$, $\vec{P}_y$, $\vec{P}_z$ по координатным осям, обозначив нормальные составляющие векторов буквой σ_i, а касательные — буквой τ_{ij} с двойным индексом, где первый индекс, как и ранее, показывает направление оси, к которой перпендикулярна площадка, а второй — какой оси параллельна составляющая вектора. Тогда, например, τ_{zy} означает, что касательное напряжение τ рассматривается на площадке, перпендикулярной оси z, и направлено параллельно оси y. В результате можно записать

$$\left.\begin{aligned}
\vec{P}_x &= \sigma_x\,\vec{i} + \tau_{xy}\,\vec{j} + \tau_{xz}\,\vec{k}\ ;\\
\vec{P}_y &= \tau_{yx}\,\vec{i} + \sigma_y\,\vec{j} + \tau_{yz}\,\vec{k}\ ;\\
\vec{P}_z &= \tau_{zx}\,\vec{i} + \tau_{zy}\,\vec{j} + \sigma_z\,\vec{k}\ .
\end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

Подставив систему (11.2) в выражение (11.1), получим разложение поверхностной силы по координатным осям:

$$\overline{\overline{P}} = P_{xx}\,\vec{i} + P_{yy}\,\vec{j} + P_{zz}\,\vec{k} = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\vec{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)\vec{k} . \tag{11.3}$$

Поскольку проекции уравнения движения на оси декартовой системы координат имеют вид [см. систему уравнений (3.19)]

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = P_{xx} + \rho X;$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = P_{yy} + \rho Y;$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = P_{zz} + \rho Z,$$

то при подстановке сюда значений P_{xx}, P_{yy}, P_{zz} из соотношения (11.3) получаем уравнения движения вязкой жидкости в напряжениях:

$$\left.\begin{aligned}
\rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \rho X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z};\\
\rho \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \rho Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z};\\
\rho \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= \rho Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.4)$$

Формально поверхностная сила P определяется девятью напряжениями. Однако независимых величин здесь оказывается только шесть, так как касательные напряжения, отличающиеся порядком индексов, равны между собой, что вытекает из равенства нулю моментов относительно произвольно взятой оси.

Записывая, например, равенство моментов относительно оси z, получаем

$$\tau_{xy}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x = \tau_{yx}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

откуда $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. В идеальной жидкости касательные напряжения равны нулю ($\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$), а нормальные напряжения равны друг другу ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$), причем величина σ, взятая с отрицательным знаком, определяет напряжение давления в жидкости или просто давление $p = -\sigma$. Для вязкой жидкости определим взятое со знаком «минус» давление как среднеарифметическое значение нормальных напряжений:

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -p. \qquad (11.5)$$

(Заметим, что сумма нормальных напряжений остается постоянной при любом преобразовании координат, так как она является инвариантом тензора напряжений.)

Три уравнения движения (11.4) содержат шесть добавочных составляющих тензора напряжений (σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}), и для возможности использования этих уравнений они должны быть дополнены шестью добавочными соотношениями, связывающими указанные напряжения с составляющими скорости u, v, w. Эти соотношения могут быть получены на основе следующего.

Появление в твердом теле напряжений всегда связано с приложением к этому телу некоторой силы, вызывающей его деформацию. Такая деформация характеризуется в общем случае тремя линейными деформациями и тремя углами сдвига. Связь между деформациями и напряжениями в твердом теле определяется законом Гука, а в жидкости — законом трения Ньютона—Стокса. Оба эти закона внутренне «родственны», но в твердом теле напряжения пропорциональны деформациям, а в жидкости, как уже отмечалось ранее (см. гл. 1), они пропорциональны скоростям относительных деформаций.

Следовательно, установив связь между напряжениями и деформациями на основе закона Гука, путем формальных элементарных замен легко перейти к аналогичным связям в жидкой среде.

Обозначим через ε_x, ε_y, ε_z относительные линейные деформации для твердого тела, а в случае жидкости под этими величинами будем понимать скорости относительных линейных деформаций. Угловые деформации обозначим через γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}, понимая под ними для жидкости скорости угловых деформаций.

Тогда для касательных напряжений в твердом теле связь с угловыми деформациями определяется соотношениями

$$\tau_{xy} = G\gamma_{yx};\ \tau_{yz} = G\gamma_{zy};\ \tau_{zx} = G\gamma_{xz}, \tag{11.6}$$

где коэффициент пропорциональности G является модулем сдвига.

Более сложная связь имеет место между величинами σ_i и ε_i, так как сила, действующая, например, вдоль оси x, вызывает не только растяжение вдоль нее, но и приводит к сжатию по двум остальным осям координат.

Так, напряжение σ_x вызовет следующие деформации:

вдоль оси x

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E};$$

вдоль оси y

$$\varepsilon'_y = -\frac{\sigma_x}{mE};$$

вдоль оси z

$$\varepsilon'_z = -\frac{\sigma_x}{mE}.$$

Деформации от напряжения σ_y будут соответственно составлять:

$$\varepsilon''_x = -\frac{\sigma_y}{mE};\quad \varepsilon''_y = \frac{\sigma_y}{E};\quad \varepsilon''_z = -\frac{\sigma_y}{mE}.$$

Наконец, от напряжения σ_z получим следующие деформации:

$$\varepsilon'''_x = -\frac{\sigma_z}{mE};\quad \varepsilon'''_y = -\frac{\sigma_z}{mE};\quad \varepsilon'''_z = \frac{\sigma_z}{E}.$$

Общая деформация по каждой из трех осей найдется в результате суммирования всех ее составляющих, т.е.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{mE}(\sigma_y + \sigma_z); \tag{11.7}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{1}{mE}(\sigma_z + \sigma_x); \tag{11.8}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{1}{mE}(\sigma_x + \sigma_y). \tag{11.9}$$

Здесь m — коэффициент поперечного сжатия (величина, обратная коэффициенту Пуассона), а E — модуль растяжения, связанный с модулем сдвига простым соотношением

$$E = 2\,\frac{m+1}{m}\,G. \tag{11.10}$$

Использовав приведенные уравнения, найдем зависимости

$$\sigma_x = f(\varepsilon_x), \quad \sigma_y = \varphi(\varepsilon_y), \quad \sigma_z = \psi(\varepsilon_z).$$

С этой целью сложим между собой уравнения (11.7), (11.8) и (11.9) и получим

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{m-2}{mE}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Если обозначить сумму относительных линейных деформаций через

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e, \tag{11.11}$$

то

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = e\,\frac{mE}{m-2}. \tag{11.12}$$

Отсюда

$$\sigma_y + \sigma_z = E\,\frac{mE}{m-2} - \sigma_x. \tag{11.13}$$

При подстановке (11.13) в (11.7) получим искомое соотношение $\sigma_x = f(\varepsilon_x)$:

$$\sigma_x = E\,\frac{m\varepsilon_x}{m+1} + E\,\frac{m}{m+1}\,\frac{e}{m-2}. \tag{11.14}$$

Далее путем ряда формальных преобразований исключим из уравнения (11.14) неизвестный коэффициент m. С этой целью прибавим к правой части (11.14) и вычтем из нее величину $\overline{\sigma}$, имея в виду, что

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}\,e\,\frac{mE}{m-2}. \tag{11.15}$$

Тогда получим

$$\sigma_x = E\frac{m\varepsilon_x}{m+1} + E\frac{m}{m+1}\frac{e}{m-2} + \bar{\sigma} - \bar{\sigma} =$$

$$= E\frac{m}{m+1}\varepsilon_x + \bar{\sigma} + E\frac{m}{m+1}\frac{e}{m-2} - \frac{1}{3}e\frac{mE}{m-2}.$$

После замены модуля растяжения модулем сдвига с использованием (11.10) будем иметь

$$\sigma_x = \bar{\sigma} + 2G\varepsilon_x - \frac{2}{3}Ge. \qquad (11.16)$$

Аналогичным образом записываются и две следующие зависимости:

$$\sigma_y = \bar{\sigma} + 2G\varepsilon_y - \frac{2}{3}Ge; \qquad (11.17)$$

$$\sigma_z = \bar{\sigma} + 2G\varepsilon_z - \frac{2}{3}Ge. \qquad (11.18)$$

Для жидкости величины ε_x, ε_y, ε_z представляют собой не относительные деформации, а скорости относительных деформаций, связанные с линейными скоростями u, v, w следующими соотношениями (см. гл. 2):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Соответственно

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{c}.$$

Кроме того, согласно (11.5)

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -p.$$

Таким образом, для жидкости связь между нормальными напряжениями σ_i ($i = x, y, z$) и проекциями вектора скорости $\vec{c}$ на оси координат u, v, w при формальной замене модуля сдвига G на вязкость μ будет выглядеть следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\operatorname{div}\vec{c}; \\ \sigma_y &= -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\operatorname{div}\vec{c}; \\ \sigma_z &= -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\operatorname{div}\vec{c}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.19)$$

Скорости угловых деформаций жидкого элемента определяются следующим образом (см. гл. 2):

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Тогда в соответствии с (11.6)

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \tau_{yx};\\
\tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \tau_{zy};\\
\tau_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \tau_{zx}.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.20)$$

Подставив далее (11.19) и (11.20) в (11.4), получим следующую запись уравнений движения (уравнений Навье—Стокса) для вязкой жидкости:

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{c}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]; \qquad (11.21)$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{c}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]; \qquad (11.22)$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{c}\right). \qquad (11.23)$$

В общем случае (для сжимаемой вязкой жидкости) эти уравнения необходимо дополнить уравнением неразрывности для сжимаемого потока:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0,$$

уравнением состояния $p = \rho RT$, уравнением сохранения энергии, если рассматривается неизотермическое изменение состояния газа, и, наконец, эмпирической зависимостью между вязкостью μ и температурой T.

В случае изотермических процессов остаются только пять уравнений, а для несжимаемой жидкости достаточно четырех уравнений, причем сами уравнения Навье—Стокса заметно упрощаются и принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);\\
&\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right);\\
&\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right);\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.24)$$

Записанные уравнения движения при использовании оператора Лапласа объединяются в одно векторное уравнение

$$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{c}}{\mathrm{d}t} = \rho\vec{M} - \operatorname{grad} p + \mu\Delta\vec{c}. \tag{11.25}$$

Для всех приведенных систем общим граничным условием на поверхности обтекаемых твердых тел является условие равенства нулю как нормальных c_n, так и тангенциальных c_t составляющих скорости c. Последнее условие вытекает из гипотезы «прилипания» жидкости к обтекаемой поверхности.

Укажем, наконец, что для однородной жидкости при отсутствии свободной поверхности массовые силы (вес) уравновешиваются гидростатической подъемной силой и, если под давлением p понимать разницу между действительным давлением и давлением в состоянии покоя, то эти силы выпадают из уравнений движения. Тогда

$$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{c}}{\mathrm{d}t} = -\operatorname{grad} p + \mu\Delta\vec{c}.$$

Для стационарного течения

$$\rho(\vec{c}\ \operatorname{grad}\ \vec{c}) = -\operatorname{grad} p + \mu\Delta\vec{c}.$$

Форма записи (11.25) позволяет весьма просто вывести закон подобия Рейнольдса из уравнений Навье—Стокса.

Пусть рассматривается обтекание двух геометрически подобных тел потоками, у которых скорости, плотности и вязкости различны. Найдем, когда эти течения с подобными границами будут и динамически подобными, т.е. будут иметь подобные поля скоростей и давлений. Для этого выразим все линейные размеры в долях от некоторого характерного размера L, а скорости — в долях от характерной скорости c_0. Сочетание этих двух масштабных множителей позволяют свести к безразмерному виду все члены уравнения (11.25), так как

$$x = \bar{x}L;\quad y = \bar{y}L;\quad z = \bar{z}L;\quad c = \bar{c}c_0;\quad p = \bar{p}\,\frac{\rho c_0^2}{2},$$

следовательно,

$$\rho\,\frac{c_0^2}{L}\,(\bar{c}\ \operatorname{grad}\ \bar{c}) = -\frac{\rho c_0^2}{2L}\operatorname{grad}\bar{p} + \frac{\mu c_0}{L^2}\,\Delta\bar{c}.$$

Здесь черта сверху указывает, что соответствующая величина имеет нулевую размерность.

Деление на $\dfrac{\rho c_0^2}{L}$ дает

$$\bar{c}\ \mathrm{grad}\ \bar{c} = -\frac{1}{2}\ \mathrm{grad}\ \bar{p} + \frac{\mu}{\rho c_0 L}\Delta \bar{c}\ . \tag{11.26}$$

Подобие двух сравниваемых течений возможно только при условии, если решения уравнения (11.26) в безразмерных величинах будут совпадать между собой. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы безразмерный комплекс $\dfrac{\rho c_0 L}{\mu}$ для обоих сравниваемых течений имел один и тот же вид. Другими словами для динамического подобия необходимо соблюдение следующего равенства:

$$\frac{\rho_1 c_{01} L_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 c_{02} L_2}{\mu_2}.$$

Полученный комплекс является одним из важнейших критериев механического (динамического) подобия потоков и, как уже отмечалось ранее, называется **числом Рейнольдса**:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho c L}{\mu} = \frac{cL}{\nu}.$$

Дальнейший этап упрощения уравнений Навье—Стокса состоит в переходе от общего случая течения к более простому плоскому течению, для которого система (11.24) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right); \tag{11.27}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \tag{11.28}$$

Соотношения (11.27) и (11.28) можно сравнительно легко свести к одному уравнению, если исключить из них давление p. С этой целью продифференцируем (11.27) по y, а (11.28) по x и вычтем из второго уравнения первое. Заметим при этом, что разница $\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\omega$ представляет собой удвоенную угловую скорость вращения жидкой частицы.

В результате получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right). \tag{11.29}$$

Добавив сюда уравнение неразрывности, будем иметь замкнутую систему из двух уравнений с двумя неизвестными u и v.

Физически соотношение (11.29) показывает, что сумма локального и конвективного изменений вихревой напряженности ω равна ее диссипации за счет сил вязкости.

При решении ряда практически важных задач, таких, например, как расчет течения в элементах турбомашин, более целесообразным оказывается использовать не декартову, а цилиндрическую систему координат.

Если обозначить радиальную координату через r, окружную — через θ, а осевую — через z и проекции скорости на оси координат через c_r, c_θ, c_z, то, выполнив переход от прямоугольной системы координат к цилиндрической, для несжимаемой жидкости вместо уравнений (11.24) получим следующую систему (при условии, что $\sum \overline{M} = 0$):

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial c_r}{\partial t} + c_r\frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{c_\theta}{r}\frac{\partial c_r}{\partial \theta} - \frac{c_\theta^2}{r} + c_z\frac{\partial c_z}{\partial z}\right) = \\
&= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{\partial^2 c_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 c_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial c_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 c_r}{\partial r^2}\right); \\
&\rho\left(\frac{\partial c_\theta}{\partial t} + c_r\frac{\partial c_\theta}{\partial r} + \frac{c_\theta}{r}\frac{\partial c_\theta}{\partial \theta} + \frac{c_r \partial c_\theta}{\partial \theta} + \frac{c_r c_\theta}{r} + c_z\frac{\partial c_\theta}{\partial z}\right) = \\
&= -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left(\frac{\partial^2 c_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c_\theta}{\partial r} - \frac{c_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 c_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial c_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 c_\theta}{\partial z^2}\right); \\
&\rho\left(\frac{\partial c_z}{\partial t} + c_z\frac{\partial c_z}{\partial r} + \frac{c_\theta}{r}\frac{\partial c_r}{\partial \theta} + c_z\frac{\partial c_z}{\partial z}\right) = \\
&= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 c_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (11.30)$$

11.2. Примеры точных решений уравнений Навье—Стокса

Стационарное течение несжимаемой жидкости при учете сил вязкости описывается следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right); \\
&u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right); \\
&u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right); \\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (11.31)$$

При заданных граничных условиях система (11.31) в принципе позволяет найти все четыре неизвестные величины: u, v, w, p.

В отличие от уравнений Эйлера порядок уравнений Навье—Стокса выше, и это приводит к необходимости увеличивать число граничных условий на поверхности обтекаемого тела. Эти условия сводятся к тому, что на твердых стенках, находящихся в покое, все составляющие скорости c равны нулю, т.е. при $y = 0$ $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$. Строгих доказательств принятых граничных условий нет, но опыты с жидкостями, имеющими различные физические свойства, убедительно подтверждают гипотезу «прилипания». Скольжение жидкости по обтекаемой поверхности не отмечалось ни в опытах со смачивающимися, ни в опытах с несмачивающимися жидкостями. Исключение представляет только случай движения газов при очень малых давлениях, когда расстояние между частицами становится соизмеримым с длиной свободного пробега молекул.

Решить систему уравнений (11.31), несмотря на строгую математическую формулировку задачи, в общем виде нельзя из-за нелинейности приведенных уравнений, и в практике широко используют различного рода приближенные решения, включая и широко развитые численные решения. Вместе с тем для некоторых частных случаев существуют точные решения указанных уравнений.

Эти решения относятся к задачам, где все члены в левой части уравнений (11.31) (инерционные члены) оказываются равными нулю. В частности, указанному условию удовлетворяют слоистые течения, признаком которых является наличие только одной составляющей скорости. Если такой составляющей является скорость u (проекция скорости c на ось x), а проекции скорости на остальные оси v и w равны нулю, то из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости следует равенство нулю и производной $\frac{\partial u}{\partial x}$. Следовательно, в этом случае составляющая скорости u не зависит от продольной координаты x. В результате для слоистых течений $u = u(y, z)$, $v = w = 0$. При этом из второго и третьего уравнений системы (11.31) следует, что $\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$, т.е. давление p зависит только от координаты x.

Таким образом, для слоистых течений уравнения движения сводятся к одному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \qquad (11.32)$$

Поскольку в (11.32) слева стоит функция координаты x, а справа записаны функции координат y и z, то равенство этих функций возможно только при постоянном значении продольного градиента давлений, т.е. для слоистых течений

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \mathrm{const}.$$

Основываясь на уравнении (11.32), рассмотрим несколько конкретных задач.

11.2.1. Движение жидкости между двумя бесконечными параллельными плоскостями

Пусть жидкость движется между двумя бесконечными плоскостями, расположенными на расстоянии $2b$ одна от другой (рис. 11.2). Систему координат расположим в центре канала, как показано на рис. 11.2. Для бесконечных в направлении осей x и z плоскостей скорость u не будет зависеть и от координаты z. Тогда

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \mu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2}. \tag{11.33}$$

Последовательное интегрирование (11.33) с учетом того, что $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = \mathrm{const}$, дает следующее выражение для распределения продольной скорости u:

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} y^2 + C_1 y + C_2, \tag{11.34}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, для определения которых имеются два условия:

1) при $y = +b \quad u = 0$;

2) при $y = -b \quad u = 0$.

С учетом этих условий получим два уравнения:

$$0 = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} b^2 + C_1 b + C_2;$$

$$0 = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} b^2 - C_1 b + C_2.$$

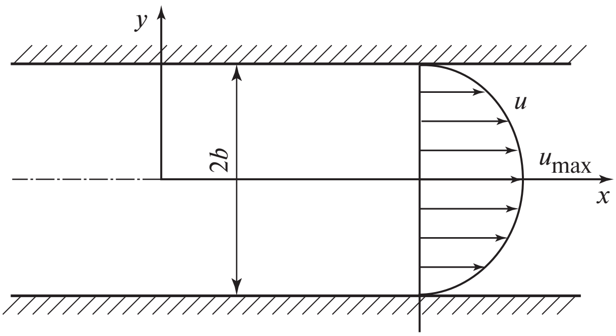


Рис. 11.2. Схема плоского течения между бесконечными параллельными плоскостями

Отсюда

$$C_1 = 0, \quad \text{а } C_2 = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,b^2 .$$

При подстановке этих величин в (11.34) будем иметь

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,b^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right). \tag{11.35}$$

Для рассматриваемого течения давление вдоль оси x снижается, и, следовательно, здесь $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} < 0$.

Максимальная скорость u_{max} достигается в центре ($y = 0$):

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,b^2 .$$

Если скорость u выразить в долях от максимальной скорости u_{max}, то в безразмерной записи профиль скорости между бесконечно длинными плоскостями представляет собой параболу (рис. 11.2):

$$\frac{u}{u_{max}} = 1 - \frac{y^2}{b^2} .$$

11.2.2. Течение Куэтта

Течение Куэтта имеет место между двумя параллельными пластинами, одна из которых движется с постоянной скоростью u_0. Ясно, что этот случай отличается от предыдущего только граничными условиями, и решение задачи по-прежнему описывается уравнением (11.33), но для определения постоянных C_1 и C_2 теперь необходимо принять, что

1) при $y = 0 \quad u = 0$;

2) при $y = h \quad u = u_0$.

[В данном случае оси координат располагаются на нижней неподвижной плоскости (рис. 11.3), расстояние между пластинами обозначено через h.] Для принятых условий

$$C_1 = \frac{u_0}{h} - \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,h; \quad C_2 = 0.$$

Подстановка постоянных C_1 и C_2 в (11.34) дает

$$u = u_0\frac{y}{h} + -\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,h^2\left(\frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2}\right). \tag{11.36}$$

Полученная зависимость более сложная, чем в предыдущем случае. Если $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 0$, то распределение скоростей между пластинами оказывается линейным: $u = u_0 y/h$. Движение верхней пластины приводит к тому, что за счет сил вязкости приходит в движение вся жидкость, расположенная между

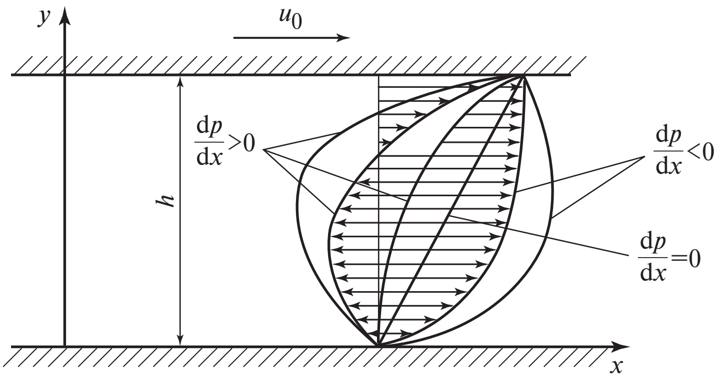


Рис. 11.3. Схема плоского течения Куэтта

пластинами. Источником движущей силы здесь является увлекающее действие верхних слоев жидкости. Этот факт будет использован нами в дальнейшем при объяснении физической природы отрыва потока от стенок канала.

Если градиент давления падает в направлении движения верхней пластины ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x < 0$), то линейность профиля скорости нарушается, так как теперь поток движется не только в результате действия сил вязкости, но и в результате приложенного перепада давления.

Картина еще более усложняется в случае, когда перепад давления действует в сторону, противоположную движению верхней пластины ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x > 0$). Под действием положительного градиента давления происходит торможение жидкости, и скорости оказываются меньше, чем в случае чисто сдвигового течения ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 0$). При перепаде давления $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 2\mu u_0/h^2$ у нижней неподвижной стенки не только сама скорость, но и ее производная по y оказываются равными нулю (рис. 11.3). Дальнейшее увеличение перепада давления приводит к возникновению в нижней части канала течения, направленного против движения верхней пластины. Возникают два противоположно направленных течения со своими профилями скорости. Линия раздела этих течений с ростом положительного градиента давления смещается к верхней плоскости.

11.2.3. Движение жидкости в трубах

Движение жидкости в трубах представляет собой большой практический интерес, и решение задачи может быть получено как из общих уравнений движения, так и путем достаточно простых физических соображений.

Поскольку рассматриваемая задача обладает осевой симметрией, для ее решения целесообразно использовать уравнения движения, записанные в цилиндрической системе координат. Рассуждая так же, как и при выводе уравнения (11.32), приходим к тому, что из системы (11.30) останется только одно уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}.$$

Так как в данном случае поток обладает осевой симметрией, то

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}. \tag{11.37}$$

Левая часть уравнения (11.37) может быть представлена в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right).$$

Следовательно, интегрированию подлежит уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}. \tag{11.38}$$

Здесь слева стоит функция r, а справа — функция координаты z, соответственно, как и ранее, $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = \text{const}$. После интегрирования (11.38) получим

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}r^2 + C_1 \ln r + C_2. \tag{11.39}$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 имеем снова два очевидных условия:

1) при $r = r_0$ $u = 0$;

2) при $r = 0$ $u = u_{max}$.

После их использования будем иметь

$$C_1 = 0;$$

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}r_0^2.$$

В результате можно записать

$$u = -\frac{1}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}r_0^2\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right). \tag{11.40}$$

Уравнение (11.40) для распределения скоростей потока в цилиндрической трубе можно получить и более простым путем. С этой целью выделим в трубе элементарный цилиндр длиной dz и радиусом r (рис. 11.4). На этот цилиндр действуют в направлении движения перепад давления dp, создающий движущую силу $\mathrm{d}R_p = \pi r^2 \mathrm{d}p$, а в противоположном направлении сила трения $dR_{тр} = 2\pi r dz\tau$. При равномерном движении эти силы равны, следовательно,

$$\pi r^2 dp = 2\pi r dz\tau \quad \text{и} \quad \frac{r}{2}\frac{dp}{dz} = \tau .$$

Для слоистых течений в цилиндрической трубе напряжение трения τ определяется по известной формуле Ньютона $\tau = \mu \dfrac{du}{dr}$. В результате можно записать

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz} r^2 + C_1 .$$

Постоянная интегрирования C_1 находится из условия: при $r = r_0$ $u = 0$. Его использование дает $C_1 = -\dfrac{1}{4\mu}\dfrac{dp}{dz} r_0^2$ и $u = -\dfrac{1}{4\mu}\dfrac{dp}{dz} r_0^2\left(1 - \dfrac{r^2}{r_0^2}\right)$, что полностью совпадает с уравнением (11.40).

Так как величина dp/dz в трубе постоянна по длине, то ее можно представить в виде перепада давления на единице длины рассматриваемого участка трубы, т.е. $dp/dz = \Delta p/l = \text{const}$. Тогда

$$u = -\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{l} r_0^2\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right). \tag{11.41}$$

Используя (11.41), получаем формулу для **объемного расхода** через поперечное сечение трубы:

$$Q = 2\pi\int_0^{r_0} ur\, dr = -2\pi\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{l} r_0 \int_0^{r_0}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) r\, dr ,$$

или

$$Q = \frac{\pi}{8\mu}\frac{\Delta p}{l}\left(\frac{d_0}{2}\right)^4 = \frac{\pi}{128\mu}\frac{\Delta p}{l} d^4 = \frac{\pi d^2}{4} u_{ср} . \tag{11.42}$$

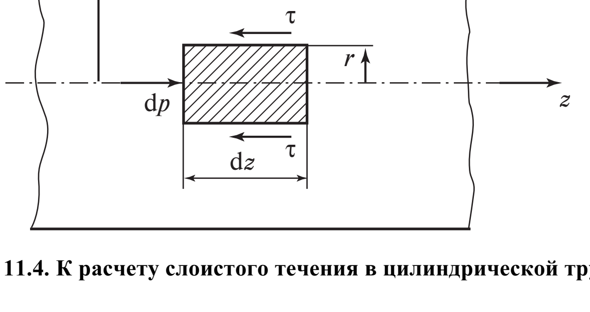


Рис. 11.4. К расчету слоистого течения в цилиндрической трубе

Отсюда следует, что расход жидкости через трубу круглого сечения прямо пропорционален перепаду давления и ее диаметру в четвертой степени. С помощью (11.42) можно записать формулу для **среднерасходной скорости** в цилиндрической трубе:

$$u_{\text{ср}} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{1}{32\mu}\frac{\Delta p}{l}d^2 = \frac{1}{8\mu}\frac{\Delta p}{l}r_0^2. \qquad (11.43)$$

Значение максимальной скорости находится из уравнения (11.40) при $r = 0$:

$$u_{\max} = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{l}r_0^2. \qquad (11.44)$$

Сравнивая (11.43) и (11.44), приходим к выводу, что максимальная скорость оказывается в 2 раза выше среднерасходной: $u_{\max} = 2u_{\text{ср}}$.

Полученный результат может быть использован для практического определения расхода жидкости через трубу. Для этого достаточно измерить только скорость на оси трубы и рассчитать расход по формуле

$$Q = \frac{\pi r_0^2}{2}u_{\max}.$$

С учетом (11.44) уравнение для профиля скорости в трубе, выраженного в долях от максимальной скорости, принимает особенно простой вид:

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \frac{r^2}{r_0^2}. \qquad (11.45)$$

Находим далее сопротивление трубы, считая, что перепад давления на ее участке пропорционален скоростному напору $\rho u_{\text{ср}}^2/2$, длине трубы l и обратно пропорционален ее диаметру [см. (10.16)]:

$$\Delta p = \zeta\frac{l}{d_0}\frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{2} = \zeta\frac{l}{r_0}\frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{4}. \qquad (11.46)$$

Здесь ζ — коэффициент пропорциональности, называемый обычно **коэффициентом сопротивления трубы** (см. гл. 10).

В то же время из формулы (11.43) следует, что

$$\Delta p = \frac{8\mu l}{r_0^2}u_{\text{ср}}. \qquad (11.47)$$

Приравнивая (11.46) и (11.47), получаем

$$8\frac{u_{\text{ср}}\mu l}{r_0^2} = \zeta\frac{l}{2r_0}\frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{2}.$$

Отсюда

$$\zeta = \frac{32\mu}{\rho u_{\text{ср}} r_0} = \frac{64}{d_0 u_{\text{ср}}/\nu}. \tag{11.48}$$

Безразмерный комплекс, входящий в знаменатель формулы (11.48), представляет собой число Рейнольдса $\mathrm{Re} = u_{\text{ср}} d_0/\nu$. Следовательно,

$$\zeta = 64/\mathrm{Re}. \tag{11.49}$$

Полученное выражение для коэффициента сопротивления отражает закон Пуазейля о движении жидкости в трубах. Однако этот закон имеет место только при сравнительно небольших числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} < 2300$), когда течение в трубах носит упорядоченный, слоистый (ламинарный) характер. Для больших чисел Re картина течения резко меняется и приобретает хаотический характер. Профиль скорости становится более полным и уже не описывается параболической зависимостью (11.45). Одновременно резко увеличивается и коэффициент сопротивления ζ. Этот тип течения будет рассмотрен ниже.

11.2.4. Движение жидкости между соосными цилиндрами

Рассмотрим движение жидкости между двумя соосными цилиндрами, радиусы которых равны r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$) (рис. 11.5).

Очевидно, что распределение скоростей здесь также определяется формулой (11.34), но граничные условия изменяются. Теперь скорость $u = 0$ при $r = r_1$ $r = r_2$. Отсюда постоянные интегрирования будут вычисляться по формулам:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\frac{\dfrac{1}{4\mu}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{\ln\left(r_2/r_1\right)}; \\ C_2 &= -\frac{\dfrac{1}{4\mu}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\left(r_2^2 - r_1^2\right)\ln r}{\ln\left(r_2/r_1\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{11.50}$$

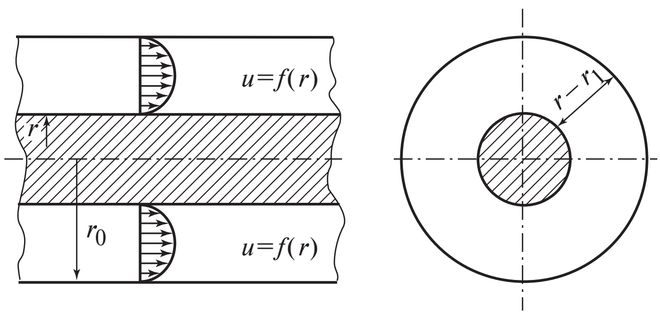


Рис. 11.5. Схема слоистого течения в кольцевой трубе

Подставив (11.50) в (11.34), получим следующий закон изменения скорости в зазоре между рассматриваемыми цилиндрами:

$$u = -\frac{\Delta p}{4\mu l}\left[r_2^2 - r_1^2 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)}\ln\frac{r}{r_1}\right]. \qquad (11.51)$$

Здесь, как и выше, принято $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = \Delta p/l$.

Вычисление средней скорости и объемного расхода выполняется по формулам

$$u_{\text{ср}} = -\frac{\Delta p}{8\mu l}\left[r_2^2 - r_1^2 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)}\right]; \qquad (11.52)$$

$$Q = \pi u_{\text{ср}}(r_2^2 - r_1^2). \qquad (11.53)$$

Использовав (11.52), найдем, что перепад давления

$$\Delta p = -\frac{8\mu l u_{\text{ср}}}{r_2^2 + r_1^2 - \dfrac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)}}. \qquad (11.54)$$

Для узких щелей, когда $r_2 - r_1 = b$ мало, вместо точной формулы (11.54) можно использовать более простое приближенное выражение

$$\Delta p = \frac{12\mu l u_{\text{ср}}}{b^2}. \qquad (11.55)$$

В то же время перепад давления можно выразить через коэффициент сопротивления ζ:

$$\Delta p = \zeta\,\frac{l}{b}\,\frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{2}.$$

С учетом (11.55) получим для коэффициента сопротивления ζ следующее выражение:

$$\zeta = \frac{24}{u_{\text{ср}}b/\nu} = \frac{24}{\mathrm{Re}}. \qquad (11.56)$$

Полученные формулы позволяют найти и затраты мощности N, необходимые для обеспечения заданного расхода:

$$N = Q\Delta p.$$

11.2.5. Течение смазки под колодкой подшипника скольжения

Рассмотрим движение жидкости между двумя плоскими поверхностями (рис. 11.6), одна из которых располагается под некоторым малым углом α относительно другой, движущейся слева направо с постоянной скоростью u_0. Легко видеть, что эта задача аналогична рассмотренной выше задаче

Куэтта и отличается от нее только расположением верхней неподвижной плоскости.

Возникающее в этом случае течение близко к течению в упорном подшипнике скольжения, где выделенная часть неподвижной плоскости относится к упорной колодке, а движущаяся со скоростью u_0, другая поверхность является поверхностью упорного диска. Течение в образованном указанными плоскостями клиновом зазоре также относится к слоистым и, следовательно, описывается единственным дифференциальным уравнением вида

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \mu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2}.$$

Поскольку, как и ранее, равенство левой и правой частей этого уравнения возможно только в случае, если $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = \mathrm{const}$, то после его интегрирования получим уже известное общее решение (11.34):

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} y^2 + C_1 y + C_2 .$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 должны быть найдены из следующих граничных условий: при $y = 0$ $u = u_0$, а при $y = h$ $u = 0$. Из первого условия следует, что $C_2 = u_0$. Второе условие приводит к уравнению

$$0 = \frac{1}{2\mu} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} h^2 + C_1 h + u_0 .$$

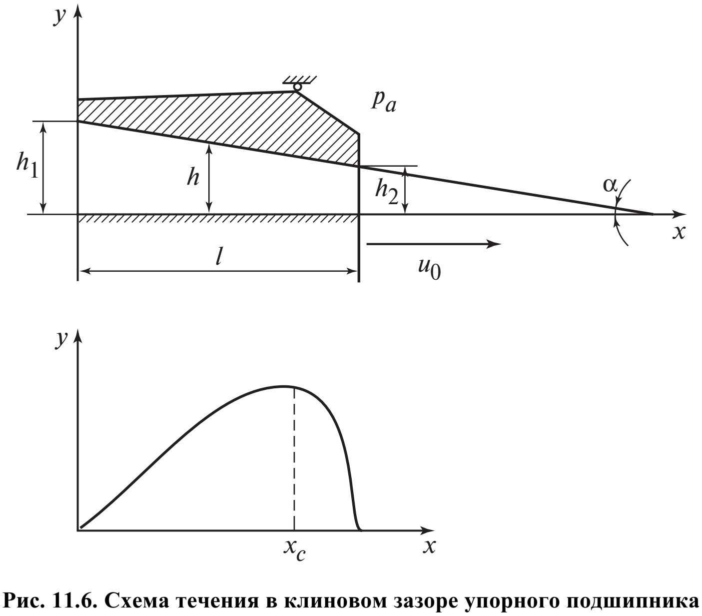


Рис. 11.6. Схема течения в клиновом зазоре упорного подшипника

Отсюда

$$C_1 = -\frac{u_0}{h} - \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}h\,. \tag{11.57}$$

Подставив (11.57) в (11.34), будем иметь

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - yh) + \frac{u_0}{h}(h - y)\,. \tag{11.58}$$

Зная распределение скоростей в зазоре между плоскостями колодки и опорного диска, получим выражение для объемного расхода жидкости через этот зазор на единицу поперечного размера:

$$Q = \int_0^{h(x)} u\,dy \cdot 1 = \int_0^{h(x)} \left[\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - yh) + \frac{u_0}{h}(h - y)\right]dy =$$

$$= -\frac{1}{12\mu}\frac{dp}{dx}h^3 + \frac{u_0 h}{2}\,. \tag{11.59}$$

(Согласно уравнению расхода объемный расход Q вдоль оси x не меняется: $Q = \text{const.}$)

Для определения распределения давления вдоль оси x выразим из (11.59) продольный градиент давления dp/dx:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu u_0}{h^2} - \frac{12\mu Q}{h^3}\,.$$

Проинтегрировав полученное уравнение, найдем

$$p = 6\mu u_0 \int_0^x \frac{dx}{h^2} - 12\mu Q \int_0^x \frac{dx}{h^3} + C_3, \tag{11.60}$$

где C_3 — постоянная интегрирования.

Согласно обозначениям, приведенным на рис. 11.6, $h = h_1 - x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ или, учитывая малость угла α, $h = h_1 - x\alpha$ и $dh = -\alpha\,dx$.

Использовав полученную связь между dx и dh, представим (11.60) в виде

$$p = -\frac{6\mu u_0}{\alpha}\int_{h_1}^{h}\frac{dh}{h^2} + \frac{12\mu Q}{\alpha}\int_{h^2}^{h}\frac{dh}{h^3} + C_3.$$

После вычисления интегралов будем иметь

$$p = -\frac{6\mu u_0}{\alpha}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1}\right) + \frac{6\mu Q}{\alpha}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_1^2}\right) + C_3. \tag{11.61}$$

Для нахождения постоянных Q и C_3 воспользуемся следующими граничными условиями для давления: при $h = h_1$ $p = p_a$ [p_a — давление жидкости (масла) до подшипника и после него], при $h = h_2$ $p = p_a$.

Из первого условия следует, что $C_3 = p_a$. Второе граничное условие приводит к уравнению вида

$$p_a = \frac{6\mu u_0}{\alpha}\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right) - \frac{6\mu Q}{\alpha}\left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2}\right) + p_a.$$

Отсюда

$$Q = u_0\left(\frac{h_1 - h_2}{h_2 h_1}\right)\left(\frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2 - h_2^2}\right) = u_0\,\frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}\,. \tag{11.62}$$

В результате с учетом найденных величин Q и C_3 уравнение, определяющее распределение давления под колодкой упорного подшипника, примет вид

$$p = p_a + \frac{6\mu u_0}{\alpha}\left(\frac{h_1 - h}{h h_1}\right) - \frac{6\mu u_0}{\alpha}\,\frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}\left(\frac{h_1^2 - h^2}{h^2 h_1^2}\right) =$$

$$= p_a + \frac{6\mu u_0}{\alpha}\,\frac{h_1 - h}{h h_1}\left(1 - \frac{h_2}{h}\,\frac{h_1 + h}{h_1 + h_2}\right) = p_a + \frac{6\mu u_0}{\alpha}\,\frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2(h_1 + h_2)}. \tag{11.63}$$

Поскольку до подшипника и после него давление жидкости остается неизменным $(p_{h_1} = p_{h_2} = p_a)$, то при некотором промежуточном h_c функция (11.63) должна достигать максимального значения. Для нахождения величины h_c необходимо продифференцировать (11.63) по h и приравнять полученный дифференциал к нулю:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = \frac{6\mu u_0}{\alpha}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[\frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2(h_1 + h_2)}\right] = 0. \tag{11.64}$$

Решение уравнения (11.64) определяет положение сечения (величину h_c), где давление в масляном клине достигает максимального значения:

$$h_c = \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}. \tag{11.65}$$

Поскольку $h_c = h_1 - x_c\alpha$, а $\alpha = \dfrac{h_1 - h_2}{l}$, то

$$x_c = l\,\frac{h_1 - h_c}{h_1 - h_2} = l\,\frac{h_1 - \dfrac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}}{h_1 - h_2} = l\,\frac{h_1^2 - h_1 h_2}{h_1^2 - h_2^2}\,. \tag{11.66}$$

Подставив (11.65) в (11.63), получим формулу для максимального давления в масляном клине:

$$p_{\max} = p_a + \frac{3}{2}\,\mu u_0 l\,\frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)}.$$

Соответствующее распределение давления, действующего на упорный диск подшипника, показано на рис. 11.6. Среднее значение нормальной силы $R_{\text{ср}}$ может быть очень большим и определяется следующим образом:

$$R_{\text{ср}} = \int_0^l (p - p_a)\,\mathrm{d}x = \frac{6\mu u_0}{\alpha(h_1 + h_2)} \int_0^l \frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2}\,\mathrm{d}h =$$

$$= -\frac{6\mu u_0}{\alpha(h_1 + h_2)} \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{h_1}{h} - \frac{h_1 h_2}{h^2} - 1 + \frac{h_2}{h} \right) \mathrm{d}h =$$

$$= -\frac{6\mu u_0}{\alpha(h_1 + h_2)} \left[h_1 \ln \frac{h_2}{h_1} + h_1 h_2 \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right) - (h_2 - h_1) + h_2 \ln \frac{h_2}{h_1} \right] =$$

$$= \frac{6\mu u_0}{\alpha(h_1 + h_2)} \left[(h_1 + h_2) \ln \frac{h_1}{h_2} - (h_1 - h_2) + (h_2 - h_1) \right] =$$

$$= \frac{6\mu u_0}{\alpha} \left(\ln \frac{h_1}{h_2} + 2\,\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right). \qquad (11.67)$$

Сила трения $R_{\text{тр}}$, действующая на опорную поверхность, находится по очевидному уравнению

$$R_{\text{тр}} = \int_0^l 1\,\tau_w\,\mathrm{d}x = \int_0^l \mu \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \right)_{y=0} \mathrm{d}x.$$

После ряда преобразований получим

$$R_{\text{тр}} = \frac{2\mu u_0}{\alpha} \left(3\,\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} - 2 \ln \frac{h_1}{h_2} \right). \qquad (11.68)$$

Отношение силы трения $R_{\text{тр}}$ к средней нормальной силе $R_{\text{ср}}$ по аналогии с твердым телом можно рассматривать как коэффициент трения $f_{\text{тр}}$:

$$f_{\text{тр}} = \frac{R_{\text{тр}}}{R_{\text{ср}}} = \frac{\alpha}{3}\,\frac{\ln \dfrac{h_1}{h_2} - 2\,\dfrac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}}{3\,\dfrac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} - 2 \ln \dfrac{h_1}{h_2}}. \qquad (11.69)$$

Из (11.69) следует, что введенный коэффициент трения не зависит от вязкости жидкости и при небольших значениях угла α оказывается очень малым.

В опорных подшипниках скольжения картина течения в масляной пленке близка к рассмотренной. В этом случае масляный клин создается в результате вращения эксцентрично расположенного во вкладыше подшипника вала.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие величины определяют тензор поверхностных сил в вязкой жидкости?
2. Как определяется напряжение давления в вязкой жидкости?
3. Запишите уравнения движения жидкости в напряжениях.
4. В чем состоит дополнительное граничное условие при решении уравнений Навье—Стокса?
5. По какому закону меняется профиль скорости в канале, образованном двумя бесконечно длинными плоскими поверхностями?
6. Что такое слоистые течения и каким дифференциальным уравнением они описываются?
7. Что такое течение Куэтта?
8. На сколько средняя скорость при слоистом течении в цилиндрической трубе отличается от максимальной?
9. Как меняется сопротивление цилиндрической трубы при изменении объемного расхода среды через ее поперечное сечение?
10. От каких величин зависит несущая способность подшипников скольжения?

Глава 12
ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

12.1. Основные понятия о пограничном слое

Рассмотренные примеры точных решений уравнений Навье—Стокса были получены в результате существенного упрощения системы уравнений движения. Общим для всех решений являлось равенство нулю нелинейных членов в левой части уравнений (11.24), характеризующих инерционные свойства потока.

Для некоторых задач инерционные силы могут быть очень малыми по сравнению с силами вязкости. Тогда тоже можно искать приближенное решение уравнений (11.24) с нулевой левой частью, так как вместо нелинейной системы приходим к неоднородным линейным уравнениям Пуассона, решение которых известно. Этот путь линеаризации наиболее прост, но применим только к очень медленным «ползущим» течениям. Более интересным с практической точки зрения является метод сравнительных оценок членов, входящих в уравнение Навье—Стокса, когда на основе этих оценок опускаются члены, имеющие относительно малый порядок. Этот путь упрощения применим к течениям, характеризуемым большими числами Рейнольдса, и впервые использован Л. Прандтлем в 1904 г. для области течения, расположенной непосредственно вблизи обтекаемой поверхности. Основой для такого подхода послужил опытный факт, согласно которому влияние вязкости наиболее сильно меняет характер течения именно в пристеночной области.

Поскольку непосредственно на обтекаемой поверхности согласно гипотезе «прилипания» скорость равна нулю, а скорость потока имеет некоторое конечное значение, то, естественно, должна существовать зона, в которой будет происходить резкое изменение скорости по нормали к поверхности. Так как напряжение трения τ пропорционально поперечному градиенту скорости: $\tau \sim \mathrm{d}u/\mathrm{d}y$, то именно в этой области влияние вязкости должно оказываться наиболее сильным. По Прандтлю при обтекании потоком какого-либо тела с достаточно большими числами Рейнольдса область течения может быть условно разделена на три зоны (рис. 12.1): зону пограничного слоя *I*, где силы вязкости наиболее сильно сказываются на характере течения; зону невозмущенного (потенциального) течения *II*, где анализ можно вести с позиций идеальной жидкости, и зону аэродинамического следа *III*, где течение носит ярко выраженный вихревой характер.

Выделение зоны пограничного слоя является, конечно, условным, так как процесс затухания возмущений, вносимых в поток обтекаемым телом,

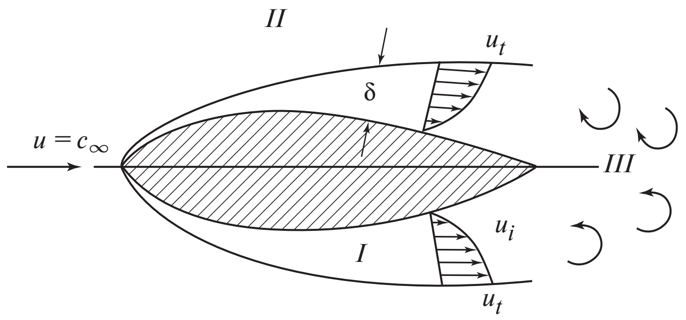


Рис. 12.1. Схема вязкого течения вокруг обтекаемого тела:
I — область пограничного слоя; *II* — область потенциального течения; *III* — область вихревого течения

является асимптотическим и для задач внутренней газодинамики они затрагивают всю область течения. В этой связи необходимо условиться относительно верхней границы выделенной зоны, т.е. дать определение пограничного слоя.

Слой жидкости, непосредственно прилегающий к обтекаемой поверхности, в пределах которого скорость меняется от нуля на стенке до скорости, отличающейся на 1 % от скорости невозмущенного течения, будем называть пограничным слоем.

Если обозначить скорость невозмущенного течения через u_t, а скорость в пределах выделенной зоны через u_i, то для оценки физической толщины пограничного слоя δ получим по определению следующее условие:

$$u_i\big|_{y=\delta} = 0{,}99u_i.$$

Произвольность такой оценки очевидна, так как при изменении степени приближения скорости u_i к скорости невозмущенного течения u_t будут меняться и значения физических толщин пограничного слоя δ.

По этой причине для практических расчетов вместо физической толщины δ используют интегральные толщины, в качестве которых принимают толщины вытеснения δ^*, потери импульса δ^{**} и потери энергии δ^{***}.

12.2. Интегральные толщины пограничного слоя

Для пояснения физического смысла интегральных толщин δ^*, δ^{**} и δ^{***} плоского пограничного слоя выделим в его пределах некоторое сечение A_1— A_2 (рис. 12.2). В этом сечении согласно определению продольная скорость u на стенке (точка A_1) равна нулю и далее асимптотически увеличивается при удалении по нормали от стенки до скорости невозмущенного течения u_t. Таким образом, вязкость жидкости является непосредственно

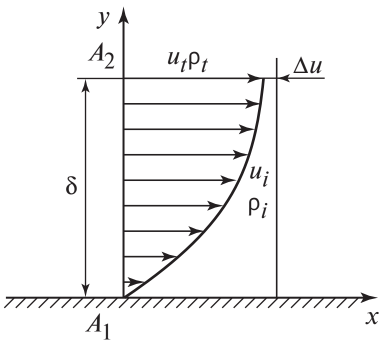


Рис. 12.2. К оценке интегральных толщин пограничного слоя

причиной формирования при больших числах Рейнольдса неравномерного профиля скорости вблизи стенки в обозначенных пределах пограничного слоя. Это приводит к тому, что в произвольно выделенном сечении A_1 — A_2 меняются расход, количество движения и кинетическая энергия движущейся жидкости.

Найдем последовательно изменения всех этих величин по сравнению со случаем обтекания рассматриваемой поверхности потоком идеальной жидкости.

12.2.1. Толщина вытеснения

При движении вдоль плоской стенки вязкой жидкости ее массовый расход через выделенное сечение A_1 — A_2 с поперечным размером, равным единице, определяется по соотношению

$$m = \int_0^{\delta} \rho_i u_i \, \mathrm{d}y \cdot 1 .$$

Теоретически возможный расход через такое сечение при отсутствии вязкости можно представить в следующем виде:

$$m_t = \int_0^{\delta} \rho_t u_t \, \mathrm{d}y \cdot 1 .$$

Очевидно, что $m_t > m$, и в результате действия вязких сил часть жидкости будет вытеснена во внешнюю по отношению к пограничному слою область *II* (рис. 12.1).

Количество жидкости, вытесненной в область *II*, будет определяться по формуле

$$\Delta m = m_t - m_i = \int_0^{\delta} \rho_t u_t \cdot 1 \left(1 - \frac{\rho_i u_i}{\rho_t u_t}\right) \mathrm{d}y .$$

Поскольку теоретическая плотность ρ_t и теоретическая скорость u_t от координаты y не зависят, то

$$\Delta m = \rho_t u_t \cdot 1 \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho_i u_i}{\rho_t u_t}\right) \mathrm{d}y . \qquad (12.1)$$

Интеграл, входящий в соотношение (12.1), имеет линейную размерность и определяет некоторую толщину δ^*, которую и называют **толщиной вытеснения**:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho_i u_i}{\rho_t u_t}\right) \mathrm{d}y\,. \qquad (12.2)$$

Для несжимаемой жидкости ($\rho_t = \rho_1 = \rho$) формула для определения толщины вытеснения упрощается:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u_i}{u_t}\right) \mathrm{d}y\,.$$

Зная толщину вытеснения, легко можно найти массу жидкости, которая из-за действия сил вязкости не смогла пройти через выделенное контрольное сечение пограничного слоя:

$$\Delta m = \rho_t u_t \delta^* \cdot 1. \qquad (12.3)$$

Если рассматривать не внешнюю, а внутреннюю задачу о движении вязкой жидкости в произвольном канале с геометрической площадью F_i и периметром Π_i в контрольном сечении, то выражение (12.3) должно быть записано в следующем виде:

$$\Delta m = \rho_t u_t \delta^* \Pi_i = \rho_t u_t \Delta^*,$$

где $\Delta^* = \delta^* \Pi_i$ представляет собой площадь вытеснения. Ее использование позволяет найти массовый расход вязкой жидкости через конкретный канал. Если в выходном сечении этого канала с площадью F_1 известны теоретические значения плотности ρ_{1t} и скорости u_t, а также найдена площадь вытеснения Δ_1^*, то

$$m_i = m_t - \Delta m_1 = \rho_{1t} u_t F_1 - \rho_{1t} u_i \Delta_1^* = \rho_{1t} u_t F_1 \left(1 - \frac{\Delta_1^*}{F_1}\right) = m_t\left(1 - \overline{\Delta}_1^*\right). \qquad (12.4)$$

Здесь $\overline{\Delta}_1^* = \Delta_1^*/F_1$ — **относительная площадь вытеснения**.

Отношение действительного массового расхода m к теоретическому расходу m_t через равновеликое проходное сечение при сохранении в контрольных сечениях одного и того же статического давления называется **коэффициентом расхода** μ (не путать с аналогичным обозначением вязкости).

Таким образом, в рассматриваемом случае знание относительной площади вытеснения позволяет представить коэффициент расхода в виде

$$\mu = 1 - \overline{\Delta}_i^*\,. \qquad (12.5)$$

12.2.2. Толщина потери импульса

Для оценки толщины потери импульса вновь обратимся к рис. 12.2 и получим формулу для **количества движения жидкости** J, протекающей через выделенное контрольное сечение A_1 — A_2:

$$J = \int_0^\delta \rho_i u_i^2 \, \mathrm{d}y \cdot 1 .$$

В случае если бы через это сечение протекала действительная масса жидкости

$$m = \int_0^\delta \rho_i u_i \, \mathrm{d}y \cdot 1$$

с теоретической скоростью u_t, то ее количество движения определялось бы в виде

$$J_t = \int_0^\delta \rho_i u_t u_i \, \mathrm{d}y \cdot 1 .$$

Таким образом, протекающая в пределах пограничного слоя через сечение A_1 — A_2 масса жидкости потеряет за счет вязкости следующее количество движения:

$$\Delta J = J_t - J = \int_0^\delta \rho_i u_i u_t \left(1 - \frac{u_i}{u_t}\right) \mathrm{d}y \cdot 1 .$$

Проведем далее следующие преобразования:

$$\Delta J = \int_0^\delta \frac{\rho_t u_t}{\rho_t u_t} \rho_i u_i u_t \left(1 - \frac{u_i}{u_t}\right) \mathrm{d}y \cdot 1 = \rho_t u_t^2 \cdot 1 \int_0^\delta \frac{\rho_i u_i}{\rho_t u_t} \left(1 - \frac{u_i}{u_t}\right) \mathrm{d}y .$$

Подынтегральное выражение имеет линейную размерность, и интеграл от этого выражения определяет некоторую линейную величину δ^{**}, которую можно назвать **толщиной потери количества движения**.

Однако поскольку изменение количества движения равно импульсу действующей силы (в данном случае импульсу сил трения), то говорят не о толщине количества движения, а о **толщине потери импульса**:

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho_i u_i}{\rho_t u_t} \left(1 - \frac{u_i}{u_t}\right) \mathrm{d}y . \qquad (12.6)$$

Для несжимаемой жидкости (ρ = const)

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{u_i}{u_t} \left(1 - \frac{u_i}{u_t}\right) \mathrm{d}y . \qquad (12.7)$$

В результате количество движения, потерянное в плоском пограничном слое, будет вычисляться по формуле

$$\Delta J = \rho_t u_t^2 \delta^{**} \cdot 1 . \qquad (12.8)$$

Формула (12.8) позволяет находить силу сопротивления различных плоских тел, обтекаемых жидкостью без отрыва потока с обтекаемой поверхности.

Найдем, в частности, силу сопротивления, которое испытывает пластина шириной B и длиной L в потоке вязкой жидкости. Схема ее обтекания с образованием пограничного слоя показана на рис. 12.3.

Для оценки сопротивления пластины применим к выделенному контуру *abcda* закон об изменении количества движения (**изменение количества движения равно импульсу всех внешних сил, действующих на выделенный объем жидкости**). В данном случае единственной силой является сила трения, и соответственно секундный импульс сил трения R_x будет равен $R_x =$ $= 2\Delta J$.

Используя формулу (12.8), получаем

$$R_x = 2\rho_t u_t^2 \delta_z^{**} B .$$

В газодинамике вместо абсолютных величин применяют некоторые безразмерные коэффициенты. Для задач внешней аэродинамики вместо силы сопротивления используют **коэффициент сопротивления** C_x, представляющий собой отношение действительной силы сопротивления R_x к скоростному напору $\frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2}$, умноженному на площадь «смоченной» поверхности обтекаемого тела. В данном случае площадь «смоченной» поверхности плас-

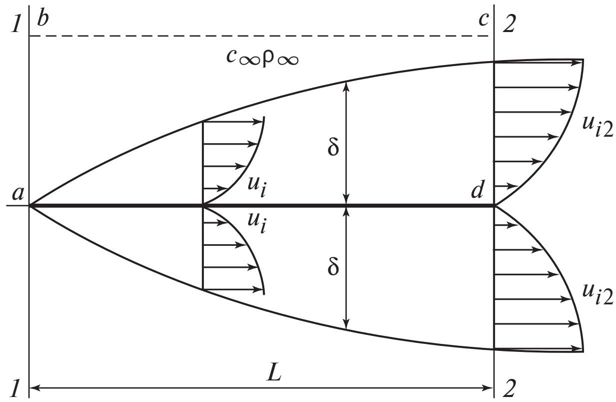


Рис. 12.3. Схема обтекания плоской пластины вязкой жидкостью

тины $S = 2BL$. Отсюда коэффициент сопротивления пластины будет определяться как

$$C_x = 2\frac{\delta_2^{**}}{L}. \qquad (12.9)$$

Таким же образом можно найти и коэффициент сопротивления крылового профиля. В этом случае, однако, толщины потери импульса с верхней $\delta_{в2}^{**}$ и нижней $\delta_{н2}^{**}$ сторон будут разными, и разными будут также длины обтекаемых поверхностей. Для этих условий

$$C_x = \frac{\delta_{в2}^{**}}{L_в} + \frac{\delta_{н2}^{**}}{L_н}. \qquad (12.10)$$

Если рассматривать внутренние задачи, то для осесимметричных каналов потерянное количество движения будет определяться по выражению

$$\Delta J = \rho_t u_t^2 \delta_2^{**} \Pi_2 = \rho_t u_t^2 F_2 \frac{\delta^{**}\Pi_2}{F_2} = \rho_t u_t^2 F_2 \overline{\Delta}_2^{**}. \qquad (12.11)$$

где $\overline{\Delta}_2^{**} = \dfrac{\delta^{**}\Pi}{F}$ — **относительная площадь потери импульса** в выходном сечении канала.

12.2.3. Толщина потери энергии

Третья интегральная толщина пограничного слоя дает возможность найти потерю кинетической энергии, обусловленную вязкостью потока.

Для ее оценки запишем выражение для кинетической энергии потока, проходящего через любое произвольное сечение пограничного слоя (на рис. 12.2 это сечение $A_1 — A_2$):

$$K = \frac{1}{2}\int_0^\delta \rho_i u_i^3 \,\mathrm{d}y \cdot 1.$$

В случае, если бы действительная масса $m = \int_0^\delta \rho_i u_i \,\mathrm{d}y \cdot 1$, проходящая через контрольное сечение, двигалась со скоростью невозмущенного течения u_t, ее кинетическая энергия определялась бы по формуле

$$K_t = \frac{m u_t^2}{2} = \frac{1}{2}\int_0^\delta \rho_i u_i u_i^2 \,\mathrm{d}y \cdot 1.$$

Таким образом, в пределах пограничного слоя до контрольного сечения $A_1 — A_2$ на преодоление сил вязкости затрачивается кинетическая энергия

$$\Delta K = K_t - K = \frac{1}{2}\int_0^\delta \rho_i u_i u_t^2 \left(1 - \frac{u_i^2}{u_t^2}\right) \mathrm{d}y \cdot 1,$$

или

$$\Delta K = \frac{1}{2}\int_0^\delta \frac{\rho_i u_i}{\rho_t u_t}\rho_i u_i u_t^2\left(1-\frac{u_i^2}{u_t^2}\right)\,\mathrm{d}y\cdot 1 = \frac{1}{2}\rho_t u_t^3\cdot 1\int_0^\delta \frac{\rho_i u_i}{\rho_t u_t}\left(1-\frac{u_i^2}{u_t^2}\right)\,\mathrm{d}y\,. \quad (12.12)$$

Интеграл от подынтегральной функции, имеющей размерность длины, входящий в формулу (12.12), определяет толщину потери энергии δ^{***}:

$$\delta^{***} = \int_0^\delta \frac{\rho_i u_i}{\rho_t u_t}\left(1-\frac{u_i^2}{u_t^2}\right)\,\mathrm{d}y\,. \quad (12.13)$$

Для несжимаемой жидкости ($\rho = \mathrm{const}$)

$$\delta^{***} = \int_0^\delta \frac{u_i}{u_t}\left(1-\frac{u_i^2}{u_t^2}\right)\,\mathrm{d}y\,. \quad (12.14)$$

Введенная толщина δ^{***} позволяет найти потерю энергии в плоском пограничном слое по простейшей формуле

$$\Delta K = \frac{1}{2}\rho_t u_t^3 \delta^{***}\cdot 1\,.$$

Для осесимметричных каналов потери энергии при безотрывном течении вычисляются по соотношению

$$\Delta K = \frac{1}{2}\rho_{1t} u_{1t}^3 \delta_1^{***}\Pi_1\,, \quad (12.15)$$

где индекс «1» указывает, что все величины в (12.15) относятся к выходному сечению.

Определяя **коэффициент потери энергии** ζ в виде отношения абсолютной потери энергии ΔK к теоретической кинетической энергии K_t, получаем

$$\zeta = \frac{\Delta K}{K_t} = \frac{\rho_{1t} u_{1t}^3 \delta_1^{***}\Pi_1}{m u_t^2}\,.$$

Для оценки массового расхода m воспользуемся формулой (12.4). Тогда

$$\zeta = \frac{\rho_{1t} u_{1t}\delta_1^{***}\Pi_1}{\rho_{1t} u_{1t} F_1\left(1-\frac{\delta_1^{*}\Pi_1}{F}\right)} = \frac{\delta_1^{***}\Pi_1}{F_1\left(1-\frac{\delta_1^{*}\Pi_1}{F}\right)} = \frac{\overline{\Delta}_1^{***}}{1-\overline{\Delta}_1^{*}}\,. \quad (12.16)$$

Здесь $\overline{\Delta}_1^{***} = \dfrac{\delta_1^{***}\Pi_1}{F_1}$ — относительная площадь потери энергии, а $\overline{\Delta}_1^{*}$, как и ранее, — относительная площадь вытеснения.

Если использовать введенное выше определение коэффициента расхода μ, то (12.16) можно записать в виде

$$\zeta = \overline{\Delta}_1^{***} / \mu . \tag{12.17}$$

Приведенные выше соотношения показывают, что по известным интегральным толщинам легко решаются задачи, связанные с определением расхода [см. (12.4)], силового взаимодействия потока с обтекаемыми телами [см. (12.9)] и потерь энергии [см. (12.17)].

Однако для расчета интегральных толщин необходимо знать распределение скоростей и плотностей в любых поперечных сечениях пограничного слоя. Таким образом, прежде чем использовать полученные формулы для решения практических задач, необходимо провести теоретический расчет полей скоростей в пределах пограничного слоя. Такой расчет при заданных граничных условиях для несжимаемой жидкости сводится к совместному решению уравнений Навье—Стокса и уравнения неразрывности. При этом, ограничивая область решения областью пограничного слоя, можно существенно упростить исходные дифференциальные уравнения. Такие упрощения впервые были проведены Л. Прандтлем, а полученные при этом упрощении уравнения называются **уравнениями Прандтля для пограничного слоя**.

12.3. Уравнения Прандтля для пограничного слоя

Дифференциальные уравнения для пограничного слоя вытекают из уравнений Навье—Стокса и могут быть получены в результате сравнительной оценки членов этих уравнений. Проведем такую оценку для плоского течения около твердой стенки.

В общем случае поверхность стенки является криволинейной, и при записи уравнений движения в строгой постановке следовало бы использовать криволинейную систему координат. Однако в связи с малостью физической толщины пограничного слоя δ по сравнению с линейными размерами тела L и с радиусом кривизны обтекаемого тела введем в рассмотрение систему координат, образованную линиями, эквидистантными стенке, и нормалями к ней. Условно такую систему будем считать прямоугольной и будем связывать ось x с поверхностью стенки, а ось y с нормалью к этой поверхности. Такое упрощение не является в данном случае принципиальным и позволяет сохранить рассмотренную ранее форму записи уравнений движения и неразрывности.

Для плоского течения эти уравнения будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right); \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{12.18}$$

Перейдем в системе (12.18) от размерных величин к безразмерным. С этой целью используем в качестве масштабных множителей следующие величины:

для продольных и поперечных скоростей — u_0, v_0;

для линейных размеров — L_0, y_0;

для давлений — p_0.

Если теперь скорости, давления и координаты выразить в долях от принятых масштабов, то можно записать

$$u = u_0\,\overline{u}\ ;\quad v = v_0\,\overline{v}\,;\quad x = L_0\,\overline{y}\,;\quad p = p_0\,\overline{p}\,. \tag{12.19}$$

Здесь и далее черта сверху показывает безразмерную величину.

Особенностью принятой системы масштабов является их различие как для продольных и поперечных скоростей, так и для продольных и поперечных размеров, причем если продольные масштабы u_0, L_0 будем считать заданными (это может быть максимальная скорость течения $u_0 = u_{\max}$ и длина канала или обтекаемого тела $L = L_0$), то поперечные масштабы оставим неопределенными и не будем пока их связывать ни с конкретной скоростью, ни с конкретным линейным размером.

Подставляя в (12.18) все величины с учетом (12.19), получаем

$$\frac{u_0^2}{L_0}\,\overline{u}\,\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}} + \frac{v_0u_0}{y_0}\,\overline{v}\,\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}} = -\frac{p_0}{\rho L_0}\,\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{x}} + \frac{\nu u_0}{L_0^2}\,\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{x^2}} + \frac{\nu u_0}{y_0^2}\,\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{y^2}};$$

$$\frac{u_0v_0}{L_0}\,\overline{u}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial x} + \frac{v_0^2}{y_0}\,\overline{v}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{y}} = -\frac{p_0}{\rho y_0}\,\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{y}} + \frac{\nu v_0}{L_0^2}\,\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial\overline{x^2}} + \frac{\nu v_0}{y_0^2}\,\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial\overline{y^2}};$$

$$\frac{u_0}{L_0}\,\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}} + \frac{v_0}{y_0}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{y}} = 0.$$

Умножим далее члены первого уравнения на L_0/u_0^2, второго — на y_0/u_0^2, а третьего — на $L\,/\,u_0$. Тогда получим

$$\overline{u}\,\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}} + \frac{v_0L_0}{u_0y_0}\,\overline{v}\,\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}} = -\frac{p_0}{\rho u_0^2}\,\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{x}} + \frac{\nu}{u_0L_0}\,\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{x^2}} + \frac{\nu L_0}{u_0y_0^2}\,\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\,\overline{y}^2}; \tag{12.20}$$

$$\frac{y_0v_0}{u_0L_0}\,\overline{u}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial x} + \frac{v_0^2}{u_0^2}\,\overline{v}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{y}} = -\frac{p_0}{\rho u_0^2}\,\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{y}} + \frac{\nu y_0v_0}{u_0^2L_0^2}\,\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial\overline{x^2}} + \frac{\nu v_0}{y_0u_0^2}\,\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial\overline{y^2}}; \tag{12.21}$$

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}} + \frac{v_0L}{u_0y_0}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{y}} = 0. \tag{12.22}$$

В такой записи все комплексы, составленные из масштабных множителей, имеют нулевую размерность.

В уравнении неразрывности (12.22) порядки первого и второго членов должны быть равны. Следовательно, комплекс $\dfrac{\nu L}{u_0 y_0}$ должен быть равным единице.

Поскольку поперечные масштабы для скоростей и длин, а также масштаб для давлений нами заранее определены не были, то теперь используем это и выберем указанные масштабы таким образом, чтобы и комплексы $\dfrac{\nu L_0}{u_0 y_0^2}$; $\dfrac{p_0}{\rho u_0^2}$ обратились в единицу, т.е.

$$\frac{v_0 L_0}{u_0 y_0} = 1; \quad \frac{\nu L_0}{u_0 y_0^2} = 1; \quad \frac{p_0}{\rho u_0^2} = 1. \tag{12.23}$$

Отсюда

$$y_0 = \frac{L}{\sqrt{u_0 L_0/\nu}}; \quad v_0 = \frac{u_0}{\sqrt{u_0 L_0/\nu}}; \quad p_0 = \rho u_0^2.$$

Безразмерный комплекс $u_0 L_0/\nu$ представляет собой введенное ранее число Рейнольдса Re, т.е.

$$y_0 = \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}}; \quad v_0 = \frac{u_0}{\sqrt{\mathrm{Re}}}. \tag{12.24}$$

Таким образом, для выполнения условий (12.23) поперечные масштабы при больших числах Рейнольдса оказываются существенно меньше продольных.

Подставляя масштабы, определяемые выражениями (12.24), в уравнения (12.20) и (12.21), получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2};\\
&\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\bar{u}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\bar{v}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\mathrm{Re}^2}\,\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{12.25}$$

Из безразмерной записи уравнений Навье—Стокса в форме (12.25) следует, что в случае, когда поперечные масштабы сокращаются пропорционально $1/\sqrt{\mathrm{Re}}$, при больших числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} > 1000$) они оказываются пренебрежительно малыми по сравнению с остальными членами, и на этом основании их можно опустить. В результате этой операции исходная система существенно упрощается и принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &\overline{u}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2};\\ &\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.26}$$

Смысл проведенных упрощений можно понять, если обратить внимание на физический смысл числа Рейнольдса. Этот комплекс дает соотношение между инерционными и вязкими силами в потоке. Чем меньше влияние сил вязкости, т.е., чем ближе реальное течение приближается к течению идеальной жидкости, тем большим числам Рейнольдса соответствует это течение. Следовательно, при больших числах Re поперечная протяженность зоны активного влияния вязкости оказывается небольшой и ее действительно можно рассматривать как зону пограничного слоя. При этих условиях вводимый масштаб y_0 определяет физическую толщину пограничного слоя δ с точностью до постоянного множителя B:

$$\frac{\delta}{L} = \frac{B}{\sqrt{\mathrm{Re}}}.$$

Из изложенного следует, что уравнения (12.26) являются дифференциальными уравнениями пограничного слоя в безразмерном виде и имеют смысл только для течения жидкости при больших числах Рейнольдса.

Возвращаясь в (12.26) к размерным величинам и добавляя уравнение неразрывности, получаем необходимую систему уравнений для решения задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в пределах пограничного слоя:

$$\left.\begin{aligned} &u\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};\\ &\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 0;\\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.27}$$

В качестве граничных условий необходимо принять:

1) на обтекаемых поверхностях при $y = 0$ $u = v = 0$;

2) закон изменения скорости невозмущенного течения вдоль оси x, т.е. при $y \geq \delta$ $u_t = u_t(x)$.

Из второго уравнения (12.27) следует, что в пределах пограничного слоя давление p в поперечном направлении не меняется. Этот вывод имеет очень важное практическое значение, так как позволяет находить распределение давления вдоль оси x с помощью уравнений Эйлера для идеальной жидкости. В случае одномерного течения

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\rho_t u_t \frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x} = -\rho_t c_t \frac{\mathrm{d}c_t}{\mathrm{d}x}. \tag{12.28}$$

Кроме того, условие постоянства давления поперек пограничного слоя позволяет оценивать его в невозмущенной части потока (на верхней границе пограничного слоя) по результатам измерений этого давления непосредственно на обтекаемой поверхности. Следует, однако, иметь в виду, что условие $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$ не выполняется на сильно искривленной поверхности, радиус кривизны которой соизмерим с толщиной пограничного слоя, вблизи зон отрыва потока от стенок канала или поверхности обтекаемого тела и в зоне действия скачков уплотнения, вызывающих резкие перепады давления не только во внешней части потока, но и в пределах пограничного слоя.

Решение практических задач на основе нелинейной системы дифференциальных уравнений (12.27) все же представляет значительные трудности, но при использовании современной вычислительной техники эти трудности не принципиальны. Более существенным обстоятельством, ограничивающим широкое использование уравнений Прандтля (12.27), является переход в пределах пограничного слоя от слоистого, ламинарного течения к хаотическому турбулентному режиму. Именно второй тип течения при больших числах Рейнольдса, как правило, и имеет место. Тогда необходимо либо внести определенные коррективы в уравнения Прандтля, либо искать другие, более универсальные пути расчета характеристик пограничного слоя.

В инженерной практике с этой целью наиболее часто используют интегральное соотношение Кармана, базирующееся на уравнении количества движения, примененного к элементу пограничного слоя.

12.4. Уравнение Кармана для пограничного слоя

Рассмотрим плоское течение вязкой жидкости вдоль произвольной поверхности и проведем условную границу, отделяющую область пограничного слоя от внешнего невозмущенного силами вязкости течения, как показано на рис. 12.4. Направим ось x вдоль поверхности и обозначим составляющую скорости в направлении этой оси внутри пограничного слоя через u, а на его внешней границе через u_t. В некотором произвольном сечении выделим элемент жидкости, ограничив его нормальными сечениями AB и CD, внешней границей слоя BC и элементом обтекаемой поверхности DA. Применим далее к этому элементу уравнение сохранения количества движения, спроектировав его на ось x:

$$\Delta J = \sum_{i=1}^{n} R_{ix}. \tag{12.29}$$

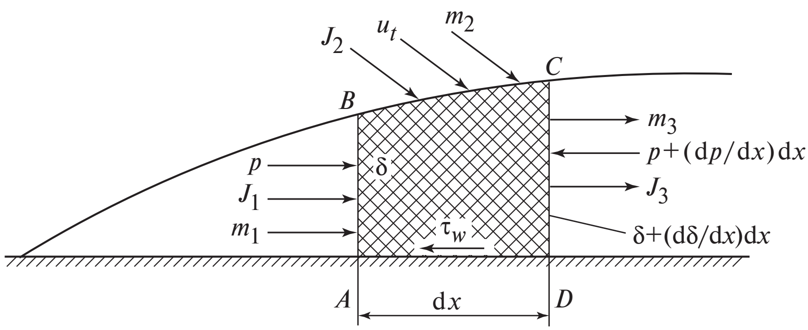


Рис. 12.4. К выводу уравнения Кармана

Здесь ΔJ — изменение количества движения; $\sum\limits_{i=1}^{n} R_{ix}$ — суммарный секундный импульс всех внешних сил, действующих на выделенный элемент в направлении оси x. С левой стороны через грань AB внутрь элемента входит масса m_1, количество движения которой J_1. Через внешнюю границу BC входит масса m_2, вносящая количество движения J_2, и через правую грань CD вытекает масса m_3, уносящая количество движения J_3. Таким образом, $\Delta J = J_3 - J_2 - J_1$ или, так как $J_3 = J_1 + \dfrac{dJ_1}{dx}\,dx$, а $J_2 = m_2 u_t$, то $\Delta J = \dfrac{dJ_1}{dx}\,dx - m_2 u_1$. Величина m_2 находится из уравнения сохранения массы $m_2 = m_3 - m_1 = m_1 + m_1\dfrac{dm_1}{dx} - m_1 = \dfrac{dm_1}{dx}\,dx$.

Следовательно, $\Delta J = \left[\dfrac{dJ_1}{dx} - u_t\dfrac{dm_1}{dx}\right]dx$.

Внешними силами для рассматриваемого элемента являются силы давления, направленные по нормали к поверхностям AB и CD, и силы трения, действующие со стороны обтекаемой поверхности. Вдоль внешней границы BC силовое воздействие в направлении оси x отсутствует. Суммируя секундные импульсы от всех названных сил, получаем

$$\sum R_{ix} = p\delta\cdot 1 - \tau_w\,dx\cdot 1 - \left(p + \frac{dp}{dx}\,dx\right)\left(\delta + \frac{d\delta}{dx}\,dx\right)\cdot 1.$$

С точностью до бесконечно малых второго порядка

$$\sum R_{ix} = \left(-\tau_w - \frac{dp}{dx}\,\delta\right)dx\,.$$

В результате исходное равенство (12.29) примет вид

$$\left(\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}x} - u_t\,\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}x}\right)\,\mathrm{d}x = -\left(\tau_w + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\delta\right)\,\mathrm{d}x\,,$$

или после сокращения на dx будем иметь

$$\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}x} - u_t\,\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}x} = -\tau_w - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\delta\,. \tag{12.30}$$

Если известны профиль скорости в сечении AB и закон изменения плотности ρ поперек пограничного слоя, то

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\delta \rho u^2 \mathrm{d}y = \varphi_1(x);\\ m_1 &= \int_0^\delta \rho u \mathrm{d}y = \varphi_2(x). \end{aligned}\right\} \tag{12.31}$$

С учетом (12.31) уравнение (12.30) примет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \rho u^2 \mathrm{d}y - u_t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \rho u\,\mathrm{d}y = -\tau_w - \delta\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,. \tag{12.32}$$

При выводе соотношения (12.32) частные производные по x заменены полными, так как J_1 и m_1 зависят только от продольной координаты x. Уравнение (12.32) представляет собой интегральное уравнение Кармана для пограничного слоя.

Проведем дальнейшее преобразование этого уравнения. С этой целью прибавим и вычтем в левой части один и тот же член, равный $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^\delta \rho u u_t \mathrm{d}y$.

Градиент давления dp/dx заменим градиентом скорости $-\rho_t u_t \dfrac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}$, использовав уравнение Эйлера (12.28) и представив физическую толщину δ в виде интеграла $\delta = \displaystyle\int_0^\delta \mathrm{d}y$. В результате получим

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^\delta \rho u u_t \mathrm{d}y - \int_0^\delta \rho u^2\,\mathrm{d}y\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \rho u u_t \mathrm{d}y - u_t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \rho u \mathrm{d}y =$$

$$= -\tau_w + \rho_t u_t\,\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \mathrm{d}y\,. \tag{12.33}$$

Так как плотность ρ_t и скорость u_t на внешней границе слоя зависят только от продольной координаты x, то их можно вносить под знак интеграла и выносить из-под него. С учетом этого замечания очевидные преобразования уравнения (12.33) дают

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \rho_t u_t^2 \frac{\rho u}{\rho_t u_t}\left(1-\frac{u}{u_t}\right)\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \rho u \mathrm{d}y - u_t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \rho u \mathrm{d}y + u_t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \rho u \mathrm{d}y =$$

$$= -\tau_w - \frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \rho_t u_t \,\mathrm{d}y\,.$$

После сокращения подобных членов и дальнейшей группировки будем иметь

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\rho_t u_t^2\int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_t u_t}\left(1-\frac{u}{u_t}\right)\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}\rho_t u_t\int_0^\delta\left(1-\frac{\rho u}{\rho_t u_t}\right)\mathrm{d}y = \tau_w.$$

Выражения, определяемые интегралами, представляют собой толщины потери импульса и вытеснения [см. (12.2) и (12.6)]:

$$\left.\begin{aligned}\delta^* &= \int_0^\delta\left(1-\frac{\rho u}{\rho_t u_t}\right)\mathrm{d}y;\\ \delta^{**} &= \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_t u_t}\left(1-\frac{u}{u_t}\right)\mathrm{d}y.\end{aligned}\right\}$$

Таким образом,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho_t u_t^2\delta^{**}) + \frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}\rho_t u_t\delta^* = \tau_w. \qquad (12.34)$$

Заметим, что с учетом физического смысла величин δ^{**}, δ^* уравнение (12.34) можно было записать почти сразу. Действительно, если вместо условной границы пограничного слоя, определяемой физической толщиной δ, провести границу интегральных толщин δ^* и, выделив контрольный элемент $ABCD$, применить к нему уравнение количества движения, то можно записать

$$\mathrm{d}(\Delta J) = -\tau_w\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}p\delta^*.$$

Количество движения, потерянное в потоке, определяется по формуле (12.8):

$$\Delta J = \rho_t u_t^2\delta^{**}\cdot 1\,,$$

а его изменение на длине $\mathrm{d}x$ будет равно $\dfrac{\mathrm{d}(\Delta J)}{\mathrm{d}x}$. Следовательно, получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho_t u_t^2\delta^{**}) = \tau_w - \rho_t u_t\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}\delta^*.$$

Будем считать все три величины под знаком дифференциала зависимыми от x. Тогда

$$\rho_t u_t^2 \frac{d\delta^{**}}{dx} + 2u_t\rho_t\delta^{**}\frac{du_t}{dx} + u_t^2\delta^{**}\frac{d\rho_t}{dx} + \rho_t u_t\delta^{*}\frac{du_t}{dx} = \tau_w.$$

Если производную $d\rho_t/dx$ записать в виде

$$\frac{d\rho_t}{dx} = \frac{d\rho_t}{dp}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a^2}\frac{dp}{dx} = -\frac{\rho_t u_t}{a^2}\frac{du_t}{dx}$$

и разделить все члены на $\rho_t u_t^2$, то можно получить

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + 2\frac{\frac{du_t}{dx}\delta^{**}}{u_t} - \frac{u_t^2}{a^2}\frac{\frac{du_t}{dx}\delta^{**}}{u_t} + \frac{\frac{du_t}{dx}\delta^{*}}{u_t} = \frac{\tau_w}{\rho_t u_t^2}.$$

Отсюда

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{\delta^{**}\frac{du_t}{dx}}{u_t}\left(2 + \frac{\delta^{*}}{\delta^{**}} - \mathrm{M}_t^2\right) = \frac{\tau_w}{\rho_t u_t^2}.$$

Отношение δ^{*}/δ^{**} обозначим через H, а $\dfrac{\tau_w}{\rho_t u_t^2}$ представляет собой половину локального коэффициента сопротивления $c_x = \tau_w \Big/ \dfrac{\rho_t u_t^2}{2}$. С учетом этих обозначений запишем

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{\delta^{**}\frac{du_t}{dx}}{u_t}(2 + H - \mathrm{M}_t^2) = \frac{c_x}{2}. \tag{12.35}$$

В такой записи уравнение Кармана является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно неизвестной толщины потери импульса δ^{**}.

Для несжимаемой жидкости $\mathrm{M}_t = 0$, и, следовательно, уравнение Кармана будет иметь вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{\delta^{**}\frac{du_t}{dx}}{u_t}(2 + H) = \frac{c_x}{2}. \tag{12.36}$$

В общем случае это уравнение связывает три неизвестных (δ^{**}, H, c_x), и для его решения необходимо иметь еще две дополнительные связи между указанными величинами.

В частном случае при безградиентном течении ($\mathrm{d}u_t/\mathrm{d}x = 0$) уравнение (12.36) принимает особенно простой вид:

$$\frac{\mathrm{d}\delta^{**}}{\mathrm{d}x} = \frac{c_x}{2}. \qquad (12.37)$$

Однако и в этом случае необходимо иметь еще одно соотношение, связывающее c_x и δ^{**}. В отличие от уравнений Прандтля, базирующихся на уравнениях Навье—Стокса, справедливых для слоистого течения вязкой жидкости, здесь мы не делали никаких предположений относительно характера движения жидкости. На этом основании соотношения (12.35)—(12.37) справедливы как для ламинарного, так и для турбулентного течения в пределах пограничного слоя. Однако добавочные связи между неизвестными, входящими в указанные уравнения, будут, конечно, различными для каждой формы течения.

Остановимся теперь на вопросе перехода от ламинарного течения к турбулентному и отметим основные факторы, определяющие этот переход.

12.5. Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный

В пределах пограничного слоя так же, как и при движении жидкости в трубах, возможно как ламинарное, так и турбулентное течение. Реализация того или иного режима зависит от многих факторов, среди которых главным, по-видимому, является соотношение между силами инерции и силами вязкости, характеризуемое числом Рейнольдса. При сравнительно низких значениях Re ламинарное течение оказывается весьма устойчивым и все возмущения, вносимые в пограничный слой как со стороны внешнего потока, так и со стороны обтекаемой поверхности, быстро затухают. В этом случае вязкость потока играет стабилизирующую роль. Однако с приближением к некоторому критическому числу Рейнольдса можно наблюдать периодическое нарушение ламинарного режима с поперечным выбросом частиц жидкости. С увеличением числа Re растет и частота этих выбросов, пока все течение в пределах пограничного слоя не приобретет хаотический характер. Мгновенные скорости в этом случае произвольным образом меняются с течением времени, но среднестатистические их значения от времени не зависят. Другими словами, после полного разрушения ламинарного движения жидкости стационарное течение остается только среднестатистически стационарным, а движение каждой отдельной частицы приобретает ярко выраженный нестационарный характер. Подобное течение получило название **турбулентного** и является предметом усиленных теоретических и экспериментальных исследований.

Переход от ламинарного режима к турбулентному совершается не мгновенно, а в пределах некоторой переходной области, как показано на рис. 12.5. Размеры этой области, как и значение критического числа Рейнольдса, зависят от очень многих факторов, и правильный их учет возможен

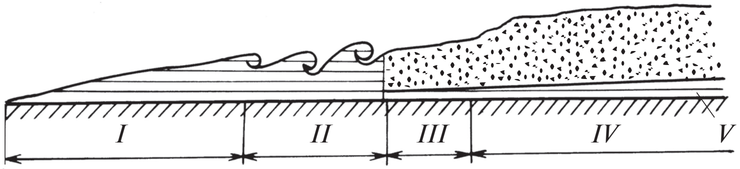


Рис. 12.5. Схема перехода от ламинарного режима течения к турбулентному в пределах пограничного слоя:

I — ламинарный слой; *II* — поверхностные «бегущие» волны; *III* — турбулентные пятна; *IV* — турбулентный слой; *V* — вязкий подслой

только в случае, если будет вскрыта физическая причина разрушения ламинарного режима движения жидкости в пограничном слое. Имеется достаточно много гипотез, объясняющих какие-то стороны возникновения турбулентности. При этом подчеркивается (и опыты это подтверждают), что турбулентный поток состоит из вихревых образований различных размеров и интенсивности. По-видимому, вихревая природа турбулентности может считаться установленным фактом. Важно, однако, объяснить происхождение этих вихрей, найти первоначальную причину их появления, которую следует, искать в том, что в отличие от твердого тела, движение которого в общем случае складывается из поступательного и вращательного движений, для жидкого элемента добавляется еще и деформационное движение. В пределах плоского пограничного слоя, если для простоты рассуждений пренебречь производной от скорости v в направлении оси x, угловая скорость ω_z и вектор деформации ε_z выражаются, по сути, одинаковым образом:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (12.38)$$

то есть вращение и деформация жидкой частицы определяются поперечным градиентом скорости. Чем больше значение производной $\partial u/\partial y$, тем выше скорость относительной деформации ε_z. Ясно, что при деформационном движении жидкости центр тяжести (точка b на рис. 12.6) деформированной частицы меняет свое положение. В то же время центр ее вращения a стремится сохранить первоначальное положение. При небольших скоростях деформации, когда поперечный градиент $\partial u/\partial y$ мал, под действием сил вязкости возникающий эксцентриситет e ликвидируется и происходит естественная «балансировка» вращающихся частиц жидкости. В этом смысле ламинарный режим представляет собой режим «сбалансированного» течения.

Однако в случае больших скоростей деформации смещение центра вращения от центра масс может вызвать появление добавочной силы $\mathrm{d}R = \mathrm{d}m\omega^2 e$, которая будет превышать силу, обусловленную молекулярным трением, и под действием указанной силы частица сойдет со своей траекто-

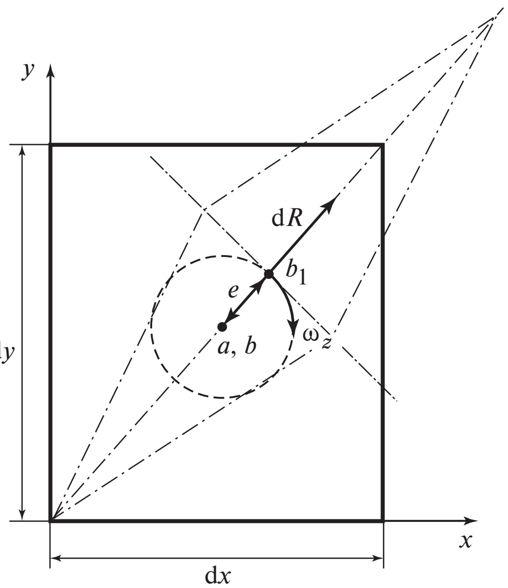


Рис. 12.6. Схема сил, действующих на жидкую частицу в пограничном слое

рии, захватив при этом часть жидкости, находящейся внутри окружности, описываемой проведенным из центра вращения a радиусом e (рис. 12.6). Захваченная жидкость начинает вращаться по закону твердого тела и образует исходное вихревое ядро.

Представим силу, возникающую при сильной деформации некоторого плоского жидкого элемента, в виде

$$dR = \rho\ dx\ dy \cdot 1\omega^2 e.$$

Для плоского течения поперечный размер принят равным единице. При этом на площадках, параллельных плоскости xz, возникает добавочное напряжение

$$\tau = \frac{dR}{dx \cdot 1} = \rho e \omega_z^2\ dy.$$

Выражая угловую скорость ω_z через линейные скорости [см. (12.38)], получаем

$$\tau = \rho e\ dy \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}.$$

Полагая, что две линейные величины e и dy имеют одинаковые порядки, выразим их через одну линейную величину l. Тогда с точностью до постоянной будем иметь

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \qquad (12.39)$$

Из сравнения возникающего при деформации жидкого элемента добавочного напряжения τ с молекулярным напряжением трения $\tau_л = \mu \frac{du}{dy}$, вытекает следующее условие разрушения слоистого (ламинарного) течения: $\boldsymbol{\tau > \tau_л}$.

При такой трактовке зона вихревых образований должна находиться очень близко к обтекаемой поверхности, где производные скорости u по поперечной координате y максимальны. На образовавшийся вихрь в плоскопараллельном потоке согласно теореме Н.Е. Жуковского действует подъемная сила, обеспечивающая интенсивный выброс частиц жидкости из пристеночной области. Одновременно в соответствии с уравнением неразрывности возникает столь же интенсивное движение и по направлению к стенке. При массовом порождении вихрей в результате суперпозиции полей скоростей основного течения и скоростей, индуцированных вихревыми образованиями, течение жидкости приобретает хаотический, нестационарный характер. Поскольку размеры вихревых ядер зависят от скорости деформации жидкого элемента, а эта скорость существенно переменна поперек пограничного слоя, то в развитом турбулентном течении генерируется очень широкий спектр частот пульсаций скорости. Крупные вихри порождают низкочастотную пульсацию, а мелкие — высокочастотную. Роль молекулярной вязкости в этом процессе оказывается незначительной, и в известной степени турбулентное течение можно уподобить движению идеальной жидкости, в области которой имеет место хаотическое распределение твердых тел различных размеров и формы. При этом перенос массы через любую поверхность приводит к изменению количества движения и, следовательно, эквивалентен появлению в потоке добавочных сил. В противовес молекулярным силам их часто называют силами турбулентного трения. Термин «трение» применительно к турбулентному потоку носит условный характер, и иногда, подчеркивая эту условность, говорят о кажущемся (виртуальном) трении. Сопротивление каналов при переходе к турбулентному режиму течения, обусловленное появлением добавочных сил, а следовательно, и добавочных напряжений на поверхностях жидкого элемента, резко возрастает.

Одновременно турбулентные напряжения увеличивают скорость угловой деформации, способствуя еще более интенсивному зарождению вихревых полей и более быстрому распаду ламинарного течения, т.е. начинавшийся при некотором критическом числе $\mathrm{Re}_{кр}$ процесс турбулизации носит лавинный характер, и на некотором расстоянии вниз по потоку образуется статистически гомогенная (однородная) среда. Мгновенную скорость этой среды c можно представить в виде суммы среднестатистической скорости $\bar{c}$, не зависящей от времени, и пульсационной составляющей c', меняющей свое значение с течением времени по совершенно произвольному закону. Тогда можно записать

$$\left.\begin{aligned} u &= \overline{u} + u'; \\ v &= \overline{v} + v'; \\ w &= \overline{w} + w'. \end{aligned}\right\} \tag{12.40}$$

Для количественной оценки интенсивности пульсационных составляющих скорости используют отношение среднеквадратичных пульсаций к среднестатистической скорости $\overline{u}$. Введенная таким образом величина E называется **степенью турбулентности**. По определению

$$E = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)}}{\overline{u}}. \tag{12.41}$$

Таким образом, турбулентное течение в отличие от ламинарного является «разбалансированным» с самонарастающей «разбалансировкой» по ходу потока. Теперь с учетом изложенного можно следующим образом объяснить физический смысл критического числа $\mathrm{Re}_{\text{ср}}$, определяющего предел устойчивости ламинарного течения.

Поскольку этот параметр определяет соотношение между инерционными силами и силами вязкости, то при низких значениях числа Re, когда силы вязкости преобладают, образование вихревых ядер произойти не может как из-за малости смещения центра масс от центра вращения, так и из-за быстрой ликвидации этого эксцентриситета. В дальнейшем с ростом числа Рейнольдса первый фактор усиливается, а второй — ослабевает, и при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ наступает распад ламинарного режима.

Из изложенного следует, что конкретное значение критического числа Рейнольдса должно зависеть от факторов, способствующих изменению скорости угловой деформации и ослаблению силы молекулярного трения. Такими факторами являются: форма и степень шероховатости обтекаемой поверхности, значение продольного градиента скорости основного течения и степень возмущенности (степень турбулентности) потока за пределами пограничного слоя.

Действительно, при движении жидкости вдоль шероховатой поверхности, характеризуемой средней высотой бугорков шероховатости k_s и частотой их следования l (рис. 12.7), происходит непрерывное образование вихревых ядер непосредственно на самой поверхности в связи со срывом потока с неровностей стенки. «Всплывание» этих ядер порождает поперечный перенос жидкости, увеличивает поперечный градиент скорости и тем самым способствует более раннему переходу всего потока к турбулентному режиму течения. На рис. 12.8 показано влияние шероховатости на критическое значение числа $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$. Его численное значение зависит от определяющего линейного размера, положенного в основу расчета. В качестве такого размера при-

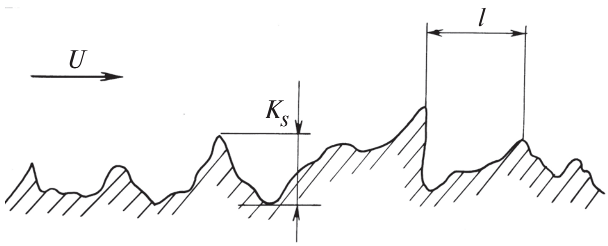


Рис. 12.7. Схема шероховатой поверхности

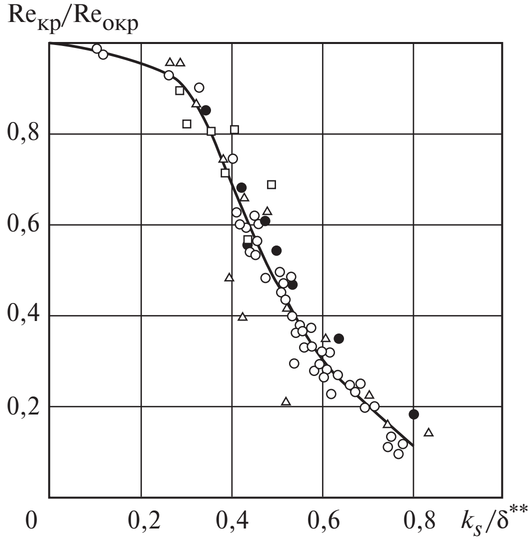


Рис. 12.8. Влияние шероховатости на критическое значение числа Рейнольдса $Re_{кр}$

нимают либо продольную координату x (Re_x), либо физическую толщину пограничного слоя δ (Re_δ), либо интегральную толщину δ^{**} (Re^{**}).

