

Г ДЖЕФФРИС
Б СВирЛС

МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

METHODS
OF
MATHEMATICAL PHYSICS

by
Sir Harold Jeffreys
M. A., D. Sc., F. R. S.

and
Bertha Swirles (Lady Jeffreys)
M. A., Ph. D.

Third Edition

CAMBRIDGE
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
1966

Г. ДЖЕФФРИС, Б. СВИРЛС

МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ

ВЫПУСК 2

Перевод с английского
под ред. В. Н. Жаркова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1970

Фундаментальное руководство по прикладной математике, написанное известным геофизиком Г. Джеффрисом и его супругой Бертой Свирлс, представляет собой выдающееся явление в мировой литературе. С ним можно сравнить лишь такие труды, как „Методы математической физики“ Куранта и Гильберта или „Методы теоретической физики“ Морса и Фешбаха (выпущенные изд-вом „Мир“ в русском переводе), которые являются настольными книгами для всех, кто работает в области физико-математических дисциплин. Для удобства читателей русский перевод разбит на три выпуска: вып. 1 вышел в 1969 г., вып. 2 и 3 намечено издать в 1970 г.

Книга Г. Джеффриса и Б. Свирлс привлечет внимание физиков, геофизиков и астрономов, имеющих дело с той областью прикладной математики, где наряду с чисто рецептурной вычислительной техникой необходимо строгое понимание методов математической физики. Книга окажет также большую помощь аспирантам и студентам старших курсов.

Редакция космических исследований, астрономии и геофизики

Г. Джеффрис, Б. Свирлс
МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
 вып. 2

Редактор Э. А. Медушевская

Художественный редактор В. М. Варлашин

Корректор Е. Г. Литвак

Художник Е. М. Золотарев

Технический редактор Л. П. Кондюкова

Сдано в производство 3/XI 1969 г.

Подписано к печати 12/II 1970 г.

Бумага тип.

№ 2 60×90¹/₁₆, = 11 бум. л. 22 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 19,45, Изд. № 27/5370. Цена 1 р. 22 к.
 Зак. 379.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
 Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Трудового Красного Знамени
 Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
 Комитета по печати при Совете Министров СССР,
 Измайловский проспект, 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

ГЛАВА 9. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ	7
ГЛАВА 10. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	101
ГЛАВА 11. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО	132
ГЛАВА 12. КОНТУРНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ИНТЕГРАЛ БРОМВИЧА	195
ГЛАВА 13. КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ	249
ГЛАВА 14. ТЕОРЕМА ФУРЬЕ	279
ГЛАВА 15. ФАКТОРИАЛ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ФУНКЦИИ	333
УКАЗАТЕЛЬ	351

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Во второй выпуск вошли гл. 9—15, посвященные численным методам, вариационному исчислению, интегрированию по контуру и интегралу Бромвича, конформным отображениям, теореме Фурье, факториалу и связанным с ним функциям.

Главы 9 и 11 перевели Л. В. Никитин, А. А. Гвоздев и Б. В. Костров; гл. 10—А. Л. Левшин и Е. Л. Резников, гл. 12—15—М. Л. Гервер.

В. Н. Жарков

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Я не получаю удовлетворения от формул, пока не почувствую численных значений величин,

Лорд Кельвин
„Жизнь Сильвануса Томпсона“

9.01. Приближение многочленами. Почти для всех численных методов характерно, что значение некоторой функции $f(x)$ задано в ряде отдельных значений x и не задано в промежутках между ними. Для вычислительных целей эти промежутки заполняются в предположении, что $f(x)$ можно заменить многочленом, совпадающим с $f(x)$ в тех точках, где заданы значения этой функции. Самый простой случай — линейная интерполяция, когда из таблицы берут только два соседние значения, а все промежуточные вычисляют, предполагая, что $f'(x)$ в рассматриваемом интервале постоянна. Такой способ дает достаточную точность лишь при условии, что $f'(x)$ мало меняется на интервале между заданными значениями. Однако часто встречаются случаи, когда нужно обращать внимание на производные более высокого порядка. Приближение многочленами никогда не может быть математически точным (кроме того случая, когда сама функция $f(x)$ — многочлен), но при подходящих условиях может давать такую же точность, с какой заданы сами табличные значения.

9.011. Интерполяционная формула Лагранжа *). Пусть $f(x)$ задана при $x = x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда функция

$$g(x) = f(x_1) \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} + \\ + f(x_2) \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} + \dots + f(x_n) \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}, \quad (1)$$

совпадает с $f(x_1)$ при $x = x_1$, с $f(x_2)$ при $x = x_2$ и т. д. Функция $g(x)$ — многочлен степени $n-1$. Она симметрична в том

*) В действительности принадлежит Варингу [1]. Вновь открыта Эйлером в 1783 г. Публикация Лагранжа относится к 1795 г. Однако, по-видимому, эта формула была известна еще Ньютону. Исторические ссылки можно найти в книге Пирсона [2].

смысле, что не меняется при перестановке индексов. Поэтому значения из таблиц можно брать в любом порядке.

Большинство интерполяционных формул можно вывести из формулы Лагранжа. Сама формула Лагранжа не всегда удобна из-за того, что на практике $g(x)$ в основном определяется соседними табличными значениями и, значит, линейная интерполяция нуждается только в небольших поправках. А в формуле (1) все аргументы стоят симметрично и нужно учитывать вклад всех слагаемых. Вычисления упрощаются, если используется формула, в которой явно учтена особая роль соседних значений и тем самым утрачена симметрия.

9.012. Разделенные разности. Пусть имеется таблица значений $f(x_r)$ в точках $x_1 \dots x_n$. Для каждых двух последовательных значений аргумента x_r и x_{r+1} образуем отношение

$$f_1(x_r x_{r+1}) = [x_r x_{r+1}] = \frac{f(x_{r+1}) - f(x_r)}{x_{r+1} - x_r}. \quad (2)$$

Употребительны оба обозначения: и f_1 , и $[x_r x_{r+1}]$. Выписанное отношение называют *первой разделенной разностью*. Затем составим

$$f_2(x_r x_{r+1} x_{r+2}) = [x_r x_{r+1} x_{r+2}] = \frac{[x_{r+1} x_{r+2}] - [x_r x_{r+1}]}{x_{r+2} - x_r}. \quad (3)$$

Это *вторая разделенная разность*. Высшие разности строятся таким же образом, причем на каждом шаге знаменатель представляет собой разность тех значений x , которые только один раз встречаются в числителе. Возьмем теперь произвольное значение x , не совпадающее ни с одним из x_1, x_2, \dots, x_n . Разделенные разности, содержащие x , существуют и по определению равны

$$[x x_1] = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}, \quad \text{откуда} \quad f(x) = f(x_1) + [x x_1](x - x_1), \quad (4)$$

$$[x x_1 x_2] = \frac{[x_1 x_2] - [x x_1]}{x_2 - x}, \quad \text{откуда} \quad [x x_1] = [x_1 x_2] + [x x_1 x_2](x - x_2), \quad (5)$$

.....

$$[x x_1 x_2 \dots x_n] = \frac{[x_1 x_2 \dots x_n] - [x x_1 x_2 \dots x_{n-1}]}{x_n - x}, \quad (6)$$

откуда

$$[x x_1 x_2 \dots x_{n-1}] = [x_1 \dots x_n] + [x x_1 x_2 \dots x_n](x - x_n). \quad (7)$$

Подставим в первое равенство разность $[x x_1]$ из второго. Тогда получим трехчленную формулу, содержащую $[x x_1 x_2]$. Подставим вместо $[x x_1 x_2]$ выражение, задаваемое третьим ра-

венством. Продолжая этот процесс, окончательно имеем

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \{ [x_1 x_2] + (x - x_2) \{ [x_1 x_2 x_3] + \dots + (x - x_{n-1}) [x_1 x_2 \dots x_n] \} \dots \} + R(x), \quad (8)$$

где

$$R(x) = [x x_1 x_2 \dots x_n] (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n). \quad (9)$$

Раскроем скобки и получим

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) [x_1 x_2] + (x - x_1) (x - x_2) [x_1 x_2 x_3] + \dots + (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) [x_1 x_2 \dots x_n] + R(x), \quad (10)$$

или

$$f(x) = P(x) + R(x). \quad (11)$$

Это тождество, получающееся из определения разделенных разностей. Ценность этой формулы зависит от величины $R(x)$, которую нельзя получить из одних определений, если неизвестна сама $f(x)$. Но если каким-либо другим способом удастся установить пределы для $R(x)$, то одновременно определяются и пределы ошибки, допускаемой при отбрасывании $R(x)$. В этом случае $P(x)$ оказывается многочленом степени $n-1$, приближающим $f(x)$ с точностью, которую можно оценить.

Рассмотрим теперь разделенные разности функции x^r при целом r . Разность

$$[x x_1] = \frac{x_1^r - x^r}{x_1 - x} = x_1^{r-1} + x_1^{r-2} x + \dots + x^{r-1} \quad (12)$$

представляет собой многочлен степени $r-1$. Это свойство можно сразу установить и для любого многочлена степени r . Поэтому разделенная разность порядка r многочлена степени r постоянна, а все разности более высоких порядков равны нулю.

Далее, функция $f(x)$ совпадает с интерполяционной функцией Лагранжа $g(x)$ в точках $x = x_1, x_2, \dots, x_n$. Поэтому разделенные разности $g(x)$, взятые в этих n точках, совпадают с соответствующими разностями $f(x)$. Следовательно, формула (10) дает для $g(x)$

$$g(x) = P(x) + [x x_1 \dots x_n] (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) (x - x_n), \quad (13)$$

причем разделенная разность в последнем члене представляет собой n -ю разделенную разность $g(x)$. Но $g(x)$ — многочлен степени $n-1$, и поэтому его n -я разделенная разность равна нулю. Следовательно,

$$g(x) = P(x) \quad (14)$$

для всех значений x . Поэтому если определить $R(x)$ как $f(x) - P(x)$, то $R(x) = 0$ при $x = x_1, x_2, \dots, x_n$. Это не следует

из того, что в (9) имеется сомножитель, равный нулю, так как разделенные разности не определены для совпадающих точек.

Предположим теперь, что на интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет производные вплоть до порядка n . Тогда и $R(x)$ имеет производные до порядка n , поскольку $g(x)$ — многочлен. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n расположены в порядке возрастания. Их порядок не влияет на $R(x)$, так как $g(x)$ — симметрична. Тогда в силу того, что $R(x) = 0$ при $x = x_1$ и $x = x_2$, по теореме Ролля $R'(x) = 0$ при некотором промежуточном значении x . Аналогично $R'(x) = 0$ при некоторых x в каждом из интервалов от x_2 до x_3, \dots от x_{n-1} до x_n . Используя теорему Ролля еще раз, видим, что $R''(x) = 0$ при $n - 2$ значениях x , лежащих между x_1 и x_n . Продолжая рассуждения, получим, что $R^{(n-1)}(x) = 0$ при одном промежуточном значении, скажем, при $x = \xi$. Но дифференцирование формулы (8) дает

$$f^{(n-1)}(x) = (n-1)! [x_1 x_2 \dots x_n] + R^{(n-1)}(x). \quad (15)$$

Поэтому

$$f^{(n-1)}(\xi) = (n-1)! [x_1 x_2 \dots x_n]. \quad (16)$$

Следовательно, между x_1 и x_n лежит по крайней мере одно значение x , для которого $(n-1)$ -я разделенная разность равна $(n-1)$ -й производной $f(x)$, умноженной на $1/(n-1)!$. Полученный результат верен для каждого n . Следовательно, можно заменить $n-1$ на n и получить

$$[x x_1 \dots x_n] = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}, \quad (17)$$

где η лежит на интервале, концы которого представляют собой наименьшее и наибольшее значения из x , т. е. x_1 и x_n . Возвращаясь теперь к (9), имеем

$$R(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\eta) (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n). \quad (18)$$

Если можно установить пределы для n -й производной во всех промежутках между n значениями аргументов, то тогда можно получить оценку ошибки, получающейся при замене $f(x)$ на $P(x)$. Отбрасывание $R(x)$ в (10) приводит к *интерполяционной формуле Ньютона*.

Последовательное применение (12) показывает, что n -я разделенная разность x^n равна 1. Это следует также и из (17). Действительно, если $f(x) = x^n$, то правая часть (17) равна 1 для всех x и, следовательно, числители всех высших разно-

стей равны 0. Это свойство удобно использовать при аппроксимации заданных значений функции степенным рядом. Действительно, если все n -е разделенные разности равны a_n , то a_n — коэффициент при x^n . Вычтем $a_n x^n$ из всех табличных значений и снова составим разделенные разности. Если все арифметические действия были произведены правильно, то разности порядка $n - 1$ будут постоянными и их значение будет коэффициентом при x^{n-1} и т. д. Процесс получения коэффициентов автоматически контролируется: любая арифметическая ошибка обнаруживается на следующей стадии вычислений.

Из формулы (18) видно, что если $f^{(n)}(x)$ не слишком сильно меняется, то $R(x)$ будет наименьшим при использовании табличных значений x_1, \dots, x_n , наиболее близких к симметричному расположению относительно x . Формула пригодна при любом выборе табличных значений, но ошибка, которая неизбежна при неравной нулю $f^{(n)}(x)$, значительно меньше при интерполяции, чем при экстраполяции. Подобным образом обычно большая точность получается при интерполяции в середине таблицы, чем у ее краев. Таблица разностей составляется следующим образом:

		f_1	f_2	f_3
x_1	$f(x_1)$			
		$[x_1 x_2]$		
x_2	$f(x_2)$		$[x_1 x_2 x_3]$	
		$[x_2 x_3]$		$[x_1 x_2 x_3 x_4]$
x_3	$f(x_3)$		$[x_2 x_3 x_4]$	
		$[x_3 x_4]$		$[x_2 x_3 x_4 x_5]$
x_4	$f(x_4)$		$[x_3 x_4 x_5]$	
		$[x_4 x_5]$		$[x_3 x_4 x_5 x_6]$
x_5	$f(x_5)$		$[x_4 x_5 x_6]$	

При интерполяции между x_3 и x_4 вклад f_3 наименьший при использовании разностей $[x_3 x_4]$, $[x_2 x_3 x_4]$ и $[x_2 x_3 x_4 x_5]$ или любой другой последовательности, которая заканчивается на этой же третьей разности. Из вторых разностей обязательно нужно взять одну из тех двух, которые были использованы для образования этой третьей разности. Из первых разностей обязательно нужно выбрать одну из тех, по которым была получена использованная вторая разность. В остальном выбор пути безразличен — нужно только прийти к той же самой третьей разности. В результате всегда получится многочлен третьей степени, значения которого совпадают с $f(x)$ при $x = x_2, x_3, x_4, x_5$. Впрочем, арифметические выкладки будут проще, если придерживаться насколько возможно ближе к горизонтали таблицы.

Представление (10) обычно менее удобно, чем (8); разделенные разности высших порядков обычно малы и при умножении

их на два или более сомножителя трудно следить за положением запятой. При пользовании (8) начинают с конца и вычисляют $(x - x_{n-1}) [x_1 x_2 \dots x_n]$. Прибавляют полученную величину к $[x_1 x_2 \dots x_{n-1}]$, умножают результат на $(x - x_{n-2})$, прибавляют к $[x_1 x_2 \dots x_{n-2}]$ и продолжают таким образом вплоть до начала строки (8). Но лучше всего сразу вычислить первые два члена. Они дают линейную интерполяцию. Эти члены можно непосредственно получить при помощи арифмометра (multiplying machine). Сначала берется $f(x_1)$ и поворотом ручки переводится на счетчик произведений. Затем набирается $[x_1 x_2]$ и последовательно умножается на все требующиеся значения $x - x_1$ до $x_2 - x_1$ включительно. Последнее произведение должно давать $f(x_2)$, что проверяет вычисление $[x_1 x_2]$. Регистр множителей перед началом умножения нужно очистить, так чтобы последовательные значения $x - x_1$ можно было читать на нем. Запишем теперь (8) в виде

$$f(x) = \{f(x_1) + (x - x_1)[x_1 x_2]\} + (x - x_1)(x - x_2)\{[x_1 x_2 x_3 x_4] + (x - x_3)\{[x_1 x_2 x_3 x_4] + \dots\}\}.$$

Последняя группа членов в большинстве случаев представляет собой лишь малую поправку, а члены в первой скобке уже вычислены на арифмометре. Желательно сохранять при расчетах на одну значащую цифру больше, чем дано в таблице, чтобы избежать ошибок округления.

Все остальные численные методы связаны с заменой $f(x)$ интерполяционным многочленом $P(x)$, степень которого на единицу меньше числа табличных данных. Вообще $f(x) \neq P(x)$, за исключением заданных точек, но их разность лежит в пределах, которые можно установить. Многочлен $P(x)$ представляет собой наиболее гладкую функцию, которая совпадает с $f(x)$ в заданных точках. Действительно, $d^n P(x)/dx^n = 0$ для всех x . Для любой другой функции это не имеет места.

9.013. В качестве примера использования изложенного метода возьмем неравномерно расположенные значения $\sin x^\circ$ и при помощи интерполяции получим таблицу с шагом в 5° . Исходные данные и соответствующие им разделенные разности представлены в следующей таблице

x	$\sin x^\circ$	f_1	f_2	f_3
0	0,0000			
13	0,2250	0,2250/13 = 0,01731	-0,00079/24 = -0,000033	-0,000030/37 = -0,0000008
24	0,4067	0,1817/11 = 0,01652	-0,00151/24 = -0,000063	-0,000031/41 = -0,0000008
		0,1951/13 = 0,01501		

37	0,6018	$-0,00282/30 = -0,000094$	$-0,000026/43 = -0,000000$
54	0,8090	$0,2072/17 = 0,01219$	$-0,00361/30 = -0,000120$
67	0,9205	$0,1115/13 = 0,00858$	$-0,00349/25 = -0,000140$
79	0,9816	$0,0611/12 = 0,00509$	$-0,000020/42 = -0,000000$
90	1,0000	$0,0184/11 = 0,00167$	$-0,000009/36 = -0,000000$

Ход интерполяции показан в следующей таблице. Во втором столбце таблицы стоит результат линейной интерполяции между двумя ближайшими табличными значениями. Третий столбец таблицы содержит поправку, учитывающую f_2 и f_3 .

x	Линейная интерполяция	Поправка	$\sin x^\circ$	Точные значения
5	0,08655	$-5 \times 8 (-0,000033 + 19 \times 0,0000008) = 40 \times 0,000318 = 0,00072$	0,08727	0,0872
10	0,17310	$-10 \times 3 (-0,000033 + 14 \times 0,0000008) = 30 \times 0,00022 = 0,00066$	0,17376	0,1735
15	0,25804	$-2 \times 9 (-0,000033 - 15 \times 0,0000008) = 18 \times 0,00045 = 0,00091$	0,25885	0,2583
20	0,34064	$-7 \times 4 (-0,000033 - 20 \times 0,0000008) = 28 \times 0,00052 = 0,00137$	0,34201	0,3420
25	0,42171	$-1 \times 12 (-0,000063 - 12 \times 0,0000008) = 12 \times 0,00073 = 0,00088$	0,42259	0,4226
30	0,49676	$-6 \times 7 (-0,000063 - 17 \times 0,0000008) = 42 \times 0,00077 = 0,00323$	0,49999	0,5000
35	0,57181	$-11 \times 2 (-0,000063 - 22 \times 0,0000008) = 22 \times 0,00081 = 0,00178$	0,57359	0,5736
40	0,63837	$-3 \times 14 (-0,000094 - 16 \times 0,0000008) = 42 \times 0,000104 = 0,00437$	0,64274	0,6428
45	0,69932	$-8 \times 9 (-0,000094 - 21 \times 0,0000008) = 72 \times 0,000107 = 0,00770$	0,70702	0,7071
50	0,76027	$-13 \times 4 (-0,000094 - 26 \times 0,0000008) = 52 \times 0,000110 = 0,00572$	0,76599	0,7660
55	0,81758	$-1 \times 12 (-0,000120 - 18 \times 0,0000005) = 12 \times 0,000129 = 0,00155$	0,81913	0,8192
60	0,86048	$-6 \times 7 (-0,000120 - 23 \times 0,0000005) = 42 \times 0,000132 = 0,00554$	0,86602	0,8660
65	0,90338	$-11 \times 2 (-0,000120 - 28 \times 0,0000005) = 22 \times 0,000134 = 0,00295$	0,90633	0,9063
70	0,93577	$-3 \times 9 (-0,000140 - 16 \times 0,0000002) = 27 \times 0,000143 = 0,00386$	0,93963	0,9397
75	0,96122	$-8 \times 4 (-0,000140 - 21 \times 0,0000002) = 32 \times 0,000144 = 0,00461$	0,96583	0,9659
80	0,98327	$-1 \times 10 (-0,000149 - 13 \times 0,0000002) = 10 \times 0,000152 = 0,00152$	0,98479	0,9848
85	0,99162	$-6 \times 5 (-0,000149 - 18 \times 0,0000002) = 30 \times 0,000153 = 0,00459$	0,99621	0,9962

Результаты интерполяции приведены в предпоследнем столбце. В последнем столбце стоят значения, взятые непосредственно из таблиц. Можно видеть, что разность между величинами в двух последних столбцах только в одном случае составляет единицу четвертого знака. Величину этой разности можно полностью объяснить тем, что как в исходных данных, так и в табличных значениях последнего столбца ошибка при отбрасывании пятой значащей цифры могла достигать половины единицы четвертого знака. При 45° вклад от f_3 достигает десяти единиц четвертого знака. Здесь ошибка в половину единицы в последней значащей цифре f_3 дает ошибку в 0,7 единицы четвертого знака интерполированного значения. При интерполяции с четырьмя знаками третьи разности играют роль только при таких сравнительно больших интервалах, как в настоящем примере.

Первые разности везде вычислялись по двум соседним значениям. Поэтому коэффициент при f_2 всегда отрицателен. Начиная с 15° , использованная вторая разность стоит в горизонтальной строке, соответствующей началу интервала. Вторая величина, участвовавшая в ее образовании, бралась из строки, предшествующей началу интервала. Следовательно, $x - x_3$, новый множитель при f_3 , положителен. Для первого интервала это невозможно. Используемая здесь вторая разность стоит в таблице против конца интервала и зависит от значения, заданного при 24° . Следовательно, в этом случае множитель при f_3 отрицателен.

Иногда удается повысить точность результатов, если в некоторых точках известна производная функции. Например, в нашем случае известно, что при 90° производная от $\sin x$ равна нулю. Это можно использовать, продолжив таблицу на одну строку:

x	$\sin x$	f_1	f_2	f_3
67	0,9250			
		0,00509		
79	0,9816		-0,000149	
		0,00167		-0,000003/23 = -0,0000001
90	1,0000		-0,000152	
		0,00000		
90	1,0000			

Теперь между 79 и 90° можно пользоваться формулой

$$\sin x = 1,0000 - 0,000152(x - 90)^2 - 0,0000001(x - 90)^2(x - 79).$$

9.02. Интерполяция при равноотстоящих узлах. Получать разделенные разности сравнительно трудно, но при неравных интервалах между заданными значениями аргумента и функций без них обойтись нельзя. При равных интервалах между значениями аргумента вычисление разделенных разностей можно заменить простым вычитанием. Существуют интерполяционные формулы двух видов. Это, с одной стороны, *формула Грегори* и так называемая *формула Грегори для интерполирования назад* и, с другой стороны, различные *формулы центральных разностей*. Формула Грегори соответствует способу, использованному в предыдущем примере около начала таблицы, а в формулах центральных разностей используются, насколько это возможно, разности, расположенные вблизи от одной и той же горизонтальной строки таблицы. Как и для разделенных разностей, лучше пользоваться, когда это возможно, формулами второго типа, так как при этом разности высоких порядков умножаются на меньшие числа.

При равноотстоящих узлах разности получаются следующими

$$\Delta y_r = y_{r+1} - y_r, \quad \Delta^2 y_r = \Delta y_{r+1} - \Delta y_r = y_{r+2} - 2y_{r+1} + y_r$$

и т. д. Каждая разность получается вычитанием последующего табличного значения из предыдущего. Такие обозначения наиболее удобны при пользовании формулой Грегори. При пользовании формулами центральных разностей или формулами для интерполяции назад удобнее применять другие обозначения. Но при любом выборе обозначений фактическая величина, стоящая в одном и том же месте следующей таблицы, та же самая:

		Нисходящие разности (forward differences)			Центральные разности (central differences)			Восходящие разности (backward differences)		
$x_0 - 2h$	y_{-2}	Δy_{-2}			$\delta y_{-3/2}$			∇y_{-1}		
$x_0 - h$	y_{-1}	$\Delta^2 y_{-2}$			$\delta^2 y_{-1}$			$\nabla^2 y_0$		
		Δy_{-1}	$\Delta^3 y_{-1}$		$\delta y_{-1/2}$	$\delta^3 y_{-1/2}$		Δy_0	$\nabla^3 y_1$	
x_0	y_0	$\Delta^2 y_{-1}$			$\delta y_{1/2}$	$\delta^2 y_0$		∇y_1	$\nabla^2 y_1$	$\nabla^3 y_2$
		Δy_0	$\Delta^3 y_0$		$\delta y_{1/2}$	$\delta^2 y_1$	$\delta^3 y_{1/2}$	Δy_1	$\nabla^2 y_2$	$\nabla^3 y_3$
$x_0 + h$	y_1	$\Delta^2 y_0$			$\delta y_{3/2}$	$\delta^2 y_1$		Δy_2	$\nabla^2 y_3$	
		Δy_1	$\Delta^3 y_1$		$\delta y_{3/2}$	$\delta^2 y_2$				
$x_0 + 2h$	y_2	$\Delta^2 y_1$								

Из способа построения таблицы ясно, что на соответствующих местах в таблице разделенных разностей стояли бы $\Delta y/h$ — первые разности, $\Delta^2 y/2h^2$ — вторые разности и $\Delta^n y/n! h^n$ — разности n -го порядка. Значит, при использовании разностей, вычисленных по $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$, формула Ньютона сразу дает

$$y(x_0 + \theta h) = y_0 + \theta h \frac{\Delta y_0}{h} + \theta h(\theta h - h) \frac{1}{2!} \frac{\Delta^2 y_0}{h^2} + \dots = y_0 + \theta \Delta y_0 + \frac{\theta(\theta - 1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{\theta(\theta - 1) \dots (\theta - n + 1)}{n!} \Delta^n y_0 + R_{n+1}, \quad (1)$$

где R_{n+1} определяется по формуле 9.012 (18) и имеет вид

$$\frac{\theta(\theta - 1) \dots (\theta - n)}{(n + 1)!} h^{n+1} \left(\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} \right)_{x=x_0}$$

Получилась формула Грегори, открытая им в 1670 г. Более общая формула Ньютона была опубликована в 1687 г. Видно, что формула Грегори принимает вид формулы биномиального ряда, причем на y_0 действует оператор $(1 + \Delta)^\theta$. Формуле

Грегори можно дать операторное истолкование. Если обозначить d/dx через D , то ряд Тейлора можно записать в виде

$$f(x + \alpha) = \left(1 + \alpha \frac{d}{dx} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} + \dots\right) f(x) = e^{\alpha D} f(x). \quad (2)$$

Если также написать

$$f(x + h) = E f(x) = (1 + \Delta) f(x) = e^{hD} f(x), \quad (3)$$

то получится

$$f(x + \theta h) = e^{\theta h D} f(x) = (1 + \Delta)^{\theta} f(x). \quad (4)$$

Операторы, возникающие в теории интерполяции, существенно отличаются от операторов в операционном исчислении Хевисайда. Здесь основным оператором служит D , а в исчислении Хевисайда — оператор p^{-1} , который не просто обратный по отношению к D , потому что они не коммутируют. Поэтому и обоснование действий с операторами совершенно различно. Разложение по степеням p^{-1} можно обосновать для значительно более широкого класса функций, чем разложение по степеням D . Бесконечный ряд Тейлора теряет смысл, если функция, на которую он действует, не имеет производных выше некоторого порядка в каких-либо точках рассматриваемого интервала. А ряд по p^{-1} требует только интегрируемости функций. В рассматриваемом случае обоснование опирается на то, что при интерполяции функция с точностью, определяемой низшей отброшенной разностью, заменяется многочленом $P(x)$. Все члены ряда Тейлора функции $P(x)$, содержащие D в степени n и выше, равны нулю, поскольку используются разности только порядка $n - 1$ и ниже. Поэтому в задачах интерполяции определенные действия со степенями D применимы, так как они производятся не над самими функциями, а над интерполяционными многочленами, которые представляют собой лишь приближение с известной точностью.

Формулу бинома можно вывести из формулы Грегори. Возьмем интервалы, равные единице, для показателя степени в $(1 + x)^n$ при заданном x . Таблица разностей имеет вид

n	$f(n)$	$\Delta f(n)$	$\Delta^2 f(n)$	$\Delta^3 f(n)$
0	1			
1	$1 + x$	x		
2	$(1 + x)^2$	$x(1 + x)$	x^2	
3	$(1 + x)^3$	$x(1 + x)^2$	$x^2(1 + x)$	x^3

Формула Грегори для $f(0)$ и соответствующих разностей дает

$$f(n) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r!} x^r (1 + \eta), \quad (5)$$

$$0 < \eta < \frac{n-r}{r+1} (1+x)^n x \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} \right\}^{r+1}.$$

Это формула бинорма для действительной дробной степени *).

9.03. В формуле Грегори для интерполирования назад используются разности, стоящие в таблице на восходящей диагонали, начинающейся с x_0 . В этом случае

$$f(x_0 + \theta h) = f_0 + \theta \Delta f_{-1} + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \Delta^2 f_{-2} + \dots \quad (6)$$

Эту формулу можно легко получить и операторным способом. Если обозначить

$$f(x_r) - f(x_{r-1}) = \nabla f(x_r), \quad (7)$$

то получится

$$E \nabla = \Delta = E - 1, \quad (8)$$

откуда

$$E = \frac{1}{1 - \nabla} \quad (9)$$

и

$$f(x + \theta h) = E^\theta f(x) = (1 - \nabla)^{-\theta} f(x), \quad (10)$$

или

$$f(x + \theta h) = f(x) + \theta \nabla f(x) + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f(x) + \dots \quad (11)$$

По существу, получена формула для экстраполяции, так как ее можно использовать для вычисления функции вне интервала значений, заданных в таблице. Конечно, как всегда при экстраполяции, точность понижается. То же самое относится и к формуле Грегори для $\theta < 0$.

*) По-видимому, установлено, что Грегори знал теорему Тейлора и пользовался ею еще в 1670 г. Следовательно, в это время он знал иной подход к формуле бинорма. Очевидно, он ошибочно считал, что теорема также известна Ньютону, и только поэтому не сделал публикации. Публикация Тейлора относится к 1712 г. Так называемая теорема Маклорена была опубликована в 1742 г. Поразительно, что между этими двумя датами никто не додумался положить $a=0$ в формуле Тейлора. Маклорен известен по трем более существенным результатам: независимому открытию разложения Эйлера — Маклорена, введению в гидродинамику „эллипсоида Маклорена“ и в механику систематического использования прямоугольных координат (см. [3—5]).

9.04. Если пользоваться обозначениями центральных разностей и выбрать разности, расположенные в таблице вдоль ломаной, наиболее близкой к горизонтали, то из формулы Ньютона получится

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + \theta h) &= f(x_0) + \theta h \frac{\delta f_{1/2}}{h} + \frac{\theta h (\theta h - h)}{2!} \frac{\delta^2 f_0}{h^2} + \frac{\theta h (\theta h - h) (\theta h + h)}{3!} \frac{\delta^3 f_{1/2}}{h^3} + \\
 &+ \frac{\theta h (\theta h - h) (\theta h + h) (\theta h - 2h)}{4!} \frac{\delta^4 f_0}{h^4} + \dots = \\
 &= f_0 + \theta \delta f_{1/2} + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta+1)}{3!} \delta^3 f_{1/2} + \\
 &+ \frac{\theta(\theta-1)(\theta+1)(\theta-2)}{4!} \delta^4 f_0 + \dots + \\
 &+ \frac{\theta(\theta-1)(\theta+1)\dots(\theta-n+1)(\theta+n-1)}{(2n-1)!} \delta^{2n-1} f_{1/2} + \\
 &+ \frac{\theta(\theta-1)(\theta+1)\dots(\theta-n+1)(\theta+n-1)(\theta-n)}{(2n)!} \delta^{2n} f_0 + \dots \quad (12)
 \end{aligned}$$

Это формула Ньютона — Гаусса. Можно, конечно, получить эквивалентную формулу с разностями $\delta f_{-1/2}$, $\delta^2 f_0$, $\delta^3 f_{-1/2}$, ... но она менее удобна для интерполяции между $\theta = 0$ и $\theta = 1$. Использование разностей, расположенных вдоль ломаной, делает формулу несколько неудобной для употребления. От этого можно избавиться тремя различными способами. Введем новое обозначение μ для среднего значения двух соседних чисел в одном и том же столбце таблицы. Пусть

$$\begin{aligned}
 \mu \delta f_0 &= \frac{1}{2} (\delta f_{-1/2} + \delta f_{1/2}), & \mu \delta^2 f_{1/2} &= \frac{1}{2} (\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1), \\
 \mu \delta^3 f_0 &= \frac{1}{2} (\delta^3 f_{-1/2} + \delta^3 f_{1/2})
 \end{aligned} \quad (13)$$

и т. д. Тогда формулу Ньютона — Гаусса можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + \theta h) &= f_0 + \theta \left(\delta f_{1/2} - \frac{1}{2} \delta^2 f_0 \right) + \frac{\theta^2}{2!} \delta^2 f_0 + \\
 &+ \frac{\theta(\theta^2-1)}{3!} \left(\delta^3 f_{1/2} - \frac{1}{2} \delta^4 f_0 \right) + \dots \\
 &\dots + \frac{\theta(\theta^2-1^2)(\theta^2-2^2)\dots\{\theta^2-(n-1)^2\}}{(2n-1)!} \left(\delta^{2n-1} f_{1/2} - \frac{1}{2} \delta^{2n} f_0 \right) + \dots, \\
 f(x_0 + \theta h) &= f_0 + \theta \mu \delta f_0 + \frac{\theta^2}{2!} \delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta^2-1)}{3!} \mu \delta^3 f_0 + \dots \\
 &\dots + \frac{\theta(\theta^2-1^2)(\theta^2-2^2)\dots\{\theta^2-(n-1)^2\}}{(2n-1)!} \mu \delta^{2n-1} f_0 + \\
 &+ \frac{\theta^2(\theta^2-1^2)(\theta^2-2^2)\dots\{\theta^2-(n-1)^2\}}{(2n)!} \delta^{2n} f_0 + \dots \quad (14)
 \end{aligned}$$

Это формула Ньютона — Стирлинга. Видно, что здесь требуется переписать таблицу разностей так, чтобы все величины стояли на тех же горизонтальных линиях, что и заданные значения функции. Четные разности остаются прежними, а нечетные заменяются средними значениями в соответствии с определением μ . Можно воспользоваться другим способом. При интерполировании между $\theta=0$ и $\theta=1$ можно нечетные разности оставить прежними, а четные заменить средними разностями с центром при $\theta=1/2$. Имеем

$$\delta^{2n+1}f_{1/2} = \delta^{2n}f_1 - \delta^{2n}f_0, \quad (15)$$

откуда

$$\delta^{2n}f_0 = \frac{1}{2} \delta^{2n}f_0 + \frac{1}{2} (\delta^{2n}f_1 - \delta^{2n+1}f_{1/2}) = \mu \delta^{2n}f_{1/2} - \frac{1}{2} \delta^{2n+1}f_{1/2}. \quad (16)$$

Следовательно, члены с δ^{2n} , δ^{2n+1} в формуле Ньютона — Гаусса можно записать в виде

$$\frac{\theta(\theta^2-1^2)(\theta^2-2^2)\{\theta^2-(n-1)^2\}(\theta-n)}{(2n)!} \left\{ \mu \delta^{2n}f_{1/2} - \frac{1}{2} \delta^{2n+1}f_{1/2} + \frac{\theta+n}{2n+1} \delta^{2n+1}f_{1/2} \right\}.$$

Выражение в фигурных скобках равно

$$\mu \delta^{2n}f_{1/2} \frac{\theta-1/2}{2n+1} \delta^{2n+1}f_{1/2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f(x_0 + \theta h) &= f_0 + \theta \delta f_{1/2} + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \mu \delta^2 f_{1/2} + \frac{\theta(\theta-1/2)(\theta-1)}{3!} \delta^3 f_{1/2} + \\ &+ \frac{\theta(\theta-1)(\theta+1)(\theta-2)}{4!} \mu \delta^4 f_{1/2} + \dots \\ \dots + \frac{\theta(\theta^2-1^2)\dots\{\theta^2-(n-1)^2\}(\theta-n)}{(2n)!} &\left(\mu \delta^{2n}f_{1/2} + \frac{\theta-1/2}{2n+1} \delta^{2n+1}f_{1/2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Это формула Ньютона — Бесселя *).

Следующая модификация формулы Ньютона — Гаусса получается исключением нечетных разностей при помощи (15). Получим

$$\begin{aligned} \delta^{2n}f_0 + \frac{\theta+n}{2n+1} (\delta^{2n}f_1 - \delta^{2n}f_0) &= \frac{\theta+n}{2n+1} \delta^{2n}f_1 + \frac{n+1-\theta}{2n+1} \delta^{2n}f_0 = \\ &= \frac{\theta+n}{2n+1} \delta^{2n}f_1 + \frac{\theta+n}{2n+1} \delta^{2n}f_0, \end{aligned}$$

*) На самом деле все три формулы принадлежат Ньютону. Вторая фамилия служит только для того, чтобы различать формулы. Библиографию см. в книге Пирсона [2]. Пирсон считает формулу Ньютона — Гаусса непригодной для вычислений, и действительно, эта формула никогда не употребляется. Но непосредственная связь с формулой Ньютона делает ее вывод особенно простым. Остальные формулы получаются из нее без труда.

где $\varphi = 1 - \theta$, и

$$\theta(\theta - 1) \dots (\theta + n - 1)(\theta - n) = \varphi(\varphi - 1) \dots (\varphi + n - 1)(\varphi - n).$$

Отсюда

$$f(x) = \left\{ \varphi f_0 + \frac{\varphi(\varphi^2 - 1^2)}{3!} \delta^2 f_0 + \frac{\varphi(\varphi^2 - 1^2)(\varphi^2 - 2^2)}{5!} \delta^4 f_0 + \dots \right\} + \\ + \left\{ \theta f_1 + \frac{\theta(\theta^2 - 1^2)}{3!} \delta^2 f_1 + \frac{\theta(\theta^2 - 1^2)(\theta^2 - 2^2)}{5!} \delta^4 f_1 + \dots \right\}. \quad (18)$$

Это формула Эверетта.

Каждая из полученных трех формул имеет свои преимущества. В формуле Ньютона — Стирлинга, содержащей разности с центром в x_0 , четные разности умножаются на четные функции θ , а нечетные — на нечетные функции θ . Следовательно, при вычислении значений для θ , равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку, можно отдельно суммировать члены с четными и нечетными разностями, а затем значения $f(x_0 \pm \theta h)$ получить простым сложением и вычитанием, т. е. тремя поворотами ручки арифмометра. Формула Ньютона — Стирлинга удобна также и для получения выражений производной функции для табличных значений аргумента. Преимущество формулы Ньютона — Бесселя состоит в том, что в ней все нечетные разности, кроме первой, умножаются на функции, которые обращаются в нуль при $\theta = 1/2$. Для сравнения с формулой Ньютона — Стирлинга отметим, что наибольшее значение $|\theta(\theta^2 - 1)|$ для $0 < \theta \leq 1/2$ составляет $3/8$, а наибольшее значение $\theta(\theta - 1)(\theta - 1/2)$ лишь 0,048. Значит, при отбрасывании третьих разностей, формула Ньютона — Бесселя в семь раз точнее. Другими словами, если желательно, чтобы ошибка не превосходила половины единицы последнего знака, то можно отбрасывать третьи разности, меньшие 60 единиц того же знака. В практических расчетах часто требуется удерживать вторые разности, а иногда нужны и третьи разности. Но потребность в третьих разностях значительно уменьшается, если их отчасти включить во вторые разности, используя средние вторые разности и формулу Ньютона — Бесселя. В этом случае удобно составить таблицу разностей несколько по-другому. Заметим, что

$$\mu \delta^2 f_{1/2} = \frac{1}{2} (\delta^2 f_1 + \delta^2 f_0) = \frac{1}{2} (\delta f_{3/2} - \delta f_{1/2} + \delta f_{1/2} - \delta f_{-1/2}) = \\ = \frac{1}{2} (\delta f_{3/2} - \delta f_{-1/2}) \quad (19)$$

и, следовательно, равна полуразности первых разностей, взятых сразу после и непосредственно перед интервалом, в котором производится интерполирование. Поэтому можно не вы-

писывать столбец вторых разностей в явном виде. Запишем формулу Бесселя с точностью до вторых разностей в виде

$$f(x_0 + \theta h) = f_0 + \theta \delta f_{1/2} - \frac{1}{4} \theta (1 - \theta) (\delta^2 f_{3/2} - \delta^2 f_{-1/2}). \quad (20)$$

Последний множитель, получающийся путем вычитания одной первой разности из другой, стоит вместо второй разности. Функция от θ с шагом 0,1 приводится в следующей таблице:

θ	$-\frac{1}{4} \theta (1 - \theta)$
0,0, 1,0	0,0000
0,1, 0,9	-0,0225
0,2, 0,8	-0,0400
0,3, 0,7	-0,0525
0,4, 0,6	-0,0600
0,5,	-0,0625

Более подробная таблица дана Милн-Томсоном и Комри [6].

Формула Эверетта при сохранении вторых разностей полностью учитывает третьи разности и в этом отношении она даже лучше формулы Ньютона — Бесселя. Коэффициенты при вторых и четвертых разностях следующие:

θ	$-\frac{1}{6} \theta (1 - \theta^2)$	$\frac{1}{120} \theta (1 - \theta^2) (4 - \theta^2)$
0,0	—0	0
0,1	—0,0165	0,00329
0,2	—0,0320	0,00634
0,3	—0,0455	0,00830
0,4	—0,0560	0,01075
0,5	—0,0625	0,01172
0,6	—0,0640	0,01165
0,7	—0,0595	0,01044
0,8	—0,0480	0,00806
0,9	—0,0285	0,00455
1,0	0	0

Принимая во внимание, что обычно соседние значения $\delta^4 f$ почти одинаковы, видим, что $\delta^4 f$ может достигать значения 20 единиц некоторого десятичного знака и давать при этом вклад, меньший 0,5 единицы того же знака в точке интерполяции. Вторые разности нужно принимать во внимание, если они превосходят четыре единицы рассматриваемого знака. При пользовании формулой Бесселя следует удерживать третьи разности,

превышающие 60 единиц этого десятичного знака. Но тогда лучше уж пользоваться формулой Эверетта.

Другой способ, известный как „метод отбрасывания“ (throw-back method), полезно сочетать с формулой Эверетта. В этой формуле коэффициенты при каждой разности сохраняют знак во всем интервале $0 < \theta < 1$. В частности, коэффициент при четвертой разности отличается от коэффициента при второй разности на множитель $(4 - \theta^2)/20$, который при изменении θ изменяется лишь в $3/4$ раза. Следовательно, четвертые разности можно в значительной степени учесть путем надлежащей модификации вторых разностей. Комри [7] показал, что если в формулу Эверетта вместо δ^2 подставлять $\delta^2 - 0,184\delta^4$, то погрешность интерполирования не превосходит половины единицы, если только сама разность δ^4 не превышает 1000 единиц. При составлении математических таблиц Британской Ассоциации (British Association Mathematical Tables) подобный прием широко использовался для модификации δ^4 , чтобы частично учесть δ^6 и т. д.

Как указал Комри, метод отбрасывания можно применить и к формуле Бесселя. В этой формуле отношение коэффициента при четвертой разности к коэффициенту при второй разности равно $\frac{1}{12}(\theta + 1)(\theta - 2)$ и может изменяться от $-1/6$ до $-3/16$. Здесь изменение даже меньше, чем для соответствующего отношения в формуле Эверетта. Отношение коэффициентов при пятой и третьей разностях равно

$$\frac{1}{20}(\theta + 1)(\theta - 2).$$

Следовательно, если нельзя пренебречь четвертой и пятой разностью, то выгодно принять

$$f(x_0 + \theta h) = f_0 + \theta \delta f_{1/2} + \frac{-\theta(\theta - 1)}{2} (\mu \delta^2 f_{1/2} - 0,184 \mu \delta^4 f_{1/2}) + \\ + \frac{\theta(\theta - \frac{1}{2})(\theta - 1)}{6} (\delta^3 f_{1/2} - 0,108 \delta^5 f_{1/2}).$$

Во многих математических таблицах напечатаны готовые разности. Первые разности даются для линейной интерполяции. Однако обычный вид таблицы разностей с нечетными разностями в промежуточных строках представляет трудности для печатания, если нужно поместить вторые и третьи разности. В этом отношении имеет большое преимущество формула Эверетта, поскольку в ней используются только четные разности,

так что только их и надо печатать и они располагаются на тех же строках, что и табличные данные.

9.041. Сравнение разных интерполяционных формул. Если потребовать, чтобы вклад наименьшей отброшенной разности не превосходил половины единицы последнего знака, то при таблице с равноотстоящими данными в зависимости от обстоятельств удобнее всего пользоваться следующими формулами:

1) Около начала или конца таблицы, где у одного из концов интервала нельзя найти центральную вторую разность, нет никакой другой возможности, кроме как пользоваться формулой Грегори. 2) Если третьи разности не превосходят 60 единиц последнего знака, а вторые разности превышают 4 единицы, то намного удобнее другая формула Бесселя со средними вторыми разностями. 3) Если третьи разности превосходят 60 единиц, а четвертые разности не превышают 1000 единиц, то вполне подходит формула Эверетта, модифицированная по методу отбрасывания. 4) При четвертых разностях большей величины нужно непосредственно учитывать δ^4 и, возможно, также разности более высоких порядков; полное обсуждение последнего случая содержится в введении к первому тому математических таблиц Британской Ассоциации.

Условия, рассмотренные в третьем случае и, тем более в четвертом, осуществляются в таблицах функций с большим числом знаков. В этом случае даже при интерполировании по формуле Бесселя со вторыми разностями требуются меньшие интервалы, чем заданные в таблице. Тогда остается только использовать имеющиеся большие интервалы, при которых требуются разности более высоких порядков. В таких случаях интерполяция с четвертыми разностями дает десять верных знаков, а линейная не дает и трех.

Здесь следует упомянуть о применении формулы Тейлора. В ней фигурируют значения функции и ее производных в одном и том же узле таблицы, и поэтому ее использование с трудом можно назвать интерполяцией. Но если производные известны, то для заданного интервала формула Тейлора позволяет получить большую точность при том же числе членов. При использовании формулы с разделенными разностями задание производных до n -го порядка в одном из узлов эквивалентно заданию $n + 1$ -го значения функции и их разделенных разностей в том же узле. При этом соответствующие члены в интерполяционной формуле совпадают с членами формулы Тейлора. Подобную информацию невозможно использовать при интерполяции с равными интервалами между узлами.

Обычно разность $\mu\delta^{2n+1}f_0$ близка к $f^{(2n+1)}(x_0)h^{2n+1}$ и для малых θ коэффициент при ней в формуле Ньютона — Стирлинга близок к $\theta \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. Поэтому весь член близок к $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \times \times h^{2n+1}\theta f^{(2n+1)}(x_0)$ и при $|\theta| < 1$, даже при сравнительно небольших n , он намного больше соответствующего члена ряда Тейлора, равного $\frac{h^{2n+1}\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)$. Следовательно, если известны производные, то нет смысла в использовании каких-либо интерполяционных формул. Они нужны в тех случаях, когда все сведения о функции получаются только из самих табличных данных.

9.041а. Интерполяция при заданных значениях первой производной. Если заданы $f(0)$, $f(h)$, $f'(0)$, $f'(h)$, то, используя такой же прием, как в конце **9.013**, можно составить таблицу разделенных разностей и вывести следующую формулу:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(0) + \frac{f(h) - f(0)}{h} x + \left[\frac{1}{h^2} \{f(h) - f(0)\} - \frac{1}{h} f'(0) \right] x(x-h) + \\ &+ \left[\frac{1}{h^2} \{f'(h) + f'(0)\} - \frac{2}{h^3} \{f(h) - f(0)\} \right] x^2(x-h) = \\ &= f(0) + \{f(h) - f(0)\} \left(\frac{3x^2}{h^2} - \frac{2x^3}{h^3} \right) + f'(0) \frac{x(x-h)^2}{h^2} - f'(h) \frac{x^2(h-x)}{h^2}. \end{aligned}$$

Можно проверить, что эта формула дает правильные результаты при $f = 1$, x , x^2 и x^3 . При $f = x^4$ максимальная ошибка на интервале $(0,1)$ равна $-0,0625$. Максимальная ошибка при использовании формулы Бесселя с третьими разностями (которая требует такого же числа данных) равна $-0,5625$.

Если известны значения f' при табличных значениях x , то использование этой формулы дает следующие преимущества:

1) Она имеет большую точность, чем любая из формул, использующих только значения f .

2) Для нее не требуются данные вне отрезка интерполирования, и поэтому ее, в отличие от формул центральных разностей, можно использовать для крайних интервалов.

3) Если f и f' заданы через равные интервалы по x и требуется вычислять интегралы вида $\int x^r f(x) dx$, а эти интервалы слишком велики и обычные формулы интегрирования не дают нужной точности, то можно добиться достаточной точности с теми же формулами интегрирования, переходя к половинному интервалу по вышеприведенной формуле.

4) Значения f и f' могут быть заданы через неравные интервалы по x . Тогда эту формулу можно использовать для интерполирования к равным интервалам с гораздо меньшими затруднениями и потерей точности, чем при употреблении центральных разностей.

9.042. Следующий пример иллюстрирует применение формулы Бесселя. По заданным значениям $x^{1/2}$ в узлах $x = 2, 3, 4, 5, 6$ найти значения этой функции между $x = 3$ и $x = 4$. Таблица разностей имеет вид:

x	\sqrt{x}	Δf	$\Delta^2 f$	$2\mu\delta^2$
2,0	1,414			
		+0,318		
3,0	1,732		-0,050	
		+0,268		-0,082
4,0	2,000		-0,032	
		+0,236		-0,055
5,0	2,236		-0,023	
		+0,213		
6,0	2,440			

По вторым разностям видно, что третьи разности не превосходят 20 единиц последнего знака. Следовательно, можно пользоваться формулой Бесселя со вторыми разностями. Сначала сделаем линейную интерполяцию с интервалом 0,1. Затем будем умножать удвоенную среднюю вторую разность $-0,082$ ($=0,050 - 0,032 = 0,236 - 0,318$) на коэффициенты $-\frac{1}{4}\theta(1-\theta)$ из вышеприведенной таблицы и прибавлять к результатам линейной интерполяции (заметьте, что во всех формулах коэффициент при второй разности отрицателен):

x	Линейная интерполяция	Точное значение
3,1	1,7588 + 0,0018 = 1,7606	1,761
3,2	1,7856 + 0,0033 = 1,7889	1,789
3,3	1,8124 + 0,0043 = 1,8167	1,817
3,4	1,8392 + 0,0049 = 1,8441	1,844
3,5	1,8660 + 0,0051 = 1,8711	1,871
3,6	1,8928 + 0,0049 = 1,8977	1,897
3,7	1,9196 + 0,0043 = 1,9239	1,924
3,8	1,9464 + 0,0033 = 1,9497	1,949
3,9	1,9732 + 0,0018 = 1,9750	1,975

Ошибка нигде не превосходит единицы третьего знака после запятой. На первый взгляд удивительно, что такое хорошее согласие может быть при использовании постоянной второй разности, ведь вторые разности в начале и конце интервала относятся почти как 3 : 2. Однако средняя вторая разность должна

давать согласие в начале, середине и конце каждого интервала, причем ошибки не могут накапливаться.

9.043. Следующий, более трудный пример, иллюстрирует применение формулы Эверетта:

x	$\operatorname{ctg} x^\circ$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	Δ^4	$\delta^2 f$ (модиф.)
30	1,7321					
35	1,4281	-0,3040				
40	1,1918	-0,2363	+0,0677			
45	1,0000	-0,1918	+0,0445	-0,0232	+0,0096	+0,0427
50	0,8391	-0,1609	+0,0309	-0,0136	+0,0047	+0,0300
55	0,7002	-0,1389	+0,0220	-0,0089	+0,0030	+0,0214
60	0,5774	-0,1228	+0,0161	-0,0059		

Величина третьих разностей не позволяет пользоваться формулой Бесселя с разностями лишь до второго порядка. Но при пользовании формулой Эверетта четвертые разности можно включить во вторые методом отбрасывания. Для образования модифицированной второй разности каждую четвертую разность нужно умножить на 0,184 и вычесть из второй разности, стоящей в той же строке. Модифицированные разности, умноженные на коэффициенты формулы Эверетта, вместе с линейным интерполированием дают

x	$\operatorname{ctg} x^\circ$	Точное значение
41	1,15344 - 0,00205 - 0,00096 = 1,1504	1,1504
42	1,11508 - 0,00273 - 0,00168 = 1,1107	1,1106
43	1,07672 - 0,00239 - 0,00192 = 1,0724	1,0724
44	1,03836 - 0,00137 - 0,00144 = 1,0356	1,0355
45	1,00000 = 1,0000	1,0000
46	0,96782 - 0,00144 - 0,00068 = 0,9657	0,9657
47	0,93564 - 0,00192 - 0,00120 = 0,9325	0,9325
48	0,90346 - 0,00168 - 0,00137 = 0,9004	0,9004
49	0,87128 - 0,00096 - 0,00103 = 0,8693	0,8693

Несмотря на сравнительно большую величину высших разностей, различие в единицу последнего знака получилось только дважды. Вклад $\delta^4 f$ заметно больше единицы последнего знака, но он правильно учтен методом отбрасывания. Отметим, что поправки симметричны относительно 45° . При большой интерполяции это вдвое уменьшает расчеты по формуле Эверетта; соответствующее упрощение есть для формулы Ньютона — Стирлинга и для формулы Ньютона — Бесселя.

9.044. Если в первоначальном виде функция задана в беспорядочно разбросанных и далеких друг от друга узлах (так часто бывает с экспериментальными данными), а требуется подробная таблица, то обычный путь состоит в следующем: сначала при помощи интерполяции с разделенными разностями переходят к равным интервалам, с тем чтобы между последовательными заданными значениями в среднем попадало по два узла; затем при помощи формулы Бесселя или формулы Эверетта интерполируют до таких интервалов, чтобы была возможна линейная интерполяция. Следовать ли таким путем или сразу производить всю интерполяцию при помощи разделенных разностей — дело удобства. Подробные таблицы коэффициентов формул Бесселя и Эверетта с шагом 0,001 по θ изданы Томпсоном [8], Чаппелом [9], Комри [10] и Бриггсом и Ловзном [11]. Обычно для интерполяции достаточно табличных значений коэффициентов, приведенных выше. Но если требуется только несколько значений коэффициентов, то подробные таблицы дают их с одной ошибкой округления вместо двух. С другой стороны, эту трудность можно существенно ослабить, производя предварительную интерполяцию с добавочным знаком. Обычно математические таблицы дают точность в половину единицы последнего знака, и при их использовании, если вычисления ведутся в несколько шагов, чтобы предотвратить накопление ошибок округления, часто имеет смысл удерживать лишний знак. Допущение ошибки до 3 единиц последнего знака в некоторых из изданных таблиц имеет серьезные основания. Пятизначные таблицы с такими ошибками точнее, чем четырехзначные с ошибками до 0,5 последнего знака, и интерполирование по ним не более трудоемкая операция. Подобный прием фактически использован в таблицах Милн-Томсона и Комри, которые напечатаны с четырьмя знаками после запятой, но при поправке между $+1/6$ и $+1/2$ последнего знака добавлена точка сверху, а при поправке от $-1/6$ до $-1/2$ — точка снизу. Так, если 0,0008' читать как 0,00083, а 0,0008. — как 0,00077, то этими таблицами можно пользоваться как пятизначными и при интерполировании не нужно удерживать больше знаков, чем это требуется для предотвращения ошибок округления в последнем знаке при пользовании обычными четырехзначными таблицами.

Общепринято округлять не с недостатком, а до ближайшего целого числа в последнем знаке. Это предотвращает накопление ошибок округления одного знака при суммировании. Если первая отбрасываемая цифра — пять, то обычно в последнем сохраняемом знаке берут ближайшее четное число.