При движении по выпуклой поверхности на жидкость действуют добавочные дестабилизирующие силы, способствующие более раннему выносу вихревых ядер из пристеночной зоны в основную часть пограничного слоя и соответственно снижающие $Re_{кр}$. На вогнутой поверхности центробежные силы стабилизируют поток и увеличивают $Re_{кр}$. К сожалению, этот фактор исследован очень мало, и сколь-либо надежных опытных данных пока привести нельзя.

Роль турбулентности внешнего потока (E_0) в этом смысле исследована значительно полнее и по физическому воздействию аналогична действию шероховатости. Опытные данные по влиянию величины E_0 на критическое число $Re^{**}_{кр}$ приведены на рис. 12.9. Вначале увеличение степени турбулентности

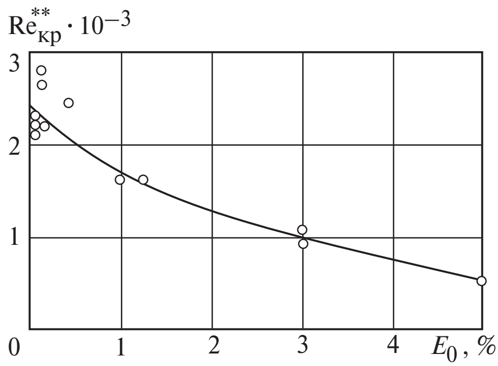


Рис. 12.9. Влияние степени турбулентности на $Re^{**}_{кр}$

внешнего потока E_0 приводит к весьма резкому снижению $Re^{**}_{кр}$, а затем ее влияние на критическое число $Re^{**}_{кр}$ заметно уменьшается.

Характер изменения скорости основного течения вдоль продольной оси x весьма значительно влияет на форму профиля скорости в пределах ламинарного пограничного слоя и по существу определяет максимальный поперечный градиент скорости в пристеночной области и напряжение трения $\tau = \mu\, du/dy$. Если скорость в направлении движения жидкости падает, а давление растет ($dp/dx > 0$), т.е. имеет место диффузорное течение, то резко снижается молекулярное напряжение трения $\tau_л$. В результате критическое значение числа Рейнольдса по сравнению с безградиентным течением уменьшается. Наоборот, в случае конфузорного течения поперечный градиент скорости у стенки du/dy сильно возрастает и увеличивается стабилизирующее влияние сил трения, что сдвигает область перехода в зону более высоких чисел Re. Если обеспечивается очень резкое ускорение потока в канале, то при некоторых условиях под действием вязких напряжений происходит не только сокращение времени существования вихревых ядер, но и полное гашение уже развивающегося турбулентного течения. Такое явление называется ламинаризацией пограничного слоя [2].

При рассмотрении пограничного слоя с отличным от нуля продольным градиентом скорости ($du_t/dx \neq 0$) часто используется безразмерный параметр следующего вида: $f = \dfrac{\dfrac{du_t}{dx}\,\delta^{**}}{u_t}$. В зависимости от него и определяют значение критического числа Рейнольдса. Конкретное значение $Re^{**}_{кр}$ может быть найдено по кривой на рис. 12.10, рассчитанной для случая движения жидкости около гладкой стенки при очень слабой турбулентности внешнего потока.

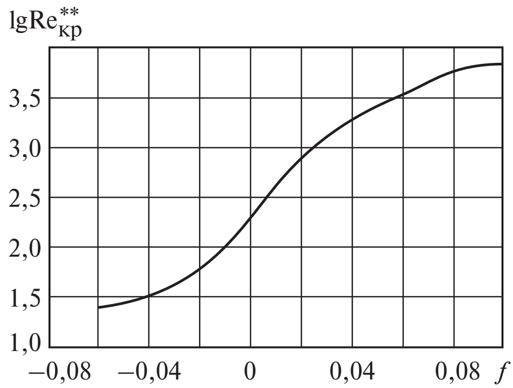


Рис. 12.10. Влияние продольного градиента давления на $Re^{**}_{кр}$

Если одновременно с градиентом скорости будет еще действовать любой из перечисленных выше факторов, то необходимо вносить соответствующие коррективы в найденное по рис. 12.10 значение $Re^{**}_{кр}$.

Для такой корректировки при большой шероховатости поверхности может быть использована следующая структурная формула, полученная А.Н. Мельниковым [28] на основе теории размерности:

$$Re^{**}_{кр} = \text{const}\ \frac{(0{,}088 + f)^{2/3}}{(k_s/\delta^{**})^{2/3}} + 225\,. \qquad (12.42)$$

Практическое определение точки потери устойчивости ламинарного пограничного слоя сводится к определению закона изменения числа Re^{**} вдоль продольной оси x и сравнению его с критическим значением. Координата $x_{кр}$ находится в этом случае из очевидного уравнения

$$Re^{**}(x_{кр}) = Re^{**}_{кр}.$$

Между сечениями, где ламинарный пограничный слой теряет устойчивость, и сечением, после которого устанавливается развитое турбулентное течение, находится переходная область с постепенно нарастающей степенью турбулентности.

Протяженность этой зоны перехода зависит от тех же факторов, что и значение критического числа Рейнольдса. При низкой внешней турбулентности ($E_0 < 1$ %), гидравлически гладкой поверхности и конфузорном течении эта зона может быть достаточно большой. Однако уже при степени турбулентности $E_0 \geq 1{,}5 \div 2$ %, что характерно для большинства технических задач, она резко сокращается. При $E_0 \approx 3$ % переход к турбулентному течению происходит на столь малом расстоянии, что линейные размеры переходной области при расчетах пограничного слоя уже можно не принимать во внимание.

В области перехода от ламинарного течения к развитому турбулентному течению происходят интенсивное увеличение физической толщины пограничного слоя δ и существенное повышение скорости вблизи стенки (увеличивается полнота профиля скорости).

При вычислении интегральной толщины потери импульса оба указанных фактора действуют противоположно, так как с увеличением величины δ интегральная толщина δ^{**} интенсивно растет, а с увеличением полноты профиля скорости она снижается. В области перехода к турбулентному течению в пределах пограничного слоя превалирующим фактором является рост физической толщины слоя δ, что и определяет в конечном счете существенное увеличение в рассматриваемой области толщины потери импульса δ^{**}.

Для оценки степени увеличения в переходной области толщины потери импульса можно воспользоваться опытной зависимостью, приведенной на рис. 12.11, где показано, как меняется отношение толщины потери импульса в начале турбулентного пограничного слоя $\delta^{**}_{\text{т}}$ к аналогичной величине в конце ламинарного участка этого слоя $\delta^{**}_{\text{л}}$ в зависимости от формпараметра $f = \dfrac{u_t' \delta^{**2}}{u_t}$ (на рис. 12.11 $r^{**} = \delta^{**}_{\text{т}}/\delta^{**}_{\text{л}}$).

Из приведенных данных следует, что в области конфузорного течения ($f > 0$) переход к турбулентному режиму сопровождается достаточно интенсивным увеличением толщины потери импульса ($r^{**} > 30$ %). В то же время в области диффузорного течения величина r^{**} оказывается существенно меньшей. Более того, при $f \approx -0{,}06$ переход к турбулентному течению происходит без увеличения толщины потери импульса δ^{**} ($r^{**} \approx 1$).

Физическая причина такого изменения величины r^{**} состоит в том, что в области конфузорного течения, где профиль скорости достаточно полный, переход к турбулентному режиму в очень небольшой степени деформирует

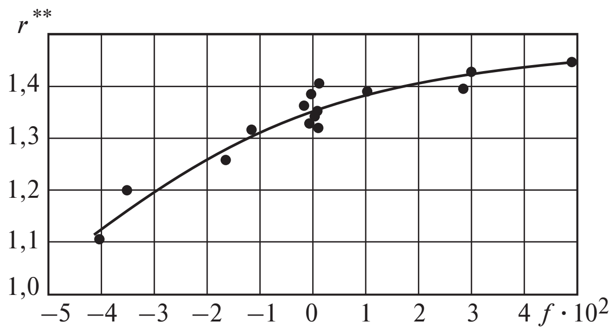


Рис. 12.11. Зависимость размеров переходной области от формпараметра f при переходе от ламинарного режима течения к турбулентному в пограничном слое

профиль скорости. В результате происходит по существу только рост физической толщины пограничного слоя и примерно в такой же степени увеличивается интегральная толщина δ^{**}.

В области диффузорного течения профиль скорости имеет небольшую полноту, и при переходе к турбулентному режиму здесь происходит существенное увеличение скоростей вблизи стенки, такая деформация, как уже отмечалось выше, снижает толщину потери импульса. Соответственно при некотором значении формпараметра f это снижение уже не может быть скомпенсировано увеличением физической толщины пограничного слоя и переход к турбулентному режиму течения происходит без увеличения безразмерного параметра r^{**}.

На основании обработанных опытных данных, полученных при различных значениях безразмерной скорости M в переходной области, зависимость $r^{**} = \varphi(\mathrm{M}, f)$ можно представить и в виде следующей аппроксимирующей формулы:

$$r^{**} = \frac{\delta_{\text{т}}^{**}}{\delta_{\text{л}}^{**}} = (7 + 100f)^{0{,}12 + f/2} + 0{,}12\mathrm{M}\,.$$

За пределами переходного участка устанавливается развитое турбулентное движение жидкости, существенно меняющее напряжение трения на стенке, толщину пограничного слоя δ и форму профиля скорости в пределах этого слоя. Именно разница в форме профиля скорости является основным внешним признаком перехода к турбулентному режиму течения.

12.6. Основные характеристики турбулентных течений

Теоретическое исследование турбулентного течения сопровождается очень большими трудностями, так как меняющееся во времени произвольным образом поле скоростей нельзя характеризовать какой-либо одной величиной, а приходится использовать целый ряд величин, каждая из которых отражает одну из сторон турбулентного течения.

В рассматриваемом случае сложности начинаются уже на стадии определения средних скоростей и параметров. Переход от мгновенных значений скоростей и параметров потока к некоторым средним значениям может быть осуществлен на основе как статического, так и временного осреднения. Для статического осреднения проведем в некоторой точке потока N измерения скорости, которая в зависимости от времени меняется по произвольному закону. Пусть при этих измерениях значение скорости $c = c_1$ было получено n_1 раз. Скорость $c = c_2$ выпала n_2 раз, скорость $c = c_3$ — n_3 раз и т.д. Тогда для нахождения средней скорости необходимо значение каждой зафиксированной скорости c_i повторить столько раз, сколько она была получена (т.е. умножить на n_i), сложить полученные произведения и разделить на общее число измерений. В результате будем иметь

$$c = \frac{c_1 n_1 + c_2 n_2 + c_3 n_3 + \ldots + c_n n_n}{N} = \left(c_1 \frac{n_1}{N_1} + c_2 \frac{n_2}{N_2} + c_3 \frac{n_3}{N_3} + \ldots + c_n \frac{n_n}{N_n}\right) =$$

$$= c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + c_3 \Phi_3 + \ldots + c_n \Phi_n .$$

Отношение $n_i / N = \Phi_i$ определяет вероятность появления в рассматриваемом спектре скоростей выделенной конкретной скорости.

Очевидно, что

$$\sum \Phi(c_i) = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots + \Phi_n = 1.$$

При статистических описаниях событий обычно используют **распределение плотности вероятности** P_i, определяемой для рассматриваемого случая следующим образом $P_i(c_i) = \mathrm{d}\Phi / \mathrm{d}c$. Качественный вид зависимости $P_i = f(c_i)$ изображен на рис. 12.12.

При непрерывном спектре распределения плотности вероятностей средняя скорость c находится путем интегрирования произведения $c_i P(c_i)$ по всему интервалу изменения скоростей:

$$\bar{c} = \int_0^{c_{\max}} c_i P(c_i)\, \mathrm{d}c , \qquad (12.43)$$

Здесь, как и ранее $c_{\max} = \sqrt{\dfrac{2kRT_0}{k-1}}$

В теории вероятности полученная величина $\bar{c}$ является **математическим ожиданием функции** $\bar{c}$ и обозначается в виде функционала $Mc_i = \bar{c}$.

Действительная скорость отличается от средней, и в каждый момент времени эта разница $\Delta c = c_i - \bar{c}$.

Математическое ожидание $M\Delta c = Mc_i - M\bar{c} = 0$, так как $Mc_i = \bar{c}$ и $M\bar{c} = \bar{c}$. Введенная разница Δc скоростей определяет поле их рассеивания.

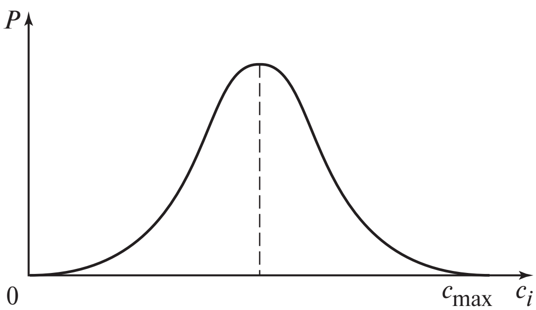


Рис. 12.12. Плотность распределения вероятности $P = f(c_i)$

Важной характеристикой рассеивания является дисперсия Dc_i, которая находится как математическое ожидание от Δc_i в квадрате:

$$Dc_i = M(\Delta c_i)^2 = \int\limits_{-c_{\max}}^{c_{\max}} P(c_i)(c_i - \bar{c})^2 \, \mathrm{d}c .$$

Отсюда среднеквадратичное рассеивание скорости

$$\sigma = \sqrt{Dc_i} .$$

Физический смысл введенных понятий сводится к тому, что Δc определяет собой пульсационную составляющую c' скорости c_i, а среднеквадратичное рассеивание σ (стандарт) дает среднеквадратичное отклонение пульсационной составляющей от среднего значения скорости. Следовательно, $\sigma = \sqrt{\overline{c_i'^2}}$ *.

Приведенная на рис. 12.12 кривая выражает нормальный закон распределения случайных величин (закон Гаусса) и с учетом введенных обозначений выражается следующей зависимостью:

$$P(c_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \, \mathrm{e}^{\overline{c'^2}/2\sigma^2} = \frac{P_1}{\sigma} , \tag{12.44}$$

где $P_1 = \dfrac{\mathrm{e}^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ определяется с помощью таблиц по аргументу $z = \sqrt{\overline{c'}^2/\sigma^2}$.

Как следует из зависимости (12.44), форма кривой распределения плотности вероятности определяется дисперсией σ. Чем больше σ, тем более полого идет кривая распределения.

Рассмотренный пример статического осреднения относится к случаю одномерного распределения скорости. Аналогичным образом осредняются и многомерные функции.

Особенностью турбулентного течения является наличие пульсационных составляющих скорости по всем трем координатным осям, причем между этими составляющими имеется определенная статистическая связь. Пульсация скорости в одном из возможных направлений неизбежно порождает пульсацию и в направлении других осей. Для характеристики указанной связи широко используются моменты различного порядка. Моментом порядка $K = K_1 + K_2 + K_3$ называется выражение следующего вида:

$$\overline{u'^{K_1} v'^{K_2} w'^{K_3}} = \int\limits_{-c_{\max}}^{c_{\max}} \iint u'^{K_1} v'^{K_2} w'^{K_3} P(u', v', w') \, \mathrm{d}u' \, \mathrm{d}v' \, \mathrm{d}w' ,$$

* Здесь и дальше черта сверху обозначает среднюю величину.

где K_1, K_2, K_3 — целые неотрицательные числа; $P(u', v', w')$ — трехмерное распределения вероятности.

В дальнейшем будем использовать только моменты второго порядка:

$$\overline{u'v'} = \int_{-u_{\max}}^{u_{\max}} \int_{-v_{\max}}^{v_{\max}} u'v'P(u', v')\, \mathrm{d}u'\, \mathrm{d}v'; \tag{12.45}$$

$$\overline{v'w'} = \int_{-v_{\max}}^{v_{\max}} \int_{-w_{\max}}^{w_{\max}} v'w'P(v', w')\, \mathrm{d}v'\, \mathrm{d}w'; \tag{12.46}$$

$$\overline{w'u'} = \int_{-w_{\max}}^{w_{\max}} \int_{-u_{\max}}^{u_{\max}} w'u'P(w', u')\, \mathrm{d}w'\, \mathrm{d}u'. \tag{12.47}$$

Указанные функции называются **корреляционными, т.е. определяющими статистическую связность пульсаций в потоке**. Вместо абсолютных средних значений произведений пульсационных составляющих скорости удобнее пользоваться относительными величинами:

$$R_{xy} = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}}\sqrt{\overline{v'^2}}} = \frac{\overline{u'v'}}{\sigma_x \sigma_y}; \tag{12.48}$$

$$R_{yz} = \frac{\overline{v'w'}}{\sqrt{\overline{v'^2}}\sqrt{\overline{w'^2}}} = \frac{\overline{v'w'}}{\sigma_y \sigma_z}; \tag{12.49}$$

$$R_{zx} = \frac{\overline{w'u'}}{\sqrt{\overline{w'^2}}\sqrt{\overline{u'^2}}} = \frac{\overline{w'u'}}{\sigma_z \sigma_x}. \tag{12.50}$$

Здесь σ_x, σ_y, σ_z — среднеквадратичные отклонения составляющих скорости в прямоугольной системе координат.

Введенные коэффициенты называются **коэффициентами корреляции**. Очевидно, что $0 < R_{ij} < 1$. При $R_{ij} = 0$ рассматриваемые величины являются статически независимыми. Если $R_{ij} = 1$, то одна заданная величина однозначно определяет другую.

Следующей важной характеристикой турбулентного поля является **масштаб турбулентности**, т.е. среднестатистический линейный размер вихревых образований, двигающихся в жидкости с сохранением своих индивидуальных кинематических характеристик. При искусственном создании турбулентного потока с помощью сеток наиболее часто в качестве масштаба турбулентности L принимается характерный линейный размер ячейки турбулизирующей сетки. В цилиндрических трубах масштаб турбулентности оценивается интегралом от коэффициента корреляции R_{xy} по всему радиусу трубы:

$$L = \int_0^{r_0} R_{xy}\, \mathrm{d}r\,. \tag{12.51}$$

Как уже отмечалось, для характеристики интенсивности турбулентных пульсаций используют степень турбулентности E, представляющую собой относительную среднеквадратичную пульсацию по всем трем направлениям:

$$E = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)}}{\bar{u}}\,. \tag{12.52}$$

Для изотропной турбулентности, т.е. турбулентности с одинаковым значением пульсационных составляющих скорости по всем координатным осям:

$$E = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}}\,.$$

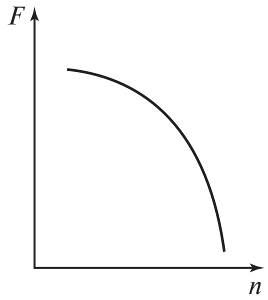
Нетрудно видеть, что **энергия пульсационного движения** $q = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)$ связана со степенью турбулентности очевидным соотношением

$$q = \frac{3}{2}\,\overline{u^2}\,\frac{1}{3}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)\frac{1}{\overline{u^2}} = \frac{3}{2}\,\overline{u^2}\,E^2\,. \tag{12.53}$$

Таким образом, степень турбулентности рассматривается здесь как параметр, характеризующий суммарный запас кинетической энергии, приходящейся на пульсационные составляющие скорости в турбулентном потоке.

В то же время, поскольку пульсации скорости происходят с различной частотой n, запас энергии в каждом диапазоне частот может быть разным. Представление о распределении энергии по частотам дает спектральная функция $F(n)$. Для ее построения отложим по оси абсцисс значение частоты пульсаций n и для каждого диапазона частот Δn будем откладывать по оси ординат относительное (по отношению к общей энергии пульсационного движения) содержание среднеквадратичной пульсации $\overline{u'^2}$. В результате получим зависимость, условно изображенную на рис. 12.13. Аналогичные кривые могут быть построены и для среднеквадратичных пульсаций $\overline{v'^2}$ и $\overline{w'^2}$. По смыслу **спектральной функции** $\int_0^{\infty} F(n)\,\mathrm{d}n = 1$. Для средних частот n функция $F(n) \sim n^{-5/3}$, а для больших значений n $F(n) \sim n^{-7}$.

Рис. 12.13. Качественная картина изменения спектральной функции $F(n)$



Поскольку функция $F(n)$ определяет запас энергии пульсационного движения при различных частотах, а низким частотам соответствуют вихревые образования крупного масштаба, то из кривой, приведенной на рис. 12.13, следует, что наиболее энергонасыщенными являются именно крупные вихревые образования. Чем выше частота пульсации, т.е. меньше масштаб вихрей, тем меньший вклад они дают в общий баланс энергии пульсационного движения. Если рассматривать турбулентное течение в виде бесконечно большого сочетания дискретных вихревых образований различных размеров и различной интенсивности, находящихся в движущемся потоке (вихревая теория турбулентности), то для такого вихревого движения характерна каскадная передача энергии от крупных вихрей к более мелким и ее диссипация на уровне очень высоких частот. Так как согласно спектральной функции энергонасыщенность вихревого движения в области высоких частот очень мала, то отсюда следует вывод о слабом рассеивании энергии при турбулентном течении. Следовательно, для поддержания турбулентного режима необходим весьма малый подвод энергии от основного течения, что и обусловливает высокую устойчивость этого режима.

Использование приведенного аппарата осреднения позволяет представить любую случайную величину в виде суммы ее среднего значения и некоторой пульсационной составляющей.

На практике, однако, используют не столько вероятностное, сколько временно́е осреднение пульсационной величины, введенное О. Рейнольдсом. При таком осреднении средние скорости $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ и давление $\tilde{p}$ определяются по следующим выражениям:

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{u} &= \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{+T/2} u(t)\,\mathrm{d}t;\\
\tilde{v} &= \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{+T/2} v(t)\,\mathrm{d}t;\\
\tilde{w} &= \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{+T/2} w(t)\,\mathrm{d}t;\\
\tilde{p} &= \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{+T/2} p(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.54)$$

Приведенные величины сходятся к их среднеквадратичным значениям $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, p в случае, если период осреднения T неограниченно возрастает, и за время осреднения не происходит изменения самих осредняемых величин. Если f и g — пульсирующие функции, подлежащие осреднению, то

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f}; \quad \overline{f + q} = \overline{f} + \overline{q}; \quad \overline{\overline{f}\,\overline{q}} = \overline{f}\,\overline{q}; \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial s}.$$

Повторное осреднение средней величины не меняет ее значения, так как математическое ожидание от средней величины равно этой же величине.

Введенные правила осреднения позволяют на основе дифференциальных уравнений Навье—Стокса получить уравнения движения для турбулентных течений, известных как уравнения Рейнольдса.

12.7. Уравнения движения для турбулентных течений (уравнения Рейнольдса)

Уравнения Рейнольдса представляют собой результат временнóго осреднения дифференциальных уравнений движения Навье—Стокса, записанных для стационарного течения жидкостей.

Перед осреднением этих уравнений представим их в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left[\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);\\
&\rho\left[\frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right);\\
&\rho\left[\frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (12.55)$$

В результате прямого раскрытия частных производных в левой части уравнений (12.55) легко убедиться, что приведенная их запись идентична уравнениям Навье—Стокса (11.24). Действительно

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial w}{\partial z} + w\frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$= u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

так как для несжимаемой жидкости $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{c} = 0$ (уравнение неразрывности).

Учитывая, что

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{uw} = \overline{(u+u')(w+w')} = \overline{uv + uw' + wu' + u'w'} = \bar{u}\,\bar{v} + \overline{u'v'};\\
&\overline{u^2} = \overline{(u+u')^2} = \overline{u}^2 + \overline{u'^2};\\
&\overline{uv} = \bar{u}\,\bar{v} + \overline{u'v'};\\
&\overline{vw} = \bar{v}\,\bar{w} + \overline{v'w'},
\end{aligned}\right\} \tag{12.56}$$

после осреднения получим

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\Delta\bar{u} - \rho\left(\frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}\right);\\
&\rho\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\Delta\bar{v} - \rho\left(\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{w'v'}}{\partial z}\right);\\
&\rho\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\Delta\bar{w} - \rho\left(\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{w'^2}}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right. \tag{12.57}$$

Здесь в отличие от исходной системы (12.55) появились добавочные напряжения, которые в матричной записи определяют симметричный тензор напряжений Рейнольдса:

$$\begin{vmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho\overline{u'^2} & -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{u'w'} \\ -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{v'^2} & -\rho\overline{v'w'} \\ -\rho\overline{u'w'} & -\rho\overline{v'w'} & -\rho\overline{v'w'^2} \end{vmatrix}. \tag{12.58}$$

Выясним физический смысл этих добавочных напряжений. С этой целью выделим площадку dF, нормальную к оси x. За время dt через нее проходит масса жидкости d$m = \rho u$ dF dt, несущая в направлении осей x, y и z следующие количества движения:

$$\mathrm{d}J_x = \rho u^2 \mathrm{d}F\,\mathrm{d}t;$$

$$\mathrm{d}J_y = \rho v u\,\mathrm{d}F\,\mathrm{d}t;$$

$$\mathrm{d}J_z = \rho u w\,\mathrm{d}F\,\mathrm{d}t.$$

Осредненные скорости изменения количества движения будут определяться как

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{d}\bar{J}_x/\mathrm{d}t = \rho\overline{u^2}\,\mathrm{d}F;\\
&\mathrm{d}\bar{J}_y/\mathrm{d}t = \rho\overline{uv}\,\mathrm{d}F;\\
&\mathrm{d}\bar{J}_z/\mathrm{d}t = \rho\overline{uw}\,\mathrm{d}F.
\end{aligned}\right\} \tag{12.59}$$

Согласно правилам осреднения [см. (12.56)] вместо (12.59) можно записать:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\overline{J}_x/\mathrm{d}t &= \rho(\overline{u^2} + \overline{u'^2})\,\mathrm{d}F; \\ \mathrm{d}\overline{J}_y/\mathrm{d}t &= \rho(\overline{u}\,\overline{v} + \overline{u'v'})\,\mathrm{d}F; \\ \mathrm{d}\overline{J}_z/\mathrm{d}t &= \rho(\overline{u}\,\overline{w} + \overline{u'w'})\,\mathrm{d}F. \end{aligned}\right\} \qquad (12.60)$$

Изменения количества движения, определяемые соотношениями (12.60), равны некоторой силе R_i. Тогда, разделив (12.60) на элементарную площадь $\mathrm{d}F$, получим напряжения, действующие на площадку, перпендикулярную координатным осям:

в направлении оси x

$$-\,\rho(\overline{u^2} + \overline{u'^2});$$

в направлении оси y

$$-\,\rho(\bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'});$$

в направлении оси z

$$-\,\rho(\bar{u}\overline{w} + \overline{u'w'}).$$

Знак «минус» указывает, что поток количества движения всегда эквивалентен противоположно направленной силе. Располагая контрольную площадку перпендикулярно осям y и z, находим совокупность всех напряжений, действующих на жидкий элемент.

Таким образом, появление добавочных напряжений, определяемых матрицей (12.58), обусловлено пульсационным характером скорости жидкости, переносящей через площадку добавочные количества движения.

Полученная система уравнений (12.57) называется уравнениями Рейнольдса и содержит девять добавочных напряжений, связь которых с осредненными скоростями неизвестна. Если допустить, что

$$\overline{u'v'} = \overline{v'u'};\quad \overline{v'w'} = \overline{w'v'};\quad \overline{w'u'} = \overline{u'w'},$$

то число добавочных неизвестных сокращается до шести. Это, однако, не снимает проблемы замыкания уравнений Рейнольдса, так как и теперь для отыскания десяти неизвестных величин $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w'}$, $\overline{p}$, τ'_{xy}, τ'_{yz}, τ'_{zx}, σ'_x, σ'_y, σ'_z с учетом уравнения неразрывности имеется всего четыре соотношения.

Отсутствие добавочных уравнений не позволяет для турбулентного течения дать полную математическую формулировку задачи и, таким образом, обеспечить теоретический анализ указанного течения.

Если ограничиться движением жидкости в пределах плоского пограничного слоя и провести аналогичное осреднение уравнения Прандтля (12.26), то можно получить более простую систему:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)=-\frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial \tau_{\text{л}}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{\text{т}}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x};\\
&\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}=0;\\
&\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}=0.
\end{aligned}\right\}$$

Здесь использованы введенные ранее обозначения

$$\tau_{\text{л}}=\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y};\quad \tau_{\text{т}}=-\rho\overline{u'v'};\quad \sigma_x'=-\rho\,\overline{u'^2}\,.$$

Сравнение между собой двух последних членов правой части первого уравнения с использованием тех же масштабов, что и ранее при выводе уравнений Прандтля, дает

$$\frac{\partial \sigma_x'/\partial x}{\partial \tau_{\text{т}}/\partial y}\sim\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\,.$$

Следовательно, по сравнению с остальными членами членом $\dfrac{\partial \sigma_x'}{\partial x}$ можно пренебречь. Тогда будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)=-\frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\tau_{\text{т}}\right);\\
&\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}=0;\\
&\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.61)$$

В данном случае для замыкания системы (12.61) необходимо только одно соотношение, связывающее добавочное турбулентное напряжение с осредненными скоростями. Такое соотношение может быть получено на основе полуэмпирических теорий турбулентности. Наиболее часто с этой целью используется гипотеза, предложенная Л. Прандтлем.

Для выяснения ее сути рассмотрим турбулентное течение жидкости около твердой стенки в направлении оси x. Средняя скорость $\bar{u}$ здесь будет зависеть только от координаты y, а составляющие $\bar{v}$ и $\bar{w}$ окажутся равными нулю. Примерная форма осредненного профиля скорости в области стенки изображена на рис. 12.14. Поперечный перенос вихревых слоев жидкости происходит за счет пульсационной составляющей скорости v'. Пусть объем жидкости A из слоя с координатой $y - l$ перемещается в слой

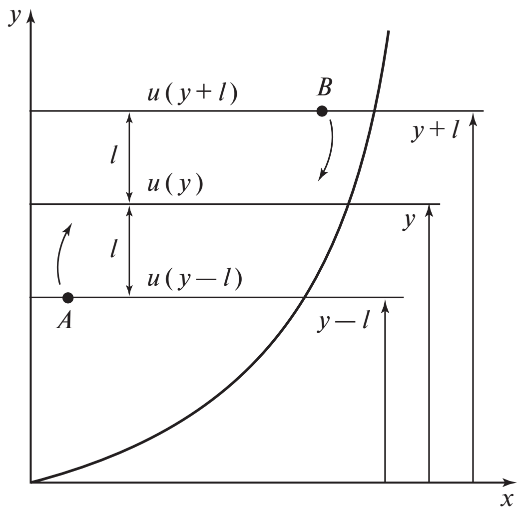


Рис. 12.14. К выводу формулы Прандтля для напряжения трения в турбулентном потоке

с координатой y, сохраняя при таком перемещении свою первоначальную продольную скорость $\bar{u}(y-l)$.

Тогда, попав в слой y, скорость рассматриваемого объема будет отлична от скорости $\bar{u}(y)$ на величину

$$\Delta u_1 = \bar{u}(y) - \bar{u}(y-l).$$

Разложив $u(y-l)$ в ряд Тейлора в окрестности точки с координатой y и ограничившись линейным членом, получим

$$\Delta u_1 = l\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}.$$

Аналогичным образом для объема жидкости B, попадающего в слой с координатой y из слоя с координатой $(y + l)$, найдем

$$\Delta u_2 = \bar{u}(y+l) - \bar{u}(y) = l\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}.$$

Каждую величину Δu_1 и Δu_2 можно рассматривать как пульсацию скорости. Тогда

$$\sqrt{\overline{u'^2}} = \left|\overline{u'}\right| = \frac{1}{2}(\Delta u_1 + \Delta u_2) = l\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}. \qquad (12.62)$$

Теперь, учитывая смысл проведенных рассуждений, можно определить линейный размер l как некоторую длину в направлении оси y, на протяжении которой объем жидкости движется с сохранением своей индивидуальной скорости, количества движения и энергии. Эта величина по аналогии с путем свободного пробега молекулы получила название **пути перемешивания**.

Возникновение поперечной пульсации по Прандтлю происходит в связи с тем, что в слой с координатой y попадают два объема жидкости, имеющие разные продольные скорости. Если впереди располагается объем с меньшей скоростью, то задний объем его нагоняет и происходит столкновение объемов со скоростью $2u'$. В результате возникает поперечное движение со скоростью v' в обе стороны от уровня y (рис. 12.14).

Если впереди оказывается более быстрый объем жидкости, то оба объема удаляются друг от друга со скоростью $2u'$. В промежуток между ними устремляется жидкость с поперечной скоростью v'.

Прандтль предположил, что порядок пульсационной скорости v' тот же, что и скорости u', т.е.

$$\left|\overline{v'}\right| = A\, l \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}, \tag{12.63}$$

где A — некоторая постоянная величина.

Найдем далее осредненное значение произведения $\overline{u'v'}$, входящего в формулу для турбулентного напряжения трения. Согласно изложенной схеме возникновения пульсаций частицы жидкости, приходящие снизу с положительным значением v', вызывают отрицательную пульсацию u', и для таких частиц произведение $u'v'$ отрицательно. Частицы, движущиеся сверху, имеют отрицательное значение величины v', но вызывают положительную пульсацию u'. Следовательно, произведение $\overline{u'v'}$ снова оказывается отрицательным, таким образом, среднее по времени значение $\overline{u'v'}$ отрицательно и не равно нулю. Поэтому

$$\overline{u'v'} = -\frac{\left|\overline{u'v'}\right|}{\sqrt{\overline{u'^2}}\,\sqrt{\overline{v'^2}}}\sqrt{\overline{u'^2}}\,\sqrt{\overline{v'^2}} = -R_{xy}|u'|\,|v'|\,. \tag{12.64}$$

Коэффициент R_{xy} представляет собой коэффициент корреляции, введенный ранее.

Используя зависимости (12.62) и (12.63), получаем

$$\overline{u'v'} = -AR_{xy}l^2\left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right)^2.$$

Включая постоянную A и коэффициент корреляции R_{xy} в длину пути перемешивания l, для турбулентного напряжения получим следующее выражение:

$$\tau_{\text{т}} = -\rho\,\overline{u'v'} = \rho l^2\left|\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}\right|\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y}. \tag{12.65}$$

Величина l в формуле (12.65) не является постоянной, а меняется от точки к точке, что ограничивает возможности использования соотношения (12.65), так как необходима еще одна гипотеза о связи длины l с поперечной координатой.

Прандтль предложил считать в пристеночной области $l = \chi y$, где χ — постоянная величина. Тогда

$$\tau_{\text{т}} = \rho \chi^2 y^2 \left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y} \right)^2 . \tag{12.66}$$

Выражение (12.66) замыкает систему уравнений турбулентного пограничного слоя. Однако (12.66) может использоваться и в качестве самостоятельного дифференциального уравнения, интегрирование которого при определенных допущениях позволяет найти профиль осредненной скорости в турбулентном пограничном слое.

12.8. Логарифмический профиль скорости

Для нахождения профиля скорости в турбулентном пограничном слое представим уравнение (12.66) в следующем виде:

$$\sqrt{\frac{\tau_{\text{т}}}{\rho}} = \chi y \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} . \tag{12.67}$$

(Так как здесь и далее рассматриваются только осредняемые скорости и параметры потока, черту над осредненными величинами опустим.)

Величина, равная $\sqrt{\dfrac{\tau_{\text{т}}}{\rho}}$, имеет размерность скорости. На этом основании указанный комплекс называют **«динамической» скоростью** $v_* = \sqrt{\dfrac{\tau_{\text{т}}}{\rho}}$.

С учетом этого обозначения из уравнения (12.67) получим

$$\frac{\mathrm{d}u}{v_*} = \frac{1}{\chi} \frac{\mathrm{d}y}{y} .$$

Его интегрирование определяет безразмерный профиль скорости в турбулентном пограничном слое:

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\chi} \ln (y) + C . \tag{12.68}$$

При нахождении постоянной интегрирования C следует иметь в виду, что в очень тонком пристеночном слое, где силы трения максимальны, при гидродинамически гладких поверхностях сохраняется ламинарный режим течения. Этот слой называется **ламинарным подслоем**. (Гидродинамически гладкими считаются поверхности, где среднестатистические высоты бугорков шероховатости не выходят за пределы ламинарного подслоя.)

Таким образом, в основе модели турбулентного пограничного слоя лежит представление о его структурной неоднородности в любом поперечном сечении.

В простейшем случае используется двухслойная модель, суть которой иллюстрирует приведенный на рис. 12.15 профиль скорости в рассматриваемом слое. Здесь этот профиль делится на две принципиально разные структурные области. Непосредственно у стенки, на расстоянии $y_л$ от нее, располагается ламинарный подслой. На его внешней границе скорость течения равна $u_л$. При $y \geq y_л$ течение считается турбулентным, и для него справедливо уравнение (12.68). Условность такого деления очевидна, так как между ламинарным подслоем и областью развитого турбулентного течения должна располагаться некоторая переходная область. Однако для нахождения постоянной интегрирования в уравнении (12.68) вполне достаточно использовать простейшую двухслойную модель.

Таким образом, для определения постоянной интегрирования в (12.68) используется следующее граничное условие: при $y = y_л \quad u = u_л$.

В результате

$$C = \frac{u_л}{v_*} = -\frac{1}{\chi}\ln(y_л) \quad \text{и} \quad \frac{u}{v_*} = \frac{1}{\chi}\ln\frac{y}{y_л} + \frac{u_л}{v_*}. \qquad (12.69)$$

Уравнение (12.69) для профиля скорости содержит две новые неизвестные величины — $y_л$ и $u_л$.

Для их определения воспользуемся тем, что в ламинарном подслое напряжение трения τ определяется законом трения Ньютона:

$$\tau = \rho\nu\frac{du}{dy}.$$

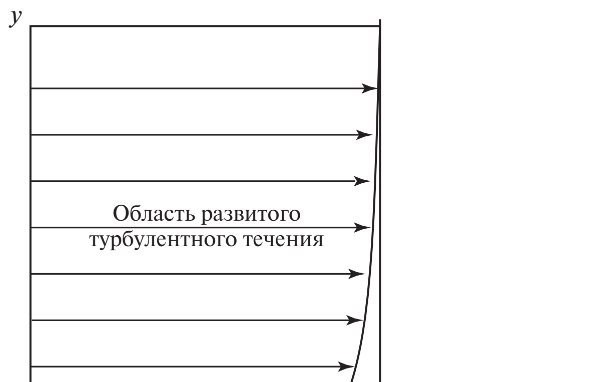


Рис. 12.15. Двухслойная модель турбулентного пограничного слоя

Отсюда $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{\nu}\dfrac{\tau}{\rho}\,\mathrm{d}y$ или $u = \dfrac{v_*^2}{\nu}\,y$, где, как и ранее, $v_* = \sqrt{\dfrac{\tau}{\rho}}$ — «динамическая» скорость, т.е. в пределах ламинарного подслоя имеет место линейное распределение профиля скорости u. На его внешней границе

$$u_{\text{л}} = \frac{v_*^2}{\nu}\,y_{\text{л}}. \qquad (12.70)$$

Толщина ламинарного подслоя $y_{\text{л}}$ зависит от напряжения трения τ, плотности ρ и кинематической вязкости ν:

$$y_{\text{л}} = f(\tau, \rho, \nu). \qquad (12.71)$$

Все три аргумента τ, ρ, ν имеют независимые размерности:

$$[\tau] = \frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}^2}; \quad [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad [\nu] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Тогда, используя П-теорему, можем представить (12.71) в следующей безразмерной записи:

$$\Pi = \frac{y_{\text{л}}}{\tau^n \rho^m \nu^q} = \text{const}.$$

Исходя из нулевой размерности комплекса П, получаем: $n = -1/2$, $m = 1/2$, $q = 1$. Следовательно,

$$y_{\text{л}} = \beta\,\frac{\nu}{\sqrt{\tau/\rho}} = \beta\,\frac{\nu}{v_*}, \qquad (12.72)$$

где β — некоторая постоянная, значение которой определяется опытным путем.

Подставляя (12.72) в (12.70), получаем

$$u_{\text{л}} = \beta v_*. \qquad (12.73)$$

С учетом найденных величин профиль скорости в турбулентной части пограничного слоя будет описываться следующим уравнением:

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\chi}\ln\frac{yv_*}{\nu} + \left(\beta - \frac{1}{\chi}\ln\beta\right) = A\ln\frac{yv_*}{\nu} + B, \qquad (12.74)$$

где $A = \dfrac{1}{\chi}$; $B = \beta - \dfrac{1}{\chi}\ln\beta$.

В полулогарифмической системе координат выражение (12.74) определяет уравнение прямой линии. Соответственно, если в этой системе координат строить по опытным данным профили скорости в турбулентном пограничном слое, тангенс угла наклона рассматриваемой прямой к оси абсцисс будет определять постоянную A. В свою очередь, координата пересечения этой прямой с осью ординат дает значение постоянной B.

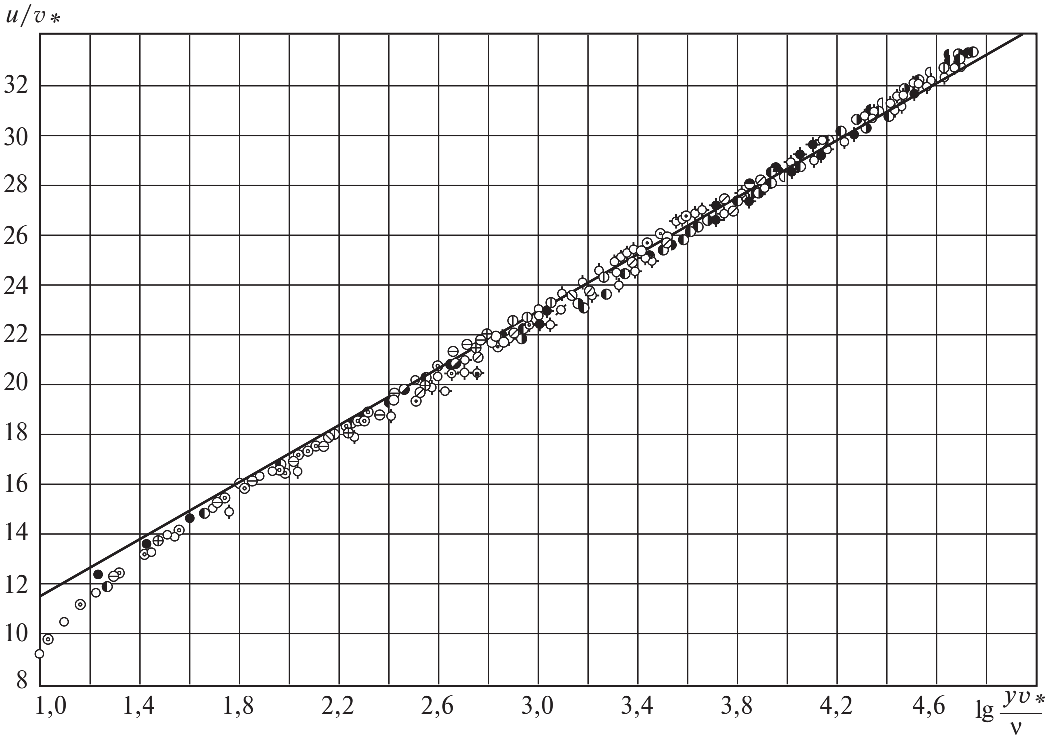


Рис. 12.16. Логарифмический профиль скорости в полулогарифмических координатах

Обработанные указанным образом опытные данные по распределению осредненных скоростей в цилиндрических трубах приведены на рис. 12.16. Здесь, за небольшими исключениями, все опытные точки лежат на одной прямой, проходящей таким образом, что в уравнении (12.74) постоянные A и B должны быть приняты следующими: $A = 2,5$; $B = 5,5$, т.е.

$$\frac{u}{v_*} = 2,5 \ln \frac{yv_*}{\nu} + 5,5 . \qquad (12.75)$$

При сравнении данных, приведенных на рис. 12.16, можно отметить их хорошее совпадение с результатами расчетов по теоретической зависимости (12.74), несмотря на ряд совершенно неочевидных допущений.

Такой результат связан с тем, что в данном случае используются не фиксированные, а «плавающие» координаты меняющие свое значение при изменении числа Рейнольдса.

Действительно, согласно [36] $\tau_w = A\rho u_t^2 \frac{1}{\mathrm{Re}_d^{0,25}}$. Тогда, $\vartheta_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} =$

$= A_1 \frac{u_t^2}{\mathrm{Re}_d^{0,125}}$ и, соответственно, соотношение (12.75) принимает следующий вид

$$\frac{u}{u_t}\frac{\mathrm{Re}_d^{0,125}}{A_1} = \ln \frac{y}{r}A_2\mathrm{Re}_d^{0,875} + 5{,}5\,,$$

где A, A_1, A_2 — постоянные; r — радиус трубы; d — ее диаметр.

Таким образом, в принятой системе координат при изменении числа Re_d меняются и координаты рассматриваемой точки.

Тем не менее совпадение расчетных и опытных данных, которое демонстрируется приведенными на рис. 12.16 результатами, породило мнение о существовании некоторых универсальных масштабов. В рассматриваемом случае для продольной скорости таким масштабом является динамическая скорость v_*, а универсальным аргументом для описания профиля продольных скоростей в пограничном слое является число Рейнольдса, для нахождения которого в качестве характерной скорости используется также динамическая скорость.

Если с использованием этих масштабов аппроксимировать логарифмический профиль скорости [см. (12.74)] степенной зависимостью, то можно получить более простую формулу

$$\frac{u}{v_*} = D\left(\frac{yv_*}{\nu}\right)^n. \tag{12.76}$$

На внешней границе пограничного слоя $y = \delta$ и $u = u_t$. Следовательно,

$$\frac{u_t}{v_*} = D\left(\frac{\delta v_*}{\nu}\right)^n. \tag{12.77}$$

Разделив (12.76) на (12.77), получим

$$\frac{u}{u_t} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}. \tag{12.78}$$

Выражение (12.78) оказалось неуниверсальным и удовлетворительно описывает распределение скоростей в безградиентном ($\mathrm{d}p/\mathrm{dx} = 0$) пограничном слое, причем показатель степени n является функцией числа Рейнольдса. Его значение при различных числах Re приведены ниже:

Re	10^4	10^5	10^7
n	1/5	1/7	1/10

Наиболее часто для практических расчетов используется показатель степени $n = 1/7$. В этом случае степенной профиль скорости, определяемый по (12.76), имеет вид

$$\frac{u_t}{v_*} = 8{,}74\left(\frac{yv_*}{\nu}\right)^{1/7}.$$

Решая это уравнение относительно «динамической» скорости $v_* = \sqrt{\tau/\rho}$, можно получить следующее выражение для касательного напряжения трения на стенке τ_w при турбулентном режиме течения в пограничном слое:

$$\tau_w = 0{,}0225\ \rho u_t^2 \frac{1}{\mathrm{Re}_\delta^{0,25}}. \tag{12.79}$$

Рассмотрим далее расчет пограничного слоя на пластине при безградиентном течении для ламинарного и турбулентного режимов.

12.9. Расчет пограничного слоя при безградиентном течении

Простейшим примером использования уравнения Кармана для пограничного слоя является расчет течения около тонкой плоской пластины в случае ее продольного обтекания. Расположим пластину так, как показано на рис. 12.17, и совместим начало координат с передней кромкой, направив ось x вдоль пластины параллельно скорости набегающего потока. В данном случае скорость невозмущенного течения

$$u_t = u_\infty = \mathrm{const}.$$

Следовательно, $\mathrm{d}u_t/\mathrm{d}x = 0$ и интегральное уравнение Кармана для пограничного слоя принимает особенно простой вид:

$$\frac{\mathrm{d}\delta^{**}}{\mathrm{d}x} = \frac{\tau_w}{\rho u_t^2}. \tag{12.80}$$

Для его решения необходимо знать закон изменения напряжения трения τ_w вдоль пластины. Ясно, что этот закон будет зависеть от режима течения в пределах пограничного слоя, и уравнение (12.80) следует решать отдельно для ламинарного и турбулентного режимов пограничного слоя.

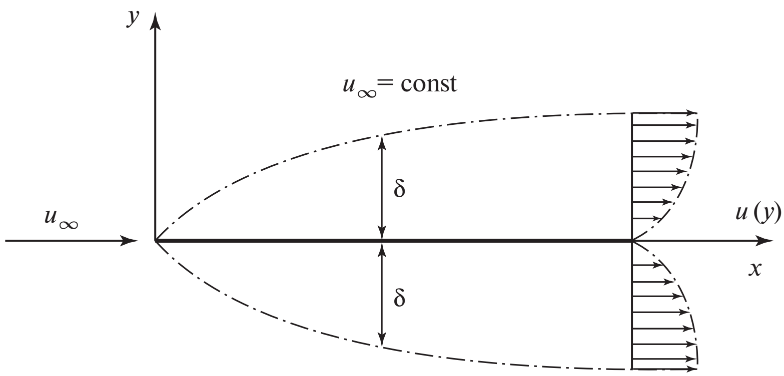


Рис. 12.17. К расчету пограничного слоя на плоской пластине

12.9.1. Расчет ламинарного пограничного слоя

При расчете ламинарного пограничного слоя величина τ_w определяется по соотношению Ньютона:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \right)_{y=0}. \tag{12.81}$$

Отсюда следует, что для нахождения напряжения трения на стенке необходимо знать закон изменения скорости в поперечном сечении пограничного слоя $u(y)$. Представим $u(y)$ в виде некоторого полинома третьей степени:

$$u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3, \tag{12.82}$$

который должен удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \text{при}\ y = 0 \quad u = 0;\\
&2)\ \text{при}\ y = \delta \quad u = u_t;\\
&3)\ \text{при}\ y = \delta \quad \mathrm{d}u/\mathrm{d}y = 0;\\
&4)\ \text{при}\ y = 0 \quad \mathrm{d}^2u/\mathrm{d}y^2 = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Первые три условия непосредственно следуют из определения пограничного слоя, а четвертое вытекает из уравнения Прандтля для пограничного слоя. Действительно, поскольку в данном случае $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 0$, то первое уравнение (12.27) примет вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

На стенке при $y = 0$ $u = v = 0$. Следовательно, при $y = 0$ $\partial^2 u/\partial y^2 = 0$. Поскольку в пределах пограничного слоя в фиксированном сечении продольная составляющая скорости u зависит только от поперечной координаты y, то $\partial^2 u/\partial y^2 = \mathrm{d}^2 u/\mathrm{d}y^2 = 0$. Первое и четвертое условия приводят к выводу, что $a_0 = 0$ и $a_2 = 0$.

Оставшиеся два коэффициента a_1 и a_3 найдем в результате совместного решения следующих двух уравнений, полученных в результате подстановки граничных условий 2) и 3) в формулу (12.82):

$$u_t = a_1 \delta + a_3 \delta^3;$$

$$0 = a_1 + 3a_3 \delta^2.$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{3}{2} \frac{u_t}{\delta}; \quad a_3 = -\frac{1}{2} \frac{u_t}{\delta^3}.$$

Таким образом, в ламинарном пограничном слое безразмерное распределение скоростей в любом его поперечном сечении в рамках принятых граничных условий определяется полиномом третей степени:

$$\frac{u}{u_t} = \frac{3}{2}\,\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 . \tag{12.83}$$

Теперь три уравнения (12.80), (12.81), (12.83) позволяют полностью выполнить расчет ламинарного пограничного слоя. Для этого вычислим толщину потери импульса δ^{**}. Согласно определению для несжимаемой жидкости

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_t}\left(1 - \frac{u}{u_t}\right)\,\mathrm{d}y = \delta\int_0^{1} \frac{u}{u_t}\left(1 - \frac{u}{u_t}\right)\,\mathrm{d}\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

Использовав (12.83), получим

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\mathrm{d}\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{39\delta}{280}.$$

Подстановка всех необходимых величин в (12.80) дает

$$\frac{39\delta}{280}\,\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{2}\,\frac{\rho\nu}{\rho u_t^2}\,\frac{u_t}{\delta}.$$

После очевидных сокращений и разделения переменных будем иметь

$$\delta\,\mathrm{d}\delta = \frac{140}{13}\,\frac{\nu}{u_t\,\mathrm{d}x}.$$

Отсюда

$$\delta^2 = \frac{280}{13}\,\frac{x^2}{u_t x/\nu} = \frac{280}{13}\,\frac{x^2}{\mathrm{Re}_x}.$$

Следовательно, безразмерная толщина ламинарного пограничного слоя δ/x изменяется вдоль оси x по следующему закону:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}63}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}},$$

где $\mathrm{Re}_x = u_t x/\nu$.

В конечном сечении пластины длиной L

$$\frac{\delta}{L} = \frac{4{,}63}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}, \tag{12.84}$$

здесь $\mathrm{Re}_L = u_t L/\nu$.

Использовав (12.83), из (12.81) найдем закон изменения напряжения трения на поверхности пластины

$$\tau_w = \frac{3}{2}\frac{u_t}{\delta}\mu = \frac{3}{2\cdot 4{,}63}\frac{\rho\nu u_t}{\sqrt{\nu x/u_t}} = \frac{0{,}324\rho u_t^2}{\sqrt{u_t x/\nu}}. \qquad (12.85)$$

Локальный коэффициент трения в произвольном сечении пластины будет определяться по формуле

$$c_x = \frac{\tau_w}{\rho u_t^2/2} = \frac{0{,}68}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \qquad (12.86)$$

Приведенный расчет характеристик пограничного слоя базируется на приближении выражения (12.83), описывающем распределение скорости в его поперечном сечении.

Точное решение рассматриваемой задачи с использованием дифференциальных уравнений Прандтля (12.27) приводит к следующим зависимостям:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}; \quad \tau_w = \frac{0{,}332}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\rho u_t^2; \quad c_x = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}.$$

Сравнение этих соотношений с приближенными зависимостями (12.84) — (12.86) показывает достаточно близкое совпадение численных коэффициентов и подтверждает тем самым правомочность использования приближенного метода решения поставленной задачи.

Полученные формулы позволяют легко найти общее сопротивление трения пластины R_x. Для этого достаточно вычислить следующий интеграл:

$$R_x = 2b\int_0^L \tau_w \,\mathrm{d}x.$$

Здесь b — ширина пластины, а коэффициент 2 указывает, что интегрирование ведется по верхней и нижней ее частям.

Использовав для τ_w точное решение, получим

$$R_x = 2b\cdot 0{,}332\rho u_t^2\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{u_t x/\nu}} = 1{,}328\rho u_t^2 b\sqrt{\nu L/u_t}. \qquad (12.87)$$

Введем в выражение (12.87) всю площадь «смоченной» поверхности пластины $F = 2bL$. Тогда будем иметь

$$R_x = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}\frac{\rho u_t^2}{2}2bL$$

и общий коэффициент сопротивления

$$c_x = \frac{R_x}{\frac{\rho u_t^2}{2} F} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}. \qquad (12.88)$$

Формула (12.88) отражает закон сопротивления Блазиуса для продольно обтекаемой пластины. Этот закон справедлив только для ламинарного режима течения в пограничном слое.

12.9.2. Расчет турбулентного пограничного слоя

В случае, если $\mathrm{Re}_L > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$, в пограничном слое пластины устанавливается развитый турбулентный режим течения жидкости, расчет которого требует принципиально других исходных соотношений. Это отличие вызвано тем, что в результате поперечного переноса массы резко меняется профиль средних скоростей в поперечном сечении. Для его аппроксимации служат либо полуэмпирические, либо чисто эмпирические зависимости. В частности, наиболее часто используется полученное выше уравнение для степенного профиля с показателем степени $n = 1/7$:

$$\frac{u}{u_t} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = \bar{y}^{\,1/7}. \qquad (12.89)$$

Напряжение трения на поверхности пластины также оценивается по опытной зависимости

$$\frac{\tau_w}{\rho u_t^2} = 0{,}0225\left(\frac{\nu}{u_t\delta}\right)^{1/4}. \qquad (12.90)$$

При использовании (12.89) для толщины потери импульса получим

$$\delta^{**} = \delta\int_0^1 \frac{u}{u_t}\left(1 - \frac{u}{u_t}\right) \mathrm{d}\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta\int_0^1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] \mathrm{d}\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{7}{72}\,\delta. \qquad (12.91)$$

Подставим далее (12.91) в интегральное соотношение (12.80). Тогда будем иметь

$$\frac{7}{72}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} = \frac{\tau_w}{\rho u_1^2}.$$

Напряжение трения на стенке определяется из соотношения (12.90). В результате

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} = 0{,}23\left(\frac{\nu}{u_t\delta}\right)^{1/4}. \qquad (12.92)$$

Разделив переменные и проинтегрировав (12.92), получим формулу, определяющую физическую толщину турбулентного пограничного слоя на пластине:

$$\delta(x) = 0{,}37x\left(\frac{u_t x}{\nu}\right)^{-1/5}. \qquad (12.93)$$

Локальный коэффициент сопротивления c_x в рассматриваемом случае будет определяться в виде

$$c_x = \frac{2\tau_w}{\rho u_t^2} = \frac{14}{72}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x},$$

или с учетом полученных выше зависимостей для величин δ и τ_w будем иметь

$$c_x = 0{,}0576 \,/\, \mathrm{Re}_x^{0,2}.$$

Сопротивление пластины, смоченной с двух сторон, как и в случае ламинарного пограничного слоя, найдется в результате интегрирования локального напряжения трения по всей обтекаемой поверхности:

$$R_x = 2b\int_0^L \tau_w \,\mathrm{d}x.$$

Заменим здесь τ_w с учетом соотношения (12.92) и будем иметь

$$R_x = 2\cdot\frac{7}{72}\,b\rho u_t^2\int_0^L \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{14}{72}\,b\delta\rho u_t^2.$$

Физическая толщина пограничного слоя δ в конечном сечении пластины определяется по формуле (12.93) при замене координаты x длиной пластины L. Тогда

$$R_x = 0{,}072 b\delta L\rho u_t^2 \frac{1}{\mathrm{Re}_L^{0,2}},$$

и общий коэффициент сопротивления

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{\rho u_t^2}{2}\cdot 2bL} = \frac{0{,}072}{\mathrm{Re}_L^{0,2}}. \qquad (12.94)$$

Заметим, что коэффициент сопротивления всей пластины как при ламинарном, так и при турбулентном течении может быть найден и более просто, т.е. путем прямого использования формулы (12.9):

$$C_x = 2\frac{\delta^{**}}{L}.$$

Таблица 12.1

Основные характеристики пограничного слоя по пластине при турбулентном и ламинарном режимах течения

Показатель	Обозначение	Расчетная формула	
		при ламинарном режиме	при турбулентном режиме
Толщина пограничного слоя	$\delta(x)$	$\delta = \dfrac{5x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$\delta = \dfrac{0{,}37x}{\mathrm{Re}_x^{0,2}}$
Толщина потери импульса	$\delta^{**}(x)$	$\delta^{**} = \dfrac{0{,}664x}{\mathrm{Re}_x^{0,5}}$	$\delta^{**} = \dfrac{0{,}036x}{\mathrm{Re}_x^{0,2}}$
Профиль скорости	u/u_t	$\dfrac{u}{u_t} = \dfrac{3}{2}\dfrac{y}{\delta} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{\delta}\right)^3$	$\dfrac{u}{u_t} = \left(\dfrac{y}{\delta}\right)^{1/7}$
Локальный коэффициент сопротивления	$c_x = \dfrac{2\tau_w}{\rho u_1^2}$	$c_x = \dfrac{0{,}664}{\mathrm{Re}_x^{0,5}}$	$c_x = \dfrac{0{,}0576}{\mathrm{Re}_x^{0,2}}$
Общий коэффициент сопротивления пластины	$C_x = \dfrac{R_x}{\dfrac{\rho u_1^2}{2} \cdot 2F}$	$C_x = \dfrac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$	$C_x = \dfrac{0{,}072}{\mathrm{Re}_L^{0,2}}$

Для ламинарного слоя

$$\frac{\delta^{**}}{L} = \frac{0{,}664}{\mathrm{Re}_L^{0,5}};$$

при турбулентном течении

$$\frac{\delta^{**}}{L} = \frac{0{,}036}{\mathrm{Re}_L^{0,2}}.$$

Подставив эти соотношения в формулу (12.9), придем к выражениям (12.88) и (12.94).

Найденные основные характеристики пограничного слоя на пластине при турбулентном и ламинарном режимах течения для удобства сравнения сведены в табл. 12.1.

Графическое сравнение формы профилей скоростей дано на рис. 12.18, а кривые изменения физической толщины слоя вдоль пластины приведены на рис. 12.19.

Из рисунков видно, что при турбулентном режиме течения в пограничном слое по сравнению с ламинарным течением профиль скорости оказывается существенно более наполненным, его толщина δ растет более интенсивно и заметно возрастает напряжение трения в любом фиксированном сечении.

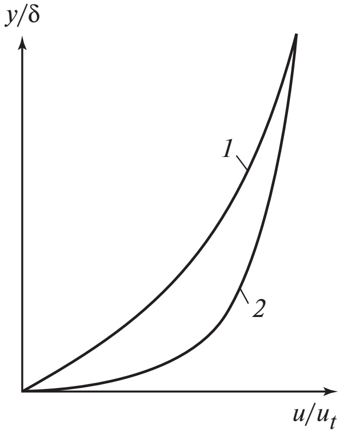


Рис. 12.18. Сравнение профилей скоростей при ламинарном (кривая *1*) и турбулентном (кривая *2*) течениях в пограничном слое

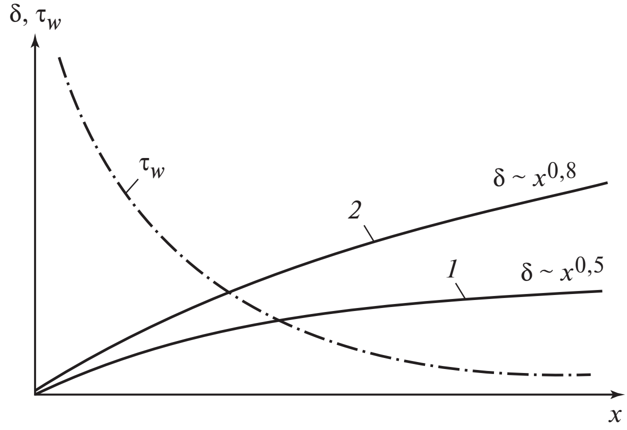


Рис. 12.19. Сравнение физических толщин δ в ламинарном (кривая *1*) и турбулентном (кривая *2*) пограничных слоях на пластине

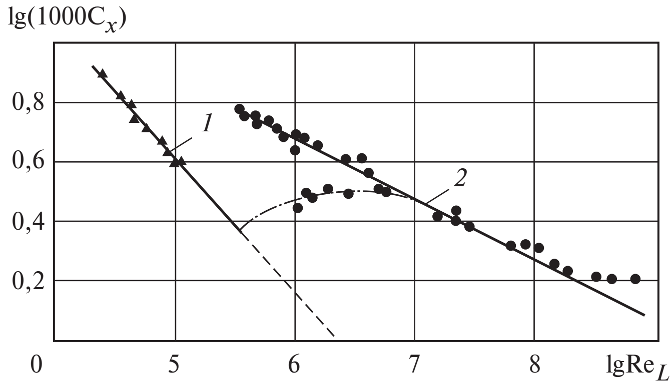


Рис. 12.20. Зависимость коэффициентов сопротивления C_x от числа Re_L на пластине при ламинарном (кривая *1*) и турбулентном (кривая *2*) режимах течения в пограничном слое

Коэффициенты сопротивления C_x сравнивают обычно в логарифмических координатах, так как в этом случае зависимости (12.88) и (12.94) оказываются линейными и могут быть легко аппроксимированы за пределы имеющихся опытных данных (рис. 12.20):

$$\ln C_x = \ln A - B \ln \mathrm{Re}_L.$$

Здесь угловой коэффициент для ламинарного слоя $B = 0{,}5$, а для турбулентного $B = 0{,}2$.

Таким образом, если затянуть ламинарный режим течения в область больших чисел Рейнольдса, то сопротивление пластины можно существенно уменьшить (на рис. 12.20 такому случаю соответствует штриховое продолжение прямой *1*). Этот вывод относится ко всем телам, обтекание которых происходит без отрыва потока с их поверхностей.

Для сохранения ламинарного пограничного слоя в области больших чисел Re_L, превышающих критические значения, необходимо предельно снизить возмущающие факторы как со стороны внешнего потока, так и со стороны обтекаемой поверхности. В первую очередь это означает максимально возможное снижение внешней степени турбулентности и увеличение чистоты обработки обтекаемой поверхности.

В последнее время снижение сопротивления тел достигается путем добавки в поток различных полимерных присадок, меняющих условия взаимодействия жидкости с поверхностью. Таким способом, в частности, удается снизить потери в проточной части паровых турбин на 0,5—1 %.

12.10. Расчет пограничного слоя в общем случае

Число факторов, влияющих на развитие пограничного слоя в каналах произвольной формы, оказывается очень большим, и учет даже наиболее очевидных из них приводит к существенному усложнению возможных решений. В этой связи ограничимся только случаем плоского пограничного слоя, развивающегося на поверхности, радиус кривизны которой r существенно больше толщины пограничного слоя δ, т.е.

$$\delta/r \ll 1.$$

Основным уравнением для решения поставленной задачи является **уравнение Кармана**:

$$\frac{\mathrm{d}\delta^{**}}{\mathrm{d}x} + \frac{\delta^{**}\dfrac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}}{u_t}(2 + H) = \frac{c_x}{2}. \tag{12.95}$$

Если закон изменения скорости $u_t(x)$ вдоль рассматриваемой поверхности считать заданным, то приведенное уравнение связывает три неизвестные величины δ, c_x, H и для его решения необходимы еще два добавочных соотношения.

Прежде чем установить вид этих соотношений, преобразуем исходное уравнение (12.95), заменив входящие в него параметры H и c_x нормированными величинами $\overline{H}$ и $\overline{c}_x$ с использованием в качестве нормирующих множителей значения этих величин, полученные для случая безградиентного течения:

$$\overline{H} = \frac{H}{H_0}; \quad \overline{c}_x = \frac{c_x}{c_{x0}}.$$

Величины H_0 и c_{x0} зависят только от числа Re, причем зависимость $H_0 = f(\mathrm{Re})$ очень слабая, и ею можно пренебречь, считая в дальнейшем $H_0 = \mathrm{const}$. Для ламинарного пограничного слоя на пластине примем $H_0 = 2{,}55$. В случае турбулентного режима $H_0 = 1{,}4$.

При использовании известных нормирующих множителей H_0 и c_{x0} уравнение (12.95) может быть записано в виде

$$\frac{\mathrm{d}\delta^{**}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\delta^{**}}{u_t}\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}(2 + H_0\overline{H}) = \overline{c}_x\frac{c_{x0}}{2}. \qquad (12.95а)$$

Зависимость $c_{x0} = f(\mathrm{Re})$ определяется формулами (12.88) и (12.94), имеющими одинаковую структуру:

$$\frac{c_{x0}}{2} = \frac{A}{\mathrm{Re}_x^{m_1}}, \qquad (12.96)$$

где $A = 0{,}332$, $m_1 = 0{,}5$ для ламинарного слоя. При турбулентном течении $A = 0{,}0288$ и $m_1 = 0{,}2$.

Заменим при вычислении числа Рейнольдса координату x толщиной потери импульса $\delta^{**}(x)$, учитывая, что $\delta^{**} = \dfrac{A_1 x}{\mathrm{Re}_x^{m_1}}$:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_t\delta^{**}}{\nu}\frac{1}{\delta^{**}/x} = \mathrm{Re}^{**}\frac{\mathrm{Re}_x^{m_1}}{A_1}.$$

Отсюда

$$\mathrm{Re}_x = \left(\mathrm{Re}^{**}\frac{1}{A_1}\right)^{\frac{1}{1-m_1}}. \qquad (12.97)$$

С учетом (12.97) формула (12.96) примет вид

$$\frac{c_{x0}}{2} = \frac{\xi_0}{\mathrm{Re}^{**m}}. \qquad (12.98)$$

Для ламинарного пограничного слоя

$$\xi_0 = AA_1^{\frac{m_1}{1-m_1}} = 0{,}225; \quad m = \frac{m_1}{1-m_1} = 1,$$

а при турбулентном режиме течения

$$\xi_0 = 0{,}0128 \quad \text{и} \quad m = 0{,}25.$$

Подставив (12.98) в уравнение (12.95а), получим

$$\frac{\delta^{**}}{x} + \frac{\delta^{**}\dfrac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}}{u_t}\,(2 + \overline{H}H_0) = \frac{\xi_0\,\overline{c}_x}{\mathrm{Re}^{**m}}$$

или

$$\mathrm{Re}^{**m}\,\frac{\mathrm{d}\delta^{**}}{\mathrm{d}x} + \frac{\delta^{**}\dfrac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}}{u_t}\,\mathrm{Re}^{**m}(1 + \overline{H}H_0) = \xi_0\,\overline{c}_x\,. \qquad (12.99)$$

Безразмерный комплекс $\dfrac{\delta^{**}\dfrac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}}{u_t}\mathrm{Re}^{**m} = \Gamma$ называют **параметром Бури** и с ним связывают нормированные величины $\overline{H}$ и $\overline{c}_x$.

Для решения уравнения (12.99) внесем множитель Re^{**m} под знак дифференциала. С этой целью предварительно возьмем производную:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(\delta^{**}\,\mathrm{Re}^{**m}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\delta^{**m+1}u_t^m}{\nu}\right) = (m+1)\mathrm{Re}^{**m}\,\frac{\mathrm{d}\delta^{**}}{\mathrm{d}x} + m\,\frac{\delta^{**}\dfrac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}}{u_t}\,\mathrm{Re}^{**m} =$$

$$= (m+1)\mathrm{Re}^{**m}\,\frac{\mathrm{d}\delta^{**}}{\mathrm{d}x} + m\Gamma\,.$$

Отсюда

$$\mathrm{Re}^{**m}\,\frac{\mathrm{d}\delta^{**}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{m+1}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(\delta^{**}\,\mathrm{Re}^{**m}) - \frac{m}{m+1}\,\Gamma\,. \qquad (12.100)$$

Подставив (12.100) в (12.99), после ряда преобразований получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(\,\mathrm{Re}^{**m}\delta^{**}\,) = (m+1)\,\xi_0\,\overline{c}_x - (m+1)\Gamma(2 + \overline{H}H_0) + m\Gamma\,. \qquad (12.101)$$

Как показывают многочисленные опытные данные, нормированные величины $\overline{c}_x$ и $\overline{H}$ зависят только от введенного параметра *Г*. Следовательно, в соотношении (12.101) правая часть является функцией указанного параметра, т.е.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(\,\mathrm{Re}^{**m}\delta^{**}) = F(\Gamma).$$

Для определения функции $F(\Gamma)$ необходимы дополнительные сведения о характере изменения нормированных величин $\overline{c}_x$ и $\overline{H}$. С этой целью воспользуемся опытными данными.

При конфузорном течении, когда скорость жидкости в направлении течения возрастает, параметр H и коэффициент сопротивления мало отлича-

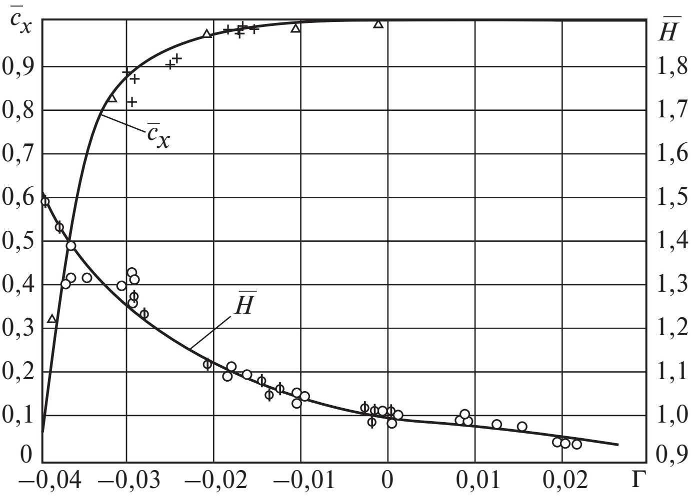


Рис. 12.21. Зависимости $\bar{c}_x(\Gamma)$ и $\bar{H}(\Gamma)$ для турбулентного пограничного слоя

ются от таковых для плоской пластины и их нормированные значения будут близки к единице.

Более существенные изменения происходят в области диффузорного течения, где скорость вдоль потока падает, а давление возрастает. В этом случае область возможных решений уравнения Кармана (12.36) вообще ограничена, так как при достижении параметром Г некоторых предельных значений Γ_s происходит отрыв потока от стенок канала или от поверхности обтекаемого тела. Сечение, где происходит отрыв потока, обычно оценивают по предельным значения параметров Γ_s и H_s.

Если воспользоваться опытными данными и для зоны безотрывного течения $(0 < |\Gamma| < |\Gamma_s|)$ построить зависимости $\bar{c}_x(\Gamma)$ и $\bar{H}(\Gamma)$, то можно получить кривые, изображенные на рис. 12.21. Величина $\bar{H}$ в области диффузорного течения непрерывно возрастает от единицы до предельного значения H_s, а нормированный коэффициент сопротивления $\bar{c}_x$ при умеренных положительных градиентах давления меняется мало, а затем резко падает до нулевого значения.

Приведенные зависимости можно аппроксимировать многочленами вида

$$\left.\begin{aligned} \bar{c}_x &= 1 + a_1\Gamma - a_2\Gamma^2; \\ \bar{H} &= 1 - b_1\Gamma + b_2\Gamma^2, \end{aligned}\right\} \qquad (12.102)$$

где a_i и b_i — положительные коэффициенты.

Знаки в приведенных выражениях выбраны с учетом того обстоятельства, что в диффузорной области $\mathrm{d}u_t/\mathrm{d}x < 0$, а следовательно, параметр Γ также имеет отрицательное значение.

Подставив (12.102) в уравнение (12.101), после группировки получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Re}^{**m}\delta^{**}\right) = (m+1)\xi_0 - [(m+1)(2+H_0-\xi_0 a_1)-m]\Gamma +$$
$$+ [(m+1)(H_0 b_1 - \xi_0 a_2) - m]\Gamma^2 - (m+1)H_0 b_2 \Gamma^3 = F(\Gamma). \quad (12.103)$$

Функция $F(\Gamma)$ практически во всем диапазоне изменения параметра Γ очень мало отличается от линейной зависимости. Если принять, например, для турбулентного пограничного слоя $\Gamma_s = 0{,}04$, то поправка от нелинейных членов составит всего 2 %. В случае ламинарного течения отклонение функции $F(\Gamma)$ от линейной в предотрывной области больше, но и в этом случае для практических целей можно ограничиться только линейными членами, приняв

$$F(\Gamma) = a - b\Gamma, \quad (12.104)$$

где $a = (m+1)\xi_0$; $b = [(m+1)(2+H_0-\xi_0 a_1) - m]$.

Заметим, что для турбулентного режима течения абсолютное значение произведения $\xi_0 a_1$ по сравнению с суммой $(2 + H_0)$ пренебрежимо мало, и им вообще можно пренебречь. Тогда

$$a = 0{,}016.$$

В результате при турбулентном течении

$$a = 0{,}016;\ b_{\text{т}} = (m+1)(2+H_0) - m \approx 3{,}92$$

и

$$F(\Gamma) = 0{,}016 - 3{,}92\Gamma.$$

Для ламинарного слоя

$$F(\Gamma) = 0{,}45 - 5{,}35\Gamma.$$

При сделанных допущениях дифференциальное уравнение (12.103) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Re}^{**m}\delta^{**}\right) = a - b\Gamma$$

и может быть проинтегрировано.

Обозначим выражение под знаком производной через $z = \mathrm{Re}^{**m}\delta^{**}$ и с учетом того, что параметр $\Gamma = \frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x\,u_t}\mathrm{Re}^{**m}\delta^{**} = z\frac{1}{u_t}\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}$, получим

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + bz\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x} = a. \quad (12.105)$$

Неоднородное дифференциальное уравнение (12.105) решаем относительно введений переменной z обычным образом.

Решение однородного уравнения

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + bz\,\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x} = 0$$

дает

$$z_{\text{одн}} = Au_t^{-b},$$

где A — постоянная интегрирования.

Для исходного неоднородного уравнения (12.105) решение будем искать в виде

$$z = A(x)u_t^{-b}. \tag{12.106}$$

Подставив (12.106) в (12.105), получим

$$\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}\,u_t^{-b} = a.$$

Отсюда

$$A(x) = a\int\limits_{x_0}^{x} u_t^b\,\mathrm{d}x + C.$$

В результате

$$z = \frac{a}{u_t^b}\int\limits_{x_0}^{x} u_t^b\,\mathrm{d}x + Cu_t^{-b}.$$

Постоянную интегрирования C определим из начальных условий. Если при $x = x_0$, $z = z_0$ и $u_t = u_t(x_0)$, то $C = z_0 u_t^b(x_0)$, следовательно,

$$z = \frac{a}{u_t^b}\int\limits_{x_0}^{x} u_t^b\,\mathrm{d}x + z_0\,\frac{u_t^b(x_0)}{u_t^b(x)}. \tag{12.107}$$

В случае, когда начальная толщина пограничного слоя равна нулю ($z_0 = 0$),

$$z = \mathrm{Re}^{**m}\delta^{**} = \frac{a}{u_t^b}\int\limits_0^x u_t^b\,\mathrm{d}x. \tag{12.108}$$

После очевидных преобразований получим расчетное соотношение для толщины потери импульса:

$$\delta^{**} = \left(\frac{a}{u_t^b\,\dfrac{u_t^m}{\nu^m}}\int\limits_0^x u_t^b\,\mathrm{d}x\right)^{1/(1+m)}. \tag{12.109}$$

Для практического использования формулы (12.109) удобнее перейти к безразмерным величинам по следующим соотношениям:

$$\delta^{**} = \frac{\delta^{**}}{L} L = \overline{\delta}^{**} L; \quad u_t = \frac{u_t}{u_{t\max}} u_{t\max} = \overline{u}_t u_{t\max}; \quad x = \frac{x}{L} L = \overline{x} L .$$

Тогда

$$\overline{\delta}^{**} = \frac{a^{1/(m+1)}}{u^{(b+m)/(m+1)} \mathrm{Re}_L^{m/(m+1)}} \left[\int_0^{\overline{x}} u_t^{-b} \, \mathrm{d}\overline{x} \right]^{1/(m+1)} . \qquad (12.110)$$

Здесь $\mathrm{Re}_L = \frac{u_{t\max} L}{\nu}$, где L — длина обтекаемой поверхности; $u_{t\max}$ — максимальная скорость.

Формально полученное выражение справедливо как для ламинарного, так и для турбулентного режима течения в пограничном слое, но конкретные значения показателей степеней и постоянных a и b зависят от режима течения и приведены выше. Подставив их в (12.110), получим:

для ламинарного пограничного слоя

$$\overline{\delta}^{**} = \frac{0{,}664}{\mathrm{Re}^{0,5} \, \overline{u}_1^{2,68}} \left[\int_0^{\overline{x}} \overline{u}_1^{4,35} \, \mathrm{d}\overline{x} \right]^{0,5} ;$$

для турбулентного пограничного слоя

$$\overline{\delta}^{**} = \frac{0{,}036}{\mathrm{Re}^{0,2} \, \overline{u}_1^{2,68}} \left[\int_0^{\overline{x}} \overline{u}_1^{3,92} \, \mathrm{d}\overline{x} \right]^{0,8} .$$

Важной особенностью (12.110) является независимость для турбулентного течения всех постоянных от продольного градиента давления. Эти величины определяются на основании исследований безградиентного течения (течения на плоской пластине), и от точности полученных данных зависит точность в более сложном случае, когда продольный градиент давления не равен нулю.

12.11. Отрыв пограничного слоя

При обтекании тел жидкостью или при ее движении в каналах нулевые линии тока совпадают с контурами твердых тел и стенками каналов, т.е. твердые границы одновременно являются и нулевыми линиями тока того или иного течения.

В области диффузорного течения (рис. 12.22) при определенных условиях указанное совпадение границ с линиями тока нарушается, и в некоторой точке S нулевая линия тока отклоняется от твердой поверхности, что приводит к образованию в потоке свободной границы SK, отделяющей поток

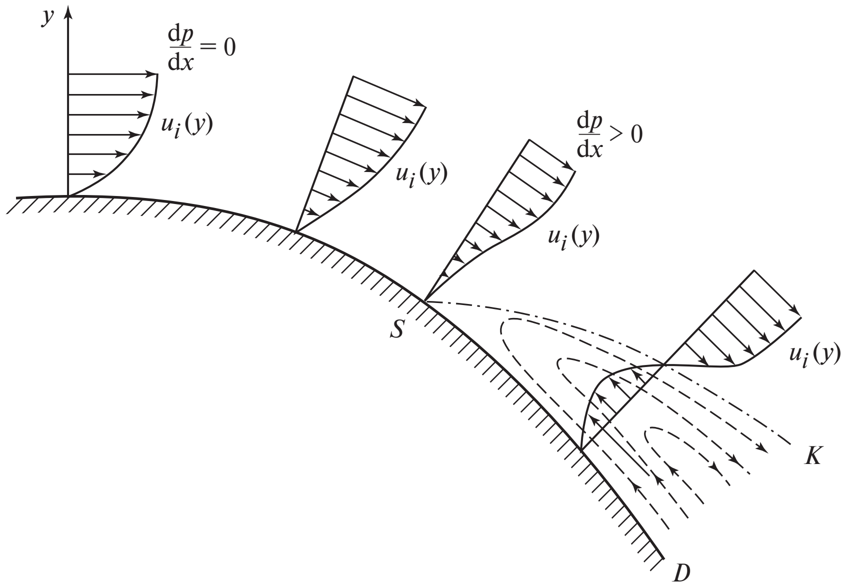


Рис. 12.22. Схема отрыва потока от гладкой поверхности

от стенок. Схематически эта картина течения изображена на рис. 12.22. Зона *KSD*, незанятая активным потоком, называется зоной отрыва, а само течение — течением с отрывом потока от стенок. В зоне отрыва устанавливается обычно вторичное течение, характер которого зависит как от места образования отрыва, так и от геометрических характеристик канала или обтекаемого тела.

Для схемы, изображенной на рис. 12.22, наиболее типичны подсасывание потока к точке отрыва *S* вдоль поверхности тела и последующий выброс «пассивной» жидкости в направлении основного течения вдоль линии раздела *SK*. Линии тока этого вторичного течения на рис. 12.22 изображены штриховыми линиями.

В ряде случаев в зоне отрыва устанавливается ярко выраженный вихревой характер течения с хорошо наблюдаемым периодом зарождения вихревых образований и их уносом активным потоком.

Опыт показывает, что кроме «открытых» отрывных областей возможно появление замкнутых «закрытых» зон отрыва, когда нулевая линия тока только на некотором участке не совпадает с границей тела или канала. Эта схема течения изображена на рис. 12.23. В области *SKD* (в области замкнутого отрыва) обычно возникает дискретный вихрь, существование которого поддерживается за счет энергии основного потока.

Возникновение отрыва потока приводит к повышению сопротивления движения жидкости, сопровождается резким увеличением потерь энергии и нарушает стационарный режим течения. В своем большинстве отрыв потока от стенок является нежелательным, и одна из важнейших задач гидрогазоди-

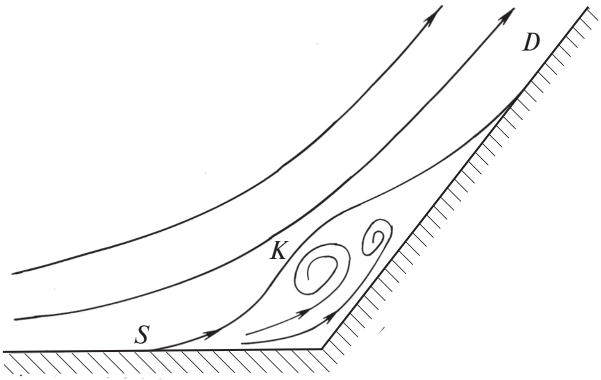


Рис. 12.23. Схема «закрытой» области отрыва потока

намики состоит в разработке надежных методов прогнозирования и мер, предотвращающих отрыв потока от гладких стенок.

Выясним основные условия возникновения рассматриваемого типа течения.

При движении жидкости в каналах переменного профиля главным фактором, определяющим характер этого движения, является продольный градиент давления. Движение жидкости может проходить при отрицательном, нулевом и положительном значениях $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$. В зависимости от знака продольного градиента давления различают **конфузорное** ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x < 0$), **безградиентное** ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 0$) и **диффузорное** ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x > 0$) **течения**. Все эти условия реализуются при дозвуковых скоростях в канале, изображенном на рис. 12.24, *а*. В суживающейся части происходит ускорение потока и соответствующее этому ускорению падение давления ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x < 0$). В минимальном сечении $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 0$. Наконец, расширение канала приводит к торможению потока и повышению давления в направлении течения ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x > 0$, рис. 12.24, *б*).

По силовому воздействию положение частиц жидкости в конфузорной и диффузорной частях неравнозначно. Если в конфузорной части канала направление движения жидкости совпадает с направлением действия перепада давления, то в диффузорной его части воздействие перепада давления противоположно направлению движения жидкости. Условно это иллюстрируется на рис. 12.24, *б*, где жидкая частица располагается непосредственно на кривой распределения давления вдоль оси рассматриваемого канала. Аналогом такой ситуации является движение санок под горку с последующим подъемом на противоположный склон. Правда, аналогия здесь чисто внешняя, но она позволяет качественно объяснить возможность возвратного движения частиц в диффузорной области. Действительно, если перепад давления Δp играет ту же роль, что и составляющая силы тяжести в примере с санками, то только при подъеме в гору, когда кинетической энергии движущегося тела оказывается недостаточно для преодоления скатывающей силы, возможны остановка тела и его возвратное движение.

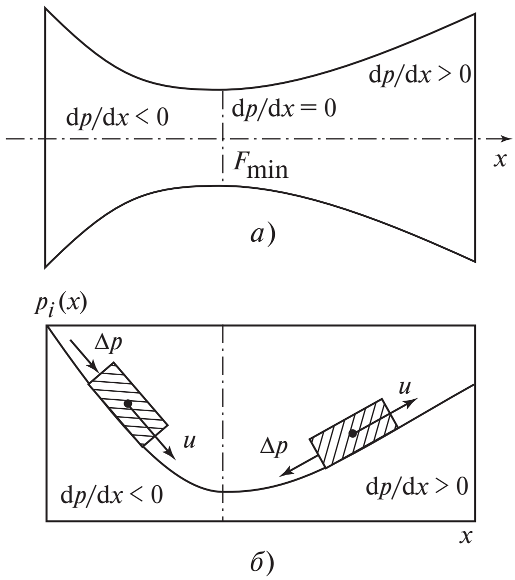


Рис. 12.24. Схема течения в конфузорно-диффузорном канале

а — форма конфузорно-диффузорного канала; *б* — распределение давления вдоль конфузорного канала и схема сил, действующих на жидкую частицу в конфузорной и диффузорной частях этого канала

Таким образом, интуитивно мы приходим к важному выводу о том, что **необходимым условием отрыва потока от стенок является наличие в каналах или на обтекаемых телах диффузорных участков**.

Непосредственно механизм возникновения отрывных течений значительно сложнее и требует более обстоятельного анализа. Такой анализ проведем на основе осредненного дифференциального уравнения Прандтля [см. (12.61)] для пограничного слоя:

$$\rho\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}\ .$$

Здесь $\tau = \tau_{л} + \tau_{т}$ — общее напряжение трения, складывающееся из напряжения трения $\tau_{л} = \mu\,\dfrac{\partial u}{\partial y}$, обусловленного вязкими силами, и турбулентного напряжения трения $\tau_{т}$. Для простоты записи знак осреднения величин в соотношении (12.61) опущен.

С физической точки зрения уравнение (12.61) выражает баланс сил, действующих на элементарную жидкую частицу в плоском пограничном слое.

Умножим все члены записанного уравнения на элементарный объем $\mathrm{d}V =$ $= \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$. Тогда будем иметь

$$\left(u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)\rho\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}p\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + \frac{\partial \tau}{\partial y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\,.$$

Полученное уравнение и определяет баланс сил, обеспечивающий безотрывное стационарное течение жидкости в пределах пограничного слоя. Представим это уравнение в виде

$$\underbrace{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}p}_{\substack{\text{Сила, обусловленная}\\ \text{продольным}\\ \text{градиентом давления}}} = \underbrace{\frac{\partial\tau}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}_{\text{Силы трения}} - \underbrace{\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}_{\text{Инерционные силы}}. \qquad (12.111)$$

Здесь заданный элементарный перепад давления dp, определяемый геометрическими характеристиками канала, уравновешивается силами трения и инерционными силами. Их вклад в общем балансе сил зависит как от типа течения, так и от положения частиц в поперечном сечении канала.

Проведем в канале, изображенном на рис. 12.24, три сечения, расположив их в конфузорной, безградиентной и диффузорной областях течениях, и оценим на основе уравнения (12.111) соотношение силовых факторов в различных точках выбранных сечений.

На внешней границе пограничного слоя согласно его определению $\partial u/\partial y = 0$ и $\partial\tau/\partial y = 0$. Следовательно, здесь

$$\mathrm{d}p = -\rho u\,\mathrm{d}u = -\rho u_t \mathrm{d}u_t. \qquad (12.112)$$

Этот баланс сохраняется во всей области за пределами пограничного слоя при отсутствии в ней добавочных диссипативных сил. Выражение (12.112) по существу задает перепад давления dp, действующий по всему поперечному сечению канала с прямолинейной продольной осью.

При смещении в глубь пограничного слоя по направлению к стенкам за счет снижения скоростей, вызванных влиянием вязкости, происходит падение инерционных сил и нарастает роль сил трения.

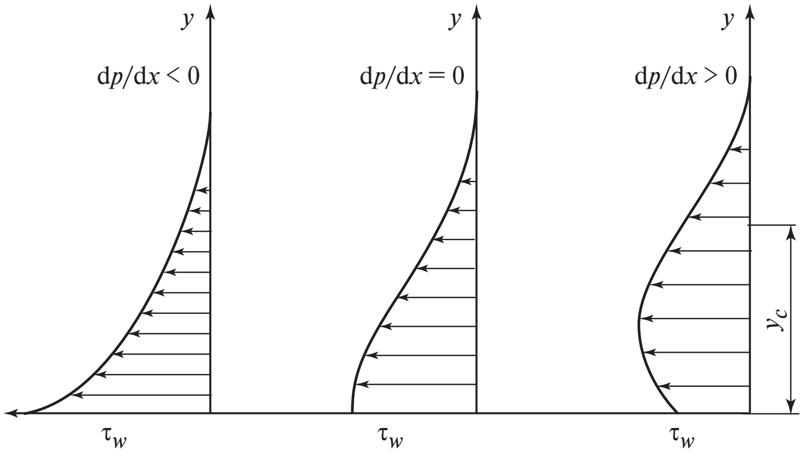


Рис. 12.25. Распределение сил трения в поперечных сечениях пограничного слоя в конфузорной, безградиентной и диффузорной его частях

На стенках составляющие скорости u, v согласно гипотезе «прилипания» равны нулю, следовательно,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{12.113}$$

Отсюда следует, что знак производной $\left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)_{y=0}$ всегда совпадает со знаком градиента давления. Другими словами, в конфузорах $\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{y=0} < 0$, при безградиентном течении $\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$, в диффузорах $\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{y=0} > 0$.

Приведенные оценки с учетом того, что на внешней границе пограничного слоя $\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$, дают возможность построить качественные эпюры изменения напряжения трения τ и показать характер изменения их производных $\partial\tau/\partial y$ в рассматриваемых сечениях. Из эпюр, изображенных на рис. 12.25, видно монотонное снижение величины τ в направлении внешней границы пограничного слоя при конфузорном течении ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x < 0$). В случае безградиентного течения ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 0$) монотонность снижения τ сохраняется, но на стенке эпюры касательных напряжений имеют максимум. Для диффузорных потоков ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x > 0$) величина τ с удалением от стенки вначале растет, и на некотором расстоянии y_c достигает максимального значения τ_c, после чего снижается до нуля на внешней границе слоя (рис. 12.25). Таким образом, здесь напряжение трения на стенке оказывается меньше, чем во внутренней области потока.

Приведенные качественные картины изменения напряжения трения в конфузорной, безградиентной и диффузорной областях течения позволяют качественно изобразить и эпюры поперечного распределения производных $\partial\tau/\partial y$ в указанных течениях (рис. 12.26), что в конечном счете дает возможность понять физический смысл балансового уровня движения (12.111).

Действительно, в конфузорной области постоянный в поперечном сечении продольный градиент давления, действующий в направлении движения среды, уравновешивается инерционными членами $\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ и поперечным градиентом сил трения $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ (рис. 12.26, *а*).

При движении от внешней границы пограничного слоя к стенке инерционные силы снижаются, а силы, обусловленные трением, возрастают. Поскольку на участках конфузорного течения эти силы действуют в одном и том же направлении, то их сумма, оставаясь постоянной, уравновешивает постоянную в поперечном сечении пограничного слоя продольную силу, определяемую продольным градиентом давления $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$.

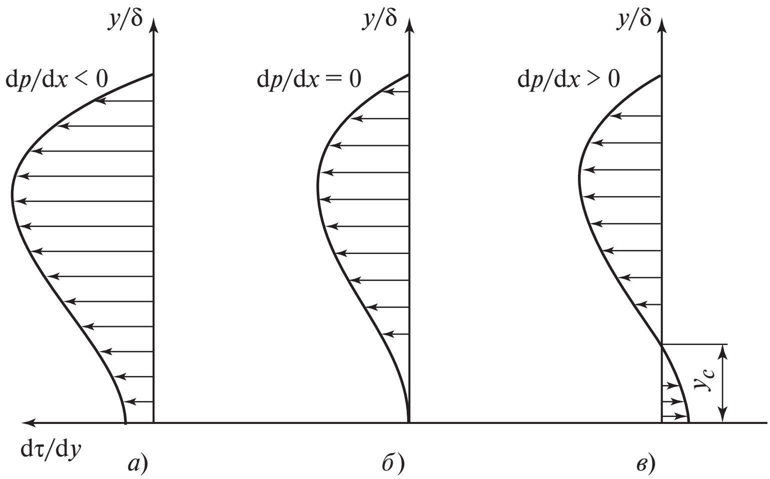


Рис. 12.26. Эпюры поперечных градиентов сил трения в пределах пограничного слоя в конфузорном, безградиентном и диффузорном течениях

В диффузорной области картина меняется. Здесь продольный градиент давления $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ направлен против движения потока. Соответственно инерционные силы, стремясь поддержать продольное направление движения жидкости, действуют по направлению ее течения.

При $y > y_c$, как и ранее, силы трения (рис. 12.26, *б*), определяемые величиной $\partial\tau/\partial y$, действуют против направления движения. Соответственно в указанной области силы трения суммируются с силами, обусловленными продольным градиентом давления, и их сумма уравновешивается инерционными силами, значение которых при $y > y_c$ с удалением от внешней границы пограничного слоя по направлению к стенке вначале увеличивается, а затем начинает снижаться.

При $y = y_c$ (рис. 12.26, *в*) $\partial\tau/\partial y = 0$, и здесь, как и на внешней границе пограничного слоя, силы, обусловленные действующим продольным градиентом давления, уравновешиваются только силами инерции.

При $y < y_c$ направление действия сил, обусловленных поперечным градиентом напряжения трения τ, меняется, и эти силы уже действуют в направлении течения.

За счет действия сил трения в пристеночной области диффузорного течения вышележащие слои жидкости «тянут» за собой нижележащие ее слои ($\partial\tau/\partial y > 0$), обеспечивая за счет этого безотрывное течение движущейся среды в области диффузорного течения.

Непосредственно на стенке, где инерционные члены обращаются в нуль, выполняется рассмотренное выше условие (12.113), определяющее по существу возможность сохранения безотрывного течения.

Действительно, из условия (12.113) следует, что если заданный формой канала или формой обтекаемого тела продольный градиент давления превышает действующий на стенке поперечный градиент напряжения трения ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x > \partial\tau/\partial y$), то безотрывное обтекание поверхности становится невозможным. Соответственно граничная (нулевая) линия тока отклоняется от стенки и создается картина течения с отрывом потока от обтекаемой стенки, показанная на рис. 12.22.

При возникновении отрыва потока от стенок течение за сечением, где произошел отрыв, всегда нестационарно, и соответственно здесь уже нельзя использовать уравнения, записанные для стационарного течения.

Покажем, что непосредственно в точке отрыва S касательное напряжение на стенке обращается в нуль. С этой целью запишем уравнение Кармана (12.36) для пограничного слоя:

$$\frac{\mathrm{d}\delta^{**}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_t\delta^{**}}{\mathrm{d}x \cdot u_t}(2 + H) = \frac{\tau_w}{\rho u_t^2}.$$

Заменим градиент скорости $\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}$ на продольный градиент давления. Поскольку на внешней границе пограничного слоя выполняется соотношение (12.112)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\rho u_t \frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x} = \rho u_t^2 \frac{1}{u_t}\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x},$$

следовательно,

$$\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}\frac{1}{u_t} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\rho u_t^2}.$$

Тогда можно записать

$$\rho u_t^2 \frac{\mathrm{d}\delta^{**}}{\mathrm{d}x} - \delta^{**}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(2 + H) = \tau_w.$$

Отсюда следует, что при конфузорном течении ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x < 0$) левая часть записанного выражения представляет собой сумму двух положительных величин. Для безградиентного течения ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 0$) напряжение на стенке $\tau_w = \rho u_t^2 \frac{\mathrm{d}\delta^{**}}{\mathrm{d}x}$ оказывается меньше, чем в предыдущем случае, а при диффузорном течении ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x > 0$) имеет место дальнейшее снижение величины τ_w, так как здесь τ_w определяется разностью двух величин. При некоторых условиях эта разность может оказаться равной нулю и даже стать отрицательной. Перемена знака напряжения трения у стенки физически означает изменение направления движения жидкости. Таким образом, равенство $\tau_w = 0$ определяет предельный случай безотрывного течения и может рассматриваться как одно из условий в точке отрыва потока S.

Поскольку $\tau_w \sim \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n_{y=0}$ как при ламинарном (n = 1), так и при турбулентном течении (n = 2), то из условия $\tau_w = 0$ следует, что в точке отрыва S не только сама скорость, но и ее первая производная $\partial u/\partial y$ при $y = 0$ обращается в нуль.

Условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \qquad (12.114)$$

позволяет оценить местоположение точки отрыва в плоском течении и указывает, что профиль скорости непосредственно в этой точке имеет вертикальную касательную, совпадающую с нормалью к обтекаемой поверхности. Последовательная деформация профиля скорости в пределах пограничного слоя при переходе от конфузорного течения к диффузорному показана на рис. 12.27.

При этом следует обратить особое внимание на тот факт, что в турбулентном пограничном слое под действием положительного градиента давления деформация профиля скорости носит необычный характер. Типичная картина такой деформации иллюстрируется изображенными на рис. 12.27 профилями скорости, которые были получены при последовательном увеличении продольного градиента давления. Характерной особенностью приведенных профилей скорости является факт неравнозначной деформации их по высоте пограничного слоя. Так, непосредственно вблизи обтекаемой

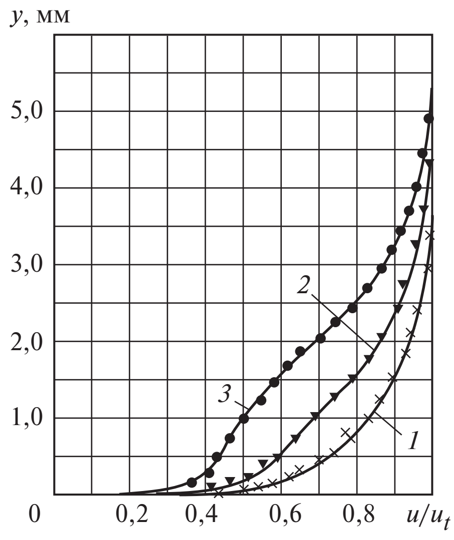


Рис. 12.27. Влияние параметра Бури Г на форму профиля скорости в турбулентном пограничном слое:

1 — Г = 0; *2* — Г = – 0,02; *3* — Г = – 0,028 поверхности профиль скорости почти не меняется, и в этой части поперечный градиент скорости $\frac{\partial u}{\partial y}$ остается практически постоянным, т.е. здесь мало меняется и напряжение на стенке τ_w. Этот факт подтверждается и результатами прямых измерений, приведенными на рис. 12.21, где, при достаточно большом диапазоне изменения параметра Бури Г, локальный коэффициент сопротивления $c_x = \frac{\tau_w}{\rho u_t^2/2}$ почти не меняется, а затем при $|\Gamma| > 0{,}02$ происходит кризисное снижение коэффициента сопротивления c_x.

Наиболее сильно даже при больших положительных продольных градиентах давления деформируется средняя часть профиля осредненных скоростей. Внешняя его часть так же, как и область, примыкающая к стенке, деформируется мало.

Рассмотренная картина деформации профиля скорости находится в прямой связи с характером изменения напряжения трения в поперечном сечении пограничного слоя при $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} > 0$ (см. рис. 12.25). Если сопоставить приведенные профили скорости (рис. 12.27) и распределение поперечных градиентов напряжений трения в поперечном сечении пограничного слоя при $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} > 0$ (см. рис. 12.26), то легко заметить, что наиболее сильно деформируется та область профиля скорости, где поперечный градиент напряжения трения минимален, и именно в этой области для выполнения балансового уравнения (12.111) инерционные силы должны достигать максимального значения.

Некоторые количественные оценки, позволяющие установить вероятность отрыва потока от стенок, могут быть получены на основе соотношения (12.113), определяющего по существу баланс сил, действующих на жидкую частицу, расположенную около стенки в предотрывной области (рис. 12.28). Поскольку в рассматриваемом случае напряжение трения на стенке согласно сделанной выше оценке близко к нулю и, если судить по

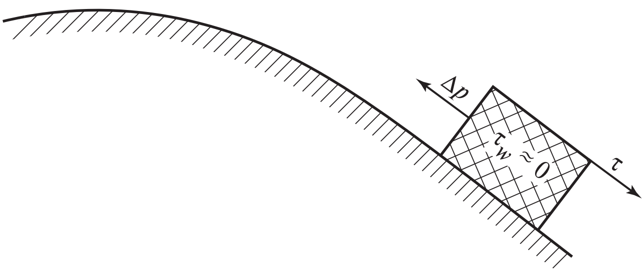


Рис. 12.28. Схема сил, действующих на жидкую частицу в предотрывной области

форме профиля скорости в точке S (см. рис. 12.22), инерционные силы вблизи стенки также имеют нулевой порядок, то перепад давления dp уравновешивается только действием сил трения. Переходя в соотношении (12.113) от производных к приращениям величин, получаем

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta \tau}{\Delta y}.$$

Здесь $\Delta\tau = \tau - \tau_w$, где τ — напряжение трения на внешней грани выделенной частицы жидкости (см. рис. 12.28), а τ_w — напряжение трения на стенке.

Поскольку в предотрывной области $\tau_w \approx 0$, то

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right)_{\max} = \frac{\tau}{\Delta y}. \qquad (12.115)$$

Выражение (12.115) определяет предельно допустимый перепад давления, превышение которого неизбежно приводит к отрыву потока.

Для конкретного использования (12.115) необходимо каким-то образом определить напряжение трения на внешней грани выделенной частицы и дать оценку поперечного размера Δy, в пределах которого можно пренебречь действием инерционных сил. С этой целью выразим неизвестное значение τ в долях от напряжения трения на стенке при безградиентном течении τ_{w0}, а неизвестное значение Δy оценим в виде некоторой части местной толщины потери импульса. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \tau &= k_1 \tau_{w0}; \\ \Delta y &= k_2 \delta^{**}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.116)$$

Здесь k_1 и k_2 — неизвестные величины. Для конкретного случая отрыва они постоянны, а в общем случае введенные неизвестные коэффициенты могут зависеть от характера снижения скорости в диффузорном канале.

После подстановки зависимостей (12.116) в (12.115) получаем

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)_{\max} = \frac{k_1 \tau_{w0}}{k_2 \delta^{**}}. \qquad (12.117)$$

Имея в виду, что продольный градиент давления dp/dx не меняется в поперечном сечении пограничного слоя и согласно (12.112) $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} =$

$= -\rho u_t \frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}$, преобразуем (12.117) к виду

$$\rho_1 u_t \frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x} \frac{\delta^{**}}{\tau_{w0}} = -\frac{k_1}{k_2}. \qquad (12.118)$$

Условие (12.118), вытекающее из уравнений движения плоского пограничного слоя, определяет предельное состояние жидкой частицы непосредственно в предотрывной зоне и в случае известных значений введенных коэффициентов k_1 и k_2 может служить основным критерием, устанавливающим зону безотрывного течения.

Поскольку приведенное соотношение содержит напряжение трения на стенке при безградиентном течении τ_{w0}, значение которого зависит от режима течения, то и введенный критерий отрыва должен иметь различный вид для ламинарного и турбулентного пограничных слоев.

Кроме того, в последнем случае резко увеличивается напряжение трения τ_{w0}, и комплекс в левой части соотношения (12.118) достигает предельного значения при существенно большем продольном градиенте скорости.

Другими словами, турбулентный пограничный слой, характеризуемый большим значением величины τ_{w0}, способен преодолевать и большие положительные градиенты давления. Этот вывод является исключительно важным с практической точки зрения, так как указывает реальный путь затягивания, а в некоторых случаях и ликвидации отрыва. Действительно, если в некотором сечении канала происходит отрыв ламинарного пограничного слоя, то за счет мер, способствующих переходу к турбулентному режиму течения, оказывается возможным существенно сместить сечение отрыва в направлении основного течения.

При ламинарном течении τ_{w0} определяется законом Ньютона:

$$\tau_{w0} = \rho\nu\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)_{y=0} = \rho\nu\,\frac{u_t}{\delta^{**}}\left(\frac{\mathrm{d}\,\overline{u}}{\mathrm{d}\,\overline{y}}\right)_{\overline{y}=0}. \qquad (12.119)$$

В данном случае от размерных величин u и y мы перешли к безразмерным скоростям $\overline{u} = \dfrac{u}{u_t}$ и линейным размерам $\overline{y} = \dfrac{y}{\delta^{**}}$, использовав в качестве нормирующих масштабов скорость u_t на внешней границе пограничного слоя в сечении отрыва и толщину потери импульса δ^{**} в том же сечении.

Подставим (12.119) в основное уравнение (12.118), тогда будем иметь

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}\,\frac{\delta^{**2}}{\nu}\right)_s = -\frac{k_1}{k_2}\left(\frac{\mathrm{d}\,\overline{u}}{\mathrm{d}\,\overline{y}}\right)_{\overline{y}=0}. \qquad (12.120)$$

Полученный комплекс $f = \left(\dfrac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}\,\dfrac{\delta^{**2}}{\nu}\right)_s$ представляет собой так называемый формпараметр Лойцанского, относительно которого при ламинарном режиме течения решается уравнение Кармана. Его предельное значение f_s мало меняется при изменении характера падения скорости вдоль продольной оси и принимается обычно равным 0,089. Если всюду вдоль канала текущее значение параметра $f \le f_s$, то течение жидкости безотрывно. Сечение, где $f = f_s$, принимается обычно за сечение отрыва потока от твердых стенок.

При турбулентном течении напряжение трения на плоской стенке определяется по соотношению (12.90), которое можно записать в виде

$$\tau_{w0} = \zeta_0 \rho u_t^2 \mathrm{Re}^{**-m}.$$

В результате критерий отрыва [см. (12.118)] для турбулентного режима течения в пограничном слое принимает вид

$$\frac{\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}x}\delta^{**}}{u_t}\mathrm{Re}^{**m} = -\frac{k_1\zeta_0}{k_2}. \qquad (12.121)$$

Легко видеть, что в данном случае этот критерий представляет собой предельное значение параметра Бури Г, использованного нами в расчете турбулентного пограничного слоя при градиентном течении.

Таким образом, для турбулентного режима условие безотрывного течения имеет место в случае, если текущее значение параметра Бури Г меньше предельного значения Γ_s, определяемого соотношением (12.121).

Опыты, однако, показывают, что конкретное значение параметра Γ_s меняется в очень широких пределах: $\Gamma_s = -(0{,}028 \div 0{,}12)$, т.е. в отличие от ламинарного режима течения здесь коэффициенты k_1 и k_2 являются функциями многих факторов. В первую очередь, они, по-видимому, зависят от закона падения продольной скорости вдоль диффузорного канала. На рис. 12.29 приведены две принципиально различные зависимости. В одном случае имеет место резкое снижение скорости на входной части канала, а в другом — ее основное снижение перенесено к выходному сече-

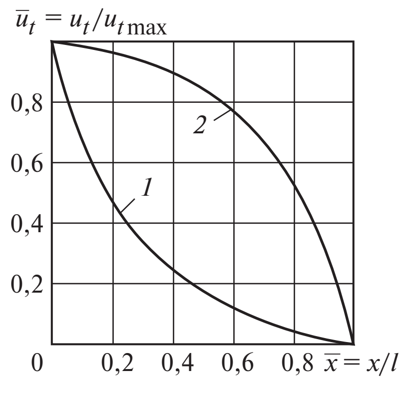


Рис. 12.29. Возможные законы изменения скорости в диффузорном канале:

1 — резкое падение скорости на входном участке диффузора; *2* — резкое снижение скорости на выходном участке диффузора нию. Нетрудно сообразить, что условия движения частицы вдоль поверхности в рассматриваемых примерах будут различными.

В случае зависимости *1* (рис. 12.29) продольный перепад давления уменьшается по мере нарастания толщины пограничного слоя, и, следовательно, по мере приближения к предотрывному состоянию происходит снижение как тормозящей силы $F_1 = \Delta p \Delta y \cdot 1$, так и увлекающей силы $F_2 = \tau \Delta x \cdot 1$.

В результате частица жидкости около стенки может находиться в состоянии неустойчивости на значительной части обтекаемой поверхности. Иногда это предотрывное состояние удается сохранить до выходного сечения канала. Однако здесь любое случайное возмущение может стимулировать отрыв потока от стенок.

В случае зависимости *2* перепад давления Δp нарастает по мере увеличения толщины пограничного слоя, и происходит снижение увлекающего действия сил трения. В результате зона предотрывного состояния резко сокращается, и отрыв фиксируется с большой определенностью при минимальном значении величины Γ_s.

Проведенный качественный анализ сводится к тому, что численно параметр отрыва зависит от значения и знака второй производной $\mathrm{d}^2 u_t/\mathrm{d}x^2$. Если $\mathrm{d}^2 u_t/\mathrm{d}x^2 < 0$, то вероятность отрыва потока возрастает и для его оценки следует использовать нижнюю границу параметра Γ_s. В случае, когда $\mathrm{d}^2 u_t/\mathrm{d}x^2 > 0$, возможно затягивание предотрывного состояния и соответственно следует использовать в расчетах более высокие значения Γ_s.

Помимо рассмотренных критериев отрыва, непосредственно вытекающих из уравнений движения вязкой жидкости в пределах пограничного слоя, на практике используют и ряд других параметров, позволяющих оценить область безотрывного течения. В частности, такую оценку можно провести и по величине $H_s = \delta^*/\delta^{**}$, определяющей соотношение двух интегральных площадей пограничного слоя. В точке отрыва турбулентного пограничного слоя $H_s = 1{,}8 \div 2{,}4$. Как видим, и здесь предельное значение параметра меняется в довольно широком диапазоне, причем так же, как и для величины Γ_s, его верхняя граница определена весьма условно. Однако можно, видимо, утверждать, что при $\Gamma_s \le |0{,}028|$ и $H \le 1{,}8$ отрыва потока от гладких стенок не происходит. В случае, когда принятые критерии отрыва превышают указанные численные значения, вероятность отрыва потока резко увеличивается, и характер течения, кроме закона изменения продольной скорости, определяется рядом второстепенных условий, среди которых можно отметить кривизну поверхности, пространственность потока, степень внешней турбулентности, состояние поверхности, ее вибрацию и др.

12.12. Сопротивление тел, обтекаемых вязкой жидкостью

Принципиальная разница между идеальной и реальной вязкой жидкостями состоит в том, что в отличие от идеальной жидкости, где сила сопротивления тел, обтекаемых без срыва струй, равна нулю, в реальной вязкой жидкости она всегда положительна.

Возникающая в вязкой жидкости сила сопротивления R_x складывается из силы $R_x^{\text{тр}}$, обусловленной трением, и результирующей силы R_x^p, определяемой распределением давления p_i по поверхности обтекаемых тел.

Если τ_{wi} — локальное напряжение трения на поверхности, то

$$R_x^{\text{тр}} = \int_s \tau_{wi}\,\mathrm{d}F.$$

Аналогичным образом находится и сила, обусловленная давлением: $R_x^p =$ $= \mathrm{d}F$, где $\mathrm{d}F$ — площадь элемента обтекаемой поверхности.

Таким образом, общая сила сопротивления при внешнем обтекании тел потоком вязкой жидкости

$$R_x = R_x^{\text{тр}} + R_x^p = \int_s (\tau_{wi} + p_i)\,\mathrm{d}F. \qquad (12.122)$$

Вместо абсолютных сил сопротивления в аэродинамике используют безразмерные коэффициенты сопротивления C_x, представляющие собой, как уже отмечалось, отношение абсолютной силы сопротивления R_x к скоростному напору набегающего потока $\rho_x c_0/2$, умноженному на характерную площадь тела F (чаще всего за характерную площадь тела принимается площадь «смоченной» обтекаемой жидкостью поверхности).

В зависимости от соотношения между силами трения $R_x^{\text{тр}}$ и силами давления R_x^p все тела делятся на хорошо и плохо обтекаемые. Для хорошо обтекаемых тел основной причиной сопротивления является сила трения $R_x^{\text{тр}}$, а сила давления R_x^p составляет небольшую долю от сил трения. Тела, для которых выполняются указанные соотношения, обтекаются без отрыва потока от обтекаемой поверхности. Для таких тел характерны очень низкие значения коэффициентов сопротивления C_x. Примерами хорошо обтекаемых тел являются пластинка, установленная в направлении набегающего потока, крыловой профиль с малым углом атаки, тело дирижабля и др.

Тела, обтекаемые с отрывом потока от поверхности, относятся к плохо обтекаемым. В этом случае резкое увеличение силы сопротивления происходит за счет силы давления R_x^p при относительно малом значении силы трения $R_x^{\text{тр}}$.

Для ряда тел характер внешнего обтекания зависит от их положения относительно набегающего потока. Например, уже упомянутая плоская пластина, являющаяся примером хорошо обтекаемого тела, если она располагается по направлению набегающего потока, становится классическим примером плохо обтекаемого тела, если ее поставить перпендикулярно направлению движения потока.

В то же время некоторые тела независимо от их положения в пространстве всегда относятся к плохо обтекаемым. Так, при любом положении шара в потоке картина его обтекания всегда одинакова и будет сопровождаться отрывом потока с его поверхности. Таким же образом будет обтекаться и цилиндр при расположении его оси перпендикулярно направлению движения жидкости.

В общем случае коэффициент сопротивления C_x обтекаемых тел зависит от их формы, состояния поверхности, режима обтекания, характеризуемого числами M_∞, Re_∞, степени турбулентности E_0 и ориентации тела в пространстве.

Для гладкой поверхности, обтекаемой несжимаемой жидкостью при низкой степени турбулентности, коэффициент сопротивления будет зависеть только от числа Рейнольдса и от положения тела в пространстве.

Для шара и поперечно обтекаемого цилиндра, как это было показано выше (см. гл. 10), коэффициент сопротивления C_x является функцией только числа Re. Эта зависимость, построенная на основании опытных данных и приведенная на рис. 12.30, оказалась достаточно сложной.

При малых числах Рейнольдса (Re < 10) имеет место резкое снижение коэффициента сопротивления C_x с ростом числа Re (зона *I* на рис. 12.30). Затем интенсивность снижения этого коэффициента падает (зона *II*), а далее при $10^3 < \mathrm{Re} < 10^4$ имеет место некоторое увеличение C_x (зона *III*). В зоне *IV* $[10^4 < \mathrm{Re} < (2 \div 4)10^5]$ коэффициент C_x почти не меняется с увеличением числа Re, и эту зону иногда называют зоной локальной автомодельности по числу Re. За этой зоной при достижении числом Re некоторого предельного (критического) значения ($\mathrm{Re} > 10^5$) происходит резкое (кризисное) снижение коэффициента сопротивления (зона *V*), после чего вновь происходит некоторое увеличение сопротивления шара (зона *VI* на рис. 12.30). Столь сложный характер рассматриваемой зависимости объясняется изменением соотношения между сопротивлением трения и сопротивлением давления при изменении числа Re.

При очень малых числах Рейнольдса обтекание шара происходит практически без отрыва потока от его поверхности. Влияние вязкости распро-

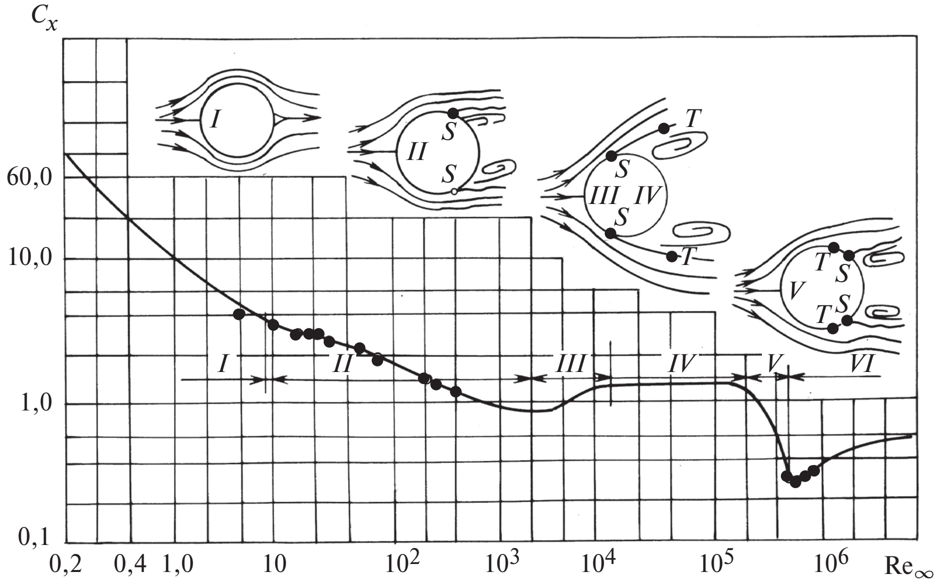


Рис. 12.30. Зависимость $C_x = f(Re_\infty)$ для поперечно обтекаемого цилиндра [2]

страняется на большое расстояние от поверхности шара, и основную роль играет сопротивление трения.

С ростом числа Re действие вязкости локализуется в пристеночной области и появляются вихревые образования в кормовой области, которые периодически срываются с нижней и верхней поверхностей цилиндра. При этом в потоке за цилиндром устанавливается дорожка вихрей, центры которых располагаются в шахматном порядке. Эта дорожка вихрей исследовалась Карманом и обычно называется вихревой дорожкой Кармана.

В рассматриваемой зоне *II* сопротивление трения с ростом числа Re падает, а сопротивление давления возрастает. Суммарное значение коэффициента C_x с увеличением числа Re продолжает падать, но менее интенсивно, чем в зоне *I*.

В зоне *III* происходит интенсификация вихревого движения в кормовой области. Размеры вихря уменьшаются, возрастает частота их образования, и происходит стабилизация отрыва ламинарного пограничного слоя с поверхности шара в точках *S*, расположенной при угле $\theta \approx 87°$. Общее сопротивление при этом за счет увеличения сопротивления давления несколько возрастает. Описанный спектр обтекания шара сохраняется и в зоне IV, где непосредственно около шара никаких существенных изменений картины течения не происходит. В результате коэффициент C_x практически не меняется, что и дает основание говорить о локальной автомодельности по числу Рейнольдса. Однако структура потока в кормовой области изменяется. После отрыва жидкости от стенки цилиндра ее движение на некотором расстоянии по потоку сохраняется ламинарным, и только далее в точках *T* (рис. 12.30) происходит турбулизация потока. С увеличением числа Рейнольдса сокращаются участки *ST*, где имеет место ламинарное течение оторвавшегося пограничного слоя, и точки турбулизации *T* приближаются к точкам отрыва *S*.

При некотором значении числа Re точки *T* и *S* совпадут, и переход к турбулентному режиму течения произойдет не за шаром, а на его поверхности. Поскольку, как уже отмечалось ранее, турбулентный слой способен преодолевать значительные градиенты давления, т.е. отрывается значительно позднее ламинарного, указанная смена форм течения на поверхности шара приводит к резкому смещению точек отрыва *S* в кормовую область цилиндра. Теперь угол θ, при котором фиксируется отрыв потока, оказывается $\theta \approx \approx 110°$, и, следовательно, происходит резкое сокращение кормового следа. Сопротивление трения при этом несколько увеличивается, но значительно снижается сопротивление давления. В результате коэффициент C_x кризисным образом падает в зоне *V* (рис. 12.30).

Таким образом, ***кризис сопротивления плохо обтекаемых тел — это резкое снижение их сопротивления, обусловленное сменой форм течения в пограничном слое и кризисным смещением в этой связи сечения отрыва жидкости с поверхности цилиндра вниз по течению.*** Кризис сопротивления может наблюдаться не только при внешнем обтекании тел, но и при движении жидкости внутри различных диффузорных каналов. В этом случае также при некотором значении числа Рейнольдса происходит переход к турбулентному режиму течения в пограничном слое, следствием чего является кризисное перемещение сечения отрыва по потоку.

Поскольку рассматриваемое явление связано с переходом от ламинарного течения к турбулентному, то с помощью искусственной турбулизации потока можно в определенных пределах менять значение числа Re, при котором наблюдается кризисное снижение сопротивления плохо обтекаемых тел.

Отмеченное обстоятельство может быть использовано в качестве простого способа оценки степени турбулентности набегающего потока. Для этого достаточно с помощью малоинерционной аппаратуры, позволяющей фиксировать фактическую степень турбулентности потока, построить для шара зависимость критического числа Рейнольдса от степени турбулентности E_0. В дальнейшем для оценки величины E_0 в произвольном потоке следует поместить в интересующую нас область шар, определить для него значение $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ и с помощью построенной ранее градуировочной кривой $E_0 = = f(\mathrm{Re}_{\text{кр}})$ получить значение степени турбулентности потока в этой области течения.

Необходимо отметить, что кризис сопротивления плохо обтекаемых тел наблюдается только в случае гладких поверхностей, когда положение точки отрыва не фиксировано и зависит от числа Рейнольдса.

В ряде практически важных случаев обтекаемые тела или каналы могут иметь угловые изломы, строго фиксирующие сечение отрыва. Например, при обтекании пластины, поставленной поперек потока, отрыв потока всегда происходит с ее кромок независимо от числа Re. Сопротивление таких тел мало меняется с изменением числа Re, и ясно, что здесь кризис сопротивления отсутствует.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое пограничный слой?
2. Дайте определение физической толщины пограничного слоя.
3. Какие интегральные толщины пограничного слоя определяют коэффициент расхода?
4. Что такое коэффициент сопротивления и чему он равен для пластины, обтекаемой вязкой жидкостью?
5. Какие интегральные толщины пограничного слоя надо знать, чтобы найти коэффициент потерь энергии в суживающемся сопле?
6. Чем отличаются уравнения движения в плоском пограничном слое от уравнений движения для идеальной жидкости?
7. Как меняется давление поперек пограничного слоя?
8. Каковы границы применимости уравнений Прандтля для пограничного слоя?
9. В каких случаях не выполняется условие постоянства давления в поперечном сечении пограничного слоя?
10. Запишите уравнение Кармана для пограничного слоя при равенстве нулю продольного градиента давления.
11. Чем различаются профили скорости в ламинарном и турбулентном пограничных слоях?
12. Какой пограничный слой (ламинарный или турбулентный) способен преодолевать без отрыва потока от обтекаемых стенок большой продольный положительный градиент давления?
13. Каково необходимое условие возникновения отрыва потока от обтекаемых поверхностей?
14. Перечислите основные характеристики турбулентных потоков.
15. Что такое спектральная функция?
16. В чем физическая причина появления в уравнениях Рейнольдса для турбулентных потоков добавочных «турбулентных» напряжений?
17. Какое уравнение лежит в основе вывода формулы для логарифмического профиля скорости в пограничном слое?
18. Что такое «динамическая» скорость?
19. Какие факторы влияют на переход от ламинарного режима течения в пограничном слое к турбулентному?
20. Что такое кризис сопротивления потока обтекаемого тела и в чем его физическая причина?

Глава 13
ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ И ТРУБОПРОВОДАХ

13.1. Движение несжимаемой жидкости в трубах и коэффициент сопротивления труб

Трубопроводы являются неотъемлемой частью всех теплосиловых установок и обеспечивают возможность их бесперебойной работы. В более широком смысле трубопроводы — это транспортные магистрали для движения различных жидкостей, газов, суспензий, продуктов сгорания, теплоносителей и др. Эти магистрали могут иметь самые различные формы и протяженности.

По конфигурации трубопроводы могут быть классифицированы на простые и сложные. К простым трубопроводам будем относить трубопроводы без ответвлений. В таких магистралях расход движущейся среды остается неизменным на всех участках. Сеть трубопроводов, имеющих различные отводы и параллельные участки движения, относится к классу сложных.

По протяженности трубопроводы делятся на короткие и длинные, причем критерием здесь является не абсолютная, а относительная их длина l/d, т.е. длина l, выраженная в долях от диаметра d.

Эта классификация связана с различием условий течения жидкости на входном участке трубы и на значительном расстоянии от входного сечения.

При входе в трубу входной профиль скорости в принципе может иметь произвольную форму. Под тормозящим действием стенок трубы этот профиль деформируется, и на некотором расстоянии от входа устанавливается так называемое стабилизированное течение с параболическим профилем скорости в случае ламинарного режима и с логарифмическим или степенным профилем при турбулентном режиме.

Входной участок трубы, где происходит перестройка профиля скорости до стабилизированного состояния, называется начальным участком. За начальным участком в любом поперечном сечении профиль скорости имеет один и тот же вид, соответствующий ламинарному профилю скорости, если $\mathrm{Re}_d < 2300$, или турбулентному при $\mathrm{Re}_d > 2300$. Приведенные ранее решения, относящиеся к течениям вязкой жидкости в трубах, справедливы только для участков труб со стабилизированным течением. Применять эти решения для начальных участков нельзя, так как на этих участках не только профили скорости, но и такие интегральные характеристики, как сопротивления, оказываются совершенно другими.

На рис. 13.1 схематически показано последовательное изменение равномерного входного профиля скорости в различных сечениях начального участка трубы. Как и ранее в задаче о пограничном слое, тормозящее влияние стенок нарушает исходное распределение скоростей. Вдоль трубы нарастает кольцевой слой жидкости, в пределах которого скорость меняется от нуля

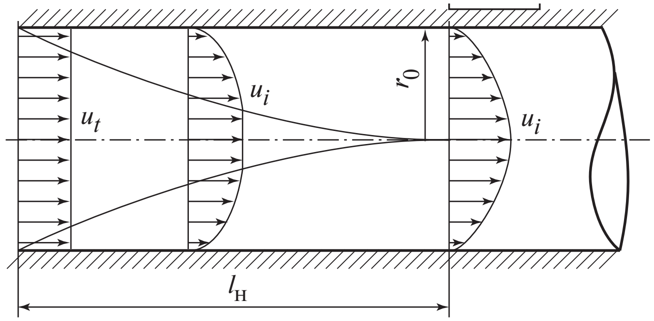


Рис. 13.1. Деформация профиля скорости на начальном участке трубы

на стенке до скорости в ядре потока u_t. Этот пристеночный (пограничный) слой постепенно захватывает все сечение трубы, и на некотором расстоянии $l_н$ его толщина δ становится равной радиусу r_0.

«Сжатие» потенциального ядра сопровождается непрерывным увеличением скорости потока u_t в указанной зоне, так как за счет торможения его в пристеночной области часть жидкости «вытесняется» в центральную часть канала. Рассчитывая площадь вытеснения δ_i^* в каждом сечении начального участка трубы, легко установить связь между средней скоростью $u_{ср}$ и скоростью в ядре потока.

Действительно, согласно уравнению расхода

$$m = \rho u_{ср} F = \rho u_t F\left(1 - \overline{\Delta_t^*}\right).$$

Отсюда

$$u_t = \frac{u_{ср}}{1 - \overline{\Delta}_t^*}. \tag{13.1}$$

Поскольку на начальном участке по направлению движения жидкости происходит увеличение интегральных толщин, то из соотношения (13.1) следует, что в не возмущенной силами вязкости части потока непрерывно увеличивается теоретическая скорость u_t.

Ускорение потока в центральной части начального участка трубы является одной из причин того, что результаты теоретических расчетов длины $l_н$, выполненных без учета этого ускорения, существенно отличаются от опытных данных.

По результатам расчета Л. Шиллера при ламинарном течении для $\mathrm{Re}_d =$ $= 5000$ $l_н/d = 150$. В случае турбулентного течения длина начального участка сокращается и по различным опытным данным меняется от 25 до 100 диаметров трубы. Для приближенной оценки в этом случае принимают $l_н/d =$ $= (3 \div 3{,}5)\mathrm{Re}_d^{1/4}$.

Перестройка профиля и ускорение потока сопровождаются добавочным падением давления в пределах начального участка трубы. В результате относительное падение давления на нем рассчитывается по соотношению

$$\overline{\Delta p_{\text{н}}} = \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2}\rho u_{\text{ср}}^2} = 2{,}16 + \zeta \frac{l_{\text{н}}}{d}. \tag{13.2}$$

Для ламинарного течения $\zeta = \frac{64}{\text{Re}}$ и

$$\overline{\Delta p_{\text{н}}} = 2{,}16 + \frac{64}{\text{Re}_d} \frac{l_{\text{н}}}{d}. \tag{13.3}$$

Влияние начального участка на характер течения в трубопроводе и общее сопротивление зависит от длины этого участка. При большой длине магистрали $[\,l > (10 \div 15) l_{\text{н}}]$ можно из рассмотрения исключить начальный участок и оценивать сопротивление трубопровода по формулам стабилизированного течения. В случае коротких трубопроводов $(l < l_{\text{н}})$ необходимо обязательно учитывать особенность течения жидкости на начальном участке.

Главной задачей при расчете трубопровода является определение его сопротивления Δp с последующей оценкой мощности, необходимой для транспортировки заданного объемного расхода жидкости или газа Q. Эта мощность, Вт, находится по соотношению

$$N = Q\Delta p.$$

Здесь $[Q] = \text{м}^3/\text{с}$, $[\Delta p] = \text{Па}$.

В общем случае трубопроводы содержат различную регулирующую и запорную арматуру, измерительные устройства типа диафрагм и сопл, участки поворота, участки с разными диаметрами труб и ряд других элементов, нарушающих стабилизированное течение. Все эти нарушения существенно усложняют расчетную оценку суммарного сопротивления трубопровода Δp. Обычно проводится расчет сопротивления по отдельным участкам с последующим суммированием всех сопротивлений. Таким образом, Δp может быть представлено в виде

$$\Delta p = \sum_{i=1}^{n} \Delta p_{i\ \text{ст}} + \sum_{j=1}^{n} \Delta p_{j\ \text{м}}. \tag{13.4}$$

В формуле (13.4) $\Delta p_{i\ \text{ст}}$ — сопротивление прямых участков трубопровода со стабилизированным течением; $\Delta p_{j\ \text{м}}$ — местные сопротивления, т.е. сопротивления тех участков, где происходит нарушение стабилизированного течения. При таком определении к местным сопротивлениям можно отнести и начальный участок трубопровода.

Принятый способ оценки сопротивления трубопроводной системы с физической точки зрения является условным, так как любые местные сопротивления вносят в поток весьма сильные возмущения, которые захватывают значительные линейные участки трубопроводов как по направлению движения жидкости, так и вверх по потоку. Например, при наличии поворота в трубе поток начинает перестройку на значительном расстоянии от него, и течение принимает стабилизированный характер далеко за поворотом. Столь же значительное нарушение течения вносит и различная арматура, устанавливаемая на трубопроводах. С этой точки зрения структура формулы (13.4) не отражает реальную картину течения жидкости в трубопроводах, так как допускает простое суммирование сопротивлений, обусловленных совершенно различными факторами. Однако в настоящее время это единственный способ инженерной оценки сопротивлений трубопроводов, а методические неточности с успехом компенсируются опытными коэффициентами, используемыми при конкретной оценке сопротивления того или иного участка трубопровода.

На участках стабилизированного течения сопротивление определяется по формуле (11.46), полученной ранее (см. гл 11):

$$\Delta p_{\text{ст}} = \zeta \frac{l}{d} \frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{2}.$$

Местные сопротивления также выражаются в долях от скоростного напора:

$$\Delta p_{\text{м}} = \zeta_{\text{м}} \frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{2}, \tag{13.5}$$

где $\zeta_{\text{м}}$ — коэффициент местного сопротивления, определяемый на основании опытных данных; $u_{\text{ср}}$ — средняя скорость в характерном сечении, которое обычно специально оговаривается в справочниках, где приводятся значения $\zeta_{\text{м}}$.

Подставляя приведенные соотношения в (13.4), получаем

$$\Delta p_i = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \frac{l_i}{d_i} \frac{\rho u_{i\,\text{ср}}^2}{2} + \sum_{j=1}^{m} \zeta_{j\,\text{м}} \frac{\rho u_{j\text{ср}}^2}{2}. \tag{13.6}$$

Если все среднерасходные скорости как на линейных участках, так и на участках с местными сопротивлениями выразить в долях от некоторой характерной скорости u_0, то (13.6) примет вид

$$\Delta p = \frac{\rho u_0^2}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \frac{l_i}{d_i} \bar{u}_{i\,\text{ср}}^2 + \sum_{j=1}^{m} \zeta_{j\,\text{м}} \bar{u}_{j\text{ср}}^2 \right) = \zeta_0 \frac{\rho u_0^2}{2}. \tag{13.7}$$

Выражение в скобках можно рассматривать как приведенный к скорости u_0 общий коэффициент сопротивления всего трубопровода, т.е.

$$\zeta_0 = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \frac{l_i}{d_i} \bar{u}_{i\,\text{ср}}^2 + \sum_{j=1}^{m} \zeta_{j\,\text{м}} \bar{u}_{j\text{ср}}^2. \tag{13.8}$$

Здесь $\bar{u}_{i\text{ ср}} = u_{i\text{ ср}}/u_0$; $\bar{u}_{j\text{ ср}} = u_{j\text{ ср}}/u_0$.

В качестве характерной скорости u_0 может быть принята средняя скорость жидкости на любом участке трубопровода. Ее значение находится по заданному объемному расходу $Q = \frac{\pi d_0^2}{4} u_0$ и диаметру характерного сечения трубы d_0:

$$u_0 = \frac{4Q}{\pi d_0^2}. \tag{13.9}$$

Подставим в (13.7) соотношение (13.9), тогда получим

$$\Delta p = \frac{8}{\pi^2} \frac{\rho Q^2}{d_0^4} \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \bar{u}_i^2 \frac{l_i}{d_i} + \sum_{j=1}^{m} \zeta_{j\,\text{м}} \bar{u}_j^2 \right) = \frac{8\zeta_0}{\pi^2} \frac{\rho Q^2}{d_0^4}. \tag{13.10}$$

Зависимость (13.10) устанавливает однозначную связь между расходом Q и сопротивлением всего трубопровода. Чем ниже общий коэффициент сопротивления ζ_0, тем больший расход при одном и том же перепаде давления Δp может пропустить трубопровод. Тот же результат может быть достигнут и за счет увеличения диаметров проходных сечений всех участков трубопроводов, но при этом увеличиваются его стоимость, габаритные размеры и часто затрудняется компоновка всей трубопроводной системы. Отсюда наряду с рациональным выбором проходных сечений необходимо стремиться к возможно большему снижению коэффициентов сопротивления всех участков трубопровода, что может быть достигнуто за счет как аэродинамического совершенствования его отдельных элементов, так и более рациональной компоновки.

На участках стабилизированного течения коэффициент сопротивления зависит от типа течения и состояния поверхности трубопровода. При ламинарном режиме течения эта величина, как было показано ранее (см. гл. 11), определяется по соотношению (11.49):

$$\zeta = \frac{64}{\mathrm{Re}_d}.$$

В случае турбулентного течения и гидравлически гладких труб коэффициент сопротивления при соответствующем числе Рейнольдса может быть получен непосредственно с использованием опытных кривых, приведенных на рис. 13.2. Для этой же цели при числе $\mathrm{Re}_d \le 10^5$ можно воспользоваться простой опытной зависимостью Г. Блазиуса:

$$\zeta = \frac{0{,}316}{\mathrm{Re}_d^{1/4}} \tag{13.11}$$

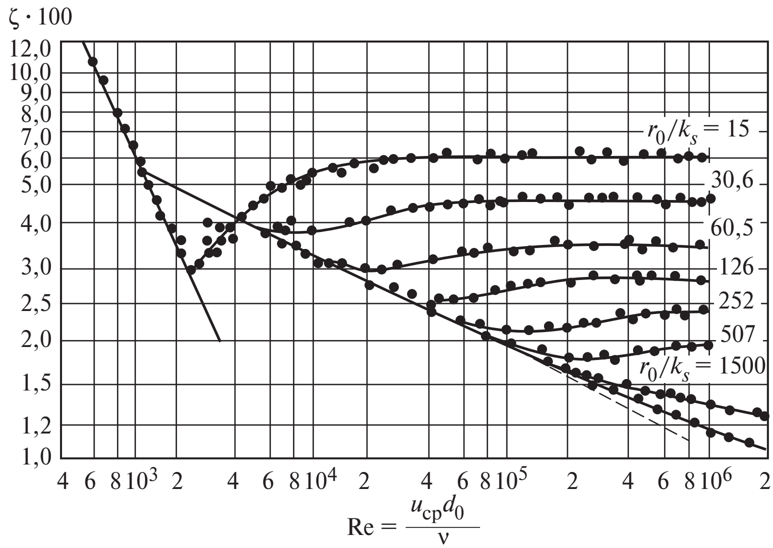


Рис. 13.2. Зависимость коэффициента сопротивления труб от числа Рейнольдса

или более сложным универсальным законом сопротивления Прандтля для гладких труб, справедливым практически для всех чисел Рейнольдса:

$$\frac{1}{\zeta} = 2\lg\left(\mathrm{Re}_d\sqrt{\zeta} - 0{,}8\right). \tag{13.12}$$

Хорошее совпадение с опытными данными при $\mathrm{Re}_d \le 10^7$ дает формула Никурадзе:

$$\zeta = 0{,}0032 + 0{,}221\,\mathrm{Re}_d^{-0{,}227}. \tag{13.13}$$

Приведенные соотношения справедливы для гидравлически гладких труб, т.е. для труб, у которых состояние поверхности не оказывает влияние на сопротивление. Это состояние принято оценивать по относительной высоте бугорков шероховатости k_s/r_0. Однако величина k_s/r_0 не может дать полного представления о характере шероховатости, так как форма и распределение ее могут быть очень разнообразными. Для учета указанного обстоятельства вместо **реальной шероховатости** вводится понятие о **песочной шероховатости**, характеризуемой максимальной плотностью расположения ее зерен одного и того же размера k_s. Влияние этого вида шероховатости на движение жидкости в трубах изучено очень подробно и сводится к тому, что при ламинарном течении все трубы независимо от величины k_s/r_0 ведут себя как гидравлически гладкие с сохранением справедливости всех приведенных выше зависимостей.

При турбулентном течении для каждого числа Рейнольдса существует некоторая критическая высота бугорков шероховатости, начиная с которой коэффициент сопротивления ζ перестает зависеть от числа Re.

Для иллюстрации изложенного на рис. 13.2 приведен ряд кривых, наглядно показывающих сокращение области гидравлически «гладкого» течения с увеличением величины k_s/r_0. Если при $k_s/r_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ ($r_0/k_s = 500$) (влияние шероховатости проявляется в случае, когда $\mathrm{Re} > 2 \cdot 10^5$, то при $k_s/r_0 = 6{,}66 \cdot 10^{-2}$ ($r_0/k_s = 15$) область «гладкого» течения вообще отсутствует, и сразу после перехода к турбулентному режиму наступает режим «шероховатого» течения.

Отмеченная картина отражает результат взаимодействия жидкости с бугорками шероховатости в тонком пристеночном слое, где течение сохраняет ламинарный характер. Как уже отмечалось ранее, этот слой, толщина которого составляет $\delta_л = 5\,\dfrac{\nu}{v_*}$ $\left(\eta_л = \dfrac{\delta_л v_*}{\nu} = 5\right)$, называют ламинарным подслоем.

Пока высота бугорков шероховатости k_s не превышает толщины ламинарного подслоя $\delta_л$, труба считается гидравлически гладкой, и осуществляется режим течения без влияния шероховатости. Его границы оцениваются безразмерной координатой $\eta_л$, в формуле которой толщина $\delta_л$ должна быть заменена величиной k_s. После такой замены указанный режим имеет место в случае, если $0 < k_s v_*/\nu \le 5$.

При $5 < k_s v_*/\nu \le 70$ имеет место переходный режим. При этом элементы бугорков шероховатости частично выступают за пределы ламинарного подслоя в турбулентную часть потока. В результате сопротивление начинает зависеть не только от числа Re, но и от шероховатости, характеризуемой величиной k_s/r_0:

$$\zeta = f(k_s/r_0, \mathrm{Re}).$$

В случае, когда $k_s v_*/\nu > 70$, наступает режим развитого «шероховатого» течения. Здесь ламинарный подслой оказывается полностью разрушенным, и молекулярная вязкость выпадает из определяющих параметров. Следовательно, и число Рейнольдса также выпадает из критериальной базы. Сопротивление трубы становится функцией только безразмерной величины k_s/r_0, характеризующей песочную шероховатость: $\zeta = f(k_s/r_0)$.

Коэффициент сопротивления рассматриваемого режима определяется по следующему выражению:

$$\zeta = \frac{1}{\left(2\,\lg\dfrac{r_0}{k_s} + 1{,}74\right)^2}. \tag{13.14}$$

Изменение условий течения в пристеночной области, вызванных шероховатостью стенок, приводит к тому, что принятая ранее двухслойная модель турбулентного пограничного слоя заметно упрощается, так как по всему поперечному сечению устанавливается турбулентное движение жидкости. Для его описания вновь может быть использован логарифмический профиль скорости [см. (12.68)], но для определения постоянной интегрирования C следует изменить граничное условие на стенке. Приняв, что скорость u обращается в нуль на расстоянии y_0, пропорциональном высоте бугорков шероховатости k_s ($y_0 \approx k_s$), получим

$$\frac{u}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{y}{k_s} + 8{,}5. \qquad (13.15)$$

Для перехода от песочной к технической шероховатости вводится понятие об эквивалентной шероховатости, размеры зерен которой могут быть найдены с использованием формулы (13.14). Под **эквивалентной песочной шероховатостью** понимается шероховатость стенок, обеспечивающая тот же самый коэффициент сопротивления, что и заданная техническая шероховатость. В результате

$$\left(\frac{r_0}{k_s}\right)_{\text{экв}} = 10^{\frac{1}{2\sqrt{\zeta_0}} - 0{,}82}. \qquad (13.16)$$

Рассмотренные особенности движения жидкости на прямых участках и приведенные соотношения относятся к трубам круглого поперечного сечения. При изменении формы сечения и переходе к треугольным, квадратным и прямоугольным трубам существенно меняется вся картина течения. Опыты показывают значительное увеличение локальных скоростей в углах, вызванных тем обстоятельством, что здесь на основное движение накладываются вторичные течения, направления которых в треугольном и прямоугольном каналах показаны на рис. 13.3. Вторичные течения направлены по биссектрисам углов и способствуют переносу жидкости и добавочного импульса из центральной части в угловые зоны, порождая ряд локальных вихревых зон.

Для оценки сопротивления в данном случае используется соотношение той же структуры, что и для круглых труб, но в качестве определяющего размера вводится гидравлический диаметр $D_\text{г}$, равный учетверенному отношению проходной площади F к смоченному периметру Π:

$$D_\text{г} = \frac{4F}{\Pi}.$$

По этой величине определяется число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \dfrac{u_\text{ср} D_\text{г}}{\nu}$ и находится перепад давления на единицу длины трубы:

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\zeta}{D_\text{г}} \frac{\rho u_\text{ср}^2}{2}. \qquad (13.17)$$

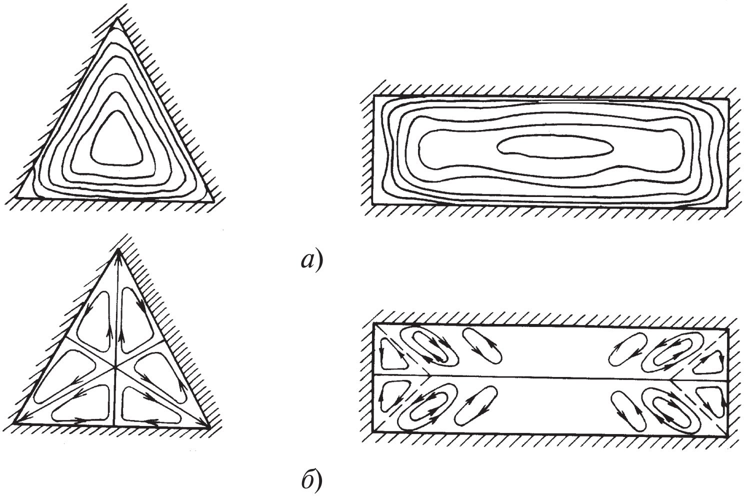


Рис. 13.3. Формы вторичных течений в поперечном сечении труб, различной конструкции:
а, *б* — изотахи и схемы вторичных течений в трубах треугольного и прямоугольного поперечных сечений

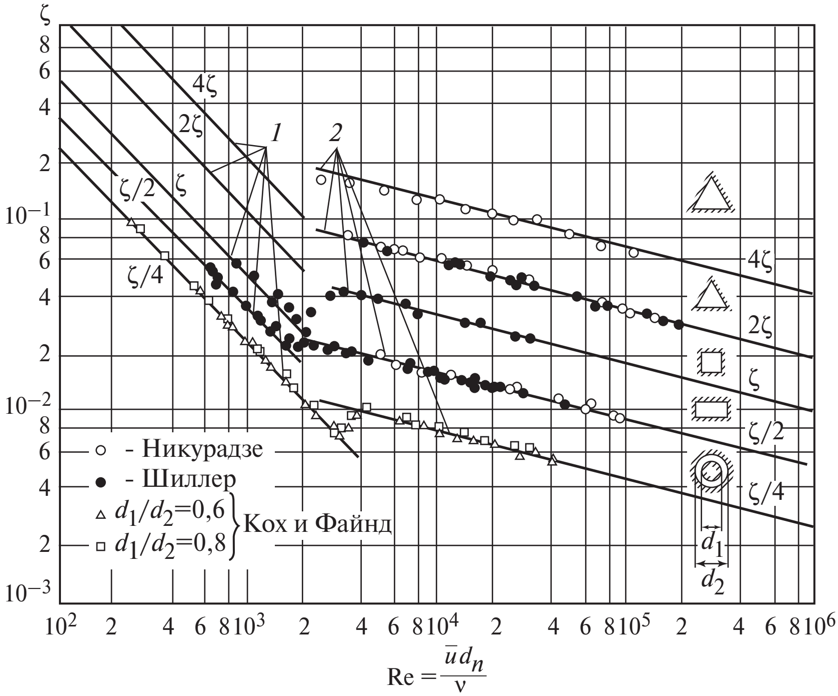


Рис. 13.4. Зависимость коэффициента сопротивления ζ для труб с различной формой поперечного сечения от числа Рейнольдса:
1 — при ламинарном течении; *2* — при турбулентном течении

Значения коэффициента сопротивления ζ для труб с различной формой поперечного сечения, заимствованные из работы [36], приведены на рис. 13.4. Можно отметить снижение значения ζ в прямоугольных и кольцевых трубах и значительное его возрастание для труб треугольного сечения.

13.2. Движение сжимаемой жидкости в трубах с трением

Сжимаемость потока в дозвуковом диапазоне скоростей мало сказывается на интегральных коэффициентах, характеризующих течение жидкости в трубах. В результате возможно использование для расчета сопротивлений всех приведенных выше зависимостей. Однако качественная картина движения сжимаемой жидкости в трубах меняется, и проявляются некоторые специфические особенности, свойственные сжимаемым потокам.

Выясним эти особенности, использовав для анализа основные уравнения одномерного течения. Поскольку вдоль трубы площадь поперечного сечения не меняется, то логарифмическая производная от уравнения расхода будет связывать всего две величины:

$$\frac{\mathrm{d}c}{c} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = 0. \tag{13.18}$$

Уравнение движения при отсутствии энергетического обмена с внешней средой, но с учетом сил трения представим в следующем виде:

$$\rho c\ \mathrm{d}c = -\mathrm{d}p - \mathrm{d}X_{\text{тр}}, \tag{13.19}$$

где $\mathrm{d}X_{\text{тр}} = \zeta \dfrac{\rho c^2}{2} \dfrac{\mathrm{d}x}{d}$ — элементарное напряжение трения на поверхности трубы длиной $\mathrm{d}x$ и диаметром d; ζ — коэффициент сопротивления.

Представим (13.19) в виде

$$c\ \mathrm{d}c + \frac{\mathrm{d}p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\rho} = -\zeta \frac{c^2}{2}\frac{\mathrm{d}x}{d}.$$

Поскольку $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = a^2$, то

$$c\ \mathrm{d}c + a^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\zeta \frac{c^2}{2}\frac{\mathrm{d}x}{d}.$$

Используя далее (13.18), получаем

$$c\ \mathrm{d}c - a^2\frac{\mathrm{d}c}{c} = -\zeta \frac{c^2}{2}\frac{\mathrm{d}x}{d} \quad \text{или} \quad \frac{c_*}{c_*}a^2\frac{\mathrm{d}c}{c}\left(\mathrm{M}^2 - 1\right) = -\zeta \frac{c^2}{2}\frac{\mathrm{d}x}{d},$$

где $\mathrm{M} = c/a$.

Так как критическая скорость c_* зависит только от начальных параметров среды, то при фиксированных значениях этих параметров ее можно вносить под знак дифференциала. Тогда $\frac{c_*}{c_*}\frac{\mathrm{d}c}{c} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}$ $\left(\lambda = \frac{c}{c_*}\right)$ и

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\left(\mathrm{M}^2 - 1\right) = -\,\zeta\,\frac{\mathrm{M}^2}{2}\,\frac{\mathrm{d}x}{d}\,. \tag{13.20}$$

Перепишем (13.20) в виде

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{M}^2} - 1\right) = \frac{\zeta}{2}\,\frac{\mathrm{d}x}{d}\,. \tag{13.21}$$

Безразмерные скорости M и λ связаны между собой уравнением (5.25):

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{M}^2(k-1)} = \frac{k+1}{k-1}\,\frac{1}{2\lambda^2}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\mathrm{M}^2} - 1 = \frac{(k+1)(1-\lambda^2)}{2\lambda^2}. \tag{13.22}$$

С учетом (13.22) уравнение (13.21) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^3}\,(1-\lambda^2) = \frac{\zeta}{k+1}\,\frac{\mathrm{d}x}{d}\,. \tag{13.23}$$

Анализ дифференциального уравнения (13.23) показывает, что в трубе постоянного сечения критическая скорость может быть получена только в выходном сечении. В самом деле, при $\lambda < 1$ приращение скорости $\mathrm{d}\lambda$ оказывается положительным: $\mathrm{d}\lambda > 0$, следовательно, поток ускоряется. При $\lambda > 1$ величина $\mathrm{d}\lambda < 0$, и поток в трубе тормозится. В промежуточном сечении трубы скорость достигнуть критического значения не может, так как при $\lambda = 1$ левая часть уравнения (13.23) обращается в нуль, а в правой части стоит конечная величина, не равная нулю.

Проинтегрируем (13.23), считая коэффициент сопротивления ζ постоянной величиной и пренебрегая его зависимостью от чисел Re и λ.

Это допущение является весьма грубым, но, имея в виду качественный анализ рассматриваемого процесса, оно может быть принято. В результате интегрирования получаем

$$\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_i^2} - \ln\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2} = \frac{2\zeta}{k+1}\,\bar{x}\,. \tag{13.24}$$

Здесь λ_1 — безразмерная скорость во входном сечении трубы; λ_i — безразмерная скорость в промежуточном сечении трубы на расстоянии $\bar{x} = \frac{x}{D}$

от входного сечения. Безразмерный параметр в правой части уравнения (13.24) назовем приведенной длиной трубы и обозначим его через χ:

$$\chi = \frac{2\zeta}{k+1}\frac{x}{d}. \tag{13.25}$$

Тогда

$$\chi = \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda^2} - \ln\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}. \tag{13.26}$$

Полученное соотношение устанавливает зависимость между приведенной длиной трубы χ и безразмерной скоростью λ_i в любом ее сечении при фиксированном значении безразмерной скорости λ_1 во входном сечении. Такие зависимости, изображенные на рис. 13.5, показывают, что при $\lambda_i = \lambda_2 = 1$ величина χ при заданной скорости λ_1 достигает максимально возможного значения χ_{max} и определяется по формуле

$$\chi_{max} = \frac{1}{\lambda_1^2} - 1 - \ln\frac{1}{\lambda_1^2}, \tag{13.27}$$

непосредственно следующей из уравнения (13.26).

Кривые $\lambda_i = f(\chi)$ состоят из двух ветвей, соответствующих либо только дозвуковому ($\lambda_1 < 1$), либо только сверхзвуковому ($\lambda_1 > 1$) потокам во входном сечении цилиндрической трубы.

Приведенная на рис. 13.5 диаграмма наглядно показывает невозможность перехода в изолированной от внешних воздействий цилиндрической трубе от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым и наоборот.

При дозвуковой скорости на входе ($\lambda_1 < 1$) последующее ее увеличение вдоль трубы связано как со снижением давления, вызванным сопротивлением, так и с тем, что потери энергии, обусловленные трением, превращаясь

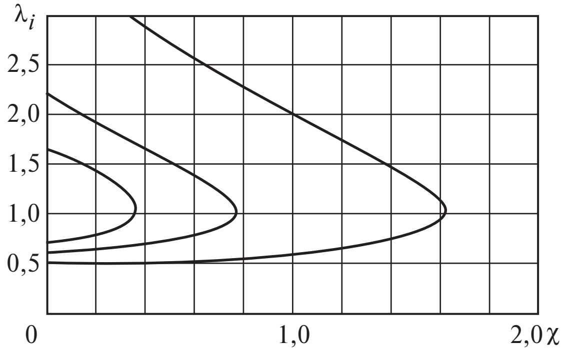


Рис. 13.5. Зависимости $\lambda_i = f(\chi)$ при движении в трубах вязкой сжимаемой жидкости

в теплоту, повышают температуру потока. В результате происходит непрерывное снижение плотности среды вдоль канала, и постоянство расхода в каждом сечении трубы может быть обеспечено только за счет соответствующего увеличения скорости. Другими словами, аэродинамическое сопротивление и внутренний подвод теплоты, вызванный потерями трения, по конечному эффекту равносильны непрерывному сужению проходного сечения. В сверхзвуковой области оба эти эффекта неизбежно приводят к торможению потока.

Как уже отмечалось ранее, переход через скорость звука возможен только в случае изменения знака воздействия. В сопле Лаваля, например, менялся знак геометрического воздействия. В неизолированной трубе постоянного сечения можно осуществить переход от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям, если вначале подводить к трубе тепловую энергию, а затем осуществлять ее отвод за счет охлаждения. Для изолированных труб знак теплового воздействия сохраняется постоянным, и, следовательно, возможно либо только ускорение потока, если $\lambda_1 < 1$, либо только его торможение при $\lambda_1 > 1$.

Этот процесс в случае достаточной длины трубы заканчивается достижением критической скорости в выходном сечении. Если действительная приведенная длина трубы χ оказывается больше максимальной χ_{max}, рассчитанной при заданной входной скорости λ_1 по соотношению (13.27), то физически оказывается невозможным выдержать принятое значение λ_1, и его необходимо снизить. Эта максимально достижимая для конкретной трубы входная безразмерная скорость λ_1 находится также из уравнения (13.27) при условии, что приведенная длина этой трубы χ является максимальной.

Зависимость $\chi_{max} = f(\lambda_1)$ представлена на рис. 13.6. В дозвуковой области входных безразмерных скоростей λ_1 небольшое изменение λ_1 очень сильно меняет максимальную приведенную длину. В сверхзвуковой области такое изменение скорости меняет величину χ_{max} существенно меньше.

Рис. 13.6. Влияние безразмерной скорости λ_1 на входе в трубу на максимальную приведенную длину трубы

При достижении в выходном сечении трубы критической скорости обеспечивается и максимальный расход среды через нее, так как этому расходу при заданной относительной длине l/d, известном коэффициенте сопротивления ζ и показателе изоэнтропы k соответствует максимально возможное значение относительной скорости λ_1 во входном сечении.

Таким образом, для определения максимальной пропускной способности трубы длиной l при заданных параметрах полного торможения (p_{01} и T_{01}) среды перед входным сечением трубы необходимо в первую очередь найти приведенную длину трубы χ по формуле

$$\chi = \frac{2\zeta}{k+1}\,\frac{l}{d}.$$

Входящий в эту формулу коэффициент сопротивления трубы можно оценить по формуле (13.13)

$$\zeta = 0{,}0032 + 0{,}221\,\mathrm{Re}_d^{-0{,}227},$$

справедливой при $\mathrm{Re}_d < 10^7$.

Поскольку при движении сжимаемой жидкости в трубе ее скорость непрерывно увеличивается, возникают сложности при расчете числа Рейнольдса, связанные с выбором характерной скорости c_0.

При оценке максимальной пропускной способности трубы, где среда имеет критическую скорость c_* в выходном сечении, можно принять

$$c_0 = \frac{c_*}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2kRT_{01}}{k+1}}\,.$$

В этом случае

$$\mathrm{Re}_d = \frac{c_* d}{2\nu} = \frac{d}{2\nu}\sqrt{\frac{2kRT_{01}}{k+1}}\,.$$

К большой погрешности определенный произвольный выбор характерной скорости c_0 привести не может, так как число Рейнольдса входит в формулу (13.13) с очень маленьким показателем степени (0,227) и при $\mathrm{Re} > 10^5$ влияние его на коэффициент сопротивления незначительно. По известной приведенной длине трубы χ из уравнения (13.27) определяется максимально возможная для рассматриваемой трубы безразмерная скорость $\lambda_{1\max}$. Этой скорости соответствует вполне определенный удельный приведенный расход $q_{1\max}$ [см. (5.41)]:

$$q_{1\max} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_{1\max}\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\,\lambda_{1\max}^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

В результате абсолютный максимальный расход среды через трубу заданной длины

$$G_{max} = q_{1max} G_{*1} = q_{1\,max} \underbrace{F \rho_{*1} c_{*1}}_{G_{*1}} = q_{1\,max} \frac{\rho_{*1}}{\rho_{01}} \underbrace{\sqrt{\frac{2k}{k+1} R T_{01}}}_{c_{*1}} \rho_{01} F =$$

$$= q_{1\,max} \underbrace{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}}_{\rho_{*1}/\rho_{01}} \underbrace{\sqrt{\frac{2kRT_{01}}{k+1}}}_{c_{*1}} \underbrace{\frac{p_{01} F}{R T_{01}}}_{\rho_{01}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_{01}}{\sqrt{T_{01}}} F q_{1\,max}.$$

Если величину q_{1max} выразить через скорость λ_{1max}, использовав (5.41), то будем иметь

$$G_{max} = F \sqrt{\frac{2k}{(k+1)R}}\, \lambda_{1\,max} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{1\,max}^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{p_{01}}{\sqrt{T_{01}}}. \qquad (13.28)$$

Полученная зависимость (13.28) показывает, что максимальный расход через трубу при известном коэффициенте сопротивления определяется параметрами полного торможения потока в ее входном сечении.

Увеличение расхода может быть достигнуто за счет как повышения начального давления p_{01}, так и охлаждения движущейся среды. Если начальные параметры среды фиксированы, то единственной мерой повышения расхода через трубопровод длиной l является снижение его сопротивления. При уменьшении коэффициента ζ и увеличении диаметра d снижается приведенная длина χ, и согласно (13.27) увеличивается значение максимальной скорости λ_{1max}. Соответственно повышается и расход среды через трубу.

Для достижения в ее выходном сечении критической скорости необходимо вполне определенное отношение давлений ε_{**}.

Найдем, по какому закону меняется относительное статическое давление p_1/p_0 вдоль трубы. С этой целью запишем уравнение расходов для входного сечения и некоторого промежуточного сечения $i - i$:

$$G = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k-1}{2(k+1)}} \sqrt{\frac{k}{R}}\, q_1 \frac{p_{01}}{\sqrt{T_{01}}} F = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k-1}{2(k+1)}} \sqrt{\frac{k}{R}}\, q_i \frac{p_{0i}}{\sqrt{T_{0i}}} F = \text{const}.$$

После очевидных сокращений получим

$$\frac{q_1 p_{01}}{\sqrt{T_{01}}} = \frac{q_i p_{0i}}{\sqrt{T_{0i}}}.$$

Поскольку в изолированной трубе $h_0 = h_{0i} = \text{const}$, то для любых сечений можно записать $T_{01} = T_{0i} \approx \text{const}$ и $q_1 p_{01} = q_i p_{0i}$ или

$$\frac{p_{01}}{p_{0i}} = \frac{q_i}{q_1}. \tag{13.29}$$

В произвольном сечении трубы

$$\frac{p_i}{p_{0i}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_i^2\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

В то же время, на основании зависимости (13.29)

$$\varepsilon_i = \frac{p_i}{p_{01}} = \frac{p_i}{p_{01}}\frac{p_{0i}}{p_{0i}} = \frac{p_i}{p_{0i}}\frac{q_1}{q_i}.$$

Отсюда относительное статическое давление ε_i, выраженное в долях от давления полного торможения перед трубой, будет определяться по формуле

$$\varepsilon_i = \frac{p_i}{p_{01}} = q_1 \frac{p_i}{p_{0i} q_i} =$$

$$= q_1 \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_i^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}_{p_i/p_{0i}} \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_i \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_i^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}_{q_i}} =$$

$$= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} q_1 \frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_i^2}{\lambda_i}. \tag{13.30}$$

Запишем формулу (13.30) для выходного сечения трубы:

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} q_1 \frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_2^2}{\lambda_2}. \tag{13.31}$$

Если рассматривается труба предельных размеров, при которых в выходном сечении достигается критическая скорость, то $\lambda_2 = 1$. Тогда, подставляя в формулу (13.31) значение $\lambda_2 = 1$, получаем относительное давления $\varepsilon_2 = \varepsilon_{**}$, обеспечивающее разгон потока в трубе до звуковой скорости:

$$\varepsilon_{**} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} q_{1\max} = \varepsilon_* q_{1\max}. \tag{13.32}$$

Формула (13.32) показывает, что с ростом сопротивления трубы (с уменьшением $q_{1\max}$) происходит падение величины ε_{**}, т.е. для необратимых течений критическое отношение давлений p_*/p_{01} всегда меньше, чем для изоэнтропийных, где

$$\varepsilon_* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Рассмотрим на основе полученных соотношений, как будет меняться давление вдоль трубы при сверхзвуковых скоростях.

Пусть для определенности $\lambda_1 = 1{,}76$ и $q_1 = 0{,}453$. Тогда, использовав уравнение (13.24), найдем закон снижения скорости λ_i вдоль оси x, а зависимость (13.30) при известных значениях λ_i позволяет определить относительное давление $\varepsilon_i = p_i/p_{01}$ в каждом сечении трубы. Результаты расчетов изображены на рис. 13.7 в виде кривой AB. Точке B соответствуют максимальная приведенная длина $\chi_{\max} = \chi_B$ и критическое отношение давлений ε_{**}, равное для принятого выше значения q_1

$$\varepsilon_{**} = \varepsilon_* q_1 = 0{,}528 \cdot 0{,}453 = 0{,}239.$$

Если длина трубы $\chi_i = \chi_{\max} = \chi_B$ и относительное давление окружающей среды ε_a будет соответствовать давлению на ее срезе ε_2 (точка B на рис. 13.7), то внутри этой трубы будет осуществляться плавное торможение потока с повышением давления по линии AB. В выходном сечении сохранится звуковой поток со слабо выраженной волновой структурой. Если $\chi < \chi_{\max} = \chi_J$, то с повышением противодавления ε_a на срезе трубы последовательно возникают конические, затем мостообразные и, наконец,

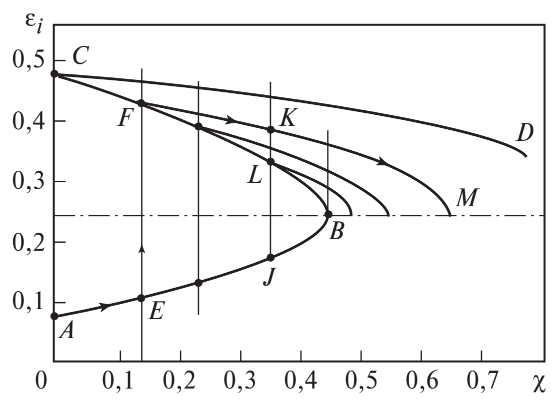


Рис. 13.7. Распределение относительного давления в трубе при движении в ней сжимаемой вязкой жидкости

при $\varepsilon_a = \varepsilon_L$ прямой скачки уплотнения. Процесс повышения давления в прямом скачке на рис. 13.7 показан линией *JL*.

Дальнейшее повышение величины ε_a ($\varepsilon_a = \varepsilon_L$) приводит к смещению прямого скачка внутрь трубы. Чем выше противодавление, тем ближе от входного сечения располагается скачок, и при некотором относительном противодавлении $\varepsilon_a = \varepsilon_C$ прямой скачок образуется непосредственно на входе в трубу. Рассчитывая для всех сечений трубы прямые скачки уплотнения, можно построить линию *LC*, определяющую относительное давление $\varepsilon_{i\,\text{ск}}$ за этими скачками. При удлинении трубы до максимального значения $\chi_{\max}$ указанная линия дополнится отрезком *LB*.

Так как после прямого скачка уплотнения скорость потока становится дозвуковой, то в последующей части трубы вновь происходит его ускорение до выходного сечения. На рис. 13.7 процесс изменения давления вдоль рассматриваемой трубы для противодавления, характеризуемого точкой *K*, изображается линией *AEFK*. На участке *AE* осуществляется плавное торможение сверхзвукового потока, которое заканчивается резким торможением в прямом скачке уплотнения (линия *EF*), и далее идет плавное ускорение дозвукового потока с падением давления по линии *FK*. Если длина трубы больше максимального значения $\chi_{\max}$, то снижение давления будет проходить и далее по линии *KM*, пока в ее выходном сечении скорость потока вновь не достигнет критического значения. Чем больше значение χ превышает максимальное, тем ближе от входа располагается скачок. В случае, когда скачок возникает во входном сечении, торможение потока идет по линии *AC* с последующим падением давления по линии *CD*.

Таким образом, при сверхзвуковой скорости потока на входе в трубу скачки внутри трубы возникают в случае, если противодавление ε_a оказывается выше, чем относительные давления, определяемые линией *CB*, либо в случае, когда действительная приведенная длина трубы χ превышает рассчитанное для данной скорости λ_1 значение $\chi_{\max}$.

Представленная диаграмма показывает, что при постоянной длине χ и заданном давлении на выходе из трубы $p_a(\varepsilon_a)$ увеличение скорости на ее входе λ_1 смещает скачок уплотнения к выходному сечению, а при повышении сопротивления (в результате, например, рассмотренного выше подключения дополнительных участков трубы) эти скачки перемещаются в обратном направлении ко входу в трубу.

Если, наконец, давление за трубой окажется ниже давлений, определяемых линией *AB*, то на срезе трубы возникает обычная система волн разрежения, в которых и осуществляется снижение давления до заданного значения p_a.

13.3. Местные сопротивления

Как простые, так и сложные трубопроводы содержат ряд элементов, нарушающих характер течения и вызывающих в своем большинстве заметное увеличение общего сопротивления всей системы.

Участки трубопроводов, где течение отличается от стабилизированного, при расчете рассматриваются отдельно. Условно принято считать, что возмущения, вносимые этими участками, носят локальный местный характер, и их влияние учитывается коэффициентами местных сопротивлений. Эти коэффициенты наиболее полно представлены в специальных гидравлических справочниках, а в данном случае мы остановимся только на типичных элементах трубопроводов, входящих в общий класс местных сопротивлений.

13.3.1. Поворотные колена

Поворотные участки (колена) являются неотъемлемой частью любого трубопровода и различаются исключительным разнообразием. Теоретически задача о движении реальной жидкости в поворотном колене даже простейшей формы до сих пор не решена, и интегрально потери в этих элементах учитываются на основании опытных данных. Сложность указанной задачи состоит в том, что при движении потока в криволинейном колене возникают специфические явления, вызывающие перестройку всего поля скоростей. Покажем это на примере поворота жидкости или газа в прямоугольном колене постоянного сечения (рис. 13.8).

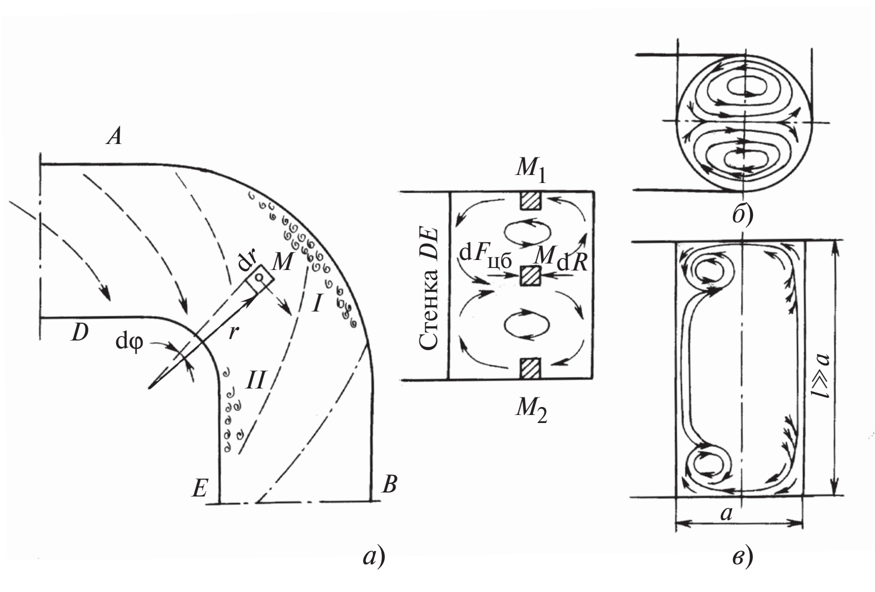


Рис. 13.8. Схема движения вязкой жидкости в трубе при повороте на 90°

При движении элементарной жидкой частицы M массой $\mathrm{d}m$ по криволинейной траектории с окружной скоростью c_θ на нее действует центробежная сила $\mathrm{d}F_{\text{ц б}}$, которая определяется по следующей формуле:

$$\mathrm{d}F_{\text{ц б}} = \frac{c_\theta^2}{r}\,\mathrm{d}m = \rho r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\frac{c_\theta^2}{r}\,. \tag{13.33}$$

Под действием этой силы в канале возникает поперечный градиент давления $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r$, направленный от стороны колена AB к выпуклой стенке DE, обеспечивающий при потенциальном течении поперечное равновесие жидких частиц. Сила $\mathrm{d}R$, уравновешивающая центробежную силу $\mathrm{d}F_{\text{ц б}}$, равна произведению перепада давления $\mathrm{d}p$ на площадь $\mathrm{d}S$:

$$\mathrm{d}R = \mathrm{d}S\,\mathrm{d}p = r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}p.$$

Из условия $\mathrm{d}F_{\text{ц б}} = \mathrm{d}R$ вытекает, что

$$\mathrm{d}p = \rho c_\theta^2\,\frac{\mathrm{d}r}{r}\,. \tag{13.34}$$

В то же время согласно уравнению Эйлера для одномерного течения

$$\mathrm{d}p = -\rho c_\theta\,\mathrm{d}c_\theta.$$

Приравняв записанные выражения, найдем

$$\rho c_\theta^2\,\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\rho c_\theta\,\mathrm{d}c_\theta$$

или

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\,\frac{\mathrm{d}c_\theta}{c_\theta}\,.$$

Отсюда $c_\theta r = \text{const}$. Полученная зависимость с точностью до постоянной, равной 2π, определяет циркуляцию скорости Γ_0:

$$2\pi r c_\theta = \Gamma_0 = \text{const}, \tag{13.35}$$

которая согласно (13.35) оказывается постоянной для всех линий тока в поперечном сечении криволинейного канала.

Формула (13.35) показывает, что в криволинейном канале при потенциальном течении скорость с увеличением радиуса кривизны убывает по гиперболическому закону и определяется законом постоянства циркуляции, т.е. распределение скорости в поперечном сечении криволинейного канала совпадает с ее распределением в плоском вихре, рассмотренным ранее (см. гл. 5). Переход от равномерного профиля скорости перед поворотным коленом к гиперболическому и от гиперболического к равномерному за коленом захватывает значительные прямолинейные участки, к которым колено примыкает. Следовательно, при входе в поворот вдоль выпуклой стенки DE поток ускоряется, а вдоль вогнутой AB тормозится. На выходе из колена, наоборот, вдоль обвода DE скорость падает, а на обводе AB ускоряется.

При переходе к течению реальной вязкой жидкости отмеченные особенности ее движения на поворотах приводят к появлению локальных отрывных зон на диффузорных участках, обозначенных на рис. 13.8 цифрами *I* и *II*. Кроме того, в канале возникают вторичные течения, для объяснения которых вновь обратимся к условию радиального равновесия частиц [см. (13.34)]. Если частица находится в центральной части канала, то условие (13.34) сохраняется, т.е. $\mathrm{d}F_{цб} = \mathrm{d}R$. На торцевых стенках в связи с торможением этими стенками потока и соответствующим снижением скорости c_θ величина $\mathrm{d}F_{цб}$ согласно уравнению (13.33) довольно резко падает. В то же время поперечный градиент давления $\mathrm{d}p$ сохраняется, так как по Прандтлю в пристеночной области (в области пограничного слоя) $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r = 0$.

Следовательно, для частиц M_1 и M_2 (рис. 13.8), расположенных вблизи торцевых стенок, $\mathrm{d}F_{цб} < \mathrm{d}R$. Нарушение условия радиального равновесия приводит к поперечному перетеканию жидкости от внешнего обвода к внутреннему. По условию сплошности в ядре потока возникают компенсирующие течения, направленные к внешнему обводу. В результате в криволинейном канале образуется сложное вторичное течение, которое налагается на основной поток. В поперечном сечении канала линии тока вторичного течения оказываются замкнутыми, а на плоских торцевых стенках они направлены так, как показано штриховыми на рис. 13.8, *а*.

Структура вторичного течения в криволинейном канале и дополнительная потеря энергии, обусловленная этим течением, существенно зависят от геометрической формы канала и режима течения (чисел M и Re).

В колене круглого сечения картина вторичных токов (рис. 13.8, *б*) близка к той, которая наблюдается в рассмотренном колене прямоугольного сечения.

В случае, когда высота прямоугольного канала l значительно больше его ширины a ($l >> a$), вторичное движение жидкости по вогнутой и выпуклой стенкам к центру затруднено, так как частицы должны пройти длинный путь, испытывая влияние сил трения. Перетекание оказывается возможным только в пристеночной зоне плоских торцевых стенок (рис. 13.8, *в*) от вогнутой поверхности к выпуклой, что порождает в ядре потока компенсирующее вторичное течение, направленное к вогнутой стенке.

В результате взаимодействия вторичного течения с основным в канале образуются две замкнутые вихревые области, охватывающие теперь не все поперечное сечение, а только часть его вблизи слияния выпуклой поверхности с торцевыми стенками. Здесь вторичные течения вырождаются в два вихревых шнура, вращающихся в противоположных направлениях.

На образование вторичных течений затрачивается часть кинетической энергии потока. Потери энергии, обусловленные кривизной канала, складываются из а) дополнительных потерь на трение вследствие вторичного течения, б) вихревых потерь в зоне отрыва и в) потерь, вызванных компенсирующими течениями. Основную долю потерь на поворотах составляют потери, связанные с отрывом потока, причем на вогнутом обводе *DE* зона отрыва локализована, а отрыв с выпуклой стенки захватывает значительную область вниз по течению.

Таким образом, для уменьшения потерь в коленах в первую очередь необходимо обращать внимание на сокращение отрывных зон, а затем соответствующей конфигурацией канала стремиться уменьшить интенсивность вторичных течений. На рис. 13.9 приведены данные Х. Нипперта, характеризующие влияние некоторых геометрических параметров прямоугольного колена на коэффициент потерь энергии $\zeta_{пов}$ в этом колене.

Такими параметрами являются: входная a_1 и выходная a_2 ширины канала, радиусы вогнутого r_a и выпуклого r_i обводов, высота канала l. Как видно из рис. 13.9, коэффициент потерь при повороте потока на 90° $\zeta_{пов}$, определяющий потери в долях от скоростного напора на входе в канал, существенно зависит от радиусов r_a, r_i и геометрической конфузорности канала, определяемой отношением $\bar{a} = a_1/a_2$. Если $\bar{a} > 1$, то канал конфузорный, а при $\bar{a} < 1$ — диффузорный. В первом случае потери заметно меньше, чем во втором. Очень значительно на уровень потерь влияет радиус выпуклого обвода r_i/a_1. Чем выше этот параметр, тем больше коэффициент $\zeta_{пов}$. Для каждого радиуса r_i существует оптимальный радиус вогнутого обвода r_a, обеспечивающий минимальный уровень потерь.

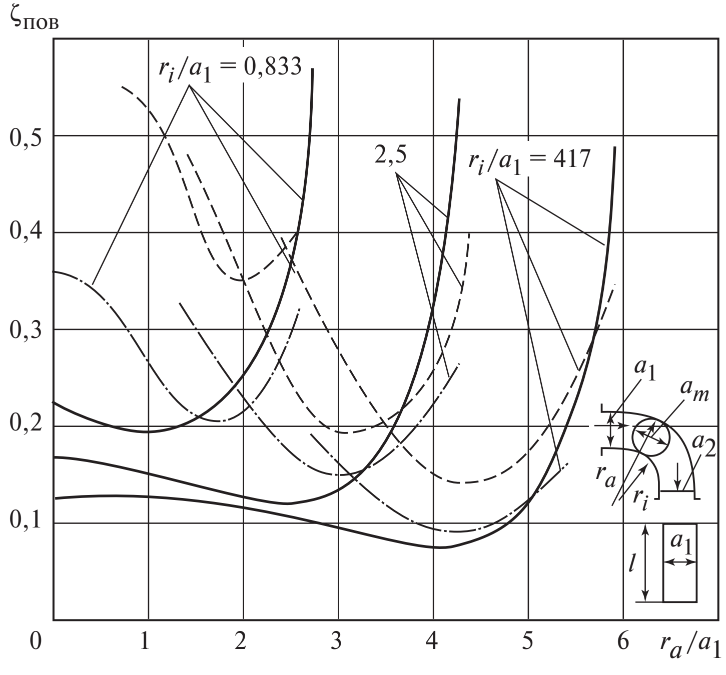


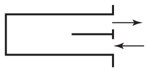
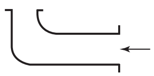
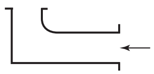
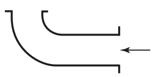
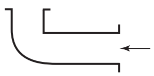
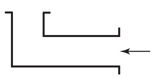
Рис. 13.9. Влияние формы криволинейного канала на его коэффициент сопротивления

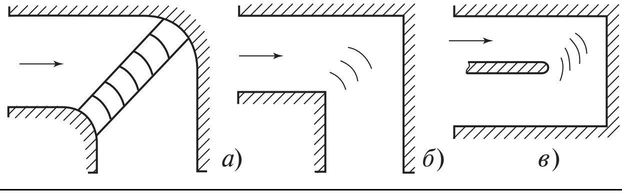
Согласно опытным данным при $a_1 = a_m = a_r(r_a/r_i)_{\text{опт}}$ $\zeta = 1{,}1 \div 1{,}2$. В случае, когда $r_a/r_i < 1$, потери по сравнению с минимальным уровнем возрастают сравнительно мало. Наиболее резко они увеличиваются с уменьшением радиуса r_i, когда отношение r_a/r_i превышает оптимальное значение, что связано с расширением «открытой» зоны отрыва с выпуклого обвода *AB* (см. рис. 13.8).

К сожалению, именно такое неблагоприятное соотношение радиусов $[(r_a/r_i) > (r_a/r_i)_{\text{опт}}]$ характерно для поворотов в каналах круглого сечения и довольно часто встречается и в каналах прямоугольного сечения. В послед-

Таблица 13.1

Значения коэффициентов сопротивления в поворотных коленах различной формы

Схема поворота потока	a_1/a_2	r_i/a_1	r_a/a_2	Тип лопаток	$\zeta_{\text{пов}}$ для колена без лопаток	$\zeta_{\text{пов}}$ для колена с лопатками
	1	0	0	*б*	1,647	0,358
	1	0	1	*б*	2,705	0,560
	1	0,25	1	*б*	1,374	0,179
	1	0,25	0	*б*	0,996	0,216
	1	0,0834	0,0834	*б*	1,485	0,307
				а		0,450
	1	0	0	*в*	4,010	0,702
	1	0	0	*в*	4,250	0,653
	1	0	0	*в*	4,510	0,783



нем случае потери могут быть уменьшены за счет применения различного рода поворотных лопаток, устанавливаемых в области поворота потока. Эффективность этого способа снижения потерь на поворотах наглядно иллюстрируется данными табл. 13.1, заимствованной из работы И.Л. Повха [29], где кроме схем поворота потока на 90 и 180°, а также коэффициентов $\zeta_{\text{пов}}$ показано три исследованных варианта установки лопаток.

Приведенные в таблице значения коэффициентов потерь $\zeta_{\text{пов}}$ отнесены к скоростному напору на выходе из колена и соответствуют числу Рейнольдса $\text{Re} = 2{,}55 \cdot 10^5$. С ростом числа Re потери снижаются примерно в той же пропорции, что и в случае движения жидкости в прямых трубах. Для качественной оценки потерь, вызванных поворотом потока, используют следующее соотношение:

$$\Delta p_{\text{м}} = \Delta p_{\text{пов}} = \zeta_{\text{пов}} \frac{\rho u_{2\text{ср}}^2}{2}, \qquad (13.36)$$

если коэффициент $\zeta_{\text{пов}}$ оценивается относительно скорости $u_{2\text{ср}}$ за коленом. В случае, когда величина $\zeta_{\text{пов}}$ определена в долях от скорости перед поворотом $u_{1\text{ср}}$

$$\Delta p_{\text{пов}} = \zeta_{\text{пов}} \frac{\rho u_{1\text{ср}}^2}{2}. \qquad (13.37)$$

Структура формулы (13.36) сохраняется для любых местных сопротивлений, потери давления на которых учитываются соответствующим коэффициентом сопротивления ζ.

Следует еще раз подчеркнуть, что отсутствие в соотношениях (13.36) и (13.37) линейного размера совсем не означает, что влияние поворота на течение в трубопроводе ограничивается локальным воздействием на поток. Участок рассматриваемого местного сопротивления оказывается весьма протяженным. В таком случае этот участок включает в себя часть трубопровода до поворота, где начинается перестройка профиля скорости, сам поворот и участок выравнивания профиля скорости после поворота.

13.3.2. Внезапное расширение потока

При сочленении труб различного диаметра, а также в случае соединения двух каналов с различными проходными сечениями возникают потери, обусловленные внезапным расширением потока при переходе к большему сечению.

Схематически процесс внезапного расширения потока показан на рис. 13.10.

При входе в широкую часть канала возникает струйное течение со свободной границей, расширяющейся в направлении продольной оси x. На некотором расстоянии от входного сечения *1—1* внешняя граница струи достигает стенок канала, и далее течение происходит вновь с фиксированной внешней границей. В данном случае участок местного сопротивления

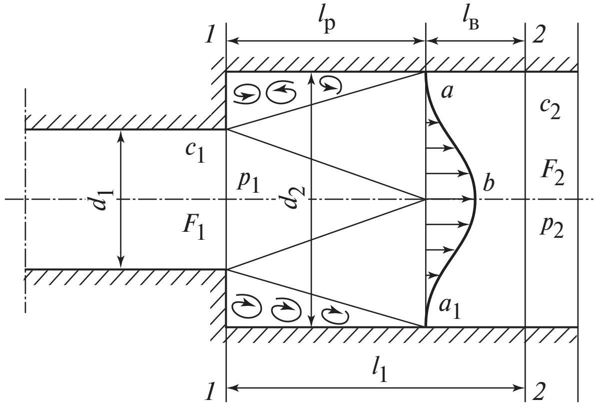


Рис. 13.10. Схема течения жидкости в канале при его внезапном расширении

состоит из участка расширения длиной $l_р$ и участка выравнивания длиной $l_в$, где весьма неравномерный профиль скорости, показанный на рис. 13.10 кривой aba_1, принимает в сечении *2—2* форму, характерную для турбулентного течения в трубе при стабилизированном течении.

На участке расширения ($l_р$) между стенкой и границей струи образуется область неупорядоченного вихревого движения, интенсивность которого определяется как формой поперечного сечения канала, так и степенью его расширения $n = F_2/F_1$ (рис. 13.10).

Для расчета потери давления Δp при внезапном расширении проходной площади выделим контур *1-1-2-2-1* (рис. 13.10) и будем считать, что в сечениях *1—1* и *2—2* имеет место равномерный профиль скорости, т.е., в данном случае мы пренебрегаем той неравномерностью, которая характерна для реального профиля скорости на участках стабилизированного течения среды в трубопроводах.

С небольшой погрешностью можно также считать постоянными давления p_1 и p_2 в поперечных сечениях *1—1* и *2—2*. Записав для выделенных контрольных сечений уравнение Бернулли (рассматриваем случай несжимаемой жидкости), получим

$$\frac{\rho c_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho c_2^2}{2} + p_2 + \Delta p.$$

Отсюда

$$\Delta p = \frac{\rho c_1^2}{2}\left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right) - (p_2 - p_1). \tag{13.38}$$

Для нахождения разности давлений в сечениях *1—1* и *2—2* применим к жидкости, ограниченной контуром *1-1-2-2-1*, закон об изменении количества движения [изменение количества движения $\Delta J = m(c_1 - c_2)$ равно секундному импульсу внешних сил $\sum R_i = (p_2 - p_1)F_2$]. Тогда

$$m(c_1 - c_2) = (p_2 - p_1)F_2.$$

С учетом уравнения неразрывности ($m = \rho c_1 F_1 = \rho c_2 F_2$) запишем

$$p_2 - p_1 = \rho c_1^2 \frac{F_1}{F_2}\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right). \qquad (13.39)$$

После подстановки (13.39) в (13.38) получим

$$\Delta p = \frac{\rho c_1^2}{2}\left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right) - \rho c_1^2 \frac{F_1}{F_2}\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right).$$

Поскольку $\dfrac{c_2}{c_1} = \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{1}{n}$, то $\Delta p = \dfrac{\rho c_1^2}{2}\left(1 - \dfrac{1}{n^2} - 2\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right) = \dfrac{\rho c_1^2}{2}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2.$

Отсюда коэффициент потери энергии при внезапном расширении канала будет определяться по формуле

$$\zeta_{\text{в.р}} = \frac{\Delta p}{\rho c_1^2/2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2. \qquad (13.40)$$

Полученное соотношение (13.40) носит название формулы Борда—Карно и очень широко используется при расчетах разнообразных каналов. В этом случае, однако, необходимо помнить те допущения, которые были приняты в процессе вывода указанного уравнения, и применять формулу (13.40) только в случае, когда длина широкой части канала достаточна для выравнивания профиля скорости. Однако и здесь вносится определенная погрешность, так как при записи уравнения количества движения мы не учитывали импульс сил трения, обеспечивающих выравнивание поля скоростей после участка расширения.

Эта погрешность при $n \le 2$ невелика и может не приниматься во внимание, но в прямоугольных каналах малой ширины погрешность расчета может быть заметной.

Согласно опытным данным длина участка l местного сопротивления при внезапном расширении канала достаточно велика, и ориентировочно для труб

$$\left(\frac{l}{d_1}\right)_{\min} \approx 2n. \qquad (13.41)$$

Отсюда при $n = 2$ минимальная длина широкой части должна составлять около четырех входных диаметров.

Применять формулу Бордо—Карно при меньших линейных размерах нельзя, так как абсолютная погрешность при оценке коэффициента $\zeta_{\text{в.р}}$ может достигать 20—25 %.

13.3.3. Внезапное сужение потока

Течение при внезапном сужении потока противоположно предыдущему и реализуется при переходе от трубы большего диаметра к трубе меньшего диаметра, при входе жидкости из резервуара в трубу, в различных диафрагмах, установленных в трубах, и др.

Схема течения при внезапном сужении канала показана на рис. 13.11. На входе в узкую часть канала поток сужается, и это сужение продолжается до некоторого сечения $a — a$, расстояние которого от входа l_a увеличивается с ростом величины $\Delta r = r_1 - r_2$, ($l_a \approx \Delta r$). За сечением $a — a$ имеет место расширение потока, аналогичное внезапному расширению. В зоне сжатия потери незначительны, и основные потери энергии приходятся на область расширения.