9.045. Интерполяция при неограниченной производной. Следует помнить, что ограничения, которые накладывает на точность интерполяционных формул поведение высших производных функции, нетривиальны. Это очевидно в случае, когда сама функция бесконечна в некоторой точке рассматриваемого интервала. Разности, содержащие значения функции в этой точке, бесконечны, и весь метод не проходит. Но также существенна неограниченность производной, как, например, для функции $x^{1/2}$ при $x = 0$. Имеем следующую таблицу разностей:

x	$x^{1/2}$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	0,000				
1	1,000	+ 1,000			
2	1,414	+ 0,414	- 0,586	+ 0,490	
3	1,732	+ 0,318	- 0,096	+ 0,046	- 0,444
4	2,000	+ 0,268	- 0,050		

Попробуем найти значение при $x = 0,5$ интерполяцией по формуле Грегори. Имеем

$$\begin{aligned}
 0,5000 + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)}{2} (-0,586) + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right)}{6} (0,490) + \\
 + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \left(\frac{1}{2} - 3 \right) (-0,444)}{24} + \dots = \\
 = 0,5000 + 0,0732 + 0,0306 + 0,0172 + \dots = 0,6210 + \dots
 \end{aligned}$$

Точное значение равно 0,7071. Даже с четвертыми разностями не удалось получить сносного приближения. Для успеха процесса интерполяции необходимо, чтобы во всем интервале, используемом для образования разностей, существовали производные вплоть до порядка, равного порядку высшей разности, сохраняемой в интерполяционной формуле.

Эту трудность часто можно обойти изменением $f(x)$. Так, хотя функция $\operatorname{ctg} x^\circ$ неограничена при $x = 0$, функция $x \operatorname{ctg} x^\circ$ имеет конечный предел, равный 57,30, и производные этой функции конечны. Если $\operatorname{ctg} x^\circ$ задан для ряда значений x , то можно интерполировать $x \operatorname{ctg} x^\circ$ и затем делить на x . Или, $\operatorname{Arch}(1+x)$ вблизи от $x = 0$ ведет себя как $(2x)^{1/2}$; но можно интерполировать его квадрат, а затем извлекать квадратный корень.

9.05. Обратная интерполяция; решение уравнений. Процесс обратной интерполяции полезен в том случае, когда значения функции заданы для равноотстоящих значений аргумента и требуется узнать, при каких значениях аргумента функция равна заданной величине [12]. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = x^3 - 3x - 7 = 0.$$

У него есть корень, лежащий между +2 и +3. Можно начать с вычисления значений функции при $x = 2, 2,1, \dots, 3,0$ или при $x = 2, 2,2, \dots, 3,0$ и затем интерполировать для промежуточных точек, причем третья разность будет несущественна. Находим

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
2,2	-2,952			
		+1,219		
2,3	-1,733		+0,138	
		+1,357	+0,144	+0,006
2,4	-0,376		+1,501	+0,006
		+1,651	+0,150	+0,006
2,5	+1,125		+1,807	
		+1,651	+0,156	
2,6	+2,776			
		+1,807		
2,7	+4,583			

Постоянство $\Delta^3 f(x)$ служит контролем правильности вычислений. Ясно, что корень расположен вблизи от 2,425. Интерполируем по формуле Эверетта с наибольшей возможной точностью. Получим

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2,40		-0,37600	
			+0,14352
2,41	-0,2259 - 0,00410 - 0,00248 = -0,23248		+0,14497
			+0,14642
2,42	-0,0758 - 0,00691 - 0,00480 = -0,08751		+0,14787
			+0,14934
2,43	+0,0743 - 0,00857 - 0,00682 = +0,05891		
2,44	+0,2244 - 0,00922 - 0,00840 = +0,20678		
2,45	+0,3745 - 0,00900 - 0,00938 = +0,35612		

Теперь третьи разности не играют роли; корень расположен вблизи от 2,426. Интерполируем по формуле Бесселя следующим образом:

x	$f(x)$
2,425	-0,01430 - 0,00018 = -0,01448
2,426	+0,00034 - 0,00017 = +0,00017

Вклад от второй разности почти постоянный. Имеем

$$x = 2,425 + 0,001 \times \frac{0,01448}{0,01465} = 2,4259884$$

с возможной ошибкой в последнем знаке.

Иначе можно интерполировать между 2,4 и 2,5 с использованием средней второй разности. Пренебрежение третьими разностями может дать ошибку 0,0001 в $f(x)$ и можно ожидать ошибку 0,000007 в x . В большинстве случаев такая точность достаточна.

Подобные способы применимы не только к алгебраическим уравнениям. Они позволяют, например, составить таблицу $\arcsin x$ по заданной таблице $\sin x$.

Для алгебраических уравнений полезен также следующий метод. Положим в рассматриваемом уравнении

$$x = 2 + x_1.$$

Тогда

$$-f(x) = 7 + 3(2 + x_1) - (8 + 12x_1 + 6x_1^2 + x_1^3) = 5 - 9x_1 - 6x_1^2 - x_1^3 = 0.$$

Теперь положим $x_1 = 0,4 + x_2$. Уравнение принимает вид

$$+0,376 + 14,28x_2 - 7,2x_2^2 - x_2^3 = 0.$$

Перепишем его в виде

$$14,28x_2 = +0,376 - 7,2x_2^2 - x_2^3$$

и положим в правой части $x_2 = +0,026$. Правая часть будет равна +0,3711152, что дает следующее приближение $x_2' = +0,02598846$. Испытаем теперь $x_2 = +0,0259$; правая часть делается равной +0,3711528, $x_2' = +0,02599109$. Линейная интерполяция дает для

$$x_2 = 0,02599 \text{ значение } x_2' = 0,02598872,$$

а при непосредственном вычислении $x_2' = 0,02598872$. Это оправдывает линейную интерполяцию. Окончательно, интерполируя для $x_2 = 0,025989$, имеем $x_2' = 0,02598875$. Тогда

$$x = 2,42598875.$$

В принципе этот метод*) совпадает со способом, обычно называемым способом Горнера, но он ближе к одному из методов, предложенных Ньютоном. Вклад Горнера, как представляется, состоит в введении алгебраического деления, приема, полезного в подобающем случае. Но опыт его применения не подтверждает мнение, что простейший способ прибавить 3×4 состоит в прибавлении по 4 тремя отдельными операциями. Одно из больших преимуществ отсутствия умножения корней на 10 на каждом этапе вычислений состоит в том, что коэффициент при первой степени неизвестной мало меняется на последующих стадиях вычислений, и поэтому легче видеть, какие высшие степени можно отбросить при требуемой точности (см. также [17—19]).

9.06. Контроль по разностям. Если функция задана с малым шагом, то высшие разности быстро убывают. Если значения функции найдены независимо, то составление разностей дает поэтому простую проверку правильности вычислений. В общем высшие разности не должны равняться нулю, так как табличные значения обычно имеют положительные или отрицательные ошибки до 0,5 последнего знака. Следовательно, ошибка Δf может достигать целой единицы, а для

$$\delta^2 f_0 = f_1 - 2f_0 - f_1, \quad \delta^3 f_{1/2} = f_2 - 3f_1 + 3f_0 - f_{-1},$$

$$\delta^4 f_0 = f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}$$

*) Этот метод преобразования уравнения дан Ньютоном в [13] и проиллюстрирован на примере уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$. В первой статье Горнера [14] алгебраическое деление не использовалось; он применил другой способ преобразований. Алгебраическое деление Горнер ввел и применил к этой задаче в серии последующих статей [15]. Он не умножал корни на 10 на каждом этапе вычислений. Он подчеркивал важность того, что на первых шагах вычислений каждый раз получается один знак, и в этом, может быть, состоит его основная заслуга. Случайно оказалось, что вещественный корень уравнения в иллюстративном примере Ньютона очень близок к $+2,10$. Следовательно, по одному этому примеру невозможно узнать, пытался ли Ньютон сразу найти несколько первых знаков или не пытался. Ньютон поступал так на последующих этапах вычислений, когда можно было пренебречь высшими степенями, но так же поступал и Горнер.

Из статей Горнера видно, что метод Ньютона был полностью забыт. Когда Горнер упоминал „метод Ньютона“, то он подразумевал метод последовательных приближений, предложенный в „Началах“ (Lib. 1, Prop. 23) в геометрической форме для решения уравнения $\varphi - e \sin \varphi = N$ (при заданных e и N) и до сих пор известный как метод Ньютона. Кажется, Рафсон первым применил его к алгебраическим уравнениям. В этом методе определение первых знаков не облегчает нахождение последующих. Для трансцендентных уравнений такое облегчение лучше всего обосновывается методом обратной интерполяции.

достигает соответственно двух, четырех и восьми единиц. Возьмем, например, ряд значений из таблицы натуральных логарифмов Боттомли:

x	$\ln x$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
7,00	1,9459				
		+14			
7,01	1,9473		+1		
		+15		-2	
7,02	1,9488		-1		+3
		+14		+1	
7,03	1,9502		0		-1
		+14		0	
7,04	1,9516		0		0
		+14		0	
7,05	1,9530		0		+1
		+14		+1	
7,06	1,9544		+1		-3
		+15		-2	
7,07	1,9559		-1		+3
		+14		+1	
7,08	1,9573		0		-1
		+14		0	
7,09	1,9587		0		
		+14			
7,10	1,9601				

Разности не требуют никаких замечаний. При интерполировании такой таблицы попытка привлечения разностей выше первых не только не дает никакого выигрыша, но приводит к заметной потере точности. В двух последовательных табличных значениях ошибки округления могут иметь один и тот же знак и тогда их никак нельзя уменьшить. Но если в последовательных табличных значениях ошибки округления противоположных знаков, то ошибки линейной интерполяции будут промежуточными и в целом меньшими, чем ошибки табличных значений. Чтобы этот эффект стал виден, возьмем значения с интервалом 0,02, округлим их до третьего знака и посмотрим, что случится, если мы попытаемся сохранить вторые разности при вычислении значений на серединах интервалов

x	$\ln x$	Δf	$\Delta^2 f$
7,00	1,946		
		+3	
7,02	1,949		0
		+3	
7,04	1,952		-1
		+2	
7,06	1,954		+1
		+3	
7,08	1,957		0

x	$\ln x$	Δf	$\Delta^2 f$
7,10	1,960	+3	0
7,12	1,963	+3	0
7,14	1,966	+3	-1
7,16	1,968	+2	+1
7,18	1,971	+3	0
7,20	1,974	+3	

Результаты линейной интерполяции с точностью до четвертого знака, поправки Бесселя и точные значения помещены в таблице:

x	$\ln x$	Точное значение	Ошибка	x	$\ln x$	Точное значение	Ошибка		
7,01	1,9475	0	1,9473	+2	7,11	1,9615	0	1,9615	0
7,03	1,9505	+1	1,9502	+3	7,13	1,9645	+1	1,9643	+2
7,05	1,9530	0	1,9530	0	7,15	1,9670	0	1,9671	-1
7,07	1,9555	-1	1,9559	-4	7,17	1,9695	-1	1,9699	-4
7,09	1,9585	0	1,9587	-2	7,19	1,9725	0	1,9727	-2

Линейная интерполяция содержит ошибку только в последнем знаке, причем она нигде не превышает 5. Поправки Бесселя составляют не более 0,6 единицы последнего знака, а в ряде случаев отсутствуют; но во всех четырех случаях, в которых поправки Бесселя отличны от нуля, они увеличивают ошибку. Это общий результат: он относится также и к высшим разностям; ошибки интерполированных значений в целом несколько меньше, чем ошибки табличных значений. Но выигрыш при интерполяции уменьшается при учете вклада n -х разностей, меньших 2^{n-1} в последнем знаке [20].

Это утверждение относится к интерполяции между двумя соседними значениями. Во многих изданиях таблиц напечатаны разности, усредненные по целому табличному столбцу. Если ими пользоваться, то тенденция к взаимному погашению соседних ошибок исчезает и вместо этого каждое интерполированное значение содержит три почти независимые ошибки: за счет округления табличных данных и напечатанных разностей и за счет изменения разности вдоль таблицы. Усредненные разности несколько облегчают труд, если ошибки в последнем знаке считаются несущественными. В противном случае средними разностями пользоваться нельзя.

Составление разностей часто сразу обнаруживает арифметическую ошибку. Примем, например, что одно табличное значение в следующей таблице $\ln x$ переписано неправильно:

f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
1,9459	+14			
1,9473	+15	+1		
1,9488	+14	-1	-2	+2
1,9502	+13	-1	0	+3
1,9515	+15	+2	+3	-6
1,9530	+14	-1	-3	
1,9544				

Большая четвертая разность (хотя она возможна и лишь при одних ошибках округления) выделяет неправильное значение $f(x)$.

9.07. Дифференцирование. Интерполяционные формулы Ньютона и Грегори можно сразу дифференцировать. Имеем

$$\left[\frac{d}{dx} (f(x)) \right]_{x=x_1} = [x_1 x_2] + (x_1 - x_2) [x_1 x_2 x_3] + \dots, \quad (1)$$

$$h \frac{d}{dx} f(x) = \Delta y_0 + \frac{2\theta - 1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3\theta^2 - 6\theta + 2}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \quad (2)$$

Первой формулой пользуются не очень часто, поскольку она дает производную только при табличных значениях аргумента. Если требуются производные при промежуточных значениях аргумента, то проще проинтерполировать функцию к равным интервалам при помощи разделенных разностей и к результатам применить одно из правил, относящееся к интерполяции равноотстоящих данных. Для равных интервалов наиболее полезно выражение получается дифференцированием формулы Ньютона — Стирлинга, так как в ней все четные разности умножаются на θ^2 и в выражении для производной дают члены, равные нулю при табличных значениях аргумента. Имеем

$$\left[h \frac{d}{dx} f(x) \right]_{x=x_0} = \mu \delta f_0 - \frac{1}{3!} \mu \delta^3 f_0 + \dots + \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!} \mu \delta^{2n+1} f_0 + \dots \quad (3)$$

К этой формуле, конечно, относится то же ограничение, которое накладывалось на интерполяционную формулу с центральными разностями, — она не применима вблизи начала или конца таблицы.

Табличные ошибки в значениях функции обычно одного порядка при всех значениях аргумента x . Поэтому точность правой части формулы (3) не зависит от интервала. Но в левой части стоит множитель h . Следовательно, можно увеличить точность, используя большие интервалы, даже если при этом нужно учитывать высшие разности. Рассмотрим $\sin x$ при $x = 1,0$, где x выражено в радианах. Таблицы Милн-Томсона и Комри составлены с шагом 0,001, и первые разности над и под значением 1,000 соответственно равны +0,0006 и +0,0005. На основании этого можно лишь сказать, что, по-видимому, производная лежит между 0,5 и 0,6. Если же использовать интервал 0,01, то получится

x	$\sin x$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\mu\delta$	$\mu\delta^3$
0,980	0,8305					
		+55				
0,990	0,8360		0			
		+55		-2		
1,000	0,8415		-2		0,0054	0,0000
		+53		+2		
1,010	0,8468		0			
		+53				
1,020	0,8521					

Тогда $0,001 f' = 0,0054$ и $f' = 0,54$. Но $\mu\delta$ может содержать ошибку в половину единицы последнего знака и можно только сказать, что $0,535 \leq f' \leq 0,545$.

Испытаем теперь интервалы в 0,1:

x	$\sin x$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\mu\delta$	$\mu\delta^2$
0,8	0,7174					
		+659				
0,9	0,7833		-77			
		+582		-8		
1,0	0,8415		-85		+539,5	-6
		+497		-4		
1,1	0,8912		-89			
		+408				
1,2	0,9320					

Получим $0,1 f' = 0,05395 + 0,00010$, $f' = 0,5405$ с возможной ошибкой в 0,0005. Точное значение равно 0,5403.

Вторые производные можно найти, дважды дифференцируя формулу Ньютона — Стирлинга и полагая $\theta = 0$. Имеем

$$h^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} f(x) \right]_{x=x_0} = \delta^2 f_0 - \frac{1}{4!} 2\delta^4 f_0 + \dots + \frac{(-)^{n-1} \{(n-1)!\}^2}{(2n)!} 2\delta^{2n} f_0 + \dots \quad (4)$$

Предыдущие замечания о необходимости широкого интервала относятся к этой формуле даже в большей степени.

9.08. Интегрирование. Простейшей и наиболее полезной формулой интегрирования является *формула Эйлера — Маклорена*. Если $f(x)$ — дифференцируемая функция, то путем интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(1) - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx. \quad (1) \end{aligned}$$

Первые два члена дают правило трапеций, а интеграл выражает поправочный член к нему. Теперь при $0 \leq x < 1$ и $r \geq 2$ введем

$$\left. \begin{aligned} P_r(0) &= 0, \\ P'_2(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ P'_3(x) &= b_2 + P_2(x), \\ P'_4(x) &= b_3 + P_3(x), \\ &\dots \dots \dots \\ P'_r(x) &= b_{r-1} + P_{r-1}(x), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и выберем b_r таким образом, чтобы $P_r(1)$ также равнялась нулю при всех $r \geq 2$. Тогда

$$P_r(x) = \int_0^x \{b_{r-1} + P_{r-1}(\xi)\} d\xi, \quad (3)$$

$$b_r = - \int_0^1 P_r(x) dx.$$

Затем последовательное интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 P_2'(x) f'(x) dx &= [P_2(x) f'(x)]_0^1 - \int_0^1 P_2(x) f''(x) dx = \\
 &= - \int_0^1 \{P_3'(x) - b_2\} f''(x) dx = \\
 &= b_2 \{f'(1) - f'(0)\} - [P_3(x) f''(x)]_0^1 + \int_0^1 P_3(x) f'''(x) dx = \\
 &= b_2 \{f'(1) - f'(0)\} - b_3 \{f''(1) - f''(0)\} + \dots \\
 \dots + (-)^r b_r \{f^{(r-1)}(1) - f^{(r-1)}(0)\} - (-)^r \int_0^1 P_{r+1}'(x) f^{(r)}(x) dx, \quad (5)
 \end{aligned}$$

так как все $P_r(x)$ равны нулю на обоих пределах. Рассмотрим теперь ряды

$$\frac{a}{e^a - 1} + \frac{1}{2} a = \sum_{r=0}^{\infty} b_r a^r, \quad (6)$$

$$a \frac{e^{at} - 1}{e^a - 1} = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t) a^r. \quad (7)$$

Покажем, что так определенные b_r и $P_r(t)$ совпадают с введенными выше в соотношениях (2). Продифференцируем (7) по t . Тогда, в силу (6) и (7),

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2 e^{at}}{e^a - 1} &= \sum_{r=0}^{\infty} P_r'(t) a^r = \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t) a^{r+1} + \frac{a^2}{e^a - 1} = \\
 &= \sum_{r=1}^{\infty} P_{r-1}(t) a^r + \sum_{r=1}^{\infty} b_{r-1} a^r - \frac{1}{2} a^2.
 \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при a^r , имеем при $r \geq 2$

$$P_r'(t) = P_{r-1}(t) + b_{r-1}. \quad (8)$$

При $r = 0, 1, 2$ разложение по a дает

$$\frac{a \left(at + \frac{1}{2} a^2 t^2 \right)}{a + \frac{1}{2} a^2} = at + \frac{1}{2} a^2 (t^2 - t) + \dots = P_0(t) + aP_1(t) + a^2P_2(t) + \dots,$$

откуда

$$P_0(t) = 0, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2} (t^2 - t) \quad (9)$$

и

$$P_2'(t) = t - \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Кроме того, при $t = 0$ функция в левой части (7) обращается в нуль, следовательно, все $P_r(0) = 0$. При $t = 1$ эта функция обращается в a , следовательно, все $P_r(1) = 0$, кроме $P_1(1)$, равного 1. Это доказывает, что при $r \geq 2$ функции, определяемые соотношениями (2) и (6), (7), тождественны.

Заменим в (6) a на $-a$. Имеем

$$-\frac{a}{e^{-a}-1} - \frac{1}{2} a = \frac{ae^a}{e^a-1} - \frac{1}{2} a = a + \frac{a}{e^a-1} - \frac{1}{2} a = \frac{a}{e^a-1} + \frac{1}{2} a.$$

Следовательно, (6) — четная функция a и все b_r с нечетными r равны нулю. Тогда (5) сводится к

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx &= -b_2 \{f'(1) - f'(0)\} - b_4 \{f'''(1) - f'''(0)\} - \dots - \\ &- b_{2r} \{f^{(2r-1)}(1) - f^{(2r-1)}(0)\} + \int_0^1 P_{2r+1}'(x) f^{(2r)}(x) dx. \quad (11) \end{aligned}$$

Интегрируя остаточный член по частям, имеем

$$[P_{2r+1}(x) f^{(2r)}(x)]_0^1 - \int_0^1 P_{2r+1}(x) f^{(2r+1)}(x) dx,$$

где внеинтегральный член обращается в нуль.

Если теперь применить полученный результат к интервалам от 0 до 1, от 1 до 2, ..., от $n-1$ до n и сложить, то из (1)

и (11) получим формулу Эйлера — Маклорена (при выводе которой мы по существу пользовались методом Виртингера [12]),

$$\int_0^n f(x) dx = \frac{1}{2} f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - b_2 \{f'(n) - f'(0)\} - b_4 \{f'''(n) - f'''(0)\} - \dots - b_{2r} \{f^{(2r-1)}(n) - f^{(2r-1)}(0)\} - \sum_{m=0}^{n-1} \int_m^{m+1} P_{2r+1}(x-m) f^{(2r+1)}(x) dx. \quad (12)$$

Обычно эта формула выражается через числа и полиномы Бернулли*), B_r , $\varphi_r(x)$, определяемые как

$$b_r = B_r/r!, \quad P_r(x) = \varphi_r(x)/r!. \quad (13)$$

Простейший способ их вычисления состоит в последовательном применении соотношений (2). Введение факториалов устраняет накопление больших знаменателей при последовательном интегрировании, но несколько усложняет доказательство приведенной теоремы.

$$B_0 = 1, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = +\frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = +\frac{5}{66}, \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(x) &= x^2 - x, \quad \varphi_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad \varphi_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2, \\ \varphi_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x, \quad \varphi_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2, \\ \varphi_7(x) &= x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x, \\ \varphi_8(x) &= x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2, \\ \varphi_9(x) &= x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x, \\ \varphi_{10}(x) &= x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

*) Распространены по крайней мере три различных определения B_r . Приведенное определение совпадает с использованным Милн-Томсоном, за исключением определения B_1 , и является наиболее удобным. Его $B_r(x)$ совпадает с нашим $\varphi_r(x) + B_r$.

Эта формула интегрирования впервые была дана Эйлером и вновь независимо от него открыта Маклореном несколькими годами позднее. Некоторые авторы обычно называют ее формулой Эйлера, но имеется много формул Эйлера и только одна формула Эйлера — Маклорена.

Заменяя x на $x_0 + \theta h$, имеем

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x) dx = h \left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_0 + h) + \dots \right. \\ \left. \dots + f(x_0 + (n-1)h) + \frac{1}{2} f(x_0 + nh) \right] - \\ - \frac{B_2 h^2}{2!} \{f'(x_0 + nh) - f'(x_0)\} - \dots - \frac{B_{2r} h^{2r}}{(2r)!} \{f^{(2r-1)}(x_0 + nh) - f^{(2r-1)}(x_0)\} - \\ - \sum_{m=0}^{n-1} h^{2r+2} \int_m^{m+1} P_{2r+1}(\theta - m) f^{(2r+1)}(x_0 + \theta h) d\theta. \quad (16)$$

Положим теперь в (7) $t = 1/2$. Тогда

$$a \frac{e^{1/2 a} - 1}{e^a - 1} = \sum P_r \left(\frac{1}{2} \right) a^r.$$

Заменяем a на $-a$ и вычтем. Будем иметь

$$a = 2 \sum P_r \left(\frac{1}{2} \right) a^r,$$

где суммирование производится по нечётным r . Следовательно,

$$P_1 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}, \quad P_{2r+1} \left(\frac{1}{2} \right) = 0 \quad (2r+1 > 1).$$

Докажем, что $P_{2r+1}(t)$ не имеет при $0 \leq t \leq 1$ других нулей, кроме 0 , $1/2$, 1 , а $P_{2r}(t)$ — кроме $t=0$ и 1 .

Допустим, что многочлен $P_{2r-1}(t)$ имеет простые корни при $t=0$, $\frac{1}{2}$ и 1 и других корней не имеет. Пусть он положителен при $0 < t < \frac{1}{2}$. Тогда в силу (8) имеем

$$P'_{2r}(t) = P_{2r-1}(t) > 0 \quad \left(0 < t < \frac{1}{2} \right), \\ < 0 \quad \left(\frac{1}{2} < t < 1 \right),$$

и

$$P_{2r}(0) = P_{2r}(1) = 0.$$

Следовательно, P_{2r} имеет один максимум при $t = \frac{1}{2}$ и не имеет других экстремумов; при $0 < t < 1$ он имеет знак $P_{2r-1}(\varepsilon)$, где ε — некоторое число между 0 и $1/2$.

Далее,

$$P'_{2r+1}(t) = P_{2r}(t) + b_{2r}.$$

Но так как P'_{2r} имеет на отрезке $0 < t < 1$ только один нуль, $P_{2r} + b_{2r}$ может обращаться в нуль не больше, чем при двух

значениях t , и $P_{2r+1}(t)$ может иметь, самое большее, три нуля при $0 \leq t \leq 1$. Следовательно, точки $t=0, \frac{1}{2}, 1$ являются единственными нулями $P_{2r+1}(t)$. К тому же, $P_{2r}\left(\frac{1}{2}\right)$ должно быть по абсолютной величине больше, чем $-b_{2r}$, и поэтому нуль $P_{2r+1}(t)$ при $t = \frac{1}{2}$ простой.

Кроме того, так как $P_{2r}(t)$ не меняет знака между 0 и 1, из (4) следует, что $P_{2r}(t)$ имеет знак, противоположный b_{2r} . Поскольку $P_{2r}(0)=0$, то $P'_{2r+1}(\epsilon)$ и, следовательно, $P_{2r+1}(\epsilon)$ имеют знак, совпадающий со знаком b_{2r} , и противоположный знаку P_{2r} , а следовательно, противоположный знаку $P_{2r-1}(\epsilon)$. Таким образом, $P_{2r+1}(\epsilon)$ меняет знак с изменением r . Отсюда следует, что b_{2r} образуют *знакопередающуюся последовательность*.

Знак типичного остаточного члена в (12) совпадает со знаком выражения

$$- \int_m^{m+1} P_{2r+1}(x-m) \left\{ f^{(2r+1)}(x) - f^{(2r+1)}\left(m + \frac{1}{2}\right) \right\} dx,$$

и если $f^{(2r+1)}(x)$ монотонна в этом интервале, то, поскольку $P_{2r+1}(x)$ имеет различные знаки в интервалах $0 < x < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < x < 1$, этот знак совпадает со знаком выражения $-P_{2r+1}(\epsilon) \left\{ f^{(2r+1)}(m) - f^{(2r+1)}\left(m + \frac{1}{2}\right) \right\}$.

В наиболее важном классе случаев все нечетные производные имеют одинаковый знак. Затем, поскольку последовательность $P_{2r+1}(\epsilon)$ знакопередающаяся, знаки ошибок, связанных с остановкой на данном значении r , чередуются. Поэтому истинное значение интеграла всегда заключено между значениями сумм r и $r+1$ членов ряда. Мы увидим, что это условие выполняется в нижеследующих примерах.

Это же разложение можно вывести и операторным методом. Из (1) следует

$$\begin{aligned} - \int_{x_0+mh}^{x_0+(m+1)h} f(x) dx &= h \left[\frac{1}{2} f(x_0+mh) + \frac{1}{2} f(x_0+(m+1)h) \right] - \\ &= h^2 \int_0^1 \left(\theta - \frac{1}{2} \right) f'(x_0+mh+\theta h) d\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Положим

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = D. \quad (18)$$

Тогда последний член записывается в виде

$$-h^2 \int_0^1 \left(\theta - \frac{1}{2}\right) D e^{(m+\theta)hD} f(x_0) d\theta, \quad (19)$$

где оператор D не зависит от θ и, следовательно, коммутирует со всеми функциями от θ . Поэтому при интегрировании по θ можно считать D постоянной. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} e^{mhD} \left[-\frac{1}{2} h (e^{hD} + 1) + \frac{1}{D} (e^{hD} - 1) \right] f(x_0) = \\ = e^{mhD} \left[-h + \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{2} h \right) (e^{hD} - 1) \right] f(x_0). \end{aligned} \quad (20)$$

Кроме того,

$$\sum_{m=0}^{n-1} e^{mhD} = \frac{e^{nhD} - 1}{e^{hD} - 1}, \quad (21)$$

и, следовательно, суммирование последних членов формулы (17) по m дает

$$\begin{aligned} -\frac{(e^{nhD} - 1)}{D} \left\{ \frac{hD}{e^{hD} - 1} - 1 + \frac{hD}{2} \right\} f(x_0) = -\frac{e^{nhD} - 1}{D} \sum_{r=2}^{\infty} (hD)^r \frac{B_r}{r!} f(x_0) = \\ = -h^2 \frac{B_2}{2!} \{f'(x_0 + nh) - f'(x_0)\} - h^4 \frac{B_4}{4!} \{f'''(x_0 + nh) - f'''(x_0)\} - \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Тем самым мы снова получили разложение Эйлера — Маклорена, но без остаточного члена.

Это разложение нельзя рассматривать как бесконечный ряд. Теорема 9.012 устанавливает верхнюю границу для остаточного члена интерполяционной формулы, и интеграл от $f(x)$ представляется суммой интегралов от интерполяционного многочлена и этого остаточного члена. Если этот остаточный член мал всюду в интервале интегрирования, то интеграл от интерполяционного полинома является приближением интеграла от данной функции, причем можно установить пределы ошибки. Но производные полинома начиная с некоторого конечного порядка обращаются в нуль, и эти разложения для полиномов правильно рассматривать как суммы конечного числа членов. Следовательно, оправдание операторного метода в этой

задаче не имеет никакого отношения к сходимости ряда. Оно покоится на том, что 1) операторы можно разложить в ряды по целым положительным степеням D и, следовательно, все члены, начиная с некоторого порядка, исчезают, если оператор действует на многочлен, 2) поскольку отрицательные степени D не появляются, некоммутативность дифференцирования и определенного интегрирования не имеет значения, и 3) ошибка равна интегралу от ошибки интерполяционного полинома и фиксирована для любого конечного порядка независимо от вопросов сходимости.

Фактически, обычно происходит следующее: члены этого разложения сначала быстро убывают, а затем начинают увеличиваться из-за возрастания высших производных, если функция не является полиномом. Тогда наиболее точное значение интеграла получается путем вычисления суммы вплоть до наименьшего члена. Мы вернемся к этому вопросу при рассмотрении асимптотических разложений, одним из примеров которых является эта формула.

9.081. Рассмотрим интеграл

$$\ln 2 = \int_{10}^{20} \frac{dx}{x}.$$

Имеем

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4},$$

$$f^{(5)}(x) = -\frac{5!}{x^6}, \dots$$

и

$$\begin{aligned} \ln 2 = & \frac{1}{2 \cdot 10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{19} + \frac{1}{2 \cdot 20} - \frac{B_2}{2} \left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{20^2} \right) - \\ & - \frac{B_4}{4} \left(\frac{1}{10^4} - \frac{1}{20^4} \right) - \frac{B_6}{6} \left(\frac{1}{10^6} - \frac{1}{20^6} \right) \dots \end{aligned}$$

Расположим вычисления следующим образом:

$$\begin{array}{l} 0,0500000000 \\ 0,0909090909 \\ 0,0833333333 \\ 0,0769230769 \\ 0,0714285714 \\ 0,0666666667 \\ 0,0625000000 \\ 0,0588235294 \end{array} \quad \begin{array}{l} - \frac{1}{12} (0,01 - 0,0025) = -0,000625 \\ + \frac{1}{120} (0,0001 - 0,00000625) = +0,000008333 - 0,000000521 \\ - \frac{1}{252} (0,000001) \left(1 - \frac{1}{64} \right) = -0,000000039 \\ + \frac{1}{240} (0,00000001) \left(1 - \frac{1}{256} \right) = +0,000000000 \end{array}$$

0,05555555556
 0,0526315789
 0,0250000000
 0,6937714031

Всего = -0,000624227
 Отсюда $\ln 2 = +0,6931471804$

Точный результат есть 0,6931471805.

9.082. Рассмотрим далее постоянную Эйлера γ , определяемую соотношением

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \ln n - \ln 10 &= \int_{10}^n \frac{dx}{x} = \frac{1}{20} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} - \\ &\quad - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{120} \left(\frac{1}{10^4} - \frac{1}{n^4} \right) - \frac{1}{252} \cdot \frac{1}{10^6} + \dots \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n + \ln 10 \right) &= \\ &= -\frac{1}{20} + \frac{1}{1200} - \frac{1}{12 \cdot 10^5} + \frac{1}{252 \cdot 10^6} = -0,049167496. \end{aligned}$$

Прямое суммирование дает

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10} - \ln 10 = 0,626383161.$$

Отсюда, складывая, получим

$$\gamma = 0,577215665.$$

В этом результате все девять десятичных знаков точные. Отметим, что улучшение точности с трех до девяти десятичных знаков требует вычисления только двух дополнительных членов *).

9.083. Формула интегрирования Грегори. Формула Эйлера—Маклорена является простейшей и наиболее точной формулой численного интегрирования, но для ее применения должно

*) Эти и другие фундаментальные постоянные были вычислены Адамсом [22] с точностью до 272 десятичных знаков.

быть возможно прямое вычисление производных. Может оказаться, что выражения высших производных очень сложны и легче заменить их разностями. Это может быть сделано по формуле Грегори или формуле центральных разностей.

Мы видели, что поправочные члены в формуле Эйлера—Маклорена можно выразить в виде 9.08 (22). Кроме того, в начале и конце интервала имеем соответственно

$$hD = \ln(1 + \Delta), \quad hD = -\ln(1 - \nabla), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} -\frac{h}{e^{hD} - 1} + \frac{1}{D} - \frac{1}{2}h &= -\frac{h}{\Delta} + \frac{h}{\ln(1 + \Delta)} - \frac{1}{2}h = \\ &= -\frac{h}{\nabla} - \frac{h}{\ln(1 - \nabla)} + \frac{1}{2}h. \end{aligned} \quad (2)$$

Можно поступить двояким образом. Можно разложить D по степеням Δ и ∇ и подставить в формулу Эйлера—Маклорена или прямо разложить операторы в выражении (2), не обращаясь к заранее известным числам Бернулли. Оба метода требуют довольно трудоемких преобразований, и прямой подход (снова Грегори!) представляется более легким, чем любой из них. Разлагая коэффициенты формулы Грегори по степеням θ , имеем

$$\theta(\theta - 1) = \theta^2 - \theta, \quad \theta(\theta - 1)(\theta - 2) = \theta^3 - 3\theta^2 + 2\theta,$$

$$\theta(\theta - 1)(\theta - 2)(\theta - 3) = \theta^4 - 6\theta^3 + 11\theta^2 - 6\theta,$$

$$\theta(\theta - 1)(\theta - 2)(\theta - 3)(\theta - 4) = \theta^5 - 10\theta^4 + 35\theta^3 - 50\theta^2 + 24\theta,$$

$$\theta(\theta - 1) \dots (\theta - 5) = \theta^6 - 15\theta^5 + 85\theta^4 - 225\theta^3 + 274\theta^2 - 120\theta,$$

$$\theta(\theta - 1) \dots (\theta - 6) = \theta^7 - 21\theta^6 + 175\theta^5 - 735\theta^4 + 1624\theta^3 - 1764\theta^2 + 720\theta,$$

$$\theta(\theta - 1) \dots (\theta - 7) =$$

$$= \theta^8 - 28\theta^7 + 322\theta^6 - 1960\theta^5 + 6769\theta^4 + 13132\theta^3 + 13068\theta^2 - 5040\theta.$$

Соответствующие интегралы от 0 до 1 равны

$$-\frac{1}{6}, \quad +\frac{1}{4}, \quad -\frac{19}{30}, \quad +\frac{9}{4}, \quad -\frac{863}{84}, \quad +\frac{1375}{24}, \quad -\frac{33953}{90}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx &= f(x_0) + \frac{1}{2} \Delta f(x_0) - \frac{1}{6 \cdot 2!} \Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{4 \cdot 3!} \Delta^3 f(x_0) - \\ &- \frac{19}{30 \cdot 4!} \Delta^4 f(x_0) + \frac{9}{4 \cdot 5!} \Delta^5 f(x_0) - \frac{863}{84 \cdot 6!} \Delta^6 f(x_0) - \frac{1375}{24 \cdot 7!} \Delta^7 f(x_0) - \\ &- \frac{33953}{90 \cdot 8!} \Delta^8 f(x_0) \dots \quad (3) \end{aligned}$$

Сумма первых двух членов равна $\frac{1}{2} \{f(x_0) + f(x_0 + h)\}$. Следовательно, складывая соответствующие выражения для равных интервалов до $x_0 + nh$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x) dx &= \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_0 + h) + \dots + f\{x_0 + (n-1)h\} + \\ &+ \frac{1}{2} f(x_0 + nh) - \frac{1}{6 \cdot 2!} \{\Delta f(x_0 + nh) - \Delta f(x_0)\} + \\ &+ \frac{1}{4 \cdot 3!} \{\Delta^2 f(x_0 + nh) - \Delta^2 f(x_0)\} + \dots \quad (4) \end{aligned}$$

Но с равным успехом можно получить такое же разложение по степеням ∇ , отличающееся только тем, что все члены с четными степенями будут иметь противоположный знак. Обоснование этих разложений снова состоит в том, что разложение 9.08 (22) является точным в применении к интерполяционному полиному. Соотношение (2) между ∇ и Δ также является точным для этого полинома. Поэтому мы можем заменить члены с $\Delta^r(x_0 + nh)$ эквивалентными выражениями через $\nabla^r(x_0 + nh)$. При этих рассуждениях предполагается, что за точкой $x_0 + nh$ определена не $f(x)$, а только интерполяционный полином, а это верно. Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x) dx &= \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_0 + h) + \dots + f\{x_0 + (n-1)h\} + \\ &+ \frac{1}{2} f(x_0 + nh) - \frac{1}{12} \{\nabla f(x_0 + nh) - \Delta f(x_0)\} - \\ &- \frac{1}{24} \{\nabla^2 f(x_0 + nh) + \Delta^2 f(x_0)\} - \frac{19}{720} \{\nabla^3 f(x_0 + nh) - \Delta^3 f(x_0)\} - \\ &- \frac{3}{160} \{\nabla^4 f(x_0 + nh) + \Delta^4 f(x_0)\} - \frac{863}{60480} \{\nabla^5 f(x_0 + nh) - \Delta^5 f(x_0)\} - \\ &- \frac{275}{24192} \{\nabla^6 f(x_0 + nh) + \Delta^6 f(x_0)\} - \frac{33953}{3628800} \{\nabla^7 f(x_0 + nh) - \Delta^7 f(x_0)\} \dots \quad (5) \end{aligned}$$

Это и есть формула Грегори.

9.084. Формула центральных разностей. Подобным же образом можно проинтегрировать формулу Ньютона — Бесселя. Здесь все члены с нечетными разностями дадут при интегрировании нуль. Остальные же дают

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx = \frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_0+h) - \frac{1}{6 \cdot 2!} \mu \delta^2 f_{1/2} + \frac{11}{30 \cdot 4!} \mu \delta^4 f_{1/2} - \frac{191}{84 \cdot 6!} \mu \delta^6 f_{1/2} + \frac{2497}{90 \cdot 8!} \mu \delta^8 f_{1/2} + \dots$$

Но

$$2\mu \delta^{2r} f_{1/2} = (\delta^{2r} f_1 + \delta^{2r} f_0) = \delta^{2r-1} f_{3/2} - \delta^{2r-1} f_{1/2} + \delta^{2r-1} f_{1/2} - \delta^{2r-1} f_{-1/2} = 2\mu \delta^{2r-1} f_1 - 2\mu \delta^{2r-1} f_0. \quad (7)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x) dx &= \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_0+h) + \dots + f\{x_0 + (n-1)h\} + \\ &+ \frac{1}{2} f(x_0+nh) - \frac{1}{12} \{\mu \delta f(x_0+nh) - \mu \delta f(x_0)\} + \\ &\frac{11}{720} \{\mu \delta^3 f(x_0+nh) - \mu \delta^3 f(x_0)\} - \frac{191}{60480} \{\mu \delta^5 f(x_0+nh) - \mu \delta^5 f(x_0)\} + \\ &+ \frac{2497}{3628800} \{\mu \delta^7 f(x_0+nh) - \mu \delta^7 f(x_0)\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Для применения этой формулы нужно вычислять меньше членов, и к тому же коэффициенты при высших разностях меньше, чем в формуле Грегори. С другой стороны, для образования центральных разностей нужно знать функцию за пределами интервала интегрирования, тогда как формула Грегори этого не требует.

9.085. В качестве иллюстрации рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{6} \pi = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Квадратные корни с точностью до 8 знаков были взяты из таблиц Барлоу.

x	$(1-x^2)^{-1/2}$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7
0	1,0000000		0,00250470	0,00002841	0,00005682	0,0000186	0,00000372	
0,05	1,00125235	0,00125235	0,00253311	0,00008709	0,00005868	0,00003562	0,00000376	
0,10	1,00503781	0,00378546	0,00262020	0,00015139	0,00006490	0,00001031	0,00000469	
0,15	1,01144347	0,00540566	0,00277159	0,00022600	0,00007461	0,00001624	0,00000593	
0,20	1,02062072	0,006917725	0,00299759	0,00031685	0,00009085	0,00002477	0,00000853	0,00000260
0,25	1,03279556	0,01217484	0,00331444	0,00043247	0,00011562	0,00003723	0,00001246	
0,30	1,04828484	0,01548928	0,00374691	0,00058532	0,00015285	0,00005675	0,00001252	
0,35	1,06752103	0,01923619	0,00433223	0,00079492	0,00020960	0,00008828	0,00003153	0,00001201
0,40	1,09108945	0,02356842	0,00512715	0,00109280	0,00029788	0,00014200	0,00005372	
0,45	1,11978532	0,02869557	0,00621995	0,00153268	0,00043988	0,00023797	0,00009597	0,00008600
0,50	1,15470054	0,03491552	0,00775263	0,00221053	0,00067785	0,00042054	0,00018257	0,00019381
0,55	1,19736869	0,04266815	0,00993316	0,00330892	0,00109839	0,00079392	0,00037338	
0,60	1,25000000	0,05263131	0,01327208	0,00520123	0,00189231			
0,65	1,31590339	0,06590339	0,01847331					
0,70	1,40028009	0,08137670						

Имеем

$$\frac{1}{2} f(0) + f(0,05) + \dots + f(0,45) + \frac{1}{2} f(0,50) = 10,47518052.$$

Пользуясь формулой центральных разностей, видим, что все нечетные разности обращаются в нуль при $x=0$, а при $x=0,50$ они дают

$$2\mu\delta = 0,07758367, \quad 2\mu\delta^3 = 0,00374321, \quad 2\mu\delta^5 = 0,00065851, \\ 2\mu\delta^7 = 0,00027741.$$

Тогда сумма поправочных членов равна

$$-\frac{1}{24} (2\mu\delta) + \frac{11}{1440} (2\mu\delta^3) - \frac{191}{120960} (2\mu\delta^5) + \frac{2497}{7257600} (2\mu\delta^7) = \\ = -0,00323265 + 0,00002859 - 0,00000104 + 0,00000010 = \\ = -0,00320500.$$

$$\frac{1}{6} \pi = 0,05 (10,47518052 - 0,00320500) = 0,5235987760, \\ \pi = 3,1415926560.$$

Правильное значение равно

$$\pi = 3,141592654.$$

Пользуясь формулой Грегори, найдем следующие значения поправочных членов:

$$\begin{array}{r} \Delta - 0,00280526 \\ \Delta^2 - \quad 36471 \\ \Delta^3 - \quad 2654 \\ \Delta^4 - \quad 679 \\ \Delta^5 - \quad 111 \\ \Delta^6 - \quad 43 \\ \Delta^7 - \quad 9 \\ \hline - 0,00320493 \end{array}$$

и $\pi = 3,141592677$. Точность этого результата ниже, чем предыдущего. Разницу в 7 единиц последнего знака этой суммы можно было бы отнести за счет ошибок округления, но это мало вероятно. Мы видим, что последняя пара членов в формуле центральных разностей отличается на множитель порядка 10. Это же справедливо для последней пары нечетных разностей в формуле Грегори. Поэтому можно ожидать, что Δ^9 дало бы вклад около -1 в последнем знаке. Но тогда следует ожидать также, что Δ^8 даст вклад около -4 в этом знаке. Поэтому, вероятно, что эта разница возникает за счет более медленного убывания членов в формуле Грегори, чем в формуле центральных разностей.

Этот пример довольно благоприятен для формулы Грегори из-за того, что подынтегральная функция обращается в бесконечность при $x=1$. При вычислении центральных разностей требовались значения функции до $x=0,70$, и высшие центральные разности оказались соответственно больше, чем разности внутри интервала интегрирования. Если бы мы воспользовались вместо этого выражением

$$\frac{1}{4} \pi = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

то разница была бы более значительной *).

*) Этот интеграл был вычислен Уиттекером и Робинсоном [23]. При этом была использована формула центральных разностей с третьими разностями. Получилась ошибка в две единицы седьмого десятичного знака в величине π . Как и в нашем примере, было взято десять интервалов и подынтегральная функция вычислялась с семью знаками.

9.09. Частные правила интегрирования. Пусть $f(x)$ задана при $x = -h$, 0 и h . Тогда интерполяционный полином Лагранжа имеет вид

$$g(x) = \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) f(0) + \left(\frac{x^2}{2h^2} - \frac{x}{2h}\right) f(-h) + \left(\frac{x^2}{2h^2} + \frac{x}{2h}\right) f(h)$$

и

$$\int_{-h}^h g(x) dx = \frac{1}{3} h \{f(-h) + 4f(0) + f(h)\}.$$

Это приводит к *правилу Симпсона* *): Разделить отрезок интегрирования на равные интервалы. Взять сумму ординат концов, прибавить учетверенную сумму ординат середин интервалов и удвоенную сумму ординат точек деления и умножить на шестую часть длины интервала. Это равносильно квадратичному интерполированию по трем значениям $f(x)$ в начале, середине и конце каждого интервала. При этом не делается никакой попытки сохранить гладкость в точках сшивания интерполяционных многочленов.

Возможное присутствие кубического члена не сказывается на этом правиле, так как кубический многочлен может отличаться от квадратного только на функцию, обращающуюся в нуль в точках $-h$, 0 , h , которая должна иметь вид $Ax(h^2 - x^2)$, и интеграл от этой функции в пределах от $-h$ до h равен нулю.

Допустим далее, что $f(x)$ известна при $x = -3h$, $-h$, h , $3h$, т. е. в четырех равноотстоящих точках. Эти значения определяют кубический интерполяционный многочлен

$$g(x) = f(-3h) \frac{(x+h)(x-h)(x-3h)}{(-2h)(-4h)(-6h)} + f(-h) \frac{(x+3h)(x-h)(x-3h)}{2h(-2h)(-4h)} +$$

$$+ f(h) \frac{(x+3h)(x+h)(x-3h)}{4h \cdot 2h \cdot (-2h)} + f(3h) \frac{(x+3h)(x+h)(x-h)}{6h \cdot 4h \cdot 2h},$$

$$g(x) = -\frac{f(-3h)}{48} \left(\frac{x^3}{h^3} - \frac{3x^2}{h^2} - \frac{x}{h} + 3\right) + \frac{f(-h)}{16} \left(\frac{x^3}{h^3} - \frac{x^2}{h^2} - \frac{9x}{h} + 9\right) -$$

$$-\frac{f(h)}{16} \left(\frac{x^3}{h^3} + \frac{x^2}{h^2} - \frac{9x}{h} - 9\right) + \frac{f(3h)}{48} \left(\frac{x^3}{h^3} + \frac{3x^2}{h^2} - \frac{x}{h} - 3\right)$$

*) Симпсон опубликовал это правило в 1743 г. Оно было ранее получено Кавальери (1639) и Грегори (1668).

и

$$\int_{-3h}^{3h} g(x) dx = -\frac{h}{48} f(-3h)(-2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 6) +$$

$$+\frac{h}{16} f(-h)\left(-\frac{2}{3} \cdot 3^3 + 9 \cdot 6\right) - \frac{h}{16} f(h)\left(\frac{2}{3} \cdot 3^3 - 9 \cdot 6\right) +$$

$$+\frac{h}{48} f(3h)(2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 6) = \frac{3}{4} h \{f(-3h) + 3f(-h) + 3f(h) + f(3h)\}.$$

Для сравнения с правилом Симпсона обозначим интервал интегрирования в обоих случаях через H . Тогда последнее правило имеет вид

$$\int_{-1/2H}^{1/2H} g(x) dx = \frac{1}{8} H \left\{ f\left(-\frac{1}{2}H\right) + 3f\left(-\frac{1}{6}H\right) + 3f\left(\frac{1}{6}H\right) + f\left(\frac{1}{2}H\right) \right\},$$

и называется *правилом трех восьмых*. Правило Симпсона для того же интервала записывается в виде

$$\int_{-1/2H}^{1/2H} g(x) dx = \frac{1}{6} H \left\{ f\left(-\frac{1}{2}H\right) + 4f(0) + f\left(\frac{1}{2}H\right) \right\}.$$

Заметим, что если $f(x)$ — постоянная, оба правила дают $Hf(x)$, как и должно быть. Это помогает запомнить численные коэффициенты. Правило трех восьмых принадлежит Котесу. Оба правила верны до кубических членов включительно. Посмотрим, как они работают для четвертой степени. Положим $H=2$, $f(x)=x^4$. Тогда точное значение интеграла равно

$$\frac{2}{5} = 0,4.$$

Правило Симпсона дает

$$\frac{1}{3}(1+0+1) = 0,667.$$

Правило трех восьмых дает

$$\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + 1\right) = \frac{14}{27} = 0,519.$$

Таким образом, оба правила дают значения больше точного, причем правило трех восьмых лучше. Но оба они будут хуже правил, основанных на интерполяционных формулах, явно учитывающих четвертую и более высокие степени.

При этом сравнении интервал интегрирования был выбран одинаковым для правил Симпсона и трех восьмых, так что для

правила Симпсона использовалось одно промежуточное значение, а для правила трех восьмых — два. При интегрировании с равным шагом для обоих правил преимущество будет иметь правило Симпсона. Так, например,

$$\int_{-3}^3 x^4 dx = \frac{2}{5} \cdot 243 = 97,2.$$

При шаге, равном единице, имеем

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^4	81	16	1	0	1	16	81

Правило Симпсона дает

$$\frac{1}{3} (162 + 4 \cdot 32 + 2 \cdot 2) = \frac{1}{3} 294 = 98,0.$$

Правило трех восьмых дает

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} (81 + 3 \cdot 16 + 3 \cdot 1 + 0) + \frac{3}{8} (0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 16 + 81) = \\ = \frac{3}{8} \cdot 132 \cdot 2 = 99,0. \end{aligned}$$

Такое сравнение возможно только в случае, если число шагов кратно 6.

В качестве примера применим правило Симпсона к данным

9.085. Получим

$$\frac{1}{6} \pi = 0,523599265,$$

с погрешностью 0,00000049. В формуле центральных разностей вклад члена с δ^3 равен $0,05 \cdot 0,00002859 = 0,00000143$, а член с δ^5 дает 0,00000005. Следовательно, погрешность формулы Симпсона равна примерно трети члена с δ^3 и превышает примерно в десять раз член с δ^5 в формуле центральных разностей. Многочлен четвертой степени интегрировался бы точно по формуле центральных разностей с δ^3 , но с меньшей точностью по правилу Симпсона.

Достоинство правил Симпсона и трех восьмых в том, что они просты и легко запоминаются, но они менее точны, чем любая формула с разностями до δ^3 , если используется такое же число интервалов. Правда, они не требуют вычисления разностей, но разности должны вычисляться в любом случае для контроля вычисления $f(x)$ независимо от того, используются ли они при вычислении интеграла. Если важно сэкономить время, то лучше вычислять достаточное количество значений, чтобы

иметь хороший контроль по разностям. Элементарные правила следует использовать только в тех случаях, когда действительно имеется только три или четыре определенных значения функции и мы должны использовать их наилучшим образом.

Несколько более сложных правил, из которых наиболее известно правило Уэддла, частично учитывают вклад высших разностей. Но иногда неудобно делить отрезок интегрирования на число интервалов кратное тому, которое требуется этими правилами. По той же причине они не пригодны, когда нужно вычислить неопределенный интеграл для *всех* табличных значений аргумента. Некоторые другие формулы, одна из которых получена Гауссом, имеют целью сэкономить работу путем такого выбора узлов, чтобы интеграл вычислялся точно для многочленов *более высокой* степени, чем число узлов. Однако интерполирование функции по предписанным узлам более затруднительно, чем использование формул для равных интервалов, даже если они должны быть более многочисленны.

Эти правила были успешно использованы Чандрасекаром [24] для решения интегральных уравнений. Если при использовании метода, как в 4.17, для достижения нужной точности требовалось бы, скажем, 10 равноотстоящих узлов, то той же точности можно достичь при надлежащем расположении 5 узлов. Неудобство интерполяции компенсируется тем, что приходится решать меньшее число уравнений.

9.091. Метод Ричардсона. Ричардсон предложил способ приближенного учета вторых разностей, который иногда дает точность того же порядка, что и правило Симпсона, но гораздо легче. Он основан на том, что, если результат имеет вид $A \pm B/n^2 + \dots$, мы можем получить приближенное значение A , проводя вычисления для двух конечных значений n и экстраполируя к $n \rightarrow \infty$. Например,

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n};$$

выражение $n \sin \frac{\pi}{n}$ имеет вид $\pi + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n^4} + \dots$

Выберем $n = 4$ и 6. Тогда, пренебрегая C , найдем

$$\pi + \frac{B}{16} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2,828,$$

$$\pi + \frac{B}{36} = 3,000.$$

Решая эти уравнения относительно π , имеем

$$\pi = 3,138,$$

что является хорошим результатом, если учесть затраченный труд. Или рассмотрим

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Для одного интервала по правилу трапеций получим

$$A + B = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = 0,75.$$

Вычисляя этот интеграл для двух интервалов с еще одной ординатой при $x = 1,5$, находим

$$A + \frac{1}{4}B = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right) = 0,7083.$$

Отсюда

$$\ln 2 = A = 0,6944.$$

Этот метод пригоден не только при интегрировании, но и для приближенного вычисления разнообразных пределов. Возможно также обобщение этого метода путем учета членов порядка n^{-4} , что дало бы при интегрировании точность, эквивалентную учету третьих разностей на концах отрезка интегрирования, но без необходимости вспоминать коэффициенты квадратурной формулы. Ричардсон назвал этот метод „задержанным переходом к пределу“.

9.092. Функции, имеющие вблизи пределов интегрирования вид $x^{\pm 1/2}$. Когда подынтегральное выражение вблизи одного из пределов интегрирования ведет себя как $x^{-1/2}$, все обычные формулы численного интегрирования отказывают, хотя интеграл сходится. Они неудовлетворительны также в случае, когда подынтегральное выражение ведет себя как $x^{1/2}$. Так

$$\int_0^2 x^{1/2} dx = \frac{4}{3} \sqrt{2} = 1,8856,$$

тогда как правило Симпсона с узлами в $x = 0, 1, 2$ дает 1,8047. Аналогично

$$\int_0^3 x^{1/2} dx = 2 \sqrt{3} = 3,4641,$$

а правило трех восьмых с узлами в $x=0, 1, 2, 3$ дает 3,3655. Эти правила, следовательно, занижают вклад окрестности предела интегрирования на 3 или 4 процента. Однако легко получить более точные формулы, если известно, что подынтегральное выражение вблизи конца отрезка интегрирования ведет себя как $x^{-1/2}$ или $x^{1/2}$, используя ординаты в точках $x=h$ и $2h$ или $3h$. Для остальной части отрезка интегрирования можно тогда использовать формулу Грегори. Отмечая эти значения аргумента индексами у ординат, находим *)

$$\int_0^{2h} (\alpha x^{-1/2} + \beta x^{1/2}) dx = h \left(\frac{8}{3} \sqrt{2} y_1 - \frac{4}{3} y_2 \right) = h (3,7712 y_1 - 1,3333 y_2), \quad (1)$$

$$\int_0^{3h} (\alpha x^{-1/2} + \beta x^{1/2}) dx = 2h \sqrt{3} y_1 + 0 y_3 = 3,4641 h y_1 + 0,0000 y_3, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{3h} (\alpha x^{-1/2} + \beta x^{1/2} + \gamma x^{3/2}) dx &= h \left(\frac{14}{5} \sqrt{3} y_1 - \frac{8}{6} \sqrt{6} y_2 + \frac{12}{5} y_3 \right) = \\ &= h (4,8497 y_1 - 3,9192 y_2 + 2,4000 y_3), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\int_0^{2h} (\alpha x^{1/2} + \beta x^{3/2}) dx = h \left(\frac{16}{15} \sqrt{2} y_1 + \frac{4}{15} y_2 \right) = h (1,5085 y_1 + 0,2667 y_2), \quad (4)$$

$$\int_0^{3h} (\alpha x^{1/2} + \beta x^{3/2}) dx = h \left(\frac{6}{5} \sqrt{3} y_1 + \frac{4}{5} y_3 \right) = h (2,0785 y_1 + 0,8000 y_3), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{3h} (\alpha x^{1/2} + \beta x^{3/2} + \gamma x^{5/2}) dx &= h \left(\frac{6}{7} \sqrt{3} y_1 + \frac{12}{35} \sqrt{6} y_2 + \frac{16}{35} y_3 \right) = \\ &= h (1,4846 y_1 + 0,8398 y_2 + 0,4571 y_3). \end{aligned} \quad (6)$$

В качестве примера вычислим

$$\frac{1}{3} \pi = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

*) Имеется обобщение, предложенное Бикли [25].