Применяя к этой области формулу (13.39), получаем

$$\Delta p_{\text{в.с}} = \frac{\rho c_a^2}{2}\left(1 - \frac{F_a}{F_2}\right)^2.$$

Среднюю скорость c_a в суженном сечении заменим скоростью c_2 в конце участка выравнивания. Используя уравнение неразрывности, будем иметь

$$c_a = c_2 F_2 / F_a.$$

Тогда

$$\Delta p_{\text{в.с}} = \frac{\rho c_2^2}{2}\left(\frac{F_2}{F_a}\right)^2\left(1 - \frac{F_a}{F_2}\right)^2 = \frac{\rho c_2^2}{2}\left(\frac{F_2}{F_a} - 1\right)^2 = \frac{\rho c_2^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2$$

или

$$\Delta p_{\text{в.с}} = \frac{\rho c_2^2}{2}\,\zeta_{\text{в.с}},$$

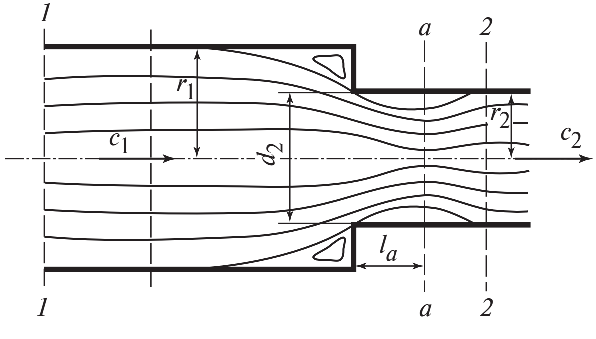


Рис. 13.11. Схема течения жидкости при внезапном сужении канала

где

$$\zeta_{\text{в.с}} = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2. \tag{13.42}$$

По экспериментальным данным коэффициент сужения струи

$$\varepsilon = 0{,}62 + 0{,}38\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2. \tag{13.43}$$

В случае, когда площадь F_1 значительно больше площади F_2, получаем решение задачи о расчете местного сопротивления при входе потока из резервуара в трубу с острыми входными кромками (рис. 13.12, *а*). Для этого случая $\zeta \approx 0{,}4 \div 0{,}5$. Входное сопротивление может быть заметно уменьшено при изменении формы входного участка. Установка входного конфузора (рис. 13.12, *б*) снижает значение ζ до 0,25, а при хорошо спрофилированном плавном входе $\zeta \approx 0{,}03 \div 0{,}1$ (рис. 13.12, *в*).

В некоторых случаях труба может располагаться под углом к стенке резервуара (рис. 13.12, *г*). Тогда

$$\zeta = 0{,}5 + 0{,}3\cos\alpha + 0{,}2\cos^2\alpha.$$

Наибольшим входным сопротивлением обладает насадок Борда, изображенный на рис. 13.13, *а*. Его сопротивление зависит от относительной толщины трубы s/d, входящей в резервуар, и ее относительной длины l/d.

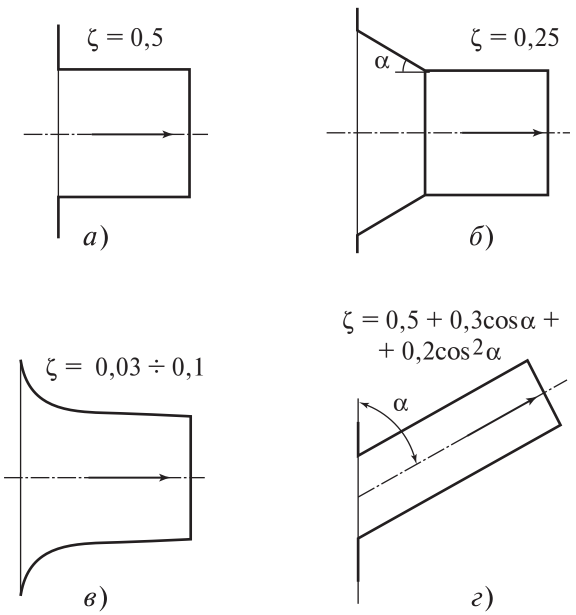


Рис. 13.12. Формы входных участков труб при их соединении с резервуаром большого объема

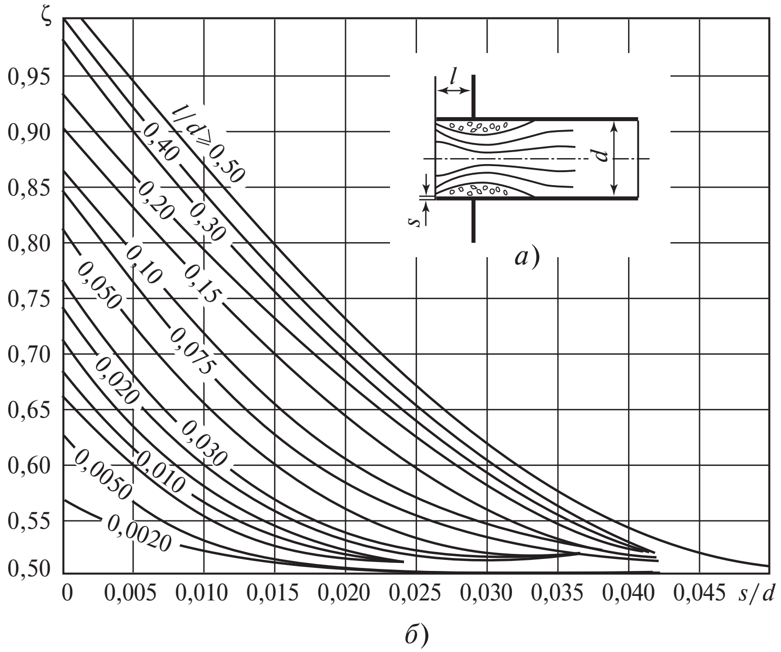


Рис. 13.13. Коэффициенты сопротивления насадка Борда

Коэффициент $\zeta = f\left(\frac{s}{d}\ \frac{l}{d}\right)$ для такого насадка может быть найден по графикам, приведенным на рис. 13.13, *б*. Здесь можно отметить очень сильное увеличение сопротивления с ростом длины l и уменьшением толщины s.

Для снижения сопротивления в трубах при сужении диаметра используют конфузорные переходы (рис. 13.12, *б*), коэффициент сопротивления которых оценивается по формуле

$$\zeta = m\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right),$$

где m — коэффициент «смягчения» входа, зависящий от угла сужения α, показанного на рис. 13.12. Минимальное значение этого коэффициента достигается при угле $\alpha = 60°$.

13.3.4. Слияние и разделение потоков

При расчете сложных трубопроводов приходится оценивать сопротивления, вызванные слиянием и разделением потоков. Схемы тройников такого типа приведены на рис. 13.14. Для их характеристик используют коэффициенты полного сопротивления ζ, бокового сопротивления $\zeta_б$ и сопротивления прямого прохода тройника $\zeta_п$. Все эти коэффициенты приводятся обычно к скоростному напору в сборном трубопроводе, т.е.

$$\zeta = \frac{\Delta p}{\rho c_{с}^{2}/2}; \quad \zeta_{б} = \frac{\Delta p_{б}}{\rho c_{с}^{2}/2}; \quad \zeta_{п} = \frac{\Delta p_{п}}{\rho c_{с}^{2}/2}.$$

Общие потери в тройнике ($\zeta = \zeta_{б} + \zeta_{п}$) при слиянии двух потоков определяются потерями смешения и потерями на поворот, часто вызывающий локальный отрыв потока.

При слиянии потоков струя с большей энергией ее теряет, а струя с меньшей энергией ее приобретает. В результате коэффициент сопротивления для потока с меньшей кинетической энергией может оказаться отрицательным, но общий коэффициент ζ будет всегда положительным.

Численные значения ζ, $\zeta_{б}$, $\zeta_{п}$ зависят от угла α (рис. 13.14), соотношения площадей $F_{с}$, $F_{б}$, $F_{п}$ ($F_{б} + F_{п} \le F_{с}$) и отношения расходов $Q_{б}/Q_{с}$ с учетом, что $\dfrac{Q_{б}}{Q_{с}} + \dfrac{Q_{п}}{Q_{с}} = 1$. Некоторые данные по сопротивлению тройников в зависимости от указанных параметров приведены в табл. 13.2.

Коэффициенты сопротивления для стандартного прямоугольного тройника ($\alpha = 90°$) из кованого чугуна при $F_{п} = F_{с}$, используемого для слияния потоков, содержатся в табл. 13.3.

Таблица 13.2

Коэффициенты сопротивления тройников в зависимости от различных параметров

Коэффициент сопротивления	α, град	$Q_{б}/Q_{с}$	Значение коэффициента сопротивления при $F_{б}/F_{с}$				
			0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\zeta_{б}$	30	0,3	1,5	0,90	0,05	–0,08	–0,10
		0,7	8,5	1,77	0,76	0,50	0,40
	45	0,3	0,64	0,30	0,08	0,00	–0,03
		0,7	9,2	2,15	0,85	0,60	0,53
$\zeta_{п}$	30	0,3	–0,2	0,10	0,22	0,30	0,35
		0,7	–3,40	–1,20	–0,50	–0,15	0,10
	45	0,3	–0,13	0,20	0,28	0,32	0,40
		0,7	–2,60	–0,85	–0,25	0,08	0,25

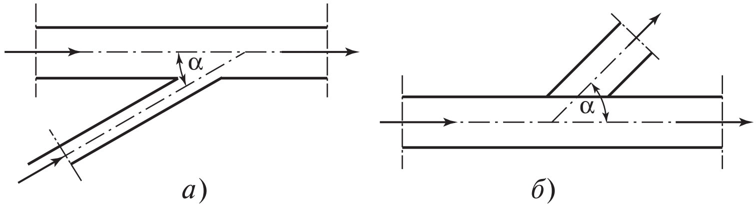


Рис. 13.14. Схемы тройников, используемых для слияния (*а*) и разделения (*б*) потоков

Таблица 13.3

Коэффициенты сопротивления для стандартного прямоугольного тройника, используемого для слияния потоков

ζ	$F_б/F_с$	Значение коэффициента сопротивления при $Q_б/Q_с$				
		0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\zeta_б$	0,27	0	2,18	5,10	11,3	18,4
	0,55	–0,48	0,53	1,89	4,0	6,6
	1,0	–0,40	0,10	0,83	1,47	2,3
$\zeta_п$	—	0,64	0,65	0,85	0,96	1,0

Таблица 13.4

Коэффициенты сопротивления для стандартного прямоугольного тройника, используемого для разделения потоков

ζ	$F_б/F_с$	Значение коэффициента сопротивления при $Q_б/Q_с$ или $Q_п/Q_с$				
		0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\zeta_б$	0,27	1,81	2,83	4,07	6,00	8,50
	0,55	1,80	1,59	1,77	2,20	3,30
	1,0	1,0	1,20	1,50	1,80	2,30
$\zeta_п$	—	0,64	0,57	0,51	0,55	0,70

При разделении потоков потери вызываются потерями на поворот в боковой отвод и потерями на внезапное расширение после разделения потоков. Чем больше площадь сечения отвода, тем, очевидно, больше потери на внезапное расширение.

В табл. 13.4 приведены коэффициенты сопротивления указанного выше стандартного тройника ($\alpha = 90°$), используемого для разделения потоков.

Коэффициенты сопротивления различной арматуры, установленной на трубопроводах, зависят от ее типа и места установки. Конкретные значения этих коэффициентов для типовых задвижек и клапанов представлены в гидравлических справочниках.

Прямое суммирование всех сопротивлений возможно только в том случае, когда каждое из них разнесено друг от друга на расстояние $l > (20 \div 50)\,d$. При меньших расстояниях l происходит взаимное влияние «местных» сопротивлений, и следует ввести особую поправку на это влияние.

13.4. Элементы расчета сложных трубопроводов

В соответствии с классификацией сложные трубопроводы характеризуются наличием различного рода отводов и параллельных участков движения. Первому случаю соответствует схема, приведенная на рис. 13.15, *а*, второму — схема, представленная на рис. 13.15, *б*. Основной задачей расчета таких схем является определение объемных расходов на каждом участке

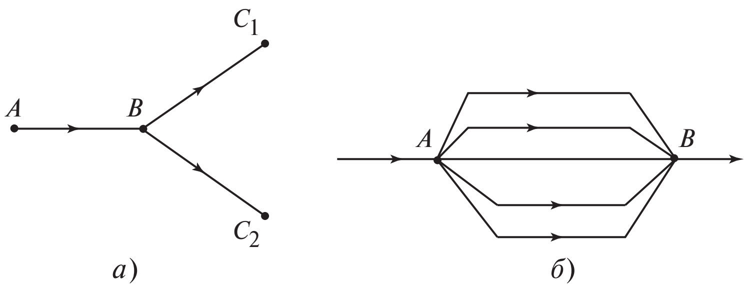


Рис. 13.15. Схемы сложных трубопроводов

трубопроводов. Их распределение будет, очевидно, зависеть от сопротивления каждого участка трубы. Рассмотрим методику расчета схемы, изображенной на рис. 13.15, *а*.

Если обозначить общий расход на участке AB через Q_0, а на участках BC_1 и BC_2 через Q_1 и Q_2, то очевидно

$$Q_0 = Q_1 + Q_2. \tag{13.44}$$

Записав уравнения для сопротивлений участков BC_1 и BC_2, получим еще два расчетных соотношения:

$$\Delta p_1 = \frac{8}{\pi^2} \zeta_1 \frac{\rho Q_1^2}{d_1^5} l_1 ; \tag{13.45}$$

$$\Delta p_2 = \frac{8}{\pi^2} \zeta_2 \frac{\rho Q_2^2}{d_2^5} l_2 . \tag{13.46}$$

Три уравнения (13.44)—(13.46) содержат четыре неизвестные Q_1, Q_2, Δp_1, Δp_2, и для решения поставленной задачи необходимо добавочное условие, связывающее либо перепады давления Δp_i, либо расходы Q_i.

В качестве такого условия примем равенство давлений в точках C_1 и C_2. Тогда $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p$. Приравняв (13.45) и (13.46), найдем отношение расходов Q_1/Q_2:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{5/2} \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{1/2} \left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right)^{1/2} . \tag{13.47}$$

В случае, когда течение на обоих участках турбулентное, отношение коэффициентов сопротивления можно представить в виде

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \frac{\mathrm{Re}_1^{1/4}}{\mathrm{Re}_2^{1/4}} = \left(\frac{c_1}{c_2}\,\frac{d_1}{d_2}\right)^{1/4} = \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^{1/4} \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{1/4} . \tag{13.48}$$

Совместное решение уравнений (13.47) и (13.48) дает

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{19/7}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{4/7}. \tag{13.49}$$

Если течение в обеих трубах ламинарное, то

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \frac{\mathrm{Re}_1}{\mathrm{Re}_2} = \frac{Q_1}{Q_2}\frac{d_2}{d_1}$$

и

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 \frac{l_2}{l_1}. \tag{13.50}$$

Использовав уравнение баланса расходов (13.44), для турбулентного течения получим

$$Q_1 = \frac{Q_0}{1 + (d_2/d_1)^{19/7}(l_1/l_2)^{4/7}}; \quad Q_2 = \frac{Q_0}{1 + (d_1/d_2)^{19/7}(l_2/l_1)^{4/7}}. \tag{13.51}$$

При ламинарном режиме

$$Q_1 = \frac{Q_0}{1 + (d_2/d_1)^4(l_1/l_2)^{4/7}}. \tag{13.52}$$

В случае, если $\zeta_1 = \zeta_2$,

$$Q_1 = \frac{Q_0}{1 + (d_2/d_1)^{3/2}(l_1/l_2)^{1/2}}. \tag{13.53}$$

Таким же способом решается задача и в случае движения жидкости по параллельным ветвям трубопроводов (схема на рис. 13.15, *б*), так как принятое выше условие равенства перепадов давлений на сравниваемых участках здесь выполняется автоматически. В результате при турбулентном течении

$$Q_i = \frac{Q_0}{1 + \left(\frac{l_i}{l_1}\right)^{\frac{4}{7}}\left(\frac{d_1}{d_i}\right)^{\frac{19}{7}} + \left(\frac{l_i}{l_2}\right)^{\frac{4}{7}}\left(\frac{d_2}{d_i}\right)^{\frac{19}{7}} + \ldots + \left(\frac{l_i}{l_{i+1}}\right)^{\frac{4}{7}}\left(\frac{d_{i+1}}{d_i}\right)^{\frac{19}{7}} + \ldots} =$$

$$= \frac{Q_0}{1 + \sum\limits_{j+1}^{n}\left(\frac{l_i}{l_j}\right)^{\frac{4}{7}}\left(\frac{d_j}{d_i}\right)^{\frac{19}{7}}}. \tag{13.54}$$

Расчет более сложных схем трубопроводов требует больших временных затрат и в настоящее время выполняется с помощью вычислительной техники по специальным программам.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое начальный участок трубы и участок стабилизированного течения?
2. Как меняется скорость в центре трубы на ее начальном участке?
3. Что такое приведенный коэффициент сопротивления?
4. Как увеличить объемный расход рабочей среды через трубу при фиксированном гидравлическом сопротивлении?
5. Как найти необходимую мощность насоса или воздуходувки при известном гидравлическом сопротивлении и известном объемном расходе рабочей среды?
6. Что такое приведенная длина трубы и максимальная приведенная длина трубы?
7. Как меняется скорость газа вдоль трубы при дозвуковой скорости в ее входном сечении?
8. Как найти максимально возможный расход газа через трубу заданных диаметра и длины?
9. Что такое местные и линейные сопротивления?
10. В чем физическая причина возникновения в поворотных коленах вторичных течений?
11. Как найти второе критическое отношение давлений при течении в трубе сжимаемой среды?
12. От каких факторов зависит коэффициент потерь энергии в насадке Борда?
13. Чему равен коэффициент сопротивления при внезапном расширении и внезапном сужении канала?
14. Как определяется коэффициент сопротивления при разделении и слиянии потоков?
15. Как можно увеличить расход жидкости через насадок с фиксированным диаметром, через который происходит слив жидкости из большого резервуара?

Глава 14
ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ДИФФУЗОРАХ

14.1. Классификация диффузоров и их геометрические параметры

Устройство, преобразующее кинетическую энергию потока в потенциальную, называют **диффузором**.

В соответствии с воздействием на поток, вызывающим его торможение, диффузоры можно классифицировать следующим образом:

а) **геометрические диффузоры**, где преобразуется энергия за счет изменения проходной площади;

б) **тепловые диффузоры**, где путем отвода теплоты от стенок канала происходит падение удельных объемов в направлении течения и возрастает давление;

в) **расходные диффузоры**, в которых эффект преобразования зависит от количества рабочего тела, отводимого вдоль оси канала;

г) **механические диффузоры**, в которых торможение потока обусловлено отбором мощности.

Первый тип диффузоров используется наиболее часто и имеет разнообразные модификации. По геометрическим параметрам они делятся: на плоские или конические; плоские криволинейные; осесимметричные криволинейные; кольцевые с прямолинейными образующими; кольцевые с криволинейными образующими; осерадиальные; радиальные; лопаточные.

Некоторые схемы указанных диффузоров и основные обозначения их геометрических параметров приведены на рис. 14.1. Каждый диффузор характеризуется вполне определенным набором безразмерных величин.

Для плоских (конических) диффузоров (рис. 14.1, *а*) такими величинами являются: угол раскрытия α, относительная длина L/H (L/D) и степень расширения $n = F_2/F_1$, связанные между собой следующими соотношениями:

для плоского диффузора

$$\frac{L}{H} = \frac{n-1}{2\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2)}; \tag{14.1}$$

для конического диффузора

$$\frac{L}{D} = \frac{\sqrt{n}-1}{2\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2)}. \tag{14.1a}$$

В данном случае независимым образом можно менять только два параметра.

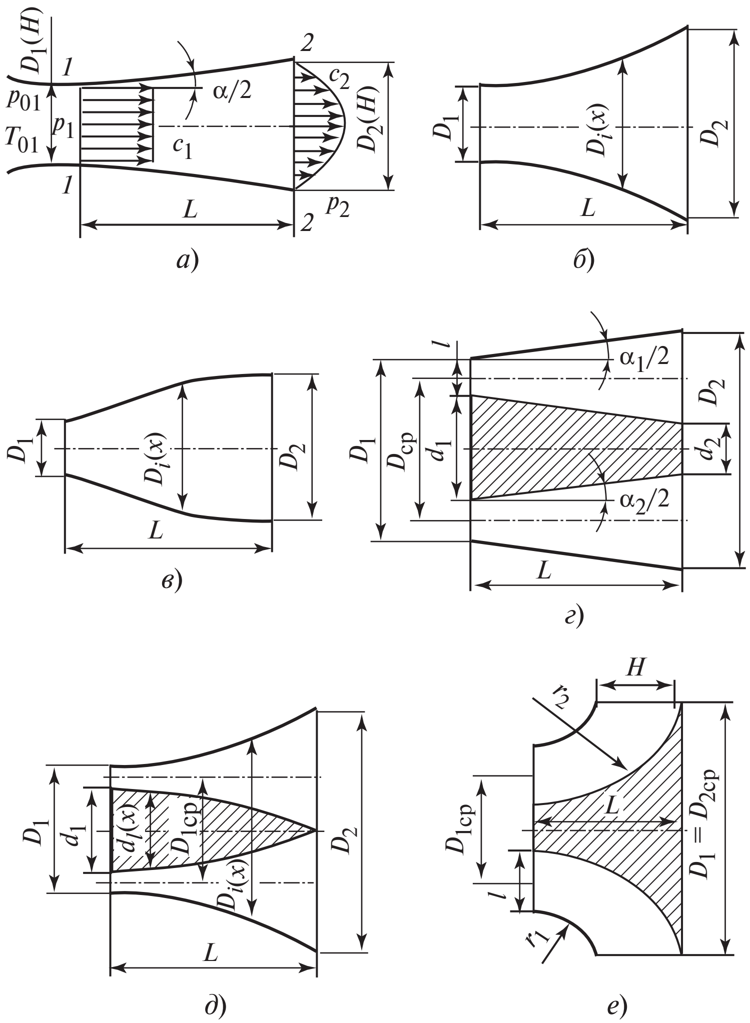


Рис. 14.1. Некоторые типы геометрических диффузоров:

а — плоский или конический диффузор; *б* — осесимметричный диффузор с криволинейными образующими; *в* — осесимметричный «бочкообразный» диффузор; *г* — кольцевой диффузор с прямолинейными образующими; *д* — кольцевой диффузор с криволинейными образующими; *е* — осерадиальный диффузор

Осесимметричные криволинейные диффузоры (рис. 14.1, *б*, *в*) характеризуются уже тремя независимыми величинами: степенью расширения $n = F_2/F_1$, относительной длиной L/D_1 и законом изменения диаметров вдоль продольной оси x: $\dfrac{D_i}{D_1} = f\left(\dfrac{x}{L}\right)$.

Для кольцевых диффузоров с прямолинейными образующими (рис. 14.1, *г*) независимыми геометрическими параметрами являются: относительная длина $L/D_{ср}$, относительная высота канала на входе $l/D_{ср}$ $\left(l = \frac{1}{2}(D_1 - d_i)\right)$ и углы раскрытия внешнего α_1 и внутреннего α_2 обводов диффузора. Остальные характеристики определяются по очевидным формулам:

$$\bar{D}_1 = \frac{D_1}{D_{ср}} = 1 + \bar{l}_1;$$

$$\bar{d}_1 = \frac{d_1}{D_{ср}} = 1 - \bar{l}_1;$$

$$\bar{D}_2 = \bar{D}_1 + 2\bar{L}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_1}{2};$$

$$\bar{d}_2 = d_1 + 2\bar{L}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_1}{2};$$

$$n = \left[1 + \frac{\bar{L}}{\bar{l}}\left(\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_1}{2} - \mathrm{tg}\,\frac{\alpha_1}{2}\right)\right]\left[1 + \bar{L}\left(\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_1}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{\alpha_2}{2}\right)\right].$$

В приведенных соотношениях углы считаются положительными, если их вершины расположены слева от входного сечения.

Кольцевые диффузоры с криволинейными образующими (рис. 14.1, *д*) и осерадиальные диффузоры (рис. 14.1, *е*) характеризуются шестью независимыми параметрами: **безразмерной высотой** на входе $\bar{l} = l/D_{1\,ср}$, **безразмерной длиной** $\bar{L} = L/D_{1\,ср}$, **безразмерной входной высотой** (шириной на рис. 14.1, *е*) $\bar{H} = H/D_{1\,ср}$, **относительным средним диаметром** на выходе $\bar{D}_{2\,ср} = D_{2\,ср}/D_{1\,ср}$ и **законами изменения текущих диаметров** $\bar{D}_1 = D_1/D_{1\,ср}$ и $\bar{d}_1 = d_i/D_{1\,ср}$. Если обводы диффузоров очерчены радиусами r_1 и r_2 (рис. 14.1, *е*), то для оценки аэродинамических характеристик такого диффузора достаточно указать следующие пять параметров:

$$n, \frac{r_2}{r_1}, \frac{L}{r_1}, \frac{D_2}{D_{1\,ср}}, \frac{l}{D_1}.$$

Первые три величины характеризуют **форму меридионального сечения**, величина $D_2/D_{1\,ср}$ определяет **«радиальность» диффузора**, и $\bar{l} = l/D_1$ характеризует его **относительный входной размер**. Комбинируя различные типы диффузоров, можно получить бесконечный ряд модификаций, но всех их объединяет общий признак — **диффузорный характер течения**.

14.2. Процесс торможения потока в диффузорах в *h*, *s*-диаграмме и их аэродинамические характеристики

Рассмотрим схему течения в коническом диффузоре, изображенном на рис. 14.2. Обозначим параметры полного торможения среды перед диффузором через p_0 и t_0. Короткий входной конфузор обеспечивает плавное ускорение потока таким образом, чтобы во входном сечении диффузора создавалось равномерное поле скоростей с параметрами p_{01}, p_1, ρ_1, t_1. В выходном сечении диффузора поле скоростей c_{2i} всегда неравномерно и может иметь очень сложную форму. Также будет переменным и поле плотностей ρ_{2i}. Однако поскольку абсолютные значения скоростей c_{2i} при степенях расширения $n > 2$ сравнительно малы, то допустимо считать плотность ρ_{2i} в выходном сечении постоянной ($\rho_{2i} = \rho_{2\text{ср}} = \rho_2$). При дозвуковых скоростях выходное давление p_2 по всему сечению также постоянно.

Процесс торможения в рассматриваемом диффузоре будет различным для различных линий тока. Условно в h, s-диаграмме он представлен на рис. 14.3. Здесь выходному профилю скорости соответствует замкнутая кривая *abdef*, проходящая в прямом и обратном направлениях вдоль изобары p_2 = const (указанные точки на изобаре p_2 = const соответствуют точкам выходного профиля на рис. 14.2).

В частном случае, если в выходном сечении имеется хотя бы одна линия тока с нулевыми потерями, профиль скорости будет располагаться на всем участке изобары от точки $2t$ до точки a. На линии тока, соответствующей точке $2t$, выходная скорость c_{2i} равна теоретической скорости c_{2t}, определяемой по располагаемому перепаду энтальпий Δh_0 ($c_{2t} = \sqrt{2\Delta h_0}$).

Кинетическая энергия на входе в диффузор определяется перепадом энтальпий $H_{01} \approx H_0$ ($c_1 = c_{1t} = \sqrt{2H_{01}}$). Если реальному профилю скорости в выходном сечении сопоставить некоторый эквивалентный по кинетической

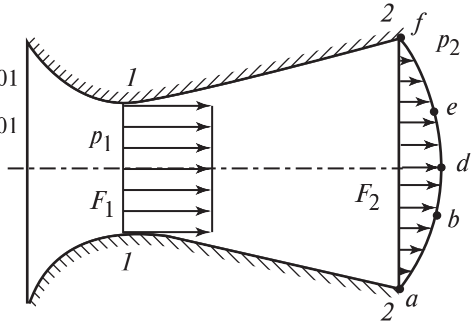


Рис. 14.2. Схема течения в коническом диффузоре

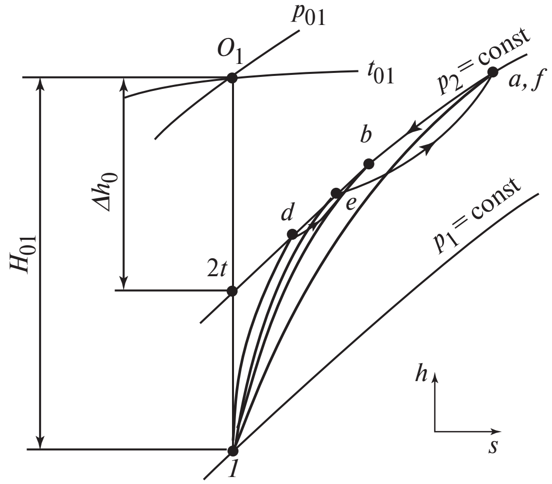


Рис. 14.3. Процесс торможения потока в диффузоре на разных линиях тока в *h*, *s*-диаграмме

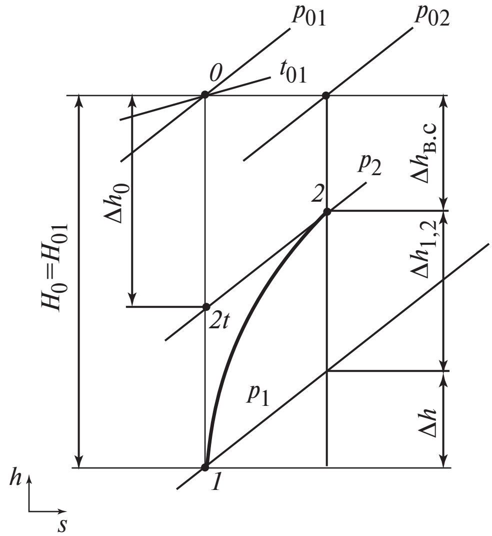


Рис. 14.4. Процесс торможения потока в диффузоре в *h*, *s*-диаграмме по осредненным параметрам

энергии равномерный профиль скорости c_2, то процесс преобразования энергии в диффузоре на h, s-диаграмме изобразится так, как показано на рис. 14.4. Здесь перепады энтальпий $\Delta h_{\text{в.с}}$, $\Delta h_{1,\,2}$, Δh соответствуют потерям энергии с выходной скоростью c_2, кинетической энергии, преобразованной в диффузоре в потенциальную, и потерям энергии внутри диффузора. Тогда баланс входной кинетической энергии запишется в виде

$$H_{01} = \Delta h_{\text{в.с}} + \Delta h_{1,\,2} + \Delta h.$$

Отсюда

$$1 = \frac{\Delta h_{\text{в.с}}}{H_{01}} + \frac{\Delta h_{1,2}}{H_{01}} + \frac{\Delta h}{H_{01}}.$$

Полученная сумма относительных величин определяет **коэффициент потерь энергии с выходной скоростью** $\zeta_{\text{в.с}} = \dfrac{\Delta h_{\text{в.с}}}{H_{01}}$, **коэффициент восстановления энергии** $\xi = \dfrac{\Delta h_{1,2}}{H_{01}}$ и **коэффициент внутренних потерь** $\zeta = \dfrac{\Delta h}{H_{01}}$.

Очевидно, что полные потери складываются из потерь с выходной скоростью и внутренних потерь. Следовательно, коэффициент полных потерь будет определяться по формуле

$$\zeta_{\text{п}}^{(1)} = \frac{\Delta h_{\text{в.с}} + \Delta h}{H_{01}} = \zeta_{\text{в.с}} + \zeta. \tag{14.2}$$

В то же время в диффузоре работа не совершается и, следовательно, вся располагаемая энергия Δh_0 полностью теряется. Тогда **коэффициент полных потерь** можно определить и в таком виде:

$$\zeta_{\text{п}}^{(2)} = \frac{\Delta h_0}{H_{01}}. \tag{14.3}$$

Зависимости (14.2) и (14.3), вообще говоря, определяют несколько разные коэффициенты. При расхождении изобар $\zeta_{\text{п}}^{(1)} < \zeta_{\text{п}}^{(2)}$. Однако при малых потерях точки *2* и *2t* (рис. 14.4) располагаются достаточно близко одна от другой, а при больших потерях Δh снижается перепад энтальпий H_{01}, и сближаются изобары p_1 = const и p_2 = const. В результате во всех случаях разница между указанными коэффициентами несущественна, и можно принять

$$\zeta_{\text{п}}^{(1)} = \zeta_{\text{п}}^{(2)} = \frac{\Delta h_0}{H_{01}} = \frac{\Delta h_{\text{в.с}} + \Delta h}{H_{01}} = \zeta_{\text{п}}.$$

В результате, баланс преобразования энергии в диффузоре в относительных величинах может быть представлен в виде суммы двух коэффициентов: $1 = \zeta_{\text{п}} + \xi$. Отсюда

$$\xi = 1 - \zeta_{\text{п}}. \tag{14.4}$$

При малых скоростях, когда сжимаемость влияет слабо, коэффициент восстановления энергии ξ совпадает с **коэффициентом восстановления давления**, который определяется по следующему выражению:

$$\xi_{\text{д}} = \frac{p_2 - p_1}{\rho c_1^2/2} = \xi.$$

В расчетах диффузоров часто используется **КПД диффузора** $\eta_д$, определяемый отношением действительного увеличения давления в диффузоре к теоретически возможному повышению давления, т.е.

$$\eta_д = \frac{p_2 - p_1}{p_{2t} - p_1} = \frac{\xi}{\xi_{ид}}. \tag{14.5}$$

Коэффициент восстановления давления в идеальном диффузоре $\xi_{ид}$ зависит только от геометрических характеристик канала, так как внутренние потери обращаются в нуль и $\zeta_п = \zeta_{в.с}$. При этом не только входное, но и выходное поле скоростей оказывается равномерным. Тогда

$$\xi_{ид} = 1 - \zeta_п^{ид} = 1 - \zeta_{в.с}^{ид}.$$

При равномерном выходном профиле скорости уравнение расхода для идеального диффузора ($\rho = \mathrm{const}$) дает

$$c_1 F_1 = \rho c_{2ид} F_2.$$

Отсюда $\dfrac{c_{2ид}}{c_1} = \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{1}{n}$. Поскольку $\zeta_{в.с}^{ид} = \dfrac{c_{2ид}^2}{c_1^2}$, то

$$\zeta_{в.с}^{ид} = \frac{1}{n^2}. \tag{14.6}$$

С учетом зависимости (14.6) получаем

$$\eta_д = \frac{\xi}{1 - 1/n^2} = \frac{1 - \zeta_п}{1 - 1/n^2}. \tag{14.7}$$

Из формулы (14.7) видно, что КПД диффузора всегда больше коэффициента полных потерь $\zeta_п$ ($\eta_д \geq \zeta_п$).

При наличии теплообмена к приведенным коэффициентам добавляется **коэффициент тепловых потерь**, определяемый по соотношению

$$\zeta_т = \frac{\Delta h_т}{H_{01}},$$

где $\Delta h_т$ — тепловые потери, равные количеству тепловой энергии, отведенной от диффузора.

14.3. Экспериментальная и расчетная оценки аэродинамических характеристик диффузоров

Коэффициенты, характеризующие эффективность преобразования энергии в диффузорах, легко могут быть выражены через введенные ранее интегральные площади вытеснения $\overline{\Delta}_2^{*}$ и потери энергии $\overline{\Delta}_2^{***}$ (см. гл. 5).

Действительно, согласно определению при равномерном входном профиле скорости ($c_{1t} = c_1$)

$$\zeta_{\text{п}} = \frac{\Delta h_0}{H_1} = \frac{c_{2t}^2}{c_1^2} = \frac{\lambda_{2t}^2}{\lambda_1^2}. \tag{14.8}$$

Приведенное отношение скоростей легко находится из уравнения расхода, записанного для сечений *1-1* и *2-2* (см. рис. 14.2) с учетом относительных площадей вытеснения:

$$m = \rho_{1t} c_{1t} F_1 \left(1 - \overline{\Delta}_1^*\right) = \rho_{2t} c_{2t} F_2 \left(1 - \overline{\Delta}_2^*\right).$$

Поскольку в рассматриваемом случае $c_{1t} = c_1$ и, следовательно, $\overline{\Delta}_1^* = 0$, то

$$\frac{c_{2t}}{c_1} = \frac{\rho_1}{\rho_{2t}} \frac{1}{n\left(1 - \overline{\Delta}_2^*\right)}. \tag{14.9}$$

Подставляя (14.9) в (14.8), получаем

$$\zeta_{\text{п}} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_{2t}}\right)^2 \frac{1}{n^2\left(1 - \overline{\Delta}_2^*\right)^2}. \tag{14.10}$$

В случае, когда в выходном сечении диффузора отсутствует потенциальное ядро, и максимальная скорость $c_{2\max}$ оказывается ниже теоретической скорости c_{2t}, относительная площадь вытеснения $\overline{\Delta}_2^*$ вычисляется по следующему соотношению:

$$\overline{\Delta}_{2\max}^* = \frac{\Pi}{F} \delta_{2\max}^*,$$

где $\delta_{2\max}^* = \int\limits_0^\delta \left(1 - \frac{\rho_i c_i}{\rho_{2\max} c_{2\max}}\right) \mathrm{d}y$; $c_{2\max}$ — максимальная скорость потока в выходном сечении.

Поскольку толщина вытеснения $\delta_{2\max}^*$, вычисленная относительно максимальной скорости $c_{2\max}$, связана с толщиной вытеснения δ_2^*, которая определяется по соотношению (5.81)

$$\overline{\Delta}_{2\max}^* = 1 - \varphi_0\left(1 - \overline{\delta}_{2\max}^*\right),$$

то в рассматриваемом случае

$$\zeta_{п} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_{2t}}\right)^2 \frac{1}{n^2\varphi_0^2\left(1 - \overline{\Delta}^*_{2\max}\right)^2}, \tag{14.11}$$

где $\varphi_0 = c_{2\max}/c_{2t}$.

При наличии потенциального ядра в потоке $c_{2\max} = c_{2t}$ и $\varphi_0 = 1$.

В результате для определения коэффициента полных потерь $\zeta_{п}$ в диффузоре при течении несжимаемой жидкости (ρ = const) достаточно знать площадь вытеснения в выходном сечении $\overline{\Delta}^*_{2\max}$.

Отношение плотностей ρ_1/ρ_{2t}, входящее в формулу (14.11), следует учитывать при $\lambda_1 > 0{,}5$. В этом случае

$$\frac{\rho_1}{\rho_{2t}} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_{2t}^2\right)^{\frac{1}{k-1}}},$$

где $\varepsilon_1 = \dfrac{p_1}{p_{01}}$ и $\varepsilon_2 = \dfrac{p_2}{p_{01}}$ — относительные давления во входном и выходном сечениях диффузора. Поскольку согласно определению коэффициента полных потерь

$$\zeta_{п} = \frac{c_{2t}^2}{c_1^2} = \frac{\lambda_{2t}^2}{\lambda_1^2} \quad \text{и} \quad \lambda_{2t}^2 = \zeta_{п}\lambda_1^2, \tag{14.12}$$

то

$$\frac{\rho_1}{\rho_{2t}} = \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\zeta_{п}\lambda_1^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{14.13}$$

Таким образом, для сжимаемой жидкости

$$\zeta_{п} = \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\zeta_{п}\lambda_1^2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{1}{n^2\varphi_0^2\left(1 - \overline{\Delta}^*_{2\max}\right)^2}. \tag{14.14}$$

Выражая безразмерные скорости λ_1 и λ_{2t} через относительные давления ε_1 и ε_2, вместо (14.12) получаем

$$\zeta_{\text{п}}^{(1)} = \frac{\lambda_{2t}^2}{\lambda_1^2} = \frac{1 - \varepsilon_2^{\frac{k-1}{k}}}{1 - \varepsilon_1^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{1 - (p_2/p_{01})^{\frac{k-1}{k}}}{1 - (p_1/p_{01})^{\frac{k-1}{k}}}. \tag{14.15}$$

Отсюда следует, что при экспериментальном определении коэффициента полных потерь энергии в диффузорах необходимо знать статическое давление p_1 и давление полного торможения p_{01} во входном сечении, а также статическое давление p_2 в выходном сечении исследуемого диффузора. Если измерение давления полного торможения перед диффузором p_{01} и определение давления за ним p_2 не вызывают трудностей и достаточно точны, то обеспечить необходимую точность экспериментальной оценки среднего статического давления во входном сечении диффузора с помощью прямых измерений весьма сложно. Наиболее распространенный способ определения этого давления с помощью дренажных измерений обеспечивает необходимую точность получаемых результатов только для диффузорных каналов с прямолинейной осью, когда во входном сечении поле скоростей имеет минимальное искажение. Однако даже при этом возможны большие погрешности, вызванные особенностями сочленения входного конфузорного участка с последующим диффузорным каналом.

Для примера на рис. 14.5 представлены канал, где сочленение входной конфузорной части с последующим диффузором обеспечивается переходной поверхностью, очерченной очень малым радиусом r, а также распределения статических давлений, измеренных с помощью дренажных отверстий вдоль стенок канала (кривая *1*) и полученных с помощью специального зонда-протяжки вдоль продольной оси x (кривая *2*). Хорошо видно, что даже в этом простейшем случае статическое давление в центре канала существенно отличается от давления, измеренного во входном сечении с помощью дренажных отверстий на стенке рассматриваемого канала. Давление в центре оказывается более высоким, чем полученное при дренажных измерениях. В результате коэффициент полных потерь энергии $\zeta_{\text{п}}$, найденный на основании дренажных измерений давления p_1, оказывается меньше действительного его значения.

Для более сложных диффузоров, в частности для кольцевых осерадиальных диффузоров, погрешность при определении коэффициента $\zeta_{\text{п}}$ по дренажным измерениям может быть недопустимо большой. Значение этой погрешности особенно сильно увеличивается с ростом безразмерной скорости λ_1

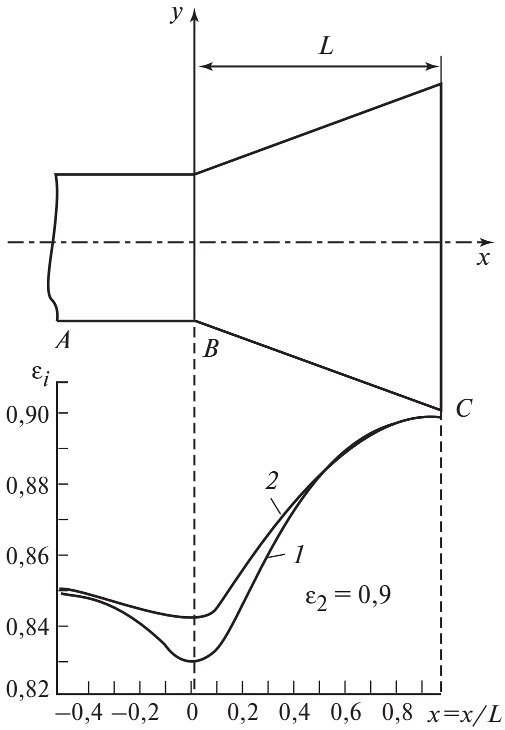


Рис. 14.5. Распределение локальных статических давлений на поверхности входного участка диффузора

во входном сечении диффузора. При $\lambda_1 > 0{,}5$ определять давление p_1 только по дренажным измерениям нельзя, последние должны быть дополнены измерениями всего поля давления в рассматриваемом сечении. Такая задача оказывается крайне сложной и требует больших материальных и временных затрат.

В этой связи более перспективным является интегральный метод оценки среднего статического давления p_1 во входном сечении, основанный на использовании расходного метода оценки указанного давления. В этом случае пневмометрические измерения дополняются измерением массового расхода рабочей среды m. Тогда при известном расходе среды m может быть найден удельный приведенный расход q_1, однозначно связанный с относительной скоростью λ_1 во входном сечении диффузора. Эта связь определяется следующим соотношением [см. (5.41)]:

$$q_1 = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_1 \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Приведенный расход q_1 представляет собой отношение измеренного расхода m к критическому расходу рабочей среды m_* через входное сечение диффузора. Поскольку

$$m_* = A\,\frac{p_{01}}{\sqrt{T_{01}}}\,F_1\mu_1\,,$$

то $q_1 = \dfrac{m\sqrt{T_{01}}}{A\mu_1 p_{01} F_1}$, где A — постоянная, для воздуха $A = 0{,}0404$ и для перегретого пара $A = 0{,}0311$; F_1 — площадь входного сечения диффузора, м^2; μ_1 — коэффициент расхода, который находится на основании специальных тарировочных опытов.

Таким образом, окончательное соотношение, позволяющее определять среднерасходную скорость λ_1, а по ней и среднее относительное давление во входном сечении диффузора $\varepsilon_1 = p_1/p_{01}$, будет иметь следующий вид:

$$\frac{m\sqrt{T_{01}}}{A\mu_1 p_{01} F_1} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\lambda_1\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\,\lambda_1^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{14.16}$$

Если сопоставить формулы (14.14) и (14.15), то по опытному значению коэффициента полных потерь $\zeta_{\text{п}}^{(1)}$ можно найти соответствующую ему относительную площадь вытеснения $\overline{\Delta}{}^*_{2\max}$ в выходном сечении исследуемого диффузора:

$$\overline{\Delta}{}^*_{2\max} = 1 - \frac{\left(1 - \dfrac{k-1}{k+1}\,\lambda_1^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}{\left(1 - \dfrac{k-1}{k+1}\,\zeta_{\text{п}}^{(1)}\lambda_1^2\right)\varphi_0 n\sqrt{\zeta_{\text{п}}^{(1)}}}\,. \tag{14.17}$$

Для несжимаемой жидкости при сохранении во входном сечении потенциального ядра ($\varphi_0 = 1$)

$$\overline{\Delta}{}^*_{2\max} = 1 - \frac{1}{n\sqrt{\zeta_{\text{п}}^{(1)}}}\,. \tag{14.18}$$

Задача опытного определения относительной площади вытеснения $\overline{\Delta}{}^*_{2\max}$ простым интегральным методом имеет важное значение при проверке теоретических методов расчета рассматриваемой величины.

Существующие в настоящее время компьютерные программы расчета сложных течений вязкой жидкости базируются на незамкнутой системе уравнений Рейнольдса. Для замыкания этой системы используются полуэмпирические формулы теории турбулентности, устанавливающие связь турбулентных напряжений с осредненными скоростями, причем используемые константы турбулентности чаще всего получены для ряда однотипных течений. Применение этих констант для течения жидкости в каналах произвольной формы может приводить к очень большим погрешностям.

В этом смысле приведенные соотношения (14.17) и (14.18) являются хорошими тестовыми формулами, позволяющими оценивать правомочность использования тех или иных расчетных программ.

По известному коэффициенту полных потерь энергии $\zeta_{п}$, найденному либо опытным путем, либо расчетным способом, легко находятся связанный с ним коэффициент восстановления энергии ξ и КПД диффузора $\eta_{д}$:

$$\xi = 1 - \zeta_{п};$$

$$\eta_{д} = \frac{\xi}{1 - 1/n^2} = \frac{1 - \zeta_{п}}{1 - 1/n^2}.$$

Значительно сложнее определить коэффициент внутренних потерь ζ, так как для этого необходимо знать поле скоростей в выходном сечении диффузора для того, чтобы правильно оценить коэффициент потерь с выходной скоростью $\zeta_{в.с}$.

В гидравлических расчетах коэффициент $\zeta_{в.с}$ оценивается по среднерасходным скоростям, и тогда расчетное соотношение совпадает с формулой (14.6), по которой ранее мы определяли значение $\zeta_{в.с}$ в случае течения идеальной жидкости. С учетом изменения плотности указанная формула примет вид

$$\zeta_{в.с} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 \frac{1}{n^2}, \tag{14.19}$$

и, следовательно, на основании (14.2) можно записать

$$\zeta = \zeta_{п} - \zeta_{в.с} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 \left(\frac{1}{\left(1 - \overline{\Delta}_2^*\right)^2} - 1\right)\frac{1}{n^2}. \tag{14.20}$$

Такой метод оценки коэффициентов $\zeta_{в.с}$ и ζ является условным, так как при неравномерном поле скоростей за диффузором действительные потери с выходной скоростью оказываются заметно большими. В результате коэффициент внутренних потерь, найденный по соотношению (14.20), автоматически включает в себя определенную долю выходных потерь, причем эта доля не является постоянной, а зависит от степени неравномерности выходного поля скоростей, что не позволяет проводить сравнение полученного таким образом коэффициента внутренних потерь энергии с найденным по теоретическим расчетам значением ζ, основанным на реальном выходном поле скоростей.

Для теоретического расчета коэффициента внутренних потерь энергии воспользуемся приведенным ранее определением, согласно которому коэффициент внутренних потерь энергии представляет собой отношение кинетической энергии Δh, потерянной в канале, к располагаемой энергии в его узком сечении:

$$\zeta = \frac{\Delta h}{H_{01}} = \frac{\Delta K_2}{K_1}.$$

Здесь ΔK_2 — кинетическая энергия, потерянная в диффузоре [см. (5.77а)]:

$$\Delta K_2 = \frac{1}{2}\,\rho_2 c_{2t}^3 F_2 \overline{\Delta}_2^{***};$$

$$K_1 = \frac{m c_1^2}{2} = \frac{\rho_2 c_{2t} F_2 \left(1 - \overline{\Delta}_2^{*}\right) c_1^2}{2}.$$

Тогда

$$\zeta = \frac{\frac{1}{2}\,\rho_2 c_{2t}^3 F_2 \overline{\Delta}_2^{***}}{\frac{1}{2}\rho_2 c_{2t}^3 F_2 \left(1 - \overline{\Delta}_2^{*}\right) c_1^2} = \frac{c_{2t}^2}{c_1^2}\,\frac{\overline{\Delta}_2^{***}}{1 - \overline{\Delta}_2^{*}}.$$

Заменяя здесь $\dfrac{c_{2t}^2}{c_1^2} = \zeta_\text{п}$ с учетом формулы (14.10), получаем

$$\zeta = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 \frac{\overline{\Delta}_2^{***}}{n^2\left(1 - \overline{\Delta}_2^{*}\right)^3}. \qquad (14.21)$$

Таким образом, если для опытного определения коэффициента полных потерь достаточно данных простых интегральных испытаний, то для получения коэффициента внутренних потерь необходимо знать все выходное поле скоростей.

Приведенные соотношения относятся к случаю очень малых потерь на входном участке диффузоров.

Если эти потери велики, то располагаемая энергия H_{01} непосредственно перед диффузором будет отличаться от теоретической H_0 на значение потерь в подводящем канале. Процесс расширения потока на входном участке с последующим торможением в диффузоре условно на h, s-диаграмме изображен линией *012* (рис. 14.6).

Введем в рассмотрение коэффициент потерь энергии на входном участке ζ_0:

$$\zeta_0 = \frac{\delta h_0}{H_0} = \frac{H_0 - H_{01}}{H_0} = 1 - \frac{c_1^2}{c_{1t}^2}.$$

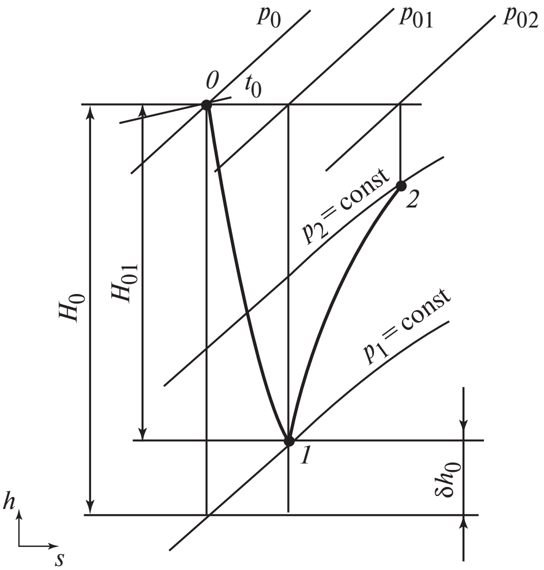


Рис. 14.6. Процесс торможения потока в диффузоре на *h*, *s*-диаграмме при наличии потерь на входном конфузорном участке

Отсюда

$$c_1^2 = (1 - \zeta_0)c_{1t}^2.$$

Величина ζ_0 может быть выражена через относительные интегральные площади $\overline{\Delta}_1^{***}$ и $\overline{\Delta}_1^{*}$ в конце входного участка.

Действительно, согласно формуле (5.77а)

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2}\,\rho_1 c_{1t}^3 F_1 \overline{\Delta}_1^{***}.$$

Располагаемую энергию для входного участка представим в виде

$$K_1 = \frac{mc_{1t}^2}{2} = \frac{\rho_1 c_{1t}^3 F_1}{2}\left(1 - \overline{\Delta}_1^{*}\right). \tag{14.22}$$

Следовательно,

$$\zeta_0 = \frac{\Delta h_0}{H_0} = \frac{\Delta k_0}{k_1} = \frac{\overline{\Delta}_1^{***}}{1 - \overline{\Delta}_1^{*}}$$

и

$$c_1^2 = \frac{1 - \overline{\Delta}_1^{*} - \overline{\Delta}_1^{***}}{1 - \overline{\Delta}_1^{*}}\, c_{1t}^2. \tag{14.23}$$

Оценивая, как и ранее, коэффициент полных потерь в виде отношения

$$\zeta_{п}^{нер} = c_{2t}^2 / c_1^2,$$

после подстановки сюда соотношения (14.23) получаем

$$\zeta_{п}^{нер} = \frac{c_{2t}^2}{c_{1t}^2} \; \frac{1 - \bar{\Delta}_1^*}{1 - \bar{\Delta}_1^* - \bar{\Delta}_1^{***}} .$$

Отношение теоретических скоростей c_{2t}/c_{1t} на входе и выходе легко находится из уравнения расхода, записанного для этих сечений в виде

$$m = \rho_1 c_{1t} F_1 \left(1 - \bar{\Delta}_1^*\right) = \rho_2 c_{2t} F_2 \left(1 - \bar{\Delta}_2^*\right).$$

Отсюда

$$\left(\frac{c_{2t}}{c_{1t}}\right)^2 = \left(\frac{\rho_{1t}}{\rho_{2t}}\right)^2 \frac{\left(1 - \bar{\Delta}_1^*\right)^2}{n^2 \left(1 - \bar{\Delta}_2^*\right)^2} . \tag{14.24}$$

Таким образом,

$$\zeta_{п}^{нер} = \left(\frac{\rho_{1t}}{\rho_{2t}}\right)^2 \frac{\left(1 - \bar{\Delta}_1^*\right)^2}{n^2 \left(1 - \bar{\Delta}_2^*\right)^2 \left(1 - \bar{\Delta}_1^* - \bar{\Delta}_1^{***}\right)} . \tag{14.25}$$

В полученной формуле интегральная площадь $\bar{\Delta}_2^*$ выражена через теоретическую скорость $c_{2t} = \sqrt{2\Delta h_0 (1 - \zeta_0)}$, а величины $\bar{\Delta}_1^*$ и $\bar{\Delta}_1^{***}$ оцениваются относительно скорости $c_{1t} = \sqrt{2H_0}$.

Для оценки коэффициента внутренних потерь при неравномерном входном поле скоростей и наличии входных потерь найдем разность ΔK между потерями для всего канала ΔK_2 и потерями на входе ΔK_1, использовав формулу (5.77а):

$$\Delta K = \Delta K_2 - \Delta K_1 = \frac{1}{2}\, \rho_2 c_{2t} F_2 \bar{\Delta}_2^{***} - \frac{1}{2}\, \rho_1 c_{1t}^3 F_1 \bar{\Delta}_1^{***} .$$

Тогда с учетом (14.22)—(14.24) будем иметь

$$\zeta^{нер} = \frac{\Delta K}{K_1 (1 - \zeta_0)} = \frac{\Delta h_2}{H_1} = \frac{\rho_2 c_{2t}^3 F_2 \bar{\Delta}_2^{***} - \rho_1 c_{1t}^3 F_1 \bar{\Delta}_1^{***}}{\rho_1 c_{1t}^3 F_1 \left(1 - \bar{\Delta}_1^*\right)(1 - \zeta_0)} =$$

$$= \frac{1 - \overline{\Delta}_1^{*}}{1 - \overline{\Delta}_1^{*} - \overline{\Delta}_1^{***}} \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 \frac{\overline{\Delta}_2^{***} \left(1 - \overline{\Delta}_1^{*} \right)^2}{n^2 \left(1 - \overline{\Delta}_2^{*} \right)^3} - \frac{\overline{\Delta}_1^{***}}{1 - \overline{\Delta}_1^{*}} \right]. \qquad (14.26)$$

В случае, если $\overline{\Delta}_1^{*} = \overline{\Delta}_1^{***} = 0$, формулы (14.25) и (14.26) автоматически переходят в соотношения (14.10) и (14.21).

14.4. Полуэмпирический метод расчета диффузоров

В основу полуэмпирического метода расчета диффузоров положена известная формула (11.46), по которой определяются потери давления в цилиндрической трубе:

$$\Delta p = \zeta_1 \frac{\rho c^2}{2} \frac{x}{D}.$$

При стабилизированном турбулентном течении жидкости в трубе коэффициент сопротивления при $\mathrm{Re}_D < 10^5$ находится по формуле Блазиуса:

$$\zeta = \frac{0{,}316}{\mathrm{Re}_D^{0{,}25}}, \qquad (14.27)$$

где $\mathrm{Re}_D = \dfrac{cD}{\nu}$ — число Рейнольдса, вычисленное по среднерасходной скорости c и диаметру трубопровода D.

Эта формула справедлива для стабилизированного течения в трубе, где нет потенциального ядра и толщина пограничного слоя δ совпадает с радиусом трубы r.

Представим конический диффузор в виде бесконечно малых цилиндрических участков длиной dx (рис. 14.7). Элементарные потери давления

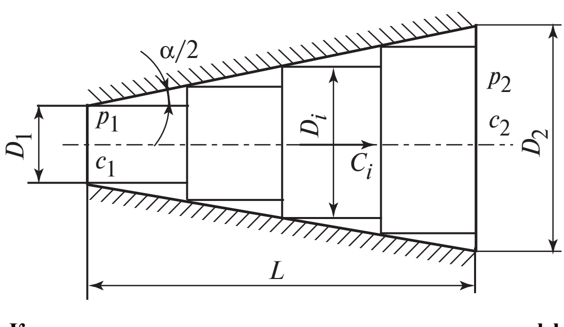


Рис. 14.7. К гидравлическому расчету потерь давления в диффузоре

на каждом из таких участков с учетом (11.46) выражаются следующим образом:

$$d(\Delta p) = \zeta_i \frac{\rho c_i^2}{2} \frac{dx}{D}. \tag{14.28}$$

Если входной диаметр диффузора D_1, а угол раскрытия α, то текущее значение D_i будет вычисляться в виде

$$D_i = D_1 + 2x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

и

$$dD_i = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} dx; \quad dx = \frac{dx}{2 \operatorname{tg} (\alpha/2)}. \tag{14.29}$$

Текущая среднерасходная скорость c_i при $\rho = \text{const}$ определяется из уравнения неразрывности

$$c_i = c_1 \frac{D_1^2}{D_i^2}. \tag{14.30}$$

Подставляя (14.29) и (14.30) в (14.28), получаем

$$d(\Delta p) = \zeta_i \frac{\rho c_i^2 \, d(D_i/D_1)}{4 \operatorname{tg} (\alpha/2)(D_i/D_1)^5}.$$

Отсюда коэффициент внутренних потерь в диффузоре

$$\zeta = \frac{\Delta p}{\rho \frac{c_1^2}{2}} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} (\alpha/2)} \int_1^{\sqrt{n}} \zeta_i \frac{d\overline{D}_i}{D_i^5}.$$

Учитывая, что коэффициент ζ_i слабо зависит от диаметра [см. (14.27)] при интегрировании его обычно принимают постоянным и определяют по числу Рейнольдса во входном сечении диффузора. Тогда после интегрирования будем иметь

$$\zeta = \frac{\zeta_i}{8 \operatorname{tg} (\alpha/2)} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{14.31}$$

Оценим потери в диффузоре при следующих условиях: $\alpha = 10°$, $\text{Re} = 10^5$, $n = 2$:

$$\zeta = \frac{0{,}316}{8 \cdot 0{,}0872 \cdot 10^{1{,}25}} (1 - 0{,}25) = 0{,}0192.$$

Опытное значение коэффициента потерь для этих же условий равно 0,042. Таким образом, расчет по формуле (14.31) дает существенную погрешность, которая резко повышается с увеличением угла α, хотя причина расхождения расчетных и опытных данных ясна и кроется в неправомерности применения формулы (14.27) на участках, где нет стабилизированного течения. Для согласования формулы (14.38) с опытными данными в гидравлике к найденным потерям на трение в расширяющихся каналах прибавляют так называемые потери на «расширение». Введение этой составляющей потерь энергии обосновывается тем, что в диффузорах происходит увеличение проходной площади, аналогично случаю внезапного расширения канала. Однако поскольку в коническом диффузоре имеет место плавное повышение проходной площади, то для них потери на «расширение» будут меньше, и это снижение потерь учитывается введением в формулу (13.40) специального коэффициента $\varphi_р$, который называется **коэффициентом «смягчения» удара**.

Таким образом, в диффузорах согласно рассматриваемой модели к потерям на трение необходимо добавить и потери на расширение. Тогда в соответствии с изложенным коэффициент потерь на расширение $\zeta_р$ должен определяться по формуле $\zeta_р = \varphi_р\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$. В результате для оценки суммарных внутренних потерь в коническом диффузоре получаем следующую формулу:

$$\zeta = \frac{\zeta_i}{8\ \mathrm{tg}\ (\alpha/2)}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \varphi_р\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2. \tag{14.32}$$

Для практических расчетов вместо формулы (14.32) используют более простую по существу экспериментальную формулу

$$\zeta = \varphi_д\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2, \tag{14.33}$$

где вместо коэффициента «смягчения» удара $\varphi_р$ используется коэффициент $\varphi_д$, куда включена поправка на потери на трение, определяемые первым слагаемым в соотношении (14.32).

Коэффициент $\varphi_д$ в основном зависит от угла раскрытия диффузора α и слабо меняется с изменением степени расширения n. Типичная опытная кривая $\varphi_д(\alpha)$показана на рис. 14.8. Приведенная зависимость построена на основании исследования серии конических диффузоров с входным цилиндрическим участком, длина которого равна двум диаметрам, при течении в них воды и числах Рейнольдса Re < 10^5 (Гибсон, 1911 г.). Другими словами, кривая на рис. 14.8 относится к вполне конкретным условиям и с этой точки зрения отражает данные сугубо частного исследования.

Однако метод оценки внутренних потерь давления в конических диффузорах по формуле (14.33) оказался настолько прост, что с течением времени зависимость $\varphi_д(\alpha)$ стала рассматриваться как некоторая универсальная зависимость, пригодная для всех конических диффузоров и всех условий их практического использования.

Такому обобщению способствовало то, что кривая на рис. 14.8 в целом правильно описывает характер изменения потерь давления в конических диффузорах. Действительно, при фиксированной степени расширения n с увеличением угла α происходит быстрое уменьшение общей длины диффузора, и потери давления в нем снижаются в связи с уменьшением потерь на трение. Соответственно снижается и коэффициент $\varphi_д$. При $\alpha = 7 \div 10°$ этот коэффициент достигает минимального значения, и далее с ростом угла α начинается его интенсивное увеличение.

Это увеличение коэффициента $\varphi_д$ прямо связано с изменением характера течения в конических диффузорах при углах раскрытия их проточной части, превышающих 10°. Если при $\alpha < 7°$ в диффузорах практически при всех степенях расширения n сохраняется безотрывное течение, то при $\alpha > 10°$ вначале происходит мелкомасштабный отрыв пограничного слоя, интенсивность которого по мере увеличения угла α непрерывно возрастает. Затем при $\alpha > 15 \div 20°$ в диффузоре возникает нестационарный отрыв потока от стенки с образованием дискретных вихревых структур, размеры которых и интенсивность по мере увеличения α непрерывно растут до угла $\alpha \approx \approx 60 \div 70°$, а область отрыва приближается к входному сечению. При $\alpha > 70°$ отрыв потока уже происходит во входном сечении диффузора, и характер течения рабочей среды в нем мало отличается от характера течения в канале с внезапным увеличением проходной площади.

Интегрально вся описанная картина отражается на численных значениях коэффициента «смягчения» удара $\varphi_д$, приведенных на рис. 14.8 и охватывающих достаточно широкий диапазон ($0{,}07 < \varphi_д < 1{,}0$). С учетом этого обстоятельства в ряде работ расчеты диффузоров произвольной формы выполняются с использованием формулы (14.33) и такого понятия, как эквивалентный диффузор. Эквивалентным считается конический диффузор, имеющий те же внутренние потери, что и рассматриваемый диффузор произвольной формы. Сложность задачи состоит в определении геометрических параметров эквивалентного диффузора. Наиболее часто эквивалентным считается кониче-

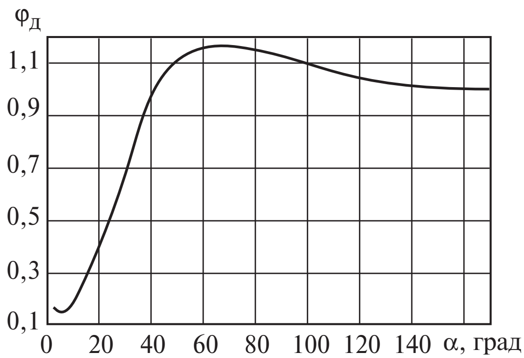


Рис. 14.8. Зависимость коэффициента «смягчения» удара от угла раскрытия конического диффузора

ский диффузор с той же степенью расширения n, теми же осевой длиной L и площадью входного сечения F_1, что и у сравниваемого с ним диффузора, т.е. согласно этому определению $n = n_{экв}$; $L = L_{экв}$; $F_1 = F_{1экв}$ (индексом «экв» обозначаются параметры эквивалентного диффузора).

Использовав приведенные условия, из уравнения (14.1) получим формулу для определения угла расширения эквивалентного диффузора:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_{экв}}{2} = \frac{(\sqrt{n}-1)D_{1\,экв}}{2L}.$$

В свою очередь, из равенства площадей входных сечений ($F_{1экв} = F_{1экв} = \pi D^2_{1\,экв}/4$) найдем, что эквивалентный диаметр входного сечения эквивалентного конического диффузора $D_{1экв} = \sqrt{\dfrac{4F_1}{\pi}}$. В результате $\alpha_{экв} = 2\operatorname{arctg}\dfrac{(\sqrt{n}-1)}{2L}\sqrt{\dfrac{4F_1}{\pi}}$.

По эквивалентному углу $\alpha_{экв}$ и кривой на рис. 14.8 определяется коэффициент $\varphi_д$, а по формуле (14.33) вычисляется коэффициент внутренних потерь ζ для диффузора произвольной формы.

14.5. Влияние режимных параметров на характеристики диффузоров

14.5.1. Влияние числа Рейнольдса

Число Рейнольдса, характеризующее соотношение между инерционными силами и силами вязкости, вычисляется обычно по характерному размеру входного сечения D_1 и входной скорости c_1. Его влияние на течение в диффузорной области достаточно сложно, так как от числа Рейнольдса зависит не только режим течения в канале, но и размеры области, где наиболее ярко проявляется действие сил вязкости (размеры пограничной области). В соответствии с этим для задач внутренней газодинамики существенным оказывается влияние числа Рейнольдса на закон изменения продольной скорости в ядре потока. Изменение этого закона решающим образом может изменить всю картину течения в диффузорной области.

Качественное влияние рассматриваемого режимного параметра на коэффициент полных потерь $\zeta_п$ иллюстрируется зависимостью, приведенной на рис. 14.9.

В зоне *I* вязкие свойства жидкости проявляются во всей области течения и рост числа Re сопровождается падением значения $\zeta_п$, вызванным выравниванием выходного поля скоростей, так как влияние вязкости начинает локализироваться в пристеночной области и потери в центральной части канала

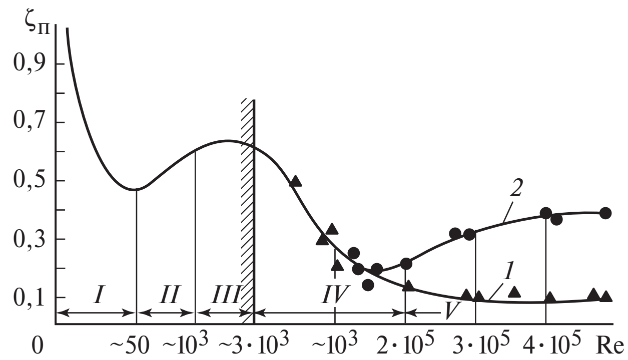


Рис. 14.9. Качественная картина влияния числа Рейнольдса на коэффициент полных потерь энергии в диффузоре:

1 — безотрывное течение; *2* — течение с отрывом пограничного слоя

стремятся к нулю. Границей зоны *I* является то число Re, при котором возникает отрыв сформировавшегося ламинарного пограничного слоя.

При идеальных входных условиях отрыв потока начинается в области выходного сечения и с ростом числа Re смещается против течения до некоторого устойчивого положения, слабо реагирующего на дальнейшее увеличение рассматриваемого параметра.

Теоретическое положение точки отрыва от числа Re не зависит, и отмеченное ее смещение связано с вторичным влиянием этого параметра, изменяющего распределение продольного градиента давления. Рост коэффициента полных потерь в зоне *II* вызван увеличением выходных потерь, так как после сечения отрыва устанавливается струйное течение, и эффективная степень расширения канала резко снижается.

В зоне *III* имеет место стабилизированный отрыв ламинарного пограничного слоя. Изменение затрагивает только структуру потока за сечением отрыва. С ростом числа Re происходит быстрое смещение зоны турбулизации оторвавшегося потока к сечению отрыва, и при достижении этого сечения происходит качественное изменение картины течения, вызванное тем, что теперь процесс турбулизации захватывает область неоторвавшегося пограничного слоя.

Турбулизация пограничного слоя увеличивает его способность преодолевать положительные градиенты давления, и, следовательно, происходит смещение по потоку сечения, где возникает отрыв потока от стенок, а при малых и умеренных углах α полностью ликвидируется отрыв. Значение $\zeta_п$ при этом резко падает (зона *IV*), и дальнейшее его изменение (зона *V*) зависит не столько от числа Рейнольдса, сколько от геометрических параметров диффузора. При $\alpha > 15°$ потери с ростом числа Re вновь возрастают, так как происходит отрыв уже турбулентного пограничного слоя, а при $\alpha < 10°$ коэффициент $\zeta_п$ несколько падает. Группа диффузоров с углами $10 < \alpha < 15°$

имеет неустойчивый характер течения, где возможно появление и первого, и второго типов течения.

Активное влияние числа Re, по-видимому, заканчивается в области, где $Re > 5 \cdot 10^5$. Эта зона называется зоной автомодельности по числу Рейнольдса. Следовательно, указанный параметр выпадает из числа определяющих. Однако его полное игнорирование в некоторых случаях приводит к ошибочным выводам. В частности, при околозвуковых скоростях на входе в диффузор роль числа Re вновь существенно возрастает, что следует помнить при анализе влияния второго режимного параметра — числа $M(\lambda)$.

14.5.2. Влияние безразмерных входных скоростей $\lambda_1(M_1)$ на аэродинамические характеристики диффузоров

Безразмерные скорости M_1 или λ_1 характеризуют влияние сжимаемости на процесс развития течения в диффузорном канале. Если рассматривать зависимости коэффициентов потерь $\zeta_п$ и ζ от указанных величин, то согласно формулам (14.10) и (14.20) эта зависимость проявляется в изменении отношения плотностей ρ_1/ρ_2, интегральных относительных площадей вытеснения $\bar{\Delta}_2^*$ и потери энергии Δ_2^{***}. Влияние числа M_1 на них сказывается в основном косвенным образом, так как при увеличении чисел M_1 существенно меняется продольный градиент давления вблизи обтекаемой стенки. Для примера на рис. 14.10 показаны распределения относительных скоростей $M_i/M_1 = f(x)$ в области входного сечения плоского диффузора при различных значениях M_1, полученные на основе дренажных измерений давлений вдоль его стенки.

Основной особенностью приведенного распределения является резкое увеличение продольных градиентов скорости и давления вблизи входного сечения, причем с увеличением числа M_1 повышается не только аэродинамическая диффузорность в расширяющейся части канала, но и конфузорность в его суживающейся части.

Отметим, что в данном случае имеются в виду не средние градиенты скорости, определяемые проходными сечениями канала, а локальные их значения

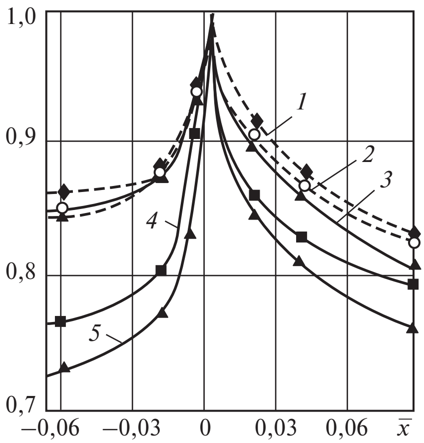


Рис. 14.10. Характер изменения относительной скорости M_i/M_1 вдоль входного контура плоского диффузора при различных значениях M_1 в точке перехода плоскопараллельного канала к диффузору:

1 — $M_1 = 0{,}4$; *2* — $M_1 = 0{,}62$; *3* — $M_1 = 0{,}7$; *4* — $M_1 = 0{,}8$; *5* — $M_1 = 0{,}94$

вблизи стенки. В осесимметричных каналах скорости за пределами пограничного слоя в поперечном сечении (в ядре потока) не меняются. Однако в области большой кривизны локальные скорости около стенки могут заметно превышать скорости в центре потока. При сопряжении конфузорного или цилиндрического участка с диффузором в минимальном сечении канала неизбежно реализуется именно такая ситуация. Более того, часто в результате указанного сопряжения возникает излом (угловая точка в меридиональном сечении).

В окрестности угловой точки согласно теории идеальной жидкости скорость терпит разрыв непрерывности. Вязкость потока сглаживает этот разрыв, если угловой излом небольшой и жидкость несжимаемая. В противном случае происходит нарушение картины течения и возникает отрыв, ликвидирующий «избыточные» градиенты скорости в окрестности минимального сечения.

При анализе влияния сжимаемости на аэродинамические коэффициенты диффузоров необходимо в первую очередь иметь в виду возможные структурные изменения, происходящие вблизи входного сечения с ростом безразмерных скоростей.

Как уже отмечалось, с увеличением числа M_1 происходит обострение локальных продольных градиентов давления именно в области минимального сечения, и существует вполне определенный предел этого обострения, после которого возникает отрыв потока. Непосредственно во входном сечении и далее в канале имеет место струйное течение. Следовательно, с ростом скоростей в диффузорах можно ожидать кризисного увеличения полных потерь и падения их эффективности. Именно такое явление часто фиксируется на практике. Типичные зависимости коэффициента полных потерь от числа λ_1 при фиксированных числах Рейнольдса приведены на рис. 14.11. Вначале рост скорости λ_1 приводит к заметному снижению потерь, а затем имеет место их резкое (кризисное) увеличение. Область кризисных чисел λ_1

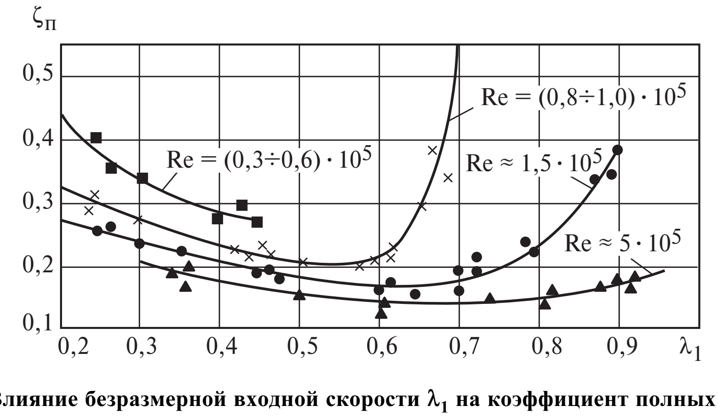


Рис. 14.11. Влияние безразмерной входной скорости λ_1 на коэффициент полных потерь энергии в диффузоре при Re=const

при фиксированном угле α существенно зависит от числа Рейнольдса. Чем выше число Re, тем дальше по λ_1 отодвигается зона кризисного увеличения потерь. Связь отмеченного явления с числом Рейнольдса указывает, что при больших скоростях происходят серьезные структурные изменения в пределах пограничного слоя, причем область этих изменений располагается там, где осуществляется наибольшее изменение продольного градиента скорости, т.е. в области входного сечения.

Экспериментальные исследования полностью подтверждают вышеизложенное. На рис. 14.12 приведены профили скорости в пределах пограничного слоя, полученные для области в непосредственной близости от входного сечения диффузора при различных значениях безразмерной скорости λ_1.

Вначале повышение скорости λ_1 приводит к очевидной деформации исходного профиля скорости, увеличивая его полноту. Однако в дальнейшем степень полноты профиля скорости резко уменьшается, несмотря на продолжающийся рост локальной конфузорности во входной части рассматриваемого канала. Полученная зависимость $\lambda_1 = f(y/\delta)$ характерна для ламинарного профиля скорости.

Таким образом, с приближением к скорости звука в турбулентном пограничном слое входного участка диффузора происходит так называемая **лами-**

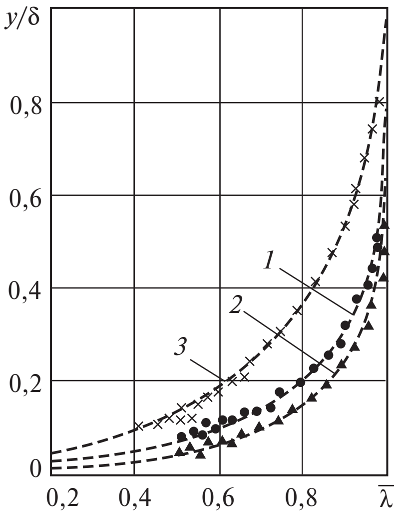


Рис. 14.12. Влияние безразмерной скорости λ_1 во входном сечении диффузора на форму входного профиля скорости [Re = (2,1÷3,7) · 10^5]:

1 — λ_1 = 0,48; *2* — λ_1 = 0,65; *3* — λ_1 = = 0,81

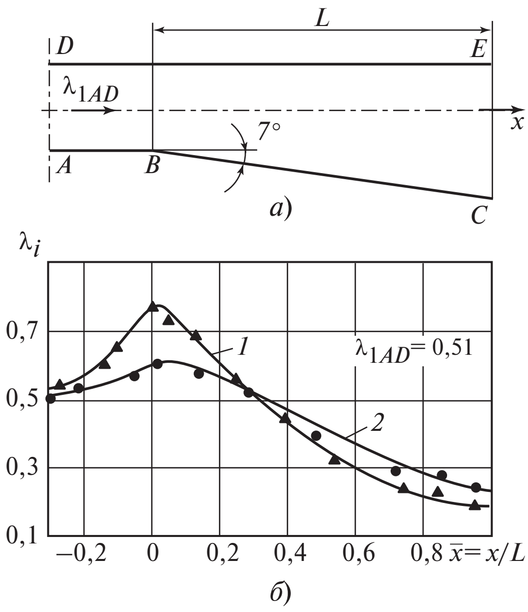


Рис. 14.13. Схема плоского диффузорного канала (*а*) и распределение безразмерных скоростей λ_i вдоль стенок канала (*б*):

1 — на стенке *ABC*; *2* — на стенке *DE*

наризация потока [2, 3]. В ее основе лежит резкое увеличение локальной конфузорности с приближением рабочей среды к входному сечению диффузора, что и подавляет механизм турбулентного переноса жидкости в поперечном направлении. В результате происходит отмеченное снижение полноты профиля скорости в пристеночной области течения.

Механизм «обратного перехода» наиболее ярко проявляется при значительном отклонении локальных градиентов скорости от их среднего значения. Максимальное отклонение этих величин, как уже отмечалось, имеет место в области угловых точек. На рис. 14.13 показано, насколько относительная местная скорость λ_i на внешней границе пограничного слоя в области угловой точки (стенки ABC) отличается от скорости вдоль стенки DE, где нет угловых точек. Видно, что уже при средних скоростях на входе в рассматриваемый канал $\lambda_{1AD} \approx 0{,}61$ локальные максимальные скорости в области угловой точки достигают значения $\lambda_B = 0{,}745$. При этом, естественно, резко возрастают и локальные градиенты скорости как в подводящей конфузорной части канала, так и в расширяющейся диффузорной части.

В результате совместного влияния повышенной локальной диффузорности и отмеченной выше ламинаризации пограничного слоя происходит отрыв потока сразу за входным сечением диффузора, вызывающий отмеченное кризисное увеличение полных потерь.

С ростом числа Рейнольдса для ламинаризации пограничного слоя требуются и более высокие продольные градиенты скорости. «Ламинаризация» потока, обусловленная структурными изменениями в пограничном слое при больших скоростях, предшествует возникновению отрыва потока непосредственно на входном участке диффузора. Чем позднее наступают эти изменения, тем дальше по числу $\lambda_{1\text{ср}}$ затягивается кризисное увеличение полных потерь энергии в диффузоре. В результате при очень высоких числах Рейнольдса имеет место бескризисный переход через звуковую скорость. Этому способствует и плавный переход от конфузорной к диффузорной части канала, когда обеспечивается сближение локальных и средних градиентов давления и скорости.

14.6. Влияние геометрических параметров на характеристики диффузоров

14.6.1. Влияние угла раскрытия α

Угол раскрытия плоского или конического диффузора α является основным геометрическим параметром, определяющим характер течения потока в рассматриваемом канале.

Анализ влияния угла α на коэффициенты потерь можно вести либо при постоянной относительной длине: $\overline{L}$ = const, либо при постоянной степени расширения: n = const. В первом случае увеличение угла сопровождается ростом степени расширения, а во втором — сокращением длины L. По-видимому, целесообразно рассматривать влияние угла α при постоянной степени расширения n = const, так как именно эта величина определяет основную долю потерь в диффузорах — потерю с выходной скоростью — и входит в качестве основного параметра в зависимости (14.10), (14.21), по которым находятся коэффициенты полных и внутренних потерь.

Опытная зависимость $\zeta_п = f(\alpha, n)$, приведенная на рис. 14.14, показывает, что вначале с ростом угла α потери несколько падают, а затем возрастают почти по линейному закону.

Если при $\alpha < 15°$ рассматриваемые зависимости расслаиваются по степени расширения n, то при $\alpha > 15°$ все кривые сливаются, образуя одну общую. Этот факт достаточно красноречиво свидетельствует об отрывном характере течения, причем сечение отрыва находится внутри диффузора и его положение определяется только углом α. Действительно, поскольку полные потери представляют собой сумму внутренних потерь и потерь с выходной скоростью, то сечение отрыва является по существу расчетным сечением для оценки потерь с выходной скоростью, так как за ним повышение давления практически отсутствует и вся кинетическая энергия потока теряется. Отсюда при фиксированном положении сечения, где происходит отрыв потока от стенки, изменение геометрической степени расширения диффузора не сказывается на величине $\zeta_п$.

На первый взгляд логично объяснить возникновение отрыва потока при увеличении угла α с общих позиций пограничного слоя, используя в качестве критерия отрыва потока параметр Бури $\Gamma = \dfrac{\frac{dc}{dx}\delta^{**}}{c_1 \mathrm{Re}^{**m}}$, так как с ростом α при n = const повышаются как продольный градиент скорости dc/dx, так и толщина потери импульса δ^{**}. В результате параметр Бури Γ быстро достигает предельного значения, и зона отрыва перемещается против течения к входному сечению диффузора. Можно, однако, показать, что параметр

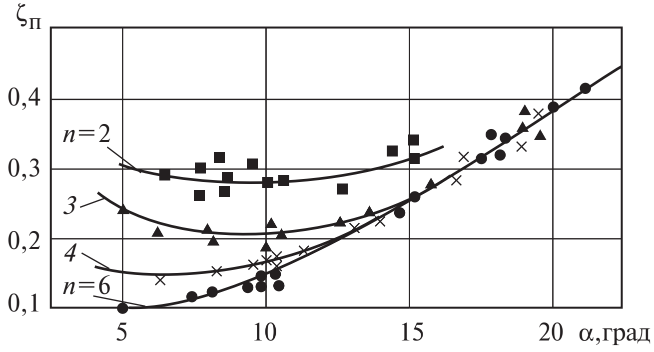


Рис. 14.14. Влияние угла раскрытия конического диффузора на коэффициент полных потерь энергии $\zeta_п$ при постоянных степенях расширения (n = const)

Бури вообще не зависит от угла раскрытия α,. Действительно, параметр Г определяется зависимостью:

$$\Gamma = \frac{\delta^{**}\dfrac{\mathrm{d}\bar{c}_i}{\mathrm{d}\bar{x}}}{\bar{c}_i}\ .$$

Здесь безразмерная скорость $\bar{c}_i(\bar{x})$ и ее производная определяются только степенью расширения диффузора n и не меняются при изменении угла α. Физически это означает, что при n = const и увеличении угла α возрастающий продольный градиент скорости полностью компенсируется падением толщины потери импульса за счет уменьшения длины канала L.

Таким образом, при объяснении решающего влияния угла α на потери в диффузорах следует рассматривать не средние продольные градиенты скорости, а отмеченные выше максимальные возмущения, вносимые угловым изломом при переходе от цилиндрической подводящей части канала к коническому диффузору. Ликвидируя угловые точки, сглаживая переход к диффузорной части канала, появляется возможность повысить коэффициент восстановления энергии в коротких широкоугольных диффузорах.

Для примера можно указать на так называемые изоградиентные диффузоры, т.е. диффузоры, где вдоль оси сохраняется неизменным положительный градиент давления. С точки зрения безотрывности течения такая форма нерациональна, так как основное расширение перенесено к выходному сечению в область развитого пограничного слоя. Однако входные возмущения здесь сведены к минимуму, и локальные градиенты давления практически совпадают со средними, которые и определяют характер течения в последующей части диффузорного канала.

При значительных степенях расширения в изоградиентных диффузорах отрыв неизбежен, но положение зоны отрыва однозначно определяется законом развития пограничного слоя. Плавность профиля, образующего канал, исключает возможность струйного отрыва, и во всех случаях эффективная степень расширения такого канала превышает единицу, в результате чего обеспечивается определенный диффузорный эффект.

Рассмотренный механизм влияния угла раскрытия диффузора α на его аэродинамические характеристики определяет и уровень статических и динамических нагрузок, действующих со стороны потока на стенки диффузорных каналов.

Поскольку именно динамические нагрузки в большинстве случаев являются причиной разрушения многих диффузорных устройств, в том числе и диффузоров, используемых в турбомашинах, остановимся на этом вопросе более подробно.

14.6.2. Влияние угла раскрытия плоских диффузоров на статические и динамические нагрузки, действующие на их стенки

Особенность силового воздействия рабочих сред на стенки диффузоров состоит в том, что давление внутри диффузоров, обладающих диффузорным эффектом, всегда ниже давления внешней среды, причем чем выше восстановительная способность диффузора, тем бо́льше разность между внутренним и внешним давлениями и соответственно большие усилия испытывают внешние обводы диффузоров. В ряде случаев эти нагрузки могут быть очень высокими. Так, например, нагрузка на внешний обвод кольцевого диффузора газовой турбины при площади его поверхности $F = 25$ м^2 и разности между внешним и внутренним давлениями $\Delta p = 10$ кПа составляет 25 т.

Кроме того, все диффузорные течения характеризуются высоким уровнем пульсации давления, вызывающих при определенных условиях исключительно большие динамические нагрузки, действующие на обтекаемые поверхности диффузоров.

Результаты прямых измерений как статических, так и динамических нагрузок наглядно подтверждают изложенное*. На рис. 14.15 показано, как меняется относительный момент $\overline{M}$, действующий на поворотные стенки плоского диффузора, с увеличением угла раскрытия его проточной части (здесь все измеренные моменты M отнесены к максимальному моменту $M_{\max}$).

При увеличении угла α до 7° происходит интенсивное повышение момента, который при $\alpha = 7°$ достигает максимального значения. Затем этот момент резко снижается. При $\alpha = 20°$ $\overline{M} = 0{,}4$, т.е. усилие, действующее на стенку, падает, а следовательно, снижается и момент относительно максимального значения на 60 %, что указывает на существенное падение диффузорного эффекта при $\alpha > 7°$.

Рассмотренная интегральная картина взаимодействия движущейся в диффузорном канале среды с его стенками дополняется осциллограммами пульса-

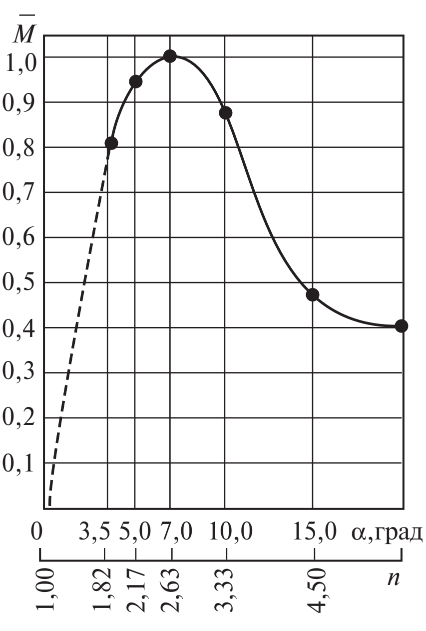


Рис. 14.15. Влияние угла раскрытия α плоского диффузора на относительный момент, действующий на поворотную стенку диффузора

* В этом параграфе используются данные опытов А.Н. Парамонова и В.В. Носкова.

ций давления, полученными в различных сечениях, расположенных вдоль продольной оси диффузора с углом раскрытия $\alpha = 15°$ (рис. 14.16).

Приведенные осциллограммы показывают, что наибольшие пульсации давления имеют место непосредственно в области перехода от конфузор-

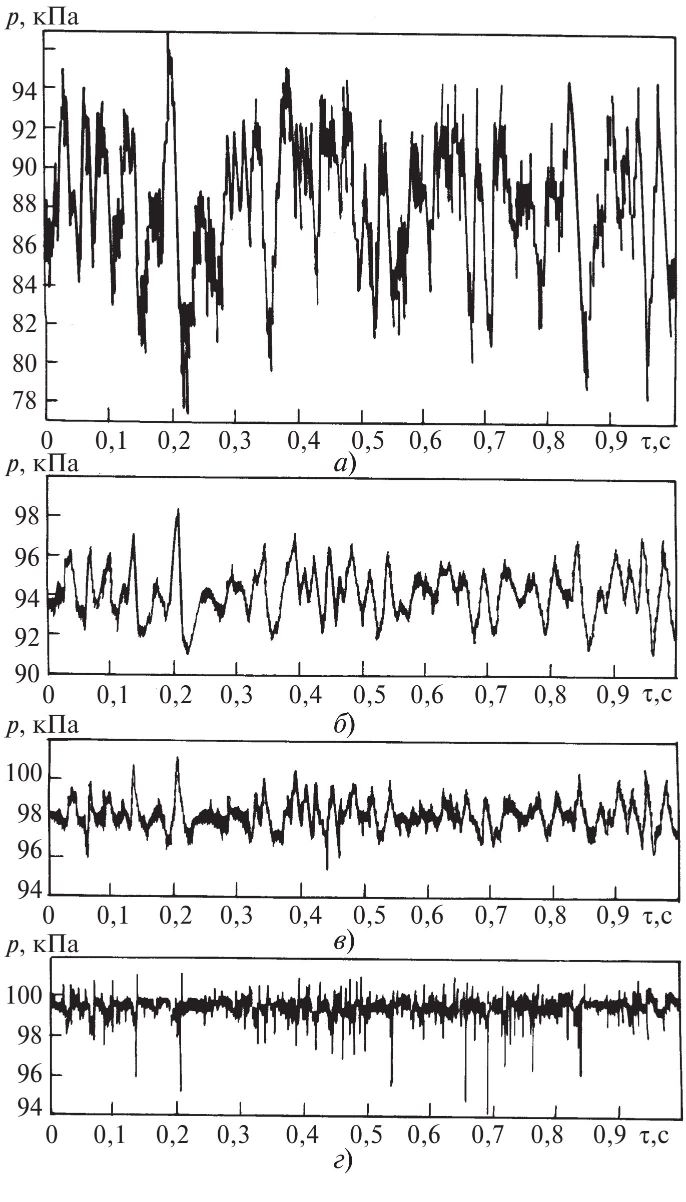


Рис. 14.16. Осциллограммы пульсаций давления на расстоянии $\bar{x} = x/L$ от входа диффузора (L — общая длина диффузоров):

а — $\bar{x} = 0$; *б* — $\bar{x} = 0{,}1$; *в* — $\bar{x} = 0{,}325$; *г* — $\bar{x} = 0{,}875$

ного канала к диффузорному. В самом диффузоре вдоль его продольной оси эти пульсации затухают, и их амплитуда приближается к постоянному значению, которое растет по мере увеличения угла α.

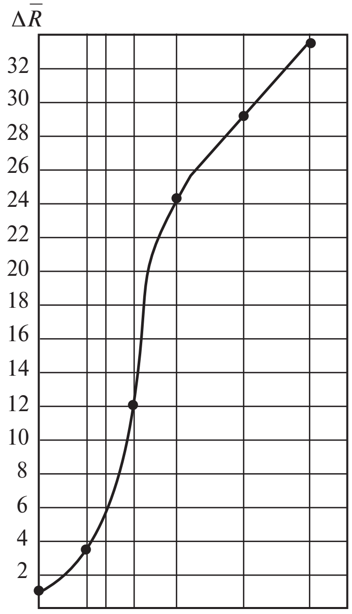
Спектральный анализ осциллограмм свидетельствует о развитии в диффузорах низкочастотных пульсаций с максимальными амплитудами при частотах 10—15 Гц.

Полученные результаты в научном плане представляют большой интерес, так как наглядно свидетельствуют о той кризисной перестройке структуры потока при переходе от конфузорного или безградиентного течения к диффузорному, которая была рассмотрена ранее (см. п. 14.5.2).

При переходе от конфузорного к диффузорному течению при малых углах раскрытия диффузора ($\alpha < 10°$) происходит бурная турбулизация пограничного слоя, а при $\alpha > 15°$ турбулизация потока сопровождается локальным нестационарным его отрывом непосредственно во входном сечении диффузора, что наглядно подтверждается приведенными на рис. 14.16 осциллограммами пульсаций давления, где именно во входном сечении диффузора фиксируется наиболее высокий уровень этих пульсаций.

Высокий уровень низкочастотных пульсаций давления в диффузорах ведет в конечном счете к большим динамическим нагрузкам, действующим на стенки канала, и является причиной вибрации всего диффузора.

На рис. 14.17 приведена зависимость относительной динамической нагрузки, действующей на поворотную стенку (пластину) плоского диффузора, от угла α. Здесь динамическая составляющая силы $\Delta\overline{R}$ при различных



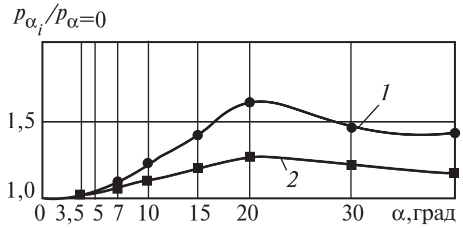


Рис. 14.18. Влияние угла раскрытия плоского диффузора на излучаемое им относительное акустическое давление при M_1 = 0,523:

1 — диффузор с гладкими стенками; *2* — диффузор с продольным клиновидным оребрением

←
Рис. 14.17. Зависимость относительной динамической нагрузки, действующей на стенку плоского диффузора, от его угла раскрытия α

углах α отнесена к этой же величине, полученной в плоскопараллельном канале. Как следует из приведенного графика, при увеличении угла раскрытия диффузора до 20° динамическая составляющая измеренной силы повышается в 34 раза. Этот рост динамических нагрузок вызывает и очень большое увеличение виброускорений, измеренных в среднем сечении диффузора, причем с ростом угла α до 10° виброускорения по сравнению с таковыми для плоскопараллельного канала повышаются всего на 40 %, а далее при увеличении угла α до 20° происходит кризисное увеличение виброускорений в 6,5 раз по сравнению с базовым значением. При $\alpha > 20°$, когда в диффузорном канале произошла стабилизация отрывного течения потока, виброускорения снижаются, и их относительное значение при $\alpha = 40°$ превышает базовое в 4 раза.

Аналогичная картина была получена и при измерении акустического давления, излучаемого исследуемыми диффузорами. Относительное акустическое давление с увеличением угла α до 20° повышается примерно на 60 % относительно аналогичной величины, полученной для плоскопараллельного канала (рис. 14.18).

Проведенное комплексное исследование плоских диффузоров показало, что практически все их характеристики наиболее интенсивно ухудшаются при увеличении углов раскрытия α от 10 до 20°, а затем в области стабилизации течения эти характеристики несколько улучшаются, но вибрации, пульсации давления и акустическое давление остаются на очень высоком уровне.

Отсюда следует, что как с экономической точки зрения, так и по условиям динамической надежности и экологической безопасности применение диффузоров с углами раскрытия $\alpha > 7°$ нецелесообразно.

Введенное ограничение по углам раскрытия диффузоров в соответствии с чисто конструктивными особенностями резко ограничивает значения степени расширения n, от которой зависит эффективность преобразования кинетической энергии в потенциальную. Следовательно, со всей очевидностью вытекает необходимость поиска решений, способных расширить диапазон допустимых значений углов α при минимальных ухудшениях основных технико-экономических показателей диффузоров (см. § 14.7).

14.6.3. Влияние степени расширения диффузоров

Изменение степени расширения диффузора можно производить как при постоянном угле α, так и при постоянной относительной длине $\overline{L}$. При $\alpha = \text{const}$ остаются неизменными входные условия и увеличение степени расширения сопровождается ростом длины диффузора $\overline{L}$.

Легко видеть, что в этом случае происходит нарастание толщины пограничного слоя и в некотором сечении канала возникает отрыв потока от стенок. Чем больше исходный угол α, тем ближе к входному сечению появляется отрыв. Это хорошо подтверждается опытными данными.

На рис. 14.19 изображена кривая, выделяющая геометрические параметры безотрывных диффузоров. Область ниже приведенной кривой соответствует безотрывному течению. Если параметры диффузора попадают в зону над кривой, то наиболее вероятен отрывной характер течения. Хорошо видны уменьшение предельной степени расширения с ростом угла α и асимптотическое увеличение ее с уменьшением этого угла. Согласно приведенной зависимости при $\alpha < 8°$ течение оказывается безотрывным при любой степени расширения n.

Зависимости коэффициента полных потерь от величины n, приведенные на рис. 14.20, показывают, что с ростом степени расширения диффузора n при малых углах α имеет место асимптотическое снижение потерь, вызванное в основном уменьшением потерь с выходной скоростью. Рост внутренних потерь здесь оказывается небольшим и не отражается на монотонности рассматриваемых зависимостей.

С увеличением угла α в соответствии с данными рис. 14.20 при некотором значении параметра n происходит отрыв потока, и дальнейшее расшире-

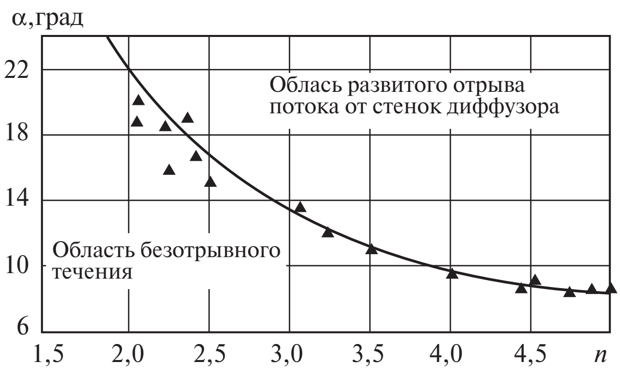


Рис. 14.19. Зависимость предельных углов раскрытия конических диффузоров, при которых можно зафиксировать безотрывное течение, от степени расширения *n*

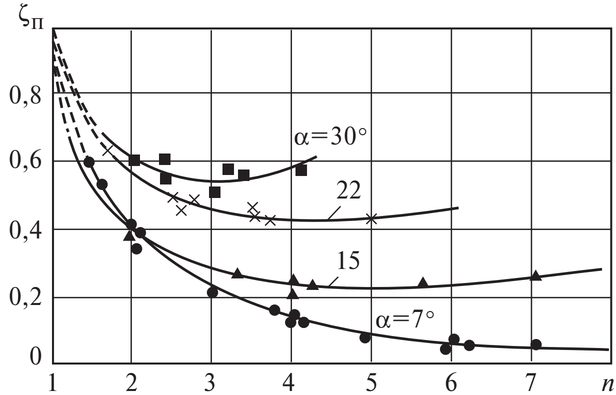


Рис. 14.20. Влияние степени расширения *n* конического диффузора на коэффициент полных потерь энергии при α = const

ние канала не приводит к уменьшению выходных потерь. Более того, эти потери в связи с растущей неравномерностью выходного поля скоростей могут даже увеличиваться. Растут также и внутренние потери, связанные с диссипацией энергии в отрывных зонах. В результате для диффузоров этой группы можно говорить об оптимальной степени расширения, соответствующей минимуму полных потерь.

Чем больше угол α, тем меньше оптимальное значение параметра n и выше минимальный уровень потерь. Следует, однако, отметить, что минимум на приведенных кривых выражен сравнительно слабо, так как за сечением отрыва вся энергия потока в основном теряется и ее значение почти не меняется с изменением величины n.

Отчетливо виден оптимум степени расширения, если опыты проводятся при $\bar{L}$ = const, когда изменение величины n осуществляется путем изменения угла α, т.е. путем изменения входных условий.

Качественно рассмотренные зависимости сохраняются и для более сложных диффузорных каналов.

14.7. Методы повышения эффективности диффузорных каналов

Рассмотрим зависимости коэффициента полных потерь $\zeta_п$ от степени расширения n для каналов с внезапным расширением и конического диффузора с углом раскрытия $\alpha = 7°$ (рис. 14.21). Кривые на рис. 14.21 относятся к двум предельным случаям торможения потока: торможению при струйном течении (кривая *1*) и торможению при безотрывном течении (кривая *2*). Характеристики геометрических диффузоров основной группы соответствуют области между этими кривыми. Чем меньше длина диффузора, тем ближе его характеристики к кривой *1*, и, следовательно, задача повышения

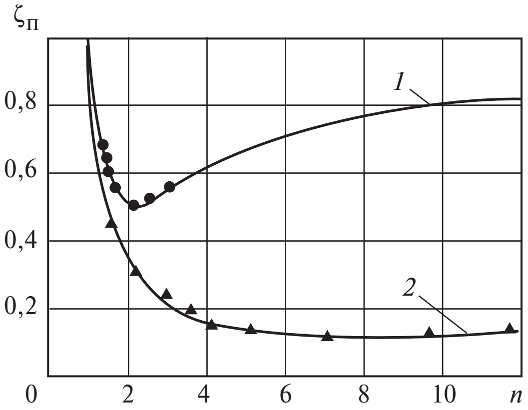


Рис. 14.21. Зависимости $\zeta_п = f(n)$ для канала с внезапным расширением (кривая *1*) и для диффузора с углом раскрытиям $\alpha = 7°$ (кривая *2*)

эффективности касается в первую очередь коротких диффузоров с большими степенями расширения.

Как уже отмечалось, для эффективного торможения потока необходимо обеспечить безотрывность течения по всей длине канала, что может быть достигнуто за счет внешних воздействий различного рода. Разделим эти воздействия на геометрические и аэродинамические, имея в виду определенную условность такого деления. На рис. 14.22 показаны возможные схемы управления течением в диффузорных каналах.

Наиболее очевидным является способ, основанный на соответствующем профилировании стенки канала, обеспечивающем безотрывный характер течения на значительной длине. В теоретическом плане здесь интересна схема, где вначале канал имеет резкое расширение, а затем интенсивность увеличения площади падает по ходу потока. Такая форма канала обеспечивает основное торможение потока в области тонкого пограничного слоя с последующим снижением продольного градиента давления. На большей части диффузора пограничный слой в этом случае находится в предотрывном состоянии, и различные случайные возмущения вызывают его отрыв от стенок канала.

В этой связи целесообразно использовать радиусные и изоградиентные диффузоры, которые обеспечивают высокую устойчивость течения по отношению к внешним возмущениям, но смещение максимального расширения канала в области развитого пограничного слоя неизбежно приводит к отрыву потока при минимальных значениях критериев, определяющих положение сечения отрыва.

Сочетание преимуществ каналов первой и второй форм дает возможность эффективно использовать естественные возможности торможения потока (рис. 14.22, *а*). При этом необходимо точку перегиба образующей канала (точку *а*) расположить до сечения отрыва потока на радиусной части рассматриваемого диффузора. Другими словами, его радиусная часть должна кончаться раньше, чем может произойти отрыв потока.

Для плоских диффузоров большой эффект может быть достигнут в результате использования внутренних разделительных ребер, обеспечивающих

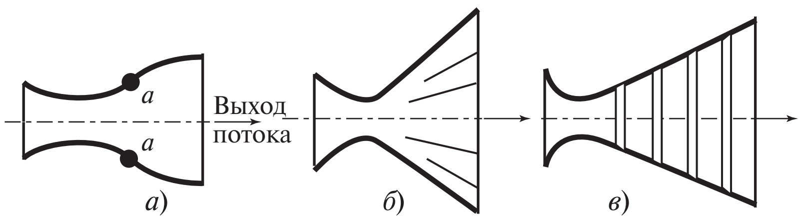


Рис. 14.22. Возможные схемы геометрического воздействия на характер течения в осесимметричных диффузорах:

а — колокольный диффузор; *б* — диффузор с раздельными ребрами; *в* — диффузор с внутренними поперечными канавками последовательное отклонение потока в направлении внешних стенок канала (рис. 14.22, *б*).

Такой метод активного воздействия на поток эффективен и в случае осесимметричных диффузоров. Однако трудно выполнить и надежно укрепить кольцевые секции внутри исходного канала. Добавочные поверхности, введенные в поток, естественно приводят к увеличению внутренних потерь, но, устанавливая их по отношению друг к другу под углом, не превышающим 7—8°, удается полностью ликвидировать отрыв не только при малых и умеренных степенях расширения, но и при больших значениях этого параметра. В результате за счет резкого снижения потерь с выходной скоростью, несмотря на некоторое увеличение внутренних потерь, коэффициент полных потерь всей сложной диффузорной системы заметно падает по сравнению с этим параметром для исходного диффузора. Сильное поперечное отклонение потока достигается здесь за счет чисто механического воздействия на него отклоняющих ребер.

Тот же эффект может быть получен в результате искусственного стимулирования поперечного переноса массы. В частности, увеличенная турбулизация потока перед диффузором способствует смещению сечения отрыва вниз по потоку и вызывает соответствующее снижение потерь.

Добиться поперечного переноса массы можно и путем искусственной серии микроотрывов с поверхности канала. В определенных диапазонах углов, скоростей и чисел Рейнольдса хорошие результаты по уменьшению полных потерь были достигнуты в диффузоре с поперечными канавками, образующими своеобразное пристеночное оребрение (рис. 14.22, *в*).

Наиболее эффективно указанное оребрение стенок меняет характер течения в случае развитого отрыва потока при условии, что первая поперечная канавка располагается до сечения отрыва. В некоторых случаях для поперечного отклонения потока в направлении стенок диффузорного канала в его центральную часть помещают добавочное сопротивление в виде перфорированных дисков или проволочных пучков и др. Конечный результат в этом случае зависит от значения добавочного сопротивления, вносимого в поток.

Схемы аэродинамического воздействия на поток в коротких диффузорах показаны на рис. 14.23. Наиболее эффективным является отсос пограничного слоя (рис. 14.23, *а*), препятствующий возникновению отрыва потока. Существует много схем организации отсоса. Наиболее часто используется щелевой отсос с расположением щели отсоса перед сечением отрыва. Более эффективен отсос потока через перфорированные стенки. В этом случае помимо удаления заторможенной жидкости на основное течение накладывается поперечный градиент давления, обеспечивающий отклонение линий тока к стенкам канала (рис. 14.23, *б*).

Зависимость величины $\zeta_п$ от интенсивности отсоса $\overline{q} = \dfrac{G_{отс}}{G}$, где $G_{отс}$ — расход отсасываемой жидкости; G — общий ее расход, показывает

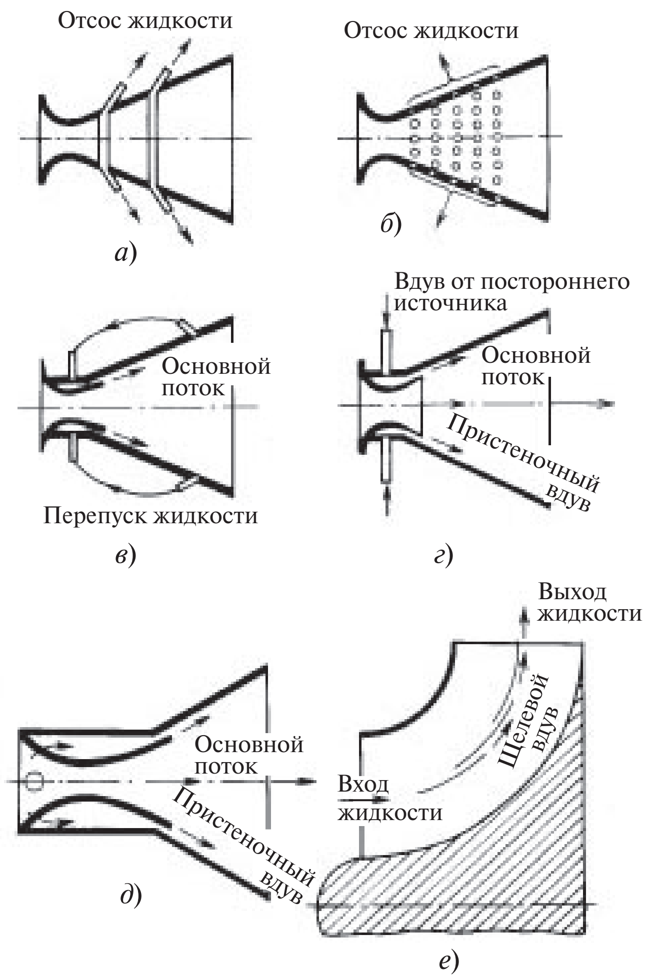


Рис. 14.23. Схемы аэродинамического воздействия на поток:

а — диффузор со щелевым отсосом потока; *б* — диффузор с отсосом потока через перфорацию; *в* — использование естественного перепада давления в целях отсоса из предотрывной зоны; *г* — диффузор с пристеночным вдувом; *д* — двухступенчатый диффузор с пристеночным вдувом; *е* — вдув потока на выпуклой поверхности дефлектора

(рис. 14.24), что при $\overline{q}$ = 3 % коэффициент полных потерь может быть уменьшен на 25—30 % от исходного уровня.

Основными недостатками рассматриваемого метода являются необходимость применения для отсоса независимого источника низкого давления и удаление из канала части потока. Эти добавочные затраты энергии оказываются весьма заметными. Для их ликвидации иногда предлагается использовать естественный продольный перепад давления, имеющийся в диффузоре, с возвратом удаленной жидкости в канал по схеме, изображенной на рис. 14.23, *в*. К сожалению, эффективность такой системы оказалась

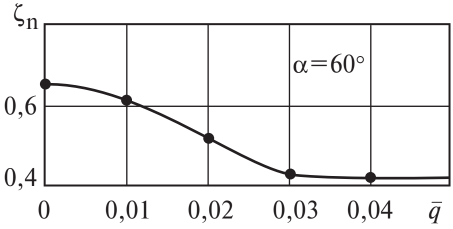


Рис. 14.24. Влияние интенсивности отсоса пограничного слоя через перфорированную стенку на коэффициент полных потерь энергии $\zeta_п$

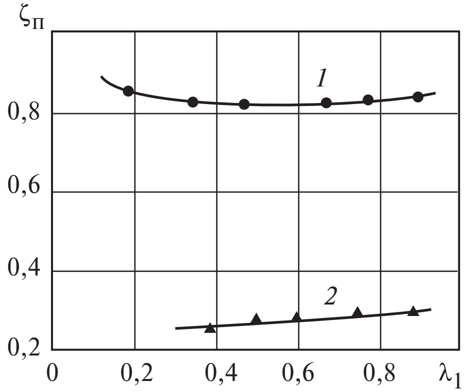


Рис. 14.25. Зависимости $\zeta_п = f(\lambda_1)$ для конического диффузора с углом раскрытия α = = 40° и степенью расширения n = 4 (кривая *1*) и двухступенчатого диффузора с пристеночным вдувом (кривая *2*)

небольшой, так как энергия, необходимая для отсоса жидкости из предотрывной зоны, заимствуется непосредственно из основного потока, а КПД естественного эжектора достаточно низок.

Для практических целей более применим пристеночный вдув активной струи, показанный на рис. 14.23, *г*. Струя жидкости с повышенной энергией вдувается через щелевой канал вдоль стенки, обеспечивая для основного потока своеобразную подвижную границу. Изменение граничных условий меняет всю картину течения и резко повышает устойчивость движения жидкости. Кроме того, тонкая пристеночная струя обладает и определенным эжектирующим свойством, что также способствует отклонению линий тока основного течения по направлению к стенкам канала.

Важным моментом при организации пристеночного вдува является возможность использования энергии основного потока, подводимого к сечению вдува непосредственно от входного сечения. Особенно эффективен этот способ при комбинации с геометрическими воздействиями. На рис. 14.23, *д* показана схема двухступенчатого диффузора, состоящая из радиусной входной части и последующего конического диффузора. Между ними осуществляется вдув потока вдоль конической стенки. Эффективность рассматриваемой схемы хорошо видна из данных, приведенных на рис. 14.25. Если для обычного конического диффузора при степени расширения n = 4 и угле α = = 40° коэффициент $\zeta_п = 0{,}8 \div 0{,}85$ (кривая *1*), то при переходе к двухступенчатой схеме с пристеночным вдувом коэффициент полных потерь снижается почти на 50—60 %. Достигнутый уровень коэффициента $\zeta_п = 0{,}2 \div 0{,}25$ (кривая *2*) характерен для безотрывных конических диффузоров с малыми углами раскрытия ($\alpha < 10$).

Модифицированная схема использования пристеночного вдува приведена на рис. 14.23, *е*, где за счет энергии основного потока обеспечивается наддув разрезного дефлектора, установленного в осерадиальном диффузоре.

В некоторых случаях с успехом может быть использована схема нормального вдува активного потока, обеспечивающая нужное отклонение основного потока в диффузорном канале. Для примера, на рис. 14.26 показаны схемы такого вдува в кольцевых и осерадиальных диффузорах. Добавочный поток, вдуваемый нормально направлению основного течения, обеспечивает эффективное отклонение линий тока в нужном направлении и способствует тем самым заметному снижению потерь энергии. При угле раскрытия внешнего обвода диффузора $\alpha = 50°$ это снижение потерь составляет около 30—35 % (рис. 14.27). Коэффициент полных потерь $\zeta_п$ начинает снижаться при расходе вдуваемой среды, равном 2,5 % общего расхода, и прекращается при нормальном вдуве, не превышающем 6 % массового расхода среды, поступающей в диффузор. Особый интерес представляет вид рассматриваемой зависимости при снижении расхода вдуваемой среды. Как следует из приведенных опытных данных, низкий уровень коэффициента

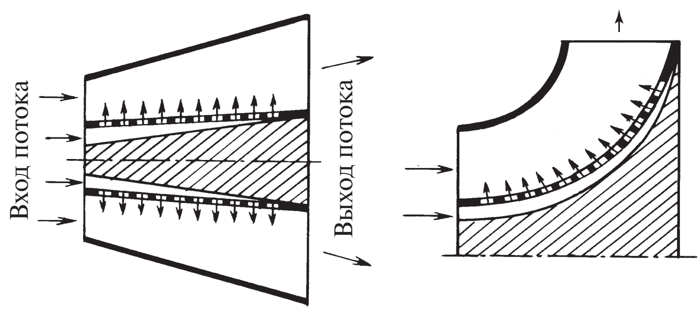


Рис. 14.26 Схемы организации нормального вдува в кольцевом (*а*) и осерадиальном (*б*) диффузорах

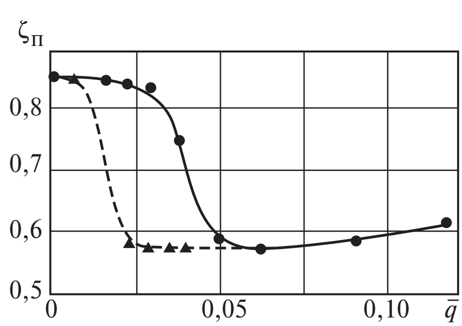


Рис. 14.27. Зависимости $\zeta_п = f(\bar{q})$ при увеличении (сплошная линия) и при уменьшении (штриховая линия) относительного расхода вдуваемой среды

полных потерь $\zeta_п$ при снижении количества вдуваемой жидкости сохраняется до $\overline{q}$ = 2,5 %, и затем происходит кризисное увеличение потерь до исходного значения. Аналогичная петля гистерезиса имеет место и при использовании тангенциального вдува потока с большим запасом кинетической энергии.

Полученный результат очень важен с физической точки зрения, так как наглядно подтверждает следующее фундаментальное свойство движущегося потока капельной или газообразной жидкости: **при любых геометрических внешних воздействиях внутренняя структура потока меняется таким образом, чтобы поддержать исходный характер движущейся жидкости**. Сформулированное положение является аналогом известного из электротехники закона Ленца.

Для диффузорных каналов, где возникает отрыв потока от стенок, и в осесимметричных каналах, где нарушается осевая симметрия течения, целесообразно использовать специальные уравнительные (демпферные) камеры, соединенные с проточной частью канала системой отверстий перфорации, равномерно расположенных на обтекаемой поверхности в опасном по условиям отрыва потока сечении (рис. 14.28).

Наконец, среди мер, способных стабилизировать течение в широкоугольных диффузорах, необходимо отметить достаточно эффективный способ такой стабилизации, основанный на использовании продольного оребрения обтекаемых поверхностей. Суть рассматриваемого продольного оребрения состоит в том, что на обтекаемые поверхности диффузора устанавливаются продольные трапециевидные ребра так, как это показано на рис. 14.29.

Вершина клиновидной части ребра располагается во входном сечении, а свободная сторона идет параллельно стенке диффузора.

Основная задача таких ребер состоит в снижении максимальных локальных положительных градиентов давления, действующих во входном сечении, и в предотвращении локальных отрывов потока от обтекаемых поверхностей за счет создания вблизи стенок изолированных друг от друга

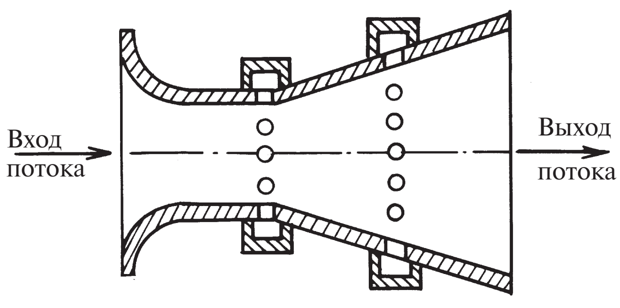


Рис. 14.28. Схема организации уравнительных (демпферных) камер в осесимметричном диффузоре

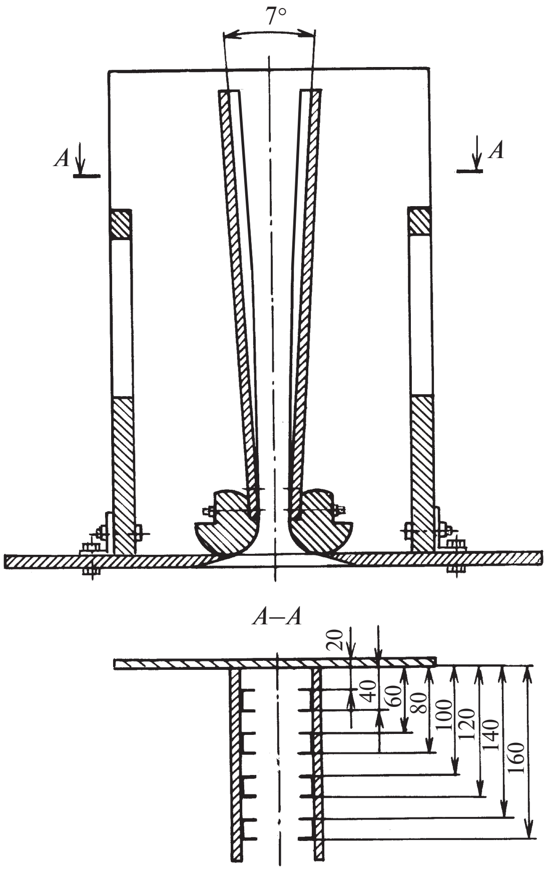


Рис. 14.29. Схема плоского диффузора с продольным клиновидным оребрением

каналов, резко увеличивающих поверхность контакта потока с твердыми стенками.

Проведенные исследования показали исключительно высокую эффективность такого оребрения обтекаемой поверхности с точки зрения стабилизации течения в диффузорных каналах (опыты В.В. Носкова и А.Н. Парамонова).

Так, приведенные на рис. 14.30 осциллограммы пульсаций давления и соответствующие им спектрограммы свидетельствуют о многократном снижении амплитуд пульсаций давления при введении оребрения, причем особенно резко снижаются эти амплитуды в области наиболее опасных по условиям надежности низких частот.

Для большей наглядности на рис. 14.30 показаны осциллограммы и спектрограммы для гладкого диффузора (*а*, *в*, *д*) и для диффузора с продольным оребрением (*б*, *г*, *е*).

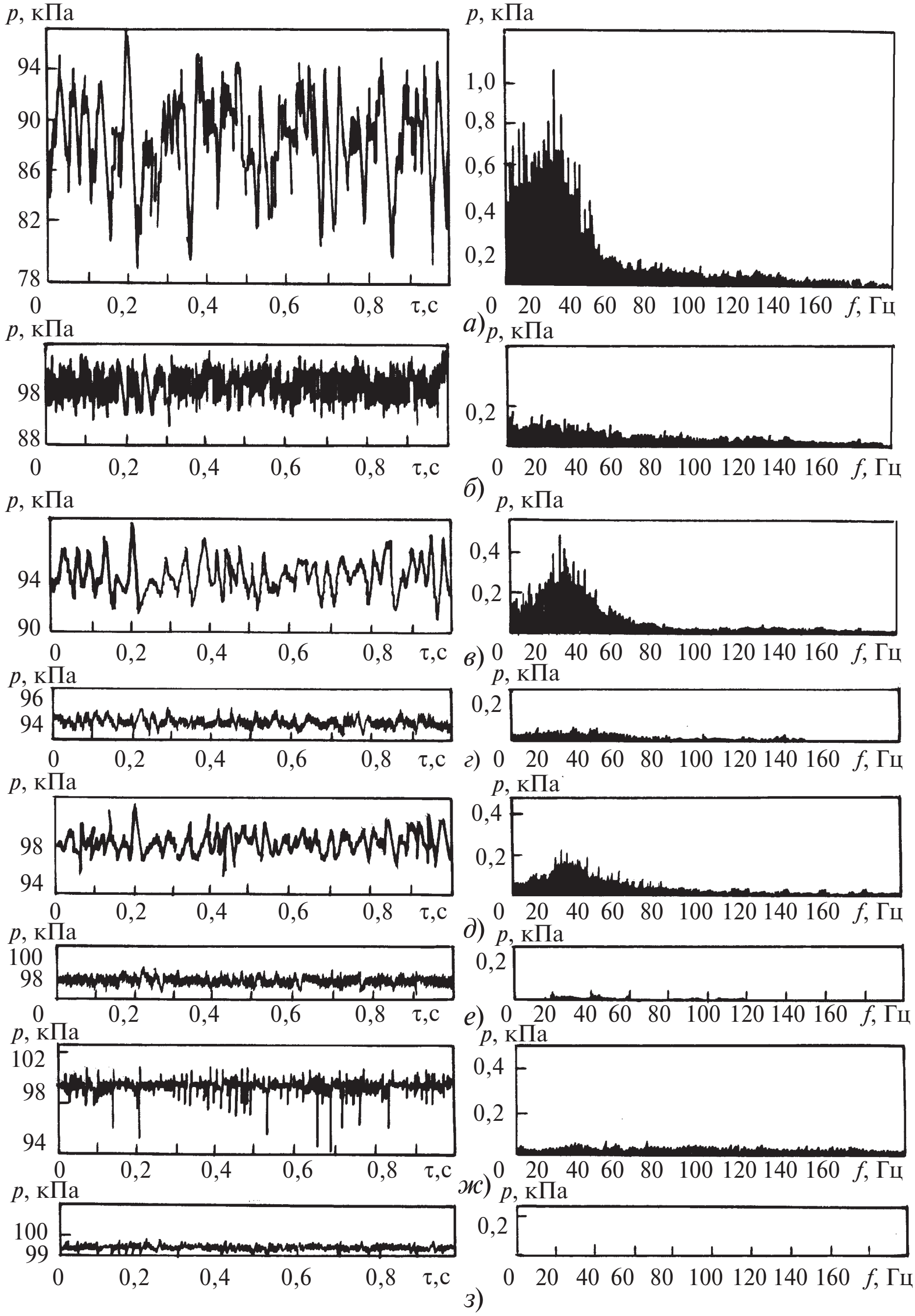


Рис. 14.30. Осциллограммы пульсаций давлений по длине плоского диффузора (α = 15°) и соотвестсвующие им спектрограммы:

а, б — $\bar{x}$ = 0; *в, г* — $\bar{x}$ = 0,1; *д, е* — $\bar{x}$ = 0,32; *ж, з* — $\bar{x}$ = 0,875

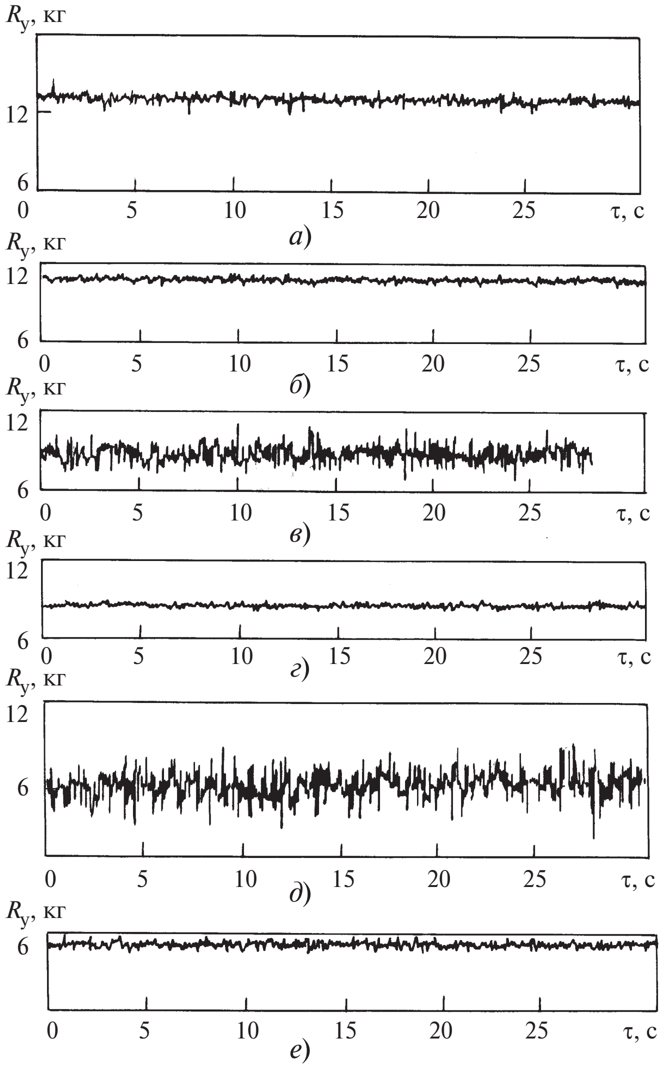


Рис. 14.31. Осциллограммы усилий, действующих на стенку плоского диффузора, при различных углах раскрытия:

а, *в*, *д* — диффузоры с гладкими стенками; *б*, *г*, *е* — диффузор с продольным оребрением; *а*, *б* — $\alpha = 7°$; *в*, *г* — $\alpha = 10°$; *д*, *е* — $\alpha = 15°$

Соответственно, если сравнивать между собой осциллограммы усилий, действующих на стенки, можно видеть, что при угле раскрытия диффузора $\alpha = 15°$ введение продольного оребрения резко снижает уровень динамических сил (рис. 14.31, *б*, *д*, *е*), и амплитуды усилий оказываются даже ниже соответствующих амплитуд усилий, воздействующих на стенки диффузора с оптимальным углом раскрытия $\alpha = 7°$ (рис. 14.31, *а*, *б*).

Такая ситуация, естественно, ведет к столь же масштабному улучшению вибрационного состояния всей исследуемой конструкции, о чем свидетельствуют приведенные на рис. 14.32 зависимости относительных амплитуд виброускорений от угла α, измеренных в среднем сечении пластин. Если при отсутствии продольного оребрения амплитуды виброускорений относительно их значений в плоскопараллельном канале с переходом к углам α = = 15 и 20° выросли соответственно в 3,6 и 6,7 раза (кривая *1*), то при установке ребер они увеличились всего на 30 % (кривая *2*).

На стабилизацию течения в оребренных диффузорах указывают и зависимости относительного акустического давления от угла α, показанные на рис. 14.18 (кривая *2*). Если в исходном диффузоре акустическое давление в максимальной точке, соответствующей углу α = 20°, в 1,6 раза превышало это давление при течении рабочего тела в плоскопараллельном канале (кривая *1*), то в оребренном диффузоре максимальное излучение превысило базовое значение только в 1,25 раза (кривая *2*).

Кроме оребрения обтекаемой поверхности по всей ее длине рассматривались и варианты с оребрением поверхности на длине, составляющей 25 и 50 % общей. Полученные при этом результаты мало отличаются от рассмотренных, и на этом основании при большой относительной длине диффузора вполне допустимо вводить продольное оребрение только на половине длины диффузора.

Важно отметить, что рассматриваемый способ стабилизации течения в диффузорах не влечет за собой существенного увеличения потерь энергии.

Так, согласно зависимостям коэффициента полных потерь $\zeta_п$ от угла раскрытия α, приведенным на рис. 14.33 и полученным для диффузоров с гладкими (кривая *1*) и оребренными (кривая *2*) стенками, максимальное увеличе-

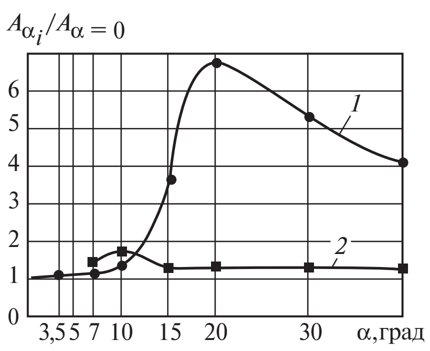


Рис. 14.32. Зависимости относительных амплитуд виброускорений на стенке плоского диффузора от угла раскрытия α его проточной части:

1 — диффузор с гладкими стенками; *2* — диффузор с продольным клиновидным оребрением

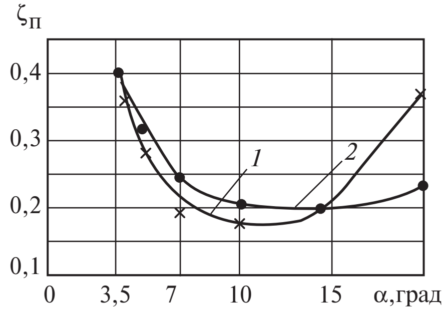


Рис. 14. 33. Зависимости коэффициента полных потерь $\zeta_п$ от угла α для диффузоров с гладкой поверхностью стенки (кривая *1*) и продольным клиновидным оребрением (кривая *2*)

ние $\zeta_п$, связанное с оребрением, составляет около 4 % при угле $\alpha = 10°$. Однако при угле $\alpha = 15°$ потери в сравниваемых диффузорах оказываются практически одинаковыми, а при $\alpha = 20°$ в оребренном диффузоре потери энергии снижаются на 8 %.

Результаты, полученные для плоских диффузоров, на основании гипотезы плоских сечений Н.Е. Жуковского при больших диаметрах внешних обводов конических и кольцевых диффузоров могут быть использованы и для осесимметричных диффузоров.

14.8. Некоторые примеры практического использования диффузоров в турбомашинах

14.8.1. Конические диффузорные седла в регулирующих клапанах паровых турбин

Регулирующие клапаны паровых турбин служат для изменения расхода пара через их проточные части и тем самым определяют нагрузку турбины. Соответственно надежность работы турбины находится в прямой зависимости от надежной работы регулирующих клапанов. При этом не менее серьезные требования предъявляются к гидравлическому сопротивлению всей системы паровпуска.

На практике выполнить указанные требования крайне сложно, так как регулирующий клапан обтекается нестационарным потоком с очень высокой амплитудой пульсаций давления [19], причем характер течения в клапанном канале меняется в зависимости от положения клапана и действующего на него перепада давления. В этих условиях эффективность использования диффузорных седел, призванных снизить сопротивление в системе паровпуска, оказывается небольшой, а возникающий в них отрыв потока от стенок ведет к усилению пульсаций давления и к соответствующему росту динамических нагрузок на все элементы клапана, которые в своем большинстве являются причиной разрушения многих элементов регулирующих клапанов.

Схема углового регулирующего клапана паровой турбины приведена на рис. 14.34.

Седло *2* выполняется обычно в виде сопла с входным конфузорным участком, который перекрывается чашей клапана *1*, и последующим коническим диффузором.

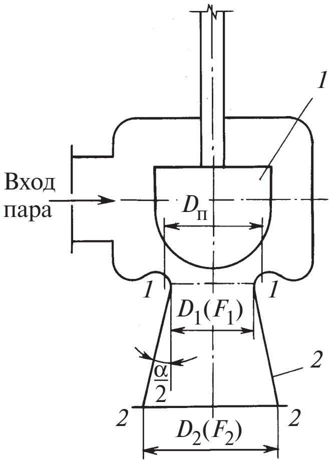


Рис. 14.34. Схема углового регулирующего клапана с диффузорным седлом

В рассматриваемом регулирующем клапане при входе пара в клапанную коробку происходит его внезапное расширение. Поскольку характерная площадь сечения клапанной коробки существенно больше проходной площади подводящего паропровода, то средняя скорость пара в клапанной коробке $c_к$ снижается по сравнению со скоростью в трубе $c_{1т}$ по меньшей мере на порядок. Соответственно, если в подводящем паропроводе скорость пара обычно не превышает 50—60 м/с, то в клапанной коробке она оказывается не более 6 м/с. При такой скорости пара давление полного торможения его в клапанной коробке p_0 и статическое давление $p_{1к}$ оказываются практически равными.

Далее при полном открытии клапанов с профилированной обтекаемой поверхностью чаши происходят плавное ускорение потока до скорости пара c_1 в узком сечении седла и его последующее торможение в коническом диффузоре до скорости c_2.

За диффузором осуществляется сравнительно небольшое внезапное расширение потока, так как диаметры отводящего паропровода при выносных клапанах и выходного патрубка при расположении клапанов на корпусе турбины различаются, причем диаметры D выходных трубопроводов или патрубков равны или близки к диаметру подводящего паропровода.

Таким образом, в функциональном плане в угловом регулирующем клапане происходят поворот потока относительно первоначального направления на 90° и его дросселирование на частичных нагрузках турбины в области входного сечения седла. При этом при полном открытии клапана его сопротивление (степень дросселирования потока) должно быть минимальным. Выполнение этого требования непосредственно зависит от аэродинамических характеристик использованного диффузорного седла, причем его роль и форма существенно зависят от значения сил, необходимых для перемещения клапана относительно неподвижного седла.

По принятой классификации [19] все регулирующие клапаны делятся на неразгруженные и разгруженные от осевых усилий. Соответственно подход к оценке рациональной формы седел для указанных типов клапанов различный.

Неразгруженные регулирующие клапаны характеризуются конструктивной простотой и сравнительно высокой надежностью. Однако для отрыва чаши клапана от седла и последующего его перемещения требуется достаточно большое усилие R_y, которое определяется по формуле

$$R_y = \frac{\pi}{4} D_п^2(p_0 - p_2) - d_{шт}^2(p_0 - B),$$

где $D_п$ — посадочный диаметр; p_2 — давление пара за седлом в отводящем паропроводе (патрубке); $d_{шт}$ — диаметр штока; B — барометрическое давление.

При пуске конденсационной турбины давление p_2 за клапаном близко к нулю и

$$R_y = \frac{\pi}{4} D_{\text{п}}^2 p_0 \left[1 - \frac{d_{\text{шт}}^2}{D_{\text{п}}^2} \left(1 - \frac{B}{p_0} \right) \right].$$

Для большинства регулирующих клапанов посадочный диаметр $D_{\text{п}}$ на 10—15 % превышает диаметр узкого сечения седла D_1, т.е. $D_{\text{п}} =$ $= (1{,}0 \div 1{,}15) D_1$, а наружный диаметр чаши $D_0 \approx (1{,}2 \div 1{,}25) D_1$.

В свою очередь, диаметр узкого сечения седла при заданном массовом расходе* пара G через клапан на расчетном режиме работы турбины находится из уравнения расхода и определяется по соотношению

$$D_1 = \sqrt{\frac{4G\sqrt{T_0}}{A\pi\mu p_0 q_1}}\,.$$

Здесь T_0 — температура полного торможения в клапанной коробке; μ — коэффициент расхода; A — постоянная, для перегретого пара равная 0,0311; q_1 — приведенный удельный расход, связанный с безразмерной скоростью λ_1 в узком сечении седла известным уравнением (5.41):

$$q_1 = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_1 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

где k — показатель изоэнтропы.

Для перегретого пара $k = 1{,}3$ и при $\lambda_1 < 0{,}3/q_1 \approx 1{,}59\lambda_1$. В результате для перегретого пара получаем

$$D_1 = 5{,}1 \sqrt{\frac{G\sqrt{T_0}}{\mu p_0 \lambda_1}} \tag{14.34}$$

и

$$R_y = 20{,}2 \frac{G\sqrt{T_0}}{\mu\lambda_1} \left[1 - \frac{d_{\text{шт}}^2}{D_{\text{п}}^2} (p_0 - B) \right].$$

Из формулы (14.34) следует, что усилие, необходимое для отрыва от седла чаши неразгруженного клапана при заданном расходе и заданных начальных параметрах пара, меняется обратно пропорционально безразмерной скорости λ_1 в узком сечении седла. Чем выше скорость λ_1, тем меньше оказываются диаметр клапана D_0 и соответственно величина осевого усилия на штоке R_y, необходимого для отрыва чаши клапана от седла.

* Здесь далее в гл. 15 массовый расход обозначим через G.

Однако с ростом скорости $c_1(\lambda_1)$ в узком сечении седла пропорционально ее квадрату растет гидравлическое сопротивление клапана

$$\Delta p = p_0 - p_2 = p_0\left(1 - \frac{p_2}{p_0}\right).$$

Для российских турбин длительное время сопротивление в системе паровпуска принималось на уровне 5 % начального давления пара. При этом допустимая максимальная скорость $c_1 = 120 \div 130$ м/с.

Таким образом, в седлах регулирующих клапанов максимальные скорости пара в 2—2,5 раза превышают скорости пара в подводящем патрубке. Поскольку отводящий от клапана патрубок имеет практически тот же диаметр, что и подводящий, то средняя скорость пара за клапаном вновь должна снизиться в 2—2,5 раза.

Смысл использования диффузорных седел состоит в том, чтобы провести торможение потока после узкого сечения седла с минимальными потерями энергии, обеспечив максимально возможную эффективность преобразования кинетической энергии в потенциальную.

На рис. 14.35 весь процесс преобразования энергии в регулирующем клапане изображен на *h*, *s*-диаграмме.

Для большей наглядности здесь принято, что кинетическая энергия в узком сечении диффузора (сечении *1-1* на рис. 14.34) остается неизменной при изменении сопротивления диффузорной части седла.

Начальная точка процесса 0_m определяется параметрами полного торможения пара в выходном сечении подводящего паропровода, а изобара p_{1m} =

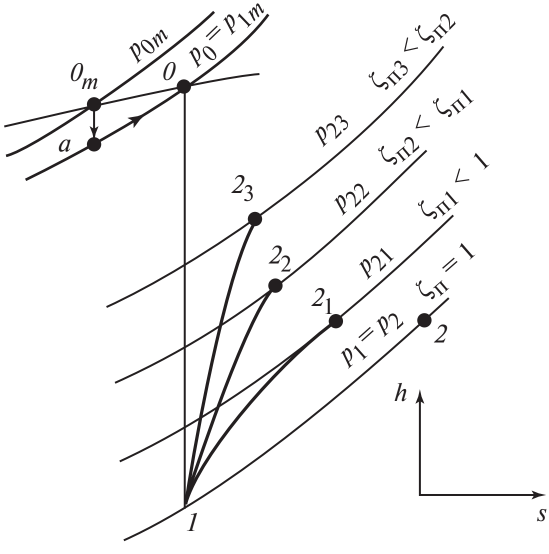


Рис. 14.35. Процесс преобразования энергии в диффузорных седлах регулирующих клапанов в *h*, *s*-диаграмме при различных коэффициентах полных потерь энергии $\zeta_п$

= const соответствует статическому давлению в этом же сечении. В клапанной коробке практически вся кинетическая энергия потока теряется. и процесс снижения кинетической энергии идет при постоянном давлении по линии a-0. Точка 0 определяет состояние потока в клапанной коробке. Линия *0-1* соответствует ускорению потока в конфузорной части седла, а линии $1\text{-}2_1$, $1\text{-}2_2$, $1\text{-}2_3$ — процессу торможения потока в коническом диффузоре седла, причем положение конечной точки 2_i (i = 1, 2, 3) определяется степенью восстановления давления в диффузоре ξ. Очевидно, чем меньше полные потери энергии в диффузоре, представляющие собой сумму внутренних потерь энергии и потерь с выходной скоростью, тем выше относительно изобары p_1 = const расположатся изобары p_{2i} = const.

В качестве основной характеристики диффузоров используют либо их КПД $\eta_д$, либо коэффициент полных потерь $\zeta_п$.

Выше [см. (14.8)] показано, что

$$\zeta_п = \frac{c_{2t}^2}{c_1^2} = \frac{\lambda_{2t}^2}{\lambda_1^2}, \tag{14.35}$$

где λ_{2t} — безразмерная теоретическая скорость в выходном сечении диффузора, которая зависит от отношения давлений p_2/p_0:

$$\lambda_{2t} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}.$$

Безразмерная скорость λ_1 находится по аналогичной формуле, но для ее определения используется отношение давления на входе в диффузор p_1 к начальному давлению в клапанной коробке p_0:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}.$$

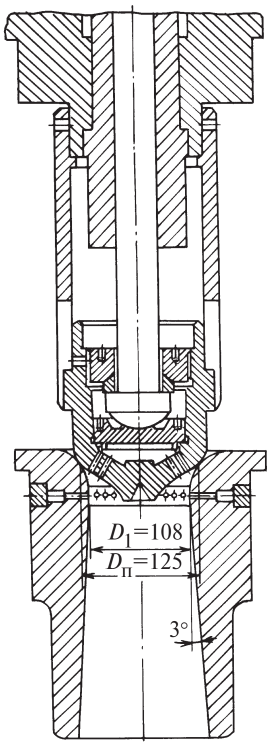


Рис. 14.36. Неразгруженный регулирующий клапан МЭИ—ЭНТЭК серии ZE

Коэффициент восстановления энергии (давления) в диффузоре ξ связан с коэффициентом полных потерь простой зависимостью

$$\xi = 1 - \zeta_п.$$

При наличии диффузорного эффекта $\zeta_п < 1$; если этот эффект отсутствует или в диффузоре имеют место очень высокие потери, то $\zeta_п = 1$ или $\zeta_п > 1$. На рис. 14.35 первому случаю соответствует линия *1-2*, второму — линии *1-2*$_1$, *1-2*$_2$, *1-2*$_3$. При этом очевидно, что гидравлическое сопротивление при $\zeta_п = 1$ $\Delta p_1 = p_0 - p_2$ существенно выше, чем в последнем случае, где $\Delta p_3 = p_0 - p_{23}$.

Таким образом, при заданном массовом расходе G или приведенном удельном расходе q_1, равном отношению абсолютного расхода пара к максимально возможному (критическому) расходу через узкое сечение седла, сопротивление в системе паровпуска турбины зависит от эффективности преобразования энергии в коническом диффузоре седла, определяемой коэффициентом полных потерь энергии $\zeta_п$. Коэффициент $\zeta_п$, полученный для изолированного диффузора, может очень сильно возрасти в диффузорном седле клапана, так как при одностороннем подводе пара в клапанную коробку отсутствует окружная симметрия течения, а наличие чаши клапана дополнительно искажает поле скоростей перед входным сечением диффузора. Кроме того, неравномерное поле скоростей перед диффузором приводит к сильному нарастанию пульсаций давления в диффузоре и часто стимулирует отрыв потока от его стенок.

В конечном счете все элементы клапана работают в зоне высоких пульсаций давления, что снижает динамическую надежность в первую очередь подвижных частей клапана.

Отмеченные недостатки в значительной степени устранены в конструкции профилированных клапанов, разработанных в лабораториях кафедры паровых и газовых турбин Московского энергетического института совместно с фирмой ЗАО ЭНТЭК и приведенных на рис. 14.36 (клапаны серии ZE). В данном случае обтекаемая поверхность чаши клапана профилировалась таким образом, чтобы совместно с входным участком седла на полном подъеме чаши образовывался плавный осесимметричный суживающийся канал. Для снижения окружной неравномерности поверхность чаши клапана имеет несколько поясов отверстий перфорации, замкнутых на общую демпферную камеру, обеспечивающую гашение пульсаций давления. После конфузорной части седла располагается цилиндрический участок с одним поясом отверстий перфорации, что позволяет в максимальной степени приблизить условия течения в диффузоре клапана к условиям течения в изолированном диффузоре с равномерным входным полем скоростей. Однако и здесь коэффициент $\zeta_п$ на 20—25 % оказывается выше аналогичного коэффициента $\zeta_{п0}$ для изолированного диффузора.

В целом для оценки эффективности преобразования энергии в диффузорных седлах регулирующих клапанов можно использовать следующее соотношение:

$$\zeta_{\text{п}} = b\zeta_{\text{п}0},$$

где b — постоянная, зависящая от форм чаши клапана и входного участка седла; $\zeta_{\text{п}0}$ — коэффициент полных потерь энергии в изолированном диффузоре с равномерным входным полем скоростей.

Для профилированных клапанов $b = 1{,}2\div1{,}25$, для тарельчатых $b = 1{,}8\div2$, для шаровых $b = 1{,}5\div1{,}6$. Найдем связь приведенного удельного расхода q_1 с относительной потерей давления $\Delta p/p_0$ в системе паровпуска и коэффициентом $\zeta_{\text{п}}$.

С этой целью, использовав формулу (14.35), представим безразмерную скорость λ_1 в виде

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_{2t}}{\sqrt{b\zeta_{\text{п}0}}}.$$

После несложных преобразований получим

$$q_1 = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{k+1}{(k-1)b\zeta_{\text{п}0}}\left[1 - \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]\left[1 - \frac{1 - \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}}{b\zeta_{\text{п}0}}\right]}. \quad (14.36)$$

Построенные по этой формуле зависимости $q_1 = f(\overline{\Delta p}, \zeta_{\text{п}0})$ $\left(\overline{\Delta p} = \Delta p/p_0\right)$ для профилированного ($b = 1{,}25$) и тарельчатого ($b = 2{,}0$) клапанов (рис. 14.37 и 14.38) позволяют по заданной величине q_1 и известному значению коэффициента полных потерь энергии для изолированного диффузора $\zeta_{\text{п}0}$ определить потерю давления в проектируемом клапане.

Для оценки величины $\zeta_{\text{п}0}$ на рис. 14.39 приведены данные испытаний изолированных конических диффузоров с углами раскрытия $\alpha = 7$ и $10°$ при различных степенях расширения $n = D_2^2/D_1^2$ (D_2 — диаметр выходного сечения диффузора).

Хорошо видно, что при $n < 4$ диффузор с $\alpha = 10°$ обладает несколько большей эффективностью, и с этой точки зрения применительно к рассматриваемой задаче следует отдать предпочтение диффузорам с углами раскры-

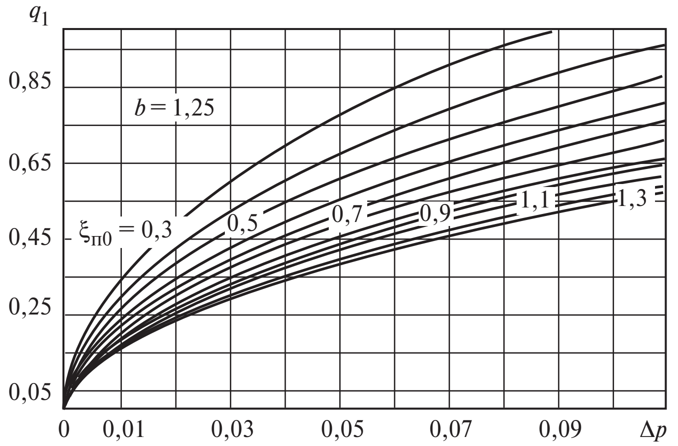


Рис. 14.37. Зависимости $q_1 = f(\overline{\Delta p}, \zeta_{п0})$ для профилированного регулирующего клапана

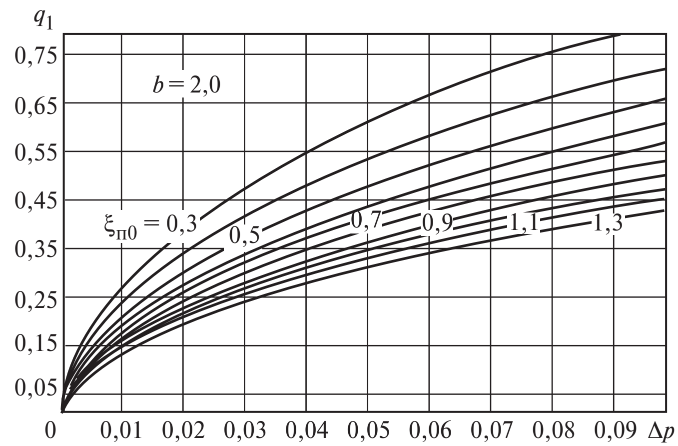


Рис. 14.38. Зависимости $q_1 = f(\overline{\Delta p}, \zeta_{п0})$ для тарельчатого регулирующего клапана

тия $\alpha = 10°$, так как при одинаковых степенях расширения длина этих диффузоров оказывается меньше, чем длина диффузоров с углом $\alpha = 7°$.

Однако, как уже отмечалось, входное поле у диффузорных седел даже при использовании специальных мер по его выравниванию остается неравномерным, и при углах раскрытия конуса $\alpha = 10°$ возникает нестационарный отрыв потока от стенок диффузора, порождающий очень высокий уровень пульсаций давления в потоке. В результате резко ухудшается вибрационное состояние всего регулирующего клапана. Таким образом, с учетом динамической надежности диффузорные седла регулирующих клапанов при отсут-

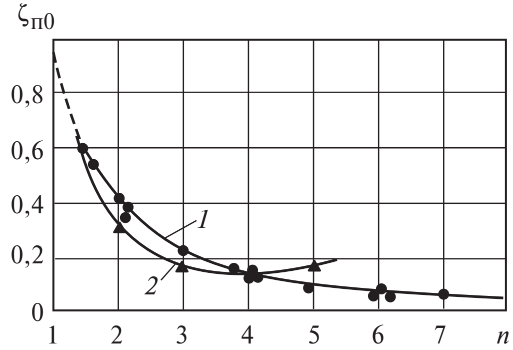


Рис. 14.39. Зависимости $\zeta_{п0} = f(n)$ для конических диффузоров с углами раскрытия проточной части $\alpha = 7°$ (кривая *1*) и 10° (кривая *2*)

ствии добавочных воздействий, например продольных ребер, должны выполняться с углом раскрытия конического диффузора $\alpha = 7°$.

С учетом второго геометрического параметра — степени расширения диффузора n — при фиксированном угле α однозначно определяется значение коэффициента полных потерь $\zeta_{п0}$, и, следовательно, с помощью номограмм, приведенных на рис. 14.37 и 14.38, можно найти значение гидравлических потерь в системе паровпуска турбины. Так, при степени расширения диффузора $n = 1{,}5$ $\zeta_{п0} = 0{,}46$ и при $q_1 = 0{,}4$ $\overline{\Delta p} = 2{,}0$ %. При увеличении степени расширения до $n = 2$ сопротивление для профилированного клапана становится равным 1,4 %, а для тарельчатого клапана (см. рис. 14.38) оно превышает 2 %.

Таким образом, применительно к неразгруженным профилированным клапанам степень расширения диффузорных седел не имеет смысла увеличивать более $n = 2$, а с учетом конструктивных возможностей значение n без большого увеличения сопротивления может быть снижено до 1,4—1,5.

Для шаровых и тарельчатых клапанов также не имеет смысла увеличивать степень расширения седел, так как здесь входные возмущения потока настолько сильны, что степень восстановления давления в диффузоре оказывается малой и слабо меняется с повышением его степени расширения, а добавочные возмущения растут весьма интенсивно.

Разгруженные регулирующие клапаны используются обычно для пропуска больших объемных расходов пара, когда размеры неразгруженных клапанов приводят к необходимости применять для их привода сервомоторы очень большой мощности.

На рис. 14.40 показана конструкция разгруженного регулирующего клапана серии ZE с регулируемой степенью разгрузки.

Клапан состоит из крышки корпуса *1*, чаши *2*, диффузорного седла *3*, седла разгрузочного клапана (диафрагмы) *4* с разгрузочным отверстием *5*, разгрузочного клапана *6*, выполненного совместно со штоком *7*, буксы *8* с конусной втулкой *9*, специальной гайки *10*, защитного стакана *11*, отверстий

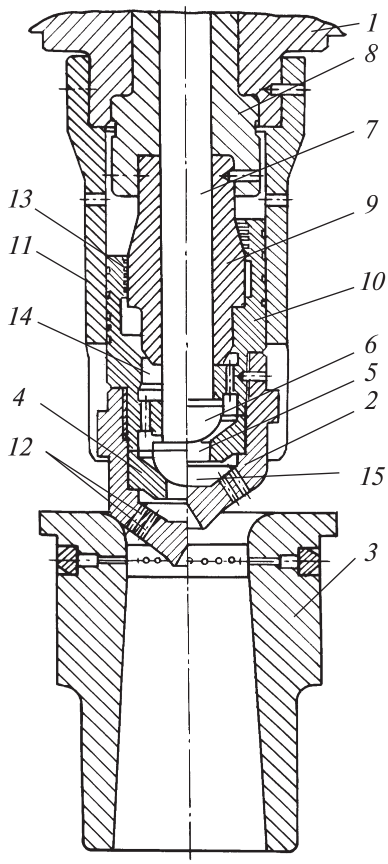


Рис. 14.40. Разгруженный регулирующий клапан МЭИ—ЭНТЭК серии ZE

перфорации *12*, лабиринтного уплотнения *13* и центрального отверстия *14* в гайке *10*.

Диафрагма *4* располагается внутри перфорированной чаши, и с ее помощью образуется демпферная камера *15*. При открытии разгрузочного клапана 6 внутренняя полость клапана через отверстия перфорации сообщается с пространством за его чашей.

Поскольку площадь зазора между лабиринтовым уплотнением *13* гайки *10* и конусом *2* много меньше площади седла разгрузочного клапана, то давление внутри клапана оказывается близким давлению за ним. Соответственно усилие R_y, необходимое для отрыва чаши клапана от седла, будет определяться по формуле

$$R_y = \frac{\pi}{4}(D_{\text{п}}^2 - D_{\text{у}}^2)(p_0 - p_2) - \frac{\pi d_{\text{шт}}^2}{4}(p_0 - B),$$

где $D_{\text{у}}$ — диаметр лабиринтовых уплотнений втулки.

После отрыва чаши клапана от седла усилие на штоке по мере открытия клапана вначале интенсивно растет и только при $\bar{h} = h/D_1 > 0{,}1$ начинает снижаться (h — высота абсолютного подъема чаши клапана). Такая картина связана с тем, что уже при небольшом подъеме чаши давление p_x на нижней ее поверхности, ограниченной диаметрами D_0 и $D_{\text{п}}$, интенсивно снижается, а давление, действующее на эту кольцевую поверхность сверху, остается постоянным и равным p_0. В результате возникает добавочное усилие R'_y:

$$R'_y = \frac{\pi}{4}(D_0^2 - D_{\text{п}}^2)(p_0 - p_x).$$

Снижение давления p_x на первой стадии подъема клапана ведет к сильному росту указанной добавочной силы. Легко видеть, что степень увеличения добавочной силы снижается при сближении диаметров D_0 и $D_{\text{п}}$, и для тарельчатых клапанов $R'_y = 0$.

При оценке степени разгрузки клапана обычно исходят из значения силы, необходимой для отрыва чаши клапана от седла. Для большинства клапанов степень разгрузки не превосходит 80 % максимального отрывного усилия неразгруженных клапанов, так как даже в этом случае при больших открытиях клапана и малом перепаде давления на нем сила прижатия чаши клапана к головке штока оказывается меньше динамических сил, действующих на чашу. В результате клапан теряет осевую устойчивость и возникают осевые автоколебания, конечным результатом которых чаще всего является разрушение штока.

Для предотвращения подобной ситуации в разгруженных клапанах ЛМЗ используется проточная паровая подгрузка, когда во внутреннюю полость при $\overline{h} > 0{,}15$ через специальные окна подводится свежий пар, повышающий давление в этой полости.

Эта же идея осуществляется и в клапане, изображенном на рис. 14.40. Здесь при $\overline{h} > 0{,}15$ конусная втулка *9* перекрывает отверстие *14* в гайке *10*, и с этого момента степень разгрузки клапана не превышает 30 %.

Важно также отметить, что в клапанах серии ZE внутренняя полость соединена с пространством за ним через отверстия перфорации на обтекаемой поверхности чаши клапана, где имеет место наиболее низкое давление. Соответственно по сравнению с клапанами, где седло разгрузочного золотника располагается в центральной части клапана, достигается более интенсивное снижение статических усилий, необходимых для перемещения клапана в начальной стадии его открытия.

Таким образом, современные системы разгрузки клапанов от осевых усилий полностью снимают проблему больших осевых усилий, связанную с радиальными размерами клапана. В этих условиях целесообразность использования диффузорных седел становится далеко не очевидной.

Действительно, если размеры клапанной коробки позволяют разместить в ней седло с минимальной площадью, на 15—20 % меньшей площади подводящего паропровода, то необходимость в ускорении потока до скоростей 120—150 м/с с последующим его торможением в диффузоре до скорости 70—80 м/с автоматически отпадает. Одновременно исчезает и причина развития в седле высоких пульсаций давления.

Эта проблема оказывается особенно важной для регулирующих и стопорно-регулирующих клапанов влажно-паровых турбин, где при высоких скоростях в узких сечениях диффузорных седел возможно выпадение вторичной влаги, наличие которой ведет к интенсивному эрозионному износу обтекаемых поверхностей.

Кроме того, следует учитывать, что при больших посадочных диаметрах клапана степень расширения диффузорных седел из-за конструктивных ограничений не может быть большой ($n < 1{,}3$), а в стопорно-регулирующих клапанах вообще могут быть использованы цилиндрические или даже конические седла.

При отказе от диффузорных седел и использовании конфузорных седел с увеличенным диаметром D_1 сопротивление клапанов за счет снижения максимальных скоростей в минимальном сечении может оказаться ниже, чем сопротивление клапанов с развитыми диффузорными седлами.

14.8.2. Диффузоры в выхлопных патрубках паровых и газовых турбин

Выхлопные патрубки конденсационных паровых турбин обеспечивают отвод пара от последней ступени к конденсатору.

В газовых турбинах рабочее тело отводится в атмосферу, а в парогазовых установках подводится к котлу-утилизатору.

Энергия потока, покидающего последние ступени турбин, для мощных энергетических установок достигает очень больших значений. Так, например, для ГТУ фирмы Mitsubishi мощностью $N_э$ = 334 МВт энергия потока за последней ступенью турбины составляет 17 МВт при скорости газа $c_z =$ $= 230$ м/с.

Для паровой турбины К-800-23,5 ЛМЗ указанная энергия равняется около 28 МВт. Если в выхлопных патрубках в результате изоэнтропийного торможения потока снизить его скорость в 2 раза, то энергия рабочих тел в приведенных примерах в выходном сечении патрубка может быть снижена в 4 раза и в первом случае составит всего 4,2 МВт, а во втором — 7 МВт, соответственно мощность ГТУ возрастет на 13 МВт, а мощность паровой турбины — на 21 МВт.

Приведенные оценки свидетельствуют об исключительно высоких экономических перспективах использования в выхлопных патрубках турбин различного рода диффузорных систем, способных при минимальных потерях энергии преобразовывать кинетическую энергию потока в потенциальную. Однако на практике реализовать в выхлопных патрубках даже сравнительно небольшой диффузорный эффект крайне сложно. Это особенно сложно осуществить в выхлопных патрубках паровых турбин, где поток пара после турбины при подвальном расположении конденсатора совершает поворот относительно ее продольной оси на 90°. Меридиональное сечение типичного выхлопного патрубка мощной паровой турбины представлено на рис. 14.41.

Основной особенностью практически всех патрубков паровых турбин является сравнительно малый осевой размер, который редко превышает две длины лопаток последней ступени. Это означает, что разворот потока на 90° в направлении конденсатора происходит в очень сложных условиях и при таком развороте, как уже отмечалось ранее (см. гл. 13), неизбежно возникают интенсивные вторичные течения, приводящие в конечном счете к сворачиванию потока пара в два вихревых шнура, схематически показанных на рис. 14.42.

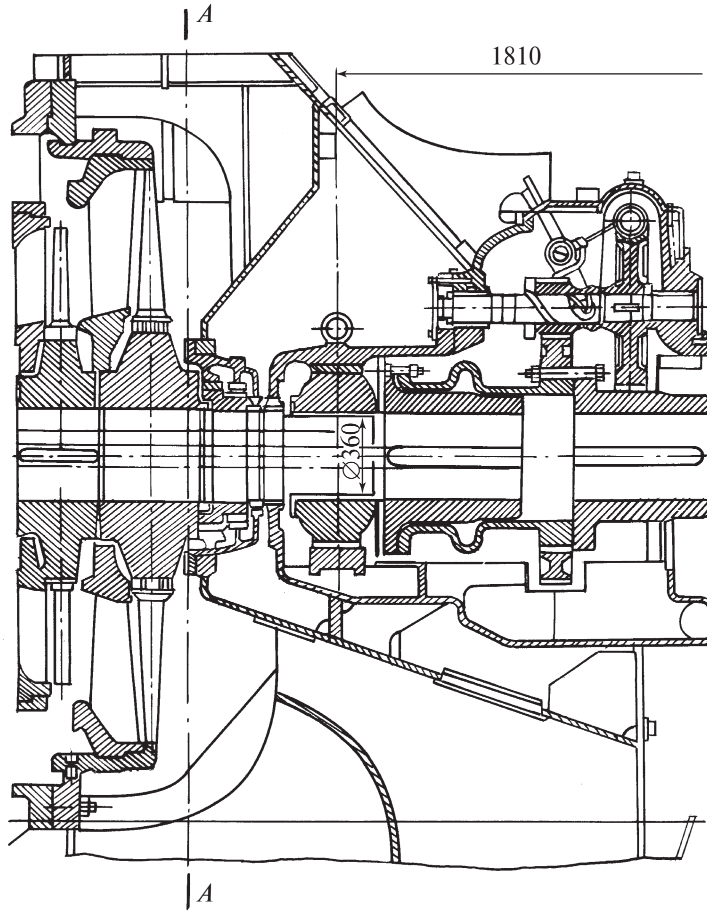


Рис. 14.41. Меридиональное сечение бездиффузорного выхлопного патрубка паровой турбины

Поскольку в ядрах вихревых шнуров осевые скорости малы, то их появление ведет к резкому уменьшению действительной (эффективной) проходной площади патрубка.

Как уже отмечалось (см. гл. 7), устойчивые вихревые образования обтекаются как твердые тела, и их существование равносильно снижению геометрической проходной площади. В выхлопных патрубках мощных паровых турбин в связи с ограничением поперечных габаритных размеров проблемным сечением является горизонтальный разъем, площадь которого всего на 30—40 % превосходит торцевую площадь лопаточного аппарата последней ступени. В результате при сворачивании потока в два вихревых шнура с противоположным направлением вращения фактическая минимальная площадь в патрубке смещается от плоскости выхода потока из последней ступени *A*—*A* (рис. 14.41) к плоскости горизонтального разъема патрубка *B*—*B* (рис. 14.42).

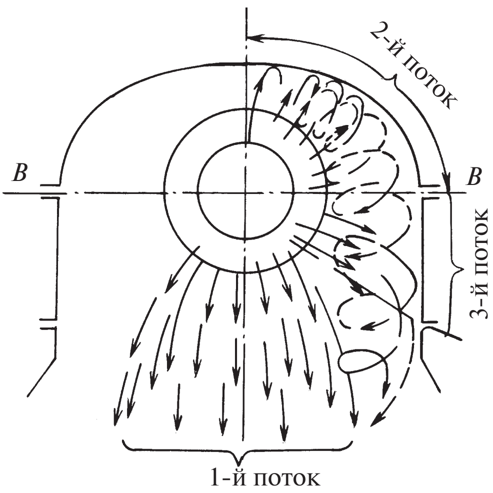


Рис. 14.42. Схема течения пара в выхлопном патрубке паровой турбины

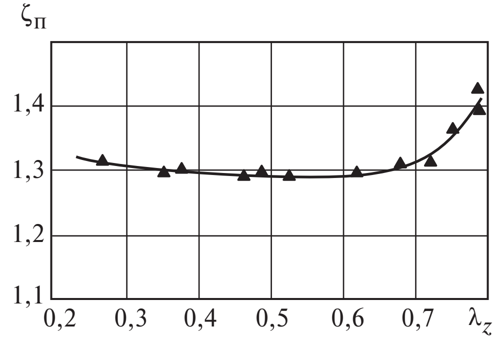


Рис. 14.43. Зависимости $\zeta_п = f(\lambda_z)$ для типового выхлопного патрубка турбины

В аэродинамическом плане проточная часть выхлопного патрубка напоминает криволинейное конфузорно-диффузорное сопло с достаточно высокой степенью расширения n.

Для многих выхлопных патрубков значение n меняется от 3 до 4. Однако, несмотря на столь большую геометрическую диффузорность патрубков в связи с их достаточно сложной проточной частью, восстановление давления в системе отвода пара в конденсатор не происходит. Более того, на этом пути имеет место достаточно большое гидравлическое сопротивление, и давление пара за ступенью p_z оказывается выше давления в конденсаторе $p_к$.

Типовая зависимость коэффициента полных потерь $\zeta_п$ от безразмерной скорости λ_z на входе в патрубок рассматриваемого типа приведена на рис. 14.43.

Здесь при $\lambda_z > 0{,}55$ значение $\zeta_п$ оказывается существенно больше единицы ($\zeta_п \approx 1{,}25 \div 1{,}3$), а с увеличением скорости до $\lambda_z \approx 0{,}6 \div 0{,}7$ указанный коэффициент кризисным образом возрастает, что обычно характерно для режима «запирания» сопл Лаваля.

При отсутствии в выхлопном патрубке специального диффузора и систем, обеспечивающих полное использование проходных площадей, энергия, необходимая для отвода пара к конденсатору, на 25—30 % превышает энергию потока, покидающего последнюю ступень турбины.

Процесс преобразования энергии в бездиффузорном выхлопном патрубке в h, s-диаграмме приведен на рис. 14.44. Здесь состояние пара перед цилиндром низкого давления определяется точкой *0*; p_z — давление пара за последней ступенью турбины; p_k — давление пара при входе в конденсатор; p_{0z} — давление полного торможения пара за последней ступенью; p_{0k} — давление полного торможения пара при входе в конденсатор; H_{0z_t} — располагаемый перепад энтальпий на ЦНД относительно давления p_z; H_{0k_t} — располагаемый перепад энтальпий на ЦНД относительно давления p_k; Δh_0 — располагаемый перепад энтальпий на выхлопной патрубок относительно

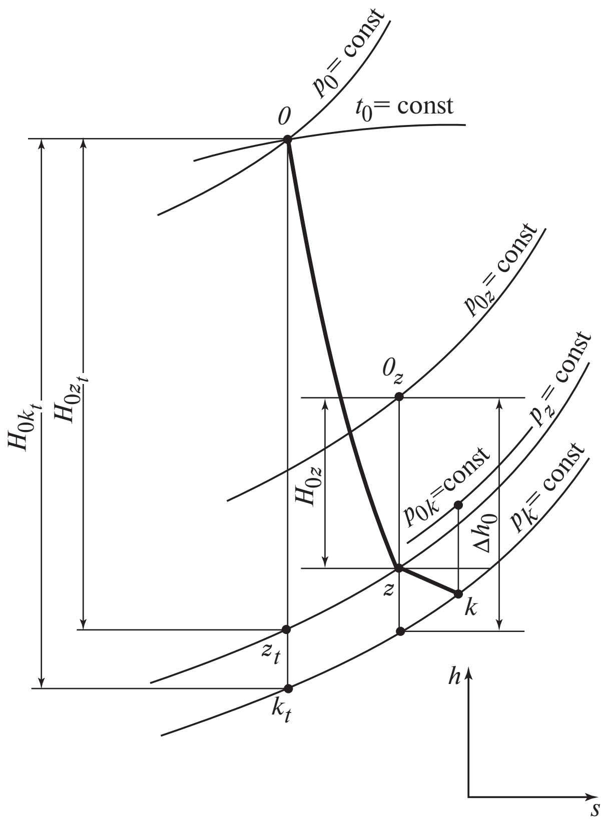


Рис. 14.44. Процесс преобразования энергии в бездиффузорном патрубке в *h*, *s*-диаграмме

давления в конденсаторе; $H_{0z} = c_z^2/2$ — перепад энтальпий, эквивалентный энергии потока, покидающего последнюю ступень турбины.

Точка 0_z, соответствует параметрам полного торможения пара за последней ступенью, точка k — состоянию пара на входе в конденсатор, точка z — состоянию пара за последней ступенью турбины. При идеальном процессе, т.е. при отсутствии потерь энергии в проточной части, состояние пара за последней ступенью определяется точкой z_t.

В бездиффузорном патрубке процесс преобразования энергии идет по линии zk и $p_z > p_k$.

Формальное использование коэффициента восстановления давления ξ позволяет найти при заданном давлении p_k давление p_z за последней ступенью турбины по следующему соотношению:

$$p_z = p_k - \xi \frac{\rho_z c_z^2}{2},$$

где ρ_z и c_z — плотность и скорость пара за последней ступенью турбины.

Поскольку

$$\xi = 1 - \zeta_п,$$

то

$$p_z = p_k - (1 - \zeta_п) \frac{\rho_z c_z^2}{2}. \tag{14.37}$$

В данном случае $\zeta_п > 1$ и $p_z > p_k$.

Таким образом, в бездиффузорных выхлопных патрубках располагаемый перепад энтальпий на ступень турбины по состоянию пара за последней ступенью оказывается меньше, чем перепад энтальпий по состоянию пара на входе в конденсатор.

Картина принципиальным образом меняется при установке за последней ступенью турбины хорошо спроектированного диффузора. Учитывая ограниченность осевых размеров выхлопных патрубков мощных паровых турбин, в этом случае наиболее часто используются осерадиальные диффузоры.

Меридиональное сечение диффузорного патрубка с осерадиальным диффузором представлено на рис. 14.45.

Рассчитывать на высокую степень преобразования энергии в рассматриваемых выхлопных патрубках даже при наличии хорошего осесимметричного диффузора не приходится по следующим причинам.

Во-первых, в связи с односторонним отводом пара от последней ступени турбины условие течения в верхней части осесимметричного диффузора существенно отличается от условия течения в его нижней части, где поток после поворота на 90° сразу направляется в конденсатор.

В верхней же части патрубка после разворота на 90° пар совершает еще один сложный разворот в направлении выходного сечения. Непосред-

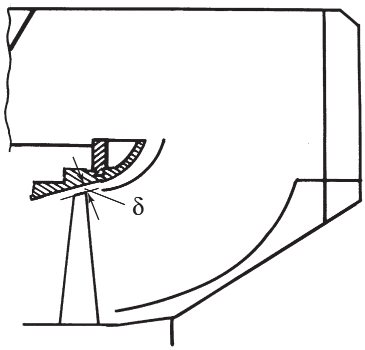


Рис. 14.45. Меридиональное сечение диффузорного выхлопного патрубка

ственно в верхней части боковой разворот составляет почти 180°, и затем угол этого разворота непрерывно снижается по мере приближения к горизонтальному разъему патрубка. Другими словами, в осесимметричном диффузоре не осуществляется осесимметричное течение.

Во-вторых, степень расширения осерадиального диффузора $n_д$ в связи с очень сложным характером течения в корпусе патрубка должна быть существенно меньше степени расширения n всего патрубка. Согласно опытным данным $n_д \le (0{,}5 \div 0{,}6)n$. При нарушении этого условия происходит резкое увеличение сопротивления в самом корпусе и суммарный эффект от использования развитого диффузора оказывается отрицательным.

В-третьих, поле скоростей за последней ступенью турбины даже на расчетном режиме характеризуется повышенным уровнем скоростей в периферийной области, что обусловлено протечкой пара через радиальный зазор δ (рис. 14.45). В результате на внешнем обводе диффузора на его начальном участке, где скорость продолжает увеличиваться, образуется локальная область со сверхзвуковыми скоростями, которая далее замыкается скачком уплотнения.

Резкое повышение давления в скачке ведет к возникновению отрыва потока с внешнего обвода и, как следствие, вызывает падение диффузорного эффекта.

Для ликвидации рассмотренной ситуации на рис. 14.45 внешний обвод диффузора устанавливается с отрицательной перекрышей относительно лопаток последней ступени. В этом случае внутренняя поверхность внешнего обвода диффузора обтекается при существенно меньших входных скоростях пара и при неизбежном локальном ускорении потока на входной части обвода сохраняется дозвуковое течение перед последующим участком активного торможения скорости.

Отмеченные факторы существенно ограничивают возможности преобразования кинетической энергии потока в потенциальную в выхлопных патрубках паровых турбин. Однако при правильном учете особенностей течения пара в системе его отвода к конденсатору может быть получен вполне ощутимый диффузорный эффект.

При этом весьма показательны результаты, полученные для бездиффузорного патрубка и модернизированного выхлопного патрубка турбины 13К215 ABB Zamech, где в полном объеме реализованы все отмеченные выше меры.

Подробные исследования, проведенные на работающей турбине под руководством проф. А. Гордилевича (Польша), позволили получить зависимости коэффициента полных потерь энергии $\zeta_п$, от безразмерной скорости λ_z выхода пара из последней ступени турбины как для исходного бездиффузорного выхлопного патрубка (кривая *1* на рис. 14.46), так и для модернизированного патрубка при установке осерадиального диффузора с отрицательной относительно лопаток последней ступени периферийной перекрышей (кривая *3* на рис. 14.46).

Как следует из приведенных на рис. 14.46 зависимостей, переход от бездиффузорного к диффузорному выхлопному патрубку позволил при расчетном расходе пара в конденсатор ($\lambda_z = 0{,}62$) снизить коэффициент полных потерь $\zeta_п$ с 1,375 до 0,825.

Одновременно на рис. 14.46 приведены и результаты лабораторных исследований рассматриваемых выхлопных патрубков (кривые *2* и *4*).

Для бездиффузорного выхлопного патрубка данные лабораторные исследований (кривая *2*) качественно оказались идентичными результатам натурных исследований, хотя в первом случае коэффициенты полных потерь $\zeta_п$ были несколько бóльшими при всех значениях безразмерных скоростей λ_z.

При сравнении характеристик диффузорных патрубков можно отметить, что в натурных условиях с ростом λ_z значение $\zeta_п$ увеличивалось более интенсивно (кривая *3*), чем при лабораторных исследованиях (кривая *4*).

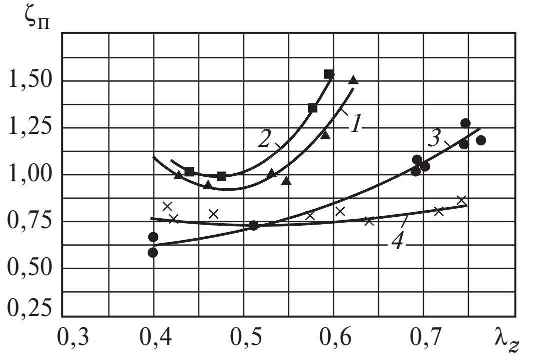


Рис. 14.46. Зависимости $\zeta_п = f(\lambda_z)$ для исходного бездиффузорного патрубка и модернизированного выхлопного патрубка турбины 13К215ABB Zamech

Так, из приведенных на рис. 14.46 зависимостей $\zeta_п = f(\lambda_z)$ видно, что в достаточно большом диапазоне скоростей λ_z ($0{,}3 < \lambda_z < 0{,}6$) коэффициент полных потерь $\zeta_п = 0{,}65 \div 0{,}85$, т.е. коэффициент восстановления давления в рассматриваемом патрубке при указанных скоростях составляет 15—35 %. В этом случае согласно формуле (14.37) давление за турбиной p_z оказывается заметно ниже давления в конденсаторе $p_к$.

Процесс преобразования энергии в h, s-диаграмме для этого случая показан на рис. 14.47 линией zk (все обозначения здесь соответствуют обозначениям, приведенным на рис. 14.44).

Из сравнения между собой процессов в бездиффузорном (см. рис. 14.44) и диффузорном (рис. 14.47) патрубках наглядно видно, что располагаемый перепад энтальпий H_{0z_t} на цилиндр низкого давления в первом случае оказывается существенно меньшим, чем в случае диффузорного патрубка.

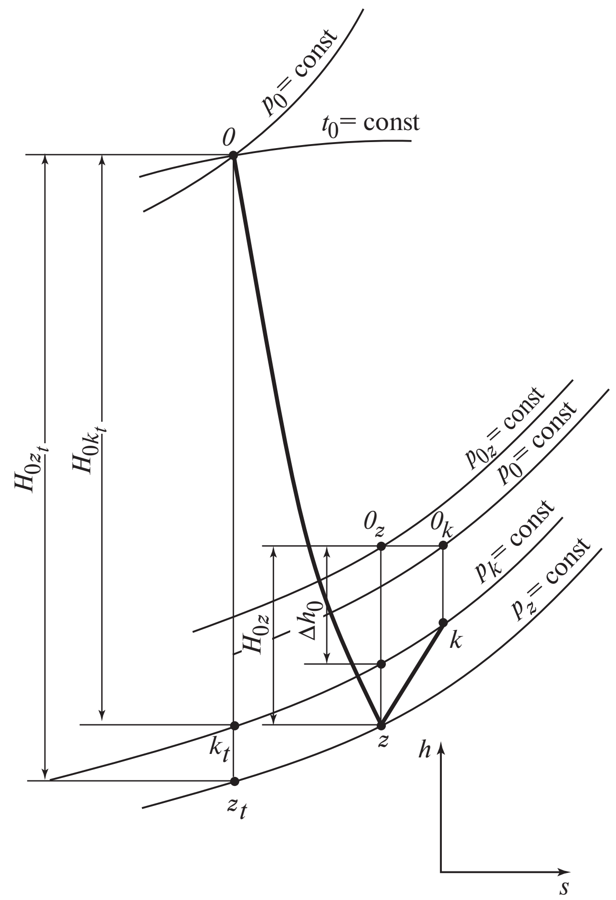


Рис. 14.47. Процесс преобразования энергии в диффузорном выхлопном патрубке в *h*, *s*-диаграмме

Разница этих перепадов энтальпий и определяет в конечном счете (при одинаковых значениях перепада энтальпий H_{0k_t}) экономическую эффективность использования диффузоров в выхлопных патрубках.

Прирост мощности ЦНД турбины при переходе от бездиффузорного к диффузорному патрубку определяется по следующему соотношению:

$$\Delta N_{0i} = G_{\text{к}} \Delta H_{0z} \eta_{\text{о}i},$$

где $G_{\text{к}}$ — расход пара в конденсатор; $\Delta H_{0z} = H_{0z} - H_{0z}^{\text{д}}$; $\eta_{\text{о}i}$ — внутренний относительный КПД турбины.

Поскольку $\zeta_{\text{п}} = \dfrac{H_{0k}}{H_{0z}}$ и $\zeta_{\text{п}}^{\text{д}} = \dfrac{H_{0k}^{\text{д}}}{H_{0z}}$, то

$$\Delta H_{0k} = H_{0z}\left(\zeta_{\text{п}} - \zeta_{\text{п}}^{\text{д}}\right) = \frac{c_z^2}{2}\left(\zeta_{\text{п}} - \zeta_{\text{п}}^{\text{д}}\right)$$

и

$$\Delta N_{0i} = G_{\text{к}} \frac{c_z^2}{2}\left(\zeta_{\text{п}} - \zeta_{\text{п}}^{\text{д}}\right) \eta_{\text{о}i}. \tag{14.37}$$

В газовых турбинах по сравнению с паровыми влияние диффузоров на их экономичность существенно возрастает, так как доля потерь энергии с выходной скоростью относительно располагаемого перепада энтальпий оказывается существенно больше, чем у паровых турбин.

При отсутствии в выхлопных патрубках газовых турбин диффузора давление газов за последней ступенью p_z превышает барометрическое давление B на значение гидравлического сопротивления в отводящем тракте. Практически это сопротивление достаточно мало, так как в газовых турбинах рабочее тело отводится в большинстве случаев вдоль продольной оси. При такой компоновке, естественно, следует использовать кольцевые диффузоры, обладающие по сравнению с осерадиальными диффузорами существенно бóльшим диффузорным эффектом.

Если в диффузорных патрубках паровых турбин минимальный уровень коэффициента полных потерь $\zeta_{\text{п}}^{\text{д}}$ составляет 0,6—0,65, то в патрубках газовых турбин с кольцевыми диффузорами можно снизить значение указанного коэффициента до 0,35—0,4. В этом случае для приведенной выше газовой турбины фирмы Mitsubishi мощностью $N_{\text{э}}$ = 334 МВт прирост мощности за счет диффузорного выхлопного патрубка будет равен около 12 МВт. Относительно полезной мощности рассматриваемой газовой турбины этот прирост составляет около 3,5 %.

В паровой турбине К-300-23,5 при установке диффузорного патрубка с коэффициентом полных потерь $\zeta_{\text{п}}$ = 0,7 прирост мощности будет не более 0,7 %.

Вопросы для самоконтроля

1. Как классифицируются диффузоры?
2. Что такое коэффициент полных потерь энергии?
3. Как связан коэффициент восстановления энергии в диффузоре с коэффициентом полных потерь энергии?
4. Какие давления необходимо знать для определения коэффициента полных потерь энергии?
5. В чем суть расходного метода определения среднего статического давления во входном сечении диффузора?
6. Как связан коэффициент полных потерь энергии с толщиной вытеснения?
7. В чем суть гидравлического метода расчета диффузоров?
8. Что такое коэффициент «смягчения» удара?
9. Что такое эквивалентный диффузор?
10. В чем физическая причина «ламинаризации» пограничного слоя?
11. В чем физическая причина кризисного увеличения полных потерь энергии в области больших дозвуковых скоростей потока?
12. В чем смысл геометрического воздействия на характер течения в диффузорах?
13. Что такое среднерасходный и локальный продольный градиенты давления?
14. Как меняется локальный продольный градиент давления $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ на входном участке конического диффузора?
15. В чем смысл использования диффузорных седел в регулирующих клапанах паровых турбин?
16. Как меняется коэффициент полных потерь энергии при увеличении степени расширения диффузора?
17. Восстанавливается ли энергия в диффузоре за сечением, где произошел отрыв потока от стенок?
18. Что меняется при установке диффузора в выхлопном патрубке турбомашины?
19. В каком случае давление за последней ступенью паровой турбины оказывается ниже давления в конденсаторе?

Глава 15

РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ ДЛЯ СТУПЕНЕЙ ПАРОВЫХ И ГАЗОВЫХ ТУРБИН

15.1. Ступень турбины и преобразование энергии в этой ступени

Классическая ступень турбины, приведенная на рис. 15.1, состоит из диафрагмы *1* с сопловым аппаратом *2* и рабочего колеса *3* с лопаточным аппаратом *4*. Рабочие лопатки имеют общий бандаж *5* с лабиринтовым уплотнением *6*, уменьшающим протечку рабочей среды мимо лопаток рабочего колеса.

В сопловом аппарате *2* происходят преобразование потенциальной энергии в кинетическую (ускорение потока) и придание потоку необходимого направления. В рабочих лопатках кинетическая энергия потока и некоторая часть потенциальной энергии (реактивные ступени) преобразуются в механическую энергию вращающегося ротора.

Процесс преобразования энергии в турбинной ступени в h, s-диаграмме иллюстрируется на рис. 15.2. Здесь точка *0* соответствует состоянию рабочей среды перед ступенью (p_0 — начальное давление, а t_0 — начальная температура перед ступенью). В сопловом аппарате при отсутствии потерь энергии поток расширяется по линии *0-1t* до давления p_1 (точка *1t*). При учете потерь энергии в сопловом аппарате состояние рабочей среды перед лопатками рабочего колеса будет определяться точкой *1*, и условно процесс

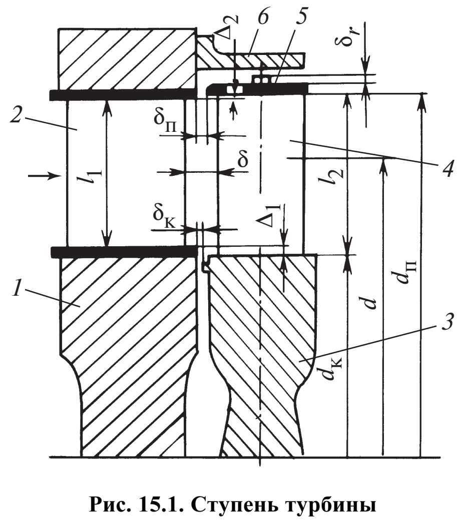


Рис. 15.1. Ступень турбины

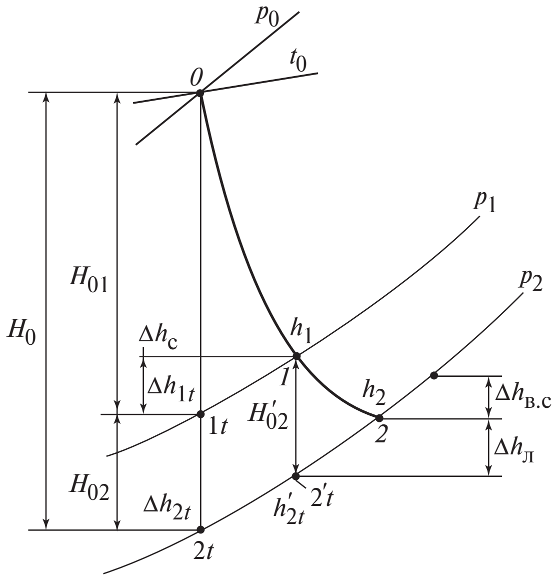


Рис. 15.2. Преобразование энергии в турбинной ступени на *h*, *s*-диаграмме

расширения потока будет проходить по линии *0-1*. Дальнейшее расширение потока в лопаточном аппарате рабочего колеса при отсутствии потерь энергии (идеальная жидкость) идет по линии *1-2't*.

Реальный процесс расширения потока в рабочих лопатках идет по линии *1-2*, и точка *2*, лежащая на изобаре p_2 = const (p_2 — давление за ступенью), определяет состояние рабочей среды за рабочими лопатками рассматриваемой турбинной ступени.

На рис. 15.2 введены следующие обозначения: $H_0 = h_0 - h_{2t}$ — располагаемый перепад энтальпий на ступень; $H_{01} = h_0 - h_{1t}$ — располагаемый перепад энтальпий на сопловом аппарате; $H_{02} = h_{1t} - h_{2t}$ — располагаемый перепад энтальпий на рабочем колесе ($H_{02} \approx H'_{02} = h_1 - h'_{2t}$); $h_с = h_1 - h'_{1t}$ — потеря энергии в сопловом аппарате; $\Delta h_л = h_2 - h'_2$ — потеря энергии в рабочих лопатках; $\Delta h_{в.с} = c_2^2/2$ — потери энергии с выходной скоростью; c_2 — скорость выхода потока из рабочего колеса в абсолютном движении.

Степень преобразования потенциальной энергии в кинетическую в лопаточном аппарате рабочего колеса оценивается по следующему отношению:

$$\rho = H_{02}/H_0.$$

Введенная величина ρ (не путать с плотностью) называется **реактивностью ступени**.

Если $\rho = 0$ (в рабочих лопатках имеет место только поворот потока без изменения его среднерасходной скорости), то такая ступень турбины называется **чисто активной**.

При $\rho = 0{,}5$ (половина располагаемой потенциальной энергии переходит в кинетическую в сопловом аппарате, а вторая половина преобразуется в кинетическую энергию непосредственно в лопаточном аппарате рабочего колеса) ступень называется чисто **реактивной**.

Реактивность ρ большинства реальных ступеней выбирается в интервале $0 < \rho < 0{,}5$. Если провести сечение лопаточного аппарата турбинной ступени по среднему диаметру и развернуть это сечение на плоскости, то получится плоская решетка профилей, отстоящих друг от друга на расстоянии t (шаг решетки). Их форма в поперечном сечении и расположение профилей относительно друг друга показаны на рис. 15.3.