используя только два или три интервала. Формула (1) при $h = 1/4$ дает

$$\begin{array}{l} x \quad (1-x^2)^{-1/2} \\ \frac{1}{2} \quad 1,15470 \quad -1,3333y_2 = -1,53956 \\ \frac{3}{4} \quad 1,51186 \quad 3,7712y_1 = \frac{5,70153}{4,16197} \end{array}$$

Отсюда $\pi = 3 \times \frac{1}{4} \times 4,16197 = 3,1215$. Формула (3) при $h = 1/6$ дает

$$\begin{array}{l} x \quad (1-x^2)^{-1/2} \\ \frac{1}{2} \quad 1,1547 \times 2,4000 = +2,7713 \\ \frac{2}{3} \quad 1,3416 \times -3,9192 = -5,2580 \\ \frac{5}{6} \quad 1,8091 \times 4,8497 = +\frac{8,7736}{6,2869} \end{array}$$

Отсюда $\pi = 3 \times \frac{1}{6} \times 6,2869 = 3,1434$. Таким образом, используя только три интервала, получаем ошибку всего в 0,06%. Гораздо более точный результат получается, если использовать формулу Грегори для интервалов длиной 0,05 от 0,5 до 0,85 и прибавить интеграл от 0,85 до 1,00, полученный по формуле (3). Этот метод широко использовался при сейсмологических

вычислениях, где интегралы имеют вид $\int_0^a \text{Arch}(1+\xi) dx$

или $\int_0^a \xi^{-1/2} dx$, причем $\xi = \alpha x + O(x^2)$ для малых x .

9.093. Графические методы. Применения графических методов лучше избегать. Полезно иметь грубый набросок для выяснения общего вида функции, но если стремиться к точности, то численные методы дают лучший результат и притом с меньшими усилиями. Неудачные попытки применения графических методов в сейсмологии показали, что они могут оказаться менее точными, чем даже численные методы, учитывающие только *первые* разности. Хотя этот факт на первый взгляд кажется почти неправдоподобным, его можно объяснить одним дефектом большинства продаваемых миллиметровых бумаг. Рас-

стояния между *краями* линий сетки одинаковы, но этого нельзя сказать о расстояниях между их *серединами*. В результате возникает систематическая разница между малыми квадратиками вблизи жирных линий, разделяющих большие квадраты, и малыми квадратиками в средней части больших квадратов.

9.10. Численное решение дифференциальных уравнений.

Прямое использование рядов Тейлора, представляющее в принципе простейший метод интегрирования дифференциальных уравнений, приобретает в последнее время все более важное значение. Для уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'),$$

с заданными $y = y_0$ и $y' = y_1$ при $x = 0$ вторую производную y'' при $x = 0$ можно вычислить непосредственно из дифференциального уравнения. Дифференцируя уравнение, имеем

$$y''' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''.$$

Для определения y''' можно подставить в это соотношение найденное значение y'' . Дифференцируя еще раз, найдем $y^{(4)}$, и так далее до любого нужного порядка. Полученные значения подставляем в ряды Тейлора для y и y' :

$$y = y_0 + y_1 x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \dots,$$

$$y' = y_1 + y''(0) x + \frac{y'''(0)}{2!} x^2 + \frac{y^{(4)}(0)}{3!} x^3 + \dots.$$

Эти разложения используем для вычисления y и y' вплоть до такого значения x , когда отброшенные члены не влияют на последний удерживаемый десятичный знак. Пусть это будет h . Тогда для $x = h$ известны y и y' . Вновь пользуясь полученными дифференцированием соотношениями, определяем $y''(h)$, $y'''(h)$, $y^{(4)}(h)$... и строим новые ряды Тейлора по степеням $(x - h)$. Используем их для определения значений y и y' до $x = 2h$. Хороший контроль вычислений дает раздельное суммирование членов рядов с четными и нечетными степенями. Пусть они вычислены для $x - h = \xi$. Их сумма дает y для $x = h + \xi$. Но их разность дает значение y для $x = h - \xi$, уже вычисленное ранее. Если эти два значения y для $x = h - \xi$ согласуются, это дает контроль всей процедуры вычисления производных и составления рядов Тейлора вблизи $x = h$. Повторением этого процесса можно дойти до любого требуемого значения x .

Этот процесс предложен Эйри для решения уравнения Эмдена

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y^n = 0$$

с условиями $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$. Соответствующие вычисления были выполнены Миллером и Сэдлером [35]. Этот метод наиболее непосредственный, и в силу того, что численные коэффициенты в ряде Тейлора гораздо меньше, чем в любой конечно-разностной формуле, он позволяет покрыть заданный интервал изменения аргумента за меньшее число шагов. Его можно применять к дифференциальным уравнениям любого порядка. Конечно, для уравнения первого порядка требуется ряд только для y . Для уравнения третьего порядка нужно строить три ряда: для y , y' и y'' .

Рассмотрим простой пример:

$$\frac{dy}{dx} = -xy,$$

причем $y = 1$ при $x = 0$. Решением этого уравнения является $\exp(-\frac{1}{2}x^2)$. Последовательным дифференцированием и подстановкой на каждом шаге находим

$$y'' = (x^2 - 1)y,$$

$$y''' = (3x - x^3)y,$$

$$y^{(4)} = (3 - 6x^2 + x^4)y,$$

$$y^{(5)} = (-15x + 10x^3 - x^5)y,$$

$$y^{(6)} = (-15 + 45x^2 - 15x^4 + x^6)y.$$

Разложение для малых x имеет вид

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}3x^4 - \frac{1}{6!}15x^6 + \dots$$

При $x = 0,5$ последний член равен 0,0003, так что для этого интервала четыре члена дают четыре точных десятичных знака. Находим

x	y
0,1	0,9950
0,2	0,9802
0,3	0,9560
0,4	0,9231
0,5	0,8825

Используем теперь наши общие выражения для вычисления производных при $x = 0,5$. Разделенные на соответствующие факториалы, они равны:

$$y' = -0,4412, \quad y''/2! = -0,3309, \quad y'''/3! = +0,2022,$$

$$y^{(4)}/4! = +0,0575, \quad y^{(5)}/5! = -0,0462, \quad y^{(6)}/6! = -0,0057.$$

Положим теперь $\xi = x - 0,5$ и вычислим суммы четных и нечетных степеней:

ξ	Четные степени	Нечетные степени	x	Разность	x	Сумма
0,1	0,8792	-0,0439	0,4	0,9231	0,6	0,8353
0,2	0,8694	-0,0866	0,3	0,9560	0,7	0,7828
0,3	0,8532	-0,1270	0,2	0,9802	0,8	0,7262
0,4	0,8311	-0,1640	0,1	0,9951	0,9	0,6671
0,5	0,8033	-0,1968	0,0	1,0001	1,0	0,6065

Наибольшая разница с ранее вычисленными значениями равна 0,0001 при $x = 0,1$. Это значение получается как сумма шести членов, каждый из которых имеет ошибку за счет округления последнего знака. Поэтому возможна ошибка в 0,0003.

Далее полагаем $\xi = x - 1,0$ и вычисляем производные при $x = 1,0$.

$$y' = -0,6065, \quad y''/2! = 0, \quad y'''/3! = +0,2022,$$

$$y^{(4)}/4! = -0,0505, \quad y^{(5)}/5! = -0,0303, \quad y^{(6)}/6! = +0,0135.$$

На следующем шаге находим

ξ	Четные степени	Нечетные степени	x	Разность	x	Сумма
0,1	0,6065	-0,0604	0,9	0,6669	1,1	0,5461
0,2	0,6064	-0,1197	0,8	0,7261	1,2	0,4867
0,3	0,6061	-0,1766	0,7	0,7827	1,3	0,4295
0,4	0,6053	-0,2299	0,6	0,8352	1,4	0,3754
0,5	0,6035	-0,2788	0,5	0,8823	1,5	0,3247

Наибольшее расхождение равно 0,0002 при $x = 0,5$ и 0,9, так что можно продолжать. Ошибки округления имеют неизбежную тенденцию к накоплению. Если некоторое значение есть сумма m округленных слагаемых, возможна ошибка $\frac{1}{2} m$ в последнем знаке, но она накапливается только в том случае, если

ошибки всех слагаемых одного знака и одновременно достигают наибольшей величины. Обычно ошибки слагаемых распределены почти случайно и каждая из них может быть положена равной $\pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$ (стандартная ошибка). Тогда суммар-

ная ошибка m слагаемых будет $\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3} m}$ в соответствии с обычными правилами сложения случайных ошибок. Следовательно, ошибки, как правило, будут меньше этого значения, и при больших m ошибки величиной $\sqrt{\frac{1}{3} m}$ или несколько больше могут встретиться примерно в одном случае из двадцати. Если мы удерживаем в рядах Тейлора члены до шестой степени, то исходные значения для $x = 0,5; 1,0; \dots$ представляют собой суммы семи членов, и если интегрирование производится в 10 шагов, легко может накопиться ошибка в 5 единиц последнего знака. На практике этого избегают, проводя вычисления с одним или двумя лишними знаками. Некоторые вычислители настаивают на проведении вычислений до такого шага, чтобы еще можно было с уверенностью сказать, составляют ли округленные цифры 0,499 или 0,501 удерживаемого знака, и в конце округляют три последние цифры каждого значения, чтобы не округлить одно число из 500 в неверную сторону. Это вряд ли стоит затраченного труда, но сохранение одного лишнего знака — хорошее правило. При любом методе численного решения дифференциальных уравнений ошибки округления стремятся к накоплению, и так как каждая из них сохраняется на следующем шаге, их нельзя обнаружить контролем по разностям. Это особенно опасно для дифференциального уравнения вида

$$y'' = f(x)y,$$

где $f(x)$ — положительная функция. Одно решение y_1 возрастает с ростом x , а другое y_2 убывает. Тогда первые два значения решения y можно точно представить функцией вида $Ay_1 + By_2$. Если мы начинаем с 0 и пытаемся вычислить y_2 , то первые два фактически выбранные значения будут иметь ошибки округления, которые можно представить членом с y_1 , а этот последний монотонно возрастает в процессе вычислений, тогда как само y_2 убывает. За счет обеих этих причин относительная ошибка будет расти. Поэтому желательно при решении уравнений такого типа двигаться в направлении возрастания x при вычислении y_1 , и в противоположном направлении — при вычислении y_2 .

9.11. Метод Адамса — Башфорта. Этот метод основан на формуле Грегори для интерполирования назад

$$f(a + \theta h) = f(a) + \theta \nabla f(a) + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f(a) + \dots$$

Раскрывая скобки и интегрируя, находим

$$\frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) dx = f(a) + \left(\frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \frac{3}{8} \nabla^3 + \frac{251}{720} \nabla^4 + \right. \\ \left. + \frac{95}{288} \nabla^5 + \dots \right) f(a).$$

Следовательно, если

$$y' = f(x, y)$$

и известны y и f при $x \leq a$, мы можем получить значение y при $x = a + h$ по f при $x = a$ и ее восходящим разностям. При заданном шаге последовательные члены убывают гораздо медленнее, чем в ряде Тейлора. Так, в нашем примере шестая производная y при $x=0$ равна -15 . Для шага $0,5$ седьмая восходящая разность xy будет порядка $15 \cdot 0,5^6$, или около $0,24$, а коэффициент при ней равен примерно $1/5$. Следовательно, если использовать этот метод с тем же шагом, возникнут серьезные ошибки уже во втором десятичном знаке. Поэтому необходимо использовать более короткий шаг. Мы испытаем этот метод на том же примере с шагом $h=0,1$. В методе конечных разностей всегда нужно знать несколько начальных значений f . В данном случае при $x=0$ известны $y=1$, $y'=0$, $y''=-1$. Используем первые три члена ряда Тейлора для вычисления значений при $x=\pm 0,1$ и составим функцию xy и ее две первые разности. Тогда для следующего шага будем иметь

$$10\Delta y = -0,0995 - \frac{1}{2} 0,0995 - 0 = -0,1493, \quad \Delta y = -0,0149.$$

Это дает y при $x=0,2$. Образует xy и найдем теперь разности вплоть до ∇^3 . На следующем шаге

$$10\Delta y = -0,1960 - \frac{1}{2} (0,0965) + \frac{5}{12} (0,0030) + \frac{3}{8} (0,0030) = -0,2420,$$

$$\Delta y = -0,0242.$$

Отсюда находим y при $x = 0,3$ и продолжаем процесс. Как для записи, так и для чтения удобнее выписывать только значащие цифры разностей.

x	y	$-xy$	∇	∇^2	∇^3	∇^4
-0,1	0,9950	+0,0995				
0	1,0000	0,0000	-995			
0,1	0,9950	-0,0995	-995	+ 30	+30	-3
0,2	0,9801	-0,1960	-965	+ 57	+27	-0
0,3	0,9559	-0,2868	-908	+ 84	+27	-7
0,4	0,9230	-0,3692	-824	+ 104	+20	-3
0,5	0,8824	-0,4412	-720	+ 121	+17	-6
0,6	0,8352	-0,5011	-599	+ 132	+11	-6
0,7	0,7826	-0,5478	-467	+ 137	+05	-5
0,8	0,7260	-0,5808	-330	+ 137	+00	
0,9	0,6668	-0,6001	-193			
1,0	0,6064	-0,6064				

Вторые и высшие разности дают вклад большей частью в третьем десятичном знаке, так что для их вычисления можно использовать счетную линейку. Поскольку полный вклад от xy и ее разностей делится на 10, возможная ошибка каждого шага равна ошибке одного округления. Однако такая ошибка, однажды возникнув, сохраняется во всех дальнейших вычислениях. Поскольку

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a+h), \quad \nabla^n f(a) = (\nabla^n - \nabla^{n+1}) f(a+h),$$

можно переписать формулу Адамса — Башфорта в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) dx &= f(a+h) - \nabla f(a+h) + \\ &+ \left(\frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \dots \right) (1 - \nabla) f(a+h) = \\ &= f(a+h) - \left(\frac{1}{2} \nabla + \frac{1}{12} \nabla^2 + \frac{1}{24} \nabla^3 + \frac{19}{720} \nabla^4 + \frac{3}{160} \nabla^5 \dots \right) f(a+h). \end{aligned}$$

Коэффициенты при второй и высших разностях в этой формуле гораздо меньше, чем в первоначальной, и она соответственно точнее.

Как и в нижеследующем методе центральных разностей, эту формулу можно использовать, получая сначала некоторое экстраполированное значение $f(a+h)$ и затем уточняя его путем последовательных приближений.

9.12. Метод центральных разностей. Одна из трудностей метода Адамса — Башфорта состоит в том, что нужно знать, с чего начать. В предыдущем примере значения y при $x = \pm 0,1$ были рассчитаны по первым трем членам ряда Тейлора и, таким образом, была получена вторая разность, центрированная при $x=0$. Однако более высокие разности нельзя было найти, не используя большее число членов ряда Тейлора. В данном примере это еще можно было бы сделать, но часто высшие производные имеют исключительно сложную форму и их вычисление представляет собой серьезную задачу. При этом метод рядов Тейлора может оказаться вообще практически неприменимым. Так, хотя этот метод широко применяется при вычислении математических таблиц, астрономы для расчета возмущений комет предпочитают использовать совершенно иной метод. Они обычно находят несколько первых членов ряда Тейлора и используют их для вычисления четырех или пяти значений решения, а остальную работу проводят методом конечных разностей.

Другая трудность связана с большими коэффициентами при высших разностях. В предыдущих вычислениях вклад четвертых разностей был на каждом шаге заведомо в пределах ошибки округления, но так как от шага к шагу они сохраняли постоянный знак, пренебрегать ими было опасно. И, конечно, было абсолютно необходимо удерживать третьи разности. Если стремиться получить более высокую точность, потребовались бы еще более высокие разности. Но мы знаем, что в формулах центральных разностей коэффициенты при высших разностях гораздо меньше, чем в формулах Грегори. Можно так модифицировать вычисления, чтобы использовать этот факт. Например, мы просто вычисляли y при $x=0,3$, зная y при $x=0,2$ и восходящие разности $-xy$, начиная с $x=0,2$, и затем вычисляли $-xy$ при $x=0,3$ по соответствующему значению y . Тот факт, что приращение y на отрезке от $x=0,2$ до $x=0,3$ является интегралом от $-xy$ по этому отрезку, нигде непосредственно не использовался. Если отбрасывание некоторых высших разностей фактически вносит ошибку в приближенное значение y , мы имеем возможность проверить это, вычислив интеграл от приближенных значений $-xy$. Полученные два значения y должны совпадать, но этого не будет, если некоторые

высшие разности были необоснованно отброшены. Когда вся таблица заполнена, такой интеграл можно вычислить, пользуясь формулой центральных разностей. Однако это можно делать и в процессе вычислений. Имеем

$$\frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) dx = \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(a+h) - \frac{1}{12} \mu \delta^2 f_{a+1/2h} + \frac{11}{720} \mu \delta^4 f_{a+1/2h} + \dots$$

Здесь члены $\mu \delta^2$ и $\mu \delta^4$ будут малыми поправками. Но эту формулу нельзя использовать для вычисления интеграла, так как $\mu \delta^2 f_{a+1/2h}$ неизвестна, пока не вычислено f_{a+2h} , и мы не знаем $\mu \delta_{a+1/2h}$, пока неизвестно f_{a+3h} . Однако можно воспользоваться методом последовательных приближений. Эти члены малы — во всяком случае гораздо меньше, чем в методе Адамса — Башфорта. Поэтому можно экстраполировать последнюю разность, сохранявшую свое значение на одном шаге, прибавить этот результат к предыдущей разности и таким образом получить экстраполированное значение $f(a+h)$. Точно также, экстраполируя на два шага, получим экстраполированное значение $\delta^2 f_{a+h}$. Четвертая разность мала и к тому же имеет очень маленький коэффициент, так что обычно ее можно отбросить. Если этого нельзя сделать, может оказаться необходимым экстраполировать на три шага, чтобы вычислить эту разность. Таким образом, получаем пробные значения всех необходимых для вычисления интеграла величин, при этом вычислении возникает еще один малый множитель h . Следовательно, найденное значение для y при $x = a+h$ будет очень близко к точному. Используем тогда это значение для вычисления $f(a+h)$ и составим исправленные разности. Используя их, повторим вычисление интеграла и найдем гораздо более близкое приближение. При подходящем выборе шага изменение обычно будет не больше нескольких единиц в последнем знаке.

Возвращаясь к тому же примеру, запишем наши первые несколько значений следующим образом:

x	y	$-xy$	Δ	Δ^2
-0,1	0,9950	+0,0995		
			-995	
0	1,0000	0,0000		0
			-995	
+0,1	0,9950	-0,0995		

На этом шаге невозможно предсказать изменение Δ^2 , поэтому сначала положим $\delta^2 f_{0,1}$ равным нулю. Тогда имеем $\delta f_{0,15} = -0,0995$; $f_{0,2} = -0,0995 - 0,0995 = -0,1990$. Отсюда

$$10\Delta y = \frac{1}{2}(-0,0995 - 0,1990) = -0,1492, \quad \Delta y = -0,0149.$$

Поэтому полагаем $y_{0,2} = 0,9801$. Это дает $-xy = -0,1960$ вместо $-0,1990$ и $\delta f_{0,15} = -0,0965$, $\delta^2 f_{0,1} = +0,0030$, $\delta^3 f_{0,05} = +0,0030$. Это подсказывает исправленное значение $\delta^2 f_{0,2} = +0,0060$ и $\mu \delta^2 f_{0,15} = +0,0045$. Теперь таблица с необходимыми исправлениями принимает вид:

x	y	$-xy$	Δ	Δ^2	Δ^3
-0,1	0,9950	+0,0995	-995		
0,0	1,0000	0	-995	0	
+0,1	0,9950	-0,0995	-965	+30	+30
+0,2		-0,1960		(+60)	(+30)

где в скобках стоят экстраполированные значения. Исправленные значения дают

$$10\Delta y = \frac{1}{2}(-0,0995 - 0,1960) - \frac{1}{12}0,0045 = -0,1481, \quad \Delta y = -0,0148$$

и, следовательно, $y_{0,2} = 0,9802$. Таким образом, при втором приближении получилось изменение только на единицу в последнем знаке, несмотря на то что для первой экстраполяции Δ^2 не было никакой информации. С принятой точностью $-xy$ больше не изменяется. Теперь имеем

x	y	$-xy$	Δ	Δ^2	Δ^3
0	1,0000	0	-995	0	
0,1	0,9950	-0,0995	-965	+30	+30
0,2	0,9802	-0,1960	(-905)	(+60)	
0,3		(-0,2865)		(+90)	

Тогда

$$10\Delta y = \frac{1}{2}(-0,1960 - 0,2865) - \frac{1}{12}(0,0075) = -0,2418,$$

$$\Delta y = -0,0242, \quad y_{0,3} = 0,9560.$$

Это дает $-xy = -0,2868$, и мы соответственно исправляем разности. Находим измененное значение

$$10\Delta y = \frac{1}{2}(-0,1960 - 0,2868) - 0,0006 = -0,2420.$$

Исправлять y больше не нужно. Продолжаем таким же образом. После исправлений получаем окончательную таблицу:

x	y	$-xy$	Δ	Δ^2	Δ^3
-0,1	0,9950	+0,0995	-995		
0	1,0000	0	-995	0	+30
0,1	0,9950	-0,0995	-965	+30	+27
0,2	0,9802	-0,1960	-908	+57	+27
0,3	0,9560	-0,2868	-824	+84	+20
0,4	0,9231	-0,3692	-720	+104	+16
0,5	0,8825	-0,4412	-600	+120	+13
0,6	0,8353	-0,5012	-467	+133	+4
0,7	0,7827	-0,5479	-330	+137	0
0,8	0,7261	-0,5809	-193	+137	-7
0,9	0,6669	-0,6002	-63	+130	
1,0	0,6065	-0,6065			

Этот метод имеет несколько преимуществ по сравнению с методом Адамса — Башфорта. Третьи разности вообще не участвуют в вычислениях, если не считать того, что они принимаются во внимание при экстраполяции Δ^2 . Коэффициент при второй разности имеет величину всего около $1/5$. Поэтому мы более уверены в том, что не вкралась ошибка за счет пренебрежения высшими разностями. Кроме того, есть различия и в начале вычислений. Во всех методах трудно начать интегрирование, если вычисление производных вызывает затруднения. В обоих методах мы исходим из значений лишь первых двух производных при $x=0$. В методе Адамса — Башфорта это давало вторую разность только при $x=0$. Но для вычисления y при $x=0,2$ требовалась третья восходящая разность. Так как ее нельзя было получить, пришлось вычислять y при $x=0,2$ из того же квадратного трехчлена, что и при $x=0,1$. Тогда, если бы члены с x^3 и x^4 были несущественны при $x=0,1$.

но ощутимы при $x = 0,2$, этот метод привел бы к ошибке. Эту ошибку можно было бы исправить, проводя вычисления также и в обратную сторону до $x = -0,2$, но при этом пришлось бы пожертвовать прямым ходом, составляющим основное достоинство этого метода. С другой стороны, в методе центральных разностей мы получили в первом приближении то же значение при $x = 0,2$, что и в методе Адамса — Башфорта, но имели возможность его исправить и, действительно, исправили последнюю цифру.

Фактически в методе центральных разностей вначале не требуется даже значение второй разности. Допустим, что мы исходим просто из информации, что при $x = 0$, $y = 1$, $y' = 0$. Поскольку $y' = 0$, то можно принять в качестве пробных значений при $x = \pm 0,1$ то же значение y , что и при $x = 0$. Тогда на этом этапе получим таблицу:

x	y	$-xy$	Δ	Δ^2
-0,1	1,0000	+0,1000		
0,0	1,0000	0,0000	-0,1000	0
0,1	1,0000	-0,1000	-0,1000	

По той же формуле получим для $x = 0,1$

$$10(y_{0,1} - y_{0,0}) = \frac{1}{2}(0,0000 - 0,1000), \quad y_{0,1} - y_{0,0} = -0,0050,$$

что дает исправленное значение $y_{0,1} = -0,9950$. Аналогично получим значение при $x = -0,1$, даже не дифференцируя уравнения, находим данные, необходимые для начала вычислений.

Ниже приводятся точные значения, взятые из таблиц Британской Ассоциации. Для сравнения приведены ошибки в последних знаках, получившиеся при применении различных методов.

x	y	Ряд Тейлора	Адамс — Башфорт	Центральные разности
0,0	1,0000	0	0	0
0,1	0,9950	0	0	0
0,2	0,9802	0	-1	0
0,3	0,9560	0	-1	0
0,4	0,9231	0	-1	0
0,5	0,8825	0	-1	0
0,6	0,8353	0	-1	0
0,7	0,7827	+1	-1	0
0,8	0,7261	+1	-1	0
0,9	0,6670	+1	-2	-1
1,0	0,6065	0	-1	0

Насколько можно видеть из этого примера, трудно сделать выбор между методом рядов Тейлора *) и методом центральных разностей. Ошибка, появляющаяся в методе Адамса—Башфорта при $x = 0,2$, сохраняется в дальнейшем и не может быть устранена в этом методе без того, чтобы либо вычислить значение y при $x = -0,2$, либо найти следующий член ряда Тейлора. При работе методом центральных разностей нельзя обойтись без ластика.

9.121. Уравнения высших порядков. Все эти методы можно непосредственно перенести на уравнения высших порядков. Если наше уравнение имеет вид

$$y'' = Py' + Qy + R(x)$$

с условиями при $x = 0$

$$y = y_0, \quad y' = y_1,$$

то нужно только в качестве новой переменной взять $z = y'$ и записать два уравнения первого порядка

$$y' = z, \quad z' = Pz + Qy + R,$$

которые затем можно решать как и раньше, причем начальные значения для y и z заданы. Для решения этих двух уравнений мы должны по очереди переходить от одного уравнения к другому, и тогда y и z будут найдены со сравнимой точностью. Возьмем, например, уравнение, которому удовлетворяют функции Эйри

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = xy.$$

Представим его в виде двух уравнений

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = xy,$$

и исследуем их решение, принимающее $y = 1, z = 0$ при $x = 0$. Не прибегая к тейлоровскому разложению, начнем со значе-

*) Этот метод при выбранном шаге давал сразу пять значений функции, тогда как остальные методы — одно.

ний, не взятых в скобки, из нижеследующей таблицы:

x	z	xy	Δ	Δ^2	y	z	Δ	Δ^2
-0,1	(0,0050)	-0,1000				(+0,0050)		
			+1000				(-50)	
0,0	0,0000	0,0000		0	1,0000	0		(+100)
			+1000				(+50)	
0,1	(+0,0050)	0,1000				(+0,0050)		

На первом шагу имеем $\mu\delta^2(xy) = 0$ и

$$10(z_{0,0} - z_{-0,1}) = -\frac{1}{2}(0,1000 + 0) = -0,0500, \quad z_{0,1} = +0,0050,$$

$$10(z_{0,1} - z_{0,0}) = \frac{1}{2}(0 + 0,1000) = +0,0500, \quad z_{0,1} = +0,0050.$$

Переходя к правой части таблицы, получим

$$10(y_{0,0} - y_{-0,1}) = \frac{1}{2}(0,0050 + 0) - 0,0008 = 0,0017, \quad y_{-0,1} = 0,9998,$$

$$10(y_{0,1} - y_{0,0}) = \frac{1}{2}(0,0050 + 0) - 0,0008 = 0,0017, \quad y_{0,1} = 1,0002.$$

Вставляя эти значения в таблицу, находим

x	z	xy	Δ	Δ^2	y	z	Δ	Δ^2
-0,1	0,0050	-0,1000			0,9998	0,0050		
			+0,1000				-50	
0,0	0,0000	0,0000		0	1,0000	0,0000		+100
			+0,1000				+50	
0,1	0,0050	+0,1000		(0)	1,0002	0,0050		(+100)
			(+0,1000)				(+150)	
0,2	(0,0200)	(+0,2000)			(1,0014)	(0,0200)		

Значения $\Delta(xy)$ можно экстраполировать, что дает $xy = 0,2000$ при $x = 0,2$. Тогда

$$10(z_{0,2} - z_{0,1}) = \frac{1}{2}(0,3000), \quad z_{0,2} = 0,0050 + 0,0150 = 0,0200.$$

Подставим это в правую часть и образуем разности. Экстраполируя $\Delta^2 z$, получим

$$10(y_{0,2} - y_{0,1}) = \frac{1}{2}(0,0250) - 0,0008 = 0,0117,$$

$$\Delta y = 0,0012, \quad y_{0,2} = 1,0014.$$

Умножая это на 0,2 и возвращаясь к левой части, имеем $xy = 0,2003$ вместо 0,2000 и исправляем разности. Разница слишком мала для того, чтобы сколько-нибудь заметно изменить z . Таким образом, продолжим вычисления, продвигаясь поочередно в каждой части таблицы. Получим следующее решение вплоть до $x = 2,0$.

x	z	xy	Δ	Δ^2	Δ^3	y	z	Δ	Δ^2	Δ^3
-0,1	0,0050	-0,1000				0,9998	0,0050			
			1000					-50		
0,0	0,0000	0,0000		0		1,0000	0,0000		100	
			1000					50		
0,1	0,0050	0,1000		3		1,0002	0,0050		100	
			1003					150		
0,2	0,0200	0,2003		8		1,0014	0,0200		101	
			1011		10			251		
0,3	0,0451	0,3014		18		1,0046	0,0451		102	
			1029		15			353		
0,4	0,0804	0,4043		33		1,0108	0,0804		104	
			1062		18			457		
0,5	0,1261	0,5105		51		1,0210	0,1261		109	
			1113		24			566		
0,6	0,1827	0,6218		75		1,0364	0,1827		115	
			1188		27			681		
0,7	0,2508	0,7406		102		1,0580	0,2508		123	
			1290		34			804		
0,8	0,3312	0,8696		136		1,0870	0,3312		136	
			1426		41			940		17
0,9	0,4252	0,0122		177		1,1247	0,4252		153	
			1603		48			1093		16
1,0	0,5345	1,1725		225		1,1725	0,5345		169	
			1828		58			1262		27
1,1	0,6607	1,3553		283		1,2321	0,6607		196	
			2111		67			1458		32
1,2	0,8065	1,5664		350		1,3053	0,8065		228	
			2461		81			1686		39
1,3	0,9751	1,8125		431		1,3942	0,9751		267	
			2892		100			1953		48
1,4	0,1704	2,1017		531		1,5012	1,1704		315	
			3423		116			2268		59
1,5	0,3972	2,4440		647		1,6293	1,3972		374	
			4070		146			2642		71
1,6	0,6614	2,8510		793		1,7819	1,6614		445	
			4863		170			3087		88
1,7	1,9701	3,3373		963		1,9631	1,9701		533	
			5826		212			3620		106
1,8	2,3321	3,9199		1175		2,1777	2,3321		639	
			7001		260			4259		131
1,9	2,7580	4,6200		1435		2,4316	2,7580		770	
			8436		(310)			5029		(160)
2,0	3,2609	5,4636		(1745)		2,7318	3,2609		(930)	

9.13. Для уравнения второго порядка, не содержащего y' , имеются другие методы. Если

$$y'' = f(x, y), \quad (1)$$

то

$$\begin{aligned} \delta^2 y &= (e^{Dh} - 2 + e^{-Dh})y = h^2 D^2 y + \left\{ \left(2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} hD \right)^2 - h^2 D^2 \right\} y = \\ &= h^2 f + \left\{ \frac{\left(2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} hD \right)^2}{h^2 D^2} - 1 \right\} h^2 f. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку к тому же

$$\left(2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} hD \right)^2 = \delta^2, \quad (3)$$

то $\delta^2 y$ равно

$$h^2 f + h^2 \left\{ \frac{\delta^2}{\left(2 \operatorname{Arsh} \frac{1}{2} \delta \right)^2} - 1 \right\} f. \quad (4)$$

Чтобы разложить этот оператор, воспользуемся разложениями

$$\operatorname{Arsh} t = t - \frac{1}{6} t^3 + \frac{3}{40} t^5 - \frac{5}{112} t^7 + \dots, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{\operatorname{Arsh} t} \right)^2 &= \left(1 - \frac{1}{6} t^2 + \frac{3}{40} t^4 - \frac{5}{112} t^6 + \dots \right)^{-2} = \\ &= 1 + \frac{1}{3} t^2 - \frac{1}{15} t^4 + \frac{31}{945} t^6 - \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Откуда

$$h^{-2} \delta^2 y = f + \frac{1}{12} \delta^2 f - \frac{1}{240} \delta^4 f + \frac{31}{60480} \delta^6 f - \dots \quad (7)$$

Коэффициент при четвертой разности в этой формуле очень мал. Следовательно, практически допустимо вычисление $\delta^2 y$ через f и $\delta^2 f$. Затем имея, скажем, $y(a-h)$ и $y(a)$, находим $\nabla y(a)$ и, прибавляя $\delta^2 y$, получим $\Delta y(a) = y(a+h) - y(a)$. Далее путем сложения находим $y(a+h)$. Осложнение здесь в том, что $f(a+h)$ должно вычисляться через $y(a+h)$, и, пока оно не известно, мы не знаем $\delta^2 f(a)$. Но это затруднение легко обойти. Если, например, $h = 0,1$, то $\frac{1}{12} h^2 \delta^2 f$ равно приблизительно $\frac{1}{1200} f''$ и не повлияет на четвертый десятичный знак, если f'' меньше, чем 0,0600. Далее, если из предыдущих значений мы можем получить приближенное значение f'' , не превосходящее 0,0600, то можно использовать это приближенное значение в (7) и все-таки получить $\delta^2 y$ с точностью в пределах ошибки округления. Затем мы путем сложения находим пробное

значение $y(a+h)$, по нему вычисляем $f(a+h)$ и более точно находим разности последней величины. Если необходимо, мы можем уточнить приближенное значение, взятое для f'' , и повторить вычисления. В большинстве случаев, если интервал выбран надлежащим образом, редко дальнейший пересчет изменяет $\delta^2 y$ более, чем на единицу в последнем знаке.

Несколько более удобно экстраполировать $\frac{1}{12} \delta^2 f$, а не $\delta^2 f$, поскольку в любом случае предстоит умножение на малую величину h^2 . Но если таким путем приступить непосредственно к y , то нужно уделять особое внимание начальным условиям. Если бы в вышеприведенном примере мы проводили вычисление до четырех знаков после запятой, то значения y при $x=0$ и $x=0,1$ определяли бы там y' с точностью до 0,0005, и по этой причине решение было бы определено с точностью до решения этого уравнения, умноженного на 0,0005, с условиями $y=0$, $y'=1$ при $x=0$. В данном случае это решение достигает величины 3,6 при $x=2$, так что только по этой причине может накопиться ошибка в 0,0018. Это избегается в ранее использованном методе, поскольку в нем явно учитывается y' и берется его значение при $x=0$ в качестве исходного. Если, однако, пользоваться настоящим методом, то положение можно спасти лишь удерживанием лишнего знака в вычислениях.

Чтобы применить этот метод к примеру 9.121, заметим, что два первых члена разложения в ряд Тейлора имеют вид

$$y = 1 + \frac{1}{6} x^3 + \dots$$

Выпишем несколько значений y , вычисленных по этой формуле

x	y	Δ	Δ^2	xy	Δ	Δ^2	$\frac{1}{12} \delta^2$
-0,2	0,99866			-0,19973			
		+117			+9975		
-0,1	0,99983		-100	-0,09998		+23	2
		+17			+9998		
0,0	1,00000		0	0,00000		+4	0
		+17			+10002		
0,1	1,00017		(+100)	+0,10002		(+23)	2
		(+117)			(10025)		
0,2	(1,00134)		(+200)	(0,20027)		(83)	7
		(317)			(10108)		
0,3	(1,00451)			(0,30135)			

При переходе к следующему шагу можно пренебречь $\frac{1}{12} \delta^2(xy)$.

Тогда получим

$${}^{100} \delta^2 y_{0,1} = 0,10002 + 0, \quad \delta^2 y_{0,1} = 0,00100.$$

Поставим эту разность на ее место в таблице, сложим ее с $\delta y_{0,05}$, что дает $+0,00117$, и этот результат в свою очередь прибавим к $y_{0,1}$, что дает $y_{0,2} = 1,00134$. Затем по этому значению получим xy , равное $0,20027$, и составим его разности. Теперь видим, что $\frac{1}{12} \delta^2(xy)$ должно быть равно 2 в пятом десятичном знаке, но это нисколько не влияет на проведенные вычисления, и подтверждает их правильность.

На следующем шаге испытаем значение $\frac{1}{12} \delta^2(xy)_{0,2} = 0,00004$. Тогда

$$100 \delta^2 y_{0,2} = 0,20027 + 0,00004, \quad \delta^2 y_{0,2} = 0,00200.$$

Вписываем это значение в таблицу и вычисляем $y_{0,3}$. Снова вычисляем произведение xy и составляем его разности. Теперь находим, что $\frac{1}{12} \delta^2(xy)_{0,2} = 0,00007$. Эта разность опять не влияет на последнюю цифру y .

Величина $\frac{1}{12} \delta^2(xy)$ возрастает, начиная влиять на экстраполяцию y , и с некоторого момента полезно составлять дополнительную таблицу разностей $\frac{1}{12} \delta^2(xy)$ для ее экстраполяции. Таким образом, после этого момента таблица принимает вид

x	y	Δ	Δ^2	xy	Δ	Δ^2	$\frac{1}{12} \delta^2$	Δ	Δ^2
1,4	1,50089		2106	2,10125		5298	422		16
		12805			34216			98	
1,5	1,62894		2449	2,44341		6480	540		21
		15254			40696			119	
1,6	1,78148		2857	2,85037		7907	659		
		18111			48603				
1,7	1,96259		(3344)	3,33640		(9642)	(804)		
		(21455)			(58245)				
1,8	(2,17714)			(3,91885)					

По разностям величины $\frac{1}{12} \delta^2(xy)$ можно полагать, что ее следующая вторая разность будет ≈ 26 , а поэтому следующая первая разность ≈ 145 , так что на следующем шаге пробуем

$$\frac{1}{12} \delta^2(xy) = 659 + 145 = 804.$$

Тогда

$$100 \delta^2 y_{1,7} = 3,33640 + 0,00804 = 3,34444;$$

и мы записываем 3344 в столбец вторых разностей y . На следующем шаге получаем последовательно

$$\Delta y_{1,7} = 0,21455, \quad y_{1,8} = 2,17714, \quad (xy)_{1,8} = 3,91885,$$

$$\Delta(xy)_{1,7} = 0,58245, \quad \delta^2(xy)_{1,7} = 9642, \quad \frac{1}{12} \delta^2 = 804.$$

Это согласуется с пробным значением и никаких изменений не требуется. Окончательно получаем следующую таблицу:

x	y	Δ	Δ^2	xy	Δ	Δ^2	$\frac{1}{12} \delta^2$	Δ	Δ^2
-0,2	0,99866			-0,19973					
-0,1	0,99983	117	-100	-0,09998	9 975	23	2		
0,0	1,00000	17	0	0,00000	9 998	4	0		
0,1	1,00017	17	+100	0,10002	10 002	23	2		
0,2	1,00134	117	200	0,20027	10 025	83	7		
0,3	1,00451	317	302	0,30135	10 108	185	15		
0,4	1,01070	619	405	0,40428	10 293	326	27		
0,5	1,02094	1 024	511	0,51047	10 619	511	43		
0,6	1,03629	1 535	622	0,62177	11 130	743	62		
0,7	1,05786	2 157	741	0,74050	11 873	1 024	85		
0,8	1,08684	2 898	871	0,86947	12 897	1 364	114	29	
0,9	1,12453	3 769	1 014	1,01208	14 261	1 767	147	33	
1,0	1,17236	4 783	1 174	1,17236	16 028	2 248	187	40	
1,1	1,23193	5 957	1 357	1,35512	18 276	2 820	235	48	
1,2	1,30507	7 314	1 569	1,56608	21 096	3 503	292	57	10
1,3	1,39390	8 883	1 816	1,81207	24 599	4 319	360	68	14
1,4	1,50089	10 699	2 106	2,10125	28 918	5 298	442	82	16
1,5	1,62894	12 805	2 449	2,44341	34 216	6 480	540	98	21
1,6	1,78148	15 254	2 857	2,85037	40 696	7 907	659	119	26
1,7	1,96259	18 111	3 344	3,33640	48 603	9 642	804	145	31
1,8	2,17714	21 455	3 929	3,91885	58 245	11 756	980	176	39
1,9	2,43098	25 384	4 631	4,61886	70 001	14 339	1 195	215	47
2,0	2,73113	30 015	(5 477)	5,46226	84 340		(1 457)	262	

Решение отличается от предыдущего при $x = 2,0$ на $0,0007$. Это приблизительно та разность, которую можно ожидать от накопления ошибок округления. Точное решение, найденное из разложения в степенной ряд, равно $1,17230$ при $x = 1,0$ и $2,73088$ при $x = 2,0$.

Что касается ошибки, связанной с отбрасыванием члена с $\delta^4(xy)$, то она также может накапливаться. Однако, если мы просуммируем (7), то увидим, что суммарный вклад от $\delta^4(xy)$ будет приблизительно равен произведению $h^2/240$ на изменение $\delta^3(xy)$, а из таблицы видно, что это изменение ≈ 3000 в пятом десятичном знаке. Следовательно, суммарный эффект члена δ^4 в этом диапазоне составляет около 1 в шестом десятичном знаке, и он обосновано отброшен.

9.14. Метод Гаусса — Джексона. Этот метод использовали Коуэлл и Кромелин в работе о движении кометы Галлея в период между 1759 и 1910 гг. Хартри [27] применял его для решения уравнения Шредингера. Коуэлл в приложении [28] рекомендовал, однако, несколько иной метод. В дальнейшем этот метод обсуждался Джексоном [29], который отметил, что он был практически полностью разработан Гауссом. Идея состоит *во введении функции, вторые разности которой равны f* . Если такая функция есть, ее можно обозначить через $\delta^{-2}f$. Тогда (7) можно записать в виде

$$h^{-2}\delta^2y = \delta^{-2}f + \frac{1}{12}f - \frac{1}{240}\delta^2f + \frac{31}{60480}\delta^4f - \dots, \quad (8)$$

и две функции

$$h^{-2}y, \quad \delta^{-2}f + \frac{1}{12}f - \frac{1}{240}\delta^2f + \frac{31}{60480}\delta^4f - \dots \quad (9)$$

имеют одинаковые вторые разности. Однако для конкретизации решения дифференциального уравнения второго порядка необходимо задать две константы, и любая функция вида $A + Bx$ будет давать нулевую вторую разность. Следовательно, имеется свобода прибавить $A + Bx$ к $\delta^{-2}f$ и выбрать A и B так, что выражения (9) будут совпадать для двух значений x . Тогда, поскольку вторые разности одинаковы, функции равны для всех табличных значений x и

$$h^{-2}y = \delta^{-2}f + \frac{1}{12}f - \frac{1}{240}\delta^2f + \frac{31}{60480}\delta^4f - \dots \quad (10)$$

Преимущество этой процедуры заключается в том, что, если начало сделано, суммирование для получения δ^{-2} можно

выполнить точно, каждая ошибка округления в поправочных членах (10) появляется только однажды и при $h = 0,1$ она делится на 100, прежде чем переносится на следующую стадию вычислений.

Чтобы положить начало для решения того же уравнения, что и прежде, мы используем уже найденные значения при $x = 0$ и $x = 0,1$. Получим

$$100,000 = \delta^{-2}f_{0,0} + 0, \quad 100(1,000167) = \delta^{-2}f_{0,1} + \frac{1}{12}(0,10002),$$

откуда

$$\delta^{-2}f_{0,1} = 100,0083.$$

Дальнейшие вычисления очевидны*). Заполняем следующую таблицу:

x	$\delta^{-2}f$	$\delta^{-1}f$	f	$100y$	x	$\delta^{-2}f$	$\delta^{-1}f$	f	$100y$
0,0	100,0000		0,00000	100,000	1,0	117,13221		1,17230	117,230
		0,0083					5,94070		
0,1	100,0083		0,10002	100,017	1,1	123,07291		1,35505	123,185
		0,10832					7,29575		
0,2	100,11662		0,20027	100,133	1,2	130,36866		1,56599	130,499
		0,30859					8,86174		
0,3	100,42521		0,30135	100,450	1,3	139,23040		1,81195	139,381
		0,60994					10,67369		
0,4	101,03515		0,40428	101,069	1,4	149,90409		2,10111	150,079
		1,01422					12,77480		
0,5	102,04937		0,51046	102,092	1,5	162,67889		2,44323	162,882
		1,52468					15,21803		
0,6	103,57405		0,62178	103,626	1,6	177,89692		2,85014	178,134
		2,14646					18,06817		
0,7	105,72051		0,74047	105,782	1,7	195,96509		3,33613	196,243
		2,88693					21,40430		
0,8	108,60744		0,86944	108,680	1,8	217,36939		3,91853	217,696
		3,75637					25,32283		
0,9	112,36381		1,01203	112,448	1,9	242,69222		4,61846	243,077
		4,76840					29,94129		
1,0	117,13221		1,17230	117,230	2,0	272,63351		5,46178	273,089

Сначала мы образуем разность двух первых значений $\delta^{-2}f$, что дает $\delta^{-1}f_{0,05}$. При 0,1 функция f известна, и мы прибавляем ее

*) Без особых затруднений можно было бы получить дополнительную значащую цифру для $\delta^{-2}f_{0,1}$, и это улучшило бы точность. Этого, однако, не сделано для удобства сравнения с другими методами.

к $\delta^{-1}f_{0,05}$, получая $\delta^{-1}f_{0,15}$. Затем результат складывается с $\delta^{-2}f_{0,1}$, что дает $\delta^{-2}f_{0,2}$. Тогда $y_{0,2}$ определяется из уравнения

$$100y = 100,1166 + \frac{1}{12} f_{0,2}.$$

Экстраполируя, пробуем $f_{0,2} = 0,200$; поправочный член равен $+0,0167$, что дает $100y = 100,133$. Умножая это на $0,2$, имеем $f_{0,2} = 0,20027$, что не меняет третьего десятичного знака $100y$. Если на какой-либо стадии появятся изменения, то необходимо продолжить вычисления до тех пор, пока их не будет. Удобно экстраполировать $\frac{1}{12}f$ на каждой стадии, и, чтобы избежать исправлений, не вписывать f в таблицу, пока не получено второе приближение.

Четвертый десятичный знак в $\delta^{-1}f$ и третий в $\delta^{-2}f$ мало важны, однако не представляет труда их выписать, что позволяет собрать ошибки округления в таком месте, где они будут разделены на 100 при вычислении y . Результат при $x = 2,0$ есть $y = 2,73089$, что отличается на единицу в пятом знаке от точного значения, а объем дополнительных вычислений меньше, чем в любом из других методов. Нет необходимости даже выписывать разности f и y , так как они не влияют на вычисления. Однако приближение для y таково, что ошибка, вероятно, будет повторена в следующем приближении, и разности следует использовать для контроля. Желательна также время от времени проверка вторых разностей f на тот случай, что их вклад может сделаться ощутимым; однако они должны достичь $120 h^{-2}$ единиц последнего удерживаемого знака, чтобы стать существенными, и если это так, то проще уменьшить интервал. Особое внимание следует уделять вычислению первых двух значений $\delta^{-2}f$, потому что ошибка в их разности порождает ошибку в решении, которая может непрерывно нарастать в процессе вычислений. Как только четыре или пять значений y найдены, из них нужно образовать разности, чтобы проверить эту стадию вычислений.

Возможность применения этого метода связана с отсутствием члена dy/dx в дифференциальном уравнении. Этот метод настолько удобен, что, когда такой член присутствует в линейном уравнении, лучше путем преобразования уравнения исключить его. Поэтому астрономы при расчете возмущений часто предпочитают использовать прямоугольные координаты, хотя при этом нельзя применять эллиптическую орбиту в качестве первого приближения. Составляющая ускорения, связанная с

Солнцем, включается в числовые расчеты на каждой стадии и рассматривается так же, как планетарные члены. Это неудобство более значительно, чем неудобство, которое компенсируется тем, что имеют дело с дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

вместо, например, уравнений в полярных координатах

$$\frac{d}{dt}(\sin^2 \theta \dot{\lambda}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Метод Гаусса — Джексона можно приспособить к решению уравнений вида

$$y'' = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

если имеется возможность вычисления $\frac{dy}{dx}$ при табличных значениях x . Имеем

$$h \frac{dy}{dx} = \left(\mu \delta - \frac{1}{6} \mu \delta^3 + \frac{1}{30} \mu \delta^5 - \frac{1}{140} \mu \delta^7 + \dots \right) y.$$

Подставляя y из (10), находим

$$\frac{dy}{dx} = h \left(\mu \delta^{-1} - \frac{1}{12} \mu \delta + \frac{11}{720} \mu \delta^3 - \frac{191}{60480} \mu \delta^5 + \dots \right) f.$$

Здесь коэффициенты те же, что и в 9.084 (8). Дополнительные трудности, связанные с образованием

$$\left(\delta^{-1} - \frac{1}{12} \delta + \dots \right) (f_{n-1/2}, f_{n+1/2})$$

и усреднением, не являются обременительными.

Формула Эйлера — Маклорена сразу приводит к формуле интегрирования

$$y_1 - y_0 = \frac{1}{2} h \left\{ (y'_0 + y'_1) - \frac{1}{6} h \delta y''_{1/2} + \frac{1}{360} \delta^3 y'''_{1/2} \right\} + O(h^7).$$

Эта формула напоминает формулы центральных разностей для двойного интегрирования тем, что при третьем члене стоит малый множитель. Следовательно, если y'' легко вычисляется, то эту формулу можно использовать для решений уравнений первого порядка столь же просто, как формулы центральных разностей для решения уравнений второго порядка, не содержащих первой производной [30].

Если $f(x, y)$ на интервале интегрирования значительно изменяется, то может оказаться удобным увеличить или умень-

шить шаг. Чтобы перейти от шага 0,1 к шагу 0,2 при $x = 2,0$, следует использовать уже полученные значения $y_{1,8}$ и $y_{2,0}$ для нахождения соответствующих значений $\delta^{-2}f$ и начать заново. Для перехода от 0,1 к 0,05 сначала потребовалась бы интерполяция для $y_{1,95}$ и затем вычисление $\delta^{-2}f_{1,95}$, $\delta^{-2}f_{2,0}$. Последнее не будет тем же самым, что для исходного шага.

9.15. Вычисление собственных значений. Метод Гаусса—Джексона удобно сочетается с принципом Релея и дает приближенные решения в виде быстро сходящихся рядов, например для периода динамической системы. Рассмотрим, например, колебания воды в узком, эллиптическом в плане бассейне. Если ξ — поднятие поверхности воды, u — скорость, h — глубина, g — ускорение силы тяжести и b — ширина, то уравнения малых колебаний периода $2\pi/\gamma$ имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t} (b\xi) = -\frac{\partial}{\partial x} (hbu). \quad (1)$$

Положим

$$hbu = V. \quad (2)$$

Тогда после исключения u получим

$$b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \kappa^2 V = 0, \quad (3)$$

где

$$\kappa^2 = \gamma^2 / gh. \quad (4)$$

Граничные условия заключаются в том, что $V = 0$ на концах. Член с $\partial V / \partial x$ можно убрать подстановкой

$$V = b^{1/2} U; \quad (5)$$

тогда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\kappa^2 + \frac{b''}{2b} - \frac{3b'^2}{4b^2} \right) U = 0. \quad (6)$$

При

$$b \sim (1 - x^2)^{1/2} \quad (7)$$

это дает

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = - \left(\kappa^2 - \frac{1 + \frac{3}{2} x^2}{2(1 - x^2)^2} \right) U. \quad (8)$$

Можно показать (см. также гл. 16), что решения уравнений вблизи $x = \pm 1$ ведут себя как $(1 - x^2)^{-1/4}$ или $(1 - x^2)^{5/4}$. Первое давало бы V , отличное от нуля при $x = \pm 1$, и поэтому должно

быть отброшено. Задача состоит в нахождении таких значений κ^2 , которые позволили бы исключить это решение на обоих концах. В силу симметрии U должна быть либо четной, либо нечетной функцией x .

Средняя кинетическая энергия за период представляется в виде

$$4T = \int bhu^2 dx = \int \frac{V^2}{hb} dx, \quad (9)$$

а средняя потенциальная энергия

$$4W = \int gb\xi^2 dx = \int \frac{g}{v^2 b} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (10)$$

Используя тот факт, что средняя кинетическая и потенциальная энергии за период равны, получим

$$\kappa^2 = \frac{V^2}{gh} = \int \frac{1}{b} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx / \int \frac{V^2}{b} dx = \int \frac{1}{b} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx / \int U^2 dx. \quad (11)$$

Принцип Релея утверждает, что любая функция V , удовлетворяющая граничным условиям, но не дифференциальному уравнению, будет при подстановке в (11) давать ошибку второго порядка для κ^2 .

Совершенно ясно, что наименьшее значение κ должно быть таким, чтобы $\partial V/\partial x$ в целом было как можно меньше при заданном среднем V^2 , и поэтому V сохраняет знак для всех x . Следующее низшее значение будет менять знак V один раз и т. д.

Для каждого пробного значения κ^2 мы сначала составляем таблицу коэффициента при U в (8). Принимаем $U = 1,00000$, $\partial U/\partial x = 0$ при $x = 0$ и имеем для малых x

$$U = 1 - \frac{1}{2} \left(\kappa^2 - \frac{1}{2} \right) x^2 + \frac{1}{12} \left\{ \frac{1}{2} \left(\kappa^2 - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} \right\} x^4 \dots, \quad (12)$$

что дает U при $x = 0,1$ и, следовательно, $\delta^{-2}f$, где f есть правая часть (8).

Затем строится решение. Неправильное значение κ^2 обнаружится, если решение стремится к $\pm \infty$ при $x = 1$. Возьмем, например, следующие решения:

x	$U (\kappa^2 = 3)$	$U (\kappa^2 = 4)$	x	$U (\kappa^2 = 3)$	$U (\kappa^2 = 4)$
0,0	1,0000	1,0000	0,5	0,7129	0,6024
0,1	0,9875	0,9826	0,6	0,6028	0,4515
0,2	0,9506	0,9310	0,7	0,4862	0,2912
0,3	0,8908	0,8478	0,8	0,3718	0,1288
0,4	0,8104	0,7365	0,9	0,2781	-0,0292

Зная, что решения вблизи $x = 1$ должны иметь вид

$$A(1-x)^{5/4} + B(1-x)^{-1/4},$$

можно найти примерные значения A и B из двух последних строк каждой таблицы. Получим

$$x^2 = 3, \quad A = +15,5, \quad B = +10,7,$$

$$x^2 = 4, \quad A = +17,2, \quad B = -7,1.$$

Следовательно, первое решение для U стремится к $+\infty$, а второе к $-\infty$ при $x \rightarrow 1$. Интерполяция показывает, что B должно обращаться в нуль при $x^2 \approx 3,6$. Две пробных попытки для 3,4 и 3,6 подсказывают 3,56, и после этого представляется, что шаг 0,05 вместо 0,1 будет более надежным для исследования поведения вблизи $x = 1$. При этом шаге получаем следующее решение:

$$x^2 = 3,56$$

x	U	x	U	x	U
0	1,0000	0,35	0,8210	0,70	0,3754
0,05	0,9962	0,40	0,7693	0,75	0,3036
0,1	0,9850	0,45	0,7127	0,80	0,2327
0,15	0,9662	0,50	0,6510	0,85	0,1643
0,20	0,9401	0,55	0,5857	0,90	0,1000
0,25	0,9069	0,60	0,5175	0,95	0,0428
0,30	0,8671	0,65	0,4471		

Если бы решение было точным, то отношение двух последних строк должно быть близко к $2^{5/4} = 2,378$. В действительности, оно равно 2,338, так что мы весьма близки к цели. Для получения лучшего приближения воспользуемся принципом Рунге. Умножим U на $(1-x^2)^{1/4}$, чтобы получить V , продифференцируем численно, подсчитаем $(1-x^2)^{-1/2} (\partial V / \partial x)^2$ и проинтегрируем. Так как подынтегральное выражение ведет себя как $(1-x^2)^{1/2}$ вблизи $x = 1$, то лучше всего использовать для интервала от 0,90 до 1,00 формулы 9.092 и формулу Грегори до 0,90. Это дает

$$\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx = 1,6287.$$

Интегрирование U^2 выполняется просто, за исключением значений выше 0,9. Для них мы примем, что

$$U^2 = 0,0100 \left(\frac{1-x}{0,1} \right)^{5/2},$$

откуда

$$\int_{0,9}^{1,0} U^2 dx = 0,0004$$

и

$$\int_0^1 U^2 dx = 0,4596.$$

Тогда

$$\kappa^2 = \frac{1,6287}{0,4596} = 3,544; \quad \kappa = 1,882.$$

Полученные ранее совершенно другими методами [31, 32] решения дали $\kappa = 1,886$.