Плоские сечения и замена кольцевых решеток профилей плоскими решетками впервые были предложены Н.Е. Жуковским. Эти сечения широко используются при лабораторных исследованиях решеток профилей самой разнообразной формы [2].

На рис. 15.3 представлены не только решетки профилей соплового аппарата и рабочего колеса, но и треугольники скоростей на входе и выходе рабочего колеса. Величины c_1 и c_2 определяют скорости рабочей среды на входе и выходе рабочей решетки профилей в абсолютном движении. В относительном движении скорости в этих же сечениях обозначены через w_1 и w_2. Окружная (переносная) скорость вращения рабочего колеса обозначена

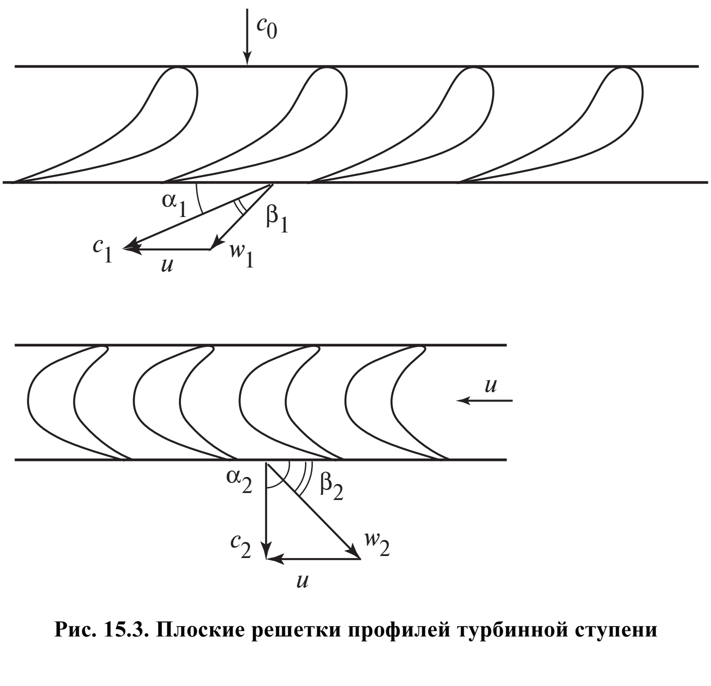


Рис. 15.3. Плоские решетки профилей турбинной ступени

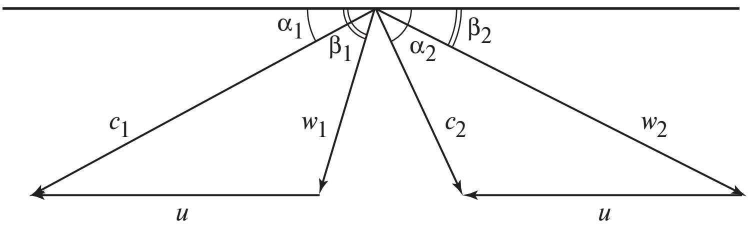


Рис. 15.4. Треугольники скоростей турбинной ступени

через u. Оба треугольника скоростей обычно приводят к одному центру так, как это показано на рис. 15.4. Здесь углы α_1 и α_2 относятся к абсолютным скоростям c_1 и c_2, а углы β_1 и β_2 соответствуют положению на плоскости относительных скоростей w_1 и w_2.

15.2. Определение усилий, действующих на рабочие лопатки турбинной ступени и ее мощность

Для определения силового взаимодействия рабочей среды с лопатками рабочего колеса рассмотрим плоскую решетку профилей, изображенную на рис. 15.5, и выделим жидкий контур $abdea$ так, как это показано на рисунке.

На объем жидкости, ограниченный этим контуром, действуют следующие внешние силы. По входному сечению ab действует сила, обусловленная давлением p_1 и равная $R_{p_1} = p_1 F_{ab} = p_1 t$. В выходном сечении сила R_{p_2} будет определяться в зависимости от давления p_2:

$$R_{p_2} = p_2 t.$$

Поверхности bd и ea эквидистантны, а действующие на них силы имеют противоположные знаки. Соответственно суммарная сила здесь будет равна нулю.

К внешним силам следует отнести и силу, с которой профиль, находящийся внутри рассматриваемого контура, действует на поток. Разложим эту силу на две составляющие — в направлении вращения колеса R'_u и в перпендикулярном к плоскости колеса направлении R'_a. Применим теперь к рассматриваемому объему жидкости уравнение сохранения количества движения. Проектируя это уравнение на оси x_u и y_a, получаем:

$G_1(c_{2u} - c_{1u}) = R'_u$ — проекция на ось x_u (проекции сил R_{p_1} и R_{p_2} на ось x_u равны нулю);

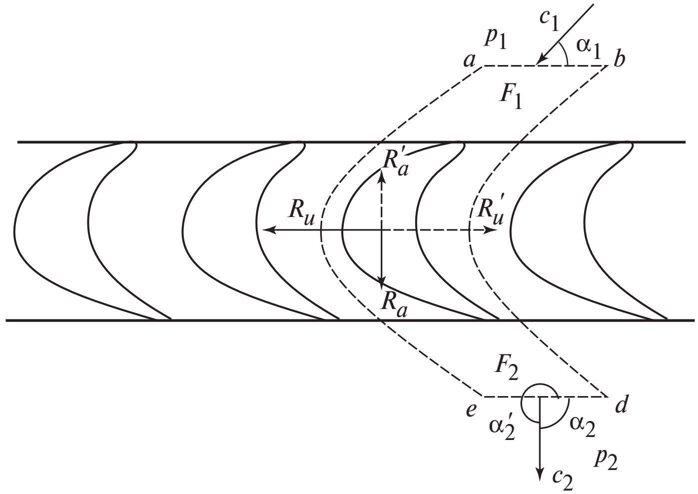


Рис. 15.5. К выводу уравнений, определяющих силовое воздействие потока на профиль в решетке профилей

$G_1(c_{2a} - c_{1a}) = R'_a + (p_2 - p_1)$ — проекция на ось y_a,

где G_1 — массовый расход рабочей среды через выделенный контур.

Поскольку согласно третьему закону Ньютона сила, с которой профиль действует на жидкость, равна и противоположно направлена силе, с которой поток действует на профиль, то из приведенных соотношений следует, что

$$R_u = G_1(c_{1u} - c_{2u}) \tag{15.1}$$

и

$$R_a = G_1(c_{1a} - c_{2a}) + (p_1 - p_2)t. \tag{15.2}$$

Используя обозначения скоростей и углов, приведенные на рис. 15.5, можно записать

$$c_{1u} = c_1 \cos \alpha_1; \quad c_{2u} = c_2 \cos (180 - \alpha_2) = -c_2 \cos \alpha_2;$$

$$c_{1a} = c_1 \sin \alpha_1; \quad c_{2a} = c_2 \sin (180 - \alpha_2) = c_2 \sin \alpha_2.$$

Таким образом, окружная составляющая силы, действующей на рабочие лопатки колеса, будет определяться в виде

$$R_u = G_1(c_1 \cos \alpha_1 + c_2 \cos \alpha_2). \tag{15.3}$$

Для осевой силы получаем

$$R_a = G_1(c_1 \sin \alpha_1 - c_2 \sin \alpha_2) + (p_1 - p_2)t. \tag{15.4}$$

Здесь G_1 — секундный массовый расход среды через рабочее колесо турбины.

В случае чисто активной ступени ($\rho = 0$) $p_1 = p_2$ и

$$R_a = G_1(c_1 \sin \alpha_1 - c_2 \sin \alpha_2), \tag{15.5}$$

т.е. для активной ступени осевая сила оказывается существенно меньше, чем для турбинной ступени реактивного типа.

При известной окружной скорости u мощность, развиваемая турбинной ступенью, определяется по формуле

$$N_e = G_1 u(c_1 \cos \alpha_1 + c_2 \cos \alpha_2).$$

Для анализа работы турбинных ступеней удобнее пользоваться удельной мощностью L_e, т.е. мощностью, развиваемой ступенью при единичном массовом расходе рабочего тела:

$$L_e = N_e/G_1 = u(c_1 \cos \alpha_1 + c_2 \cos \alpha_2). \tag{15.6}$$

Из треугольников скоростей (см. рис. 15.4) следует, что

$$c_1 \cos \alpha_1 + c_2 \cos \alpha_2 = w_1 \cos \beta_1 + u + w_2 \cos \beta_2 - u = w_1 \cos \beta_1 + w_2 \cos \beta_2.$$

Тогда формула (15.6) может быть записана в следующем виде:

$$L_e = u(w_1 \cos \beta_1 + w_2 \cos \beta_2). \tag{15.7}$$

Формуле (15.6) можно придать и другой вид, если воспользоваться следующими соотношениями, вытекающими из треугольников скоростей (см. рис. 15.4):

$$w_1^2 = c_1^2 + u^2 - 2c_1 u \cos \alpha_1;$$

$$w_2^2 = c_2^2 + u^2 + 2c_2 u \cos \alpha_2.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} c_1 u \cos \alpha_1 &= \frac{c_1^2}{2} + \frac{u^2}{2} - \frac{w_1^2}{2}; \\ c_2 u \cos \alpha_2 &= \frac{w_2^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} - \frac{u^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{15.8}$$

Подставляя (15.8) в (15.6), получаем

$$L_e = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}. \tag{15.9}$$

Для нахождения скоростей, входящих в уравнение (15.9), рассмотрим отдельно решетки профилей соплового аппарата и рабочего колеса и запишем для них уравнение энергии.

Как уже отмечалось, в сопловой решетке происходит только ускорение потока без совершения работы. В этом случае полная энергия потока во входном и выходном сечениях остается неизменной. Следовательно, при отсутствии потерь

$$\frac{c_0^2}{2} + h_0' = \frac{c_{1t}^2}{2} + h_{1t}.$$

Отсюда

$$c_{1t} = \sqrt{2(h_0' - h_{1t}) + c_0^2} = \sqrt{2H_{01}' + c_0^2},$$

где c_0 — скорость на входе в сопловую решетку; h_0' — энтальпия рабочего тела перед сопловым аппаратом.

Если перепад энтальпий, соответствующий скорости c_0, включить в располагаемый перепад энтальпий H_{01}', т.е. вести расчет скорости c_{1t} по параметрам полного торможения перед сопловой решеткой, то

$$c_{1t} = \sqrt{2H_{01}} = \sqrt{2(1-\rho)H_0}, \tag{15.10}$$

где $H_{01} = H_{01}' + \dfrac{c_0^2}{2}$.

Для перехода от теоретической c_{1t} к действительной скорости выхода потока из сопловой решетки c_1 введем в рассмотрение коэффициент скорости $\varphi = c_1/c_{1t}$. Тогда

$$c_1 = \varphi\sqrt{2(1-\rho)H_0}. \tag{15.11}$$

Коэффициент скорости φ сопловых решеток показывает, насколько действительная скорость c_1 отличается от теоретической c_{1t}, и находится в результате либо прямых опытных исследований, либо соответствующих теоретических расчетов.

По найденной таким образом скорости c_1 и известной окружной скорости легко определяется скорость входа потока в рабочую решетку профилей в относительном движении:

$$w_1 = \sqrt{c_1^2 + u^2 - 2c_1 u \cos\alpha_1}. \tag{15.12}$$

При проектировании ступени угол выхода потока из сопловой решетки входит в число конструктивных параметров и принимается исходя из ряда дополнительных соображений, среди которых основным является условие получения необходимой высоты лопаток соплового аппарата. Чаще всего диапазон изменения угла α_1 составляет $12 < \alpha_1 < 20°$. Из треугольника скоростей (см. рис. 15.4) находится и угол входа потока в решетку профилей рабочего колеса в относительном движении:

$$\beta_1 = \operatorname{arctg}\frac{c_1\sin\alpha_1}{c_1\cos\alpha_1 - u}. \tag{15.13}$$

Для нахождения скорости выхода потока из рабочей решетки профилей в относительном движении w_2 запишем уравнение сохранения энергии для рабочего колеса, имея в виду, что полная энергия потока за рабочим колесом уменьшается на значение удельной мощности, определяемой по формуле (15.9):

$$\frac{c_1^2}{2} + h_1 = \frac{c_2^2}{2} + h_2 + L_e,$$

или с учетом (15.9) можно записать

$$\frac{c_1^2}{2} + h_1 = \frac{c_2^2}{2} + h_2 + \frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} + \frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2}.$$

Отсюда после очевидных сокращений получаем

$$\frac{w_1^2}{2} + h_1 = \frac{w_2^2}{2} + h_2. \qquad (15.14)$$

Уравнение (15.14) представляет собой уравнение энергии, записанное для решетки профилей рабочего колеса в относительном движении. Из (15.14) будем иметь

$$w_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2) + w_1^2}.$$

Если в рабочей решетке отсутствуют потери энергии, то процесс расширения идет по линии *1-2* (см. рис. 15.2) и

$$w_{2t} = \sqrt{2(h_1 - h_{2t}) + w_1^2} = \sqrt{2H_{02} + w_1^2} = \sqrt{2\rho H_0 + w_1^2}. \qquad (15.15)$$

Для связи между теоретической w_{2t} и действительной w_2 скоростями введем коэффициент скорости

$$\psi = w_2/w_{2t}.$$

Тогда

$$w_2 = \psi w_{2t} = \psi \sqrt{2\rho H_0 + w_1^2}. \qquad (15.16)$$

Используя выходной треугольник скоростей, получаем

$$c_2 = \sqrt{w_2^2 + u^2 - 2w_2 u \cos \beta_2}; \qquad (15.17)$$

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{w_2 \sin \beta_2}{w_2 \cos \beta_2 - u}. \qquad (15.18)$$

Для чисто активной ступени ($\rho = 0$)

$$w_2 = \psi w_1,$$

т.е. скорость потока в относительном движении в выходном сечении рабочей решетки отличается от скорости во входном сечении на значение коэффициента ψ.

15.3. Коэффициент полезного действия турбинной ступени

Эффективность работы турбинной ступени оценивается **внутренним относительным коэффициентом полезного действия**.

В лопаточном аппарате турбинной ступени некоторая часть располагаемого перепада энтальпий H_0 безвозвратно теряется в сопловом аппарате, в лопатках рабочего колеса и с выходной скоростью. Таким образом, полезно использованный перепад энтальпий H_i определяется по выражению

$$H_i = H_0 - \Delta h_{\text{с}} - \Delta h_{\text{л}} - \Delta h_{\text{в.с}},$$

где $\Delta h_{\text{с}}$ — абсолютная потеря энтальпии в сопловом аппарате; $\Delta h_{\text{л}}$ — то же в лопатках рабочего колеса; $\Delta h_{\text{в.с}}$ — потеря энтальпии с выходной скоростью c_2.

С учетом введенных обозначений **внутренний относительный лопаточный КПД** $\eta_{\text{о.л}}$ ступени может быть записан в виде

$$\eta_{\text{о.л}} = \frac{H_i}{H_0} = 1 - \frac{\Delta h_{\text{с}}}{H_0} - \frac{\Delta h_{\text{л}}}{H_0} - \frac{\Delta h_{\text{в.с}}}{H_0} = 1 - \zeta_{\text{с}} - \zeta_{\text{л}} - \zeta_{\text{в.с}}. \tag{15.19}$$

Здесь $\zeta_{\text{с}} = \dfrac{\Delta h_{\text{с}}}{H_0}$ — коэффициент потерь энергии в сопловом аппарате; $\zeta_{\text{л}} = \dfrac{\Delta h_{\text{л}}}{H_0}$ — то же в рабочем колесе турбины; $\zeta_{\text{в.с}} = \dfrac{\Delta h_{\text{в.с}}}{H_0}$ — то же с выходной скоростью.

Абсолютные значения приведенных потерь энергии определяются следующим образом:

$$\Delta h_{\text{с}} = \frac{c_{1t}^2 - c_1^2}{2} = \frac{c_{1t}^2}{2}\left(1 - \frac{c_1^2}{c_{1t}^2}\right) = \frac{c_{1t}^2}{2}\,(1 - \varphi^2); \tag{15.20}$$

$$\Delta h_{\text{л}} = \frac{w_{2t}^2 - w_2^2}{2} = \frac{w_{2t}^2}{2}\left(1 - \frac{w_2^2}{w_{2t}^2}\right) = \frac{w_{2t}^2}{2}\,(1 - \psi^2); \tag{15.21}$$

$$\Delta h_{\text{в.с}} = c_2^2/2. \tag{15.22}$$

Поскольку располагаемому перепаду энтальпий $H_0 = h_0 - h_{2t}$ соответствует эквивалентная ему скорость

$$c_a = \sqrt{2H_0}, \tag{15.23}$$

то формула (15.19) с учетом соотношений (15.20)—(15.22) примет вид

$$\eta_{о.л} = 1 - \frac{c_{1t}^2}{c_a^2}(1-\varphi^2) - \frac{w_{2t}^2}{c_a^2}(1-\psi^2) - \frac{c_2^2}{c_a^2}. \tag{15.24}$$

Согласно формулам (15.10) и (15.15)

$$c_{1t}^2 = 2H_0(1-\rho) = c_a^2(1-\rho);$$

$$w_{2t}^2 = c_a^2\rho + w_1^2.$$

В свою очередь, из треугольников скоростей следует, что

$$w_1^2 = c_1^2 + u^2 - 2c_1u\cos\alpha_1 = \varphi^2 c_a^2(1-\rho) + u^2 - 2\varphi c_a u\sqrt{1-\rho}\cos\alpha_1.$$

Тогда с учетом полученных формул для c_{1t}^2 и w_{2t}^2 формула (15.24) будет иметь вид

$$\eta_{о.л} = 1 - (1-\rho)(1-\varphi^2) - \left(\rho + \frac{w_1^2}{c_a^2}\right)(1-\psi^2) - \frac{c_2^2}{c_a^2} = 1 - (1-\rho)(1-\varphi^2) -$$

$$- \left(\rho + \varphi^2(1-\rho) + \frac{u^2}{c_a^2} - 2\varphi\frac{u}{c_a}\sqrt{1-\rho}\cos\alpha_1\right)(1-\psi^2) - \frac{c_2^2}{c_a^2}. \tag{15.25}$$

Полученное соотношение показывает, что относительный лопаточный КПД ступени зависит от ее реактивности ρ, потерь энергии в решетках (коэффициентов скорости φ и ψ), безразмерной окружной скорости u/c_a, угла α_1 и потерь с выходной скоростью, определяемых в зависимости от относительной скорости c_2/c_a.

Для чисто активной ступени ($\rho = 0$)

$$\eta_{о.л} = \varphi^2\psi^2 - \left(\frac{u^2}{c_a^2} - 2\varphi\frac{u}{c_a}\cos\alpha_1\right)(1-\psi^2) - \frac{c_2^2}{c_a^2}. \tag{15.26}$$

Выясним далее, в какой степени относительная окружная скорость $x_a = u/c_a$ влияет на КПД изолированной турбинной ступени.

С этой целью представим лопаточный КПД в виде отношения удельной мощности L_e к располагаемому перепаду энтальпий H_0 с использованием формулы (15.7):

$$\eta_{о.л} = \frac{L_e}{H_0} = \frac{u(w_1\cos\beta_1 + w_2\cos\beta_2)}{c_a^2/2}.$$

Отсюда

$$\eta_{\text{о. л}} = \frac{2uw_1 \cos\beta_1}{c_a^2}\left(1 + \frac{w_2}{w_1}\frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1}\right).$$

Для активной ступени ($\rho = 0$) $w_2 = \psi w_1$ [см. (15.16)], а из треугольников скоростей (см. рис. 15.4) следует

$$w_1 \cos\beta_1 = c_1 \cos\alpha_1 - u = \varphi c_{1t} \cos\alpha_1 - u.$$

Тогда

$$\eta_{\text{о. л}} = \frac{2u(\varphi c_{1t}\cos\alpha_1 - u)}{c_a^2}\left(1 + \psi\frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1}\right).$$

При $\rho = 0$ $c_{1t} = c_a$ [см. (15.10)]. В результате

$$\eta_{\text{о. л}} = 2x_a(\varphi\cos\alpha_1 - x_a)\left(1 + \psi\frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1}\right), \qquad (15.27)$$

где $x_a = u/c_a$, т.е. относительный лопаточный КПД $\eta_{\text{о.л}}$ представляет собой параболическую зависимость от основного кинематического параметра ступени x_a.

Максимального значения $\eta_{\text{о.л}}$ достигает в точке, где $\dfrac{\partial\eta_{\text{о.л}}}{\partial x_a} = 0$. Из этого условия следует

$$2\varphi\cos\alpha_1 - 4(x_a)_{\text{опт}} = 0;$$

$$(x_a)_{\text{опт}} = \frac{\varphi\cos\alpha_1}{2}$$

и

$$\eta_{\text{о.л}}^{\max} = \frac{\varphi^2}{2}\cos^2\alpha_1\left(1 + \psi\frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1}\right).$$

Графически зависимость (15.27) изображена на рис. 15.6 (парабола *1*).

Параболическая зависимость относительного лопаточного КПД от параметра x_a сохраняется и для реактивных ступеней, но оптимальное значение величины x_a и значение максимального КПД оказываются бóльшими.

Для реактивных ступеней

$$(x_a)_{\text{опт}} = \frac{\varphi\cos\alpha_1}{2\sqrt{1-\rho}}.$$

При $\rho = 0{,}5$ (чисто реактивная ступень)

$$(x_a)_{\text{опт}} = \frac{\varphi\cos\alpha_1}{1{,}414}.$$

Качественная зависимость $\eta_{\text{о.л}} = f(x_a)$ для этой ступени показана на рис. 15.6 в виде параболы *2*.

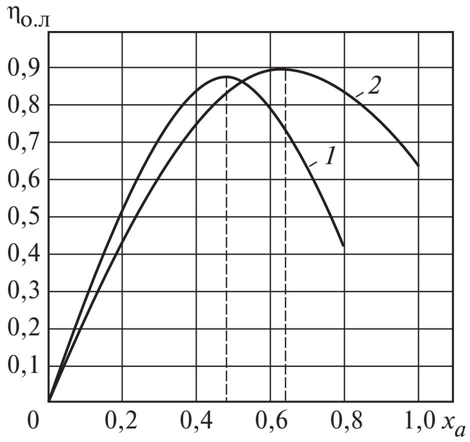


Рис. 15.6. Зависимость $\eta_{о.л} = f(x_a)$ для активных (кривая *1*) и реактивных (кривая *2*) ступеней

Как следует из приведенных зависимостей, лопаточный КПД конкретной ступени существенно зависит от потерь энергии как в сопловых, так и в рабочих решетках профилей, которые в данном случае определяются коэффициентами скорости φ и ψ. Эти коэффициенты прямо связаны с коэффициентами потерь энергии в используемых решетках профилей.

15.4. Связь коэффициентов потерь энергии в сопловых и рабочих решетках профилей с коэффициентами скорости φ и ψ

Процесс расширения рабочей среды в сопловой решетке профилей на h, s-диаграмме будет выглядеть так, как это показано на рис. 15.7, где p_0 и t_0 — параметры полного торможения перед решеткой, а p_1 — давление среды за ней.

При отсутствии потерь (идеальная жидкость) снижение давления от p_0 до p_1 происходит при постоянной энтропии (линия *0-1t*) и от перепада энтальпий H_{01} зависит теоретическая скорость c_{1t} в выходном сечении решетки: $c_{1t} = \sqrt{2H_{01}}$.

Реальный процесс расширения рабочей среды идет по линии *0-1* и действительная выходная скорость c_1 определяется в зависимости от перепада энтальпий H_i:

$$c_1 = \sqrt{2H_i} .$$

Отрезку Δh на h, s-диаграмме (рис. 15.7) соответствуют суммарные потери энергии в решетке профилей. Из рис. 15.7 следует, что

$$H_{01} = H_i + \Delta h.$$

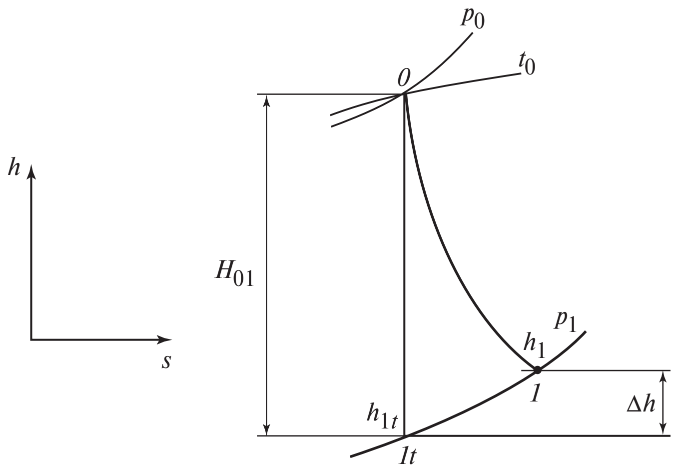


Рис. 15.7. Процесс расширения потока рабочей среды в сопловой решетке на *h*, *s*-диаграмме

Отсюда

$$1 = \frac{H_i}{H_{01}} + \frac{\Delta h}{H_{01}}.$$

Относительная величина потерь $\zeta_с = \Delta h / H_{01}$ называется коэффициентом потерь энергии в сопловой решетке.

В свою очередь, для сопловой решетки можно записать

$$\frac{H_i}{H_0} = \frac{c_1^2}{c_{1t}^2} = \varphi^2 \quad \text{и} \quad 1 = \varphi^2 + \zeta_с.$$

Следовательно,

$$\varphi = \sqrt{1 - \zeta_с}\,. \tag{15.28}$$

Таким образом, коэффициент скорости φ и коэффициент потерь энергии $\zeta_с$ связаны между собой однозначной зависимостью (15.28).

Аналогичная связь имеет место и для рабочей решетки профилей:

$$\psi = \sqrt{1 - \zeta_р}\,, \tag{15.29}$$

где $\zeta_р$ — коэффициент потерь энергии в рабочей решетке профилей.

Абсолютное значение потерь энергии Δh в решетке профилей складывается из потерь на трение в межлопаточном канале $\Delta h_{тр}$, кромочных потерь $\Delta h_{кр}$, обусловленных конечной толщиной выходных кромок профиля, концевых потерь $\Delta h_к$, связанных с особенностями течения в криволинейных каналах конечной высоты, и волновых потерь $\Delta h_в$ в случае перехода к сверхзвуковым скоростям. Таким образом,

$$\Delta h = \Delta h_{тр} + \Delta h_{кр} + \Delta h_к + \Delta h_в.$$

При делении всех приведенных потерь энергии на перепад энтальпий H_{01} получим сумму соответствующих коэффициентов потерь энергии в сопловых решетках профилей:

$$\zeta = \zeta_{тр} + \zeta_{кр} + \zeta_{к} + \zeta_{в}.$$

(При отсутствии сверхзвуковых скоростей коэффициент волновых потерь $\zeta_{в} = 0$.)

Сумма коэффициентов потерь на трение, кромочных потерь и волновых потерь определяет коэффициент профильных потерь:

$$\zeta_{пр} = \zeta_{тр} + \zeta_{кр} + \zeta_{в}.$$

Тогда

$$\zeta = \zeta_{пр} + \zeta_{к}.$$

Приведенные составляющие общих потерь энергии позволяют понять физическую природу потерь энергии в решетках профилей, что существенно облегчает поиск мер, направленных на снижение рассматриваемых потерь, а также дает возможность теоретических расчетов всех составляющих коэффициента потерь энергии. При этом как абсолютные, так и относительные значения потерь энергии в очень значительной степени зависят от типа используемых в турбинной ступени решеток профилей.

Прежде чем рассматривать физическую природу и методы расчета указанных выше составляющих потерь энергии дадим краткую классификацию решеток профилей турбинных ступеней.

15.5. Классификация решеток профилей, используемых в турбинных ступенях

Как отмечалось ранее, турбинная ступень состоит из неподвижного соплового аппарата и вращающегося рабочего колеса. Соответственно различают неподвижные сопловые и рабочие вращающиеся решетки профилей.

По способу преобразования энергии в межлопаточных каналах решетки делятся на реактивные, когда в межлопаточных каналах происходит не только поворот потока, но и его ускорение, и на активные решетки профилей, в межлопаточных каналах которых осуществляется только поворот потока при сохранении неизменной среднерасходной скорости.

Независимо от типа ступени все сопловые решетки выполняются реактивного типа с непрерывным уменьшением в направлении движения потока проходной площади межлопаточных каналов.

Решетки профилей рабочих колес могут быть как реактивными (реактивные ступени), так и активными (активные ступени).

В зависимости от направления движения рабочего тела относительно оси вращения турбинной ступени решетки делятся на **осевые**, **радиальные** и **диагональные**.

Поскольку в мощных энергетических турбинах в основном используются осевые решетки профилей, то здесь ограничимся рассмотрением только этих решеток.

Типичный сектор кольцевой (цилиндрической) решетки профилей представлен на рис. 15.8. Геометрическими параметрами этой решетки являются:

средний диаметр решетки D;

длина (высота) решетки l;

шаг установки профилей на среднем диаметре t;

хорда профиля b;

угол установки профиля $\beta_у$;

форма профиля, которая обычно задается координатным способом в виде зависимости $x = f(y)$;

форма меридиональных обводов решетки.

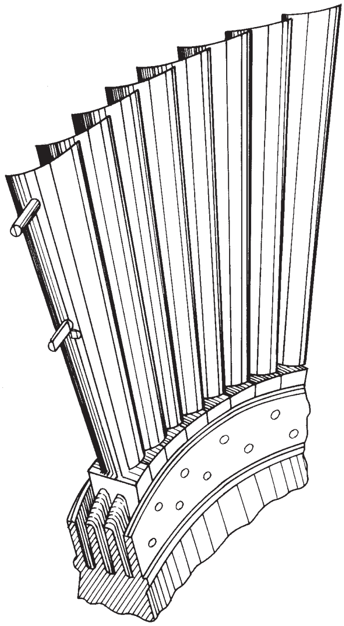


Рис. 15.8. Кольцевые решетки профилей

При большом отношении среднего диаметра D к высоте l кольцевую решетку профилей без большой погрешности для исследования характера течения в межлопаточных каналах можно считать плоской.

На рис. 15.9 показаны плоские сопловые и плоские рабочие решетки профилей и приведены их основные геометрические характеристики. На практике эти характеристики задаются обычно в безразмерном виде.

Для сопловых решеток (рис. 15.9, *а*) такими характеристиками являются:

относительная длина (высота) решетки $\bar{l} = l/b$;

относительный шаг $\bar{t} = t/b$;

относительная ширина $\bar{B} = B/b$;

угол входа α_0;

угол установки профиля $\alpha_у$;

теоретический угол выхода потока из решетки $\alpha_1 = \arcsin a_1/t$.

Геометрические характеристики плоских рабочих решеток (рис. 15.9, *б*) отличаются от сопловых только обозначениями углов:

угол входа потока на решетку β_1;

угол установки профиля $\beta_у$;

теоретический угол выхода потока из решетки $\beta_2 = \arcsin a_2/t$.

Отличительной особенностью турбинных решеток от рассмотренных ранее профилированных сопл является то, что рабочее тело в межлопаточном канале движется по криволинейным линиям тока, а за минимальными

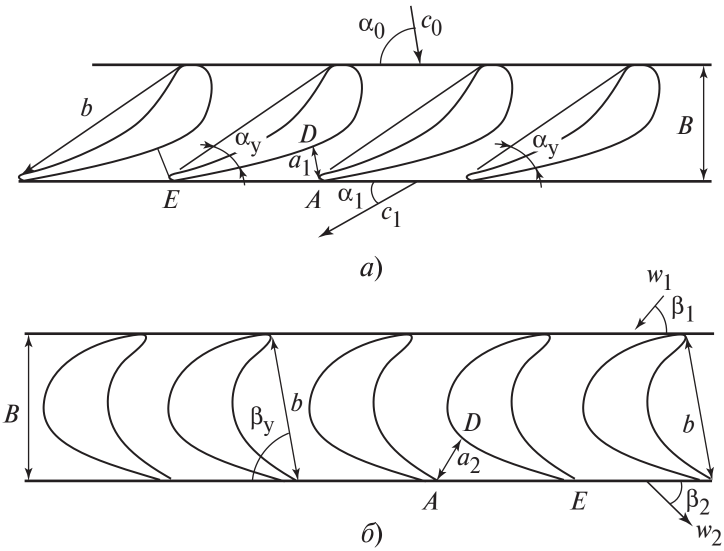


Рис. 15.9. Плоские сопловые (*а*) и рабочие (*б*) решетки профилей

сечениями (a_1 — для сопловых и a_2 — для рабочих решеток) поток движется внутри треугольного плоского канала *ADE* вдоль спинки профиля *DE* при отсутствии со стороны вогнутой поверхности твердой стенки, т.е. здесь имеет место течение рабочей среды при наличии свободной границы, и это существенно меняет характер течения в рассматриваемой области. Треугольник *ADE* обычно называют косым срезом решетки.

В зависимости от значений среднерасходных безразмерных скоростей $M_{1t}(M_{2t})$ или $\lambda_{1t}(\lambda_{2t})$ решетки профилей делятся на три группы: А, Б, В (В1).

В первую группу (группу А) входят решетки, предназначенные для дозвуковых скоростей $M_{1t} \le 0{,}8 \div 0{,}85$ ($\lambda_{1t} \le 0{,}85 \div 0{,}9$). Их отличительная особенность состоит в том, что участок спинки профиля *DE* в пределах косого среза имеет достаточно большую кривизну.

Вторая группа (группа Б) предназначена для трансзвуковых скоростей ($0{,}8 < M_{1t} < 1{,}2$), и спинка профиля в области косого среза (*DE*) выполняется с очень небольшой кривизной или вообще прямолинейной.

Наконец, третья группа (группа В) предназначена для сверхзвуковых скоростей. При $1{,}2 < M_{1t} < 1{,}3 \div 1{,}4$ спинка профиля в области косого среза имеет обратную кривизну, а ее форма близка к отрезку логарифмической спирали. Для скоростей $M_{1t} > 1{,}4$ уже используются решетки с расширяющимися межлопаточными каналами (группа В1). Геометрические формы сопловых и рабочих решеток для всех указанных групп показаны на рис. 15.10. В этом случае к уже известным геометрическим характеристикам для решеток группы В1 добавляется степень расширения решетки $n = a_1/a_0$, где a_0 — площадь узкого сечения межлопаточного канала.

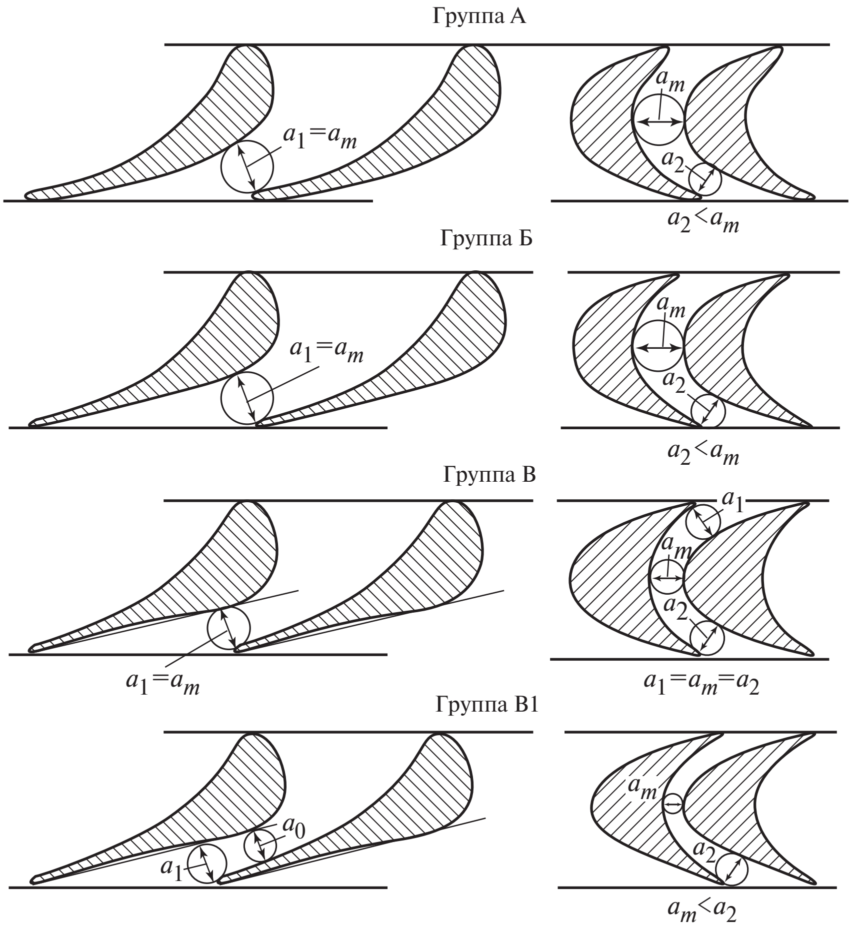


Рис. 15.10. Решетка профилей разных групп

Для маркировки решеток используются различные обозначения в разных фирмах, но с информационной точки зрения наиболее удачными являются обозначения, используемые в Атласе профилей МЭИ [10], где первая буква указывает тип решетки (С — сопловая, Р — рабочая). Далее даются углы входа и выхода потока (α_0, α_1 — для сопловых и β_1, β_2 — для рабочих решеток), и, наконец, последняя буква показывает, к какой группе (по скоростям) относится решетка. Так, например, обозначение С9015А указывает, что рассматривается сопловая решетка с углами $\alpha_0 = 90°$ и $\alpha_1 = 15°$, предназначенная для работы при дозвуковых скоростях ($M_{1t} < 0{,}8$).

В свою очередь, решетка, обозначенная как Р2520Б, является рабочей с расчетными углами $\beta_1 = 25°$, $\beta_2 = 20°$, предназначенная для работы в области трансзвуковых скоростей.

После этих общих сведений рассмотрим физическую природу составляющих потерь энергии в решетках и методы их теоретической оценки.

15.6. Потери на трение и коэффициент потерь на трение в решетках профилей турбинной ступени

Потери на трение являются одной из составляющих общих потерь энергии в турбинных решетках. Эти потери обусловлены вязкостью рабочих сред, в результате чего между слоями жидкости, двигающейся с различной скоростью, возникает касательное напряжение τ, которое при плоском течении согласно закону Ньютона пропорционально поперечному градиенту скорости $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y$ в некоторой степени n (при ламинарном течении $n = 1$, для турбулентного течения $n = 2$). Таким образом,

$$\tau \sim (\mathrm{d}u/\mathrm{d}y)^n.$$

При обтекании профиля решетки как на выпуклой, так и на вогнутой его поверхности образуется пограничный слой (см. гл. 12), в пределах которого и происходит основное изменение скорости по нормали к обтекаемой поверхности $[0 < \mathrm{d}u/\mathrm{d}y \le (\mathrm{d}u/\mathrm{d}y)_{y=\delta}]$. Соответственно в рамках теории пограничного слоя затраты энергии на преодоление сил трения в пределах пограничного слоя профиля в решетке и определяют потери на трение.

Для количественной оценки этих потерь энергии рассмотрим решетку профилей, показанную на рис. 15.11, и выделим контур ABB_0A_0A с профилем внутри него, причем линии B_0B и A_0A проведем через средины межлопаточных каналов.

Потеря кинетической энергии ΔK в сечении AB согласно формуле (12.15) будет определяться в виде

$$\Delta K = \frac{1}{2}\,\rho_{1t}c_{1t}^3(\delta_{\text{сп}}^{***} + \delta_{\text{в}}^{***})\cdot 1\,, \tag{15.30}$$

где c_{1t} — теоретическая скорость выхода потока из сопловой решетки; $\delta_{\text{сп}}^{***}$ и $\delta_{\text{в}}^{***}$ — толщины потери энергии на выходной кромке со стороны спинки

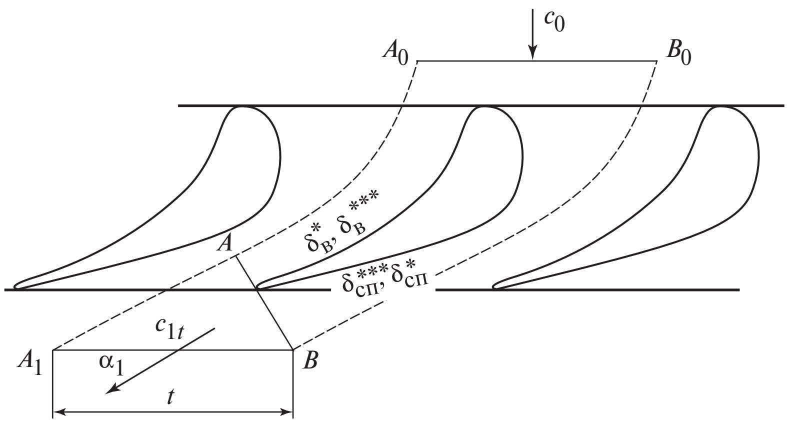


Рис. 15.11. К определению потерь на трение

и вогнутой поверхности профиля (для рабочей решетки скорость c_{1t} следует заменить на теоретическую скорость выхода потока в относительном движении w_{2t}); 1 — единичная высота решетки.

Теоретическая кинетическая энергия действительного массового расхода рабочей среды G, выходящей из рассматриваемого контура, определяется по очевидной формуле

$$K_t = \frac{Gc_{1t}^2}{2}.$$

В свою очередь,

$$G = \mu G_t = \mu\rho c_{1t} BA \cdot 1 = \mu\rho c_{1t} t\ \sin\alpha_1 \cdot 1,$$

где $\mu = 1 - \dfrac{\delta^*_{\text{сп}} + \delta^*_{\text{в}}}{t \sin\alpha_1}$ — коэффициент расхода (см. гл. 12).

Следовательно,

$$K_t = \frac{1}{2}\mu\rho c_{1t}^3 t\sin\alpha_1 = \frac{1}{2}\rho c_{1t}^3 t \sin\alpha_1\left(1 - \frac{\delta^*_{\text{сп}} + \delta^*_{\text{в}}}{t\sin\alpha_1}\right). \qquad (15.31)$$

Поскольку коэффициент потерь на трение $\zeta_{\text{тр}}$ равен отношению потерянной в пограничном слое кинетической энергии [см. (15.30)] к теоретической кинетической энергии K_t [см. (15.31)], то

$$\zeta_{\text{тр}} = \frac{\Delta K}{K_t} = \frac{\delta^{***}_{\text{сп}} + \delta^{***}_{\text{в}}}{\mu t\sin\alpha_1} = \frac{\delta^{***}_{\text{сп}} + \delta^{***}_{\text{в}}}{t\sin\alpha_1\left(1 - \dfrac{\delta^*_{\text{сп}} + \delta^*_{\text{в}}}{t\sin\alpha_1}\right)}. \qquad (15.32)$$

Толщины потери энергии δ^{***} и толщины вытеснения δ^* выразим через толщины потери импульса δ^{**} по указанным ранее (см. гл. 12) соотношениям:

$$\delta^{***} = H^*\delta^{**} \quad \text{и} \quad \delta^* = H\delta^{**},$$

где для турбинных решеток можно принять следующие значения переходных множителей: $H^* = 1{,}8$; $H = 1{,}4$.

Тогда

$$\zeta_{\text{тр}} = \frac{H^*\sum\limits_{i=1}^{2}\delta_i^{**}}{t\sin\alpha_1\left(1 - \dfrac{H\sum\limits_{i=1}^{2}\delta_i^{**}}{t\sin\alpha_1}\right)}. \qquad (15.33)$$

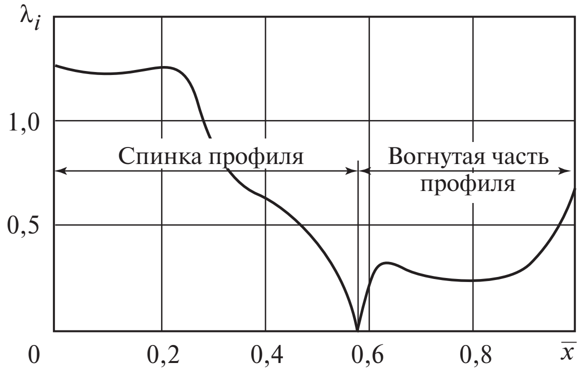


Рис. 15.12. Распределение скоростей по обводам профиля

В свою очередь, входящие в формулу (15.33) толщины потери импульса могут быть найдены по формуле (12.110), если известно распределение скоростей по обводам профиля. Типичная картина этого распределения показана на рис. 15.12.

15.7. Кромочные потери энергии

Кромочные потери энергии обусловлены тем, что за пределами профиля происходит слияние двух потоков с различными распределениями скоростей в поперечном направлении. Схематично картина течения за выходными кромками профиля показана на рис. 15.13. Со стороны спинки поток покидает профиль в точке e, а с вогнутой стороны — в точке c. Из-за конечной толщины кромки Δ на некотором осевом расстоянии x_0 оба потока движутся при наличии свободных границ em и cm, и только после точки m начинается их взаимодействие. Чем толще выходная кромка, тем дальше по потоку располагается точка m и больше потери энергии, связанные с кромочным следом за профилем.

Как теоретическая, так и экспериментальная оценки кромочных потерь энергии связаны с большими трудностями, так как эти потери **входят в состав профильных потерь** и их значение определяется **по разности между профильными потерями** $\Delta h_{\text{пр}}$, которые находятся экспериментальным путем, и **потерями на трение** в решетке $\Delta h_{\text{тр}}$, т.е.

$$\Delta h_{\text{кр}} = \Delta h_{\text{пр}} - \Delta h_{\text{тр}}.$$

При этом потери на трение $\Delta h_{\text{тр}}$ оцениваются либо чисто расчетным способом [см. (15.33)], либо по измеренным характеристикам пограничного слоя на выходных кромках, либо экстраполяцией измеренных при различных толщинах кромок Δ профильных потерь на нулевую толщину кромки.

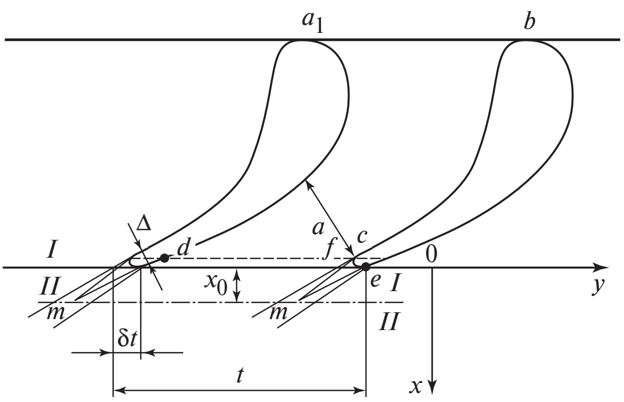


Рис. 15.13. Схема течения за выходными кромками профиля

При таких оценках трудно ожидать сходимости опытных данных, ибо по каждому из указанных методов находится некоторое условное значение кромочных потерь.

Так, при возникновении отрыва потока внутри канала кромочные потери, полученные при расчетной оценке потерь на трение, будут включать в себя значительную часть вихревых потерь в отрывной зоне, и даже при нулевой толщине кромки $\zeta_{кр}$ окажутся больше нуля.

Экстраполяция профильных потерь на нулевую толщину выходной кромки также может привести к значительным погрешностям, так как с изменением толщины кромки существенно меняется характер течения внутри канала, вызывая в некоторых случаях отрыв потока с поверхности профиля.

В результате кромочные потери при больших толщинах Δ будут включать в себя увеличивающуюся часть внутренних потерь, и, следовательно, экспериментальный коэффициент кромочных потерь $\zeta_{кр}$ в зависимости от толщины кромки Δ оказывается завышенным.

Таким образом, прежде чем непосредственно оценивать кромочные потери, необходимо определить, какая часть профильных потерь рассматривается. Наиболее часто из профильных потерь выделяют ту их часть, которая прямо не связана ни с толщиной кромки, ни с ее формой. Из рис. 15.13 видно, что такими потерями будут потери в канале a_1bcd, определенные в сечении cd.

Принимая тогда за коэффициент кромочных потерь

$$\zeta_{кр} = \zeta_{пр} - \zeta_{тр}, \tag{15.34}$$

можно получить различного рода теоретические и полуэмпирические соотношения.

По Г. Флюгелю кромочные потери пропорциональны относительной толщине выходной кромки с коэффициентом пропорциональности $k = 0{,}2$, т.е.

$$\zeta_{\text{кр}} = k\frac{\Delta}{a} = 0{,}2\frac{\Delta}{a}, \tag{15.35}$$

где a — размер «горла» решетки (рис. 15.13).

Сравнение результатов, полученных по формуле (15.35), с опытными данными показывает, что расчетные значения удовлетворительно совпадают с экспериментальными при переменном коэффициенте пропорциональности, зависящем от типа рассматриваемой решетки. В этой связи представляется целесообразным показать на основе опытных данных, в каком диапазоне меняется коэффициент пропорциональности k в формуле (15.35).

С этой целью воспользуемся зависимостью (15.34) и вычислим вначале кромочные потери непосредственно за выходными кромками в сечении I—I (см. рис. 15.13). Поскольку при оценке потерь исходят обычно из осреднения их по площади, представим коэффициент $\zeta_{\text{кр}}$ в виде

$$\zeta_{\text{кр}} = \frac{\zeta_{\text{вн}}(t - \delta t) + \delta t \zeta_x}{t} - \zeta_{\text{вн}} = \frac{\delta t}{t}(k\zeta_x - \zeta_{\text{вн}}). \tag{15.36}$$

Здесь $\zeta_{\text{вн}}$ — внутренние потери энергии, а также принято, что в зоне кромки между точками f и e потери равны ζ_x. Для плоских кромок (штриховая линия на рис. 15.13) $\zeta_x = 1$. При скругленных кромках значение этих потерь энергии определяется точкой срыва потока с кромок и в большинстве случаев $\zeta_x \approx 0{,}7$.

Используя приведенные на рис. 15.13 обозначения, представим величины δt и t следующим образом:

$$\delta t = \frac{\Delta}{\sin\alpha_1}; \quad t = \frac{a}{\sin\alpha_1} + \frac{\Delta}{\sin\alpha_1}.$$

Запишем далее (15.36) в виде

$$\zeta_{\text{кр}} = \frac{\Delta}{a + \Delta}(\zeta_x - \zeta_{\text{вн}}) \approx \frac{\Delta}{a}(\zeta_x - \zeta_{\text{вн}})\left(1 - \frac{\Delta}{a}\right). \tag{15.37}$$

Для большинства аэродинамически совершенных профилей внутренние потери не превышают 5 %, следовательно,

$$\zeta_{\text{кр}} \approx (0{,}65 \div 0{,}95)\frac{\Delta}{a}\left(1 - \frac{\Delta}{a}\right). \tag{15.38}$$

Полученная формула (15.37) и приближенное соотношение (15.38) дают максимально возможное значение для коэффициента кромочных потерь и непосредственно связывают эту величину с коэффициентом внутренних потерь. Отсюда, в частности, следует заметное снижение кромочных потерь с ростом потерь в канале решетки. Существование этой зависимости на основании опытных данных отмечено Г.Ю. Степановым [32].

При малых относительных толщинах кромки Δ структуры формулы (15.38) и зависимости Г. Флюгеля (15.35) совпадают, эти формулы выражают почти линейную зависимость коэффициента кромочных потерь от $\overline{\Delta}$.

С удалением плоскости измерений от выходных кромок зона нулевых скоростей сокращается, в результате чего измеренные и осредненные по площадям кромочные потери до определенных значений осевой координаты x снижаются. Необходимо подчеркнуть, что этот результат является следствием осреднения по площади и не отражает физической сущности кромочных потерь.

При правильном осреднении с учетом расходной составляющей при $x = 0$ значение кромочных потерь должно равняться нулю и непрерывно возрастать с удалением от кромок.

Поскольку, однако, большинство опытных данных, приведенных в литературе по профильным потерям, получено в результате осреднения без учета расходной составляющей, используем эти «условные потери» в сечении *I—I* (см. рис. 15.13) для анализа причин резкого увеличения кромочных потерь при близком расположении плоскости измерений и толстых выходных кромках.

С удалением от кромок, когда поле скоростей не имеет нулевых точек, различные способы осреднения дают близкие результаты, и при этом можно вести осреднение локальных потерь энергии по площади.

Осевой размер x_0, соответствующий минимальным кромочным потерям, зависит от толщины кромки и примерно соответствует тому сечению, где происходит смыкание струй, срывающихся с кромок (точка m на рис. 15.13). Это расстояние x_0, выраженное в долях от толщины Δ, может быть с некоторым запасом принято равным $x_0/\Delta = 1\div1{,}5$.

Считая, что на рассматриваемом расстоянии добавочные потери, обусловленные конечной толщиной выходной кромки, определяются теми же процессами, что и при внезапном расширении потока, проведем их оценку. Такую оценку необходимо провести с учетом имеющейся неравномерности поля скоростей в сечении *II—II*, ибо используемая обычно формула для внезапного расширения [22]

$$\zeta_{\text{в.р}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2,$$

где n — степень расширения канала, записанная для равномерных полей скоростей, и, как показано в [4], расчет по ней на начальном участке струи приводит к заметной погрешности.

Подробное исследование этой задачи проведено И.Г. Есьманом, получившим следующее соотношение:

$$\zeta_{\text{в.р}} = \frac{N_2}{n^2} + 1 - \frac{2M_2}{n}. \tag{15.39}$$

В этой формуле

$$N_2 = \frac{1}{F_2}\int_F \left(\frac{u_i}{u_1}\right)^3 \mathrm{d}F; \quad M_2 = \frac{1}{F_2}\int_F \left(\frac{u_i}{u_1}\right)^2 \mathrm{d}F, \tag{15.40}$$

где F_2 — площадь рассматриваемого сечения за внезапным расширением; u_1 — максимальная скорость в контрольном сечении; u_i — локальные значения скорости в этом сечении.

Исследование профилей скорости на начальном участке струи при внезапном расширении проходного сечения показало, что приближенно можно принять

$$\frac{u_i}{u_1} = 3\left(\frac{y_1}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y_1}{\delta}\right)^2 .$$

Соответствующее расположение осей координат и необходимые обозначения приведены на рис. 15.14.

Вычисляя коэффициенты N_2 и M_2 в сечении II—II (рис. 15.14), получаем

$$\left.\begin{aligned} N_2 &= (1 - 0{,}386\,\overline{\Delta})(1 + \overline{\Delta})^2; \\ M_2 &= (1 - 0{,}258\,\overline{\Delta})(1 + \overline{\Delta}). \end{aligned}\right\} \tag{15.41}$$

Путем подстановки этих коэффициентов в уравнение (15.39) находим, что минимальные кромочные потери

$$\zeta_{\text{кр}} = 0{,}13\,\overline{\Delta}. \tag{15.42}$$

Результат в виде формулы (15.42) свидетельствует о теоретической обоснованности линейной аппроксимации кривой кромочных потерь энергии и является интересным в том смысле, что получен, по существу, без сколь-либо серьезных ограничений и опытных коэффициентов.

Учет формы профиля скорости в контрольном сечении незначительно меняет коэффициент пропорциональности в формуле (15.42) и не нарушает линейность рассматриваемой зависимости. Зависимости (15.38) и (15.42) выражают кромочные потери в наиболее характерных сечениях за решеткой и дают область их возможных значений. Эта область, ограниченная на рис. 15.15 линиями *1* и *2*, оказывается весьма широкой, т.е. в процессе эксперимента вполне возможен широкий разброс опытных точек. Возможность такого разброса при фиксированной плоскости измерений резко воз-

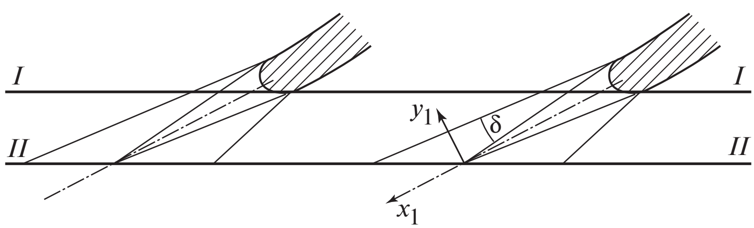


Рис. 15.14. К определению кромочных потерь энергии

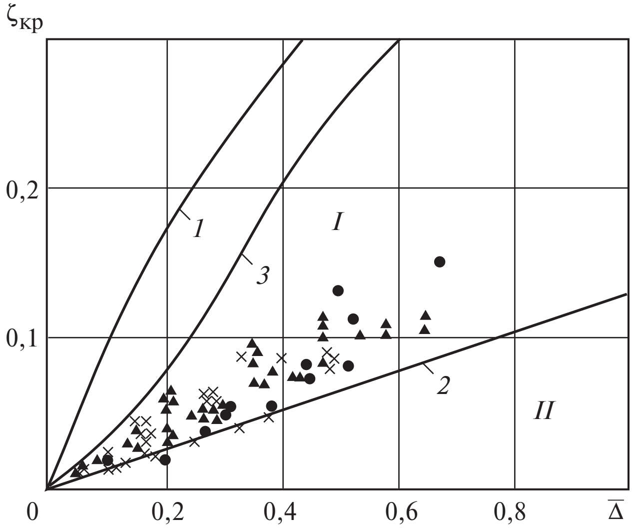


Рис. 15.15. Сравнение расчетных и опытных данных по кромочным потерям

растает при увеличении толщины кромки, так как повышается вероятность попадания измерительного насадка в застойную кромочную зону: $\dfrac{x_{\text{изм}}}{\Delta} < \dfrac{x_0}{\Delta}$.

Изложенное хорошо подтверждается многочисленными экспериментальными данными, заимствованными из различных источников (рис. 15.15).

В целом можно отметить, что зависимость (15.42) действительно ограничивает минимальное значение кромочных потерь. Некоторые опытные точки, попадающие в зону *II* и полученные в основном при испытании сопловых решеток, свидетельствуют о том, что в этом случае срыв потока с кромок оказывается несколько затянутым из-за их скругления. Используя, как это иногда делают, для сопловых решеток эффективную толщину кромки $\overline{\Delta}_{\text{эф}} = (0{,}7 \div 0{,}8)\,\overline{\Delta}$, нетрудно все эти точки ввести в зону *I*.

Для оценки возможного увеличения потерь при $x > x_0$ рассмотрим задачу о выравнивании профиля скорости, имеющегося в сечении *II—II* (см. рис. 15.13), при удалении контрольного сечения в бесконечность (практически при $\overline{x} > 15$). Такая задача решена И.Е. Идельчиком, который получил следующее соотношение:

$$\Delta\zeta = 1 + N_2 - 2M_2. \qquad (15.43)$$

Подставляя в (15.43) формулы (15.41), получаем

$$\Delta\zeta = 0{,}13\,\overline{\Delta} + 0{,}744\,\overline{\Delta}^{\,3},$$

где $\Delta\zeta$ — добавочные потери, связанные с выравниванием кромочного следа.

С учетом потерь до сечения *II—II* предельные кромочные потери будут определяться по формуле

$$\zeta_{кр} = 0{,}26\,\overline{\Delta} + 0{,}74\,\overline{\Delta}^2 - 0{,}386\,\overline{\Delta}^3. \qquad (15.44)$$

Кривая *3*, построенная на рис. 15.15 по формуле (15.44), ограничивает зону, где должны располагаться экспериментальные данные, измеренные в плоскости, отстоящей от выходных кромок на расстоянии $x > x_0$. Действительно, почти все опытные точки, нанесенные на рис. 15.15, размещаются в указанной зоне, причем в области малых толщин ($\overline{\Delta} < 0{,}2$) они заполняют зону между кривыми *2* и *3* полностью, а при $\overline{\Delta} > 0{,}2$ примыкают к пограничной кривой *2*.

Такое распределение потерь вполне закономерно, ибо при малых толщинах плоскость измерений располагается обычно на большом относительном расстоянии от кромок, и здесь возможно получение результатов, близких к верхней границе потерь (кривая *3*).

Наоборот, с увеличением $\overline{\Delta}$ плоскость измерений удаляется от плоскости выравнивания потока, и опытные значения потерь занимают область, примыкающую к кривой *2*.

Имея три предельные кривые, можно построить качественные кривые изменения кромочных потерь в зависимости от $\overline{x} = x/\overline{\Delta}$.

Такие зависимости для трех толщин $\overline{\Delta}$ изображены на рис. 15.16. Здесь принято, что зона минимальных потерь располагается на расстоянии $(1{,}0 \div 1{,}5)\,\overline{\Delta}$ от кромок в направлении оси x (см. рис. 15.13), а выравнивание профиля имеет место при $\overline{x} > 15$.

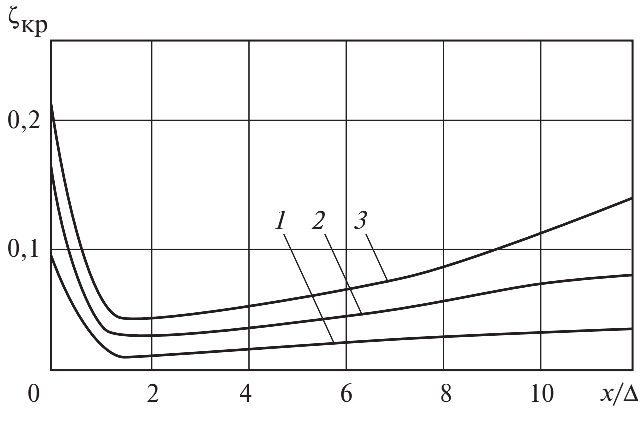


Рис. 15.16. Зависимости коэффициента кромочных потерь энергии от безразмерного расстояния x/Δ от выходных кромок:

1 — $\overline{\Delta} = 0{,}1$; *2* — $\overline{\Delta} = 0{,}2$; *3* — $\overline{\Delta} = 0{,}3$

Систематических опытных данных по влиянию расстояния $\bar{x}$ на кромочные потери в литературе явно недостаточно, чтобы судить о количественных соотношениях. Однако качественно указанная картина подтверждается достаточно хорошо.

Таким образом, из проведенного анализа следует, что имеющийся разброс экспериментальных точек вызван не столько разницей в геометрических параметрах испытанных решеток, сколько произвольным расположением плоскостей измерений без учета конкретных толщин кромок. При правильной методической постановке эксперимента, когда измерения проводятся на одном и том же относительном расстоянии $\bar{x}$ от выходных кромок, следует ожидать линейной зависимости кромочных потерь от безразмерной толщины $\bar{\Delta}$ с коэффициентом пропорциональности, зависящим от величины $\bar{x}$.

При $\bar{x}$ > 15 такая зависимость с учетом формулы (15.42) и графиков, приведенных на рис. 15.16, может быть представлена в виде следующего приближенного выражения, справедливого при $1{,}5 < \frac{x}{\Delta} < 6$:

$$\zeta_{\text{кр}} = [0{,}13 + 0{,}02(\bar{x} - 1{,}5)]\,\bar{\Delta} = \left(0{,}1 + 0{,}02\frac{x}{\Delta}\right)\bar{\Delta}\,. \tag{15.45}$$

При $\frac{x}{\Delta} = 4$ уравнение (15.45) принимает вид $\zeta_{\text{кр}} = 0{,}18\,\bar{\Delta}$. При $\frac{x}{\Delta} = 5$ из уравнения (15.45) следует формула Г. Флюгеля (15.35). Если $\frac{x}{\Delta} > 6$, что возможно в случае тонких кромок ($\bar{\Delta} < 0{,}1$), вполне допустимо пользоваться первым членом формулы (15.44), полагая для этого случая

$$\zeta_{\text{кр}} = 0{,}26\,\bar{\Delta}. \tag{15.46}$$

Приведенный диапазон коэффициентов пропорциональности, полученных без учета опытных данных, практически совпадает с диапазоном, указанным в [1], где по опытным данным этот коэффициент меняется от 0,11 до 0,27.

При оценке точности расчета следует, конечно, учитывать известную условность выражения (15.45), ибо действительные процессы в кромочном следе значительно сложнее принятых в использованной расчетной схеме. Так, необходимо учитывать, что неравномерность в зоне кромочного следа не только является следствием срыва струй с кромок, но и связана с состоянием пограничного слоя на спинке и вогнутой стороне профиля. Выравнивание этой неравномерности должно неизбежно приводить к добавочным потерям, не учитываемым в формуле (15.45).

В результате, как это было отмечено М.Е. Дейчем и Л.Я. Лазаревым, даже при нулевой толщине выходной кромки кромочные потери должны иметь конечное значение, зависящее от расстояния $\overline{x}$ и режимных параметров М и Re. Однако эта поправка не превышает 1 %, и в качестве первого приближения примем

$$\zeta_{\text{кр}} = (0{,}1 + 0{,}02\,\overline{x})\,\overline{\Delta} + 0{,}01\frac{\overline{x}}{1 + \overline{x}}\,. \qquad (15.47)$$

Формула (15.47) не только дает значение кромочных потерь, но и связывает их с осевым зазором между сопловой решеткой и рабочим колесом с учетом постоянной составляющей рассматриваемых потерь.

15.8. Концевые потери энергии в турбинных решетках профилей

Рассмотренные профильные потери энергии и соответствующие им коэффициенты профильных потерь относятся к решеткам профилей бесконечной длины. Реальные решетки профилей всегда ограничены корневой и периферийной торцевыми поверхностями. Эти ограничительные поверхности принципиальным образом меняет всю картину течения в концевых межлопаточных каналах и являются источниками достаточно больших дополнительных потерь энергии. Указанные дополнительные потери, связанные с конечной длиной лопаток, называются концевыми потерями энергии. Таким образом, полные потери энергии в решетках профилей принято определять в виде суммы профильных и концевых потерь.

Подобное разделение потерь в решетках профилей является достаточно условным, так как при наличии ограничительных торцевых поверхностей заметно меняется картина течения по всей длине межлопаточных каналов.

Рассмотрим более подробно физическую природу возникновения концевых потерь энергии.

15.8.1. Физическая картина течения в решетках профилей конечной длины

При движении рабочего тела в криволинейном межлопаточном канале турбинной решетки все его частицы находятся под действием центробежных сил. Для конкретной частицы B (рис. 15.17), находящейся на линии тока ab, элементарная центробежная сила $\mathrm{d}F_{\text{цб}}$ будет определяться по формуле

$$\mathrm{d}F_{\text{цб}} = \mathrm{d}m\,\frac{c_\theta^2}{r_B} = \rho r_B\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\frac{c_\theta^2}{r_B}\,,$$

где $\mathrm{d}m$ — элементарная масса частицы B; r_B — локальный радиус линии тока для частицы B; c_θ — тангенциальная к линии тока скорость частицы B.

Ответной реакцией на действие центробежных сил в сплошной среде является возникновение поперечного к линиям тока градиента давления $\mathrm{d}p/\mathrm{d}n$ (n — нормаль к рассматриваемой линии тока).

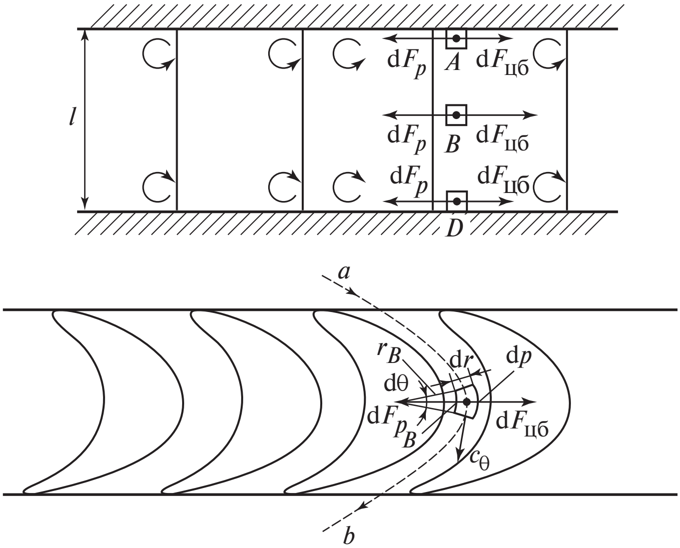


Рис. 15.17. Схема силового воздействия на жидкую частицу в межлопаточном канале решетки профилей

Элементарная сила, действующая на частицу B и обусловленная указанным градиентом давления, будет иметь вид

$$dF_p = r\, d\theta\, dp.$$

Условие движения частицы B вдоль линии тока ab сводится к равенству рассматриваемых сил:

$$dF_{цб} = dF_p. \tag{15.48}$$

Отсюда, как было показано ранее (см. гл. 13), вытекает следующая формула для распределения скоростей c_θ в межлопаточном канале решетки:

$$c_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \tag{15.49}$$

Таким образом, **в криволинейном межлопаточном канале турбинной решетки имеет место гиперболическое распределение скоростей в поперечных сечениях, совпадающее с распределением скоростей в плоском циркуляционном течении идеальной жидкости**.

Здесь еще раз отметим, что полученное распределение скоростей вытекает из условия равенства элементарных сил $dF_{цб}$ и dF_p, действующих на частицу B и обеспечивающих движение этой частицы по линии тока ab (рис. 15.17).

Однако для решеток конечной длины l в области расположения торцевых стенок, ограничивающих длину профилей, указанное равенство сил нарушается из-за тормозящего действия на поток торцевых стенок.

В результате падения скорости в пограничном слое торцевых стенок скорости частиц A и D (рис. 15.17) будут меньше скорости частицы B, расположенной в центре канала. В то же время в пределах пограничного слоя поперечный градиент давления dp/dn согласно второму уравнению Прандтля для пограничного слоя не меняется. В результате для частиц A и D можно записать

$$\mathrm{d}F_{\text{цб}} < \mathrm{d}F_p,$$

и эти частицы начнут перемещаться вблизи торцевых стенок от вогнутой части профиля к выпуклой стороне соседней лопатки так, как это показано стрелками на рис. 15.17.

Указанное «вторичное» течение продолжается далее в радиальном направлении вдоль выпуклой поверхности лопатки к ее центру, а отток рабочей среды у торцевой стенки компенсируется радиальным течением вдоль вогнутой поверхности к торцевым стенкам.

При взаимодействии двух вторичных течений от верхней (частица A) и нижней (частица D) торцевых стенок в области выпуклой поверхности лопаток происходит сворачивание потока в два вихревых шнура, вращающихся в противоположных направлениях.

Действительная вихревая структура потока в области торцевых поверхностей оказывается еще более сложной, поскольку при натекании рабочей среды на входные кромки лопаток вблизи торцевых стенок образуется входной вихрь, охватывающий лопатку в виде «подковы». Аксонометрическое изображение этой подковообразной вихревой структуры приведено на рис. 15.18.

Таким образом, **концевые потери энергии в решетках профилей, связанные с наличием торцевых поверхностей, складываются из потерь на трение по торцевым поверхностям, потерь энергии в сложных вихревых образованиях и потерь энергии, обусловленных радиальными «компенсирующими» течениями**.

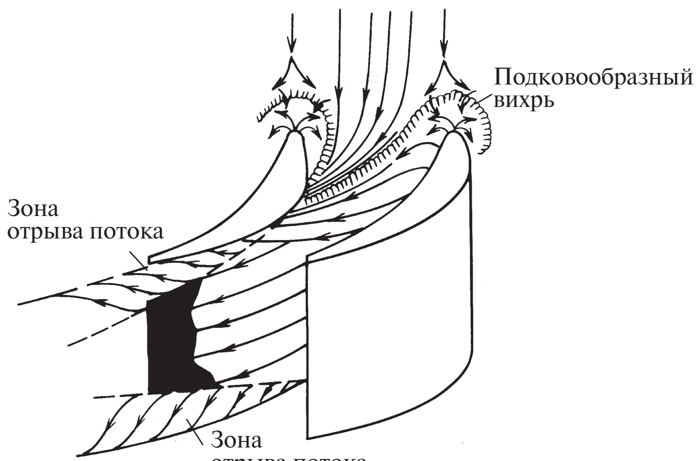


Рис. 15.18. Подковообразный вихрь в решетках профилей

15.8.2. Полуэмпирический метод расчета концевых потерь энергии

Имеющиеся опытные данные полностью подтверждают исключительно сложное пространственное течение жидкости в области ограничивающих высоты решеток торцевых стенок. Сложность рассматриваемых течений не позволяет без использования корректирующих опытных коэффициентов получить надежные расчетные формулы.

В связи с этим представляется целесообразным построить структурную формулу для определения концевых потерь на базе многочисленных опытных данных в рамках теории размерности.

Согласно имеющимся опытным данным концевые потери энергии ΔE в общем случае могут быть представлены следующей функциональной зависимостью:

$$\Delta E = f(\Gamma, \rho_2, c_{2a}, b, T, R, \nu, \sin\beta_2). \tag{15.50}$$

Здесь $\Gamma = t(c_{1u} + c_{2u})$ — циркуляция скорости; t — шаг решетки; c_{1u}, c_{2u} — окружные составляющие скорости на входе и выходе решетки; T — абсолютная температура потока; R — газовая постоянная; ν — кинематическая вязкость; β_2 — угол выхода потока из решетки; c_{2a} — осевая составляющая скорости; b — хорда профиля; ρ_2 — плотность среды за выходным сечением решетки.

В функциональном соотношении (15.50) величины ρ_2, c_{2a}, b, T имеют независимые размерности, а размерности всех остальных величин выражаются через размерности первых.

Согласно П-теореме размерное функциональное соотношение (15.50) может быть представлено в следующем безразмерном виде:

$$\Pi = f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4),$$

где

$$\Pi = \frac{\Delta E}{\rho_2 c_{2a}^3 b^2};\ \Pi_1 = \frac{\Gamma}{c_{2a} b};\ \Pi_2 = \frac{c_{2a} b}{\nu};\ \Pi_3 = \frac{c_{2a}}{\sqrt{kRT}};\ \Pi_4 = \sin\beta_2.$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta E}{\rho_2 c_{2a}^3 b^2} = f\left(\frac{\Gamma}{c_{2a} b}, \mathrm{Re}, \mathrm{M}_{2a}, \sin\beta_2\right). \tag{15.51}$$

Разлагая (15.51) в ряд по параметрам $\overline{\Gamma} = \dfrac{\Gamma}{c_{2a} b}$ и $\sin\beta_2$, можно получить (15.51) в явном виде.

Учитывая, что функция (15.51) четная относительно аргументов $\overline{\Gamma}$ и $\sin\beta_2$ и при $\overline{\Gamma} = 0$ не зависит от β_2, получаем

$$\frac{\Delta E}{\rho_2 c_{2a}^3 b^2} = \psi_0(\mathrm{M}, \mathrm{Re}) + \psi_1(\mathrm{M}, \mathrm{Re})\overline{\Gamma}^2\sin^2\beta_2 + \psi_2(\mathrm{M}, \mathrm{Re})\overline{\Gamma}^4\sin^4\beta_2 + \ldots .$$

Ограничимся квадратичным членом. Тогда

$$\Delta E = \rho_2 c_{2a}^3 b^2 \psi_0(\mathrm{M}, \mathrm{Re})\left(1 + \frac{\psi_1}{\psi_2}\overline{\Gamma}^2\sin^2\beta_2\right). \qquad (15.51\text{а})$$

Если предположить, что коэффициенты ψ_1 и ψ_2 с изменением чисел M и Re изменяются пропорционально, т.е. $\psi_1/\psi_2 = B$, где B — некоторая экспериментальная константа, то нетрудно получить выражение для коэффициента ψ_0.

В самом деле, представим концевые потери энергии в следующем виде:

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3,$$

где ΔE_1 — часть концевых потерь, обусловленная взаимодействием пограничных слоев и периферийным движением; ΔE_2 — потери на трение у торцевых стенок; ΔE_3 — дополнительные вихревые потери, включающие в себя потери от компенсирующих движений у концов лопатки и потери от подковообразного вихря.

Величины ΔE_1 и ΔE_3 зависят от циркуляции скорости Г, а ΔE_2 не зависит от Г.

Для решетки пластин, приведенной на рис. 15.19, циркуляция скорости Г равна нулю. Следовательно, для такой решетки

$$\Delta E_1 = \Delta E_3 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta E = \Delta E_2 = \rho_2 c_{2a}^3 b^2 \psi_0 .$$

Отсюда

$$\psi_0 = \frac{\Delta E_2}{\rho_2 c_{2a}^3 b^2} .$$

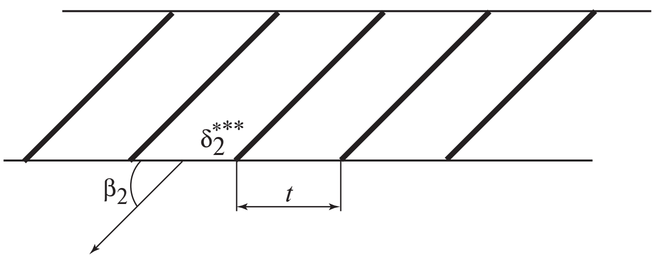


Рис. 15.19. Плоская решетка пластин

Потерю кинетической энергии на трение у торцевых стенок канала ΔE_2 можно выразить через толщину потери энергии δ^{***} по уравнению

$$\Delta E_2 = \rho_2 c_2^3 \delta^{***} t \sin \beta_2 = \frac{\rho_2 c_{2a}^3 \delta^{***} t}{\sin^2 \beta_2},$$

где $c_2 = \dfrac{c_{2a}}{\sin \beta_2}$.

Тогда

$$\psi_0 = \frac{\delta^{***} t}{b^2 \sin^2 \beta_2} = \frac{\overline{\delta}^{***} \overline{t}}{\sin^2 \beta_2}. \qquad (15.52)$$

Подставив (15.52) в уравнение (15.51а), получим

$$\Delta E = \rho_2 c_{2a}^3 \frac{\overline{\delta}^{***} \overline{t}}{\sin^2 \beta_2} (1 + B \overline{\Gamma}^2 \sin^2 \beta_2). \qquad (15.53)$$

Для определения **коэффициента концевых потерь** $\zeta_к$ запишем формулу для кинетической энергии потока E за решеткой:

$$E = \frac{G c_2^2}{2} = \frac{G c_{2a}^2}{2 \sin^2 \beta_2}.$$

Здесь c_2 — скорость потока на выходе из решетки; $G = \rho_2 c_{2a} F_{эф}$ — действительный массовый расход через канал решетки, $F_{эф}$ — эффективная площадь канала, которую легко можно определить, если воспользоваться толщиной вытеснения, вычисляемой по формуле

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho_i c_i}{\rho_2 c_2} \right) \mathrm{d}y.$$

Здесь ρ_i и c_i — плотность и скорость внутри пограничного слоя. Соответственно эффективная выходная площадь решетки будет рассчитываться по формуле

$$F_{эф} = tl - 2t\delta_т^* - l\delta_с^* - l\delta_в^*,$$

где l — высота решетки; $\delta_т^*$, $\delta_с^*$, $\delta_в^*$ — толщины вытеснения на соответственно торцевой стенке, спинке и вогнутой поверхности профиля.

В результате будем иметь

$$E = \frac{1}{2} \frac{\rho_2 c_{2a}^3}{\sin^2 \beta_2} tl \left[1 - 2 \frac{\delta_т^*}{l} - \frac{1}{t} (\delta_с^* + \delta_в^*) \right].$$

Обозначим сумму $(\delta_с^* + \delta_в^*)$ через $2\delta_{экв}^*$, т.е.

$$2\delta_{экв}^* = \delta_с^* + \delta_в^*.$$

Тогда получим

$$E = \frac{1}{2}\,\frac{\rho_2 c_{2a}^3}{\sin^2\beta_2}\,tl\left(1 - 2\,\frac{\delta_т^*}{l} - \frac{2\delta_{экв}^*}{t}\right). \qquad (15.54)$$

Использовав формулы (15.53) и (15.54), найдем следующее выражение для коэффициента концевых потерь энергии:

$$\zeta_к = \frac{\Delta E}{E} = \frac{2\rho_2 c_{2a}^3 \delta_т^{***} t \sin^2\beta_2 (1 + B\overline{\Gamma}^2 \sin^2\beta_2)}{\sin^2\beta_2 \rho_2 c_{2a}^3 tl\left(1 - 2\dfrac{\delta_т^*}{l} - 2\dfrac{\delta_{экв}^*}{t}\right)} =$$

$$= \frac{2\delta_т^{***}}{l}\,(1 + B\overline{\Gamma}^2 \sin^2\beta_2)\,\frac{1}{1 - 2\dfrac{\delta_т^*}{l} - 2\dfrac{\delta_{экв}^*}{t}}. \qquad (15.55)$$

Формула (15.55) определяет коэффициент потерь энергии на торцевых стенках решетки пластин при нулевой циркуляции скорости ($\overline{\Gamma} = 0$) (см. рис. 15.19).

В этом случае для несжимаемой жидкости при турбулентном режиме течения в пограничном слое можно принять, что

$$\overline{\delta}_т^{**} = \overline{\delta}_с^{**} = \overline{\delta}_в^{**} = \overline{\delta}^{**};$$

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = 1{,}4; \quad H^* = \frac{\delta^{***}}{\delta^{**}} = 1{,}8; \quad \delta^{**} = \frac{0{,}036b}{\mathrm{Re}^{0{,}2}}.$$

Тогда $\delta^* = 1{,}4\delta^{**} = \dfrac{0{,}05b}{\mathrm{Re}^{0{,}2}}$, $\delta^{***} = \dfrac{0{,}065b}{\mathrm{Re}^{0{,}2}}$ и

$$\zeta_к = \frac{0{,}13b}{\mathrm{Re}_b^{0{,}2}l}\,(1 + B\overline{\Gamma}^2 \sin^2\beta_2)\,\frac{1}{1 - \left(\dfrac{0{,}1}{\mathrm{Re}_b^{0{,}2}}\dfrac{b}{l} + \dfrac{0{,}1}{\mathrm{Re}_b^{0{,}2}}\dfrac{b}{t}\right)}.$$

Нетрудно видеть, что два последних члена в знаменателе (в скобках) при обычно употребляемых шагах решетки значительно меньше единицы.

Следовательно, без большой погрешности можно принять

$$\zeta_к = \frac{0{,}13}{\mathrm{Re}_b^{0{,}2}\,\overline{l}}\,(1 + B\overline{\Gamma}^2 \sin^2\beta_2), \qquad (15.56)$$

здесь $\overline{l} = l/b$.

Преобразуем выражение для $\overline{\Gamma}\sin\beta_2$:

$$\overline{\Gamma}\sin\beta_2 = \frac{\Gamma}{c_{2a}b}\sin\beta_2 = \frac{t(c_{1u}+c_{2u})}{c_{2a}b}\sin\beta_2 = \frac{t(c_{1a}\operatorname{ctg}\beta_1 + c_{2a}\operatorname{ctg}\beta_2)}{c_{2a}b}\sin\beta_2 =$$

$$= \bar{t}\left(\frac{c_{1a}}{c_{2a}}\operatorname{ctg}\beta_1 + \operatorname{ctg}\beta_2\right)\sin\beta_2 = \left(1 + \frac{c_{1a}}{c_{2a}}\frac{\operatorname{ctg}\beta_1}{\operatorname{ctg}\beta_2}\right)\bar{t}\cos\beta_2;$$

$$\frac{c_{1a}}{c_{2a}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \approx \frac{1 - \dfrac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}{1 - \dfrac{k-1}{k+1}\lambda_2^2} = \varphi(\lambda).$$

Здесь λ — безразмерная скорость.

В результате будем иметь

$$\overline{\Gamma}\sin\beta_2 = \left(1 + \varphi(\lambda)\frac{\operatorname{ctg}\beta_1}{\operatorname{ctg}\beta_2}\right)\bar{t}\cos\beta_2. \qquad (15.57)$$

Подставив (15.57) в (15.56), для несжимаемой жидкости получим:

$$\zeta_{\text{к}} = \frac{0{,}13}{\mathrm{Re}_b^{0,2}\,\bar{l}}\left[1 + B\left(1 + \frac{\operatorname{ctg}\beta_1}{\operatorname{ctg}\beta_2}\right)^2 \bar{t}^{\,2}\cos^2\beta_2\right]. \qquad (15.58)$$

Для сжимаемой жидкости формула (15.58) несколько усложняется:

$$\zeta_{\text{к}} = \frac{0{,}13\left(\dfrac{k+1}{k-1} - \lambda_2^2\right)^{0,8}}{\mathrm{Re}_b^{0,2}\,\bar{l}}\left[1 + B\left(1 + \varphi(\lambda)\frac{\operatorname{ctg}\beta_1}{\operatorname{ctg}\beta_2}\right)^2 \bar{t}^{\,2}\cos^2\beta_2\right].$$

Таким образом, в общем случае для определения коэффициента концевых потерь можно пользоваться следующей формулой:

$$\zeta_{\text{к}} = \frac{AK_1}{\mathrm{Re}_b^{0,2}\,\bar{l}}\left[1 + B\left(1 + \varphi(\lambda)\frac{\operatorname{ctg}\beta_1}{\operatorname{ctg}\beta_2}\right)^2 \bar{t}^{\,2}\cos^2\beta_2\right]. \qquad (15.59)$$

Здесь K_1 — поправочный множитель, учитывающий влияние сжимаемости. Его зависимость от безразмерной скорости приведена на рис. 15.20.

Для определения численных значений коэффициентов A и B на рис. 15.21 приведены экспериментальные данные по концевым потерям, полученные как для активных, так и для реактивных решеток при различных шагах, высотах, углах входа и выхода потока. Здесь в качестве аргумента принят геометрический комплекс $\left(1 + \varphi(\lambda)\dfrac{\operatorname{ctg}\beta_1}{\operatorname{ctg}\beta_2}\right)^2 \bar{t}^{\,2}\cos^2\beta_2$, а по оси

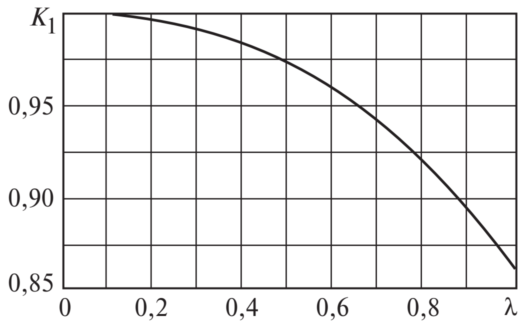


Рис. 15.20. Зависимость поправочного множителя K_1 от безразмерной скорости λ

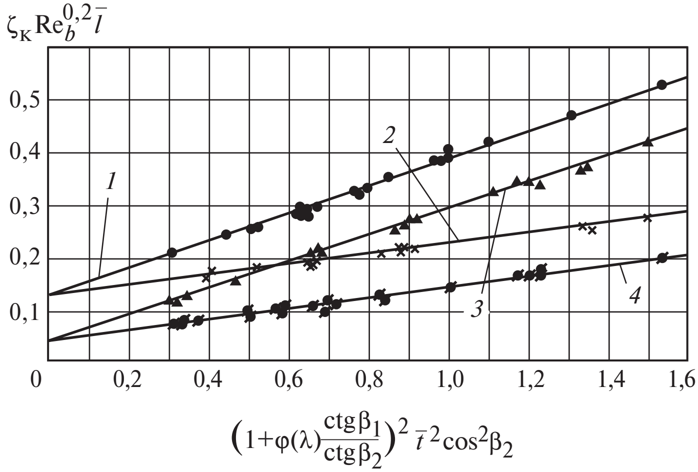


Рис. 15.21. Сопоставление расчетных и опытных данных по концевым потерям для реактивных (линии *2*, *4*) и активных (линии *1*, *3*) решеток профилей:

1, *2* — турбулентный режим течения в пограничном слое; *3*, *4* — ламинарный режим течения

ординат отложена функция $\dfrac{\zeta_к \mathrm{Re}_b^{0,2} \bar{l}}{K_1}$. В принятой системе координат зависимость (15.59) изображается в виде прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный A и наклоненный к оси абсцисс под углом $\alpha = \mathrm{arctg}\, AB$.

Результаты обработки экспериментальных данных позволяют сделать вывод, что коэффициенты A и B существенно зависят от режима течения в пограничном слое и типа решетки. Для реактивных решеток экспериментальные точки довольно хорошо группируются в зависимости от режима течения в пограничном слое около прямых *2* и *4*. Аналогичные прямые (*1* и *3*) можно провести и для активных решеток. Если учесть, что на рис. 15.21 приведены результаты опытов разных организаций с различной методикой эксперимента, то разброс точек следует признать небольшим. Выпадение

Таблица 15.1

Значения коэффициентов *A* и *B* для активных и реактивных решеток

Активные решетки				Реактивные решетки			
Ламинарный пограничный слой		Турбулентный пограничный слой		Ламинарный пограничный слой		Турбулентный пограничный слой	
A	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*
0,45	5,50	0,13	1,90	0,45	2,00	0,13	0,70

отдельных точек закономерно, так как при статических испытаниях может иметь место смешанный режим течения в пограничном слое.

Интересно отметить, что как для активных, так и для реактивных решеток значение коэффициента A равно 0,13, что соответствует турбулентному режиму течения в пограничном слое. При переходе от одного режима течения к другому происходит параллельное смещение прямой, характерной для данного типа решетки.

Значения коэффициентов, полученных на основании обработки опытных данных, приведены в табл. 15.1.

15.9. Влияние геометрических и режимных параметров на коэффициенты потерь в турбинных решетках профилей

Как уже отмечалось, геометрическими параметрами решеток профилей являются:

относительный шаг установки профилей $\bar{t} = t/b$;

относительная высота $\bar{l} = l/b$ (b — хорда профиля);

углы входа и выхода α_0, α_1, (β_1, β_2);

угол установки профиля $\beta_у(\alpha_у)$.

Режимные параметры для решеток профилей — число Рейнольдса Re_b и число Маха M.

Обычно течение в решетках турбомашин происходит в области высоких чисел Re_b, существенно превышающих границу автомодельности по этому критерию подобия. Соответственно в большинстве случаев характеристики решеток представляются только в зависимости от числа M или λ.

Рассмотрим влияние указанных параметров на коэффициенты потерь энергии в решетках.

15.9.1. Влияние относительного шага $\bar{t}$ решетки профилей на коэффициент профильных потерь энергии

Рассматривая влияние шага на профильные потери в решетке, следует иметь в виду, что от этого геометрического параметра зависит форма межлопаточного канала и с его изменением меняются распределения скорости и давления вдоль поверхности профиля лопаток. Для примера на рис. 15.22

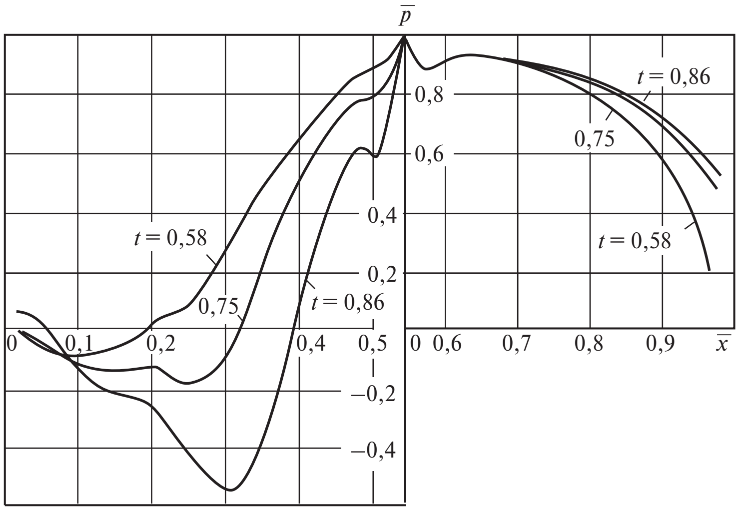


Рис. 15.22. Влияние шага на распределение давления по обводу профиля сопловой решетки

приведены распределения давления по обводу профиля в сопловой решетке при трех значениях относительного шага: $\overline{t}$ = 0,58; 0,75 и 0,86 [2]. Как следует из представленных зависимостей, по мере увеличения шага отмечается существенное изменение картины распределения давления, а следовательно, и скорости по обводу профиля.

При малом относительном шаге ($\overline{t}$ = 0,58) давление вдоль спинки профиля (левая часть рис. 15.22) монотонно снижается почти по всей поверхности, и только в области косого среза ближе к выходной кромке происходит торможение потока (давление растет). Эта область торможения потока (диффузорная область) занимает сравнительно небольшую часть поверхности спинки, так как при малом шаге только небольшая часть спинки профиля после узкого сечения *AD* межлопаточного канала оказывается в зоне косого среза *ADE* (см. рис. 15.9) решетки.

С увеличением шага ($\overline{t}$ = 0,75 и $\overline{t}$ = 0,86) эта зона расширяется и соответственно растет область диффузорного течения на спинке профиля. При этом в межлопаточном канале повышается интенсивность снижения давления (растет продольный градиент давления) и на спинке профиля происходит перерасширение потока, т.е. статическое давление на некотором участке спинки профиля оказывается ниже давления за решеткой.

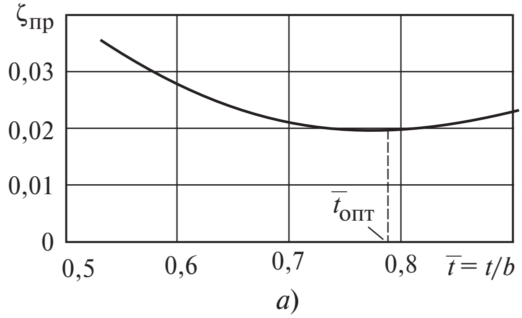
Поскольку давление с приближением к выходной кромке на режимах дозвуковых скоростей должно приближаться к давлению за решеткой, то на выходном участке спинки профиля неизбежно возникает участок диффузорного течения.

Соответственно чем сильнее перерасширяется поток, тем выше продольный положительный градиент давления на указанном участке и тем более интенсивно увеличиваются потери энергии на этом участке, а при возникновении отрыва потока от поверхности профиля потери растут особенно интенсивно (имеет место кризисное повышение потерь).

Если рассматривать изменение давления вдоль вогнутой части профиля (рис. 15.22), то при всех исследованных шагах здесь сохраняется конфузорное течение.

Оценивая приведенные распределения давления по обводу профиля в решетке относительно потерь энергии на трение в пограничном слое, можно отметить, что значение последних при увеличении относительного шага $\bar{t}$ с 0,58 до 0,75 почти не меняется и заметно возрастает при переходе к достаточно большому шагу $\bar{t} = 0{,}86$.

Вторая составляющая профильных потерь энергии — кромочные потери — с ростом относительного шага непрерывно снижается, так как с увеличением шага уменьшается относительная толщина кромок профиля $\bar{\Delta} = \Delta/a$ (a — поперечный размер «горла» решетки). В результате при суммировании потерь на трение и кромочных потерь их сумма (профильные потери) вначале снижается, а затем начинает увеличиваться в связи с заметным ростом потерь на трение, повышение которых уже не может быть скомпенсировано снижающимися кромочными потерями.



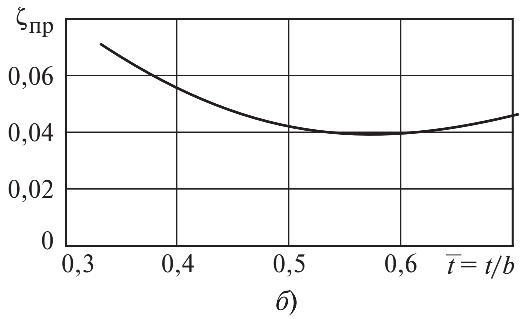


Рис. 15.23. Зависимости коэффициента профильных потерь энергии от безразмерного шага $\bar{t}$ для реактивных (*а*) и активных (*б*) решеток

На рис. 15.23 приведены типовые зависимости коэффициента профильных потерь $\zeta_{\text{пр}}$ от безразмерного (относительного) шага $\bar{t}$ для реактивной и активной решеток профилей, позволяющие не только качественно, но и количественно оценить значение оптимальных шагов для принципиально разных типов решеток профилей.