Решения для $\kappa^2 = 3$ и $\kappa^2 = 4$ не являлись на самом деле необходимыми для этого метода, но они приведены, чтобы показать, как можно заметить при неправильном значении κ^2 , что решение не стремится к нулю должным образом. Метод Релея будет обычно давать точность в пределах нескольких процентов, даже при весьма грубом приближении, и его можно было бы применить сначала при $U = (1 - x^2)^{3/4}$. Это сразу дает $\kappa^2 = 3,6$. Так как ошибка на каждой стадии возводится в квадрат, было бы возможно получить точность с четырьмя знаками самое большее за три попытки.

Можно было бы идти другим путем, приняв решение в виде $(1 - x^2)^{3/4}(1 + Ax^2 + Bx^4)$ и определяя A и B из условия стационарности найденного из (11) κ^2 при малых вариациях A и B . Подобный в принципе метод применен Ритцем для определения частот собственных колебаний квадратной пластины.

Для рассмотрения второй формы колебаний нужно сначала из пробного решения вычесть решение для нижней формы с таким множителем, чтобы остаток был точно ортогонален к последнему решению (см. 6.08 *).

9.16. Численное решение систем линейных уравнений. Обычно излагаемые методы являются очень трудоемкими. Мы проиллюстрируем решение на примере. Возьмем три уравнения

$$6,3x - 3,2y + 1,0z = +7,8, \quad (1)$$

$$-3,2x + 8,4y - 2,6z = -2,3, \quad (2)$$

$$+1,0x - 2,6y + 5,7z = +8,6. \quad (3)$$

*) Дальнейшее обсуждение метода Ритца см. в книге [33].

Здесь коэффициенты образуют симметричную матрицу. Это не существенно для метода, но на практике такое условие выполняется столь часто, что мы также можем взять его для примера. Разделим первое уравнение на коэффициент при x и затем умножим полученное уравнение на коэффициенты при x в двух других уравнениях. Путем сложения или вычитания исключим затем x и повторим процедуру для y . Полностью решение проводится следующим путем:

$$\begin{array}{l|l} 6,3x - 3,2y + 1,0z = + 7,8 & x - 0,508y + 0,159z = + 1,238 \\ -3,2x + 8,4y - 2,6z = - 2,3 & 3,2x - 1,63 y + 0,51 z = + 3,96 \\ + 1,0x - 2,6y + 5,7z = + 8,6 & x - 0,51 y + 0,16 z = + 1,24 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6,77y - 2,09z = + 1,66 & y - 0,309z = + 0,245 \\ -2,09y + 5,54z = + 7,36 & 2,09y - 0,65 z = + 0,51 \\ 4,89z = + 7,87 & z = + 1,609 \\ & y = + 0,245 + 0,497 = + 0,742 \\ & x = 1,238 + 0,377 - 0,256 = + 1,359 \end{array}$$

Проверяем подстановкой

$$\begin{aligned} 8,56 - 2,37 + 1,61 &= + 7,80, \\ -4,35 + 6,23 - 4,18 &= - 2,30, \\ + 1,36 - 1,93 + 9,17 &= + 8,60. \end{aligned}$$

Проверка показывает, что решение имеет точность около 0,001.

Когда имеется более чем три или четыре уравнения, часто можно ошибиться, и желательно обнаружить это до окончательной проверки подстановкой. Это может быть сделано двумя путями. 1) Если неизвестными являются x_1, x_2, \dots, x_n , то можно вышеописанным методом исключить сначала x_1 и затем x_2 . Затем переставить первые два уравнения и исключить сначала x_2 , а затем x_1 . В целом коэффициенты в упрощенных уравнениях для $x_3, x_4 \dots$ должны быть одинаковыми при обоих методах и место, где возникает различие, сразу укажет большое число шагов, на которых могла произойти ошибка. 2) Если все коэффициенты подсчитаны с одним и тем же числом десятичных знаков, то можно взять их сумму и проделать те же операции над суммами. Неважно, меняем ли мы

знак у члена в правой части, лишь бы мы всегда поступали одинаково. Таким образом,

$$\begin{aligned} 6,3 - 3,2 + 1,0 + 7,8 &= + 11,9, & 11,9/6,3 &= + 1,889, \\ 1,000 - 0,508 + 0,159 + 1,238 &= + 1,889, \end{aligned}$$

что осуществляет проверку первого деления. Далее

$$\begin{aligned} - 3,2 + 8,4 - 2,6 - 2,3 &= + 0,3, & 1,889 \times 3,2 &= 6,04, \\ 0,3 + 6,04 &= 6,34, & 6,77 - 2,09 + 1,66 &= 6,34, \end{aligned}$$

что проверяет исключение y . В этом методе контрольная сумма записывается в дополнительный столбец справа от своего уравнения, и любая ошибка может быть обнаружена сложением коэффициентов.

Другой метод, принадлежащий фон Зайделю, можно применять, когда матрица коэффициентов левой части есть матрица положительно определенной квадратичной формы. Для иллюстрации его на вышеприведенной системе уравнений запишем ее в виде

$$x = + 1,238 + 0,508y - 0,159z, \quad (4)$$

$$y = - 0,274 + 0,381x + 0,310z, \quad (5)$$

$$z = + 1,509 - 0,175x + 0,456y \quad (6)$$

и решим путем последовательных приближений. Для быстрой сходимости метода требуется, чтобы коэффициенты при x , y , z в правой части были весьма малы; в этих уравнениях они несколько велики, чтобы метод проявился наилучшим образом. Пренебрежем сначала величинами y и z в (4) и возьмем в первом приближении $x = + 1,238$. Подставим это в правую часть (5). Это дает $y = + 0,198$. Подставив оба эти значения в правую часть (6), получим $z = + 1,382$.

Вернемся снова к (4) и подставим $y = 0,198$, $z = 1,382$. Теперь имеем $x = + 1,119$. Продолжая в том же духе, получаем последовательные приближения:

x	+1,238	1,119	1,282	1,340	1,351
y	+0,198	0,580	0,703	0,735	0,740
z	+1,382	1,577	1,606	1,610	1,608

Разница между третьим приближением и четвертым мала. Если не считать образование (4), (5), (6), то метод является итерационным и контролирует сам себя. Наилучшим образом метод проявляет себя, когда число уравнений велико и все недиагональные коэффициенты малы, а многие из них нули.

Метод основан на том, что решение есть совокупность значений, при которой функция

$$S = 3,15x^2 - 3,2xy + 1,0xz + 4,2y^2 - 2,6yz + 2,85z^2 - 7,8x + 2,3y - 8,6z$$

имеет минимум. Минимум существует, потому что квадратичные члены положительно определены. Пусть он будет равен Σ , а соответствующие значения x , y , z пусть будут x_0 , y_0 , z_0 . Когда мы подгоняем какое-либо одно неизвестное, мы находим значение, которое делает S минимальной при значениях других неизвестных, равных принятым в предыдущем приближении. Следовательно, значения S , соответствующие последовательным приближениям, которые обозначим через S_n , образуют невозрастающую последовательность. Кроме того, пока все уравнения не удовлетворены, подгонка хотя бы одного из x , y , z уменьшает S_n , следовательно, если $S_n > \Sigma$, $S_{n+3} < S_n$. Положим $S_n - S_{n+3} = T_n$; тогда если рассматривать все значения x , y , z , дающие одно и то же значение S_n , то T_n является непрерывной и достигает своей нижней грани, которая поэтому не может быть равна нулю. Далее, если положить $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$, $z = z_0 + z'$, $S = \Sigma + S'$, то T_n будет положительно определенной квадратичной формой относительно x'_n , y'_n , z'_n . Пусть нижняя грань T_n при изменяющихся x' , y' , z' и постоянном S_n будет $\alpha S'_n$. Тогда $1 \geq \alpha > 0$. Если x'_n , y'_n , z'_n умножаются все на одно и то же постоянное число k , то S'_n и T'_n оба умножаются на k^2 . Таким образом, для любой совокупности значений x'_n , y'_n , z'_n приближения через три шага дадут

$$S'_{n+3} = S'_n - T'_n \leq (1 - \alpha) S'_n.$$

Поскольку последовательность $\{S'_n\}$ невозрастающая, отсюда следует, что $S'_n \rightarrow 0$. Кроме того, последовательные неравенства $S' \leq S'_n$ определяют совокупность областей x , y , z , каждая из которых содержится в предшествующей, причем их диаметры стремятся к нулю. Следовательно, значения x , y , z , даваемые этим процессом, сходятся к значениям, соответствующим $S' = 0$, т. е. к правильному решению.

9.16а. На том же принципе, что и метод фон Зайделя, основан метод Саутвелла. Его отличительные черты: 1) на каждом этапе записываются невязки всех уравнений; 2) следующий шаг состоит в уменьшении (*ликвидации*, по выражению Саутвелла) наибольшей невязки; 3) не делается никакой попытки получить в следующем приближении больше одной значащей цифры. Так, например, в той же системе уравнений

наибольшую правую часть имеет третье уравнение. Возьмем в качестве первого приближения $x = y = 0$, $z = +2$. Левые части оказываются равными $+2,0$; $-5,2$; $+11,4$. Вычитая их из правых частей, получим невязки $+5,8$; $+2,9$; $-2,8$. Наибольшая из них первая. Возьмем $x = +1$ и продолжим вычисление. Значения, выписанные для следующих приближений, являются, конечно, поправками к уже найденным приближениям:

$$\begin{array}{l} 6,3x - 3,2y + 1,0z = +7,8 \\ -3,2x + 8,4y - 2,6z = -2,3 \\ +1,0x - 2,6y + 5,7z = +8,6 \end{array} \left| \begin{array}{l} z = +2 \\ +2,0 \quad +5,8 \\ -5,2 \quad +2,9 \\ +11,4 \quad -2,8 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} x = +1 \\ +6,3 \quad -0,5 \\ -3,2 \quad +6,1 \\ +1,0 \quad -3,8 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} y = +1 \\ -3,2 \quad +2,7 \\ +8,4 \quad -2,3 \\ -2,6 \quad -1,2 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} x = +0,5 \\ +3,15 \quad -0,45 \\ -1,6 \quad -0,7 \\ +0,5 \quad -1,7 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} z = -0,3 \\ -0,30 \quad -0,15 \\ +0,78 \quad -1,48 \\ -1,71 \quad +0,01 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 6,3x - 3,2y + 1,0z = -0,15 \\ -3,2x + 8,4y - 2,6z = -1,48 \\ +1,0x - 2,6y + 5,7z = +0,01 \end{array} \left| \begin{array}{l} y = -0,2 \\ +0,64 \quad -0,79 \\ -1,68 \quad +0,20 \\ +0,52 \quad -0,51 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} x = -0,1 \\ -0,63 \quad -0,16 \\ +0,32 \quad -0,12 \\ -0,10 \quad -0,41 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} z = -0,1 \\ -0,10 \quad -0,05 \\ +0,26 \quad -0,33 \\ -0,57 \quad +0,16 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} y = -0,05 \\ +0,16 \quad -0,22 \\ -0,42 \quad +0,01 \\ +0,13 \quad +0,03 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} x = -0,04 \\ -0,25 \quad +0,03 \\ +0,13 \quad -0,09 \\ -0,04 \quad +0,07 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 6,3x - 3,2y + 1,0z = +0,03 \\ -3,2x + 8,4y - 2,6z = -0,09 \\ +1,0x - 2,6y + 5,7z = +0,07 \end{array} \left| \begin{array}{l} y = -0,01 \\ +0,03 \quad 0,00 \\ -0,03 \quad -0,01 \\ +0,03 \quad +0,04 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} z = +0,01 \\ +0,01 \quad -0,01 \\ -0,03 \quad +0,02 \\ +0,05 \quad -0,02 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} y = +0,002 \\ -0,01 \quad 0,00 \\ +0,02 \quad +0,03 \\ -0,01 \quad -0,01 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} z = -0,001 \\ -0,03 \quad 0,00 \\ +0,03 \quad 0,00 \\ -0,01 \quad 0,00 \end{array} \right.$$

Находим решение

$$x = +1,0 + 0,5 - 0,1 - 0,04 = +1,36,$$

$$y = +1,0 - 0,2 - 0,05 - 0,01 + 0,002 = +0,742,$$

$$z = +2,0 - 0,3 - 0,1 + 0,01 - 0,001 = +1,609.$$

Вообще говоря, в этом методе (и в методе фон Зайделя) на каждой стадии стоит несколько преувеличивать поправку. Если, например, в одном из приближений мы увеличим x так, что в первом уравнении невязка будет полностью устранена, то невязка во втором уравнении увеличится. Последняя компенсируется изменением y . Но это снова увеличивает невязку в первом уравнении, и требуется дальнейшее изменение x . По этой причине, особенно если недиагональные коэффициенты не малы, сходимость может быть улучшена путем преувеличения поправки.

Если, например, на некотором шаге для устранения невязки в первом уравнении требуется поправка для x , равная δ_x , а мы фактически изменили x на величину между δ_x и $2\delta_x$, то легко видеть, что мы всегда уменьшим S . В методе релаксации для дифференциальных уравнений часто стоит брать поправку равной $\frac{1}{3}\delta_x$ или даже $\frac{1}{2}\delta_x$.

9.17. Краевые задачи: обыкновенные дифференциальные уравнения. Для обыкновенного уравнения второго порядка можно задать либо значения y и dy/dx на одном конце интервала, либо значение одной из этих величин на каждом из концов интервала. В первом случае мы строим численное решение, продвигая шаг за шагом, поэтому такие задачи названы Ричардсоном *маршевыми* (marching problem)*). Второй тип задач называется *краевыми задачами*. Решение первых задач, когда уравнение линейно, можно построить по решениям двух задач Коши с условиями на одном из концов путем их линейной комбинации, такой, чтобы удовлетворялось условие на другом конце. Для нелинейных уравнений этот метод не проходит. Можно получить первое приближение, удовлетворяющее краевым условиям, а затем дифференциальное уравнение заменить уравнением в конечных разностях и использовать его для получения лучшего приближения для промежуточных значений. В качестве простого примера возьмем уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y, \quad (1)$$

причем $y=0$ при $x=0$ и $y=1$ при $x=1$. Известно, что решение есть

$$y = \frac{\sin x}{\sin(1 \text{ рад})}. \quad (2)$$

Но допустим, что мы этого не знаем. Попробуем интерполировать значение y при $x=0,5$. Получим с помощью вторых разностей для шага 0,5

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4\delta^2y = 4(y_1 + y_0 - 2y_{0,5}) = -y_{0,5}, \quad (3)$$

откуда

$$7y_{0,5} = 4y_1 + 4y_0 = 4, \quad (4)$$

$$y_{0,5} = 0,57. \quad (5)$$

Интерполируем теперь вторыми разностями для шага 0,2. Это дает первое приближение y_1 :

*) Обычно такая задача называется задачей Коши или задачей с начальными условиями. В дальнейшем будет использоваться общепринятая терминология. Это же относится к термину *jury problem*, который мы переводим как краевая задача. — *Прим. перев.*

x	y_1	y_2	y_3	y_4	Точное y
0	0	0	0	0	0
0,2	0,245	0,239	0,238	0,237	0,236
0,4	0,467	0,468	0,466	0,464	0,463
0,6	0,667	0,672	0,674	0,673	0,671
0,8	0,845	0,851	0,853	0,854	0,853
1,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

При шаге 0,2 формула (3) заменяется на

$$25(y_{-h} - 2y_0 + y_h) = -y_0, \quad (6)$$

т. е.

$$y_0 = 0,5102(y_{-h} + y_h). \quad (7)$$

По значениям y_1 при $x = 0,6$ и $x = 1,0$ это дает второе приближение для y при $x = 0,8$, а именно 0,851. По y_1 при $x = 0,4$ это дает y_2 при $x = 0,6$, равное 0,672. Таким образом, получаем столбец y_2 , а дальнейшие аналогичные аппроксимации дают y_3 и y_4 . Точные значения приведены в последнем столбце. Если требуется, можно учесть четвертые разности, но тогда необходимо продолжить решение на один шаг за конец таблицы.

9.18. Методы релаксации. Этот метод можно распространить на дифференциальные уравнения с частными производными при заданных граничных условиях. В качестве примера возьмем уравнение Лапласа. Предположим, что решение выражается в виде

$$\varphi = a_0 + a_1 r \cos \theta + b_1 r \sin \theta + a_2 r^2 \cos 2\theta + b_2 r^2 \sin 2\theta + \dots \\ \dots + b_4 r^4 \sin 4\theta. \quad (1)$$

Допустим далее, что нам заданы значения φ в точках $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Обозначим их через φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 . Затем возьмем коэффициенты вплоть до b_2 в качестве неизвестных и попытаемся их выбрать так, чтобы наилучшим образом согласовать сумму с заданными значениями в смысле метода наименьших квадратов, т. е. мы минимизируем

$$(a_0 + a_1 + a_2 - \varphi_1)^2 + (a_0 + b_1 - a_2 - \varphi_2)^2 + \\ + (a_0 - a_1 + a_2 - \varphi_3)^2 + (a_0 - b_1 - a_2 - \varphi_4)^2. \quad (2)$$

Условие минимума по a_0 дает

$$\varphi_0 = a_0 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4). \quad (3)$$

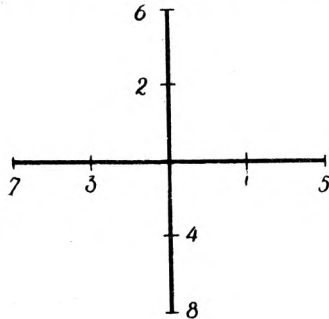
Рассмотрим теперь систему точек, показанную на рис. 35, и сохраним члены до b_4 . [Точка, отмеченная цифрой 5, есть $(2, 0)$ и т. д.] Составляя аналогичным образом сумму квадратов, находим, что условия минимума a_0 имеют вид

$$4a_0 + 34a_4 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \dots + \varphi_8),$$

$$34a_0 + 514a_4 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 8(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8),$$

откуда

$$a_0 = \frac{4}{15}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) - \frac{1}{60}(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8). \quad (4)$$



Р и с. 35.

Для системы точек на следующем рисунке снова можно оставить члены до b_4 ; однако очевидно, что a_0 зависит только от сумм

$$S_1 = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4), \quad S_2 = (\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8) \quad (5)$$

и мы получим то же самое значение для a_0 , взяв средние значения

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \frac{1}{4} S_1, \quad \varphi_5 = \varphi_6 = \varphi_7 = \varphi_8 = \frac{1}{4} S_2. \quad (6)$$

Это дает $a_1 = b_1 = a_3 = b_3 = 0$

$$\frac{1}{4} S_1 = a_0 + a_4,$$

$$\frac{1}{4} S_2 = a_0 + 4a_4,$$

откуда независимо от a_4

$$a_0 = \frac{1}{5} S_1 + \frac{1}{20} S_2. \quad (7)$$

Если функция удовлетворяет в некоторой области уравнению Лапласа и мы хотим знать ее значение в некоторой точке по значениям, заданным в окружающих ее точках прямоугольной сетки, то (3) даст приближенное значение, которое есть просто среднее значение по четырем соседним точкам. При этом учитывается только член с r^2 ; формулы (4) и (7), которые учитывают член r^4 , будут существенно более точными.

Тогда процедура будет заключаться в том, чтобы в узлах прямоугольной сетки брать пробную совокупность значений, удовлетворяющую граничным условиям, и согласовывать их по очереди.

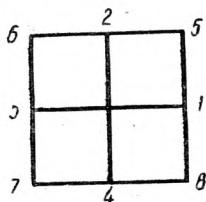


Рис. 36.

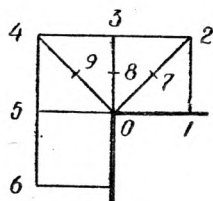


Рис. 37.

Особое внимание желательно уделять углам, где соответствующее разложение φ не будет иметь вид (1). В задаче, которую мы сейчас рассмотрим, мы имеем показанное на рис. 37 распределение точек. Возьмем φ , равным нулю вдоль границы и принимающим пробные значения в точках, помеченных цифрами 2, 3, 4, 5, 6, причем значения в точках 2, 6 и 3, 5 совпадают. Тогда вблизи угла подходящее выражение для φ будет иметь вид

$$\varphi = Ar^{2/3} \sin \frac{2}{3} \theta + Br^2 \sin 2\theta \quad (8)$$

и точные значения будут следующие:

Точка			
4	$A \cdot 2^{1/3} \sin \frac{1}{2} \pi - 2B = 1,260A - 2B,$	}	(9)
3, 5	$A \sin \frac{1}{3} \pi = 0,866A,$		
2, 6	$A \cdot 2^{1/3} \sin \frac{1}{6} \pi + 2B = 0,630A + 2B.$		

Вообще будет невозможно найти A и B так, чтобы удовлетворить трем заданным значениям φ , но мы можем подобрать их методом наименьших квадратов так, чтобы было наилуч-

шее совпадение в целом, а затем использовать это решение в качестве сглаживающей функции. Если пробные значения равны $\varphi_4, \varphi_3, \varphi_2$, мы получим минимальную сумму квадратов невязок в пяти точках, принимая

$$\begin{aligned} A &= 0,3247\varphi_4 + 0,4463\varphi_3 + 0,3247\varphi_2, \\ B &= \frac{1}{3}\varphi_2 - \frac{1}{6}\varphi_4. \end{aligned} \quad (10)$$

Сглаженные значения равны $\varphi'_4, \varphi'_3, \varphi'_2$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_4 &= 0,742\varphi_4 + 0,562\varphi_3 - 0,258\varphi_2, \\ \varphi'_3 &= 0,281\varphi_4 + 0,386\varphi_3 + 0,281\varphi_2, \\ \varphi'_2 &= -0,129\varphi_4 + 0,281\varphi_3 + 0,871\varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Это можно проверить, принимая $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ удовлетворяющими (9) точно и убеждаясь, что $\varphi'_2, \varphi'_3, \varphi'_4$ совпадают с ними. Такое сглаживание не означает, что член $r^{1/3} \sin \frac{10}{3}\theta$ равен нулю, но что он мал. Ошибки, возникающие от его присутствия, распределяются среди $\varphi'_2, \varphi'_3, \varphi'_4$, однако вблизи угла малость этого члена дает хорошее приближение.

Можно применить формулу (8) для половинного интервала. Если взять точки 7, 8, 9, делящие пополам отрезки, соединяющие начало координат с точками 2, 3, 4, то получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_7 &= 0,3968A + \frac{1}{2}B = 0,2955\varphi_2 + 0,1771\varphi_3 + 0,0455\varphi_4, \\ \varphi_8 &= 0,5456A \quad = 0,1771\varphi_2 + 0,2435\varphi_3 + 0,1771\varphi_4, \\ \varphi_9 &= 0,7937A - \frac{1}{2}B = 0,0910\varphi_2 + 0,3542\varphi_3 + 0,3410\varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если даже высшими членами в точках 2, 3, 4 нельзя пренебречь, то их влияние в точках 7, 8, 9 будет значительно меньше.

Процесс быстро сглаживает отклонения от истинного решения, пока они сказываются на разностях между значениями φ в соседних точках сетки. Для отклонений одинакового знака у группы соседних точек сглаживание происходит значительно медленнее, и может создаться впечатление, что уже достигнута хорошая точность, когда на самом деле осталась значительная ошибка (что имело место в примере, приведенном в первом издании этой книги). Саутвелл воспользовался методом,

известным под названием метода блочного сглаживания (block adjustment). Рассмотрим сумму

$$(\varphi_0 - \varphi_1 + \delta)^2 + (\varphi_0 - \varphi_2 + \delta)^2 + (\varphi_0 - \varphi_3 + \delta)^2 + (\varphi_0 - \varphi_4 + \delta)^2. \quad (13)$$

Она принимает минимум по δ при

$$\delta = \frac{1}{4} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0). \quad (14)$$

Следовательно, $\varphi_0 + \delta$ есть значение a_0 , даваемое (3). Вообще процесс сглаживания с помощью (3) эквивалентен минимизации $\sum (\varphi_r - \varphi_s)^2$, где индексами r и s помечены соседние точки сетки. Допустим теперь, что имеются пробные значения в блоке точек сетки и мы хотим найти одинаковую поправку δ по всем значениям в этом блоке, оставляя не принадлежащие ему значения неизменными. Тогда δ будут содержать только те члены суммы, у которых r соответствует крайней точке блока, а s — соседней с ней внешней точке сетки. Их можно записать в виде суммы

$$\sum (\varphi_r - \varphi_s + \delta)^2,$$

взятой по всем таким парам точек числом, скажем, N . Условие минимума этой суммы есть

$$\delta = \frac{1}{N} \sum (\varphi_s - \varphi_r). \quad (15)$$

Это поправка для всего блока.

Обсудим теперь метод, с помощью которого часто можно сделать сходимость более быстрой, чем та, которая получается бесхитростным использованием (3). Если φ в некоторой точке сетки отличается на $-\delta$ от своего среднего значения в соседних точках и мы просто делаем поправку на δ , то в следующем приближении φ в соседних точках возрастает на $\frac{1}{4}\delta$. Таким образом, разница не устранится, а лишь разделится на 4 и необходимы дальнейшие поправки. Мы можем предусмотреть это и сделать начальную поправку равной $\frac{4}{3}\delta$ вместо δ .

Для целиком внутреннего блока (т. е. полностью окруженного подлежащими уточнению значениями) этот эффект может оказаться более значительным. Если мы просто сделаем поправку δ , даваемую (15), и дважды проведем сглаживание значений для точек, прилегающих к блоку, то поправка в этих точках может составить $\frac{1}{2}\delta$. Следовательно, для такого блока обычно стоит умножить поправку на множитель, больший чем $\frac{4}{3}$; хороший результат обычно дает $\frac{3}{2}$.

Стандартная процедура должна заключаться в табулировании предполагаемых значений δ на каждой стадии с использованием (3), (4) или (7). Наибольшие значения следует умножить на $\frac{4}{3}$ и прибавить. Этот процесс будет варьироваться двояким образом. Если замечено, что поправки, необходимые для значений на контуре внутренних точек почти все одного знака, то для точек внутри и на самом контуре будет вычисляться блочная поправка. Если в задаче имеется особенность, такая, что решение вблизи нее не имеет вида (1), то лучше всего отдельно изучить, каков будет вид решения, и разработать, как для (8), метод аппроксимации для окрестности особенности, приспособленный для этого вида.

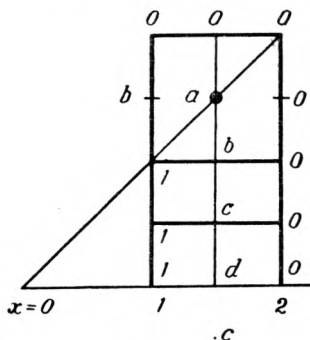


Рис. 38.

В некотором блоке может содержаться внутренний блок и удобно произвести совместное сглаживание. Если для полного блока необходима поправка δ , а рассмотрение внутреннего блока дает поправку δ' , то последняя является в действительности поправкой по отношению к внешним частям главного блока и суммарная поправка, необходимая для внутреннего блока, равна $\delta + \delta'$.

9.181. В качестве примера рассмотрим конденсатор, представляющий собой длинную призму, сечение которой ограничено двумя концентрическими, подобно расположенными квадратами со сторонами 2 и 4. Потенциал внутреннего квадрата равен 1, а наружного 0. Найдем распределение потенциала между ними. Очевидно, рассматриваемая область состоит из восьми одинаковых частей и достаточно рассмотреть лишь одну из них. В качестве первого приближения возьмем значения в точках c, d из непосредственной интерполяции в соответствии

с 9.18 (3), что дает $c = d = 0,50$. Для b имеем (используя точки на прямой под углом 45° к осям)

$$\varphi_b = \frac{1}{4}(1 + 0 + 0 + \varphi_b), \quad \varphi_b = 0,33,$$

и для a из (7)

$$\varphi_a = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}(2\varphi_b + 0) + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}(1 + 0) = 0,13 + 0,05 = 0,18.$$

Второе приближение для φ_b из (7) равно теперь

$$\varphi_b = \frac{1}{5}(1 + \varphi_a + \varphi_c + 0) + \frac{1}{20}(0 + \varphi_b + 1 + 0),$$

откуда $\varphi_b = 0,41$. Тогда φ_c и φ_d исправляются на 0,48 и 0,49 соответственно.

С этого момента имеет смысл сохранять лишнюю цифру после запятой. Продолжаем применять (7) и получаем

$$\varphi_a = 0,214, \quad \varphi_b = 0,409, \quad \varphi_c = 0,480, \quad \varphi_d = 0,492.$$

Нет смысла пытаться улучшить этот результат, не уменьшая размера ячейки, так как на значения φ_a и φ_b может повлиять близость угла. Поэтому уменьшим вдвое размер ячейки, найдем потенциалы в центрах грубых ячеек, расположенных на диагоналях, интерполируя по (3), и затем заполним с помощью (3) таблицу для соседних элементов. Однако для трех значений, ближайших к внутреннему углу, применим также (12); результаты по этому методу равны 0,706, 0,643, 0,475 в отличие от 0,722, 0,660 и 0,508 по линейной интерполяции. Первые лучше, потому что они учитывают особое поведение функции в этой области. Полученные значения показаны на рис. 39.

Возьмем блоки, указанные пунктирными линиями. Для верхнего блока упомянутая поправка получается следующим образом:

$$-16\delta = 2(197 + 156 + 106 + 54) - 2(25 + 49 + 234 + 153),$$

$$\delta = -5,8;$$

однако мы отчасти учитываем связь со значениями в соседних точках, умножая поправку на $1\frac{1}{3}$ и поэтому берем $\delta = -7$.

Делаем эту поправку и находим δ для нижнего блока; получаем $\delta = -4,1$ и аналогичным образом заменяем ее на -5 . Исправленное распределение после новой пригонки значений вблизи угла показано в правой части рис. 39.

Получим теперь с помощью (7) поправки для всех элементов; наибольшими оказываются поправки для прилегающих элементов, где исходными значениями являются 0,402 и 0,315.

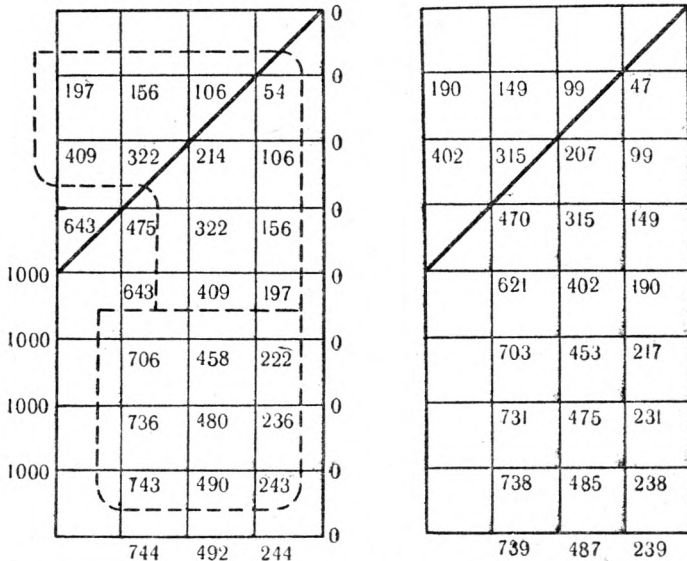


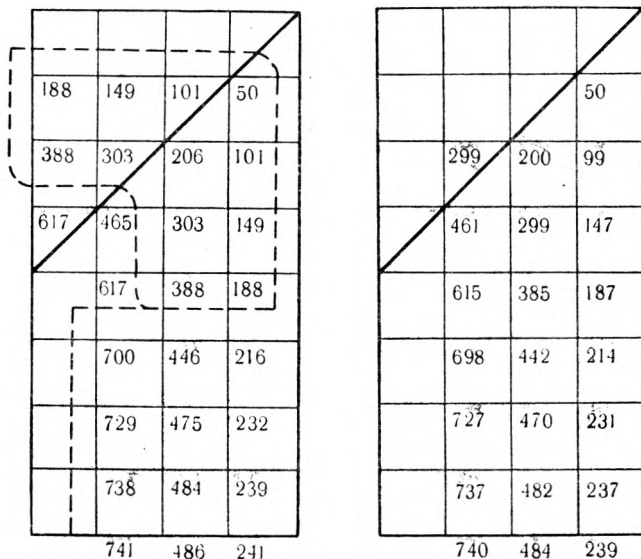
Рис. 39.

Они достигают -9 и -8 в третьем знаке. Мы делаем поправки -14 и -12 и снова исправляем все значения. Результат представлен на рис. 40.

Блочная поправка дает для верхнего блока $\delta = -2$. Ввиду симметрии нижний блок берем удвоенным (это следовало бы сделать и для предыдущей блочной поправки) и получаем $\delta = -3$. После внесения этих поправок наибольшая поправка при следующем сглаживании равна $-0,004$ и получающееся решение представлено в правой части рис. 40. Оно должно иметь точность около $0,002$.

Для нахождения емкости применяем теорему Гаусса к квадрату с тем же центром и стороной $1,5$. Используя первые центральные разности, получаем следующие значения для $-\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x}$:

y	$-\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$	Δ
1,5	0,200	
1,25	0,314	0,114
1,0	0,428	0,114
0,75	0,484	0,056
0,50	0,496	0,012
0,25	0,500	0,004
0,00	0,501	0,001



Р и с. 40.

Численным интегрированием находим

$$\int_0^{1,5} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dy = 0,645,$$

и заряд на единицу длины на внутренней призме равен

$$\frac{1}{4\pi} \times 8 \times 2 \times 0,645 = 0,821,$$

что равно емкости на единицу длины.

Аналитическое решение задачи было дано Боуменом [34]. Его результат равен 0,8144. Джилс [35] методом релаксации

получил 0,832. Для сравнения отметим, что емкость на единицу длины конденсаторов, образованных двумя круговыми цилиндрическими поверхностями радиусов 1 и 2, равна

$$\frac{1}{2} \ln 2 = 0,721.$$

Это применение метода конечных разностей для решения дифференциальных уравнений в частных производных принадлежит Ричардсону, и метод последовательных приближений всегда пригоден, если решение соответствует минимизации некоторого интеграла. Ричардсон [36—37] и Саутвелл [38] с сотрудниками распространили этот метод на многие другие типы дифференциальных уравнений, в частности на уравнения

$$\nabla^2 \phi = \omega(x, y), \quad \nabla^4 \phi = \omega(x, y).$$

Ценное усовершенствование метода дано Фоксом [39]. Метод сглаживания значений вблизи угла, подобный использованному в приведенном выше примере, принадлежит Мотцу [40]. Использованный выше метод является сочетанием методов Ричардсона, Саутвелла и Мотца. Бикли [41] дает приближенные формулы для $\nabla^2 \phi$ и $\nabla^4 \phi$ с учетом высших разностей. Большим успехом методов Саутвелла является расчет формы водопада.

9.181a. Со времени выхода первого издания этой книги получили большое развитие машинные методы вычислений. В этой книге они не описываются, но на эту тему существует много руководств. Однако многие из рассмотренных здесь методов по-прежнему применяются в том же виде, а другие являются основой для соответствующих машинных методов. Методы релаксации, описанные в **9.16** и **9.18**, в настоящее время разработаны более систематически [42]. Для электронных вычислительных машин, автоматически обеспечивающих точность в 8 или 9 знаков, нет смысла пользоваться приемом, описанным в **9.16a**. Задача, для решения которой потребовался бы целый день ручного счета, может быть решена теперь за несколько секунд. Однако составление программы занимает гораздо большее время, и все еще имеются задачи, которые на ручных машинах можно решить за более короткое время, чем то, которое требуется для составления программы и получения доступа к электронной машине.

ПРИМЕРЫ

Единственным путем освоения техники вычислений является практика. Обучающемуся следует сначала взять данные из стандартных таблиц математических функций и применить методы, описанные в этой главе.

1. Если $g(x)$ — полином степени $n-1$, равный $f(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n , то покажите, что

$$\begin{vmatrix} g(x) & 1 & x & \dots & x^{n-1} \\ f(x_1) & 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n) & 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

и что интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона следуют из двух различных способов разложения этого определителя.

2. Найдите общее решение уравнения в конечных разностях

$$\Delta^3 y_n = \Delta^2 y_n + 12 \Delta y_n. \quad (\text{I. C., 1940.})$$

3. Покажите, что когда u_n есть полином степени N относительно n , то

$$\sum_0^{\infty} u_n x^n = \frac{u_0}{1-x} - \frac{1}{1-x} \sum_1^N \left(\frac{x}{1-x} \right)^n \Delta^n u_0,$$

если ряд абсолютно сходится. Вычислите отсюда $\sum_1^{\infty} \frac{n^3 + n}{3^n}$. (I. C., 1937.)

4. Найдите действительные корни уравнения

$$(x-3)(x^3-1) = 1$$

с тремя значащими цифрами.

(I. C., 1943.)

5. Используя

$$\int_1^n \ln x \, dx = n \ln n - n + 1,$$

примените формулу Эйлера — Маклорена и покажите, что для целого n

$$\ln n! = C + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n - \frac{B_2}{1 \cdot 2n} - \frac{B_4}{3 \cdot 4 \cdot n^3} - \dots$$

6. Вычислите

$$\sum_{n=1}^{50} \frac{1}{n^2 + 5^2}.$$

7. Докажите, что

$$\int_{-1/2}^{n+1/2} f(x) \, dx = f_0 + f_1 + \dots + f_n + \frac{1}{24} (\delta^2 f_{n+1/2} - \delta^2 f_{-1/2}) - \frac{17}{5760} (\delta^3 f_{n+1/2} - \delta^3 f_{1/2}) + \dots$$

и проверьте формулу путем интегрирования $\int_{-3/2}^{3/2} x^4 \, dx$.

8. Беря логарифмы от

$$2n+1 = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2n+1}{2n-1}$$

и применяя метод Рундсона для $n = 2$ и 3 , получите значение постоянной Эйлера (0,5780).

9. Интегральная кривая уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + y^2$$

проходит через $(0, 0)$. Затабулируйте решение с точностью до трех десятичных знаков с шагом $0,1$ в интервале $0 \leq x \leq 1$. (I. C., 1936.)

10. Проиллюстрируйте метод релаксации путем нахождения значений x_1, x_2, x_3 , минимизирующих следующую функцию:

$$V = 10x_1^2 + 15x_2^2 + 20x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_1 - 2,5x_2 - x_3. \quad (\text{I. C., 1939.})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Waring E., Phil. Trans., **69**, 59—67 (1799).
2. Pearson K., Tracts for Computers, **2**, 1920.
3. Turnbull H. W., James Gregory Tercentenary Volume, 1939.
4. Turnbull H. W., Mathematical Discoveries of Newton, 1945.
5. Bell E. T., Development of Mathematics.
6. Milne-Thomson L. M., Comrie L. J., Standard Four-Figure Mathematical Tables. (Русский перевод: Милн-Томсон Л. М., Комри Л. Дж., Четырехзначные математические таблицы, изд-во «Наука», М., 1964.)
7. Comrie L. J., British Association Mathematical Tables, Vol. 1, Introduction.
8. Thompson A. J., Tracts for Computers, **5**, 1921 (second ed., 1944).
9. Chappell E., частная публикация, 1929.
10. Comrie L. J., «Interpolation and Allied Tables» в «Nautical Almanac», 1937.
11. Briggs L. J., Lowan A. N., Tables of Lagrangian Interpolation Coefficients, W. P. A., New York, 1944.
12. Comrie L. J., Inverse Interpolation.
13. Newton I., De Analsi, 1669. (Русский перевод: Ньютон И., Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов, в кн. «Математические работы», ОНТИ, М.—Л., 1937.)
14. Horner W. G., Phil. Trans., **109**, 306—335 (1819).
15. Horner W. G., Leybourne's Mathematical Repository, **5**, 1820.
16. Newton I., Principia (Lib. 1, Prop. 23), (Русский перевод: Ньютон И., Математические начала натуральной философии, в кн.: Крылов А. Н., Собр. трудов, т. 7, М.—Л., 1936.)
17. Jeffreys H., Math. Gaz., **27**, 20 (1943).
18. Mordell L. J., Nature, **119**, 42 (1927).
19. Jeffreys H., Nature, **119**, 565 (1927).
20. Fisher R. A., Wishart J., Proc. Cambr. Phil. Soc., **23**, 912—921 (1927).
21. Wirtinger W., Acta Math., **26**, 255—260 (1902).
22. Adams J. C., Collected Scientific Papers, **1**, 459—470.
23. Whittaker E. T., Robinson G., Calculus of Observations, p. 147—149. (Русский перевод: Уиттекер Э. Т., Робинсон В., Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, М.—Л., 1935.)
24. Chandrasekhar S., Radiative Transfer, Oxford, 1950, ch. II. (Русский перевод: Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.)
25. Bickley W. G., Adm. Res. Ctee., Paper 9211, 1946.
26. Miller J. C. P., Sadler D. H., British Association Mathematical Tables, Vol. 2, 1932.

27. Hartree D. R., Manchester Lit. and Phil. Mem. and Proc. 77, 1933, p. 91—107; Hartree D. R., Hartree W., Proc. Roy. Soc., **A150**, 9—35 (1935); **154**, 588—607 (1936); **156**, 45—62 (1936); **166**, 450—464 (1938).
28. Cowell P. H., Greenwich Observation, 1909.
29. Jackson J., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **84**, 602—606 (1924).
30. Hartree D. R., Proc. Cambr. Phil. Soc., **46**, 523—524 (1950).
31. Jeffreys H., Proc. Lond. Math. Soc., (2)**23**, 463 (1924).
32. Goldstein S., Proc. Lond. Math. Soc., (2)**28**, 95 (1928).
33. Temple G., Bickley W. G., Rayleigh's principle, p. 150—152.
34. Bowman F., Proc. Lond. Math. Soc., (2)**39**, 211—215 (1935); **41**, 271—277 (1936).
35. Gelles D. C., Proc. Roy. Soc., **A193**, 428 (1948).
36. Richardson L. F., Phil. Trans., **A210**, 307—357 (1910).
37. Richardson L. F., Gaunt J. A., Phil. Trans., **A226**, 299—361 (1927).
38. Southwell R. V., Relaxation Methods in Engineering Science, 1940; Relaxation Methods in Theoretical Physics, 1946.
39. Fox L., Quart. J. Mech. Appl. Math., **1**, 253—280 (1948).
40. Motz H., Quart. Appl. Math., **4**, 371—377 (1937).
41. Bickley W. G., Quart. J. Mech. Appl. Math., **1**, 35—42 (1948).
42. Forsythe G. E., Wasow W. R., Finite difference methods for partial differential equation, 1960. (Русский перевод: Вазов В., Форсайт Дж., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, М., 1963.)

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

„Когда устал от перемен,
Легко остаться верным“.

Сэр Чарльз Седли

„Основания для постоянства“

10.01. Условие стационарности интегрального функционала.

Предположим, что рассматривается интегральный функционал вида

$$S = \int_{t_0}^{t_1} f\left(\frac{dx}{dt}, x, t\right) dt, \quad (1)$$

где f — заданная функция, а относительно x известно, что это функция от t , однако не указано конкретно, какая именно. Задача вариационного исчисления состоит в определении, какой функцией от t должно быть x , чтобы на этой функции функционал S принимал стационарное значение при малых изменениях x . В качестве примера можно рассмотреть задачу об определении кратчайшего расстояния между двумя точками.

В декартовых координатах расстояние между точками (x_0, y_0) и (x_1, y_1) вдоль произвольного пути, который задается дифференцируемой функцией $y(x)$ с интегрируемой производной, имеет вид

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 \right\}^{1/2} dx. \quad (2)$$

Концы определяются заданными точками $y_0 = y(x_0)$ и $y_1 = y(x_1)$. Мы знаем, что s становится минимальным, если положить

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (3)$$

Это уравнение прямой линии, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) . Любая другая функция $y(x)$ задает путь от точки (x_0, y_0) до точки (x_1, y_1) , отличный от пути по прямой, и его длина, конечно, больше. Характерная особенность задач вариационного исчисления, в отличие от обычных задач нахождения максимума и минимума функций, состоит в том, что неизвестная

функция и ее производная находятся под знаком интеграла. Для вычисления интеграла (1) мы должны знать значения x для всех значений t в соответствующем интервале, и чтобы сделать интеграл стационарным, должны уметь, следовательно, найти бесконечное число значений x . Поэтому необходимо строго определить, что мы имеем в виду, говоря о „стационарности“.

Обозначив dx/dt через p , рассмотрим f как функцию трех переменных x , p , t и предположим, что в некоторой области изменения трех переменных вторые частные производные f по x , p , t непрерывны как функции x , p , t . Мы дадим идею доказательства только для случая, когда функции $x(t)$ имеют непрерывные вторые производные. Если $x(t)$ и $x'(t)$ такие функции и разница между ними невелика, то

$$x'(t) = x(t) + \delta x(t), \quad (4)$$

где

$$\delta x(t) = \alpha g(t), \quad (5)$$

$g(t)$ — произвольная функция с непрерывной второй производной.

Мы скажем, что при $x(t)$ функционал принимает стационарное значение, если

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_0}^{t_1} f \left(\frac{dx'}{dt}, x', t \right) dt = 0, \quad (6)$$

когда $\alpha = 0$.

Далее, при $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_0}^{t_1} f \left\{ p + \alpha \frac{dg}{dt}, x + \alpha g(t), t \right\} dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} f \left\{ p + \alpha \frac{dg}{dt}, x + \alpha g, t \right\} dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dg}{dt} \frac{\partial f}{\partial p} + g \frac{\partial f}{\partial x} \right) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Понятно, что в данных условиях первое слагаемое под знаком интеграла можно проинтегрировать по частям, после чего выражение (7) примет вид

$$\left[g \frac{\partial f}{\partial p} \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} g \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial p} \right) dt. \quad (8)$$

Из того, что выражение (8) равно нулю, нельзя сразу же заключить, что

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1$$

и

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{p}} = 0 \quad (9)$$

для всех промежуточных значений t , как можно было бы сделать, будь δx вполне произвольным.

Однако если, например, $\partial f/\partial p \neq 0$ при $t = t_0$, можно взять

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{(\tau - t)^3}{(\tau - t_0)^3} \quad (t_0 \leq t \leq \tau), \\ g(t) &= 0 \quad (\tau \leq t \leq t_1), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\tau - t_0$ может быть сколь угодно малым. Тогда d^2g/dt^2 непрерывно, и, взяв $\tau - t_0$ достаточно малым, можно добиться, чтобы $\partial S/\partial \alpha$ сколь угодно мало отличалось от проинтегрированной части. Далее, пусть существует область, скажем от $t = a$ до $t = b$, где φ положительно. Тогда возьмем

$$\begin{aligned} g(t) &= 0 \quad (t_0 \leq t \leq a), \\ g(t) &= (t - a)^3(b - t)^3 \quad (a \leq t \leq b), \\ g(t) &= 0 \quad (b \leq t \leq t_1). \end{aligned} \quad (11)$$

Снова d^2g/dt^2 непрерывно, но $\partial S/\partial \alpha$ не может обращаться в нуль при таком δx .

Итак, чтобы равенство (6) имело место, $\partial f/\partial p$ должно обращаться в нуль на концах интервала t_0, t_1 , а равенство $\varphi = 0$ должно выполняться во всех промежуточных точках. В общем случае $\partial f/\partial p$ зависит от p , поэтому $\varphi = 0$ обычно представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно x .

Для более полного ознакомления с этой теорией читатель может обратиться к работам Больца и Блисса, а также Парса. В частности, непрерывность второй производной $g(t)$ не является необходимым требованием. Из (8) видно, что существенно, чтобы функция под знаком интеграла была интегрируемой, и наши ограничительные условия это обеспечивают. Кроме того, мы рассмотрели только однопараметрическое семейство кривых, в то время как в некоторых случаях необходимо рассматривать более общий класс кривых.

Условия задачи могут включать еще и требование, чтобы $\delta x = 0$ в точках t_0 и t_1 , как это было в случае простейшей задачи о нахождении кратчайшего расстояния между двумя точками. Поскольку в выражении (2) мы рассматриваем y_0 и y_1 как наперед заданные, мы не можем варьировать y на концах; и допустимым считаются все те функции δy , для которых

$\delta y_0 = \delta y_1 = 0$. Но в таком случае $\partial f/\partial p$ уже не обязательно обращается в нуль на концах, и два граничных условия, которым должно удовлетворять решение, состоят не в равенстве нулю $\partial f/\partial p$ на концах интервала, а в том, что там y должно принимать указанные значения. Отметим, что в обоих случаях мы получаем два граничных условия, т. е. обычное число условий, выполнения которых можно требовать от решения уравнения второго порядка.

10.011. Важен случай, когда функция f не содержит t в явном виде. Умножим дифференциальное уравнение (9) на p

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} - p \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \quad (12)$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt}, \\ \frac{d}{dt} \left(p \frac{\partial f}{\partial p} \right) &= \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

так как $\partial f/\partial t = 0$. Поэтому

$$\frac{d}{dt} \left(p \frac{\partial f}{\partial p} - f \right) = p \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0, \quad (14)$$

и первый интеграл этого уравнения имеет вид

$$p \frac{\partial f}{\partial p} - f = \text{const.} \quad (15)$$

10.012. Этот случай иллюстрируется рассмотренным выше примером (2). Положим

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad f = (p^2 + 1)^{1/2},$$

тогда имеем

$$p \frac{\partial f}{\partial p} - f = \frac{p^2}{(p^2 + 1)^{1/2}} - (p^2 + 1)^{1/2} = - \frac{1}{(p^2 + 1)^{1/2}}.$$

Таким образом, p постоянно вдоль искомого пути, который, следовательно, представляет собой прямую.

10.013. Несколько более сложной является задача о брахистохроне, впервые рассмотренная Иоганном Бернулли. Пусть A и B две точки в вертикальной плоскости, связанные нерастяжимой нитью. По нити под действием силы тяжести скользит бусинка, ее скорость v_0 в точке A отлична от нуля. Какой должна быть форма нити, чтобы бусинка за минимальное время прошла путь от точки A до точки B ?

Примем A за начало координат и направим ось y вниз. Тогда скорость бусинки в точке с ординатой y равна $\sqrt{2gy + v_0^2}$, а время, необходимое для достижения точки с абсциссой X , равно

$$T = \int \frac{ds}{\sqrt{2gy + v_0^2}} = \int_0^X \frac{(p^2 + 1)^{1/2} dx}{\sqrt{2gy + v_0^2}}, \quad \text{где } p = \frac{dy}{dx}.$$

Уравнение (9) для этого функционала имеет первый интеграл

$$\frac{p^2}{(p^2 + 1)^{1/2} \sqrt{2gy + v_0^2}} - \frac{(p^2 + 1)^{1/2}}{\sqrt{2gy + v_0^2}} = - \frac{1}{(p^2 + 1)^{1/2} \sqrt{2gy + v_0^2}} = \text{const},$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = \frac{\alpha}{y + \frac{v_0^2}{2g}}.$$

Интегрируя это уравнение при помощи подстановки $y + v_0^2/2g = \alpha \sin^2 \theta$, получаем

$$x = \beta \pm \alpha \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right).$$

Таким образом, при $\alpha \neq 0$ бусинка движется по дуге циклоиды. В этом случае, если $X \neq 0$, $Y + v_0^2/2g > 0$, постоянные интегрирования можно определить из условий, что $A(0, 0)$, $B(X, Y)$ лежат на дуге и между ними нет точек возврата. Случай, когда $v_0 = 0$, может быть изучен при помощи предельного перехода. Таков ответ на вопрос, если точка B закреплена. Теперь предположим, что задана только абсцисса X точки B , но не ее ордината Y . Тогда требуется еще одно условие. Как и раньше, оно заключается в том, что $df/dr = 0$ в точке B , откуда следует, что $p = 0$ в точке B . Таким образом, если сказано только, что нижний предел расположен на заданной вертикальной линии, то искомой является та циклоида, которая пересекает эту линию горизонтально, т. е. под прямым углом.

10.014. Достаточность условий. Максимумы и минимумы.

Мы получили необходимые условия стационарности интегрального функционала; ясно, что в рассмотренных только что примерах эти условия и достаточные. Чтобы выяснить, достигает ли функционал минимума или максимума или просто является стационарным на выбранной нами функции для всех ее возможных вариаций, нужно принять в расчет вторую вариацию. В задаче о кратчайшем расстоянии между двумя точками этот

вопрос выясняется просто. Мы можем принять прямую, соединяющую данные точки, за ось абсцисс; тогда

$$\int_0^X \left\{ \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 \right\}^{1/2} dx \geq X$$

и длина выбранного пути минимальна.

10.015. Свободные пределы интегрирования. При выводе формулы (8) мы считали, что пределы интегрирования t_0 и t_1 фиксированы. Если же они тоже претерпевают изменения Δt_0 и Δt_1 , то S возрастет на $[\int \Delta t]_{t=t_1}$ на верхнем пределе интегрирования и уменьшится на $[\int \Delta t]_{t=t_0}$ на нижнем пределе.

В результате изменится проинтегрированная часть. Она примет вид

$$\left[\int \Delta t + \frac{\partial f}{\partial p} \delta x \right]_{t_0}^{t_1}.$$

В этом выражении δx представляет собой вариацию x для данного t , и поэтому, вычисляя δx_1 , не следует t_1 заменять на $t_1 + \Delta t_1$. Если проварьированная функция x в точке $t_1 + \Delta t_1$ есть $x_1 + \Delta x_1$, то имеем

$$\Delta x_1 = \delta x_1 + p_1 \Delta t_1, \quad (17)$$

и проинтегрированную часть можно записать в виде

$$\left[\left(f - p \frac{\partial f}{\partial p} \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial p} \Delta x \right]_{t_0}^{t_1}. \quad (18)$$

Возьмем, например, задачу о нахождении кратчайшего расстояния от заданной точки (a, b) до прямой $x \cos \alpha + y \sin \alpha = 1$. Как и раньше, путь должен быть прямой линией. Но в точке его пересечения с данной прямой вариации y связаны с вариациями x условием $\Delta y_1 = -\operatorname{ctg} \alpha \Delta x_1$. Поэтому (18) принимает вид

$$\left\{ (p^2 + 1)^{1/2} - \frac{p^2}{(p^2 + 1)^{1/2}} \right\} \Delta x_1 + \frac{p}{(p^2 + 1)^{1/2}} \Delta y_1 = \frac{\Delta x_1}{(p^2 + 1)^{1/2}} (1 - p \operatorname{ctg} \alpha)$$

и обращается в нуль при $p = \operatorname{tg} \alpha$.

Заметим, что так как δy_1 — это вариация y_1 при постоянном x_1 , то ее удобно записать как $(\delta y_1)_{x_1}$ в соответствии с соглашением, принятым в термодинамике, и тогда Δy_1 может быть записано как $(\delta y)_{x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha}$. Любопытно, что, несмотря на очевидную необходимость точного указания что сохраняется постоянным при взятии частной производной, в обычных обо-

значениях чистой математики не существует такого соглашения, хотя это принято в термодинамике, в теории частных корреляций в статистике и в теории вероятностей (см. [1]).

10.02. Функционалы с несколькими неизвестными функциями. Распространение теории на случай нескольких неизвестных функций не представляет труда. Если q_1, q_2, \dots, q_n — неизвестные функции и \dot{q}_r — их производные по t , то вариация

$$S = \int_{t_0}^{t_1} f(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt \quad (1)$$

для малых приращений функций $q_r(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \delta S = & \left[\left(f - \sum_r \dot{q}_r \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} \right) \Delta t + \sum_r \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} \Delta q_r \right]_{t_0}^{t_1} + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \sum_r \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} \right) \right\} \delta q_r dt, \end{aligned} \quad (2)$$

где если $\Delta t_1 \neq 0$, то

$$(\Delta q_r)_1 = (q_r + \delta q_r)_{t_1 + \Delta t_1} - (q_r)_{t_1} \quad (3)$$

и аналогично если $\Delta t_0 \neq 0$. Из этого следует, что в случае, когда вариации δq_r могут быть выбраны независимо друг от друга, условия стационарности S таковы:

$$\frac{\partial f}{\partial q_r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} \right) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

$$\left(f - \sum_r \dot{q}_r \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} \right) \Delta t + \sum_r \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} \Delta q_r = 0; \quad (5)$$

последнее условие выполняется на обоих пределах интегрирования. Если f не содержит t в явном виде, то первый интеграл, как и в 10.011, имеет вид

$$f - \sum_r \dot{q}_r \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} = \text{const.} \quad (6)$$

Если $\Delta t_0 = \Delta t_1 = 0$, то

$$\delta q_r \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} = 0 \quad (7)$$

на концах интервала интегрирования.

10.03. Физические приложения вариационного исчисления в основном разделяются на три типа: 1) Определение условий равновесия, исходя из стационарности потенциальной энергии. 2) Принцип Ферма для распространения волн: путь волны таков, что время распространения стационарно для малых вариаций пути. 3) Принцип Гамильтона в динамике.

10.04. Принцип Ферма. Для иллюстрации принципа Ферма может быть использован пример, который мы уже рассмотрели.

Если скорость волны одинакова во всех точках среды, то время распространения пропорционально расстоянию вдоль луча, и, следовательно, стационарно, если луч прямая линия. Если скорость пропорциональна $z^{1/2}$, где z — расстояние от некоторой фиксированной плоскости, то время распространения пропорционально $\int ds/\sqrt{z}$, и, чтобы сделать его стационарным, требуется в точности тот же анализ, что и в задаче о брахистохроне. Таким образом, луч есть циклоида с точками возврата на плоскости $z = 0$. Этот пример выглядит искусственным, однако в действительности он соответствует распространению упругих волн в почве при взрывах.

10.041. Другой интересный случай, когда скорость распространения волны пропорциональна расстоянию от фиксированной плоскости. Он возникает при сейсмическом исследовании верхних слоев Земли. Пусть взрыв происходит около поверхности, и время прибытия волн записывается как функция от расстояния на сфере. Скорость имеет вид $c(z_0 + z)$, где c и z_0 постоянные, тогда время T распространения из точки $(0, 0)$ в точку (x_1, z_1) равно интегралу, взятому вдоль луча

$$T = \int_0^{x_1} \frac{(1+p^2)^{1/2} dx}{c(z_0+z)},$$

где $p = dz/dx$. Переменная x не входит в подинтегральное выражение, поэтому сразу записываем первый интеграл

$$\frac{(1+p^2)^{1/2}}{c(z_0+z)} - \frac{p^2}{(1+p^2)^{1/2} c(z_0+z)} = \text{const}$$

или

$$(1+p^2)^{1/2}(z_0+z) = \text{const}.$$

Пусть луч выходит под углом e к поверхности, т. е. при $z = 0$, $p = \text{tg } e$ и

$$(1+p^2)^{1/2}(z_0+z) = z_0 \sec e.$$

Тогда

$$x_1 = \int_0^{z_1} \frac{(z_0 + z) dz}{\{z_0^2 \sec^2 e - (z_0 + z)^2\}^{1/2}} = - \left[\{z_0^2 \sec^2 e - (z_0 + z)^2\}^{1/2} \right]_0^{z_1} = \\ = z_0 \operatorname{tg} e - \sqrt{z_0^2 \sec^2 e - (z_0 + z_1)^2},$$

и, следовательно, луч есть часть окружности

$$(x - z_0 \operatorname{tg} e)^2 + (z + z_0)^2 = z_0^2 \sec^2 e.$$

Точка $x = z_0 \operatorname{tg} e$, $z = z_0 (\sec e - 1)$ является точкой наибольшего погружения луча. Время распространения до этой точки равно

$$\int_0^{z_0 \operatorname{tg} e} \frac{z_0 \sec e}{c (z_0 + z)^2} dx = \int_0^{z_0 \operatorname{tg} e} \frac{z_0 \sec e}{c \{z_0^2 \sec^2 e - (x - z_0 \operatorname{tg} e)^2\}} dx = \\ = \frac{1}{c} \left[\operatorname{Arth} \frac{x - z_0 \operatorname{tg} e}{z_0 \sec e} \right]_0^{z_0 \operatorname{tg} e} = \frac{1}{c} \operatorname{Arth} \sin e.$$

У поверхности луч снова симметрично отражается, и если X и T — расстояние по горизонтали и время выхода луча на поверхность, то

$$X = 2z_0 \operatorname{tg} e, \quad T = \frac{2}{c} \operatorname{Arth} \sin e, \quad X = 2z_0 \operatorname{sh} \frac{1}{2} cT.$$

Эти формулы в параметрическом виде (параметр e) дают расстояние и время распространения волны между точками на поверхности.

10.05. Вариация с ограничениями. Цепная линия. Допустимые вариации могут быть связаны некоторым условием, делающим их зависимыми. Рассмотрим, например, однородную цепь, подвешенную в двух закрепленных точках. Она примет такую форму, что потенциальная энергия в поле силы тяжести будет минимальной, и следовательно, если y — высота в точке x , то функционал $\int y ds$ будет стационарным. Но длина цепи фиксирована; поэтому вариации y должны удовлетворять условию $\delta \int ds = 0$. Тогда для любой постоянной λ вариация будет удовлетворять равенству

$$\delta \int (y - \lambda) ds = \delta \int (y - \lambda)(1 + y'^2)^{1/2} dx = 0,$$

и если нам удастся найти такое λ , что это равенство выполняется для *всех* вариаций y , то функционал $\int y ds$ будет

стационарным по отношению ко всем вариациям, не меняющим $\int ds$. Из равенства следует первый интеграл

$$\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}(y-\lambda) = (y-\lambda)(1+y'^2)^{1/2} + c,$$

т. е.

$$\frac{y-\lambda}{(1+y'^2)^{1/2}} = c,$$

$$x = \int \frac{c dy}{\{(y-\lambda)^2 - c^2\}^{1/2}} = c \operatorname{Arch} \frac{y-\lambda}{c} + a,$$

$$y = \lambda + c \operatorname{ch} \frac{x-a}{c}.$$

Нам заданы значения y для двух фиксированных значений x и, кроме того, длина цепи. Этих трех данных достаточно для того, чтобы определить три постоянные λ , c и a .

10.06. Принцип Гамильтона. Рассмотрим систему, состоящую из n материальных частиц. Пусть r -я частица имеет массу m_r и координаты x_{ri} . Компоненты действующей на частицу силы обозначим X_{ri} . Тогда уравнение движения r -й частицы имеет вид

$$m_r \ddot{x}_{ri} = X_{ri} \quad (r = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Умножим эти уравнения на малые векторные смещения δx_{ri} , которые являются произвольными функциями времени, и сложим все уравнения. Тогда имеем (явное суммирование ведется по r)

$$\sum_r m_r \ddot{x}_{ri} \delta x_{ri} = \sum_r X_{ri} \delta x_{ri}. \quad (2)$$

Это уравнение вполне эквивалентно уравнениям движения (1), так как δx_{ri} произвольны и поэтому можно, приравняв при них коэффициенты, восстановить исходные уравнения. Проинтегрируем (2) по времени от t_0 до t_1 и получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_r m_r \ddot{x}_{ri} \delta x_{ri} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_r X_{ri} \delta x_{ri} dt. \quad (3)$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} m_r \ddot{x}_{ri} \delta x_{ri} dt &= [m_r \dot{x}_{ri} \delta x_{ri}]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m_r \dot{x}_{ri} \frac{d}{dt} \delta x_{ri} dt = \\ &= [m_r \dot{x}_{ri} \delta x_{ri}]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m_r \dot{x}_{ri} \delta \dot{x}_{ri} dt, \end{aligned} \quad (4)$$

и поэтому (3) эквивалентно выражению

$$\left[\sum_r m_r \dot{x}_{ri} \delta x_{ri} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta \left(\frac{1}{2} \sum_r m_r \dot{x}_{ri}^2 \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_r X_{ri} \delta x_{ri} dt. \quad (5)$$

Если, кроме того, $\delta x_{ri} = 0$ в точках t_0, t_1 , то

$$\delta S \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta \left(\frac{1}{2} \sum_r m_r \dot{x}_{ri}^2 \right) + \sum_r X_{ri} \delta x_{ri} \right\} dt = 0. \quad (6)$$

Это наиболее общая форма принципа Гамильтона классической динамики. Функция $\frac{1}{2} \sum_r m_r \dot{x}_{ri}^2$ является кинетической энергией T . Если существует силовая функция W , зависящая от x_{ri} и, возможно, от t , но не от \dot{x}_{ri} , такая, что

$$X_{ri} = \frac{\partial W}{\partial x_{ri}}, \quad (7)$$

то вариация W при изменении координат x_{ri} на δx_{ri} будет $\delta W = \sum_r X_{ri} \delta x_{ri}$; из (6) получаем

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + W) dt = 0. \quad (8)$$

Так записывается принцип Гамильтона для консервативной системы. Выражения (6) и (8) содержат только скалярные величины, и мы можем пользоваться введенным выше аппаратом вариационного исчисления. Для этой цели мы просуммировали $3n$ уравнений движения и получили одно скалярное уравнение.

10.07. Обобщенные координаты и уравнения Лагранжа.

Теперь рассмотрим $3n$ таких функций q_s от координат, что, зная их, можно определить все координаты. Тогда

$$x_{ri} = x_{ri}(q_1 \dots q_{3n}), \quad (9)$$

а q_s называются *обобщенными координатами*. Используя правило суммирования по индексу s , имеем

$$\delta x_{ri} = \frac{\partial x_{ri}}{\partial q_s} \delta q_s, \quad \dot{x}_{ri} = \frac{\partial x_{ri}}{\partial q_s} \dot{q}_s, \quad \frac{\partial \dot{x}_{ri}}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial x_{ri}}{\partial q_s}, \quad (10)$$

$$2T = \sum_r m_r \left(\frac{\partial x_{ri}}{\partial q_s} \dot{q}_s \right)^2, \quad (11)$$

$$\sum_r X_{ri} \delta x_{ri} = \sum_r X_{ri} \frac{\partial x_{ri}}{\partial q_s} \delta q_s = Q_s \delta q_s \quad (12)$$

и δS может быть записано в виде

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + Q_s \delta q_s) dt, \quad (13)$$

где T и Q_s являются теперь заданными функциями от q_s , \dot{q}_s . Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt \quad (14)$$

и из условия $\delta S = 0$, как и раньше, для всех дважды дифференцируемых δq_s , приравнивая коэффициенты при δq_s , получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s. \quad (15)$$

Это *уравнения Лагранжа*. В учебниках по динамике их обычно получают прямо из (2); их вывод из принципа Гамильтона объясняет, почему левая часть имеет вид, характерный для уравнений вариационного исчисления.

Далее, может случиться, что в действительности движение зависит от некоторых связей, наложенных на x_{ri} и, следовательно, на q_s . Наиболее важен случай, когда некоторые частицы принадлежат одному абсолютно твердому телу, и координаты можно варьировать только так, чтобы расстояния между частицами этого тела оставались неизменными. Другой важный случай, когда какая-то координата вынуждена изменяться во времени определенным образом под действием внешней силы, например часть системы должна двигаться с заданной линейной или угловой скоростью. Однако мы можем рассматривать вариации δq_s , нарушающие эти ограничения; и следовательно, можем считать все δq_s независимыми и приравнять при них коэффициенты.

Тогда уравнения (15) остаются справедливыми, но меняется их физическая интерпретация. В то время как в системе свободных частиц уравнения (15) это дифференциальные уравнения для независимых координат, в системе с дополнительными связями в действительном движении некоторые из q_s будут определенными функциями от других координат и от времени, а соответствующие им Q_s реакциями, необходимыми для того, чтобы эти связи не нарушались. Далее, принято использовать множество только тех q_s , которые можно варьировать, не нарушая наложенные на систему связи. Число их как раз достаточно для описания движения. Тогда для этого множества выполняются уравнения Лагранжа. Другие же q_s не надо рассматривать совсем, до тех пор пока мы не захотим найти соответствующие реакции в явном виде. Однако возможно, что некоторые q_s из последнего множества функционально зависят от времени. В этом случае x_{ri} , зависящие от тех q_s , на которые не наложены связи, зависят еще и от времени. Таким образом, время может в явном виде войти в выражение кинетической энергии. Это не окажет влияния на вид уравнений (15), но повлияет на их первые интегралы. Для определения положения абсолютно твердого тела необходимо 6 координат. Можно сразу получить принцип Даламбера для абсолютно твердого тела, если рассматривать его состоящим из таких частиц, что сила между любыми частицами действует по прямой, их соединяющей. Сумма внутренних сил любой пары частиц равна нулю, также как и сумма моментов этих сил относительно любой оси. Кроме того, если x_i, y_i — координаты двух частиц, расстояние между которыми r , R' — сила действия второй частицы на первую, а координаты этой силы X'_i , то вклад от взаимодействия этих частиц в $\sum X_{ri} \delta x_{ri}$ равен

$$\begin{aligned} X'_i \delta x_i - X'_i \delta y_i &= R' \frac{y_i - x_i}{r} \delta x_i + R' \frac{x_i - y_i}{r} \delta y_i = \\ &= \frac{R'}{r} (x_i - y_i) (\delta y_i - \delta x_i) = -\frac{1}{2} \frac{R'}{r} \delta (y_i - x_i)^2, \end{aligned}$$

что равно нулю, если вариации таковы, что расстояние между частицами остается неизменным.

Даже если силы реакции между парой частиц не направлены вдоль соединяющей их прямой, покуда внутренние силы реакции обладают силовой функцией, которая зависит только от взаимных расстояний между всеми частицами и не распадается на части, зависящие только от расстояния между двумя частицами, эти силы реакции ничего не добавляют к $\sum_r X_{ri} \delta x_{ri}$,

если δx_{ri} не изменяют взаимных расстояний между частицами. Чтобы обобщить последнюю сумму на случай упругого тела, надо было бы вычесть энергию упругой деформации, которая обращается в нуль, если расстояния между точками не меняются. По-видимому, нет оснований считать принцип Даламбера верным, если на перемещения не наложено некоторого условия, равносильного предыдущему, однако в любом случае он является приближенным, так как все реальные тела обладают некоторой упругостью.

10.071. Неголономные системы. Иногда линейная связь, наложенная на скорости, оказывается неинтегрируемой. Тогда невозможно исключить одну координату, выразив ее через другие, и оставить лишь независимые вариации. Это случается, в частности, в задачах о качении сфер и дисков в трехмерном пространстве. Такие системы называются *неголономными*. Для рассмотрения таких систем применима прежняя методика, если использовать неопределенные множители. Для простоты предложим, что имеется только одна связь вида

$$a_s \dot{q}_s = 0, \quad (1)$$

где a_s зависит от q_s . Рассмотрим такие вариации, что

$$a_s \delta q_s = 0. \quad (2)$$

Мы все еще имеем

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s \right) \delta q_s = 0, \quad (3)$$

если только δq_s такие, что реакции не производят работы. В случае качения это означает, что не происходит скольжения. Если бы было скольжение, то тангенциальная сила совершала бы работу, равную величине этой силы, умноженной на величину скольжения. Поэтому условием выполнения (3) при неизменных Q_s является просто (2). Мы все же предполагаем, что варьированный путь сам удовлетворяет связям, и в общем случае это не так, но предполагаем, что связям удовлетворяют δq_s . Тогда для произвольного λ имеем

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s - \lambda a_s \right) \delta q_s = 0. \quad (4)$$

Выберем какое-нибудь q_s , скажем q_1 , так, чтобы $a_1 \neq 0$, и предположим, что λ выбрано таким, что коэффициент при δq_1 в (4) обращается в нуль. Имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 - \lambda a_1 = 0. \quad (5)$$

Теперь все другие δq_s можно выбрать произвольно, так как при любом выборе их значений δq_1 определяется из (3) и никак не влияет на (4), поскольку имеет место (5). Затем, так как (4) верно для всех δq_s ($s = 2, 3, \dots$), то можно приравнять коэффициенты и получить

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s - \lambda a_s = 0 \quad (s \neq 1). \quad (6)$$

Если имеется m координат q_s , то последние уравнения вместе с (5) дают m дифференциальных уравнений, связывающих координаты и неизвестное λ ,

но, кроме того, у нас есть условие (1), и поэтому система уравнений в общем случае разрешима.

Несмотря на бесспорную простоту и общность метода неопределенных множителей, он почти никогда не применяется для решения конкретных задач в неголономных системах. Мы видим, что сумма $\lambda a_s \delta q_s$ прибавляется к $Q_s \delta q_s$ и, следовательно, представляет собой работу, проделанную реакциями, при произвольном перемещении, не удовлетворяющем условию (2). Если неопределенный множитель выбран так, что $a_s \dot{q}_s$ — скорость скольжения, то $a_s \delta q_s$ — величина скольжения при произвольном перемещении, и $-\lambda$, следовательно, реакция, препятствующая скольжению. Таким образом, этим методом нельзя избежать явного введения реакций, а только указывается другой путь их определения. Он требует явного определения всех координат, чего часто можно избежать, применяя движущуюся систему координат. Например, задачу о качении сферы метод движущейся системы координат позволяет рассмотреть без связи с каким-либо абсолютным положением осей, фиксированным в сфере. Поэтому уравнения движения получаются прямо для угловых скоростей по отношению к осям, удобным образом выбранным относительно поверхности, по которой катится сфера.

Метод неопределенных множителей требует введения трех углов Эйлера с последующим их исключением, так как их поведение обычно не представляет интереса.

10.072. Первые интегралы. Поскольку для консервативной системы существует силовая функция W , зависящая только от q_s и такая, что $\frac{\partial W}{\partial q_s} = Q_s$, и если T и W не зависят явно от времени, то имеем обычный первый интеграл **10.02** (6), именно

$$\dot{q}_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - T - W = \text{const.} \quad (1)$$

Если T — квадратичная форма относительно \dot{q}_s , то (1) превращается в интеграл энергии $T - W = \text{const}$. Однако первый интеграл подобного вида может иметь место, даже когда работа должна быть произведена извне для сохранения связей, если только *остальные* силы обладают силовой функцией, которую мы будем по-прежнему обозначать через W . В этом случае некоторые из координат задаются как функции от времени, и T может не быть однородной квадратичной формой от неизвестных \dot{q}_s , так как \dot{x}_{ri} отчасти зависят от заданных скоростей. Но если T и W не зависят явно от времени, интеграл (1) все еще имеет место. Пусть

$$T = T_2(\dot{q}_s) + T_1(\dot{q}_s) + T_0(\dot{q}_s), \quad (2)$$

где T_2, T_1, T_0 — однородные многочлены степени 2, 1, 0 от неподчиненных связям \dot{q}_s с коэффициентами, возможно зависящими от q_s , но не от t , тогда имеем

$$\dot{q}_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = 2T_2 + T_1, \quad (3)$$

и, следовательно, интеграл энергии заменится на следующий:

$$T_2 - T_0 - W = \text{const.} \quad (4)$$

Этот интеграл часто оказывается полезным. Рассмотрим окружность из проволоки, расположенную в вертикальной плоскости и вращающуюся вокруг своего вертикального диаметра с заданной угловой скоростью ω . Тяжелая частица может свободно скользить по окружности. Тогда кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} ma^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \omega^2) + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (5)$$

и силовая функция равна $mga \cos \theta$.

Далее, если ω постоянна, то T не зависит от времени в явном виде и можно сразу написать первый интеграл

$$\frac{1}{2} ma^2 (\dot{\theta}^2 - \sin^2 \theta \omega^2) - \frac{1}{2} I \omega^2 - mga \cos \theta = \text{const.} \quad (6)$$

Член $\frac{1}{2} I \omega^2$ представляет собой константу, следовательно, он не существен. Функция в левой части не равна энергии $T - W$ и не постоянна, а меняется за счет работы, которая должна быть проделана связями, чтобы сохранить ω постоянной, в то время как θ меняется. В действительности, если N есть необходимый момент, то для мощности имеем

$$\begin{aligned} N\omega &= \frac{d}{dt} (T - W) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} ma^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \omega^2) + \frac{1}{2} I \omega^2 - mga \cos \theta \right\} = \\ &= \frac{d}{dt} (ma^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + I \omega^2) = 2ma^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Поэтому

$$N = ma^2 \frac{d}{dt} (\sin^2 \theta \omega) \quad (8)$$

есть момент, необходимый для поддержания постоянной угловой скорости частицы, так как момент количества движения самой частицы относительно вертикальной оси равен $ma^2 \sin^2 \theta \omega$ и, следовательно, меняется в зависимости от θ при постоянной ω .

10.073. Уравнения Лагранжа для волчка. Мы имеем

$$2T = A(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\lambda}^2) + C(\dot{\chi} + \dot{\lambda} \cos \theta)^2,$$

$$W = -Mgh \cos \theta.$$

Поскольку в это выражение λ и χ входят только через свои производные, сразу записываем два первых интеграла

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}} = C(\dot{\chi} + \lambda \cos \theta) = Cn = \text{const},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = A \sin^2 \theta \dot{\lambda} + Cn \cos \theta = \text{const}.$$

Уравнение для θ имеет вид

$$A(\ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\lambda}^2) + Cn \sin \theta \dot{\lambda} = Mgh \sin \theta.$$

При рассмотрении *малых* колебаний относительно установившегося движения удобно использовать последнее уравнение, а не уравнение энергии, потому что амплитуда зависит от θ линейным образом.

Если ось вращения близка к вертикальной, то углы λ , χ отсчитываются относительно почти совпадающих осей. Поэтому, когда рассматриваются малые колебания около вертикали, удобно вместо координаты χ рассматривать новую координату $\psi = \chi + \lambda$, так что имеем

$$2T = A(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\lambda}^2) + C\{\psi - \lambda(1 - \cos \theta)\}^2.$$

Если через l , m , v обозначить направляющие косинусы оси вращения по отношению к закрепленным осям (ось z вертикальна), то получим

$$\cos \theta = v = 1 - \frac{1}{2}(l^2 + m^2) + O(\theta^4),$$

$$\begin{aligned} \lambda(1 - \cos \theta) &= 2\lambda \sin^2 \frac{1}{2} \theta = \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \theta + O(\theta^4) = \\ &= \frac{1}{2}(l\dot{m} - m\dot{l}) + O(\theta^4), \end{aligned}$$

$$\theta^2 + \sin^2 \theta \dot{\lambda}^2 = \dot{l}^2 + \dot{m}^2 + \dot{v}^2 = \dot{l}^2 + \dot{m}^2 + O(\theta^4).$$

Поэтому имеем точное равенство

$$\psi - \lambda(1 - \cos \theta) = n$$

и с точностью до θ^2 получаем

$$\begin{aligned} 2T &= A(\dot{l}^2 + \dot{m}^2) + C\left\{\psi - \frac{1}{2}(l\dot{m}^2 - m\dot{l})\right\}^2, \\ 2W &= Mgh(l^2 + m^2), \end{aligned}$$

откуда, выбирая l и m за лагранжевы координаты, получаем уравнения

$$A\ddot{l} + Cn\dot{m} = Mghl, \quad A\ddot{m} - Cn\dot{l} = Mghm,$$

которые мы обсуждали в 4.092. Тот же прием сложения двух координат, задающих вращения относительно почти совпадающих осей, используется в теории движения планет, чтобы максимально использовать простоту случая, возникающую из-за малых взаимных наклонов орбит.

10.08. Уравнение Гамильтона — Якоби. Предположим, что система голономна и существует силовая функция W ; введем функцию Лагранжа $L = T + W$. Имеем

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt, \quad (1)$$

если пределы интегрирования постоянны. Но если t_0 , t_1 тоже изменяются на Δt_0 , Δt_1 и Δq_s будет вариацией q_s при новых пределах, то проинтегрированная часть примет вид

$$\left[\left(L - \dot{q}_s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \Delta q_s \right]_{t_0}^{t_1}, \quad (2)$$

так как

$$\Delta q_s = \delta q_s + \dot{q}_s \Delta t.$$

Положим

$$\dot{q}_s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - L = H, \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = p_s. \quad (4)$$

H называется функцией Гамильтона, а p_s — обобщенным импульсом и

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = [-H \Delta t + p_s \Delta q_s]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt. \quad (5)$$

Если теперь мы предположим, что q_s заданы в моменты t_0 , t_1 , то соответствующие p_s будут, вообще говоря, определены, так как только один набор импульсов p_s в точке t_0 даст заданный набор перемещений к моменту времени t_1 . Поэтому, если

$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ берется вдоль пути движения системы, то S будет

представлять собой определенную функцию от t_0 , t_1 , $(q_s)_0$, $(q_s)_1$. S называется *главной функцией* Гамильтона. Это функция от q_s для реальных моментов времени t_0 , t_1 , но так как они могут изменяться, то мы можем заменить t_1 на t .

Тогда, поскольку последний интеграл в выражении (5) обращается в нуль, в силу уравнений Лагранжа, то в момент времени t имеем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H, \quad \frac{\partial S}{\partial q_s} = p_s, \quad (6)$$

а в момент t_0

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t_0}\right) = (H)_{t_0}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial q_{s0}}\right) = -(p_s)_{t_0}. \quad (7)$$

Теперь можно использовать (4), чтобы исключить \dot{q}_s из H , тогда H станет функцией q_s , p_s и, возможно, t . Тогда

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q_s, p_s, t) = -H\left(q_s, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right). \quad (8)$$

Это уравнение Гамильтона — Якоби. Оно представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка от $n+1$ переменной. В него не входит S в явном виде, и поэтому его полный интеграл содержит $n+1$ независимых постоянных. С нашей первоначальной точки зрения, S является функцией только t и содержит $2n+1$ произвольных постоянных, а именно t_0 , исходные координаты и импульсы; однако если начальные и конечные координаты и $t-t_0$ заданы, то начальные импульсы определены и, следовательно, не являются произвольными. Поэтому естественно, что S , выраженное как функция t и q_s , включает именно $n+1$ произвольных постоянных.

Если L не зависит от времени явно, то $H = \text{const}$ есть интеграл энергии. Обозначив последнюю постоянную через h , имеем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -h, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial t_0}\right) = h. \quad (9)$$

Поэтому

$$S = -h(t-t_0) + f(q_s, q_{s0}). \quad (10)$$

Как и раньше, $\partial S/\partial q_{s0}$ равно просто $-p_{s0}$, что не зависит от t , и, таким образом, у нас есть n уравнений, выражающих тот факт, что $\partial S/\partial q_{s0}$, являющиеся функциями q_s , q_{s0} и, может быть, t , постоянны во время всего движения и равны $-p_{s0}$.

Отсюда если мы задались S , то у нас есть n уравнений для определения q_s через t и начальные условия; поэтому, если можно определить S , то полное решение задачи сводится к решению этих уравнений. Этот результат принадлежит Гамильтону. Сложность его применения в только что сформулированном виде заключается в том, что, хотя бывает довольно легко получить полный интеграл уравнения (8), включающий $n+1$ постоянных, эти постоянные обычно зависят и от q_{s0} и

от p_{s0} и выразить их только через q_{s0} , часто нелегко. Эта теорема была дополнена Якоби, который обнаружил, что *любой* полный интеграл уравнения (8) можно использовать точно таким же образом, как и полный интеграл, зависящий только от q_{s0} . Однако для доказательства этого положения мы нуждаемся в гамильтоновой форме уравнений движения.

10.09. Уравнения Гамильтона. Функция Лагранжа L зависит от q_s , \dot{q}_s и, возможно, от t ; функция Гамильтона H зависит от q_s , p_s и, возможно, от t . Для произвольных вариаций q_s и \dot{q}_s при неизменном t имеем

$$\delta H = \delta (\dot{q}_s p_s - L) = \dot{q}_s \delta p_s + p_s \delta \dot{q}_s - \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s. \quad (11)$$

Но по определению $p_s = \partial L / \partial \dot{q}_s$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \delta H &= \dot{q}_s \delta p_s - \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s, \\ \dot{q}_s &= \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_s} = - \frac{\partial L}{\partial q_s}. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее, из уравнений Лагранжа

$$\dot{p}_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial L}{\partial q_s} = - \frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad (13)$$

и поэтому

$$\dot{p}_s = - \frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad \dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}. \quad (14)$$

Это *уравнения Гамильтона*. Их надо рассматривать как систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка, в то время как n уравнений Лагранжа являются уравнениями второго порядка.

Уравнения Гамильтона могут быть прямо связаны с вариационным принципом следующим образом. Положим (см. [2])

$$B = \int_{t_0}^{t_1} \{ p_s \dot{q}_s - H(q_s, p_s) \} dt. \quad (15)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta B &= \int_{t_0}^{t_1} \left(p_s \delta \dot{q}_s + \dot{q}_s \delta p_s - \frac{\partial H}{\partial q_s} \delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_s} \delta p_s \right) dt = \\ &= [p_s \delta q_s]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(-\dot{p}_s \delta q_s + \dot{q}_s \delta p_s - \frac{\partial H}{\partial q_s} \delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_s} \delta p_s \right) dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения Гамильтона

$$\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad \dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad (17)$$

являются условиями стационарности B для всех вариаций $\delta q_s, \delta p_s$, таких, что $\delta q_s = 0$ при t_0, t_1 , если считать, что p_s, q_s изменяются независимо. Когда уравнения (17) удовлетворены, а пределы интегрирования тоже изменились, имеем

$$\delta B = [(p_s \dot{q}_s - H) \Delta t + p_s \delta q_s]_{t_0}^{t_1} = [p_s \Delta q_s - H \Delta t]_{t_0}^{t_1}, \quad (18)$$

что есть в точности δS .

Последнее рассуждение *не доказывает* уравнений Гамильтона. Поскольку, при обычном определении $p_s = \partial L / \partial \dot{q}_s$ и между p_s и \dot{q}_s существуют соотношения, то вариации $\delta q_s, \delta p_s$ не являются независимыми. Поэтому мы не в праве приравнять коэффициенты при них нулю. С другой стороны, если отвлечься от предыдущего определения p_s , то не будет причин, по которым интеграл мог бы оказаться стационарным для вариаций p_s , не связанных с q_s . Однако непосредственно из определения $p_s = \partial L / \partial \dot{q}_s$, дифференцируя равенство (3) по p_s , получаем $\dot{q}_s = \partial H / \partial p_s$, а динамика движения характеризуется оставшимся набором уравнений. Поэтому коэффициенты при δp_s в (16) тождественно равны нулю, следовательно, коэффициенты при δq_s тоже можно приравнять нулю, что приведет ко второму набору уравнений Гамильтона. Примечательно, что хотя в действительности p_s однозначно определяются через скорости, тем не менее если рассматривать их как независимые, B становится стационарным при выполнении $2n$ уравнений Гамильтона. Итак, B стационарно, независимо от того, имеются связи между вариациями или их нет.

10.10. Теорема Якоби. Пусть

$$S = f(q_1, \dots, q_n; t; \alpha_1, \dots, \alpha_n) + \alpha_{n+1} \quad (19)$$

есть полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби. Обычно константы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ являются координатами в начальный момент t_0 ; однако Якоби отказывается от этого и вместо $\partial S / \partial q_{s0} = -p_{s0}$ полагает

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = -\beta_r, \quad (20)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_s} = p_s, \quad (21)$$

где β_r — новые константы. Теорема состоит в том, что если эти уравнения все еще рассматривать как уравнения для определения q_s и p_s , то получающиеся в результате q_s и p_s будут

удовлетворяют уравнениям Гамильтона и поэтому будут описывать движение системы. Следовательно, из (20) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial q_s} \right) \frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = \\ &= \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_r \partial t} + \dot{q}_s \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_r \partial q_s} = - \frac{\partial H}{\partial \alpha_r} + \dot{q}_s \frac{\partial p_s}{\partial \alpha_r}. \end{aligned} \quad (22)$$

Но α_r входит в H только благодаря тому, что p_s , определенные в (21), зависят от α_r . Поэтому

$$0 = - \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial \alpha_r} + \dot{q}_s \frac{\partial p_s}{\partial \alpha_r} = \left(\dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s} \right) \frac{\partial p_s}{\partial \alpha_r}. \quad (23)$$

Это верно для $r = 0, 1, \dots, n$; следовательно, или

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad (s = 0, 1, \dots, n), \quad (24)$$

или

$$\frac{\partial (p_1 \dots p_n)}{\partial (\alpha_1 \dots \alpha_n)} = 0. \quad (25)$$

Выполнение (25) означало бы наличие функциональных связей между p_s , и начальные импульсы не могли бы меняться независимо. Поэтому верно (24). Снова из (21) имеем

$$\frac{dp_s}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_m \frac{\partial}{\partial q_m} \right) \frac{\partial S}{\partial q_s} = - \left(\frac{\partial H}{\partial q_s} \right)_\alpha + \left(\frac{\partial H}{\partial p_m} \right)_q \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_s} \right)_\alpha. \quad (26)$$

Но

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_s} \right)_\alpha = \left(\frac{\partial H}{\partial q_s} \right)_p + \left(\frac{\partial H}{\partial p_m} \right)_q \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_s} \right)_\alpha, \quad (27)$$

и поэтому

$$\frac{dp_s}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial q_s} \right)_p. \quad (28)$$

Следовательно, q_s и p_s , найденные из (20) и (21), удовлетворяют уравнениям Гамильтона.

10.11. Теория преобразований. Любое преобразование от координат q_s к новому набору n координат q'_r , такое, что между новыми координатами нет функциональных связей, дает возможность по-новому описать динамическую задачу. Для q'_r будут выполняться уравнения Лагранжа, которые можно преобразовать в уравнения Гамильтона точно таким же образом, как и раньше. Такое преобразование называется *точечным преобразованием*. Однако существует более общий тип преобразований, называемых *контактными*. Это такие преобразо-

вания, при которых q'_r определяются как через q_s , так и через p_s , но тем не менее все еще можно так определить множество p'_r , что q'_r и p'_r будут удовлетворять уравнениям Гамильтона. Уравнения Гамильтона для q_s и p_s эквивалентны следующему вариационному принципу:

$$\delta B = \delta \int_{t_0}^{t_1} \{p_s \dot{q}_s - H(q_s, p_s, t)\} dt = [p_s \delta q_s]_{t_0}^{t_1}. \quad (29)$$

Мы требуем также существования такой функции H' , что

$$\delta B' = \delta \int_{t_0}^{t_1} \{p'_r \dot{q}'_r - H'(q'_r, p'_r, t)\} dt = [p'_r \delta q'_r]_{t_0}^{t_1}. \quad (30)$$

Определим функцию $J(q_s, p'_r, t)$ из условий

$$p_s = \frac{\partial J}{\partial q_s}, \quad q'_r = \frac{\partial J}{\partial p'_r}, \quad H' = H + \frac{\partial J}{\partial t}. \quad (31)$$

Для малых изменений q_s, p_s при постоянном t эти уравнения можно разрешить, и они дадут малые изменения q'_r, p'_r , и наоборот, если только

$$\left\| \frac{\partial^2 J}{\partial q_s \partial p'_r} \right\| \neq 0. \quad (32)$$

Далее

$$\begin{aligned} \delta(B' - B) &= \delta \int_{t_0}^{t_1} (p'_r \dot{q}'_r - p_r \dot{q}_s - H' + H) dt = \\ &= \delta [p'_r q'_r] - \delta \int (q'_r \dot{p}'_r + p_s \dot{q}_s + H' - H) dt = \delta [p'_r q'_r - J], \end{aligned} \quad (33)$$

последнее равенство следует из (31); теперь

$$\delta(B' - B) = \delta [p'_r q'_r] - \left[\frac{\partial J}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial J}{\partial p'_r} \delta p'_r \right] = [p'_r \delta q'_r - p_s \delta q_s], \quad (34)$$

здесь снова использовано (31). Следовательно, (29) эквивалентно (30). Но уравнения Гамильтона имеют место для q_s, p_s, H тогда и только тогда, когда (29) справедливо с точностью до величин порядка $\delta q_s, \delta p_s$ для всех малых вариаций пути. Следовательно, так как (30) верно с точностью до величин порядка $\delta q'_r, \delta p'_r$, то q'_r, p'_r, H' также удовлетворяют уравнениям Гамильтона.

Заметим, что если $J = q_s p'_s$, то мы имеем $q'_s = q_s$, $p'_s = p_s$, а если $q_r = p'_r$, $p_r = q'_r$, то q'_r и p'_r удовлетворяют уравнениям Гамильтона при $H' = -H$. В частности, пусть $H = K + mK_1$, где K — такой гамильтониан, для которого решение уравнения Гамильтона — Якоби известно и равно, скажем, $S(q_s, \alpha_r, t)$, а m пусть мало. Определим

$$p'_r = \alpha_r, \quad q'_r = \beta_r = \frac{\partial S}{\partial \alpha_r}, \quad J = S. \quad (35)$$

Здесь β_r отличается знаком от определения (20). Если K_1 выражено через α_r, β_r, t , то получим

$$\dot{\alpha}_r = -m \frac{\partial K_1}{\partial \beta_r}, \quad \dot{\beta}_r = m \frac{\partial K_1}{\partial \alpha_r}. \quad (36)$$

Пусть $-S_1(\alpha_r, \beta_r, t)$ — интеграл от K_1 по t , если α_r, β_r рассматривать как постоянные. Далее образуем

$$J_1 = \alpha'_r \beta_r + m S_1(\alpha'_r, \beta_r, t). \quad (37)$$

Определитель (32) для J_1 равен $1 + O(m)$. Тогда

$$\beta'_r = \beta_r + m \frac{\partial S_1}{\partial \alpha'_r}, \quad \alpha_r = \alpha'_r + m \frac{\partial S_1}{\partial \beta_r}, \quad (38)$$

$$H'' = mK_1(\alpha_r, \beta_r, t) - mK_1(\alpha'_r, \beta_r, t) = O(m^2). \quad (39)$$

Таким образом, этот метод пригоден для быстрой аппроксимации.

В небесной механике необходимо располагать шестью параметрами для определения координат планеты как функций времени; α_r и β_r могут быть использованы для этой цели; они постоянны, когда нет возмущения. Когда имеются возмущения из-за влияния других планет, то можно использовать (35), чтобы определить α_r и β_r через координаты и скорости, или наоборот, тогда метод преобразований позволяет выразить α_r и β_r через величины, сколь угодно близкие к постоянным *).

10.11а. Преобразование (37) было представлено в более общем виде Брауном и Шуком; их вывод был продолжением работы фон Цейпеля. Ниже излагается дальнейшее обобщение.

*) По-видимому, тип преобразования (31) был введен Данкином [3]. Видимо, он первым заметил, что преобразования могут содержать t в явном виде. Определение (35) в более общем виде было использовано Брауном и Шуком [4].

Положим

$$H = H_0(p) + m \sum_s H_s(p) \cos(l_{rs}q_r + n_s t). \quad (1)$$

При $m = 0$ получаем

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_r} = 0; \quad \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_r} = a_r(p) = \text{const}. \quad (2)$$

Возьмем

$$J = p'_r q_r - m \sum' H_s(p') \frac{\sin(l_{rs}q_r + n_s t)}{\nu_s}, \quad (3)$$

$$\nu_s = l_{rs} a_r + n_s, \quad (4)$$

где \sum' означает суммирование по любому набору членов с $\nu_s \neq 0$ (обычно сюда не включают также малые ν_s). Тогда

$$p_r = p'_r - m \sum' H_s(p') \frac{l_{rs}}{\nu_s} \cos(l_{rs}q_r + n_s t), \quad (5)$$

$$q'_r = q_r - m \sum' \frac{\partial H_s}{\partial p'_r} \frac{\sin(l_{rs}q_r + n_s t)}{\nu_s}, \quad (6)$$

$$H' = H_0(p) + m \sum H_s(p) \cos(l_{rs}q_r + n_s t) - m \sum' H_s(p') \frac{n_s}{\nu_s} \cos(l_{rs}q_r + n_s t). \quad (7)$$

Однако

$$\begin{aligned} H_0(p) &= H_0(p') + (p_r - p'_r) \frac{\partial H_0}{\partial p_r} + O(m^2) = \\ &= H_0(p') + a_r(p_r - p'_r) + O(m^2) = \\ &= H_0(p') - m \sum' H_s(p') \frac{a_r l_{rs}}{\nu_s} \cos(l_{rs}q_r + n_s t) + O(m^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда в силу (4) и (7), поскольку $p' - p = O(m)$, все члены в H' порядка m сокращаются, кроме тех, которые не включены в \sum' . Отсюда

$$H' = H_0(p') + m \sum'' H_s(p) \cos(l_{rs}q_r + n_s t) + O(m^2), \quad (9)$$

где \sum'' обозначает суммирование по всем s , не включенным в \sum' .

Теперь, чтобы получить новый гамильтониан, который может быть разложен в форме (1), следует выразить (9) через p' и q' . Некоторые члены порядка $O(m^2)$ могут содержать выражения с $\nu_s = 0$ или малыми значениями ν_s . Члены с $\nu_s = 0$ называются вековыми, а с малыми ν_s — долгопериодными. Вековые члены можно включить в H'_0 . Если члены в \sum'' вообще отсутствуют

и мы пренебрежем членами порядка m^2 , то решение в форме (2) следует немедленно. Однако эта процедура может не дать требуемой точности. В самом деле, при наличии долгопериодных членов $p'_r - p_r$ и $q'_r - q_r$ содержат коэффициенты m/v_s , которые могут не быть малыми, и тогда членами $O(m^2)$ пренебрегать нельзя.

В теории движения планет m — отношение массы возмущающей планеты к массе Солнца. Для того чтобы точность вычислений была не меньше ошибок наблюдений, требуется учет некоторых — долгопериодных — членов третьего порядка. Изложенный прием может быть повторен для получения поправок более высокого порядка.

Рассмотрим один частный случай, который по существу дает форму преобразования фон Зейделя. Если H_0 зависит только от p_1 и все $n_s = 0$, то мы имеем

$$a_r = 0 \quad (r \neq 1) \quad (10)$$

и

$$J = p'_r q_r - m \sum' \frac{H_s(p') \sin(l_{rs} q_r)}{l_{1s} a_1}, \quad (11)$$

$$v_s = l_{1s} a_1. \quad (12)$$

Отсюда

$$J = p'_r q_r - \frac{m}{a_1} \int \sum H_s(p') \cos(l_{rs} q_r) dq_1, \quad (13)$$

где q_2, q_3, \dots при интегрировании считаются постоянными.

Когда v_s малы, применим следующий подход. Предположим, что H_0 зависит только от p_1 , но $n_s \neq 0$, и некоторое значение n_s (например, $s = k$), является малым; предполагаем, что H может быть приведено к виду

$$H = H_0(p_1) + m H_k(p) \cos(l_{rk} q_r + n_k t). \quad (14)$$

Запишем

$$N = l_{rk} q_r + n_k t. \quad (15)$$

Тогда

$$\frac{dp_r}{dt} = m H_k(p) l_{rk} \sin N, \quad (16)$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dH_0}{dp_1} + m \frac{\partial H_k(p)}{\partial p_1} \cos N, \quad (17)$$

$$\frac{dq_r}{dt} = m \frac{\partial H_k(p)}{\partial p_r} \cos N \quad (r \neq 1). \quad (18)$$

Дифференцируя (17), мы получаем

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} = \frac{d^2 H_0}{dp_1^2} \frac{dp_1}{dt} + m \frac{\partial^2 H_k}{\partial p_1 \partial p_r} \frac{dp_r}{dt} \cos N - m \frac{\partial H_k}{\partial p_1} \sin N \frac{dN}{dt}. \quad (19)$$

Первый и третий члены порядка m , второй m^2 . Выражения для q_r'' ($r \neq 1$) аналогичны, за исключением того, что первый член отсутствует. Теперь с точностью до 1-го порядка по m

$$\ddot{N} = A \sin N - B \sin N \cdot \dot{N}, \quad (20)$$

причем A и B могут быть вычислены и порядка m . Без члена с B уравнение (20) представляет собой уравнение колебаний маятника, и можно показать, что значение N либо меняется непрерывно в одном направлении, либо колеблется около точки 0 или π со скоростью $O(m^{1/2})$. Последний случай известен как либрация; он имеет место для нескольких спутников планет в солнечной системе.

Уравнения Гамильтона не имеют широкого применения в обычной динамике, так как для их решения на первом шагу требуется исключение половины переменных путем дифференцирования, что приводит к уравнениям второго порядка. Уравнения Гамильтона оказываются полезными при решении наиболее сложных задач. Они имеют также фундаментальное значение в статистической механике, а сама функция H играет важную и все еще не полностью понятую роль в квантовой механике.

10.12. Принцип наименьшего действия. Если H не содержит t в явном виде, то из уравнений Гамильтона имеем

$$\frac{dH}{dt} = \dot{q}_s \frac{\partial H}{\partial q_s} - \dot{p}_s \frac{\partial H}{\partial p_s} = \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial H}{\partial q_s} - \frac{\partial H}{\partial q_s} \frac{\partial H}{\partial p_s} = 0. \quad (40)$$

Поэтому для любой консервативной голономной системы функция Гамильтона не меняется во времени, каким бы ни было движение системы. Это также следует из **10.072 (1)**, так как по определению H должна быть постоянной функцией. Далее мы

имеем $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$, и если пределы интегрирования изменяются, то

$$\Delta S = \left[-H \Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \Delta q_s \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt. \quad (41)$$

Возьмем теперь

$$A = S + H(t_1 - t_0), \quad (42)$$

тогда

$$\Delta A = \left[t \Delta H + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \Delta q_s \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt. \quad (43)$$

Здесь, как и при выводе уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона, пределы интегрирования t_0 и t_1 зафиксированы, а q_s меняются произвольным образом. Таким образом, при допущенных изменениях q_s может меняться и H . Однако если ограничиться такими изменениями пути, что H остается постоянной и равной своему значению при реальном движении, т. е. $\Delta H = 0$, и если, кроме того, $\Delta q_s = 0$ и удовлетворяются уравнения Лагранжа, то $\Delta A = 0$. Так как $L = T + W$, $H = T - W$, то

$$A = \int_{t_0}^{t_1} (L + H) dt = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt.$$

Функция A называется *действием*, а только что данное правило, согласно которому в соответствующих условиях $\Delta A = 0$, называется *принципом наименьшего действия* *). A также называют *характеристической функцией*, и ее можно взять в качестве основы в теории преобразований вместо главной функции. Принцип наименьшего действия эквивалентен принципу Гамильтона, но менее удобен на практике. Часто принципом наименьшего действия называют сам принцип Гамильтона.

10.13. Раусова модификация функции Лагранжа. Во многих задачах динамики функция L не зависит явно от некоторых координат, а зависит только от скорости их изменения. Такие координаты называются *циклическими*, а остальные — *основными*. При помощи простых преобразований можно исключить какую-нибудь или все циклические координаты из уравнений движения.

Сохраним обозначение q_s для координат, которые мы хотим оставить, и обозначим через φ_σ циклические координаты, которые хотим исключить. Пусть

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_\sigma} = \eta_\sigma. \quad (1)$$

Тогда из уравнений Лагранжа следует, что η_σ постоянны при движении системы. Теперь введем функцию

$$R = L - \dot{\varphi}_\sigma \eta_\sigma \quad (2)$$

и исключим $\dot{\varphi}_\sigma$, не меняя η_σ . Имеем

$$\delta R = \frac{\partial L}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_\sigma} \delta \dot{\varphi}_\sigma - \eta_\sigma \delta \dot{\varphi}_\sigma, \quad (3)$$

*) Можно показать, что A минимально для реального пути, если $t_1 - t_0$ не слишком велико, если же $t_1 - t_0$ велико, то A может быть стационарным для малых вариаций и не достигать ни минимума, ни максимума.

и два последних члена сокращаются. Поэтому, когда R выражено через q_s, \dot{q}_s и η_σ , а L через $q_s, \dot{q}_s, \varphi_\sigma$ имеем

$$\left(\frac{\partial R}{\partial q_s}\right)_\eta = \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)_\varphi, \quad \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_s}\right)_\eta = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)_\varphi. \quad (4)$$

Следовательно, из уравнений Лагранжа имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial R}{\partial q_s} = 0. \quad (5)$$

Преобразование Рауса с точностью до знака подобно преобразованию Гамильтона, но применимо только к циклическим координатам (не обязательно ко всем), тогда как гамильтоново преобразование применимо ко всем координатам. Преобразование Рауса имеет совершенно другие приложения, в основном в случае малых колебаний относительно стационарного движения. Стационарное движение может быть определено как такое движение, при котором основные координаты остаются постоянными. Из этого следует, что при стационарном движении $\partial R/\partial q_s = 0$ и мы можем разложить R до членов второго порядка по q_s , отсчитывая последние от их значений при стационарном движении. Линейные дифференциальные уравнения для них будут точно такие же, как для малых колебаний около положения равновесия.

Имеется, однако, одно существенное отличие. Исключение $\dot{\varphi}_\sigma$ за счет η_σ обычно приводит к членам вида $\dot{f}(q_r)\dot{q}_s$ и при разложении и аппроксимации в R получаются члены вида $g_{rs}q_r\dot{q}_s$. Теперь для фиксированных значений r и s имеем

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} (q_{rs}q_r\dot{q}_s) \right\} - \frac{\partial}{\partial q_s} (g_{rs}q_r\dot{q}_s) = g_{rs}\dot{q}_r, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} (g_{rs}q_r\dot{q}_s) \right\} - \frac{\partial}{\partial q_r} (g_{rs}q_r\dot{q}_s) = -g_{rs}\dot{q}_s, \quad (7)$$

что приводит в уравнениях движения к членам, пропорциональным скоростям. Они называются *гироскопическими членами*.

10.14. Вариации многократных интегралов. Уравнения, получающиеся при решении многих важных проблем, часто оказываются эквивалентными задаче о стационарности некоторого интегрального функционала для малых вариаций подынтегральной функции. Уравнения статической теории упругости, например, можно свести к принципу стационарности энергии, поскольку энергия равна значению интеграла от суммы квадратов компонент деформации. Использование этого принципа в некоторых проблемах оказывается наиболее прямым и кратчайшим способом получения правильных результатов.

Рассмотрим в качестве иллюстрации вывод вариационным методом волнового уравнения Шредингера для одной частицы.

Если опустить некоторые постоянные множители, то функция Гамильтона имеет вид

$$H(p_i, x_i) = \frac{1}{2} p_i^2 + V. \quad (1)$$

Заменим p_i на $-i(\partial/\partial x_i)$, а потенциальная энергия V предполагается известной функцией от x_i . Рассмотрим интегралы по всему пространству

$$I = \iiint \Psi H\left(-i\frac{\partial}{\partial x_i}, x_i\right) \Psi d\tau, \quad (2)$$

$$J = \iiint \Psi^2 d\tau,$$

подчиненные условию, что Ψ стремится к нулю на бесконечности не медленнее, чем $1/r$. Пусть J задано, тогда условие стационарности I для малых вариаций Ψ следующее:

$$0 = \delta \iiint \left\{ \Psi \left(-\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi + V \Psi \right) - \lambda \Psi^2 \right\} d\tau = \quad (3)$$

$$= \iiint \left\{ -\delta \left(\frac{1}{2} \Psi \nabla^2 \Psi \right) + 2V \Psi \delta \Psi - 2\lambda \Psi \delta \Psi \right\} d\tau. \quad (4)$$

Но

$$\iiint \delta (\Psi \nabla^2 \Psi) d\tau = \iiint \left\{ \delta \Psi \nabla^2 \Psi + \Psi \nabla^2 (\delta \Psi) \right\} d\tau \quad (5)$$

и

$$\iiint (\Psi \nabla^2 \delta \Psi - \delta \Psi \nabla^2 \Psi) d\tau = \iint \left(\Psi \frac{\partial \delta \Psi}{\partial n} - \delta \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS \quad (6)$$

по теореме Грина и стремится к нулю в силу наложенного на Ψ условия. Поэтому

$$0 = 2 \iiint \delta \Psi \left(-\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi + V \Psi - \lambda \Psi \right) d\tau, \quad (7)$$

а если это верно для всех малых вариаций $\delta \Psi$, то

$$\nabla^2 \Psi = 2(V - \lambda) \Psi \quad (8)$$

всюду.

Далее, можно взять $\delta \Psi$ пропорциональным Ψ , и когда Ψ удовлетворяет этому дифференциальному уравнению, то

$$\lambda \iiint \Psi^2 d\tau = \iiint \left(-\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi + V \Psi \right) \Psi d\tau. \quad (9)$$

Уравнение (9) определяет λ ; обычно на практике выбирают постоянный множитель у Ψ , такой, чтобы интеграл J был равен 1.

ПРИМЕРЫ

1. Пусть $I = \int \left\{ \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 \right\}^{1/2} dx$ и пределы интегрирования по x определены. Если I стационарно для таких вариаций y , что $J = \int y dx$ принимает заданное значение, то доказать, что график функции $y(x)$ есть дуга окружности.

Пусть конечные условия таковы: $x = \pm a, y = 0$ и заданное значение J больше $\pi a^2/2$. Что произойдет, если I рассматривать 1) как несобственный интеграл Римана, 2) как интеграл $\int_{x=-a}^{x=a} (dx^2 + dy^2)^{1/2}$ с соответствующим обобщением определений для интеграла Стильтеса?

2. Найти такие кривые на плоскости (x, y) , что

$$\int \sqrt{2E - n^2 y^2} ds$$

стационарен, причем E и n постоянны, а интеграл берется между двумя фиксированными точками.

Проверить, представляют ли эти кривые траектории частицы единичной массы, движущейся под действием силы $(0, -n^2 y)$ и обладающей энергией E , если потенциальную энергию считать равной нулю при $y = 0$. (М. Т., 1944.)

3. Доказать, что если скорость волны внутри сферы равна $c = \alpha - \beta r^2$, где α и β — постоянные, то траектория, вдоль которой время распространения волны стационарно, есть окружность. Пусть траектория луча уходит вглубь, образуя угол e у поверхности, найти полярные координаты самой глубокой точки этой траектории и время достижения этой точки. (Вихерт)

4. Доказать, что если интеграл $\int ds$ стационарен для вариаций пути с фиксированными концами, где $ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$), то

$$\frac{d}{ds} \left(g_{ik} \frac{dx_k}{ds} \right) = \frac{\partial g_{km}}{\partial x_i} \frac{\partial x_k}{\partial s} \frac{\partial x_m}{\partial x}$$

и три из этих уравнений независимы. (Риман)

5. Пусть в примере 4

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2fM}{c^2 r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2fM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\lambda^2).$$

Найти три первых интеграла уравнений движения; если движение частицы близко к окружности на плоскости $\theta = \pi/2$, найти апсидальный угол.

(Эйнштейн)

ЛИТЕРАТУРА

1. Yule Cf., J. Roy. Statist. Soc., 99, 770—771 (1936).
2. L i v e n s G. H., Proc. Roy. Soc. Edinb., 39, 113—119 (1919).
3. D o n k i n W. E., Phil. Trans., 313—322 (1855).
4. B r o w n E. W., S h o o k C. A., Planetary Theory, 1933

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Из птиц по роду их, и из скотов по роду их, и из всех пресмыкающихся по земле по роду их, из всех по паре войдут к тебе, чтобы остались в живых.

Библия, кн. Бытия, VI, 20

11.01. Значение комплексных чисел и правила действий с ними. Хотя непосредственный физический смысл имеют только действительные величины, важную роль в физике играют комплексные функции, содержащие символ i , такой, что $i \cdot i = -1$. Для этого имеется три основные причины. Первая состоит в том, что многие физические величины описываются функциями φ , ψ двух переменных x , y , связанными соотношениями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Такие пары функций встречаются, например, в двумерных задачах электростатики, где φ — потенциал и ψ — зарядовая функция (charge function); в двумерной гидродинамике несжимаемой жидкости, где φ — потенциал скоростей, а ψ — функция тока, и в аналогичной задаче о распределении электрического тока в однородной пластинке. В таком случае φ и ψ являются действительной и мнимой частями того, что называется *аналитической функцией* φ комплексного переменного $z = x + iy$.

Во-вторых, решения дифференциальных уравнений физики в некоторых областях действительного переменного обычно получаются в виде степенных рядов. Но тот же степенной ряд с равным успехом может представлять функцию комплексного переменного, и изучение комплексных значений часто сильно помогает получить более компактные выражения для действительных значений аргумента и связать между собой разложения в ряды, справедливые в различных областях. Третья причина состоит в том, что многие интегралы, заданные в действительной форме, легче всего вычисляются, если связать их с комплексными интегралами и использовать мощный метод контурного интегрирования, основанный на теореме Коши.

Важным свойством комплексных чисел является то, что они могут быть определены таким образом, чтобы удовлетворялись

основные правила алгебры 1.01 (1)–(9). Сначала рассмотрим результаты применения этих правил к действительным числам вместе с символом i , обладающим свойством $i^2 = -1$. Так как ни одно действительное число не обладает таким свойством, принято называть i мнимым числом. Если a и b — действительные числа; выражение $c = a + ib$ называют комплексным числом, a — его действительной, b (но не ib) — мнимой частью. Для обозначения действительной и мнимой частей c мы пользуемся также символами $\operatorname{Re}(c) = a$, $\operatorname{Im}(c) = b$.

Во-первых, если $i^2 = -1$, a и b — действительные, и $a = ib$, то из правил алгебры, которым подчиняется i , вытекает

$$a^2 = (ib)^2 = ibib = iibb = -b^2,$$

и, следовательно, $a = b = 0$. Если действительная величина равна мнимой, то обе они равны нулю.

Далее, если $c = a + ib$, $c' = a' + ib'$, где a , a' , b , b' — действительные, то правила алгебры дают

$$-c = -a - ib, \tag{1}$$

$$c + c' = a + a' + i(b + b'), \tag{2}$$

$$c - c' = c + (-c') = a - a' + i(b - b'), \tag{3}$$

$$cc' = aa' - bb' + i(ab' + a'b), \tag{4}$$

$$ic = -b + ia. \tag{5}$$

В силу (3), если $c - c' = 0$, то $a = a'$, $b = b'$. Если два комплексных числа равны, то равны их мнимые и их действительные части. Следовательно, в силу (2) и (4), действительные и мнимые части суммы и произведения двух комплексных чисел единственным образом выражаются через действительные и мнимые части исходных чисел.

Однако можно сформулировать эти правила как правила алгебры пар действительных чисел*), не пользуясь символом i .

*) Подобная же идея введения пар чисел встречается в теории рациональных дробей. То, что мы записываем в виде $c = a/b$ можно записать как пару чисел $c = (a, b)$, причем правило сложения принимается в виде

$$(a, b) + (a', b') = (ab' + a'b, bb'),$$

а умножения — в виде

$$(a, b)(a', b') = (aa', bb').$$

$1/(a, b)$ определяется как (b, a) , и $(a, a) = (1, 1)$. Можно проверить, что при таких определениях правила алгебры остаются в силе.