Как следует из приведенных зависимостей, оптимальный по минимуму профильных потерь относительный шаг реактивной решетки профилей ($\bar{t}_{\text{опт}} = 0{,}7 \div 0{,}8$) оказывается заметно больше оптимального шага для активной решетки ($\bar{t}_{\text{опт}} = 0{,}5 \div 0{,}6$).

При выборе оптимального шага для конкретной решетки следует учитывать фактическую толщину выходных кромок используемого профиля. Чем больше эта толщина, тем ближе значение оптимального относительного шага к верхней границе приведенных диапазонов изменения оптимальных шагов.

15.9.2. Влияние относительной длины решетки профилей на коэффициент потерь энергии

В зависимости от конечной длины (высоты) решеток профилей принципиальным образом меняется вся картина течения в межлопаточном канале, так как возникающие вблизи торцевых стенок вторичные течения при больших углах поворота потока являются причиной образования двух парных вихревых шнуров, и плоское течение, характерное для бесконечно длинных решеток, переходит в сложное трехмерное течение.

В значительной степени по этой причине теоретические оценки добавочных потерь энергии, обусловленных конечной высотой решеток (концевые потери), сопряжены с весьма большими сложностями, а полученные результаты не гарантируют достоверности этих оценок.

В результате до настоящего времени приходится использовать либо экспериментальные данные, либо полуэмпирические зависимости, среди которых наибольший интерес представляет формула (15.59), связывающая в явном виде основные параметры, влияющие на коэффициент концевых потерь $\zeta_{\text{к}}$.

Согласно указанной формуле для конкретной решетки профилей коэффициент $\zeta_{\text{к}}$ обратно пропорционален относительной высоте решетки $\bar{l} = l/b$ (b — хорда профиля), т.е.

$$\zeta_{\text{к}} = K/\bar{l}\,, \tag{15.60}$$

где K — коэффициент пропорциональности,

$$K = \frac{0{,}13}{\mathrm{Re}_b^{0{,}2}}\left[1 + B\left(1 + \varphi(\lambda)\frac{\mathrm{ctg}\,\beta_1}{\mathrm{ctg}\,\beta_2}\right)^2 \bar{t}^{\,2}\cos^2\beta_2\right].$$

Как следует из приведенной зависимости, этот коэффициент является функцией геометрических (β_1, β_2, $\bar{t}$) и режимных (Re_b, λ) параметров решетки. Соответственно при переходе от одной решетки профилей к другой и изменении режимных параметров значение концевых потерь может меняться в достаточно широких пределах. Однако во всех случаях при фиксированном коэффициенте пропорциональности K коэффициент $\zeta_\text{к}$ представляет собой линейную функцию от аргумента $\dfrac{1}{\bar{l}} = \dfrac{b}{l}$.

Если представить коэффициент потерь энергии ζ в виде суммы коэффициентов профильных $\zeta_\text{пр}$ и концевых потерь $\zeta_\text{к}$ для серии решеток профилей с одинаковыми значениями коэффициентов профильных потерь энергии и разными абсолютными высотами l, то зависимость (15.60) от указанного аргумента $1/\bar{l}$ будет представлять собой линейную функцию, качественно изображенную на рис. 15.24.

При $b/l = 0$ (решетка бесконечной высоты) коэффициент потерь энергии в решетке будет соответствовать коэффициенту профильных потерь, которые по определению не зависят от высоты $\bar{l}$.

Тогда при всех значениях аргумента b/l линии ab на рис. 15.24, параллельной оси абсцисс, будут соответствовать значения коэффициента профильных потерь энергии, а отрезкам ординат cd_i над линией ab при фикси-

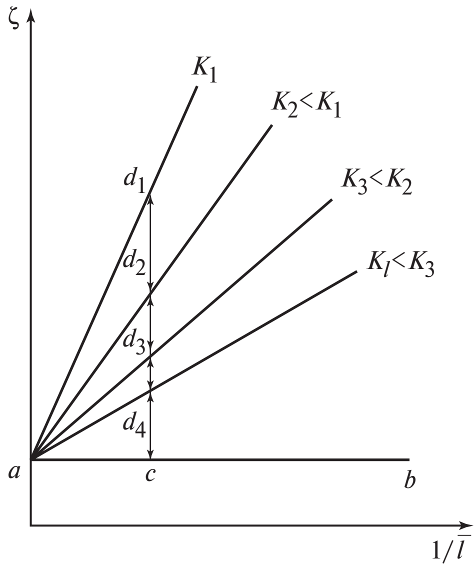


Рис. 15.24. Качественная зависимость коэффициента полных потерь энергии от безразмерной высоты решетки $\bar{l}$

рованной высоте решетки $\bar{l}$ — значения коэффициента концевых потерь энергии.

Зависимость $\zeta = f(1/\bar{l})$ имеет линейный характер из-за того, что абсолютное значение концевых потерь энергии не зависит от высоты решетки, а определяется только характером течения в корневых и периферийных областях. В то же время теоретическая кинетическая энергия потока, покидающего решетку, по отношению к которой и определяется коэффициент концевых потерь, растет пропорционально высоте решетки l. В результате при использовании в качестве аргумента величину b/l, обратную относительной высоте $\bar{l}$, получаем приведенные на рис. 15.24 линейные зависимости $\zeta = K_i \dfrac{1}{\bar{l}}$.

Таким образом, относительная высота решетки профилей $\bar{l}$ влияет на общий коэффициент потерь энергии в решетке за счет изменения коэффициента концевых потерь энергии, причем эти изменения могут быть весьма большими.

О степени влияния относительной высоты решетки $\bar{l}$ на ее коэффициент полных потерь можно судить по опытным данным Л.Я. Лазарева, представленным на рис. 15.25, где изображены зависимости отношения коэффициентов концевых $\zeta_к$ и профильных $\zeta_{пр}$ потерь от величины b/l для пяти решеток профилей, отличающихся друг от друга углом поворота потока $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$.

Как и следовало ожидать, в полном соответствии с зависимостью (15.59) увеличение $\Delta\beta$ с 60 до 140° ведет к достаточно большому повышению кон-

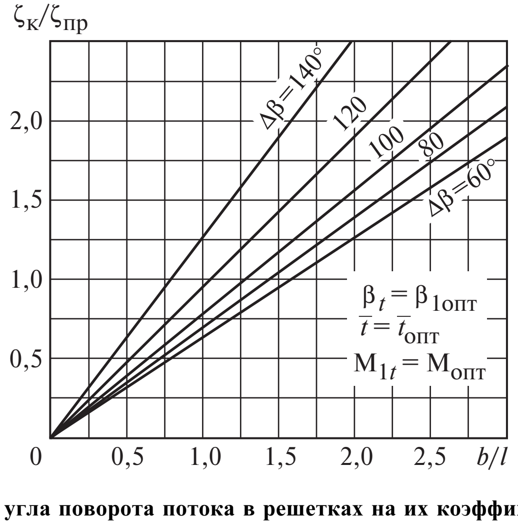


Рис. 15.25. Влияние угла поворота потока в решетках на их коэффициенты потерь при различных относительных высотах $\bar{l}$

цевых потерь энергии. Так, например, при $b/l = 2$ ($\bar{l} = 0{,}5$) концевые потери относительно профильных растут с 1,25 до 2,5, т.е. при $\bar{l} = 0{,}5$ и $\Delta\beta = 140°$ концевые потери в 2,5 раза превышают профильные потери в рассматриваемой решетке по сравнению с таковыми для решетки, где поток поворачивается на $\Delta\beta = 60°$.

Следует заметить, что рассматриваемый характер изменения коэффициентов потерь энергии в решетках с уменьшением их относительной высоты сохраняется до тех пор, пока вторичные течения в корневых и периферийных их сечениях не вступают в прямое взаимодействие. Возникающая при этом картина течения становится еще более сложной, и систематические опытные данные для таких течений пока отсутствуют. По указанным причинам существующие зависимости для определения суммарных потерь энергии в решетках профилей при относительных высотах $\bar{l} < 0{,}2$, как правило, не используются.

15.9.3. Влияние угла установки профиля $\beta_у$ в решетке на коэффициент профильных потерь энергии

К числу основных геометрических параметров решетки профилей наряду с безразмерными шагом $\bar{t}$ и высотой $\bar{l}$ относятся и углы входа в межпрофильный канал и выхода из него. Для сопловых решеток это углы α_0 и α_1, а для рабочих — β_1 и β_2. Для обеспечения расчетных значений указанных углов профиль в решетке должен устанавливаться под вполне определенным установочным углом $\alpha_у(\beta_у)$, который представляет собой угол наклона хорды профиля, проведенной через его входные и выходные кромки, к фронту решетки (см. рис. 15.9).

Отклонение от расчетного угла установки профиля в решетке $\alpha_{у0}(\beta_{у0})$ ведет к изменению формы межлопаточного канала.

При уменьшении угла установки профиля и неизменной хорде b происходит снижение выходной площади решетки [снижение размера a_1 (см. рис. 15.9)]. С повышением рассматриваемого угла $\beta_у$ размер a_1 увеличивается. Изменение этого размера приводит и к соответствующим изменениям относительной толщины кромок профиля $\bar{\Delta} = \Delta/a_1$.

Соответственно в первом случае ($\Delta\beta_у > 0$) коэффициент кромочных потерь энергии $\zeta_{кр}$ возрастает, а при $\Delta\beta_у = (\beta_{у0} - \beta_у) < 0$ снижается.

Разнонаправленное изменение коэффициента $\zeta_{кр}$ при увеличении и уменьшении угла установки профиля против расчетного $\alpha_{у0}(\beta_{у0})$ ведет к меньшему росту коэффициента профильных потерь при $\Delta\beta_у < 0$, чем в случае, когда $\Delta\beta_у > 0$.

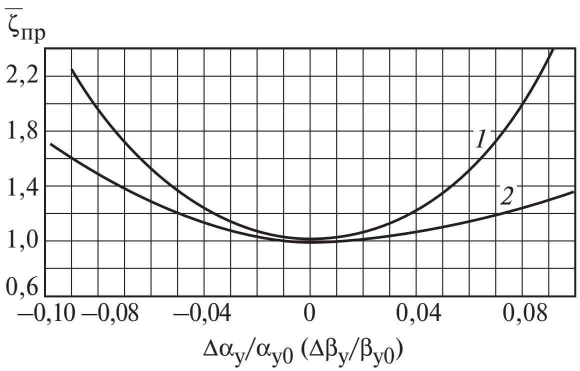


Рис. 15.26. Влияние угла установки профиля на относительный коэффициент профильных потерь энергии $\bar{\zeta}_{пр}$ [8]:

1 — активные решетки; *2* — реактивные решетки

О степени влияния угла $\beta_у$ на профильные потери энергии можно судить по зависимостям $\bar{\zeta}_{пр} = f(\overline{\Delta\alpha}_у)$ и $\bar{\zeta}_{пр} = f(\overline{\Delta\beta}_у)$, приведенным на рис. 15.26.

Здесь $\bar{\zeta}_{пр} = \zeta_{пр}/\zeta_{пр0}$ представляет собой отношение коэффициента профильных потерь $\zeta_{пр}$ при нерасчетном угле установки профиля $\alpha_у(\beta_у)$ к аналогичной величине при расчетных углах $\alpha_{у0}$ и $\beta_{у0}$.

Для активных рабочих решеток профилей (кривая *1*) влияние на $\bar{\zeta}_{пр}$ относительного отклонения установочных углов от расчетных значений оказалось более существенным, чем для сопловых (реактивных) решеток (кривая *2* на рис. 15.26), так как при большой конфузорности исходного канала ($\beta_{у0}$) поворот профиля принципиальным образом не меняет распределение скоростей по его обводам.

Для активных решеток при малой исходной конфузорности межлопаточного канала поворот профилей может привести к появлению на их обводах локальных диффузорных областей с соответствующим увеличением потерь энергии.

15.9.4. Влияние режимных параметров на характеристики турбинных решеток профилей

Выше (см. гл. 10) отмечалось, что критериями подобия течения рабочих сред в геометрически подобных решетках профилей являются число Рейнольдса и число Маха, так как именно от этих безразмерных комплексов зависят коэффициенты потерь энергии, коэффициенты расхода и фактические углы выхода потока из решеток профиля.

Оценивая влияние указанных величин на характеристики решеток, следует иметь в виду, что обе эти величины связаны между собой и изменение одной из них ведет к неизбежному изменению другой. Соответственно весьма сложно провести раздельную оценку влияния чисел М и Re на аэродинамические характеристики решеток профилей.

Однако при числах $M < 0{,}5$ характер течения рабочих сред весьма мало зависит от сжимаемости, и при этом влияние числа Рейнольдса можно оценить с максимальной достоверностью.

При оценке влияния числа Рейнольдса на характеристики решеток профиля следует иметь в виду, что этот параметр определяет режим течения в пограничном слое (ламинарный или турбулентный), физические и интегральные толщины указанного слоя, а при диффузорных течениях, если безотрывное течение оказывается невозможным, и положение сечения канала, где происходит отрыв пограничного слоя от обтекаемой поверхности.

Поскольку все влияние числа Re ограничивается областью пограничного слоя, то с изменением значения Re должны меняться потери на трение и концевые потери энергии, часть которых также определяется потерями на трение на торцевых поверхностях, ограничивающими высоту решетки профилей.

Указанные потери энергии пропорциональны толщинам потери энергии δ^{***}, которые связаны с толщинами потери импульса δ^{**} ($\delta^{***} = H^{*}\delta^{**} = 1{,}8\delta^{**}$).

В свою очередь, как при ламинарном, так и при турбулентном режиме течения в пограничном слое все интегральные толщины этого слоя обратно пропорциональны числу Рейнольдса в некоторой степени n, зависящей от режима течения. Соответственно при отсутствии отрыва потока от обтекаемых поверхностей с ростом числа Re потери энергии в решетках профилей должны непрерывно снижаться.

Однако при больших числах Рейнольдса ($\mathrm{Re}_b > 5 \cdot 10^5$) интенсивность изменения потерь энергии на трение с ростом значения Re оказывается весьма малой, что позволяет говорить о практической автомодельности (независимости) течения по рассматриваемому критерию подобия.

Приведенные рассуждения о влиянии числа Рейнольдса на коэффициенты потерь энергии в решетках турбомашин достаточно хорошо согласуются с опытными данными. В качестве примера на рис. 15.27 представлены зависимости коэффициента профильных потерь в сопловой решетке с профилем С-90-2А, рассчитанным для работы при дозвуковых скоростях рабочей среды, от чисел Re_b и M_{1t}.

Поскольку при проведении исследований происходило одновременное изменение указанных величин, то на оси абсцисс имеются две шкалы отдельно для каждого из двух аргументов.

Как уже отмечалось, при $\mathrm{M}_{1t} < 0{,}5$ влиянием сжимаемости среды на характер течения можно пренебречь, и в этом диапазоне скоростей базовой является абсцисса с аргументом Re_b, а ниже этой оси располагается в качестве справки ось для чисел M_{1t}.

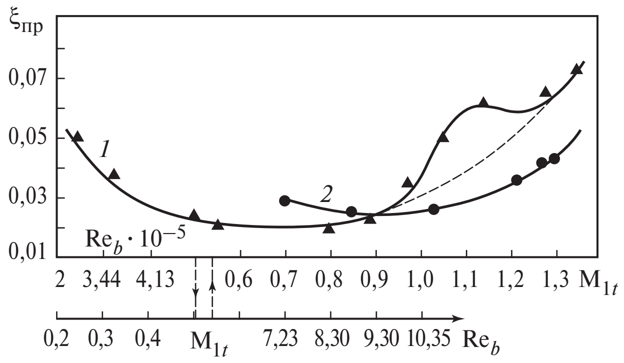


Рис. 15.27. Влияние чисел M и Re на профильные потери энергии:
1 — решетка профилей группы А для дозвуковых скоростей; *2* — решетка профилей группы Б для трансзвуковых скоростей

При $M_{1t} > 0{,}5$ базовой становится ось с аргументом M_{1t}, а ось с аргументом Re_b дается в качестве справки, так как значения чисел Re_b при $M_{1t} > 0{,}5$ превышают границу автомодельности по этому критерию.

Необходимо обратить внимание на продолжающееся снижение коэффициента профильных потерь и при $Re_b > 5 \cdot 10^5$, что на первый взгляд противоречит утверждению об автомодельности течения при указанных значениях чисел Рейнольдса. Однако в данном случае продолжающееся снижение коэффициента $\zeta_{пр}$ при $Re_b > 5 \cdot 10^5$ связано уже с влиянием сжимаемости потока на толщину потери импульса в пограничном слое.

Как показано в [2], по мере увеличения чисел Маха происходит уменьшение как толщины потери энергии, так и толщины потери импульса, и при $M_{1t} = 0{,}8 \div 0{,}9$ указанные величины снижаются на 15—20 %.

Таким образом, по мере повышения чисел Re_b и M_{1t} происходит снижение влияния числа Рейнольдса на потери трения при одновременном возрастании влияния числа Маха на эти потери. В результате и в диапазоне чисел $0{,}5 < M_{1t} < 0{,}8$ отмечается снижение профильных потерь. Однако уже при $M_{1t} > 0{,}9$ происходит кризисное увеличение коэффициента $\zeta_{пр}$, так как для дозвуковых профилей группы А при $M_{1t} > 0{,}8$ на их спинке возникают локальные сверхзвуковые области течения с последующим скачкообразным снижением скорости в возникающих скачках уплотнения.

Резкое повышение давления на очень коротком участке в большинстве случаев приводит к отрыву потока от спинки профиля. Внешним проявлением возникшего отрыва потока и является отмеченное кризисное увеличение потерь в трансзвуковой области течения.

Предельные значения чисел $M_{1t} = M^*_{1t}$, превышение которых сопровождается резким увеличением коэффициентов потерь энергии, являются функ-

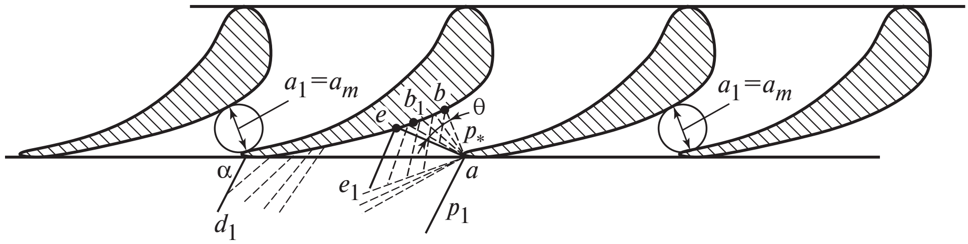


Рис. 15.28. Схема расширения потока в косом срезе решетки при сверхкритических отношениях давлений $p_1 < p_*$

цией чисел Рейнольдса. При независимом от числа M_{1t} увеличении этого параметра значение M_{1t}^* также увеличивается, а максимальный коэффициент профильных потерь $\zeta_{пр}$ снижается. Для очень больших чисел Re_b в решетках с дозвуковыми профилями (решетки группы А), имеющими большую кривизну обтекаемой поверхности, возможен и бескризисный переход от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям течения рабочих сред с непрерывным (монотонным) увеличением потерь энергии при сверхкритических отношениях давлений на рассматриваемой решетке профилей ($M_{1t} > 1$) (штриховая линия на рис. 15.27).

Рост потерь энергии при сверхкритических отношениях давлений на суживающихся решетках профилей обусловлен сложной волновой структурой потока, которая возникает при указанных отношениях давлений в косом срезе решеток.

Если в осесимметричных суживающихся соплах при сверхкритических отношениях давлений расширение потока за критическим (выходным) сечением происходит в симметричных волнах расширения за пределами сопла, то в суживающихся решетках профилей за минимальным сечением («горлом» решетки) расширение потока осуществляется в пределах косого среза, где с одной стороны продолжается поверхность выпуклой стороны профиля *bd* (рис. 15.28), а с другой стороны располагается точка возмущений *a*, поскольку с внутренней стороны (стороны суживающегося канала) давление в этой точке равно критическому давлению p_*, а с внешней стороны давление p_1 оказывается ниже критического ($p_1 < p_*$).

При таких условиях в особой точке *a* возникает центрированный пучок волн расширения, ширина которого (угол θ) определяется разностью давлений ($\Delta p = p_* - p_1$). Чем больше эта разность, тем больше будет угол θ, определяющий ширину возникающего центрированного пучка волн разрежения (рис. 15.28). Соответственно за последней волной ab_1 давление p_{b_1} выравнивается с давлением p_1 ($p_{b_1} = p_1$). При этом в первичных волнах разрежения поток разворачивается на некоторый угол δ_1 в направлении продольной оси решетки.

Возникшая в точке a исходная система волн разрежения на участке спинки bb_1 взаимодействует с твердой стенкой и отражается от нее системой расходящихся волн разрежения. В этой вторичной системе волн разрежения происходит дальнейшее расширение потока, и за волной ab_1 давление p_{b_1} оказывается заметно ниже давления за решеткой p_1.

В результате указанного перерасширения потока относительно давления p_1 за волной ab_1 возникает косой скачок уплотнения ee_1 с сохранением за ним сверхзвуковых скоростей. Волновая структура заканчивается хвостовым скачком dd_1.

Вся описанная сложная волновая структура в пределах косого среза решетки не только увеличивает потери на участке спинки bd, но и сопровождается дополнительными волновыми потерями энергии. В результате суммирования этих потерь происходит достаточно интенсивное увеличение профильных потерь, которое фиксируется для всех решеток профилей группы А.

Одновременно с повышением потерь энергии при сверхкритических отношениях давлений происходит и увеличение эффективного угла выхода потока $\alpha_{1эф}(\beta_{2эф})$ из решетки.

Для определения добавочного угла отклонения потока δ в косом срезе решетки профилей при сверхкритических отношениях давлений $\varepsilon_1 < \varepsilon_*$ рассмотрим расчетную схему, предложенную Бэром и приведенную на рис. 15.29.

При $\varepsilon_1 < \varepsilon_*$ узкое сечение решетки $a - b$ является критическим, и здесь устанавливаются критические параметры потока ρ_*, p_*, T_* при критическом значении скорости c_*, направленной под углом α_1 к фронту решетки.

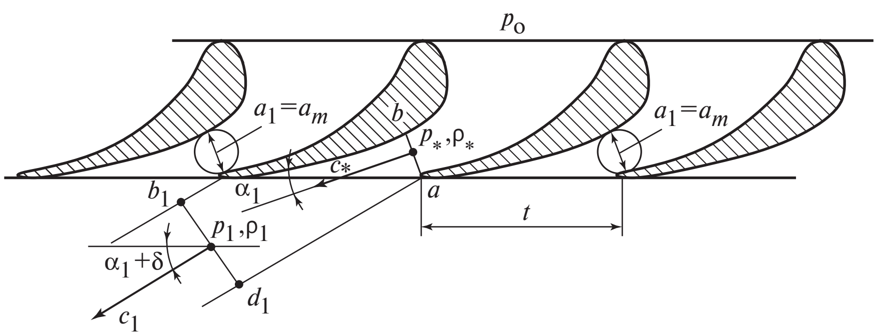


Рис. 15.29. К расчету угла отклонения потока в косом срезе решетки при сверхкритических отношениях давлений

На некотором расстоянии y от решетки в сечении b_1 — d_1 условно принимается равномерное распределение скорости c_1 и параметров потока ρ_1, p_1, T_1 по фронту решетки t.

Тогда, записывая уравнение расхода для контрольных сечений a — b и b_1 — d_1, получаем

$$c_1\rho_1 t \sin(\alpha_1 + \delta) = c_* \rho_* t \sin \alpha_1.$$

Отсюда

$$\sin(\alpha_1 + \delta) = \frac{c_*\rho_*}{c_1\rho_1} \sin \alpha_1 . \tag{15.61}$$

Формула (15.61) называется формулой Бора.

Выше (см. гл. 4) показано, что отношение $\dfrac{c_1\rho_1}{c_*\rho_*}$ представляет собой удельный приведенный расход q_1, определяемый в зависимости от коэффициента изоэнтропы k и безразмерной скорости λ_1 по следующей формуле:

$$q_1 = \frac{c_1\rho_1}{c_*\rho_*} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_1 \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\right)^{\frac{1}{k-1}} .$$

Поскольку $\lambda_1 = \sqrt{\dfrac{k+1}{k-1}\left(1 - \varepsilon_1^{\frac{k-1}{k}}\right)}$ ($\varepsilon_1 = p_1/p_0$, где p_0 — давление полного торможения перед решеткой), то

$$q_1 = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{1 - \varepsilon_1^{\frac{k-1}{k}}} .$$

В результате будем иметь

$$\sin(\alpha_1 + \delta) = \frac{\sin \alpha_1}{q_1} = \frac{\left(\dfrac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\dfrac{k-1}{k+1}} \sin \alpha_1}{\varepsilon_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{1 - \varepsilon_1^{\frac{k-1}{k}}}} . \tag{15.62}$$

Как следует из волновой структуры, приведенной на рис. 15.28, расширение потока в пределах косого среза происходит до тех пор, пока конечная волна, выходящая из точки b, находится в пределах этого среза.

При некотором относительном давлении $\varepsilon_1 = \varepsilon_a$ эта волна bb_1 будет совпадать с фронтом решетки. Угол между направлением скорости c_1 и волной bb_1 по определению будет равен углу возмущения α ($\sin \alpha = 1/\mathrm{M}_1 = a/c_1$, где a — скорость звука).

В свою очередь, в соответствии с принятыми на рис. 15.29 обозначениями этот угол одновременно является и углом возмущения решетки, т.е.

$$\sin\alpha = \sin(\alpha_1 + \delta) = a/c_1. \tag{15.63}$$

Подставляя (15.63) в (15.61), получаем

$$\frac{a}{c_1} = \frac{c_* \rho_*}{c_1 \rho_1} \sin\alpha_1 \quad \text{и} \quad \frac{a}{c_*} = \frac{\rho_*}{\rho_1} \sin\alpha_1 .$$

В свою очередь,

$$\frac{a}{c_*} = \sqrt{\frac{kRT_1(k+1)}{2kRT_0}} = \sqrt{\frac{k+1}{2}\frac{T_1}{T_0}} = \sqrt{\frac{k+1}{2}\,\varepsilon_a^{\frac{k-1}{k}}}$$

и

$$\frac{\rho_*}{\rho_1} = \frac{\rho_*/\rho_0}{\rho_1/\rho_0} = \frac{\varepsilon_*^{1/k}}{\varepsilon_a^{1/k}}.$$

Тогда $\sqrt{\frac{k+1}{2}\,\varepsilon_a^{\frac{k-1}{k}}} = \left(\frac{\varepsilon_*}{\varepsilon_a}\right)^{1/k} \sin\alpha_1 .$

Отсюда предельное отношение давлений $\varepsilon_1 = \varepsilon_a$, при котором расширение потока еще происходит в пределах косого среза решетки, будет определяться по формуле

$$\varepsilon_a = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} (\sin\varepsilon_1)^{\frac{2k}{k+1}} . \tag{15.64}$$

Если представить процесс увеличения безразмерной скорости λ_1 в косом срезе решетки в плоскости годографа, то можно получить картину, изображенную на рис. 15.30 для сопловой решетки с углом $\alpha_1 = 20°$.

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_*$ безразмерная скорость $\lambda_1 = 1$ и поток выходит из решетки под углом $\alpha_1 = 20°$ ($\delta = 0$).

По мере снижения относительного давления ε_1 происходит повышение скорости λ_1 и одновременно на значение δ увеличивается угол выхода потока из решетки.

Для рассматриваемой решетки ($\alpha_1 = 20°$) относительное давление $\varepsilon_a =$ $= 0{,}162$. При этом участок годографа скорости от точки a до точки a_1 соответствует расширению потока в пределах косого среза решетки. При дальнейшем снижении относительного давления ε_1 расширение потока уже проходит за пределами косого среза и окружная скорость λ_{1u} не меняется и растет только осевая составляющая скорости λ_{1a}.

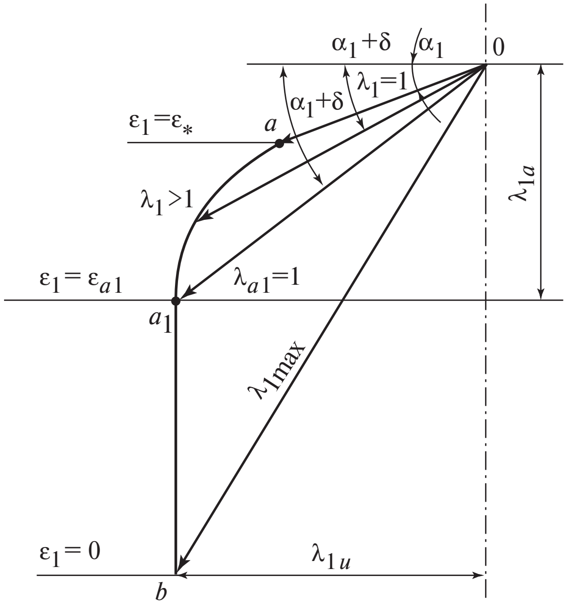


Рис. 15.30. Годограф безразмерной скорости λ_1 на выходе из решетки профилей при сверхкритических отношениях давлений

Сравнение результатов, полученных по формуле Бэра, с опытными данными показывает, что действительное увеличение угла выхода потока из решетки оказывается бóльшим, чем это следует из формулы (15.62).

Указанная разница является естественным следствием того, что при записи уравнения расхода через контрольное сечение b_1—d_1 (см. рис. 15.29) не учитывалось реальное поле скоростей в этом сечении. Эта ошибка может быть частично скомпенсирована введением в знаменатель формулы (15.62) коэффициента расхода μ_1. Однако эта величина зависит от относительного давления ε_1, и фактических данных по значению μ_1 для сверхзвуковой области течения пока в литературе нет.

Рассмотренные зависимости $\zeta_{пр} = f(M_{1t})$ для сопловых решеток с дозвуковыми профилями группы А (см. 15.27) могут быть изменены за счет изменения формы профиля спинки лопаток в области косого среза решетки. Этот путь широко используется при проектировании решеток, предназначенных для работы при трансзвуковых и небольших сверхзвуковых скоростях рабочих сред.

Способ воздействия на характер течения в области косого среза решеток при критических и сверхкритических отношениях давлений вытекает из той волновой структуры, которая изображена на рис. 15.28. Главный ее недостаток состоит в перерасширении потока во вторичных (отраженных) волнах разрежения.

Степень этого перерасширения можно существенно снизить, если сократить интенсивность отраженных волн или вообще их уничтожить. Эта задача рассматривалась ранее (см. гл. 8), и ее решение сводится к изменению кривизны стенки в области взаимодействия первичных волн с ее поверхностью. Такие профили с обратной кривизной обтекаемой поверхности впервые, видимо, рассматривались в [16], а плоская решетка с такими профилями изображена на рис. 15.31 (решетка группы Б).

Использование профилей с обратной кривизной обтекаемой поверхности позволило расширить область применения суживающихся решеток до существенно более высоких значений чисел M_{1t}. Для таких решеток зона интенсивного увеличения коэффициентов профильных потерь смещается в сверхзвуковую область, и эти решетки могут использоваться при $M_{1t} < 1{,}2 \div 1{,}3$ (кривая 2 на рис. 15.27).

Более сложная зависимость профильных потерь энергии от числа M_{1t} в выходном сечении решеток имеет место в решетке профилей группы В с расширяющимися межлопаточными каналами.

Наиболее полные результаты исследований таких решеток содержатся в [6], где объектами испытаний была большая серия решеток с различными степенями расширения каналов $n = F_2/F_1$, которые изменялись от $n = 1$ до $n = 1{,}87$ (рис. 15.32). Итоговые данные этих исследований приведены на рис. 15.32 в виде зависимостей $\zeta_{пр} = f(M_{1t}, n)$.

В данном случае обращает на себя внимание очень высокий уровень потерь энергий в областях дозвуковых и сравнительно небольших сверхзвуковых скоростей ($M_{1t} < 1{,}3 \div 1{,}5$). Максимальные значения коэффициентов профильных потерь были зафиксированы при $M_{1t} \approx 0{,}7 \div 0{,}9$, причем абсолютные значения этих потерь интенсивно увеличиваются по мере повышения степени расширения межлопаточного канала (при $n = 1{,}87 \zeta_{пр}^{max} \approx 45$ %). Затем по мере увеличения теоретической скорости M_{1t} эти потери снижаются и достигают минимальных значений при расчетной безразмерной скорости M_{1t}, которая, как и в соплах Лаваля, зависит от степени расширения межлопаточного канала.

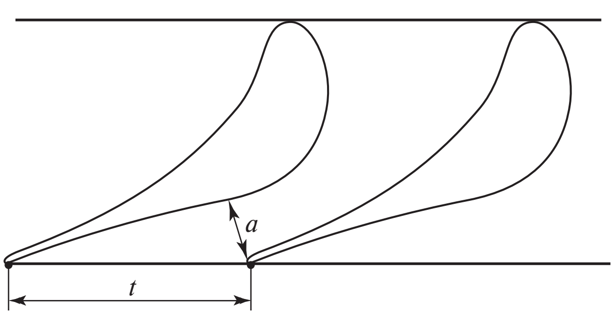


Рис. 15.31. Профили группы Б с обратной кривизной поверхности спинки в области косого среза

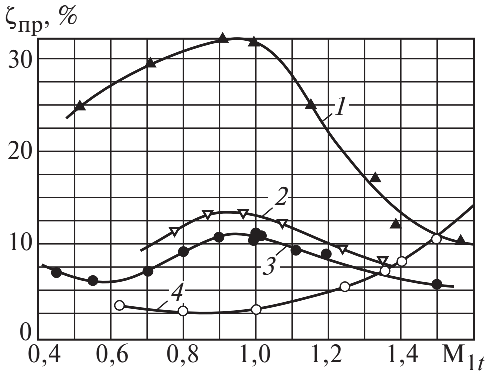


Рис. 15.32. Зависимости $\zeta_{пр}= f(M_{1t}, n)$ для расширяющихся и суживающейся решеток профилей:

1 — *n* = 1,87; *2* — *n* = 1,6; *3* — *n* = 1,42; *4* — суживающаяся решетка (*n* = 1)

Представленная картина изменения потерь в расширяющихся решетках профилей является вполне типичной для всех расширяющихся каналов, так как при выходной безразмерной скорости $M_{1t} \approx 0{,}5$ даже при малой степени расширения канала ($n = 1{,}16$) в его узком сечении скорость оказывается близкой к звуковой, и как в обычных соплах Лаваля (см. гл. 8) имеет место кризисное увеличение потерь.

При $0{,}6 < M_{1t} < 1{,}1$ и $n > 1{,}3$ все рассматриваемые решетки работают в нерасчетных режимах со скачками уплотнения в расширяющейся части межлопаточного канала либо в выходном сечении (второй и третий режимы работы сопла Лаваля).

Наличие интенсивных скачков уплотнения в проточной части решеток профилей является не только источником дополнительных волновых потерь, но и способствует отрыву потока от обтекаемых поверхностей, что обычно также вызывает достаточно высокую интенсивность увеличения потерь.

При смещении скачков уплотнения в область косого среза решетки потери в расширяющейся части межлопаточного канала резко снижаются, а при дальнейшем уменьшении относительного давления ε_1 за решеткой (росте числа M_{1t}) и волновые потери в связи с уменьшением интенсивности скачков также резко падают.

В результате на расчетных режимах расширяющихся сопл коэффициент профильных потерь оказывается на уровне 5—6 % при очень высоких скоростях потока за решеткой.

На рис. 15.32 для сравнения приведена зависимость $\zeta_{пр} = f(M_{1t})$ и для обычной суживающейся решетки ($n = 1$). Видно, что область рационального применения такой решетки ограничена небольшими сверхзвуковыми скоростями, так как уже при $M_{1t} = 1{,}2$ можно подобрать расширяющуюся решетку с малой степенью расширения ($n = 1{,}05$), которая на расчетном режиме будет иметь коэффициент профильных потерь энергии на уровне 5—6 %.

При использовании трансзвуковых решеток группы Б или решеток с обратной кривизной поверхности в пределах косого среза переход к более сложным расширяющимся решеткам с экономической точки зрения оказывается оправданным при расчетных скоростях в выходных сечениях $M_{1t} > 1{,}3 \div 1{,}4$.

15.10. Некоторые способы снижения профильных и концевых потерь энергии в решетках профилей

15.10.1. Пути снижения профильных потерь энергии

Рассматривая решетки профилей, разработанные в 60-е годы прошлого столетия, и современные решетки с профилями, спроектированными на основе современных расчетных технологий, можно отметить, что при тонких выходных кромках по уровню профильных потерь энергии они различаются мало, а некоторые старые решетки МЭИ или ЦКТИ по коэффициенту профильных потерь имеют даже некоторое преимущество по сравнению с новыми решетками зарубежных фирм. Для примера на рис. 15.33 приведены зависимости $\zeta_{\text{пр}} = f(M_{1t})$ для решетки профилей МЭИ С-90-22А [8] (кривая *1*) и новой решетки профилей при 3D-профилировании (кривая *2*).

Как следует из представленных данных, профильные потери в решетке МЭИ оказались почти на 0,5 % меньше, чем эти же потери в современной решетке. Правда, в профилях фирмы Alstom не указана толщина кромок исследуемой решетки, и эта разница может явиться следствием более толстой кромки.

Подобные сравнения не служат основанием для каких-либо общих выводов, но тем не менее указывают на то, что при отсутствии специальных мер воздействия на характер течения в суживающихся (реактивных) решетках при безразмерных скоростях M_{1t}, не превышающих 0,7—0,8, значительно

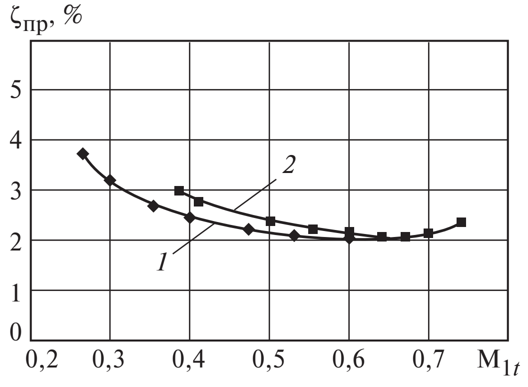


Рис. 15.33. Зависимости $\zeta_{\text{пр}} = f(M_{1t}, n)$ для решетки профилей МЭИ С-90-22А (кривая *1*) и решетки при 3D-профилировании (кривая *2*)

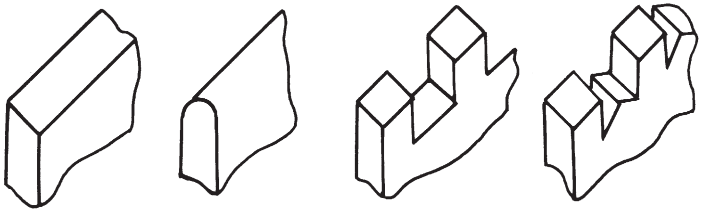


Рис. 15.34. Возможные формы выходных кромок лопаток паровых и газовых турбин

снизить профильные потери уже нельзя, поскольку они приблизились к теоретически достижимому минимальному уровню. Такой вывод относится к профилям с тонкой выходной кромкой, не допускающей ее модификации.

При наличии толстых выходных кромок кромочные потери энергии по сравнению с потерями на трение оказываются существенно бóльшими и уже в значительной степени определяют величину профильных потерь. Так, при относительной толщине кромки $\overline{\Delta} \approx 0{,}03$ коэффициент кромочных потерь $\zeta_{кр} \approx 0{,}06$ при уровне коэффициента потерь на трение $\zeta_{тр} \approx 0{,}01 \div 0{,}015$. Для таких решеток оказывается вполне реальным снижение профильных потерь энергии за счет снижения кромочных потерь.

Наиболее подробно этот вопрос рассмотрен в диссертации А.В. Жигалина, где исследовались самые разнообразные формы кромок, в том числе и кромки с квадратными прорезями (рис. 15.34).

Как показали детальные исследования, выполнение фигурных кромок позволило увеличить кромочное давление и уже на сравнительно небольшом расстоянии от фронта решетки уменьшить «провалы» скоростей за такими кромками. Подобные решетки могут с успехом использоваться в охлаждаемых решетках газовых турбин с выдувом охлаждающего воздуха через толстые выходные кромки.

Другая область, где еще можно добиться заметного снижения профильных потерь энергии, относится к трансзвуковым течениям ($0{,}8 < M_{1t} < 1{,}1$).

Как уже отмечалось, в этой области в решетках профилей группы А (дозвуковые профили) наблюдается кризисное увеличение потерь, обусловленное отрывом потока в косом срезе решетки.

Одним из эффективных способов стабилизации течения в области действия положительных продольных градиентов давления (в данном случае это часть спинки профиля в косом срезе) является переход от гладких к фигурным поверхностям [15].

Элемент решетки с фигурными профилями приведен на рис. 15.35, *а*. Здесь в области косого среза на выпуклой поверхности профиля прорезаны продольные прямоугольные канавки. Их глубина от «горла» решетки по направлению к выходным кромкам плавно увеличивается от нуля до значения, при котором выходная кромка разрезается на глубину, равную ширине канавки.

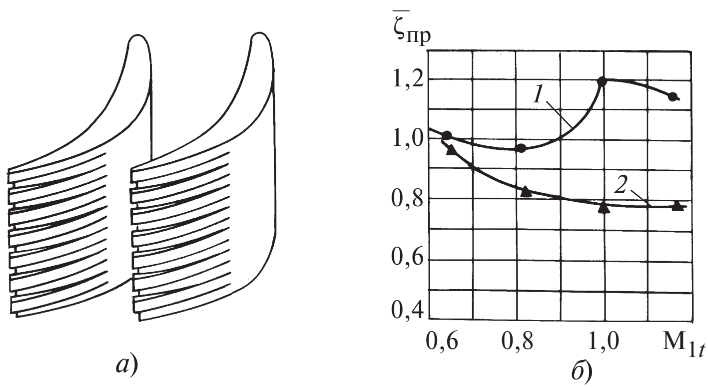


Рис. 15.35. Решетка профилей с продольными канавками на их спинке в пределах косого среза (*а*) и (*б*) зависимости $\overline{\zeta}_{пр} = f(M_{1t})$ (*б*) для решеток с гладкой поверхностью профилей (кривая *1*) и с продольными канавками на их поверхности (кривая *2*)

При обтекании такой поверхности существенно увеличивается предельное значение продольного градиента давления ($dp/dx > 0$), вызывающее отрыв пограничного слоя, за счет интенсивной турбулизации потока в прямоугольных канавках. Кроме того, при взаимодействии первичных волн разрежения с такими поверхностями происходит снижение степени перерасширения потока в отраженных волнах разрежения.

Результаты испытаний решетки с гладкими профилями и профилями с продольными канавками приведены на рис. 15.35, *б*. Для большей наглядности опытные значения полученных коэффициентов профильных потерь энергии отнесены к их значению для решетки с гладкими поверхностями профилей при скорости $M_{1t} = 0{,}64$. Нормированные таким образом коэффициенты $\overline{\zeta}_{пр}$ представлены на рис. 15.35, *б* в зависимости от теоретической безразмерной скорости за решетками M_{1t}.

При гладкой поверхности профиля относительный коэффициент профильных потерь энергии $\overline{\zeta}_{пр}$ после некоторого снижения в диапазоне скоростей $M_{1t} = 0{,}6 \div 0{,}8$ начинает интенсивно увеличиваться, превысив в точке максимума ($M_{1t} = 1$) базовое значение этого коэффициента на 20 %.

При выполнении на поверхности этого же профиля продольных канавок в области косого среза лопатки относительный коэффициент профильных потерь $\overline{\zeta}_{пр}$ с ростом числа M_{1t} непрерывно снижается и по отношению к базовому значению $\zeta_{пр0}$ потери в сверхзвуковой области уменьшаются на 20—22 %.

Столь значительное снижение потерь энергии происходит в результате как стабилизации течения в пределах косого среза решетки, так и снижения кромочных потерь, обусловленного фигурными кромками рассматриваемых профилей.

По существу выполнение продольных канавок привело к новому двуххордовому профилю за счет набора по высоте двух профилей с хордами b_1 и $b_2 = b_1 - a$ с шагом $t = 2a$ (a — ширина канавок и выступов).

15.10.2. Пути снижения концевых потерь энергии

В общем балансе потерь энергии при сравнительно малых относительных высотах концевые потери занимают центральное место, и их абсолютное значение может в несколько раз превысить значение профильных потерь. По этой причине вопросам снижения указанных потерь энергии уделяется достаточно много внимания.

В сопловых решетках наиболее эффективным способом снижения концевых потерь является несимметричное меридиональное профилирование периферийной торцевой поверхности решетки [9]. Меридиональное сечение такой решетки профилей показано на рис. 15.36, где приведены обозначения ее основных геометрических характеристик.

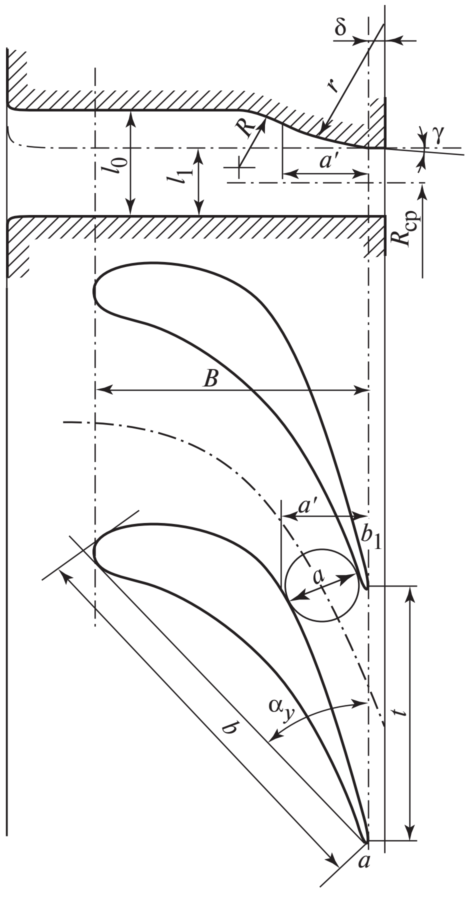


Рис. 15.36. Меридианальное сечение сопловой решетки с профилированным верхним бандажом

Суть рассматриваемого способа воздействия на характер течения у внешнего (периферийного) обвода состоит в том, что входная высота решетки l_0 выполняется заметно больше расчетной выходной высоты l_1, и эти два характерных сечения соединяются плавным профилированным внешним обводом.

Такое решение влечет за собой более плавное ускорение потока в межлопаточных каналах решетки с минимальными входными возмущениями и увеличивающейся по ходу потока конфузорностью. В результате основной поворот потока происходит при меньших скоростях и соответственно меньшем поперечном градиенте давления, а основное ускорение поток приобретает в наиболее проблемной части решетки — косом срезе.

Уменьшение поперечного градиента давления в области поворота потока существенно снижает интенсивность вторичных течений, уменьшая тем самым уровень концевых потерь энергии. Кроме того, при обтекании рабочим телом выпуклого внешнего обвода возникает направленный к нижнему обводу радиальный градиент давления, который в кольцевых решетках существенно улучшает течение потока в их корневых сечениях.

Эффективность рассматриваемого способа воздействия на концевые потери зависит как от безразмерной высоты лопаток $\overline{l} = l/b$, так и от степени их поджатия в меридиональной плоскости $\overline{\Delta l} = \dfrac{l_0 - l_1}{l_1}$. Получаемое при этом снижение коэффициентов потерь энергии $\Delta\zeta$ в решетке с меридиональным поджатием проходных сечений иллюстрируется данными испытаний, приведенными на рис. 15.37.

Как следует из представленных зависимостей, по мере уменьшения относительной высоты решетки $\overline{l}$ происходит достаточно большое снижение общих потерь энергии в решетке по сравнению с непрофилированным бан-

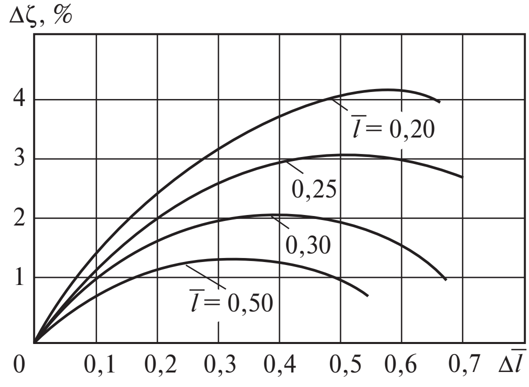


Рис. 15.37. Влияние степени поджатия меридиональной плоскости канала сопловой решетки на коэффициент потерь энергии

дажом ($\Delta\zeta = \zeta_0 - \zeta$, где ζ_0 — коэффициент потерь в исходной решетке с обычным внешним обводом).

Как и следовало ожидать, по мере уменьшения безразмерной высоты лопаток $\overline{l}$ весьма интенсивно растет и оптимальное значение степени меридионального поджатия решетки.

Наряду с рассмотренным решением практический интерес представляют и способы снижения концевых потерь, связанные с ослаблением или полной ликвидацией подковообразных вихрей, возникающих на входе в решетку и ведущих к добавочному увеличению концевых потерь. Вихрь, наглядно показанный на рис. 15.18, образуется вблизи торцевых поверхностей решетки при набегании потока на входные кромки профилей, охватывая их в виде подковы. Интенсивность вихря зависит в основном от толщины входных кромок профиля. Поскольку в сопловых решетках входные кромки имеют достаточно большую толщину, то возникающие подковообразные вихри характеризуются весьма высокой интенсивностью. Для снижения их отрицательного влияния на концевые потери энергии в сопловых решетках можно использовать «дельфинообразные» профили, изображенные на рис. 15.38 [1]. От обычных профилей они отличаются надстроенным удлиненным «носиком», напоминающим по форме нос дельфина, с тонкой входной кромкой.

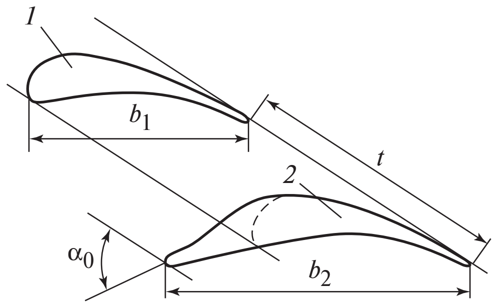
Кроме снижения интенсивности входного вихря в межлопаточном канале, образованном рассматриваемыми профилями, уменьшается поперечный градиент давления и увеличивается конфузорность на выходной части данного канала, что также ведет к снижению концевых потерь.

Приведенные на рис. 15.38 результаты испытаний решетки из «дельфинообразных» профилей свидетельствуют о существенном снижении суммарных потерь энергии (до 20 % от уровня потерь в решетке из обычных профилей) в области расчетных углов натекания потока на профили $\alpha_0 \approx 80 \div 100°$. Однако чувствительность рассматриваемой решетки к углу натекания потока α_0 оказалась более высокой, чем у решетки с обычными профилями.

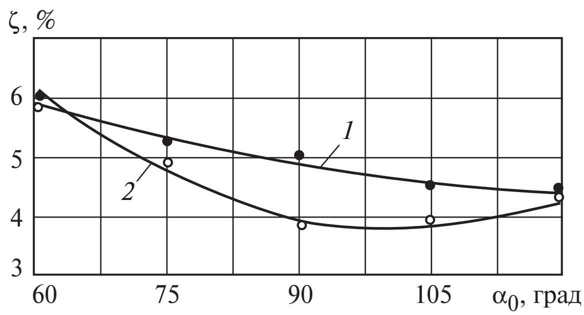
Этот недостаток отсутствует у решетки с профилями, имеющими толстые входные кромки, на которых по всей высоте был выполнен V-образный вырез (рис. 15.39). Исследование решетки с таким необычным очертанием входной кромки подтвердило факт снижения интенсивности входного вихря за счет образования перед профилем аэродинамической подушки.

Суммарный эффект от использования таких профилей (рис. 15.40) оказался почти таким же, как и у «дельфинообразных» профилей, но при наличии «жидкой» аэродинамической кромки существенно уменьшилась его чувствительность к углу натекания потока.

Для активных (рабочих) решеток профилей пока основным способом снижения концевых потерь является профилирование межлопаточного канала таким образом, чтобы обеспечить минимальную интенсивность вторичных течений в концевых сечениях лопаток.



а)



б)

Рис. 15.38. Формы обычного (*1*) и «дельфинообразного» (*2*) профилей (*а*) и зависимости $\zeta = f(\alpha_0)$ для обычной решетки (кривая *1*) и для решетки с «дельфинообразными» профилями (кривая *2*) (*б*)

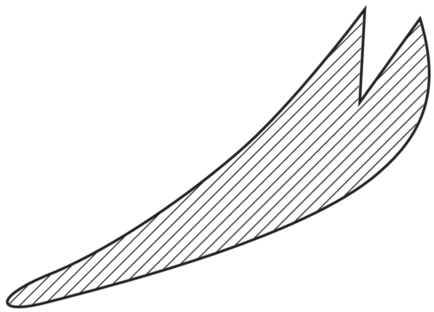


Рис. 15.39. Профиль с V-образным вырезом на входной кромке

С этой целью в [10] рассматриваются короткие активные решетки с профилями, которые вместо плавно суживающегося межлопаточного канала образуют диффузорно-конфузорный канал. Решетка с такими профилями изображена на рис. 15.41. Определяющими размерами этих решеток являются поперечный размер a_1 входного сечения, максимальный размер канала a_m в области наибольшей кривизны профиля и размер a_2 в выходном сечении решетки.

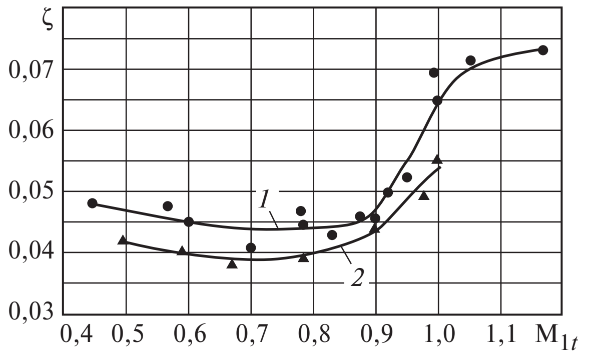


Рис. 15.40. Зависимости $\zeta = f(M_{1t})$ для решетки с профилями С-90-15А (кривая *1*) и решетки с V-образным вырезом на кромке профилей (кривая *2*)

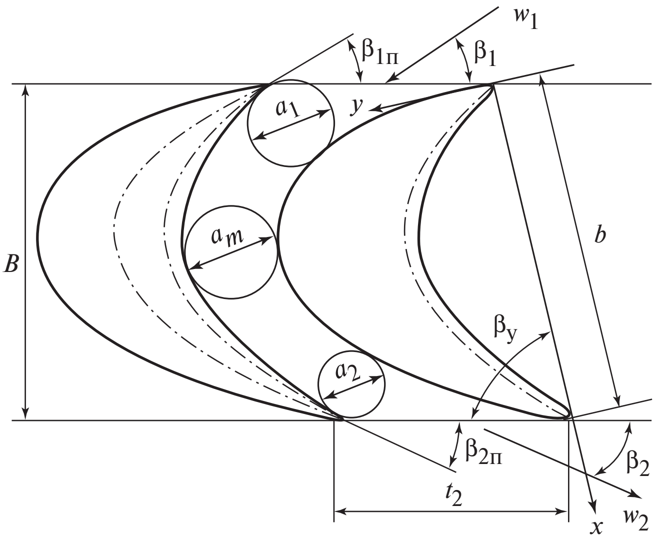


Рис. 15.41. Активная решетка профилей с диффузорно-конфузорной формой межлопаточного канала

Основная идея профилирования рассматриваемого канала сводится к снижению скорости потока в области максимальной кривизны межлопаточного канала.

Поскольку центробежная сила, действующая на рабочее тело, движущееся по криволинейной траектории, пропорциональна квадрату скорости, то при снижении последней происходит резкое уменьшение и указанной силы. Соответственно снижается и поперечный градиент давления, определяющий интенсивность вторичных течений в периферийных сечениях решетки профилей.

Для коротких решеток ($\overline{l} = 1$) переход к профилям с конфузорно-диффузорными каналами снижает общие потери при расчетных углах входа потока на решетку примерно на 20—25 %.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое плоская решетка профилей?
2. Чем преобразование энергии в сопловой решетке отличается от преобразования энергии в рабочей решетке профилей?
3. Как записывается уравнение энергии для рабочей решетки профилей?
4. Что такое коэффициенты скорости?
5. Как связаны коэффициенты скорости с коэффициентами потерь энергии в решетках?
6. Какие потери энергии определяют значение профильных потерь?
7. Что такое концевые потери энергии в решетках профилей?
8. Как меняются концевые потери энергии в решетке профилей при увеличении ее длины?
9. Как определяется угол установки профиля в решетке?
10. Какие составляющие потерь энергии в решетке профилей зависят от числа Рейнольдса?
11. В чем конструктивные различия между дозвуковыми и трансзвуковыми решетками профилей?
12. Каким способом можно снизить концевые потери энергии в решетках профилей?
13. По какому закону меняются скорости в поперечном сечении межлопаточного канала?
14. Как меняются коэффициенты кромочных потерь с изменением относительной толщины выходных кромок профиля?
15. В чем физическая причина отклонения потока в косом срезе решетки при сверхкритических перепадах давления?

Глава 16

ЭЛЕМЕНТЫ ДВУХФАЗНЫХ И ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

16.1. Основные понятия и определения

Движущиеся жидкие и газообразные среды могут как состоять из одного вещества, так и представлять собой смесь различных веществ.

Вещества, входящие в состав смесей, называются **компонентами**. Примером многокомпонентной среды является воздух, представляющий собой смесь различных газов. Однако концентрация этих газов в воздухе остается примерно постоянной, и между ними не происходит никаких реакций. Кроме того, все компоненты воздуха подчиняются уравнению состояния идеального газа. Соответственно этому же уравнению подчиняется и вся рассматриваемая смесь (воздух), причем газовая постоянная в этом случае вычисляется по обычным формулам смешения. На этом основании воздух и все подобные смеси можно рассматривать и как однокомпонентную среду.

Однозначным примером двухкомпонентной среды является воздух с примесью твердых частиц (пыли, песка, цемента и др.). В данном случае составляющие двухкомпонентной смеси находятся в газообразной и твердой фазах. Если рассматривать смесь воздуха и перегретого пара, то здесь компоненты смеси находятся в одинаковой газообразной фазе.

Однокомпонентная среда, т.е. среда, состоящая из одного химического вещества, может в принципе содержать все три фазы — **твердую**, **жидкую** и **газообразную**.

Однако применительно к задачам теплотехники наибольший практический интерес представляет движущаяся однокомпонентная двухфазная среда, содержащая как жидкую, так и паровую фазы (водяной пар + капли воды или вода + пузырьки пара).

В движущейся двухфазной среде выделяют несущую и дискретную фазы. Для среды, состоящей из воды и водяного пара, несущей фазой может быть вода при малом содержании пара, либо пар при малом содержании воды.

Дискретная фаза имеет обычно сложную структуру, она состоит из капель или пузырьков пара самых различных размеров (полидисперсная структура). Распределение размеров капель в дискретной фазе подчиняется обычно закону нормального распределения.

Двухфазные потоки характеризуются рядом величин, к числу которых относятся следующие.

1. Коэффициент скольжения ν, представляющий собой отношение скорости движения дискретной фазы c_2 к скорости несущей фазы c_1: $\nu = c_2/c_1$.

2. Массовая концентрация жидкости в смеси (степень влажности) y, равная отношению массы жидкости m' в некотором объеме смеси V к общей массе m смеси в этом объеме: $y = \dfrac{m'}{m} = \dfrac{m'}{m' + m''}$. Здесь и далее штрих при обозначении любой величины относится к жидкой фазе, два штриха — к паровой или воздушной фазе (при двухкомпонентной двухфазной среде). Отсутствие штриха означает, что рассматриваемая величина относится ко всей смеси.

3. Массовая концентрация газа или пара в смеси (степень сухости) x, равная отношению массы газа или пара m'' в объеме V к общей массе смеси $m = m' + m''$:

$$x = \frac{m''}{m} = \frac{m''}{m' + m''}.$$

4. Объемная концентрация жидкой фазы $\varphi_{V\text{ж}}$ в объеме V:

$$\varphi_{V\text{ж}} = \frac{V'}{V} = \frac{V'}{V' + V''},$$

где V' — объем, занимаемый жидкой фазой; V'' — объем, занимаемый паровой или газовой фазой.

5. Объемная концентрация паровой или газовой фазы $\varphi_{V\text{п}}$ в смеси:

$$\varphi_{V\text{п}} = \frac{V''}{V} = \frac{V''}{V' + V''}.$$

Использовав приведенные характеристики, найдем плотность пароводяной смеси (несущая фаза — пар).

Согласно определению

$$y = \frac{m'}{m' + m''}; \quad \rho' = m'/V'; \quad \rho'' = m''/V'' \text{ и } \rho = m/V.$$

Отсюда объем смеси $V = m/\rho = V' + V''$. Поскольку $m' = ym$, $m'' = (1 - y)m$, $V' = m'/\rho'$, $V'' = m''/\rho''$, а $m = m' + m''$, то

$$\frac{m}{\rho} = \frac{m'}{\rho'} + \frac{m''}{\rho''} = \frac{ym}{\rho'} + \frac{(1 - y)m}{\rho''}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y}{\rho'} + \frac{1 - y}{\rho''}. \tag{16.1}$$

Если несущей фазой является вода, а дискретной — пар, то

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y}{\rho''} + \frac{1 - y}{\rho'}. \tag{16.2}$$

Зная плотность двухфазного потока и его секундный массовый расход m, легко найдем его скорость c в произвольном сечении канала площадью F:

$$c = \frac{m}{\rho F}.$$

При этом скорость жидкой фазы в рассматриваемом сечении определяется по следующей формуле:

$$c_{\text{ж}} = \frac{m'}{\rho' F_{\text{ж}}},$$

где $F_{\text{ж}} = \varphi_{V\text{ж}} F$.

Так как согласно определению массовой концентрации жидкости (степени влажности) $y = m'/m$, то

$$c_{\text{ж}} = \frac{my}{\rho' \varphi_{V\text{ж}} F}.$$

Соответственно скорость паровой фазы

$$c_{\text{п}} = \frac{m\varphi_{V\text{п}}}{\rho''(1-y)F}.$$

Причины появления в однокомпонентной среде дискретной водяной фазы могут быть самые разные. Так, при охлаждении пара или при его расширении, когда имеет место снижение давления, появляются капли воды в результате процесса конденсации. При нагревании воды с приближением к температуре кипения начинается интенсивное выделение пузырьков пара.

В большинстве случаев переход от однофазного к двухфазному течению рабочих сред происходит не при температуре насыщения, соответствующей давлению в движущейся среде, т.е. рассматриваемый процесс не является равновесным, и пар конденсируется с переохлаждением, а вода испаряется с перегревом.

Переохлажденный пар или перегретая вода находятся в состоянии относительной устойчивости (метастабильное состояние), которое при достижении некоторого критического переохлаждения или перегрева спонтанно (кризисным образом) возвращается к равновесному состоянию.

Время, необходимое для перехода от неравновесного к равновесному состоянию рассматриваемой двухфазной среды, называется **временем релаксации**, а сам процесс установления термодинамического равновесия **релаксацией**. При малом времени релаксации по сравнению с характерным временем изменения состояния смеси процесс течения можно условно считать равновесным.

При большом времени релаксации тепломассообмен между фазами можно не учитывать и рассматривать движущуюся среду неизменного состава.

Свойства текущих двухфазных сред, как однокомпонентных, так и двухкомпонентных, зависят от дисперсности и объемной концентрации.

При малой концентрации пузырьков воздуха в масле пузырьки рассеяны по всему потоку. Если же объемная концентрация воздуха превышает 50 %, то поток движется в виде пены, где воздушные включения разделены масляной пленкой.

В общем случае математический анализ течений двухфазных сред с учетом скоростей фазовых переходов является исключительно сложной задачей. Тем более, что даже дифференциальные уравнения неразрывности записать для движущейся двухфазной среды с дискретной фазой нельзя, так как наличие дискретной фазы нарушает основной постулат гидрогазодинамики о сплошности рассматриваемой среды.

В этой связи мы остановимся только на некоторых предельных задачах, где весь ход решений не требует малообоснованных допущений. Наиболее интересны с указанной точки зрения некоторые задачи, рассмотренные проф. Г.С. Самойловичем в [31] и изложенные далее см. § 16.2—16.6).

16.2. Двухфазное течение пара при фазовом равновесии

Рассмотрим одномерное изоэнтропийное течение пара в канале переменной площади сечения при наличии в нем мелкодисперсных капель воды. В этом случае коэффициент скольжения оказывается близким к единице и, следовательно, скорость капель можно считать равной скорости паровой фазы.

В соответствии с определением степень сухости пара x и его влажность (концентрация жидкой фазы) y будут вычисляться по формулам

$$x = \frac{m''}{m} = 1 - y; \quad y = \frac{m'}{m}; \quad m = m' + m''.$$

Здесь m — общий массовый расход среды; m' и m'' — массовые расходы жидкой и паровой фаз. Величины m' и m'' в связи с конденсацией будут меняться вдоль канала. Соответственно будут меняться сухость x и влажность y пара.

Из условия фазового равновесия следует, что обе фазы находятся при одинаковых температуре и давлении, соответствующих этим параметрам для насыщенного пара. Указанные величины связаны между собой формулой Клапейрона:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{r}{T(v'' - v')}.$$

Здесь r — теплота парообразования (теплота фазового перехода); v'' и v' — удельные объемы пара и воды. Поскольку $v' << v''$, то можно величиной v' без большой погрешности пренебречь и с учетом того, что плотность пара $\rho = 1/v''$, записать формулу Клапейрона—Клаузиуса в виде

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{\rho r}{T}. \tag{16.3}$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче давление и температура находятся в прямой зависимости друг от друга.

В данном случае уравнения сохранения примут следующий вид.

Поскольку объем, занимаемый жидкостью, весьма мал, то уравнение неразрывности можно записать только для паровой фазы:

$$\rho u F = (1 - y)m, \tag{16.4}$$

где F — площадь поперечного сечения канала.

В связи с равенством скоростей фаз уравнение сохранения количества движения будет иметь вид

$$\mathrm{d}(mu) = -F\,\mathrm{d}p. \tag{16.5}$$

Величина $F\mathrm{d}p$ представляет собой секундный импульс внешних сил, действующий на выделенный элемент жидкости.

При отсутствии теплообмена с внешней средой и совершаемой работы уравнение сохранения энергии можно записать в следующей форме:

$$\mathrm{d}\{m[(1 - y)(h'' + u^2/2) + x(h' + u^2/2)]\} = 0, \tag{16.6}$$

где h' и h'' — энтальпии паровой и жидкой фаз.

Для насыщенного пара справедливо уравнение состояния для совершенного газа, т.е.

$$p = \rho RT. \tag{16.7}$$

Использовав приведенные уравнения, найдем, как будут изменяться скорость и параметры потока в канале переменного профиля при движении в нем влажного пара в условиях фазового равновесия. С этой целью проведем ряд преобразований.

С помощью уравнения (16.7) исключим из (16.3) плотность. Тогда будем иметь

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{r}{T}\,\frac{p}{RT}\,.$$

Отсюда

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} - \frac{r}{RT}\,\frac{\mathrm{d}T}{T} = 0. \tag{16.8}$$

Далее запишем логарифмический дифференциал от уравнения (16.4):

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{y}{1 - y}\,\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}F}{F}\,. \tag{16.9}$$

Уравнение (16.5) представим в следующей форме:

$$\mathrm{d}u + \frac{F\,\mathrm{d}p}{m} = 0.$$

Использовав уравнение неразрывности (16.4), исключим отсюда расход пара m:

$$\mathrm{d}u + \frac{\mathrm{d}p(1 - y)}{\rho u} = 0.$$

Далее исключим из последнего соотношения плотность ρ с помощью уравнения состояния (16.7). Тогда будем иметь

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{\mathrm{d}p}{p}\,\frac{(1-y)RT}{u^2} = 0. \tag{16.10}$$

Уравнение сохранения энергии (16.6) представим в виде

$$(1-y)h'' + y\,\mathrm{d}h' - (h'' - h')\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}u = 0.$$

Поскольку

$$\mathrm{d}h'' = c_p\,\mathrm{d}T, \quad \mathrm{d}h' = c_\text{в}\,\mathrm{d}T, \text{ а } \quad h'' - h' = r,$$

то можно записать

$$[(1-y)c_p + yc_\text{в}]\,\mathrm{d}T - r\,\mathrm{d}y + u\,\mathrm{d}u = 0. \tag{16.11}$$

где c_p и $c_\text{в}$ — теплоемкости пара и воды.

Введем в рассмотрение среднюю теплоемкость $\overline{c}$:

$$\overline{c} = (1-y)c_p + yc_\text{в}$$

и после деления (16.11) на u^2 получаем

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}\,\frac{\overline{c}T}{u^2} + \frac{\mathrm{d}u}{u} - \frac{ry}{u^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{y} = 0. \tag{16.12}$$

Наконец, логарифмическая производная от уравнения состояния (16.7) дает

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} - \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} - \frac{\mathrm{d}T}{T} = 0. \tag{16.13}$$

Использовав (16.8)—(16.10), (16.12) и (16.13), найдем связь между относительными изменениями скорости $\mathrm{d}u/u$ и площади $\mathrm{d}F/F$. Для этого выразим относительное приращение влажности $\mathrm{d}y/y$ из уравнения (16.12):

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\overline{c}}{ry}\,\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{u\,\mathrm{d}u}{ry}. \tag{16.14}$$

Из (16.13) найдем относительное приращение плотности:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = +\frac{\mathrm{d}p}{p} - \frac{\mathrm{d}T}{T}. \tag{16.15}$$

В свою очередь, величины $\mathrm{d}p/p$ и $\mathrm{d}T/T$ согласно уравнениям (16.10) и (16.8) будут иметь вид

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{u^2}{(1-y)RT}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}; \quad \frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{RT}{r}\,\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{u^2}{(1-y)}\,\frac{\mathrm{d}u}{ur}.$$

Подставим эти соотношения для относительных приращений температуры и давления в (16.13), тогда получим

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \left[\frac{1}{r(1-y)} - \frac{1}{(1-y)RT}\right]\frac{u^2\,\mathrm{d}u}{u}. \tag{16.16}$$

После подстановки соотношений для относительных приращений давления и плотности в (16.9) будем иметь

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}\left[\frac{1}{u^2}-\frac{1}{(1-y)RT}+\frac{2}{r(1-y)}-\frac{\overline{c}\,T}{(1-y)^2r^2}\right]=-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}F}{F}\,. \qquad (16.17)$$

Уравнение (16.17) устанавливает однозначную связь между изменениями площади и продольной скорости при движении двухфазной паровой среды в канале переменного профиля.

Если в минимальном сечении канала ($\mathrm{d}F = 0$) происходит переход через скорость звука (достигается критическая скорость), то в этом сечении $\mathrm{d}u \neq 0$, а $u = a$, где a — скорость звука. Тогда сомножитель в скобках в левой части (16.17) должен быть равен нулю. Отсюда учетом того, что $u = a$, следует формула для определения скорости звука a в рассматриваемом двухфазном потоке:

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{(1-y)RT}-\frac{2}{(1-y)r}+\frac{\overline{c}\,T}{(1-y)^2r^2}\,. \qquad (16.18)$$

Полученная формула (16.18) для скорости звука показывает, что в двухфазной среде вблизи пограничной кривой скорость звука оказывается ниже, чем в газе с теми же газовыми постоянными и показателем изоэнтропы. Физически это связано с переходом вещества из одной фазы в другую при прохождении звуковой волны через влажный пар.

Использовав полученное выражение для скорости звука, запишем (16.17) в более простой форме:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{a^2}\right)=-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}F}{F}$$

или

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{\mathrm{d}F}{F(1-\mathrm{M}^2)}\,. \qquad (16.19)$$

Сравнивая соотношение (16.19) с аналогичным соотношением для идеального газа (5.34а), видим, что они совпадают, но во влажном паре при одинаковых абсолютных скоростях число М будет больше в связи с меньшим значением скорости звука.

Аналогичным образом могут быть получены и все соотношения, по которым определяются изменения параметров двухфазной среды в канале переменного профиля:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}=\frac{1}{1-y}\,\frac{kRT}{r}\,\frac{\mathrm{M}^2}{1-\mathrm{M}^2}\,\frac{\mathrm{d}F}{F}\,; \qquad (16.20)$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{M}^2}{(1-y)(1-\mathrm{M}^2)}\,\frac{\mathrm{d}F}{F}\,; \qquad (16.21)$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{k}{1-y}\left(1 - \frac{RT}{r}\right)\frac{\mathrm{M}^2}{1-\mathrm{M}^2}\,\frac{\mathrm{d}F}{F}\,; \tag{16.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{y}\left[(1-y)\mathrm{M}^2 - \left(\frac{r}{RT} - 1\right)\right]\frac{1}{1-\mathrm{M}^2}\,\frac{\mathrm{d}F}{F}\,. \tag{16.23}$$

16.3. Течение смеси жидкости с газовыми пузырьками

Смесь жидкости с газовыми пузырьками можно рассматривать как двухкомпонентную двухфазную среду с некоторыми осредненными характеристиками. Здесь несущей фазой является жидкость, а пузырьки газа равномерно распределены по всему объему (дискретная фаза). Обе фазы находятся в тепловом равновесии, и газ не растворяется в жидкости.

Массовая концентрация газа φ (аналог степени сухости пара x) представляет собой отношение массы газа m'' в единице объема к массе смеси в том же объеме:

$$\varphi = m''/m.$$

Плотности газа ρ'', жидкости ρ' и смеси ρ соответственно имеют вид:

$$\rho'' = m''/V''; \quad \rho' = m'/V'; \quad \rho = m/V.$$

Если $V = V' + V''$, то

$$V = \frac{m'}{\rho'} + \frac{m''}{\rho''}. \tag{16.24}$$

Выразим массу жидкости m' и массу газа m'' через концентрацию φ:

$$m' = (1-\varphi)m; \quad m'' = \varphi m'$$

и подставим полученные соотношения в (16.24). Тогда будем иметь

$$V = m\left(\frac{1-\varphi}{\rho'} + \frac{\varphi}{\rho''}\right)$$

или

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1-\varphi}{\rho'} + \frac{\varphi}{\rho''}\,. \tag{16.25}$$

Формула (16.25) аналогична формуле (16.2) для влажного пара.

Поскольку давление и температура смеси одинаковы, то уравнение состояния для газовой фазы будет иметь вид

$$p = \rho'' R'' T. \tag{16.26}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\rho''} = \frac{R''T}{p}. \tag{16.27}$$

Подставив (16.27) в (16.25), будем иметь

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varphi R'' T}{p} + \frac{1-\varphi}{\rho'}. \tag{16.28}$$

Уравнение (16.28) отличается от уравнения состояния для совершенного газа наличием добавочного члена в правой части. Использовав соотношение (16.28), получим формулу для скорости распространения звука в жидкости с нерастворимыми пузырьками газа. Для этого представим уравнение (16.28) в виде

$$p = \frac{\varphi R'' T}{-\frac{1-\varphi}{\rho'} + \frac{1}{\rho}} = \frac{\varphi \rho R'' T}{1 - \frac{\rho}{\rho'}(1-\varphi)}. \tag{16.29}$$

Так как скорость звука выражается через производную давления по плотности среды, то

$$a^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\varphi R'' T\left[1 - \frac{\rho}{\rho'}(1-\varphi) - \varphi\rho R'' T\,\frac{1-\varphi}{\rho'}\right]}{\left[1 - \frac{\rho}{\rho'}(1-\varphi)\right]^2} = \frac{\varphi R'' T}{\left[1 - \frac{\rho}{\rho'}(1-\varphi)\right]^2}. \tag{16.30}$$

В соответствии с (16.28) можно записать

$$\left[1 - \frac{\rho}{\rho'}(1-\varphi)\right] = \frac{\varphi R'' T \rho}{p}.$$

В результате (16.30) будет иметь вид

$$a = \frac{p}{\rho\sqrt{\varphi R'' T}}. \tag{16.31}$$

Если в (16.31) заменим плотность с учетом соотношения (16.28), то будем иметь

$$a = \sqrt{\varphi R'' T} + \frac{(1-\varphi)p}{\rho'\sqrt{\varphi R'' T}}. \tag{16.32}$$

При $\varphi = 1$ получим $a = \sqrt{R'' T}$, т.е. скорость звука в газе при изотермическом процессе. При $\varphi \to 0$ скорость звука стремится к бесконечности, так как жидкость становится несжимаемой.

Массовая концентрация газа в жидкости очень мала, и по сравнению с единицей ею можно пренебречь. Тогда

$$a = \sqrt{\varphi R'' T} + \frac{p}{\rho'\sqrt{\varphi R'' T}}. \tag{16.33}$$

Получим соотношение для концентрации φ, при которой скорость звука a достигнет минимального значения. Для этого продифференцируем (16.33) по φ, приравняем результат дифференцирования к нулю и найдем указанную концентрацию φ:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1\sqrt{R''T}}{2\sqrt{\varphi}} - \frac{p}{2\rho'\sqrt{\varphi R''T}} = 0;$$

$$\varphi = \frac{p}{\rho'}\,\frac{1}{R''T}. \qquad (16.34)$$

Подставив (16.34) в (16.33), получим формулу для минимальной скорости звука:

$$a_{\min} = \sqrt{\frac{p}{\rho'}} + \sqrt{\frac{p}{\rho'}} = 2\sqrt{\frac{p}{\rho'}}. \qquad (16.35)$$

Так как плотность жидкости ρ' велика, то скорость звука в воздушно-водяной среде оказывается небольшой.

Все приведенные соотношения подтверждаются результатами опытов при умеренном объемном содержании воздуха. При большом количестве воздуха пузырьки начинают слипаться и среду уже нельзя считать однородной (гомогенной). При очень маленьких размерах пузырьков нельзя пренебрегать силами поверхностного натяжения и в приведенные формулы необходимо вносить поправку на действие этих сил.

В связи с малой скоростью звука в газированной жидкости при ее течении в трубах возможно резкое снижение пропускной способности трубопроводов вследствие возникновения режима запирания. При движении газированной жидкости в каналах с сужением и последующим расширением проходного сечения переход к сверхзвуковым режимам течения происходит при малых абсолютных скоростях, так как мала абсолютная скорость звука. В случае торможения рассматриваемого сверхзвукового потока возникают скачки уплотнения, но при этом они обладают некоторыми особенностями. Для их рассмотрения запишем уравнения расхода и сохранения количества движения до прямого скачка и после него:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2; \qquad (16.36)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2. \qquad (16.37)$$

Из уравнения (16.37) с учетом (16.36) получим

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2). \qquad (16.38)$$

Использовав формулу (16.31), запишем соотношения для плотностей ρ_1 и ρ_2:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{a_1\sqrt{\varphi R''T}}; \quad \rho_2 = \frac{p_2}{a_2\sqrt{\varphi R''T}}.$$

Подставив эти соотношения в уравнение расхода (16.36), будем иметь

$$\frac{p_1 u_1}{a_1\sqrt{\varphi R'' T}} = \frac{p_2 u_2}{a_2\sqrt{\varphi R'' T}};$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{M}_2}. \tag{16.39}$$

Запишем далее уравнение (16.38) в виде

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1}u_1 - \frac{\rho_2}{\rho_2}u_2\right).$$

Так как $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$, то

$$p_2 - p_1 = \rho_1^2 u_1^2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right). \tag{16.40}$$

Величины $1/\rho_1$ и $1/\rho_2$ заменим с учетом соотношения (16.28), записанного для условий до скачка и после него. Следовательно,

$$p_2 - p_1 = \rho_1^2 u_1^2 \varphi R'' T\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) = \rho_1^2\,\frac{u_1^2 \varphi R'' T}{p_1}\left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right).$$

Найдем отсюда отношение давлений p_2/p_1:

$$p_1\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) = \frac{\rho_1^2 u_1^2 \varphi R'' T}{p_1}\,\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right).$$

Так как согласно (16.31) скорость звука $a_1 = \dfrac{p_1}{\rho_1\sqrt{\varphi R'' T}}$, то

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{u_1^2}{p_1^2/(\varphi R'' T \rho_1^2)} = \mathrm{M}_1^2. \tag{16.41}$$

Сравнив соотношения (16.39) и (16.41), получим

$$\mathrm{M}_1 \mathrm{M}_2 = 1. \tag{16.42}$$

Напомним, что в однофазном потоке для прямого скачка уплотнения справедливо аналогичное соотношение, но связывающее безразмерные скорости λ_1 и λ_2:

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1.$$

Наличие в жидкости пузырьков заметно влияет на интенсивность повышения давления в трубах при гидравлических ударах. Это явление возникает при резком торможении жидкости, вызванном закрытием задвижки в произвольном сечении трубы. В этом случае скорость потока перед задвижкой становится равной нулю, а давление повышается до таких значений, что оказывается заметной сжимаемость капельной жидкости. От закрытой задвижки (рис. 16.1) начинает распространяться ударная волна против основного течения со скоростью, равной скорости звука a. В жидкости эта скорость (скорость распространения ударной волны)

$$a = \sqrt{E/\rho}\,,$$

где E — объемная упругость жидкости [31].

Если связать систему координат с ударной волной, то фронт волны в этой системе будет неподвижен и относительно фронта скорость u_1 перед ним будет равна скорости звука a. За фронтом в относительном движении поток будет двигаться со скоростью $u_2 = a - u_1$.

В результате, использовав формулу (16.38) при условии $\rho = \text{const}$, получим следующий прирост давления в жидкости при гидравлическом ударе (формула Н.Е. Жуковского):

$$p_2 - p_1 = \rho a(a - a + u_1) = \rho a u_1. \tag{16.43}$$

Гидравлический удар в газированной жидкости приводит к меньшему повышению давления из-за ее сжимаемости и сильно зависит от массовой концентрации газа φ. Если фронт ударной волны движется со скоростью w относительно скорости среды u, то в относительном движении скорость будет равна перед волной w, а за ней $w - u$. Тогда уравнения (16.36) и (16.40) примут вид

$$\rho_1 w = \rho_2(w - u); \tag{16.44}$$

$$p_2 - p_1 = \rho_1^2 w^2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right). \tag{16.45}$$

Исключим из этих уравнений скорость волны w. Тогда будем иметь

$$(p_2 - p_1)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = u^2. \tag{16.46}$$

Запишем далее формулу (16.28) для условий до фронта ударной волны и после него:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\varphi R'' T}{p_1} + \frac{1 - \varphi}{\rho'};$$

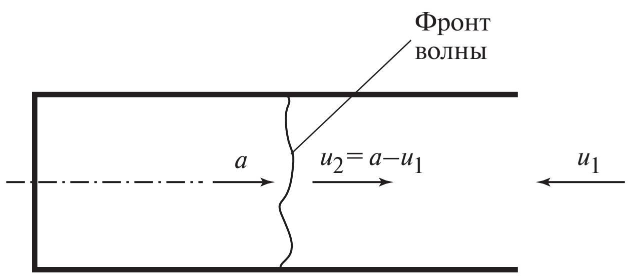


Рис. 16.1. К выводу формулы гидравлического удара

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\varphi R'' T}{p_2} + \frac{1-\varphi}{\rho'}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \varphi R'' T\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right). \qquad (16.47)$$

Подставив (16.47) в (16.46), получим

$$(p_2 - p_1)\varphi R'' T\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) = u^2.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)^2 \varphi R'' T = u^2. \qquad (16.48)$$

Конкретные расчеты показывают, что по сравнению с обычной жидкостью наличие в жидкости газовых пузырьков приводит к значительному снижению интенсивности гидроударов с ростом массовой концентрации газов.

16.4. Скорость звука в жидкости, содержащей пузырьки газа

Представим основные уравнения, необходимые для определения скорости звука, в следующем виде.

При фазовом равновесии уравнение теплового баланса сводится к тому, что сумма изменения количества теплоты в жидкости $c\,\mathrm{d}T$ (c — теплоемкость жидкости) и количества скрытой теплоты $r\,\mathrm{d}x$, выделившейся при изменении массовой концентрации пара (сухости пара $x = m''/m$), должна быть равна нулю:

$$c\,\mathrm{d}T + r\,\mathrm{d}x = 0. \qquad (16.49)$$

Поскольку рассматривается случай с небольшой степенью сухости x, то изменением количества теплоты в пузырьках пара можно пренебречь.

Как и ранее [см. (16.2)], плотность смеси ρ будет определяться в виде

$$\frac{1}{\rho} = x\frac{RT}{p} + \frac{1-x}{p'}.$$

Так как в данном случае $x \ll 1$, то

$$\frac{1}{\rho} = x\frac{RT}{p} + \frac{1}{p'}. \qquad (16.50)$$

Уравнение фазового равновесия (уравнение Клапейрона) запишем в виде

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p} = \frac{RT^2}{r\rho}. \qquad (16.51)$$

В (16.49)—(16.51) все переменные величины являются функциями давления насыщения. Продифференцировав далее уравнение (16.50) по давлению, получим

$$-\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} = \frac{RT}{p}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{xR}{p}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p} - \frac{xRT}{p^2}. \tag{16.52}$$

Из уравнения (16.49) следует, что

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{c}{r}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p}, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = a^2.$$

Тогда (16.52) можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho^2 a^2} = \frac{R}{p}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p}\left(\frac{cT}{r} - x\right) + \frac{xRT}{p^2}.$$

Исключив из последнего уравнения производную $\mathrm{d}T/\mathrm{d}p$ с помощью уравнения (16.51) и заменив плотность ρ с учетом (16.50), получим

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{p'} + \frac{xRT}{p}\right)^2 = \left(\frac{cT}{r} - x\right)\frac{R^2T^2}{rp^2} + \frac{xRT}{p^2}. \tag{16.53}$$

В этой формуле давление p и температуру T в связи с фазовым равновесием необходимо брать на линии насыщения пара.

Поскольку в рассматриваемой задаче сухость пара x считается малой величиной, то без большой погрешности все члены в формуле (16.53), содержащие этот множитель, могут быть опущены. Тогда приближенно скорость звука в рассматриваемой двухфазной среде может быть найдена по более простой формуле:

$$a = \frac{r}{\sqrt{cT}}\left(\frac{\rho''}{\rho'}\right). \tag{16.54}$$

Поскольку $\rho'' << \rho'$, то скорость звука в кипящей жидкости с пузырьками пара оказывается малой величиной. Этот вывод очень важен для тех задач, где рассматривается движение жидкости с большими скоростями, когда статическое давление в жидкости снижается ниже давления насыщения и наступает паровая кавитация, которая имеет место при работе гидравлических турбин, гребных винтов, насосов и др.

16.5. Скачки конденсации

Ранее отмечалось, что при быстром расширении пара за пределами нижней пограничной кривой фазовое равновесие нарушается и имеет место его переохлаждение. Если переохлаждение достигает некоторого критического значения, начинается бурный процесс конденсации с выделением теплоты, обусловленным переходом от паровой к жидкой фазе. При этом весь процесс указанного перехода носит кризисный (скачкообразный) характер.

Если при тепловых скачках теплота подводится извне и соответственно происходит увеличение энтальпии полного торможения, то при скачке конденсации теплота выделяется из движущегося пара. В этом случае энтальпия полного торможения остается постоянной, а давление и температура после скачка конденсации оказываются связаны между собой условиями фазового равновесия. Соответственно количество выделенной теплоты не может быть произвольным и определяется интенсивностью скачка.

Расчет скачка конденсации проведем при следующих условиях:

пар перед скачком находится в состоянии переохлаждения и не содержит капелек жидкости;

за скачком пар и мелкодисперсная жидкая фаза находятся в тепловом равновесии;

скорости жидкой и паровой фаз за скачком одинаковы;

как переохлажденный, так и насыщенный пар подчиняется уравнению состояния совершенного газа ($p = \rho RT$).

Если $y = m'/m$ — степень влажности, а $x = m''/m = 1 - y$ — степень сухости пара ($m = m' + m''$), то уравнение неразрывности для сечений до скачка конденсации и после него для паровой фазы можно записать в следующем виде:

$$(1 - y)\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2. \tag{16.55}$$

Здесь ρ_1 — плотность переохлажденного пара до скачка; ρ_2 — плотность насыщенного пара после скачка. При равенстве скоростей пара и мелких капелек жидкости уравнение движения будет иметь вид

$$p_2 - p_1 = m(u_1 - u_2) = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2). \tag{16.56}$$

Уравнение сохранения энергии запишем через энтальпии пара h_0'', h_1'' до скачка и энтальпии насыщенного пара h_2'' и воды h_2' после скачка:

$$h_0'' = h_1'' + \frac{u_1^2}{2} = (1 - y)h_2'' + y h_2' + \frac{u_2^2}{2} = \text{const}$$

(h_0'' — энтальпия полного торможения).

Отсюда

$$\frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} - (h_2'' - h_1'') + y(h_2'' - h_2') = 0. \tag{16.57}$$

Пренебрегая изменением теплоемкости пара при повышении температуры в скачке конденсации, запишем

$$h_2'' - h_1'' = c_p(T_2 - T_1). \tag{16.58}$$

Поскольку за скачком пар находится в состоянии насыщения, то

$$h_2'' - h_2' = r, \tag{16.59}$$

где r — теплота парообразования, которая легко находится по таблицам насыщенного пара для рассматриваемой области существования скачка конденсации.

С учетом (16.58) и (16.59) уравнение (16.57) примет вид

$$\frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} = c_p(T_2 - T_1) - yr. \tag{16.60}$$

В (16.60) последний член определяет количество теплоты, которая выделяется при конденсации пара.

Система уравнений (16.55), (16.56), (16.60) должна быть дополнена уравнением состояния

$$p = \rho RT \tag{16.61}$$

и уравнением фазового перехода [уравнением Клапейрона—Клаузиуса (16.3)] в виде

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} - \frac{r}{RT}\frac{\mathrm{d}T}{T} = 0.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим

$$\ln\frac{p_2}{p_2'} = \frac{r}{R}\left(\frac{1}{T_2'} - \frac{1}{T_2}\right), \tag{16.62}$$

где p_2' и T_2' — постоянные интегрирования, которые берутся из таблиц насыщенного пара в области существования скачка конденсации.

В связи с тем, что теплота фазового перехода — величина почти постоянная, уравнение (16.62) может быть записано в виде

$$\ln\frac{p_2}{p_1} = \frac{r}{R}\left(\frac{1}{T_{s1}} - \frac{1}{T_2}\right), \tag{16.63}$$

здесь T_{s1} — температура насыщения при давлении перед скачком конденсации p_1.

Замкнутая система уравнений (16.55), (16.56), (16.60)—(16.62) позволяет полностью рассчитать скачок конденсации. С этой целью из уравнений (16.55) и (16.61) найдем степень влажности пара y:

$$y = 1 - \frac{\rho_2 u_2}{\rho_1 u_1} = 1 - \frac{p_2}{p_1}\frac{T_1}{T_2}\frac{u_2}{u_1}. \tag{16.64}$$

Подставив (16.64) в уравнение энергии (16.60), получим

$$\frac{u_1^2}{2}\left[1 - \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2\right] = c_p(T_2 - T_1) - r\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\frac{T_1}{T_2}\frac{u_2}{u_1}\right). \tag{16.65}$$

Из уравнения движения (16.56) найдем

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{u_1^2}{p_1/\rho_1}\left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right) = 1 + k\mathrm{M}_1^2\left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right). \tag{16.66}$$

Здесь $M_1 = \frac{u_1}{a_1} = \frac{u_1}{\sqrt{kRT_1}}$ (k — показатель изоэнтропы).

Введем следующие обозначения: $\varepsilon = p_2/p_1$ и $\overline{T_2} = T_2/T_1$. Тогда из уравнения (16.66) будем иметь

$$\frac{u_2}{u_1} = 1 - \frac{\varepsilon - 1}{kM_1^2}. \tag{16.67}$$

Подставим далее (16.67) в (16.65) и с учетом того, что $u_1 = M_1 a_1$, получим

$$\frac{M_1^2 a_1^2}{2}\left[2\,\frac{\varepsilon - 1}{kM_1^2} - \frac{(\varepsilon - 1)^2}{k^2 M_1^4}\right] = c_p T_1(\overline{T_2} - 1) - 2\left[1 - \varepsilon\,\frac{1}{\overline{T_2}}\left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{kM_1^2}\right)\right].$$

Отсюда

$$\frac{\varepsilon - 1}{k} - \frac{(\varepsilon - 1)^2}{2k^2 M_1^2} = \frac{kRT_1}{(k-1)kRT_1}\,(\overline{T_2} - 1) - \frac{r}{a_1^2}\left[1 - \varepsilon\,\frac{1}{\overline{T_2}} + \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)}{\overline{T_2} kM_1^2}\right].$$

После преобразований будем иметь

$$\frac{\varepsilon - 1}{kM_1^2}\left(\frac{\varepsilon r}{\overline{T_2} a_1^2} - \frac{\varepsilon - 1}{2k}\right) = \frac{\overline{T_2} - 1}{k - 1} - \frac{\varepsilon - 1}{k} - \frac{r}{a_1^2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\overline{T_2}}\right). \tag{16.68}$$

Полученное уравнение скачка конденсации связывает две неизвестные величины — степень повышения давления в скачке ε и степень повышения температуры $\overline{T_2}$. Для ликвидации этой неопределенности умножим левую и правую части уравнения (16.63) на kT_1. Тогда с учетом введенных обозначений получим

$$\ln \varepsilon = \frac{kr}{a_1^2}\left(\frac{T_1}{T_{s1}} - \frac{1}{\overline{T_2}}\right). \tag{16.69}$$

Совместное решение уравнений (16.68) и (16.69) дает возможность найти повышение давления и температуры в скачке конденсации.

Расчет скачка конденсации можно существенно упростить, если использовать таблицы водяного пара. При этом целесообразно вести расчет для постоянного значения переохлаждения $\Delta T = T_{s1} - T_1$, где T_{s1} — температура насыщения, которая определяется по давлению p_1. В этом случае порядок расчета сводится к следующему.

1. Исходными величинами являются давление p_1 и температура T_1 перед скачком конденсации.

2. Принимая давление p_2 за скачком, находим степень сжатия в скачке $\varepsilon = p_2/p_1$.

3. Используя таблицы водяного пара, по давлению насыщения p_2 определяем температуру T_2, а затем находим $\overline{T_2} = T_2/T_1$.

4. Из уравнения (16.68) по известным значениям ε и $\overline{T_2}$ вычисляем число M_1 перед скачком.

5. Меняя степень сжатия ε, находим соответствующие значениям ε числа M_1 перед скачком. На основе этих расчетов строим зависимости $\varepsilon = f(\mathrm{M}_1)$ при постоянных значениях ΔT (рис. 16.2).