При этом мы мыслим пару (a, b) как соответствующую $a + ib$ и для сравнения обозначаем

$$\gamma = (a, b), \quad c = a + ib.$$

Тогда действительному числу a соответствует пара $(a, 0)$, а мнимому ib — пара $(0, b)$. В частности, i соответствует $(0, 1)$. Если определить теперь $-\gamma$, $\gamma \pm \gamma'$, $\gamma\gamma'$ правилами

$$-\gamma = (-a, -b), \quad (1)$$

$$\gamma + \gamma' = (a + a', b + b'), \quad (2')$$

$$\gamma - \gamma' = (a - a', b - b'), \quad (3')$$

$$\gamma\gamma' = (aa' - bb', ab' + a'b), \quad (4')$$

то получим

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0), \quad (6)$$

$$i\gamma = (0, 1)(a, b) = (-b, a), \quad (7)$$

$$i \cdot i\gamma = (-a, -b) = -\gamma, \quad i\gamma \cdot i = -\gamma. \quad (8)$$

Таким образом, определения компонент $-\gamma$, $\gamma \pm \gamma'$, $\gamma\gamma'$ и $i\gamma$ совпадают с правилами образования действительных и мнимых частей $-c$, $c \pm c'$, cc' , ic , а i^2 соответствует -1 . Мы можем поэтому в дальнейшем пользоваться обозначением c вместо γ , заставляя догадываться по контексту, идет ли речь о комплексном числе или о паре действительных чисел.

Эти правила согласуются с обычными правилами алгебры действительных чисел, установленными в гл. 1. Имеем переместительный закон сложения

$$c + c' = c' + c,$$

сочетательный закон сложения

$$c + (c' + c'') = (c + c') + c'',$$

переместительный закон умножения

$$cc' = c's,$$

сочетательный закон умножения

$$c(c'c'') = (cc')c''$$

и распределительный закон

$$c(c' + c'') = cc' + cc''.$$

Первые три и пятый из этих законов легко проверяются выполнением сложения и умножения по правилам. Для проверки четвертого закона имеем

$$c(c'c'') = (a, b)(a'a'' - b'b'', a'b'' + a''b') = \\ = (aa'a'' - ab'b'' - a'bb'' - a''bb', ba'a'' - bb'b'' + aa'b'' + aa''b'),$$

$$(cc')c'' = (aa' - bb', ab' + a'b)(a'', b'') = \\ = (aa'a'' - a''bb' - ab'b'' - a'bb'', aa''b' + a'a''b + aa'b'' - bb'b''),$$

и явные выражения совпадают. Итак, с комплексными числами можно обращаться точно так же, как с действительными числами.

Мы сразу видим, что $(c - c') + c' = c$, так что вычитание обратно сложению, как и в обычной алгебре. Деление несколько сложнее. Мы пишем

$$\frac{1}{c} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

Легко проверяется, что при этом определении $c(1/c) = 1$, так что мы определили обратную величину комплексного числа для всех случаев, кроме $a = b = 0$. В этом случае пишем $\frac{1}{c} = \infty$. Тогда отношение двух комплексных чисел полагаем равным

$$\frac{c}{c'} = c \left(\frac{1}{c'} \right) = \left(\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}, \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2} \right)$$

и видим, что в обозначениях с i оно запишется в виде

$$\frac{aa' + bb' + i(a'b - ab')}{a'^2 + b'^2} = \frac{(a + ib)(a' - ib')}{a'^2 + b'^2}.$$

Можно проверить, что при таком определении

$$\left(\frac{c}{c'} \right) c' = c' \left(\frac{c}{c'} \right) = c.$$

Кроме того, $(-b, a)(-b', a') = -(a, b)(a', b')$, что можно записать как $(ic)(ic') = -cc'$ (эти соотношения доказываются с помощью установленных выше пяти правил алгебры).

Теперь мы убедились в том, что все основные действия алгебры можно производить над парами чисел и результатом всегда будет пара чисел. Все эти правила действий формулируются через действительные числа, и поэтому из непротиворечивости системы действительных чисел следует, что система пар действительных чисел подчиняется этим правилам.

Поскольку каждая пара чисел (a, b) соответствует комплексному числу $c = a + ib$, мы получаем непротиворечивую алгебру системы комплексных чисел.

Если a и b — физические величины, то они должны иметь одинаковую размерность. Соотношение между комплексными величинами и комплексными числами аналогично соотношению между действительными величинами и действительными числами.

Смысл соотношений $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(c')$ и $\operatorname{Im}(c) > \operatorname{Im}(c')$ ясен с самого начала, но соотношение $c > c'$ не имеет никакого смысла. Важной величиной, связанной с комплексным числом, является его *модуль или абсолютная величина* $|c|$, определяемая как

$$|c| = |a + ib| = (a^2 + b^2)^{1/2},$$

причем выбирается положительное значение корня. Если $|a + ib| < M$, где M — некоторое положительное действительное число, то a и b в отдельности меньше M . Если $|a + ib| > M$, то либо $a^2 > \frac{1}{2}M^2$, либо $b^2 > \frac{1}{2}M^2$. Обращение $|c|$ в нуль является необходимым и достаточным условием обращения в нуль одновременно a и b .

В силу этих результатов определенный так модуль играет ту же роль в теории комплексных чисел, что и модуль действительного переменного. Всегда

$$|cc'| = |c| |c'|.$$

Кроме того, если $|c| < \epsilon$ для любого положительного ϵ , то $c = 0$ и $a = b = 0$.

Имеется некоторая разница между неравенствами для комплексных и для действительных чисел. Если a и b — два действительных числа, то всегда

$$|a^2 + b^2| \geq a^2.$$

Но для комплексных чисел не обязательно

$$|c^2 + c'^2| \geq |c^2|,$$

так как c может равняться 1, а $c' = i$. Тогда $c^2 = 1$, $c'^2 = -1$ и левая часть равна нулю, тогда как правая — единице. Однако

$$|c| + |c'| \geq |c + c'|,$$

поскольку $0, c, c + c'$ — три точки плоскости и это неравенство представляет собой частный случай неравенства 5.01 (7). Точно так же

$$\sum_{r=1}^n |c_r| \geq \left| \sum_{r=1}^n c_r \right|.$$

Кроме того, если λ и μ — действительные, то в силу неравенства Коши

$$(\lambda a + \mu b)^2 \leq (\lambda^2 + \mu^2)(a^2 + b^2),$$

и, следовательно,

$$\left| \frac{\lambda a + \mu b}{a + ib} \right| \leq (\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}.$$

На комплексные числа можно распространить понятие предела. Если $c_n = a_n + ib_n$, и $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, то мы говорим, что $c_n \rightarrow c = a + ib$.

11.02. Дифференцирование и интегрирование комплексных функций действительного переменного x . Пусть φ и ψ — две функции, зависящие от действительного переменного x . Положим

$$f = \varphi + i\psi.$$

Если x получает малое приращение δx , а φ и ψ — соответствующие приращения $\delta\varphi$ и $\delta\psi$, имеем

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta\varphi}{\delta x} + i \frac{\delta\psi}{\delta x}.$$

Устремляя δx к нулю, имеем в пределе

$$\frac{df}{dx} + i \frac{d\psi}{dx},$$

что принимается за определение производной df/dx . Она существует, только если как φ , так и ψ дифференцируемы при рассматриваемом значении x .

Аналогично можно определить

$$\int_a^b f dx = \int_a^b \varphi dx + i \int_a^b \psi dx$$

при условии, что φ и ψ интегрируемы на интервале (a, b) .

11.03. Функции комплексного переменного. Пусть x и y — пара действительных переменных. Кратко обозначим комплексную пару через

$$z = x + iy. \quad (1)$$

Пусть φ и ψ — пара действительных функций от x и y . Положим

$$f = \varphi + i\psi. \quad (2)$$

Посмотрим, можно ли приписать какой-то смысл производной df/dz . Если x и y получают малые приращения δx и δy , то выражение

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\delta\varphi + i\delta\psi}{\delta x + i\delta y} \quad (3)$$

мы можем интерпретировать согласно нашим правилам.

Вопрос состоит в том, стремится ли это выражение всегда к одному и тому же значению, когда δx и δy одновременно стремятся к нулю. Два *необходимых* условия получаются следующим образом. Положим $\delta y = 0$ и затем устремим к нулю δx . Тогда, если существуют частные производные,

$$\frac{\delta f}{\delta z} \rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Но если мы положим $\delta x = 0$ и затем устремим к нулю δy , получим

$$\frac{\delta f}{\delta z} \rightarrow -i \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}. \quad (5)$$

Эти выражения могут быть равны, только если

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (6)$$

Эти соотношения называются *условиями Коши — Римана*. Очевидно, они означают, что

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (7)$$

Если они не выполняются, то df/dz не может иметь единственного значения, не зависящего от предела $\delta x/\delta y$, так как $\delta f/\delta z$ будет стремиться к разным пределам при $\delta x/\delta y$, стремящемся к нулю и к бесконечности. Следовательно, если df/dz должно иметь смысл для всех значений x и y в некоторой области, где x и y могут изменяться независимо, нужно прежде всего потребовать выполнения условий (6) при всех этих значениях.

Второе требование для физических приложений состоит в том, что компоненты градиентов φ и ψ по любому направлению должны вычисляться через компоненты в направлениях x и y по векторным правилам. Значит, если

$$\delta x = h \cos \theta, \quad \delta y = h \sin \theta \quad (8)$$

и θ фиксировано при $h \rightarrow 0$, то

$$\frac{\varphi(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - \varphi(x, y)}{h} \rightarrow \varphi_x \cos \theta + \varphi_y \sin \theta, \quad (9)$$

где φ_x и φ_y не зависят от θ . Аналогичное соотношение имеет место для ψ . Если, кроме того, этот предел достигается равномерно по θ , то φ и ψ — дифференцируемые функции двух переменных согласно определениям гл. 5.

Полагая $\theta = 0$ и $\theta = \frac{1}{2}\pi$, имеем по определению частных производных

$$\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (10)$$

Необходимое и достаточное условия существования единственного предела отношения (3) при $\delta x, \delta y \rightarrow 0$ состоят в том, чтобы φ и ψ удовлетворяли условиям Коши — Римана и были дифференцируемы [1]. Если φ и ψ дифференцируемы, то из условий Коши — Римана имеем

$$\begin{aligned} & \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - f(x, y)}{h(\cos \theta + i \sin \theta)} = \\ & = \frac{\varphi_x \cos \theta + \varphi_y \sin \theta + i\psi_x \cos \theta + i\psi_y \sin \theta}{\cos \theta + i \sin \theta} + \frac{o(h)}{h} = \varphi_x + i\psi_x + o(1), \quad (11) \end{aligned}$$

и при $h \rightarrow 0$ получаем

$$\frac{\delta f}{\delta z} \rightarrow \varphi_x + i\psi_x, \quad (12)$$

что не зависит от θ . Следовательно, это условие достаточно.

Чтобы показать необходимость, положим

$$\frac{f(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - f(x, y)}{h(\cos \theta + i \sin \theta)} \rightarrow u + iv \quad (13)$$

при $h \rightarrow 0$, где u и v действительные и не зависят от θ . Умножим на $h(\cos \theta + i \sin \theta)$ и отделим действительную и мнимую части. Тогда

$$\varphi(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - \varphi(x, y) = h(u \cos \theta - v \sin \theta) + o(h), \quad (14)$$

$$\psi(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - \psi(x, y) = h(u \sin \theta + v \cos \theta) + o(h), \quad (15)$$

и, следовательно, φ и ψ дифференцируемы. Кроме того,

$$\varphi_x = u = \psi_y, \quad \varphi_y = -v = -\psi_x, \quad (16)$$

так что и условия Коши — Римана выполняются.

Если φ и ψ удовлетворяют указанным условиям и мы выберем оси x' и y' так, что

$$x' = lx + my, \quad y' = -mx + ly, \quad (17)$$

$$x = lx' - my', \quad y = mx' + ly', \quad (18)$$

то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = l \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m \frac{\partial \varphi}{\partial y} = l \frac{\partial \psi}{\partial y} - m \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y'} \quad (19)$$

и аналогично

$$\frac{\partial \psi}{\partial x'} = - \frac{\partial \varphi}{\partial y'}. \quad (20)$$

Следовательно, условия Коши — Римана выполняются при любом направлении осей. В частности, если ось x' направить по нормали к некоторой кривой, а y' — по касательной, так что $dx' = dn$, $dy' = ds$, причем угол поворота от dn к ds равен $+\frac{1}{2}\pi$, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = - \frac{\partial \psi}{\partial n}. \quad (21)$$

Точно так же, как функция действительного переменного может быть определена в некотором интервале своего аргумента или может быть непрерывной или дифференцируемой в некотором интервале, функция комплексного переменного определяется в интервалах x и y (причем интервал изменения x при заданном y может зависеть от y).

Система пар значений x , y , для которых функция определена, называется *областью*. Вскоре мы дадим геометрическую интерпретацию. Основные идеи уже появлялись в гл. 5.

Если в некоторой области

$$f(z) = \varphi + i\psi, \quad \lambda(z) = \mu + i\nu$$

и $f(z)$, $\lambda(z)$ связаны между собой таким образом, что для любого положительного ε существует такое δ (возможно, зависящее от z), что при всех комплексных h , удовлетворяющих условию $|h| < \delta$,

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \lambda(z) \right| < \varepsilon, \quad (22)$$

то говорят, что $f(z)$ аналитическая в этой области, а $\lambda(z)$ называют производной $f(z)$ и обозначают $f'(z)$ или df/dz . При этих условиях φ и ψ удовлетворяют соотношениям Коши—Римана и дифференцируемы.

Мы можем сказать также, что $f(z)$ является аналитической в замкнутой области, если имеется также единственный предел, когда z является граничной точкой, а точка $(z+h)$ принадлежит области.

Можно показать, что при выполнении условия (22) во всех точках области существуют вторые производные $f(z)$ и, следовательно, при этом первые производные непрерывны. Но это требует слишком длинного доказательства, которое мы пока не можем дать.

Заметим, что $z^* = x - iy$ — дифференцируемая функция x и y , но не аналитическая, так как она не удовлетворяет условиям Коши—Римана.

Будем пока рассматривать только однозначные функции. При этом исключаются такие функции, как $z^{1/2}$, поведение которых требуется рассмотреть специально, прежде чем мы сможем сказать, что они дифференцируемы. Когда мы дойдем до рассмотрения точек ветвления, мы увидим, что эту трудность можно устранить. Функция, аналитическая и однозначная в некоторой области, называется также *регулярной**, *голоморфной* или *моногенной* в этой области.

Заметим, что если φ и ψ имеют непрерывные вторые производные, то

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right),$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (23)$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (24)$$

т. е. φ и ψ удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа.

Легко проверить, что если $\varphi_1 + i\psi_1$, $\varphi_2 + i\psi_2$ — две функции z , то их произведение $(\varphi_1\varphi_2 - \psi_1\psi_2) + i(\psi_1\varphi_2 + \varphi_1\psi_2)$ удовлетворяет

*) Регулярная функция — наиболее распространенный термин в современных математических работах. Мы избегаем его, так как нам приходится говорить также о регулярных особенностях дифференциальных уравнений.

условиям (6) и, следовательно, является функцией z . Так как само z есть функция z , отсюда следует, что $z \cdot z$ есть также функция z и т. д. до любой целой положительной степени z . Кроме того, так как $\frac{d}{dz}(\varphi + i\psi) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi + i\psi)$, остается справедливой обычная формула дифференцирования произведения, а именно

$$\frac{d}{dz}(w_1 w_2) = w_1 \frac{dw_2}{dz} + w_2 \frac{dw_1}{dz}. \quad (25)$$

То же относится к суммам и отношениям функций, и мы заключаем, что любая рациональная функция z является аналитической, за исключением, возможно, точек, где ее знаменатель обращается в нуль.

По индукции доказывается, что $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$. Иначе

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{(z+h) - z} = (z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \dots + z^{n-1},$$

что дает этот результат в пределе при $h \rightarrow 0$.

В общем случае функция комплексного переменного определена первоначально только в некоторой заданной области x и y , и для того, чтобы приписать ей какой-то смысл вне этой области, требуются специальные приемы. Это не относится к рациональным функциям, которые можно вычислять для любой пары значений x и y по основным правилам. Нужно только отметить, что при некоторых значениях z правило деления может не дать никакого значения функции. Так, если

$$f(z) = z - 1,$$

то наше правило дает

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{x-1+iy} = \frac{x-1-iy}{(x-1)^2 + y^2}.$$

Обе компоненты этого выражения имеют вид $0/0$ при $x=1$, $y=0$ и не определены. Но для любой другой пары значений x и y имеем

$$|f| \left| \frac{1}{f} \right| = 1,$$

и, следовательно, если $|f|$ стремится к 0, когда z приближается к некоторому значению, то $|1/f|$ в пределе превосходит любое заданное конечное значение. Мы говорим, что оно *стремится к бесконечности*. Такая точка является примером *полюса* функ-

ции $1/f$. Заметим также, что если по какой-либо причине $f(z)$ не определена при $z = z_0$, то и

$$\frac{1}{\zeta} \{f(z_0 + \zeta) - f(z_0)\}$$

не определено. Следовательно, наше определение производной отказывает в этом случае, и z_0 не принадлежит ни к какой области, в которой эта функция является аналитической.

В свете этого результата обнаруживается некоторое затруднение в исследовании таких функций, как $f = \frac{z+1}{z^2-1}$ при $z = -1$. По правилам вычислений с комплексными числами находим, что φ и ψ принимают вид $0/0$. Но это затруднение можно обойти. Можно показать, что для всех z , не равных ± 1 ,

$$\frac{z+1}{z^2-1} = \frac{1}{z-1},$$

а эта функция принимает определенное значение $-\frac{1}{2}$ при $z = -1$. Если положить $f = -\frac{1}{2}$ при $z = -1$, то функция будет дифференцируемой в этой точке. Аналогичные рассуждения применимы к таким функциям как $(1/z) \sin z$ при $z = 0$. Если функция, аналитическая во всех точках, кроме одной, стремится к определенному пределу в этой точке, то этот предел можно принять за значение функции в этой точке, даже если прямое вычисление приводило к неопределенному результату. Этот процесс называется *доопределением по непрерывности*.

Мы видели, что если φ^2 или ψ^2 больше M^2 , то $|\varphi + i\psi| > M$, и если $|\varphi + i\psi| > M$, то либо φ^2 , либо ψ^2 больше $\frac{1}{2} M^2$. Можно утверждать, что если модуль функции стремится в некоторой точке к бесконечности, то либо действительная, либо мнимая часть ее будет не ограничена, и мы говорим в этом случае, что сама функция не ограничена. Аналогично, если действительная или мнимая часть функции не ограничена, то и ее модуль не ограничен. Мы говорим, что функция *ограничена* в области, если можно найти такое положительное число M , что во всех точках этой области $|f(z)| < M$.

11.04. Диаграмма Аргана *). Можно получить геометрическую интерпретацию функций комплексного переменного,

*) Впервые дана Весселем (1797). Арган предложил ее в 1806 г. Но, как установлено Беллом, Валлис (1673) если и не открыл ее, то был на волосок от этого.

рассматривая x и y как прямоугольные координаты точки на плоскости. Эта точка полностью определяется действительной и мнимой частями z . Тогда φ и ψ будут функциями точки на плоскости, удовлетворяющими двумерному уравнению Лапласа. С чисто математической точки зрения такая конструкция — только средство наглядного изображения, но в физических приложениях она гораздо содержательнее: x и y фактически могут быть координатами, а φ и ψ — определенными физическими величинами, которые обычно нужно представить как функции x и y . Далее

$$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2} = r,$$

где r — расстояние точки (x, y) от начала координат. Кроме того, найдется такой угол θ , что

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

и, следовательно, $x + iy$ эквивалентно $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Тогда θ называют *аргументом**), или *фазой* z и обозначают $\arg z$. Но θ не определяется однозначно. Мы можем изменить его на любое целое кратное 2π и получим те же значения $\cos \theta$ и $\sin \theta$, а следовательно, те же значения x и y при заданном r .

Аргумент можно сделать однозначным следующим образом. При $x > 0, y = 0$ полагаем $\arg z = 0$. При всех других значениях z требуем, чтобы $\arg z$ изменялся непрерывно, т. е. не допускаем скачков на 2π , и принимаем за правило не пересекать отрицательную действительную полуось. Тогда при отрицательных x и малых положительных y , $\arg z$ близок к π , а при отрицательных x и малых отрицательных y , $\arg z$ близок к $-\pi$, так что для всех x и y имеем $-\pi \leq \arg z \leq \pi$.

При этом будет скачок на 2π при пересечении отрицательной действительной полуоси, но мы избегаем этого, запрещая пересекать ее. На отрицательной действительной полуоси при приближении к ней сверху полагаем $\arg z = \pi$, а при приближении со стороны отрицательных y полагаем $\arg z = -\pi$. В таком случае пишем $-\pi < \arg z \leq \pi$. Очевидно, с таким же успехом можно принять $-\pi \leq \arg z < \pi$. Мы встретимся еще со многими случаями использования таких *разрывов*. Особенно важную роль они играют при использовании конформного ото-

*) Слово *аргумент* используется также в том смысле, что если $f(x)$ есть функция x , то x называют аргументом $f(x)$. Обычно будет ясно из контекста, в каком смысле употребляется это слово, но было бы хорошо, если бы математики договорились изменить один из терминов. Употребляют также термин *амплитуда*, но его следует признать неудачным.

бражения. При таком ограничении значение аргумента называется *главным значением*.

Иногда при $z \neq 0$ мы пишем

$$z/|z| = \cos \theta + i \sin \theta = \operatorname{sgn} z,$$

и более общий случай, если $f(z) \neq 0$, то

$$f(z)/|f(z)| = \operatorname{sgn} f(z).$$

Если $f(z) = 0$, мы полагаем $\operatorname{sgn} f(z) = 0$. Это выражение играет роль направляющего вектора.

Если $\hat{f}(z)$ — функция z , то φ и ψ можно также рассматривать как координаты точки на другой плоскости, и эта функция выражает соответствие между точками плоскости z и плоскости $\hat{f}(z)$.

Если $\hat{f}'(z) = 0$ всюду в некоторой области, то $f(z)$ постоянна в этой области. Действительно, если $\hat{f}(z) = \varphi + i\psi$, отсюда следует, что в этой области

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Но тогда, как показано в **5.033**, φ и ψ , а следовательно, и f постоянны. Заметим, что если φ постоянна в области, то по условиям Коши — Римана ψ также постоянна, и наоборот.

11.041. Непрерывность. Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке $z = z_0$, если для любого положительного ϵ можно найти такое δ , что $|f(z_0 + h) - f(z_0)| < \epsilon$ для всех $|h| < \delta$. Из определения аналитической функции сразу следует, что если $f(z)$ аналитическая при $z = z_0$, то она непрерывна в этой точке.

Если $f(z)$ аналитическая во всех внутренних точках некоторой области, то она не обязательно аналитическая или даже непрерывная в точках границы. Так, например,

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

аналитическая, а следовательно, непрерывная при всех z , таких, что $|z| < 1$. Границей этой области является окружность $|z| = 1$. Но точка $z = 1$ лежит на этой окружности, и $f(z)$ разрывна в этой точке.

Мы будем говорить, что $f(z)$ непрерывна в замкнутой области, если для любого z из этой области и любого положительного ϵ найдется некоторое $\delta(z, \epsilon)$, такое, что для любого z_1 из этой области, удовлетворяющего неравенству

$$|z_1 - z| < \delta(z, \epsilon),$$

имеем $|f(z_1) - f(z)| < \epsilon$.

11.042. Равномерная непрерывность. Если $f(z)$ непрерывна в замкнутой области, то $f(z)$ равномерно непрерывна, т. е. для любого ε найдется такое δ , что $|f(z+h) - f(z)| < \varepsilon$ для всех z и $z+h$ из замкнутой области, удовлетворяющих условию $|h| < \delta$. Функции φ и ψ непрерывны. Следовательно, по **5.031**, для заданного ε найдется такое δ , что, как только точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) из этой области удовлетворяют условию

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 < \delta^2,$$

тогда же

$$|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)| < \varepsilon, \quad |\psi(x_1, y_1) - \psi(x_2, y_2)| < \varepsilon,$$

и, следовательно,

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon \sqrt{2}.$$

11.043. Лемма Гурса. Пусть $f'(z)$ существует во всех точках замкнутой области D и ε — сколь угодно малое положительное число. Тогда можно покрыть D системой квадратов G_r , каждый из которых содержит точку z_r , принадлежащую D и G_r , такую, что для всех других общих для G_r и D точек выполняется неравенство

$$|f(z) - f(z_r) - (z - z_r)f'(z_r)| < \varepsilon |z - z_r|.$$

Для любого Z из D имеется такая окрестность Z , что для всех z из этой окрестности, принадлежащих D ,

$$|f(z) - f(Z) - (z - Z)f'(Z)| < \varepsilon |z - Z|.$$

Такая окрестность представляет собой область I , как в модифицированной теореме Гейне — Бореля (**5.021**), которая, следовательно, применима непосредственно. Точка z_r может находиться на границе G_r , если только она не лежит вне D . Если z_r лежит на границе между двумя G_r , она может быть использована для каждого из них, если выполняется указанное неравенство. Квадраты G_r не обязательно одинаковы.

Будем называть квадрат G_r , удовлетворяющий этому условию, ε -окрестностью z_r . Эта лемма уже встречалась в более общем виде в **5.042**. Но мы привели ее частный случай в форме, которая потребуется в **11.052**.

11.05. Интегрирование. Мы определим интеграл от функции комплексного переменного $f(z)$ вдоль спрямляемой кривой L с концами z_0 и Z , как в **5.06** (2), т. е. выберем в качестве параметра длину дуги s , измеряемую вдоль кривой, и рассмотрим систему точек z_r , соответствующих возрастающим s_r .

На каждом из интервалов (s_r, s_{r+1}) выберем точку ξ_r на кривой и рассмотрим сумму

$$S_n = \sum_{r=0}^n f(\xi_r)(z_{r+1} - z_r) = \sum \{ \varphi(\xi_r)(x_{r+1} - x_r) - \psi(\xi_r)(y_{r+1} - y_r) \} + \\ + i \sum \{ \varphi(\xi_r)(y_{r+1} - y_r) + \psi(\xi_r)(x_{r+1} - x_r) \}, \quad (1)$$

причем $z_{n+1} = Z$. Выберем положительное число δ , и поскольку кривая спрямляемая, мы можем взять все интервалы $s_{r+1} - s_r < \delta$ при некотором конечном n . При $\delta \rightarrow 0$ (соответственно, $n \rightarrow \infty$) суммы S_n определяют две интегральные суммы, соответствующие интегралам Стильеса $\int \varphi dx - \psi dy$ и $\int \varphi dy + \psi dx$.

На этой кривой x и y являются функциями ограниченной вариации. Если $f(z)$ аналитическая на этой кривой, то φ и ψ — непрерывные функции s . Следовательно, эти интегралы существуют и мы можем написать

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S_n = \int_L f(z) dz. \quad (2)$$

Иногда требуется рассматривать интеграл от функции вдоль кривой, являющейся частью границы области, где эта функция аналитическая. Тогда φ и ψ могут не быть непрерывными на этой кривой, но интегралы будут существовать при условиях, сформулированных для интегралов Стильеса.

Заметим, что если $|f(z)| < M$ во всех точках кривой, то

$$|f(z_r)(z_{r+1} - z_r)| < M |z_{r+1} - z_r|, \quad (3)$$

$$|\sum f(z_r)(z_{r+1} - z_r)| < M \sum |z_{r+1} - z_r|, \quad (4)$$

и, следовательно, переходя к пределу,

$$\left| \int_{z_0}^Z f(z) dz \right| \leq MK,$$

где K — длина кривой.

11.051. Два конкретных интеграла. Очевидно,

$$\int_{z_0}^Z dz = \lim \{ (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots + (Z - z_n) \} = Z - z_0. \quad (1)$$

Кроме того,

$$z_{r-1}(z_r - z_{r-1}) = \frac{1}{2} \{ z_r^2 - z_{r-1}^2 - (z_r - z_{r-1})^2 \},$$

и, следовательно, если $z_{n+1} = Z$, то

$$z_0(z_1 - z_0) + z_1(z_2 - z_1) + \dots + z_n(Z - z_n) = \frac{1}{2}(Z^2 - z_0^2) - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n+1} (z_r - z_{r-1})^2.$$

Возьмем точки z_r , разнесенные на расстояния, меньшие ω , вдоль пути интегрирования. Тогда модуль суммы в правой части будет не больше ωK , и

$$\int_{z_0}^Z z dz = \frac{1}{2}(Z^2 - z_0^2). \quad (2)$$

Рассмотрим теперь интеграл $f(z)$ по замкнутому контуру C в некоторой ϵ -окрестности точки z_0 . Пусть верхняя грань $|z - z_0|$ будет a . Тогда

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)v, \quad (3)$$

где $|v| < \epsilon$, и

$$\int_C f(z) dz = \int_C \{f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)\} dz + \int_C (z - z_0)v dz. \quad (4)$$

По (1) и (2) первый интеграл в правой части равен нулю, так как пределы интегрирования совпадают. Кроме того,

$$\left| \int_C (z - z_0)v dz \right| < \int a \epsilon ds < \epsilon a \lambda, \quad (5)$$

где λ — длина контура C . Отсюда

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < \epsilon a \lambda. \quad (6)$$

Нам требуется два типа контуров: 1) квадрат со стороной b , так что

$$a \leq b \sqrt{2}, \quad \lambda = 4b, \quad a\lambda \leq 4 \sqrt{2}b^2 < 6b^2,$$

и 2) квадрат, часть границы которого заменена кривой, лежащей внутри квадрата. Пусть во втором случае длина криволинейной части границы будет μ . Тогда в случае 1) имеем

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < 6\epsilon A, \quad (7)$$

где A — площадь квадрата, а в случае 2), так как $\lambda \leq 4b + \mu$,

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < 6\epsilon A + \sqrt{2} \epsilon b \mu, \quad (8)$$

причем A — полная площадь квадрата.

11.052. Теорема Коши. Если $f(z)$ аналитическая в замкнутой области, ограниченной контуром C конечной длины, то $\int_C f(z) dz = 0$. Обозначим C и охватываемую им область через D . Мы можем поместить C в некоторый квадрат E со

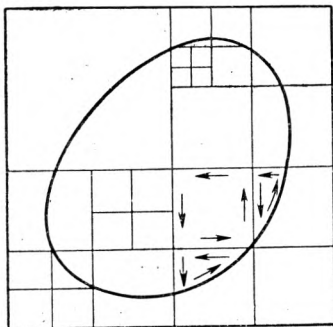


Рис. 41.

стороной B . По лемме Гурса, мы можем разбить E на конечное число квадратов G_n со стороной b_n , таких, что в каждом G_n , содержащем точки D , найдется такая точка z_n , общая для G_n и D , что для любой точки z , принадлежащей одновременно G_n и D , выполняется неравенство

$$|f(z) - f(z_n) - (z - z_n)f'(z_n)| < \omega |z - z_n|,$$

для любого положительного ω . Некоторые из G_n будут целиком внутри D . Другие будут пересекаться с C . Для каждого G_n рассмотрим интеграл $\int f(z) dz$, взятый на границе G_n , если G_n целиком лежит внутри D ; если G_n пересекается с C , возьмем интеграл по части границы G_n , лежащей в D , и по части C , лежащей в G_n . Тогда все эти контуры замкнутые и удовлетворяют условиям, сформулированным в конце 11.051. Если площадь внутреннего квадрата G_n есть A_n , то

$$\left| \int_{G_n} f(z) dz \right| < 6\omega A_n.$$

Если G_p — квадрат со стороной b_p , пересекающийся с C , и длина части C внутри него есть μ_p , то

$$\left| \int_{G_p} f(z) dz \right| < 6\omega A_p + \sqrt{2} \omega b_p \mu_p.$$

Возьмем сумму всех этих интегралов, причем все контуры обходятся в положительном направлении. Тогда каждая внутренняя сторона или часть стороны G_n , пройденная при составлении соответствующего интеграла, проходится в противоположном направлении при составлении интеграла для соседнего с G_n квадрата. Следовательно, все вклады от внутренних сторон сокращаются, и эта сумма равна просто интегралу по C . Отсюда

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < 6\omega \left(\sum A_n + \sum A_p \right) + 2\omega \sum b_p \mu_p.$$

Так как G_n , G_p — непересекающиеся части E , то

$$\sum A_n + \sum A_p \leq B^2.$$

Кроме того, $b_p \leq B$ и $\sum \mu_p = L$ — длине контура C , которая предполагается конечной. Следовательно,

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < \omega (6B^2 + 2BL).$$

Левая часть и второй множитель в правой части не зависят от ω . Отсюда, поскольку ω произвольно мало, следует

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Теорема Коши является центральной теоремой теории функций комплексного переменного. Часто на первый взгляд кажется удивительным, что можно вывести такое соотношение из одного только условия, чтобы функция имела производную внутри и на границе области. Однако это становится менее удивительным, если учесть, что эту функцию нужно в действительности рассматривать как пару функций, и что используемое определение производной содержит неявно два точных соотношения между частными производными этих функций в каждой точке, где она существует.

Многие математики внесли вклад в ослабление условий этой теоремы. Приведенное доказательство, использующее только существование производной $f(z)$ и конечность длины контура C , принадлежит Гурса.

11.053. Связь с леммой Грина. Другой подход к теореме Коши, аналогичный трактовке Римана, состоит в использовании двумерного варианта леммы Грина. Если u и v — две функции от x и y , имеющие непрерывные первые производные на контуре C и внутри него, то

$$\iint_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (lu + mv) ds, \quad (1)$$

где интеграл в левой части берется по области внутри C , а l и m — направляющие косинусы внешней нормали к C по отношению к осям x и y . Эти условия более строги, чем используемые в вышеприведенном доказательстве, так как они предполагают непрерывность частных производных в отдельности. Это является наиболее удобным достаточным условием для перестановки порядка интегрирования в доказательстве теоремы Грина. Компоненты единичного вектора касательной к C в положительном направлении равны $(-m, l)$, так что при перемещении вдоль C

$$\frac{dx}{ds} = -m, \quad \frac{dy}{ds} = l \quad (2)$$

и

$$\int_C (lu + mv) ds = \int_C (udy - vdx). \quad (3)$$

Возьмем теперь $f(z) = \varphi + i\psi$, причем φ и ψ удовлетворяют условиям Коши — Римана. Тогда

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (\varphi + i\psi)(dx + idy) = \int_C (\varphi dx - \psi dy) + i \int_C (\psi dx + \\ &+ \varphi dy) = \iint_C \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy + i \iint_C \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Лемму Грина можно доказать для трех измерений при несколько более широких предположениях, чем использовавшиеся в 5.08, если применить методы, такие же, как при доказательстве теоремы Коши. Заметим прежде всего, что если

$$u_i = a_i + b_{ik}x_k,$$

где a_i и b_{ik} — константы, то этот результат следует сразу. Заметим также, что если существует интеграл по объему от $\operatorname{div} \mathbf{u}$, то область внутри S может быть разбита на области объема $\delta\tau_n$, такие, что, в каких бы точках R_n этих областей не выбирать значение $\operatorname{div} \mathbf{u}$, нельзя изменить $\sum (\operatorname{div} \mathbf{u})_n \delta\tau_n$ более чем на ε . Теперь если P есть x_i , а Q есть $x_i + x'_i$, где $x'_i{}^2 = r^2$ и все u_i дифференцируемы, то существует окрестность P , такая, что

$$u_i(Q) = u_i(P) + x'_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_P + v_i r \quad (5)$$

где $|v_i| < \omega$ при $r < \delta$. Тогда для поверхности G_p объема τ_p , заключающего P ,

$$\iint_{G_p} l_i u_i dS = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_P \tau_p + \iiint_{G_p} l_i v_i r dS. \quad (6)$$

Разбивая области $\delta\tau_n$ на $\delta'\tau_p$ и модифицируя доказательство теоремы Коши, можно показать, что сумма значений последних членов для всех G_p , образованная для всех $\delta\tau_n$, по модулю меньше, чем $M\omega$, где M фиксировано. Следовательно, существует по крайней мере одно P_{np} внутри каждого $\delta'\tau_p$, такое, что

$$\left| \iint_{G_p} l_i u_i dS - \sum_n \sum_p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_{P_{np}} \delta'\tau_p \right| < M\omega, \quad (7)$$

и так как объемный интеграл существует, то

$$\left| \sum_n \sum_p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_{P_{np}} \delta'\tau_p - \sum_n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_{R_n} \delta\tau_n \right| < \varepsilon, \quad (8)$$

$$\left| \sum_n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)_{R_n} \delta\tau_n - \iiint \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\tau \right| < \varepsilon. \quad (9)$$

Следовательно,

$$\left| \iint_{G_p} l_i u_i dS - \iiint \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\tau \right| < M\omega + 2\varepsilon \quad (10)$$

и поэтому должно равняться нулю, поскольку как ε , так и ω произвольны. Следовательно, достаточные условия леммы Грина заключаются в том, что u_i дифференцируемы на границе и внутри S , интеграл по объему от $\operatorname{div} \mathbf{u}$ существует и S ограничена и имеет конечную площадь, определенную, как в 5.07.

Поскольку дифференцируемость есть достаточное условие для того, чтобы производные u_i были компонентами тензора, эти условия охватывают все случаи, в которых нам может потребоваться лемма Грина.

Заметим, что доказательство должно проходить в две стадии, причем в каждой из них используется обычное разбиение на прямоугольные области. В первой стадии мы делаем области $\delta\tau_n$ достаточно малыми, чтобы сумма $(\operatorname{div} \mathbf{u})_n \delta\tau_n$ давала хорошее приближение для объемного интеграла; во второй мы разбиваем $\delta\tau_n$ на $\delta'\tau_p$ так, чтобы свойства дифференцируемых функций можно было использовать для установления близости суммы к поверхностному интегралу. В доказательстве теоремы Коши первая стадия отсутствует, потому что аналог $\operatorname{div} \mathbf{u}$ равен нулю.

11.054. Обобщение теоремы Коши. Эта теорема справедлива также при следующих условиях: $f(z)$ — функция аналитическая внутри S и непрерывная в замкнутой области, ограниченной S . Следуя Гурса [2], предположим, что кривая S такова, что имеется по крайней мере одна внутренняя точка c , такая, что любой луч, исходящий из c пересекает S только один раз. Тогда если $z' = c + \lambda(z - c)$, где $0 < \lambda < 1$ и z лежит на S , то

z' находится внутри C и, когда z пробегает C , z' описывает контур C' , как угодно близкий к C . Тогда, в силу доказанного, $\int_{C'} f(z') dz' = 0$, т. е.

$$\int_C f\{c + \lambda(z - c)\} \lambda dz = 0, \quad (1)$$

причем постоянный, не равный нулю множитель λ можно опустить. По принципу равномерной непрерывности для любого ω можно взять такое δ , что $|f(z) - f(z')| < \omega$ для всех $|z - z'| < \delta$. Но

$$|z - z'| = (1 - \lambda)|z - c|, \quad (2)$$

и величина $|z - c|$ ограничена, скажем она меньше R . Следовательно, условие удовлетворяется, если

$$1 - \lambda = \delta/R. \quad (3)$$

Тогда

$$\int_C f(z) dz - \int_C f(z') dz = \int_C \{f(z) - f(z')\} dz \quad (4)$$

и

$$\left| \int_C \{f(z) - f(z')\} dz \right| < \omega L. \quad (5)$$

Следовательно, $\left| \int_C f(z) dz \right| < \omega L$ и поэтому равен нулю.

Если контур C , такой, что его внутренность можно разбить на конечное число областей с подходящей внутренней точкой в каждой, то тот же результат получим сложением. Существуют контуры C конечной длины, которые требуют бесконечного числа разбиений, чтобы каждая область удовлетворяла условию Гурса; теорема и тогда остается справедливой, но становится много труднее доказать ее [1,3]. Нам не придется рассматривать такие случаи.

Это обобщение теоремы Коши оказывается необходимым для некоторых физических приложений, где мы хотим определить функцию, аналитическую внутри контура и принимающую заданные значения на контуре, хотя производные функции в некоторых точках контура могут не существовать в смысле теории функций комплексного или даже действительного переменного. Дальнейшее обобщение на случаи, когда $f(z)$ ведет себя как $1/(z - z_0)$ вблизи точки z_0 на контуре, невозможно, потому что не существует единственного способа определения

интеграла по контуру, проходящему через такую точку; мы рассмотрим позже *главное значение* такого интеграла, но оно не равно пределу интеграла по C' .

Теорема остается справедливой, если $f(z)$ ограничена, но имеет конечное число разрывов на C . Вырежем части C , проводя круговые дуги радиуса η с центром в разрывах, и возьмем C'' , состоящим из частей этих дуг, расположенных внутри C , и остальной части C . Тогда применение теоремы показывает, что $\int_{C''} f(z) dz = 0$. Для любой дуги и вырезанной

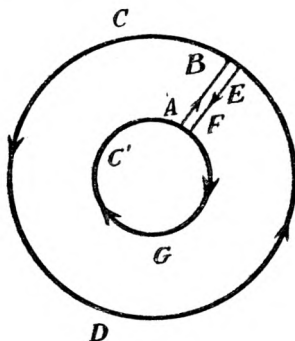


Рис. 42.

части $\int f(z) dz = O(\eta)$, так как $f(z)$ ограничена; откуда снова следует теорема Коши. Однако (см. 14.05) разрыв первого рода $\operatorname{Re} f(z)$ влечет за собой неограниченность $\operatorname{Im} f(z)$. Общее доказательство приведено в [4].

11.055. Из теоремы Коши сразу получаем важное следствие. Предположим, что $f(z)$ аналитическая между двумя контурами C и C' , причем C' находится внутри C , и непрерывна при стремлении z к C или C' . Проведем две близкие одна к другой прямые AB и EF с тем, чтобы соединить эти контуры. Тогда $ABDEFGA$ — замкнутый контур, как показано на рис. 42, и $f(z)$ аналитична внутри него и непрерывна при стремлении к нему z . Обозначим этот контур через S . Тогда

$$\int_S f(z) dz = 0.$$

Пусть теперь прямые AB и EF сколь угодно сближаются. Вклад от части BDE стремится к интегралу по C в положительном направлении. Вклад от FGA стремится к интегралу

по C' в отрицательном направлении и поэтому к интегралу с обратным знаком по C' в положительном направлении. Вклады от AB и EF стремятся к равным и противоположным по знаку значениям, поскольку в конечном счете они превращаются в интегралы по одному и тому же пути, проходимому в противоположном направлении. Поэтому если условиться обходить контуры в одинаковом направлении, то

$$\int_C f(z) dz = \int_{C'} f(z) dz.$$

Следовательно, если функция аналитична между двумя контурами и непрерывна при приближении к ним, то интеграл от нее по z вдоль каждого из этих контуров имеет одно и то же значение.

Если применить рассуждения, использованные при доказательстве теоремы Коши, к области между C и C' , то этот результат, очевидно, будет следовать непосредственно. Отдельное доказательство потребовалось в этом случае только потому, что при доказательстве теоремы Коши область предполагается односвязной.

Теорема немедленно распространяется на случай, когда C включает несколько замкнутых контуров C' , C'' , ..., не охватывающих друг друга. Можно аналогичным образом показать, что интеграл вдоль C равен сумме интегралов вдоль C' , C'' , ... при условии, что функция является аналитической во всех точках, лежащих внутри C и вне C' , C'' , ..., и непрерывной в замкнутой области.

11.056. Интеграл от аналитической функции. Из теоремы Коши следует, что если L и L' — два пути, соединяющие z_0 и Z , а функция $f(z)$ аналитическая на L , L' и во всех точках между ними, то

$$\int_L f(z) dz = \int_{L'} f(z) dz = F(Z),$$

причем $F(Z)$ является однозначной. Кроме того, если $Z + \zeta$ лежит в области, где $f(z)$ аналитическая, и $|\zeta|$ достаточно мало, то можно взять L'' , совпадающим с L от z_0 до Z и затем идущим к $Z + \zeta$ по прямой линии. Отсюда получим

$$F(Z + \zeta) - F(Z) = \int_Z^{Z+\zeta} f(z) dz,$$

где интеграл берется вдоль прямой линии. Пусть $\zeta \rightarrow 0$; $f(z)$ будет отличаться от $F(Z)$ на произвольно малую величину и

$$\frac{1}{\zeta} \{F(Z + \zeta) - F(Z)\} \rightarrow f(Z).$$

Следовательно, $F'(z) = f(z)$ и $F(z)$ есть аналитическая функция z .

Сравните эту теорему с теоремой для трех измерений 5.09 (3).

Из доказанного следует, что если $G(z)$ аналитична в области и $G'(z) = f(z)$, то $F(z) - G(z)$ есть константа, так как это аналитическая функция с нулевой производной. Это позволяет распространить на комплексные интегралы метод интегрирования путем нахождения неопределенного интеграла.

11.06. Степенной ряд. Применение конечного числа арифметических действий определяет рациональную функцию z . Однако можно получить другие функции, рассматривая суммы степенных рядов, наиболее важными из которых являются ряды с положительными целыми степенями z . Рассмотрим ряд

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots, \quad (1)$$

где a_n могут быть действительными или комплексными. Рассмотрим также ряд

$$g(r) = b_0 + b_1r + b_2r^2 + \dots + b_nr^n + \dots, \quad (2)$$

где

$$b_n = |a_n|, \quad r = |z|. \quad (3)$$

В зависимости от значения r последовательность b_nr^n может быть либо ограниченной, либо неограниченной.

Случай 1. Существует M , такое, что $b_nr^n \leq M$ для всех n .

Случай 2. Для любого M найдется такое n , что $b_nr^n > M$.
Геометрическая прогрессия

$$1 + z + z^2 + \dots \quad (4)$$

подходит под случай 1 при $r \leq 1$ и под случай 2 при $r > 1$.
Экспоненциальный ряд

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (5)$$

подходит под случай 1 при всех r . В самом деле, если взять $m > 2r$ и $n > m$, то

$$\frac{r^n}{n!} = \frac{r^m}{m!} \frac{r^{n-m}}{(m+1) \dots n} < \frac{r^m}{m!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}. \quad (6)$$

Тогда если M есть наибольшая из величин $1, r, r^2/2! \dots r^m/m!$, то, следовательно, $r^n/n! \leq M$ для всех n .

Ряд

$$1 + z + 2!z^2 + \dots + n!z^n + \dots$$

подходит под случай 2 при всех $r > 0$, поскольку, если взять $m > 2/r$ и $n > m$, то

$$n!r^n = m!r^m \cdot (m+1) \dots nr^{n-m} > m!r^m \cdot 2^{n-m},$$

причем, выбирая n достаточно большим, можно сделать последнее выражение больше любого M , а все последующие члены еще больше. Таким образом, имеются ряды, которые относятся к случаю 1 для всех значений r ; которые всегда относятся к случаю 2, за исключением $r=0$; и которые для некоторых значений r относятся к случаю 1, а для других значений r — к случаю 2.

Каждый член $g(r)$ возрастает с r , если только он не равен 0 для всех r . Следовательно, если ряд относится к случаю 1 при $r=r_1$ и к случаю 2 при $r=r_2$, то должно быть $r_1 < r_2$. Допустим теперь, что значения r_1 и r_2 , удовлетворяющие этим условиям, найдены. Свойство „члены $g(r)$ ограничены при $r < r_0$ “ определяет сечение множества положительных значений r_0 , скажем при $r_0 = R$.

Следовательно, если $g(r)$ принадлежит к случаю 1 при некоторых значениях r и к случаю 2 для остальных значений r , то всегда существует связанное с рядом единственное число R , такое, что все значения $r < R$ относятся к случаю 1, и все большие чем R — к случаю 2. Назовем его *радиусом сходимости*, а круг $|z| = R$ — *кругом сходимости*. Если $g(r)$ относится к случаю 1 при всех r , то можно записать $R = \infty$.

При $r = R$ ряд $g(r)$ может относиться как к случаю 1, так и к случаю 2. Так, для (4) и для ряда

$$1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \dots + \frac{1}{n}z^n + \dots,$$

если $r=1$, то r^n и $r^n/n \leq 1$ при всех n , а если $r > 1$, то r^n и r^n/n не ограничены. Таким образом, радиус сходимости равен 1 и члены ограничены на границе круга сходимости. Однако для ряда

$$1 + 2z + 3z^2 + \dots + (n+1)z^n + \dots$$

радиус сходимости по-прежнему равен 1, но члены не ограничены на границе круга сходимости.

11.061. Абсолютная сходимость. Допустим теперь, что c — произвольное положительное число, меньшее R . Мы знаем,

что при $r = c$ члены $g(r)$ ограничены, т. е. они не растут до бесконечности. Следовательно, существует число M , такое, что

$$b_n c^n < M$$

при всех n . Отсюда для любого $r < c$

$$b_n r^n < M (r/c)^n.$$

Далее для любых m и p ($m < p$)

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^p b_n r^n &< M \left(\frac{r}{c}\right)^{m+1} \left\{1 + \frac{r}{c} + \dots + \left(\frac{r}{c}\right)^{p-m-1}\right\} = \\ &= M \left(\frac{r}{c}\right)^{m+1} \frac{1 - (r/c)^{p-m}}{1 - r/c} < M \left(\frac{r}{c}\right)^{m+1} \frac{1}{1 - r/c}. \end{aligned}$$

Следовательно, если выбрать ϵ , то, сколь бы малым оно ни было, можно выбрать m_0 так, что сумма как угодно большого числа членов после m -го при $m \geq m_0$ никогда не превысит ϵ . Поэтому ряд $\sum b_n r^n$ сходится. Далее

$$\left| \sum_{n=m+1}^p a_n z^n \right| \leq \sum_{n=m+1}^p |b_n z^n| = \sum_{n=m+1}^p b_n r^n$$

и поэтому ряд $\sum a_n z^n$ сходится при $|z| = r < c < R$ и, следовательно, при $|z| < R$.

Внутри круга сходимости сумма модулей членов ряда является сходящимся рядом. Такая сходимость называется *абсолютной* по аналогии с соответствующим свойством действительных рядов*). Очевидно, что ряд никогда не сходится, если $|z| > R$. Так как $(1 - r/c)^{-1}$ ограничено в любом круге $|z| < d < c$, всегда имеем

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^m a_n z^n \right| = O(z^{m+1}).$$

11.062. Равномерная сходимость. Определения равномерной сходимости последовательностей и рядов аналитических функций являются непосредственными обобщениями этих понятий для функций действительного переменного. Если для всех z в некоторой области $f_n(z) \rightarrow f(z)$ и

$$f(z) = f_n(z) + R_n(z)$$

*) Принято брать свойство: „ряд сходится для любых z , таких, что $|z| < r_0$ “ в качестве определяющего R сечением значений r_0 ; но нам представляется более очевидным, что ограниченность членов определяет сечение, и эта ограниченность непосредственно используется позже при доказательстве многих теорем.

и для любого положительного ϵ можно подобрать такое n , что для любого z в этой области $|R_n(z)| < \epsilon$, то говорят, что последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится к $f(z)$ в этой области *). Если

$$f_n(z) = \varphi_n + i\psi_n \rightarrow \varphi + i\psi,$$

то отсюда следует, что при том же выборе n

$$|\varphi_n - \varphi| < \epsilon, \quad |\psi_n - \psi| < \epsilon,$$

и поэтому $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ равномерно сходятся к φ и ψ соответственно. Обратное, если $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ равномерно сходятся к φ и ψ , то $\{\varphi_n + i\psi_n\}$ равномерно сходится к $\varphi + i\psi$.

Если в 11.061 выбрать $d < c < R$ и m так, что $\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n d^n < \epsilon$,

то для любого z , такого, что $|z| = r \leq d$,

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |b_n r^n| < \epsilon, \quad \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n r^n < \epsilon.$$

Значит, по заданным ϵ и d можно раз и навсегда выбрать m и оно будет годиться для всех значений r вплоть до d включительно. Таким образом, мы приходим к случаю M -признака для равномерной сходимости, распространенного на комплексное переменное. Его можно сформулировать следующим образом: *если для всех значений z из некоторой области $|u_n(z)|$ меньше, чем v_n , которое не зависит от z , и ряд $\sum v_n$ сходящийся, то ряд $\sum u_n(z)$ является равномерно сходящимся в области.* Этот признак достаточный для равномерной сходимости, но не необходимый. Мы видим, что всякий ряд, удовлетворяющий этому признаку, является также абсолютно сходящимся в области, но ряд может быть равномерно сходящимся, не будучи абсолютно сходящимся. Итак, имеем теорему: *степенной ряд по z равномерно сходится внутри и на границе любого круга с центром $z=0$, полностью лежащего внутри круга сходимости.* Он может сходиться неравномерно или даже вовсе расходиться на границе своего круга сходимости.

Отсюда следует, что если степенной ряд имеет радиус сходимости R отличный от 0, то для любого z , такого, что $|z| \leq c < R$ сумма ряда имеет конечное значение; поэтому он

*) Мы не предполагаем сейчас, что $f(z)$ — аналитическая функция; см., однако, 11.20.

определяет пару функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$. Каждая из них является суммой равномерно сходящегося действительного ряда. Если $g(r)$ относится к случаю 1 для всех значений r , то в **11.061** можно взять любое конечное значение c и прежние рассуждения проходят. В этом случае $\sum a_n z^n$ определяет такую пару функций во всей плоскости.

Приведем теперь несколько примеров для иллюстрации возможных видов поведения степенных рядов на границе круга сходимости. Пока мы рассматривали поведение отдельных членов, теперь мы должны рассмотреть суммы.

11.063. Типы степенных рядов: целые функции. Рассмотрим снова ряд

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \dots \quad (1)$$

Он не сходится ни для какого значения z на окружности $|z| = 1$, так как все члены по модулю равны 1 и сумма n членов не стремится ни к какому пределу. Этот ряд, как и для действительного переменного, легко суммируется при $|z| < 1$:

$$f(z) = \frac{1}{1-z}. \quad (2)$$

Заметим, что, хотя $f(z)$, определенная посредством (1), не имеет смысла при $|z| \geq 1$, выражение (2) имеет определенное значение для любого z , за исключением $z = 1$.

Если возьмем ряд

$$f(z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \dots + \frac{z^n}{n} + \dots, \quad (3)$$

то обнаружим другое поведение. Как и последний, он сходится при всех $|z| < 1$ и расходится при всех $|z| > 1$, но он еще сходится для всех $|z| = 1$, за исключением точки $z = 1$ (см. **1.1155**). Этот ряд не представляет рациональной функции; он может быть взят в качестве определения $-\ln(1-z)$.

У ряда

$$f(z) = z + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{n^2} + \dots \quad (4)$$

тот же круг сходимости, но он сходится даже при $z = 1$. Таким образом, имеем три ряда с одинаковым кругом сходимости, но ведущих себя существенно по-разному на границе круга.

С другой стороны, ряд

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (5)$$

сходится при любых z .

Функции, определяемые одним и тем же степенным рядом на всей плоскости, называются *целыми функциями*. Помимо конечных рядов, наиболее знакомым примером является экспоненциальный ряд; с ним близко связаны функции $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, $\cos z$, $\sin z$.

Ряд

$$1 + 1!z + 2!z^2 + \dots + n!z^n + \dots \quad (6)$$

расходится при любом сколь угодно малом z , отличном от 0. Такой ряд не определяет никакой функции нигде, за исключением $z = 0$, и можно сказать, что его радиус сходимости равен 0.

11.07. Дифференцирование степенных рядов. Нам еще нужно показать, что функция, определенная степенным рядом, является аналитической. Если $f(z)$ определена посредством $\sum a_n z^n$, то можно назвать ряд

$$a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots + na_n z^{n-1} + \dots,$$

полученный почленным дифференцированием, продифференцированным рядом. Можно легко показать, что если радиус круга сходимости ряда, определяющего $f(z)$, есть R , то радиус сходимости продифференцированного ряда равен также R . Аналогично можно построить продифференцированные ряды более высоких порядков.

Степенной ряд всегда можно почленно проинтегрировать внутри круга сходимости, потому что он равномерно сходится (1.113). Следовательно, если

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_n z^n + \dots,$$

то имеем

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = F(z) - F(z_0),$$

где

$$F(z) = a_0z + \frac{1}{2} a_1z^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1} + \dots$$

Аналогично можно исходить из продифференцированного ряда и, поскольку у него тот же радиус сходимости, заключить, что

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z \{a_1 + 2a_2z + \dots + na_n z^{n-1} + \dots\} dz = \\ = [a_0 + a_1z + \dots + a_n z^n + \dots]_{z_0}^z = f(z) - f(z_0). \end{aligned}$$

Дифференцируя по Z , получим

$$a_1 + 2a_2Z + \dots + na_nZ^{n-1} + \dots = df(Z)/dZ,$$

и поэтому продифференцированный ряд есть производная исходного ряда всюду внутри круга сходимости. Это показывает далее, что функция, определенная степенным рядом, имеет производную и поэтому является аналитической функцией внутри круга сходимости. Дважды продифференцированный ряд аналогичным образом представляет вторую производную $f(z)$, и, поскольку он сходится, первая производная непрерывна. Таким образом, функции, определенные степенными рядами, удовлетворяют условиям, использованным в 11.053.

11.08. Умножение степенных рядов. Можно также доказать, что если два ряда

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots, \quad g(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots,$$

сходятся внутри некоторого круга, то ряд

$$h(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots,$$

где

$$c_0 = a_0b_0, \quad c_1 = a_0b_1 + a_1b_0, \quad c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \dots,$$

получаемый попарным перемножением членов и собиранием коэффициентов при одинаковых степенях z , сходится внутри того же круга и равен $f(z)g(z)$. Доказательство аналогично доказательству для абсолютно сходящихся рядов с действительными членами.

Можно также доказать, что если ряд сходится абсолютно, то он будет давать одну и ту же сумму при любом порядке членов.

Непосредственное применение подобных рассуждений дает

$$\exp z \exp z' = \exp(z + z')$$

для всех z, z' , как и в случае двух действительных переменных. Поскольку при записи e^z вместо $\exp z$ сохраняется обычное правило для показателей, это можно принять в качестве определения e^z для комплексных z . Заметим, что с этой точки зрения e^z не следует рассматривать как результат процесса возведения e в степень z . Таким образом, если взять $z = \frac{1}{2}$, то $\exp \frac{1}{2}$ есть единственное число, определяемое суммой ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \dots;$$

однако результат извлечения квадратного корня из e может быть $\pm \exp \frac{1}{2}$. Мы принимаем, что e^z обозначает то же, что $\exp z$, однако имеются и другие определения.

11.09. Предельные точки. Определение предельной точки при более чем одном числе измерений, дано в **5.01**. Напомним, что в любой окрестности предельной точки множества содержится бесконечное число элементов множества и что любое ограниченное бесконечное множество имеет по крайней мере одну предельную точку (**5.02**).

11.091. Нули степенного ряда не могут иметь $z=0$ в качестве предельной точки, если только ряд не обращается в нуль для всех z . Итак, предположим, что сумма ряда

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

равна нулю для некоторого отличного от нуля z внутри любого круга с центром в 0. Предположим, что существует по крайней мере один член с коэффициентом, отличным от нуля. Пусть первый член с ненулевым коэффициентом будет $a_m z^m$.

Тогда $g(z) = z^{-m} f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^{n-m}$ есть степенной ряд с тем же, что у $f(z)$, кругом сходимости. Поэтому он является равномерно сходящимся и непрерывным в окрестности $z=0$. Но он равен нулю в некоторой точке любой окрестности 0; следовательно, $g(0) = 0$ и $a_m = 0$. Отсюда $f(z) = 0$ при всех z .

В частности, если $f(z) = 0$ для всех точек сколь угодно малого круга с центром в нуле или даже для всех точек действительной оси внутри некоторой конечной области x , то $f(z)$ равна нулю для всех z . Но этих условий, которые обычно встречаются на практике, более чем достаточно для справедливости теоремы: достаточно, например, если бы $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ для всех целых n , больших чем 1000.

Наиболее важным следствием этого является то, что функция имеет единственное представление в виде степенного ряда по z . В самом деле, если при $|z| < R$

$$f(z) = \sum a_n z^n = \sum a'_n z^n,$$

то

$$\sum (a_n - a'_n) z^n = 0$$

для всех $|z| < R$. Следовательно, $a_n = a'_n$. Это оправдывает приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях z .

11.10. Теорема Тейлора. Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (1)$$

с радиусом сходимости R . Пусть, как и раньше, c меньше R и все $|a_n c^n|$ меньше M . Тогда

$$b_n = |a_n| < M/c^n. \quad (2)$$

Возьмем z_0 , такое, что $|z_0| < c$, и положим $z = z_0 + z'$. Подставим это в ряд и разложим каждый член по формуле бинома. Тогда получим

$$\begin{aligned} f(z_0 + z') &= a_0 + a_1(z_0 + z') + a_2(z_0^2 + 2z_0 z' + z'^2) + \dots + \\ &+ a_n \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} z_0^{n-m} z'^m + \dots \quad (3) \end{aligned}$$

Рассмотрим ряд, полученный заменой членов этого ряда на их модули. Обозначая, как прежде, $|z| = r$, $|z_0| = r_0$, $|z'| = r'$, получим ряд

$$\begin{aligned} g(r_0, r') &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n b_n \frac{n!}{m!(n-m)!} r_0^{n-m} r'^m < \\ &< M \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{r_0^{n-m} r'^m}{c^n} = M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_0 + r')^n}{c^n}, \quad (4) \end{aligned}$$

который сходится, если

$$r_0 + r' < c,$$

т. е. внутри любого круга с центром в z_0 , который не выходит за круг радиуса c . Следовательно, ряд (3) абсолютно сходится внутри такого круга. Поэтому его члены можно располагать в любом порядке, и ряд всегда будет сходящимся, причем к одной и той же сумме. Расположим их в порядке возрастания степеней z' . Свободные от z' члены будут

$$a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \dots = f(z_0), \quad (5)$$

коэффициент при z' равен

$$a_1 + 2a_2 z_0 + 3a_3 z_0^2 + \dots = f'(z_0), \quad (6)$$

а общий коэффициент при z'^m будет

$$a_m + (m+1)a_{m+1}z_0 + \dots + \frac{n! a_n}{m!(n-m)!} z_0^{n-m} + \dots, \quad (7)$$

где $n \geq m$. Положив $n - m = n'$, получим общий член в виде

$$\frac{(n' + m)!}{m! n'!} a_{n'+m} z_0^{n'}, \quad (8)$$

где $n' \geq 0$. Тогда коэффициент при z^m можно записать как

$$\frac{1}{m!} \{ m(m-1) \dots 1 \cdot a_m + (m+1)m \dots 2a_{m+1}z_0 + \dots \\ \dots + (n+m)(n+m-1) \dots (n+1)a_{m+n}z_0^n + \dots \} = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}, \quad (9)$$

причем индекс, взятый в скобки, означает m -ю производную. Следовательно,

$$f(z) = f(z_0) + z'f'(z_0) + \frac{1}{2!} z'^2 f''(z_0) + \dots + \frac{1}{m!} z'^m f^{(m)}(z_0) + \dots \quad (10)$$

внутри любого круга с центром в z_0 , который не достигает границы круга сходимости ряда (1).

Такой вид принимает формула Тейлора для комплексного переменного. Этот бесконечный ряд всегда сходится, и поэтому нет нужды в остаточном члене.

11.11. Особые точки. До сих пор мы ограничивали наши рассуждения функциями, единственным образом определенными в каждой точке области и дифференцируемыми, а поэтому непрерывными для всех z внутри области. Таким образом, из рассмотрения исключалась всякая функция, если в какой-либо точке области она могла принимать два или более значений или если она не дифференцируема; в частности, если она стремится к бесконечности при стремлении z к некоторой точке области. Рассмотрим теперь, что может случиться в последнем случае.

Особая точка a функции $f(z)$ есть любое значение z , такое, что нельзя выбрать положительного δ так, чтобы $f(z)$ была аналитическая и однозначная для $|z - a| < \delta$. Из этого определения следует, что предельная точка особых точек есть особая точка.

а) *Точки ветвления.* Рассмотрим функцию $z^{1/2}$. Она конечна для всех конечных z , однако даже при z действительном и положительном имеется неоднозначность, так как не ясно, какой должен быть взят знак. Допустим, что мы будем в этом случае брать положительное значение корня. Начнем теперь двигаться по окружности с центром в начале координат в направлении возрастания аргумента, и пусть $z^{1/2}$ изменяется непрерывно. Тогда, если положить

$$z = re^{i\theta},$$

то можно взять

$$z^{1/2} = r^{1/2} e^{1/2 i \theta}.$$

Мы не изменяем r , и поэтому не должно меняться $r^{1/2}$, а θ должно меняться непрерывно. Но когда θ достигает 2π , тогда $\frac{1}{2}\theta$ достигает π , и $e^{1/2 i \theta} = -1$. Увеличивая θ дальше, мы проходим все предыдущие значения с обратным знаком. Таким образом, невозможно придать единственное значение функции $z^{1/2}$ в каждой точке, если позволить θ изменяться более чем на 2π при постоянном r . Однако если принять за правило, что θ никогда не достигает 2π , то можно сделать функцию $z^{1/2}$ однозначной. Тогда, хотя мы и можем сделать θ как угодно близким к 2π , единственный путь вернуться назад, на положительную действительную ось — обойти начало координат в противоположном направлении. Поступая так, мы уничтожаем предыдущее приращение θ и возвращаемся к исходному значению $z^{1/2}$. Чтобы использовать это построение, необходимо исключить возможность замкнутого контура для любого значения r , и мы говорим о *разрезах* вдоль положительной действительной оси. Это приводит к определению

$$z^{1/2} = r^{1/2} \exp \frac{1}{2} i \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi),$$

где для $r^{1/2}$ всегда берется положительное значение. С тем же успехом можно взять интервал изменения θ равным $-\pi < \theta \leq \pi$ или $-\pi \leq \theta < \pi$. Вообще, если n дробное, можно определить

$$z^n = r^n \exp ni\theta$$

с теми же ограничениями на θ .

Функция может быть однозначной и даже дифференцируемой при $z=0$, не будучи там аналитической; $z^{1/2}=0$ при $z=0$, так что $z^{1/2}$ имеет там равную нулю производную независимо от того, какой знак выбрать. Определение точки ветвления относится к ее окрестности. Точка $z=a$ есть точка ветвления $f(z)$, если при движении z вокруг a по окружности с произвольно малым, но отличным от нуля радиусом, функция $f(z)$, значения которой при каждом значении z выбраны так, чтобы сохранить непрерывность, не возвращается к своему исходному значению. Если

$$f(z) = (z^2 - a^2)^{1/2},$$

где a — действительное, то имеются точки ветвления при $\pm a$. Если точка z проходит замкнутый путь по какой-либо кривой, охватывающей обе точки ветвления, то $f(z)$ возвращается

к своему исходному значению, так как квадратные корни из $z - a$ и $z + a$ оба изменяют знак и их произведение сохраняет свой первоначальный знак. Но $f(z)$ изменилось бы, если бы мы сделали обход по какому-либо контуру, который охватывает лишь одну из точек a . Здесь можно сделать $f(z)$ однозначной, принимая за правило, что на действительной оси при $x > a$ она положительна, и действительная ось между $-a$ и $+a$ никогда не пересекается.

Когда мы делаем разрез, мы выбираем одно значение функции для каждой точки области и получаем однозначную функцию в области. Однако она разрывна, когда z переходит через разрез, который поэтому является линией особых точек. Таким образом, если функция $z^{1/2}$ определена как $r^{1/2} \exp \frac{1}{2} i\theta$ ($-\pi < \theta \leq \pi$), где мы берем положительный знак для действительных и положительных z , то $z^{1/2}$ претерпевает разрыв $2ir^{1/2}$, когда z пересекает отрицательную действительную ось. Если бы мы взяли $z^{1/2}$ как значение $-r^{1/2} \exp \frac{1}{2} i\theta$, то получили бы другую однозначную функцию, которую можно назвать другой ветвью функции $z^{1/2}$. В последующем будем предполагать, что все наши функции однозначные или сделаны однозначными с помощью одного или нескольких разрезов.

Если $f(z)$ неоднозначна на контуре C , т. е. она не возвращается к своему исходному значению, когда z описывает контур, причем $f(z)$ изменяется непрерывно, то она имеет особую точку внутри контура или на нем. В самом деле, если $f(z)$ аналитическая внутри и на контуре, то мы можем нанести квадратную сетку, такую, что $f(z)$ изменяется непрерывно, когда z описывает любую внутреннюю ячейку или любую окаймляющую часть, как в 11.052, и возвращается к своему исходному значению. Отсюда с помощью сложения следует, что изменение $f(z)$ при z , описывающем C , равно нулю.

б) Полюсы. Функция $f(z)$ может быть неограниченной в любом, сколь угодно малом контуре с центром в a , но при обходе по контуру вокруг этой точки возвращаться к своему исходному значению. Полюс $f(z)$ порядка m есть точка a , такая, что существует положительное целое число m , для которого при $z \neq a$

$$f(z) = \frac{A_m}{(z-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{(z-a)} + g(z)$$

в области, содержащей a , где $A_m \neq 0$, а $g(z)$ — аналитическая функция в a . Члены, содержащие отрицательные степени $z - a$, называются *главной частью* функции вблизи $z = a$. Полюсы порядка 1 называются также *простыми полюсами*. Мы не

говорим о полюсах нецелого порядка, так как при n нецелом a было бы точкой ветвления $(z - a)^{-n}$.

Если a — полюс порядка m , то $(z - a)^m f(z)$, а также $1/(f(z) - c)$ — аналитические функции в окрестности a , где c — любая константа.

в) *Существенно особые точки.* Существенно особой точкой является любая точка a , отличная от точки ветвления или полюса, такая, что $f(z)$ — не аналитическая функция в окрестности a . Функция $\exp(1/z)$ имеет существенную особенность при $z = 0$. Если z действительно и положительно, то, каково бы ни было m , функция $z^m \exp(1/z)$ стремится к бесконечности, когда z стремится к 0. Поведение функций вблизи существенно особых точек более своеобразно, чем вблизи полюсов. Если $f(z)$ имеет полюс в a , то при стремлении к a по любому пути $|f(z)|$ стремится к бесконечности. Но если z стремится к нулю, принимая отрицательные действительные значения, то $\exp(1/z)$ стремится к 0. Если угодно, $f(z)$ бесконечна в полюсе при условии, что для любой последовательности точек z_n , сходящейся к полюсу, $|f(z_n)| \rightarrow \infty$. Нельзя сказать, что функция бесконечна в существенно особой точке, потому что можно подходящим выбором способа приближения сделать предел $f(z)$ конечным. Так, если возьмем уравнение

$$\exp(1/z) = b,$$

где b не равно 0 или ∞ , то оно удовлетворяется при

$$z = \frac{1}{2n\pi + \ln b},$$

где n — целое число. Выбирая n все больше и больше, можно сделать z как угодно близким к нулю, оставляя при этом $\exp(1/z)$ всегда равной b . Позже увидим, что, когда многозначная функция заменяется однозначной с помощью разреза, каждая точка разреза является существенно особой точкой.

г) Формально возможным типом особой точки, как и для действительного переменного, является *устраняемая особая точка*. Если $f(z)$ аналитическая в любом кольце $0 < \delta < |z - a| < c$, где δ произвольно мало, и если $f(z) \rightarrow d$, когда $z \rightarrow a$ любым образом, но $f(a) \neq d$, то мы называем a *устраняемой особой точкой*. Такие особые точки не имеют практического значения и упоминаются для полноты. Мы всегда будем полагать, что если $f(z)$ стремится к единственному пределу d при $z \rightarrow a$ любым образом, то $f(a) = d$.

11.111. Если $f(z) = \sum a_n z^n$ для всех z , таких, что $|z| < R$, то при $|z| < R$ функция $f(z)$ не имеет особых точек. Действительно,

$\sum a_n z^n$ однозначна и имеет производную везде внутри круга сходимости.

Если $f(z)$ имеет линию разрыва, то эта линия может пересекать круг сходимости. Тогда $f(z)$ не имеет особенностей в той части круга, которая содержит точку $z=0$. В остальной части круга ряд сходится, но не равен $f(z)$.

11.112. Особенности на бесконечности. Если $z = 1/\xi$ и $f(z) = g(\xi)$,

то $g(\xi)$ может быть либо аналитической при $\xi=0$, либо иметь там точку ветвления, полюс порядка m или существенно особую точку. В этих случаях мы говорим соответственно, что $f(z)$ аналитическая при $z=\infty$, либо имеет точку ветвления, полюс порядка m или существенно особую точку при $z=\infty$. Такое обобщение определений несколько сокращает запись.

11.113. Интегралы вокруг полюсов. Уравнение

$$\frac{d}{dz} z^m = m z^{m-1} \tag{1}$$

распространяется на случаи, когда m — отрицательное целое число, с помощью формулы

$$\frac{d}{dz} (uv) = u \frac{dv}{dz} + v \frac{du}{dz} \tag{2}$$

при $u = z^m$, $v = z^{-m}$. Левая часть обращается в нуль, и если m — отрицательное целое число, то

$$\frac{dv}{dz} = -m z^{-m-1}. \tag{3}$$

Следовательно, (1) имеет место для всех целых m , положительных и отрицательных. Тогда с помощью (1) для любого целого m , отличного от нуля, получаем

$$\int_{z_0}^z z^{m-1} dz = \frac{1}{m} (Z^m - z_0^m). \tag{4}$$

Рассуждения не проходят при $m=0$, так как производная от z^0 не кратна z^{-1} , а равна нулю. Определим условно

$$\ln z = \int_1^z \frac{dt}{t}. \tag{5}$$

Подынтегральное выражение является аналитическим внутри любой области, не содержащей начала координат, и по теореме Коши интеграл имеет одно и то же значение для любых двух путей, которые можно деформировать один в другой, не проходя через начало координат. Положим теперь $|z| = r$, $\arg z = \theta$, а путь интегрирования возьмем вдоль действительной оси от $t = 1$ до $t = r$ и затем вдоль окружности с центром в начале координат до z . На первом отрезке пути t действительно и положительно и

$$\int_1^r \frac{dt}{t} = \ln r,$$

на второй части пути положим

$$t = r(\cos \lambda + i \sin \lambda),$$

и тогда

$$dt = r(-\sin \lambda + i \cos \lambda) d\lambda,$$

откуда

$$\int_r^z \frac{dt}{t} = \int_0^\theta i d\lambda = i\theta.$$

Следовательно,

$$\ln z = \ln r + i\theta. \quad (6)$$

В частности, если взять полный оборот вокруг начала координат, то

$$\int_C z^{m-1} dz = 0 \quad (7)$$

при $m \neq 0$, так как z^m однозначна; но если $m = 0$, то

$$\int_C \frac{dz}{z} = [\ln r + i\theta] = 2\pi i, \quad (8)$$

поскольку $\ln r$ — функция однозначная, а θ возрастает на 2π .

Функция $\ln z$ не является однозначной, если не наложить некоторого ограничения на путь интегрирования, использованный в ее определении; другими словами, она имеет точку ветвления в начале координат. Действительно, если, сохраняя непрерывность, мы позволили бы z сделать несколько оборотов вокруг начала координат, то $\ln z$ возрастал бы на $2\pi i$ при каждом обороте и, таким образом, существовало бы бесконечно много возможных его значений, отличающихся на величины, кратные $2\pi i$. В нашем первом примере $z^{1/2}$ имела только два значения. Можно, однако, сделать $\ln z$ однозначным с помощью любого разреза, применявшегося для $z^{1/2}$. Главным значением

$\ln z$ является то, для которого $|\operatorname{Im}(\ln z)| < \pi$, когда z не является действительным и отрицательным.

Применим теперь эти результаты для интегрирования выражения из 11.11(б) по замкнутому контуру, охватывающему полюс $z = a$ и не содержащему других особенностей. Все члены вида $(z - a)^{-n}$ при n , отличном от 1, дают нуль. Интеграл от $g(z)$ равен нулю по теореме Коши, так как $g(z)$ является аналитической функцией в этой области. Следовательно,

$$\int_C f(z) dz = \int_C \frac{A_1 dz}{z - a} = 2\pi i A_1. \quad (9)$$

Интеграл от аналитической функции вокруг полюса зависит, таким образом, полностью от коэффициента при $(z - a)^{-1}$ в ее главной части. Этот коэффициент называется *вычетом* функции в полюсе. Характерная особенность метода вычисления определенных интегралов, известного под названием *метода контурного интегрирования*, состоит в нахождении контура, не содержащего особенностей, отличных от полюсов, интеграл вдоль которого равен искомому определенному интегралу. Затем интеграл вдоль этого контура приравнивается произведению $2\pi i$ на сумму вычетов в полюсах внутри контура. Для точек ветвления и существенно особых точек нет аналогичного простого правила, хотя для последних в некоторых случаях его можно получить с помощью теоремы Лорана, которая будет доказана позже.

11.114. Связь между экспоненциальной и логарифмической функциями. Простым перемножением получаем

$$\exp(\ln z) = \exp(\ln r) \times \exp i\theta =$$

(так как оба множителя являются абсолютно сходящимися рядами и применимы те же рассуждения, что и для действительных чисел)

$$= r(\cos \theta + i \sin \theta) = x + iy = z. \quad (10)$$

Можно использовать экспоненциальную и логарифмическую функции, чтобы определить z^n для иррациональных и даже для комплексных показателей. Возьмем

$$z^n = \exp(n \ln z). \quad (11)$$

Функция (11) однозначная и аналитическая во всякой области, где этими свойствами обладает $\ln z$. Проверку того, что ее производная равна nz^{n-1} , можно возложить на изучающего.

Если a действительное и положительное, то

$$a^z = \exp(z \ln a) = \exp(x \ln a) \exp(iy \ln a),$$

$$|a^z| = \exp(x \ln a) = a^x.$$

11.12. Изолированные и неизолированные существенно особые точки. Существенно особая точка a может быть *изолированной* или *неизолированной*. Если a — изолированная особая точка, то можно выбрать такой круг с центром в a и радиусом, отличным от нуля, что внутри него нет других особых точек. Так, например, $\operatorname{cosec}(1/z)$ имеет полюсы в точках $z = 1/n\pi$, где n — целые числа, и все эти особые точки изолированы в том смысле, что вокруг каждой из них можно провести окружность настолько малого радиуса, что внутри нее находится только одна особая точка. Но полюсы имеют при $z = 0$ предельную точку, и легко убедиться в том, что сама функция и все функции вида $z^m \operatorname{cosec}(1/z)$ в точке $z = 0$ не определены и не имеют производной. Следовательно, $z = 0$ — существенно особая точка. Она не изолирована, так как в любом, сколь угодно малом круге с центром в $z = 0$ имеются другие особые точки. С другой стороны, функция $\exp \operatorname{cosec}(1/z)$ имеет изолированные существенно особые точки $z = 1/n\pi$ для всех целых n и одну неизолированную ($z = 0$). Можно построить функции, имеющие неизолированные существенно особенности во всех точках некоторой кривой. Наиболее важный случай — однозначные функции, получающиеся из многозначных после проведения разрезов.

Если функция $f(z)$ однозначна и аналитична в некоторой области, за исключением полюсов и существенно особых точек, и особые точки имеют в этой области предельную точку, то предельная точка является неизолированной существенно особой точкой. Действительно, пусть $z = 0$ — предельная точка. Тогда любая окрестность $z = 0$ содержит особые точки функции $f(z)$, и поэтому $z = 0$ — особая точка. Она не является полюсом, так как для любого положительного целого числа m функция $z^m f(z)$ имеет особые точки в любой окрестности $z = 0$.

11.13. Интеграл Коши. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, однозначная внутри контура C и непрерывная в замкнутой области. Тогда, если точка z лежит внутри C , то

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt. \quad (1)$$

Если $f(t)$ можно представить степенным рядом по $t - z$, то (1) очевидно, так как по теореме Тейлора вычет функции $f(t)/(t - z)$ в точке $t = z$ равен $f(z)$. Но до сих пор еще не было доказано, что аналитическую функцию можно представить степенным рядом: сформулированная теорема — один из шагов, ведущих к доказательству этого предложения.

Единственная особая точка внутри контура — простой полюс при $t = z$. Если вокруг точки z проведена окружность C' малого

радиуса, то между контурами C и C' нет никаких особых точек, и, по следствию из теоремы Коши, интегралы по контурам C и C' равны друг другу. Функция $f(t)$ дифференцируема в точке $t=z$, и поэтому на контуре C'

$$f(t) = f(z) + (t-z)\{f'(z) + v(t)\}, \quad (2)$$

где $v(t) \rightarrow 0$ при $(t-z) \rightarrow 0$. Тогда

$$\int_C \frac{f(t)}{t-z} dt = \int_{C'} \left\{ \frac{f(z)}{t-z} + f'(z) + v(t) \right\} dt. \quad (3)$$

Первый член правой части дает $2\pi i f(z)$, второй равен нулю, а третий стремится к нулю при стремлении к нулю радиуса C' . Но левая часть (3) не зависит от радиуса C' . Поэтому она равна $2\pi i f(z)$, что доказывает сформулированное предложение.

Далее следует, что

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta} \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{f(t)}{t-z-\zeta} - \frac{f(t)}{t-z} \right) dt = \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)(t-z-\zeta)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt, \end{aligned} \quad (4)$$

так как $|t-z|$ имеет положительную нижнюю грань на C . Аналогично можно найти, что

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt, \quad (5)$$

причем все интегралы существуют. Следовательно, интеграл Коши можно дифференцировать под знаком интеграла.

Этот результат особенно важен, потому что при доказательстве теоремы Коши намеренно не предполагалось, что φ и ψ имеют непрерывные производные; предполагалось только, что они дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши — Римана. Но, исходя из этого предположения, мы теперь показали, что первые производные дифференцируемы и, следовательно, непрерывны.

11.14. Связь интеграла Коши со степенным рядом. Заметим теперь, что

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \dots + \frac{z^m}{t^{m+1}} + \frac{z^{m+1}}{t^{m+1}(t-z)}. \quad (6)$$

Следовательно, если контур C в 11.13 представляет собой окружность $|t| = c$, причем $|z| < c$ и функция $f(t)$ ограничена на C , то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^m \int_C \frac{z^n}{t^{n+1}} f(t) dt + R_m(z), \quad (7)$$

где

$$R_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^{m+1} f(t)}{t^{m+1}(t-z)} dt. \quad (8)$$

Точка z лежит *внутри* контура C и поэтому $|t-z|$ имеет нижнюю грань $\rho > 0$. Следовательно,

$$\left| R_m(z) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \frac{z}{c} \right|^{m+1} \frac{M}{\rho} 2\pi c = \frac{Mc}{\rho} \left| \frac{z}{c} \right|^{m+1}, \quad (9)$$

где M — верхняя грань $|f(t)|$ на C . Отсюда $|R_m(z)| \rightarrow 0$ и

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_C \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt \quad (10)$$

для всех z , лежащих внутри контура C . Следовательно, при поставленных условиях функцию $f(z)$ можно представить сходящимся степенным рядом с радиусом сходимости, не меньшим c ; из сравнения с (5) видно, что это ряд Тейлора функции $f(z)$ в точке $z=0$. Следовательно, все результаты, доказанные для функций, определяемых степенными рядами, всегда верны для аналитических функций.

11.141. Неравенство Коши. Если теперь написать

$$f(z) = \sum a_n z^n, \quad (11)$$

то для $|z| \leq c$

$$\left| a_n z^n \right| = \frac{1}{2\pi} \left| z^n \int_C \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} c^n \frac{M}{c^{n+1}} 2\pi c = M. \quad (12)$$

Следовательно, *внутри и на окружности, описанной вокруг точки $z=0$, ни один член степенного разложения функции $f(z)$ не может быть по модулю больше, чем максимум модуля $f(z)$ на C . Это неравенство Коши.*

Пусть R — меньшая из двух величин: расстояния от начала координат до ближайшей особой точки и до ближайшей точки на границе области. Тогда по 11.14 ряд $\sum a_n z^n$ сходится и равен $f(z)$ для всех z , таких, что $|z| < R$. Далее, R — наибольшая величина, для которой это верно, при всех $|z| < R$. Действительно, допустим, что утверждение верно при $|z| < R'$, причем $R' > R$.

Тогда либо круг сходимости ряда $\sum a_n z^n$ содержит особую точку функции, определяемой его суммой, что невозможно по 11.111, либо в части круга сумма ряда не совпадает с $f(z)$, либо круг сходимости простирается за границу области определения $f(z)$.

Если $f(z)$ однозначно определена для всех z , кроме, быть может, изолированных особых точек, то теорема принимает более простой вид: граница круга сходимости степенного ряда проходит через особую точку функции, ближайшую к его центру.

Далее, привлекая 11.091 и 11.14, имеем: *если две функции аналитичны при $|z| < R$, то необходимое и достаточное условия их равенства при $|z| < R$ состоят в том, что для некоторого $c < R$ они имеют одинаковые степенные разложения по z при $|z| < c$; тогда при $|z| < R$ каждая из функций равна сумме степенного ряда.*

11.142. Теорема Лиувилля; целые функции при больших $|z|$. Если $f(z)$ аналитична во всей плоскости, то контур C можно выбрать в виде окружности сколь угодно большого радиуса c . Тогда если $f(z)$ ограничена во всей плоскости, скажем $|f(z)| \leq M$, имеем

$$|a_n| \leq \frac{M}{c^n},$$

что сколь угодно мало при $n > 0$. Отсюда

$$f(z) = a_0,$$

и следовательно, *если функция ограничена и аналитична во всей плоскости, то она постоянна. Это теорема Лиувилля.*

Обратно, если функция аналитична во всей плоскости (целая функция) и не является постоянной, то она не ограничена при больших $|z|$.

11.15. Аналитическое продолжение. Из теоремы Тейлора мы видели, что если функция $f(z)$ задана в виде ряда по степеням z , то ее можно представить также рядом по степеням $z - z_0$, где z_0 — любая точка внутри первоначального круга сходимости; этот ряд сходится в таком круге с центром в z_0 , который не выходит за пределы первоначального круга сходимости. Тем не менее ряд по степеням $z - z_0$ может сходиться внутри круга, выходящего за пределы первоначального круга сходимости. Возьмем функцию

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \dots$$

и положим $z_0 = \frac{1}{2}i$. Мы уже знаем, что при $|z| < 1$ функция $f(z)$ равна $1/(1-z)$ и, следовательно, дифференцирование этого ряда определяет функции

$$\frac{1!}{(t-z)^2}, \quad \frac{2!}{(t-z)^3}, \quad \frac{3!}{(t-z)^4}, \dots$$

Следовательно, разложение $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z' = z - \frac{1}{2}i$ имеет вид

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}i} + \frac{z'}{\left(1 - \frac{1}{2}i\right)^2} + \frac{z'^2}{\left(1 - \frac{1}{2}i\right)^3} + \dots$$

Из теоремы Тейлора известно, что этот ряд должен сходиться и быть равным исходной функции при $|z'| < \frac{1}{2}$, так как i — точка на окружности $|z| = 1$, ближайшая к $\frac{1}{2}i$. Но можно

убедиться, что на самом деле ряд сходится при $|z'| < \left|1 - \frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Такой результат и следовало ожидать, так как

по 11.141 граница круга сходимости должна проходить через особую точку, ближайшую к выбранному центру круга. Но может оказаться, что рассматриваемый ряд не представляет уже известной функции; в этом случае новый ряд Тейлора определял бы значения аналитической функции вне пределов z , для которых функция представлялась первоначальным рядом. Тогда можно еще расширить область определения функции, составляя ряд Тейлора для точки, лежащей в новой области. Такой процесс называется аналитическим *продолжением*; он лежит в основе теории функций, предложенной Вейерштрассом, который взял степенной ряд за основу определения аналитической функции [4, 5]. Преимущество определения Вейерштрасса состоит в том, что оно *конструктивно*, т. е. мы можем выбрать какие угодно коэффициенты и всегда получим степенной ряд, сходимость и возможность продолжения которого можно затем исследовать. Некоторые функции естественным образом представляются в виде степенных рядов — например при отыскании решения дифференциального уравнения в виде ряда. Однако при подходе Вейерштрасса некоторые доказательства оказываются более трудными, чем при подходе Коши. С другой стороны, при подходе Коши можно достигнуть лишь немногого, пока не найдены функции, удовлетворяющие условиям, достаточным для того, чтобы функция была аналитической; мы находим, что наиболее общие аналитические функции *имеют* разложения в степенные

ряды. Следовательно, оба подхода полностью равносильны; но на практике предварительные сведения о функции иногда показывают, что функция удовлетворяет условию Вейерштрасса, а иногда — условию Коши. Поэтому, строго говоря, для полноты теории необходимы оба подхода. Однако, если требуется практически осуществить аналитическое продолжение, то непосредственное использование рядов Тейлора оказывается трудоемким и применяется редко.

В теории Вейерштрасса функция сначала определена *только* внутри круга сходимости первоначального степенного ряда. Затем функция определяется значениями, даваемыми этим рядом и всеми его продолжениями, которые могут обходить точки ветвления функции с разных сторон и давать таким образом для определенного z более одного значения $f(z)$. Но если $f(z)$ — рациональная функция, не имеющая полюса в начале координат, то сначала метод Вейерштрасса задает ее только внутри круга с радиусом, равным расстоянию до полюса с наименьшим модулем. Для того чтобы вычислить значения функции где-нибудь вне этого круга, требуется предварительно произвести процесс аналитического продолжения. Принятый метод, с другой стороны, позволяет вычислять функцию непосредственно по правилам арифметических действий для любого значения z , кроме полюсов. Задание функции при помощи определенного интеграла часто непосредственно применимо в большей области, чем задание при помощи степенного ряда.

Введение искусственных барьеров для замены многозначных функций однозначными — неудобство настоящего способа, так как однозначность функции можно получить при помощи различных разрезов. И в методе Вейерштрасса, и в методе Коши можно вообще обойтись без разрезов и рассматривать функцию в целом. Можно выбрать одно значение $f(z)$, скажем при $z = z_0$, и либо следить за непрерывным изменением $f(z)$ при непрерывном изменении z от z_0 до z_1 , либо воспользоваться методом аналитического продолжения при помощи рядов Тейлора. Тогда значение, найденное для $f(z_1)$, при многозначной $f(z)$ зависит от выбранного пути, и поэтому путь должен быть задан. Более систематически это делается при помощи поверхности Римана, когда плоскость z заменяется несколькими листами, винтообразно соединенными в точках ветвления. В этой теории всегда справедливо, что на границе круга сходимости имеется особая точка. Возможность того, что ряд сходится, но в части круга сходимости не равен функции, не возникает; сумма ряда всегда дает одно значение функции. Общее изложение этого вопроса выходит за рамки настоящей книги. Однако нам встретятся несколько случаев, особенно в гл. 21 и 25, когда особое внимание должно

быть обращено на различные пути интегрирования при одной или нескольких точках ветвления. К счастью, в этих случаях можно сравнительно просто провести различие между путями.

Рассмотрение функций, имеющих точки ветвления, особенно важно при использовании конформных отображений в главе 13. Но там принцип взаимно однозначного соответствия точек на двух плоскостях приводит к тому, что без разрезов обойтись нельзя.

11.151. Если две функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны в области D и равны в области D' , содержащейся внутри D , то они равны всюду в D . Пусть z_0 — некоторая точка в D' , а Z — некоторая другая точка в D . Тогда $f_1(z) = f_2(z)$ внутри любого круга с центром в z_0 , который не содержит особых точек или точек границы D' . Предположим теперь, что z_0 и Z соединены кривой конечной длины, лежащей в D и не выходящей на границу D . Расстояния между точками на кривой и точками на границе D имеют положительную нижнюю грань δ . Следовательно, можно так выбрать конечное число n точек $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = Z$, лежащих на кривой, что $|z_r - z_{r-1}| < \delta$. Точка z_1 лежит внутри круга сходимости рядов по степеням $z - z_0$, представляющих функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Следовательно, обе функции представляются одним и тем же рядом Тейлора по степеням $z - z_1$ и точка z_2 лежит в его круге сходимости. Продолжая рассуждения, после конечного числа шагов можно показать, что обе функции представляются одним и тем же рядом Тейлора по $z - z_{n-1}$ и его круг сходимости включает в себя точку Z . Следовательно, $f_1(Z) = f_2(Z)$.

Для доказательства не обязательно знать, что функции равны друг другу в каждой точке области. Достаточно, чтобы они были равны, например, в бесконечном числе точек, лежащих внутри квадрата или на конечном отрезке прямой. Действительно, методом последовательного деления можно доказать существование предельной точки z_0 . Она лежит в области, где функция $f_1(z) - f_2(z)$ аналитическая. Примем ее за начало координат и применим рассуждения из **11.091**. Из них следует, что функция $h(z) = f_1(z) - f_2(z)$ равна нулю всюду при $|z - z_0| < \delta$.

Удивительно, как много можно получить из того, что известны значения функции в ограниченной области, но следует помнить, что, как и в теореме Коши, требование аналитичности накладывает жесткие ограничения на поведение функции. Из теоремы Фурье мы увидим, что иногда можно расширить область определения функции вне первоначального интервала совершенно иным способом, принимая другие свойства функции вне этого интервала.

Условие, что совокупность точек, в которых $h(z) = 0$, должна иметь предельную точку, — существенно. Если, например, известно, что две функции совпадают при всех целых z , то их разность обращается в нуль в бесконечном числе точек, но они не имеют предельной точки, и разность функций может равняться функции $\sin 2\pi z$, умноженной на любое число. Условие, что $h(z)$ тоже должна быть аналитической в предельной точке, также существенно. Например, если функция $h(z) = 0$ при $z = 1/n$, то она может быть любым кратным функции $\sin(\pi/z)$. Дополнительное условие, что $h(z)$ аналитична при $z = 0$, исключает эту возможность.

Мы видели в 11.141, что любая функция $f(z)$, заданная степенным рядом, должна иметь на границе круга сходимости по крайней мере одну особую точку. Процесс аналитического продолжения может привести к тому, что функция будет определена всюду вокруг особой точки a . Если для заданного z результат зависит от того, обходится ли точка z со стороны $\arg z < \arg a$ или со стороны $\arg z > \arg a$, то a — точка ветвления. Если результат не зависит от пути, то a — полюс или существенно особая точка.

Один вид приложений, с которым мы часто будем встречаться — это решение дифференциального уравнения вида

$$F(z, \zeta'', \zeta', \zeta) = 0,$$

где F — такая функция, что если ζ — аналитическая функция z в области D , то и F — аналитическая функция в этой области. Мы можем найти специальным способом, что $\zeta = f(z)$ удовлетворяет уравнению в некоторой области D' , входящей в D , причем $f(z)$ — аналитическая функция. Тогда $F\{z, f''(z), f'(z), f(z)\}$ — аналитическая функция z , тождественно равная нулю в D' . Из аналитического продолжения следует, что эта функция равна нулю во всей области D и поэтому $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в D .

11.152. Из модифицированной теоремы Гейне — Бореля следует, что если $f(z)$, некоторая функция комплексного переменного, разлагается в степенной ряд в каждой точке замкнутой области, то можно найти такую конечную последовательность квадратов, покрывающую всю область, что каждый квадрат или его часть, которая не находится вне области, полностью лежит внутри круга сходимости разложения $f(z)$ в некоторой точке этого квадрата.

11.16. Докажем еще две теоремы, несколько напоминающие неравенство Коши. Первая теорема: действительная или мнимая

части аналитической функции не имеют максимумов и минимумов внутри открытой области. Действительно, пусть одна из них имеет максимум в точке $z = 0$ и пусть контур C из 11.13 — окружность с центром в $z = 0$. Тогда

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ce^{i\theta}) d\theta,$$

где положено $t = ce^{i\theta}$ на контуре C . Следовательно, $f(0)$ равно среднему от $f(z) = \varphi + i\psi$ по любой окружности с центром в $z = 0$, и поэтому ни φ , ни ψ не могут быть при $z = 0$ больше, чем в каждой из точек окружности. Аналогично, они не могут быть меньше, чем в каждой из точек окружности. Поэтому в любой области экстремальные значения φ и ψ должны достигаться на границе области. Если φ постоянна на C , то по теореме единственности (6.074) φ постоянна внутри C ; тогда по условиям Коши — Римана и ψ постоянна внутри C . Следовательно, $f(z)$ постоянна внутри C и по теореме об аналитическом продолжении (11.15) $f(z)$ постоянна во всей области. И φ , и ψ могут иметь стационарные точки, но если они являются максимумами относительно перемещений в одном направлении, то в некоторых других направлениях они являются минимумами, как можно видеть из разложений в степенные ряды.

Аналогичная теорема для трех измерений утверждает, что если $\nabla^2\varphi = 0$ внутри и на поверхности шара, то φ в центре шара равно среднему от значений на поверхности шара (см. 6.092).

11.161. Принцип максимума модуля. Если $f(z)$ — аналитическая функция в некоторой области, то $|f(z)|$ не имеет максимумов в этой области; если $|f(z)| \leq M$ во всех точках границы, то $|f(z)| < M$ во всех внутренних точках области, если только $f(z)$ не постоянная. Пусть z_0 — точка внутри области. Положим $z = z_0 + t$ и примем $t = ce^{i\theta}$, т. е. проведем окружность малого радиуса C , лежащую внутри области. Тогда, обозначая звездочкой комплексно сопряженные величины, получим

$$f(z) = \varphi + i\psi = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n t^n, \quad f^* = \varphi - i\psi = a_0^* + \sum_1^{\infty} a_n^* t^{*n},$$

$$|f(z)|^2 = ff^*,$$

причем ряды абсолютно сходятся на C . Если m и n — различные целые числа, то

$$\int_0^{2\pi} t^m t^{*n} d\theta = c^{m+n} \int_0^{2\pi} e^{(m-n)i\theta} d\theta = 0,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f f^* d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a_0 a_0^* + \sum_1^{\infty} a_n a_n^* t^{n} t^{*n} \right) d\theta = \\ &= |a_0|^2 + \sum_1^{\infty} |a_n|^2 c^{2n} \geq |a_0|^2 = |f(z_0)|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $|f(z_0)|^2$ не больше, чем среднее значение $|f(z)|^2$ на C , причем равенство имеет место только тогда, когда $f(z)$ постоянна. Если же $f(z)$ не постоянна, то для любой точки z_0 , не лежащей на границе, найдутся такие точки z , сколь угодно близкие к z_0 , что $|f(z)| > |f(z_0)|$ и верхняя грань $|f(z)|$ может быть достигнута только на границе.

Рассуждая по-другому, примем, что $\arg f(z_0) = \alpha$ и $g(z) = e^{-i\alpha} f(z)$. Тогда $\operatorname{Re} g(z_0) = |f(z_0)|$, а $\operatorname{Im} g(z_0) = 0$. Если взять произвольную окружность C с центром в z_0 , то по **11.16**, если только $\operatorname{Re} g(z)$ не постоянная, имеем $\operatorname{Re} g(z) > |f(z_0)|$ в некоторой точке z_1 на окружности C . Следовательно, $|f(z_1)| \geq |g(z_1)| > |f(z_0)|$.

Применяя те же рассуждения к $1/f(z)$, видим, что $|f(z)|$ не может иметь минимума во внутренней точке при условии, что $1/f(z)$ — аналитическая функция.

Принцип максимума модуля имеет большое математическое и физическое значение. Иными словами его можно сформулировать так: если на замкнутом контуре $|f(z)| = M$, а в некоторой точке внутри контура $|f(z)| > M$, то функция $f(z)$ имеет внутри этого контура особую точку. Если в некоторой точке внутри этого контура $|f(z)| < M$, то $1/f(z)$ имеет внутри контура особую точку, а $f(z)$ — нуль или существенно особую точку.

Принцип максимума модуля также показывает, что в плоских задачах электростатики максимум напряженности электрического поля, а в гидродинамике максимум скорости достигается на контуре области, если только внутри контура нет особых точек. Эти утверждения можно распространить на случай трех измерений.

Линия постоянного $|f(z)|$ может иметь точку самопересечения z_1 . Если такая точка z_1 имеется, то в ней по двум различным направлениям $\frac{d}{ds} |f(z)|^2 = 0$. Но $|f(z)|^2$ — дифференцируемая функция*). Следовательно, в точке z_1 производная

*) Дифференцируемая как функция x и y , т. е. в смысле Штольца и Юнга.

$\frac{d}{ds}|f(z)|^2 = 0$ для любого направления и $f'(z_1) = 0$. (Случай $|f(z_1)| = 0$ можно исключить. Действительно, если бы имела непрерывная кривая, на которой $|f(z)| = |f(z_1)| = 0$, то точка z_1 была бы предельной точкой нулей $f(z)$, и поэтому $f(z)$ должна была бы равняться нулю везде.) Обратно, если $f'(z_1) = 0$, то в точке z_1 производная $\frac{d}{ds}|f(z)|^2 = 0$ для любого направления, и если $f(z)$ не всюду постоянна, то кривая постоянного $|f(z)|$, проходящая через z_1 , имеет точку самопересечения.

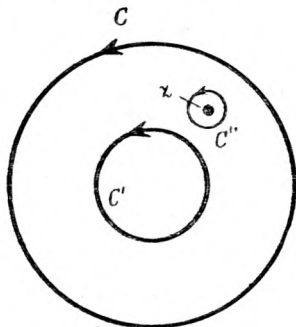


Рис. 43.

Если кривая $|f(z)| = M$ имеет точку самопересечения и образует петлю, лежащую в области аналитичности функции, то петлю тоже можно рассматривать как замкнутую кривую и применить к ней принцип максимума модуля.

11.162. Лемма Шварца. Если $f(z)$ — аналитическая функция, $|f(z)| < M$ при $|z| \leq c$ и, кроме того, $f(0) = 0$, то функция $f(z)/z$ аналитическая при $|z| \leq c$ и $|f(z)/z| < M/c$ при $|z| = c$. Следовательно, при $|z| \leq c$ имеем $|f(z)/z| < M/c$, т. е. $|f(z)| < \frac{M}{c}|z|$. Эта лемма принадлежит Шварцу.

11.17. Теорема Лорана. Пусть $f(z)$ аналитична и однозначна в замкнутой области, ограниченной двумя окружностями C и C' с общим центром O , причем C' лежит внутри C . Выберем точку z , лежащую между окружностями, и очертим ее малой окружностью C'' с центром в z . Тогда $\frac{f(t)}{t-z}$ — функция t , не имеющая особых точек в области, ограниченной C, C', C'' , и на кривых, ограничивающих эту область. Следовательно,

$$\int_{C''} \frac{f(t)}{t-z} dt = \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt - \int_{C'} \frac{f(t)}{t-z} dt,$$

где все контуры проходятся в положительном направлении. Но интеграл в левой части представляет собой интеграл Коши; он равен $2\pi i f(z)$. Для вычисления интеграла по C можно использовать разложение по степеням z/t , так как $|t| > |z|$. Следовательно, интеграл по C равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_C \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt.$$

На контуре C' имеем $|z| > |t|$, и поэтому можно разлагать по степеням t/z . Интеграл по C' равен

$$-\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \int_{C'} f(t) t^{n-1} dt.$$

Окончательно

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_C \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \int_{C'} t^{n-1} f(t) dt \right].$$

Полученный результат показывает, что в любой области между двумя концентрическими окружностями функцию, не имеющую в ней особых точек, можно разложить в степенной ряд, содержащий члены не только с положительными, но и с отрицательными степенями.

11.171. Отсюда получается несколько важных следствий. Сначала предположим, что $f(z)$ имеет особую точку в начале координат и не имеет других особых точек внутри контура C . Тогда интегралы по окружности C' , как следует из **11.055**, не зависят от радиуса C' . Пусть существует m — такое целое число, что функция $z^m f(z)$ ограничена в некотором круге D , лежащем внутри C' , кроме, быть может, начала координат, т. е. пусть существуют такие a и M , что

$$|z^m f(z)| < M \quad (0 < |z| < a).$$

Тогда если $n \geq m + 1$ и радиус D равен b , причем $b < a$, то

$$\left| \int_{C'} t^{n-1} f(t) dt \right| = \left| \int_D t^{n-1} f(t) dt \right| < 2\pi M |t|^{n-m-1} |t| = 2\pi M b^{n-m} \quad (|t| = b).$$

Это сколь угодно малая величина, так как b можно выбрать сколь угодно малым. Но интеграл не зависит от b и, следовательно, должен быть равным нулю. Поэтому если $z^m f(z)$ ограничена внутри круга заданного радиуса с центром в начале координат (за исключением, может быть, самого начала

координат), то разложение Лорана не содержит членов z^{-n} с $n > m$. Если m — наименьшее, положительное целое число, для которого условие ограниченности выполняется, то $f(z)$ имеет в начале координат полюс порядка m . Если условие выполняется для $m=0$, то все отрицательные степени пропадают и мы возвращаемся к разложению Коши. Из одной теоремы Лорана нельзя извлечь никаких сведений о значении $f(0)$, так как точка $z=0$ все время исключается из рассматриваемой области. Но если $m=0$ и $f(z)$ непрерывна при $z=0$, то значение $f(0)$ равно постоянному члену разложения Коши и, следовательно, $f(z)$ аналитична при $z=0$. Поэтому можно сказать, что если $m=0$ и $f(z)$ непрерывна, то $f(z)$ аналитична в начале координат. Следовательно, если m — положительное целое число, функция $z^m f(z)$ ограничена в окрестности точки $z=0$, а $z^{m-1} f(z)$ — не ограничена, то $f(z)$ имеет в точке $z=0$ полюс порядка m : если $f(z)$ ограничена и непрерывна, то она аналитична.

Но это — другое определение полюса порядка m . Поэтому для того, чтобы изолированная особая точка $z=0$ однозначной функции $f(z)$ была существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы функция $z^m f(z)$ была неограниченной в окрестности $z=0$ при любых целых положительных m .

Для $m=0$ эту теорему можно сформулировать по-другому: если функция $f(z)$ ограничена и аналитична в окрестности точки $z=0$, кроме, быть может, самой точки $z=0$, то существует функция $g(z)$, равная $f(z)$ в окрестности $z=0$, кроме, быть может, точки $z=0$, и аналитическая также и в самой точке $z=0$. Действительно, разложение Лорана функции $f(z)$ обладает требуемым свойством.

11.172. Поведение функции около изолированной существенно особой точки. Напомним, что если $f(z)$ имеет полюс порядка m , то $1/f(z)$ имеет нуль порядка m , и наоборот. Условие, что $f(z)$ не аналитична при $z=0$, а $1/f(z)$ — аналитична, на самом деле часто принимается за определение полюса. Аналогично $f(z) - c$, где c — произвольная постоянная, имеет полюс порядка m , и поэтому $1/\{f(z) - c\}$ имеет нуль порядка m . Обратное, если последняя функция имеет нуль порядка m , то $f(z) - c$ и, следовательно, $f(z)$ имеет полюс порядка m . Если $1/\{f(z) - c\}$ аналитична при $z=0$ и отлична от нуля, то $f(z)$ аналитична. Откуда, если $f(z)$ имеет существенно особую точку $z=0$, то и $1/\{f(z) - c\}$ также имеет существенно особую точку $z=0$. Действительно, если бы эта функция была аналитической в $z=0$, то в худшем случае $f(z)$ имела бы полюс. А если бы $1/\{f(z) - c\}$ имела полюс, то $f(z)$ была бы аналити-

ческой. Но если $1/\{f(z) - c\}$ имеет изолированную существенно особую точку $z=0$, то вблизи от $z=0$ она не ограничена. Следовательно, в любом круге с центром в изолированной существенно особой точке функция $f(z)$ должна быть сколь угодно близка к любой заданной конечной величине. Пикар доказал, что на самом деле она принимает каждое значение бесконечное число раз*), кроме, быть может, одного значения, которое она не принимает ни разу (например, нуль для $f(z) = e^{1/z}$). Конечно, ни при каких условиях нельзя говорить о значении функции в самой особой точке, так как его нельзя определить непосредственно, а определение при помощи какого-либо предельного процесса зависело бы от способа стремления к пределу.

11.173. Если вокруг существенно особой точки имеется разложение в форме Лорана, скажем,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} z^{-m},$$

то

$$\int_D f(z) dz = 2\pi i a_{-1},$$

где D — произвольный контур, лежащий между C и C' и охватывающий начало координат. Таким образом, если удовлетворяются условия теоремы Лорана, то метод вычетов можно применять даже к функциям, имеющим существенно особые точки.

11.174. Следует отметить, что если внутри контура C' находится несколько особых точек, то разложение меняется, как только при деформировании контур C' пересекает особую точку. Так, функция $\exp(1/z)$ имеет единственное разложение по отрицательным степеням, пригодное везде, кроме точки $z=0$. Но $\operatorname{cosec}(1/z)$ и $\exp(\operatorname{cosec} 1/z)$ можно разлагать только в областях между $|z| = 1/(n+1)\pi$ и $|z| = 1/n\pi$; для каждого значения n требуется другое разложение. Никакой степенной ряд, даже содержащий отрицательные степени, не может быть пригоден в окрестности изолированной существенно особой точки.

11.175. Если $f(z)$ не имеет других особых точек, кроме конечного числа полюсов a_1, a_2, \dots , и ограничена на бесконечности, то $f(z)$ с точностью до аддитивной постоянной

*) Доказать это удивительно трудно (см. [7, 8]).

является суммой главных частей разложений в окрестности полюсов. Возьмем малые окружности C_1, C_2, \dots вокруг полюсов и контур C , охватывающий все полюса. Тогда, если точка z расположена внутри C , но вне C_1, C_2, \dots , имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \sum_r \int_{C_r} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Первый интеграл не зависит от C , поскольку контур C охватывает все полюса функции $f(t)/(t-z)$. Следовательно, можно выбрать C сколь угодно большим. Тогда, так как $f(z)$ при больших t ограничена, интеграл равен конечной величине. Интегралы по каждой из окружностей C_r , как и в доказательстве теоремы Лорана, дают главные части разложений в соответствующих полюсах α_r . Теорема доказана.

Отсюда следует, что функция, не имеющая никаких особых точек, кроме полюсов, и ограниченная на бесконечности, — рациональная функция. В самом деле, нужно только привести главные части к общему знаменателю и тогда $f(z)$ примет вид отношения двух многочленов, причем степень числителя будет не больше степени знаменателя.

11.176. Теорема Фурье. Одну из формулировок этой теоремы можно получить из теоремы Лорана. В условии теоремы Лорана принималось, что все функции $f(t)t^{n-1}$ и $f(t)t^{-n-1}$ аналитичны в рассматриваемой области и поэтому контуры C и C' можно заменить окружностью D , на которой $|t| = |z|$. Положим $z = re^{i\theta}$, $t = re^{i\varphi}$. Тогда

$$z^{-n} \int_D f(t) t^{n-1} dt = i \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) e^{ni(\varphi-\theta)} d\varphi,$$

$$z^n \int_D f(t) t^{-n-1} dt = i \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) e^{-ni(\varphi-\theta)} d\varphi,$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \cos n(\varphi-\theta) d\varphi.$$

Это один из простейших путей для отыскания разложения Фурье. Но при выводе принималось, что $f(z)$ аналитична в кольце $|t_1| < |t| < |t_2|$, где $|t_1| < |z| < |t_2|$, а это условие удовлетворяется не во всех случаях, когда требуется получить разложение Фурье. Разложение Фурье при более общих условиях будет получено в гл. 14.

11.18. Функции, не допускающие аналитического продолжения. Ввиду того что большая часть обычных степенных рядов допускает аналитическое продолжение за пределы первоначаль-

ного круга сходимости при помощи рядов Тейлора, можно было бы предположить, что продолжение осуществимо всегда. Но это не так. Рассмотрим ряд

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^6 + \dots + z^{n!} + \dots$$

Его радиус сходимости равен единице. Следовательно, имеется по крайней мере одна особая точка с модулем, равным единице. Если приближаться к $z = 1$ изнутри, то каждый член ряда стремится к единице, а его сумма — к бесконечности. А поскольку точка, при стремлении к которой хотя бы по одному направлению $f(z)$ стремится к бесконечности, — особая точка, то $z = 1$ — особая точка функции $f(z)$.

Далее на каждой, сколь угодно короткой дуге окружности $|z| = 1$ имеются точки, в которых $\arg z$ равен произведению 2π на некоторое рациональное число. Положим

$$z = r \exp 2\pi i \frac{m}{n} \quad (r < 1),$$

где m и n — целые числа. Тогда

$$\begin{aligned} z^{n!} &= r^{n!} \exp 2\pi i m (n-1)! = r^{n!}, \\ z^{(n+1)!} &= (z^{n!})^{n+1} = (r^{n!})^{n+1} = r^{(n+1)!} \end{aligned}$$

и т. д. Ряд принимает вид

$$f(z) = (1 + z + \dots + z^{(n-1)!}) + r^{n!} + r^{(n+1)!} + \dots$$

При стремлении r к единице выражение в скобках стремится к некоторому конечному пределу, а остаток ряда — к бесконечности. Отсюда следует, что при $z = \exp(2\pi i m/n)$ имеется особая точка и поэтому на каждой дуге имеется особая точка. Разложение Тейлора в любой внутренней точке круга не может сходиться на расстоянии, большем, чем расстояние до ближайшей особой точки, а она находится в ближайшей точке окружности (так как предельная точка особых точек тоже особая точка). Следовательно, продолжение невозможно.

Еще более своеобразен ряд Осгуда

$$f(z) = \sum \frac{z^{a^n+2}}{(a^n+1)(a^n+2)},$$

где a — целое число, большее единицы. Граница круга сходимости опять $|z| = 1$, однако в этом случае не только сам ряд, но и ряд, составленный из первых производных его членов, сходится во всех точках границы круга. Однако из общих

соображений известно, что на границе круга должна быть по крайней мере одна особая точка. Назовем ее z_0 и рассмотрим $f(z_1)$ и $f(z_2)$, где

$$|z_1| = |z_2| = r < 1, \quad \arg z_1 = \arg z_0, \quad \arg z_2 = \arg z_0 + 2\pi k/a^m$$

и k — целое число. Как и для предыдущего ряда, в точках z_1 и z_2 соответствующие члены вплоть до номера $n = m - 1$ различны, а дальнейшие с точностью до множителя $(z_2/z_1)^n$ совпадают. Следовательно, если составить в точках z_1 и z_2 ряды Тейлора и рассмотреть точки на соответствующих радиусах, то получится, что начальные члены рядов различаются, а последующие члены, которые определяют сходимость, находятся в постоянном отношении. Следовательно, ряд Тейлора по степеням $z - z_2$ расходится при $|z - z_2| > 1 - r$. Величину m можно выбрать сколь угодно большой, и поэтому опять получается, что на каждой дуге границы круга сходимости, несмотря на кажущееся хорошее поведение функции, должна быть особая точка. Для сравнения отметим, что функция $z^2 \ln z$ и ее первая производная обращаются в нуль в точке $z = 0$, которая тем не менее является точкой ветвления; но в рассмотренном примере удивительно то, что подобное поведение возможно по всей границе. Причина того, что функцию нужно считать не аналитической при $|z| = 1$, заключается в следующем: невозможно сказать, что подразумевается под производной функции, когда $|z|$ приближается к единице *снаружи*, так как неизвестно, что представляет собой $f(z)$ вне круга сходимости.