На кривых, изображенных на рис. 16.2, ветви a_ib_i соответствуют чистым скачкам конденсации, после которых сохраняются сверхзвуковые скорости. Ветви a_ic_i относятся к сочетанию скачков конденсации с адиабатическими скачками уплотнения. За такими скачками сверхзвуковой поток становится дозвуковым. Минимально возможному числу M_1 перед скачком конденсации соответствуют точки a_i. Если $\mathrm{M}_1 < \mathrm{M}_{1\min}$, то скачок конденсации при фиксированном переохлаждении ΔT невозможен.

Используя уравнения (16.64) и (16.67), находим степень влажности за скачком конденсации по формуле

$$y = 1 - \frac{\varepsilon}{\overline{T_2}}\left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{k\mathrm{M}_1^2}\right). \tag{16.70}$$

7. Зная давление за скачком $p_2 = \varepsilon p_1$ и степень влажности y, определяем состояние смеси за скачком с учетом того, что за скачком система пар — жидкость находится в термодинамическом равновесии.

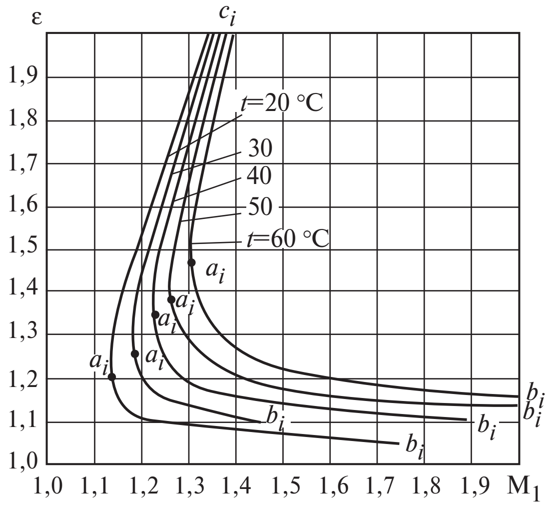


Рис. 16.2. Диаграмма скачков конденсации (p_1 = 0,6 МПа)

8. Определяем положение скачка конденсации в канале, исходя из следующего. Согласно формуле (16.68) число M_1 перед скачком зависит от переохлаждения, и для устойчивого существования скачка конденсации скорость этого процесса должна обеспечить конденсацию вполне определенного количества жидкости, вычисляемого по формуле (16.55). В свою очередь, и скорость конденсации зависит от переохлаждения пара ΔT. Таким образом, сечение, где возникает скачок конденсации, находится путем соответствия скорости конденсации числу M_1 перед ним.

16.6. Разгон капель влаги в одномерном потоке

При движении капель влаги в потоке их скорости w в общем случае отличаются от скорости потока u, и с течением времени скорости капель увеличиваются, а при малых размерах капель приближаются к скорости потока.

Рассмотрим, по какому закону происходит разгон капель влаги при заданном законе изменения скорости потока вдоль канала.

На каплю жидкости действуют сила тяжести, архимедова сила, сила сопротивления, зависящая от формы капли и числа Рейнольдса, сила, обусловленная продольным градиентом давления, сила инерции.

Из всех приведенных сил в данной задаче решающее значение имеет только сила сопротивления. Для оценки этой силы будем предполагать, что капля сохраняет в процессе движения сферическую форму и ее сопротивление может быть найдено по формуле Стокса:

$$R = 6\pi\mu r(u - w), \tag{16.71}$$

справедливой в условиях достаточно малых чисел Рейнольдса ($\mathrm{Re} < 10$). Здесь число Рейнольдса вычисляется по диаметру капли $d = 2r$ и относительной скорости, равной $u - w$, т.е.

$$\mathrm{Re} = \frac{2r(u - w)\rho^*}{\mu},$$

где μ — динамическая вязкость несущей фазы; ρ^* — плотность несущей фазы.

Уравнение движения (уравнение Ньютона) в данном случае будет иметь вид

$$6\pi\mu r(u - w) = \frac{4}{3}\pi r^3\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)\rho$$

($4/3\pi r^3\rho = m$ — масса капли, а ρ — плотность жидкости).
Отсюда

$$u - w = \frac{2}{9}\,\frac{\rho r^2}{\mu}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}.$$

Комплекс $\frac{2}{9}\frac{\rho r^2}{\mu}$ имеет размерность времени, которое назовем характерным временем капли. Тогда

$$\frac{\mathrm{d}t}{\tau} = \frac{\mathrm{d}w}{u - w}. \tag{16.72}$$

Проинтегрировав (16.72), получим

$$-\frac{t}{\tau} = +\ln(u - w) + \ln C.$$

Постоянную интегрирования C найдем из начального условия. Если в начальный момент времени $t = 0$ скорость капли равна w_1, то

$$\ln C = -\ln(u - w_1).$$

В результате скорость капли будет меняться по закону

$$w = u - (u - w_1)\mathrm{e}^{-t/\tau}. \tag{16.73}$$

Найдем путь, на котором происходит разгон капли от скорости w_1 до скорости w. Поскольку $w = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, то

$$x = \int_0^t w\,\mathrm{d}t = \int_0^t \left[u - (u - w_1)\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]\mathrm{d}t = \left[ut + (u - w_1)\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]\Big|_0^t =$$

$$= ut - (u - w_1)\tau\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right). \tag{16.74}$$

Запишем (16.74) в безразмерном виде, использовав безразмерные скорости капли $\overline{w} = \frac{u - w}{u}$, $\overline{w}_1 = \frac{u - w_1}{u}$ и безразмерное расстояние $\overline{x} = \frac{x}{u\tau}$:

$$\overline{x} = \frac{t}{\tau} - \overline{w}_1\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right). \tag{16.75}$$

Так как характерное время капли τ пропорционально радиусу в квадрате и входит в показательную функцию, то разгон капли очень сильно зависит от ее размера. Чем меньше капля, тем на меньшем расстоянии она приобретает скорость, близкую к скорости несущей фазы. Если разгон капли происходит в потоке с продольным градиентом скорости, то задача в общем случае может быть достаточно сложной. Однако в случае, когда продольный градиент скорости постоянный, решение можно получить в квадратуре.

Пусть скорость потока меняется по следующему линейному закону:

$$u = u_1 + \beta x, \quad \text{где } \beta = \frac{u_2 - u_1}{b} \ (u_2 > u_1).$$

Здесь b — расстояние, на котором скорость потока увеличивается от u_1 до u_2. В этом случае уравнение (16.72) будет иметь вид:

$$\tau \frac{d^2x}{dt^2} = u_1 + \beta x - \frac{dx}{dt}. \qquad (16.76)$$

Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения будем искать в виде

$$x = C_0 + C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \qquad (16.77)$$

где C_0, C_1, C_2, α_1 и α_2 — постоянные.

Подставив (16.77) в уравнение (16.76), получим

$$\tau\left(C_1\alpha_1^2 e^{\alpha_1 t} + C_2\alpha_2^2 e^{\alpha_2 t}\right) =$$

$$= u_1 + \left(C_1\alpha_1 e^{\alpha_1 t} + C_2\alpha_2 e^{\alpha_2 t}\right) + \beta\left(C_0 + C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}\right).$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} &u_1 + \beta C_0 = 0;\\ &\alpha_1^2 C_1 \tau e^{\alpha_1 t} + \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} - \beta C_1 e^{\alpha_1 t} = 0;\\ &\alpha_2^2 C_2 \tau e^{\alpha_2 t} + \alpha_2 C_2 e^{\alpha_2 t} - \beta C_2 e^{\alpha_2 t} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (16.78)$$

Решение системы уравнений (16.78) дает

$$\left.\begin{aligned} &C_0 = -\frac{u}{\beta};\\ &\alpha_1 = -\frac{1}{2\tau}\left(1 + \sqrt{1 + 4\beta\tau}\right);\\ &\alpha_2 = -\frac{1}{2\tau}\left(1 - \sqrt{1 + 4\beta\tau}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (16.79)$$

16.7. Течение насыщенного и влажного пара в соплах паровых турбин

Степень влияния влажности на характер течения влажного пара в соплах определяется следующими особенностями: скольжением фаз, переохлаждением пара, неравновесными процессами обмена теплотой и массой; образованием на обтекаемых поверхностях жидких пленок и их срывом со стенок.

Все указанные факторы в той или иной степени меняют картину течения и как следствие изменяют расходные характеристики конфузоров и диффузоров, а также силовое взаимодействие потока с обтекаемыми стенками каналов.

Изложенное наглядно подтверждается зависимостями коэффициентов расхода $\overline{\mu}_в$ от степени влажности $y_0 = 1 - x_0$ (x_0 — степень сухого пара), полученными при различных сверхкритических отношениях давлений ($\varepsilon_1 < \varepsilon_*$) на суживающемся сопле (рис. 16.3) [11]. При этом коэффициент $\overline{\mu}_в$ представляет собой отношение действительного массового расхода m_i слабоперегретого и влажного пара в сопле к его расходу через это сопло при фиксированном начальном перегреве пара $\Delta t = 60$ °С, т.е.

$$\overline{\mu}_в = \frac{m_i}{m_{60}}.$$

Относительное давление ε_1 равно отношению давления p_1 за соплом к давлению полного торможения перед ним p_0, а степень влажности y_0 есть отношение массового содержания жидкой фазы в потоке $m_ж$ к общему массовому расходу пара m. Как следует из приведенных данных, с приближением к сухому насыщенному пару ($\Delta t = 0$ °С) относительные коэффициенты расхода $\overline{\mu}_в$ увеличиваются на 0,3—0,5 %.

Основной рост этого коэффициента был обнаружен в области перехода от сухого насыщенного к влажному пару при увеличении влажности до 5 %. Затем интенсивность увеличения $\overline{\mu}_в$ снижается. Если в диапазоне изменения величины y_0 от нуля до 5 % коэффициент $\overline{\mu}_в$ повышается на 2—4 %, то при $5 < y_0 < 15$ % это изменение составляет от 1,5 до 3,5 % в зависимости от относительного давления ε_1.

Приведенные результаты указывают на следующее.

1. В суживающихся соплах по мере снижения начального перегрева пара при $\varepsilon_1 \le \varepsilon_*$ массового выпадения вторичной влаги из переохлажденного пара не происходит. Однако при $0 \le \Delta t \le 10$ °С на стенках сопла осаждается некоторое количество вторичной влаги, и в этом диапазоне перегрева относительный коэффициент расхода увеличивается на 0,3—0,5 %.

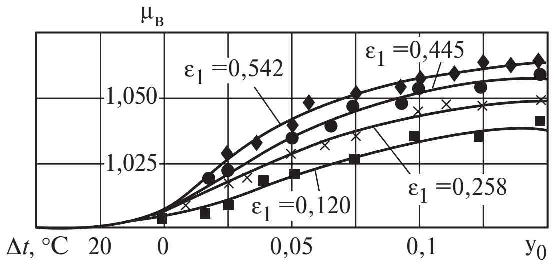


Рис. 16.3. Зависимости относительного коэффициента расхода $\overline{\mu}_в$ от степени влажности пара y_0 и относительного давления ε_1

2. Интенсивный рост относительного коэффициента расхода $\overline{\mu}_в$ при изменении начальной влажности в диапазоне $0 < y_0 < 5$ % связан с увеличением доли влаги во влажно-паровой среде. Соответственно в указанном диапазоне влажности коэффициент расхода по отношению к этой же величине в перегретом паре повышается на величину, близкую к начальной влажности пара.

3. При $y_0 > 5$ % значительная часть влаги осаждается в виде пленки на стенках сопла, а мелкодисперсная влага движется с небольшим коэффициентом скольжения относительно паровой фазы. Соответственно интенсивность увеличения коэффициента расхода с ростом влажности снижается. Таким образом, при расчете расхода слабоперегретого и даже влажного пара при $\varepsilon_1 \le \varepsilon_*$ можно использовать расчетные соотношения для перегретого пара и вносить поправку на влажность с помощью коэффициента $\overline{\mu}_в$, приведенного на рис. 16.3.

Эта поправка, согласно данным [11], кроме начальной влажности пара зависит также и от числа Рейнольдса. Влияние этого параметра иллюстрируется кривыми на рис. 16.4, где приведены зависимости коэффициента $\overline{\mu}_в$ от степени влажности $y_0 = 1 - x_0$ при различных значениях числа Re. Видно, что при увеличении числа Рейнольдса с $2{,}8 \cdot 10^6$ до $6{,}35 \cdot 10^6$ происходит резкое уменьшение коэффициента $\overline{\mu}_в$ и далее его влияние на указанный коэффициент практически исчезает.

Здесь следует обратить внимание на введенный нами коэффициент $\overline{\mu}_в = m_i/m_{60}$, где в качестве нормирующего расхода m_{60} был принят расход перегретого пара через рассматриваемое сопло при начальном перегреве $\Delta t = 60$ °C. Такая трактовка коэффициента $\overline{\mu}_в$ была принята на основании следующего.

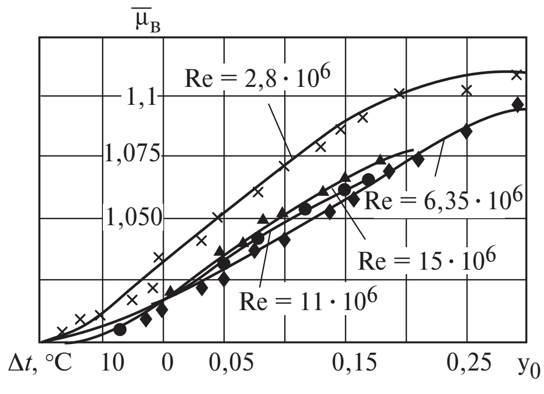


Рис. 16.4. Зависимости относительного коэффициента расхода $\overline{\mu}_в$ от начального состояния пара ($y_0 = 1 - x_0$) и числа Рейнольдса

Как указывается в работе [11], «расчет коэффициентов расхода сопл на влажном паре встречает ряд принципиальных затруднений, так как остается неясным вопрос о выборе метода, который наилучшим образом отвечал бы действительной картине истечения влажного пара из сопл». Другими словами, в настоящее время нет достоверной методики для определения теоретического расхода насыщенного и влажного пара.

Кроме того, в [1] указывается, что коэффициент расхода в его классическом понимании должен терпеть разрыв непрерывности при переходе через линию насыщения, так как на этой линии происходит скачкообразное изменение показателя изоэнтропы.

Отмеченные факторы в принципе делают невозможным (в связи с невозможностью достоверно найти теоретический расход влажного пара через сопло) определение коэффициента расхода в его классической интерпретации.

В этой связи использование введенного коэффициента $\overline{\mu}_{\text{в}} = m_i/m_{60}$ оправдано тем, что позволяет рассчитывать расходные характеристики любых суживающихся сопл при течении в них влажно-паровых сред с различной степенью влажности y_0 на основе формул, определяющих характер течения перегретого пара.

Соответствующая расчетная формула имеет следующий вид:

$$m = 0{,}0311\mu\,\overline{\mu}_{\text{в}}\,\frac{p_0}{\sqrt{T_0}}\,F_{\min}q,$$

где μ — коэффициент расхода суживающегося сопла при течении в нем перегретого пара; p_0 — давление полного торможения перед соплом, Па; T_0 — температура полного торможения, К; $F_{\min}$ — минимальная (выходная) площадь сопла, м^2; q — приведенный удельный расход:

$$q = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\lambda_1\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\,\lambda_1^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\sqrt{\left(1 - \varepsilon_1^{\frac{k-1}{k}}\right)\frac{k+1}{k-1}}\;\varepsilon_1^{1/k}\;,$$

здесь $\varepsilon_1 = p_1/p_0$; $k = 1{,}3$; p_1 — давление в минимальном сечении сопла, Па.

Поскольку коэффициент расхода μ для профилированных суживающихся сопел меняется в узких пределах (обычно $\mu = 0{,}98$), а $\overline{\mu}_{\text{в}} > 1$ и достигает $\overline{\mu}_{\text{в}} = 1{,}02 \div 1{,}06$, то переход от перегретого к насыщенному и влажному пару ведет к увеличению массового расхода пара через сопло при фиксированных значениях относительного давления ε_1. Физически такой результат является следствием повышения плотности влажно-паровой среды по мере увеличения ее влажности y_0.

Плотность ρ в выходном сечении суживающегося сопла с учетом переохлаждения пара может быть найдена по следующему соотношению:

$$\rho = \rho_0'' \varepsilon_1^{1/k} \frac{1}{1 - y_0}.$$

Здесь ρ_0'' — плотность паровой фазы при параметрах полного торможения; y_0 — начальная влажность пара.

Опытные данные, приведенные в [11], свидетельствуют, что зависимость $\overline{\mu}_в = f(y_0, \Delta t, \varepsilon_1)$ в целом сохраняется и в области докритических отношений давлений ($\varepsilon_1 > \varepsilon_*$). Для примера на рис. 16.5 представлены также зависимости, полученные при $\varepsilon_1 = 0{,}58$ и $\varepsilon_1 = 0{,}71$.

При сравнении кривых, изображенных на рис. 16.3 и 16.5, видно, что они качественно почти идентичны, однако численные значения коэффициента $\overline{\mu}_в$ на рис. 16.5 оказываются несколько меньше.

Представим далее удельный расход $j = m/F_1$ через суживающееся сопло в виде

$$j = B\sqrt{\frac{p_0}{V_0}},$$

где B — коэффициент истечения (коэффициент Бендемана),

$$B = \mu\, \overline{\mu}_в q \sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}.$$

Обобщая рассмотренные выше опытные данные по истечению насыщенного и влажного пара во всем исследуемом диапазоне относительных давлений на суживающемся сопле, можно построить зависимости коэффициента

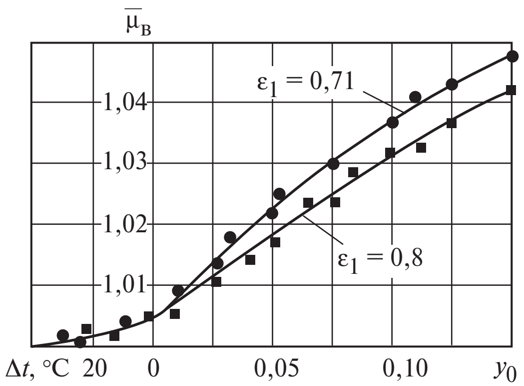


Рис. 16.5. Зависимости относительного коэффициента расхода $\overline{\mu}_в$ от начального состояния пара при докритических отношениях давлений ε_1

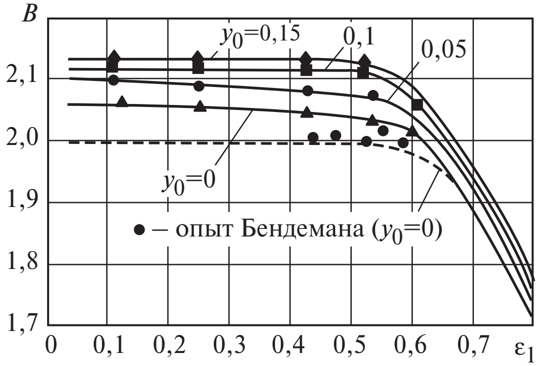


Рис. 16.6. Зависимости коэффициента Бендемана B от влажности пара y_0 и относительного давления ε_1

истечения B от y_0 и ε_1. Эти зависимости, приведенные на рис. 16.6, отчетливо показывают увеличение рассматриваемого коэффициента по мере повышения влажности пара. Хорошо видно, что в области сверхкритических отношений давлений ($\varepsilon_1 < 0{,}5$) влияние влажности на коэффициент B, а следовательно, и на удельный расход j оказывается заметно больше, чем в области дозвуковых течений.

На приведенной зависимости указаны и опытные значения коэффициента B, полученные Бендеманом в 1907 г. для сухого насыщенного пара ($y_0 = 0$). Можно отметить практически полное совпадение опытных данных, разделенных по времени их получения с интервалом в 103 года.

Наиболее важным выводом, основанным на приведенных данных, является вывод о том, что переохлаждение паровой фазы имеет место и при достаточно больших значениях начальной влажности, так как при конфузорных течениях влажного пара с большими продольными градиентами давления конденсация его затруднена.

16.8. Влияние начальной влажности пара на характер течения в конических диффузорах (расширяющихся соплах)

Диффузорные сопла представляют собой сочетание входного конфузорного участка и последующего расширяющегося канала (диффузора). Если в суживающихся соплах существуют только два режима истечения (докритический при $\varepsilon_1 > \varepsilon_*$ и сверхкритический при $\varepsilon_1 < \varepsilon_*$), то в расширяющихся соплах различают пять режимов, которые иллюстрируются номограммой, представленной на рис. 16.7.

Как уже отмечалось (см. гл. 9), расход среды через расширяющиеся сопла меняется с изменением противодавления только на первом дозвуковом режиме истечения, когда $\varepsilon_{a1} < \varepsilon_a < 1$. При $\varepsilon_a < \varepsilon_{a1}$ в узком сечении сопла

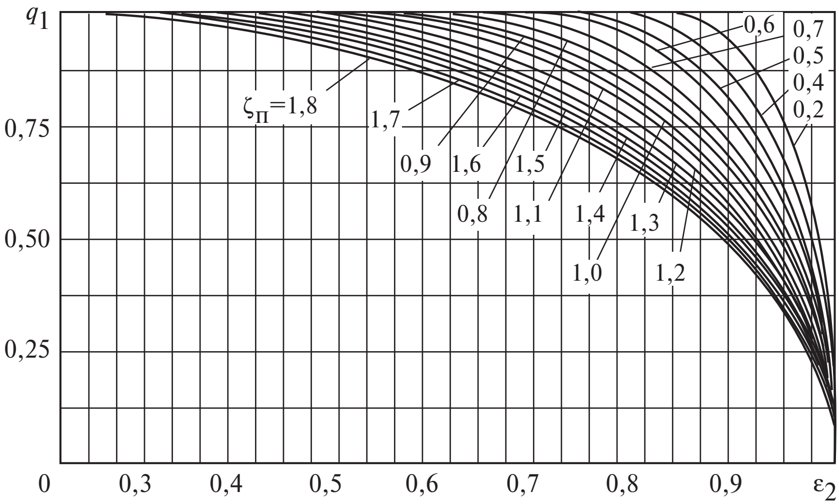


Рис. 16.7. Номограмма для определения приведенного удельного расхода через седло регулирующего клапана по заданным значениям коэффициента $\zeta_п$ и относительного давления ε_2

скорость потока и все его параметры достигают критического значения и далее уже не меняются, т.е. для каждого конкретного сопла значение ε_{a1} играет ту же роль, что и критическое отношение давлений ε_* в суживающемся сопле.

Следует заметить, что фактическое отношение давлений ε_{a1} может очень сильно отличаться в меньшую сторону от теоретического значения ε_{at}, так как на указанное отношение давлений в сильной степени влияет потеря энергии в расширяющейся (диффузорной) части сопла. Чем выше эти потери, тем ниже значения ε_{a1}, а при отсутствии диффузорного эффекта $\varepsilon_{a1} = \varepsilon_*$.

Таким образом, расходные характеристики расширяющихся сопл в значительной степени зависят от эффективности преобразования энергии в диффузорной части сопла. Эффективность определяется либо коэффициентом восстановления энергии, либо коэффициентом полных потерь энергии. Обе этих величины, как показано выше (см. гл. 14), связаны между собой простой зависимостью:

$$\xi = 1 - \zeta_п.$$

Найдем, в какой степени коэффициент потерь $\zeta_п$ влияет на расходные характеристики расширяющихся сопл.

Массовый расход пара через расширяющееся сопло вычисляется по соотношению

$$m = 0{,}0311\mu \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} F_1 q_1.$$

В свою очередь,

$$q_1 = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_1 \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\,\lambda_1^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Таким образом, при фиксированных начальных параметрах пара расход m через сопло определяется в зависимости от приведенного удельного расхода в узком сечении сопла q_1. Поскольку $\lambda_1 = \lambda_{2t}\big/\sqrt{\zeta_п}$, то

$$q_1 = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\lambda_{2t}}{\sqrt{\zeta_п}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\,\frac{\lambda_{2t}^2}{\zeta_п}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Выражая λ_{2t} через относительное давление ε_2, получаем

$$q_1 = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\sqrt{\frac{k+1}{k-1}\left(1 - \varepsilon_2^{\frac{k-1}{k}}\right)}}{\sqrt{\zeta_п}} \left(1 - \frac{1}{\zeta_п} + \frac{1}{\zeta_п}\,\varepsilon_2^{\frac{k-1}{k}}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (16.80)$$

Зависимость (16.80) представлена в виде номограммы на рис. 16.7, где по оси абсцисс отложено относительное давление ε_2, а в качестве параметра использован коэффициент полных потерь $\zeta_п$.

Приведенная номограмма наглядно показывает степень влияния коэффициента полных потерь в диффузоре как на величину q_1, так и на предельное противодавление ε_{a1}, определяющее границу дозвуковых режимов истечения из расширяющегося сопла.

Для большей наглядности зависимость $\varepsilon_{a1} = f(\zeta_п)$ изображена на рис. 16.8.

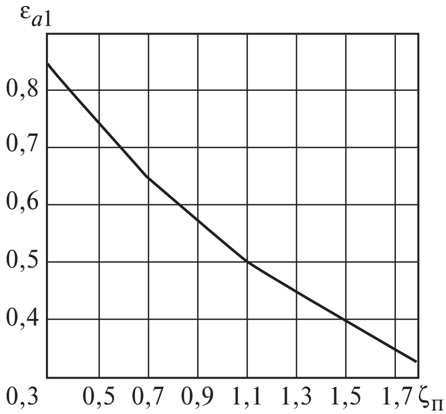


Рис. 16.8. Зависимость предельного относительного противодавления за седлами регулирующих клапанов от коэффициента полных потерь энергии $\zeta_п$

Таким образом, расходные характеристики расширяющихся сопл в очень значительной степени зависят от коэффициента полных потерь $\zeta_п$. Соответственно все факторы, вызывающие увеличение этого коэффициента, приводят к снижению расхода при фиксированном значении относительного давления ε_2.

Одним из таких факторов при движении влажного пара в расширяющихся соплах является его начальная влажность y_0.

Количественное исследование влияния влажности на преобразование энергии в диффузорах содержится в [12], где рассматривалось течение перегретого и влажного пара в диффузоре с углом раскрытия $\alpha = 10°$ и степенью расширения $n = 2{,}6$.

О степени влияния влажности на относительное давление в узком сечении диффузора можно судить по кривым распределения давлений вдоль стенки рассматриваемого диффузора, приведенным на рис. 16.9. Здесь представлены три группы кривых, полученных при числах $M_{1t} = 0{,}6$ (первая группа), 0,8 (вторая группа) и 1,0 (третья группа). В каждой группе содержится три распределения давлений, полученных при перегревах $\Delta t_0 = 30 \div 40$ °С (кривые *I*), $\Delta t_0 = 4$ °С (кривые *II*) и начальной влажности $y_0 = 7$ % (кривые *III*). В этой серии опытов поддерживалось неизменным число Рейнольдса в «горле» диффузора: $\mathrm{Re} = 2{,}85 \cdot 10^5$.

Как следует из приведенных кривых, начальное состояние пара практически не влияет на распределение давлений в суживающейся части сопла, что подтверждает проведенный выше анализ течения влажного пара в суживающихся соплах. В расширяющейся части по мере снижения перегрева пара и при переходе к влажному пару (кривые *III*) повышение давления

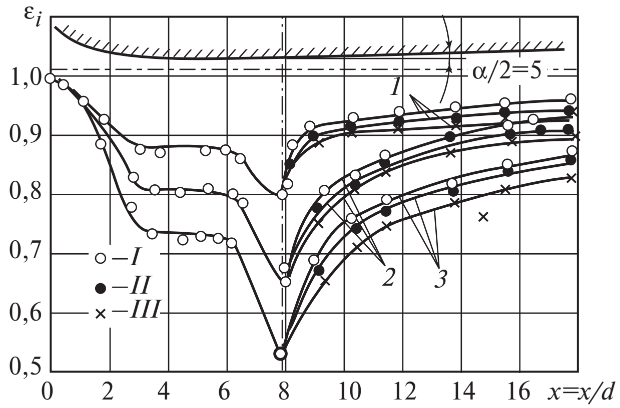


Рис. 16.9. Распределение давлений вдоль стенки диффузора с углом $\alpha = 10°$ и степенью расширения $n = 2{,}6$ ($\mathrm{Re} = 2{,}85 \cdot 10^5$):

I — $\Delta t_0 = 30 \div 40$ °C; *II* — $\Delta t_0 = 4$ °C; *III* — $y_0 = 7$ %; *1* — $M_{1t} = 0{,}6$; *2* — $M_{1t} = 0{,}8$; *3* — $M_{1t} = 1{,}0$

заметно снижается. По мере повышения скорости M_{1t} в узком сечении канала отмечается и увеличение влияния влажности на потери в диффузоре.

С физической точки зрения большой интерес представляют кривые изменения давления вдоль стенки диффузора, полученные при сниженном значении числа Рейнольдса $Re = 1{,}9 \cdot 10^5$ (рис. 16.10). В этом случае по сравнению с предшествующим распределением при $M_{1t} = 0{,}6$ и 0,8 произошло некоторое снижение восстановительной способности диффузора, но в целом характер кривых изменился мало. Однако при $M_{1t} \approx 1{,}0$ произошло кризисное снижение диффузорного эффекта (третья группа кривых) независимо от начального состояния пара.

Причины кризисного нарастания потерь и соответственно снижения степени восстановления энергии в диффузоре состоят в том, что с повышением скорости M_{1t} в узком сечении диффузора происходит непрерывное увеличение локальных отрицательных градиентов давления в конфузорной части канала и еще более резкое увеличение положительных градиентов давления на начальном участке диффузорного канала. Резкое изменение при входе в диффузор как значения градиентов давления, так и их знака, ведет к отрыву потока непосредственно во входном сечении диффузора с последующим резким снижением коэффициента восстановления энергии и развитием нестационарного течения.

Кризисное снижение эффективности диффузора в области больших дозвуковых скоростей прямо связано с числом Рейнольдса. Чем больше значение Re, тем при больших значениях числа M_{1t} начинается кризисное снижение диффузорного эффекта.

Приведенные на рис. 16.9 и 16.10 данные свидетельствуют о малом влиянии начального состояния пара на развитие кризисных явлений в диффузоре.

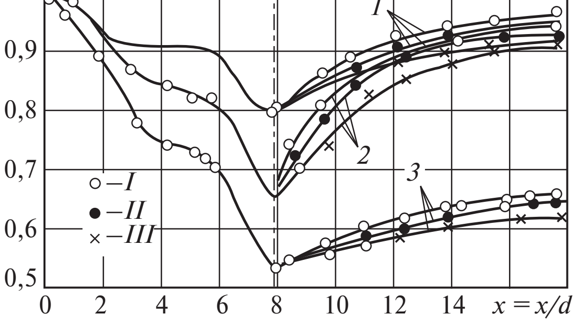


Рис. 16.10. Распределение давлений вдоль стенки диффузора при Re = $1{,}95 \cdot 10^5$ ($\alpha = 10°$, *n* = = 2,6):
обозначения те же, что и на рис. 16.9

Непосредственно влияние влажности на коэффициент восстановления энергии в диффузоре иллюстрируют кривые, представленные на рис. 16.11, где изображены зависимости коэффициента ξ от числа M_{1t}, состояния пара перед диффузором и числа Re при фиксированном угле раскрытия диффузора $\alpha = 10°$.

В полном соответствии с кривыми распределения давления вдоль стенки диффузора (см. рис. 16.9 и 16.10) первая группа кривых (на рис. 16.11 кривые *1*) достигает максимального значения ξ при $M_{1t} = 0{,}55 \div 0{,}6$, а затем при увеличении M_{1t} происходит кризисное снижение коэффициента восстановления энергии.

Вторая группа кривых (на рис. 16.11, кривые *2*), которая получена при более высоких числах Re, достигает максимальных значений ξ при $M_{1t} = 0{,}7$. При дальнейшем увеличении числа M_{1t} значение ξ, как и в первом случае, снижается, но интенсивность снижения рассматриваемого коэффициента оказывается существенно меньше. Здесь важно отметить, что в области максимальных значений коэффициента восстановления энергии переход от перегретого пара к влажному с начальной влажностью $y_0 = 7 \div 10$ % вызывает увеличение коэффициента полных потерь $\zeta_п$ и соответственно на 7—10 % снижается значение ξ. Полученный результат интересен и с исторической точки зрения, так как еще в 1928 г. в монографии профессора Стодолы «Паровые турбины» в главе, посвященной учету влажности пара в лопаточных аппаратах турбин, указывается на необходимость увеличивать потери в турбинных решетках на 1 % с ростом начальной влажности пара на 1 %. Эта норма, как показали проведенные исследования, оказалась справедливой и для диффузоров.

Влияние влажности на критические значения M_{1t} хорошо прослеживается по кривым, изображенным на рис. 16.12. На этом рисунке сплошными

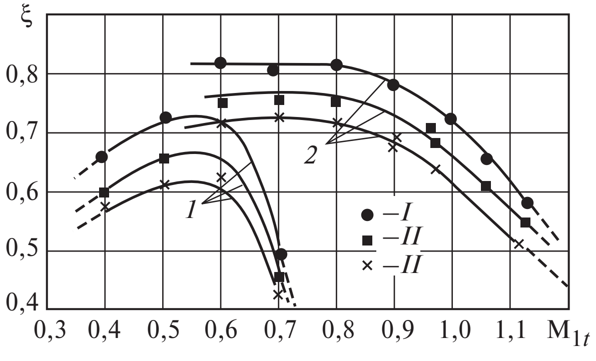


Рис. 16.11. Зависимости коэффициента восстановления энергии от числа M_{1t} в плоском диффузоре ($\alpha = 10°$, $n = 2{,}6$) [12]:

I — $\Delta t_0 = 30 \div 55$ °C; *II* — $\Delta t_0 = 0 \div 5$ °C; *III* — $y_0 = 7 \div 10$ %; *1* — $Re = 10^5$; *2* — $Re = 1{,}9 \cdot 10^5$

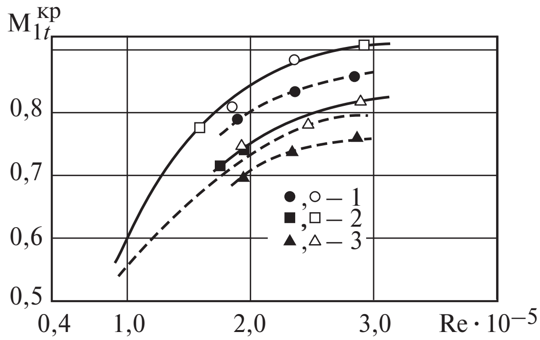


Рис. 16.12. Зависимости критических значений чисел $M_{1t}^{кр}$ от числа Re для диффузоров с различными углами раскрытия α [12]:

—— — перегретый пар; - - - — влажный пар (y_0 = 10 %); *1* — α = 7°; *2* — α = 10°; *3* — α = 15°

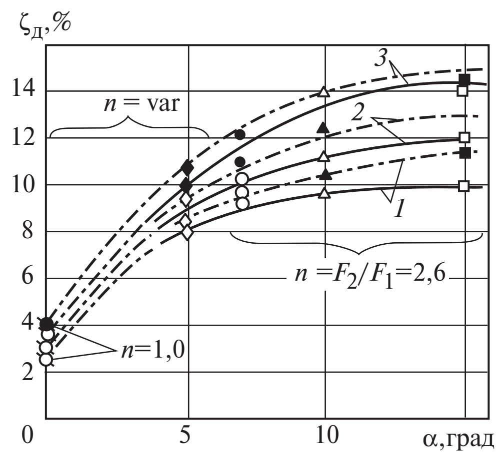


Рис. 16.13. Зависимости коэффициента внутренних потерь энергии $\zeta_д$ в диффузорах с различными углами раскрытия α для перегретого и влажного пара [12]:

—— — Re = 2,85 · 10^5; — · — — Re = 1,9 · 10^5; *1* — Δt_0 > 0 °C; *2* — Δt_0 = 0 °C; *3* — y_0 > 0

линиями показаны зависимости $M_{1t}^{кр} = f(\mathrm{Re})$ для трех диффузоров с углами раскрытия 7, 10, 15° при течении в них перегретого пара (сплошные линии). Эти же зависимости для влажного пара (y_0 = 10 %) показаны штриховыми линиями. Во всех случаях с ростом числа Re происходит достаточно интенсивное увеличение критических безразмерных скоростей $M_{1t}^{кр}$ и снижение их при переходе от перегретого к насыщенному пару.

Коэффициент внутренних потерь в диффузорах $\zeta_д$ существенно зависят от их угла раскрытия α. Эти зависимости приведены на рис. 16.13.

С ростом угла α от 0 до 7° происходит достаточно интенсивное увеличение внутренних потерь энергии. Затем интенсивность нарастания указанных потерь снижается. Характер рассматриваемых кривых не меняется и при переходе к влажному пару (кривые *3* на рис. 16.13), но численные значения коэффициентов внутренних потерь заметно увеличиваются. Так, при увеличении угла с 7 до 15° дополнительные потери от влажности в диффузорах возрастают с 2,7 до 4,5—5 %.

Если рассматривать полученные результаты применительно к диффузорным седлам регулирующих клапанов, то помимо расходных характеристик важно знать и структуру потока, выходящего из диффузора. Для влажнопаровых сред это в первую очередь дисперсность жидкой фазы и реальные коэффициенты скольжения, от которых зависит скорость движения капель влаги относительно паровой фазы.

На рис. 16.14 показано, как меняются размеры капель влаги во входном и выходном сечениях диффузора при начальной влажности пара $y_0 = 10$ %, числе $\mathrm{Re} = 2{,}85 \cdot 10^5$ и двух значениях чисел $\mathrm{M}_{1t} = 0{,}6$ и 0,9 (z_1 — направление поперечной оси во входном сечении, а z_2 — то же в выходном сечении диффузора).

Во входном сечении капли максимального диаметра ($d_к \approx 60 \div 65$ мкм) располагаются вблизи стенки, и в направлении оси канала они интенсивно снижаются до 25 мкм на оси канала. В выходном сечении размеры капель вблизи стенки оказываются меньше, чем во входном сечении ($d_к \approx 40$ мкм), что указывает на частичное испарение их в пристеночной области. Здесь, однако, размеры капель снижаются только на расстоянии 10 мм от стенки ($d_к \approx 25 \div 30$ мкм), а затем растут до 50—55 мкм при $z_2 = 20$ мм. Это увеличение размеров капель может быть связано с асимметрией выходного поля скоростей и возникновением в потоке дискретных вихревых образований.

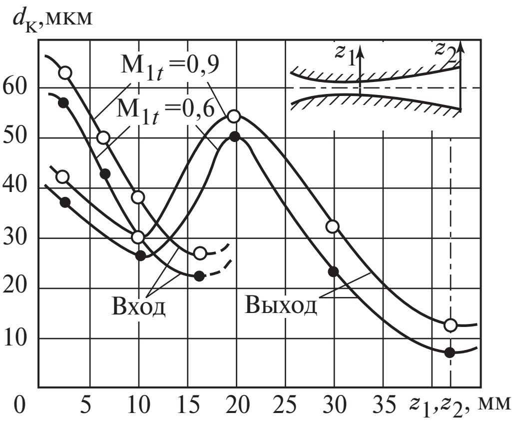


Рис. 16.14. Распределение дисперсности жидкой фазы во входном и выходном сечениях плоского диффузора [12]

Дальнейшее увеличение поперечной координаты (z_2 > 20 мм) ведет к монотонному снижению размеров капель, и на оси канала размеры капель составляют около 10 мкм. С изменением числа M_{1t} происходит практически эквидистантное смещение рассматриваемых кривых, причем с увеличением скорости M_{1t} размеры капель как во входном, так и в выходном сечениях несколько увеличиваются.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое компоненты среды?
2. Что такое фазы в многофазной однокомпонентной среде?
3. Дайте определение коэффициенту скольжения.
4. Что представляют собой степень влажности и степень сухости пара?
5. Дайте определение времени релаксации.
6. Что такое гидроудар?
7. Как влияет наличие газовых пузырьков в жидкости на скорость распространения звуковых волн?
8. Какое соотношение связывает безразмерные скорости до скачка уплотнения M_1 и после него M_2 в жидкости с пузырьками газа?
9. Что такое скачок конденсации?
10. Может ли возникнуть скачок конденсации в дозвуковом потоке?
11. В каком термодинамическом состоянии находится рабочая среда за скачком конденсации?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1

Газодинамические функции (k = 1,4)

$\lambda = c/a_*$	$\tau = T/T_0$	$\varepsilon = p/p_0$	$\delta = \rho/\rho_0$	$q = F_*/F$	$M = c/a$
0,000	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000
0,005	1,0000	1,0000	1,0000	0,0078	0,0045
0,010	1,0000	0,9999	0,9999	0,0158	0,0091
0,015	1,0000	0,9999	0,9999	0,0236	0,0136
0,020	0,9999	0,9998	0,9998	0,0315	0,0183
0,025	0,9999	0,9997	0,9998	0,0395	0,0228
0,030	0,9999	0,9995	0,9997	0,0473	0,0274
0,035	0,9998	0,9993	0,9995	0,0552	0,0320
0,040	0,9997	0,9990	0,9993	0,0631	0,0365
0,045	0,9997	0,9988	0,9992	0,0710	0,0411
0,050	0,9996	0,9986	0,9990	0,0788	0,0457
0,055	0,9995	0,9982	0,9987	0,0866	0,0503
0,060	0,9994	0,9979	0,9985	0,0945	0,0548
0,065	0,9993	0,9975	0,9982	0,1026	0,0593
0,070	0,9992	0,9971	0,9979	0,1102	0,0639
0,075	0,9990	0,9967	0,9977	0,1181	0,0685
0,080	0,9989	0,9963	0,9974	0,1259	0,0731
0,085	0,9988	0,9958	0,9971	0,1336	0,0777
0,090	0,9987	0,9953	0,9967	0,1415	0,0822
0,095	0,9985	0,9948	0,9963	0,1493	0,0868
0,100	0,9983	0,9942	0,9959	0,1571	0,0914
0,105	0,9982	0,9935	0,9954	0,1649	0,0959
0,110	0,9980	0,9929	0,9949	0,1726	0,1005
0,115	0,9978	0,9922	0,9945	0,1804	0,1051
0,120	0,9976	0,9916	0,9940	0,1882	0,1097
0,125	0,9974	0,9909	0,9935	0,1960	0,1143
0,130	0,9972	0,9901	0,9929	0,2036	0,1190
0,135	0,9969	0,9894	0,9924	0,2113	0,1235
0,140	0,9967	0,9886	0,9918	0,2190	0,1280
0,145	0,9965	0,9878	0,9913	0,2267	0,1326

Продолжение табл. П.1

$\lambda = c/a_*$	$\tau = T/T_0$	$\varepsilon = p/p_0$	$\delta = \rho/\rho_0$	$q = F_*/F$	$M = c/a$
0,150	0,9963	0,9870	0,9907	0,2344	0,1372
0,155	0,9960	0,9861	0,9900	0,2421	0,1416
0,160	0,9957	0,9851	0,9893	0,2497	0,1460
0,165	0,9955	0,9842	0,9887	0,2572	0,1510
0,170	0,9952	0,9832	0,9880	0,2649	0,1560
0,175	0,9950	0,9822	0,9872	0,2725	0,1605
0,180	0,9946	0,9812	0,9866	0,2801	0,1650
0,185	0,9943	0,9802	0,9858	0,2877	0,1694
0,190	0,9940	0,9791	0,9850	0,2952	0,1740
0,195	0,9936	0,9779	0,9842	0,3028	0,1785
0,200	0,9933	0,9768	0,9834	0,3102	0,1830
0,205	0,9930	0,9757	0,9827	0,3178	0,1874
0,210	0,9927	0,9745	0,9817	0,3253	0,1920
0,215	0,9923	0,9733	0,9808	0,3327	0,1970
0,220	0,9919	0,9720	0,9799	0,3401	0,2020
0,225	0,9915	0,9707	0,9790	0,3476	0,2064
0,230	0,9912	0,9695	0,9781	0,3549	0,2109
0,235	0,9908	0,9681	0,9772	0,3622	0,2155
0,240	0,9904	0,9668	0,9762	0,3696	0,2202
0,245	0,9900	0,9653	0,9752	0,3769	0,2246
0,250	0,9896	0,9640	0,9742	0,3842	0,2290
0,255	0,9892	0,9626	0,9731	0,3914	0,2339
0,260	0,9887	0,9611	0,9721	0,3987	0,2387
0,265	0,9883	0,9596	0,9710	0,4059	0,2433
0,270	0,9879	0,9581	0,9699	0,4131	0,2480
0,275	0,9874	0,9565	0,9688	0,4202	0,2526
0,280	0,9869	0,9550	0,9677	0,4274	0,2573
0,285	0,9864	0,9534	0,9665	0,4345	0,2622
0,290	0,9860	0,9518	0,9653	0,4416	0,2670
0,295	0,9855	0,9501	0,9641	0,4486	0,2715
0,300	0,9850	0,9485	0,9630	0,4557	0,2760
0,305	0,9845	0,9468	0,9618	0,4627	0,2805
0,310	0,9840	0,9451	0,9605	0,4697	0,2850
0,315	0,9835	0,9434	0,9592	0,4766	0,2898

Продолжение табл. П.1

$\lambda = c/a_*$	$\tau = T/T_0$	$\varepsilon = p/p_0$	$\delta = \rho/\rho_0$	$q = F_*/F$	$M = c/a$
0,320	0,9829	0,9415	0,9579	0,4835	0,2947
0,325	0,9824	0,9397	0,9569	0,4904	0,2993
0,330	0,9819	0,9379	0,9552	0,4972	0,3040
0,335	0,9813	0,9360	0,9538	0,5041	0,3087
0,340	0,9807	0,9342	0,9525	0,5109	0,3134
0,345	0,9802	0,9323	0,9511	0,5176	0,3181
0,350	0,9796	0,9303	0,9497	0,5243	0,3228
0,355	0,9790	0,9284	0,9483	0,5311	0,3275
0,360	0,9784	0,9265	0,9469	0,5377	0,3322
0,365	0,9778	0,9244	0,9454	0,5443	0,3369
0,370	0,9772	0,9224	0,9439	0,5509	0,3417
0,375	0,9765	0,9203	0,9424	0,5575	0,3464
0,380	0,9759	0,9183	0,9409	0,5640	0,3511
0,385	0,9753	0,9162	0,9393	0,5704	0,3558
0,390	0,9747	0,9141	0,9378	0,5769	0,3606
0,395	0,9740	0,9119	0,9362	0,5833	0,3653
0,400	0,9733	0,9097	0,9346	0,5897	0,3701
0,405	0,9726	0,9075	0,9330	0,5961	0,3748
0,410	0,9720	0,9053	0,9314	0,6024	0,3796
0,415	0,9713	0,9031	0,9298	0,6086	0,3844
0,420	0,9707	0,9008	0,9281	0,6149	0,3892
0,425	0,9701	0,8985	0,9264	0,6210	0,3939
0,430	0,9692	0,8962	0,9247	0,6272	0,3987
0,435	0,9685	0,8938	0,9230	0,6333	0,4034
0,440	0,9677	0,8915	0,9212	0,6394	0,4083
0,445	0,9670	0,8891	0,9195	0,6455	0,4131
0,450	0,9663	0,8868	0,9178	0,6515	0,4179
0,455	0,9655	0,8844	0,9160	0,6574	0,4226
0,460	0,9647	0,8819	0,9142	0,6633	0,4275
0,465	0,9640	0,8795	0,9123	0,6691	0,4324
0,470	0,9632	0,8770	0,9105	0,6750	0,4372
0,475	0,9624	0,8744	0,9086	0,6808	0,4420
0,480	0,9616	0,8719	0,9067	0,6865	0,4468
0,485	0,9608	0,8693	0,9048	0,6922	0,4516

Продолжение табл. П.1

$\lambda = c/a_*$	$\tau = T/T_0$	$\varepsilon = p/p_0$	$\delta = \rho/\rho_0$	$q = F_*/F$	$\mathrm{M} = c/a$
0,490	0,9600	0,8668	0,9029	0,6979	0,4565
0,495	0,9592	0,8640	0,9010	0,7035	0,4614
0,500	0,9583	0,8616	0,8991	0,7091	0,4663
0,505	0,9575	0,8590	0,8971	0,7146	0,4711
0,510	0,9567	0,8563	0,8951	0,7201	0,4760
0,515	0,9558	0,8537	0,8931	0,7255	0,4809
0,520	0,9549	0,8509	0,8911	0,7309	0,4858
0,525	0,9540	0,8482	0,8891	0,7362	0,4907
0,530	0,9532	0,8455	0,8871	0,7416	0,4956
0,535	0,9523	0,8429	0,8850	0,7468	0,5005
0,540	0,9514	0,8400	0,8829	0,7520	0,5054
0,545	0,9505	0,8369	0,8808	0,7572	0,5103
0,550	0,9496	0,8344	0,8787	0,7623	0,5152
0,555	0,9487	0,8316	0,8766	0,7674	0,5201
0,560	0,9477	0,8287	0,8744	0,7724	0,5251
0,565	0,9468	0,8258	0,8723	0,7773	0,5300
0,570	0,9459	0,8230	0,8701	0,7823	0,5350
0,575	0,9449	0,8201	0,8679	0,7871	0,5400
0,580	0,9439	0,8172	0,8657	0,7920	0,5450
0,585	0,9430	0,8142	0,8635	0,7967	0,5499
0,590	0,9420	0,8112	0,8612	0,8015	0,5549
0,595	0,9410	0,8083	0,8590	0,8062	0,5599
0,600	0,9400	0,8053	0,8567	0,8109	0,5649
0,605	0,9390	0,8022	0,8544	0,8153	0,5700
0,610	0,9380	0,7992	0,8521	0,8198	0,5750
0,615	0,9370	0,7962	0,8497	0,8243	0,5800
0,620	0,9359	0,7932	0,8475	0,8288	0,5850
0,625	0,9349	0,7901	0,8451	0,8332	0,5901
0,630	0,9339	0,7870	0,8428	0,8375	0,5951
0,635	0,9328	0,7839	0,8404	0,8417	0,6002
0,640	0,9317	0,7808	0,8380	0,8459	0,6053
0,645	0,9306	0,7777	0,8356	0,8501	0,6104
0,650	0,9296	0,7745	0,8332	0,8543	0,6154
0,655	0,9285	0,7713	0,8308	0,8583	0,6205

Продолжение табл. П.1

$\lambda = c/a_*$	$\tau = T/T_0$	$\varepsilon = p/p_0$	$\delta = \rho/\rho_0$	$q = F_*/F$	$\mathrm{M} = c/a$
0,660	0,9274	0,7681	0,8283	0,8623	0,6256
0,665	0,9263	0,7651	0,8258	0,8662	0,6307
0,670	0,9252	0,7617	0,8233	0,8701	0,6359
0,675	0,9240	0,7585	0,8208	0,8740	0,6410
0,680	0,9229	0,7553	0,8183	0,8778	0,6461
0,685	0,9218	0,7520	0,8158	0,8815	0,6513
0,690	0,9207	0,7488	0,8133	0,8852	0,6565
0,695	0,9195	0,7455	0,8107	0,8888	0,6616
0,700	0,9183	0,7422	0,8082	0,8924	0,6668
0,705	0,9172	0,7389	0,8056	0,8958	0,6720
0,710	0,9160	0,7356	0,8030	0,8993	0,6772
0,715	0,9148	0,7322	0,8004	0,9027	0,6824
0,720	0,9136	0,7289	0,7978	0,9061	0,6876
0,725	0,9124	0,7255	0,7952	0,9094	0,6929
0,730	0,9112	0,7221	0,7925	0,9126	0,6981
0,735	0,9100	0,7187	0,7899	0,9158	0,7033
0,740	0,9087	0,7154	0,7872	0,9189	0,7086
0,745	0,9075	0,7120	0,7845	0,9219	0,7138
0,750	0,9063	0,7086	0,7819	0,9250	0,7192
0,755	0,9050	0,7051	0,7792	0,9279	0,7244
0,760	0,9037	0,7017	0,7764	0,9308	0,7298
0,765	0,9024	0,6982	0,7737	0,9336	0,7351
0,770	0,9012	0,6948	0,7710	0,9364	0,7404
0,775	0,8999	0,6913	0,7682	0,9391	0,7457
0,780	0,8986	0,6878	0,7655	0,9418	0,7511
0,785	0,8972	0,6843	0,7627	0,9443	0,7565
0,790	0,8960	0,6809	0,7599	0,9469	0,7619
0,795	0,8946	0,6774	0,7570	0,9494	0,7673
0,800	0,8933	0,6738	0,7543	0,9518	0,7727
0,805	0,8920	0,6703	0,7514	0,9541	0,7782
0,810	0,8907	0,6668	0,7486	0,9565	0,7835
0,815	0,8893	0,6633	0,7457	0,9588	0,7890
0,820	0,8879	0,6597	0,7429	0,9610	0,7944
0,825	0,8865	0,6562	0,7400	0,9631	0,7998

Продолжение табл. П.1

$\lambda = c/a_*$	$\tau = T/T_0$	$\varepsilon = p/p_0$	$\delta = \rho/\rho_0$	$q = F_*/F$	$\mathrm{M} = c/a$
0,830	0,8852	0,6526	0,7372	0,9652	0,8053
0,835	0,8838	0,6490	0,7343	0,9672	0,8108
0,840	0,8824	0,6454	0,7314	0,9691	0,8163
0,845	0,8810	0,6418	0,7285	0,9710	0,8218
0,850	0,8796	0,6382	0,7256	0,9729	0,8274
0,855	0,8781	0,6346	0,7227	0,9746	0,8329
0,860	0,8767	0,6310	0,7197	0,9764	0,8384
0,865	0,8753	0,6274	0,7167	0,9780	0,8440
0,870	0,8739	0,6238	0,7138	0,9796	0,8496
0,875	0,8724	0,6201	0,7109	0,9811	0,8552
0,880	0,8709	0,6165	0,7079	0,9826	0,8608
0,885	0,8695	0,6128	0,7049	0,9840	0,8664
0,890	0,8680	0,6092	0,7019	0,9854	0,8721
0,895	0,8665	0,6055	0,6989	0,9866	0,8777
0,900	0,8650	0,6019	0,6959	0,9879	0,8833
0,905	0,8635	0,5983	0,6928	0,9890	0,8890
0,910	0,8620	0,5946	0,6898	0,9902	0,8947
0,915	0,8604	0,5910	0,6868	0,9912	0,9004
0,920	0,8589	0,5873	0,6838	0,9923	0,9062
0,925	0,8574	0,5836	0,6807	0,9932	0,9120
0,930	0,8559	0,5800	0,6776	0,9941	0,9177
0,935	0,8543	0,5763	0,6745	0,9948	0,9235
0,940	0,8527	0,5726	0,6715	0,9957	0,9292
0,945	0,8512	0,5690	0,6684	0,9964	0,9350
0,950	0,8496	0,5653	0,6653	0,9970	0,9409
0,955	0,8480	0,5616	0,6622	0,9975	0,9467
0,960	0,8464	0,5579	0,6591	0,9981	0,9526
0,965	0,8448	0,5542	0,6560	0,9985	0,9584
0,970	0,8432	0,5505	0,6528	0,9989	0,9644
0,975	0,8416	0,5468	0,6497	0,9992	0,9702
0,980	0,8399	0,5431	0,6466	0,9995	0,9761
0,985	0,8383	0,5394	0,6434	0,9997	0,9820
0,990	0,8367	0,5357	0,6403	0,9999	0,9880
0,995	0,8350	0,5320	0,6372	0,9999	0,9940

Продолжение табл. П.1

$\lambda = c/a_*$	$\tau = T/T_0$	$\varepsilon = p/p_0$	$\delta = \rho/\rho_0$	$q = F_*/F$	$\mathrm{M} = c/a$
1,000	0,8333	0,5283	0,6340	1,0000	1,0000
1,005	0,8317	0,5246	0,6307	0,9999	1,0060
1,010	0,8300	0,5209	0,6276	0,9999	1,0120
1,015	0,8283	0,5172	0,6244	0,9997	1,0180
1,020	0,8266	0,5135	0,6212	0,9995	1,0241
1,025	0,8249	0,5098	0,6180	0,9992	1,0302
1,030	0,8232	0,5061	0,6148	0,9989	1,0363
1,035	0,8215	0,5024	0,6116	0,9984	1,0424
1,040	0,8197	0,4987	0,6084	0,9980	1,0486
1,045	0,8180	0,4950	0,6052	0,9975	1,0548
1,050	0,8163	0,4913	0,6019	0,9969	1,0609
1,055	0,8145	0,4877	0,5987	0,9963	1,0671
1,060	0,8127	0,4840	0,5955	0,9957	1,0733
1,065	0,8110	0,4803	0,5923	0,9948	1,0795
1,070	0,8092	0,4766	0,5890	0,9941	1,0858
1,075	0,8074	0,4730	0,5858	0,9932	1,0921
1,080	0,8056	0,4693	0,5826	0,9924	1,0985
1,085	0,8039	0,4656	0,5793	0,9914	1,1048
1,090	0,8020	0,4619	0,5760	0,9903	1,1111
1,095	0,8001	0,4583	0,5727	0,9891	1,1174
1,100	0,7983	0,4546	0,5694	0,9880	1,1239
1,105	0,7965	0,4510	0,5662	0,9868	1,1303
1,110	0,7947	0,4473	0,5629	0,9856	1,1367
1,115	0,7928	0,4437	0,5596	0,9843	1,1431
1,120	0,7909	0,4400	0,5564	0,9829	1,1496
1,125	0,7890	0,4364	0,5531	0,9815	1,1562
1,130	0,7872	0,4328	0,5498	0,9800	1,1627
1,135	0,7853	0,4292	0,5465	0,9784	1,1693
1,140	0,7834	0,4255	0,5432	0,9768	1,1758
1,145	0,7815	0,4220	0,5399	0,9752	1,1824
1,150	0,7796	0,4184	0,5366	0,9735	1,1890
1,155	0,7777	0,4148	0,5333	0,9717	1,1956
1,160	0,7757	0,4111	0,5300	0,9698	1,2023
1,165	0,7738	0,4076	0,5267	0,9678	1,2090

Продолжение табл. П.1

$\lambda = c/a_*$	$\tau = T/T_0$	$\varepsilon = p/p_0$	$\delta = \rho/\rho_0$	$q = F_*/F$	$\mathrm{M} = c/a$
1,170	0,7719	0,4040	0,5234	0,9659	1,2157
1,175	0,7699	0,4005	0,5200	0,9640	1,2224
1,180	0,7679	0,3969	0,5168	0,9620	1,2292
1,185	0,7660	0,3933	0,5135	0,9599	1,2360
1,190	0,7640	0,3898	0,5102	0,9577	1,2428
1,195	0,7620	0,3862	0,5069	0,9555	1,2497
1,200	0,7600	0,3827	0,5035	0,9531	1,2566
1,205	0,7580	0,3792	0,5002	0,9507	1,2637
1,210	0,7560	0,3757	0,4969	0,9484	1,2708
1,215	0,7539	0,3722	0,4936	0,9460	1,2776
1,220	0,7519	0,3687	0,4903	0,9435	1,2843
1,225	0,7498	0,3652	0,4870	0,9410	1,2909
1,230	0,7478	0,3617	0,4837	0,9384	1,2974
1,235	0,7457	0,3582	0,4804	0,9358	1,3050
1,240	0,7437	0,3548	0,4770	0,9331	1,3126
1,245	0,7416	0,3514	0,4737	0,9304	1,3195
1,250	0,7396	0,3479	0,4704	0,9275	1,3268
1,255	0,7375	0,3445	0,4671	0,9246	1,3340
1,260	0,7354	0,3411	0,4638	0,9217	1,3413
1,265	0,7334	0,3377	0,4605	0,9187	1,3485
1,270	0,7312	0,3343	0,4572	0,9159	1,3558
1,275	0,7290	0,3309	0,4538	0,9128	1,3632
1,280	0,7269	0,3275	0,4505	0,9096	1,3705
1,285	0,7248	0,3241	0,4472	0,9065	1,3779
1,290	0,7227	0,3208	0,4439	0,9033	1,3853
1,295	0,7205	0,3175	0,4406	0,9001	1,3927
1,300	0,7183	0,3142	0,4374	0,8969	1,4002
1,305	0,7162	0,3108	0,4340	0,8935	1,4078
1,310	0,7140	0,3075	0,4307	0,8901	1,4153
1,315	0,7119	0,3042	0,4275	0,8866	1,4229
1,320	0,7096	0,3010	0,4241	0,8831	1,4305
1,325	0,7074	0,2977	0,4208	0,8796	1,4382
1,330	0,7052	0,2945	0,4176	0,8761	1,4458
1,335	0,7030	0,2912	0,4143	0,8725	1,4534

Продолжение табл. П.1

$\lambda = c/a_*$	$\tau = T/T_0$	$\varepsilon = p/p_0$	$\delta = \rho/\rho_0$	$q = F_*/F$	$\mathrm{M} = c/a$
1,340	0,7007	0,2880	0,4110	0,8688	1,4613
1,345	0,6985	0,2848	0,4078	0,8651	1,4691
1,350	0,6962	0,2816	0,4045	0,8614	1,4769
1,355	0,6940	0,2785	0,4012	0,8577	1,4848
1,360	0,6917	0,2753	0,3980	0,8538	1,4927
1,365	0,6895	0,2723	0,3948	0,8499	1,5007
1,370	0,6872	0,2690	0,3914	0,8459	1,5087
1,375	0,6849	0,2659	0,3882	0,8420	1,5168
1,380	0,6826	0,2628	0,3850	0,8380	1,5248
1,385	0,6803	0,2597	0,3818	0,8340	1,5329
1,390	0,6780	0,2566	0,3785	0,8299	1,5410
1,395	0,6756	0,2536	0,3752	0,8258	1,5492
1,400	0,6733	0,2505	0,3720	0,8216	1,5575
1,405	0,6710	0,2475	0,3687	0,8175	1,5657
1,410	0,6687	0,2445	0,3656	0,8131	1,5741
1,415	0,6664	0,2415	0,3624	0,8088	1,5824
1,420	0,6639	0,2385	0,3592	0,8046	1,5909
1,425	0,6616	0,2355	0,3560	0,8002	1,5995
1,430	0,6592	0,2326	0,3528	0,7958	1,6078
1,435	0,6568	0,2297	0,3496	0,7914	1,6163
1,440	0,6544	0,2267	0,3464	0,7869	1,6250
1,445	0,6520	0,2238	0,3433	0,7823	1,6336
1,450	0,6496	0,2209	0,3401	0,7778	1,6423
1,455	0,6472	0,2180	0,3370	0,7732	1,6510
1,460	0,6447	0,2152	0,3338	0,7687	1,6598
1,465	0,6423	0,2123	0,3307	0,7640	1,6687
1,470	0,6398	0,2095	0,3275	0,7593	1,6776
1,475	0,6374	0,2067	0,3243	0,7546	1,6865
1,480	0,6349	0,2040	0,3212	0,7499	1,6955
1,485	0,6325	0,2012	0,3181	0,7452	1,7045
1,490	0,6300	0,1985	0,3150	0,7404	1,7137
1,495	0,6275	0,1956	0,3119	0,7356	1,7229
1,500	0,6250	0,1930	0,3088	0,7307	1,7321
1,505	0,6225	0,1903	0,3057	0,7258	1,7414

Продолжение табл. П.1

$\lambda = c/a_*$	$\tau = T/T_0$	$\varepsilon = p/p_0$	$\delta = \rho/\rho_0$	$q = F_*/F$	$\mathrm{M} = c/a$
1,510	0,6200	0,1876	0,3027	0,7209	1,7506
1,515	0,6175	0,1850	0,2996	0,7160	1,7600
1,520	0,6149	0,1824	0,2965	0,7110	1,7694
1,525	0,6124	0,1798	0,2934	0,7060	1,7789
1,530	0,6099	0,1771	0,2904	0,7009	1,7885
1,535	0,6073	0,1746	0,2874	0,6959	1,7981
1,540	0,6048	0,1720	0,2844	0,6909	1,8078
1,545	0,6022	0,1694	0,2814	0,6858	1,8176
1,550	0,5996	0,1669	0,2784	0,6807	1,8273
1,555	0,5970	0,1644	0,2754	0,6756	1,8372
1,560	0,5944	0,1619	0,2724	0,6703	1,8471
1,565	0,5918	0,1594	0,2695	0,6651	1,8572
1,570	0,5892	0,1570	0,2665	0,6599	1,8672
1,575	0,5866	0,1546	0,2636	0,6546	1,8773
1,580	0,5839	0,1522	0,2606	0,6494	1,8875
1,585	0,5813	0,1498	0,2576	0,6441	1,8978
1,590	0,5786	0,1474	0,2547	0,6389	1,9081
1,595	0,5759	0,1450	0,2518	0,6335	1,9185
1,600	0,5733	0,1427	0,2489	0,6282	1,9290
1,605	0,5707	0,1403	0,2460	0,6228	1,9396
1,610	0,5680	0,1381	0,2431	0,6175	1,9501
1,615	0,5653	0,1359	0,2401	0,6121	1,9609
1,620	0,5625	0,1336	0,2374	0,6067	1,9716
1,625	0,5599	0,1313	0,2347	0,6012	1,9824
1,630	0,5572	0,1291	0,2317	0,5958	1,9934
1,635	0,5543	0,1270	0,2289	0,5904	2,0045
1,640	0,5517	0,1248	0,2261	0,5850	2,0155
1,645	0,5490	0,1227	0,2233	0,5795	2,0267
1,650	0,5463	0,1205	0,2205	0,5740	2,0380
1,655	0,5435	0,1184	0,2177	0,5685	2,0493
1,660	0,5407	0,1163	0,2150	0,5630	2,0607
1,665	0,5380	0,1142	0,2123	0,5575	2,0723
1,670	0,5352	0,1121	0,2095	0,5520	2,0839
1,675	0,5324	0,1101	0,2068	0,5464	2,0956

Продолжение табл. П.1

$\lambda = c/a_*$	$\tau = T/T_0$	$\varepsilon = p/p_0$	$\delta = \rho/\rho_0$	$q = F_*/F$	$\mathrm{M} = c/a$
1,680	0,5296	0,1081	0,2041	0,5409	2,1073
1,685	0,5268	0,1061	0,2015	0,5353	2,1193
1,690	0,5240	0,1041	0,1988	0,5298	2,1313
1,695	0,5211	0,1022	0,1961	0,5243	2,1434
1,700	0,5183	0,1003	0,1934	0,5187	2,1555
1,705	0,5154	0,0984	0,1908	0,5131	2,1678
1,710	0,5126	0,0965	0,1881	0,5075	2,1802
1,715	0,5097	0,0946	0,1855	0,5020	2,1928
1,720	0,5069	0,0928	0,1830	0,4965	2,2053
1,725	0,5040	0,0909	0,1804	0,4909	2,2180
1,730	0,5012	0,0891	0,1778	0,4852	2,2308
1,735	0,4983	0,0873	0,1751	0,4796	2,2437
1,740	0,4954	0,0856	0,1727	0,4741	2,2567
1,745	0,4925	0,0839	0,1702	0,4685	2,2699
1,750	0,4896	0,0821	0,1677	0,4630	2,2831
1,755	0,4867	0,0803	0,1653	0,4575	2,2965
1,760	0,4837	0,0787	0,1628	0,4520	2,3100
1,765	0,4808	0,0771	0,1603	0,4464	2,3235
1,770	0,4779	0,0754	0,1578	0,4407	2,3374
1,775	0,4749	0,0738	0,1554	0,4352	2,3513
1,780	0,4719	0,0722	0,1530	0,4296	2,3653
1,785	0,4690	0,0706	0,1506	0,4241	2,3795
1,790	0,4660	0,0691	0,1482	0,4185	2,3937
1,795	0,4630	0,0675	0,1458	0,4130	2,4082
1,800	0,4600	0,0660	0,1435	0,4075	2,4227
1,805	0,4570	0,0645	0,1412	0,4020	2,4375
1,810	0,4540	0,0630	0,1389	0,3965	2,4523
1,815	0,4510	0,0616	0,1366	0,3910	2,4674
1,820	0,4479	0,0602	0,1343	0,3855	2,4824
1,825	0,4449	0,0588	0,1320	0,3800	2,4978
1,830	0,4418	0,0573	0,1298	0,3746	2,5132
1,835	0,4388	0,0559	0,1275	0,3692	2,5290
1,840	0,4357	0,0546	0,1253	0,3638	2,5449
1,845	0,4327	0,0533	0,1232	0,3584	2,5608

Окончание табл. П.1

$\lambda = c/a_*$	$\tau = T/T_0$	$\varepsilon = p/p_0$	$\delta = \rho/\rho_0$	$q = F_*/F$	$M = c/a$
1,850	0,4296	0,0520	0,1210	0,3530	2,5766
1,855	0,4265	0,0507	0,1189	0,3476	2,5930
1,860	0,4234	0,0494	0,1167	0,3423	2,6094
1,865	0,4203	0,0481	0,1146	0,3370	2,6261
1,870	0,4171	0,0469	0,1124	0,3316	2,6429
1,875	0,4140	0,0457	0,1103	0,3263	2,6600
1,880	0,4109	0,0445	0,1083	0,3211	2,6772
1,885	0,4078	0,0434	0,1063	0,3158	2,6948
1,890	0,4047	0,0422	0,1042	0,3105	2,7123
1,895	0,4015	0,0411	0,1022	0,3054	2,7302
1,900	0,3983	0,0399	0,1002	0,3002	2,7481
1,905	0,3952	0,0388	0,0982	0,2950	2,7666
1,910	0,3920	0,0377	0,0962	0,2898	2,7851
1,915	0,3888	0,0367	0,0942	0,2848	2,8037
1,920	0,3856	0,0356	0,0923	0,2797	2,8225
1,925	0,3824	0,0346	0,0904	0,2746	2,8419
1,930	0,3792	0,0336	0,0885	0,2695	2,8612
1,935	0,3760	0,0326	0,0866	0,2646	2,8810
1,940	0,3727	0,0316	0,0848	0,2596	2,9007
1,945	0,3694	0,0307	0,0830	0,2547	2,9211
1,950	0,3662	0,0297	0,0812	0,2497	2,9414
1,955	0,3630	0,0288	0,0794	0,2448	2,9623
1,960	0,3597	0,0279	0,0776	0,2400	2,9831
1,965	0,3565	0,0270	0,0758	0,2352	3,0066
1,970	0,3532	0,0262	0,0741	0,2304	3,0301
1,975	0,3499	0,0253	0,0724	0,2256	3,0501
1,980	0,3466	0,0245	0,0707	0,2209	3,0701
1,985	0,3433	0,0237	0,0691	0,2163	3,0929
1,990	0,3400	0,0229	0,0674	0,2116	3,1155
1,995	0,3366	0,0221	0,0658	0,2070	3,1389
2,000	0,3333	0,0214	0,0642	0,2024	3,1622

Таблица П.2

Газодинамические функции (k = 1,3)

λ	p/p_0	T/T_0	ρ/ρ_0	q	δ	M
0,02	0,99977	0,99995	0,99983	0,03186	—	0,01865
0,04	0,99910	0,99979	0,99930	0,06369	—	0,03730
0,06	0,99797	0,99953	0,99844	0,09545	—	0,05596
0,08	0,99639	0,99917	0,99722	0,12712	—	0,07463
0,10	0,99436	0,99870	0,99566	0,15865	—	0,09331
0,12	0,99189	0,99812	0,99375	0,19001	—	0,11201
0,14	0,98897	0,99744	0,99150	0,22118	—	0,13072
0,16	0,98561	0,99666	0,98891	0,25212	—	0,14945
0,18	0,98182	0,99577	0,98598	0,28279	—	0,16821
0,20	0,97759	0,99478	0,98271	0,31317	—	0,18699
0,22	0,97293	0,99369	0,97911	0,34223	—	0,20580
0,24	0,96785	0,99249	0,97518	0,37292	—	0,22465
0,26	0,96235	0,99118	0,97091	0,40223	—	0,24353
0,28	0,95644	0,98977	0,96632	0,43113	—	0,26245
0,30	0,95012	0,98826	0,96140	0,45957	—	0,28141
0,32	0,94340	0,98664	0,95617	0,48754	—	0,30041
0,34	0,93628	0,98492	0,95062	0,51500	—	0,31947
0,36	0,92878	0,98310	0,94476	0,54194	—	0,33858
0,38	0,92091	0,98117	0,93859	0,56831	—	0,35774
0,40	0,91266	0,97913	0,93211	0,59409	—	0,37696
0,42	0,90405	0,97699	0,92534	0,61927	—	0,39624
0,44	0,89509	0,97475	0,91828	0,64380	—	0,41558
0,46	0,88578	0,97240	0,91093	0,66768	—	0,43500
0,48	0,87615	0,96995	0,90329	0,69087	—	0,45448
0,50	0,86618	0,96740	0,89538	0,71335	—	0,47404
0,52	0,85591	0,96474	0,88720	0,73511	—	0,49367
0,54	0,84532	0,96197	0,87875	0,75611	—	0,51341
0,56	0,83445	0,95910	0,87004	0,77634	—	0,53322
0,58	0,82330	0,95612	0,86108	0,79579	—	0,55312
0,60	0,81187	0,95304	0,85187	0,81443	—	0,57312
0,62	0,80019	0,94986	0,84243	0,83224	—	0,59322
0,64	0,78826	0,94657	0,83275	0,84922	—	0,61341
0,66	0,77610	0,94318	0,82285	0,86535	—	0,63372

Продолжение табл. П.2

λ	p/p_0	T/T_0	ρ/ρ_0	q	δ	M
0,68	0,76371	0,93969	0,81273	0,88060	—	0,65414
0,70	0,75111	0,93609	0,80239	0,89498	—	0,67467
0,72	0,73831	0,93238	0,79186	0,90846	—	0,69532
0,74	0,72533	0,92857	0,78113	0,92104	—	0,71610
0,76	0,71218	0,92466	0,77021	0,93271	—	0,73701
0,78	0,69887	0,92064	0,75911	0,94346	—	0,75805
0,80	0,68541	0,91652	0,74784	0,95329	—	0,77924
0,82	0,67182	0,91230	0,73641	0,96219	—	0,80057
0,84	0,65811	0,90797	0,72482	0,97014	—	0,82205
0,86	0,64430	0,90353	0,71309	0,97716	—	0,84368
0,88	0,63039	0,89899	0,70122	0,98324	—	0,86548
0,90	0,61640	0,89435	0,68935	0,98922	—	0,88744
0,92	0,60234	0,88960	0,67709	0,99257	—	0,90958
0,94	0,58824	0,88475	0,66486	0,99583	—	0,93190
0,96	0,57409	0,87979	0,65253	0,99815	—	0,95440
0,98	0,55991	0,87473	0,64010	0,99954	—	0,97710
1,00	0,54573	0,86957	0,62759	1,00000	0°00	1,00000
1,02	0,53154	0,86430	0,61500	0,99954	0°10′	1,02310
1,04	0,51737	0,85892	0,60235	0,99817	0°30′	1,04642
1,06	0,50322	0,85344	0,58963	0,99590	0°55′	1,06996
1,08	0,48911	0,84786	0,57688	0,99273	1°25′	1,09374
1,10	0,47505	0,84217	0,56408	0,98869	1°55′	1,11775
1,12	0,46106	0,83638	0,55125	0,98377	2°25′	1,14200
1,14	0,44714	0,83049	0,53841	0,97800	3°28′	1,16651
1,16	0,43331	0,82449	0,52555	0,97140	3°28′	1,19129
1,18	0,41958	0,81838	0,51269	0,96397	4°19′	1,21634
1,20	0,40596	0,81217	0,49984	0,95574	4°52′	1,24164
1,22	0,39246	0,80586	0,48701	0,94672	5°37′	1,26730
1,24	0,37909	0,79944	0,47420	0,93693	6°20′	1,29324
1,26	0,36587	0,79292	0,46142	0,92640	7°08′	1,31949
1,28	0,35281	0,78630	0,44870	0,91514	7°52′	1,34607
1,30	0,33991	0,77957	0,43602	0,90319	8°44′	1,37299
1,32	0,32718	0,77273	0,42341	0,89056	9°32′	1,40027
1,34	0,31464	0,76579	0,41087	0,87727	10°16′	1,42791

Окончание табл. П.2

λ	p/p_0	T/T_0	ρ/ρ_0	q	δ	M
1,36	0,30229	0,75875	0,39841	0,86336	11°18′	1,45593
1,38	0,29014	0,75160	0,38603	0,84884	12°01′	1,48435
1,40	0,27820	0,74435	0,37375	0,83376	13°17′	1,51318
1,42	0,26648	0,73699	0,36158	0,81813	14°04′	1,54244
1,44	0,25499	0,72953	0,34952	0,80209	14°52′	1,57214
1,46	0,24373	0,72197	0,33759	0,78536	15°59′	1,60231
1,48	0,23270	0,71430	0,32578	0,76827	16°59′	1,63295
1,50	0,22193	0,70652	0,31411	0,75076	18°00′	1,66410
1,52	0,21140	0,69864	0,30259	0,73286	18°54′	1,69577
1,54	0,20113	0,69065	0,29122	0,71460	20°05′	1,72798
1,56	0,19112	0,68257	0,28000	0,69601	21°06′	1,76076
1,58	0,18138	0,67438	0,26896	0,67713	22°08′	1,79413
1,60	0,17191	0,66609	0,25809	0,65798	23°15′	1,82812
1,62	0,16271	0,65769	0,24740	0,63861	24°21′	1,86276
1,64	0,15379	0,64918	0,23690	0,61905	25°29′	1,89807
1,66	0,14514	0,64057	0,22658	0,59933	26°38′	1,93408
1,68	0,13678	0,63186	0,21647	0,57948	27°47′	1,97083
1,70	0,12870	0,62304	0,20657	0,55955	28°55′	2,00836
1,72	0,12090	0,61412	0,19687	0,53956	30°07′	2,04669
1,74	0,11339	0,60510	0,18739	0,51954	31°13′	2,08588
1,76	0,10616	0,59597	0,17813	0,49955	32°27′	2,12595
1,78	0,09921	0,58673	0,16909	0,47960	33°43′	2,16696
1,80	0,09255	0,57739	0,16029	0,45973	35°04′	2,20896
1,82	0,08617	0,56795	0,15171	0,43997	36°24′	2,25200
1,84	0,08006	0,55840	0,14338	0,42073	37°33′	2,29620
1,86	0,07424	0,54875	0,13528	0,40094	38°53′	2,34140
1,88	0,06888	0,53899	0,12743	0,38173	40°22′	2,38790
1,90	0,06340	0,52913	0,11982	0,36276	41°33′	2,43570
1,92	0,05839	0,51916	0,11246	0,34407	43°06′	2,48490
1,94	0,05364	0,50909	0,10536	0,32568	44°14′	2,53550
1,96	0,04914	0,49902	0,09850	0,30762	45°36′	2,58760
1,98	0,04490	0,48864	0,09190	0,28993	47°04′	2,64140
2,00	0,04090	0,47830	0,08560	0,27960	48°26′	2,69700

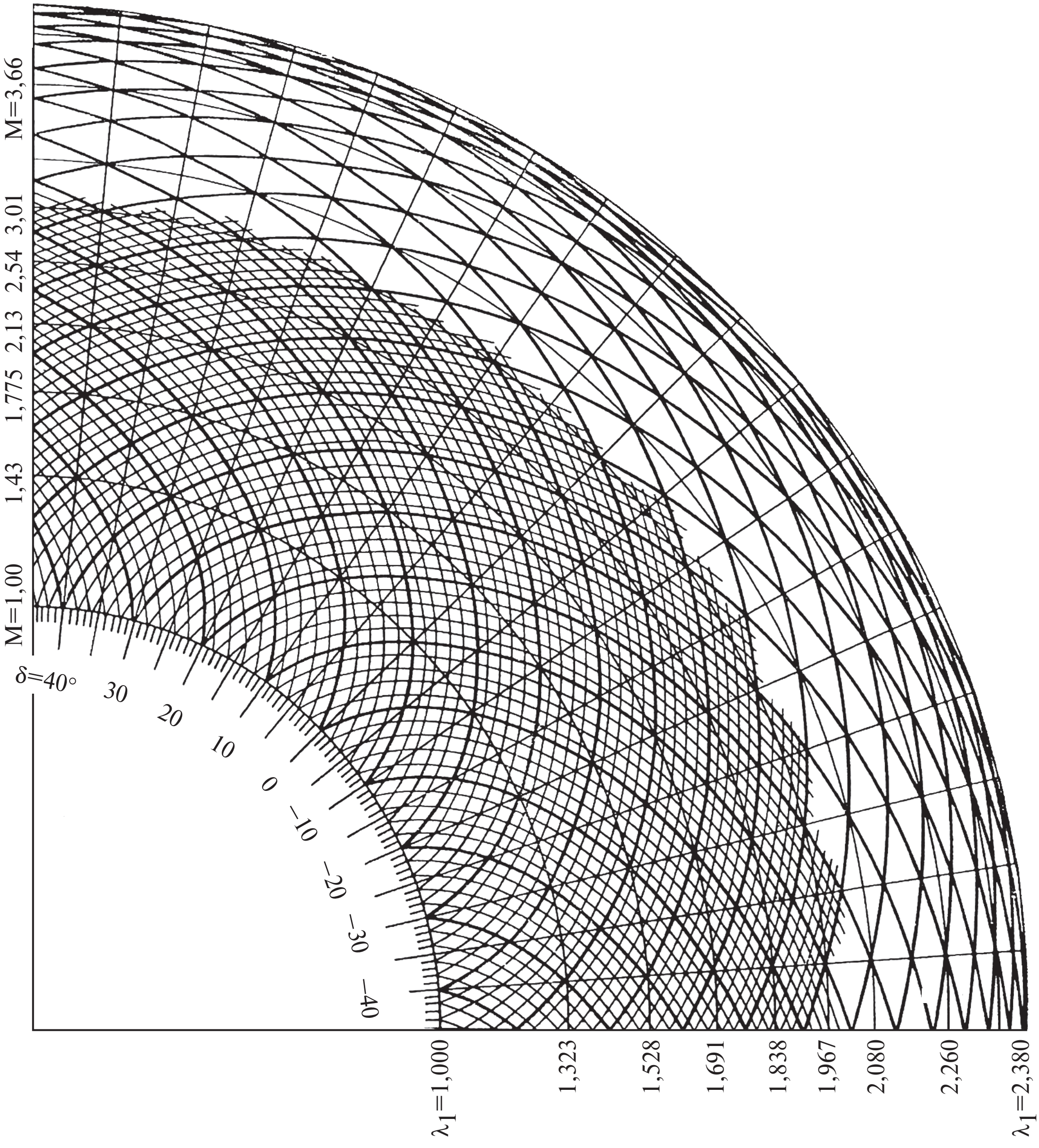


Рис. П.1. Диаграмма характеристик плоского сверхзвукового потока (k = 1,4)

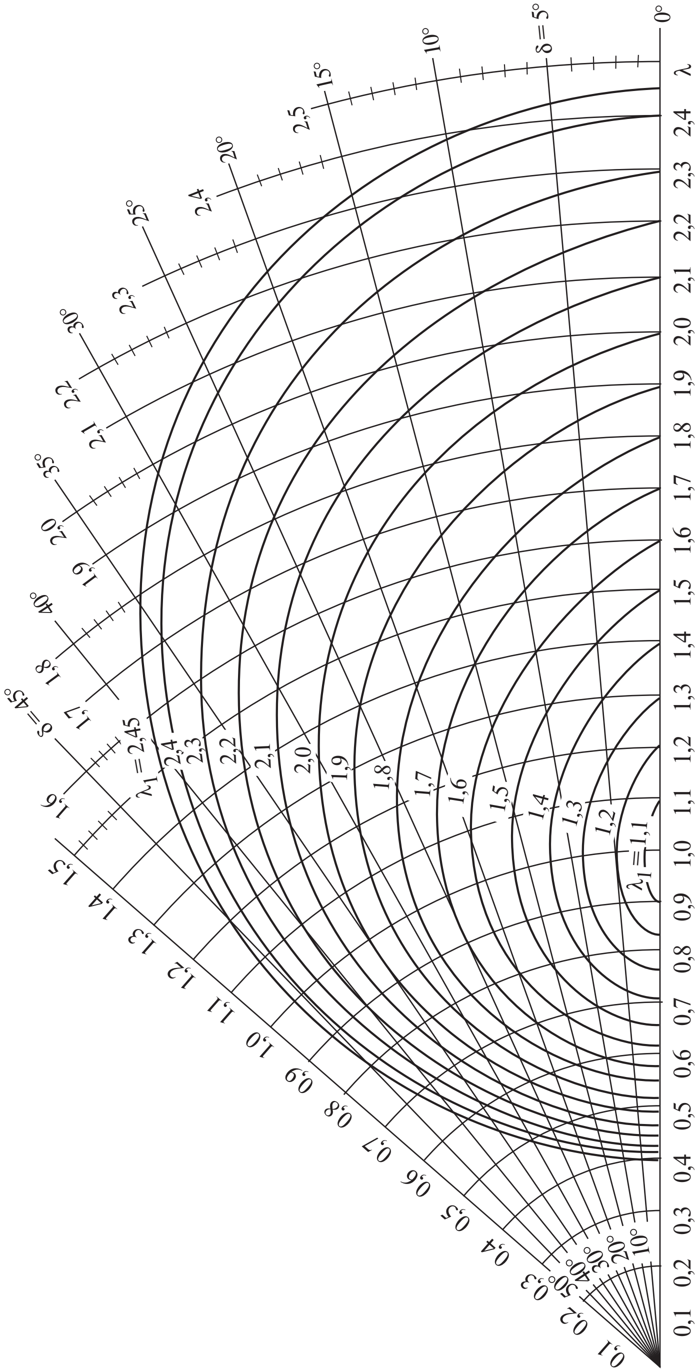


Рис. П.2. Диаграмма ударных поляр плоского сверхзвукового потока (k = 1,4)

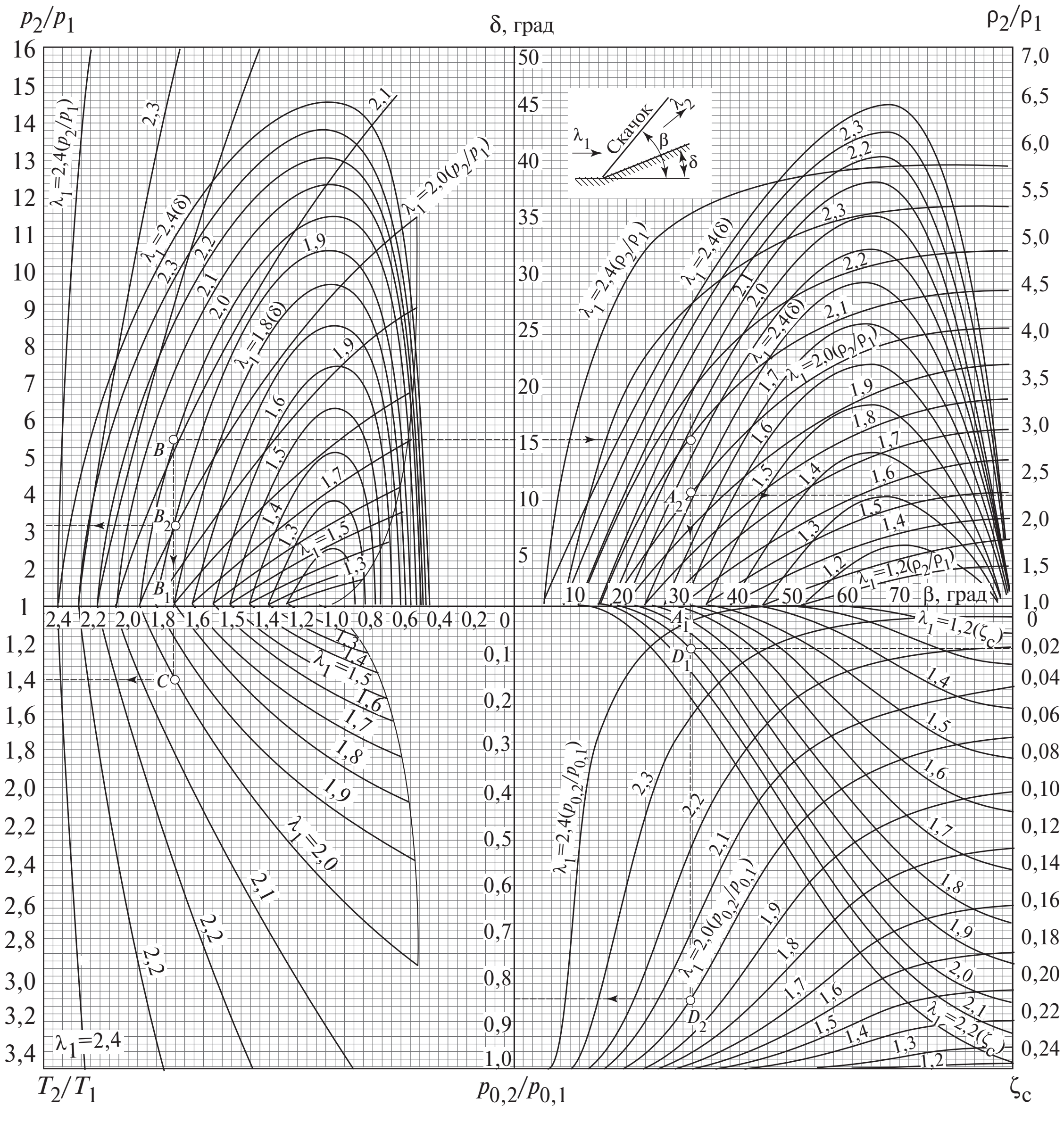


Рис. П.3. Номограмма А.Е. Зарянкина для расчета скачков уплотнения (k = 1,4) (номограмма в увеличенном масштабе представлена также на вкладке)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дейч М.Е.** Газодинамика решеток турбомашин. М.: Энергоиздат, 1996.
2. **Дейч М.Е.** Техническая газодинамика. М.: Энергия, 1974.
3. **Дейч М.Е., Зарянкин А.Е.** Гидрогазодинамика. М.: Энергоатомиздат, 1984.
4. **Дейч М.Е., Зарянкин А.Е.** Газодинамика диффузоров и выхлопных патрубков турбомашин. М.: Энергия, 1970.
5. **Дейч М.Е., Трояновский Б.М.** Исследование и расчет ступеней осевых турбин. М.: Машгиз, 1964.
6. **Дейч М.Е., Зарянкин А.Е.** Исследование и улучшение сопловых решеток регулирующей ступени // Теплоэнергетика. 1956. № 5. С. 18—24.
7. **Дейч М.Е., Зарянкин А.Е.** Приближенный метод расчета концевых потерь // Теплоэнергетика. 1958. № 9. С. 58—62.
8. **Дейч М.Е., Филиппов Г.А., Лазарев Л.Я.** Атлас профилей решеток осевых турбин. М.: Машиностроение, 1965.
9. **Метод** повышения КПД ступеней турбин с малыми высотами лопаток / М.Е. Дейч, А.Е. Зарянкин, Г.А. Филиппов, М.Ф. Зацепин // Теплоэнергетика. 1960. № 2. С. 18—24.
10. **Повышение** эффективности активных решеток малой высоты / М.Е. Дейч, А.Е. Зарянкин, Г.А. Филиппов, М.Ф. Зацепин // Теплоэнергетика. 1960. № 5. С. 37—41.
11. **Дейч М.Е., Циклаури Г.В.** Расходные характеристики суживающихся сопл на перегретом и влажном паре // Известия АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт. 1964. № 3. С. 383—390.
12. **Дейч М.Е., Ауде С.З., Щербаков А.П.** Кризисные режимы двухфазных потоков в диффузорах // Теплоэнергетика. 1989. № 1. С. 63—67.
13. **Емцев Б.Т.** Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1987.
14. **Зарянкин А.Е.** О кромочных потерях в турбинных решетках // Теплоэнергетика. 1966. № 1. С. 36—42.
15. **Использование** профильных поверхностей в турбинных решетках / А.Е. Зарянкин, В.Д. Куликов, В.Г. Грибин, А.Н. Парамонов // Теплоэнергетика. 1989. № 1. С. 27—30.
16. **Зарянкин А.Е., Шерстюк А.Н.** Радиально-осевые турбины малой мощности. М.: Машгиз, 1963.
17. **Зарянкин А.Е., Грибин В.Г.** Расчет течений идеальной жидкости. М.: Издательство МЭИ, 2005.
18. **Зарянкин А.Е., Касилов В.Ф.** Сборник задач по гидрогазодинамике. М.: Издательство МЭИ, 1996.
19. **Зарянкин А.Е., Симонов Б.П.** Регулирующие и стопорно-регулирующие клапаны паровых турбин. М.: Издательство МЭИ, 2005.
20. **Зарянкин А.Е., Симонов Б.П.** Выхлопные патрубки паровых турбин. М.: Издательство МЭИ, 2002.
21. **Зарянкин А.Е., Грибин В.Г., Дмитриев С.С.** О механизме возникновения отрыва потока от стенок гладких каналов // Теплофизика высоких температур. 1989. Т. 27. № 5. С. 913—919.
22. **Идельчик И.Е.** Гидравлические сопротивления. М.: Госэнергоиздат, 1954.
23. **Кочин И.Е., Кибель И.Р., Розе И.В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Гостехтериздат, 1955.
24. **Лаврентьев Л.М., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексных переменных. М.: Госфизматиздат, 1965.
25. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкостей и газов. М.: Наука, 1987.
26. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

27. **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидромеханика. Ч. I. М.: Наука, 1965.
28. **Мельников А.П.** Основы теоретической аэродинамики. Л.: ЛКВВИА, 1953.
29. **Повх И.Л.** Техническая гидромеханика. Л.: Машиностроение, 1976.
30. **Прандтль Л.** Гидроаэромеханика. М.: Изд-во Иностр. лит., 1949.
31. **Самойлович Г.С.** Гидрогазодинамика. М.: Машиностроение, 1990.
32. **Степанов Г.Ю.** Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962.
33. **Седов Л.И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987.
34. **Фабрикант Н.Я.** Аэродинамика. М.: Наука, 1954.
35. **Федяевский К.К., Войткунский Я.И., Фаддеев Ю.И.** Гидромеханика. Л.: Судостроение, 1968.
36. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.

Учебное издание

Зарянкин Аркадий Ефимович

МЕХАНИКА НЕСЖИМАЕМЫХ И СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Учебник для вузов

Редактор *Н.Н. Сошникова*
Художественный редактор *А.Ю. Землеруб*
Технический редактор *Т.А. Дворецкова*
Корректор *Г.Ф. Раджабова*
Компьютерная верстка *В.В. Пак*

Подписано в печать с оригинала-макета 21.08.2014 Формат 70×100/16
Бумага офсетная Гарнитура Таймс Печать офсетная
Усл. печ. л. 47,5 Усл. кр.-отт. 48,5
Тираж 500 экз. Заказ №

ЗАО «Издательский дом МЭИ», 111250, Москва, ул. Красноказарменная, д. 14А
тел/факс: (499) 654-07-74, адрес в интернете: http://www.idmei.ru,
электронная почта: info@idmei.ru

Отпечатано в Академиздатцентре «Наука» РАН, 117864, Москва, ул. Профсоюзная, д. 90