Рассмотренные примеры искусственны, но они приведены здесь для того, чтобы показать, как аналитическая функция может быть определена в части плоскости и быть совершенно неопределимой вне этой части. Каждая точка границы круга сходимости — особая.

11.19. Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum a_n z^n$ сходится в точке z_0 , лежащей на границе его круга сходимости, то он равномерно сходится на всем радиусе, проведенном до точки z_0 включительно, и при стремлении z к z_0 сумма степенного ряда стремится к сумме $\sum a_n z_0^n$. Абсолютная сходимость ряда $\sum a_n z_0^n$ не является необходимой. Эта теорема получается применением теоремы из 1.1154 отдельно к действительной и мнимой частям суммы. Теорема Абеля важна, так как она часто открывает путь для суммирования условно сходящихся рядов, с которыми иначе нельзя было бы справиться. Итак, рассмотрим ряд

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \dots$$

который сходится во всех точках границы круга сходимости, кроме точки $z = -1$. Следовательно, по теореме Абеля можно прямо положить $z = e^{i\theta}$. Получим

$$\ln(1 + e^{i\theta}) = e^{i\theta} - \frac{1}{2} e^{2i\theta} + \frac{1}{3} e^{3i\theta} - \dots,$$

откуда

$$\ln(1 + e^{i\theta}) = \ln \left\{ 2 \cos \left(\frac{1}{2} \theta \right) e^{i/2 \theta} \right\} = \ln \left(2 \cos \frac{1}{2} \theta \right) + \frac{1}{2} i \theta.$$

Отделяя действительную и мнимую части, имеем

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta - \dots &= \ln \left(2 \cos \frac{1}{2} \theta \right), \\ \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta - \dots &= \frac{1}{2} \theta, \end{aligned} \right\} \quad (-\pi < \theta < \pi).$$

Этот прием, состоящий в подстановке степеней r (где $r < 1$) в члены ряда для того, чтобы он стал абсолютно сходящимся, теперь обычно известен как *суммирование в смысле Абеля*. Эйлер использовал этот прием до Абеля, и поэтому также употребляют название *суммирование в смысле Эйлера*. Но обычно так называют другой метод, также принадлежащий Эйлеру.

Изложенный метод можно использовать даже для того, чтобы приписывать смысл ряду в области, где он не сходится. Например, при решении некоторой задачи может получиться ряд

$$a \cos \theta - \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta + \frac{1}{3} a^3 \cos 3\theta - \dots,$$

но по условиям задачи $a > 1$, и этот ряд в таком виде не имеет смысла. Тем не менее можно посмотреть, что получится, если взять $a < 1$. Тогда ряд становится

$$\operatorname{Re} \{ \ln(1 + ae^{i\theta}) \} = \ln |1 + ae^{i\theta}| = \frac{1}{2} \ln(1 + 2a \cos \theta + a^2).$$

Эта формула позволяет предположительно приписать смысл ряду даже при $a > 1$. Часто такая форма ответа оказывает большую помощь при получении обоснованного доказательства. В рассматриваемом случае обоснование можно провести, если известно, что искомая функция представляет собой действительную часть аналитической функции комплексного переменного $ae^{i\theta}$ при всех a . Действительно, тогда можно просуммировать ряд внутри круга сходимости и при помощи аналитического продолжения распространить результат за круг сходимости.

11.20. Теорема Морера. Предположим, что для всех путей L , лежащих в некоторой замкнутой области и имеющих заданные концы $z_0 = (x_0, y_0)$ и $Z(X, Y)$, интеграл от непрерывной однозначной комплексной функции, которая заранее не предполагается аналитической, имеет одно и то же значение и, следовательно, зависит только от пределов интегрирования. Напишем

$$\int_L \{\varphi(x, y) + i\psi(x, y)\} dz = F(X, Y)$$

и

$$\int_{L'} \{\varphi(x, y) + i\psi(x, y)\} dz = F(X + \xi, Y + \eta),$$

где L' — путь, соединяющий точки z_0 и $Z + \zeta$, а ζ настолько мало, что отрезок прямой между Z и $Z + \zeta$ целиком лежит в рассматриваемой области. Тогда можно выбрать путь L' так, чтобы он полностью лежал в этой области. Величина $F(X + \xi, Y + \eta)$ не меняется при изменении пути L' , если только его концы остаются прежними и он полностью лежит внутри области. Поэтому, путь L' можно выбрать так, чтобы он совпадал с L от z_0 до Z и дальше продолжался в виде отрезка прямой до $Z + \zeta$. Тогда если $\arg \zeta = \theta$, то для вариаций с аргументом θ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \{F(X + \xi, Y + \eta) - F(X, Y)\} &= \\ &= \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \int_Z^{Z+\zeta} (\varphi + i\psi) dz = \varphi(X, Y) + i\psi(X, Y). \end{aligned}$$

Этот предел не зависит от $\arg \zeta$. Следовательно, функция $F(X, Y)$ имеет производную в смысле 11.03 и является аналитической функцией комплексного переменного Z . Отсюда следует, что $\varphi + i\psi$ — тоже аналитическая функция.

Это теорема, обратная теореме Коши.

Одно из важных следствий этой теоремы состоит в том, что независимость комплексного интеграла от пути интегрирования накладывает тот же тип ограничений на действительную и мнимую части подынтегрального выражения, что и независимость производной от направления дифференцирования.

Кроме того, она позволяет легко доказать утверждение, что равномерно сходящийся ряд, члены которого однозначные аналитические функции, является однозначной аналитической функ-

цией. До сих пор это было доказано только для степенных рядов. Пусть

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z),$$

где $u_n(z)$ — однозначные аналитические функции z . Если ряд равномерно сходится в некоторой области, то его можно почленно интегрировать вдоль любого пути в этой области. Следовательно,

$$\int_L S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_L u_n(z) dz.$$

Но, так как каждая $u_n(z)$ — однозначная аналитическая функция в этой области, то ее интеграл зависит только от концов пути интегрирования. Поэтому по теореме Морера $S(z)$ — однозначная аналитическая функция в рассматриваемой области.

11.21. Теорема Осгуда — Витали. Значительно более сильные условия аналитичности предела последовательности аналитических функций были даны Осгудом [9] и обобщены Витали [10] и Енцшем. Пусть $\{f_n(z)\}$ — последовательность функций, каждая из которых аналитична в области D , пусть $|f_n(z)| < M$ для каждого n и для каждой точки z из D и пусть на некотором множестве точек, имеющих предельную точку внутри D , $f_n(z)$ стремится к некоторому пределу при $n \rightarrow \infty$. Тогда в любой области, внутренней по отношению к D , $f_n(z)$ равномерно стремится к пределу и предел является аналитической функцией z .

Примем, что предельная точка $z=0$. Все $f_n(z)$ имеют степенные разложения, сходящиеся при $|z| \leq c$, где c — некоторое число, меньшее расстояния от начала координат до границы области D , т. е.

$$f_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} z^p.$$

Если $|f_n(z)| \leq M$ при $|z|=c$, то $|f_n(z)| \leq M$ и $|a_{n,p} z^p| \leq M$ при $|z| \leq c$. Предположим, что $a_{n,m}$, где $m \geq 0$, не стремятся ни к какому пределу при $n \rightarrow \infty$, а $a_{n,p}$ стремятся к пределу при всех $p < m$, если такие имеются. Рассмотрим

$$g_n(z) = z^{-m} \left\{ f_n(z) - \sum_{p=0}^{m-1} a_{n,p} z^p \right\}.$$

При $|z|=c$ имеем $|g_n(z)| \leq (m+1)M/c^m$. Следовательно, $g_n(z)$ равномерно ограничена относительно n и z , и $g_n(0) = a_{n,m}$.

Тогда $g_n(z) - g_n(0)$ равномерно ограничена ($\leq (m+2)M/c^m$) и равна нулю при $z=0$. Следовательно, при $|z| \leq c$, по лемме Шварца (11.162), имеем

$$|g_n(z) - a_{n,m}| \leq (m+2)M|z|/c^{m+1}.$$

Далее, если $q > n$, то

$$|a_{n,m} - a_{q,m}| \leq |g_n(z) - a_{n,m}| + |g_q(z) - a_{q,m}| + |g_n(z) - g_q(z)|.$$

Выберем r , так чтобы выполнялось неравенство $(m+2)Mr/c^{m+1} < \omega$, и z' , так чтобы $0 < |z'| < r$, а $f_n(z')$ и, следовательно, $g_n(z')$ имели предел. Выберем n так, чтобы для всех $q > n$ выполнялось

$$|g_n(z') - g_q(z')| < \omega.$$

Тогда для всех $q > n$

$$|a_{n,m} - a_{q,m}| < 3\omega,$$

и поэтому $a_{n,m}$, вопреки предположению, имеет предел. Следовательно, $a_{n,m}$ стремится к пределу a_m для каждого m . Равным образом, так как $|a_{n,p}| \leq M/c^p$ для всех n , имеем $|a_p| \leq M/c^p$, ряд $\sum a_p z^p$ сходится в любом круге $|z| < c$ и определяет некоторую аналитическую функцию $f(z)$. Сходимость $\sum a_{n,p} z^p$ равномерна как относительно n , так и относительно z при $|z| \leq d < c$. Следовательно, для $|z| < d$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum a_{n,p} z^p = \sum a_p z^p = f(z)$$

и $f_n(z)$ равномерно стремится к $f(z)$.

Пусть теперь D' — область внутри D , включающая $z=0$, а δ — расстояние от границы D до границы D' . Тогда D' может быть покрыта конечным числом перекрывающихся кругов радиусов $c < \delta$ так, что ни один из кругов не задевает границу D и центр каждого круга лежит по крайней мере в одном из других кругов. Пусть центр круга C_1 лежит в C_0 , а центром C_0 служит точка $z=0$. Тогда условия выполняются в общей части C_0 и C_1 и поэтому во всем круге C_1 . Повторение рассуждения показывает, что условие выполняется в каждом круге совокупности. Следовательно, $f_n(z)$ стремится к предельной аналитической функции $f(z)$ во всей области D' и сходимость равномерна, так как совокупность кругов конечна. При любом применении последней части 11.20 наибольшая трудность состоит в доказательстве того, что рассматриваемый ряд (или последовательность) сходится равномерно. Теорема Осгуда — Витали устанавливает это в общем виде только при условиях существования предела на бесконечной последовательности точек,

имеющих в области предельную точку, и ограниченности этой последовательности. На практике обычно существование предела устанавливается во всех точках некоторой области, содержащейся в D , а это более сильное ограничение, чем допущения Осгуда и тем более Витали.

Предельная функция не обязательно аналитична на границе области D .

ПРИМЕРЫ

1. Докажите, что если попытаться определить арифметические действия над парами чисел по правилам (1'), (2') и (3') из 11.01 и присоединить к ним

$$\gamma\gamma' = (aa' + bb', ab' - ba'),$$

то закон коммутативности при умножении не будет выполняться.

2. Пусть z_n — значение корня $(n+16)$ -й степени из единицы с наименьшим положительным аргументом и w_n n -я степень z_n . Докажите, что для $n = 1, 2, \dots$ точки w_n , расположенные на единичной окружности, следуют друг за другом в направлении, противоположном движению часовой стрелки. Определите, сколько их расположено в каждом из четырех квадрантов. Найдите также $|w_n - z_n|$ как функцию n и определите, при каком n она имеет наибольшее значение. (И.С., 1942.)

3. Докажите, что если последовательность комплексных чисел z_n стремится к конечному пределу $c \neq 0$, то $1/z_n \rightarrow 1/c$. Докажите также, что если $f(z)$ — аналитическая функция и $f(0) \neq 0$, то $1/f(z)$ аналитична при $z = 0$.

4. Покажите, что если r_0 и A — положительные действительные числа и

$$r_{n+1} + \frac{1}{r_n} = 2A,$$

то условие $A \geq 1$ необходимо для того, чтобы последовательность $\{r_n\}$ была сходящейся. Покажите, что в случае $r_0 > 1$ условие $A \geq 1$ достаточное. Для этого проверьте, что $r_n > 1$ для каждого n и что $|r_n - c| \leq \left| \frac{r_0 - c}{c^n} \right|$ для некоторого $c > 1$. (И.С., 1939.)

5. Дано, что радиус сходимости ряда $\sum a_n z^n$ равен 2. Найдите радиусы сходимости рядов

$$\sum a_n^k z^n, \quad \sum a_n z^{nk}, \quad \sum a_n z^{n^2}, \quad \sum (a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k) z^n,$$

где k — фиксированное положительное целое число и числа a_n для последнего ряда положительны. (М.Т., 1942.)

6. Рассматривая функцию $\exp\{kf(z)\}$ с подходящей постоянной k или другим способом, покажите, что

- 1) если u ограничена при всех z , то $f(z)$ постоянна;
- 2) если $u < v$ при всех z , то $f(z)$ постоянна, где $f(z) = u + iv$ — аналитическая функция z , а u и v действительны. (Prelim. Exam., 1943.)

7. Каковы радиусы сходимости разложений по степеням z следующих функций:

$$\frac{z}{e^z - 1}, \quad \ln \frac{\sin z}{z}, \quad \exp\{(1 - z^2)^{1/2}\}.$$

(М/с. III, 1928.)

8. Получите иное доказательство принципа максимума модуля, исходя из того, что $\ln |f(z)| = \operatorname{Re} \ln f(z)$ в соответственно выбранной области.

9. Пусть $f(z) = a_0 + a_m z^m + R(z)$, где a_m — первый отличный от нуля коэффициент разложения после a_0 . Докажите, что существует такое c , что при $|z| < c$ выполняется $|R(z)| < \frac{1}{2} |a_m z^m|$, и отсюда получите принцип максимума модуля.

10. Докажите, что аналитическая функция, не имеющая других особых точек, кроме полюса в бесконечно удаленной точке, является многочленом.

11. Докажите, что если интеграл

$$\Omega(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{kx} f(x) dx,$$

где x и $f(x)$ действительны и $f(x) \geq 0$, существует при всех комплексных k (включая и $k=0$), то $\Omega(k)$ — целая функция.

12. Докажите, что если функция $f(z)$ аналитична в некоторой области и отлична от постоянной, то никакая кривая $|f(z)| = M$ не оканчивается во внутренней точке области.

13. Выскажитесь по поводу следующего доказательства теоремы Коши. Положим

$$I(\lambda) = \int_C f(\lambda z) dz.$$

Тогда

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_C z f'(\lambda z) dz = \int_C \frac{z}{\lambda} df(\lambda z) = -\frac{1}{\lambda} \int_C f(\lambda z) dz = -\frac{I}{\lambda}.$$

Поэтому $I = A/\lambda$ и, полагая, что $\lambda \rightarrow 0$, получим $A=0$. В конце полагаем $\lambda=1$.

14. Докажите, что если ряд $\sum u_n(z)$ равномерно сходится на спрямляемом контуре C , а $u_n(z)$ аналитичны внутри C и непрерывны в замкнутой области, то ряд $\sum u_n(z)$ равномерно сходится в любой области, лежащей внутри C .

15. Докажите, что действительная и мнимая части $f(z)$, где $f(z)$ аналитична внутри контура C , имеют ограниченную вариацию на любой спрямляемой кривой, лежащей внутри C .

16. Пусть

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(z)}{z-a} dz,$$

где C — окружность $|z|=1$. Найдите $f(a)$, если $\varphi(z) = 1/z$ или $\varphi(z) = \operatorname{Re}(z)$. (М. Т., 1940.)

17. Докажите, что радиус сходимости ряда $\sum a_n z^n$ равен нижнему пределу последовательности $|a_n|^{-1/n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pollard S., Proc. Lond. Math. Soc., (2) 21, 456—482 (1923).
2. Goursat E., Cours d'Analyse, 2, 88 (1905). (Русский перевод: Гурса Э., Курс математического анализа, т. 2, ОНТИ, М.—Л., 1936.)

3. Newman M. H. A., *Topology of Plane Sets of Points*, 1939, p. 154—156.
4. Littlewood J. E., *Theory of Function*, p. 144.
5. Harkness J., Morley F., *Theory of Functions*.
6. Hurwitz A., Courant R., *Allgemeine Funktionentheorie*. (Русский перевод: Гурвиц А., Курант Р., *Теория функций*, изд-во «Наука», М., 1968.)
7. Titchmarsh E. C., *Theory of Functions*, ..., p. 283. (Русский перевод: Титчмарш Е., *Теория функций*, Гостехиздат, М.—Л., 1951.)
8. Landau E., *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, 1929.
9. Osgood W. F., *Annals of Mathematics*, (2)3, 25—34 (1902).
10. Vitali G., *Annali di Matematica*, (3)10, 65—82 (1904).

КОНТУРНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ИНТЕГРАЛ БРОМВИЧА

„Обойди сторонкой, Пер Гюнт!“

Ибсен „Пер Гюнт“

12.01. Описание метода. Метод контурного интегрирования — это метод вычисления определенных интегралов, основанный непосредственно на теореме Коши. Мы уже встречались с примерами на применение этого метода, когда доказывали неравенство Коши и теорему Лорана. Вот еще один простой пример. Пусть

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a - b \cos \theta}, \quad (1)$$

где a и b — действительные числа и $a > b > 0$. Под знаком интеграла стоит четная функция от θ , следовательно,

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a - b \cos \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} d\theta}{2ae^{i\theta} - b(e^{2i\theta} + 1)}. \quad (2)$$

Положим

$$e^{i\theta} = z. \quad (3)$$

Когда θ возрастает от 0 до 2π , z описывает окружность $|z| = 1$. Поэтому

$$I = -\frac{1}{i} \int_C \frac{dz}{bz^2 - 2az + b}, \quad (4)$$

где контур интегрирования C есть единичная окружность. Но это замкнутый контур, и, следовательно, интеграл равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов по полюсам внутри контура. Всего имеется два полюса. Это нули знаменателя. Их произведение равно 1. Напишем

$$\begin{aligned} ba &= a - \sqrt{a^2 - b^2}, \\ \frac{b}{a} &= a + \sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда α лежит внутри единичной окружности, а $1/\alpha$ — снаружи. Далее,

$$I = -\frac{1}{ib} \int_C \frac{dz}{(z-\alpha)\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)}. \quad (6)$$

Вблизи α подынтегральная функция имеет вид

$$\frac{1}{\alpha - \frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{z-\alpha} + \text{Функция, аналитическая при } z=\alpha \right), \quad (7)$$

следовательно, вычет равен $(\alpha - 1/\alpha)^{-1}$. Отсюда

$$I = -\frac{2\pi i}{ib\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (8)$$

12.011. Рассмотрим теперь несколько более сложный интеграл

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a - b \cos \theta)^2}, \quad (1)$$

a и b удовлетворяют прежним условиям.

После аналогичных преобразований получаем

$$I = \frac{2}{i} \int_C \frac{z dz}{(bz^2 - 2az + b)^2} = \quad (2)$$

$$= \frac{2}{ib^2} \int_C \frac{z dz}{(z-\alpha)^2 \left(z - \frac{1}{\alpha}\right)^2}, \quad (3)$$

где C — снова единичная окружность. Но теперь $z = \alpha$ — двукратный полюс, и нам придется раскрыть скобки, чтобы получить коэффициент при $(z-\alpha)^{-1}$. Положим

$$z - \alpha = z'. \quad (4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{z}{\left(\frac{1}{\alpha} - z\right)^2} &= \alpha \left(1 + \frac{z'}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha - z'\right)^{-2} = \\ &= \alpha \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)^{-2} \left[1 + z' \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\frac{1}{\alpha} - \alpha}\right) + \dots\right], \end{aligned} \quad (5)$$

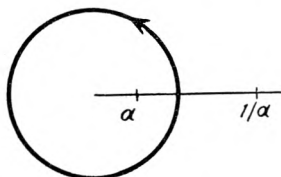
и коэффициент при z' равен

$$\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)^{-3} \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha + 2\alpha\right) = \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)^{-3} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right). \quad (6)$$

Это коэффициент при z'^{-1} в разложении подынтегральной функции по степеням z' , и, следовательно, это — вычет. Отсюда

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \frac{2}{ib^2} \left(\frac{1}{a} - \alpha\right)^{-3} \left(\frac{1}{a} + \alpha\right) = \\ &= \frac{4\pi}{b^2} \left[\frac{2(a^2 - b^2)^{1/2}}{b} \right]^{-3} \frac{2a}{b} = \frac{\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

12.02. Случай $b > a$ можно использовать для того, чтобы проиллюстрировать понятие *главного значения интеграла*. Обратившись к 12.01 (5), мы видим, что в этом случае полюса



Р и с. 44.

$[a \pm i\sqrt{b^2 - a^2}]/b$ суть комплексные числа с модулем, равным 1. Поэтому подынтегральное выражение не ограничено на выбранном контуре; точно так же оно не ограничено в исходном интеграле вблизи $\cos \theta = a/b$. В подобной ситуации интегралу, строго говоря, нельзя приписать никакого значения. Однако на практике иногда встречаются интегралы такого рода, хотя их использование всякий раз требует специального обоснования. Для действительных переменных, если $f(x)$ имеет простой полюс при $x = a$, мы вырезаем из пути интегрирования отрезок от $a - h$ до $a + h$ и образуем интеграл по оставшейся части. Если последний имеет предел, когда $h \rightarrow 0$, то мы называем этот предел главным значением интеграла. Простейший пример — логарифм. Если a и b действительны и одного знака, то отрезок действительной оси от a до b не проходит через начало, так что

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}.$$

Однако если a отрицательно, а b положительно, то интеграл

расходится при $x=0$. Но мы все же можем положить по определению *)

$$P \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_a^{-h} \frac{dx}{x} + \int_x^b \frac{dx}{x} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\ln \frac{h}{-a} + \ln \frac{b}{h} \right) = \ln \frac{b}{-a} = \ln \frac{b}{|a|}.$$

Найденное число называется *главным значением* интеграла, оно определяется однозначно. Существенно условие, предписывающее нам использовать одно и то же h с обеих сторон; мы увидим, что если брать первый интеграл от a до $-h$, а второй — от k до b , то можно сделать предел любым, каким мы только пожелаем, если заставить h и k стремиться к нулю так, чтобы они при этом находились в подходящем отношении. Главное значение часто записывают в виде обычного интеграла, однако следует этого избегать. Если использовать комплексное переменное, то можно включить в путь интегрирования полуокружность от $-h$ до h , обходящую начало координат либо над, либо под действительной осью. Первая полуокружность (описываемая в отрицательном направлении) дает вклад, равный $-\pi i$, вторая — вклад, равный $+\pi i$. Следовательно, если провести на комплексной плоскости произвольные разрезы, то вдоль пути интегрирования, который допускается этими разрезами, мы получим в этом случае

$$\int_a^b \frac{dz}{z} = \ln \frac{b}{|a|} \pm i\pi.$$

Главное значение равно среднему арифметическому из указанных двух возможных значений.

Аналогично, если путь интегрирования на комплексной плоскости проходит через простой полюс a , то можно определить главное значение такого интеграла следующим образом. Около точки a описывается маленькая окружность радиуса h , из пути интегрирования вырезается часть, попавшая внутрь этой окружности, и затем h устремляется к 0. Если заменить переменное z на ζ и производная $dz/\partial\zeta$ конечна и отлична от нуля в полюсе, тогда то же самое построение определит интеграл на плоскости ζ , и эти два интеграла окажутся равны между собой. В самом деле, если окружность на плоскости z вырезает из пути интегрирования дугу с концами $a-k$ и $a+k'$, где $|k|=|k'|=h_1$, а ее образ на плоскости ζ — дугу с концами

*) В следующей формуле буква P перед интегралом означает „главное значение“ (по-английски — principal value). Иногда употребляется обозначение $P. v.$, а чаще всего $V. p.$ (от латинского Valeur principale). — *Прим. перев.*

$\alpha - \kappa$ и $\alpha + \kappa'$, и если k и k' стремятся к 0 так, что $k/k' \rightarrow 1$, то κ и κ' тоже стремятся к 0 так, что $\kappa/\kappa' \rightarrow 1$.

В случае интеграла 12.01 (1), если $b > a$,

$$P \int_0^\pi \frac{d\theta}{a - b \cos \theta} = -\frac{1}{i} P \int_C \frac{dz}{b(z - \alpha) \left(z - \frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Мы должны здесь вырезать из пути интегрирования части, попавшие внутрь маленьких окружностей, описанных около двух полюсов, а затем устремить радиусы к 0. Можно еще дополнить путь интегрирования до замкнутого контура, добавив к нему дуги маленьких окружностей, описанных около

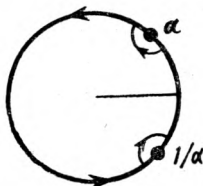


Рис. 45.

полюсов, лежащие внутри единичного круга. Внутри полученного контура нет особенностей, и интеграл по нему равен 0. Две упомянутые дуги стремятся к полуокружностям, и поскольку они проходятся в отрицательном направлении, то интеграл по каждой из них стремится к произведению $-\pi i$ на вычет. Но вычеты в α и в $1/\alpha$ равны соответственно

$$-\frac{1}{i} \frac{1}{\alpha - \frac{1}{\alpha}}, \quad -\frac{1}{i} \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - \alpha},$$

т. е. равны по модулю и противоположны по направлению. Следовательно, сумма интегралов по дугам стремится к 0, и поэтому главное значение интеграла вдоль единичной окружности есть 0.

Такая схема определения главного значения годится только в случае простых полюсов.

12.03. Пусть $f(z) = g(z)/h(z)$, где $g(z)$ — аналитическая функция, отличная от нуля при $z = a$, а $h(z)$ имеет при $z = a$ простой нуль. Мы можем тогда написать

$$f(z) = \frac{g(a)}{(z-a)h'(a)} + \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ аналитична при $z = a$. Отсюда сразу получаем, что вычет равен $g(a)/h'(a)$. В случае кратного полюса обычно бы-

вадет необходимо провести разложение до члена, содержащего $(z - a)^{-1}$, что может оказаться трудным.

12.04. Пусть $f(z)$ аналитична в некоторой области всюду, кроме некоторого множества точек, где она имеет полюса. Рассмотрим функцию $f'(z)/f(z)$. Если a — полюс порядка m , то

$$f(z) = A(z - a)^{-m} [1 + \varphi(z)], \quad (1)$$

где $\varphi(z)$ аналитична вблизи точки a и равна 0 в самой точке a ; далее

$$f'(z) = -mA(z - a)^{-m-1} [1 + \varphi(z)] + A(z - a)^{-m} \varphi'(z). \quad (2)$$

Следовательно, вблизи a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m}{z - a} + \psi(z), \quad (3)$$

где $\psi(z)$ аналитична при $z = a$. Если b — нуль порядка n , можно написать

$$f(z) = B(z - b)^n [1 + \chi(z)], \quad (4)$$

и аналогично получить

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - b} + \omega(z). \quad (5)$$

Следовательно, функция $f'(z)/f(z)$ аналитична всюду в рассматриваемой области, кроме тех точек, где $f(z)$ имеет полюса и нули; в этих точках $f'(z)/f(z)$ имеет простые полюса. Вычет равен $-m$, если точка — полюс $f(z)$ порядка m , и равен n , если точка — нуль $f(z)$ порядка n . Если теперь взять интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (6)$$

по контуру C , лежащему в области и не проходящему через полюса и нули $f(z)$, то его значение равно $\sum n - \sum m$, т. е. разности между числом нулей и числом полюсов $f(z)$ внутри C (кратные полюса и нули считаются столько раз, какова их кратность). Заметим, что (6) можно также записать в виде $\frac{1}{2\pi i} [\ln f(z)]_C$, где квадратные скобки обозначают приращение, которое получает $\ln f(z)$, когда z описывает контур C ; другое выражение для (6):

$$\frac{1}{2\pi} [\arg f(z)]_C.$$

Аналогично, если $h(z)$ аналитична в рассматриваемой области, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C h(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum nh(b) - \sum mh(a). \quad (7)$$

В частности, при $h(z) = z$ этот интеграл равен разности между суммой нулей $f(z)$, лежащих внутри C , и суммой ее полюсов.

12.041. Пусть $f(z) = g(z) + h(z)$, где $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в точках C , и пусть всюду на C $|h(z)| < |g(z)|$. Тогда

$$[\arg f(z)]_C = [\arg g(z)]_C. \quad (1)$$

Положим

$$f(z) = (1+k)g(z), \quad (2)$$

где $|k| < 1$ для всех z , принадлежащих C . Тогда

$$\arg f(z) - \arg g(z) = \arg(1+k). \quad (3)$$

Но $1+k$ имеет положительную действительную часть; следовательно, $-\pi/2 < \arg(1+k) < \pi/2$.

Далее, приращения $\arg f(z)$ и $\arg g(z)$ при обходе вдоль C суть целые кратные 2π . Но поскольку $|\arg f(z) - \arg g(z)|$ всегда меньше, чем $1/2\pi$, то разность их приращений меньше, чем π , и, следовательно, должна равняться нулю. Доказанное утверждение называется *теоремой Руше*.

12.042. С помощью теоремы Руше можно доказать следующую теорему, которая относится к алгебре, но не допускает доказательства чисто алгебраическими методами. *Алгебраическое уравнение степени n имеет n корней*. Пусть уравнение имеет вид

$$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

где $a_0 \neq 0$. Можно найти такие положительные числа r_1, r_2, \dots , что

$$|a_0| r_1 > |a_1|, \quad |a_0| r_2^2 > |a_2|, \quad \dots, \quad |a_0| r_n^n > |a_n|.$$

Положим

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_n.$$

Тогда во всех точках окружности $|z| = r$,

$$|a_0 z^n| > |a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n|.$$

Следовательно, согласно **12.041**, при обходе вдоль этой окружности аргументы $f(z)$ и $a_0 z^n$ получают равные приращения. Но $\arg z^n$ возрастает на $2\pi n$; следовательно, и $\arg f(z)$ возрастает

на $2\pi i$. Но $f(z)$ не имеет полюсов; следовательно, она имеет n нулей внутри окружности. А вне окружности нулей, очевидно, нет.

12.043. Начинаящие иногда доказывают, что поскольку уравнение

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = 0$$

бесконечной степени, то оно имеет бесконечное число корней. Результат правильный, но доказательство можно было бы равным образом применить к уравнению

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = 0,$$

которое вообще не имеет корней. Причина, по которой метод **12.042** не подходит для уравнений бесконечной степени, состоит в том, что отсутствие члена с наивысшей степенью не позволяет повторить самое начало доказательства, и, кроме того, нет таких r и n , что n -й член по модулю больше, чем все остальные члены при $|z| > r$, а тем самым, нет функции, удовлетворяющей условиям **12.041**, с которой можно было бы произвести сравнение. Если мы применим **12.04** непосредственно к $\exp z$, то получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C dz = 0$$

для любого пути интегрирования; поэтому $\exp z$ не имеет ни нулей, ни полюсов.

12.05. Обратные функции. Предположим, что у нас имеется уравнение

$$\xi = f(z), \tag{1}$$

которое задает ξ как аналитическую функцию z в некоторой области на плоскости z . Тогда, обратно, мы можем рассматривать z как функцию ξ , скажем $z = p(\xi)$, на некотором множестве точек, а именно на множестве значений, которые принимает $f(z)$, когда значения z принадлежат вышеуказанной области. Возникает вопрос, является ли $p(\xi)$ аналитической функцией ξ , а также прежде всего однозначна ли эта функция в некоторой области ξ . Если $f(z_1) = f(z_2)$ и если взять путь, соединяющий z_1 и z_2 внутри области, то ξ опишет замкнутый контур, поскольку, согласно предположению, $f(z)$ аналитична, а следовательно, ограничена вдоль указанного пути. Поэтому,

когда ζ описывает этот контур, z не возвращается к своему первоначальному значению; следовательно, $p(\zeta)$ имеет точку ветвления внутри контура, согласно 11.11 (а).

Например, $f(z) = z^2$ принимает одно и то же значение при $z = a$ и при $z = -a$. Если $z = ae^{i\theta}$, где a — константа, а θ возрастает от 0 до π , то $\arg \zeta$ возрастает на 2π , а z не возвращается к своему первоначальному значению. Следовательно, поскольку a можно взять произвольно малым, $\zeta = 0$ является точкой ветвления функции $p(\zeta) = \zeta^{1/2}$. Рассмотрим еще один пример. Пусть $f(z) = e^z$ и пусть y меняется от $-\pi$ до π , а x остается постоянным и равным a . Тогда $|\zeta|$ остается постоянным и равным e^a , а $\arg \zeta$ возрастает на 2π , так что ζ описывает окружность $|\zeta| = e^a$. Поскольку a можно считать как угодно большим по модулю отрицательным числом, то каждая окружность с центром $\zeta = 0$ содержит точку ветвления обратной функции $\ln \zeta$, и, следовательно, $\ln \zeta$ имеет точку ветвления при $\zeta = 0$. Таким образом, если мы хотим, чтобы $p(z)$ была однозначной функцией, то мы должны провести такие разрезы на плоскости z , чтобы ни в одной из образовавшихся при этом частей $f(z)$ никогда не принимала дважды одно и то же значение. Функции, которые в некоторой области принимают любое значение не более, чем один раз, называются *простыми*, или *однолиственными*, в этой области.

Даже если последнее условие выполнено, то еще не очевидно, что множество значений ζ , определяемое уравнением (1), образует некоторую область. Чтобы утверждать это, мы нуждаемся в теореме о том, что при некоторых условиях каждое значение из окрестности ζ является значением $f(z)$. Приступаем к доказательству этой теоремы.

12.051. Если $f(z)$ аналитична при $z=0$ и если $f(0)=0$, а $f'(0) \neq 0$, то существует такая область на плоскости ζ , содержащая $\zeta=0$, что уравнение $f(z)=\zeta$ имеет одно и только одно решение $p(\zeta)$, аналитическое по ζ в этой области и стремящееся к 0, когда $\zeta \rightarrow 0$. Если $f'(0)=0$, то $\zeta=0$ является точкой ветвления $p(\zeta)$.

Поскольку $f(z)$ аналитична при $z=0$ (а следовательно, согласно определению 11.11, и в некоторой окрестности $z=0$), найдется такое R , что

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (z < R). \quad (1)$$

Рассмотрим случай $a_1 \neq 0$. Выражение $a_2 + a_3 z + \dots$ ограничено в любом круге $|z| \leq c < R$. Положим

$$f(z) = a_1 z + h(z). \quad (2)$$

Тогда при некотором M справедливо неравенство $|h(z)| < M|z^2|$. Возьмем такое d , чтобы было $0 < Md < \frac{1}{2}|a_1|$. Тогда при $0 < |z| \leq d$

$$|f(z) - a_1z| < M|z^2| \leq |z|Md < \frac{1}{2}|a_1z|. \quad (3)$$

Для заданного ξ число корней уравнения $f(z) = \xi$ внутри окружности C ($|z| = d$) равно

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(t)}{f(t) - \xi} dt &= \frac{1}{2\pi} \{\arg [f(t) - \xi]\}_C = \\ &= \frac{1}{2\pi} \{\arg [a_1z + h(z) - \xi]\}_C. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $|\xi| < \frac{1}{2}|a_1d|$. Поскольку $|h(z)| < \left|\frac{1}{2}a_1d\right|$ во всех точках C , то $|a_1z| > |h(z) - \xi|$ на C , и число корней уравнения $f(z) = \xi$ внутри C равно числу корней уравнения $a_1z = 0$, т. е. равно 1. Если $\xi = 0$, то корнем является $z = 0$. Следовательно, z представляет собой однозначную функцию ξ , определенную для всех ξ , удовлетворяющих неравенству $|\xi| < \frac{1}{2}|a_1d|$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_C \frac{tf'(t)}{f(t) - \xi} dt. \quad (5)$$

Подынтегральная функция имеет только один полюс при $f(t) = \xi$, вычет равен значению t в этой точке, т. е. равен z . Следовательно, интеграл равен $2\pi iz$. Интеграл этот является аналитической функцией ξ ; следовательно, z представляет собой при $|\xi| < \left|\frac{1}{2}a_1d\right|$ аналитическую функцию ξ , равную 0, когда $\xi = 0$.

Пусть теперь $a_1 = 0$, и пусть a_n — первый отличный от нуля коэффициент в (1). Внося в доказательство необходимые изменения, мы находим, что при некотором δ и при любом ξ , удовлетворяющем неравенству $0 < |\xi| < \delta$, существует n значений z , стремящихся к 0 вместе с ξ , при которых $f(z) = \xi$; следовательно, z не является однозначной функцией ξ ни в какой окрестности $\xi = 0$. Это завершает доказательство теоремы.

Если $f(z) = a_0$ при $z = z_0$, то мы получим соответствующие результаты, рассмотрев $f(z) - a_0$ и $z - z_0$.

12.052. Если $f'(0) \neq 0$, то z выражается в виде аналитической функции $p(\xi)$ в некоторой окрестности, для которой $f[p(\xi)] = \xi$. Если $p(\xi)$ допускает аналитическое продолжение, то последнее соотношение выполняется во всей области, на

которую можно распространить $p(\xi)$. Поэтому продолжение $p(\xi)$ остается обратной функцией. Можно сказать кое-что об его особенностях, хотя полное рассмотрение вопроса здесь невозможно.

Мы видим, что если $f'(z_0) = 0$, то $f(z_0)$ является точкой ветвления $p(\xi)$, как в случае $f(z) = z^2$ вблизи $z = 0$.

Далее, если $f(z)$ не принимает значения ξ_0 , то ξ_0 , очевидно, не может принадлежать области, где $p(\xi)$ аналитична. Например, если $f(z) = e^z$, то нулевое значение является точкой ветвления для $\ln z$.

В любой окрестности полюса или изолированной существенно особой точки $f(z)$ модуль $|f(z)|$ не ограничен. Можно рассмотреть тогда

$$\xi' = \frac{1}{f(z)}.$$

Если $f(z)$ имеет в точке z_0 простой полюс, то $d\xi'/dz$ — не нуль; следовательно, z является в окрестности z_0 аналитической функцией от ξ' , а значит, и от $1/\xi$. Тогда $p(\xi)$ — аналитическая и стремится к z_0 , если брать значения ξ вне достаточно большого круга. Если же $f(z)$ имеет кратный полюс, то $p(\xi)$ вне любого круга является многозначной.

Если $f(z)$ имеет при $z = z_0$ изолированную существенно особую точку, то $f(z)$ принимает любое значение, кроме, быть может, одного, бесконечно много раз. Следовательно, функция с такой особенностью не может обладать однозначной обратной функцией, если только мы не проведем разрезов. Если $f(z)$ никогда не принимает значения ξ_0 , то ξ_0 является точкой ветвления $p(\xi)$. Если $f(z)$ принимает все значения в окрестности z_0 , то при $\xi = \infty$ имеется по крайней мере точка ветвления, поскольку значения $f(z)$ с как угодно большим модулем встречаются бесконечно много раз.

Общие правила для окрестности не изолированной особой точки было бы чрезвычайно трудно сформулировать.

Если вблизи точки ветвления $f(z)$

$$\xi = f(z) = z^{1/m}(a_0 + a_1z + \dots),$$

где m — целое положительное число, то можно положить $z^{1/m} = Z$. Тогда Z , а следовательно, и z не имеют точек ветвления при $\xi = 0$. В этом случае нужно провести разрез, чтобы сделать $f(z)$ однозначной, если же мы не обратим внимание на этот разрез и разрешим z многократно обходить вокруг 0, то $f(z)$ не может принять дважды одно и то же значение до тех пор, пока z не совершит m полных обходов, а когда это произойдет

и z вернется к первоначальному значению, тогда и $f(z)$ тоже придет к своему первоначальному значению.

Если, однако,

$$f(z) = z^{m/n} (a_0 + a_1 z + \dots),$$

где m и n — взаимно простые целые положительные числа, ббльшие 1, то обратная функция при $\zeta = 0$ имеет точку ветвления.

Более сложное поведение $f(z)$ вблизи точки ветвления потребует специального исследования.

Если $z \rightarrow \infty$, то $f(z)$ может стремиться, а может и не стремиться к пределу; этот предел, если он существует для разных путей, может иметь, а может и не иметь одного и того же значения для всех путей. Далее, для соответствующего пути на ζ -плоскости $p(\zeta)$ стремится к бесконечности, а предел $f(z)$ соответствует особой точке $p(\zeta)$. Простейший способ действий состоит в том, чтобы положить $z' = 1/z$, $f(z) = g(z')$ и рассмотреть функцию, обратную $\zeta = g(z')$ вблизи $\zeta = g(0)$.

12.053. Разложение Лагранжа. Ниже дается формальный вывод степенного ряда для разложения обратной функции; с помощью аналитического продолжения можно получить одну из аналитических ветвей этой обратной функции. В интеграле **12.051** (5) можно заменить окружность C контуром D , лежащим внутри той области, где $f(z)$ аналитична; D можно взять как угодно большим, лишь бы ни на нем, ни внутри него $f(z)$ не принимала дважды одного и того же значения. Потом в **12.051** (5) положим $f(t) = \tau$ и возьмем $|\zeta|$ меньше, чем наименьшее значение $|\tau|$ на D . Тогда если Δ — соответствующий путь на τ -плоскости, то

$$z = p(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{t d\tau}{\tau - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{\tau^{n+1}} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n. \quad (1)$$

Здесь $a_0 = 0$ и при $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{t d\tau}{\tau^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{t f'(t) dt}{[f(t)]^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ -\frac{t}{n [f(t)]^n} \right\}_D + \frac{1}{2\pi i n} \int_D \frac{dt}{[f(t)]^n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Внеинтегральный член исчезает, так как $f(t)$ однозначна. Следовательно, a_n равно $1/n$ вычета $[f(t)]^{-n}$ при $t=0$. В таком виде этот результат был впервые получен Якоби. Уточнение

радиуса сходимости ряда может оказаться трудной задачей; согласно **11.141**, он по крайней мере равен значению $|f(z)|$ в особой точке $p(\xi)$ с минимальным модулем; однако это правило требует тщательности, в частности, из-за необходимости учитывать разрезы. Рассмотрим кривые C_m , охватывающие $z=0$, на которых

$$|f(z)| = m > 0.$$

Эти кривые просты, если m достаточно мало; и если $m' < m$, то C_m охватывает $C_{m'}$. Если увеличивать m , то C_m может достигнуть точки $z=b$, где $f'(z)=0$. В этом случае C_m имеет точку пересечения при $z=b$, а значения $f(z)$ достигаются вблизи $f(b)$ не менее, чем дважды. Тогда $|f(b)|$ является радиусом сходимости. Однако это не исключает возможности, чтобы в других стационарных точках $|f(z)|$ принимал меньшие значения. Рассмотрим в качестве примера

$$\zeta = f(z) = z(z-1)^2.$$

Эта функция стационарна при $z=1/3$ и при $z=1$. В последней точке $f'(z)=0$. Однако радиус сходимости ряда, который является решением уравнения $f(z)=\zeta$ и обращается в нуль при $\zeta=0$, равен $|f(1/3)| = 4/27$. Если мы попробуем продолжить это решение в окрестность $z=1$, то нам придется пересечь окружающую $z=0$ замкнутую кривую, на которой $|\zeta| = 4/27$, и решения $z=1 \pm \zeta^{1/2} + \dots$, которые делают ζ малым вблизи $z=1$, соответствуют различным ветвям обратной функции.

Коэффициенты можно вычислить, положив

$$f(z) = \frac{z}{\varphi(z)}, \quad (3)$$

где $\varphi(z)$ не обращается в нуль внутри D . Тогда

$$a_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_D \frac{[\varphi(t)]^n dt}{t^n}. \quad (4)$$

Однако по формуле из **11.13** для коэффициентов ряда Тейлора

$$\frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{g(t) dt}{t^n} = \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \quad (n > 0), \quad (5)$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [\varphi(z)]^n \right\}_{z=0} \quad (6)$$

и

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [\varphi(z)]^n \right\}_{z=0} \zeta^n. \quad (7)$$

Это разложение Лагранжа. Мы взяли $z = 0$ в качестве начальной точки. Если $f(z) = \alpha$ при $z = a$, и если

$$\zeta - \alpha = \frac{z - a}{\varphi(z)}, \quad (8)$$

то в более общей форме

$$z - a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [\varphi(z)^n] \right\}_{z=a} (\zeta - \alpha)^n, \quad (9)$$

ряд сходится внутри окружности на ζ -плоскости, такой, что

$$\frac{d}{dz} \frac{z - a}{\varphi(z)} = \frac{\varphi(z) - (z - a)\varphi'(z)}{[\varphi(z)]^2} \quad (10)$$

не обращается в нуль внутри нее.

Обычно общий коэффициент обращенного ряда не удается выразить в удобной форме*). Однако если радиус сходимости известен, то гарантируется существование разложения в некоторой определенной области, так что теорема об обращении монотонной функции, данная в 1.066, обобщается на аналитические функции.

Если $h(z)$ — другая функция z , аналитическая в области, то с помощью простого обобщения находится ее разложение по ζ . Нужно только подставить $h(t)$ вместо t в (1). Тогда

$$h(z) - h(a) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\zeta - \alpha)^n, \quad (11)$$

где

$$c_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{ [\varphi(z)]^n h'(z) \} \right]_{z=a}. \quad (12)$$

Коэффициент c_n равен $1/n$ вычета $[f(z) - f(a)]^{-n} h'(z)$ при $z = a$.

12.06. Теорема Миттаг-Леффлера. Предположим, что $f(z)$ имеет бесконечное число полюсов и не имеет других особенностей. Мы хотим узнать, можно ли обобщить результат 11.175 и установить, что $f(z)$ отличается на константу от суммы соответствующих полюсам главных частей. Мы не можем применить использованное в 11.175 дополнительное условие, состоящее в том, что $f(z)$ ограничена при всех $|z| > R$, где R — некоторое фиксированное число, поскольку $f(z)$ обращается в бесконечность в некоторых точках вне любого заданного контура.

* В [1] первые коэффициенты (вплоть до z^{12}) подробно выражены через коэффициенты ряда, представляющего $f(z)$. См. также [2].

Может быть, однако, можно выбрать такое множество контуров C_1, C_2, \dots , чтобы на каждом C_m выполнялись неравенства $|f(z)| < M$, где M не зависит от m , $|z| \geq R_m$, где $R_m \rightarrow \infty$, и $\int_{C_m} \left| \frac{dz}{z} \right| < 2\pi\lambda$, где λ фиксировано. Тем самым мы выбираем

контур C_m так, чтобы они проходили между полюсами, и так, чтобы в конечном счете они становились бесконечно большими. Тогда, если $t = z$ не является полюсом $f(t)$ и C_m охватывает z , то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{f(t) dt}{t-z} + P_m(z), \quad (1)$$

где $P_m(z)$ — сумма главных частей по всем полюсам a внутри C_m . Но, кроме того, если $f(t)$ аналитична при $t = 0$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{f(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{f(t)}{t} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{zf(t)}{t(t-z)} dt, \quad (2)$$

и первый член в правой части равен, согласно (1), $f(0) - P_m(0)$. Тогда

$$f(z) = f(0) + [P_m(z) - P_m(0)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{zf(t)}{t(t-z)} dt. \quad (3)$$

Делая контуры C_m все больше и больше, мы охватываем все больше полюсов и добавляем к сумме все больше членов, а интеграл дает тогда остаточный член. Если он стремится к нулю, то, стало быть, при $R_m \rightarrow \infty$ сумма сходится и становится равной $f(z)$. А это так, поскольку

$$\left| \int_{C_m} \frac{zf(t)}{t(t-z)} dt \right| < \frac{M|z|2\pi\lambda}{R_m - |z|} \rightarrow 0. \quad (4)$$

Таким образом,

$$f(z) = f(0) + \lim \{P_m(z) - P_m(0)\}. \quad (5)$$

Если функция аналитична при $z = 0$ и не имеет других особенностей, кроме полюсов, при конечных z и если можно выбрать последовательность контуров C_m , охватывающих $z = 0$ и стремящихся к бесконечности, так что $|f(z)|$ никогда не превосходит данной величины M ни на одном из этих контуров, а $\int |dz/z|$ равномерно ограничен на них, то справедливо (5), где $P_m(z)$ — сумма главных частей $f(z)$ по всем полюсам a внутри C_m . Если при $z = 0$ имеется полюс, то в (5) следует заменить $f(0)$ отрицательными степенями и постоянным членом лорановского разложения $f(z)$ при $z = 0$.

Запись (5) в виде

$$f(z) = [f(0) - \lim P_m(0)] + \lim P_m(z);$$

может оказаться незаконной, ибо (5) может сходиться, в то время как ни $[P_m(0)]$, ни $[P_m(z)]$ не сходятся.

12.061. В качестве примера возьмем

$$f(z) = \operatorname{cosec} z - \frac{1}{z}. \quad (1)$$

Эта функция аналитична при $z = 0$, поскольку $f(0)$ и $f'(0)$ можно определить по формулам

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \sin z}{z \sin z} = 0$$

и

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \sin z}{z^2 \sin z} = \frac{1}{6}.$$

Она имеет простые полюса при $z = \pm n\pi$ для всех целых n , и

$\operatorname{cosec}(n\pi + z') - \frac{1}{n\pi + z'} = \frac{1}{z' \cos n\pi} +$ Аналитическая функция, так что вычет в $n\pi$ равен $(-1)^n$.

Далее

$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

$$|\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x.$$

Проверить ограниченность $f(z)$ на специально выбранной последовательности контуров проще всего в том случае, когда C_m — квадраты со сторонами $x = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$, $y = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$, где m целое. $\int |dz/z|$ вдоль C_m равен $8 \operatorname{Arsh} 1$. На сторонах, параллельных оси y ,

$$|\sin z| \geq \left| \sin \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \right| = 1,$$

а на сторонах, параллельных оси x ,

$$|\sin z| \geq \left| \operatorname{sh} \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \right| \geq \left| \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \right|.$$

Следовательно, $f(z)$ ограничена на C_m при всех m и условия теоремы Миттаг-Леффлера выполняются. Следовательно,

$$\operatorname{cosec} z - \frac{1}{z} = \sum (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right), \quad (2)$$

причем суммирование производится по всем положительным и

отрицательным целым n , исключая 0. Если объединить равные по абсолютной величине и противоположные по знаку значения n , получается

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} - \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{n^2\pi^2 - z^2}. \quad (3)$$

12.062. Теперь возьмем

$$f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}. \quad (4)$$

Поскольку все вычеты равны 1, то сумма, образованная согласно формуле, равна

$$\sum \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2\pi^2 - z^2}. \quad (5)$$

Чтобы убедиться в этом, возьмем ту же последовательность квадратов C_m . Имеем

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{tg} x + i \operatorname{th} y}{1 - i \operatorname{tg} x \operatorname{th} y}, \quad |\operatorname{ctg} z|^2 = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{th}^2 y}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{th}^2 y} = \operatorname{th}^2 y + \frac{1 - \operatorname{th}^4 y}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{th}^2 y}.$$

При $x = \pm (m + 1/2)\pi$ это равно $\operatorname{th}^2 y$ и меньше чем 1. Когда y велико, $\operatorname{th}^2 y \approx 1$ и $|\operatorname{ctg} z|^2 \approx 1$ при всех x . Следовательно, условия выполнены и (5) справедливо.

12.063. С помощью преобразований или с помощью аналогичных доказательств (при этом в качестве контуров выбираются не обязательно те же самые квадраты) мы можем получить следующее:

$$\operatorname{tg} z = 8z \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2\pi^2 - 4z^2}, \quad (6)$$

$$\sec z = 4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-1)\pi}{(2n-1)^2\pi^2 - 4z^2}, \quad (7)$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + 2z \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 + z^2}, \quad (8)$$

$$\operatorname{csch} z = \frac{1}{z} + 2z \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2 + z^2}, \quad (9)$$

$$\operatorname{sech} z = 4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-1)\pi}{(2n-1)^2\pi^2 + 4z^2}, \quad (10)$$

$$\operatorname{th} z = 8z \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2\pi^2 + 4z^2}. \quad (11)$$

Все эти ряды равномерно сходятся в любой ограниченной замкнутой области, не содержащей ни одного полюса. Так, если r — максимум $|z|$ в некоторой области и в разложении котангенса в ряд взять n большим r/π , то n -й и последующие члены можно записать в виде

$$-2r \left(\frac{1}{n^2\pi^2 - z^2} \frac{z}{r} + \frac{1}{(n+1)^2\pi^2 - z^2} \frac{z}{r} + \dots \right),$$

их модули меньше, чем члены абсолютно сходящегося ряда

$$2r \left(\frac{1}{n^2\pi^2 - r^2} + \frac{1}{(n+1)^2\pi^2 - r^2} + \dots \right).$$

В разложениях в ряд $\sec z$ и $\operatorname{sech} z$ (эти ряды не сходятся абсолютно) можно объединить члены в пары и применить обобщение M -признака из 1.1152. Отсюда следует, что все эти ряды можно интегрировать почленно. Затем

$$\begin{aligned} \left[\ln \frac{\sin z}{z} \right]_0^z &= \int_0^z \left(\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} \right) dz = \\ &= \int_0^z \left(\frac{2z}{z^2 - \pi^2} + \frac{2z}{z^2 - 4\pi^2} + \dots \right) dz = \sum \ln \frac{z^2 - n^2\pi^2}{-n^2\pi^2} = \sum \ln \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right), \end{aligned}$$

а потому

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right). \quad (12)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} [\ln \sec z]_0^z &= \int_0^z \operatorname{tg} z \, dz = - \sum \ln \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2} \right), \\ \cos z &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

12.07. Числа и полиномы Бернулли. Метод вычетов дает удобный способ связать числа и полиномы Бернулли с тригонометрическими функциями. Если записать 9.08 (6) в виде

$$\frac{1}{e^a - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{a} = \sum_{r=1}^{\infty} b_r a^{r-1} \quad (1)$$

и рассматривать a как комплексное переменное, то функция в левой части имеет простые полюса с вычетом 1 во всех точках $a = \pm 2n\pi$, за исключением 0, и ограничена на окружностях

радиуса $(2n + 1)\pi$ с центром в начале координат. При $a = 0$ она обращается в нуль. Следовательно, она равна

$$\sum'_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a - 2n\pi} - \frac{1}{2n\pi} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{4n^2\pi^2 + a^2} = \quad (2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2a}{4n^2\pi^2} \left(\frac{-a^2}{4n^2\pi^2} \right)^{r-1} (|a| < 2\pi), \quad (3)$$

штрих означает, что $n = 0$ исключено из суммы. Сравнивая с (1), имеем

$$b_{2r} = (-1)^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n^2\pi^2)^r}, \quad b_{2r+1} = 0. \quad (4)$$

В частности,

$$b_2 = \frac{1}{2\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right), \quad (5)$$

$$b_4 = -\frac{1}{8\pi^4} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right). \quad (6)$$

а следовательно, поскольку $B_r = r!b_r$,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = 2\pi^2 b_2 = \pi^2 B_2 = \frac{\pi^2}{6}, \quad (7)$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = -8\pi^4 b_4 = -\frac{1}{3} \pi^4 B_4 = \frac{\pi^4}{90}, \quad (8)$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots = 32\pi^6 b_6 = \frac{2}{45} \pi^6 B_6 = \frac{\pi^6}{945}. \quad (9)$$

Учитывая малость второго члена, имеем весьма точно при больших r

$$b_{2r} = (-1)^{r-1} \frac{2}{2^{2r}\pi^{2r}}, \quad \text{и} \quad B_{2r} = (-1)^{r-1} \frac{2(2r)!}{2^{2r}\pi^{2r}}. \quad (10)$$

Объединяя теперь 9.08 (6), (7) мы можем написать

$$\frac{e^{at}}{e^a - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{a} = \sum [P_r(t) + b_r] a^{r-1}. \quad (11)$$

Эта функция ограничена на окружностях радиуса $(2n + 1)\pi$ при $0 < t < 1$ и обращается в t при $a = 0$. Следовательно, она равна

$$\begin{aligned}
 t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2n\pi it} \left(\frac{1}{a - 2n\pi i} + \frac{1}{2n\pi i} \right) &= \\
 = t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2a \cos 2n\pi t}{4n^2\pi^2 + a^2} + \frac{a^2}{\pi n (4n^2\pi^2 + a^2)} \sin 2n\pi t \right) &= \\
 = t + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2a \cos 2n\pi t}{4n^2\pi^2} \left(\frac{-a^2}{4n^2\pi^2} \right)^{r-1} - & \\
 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin 2n\pi t \left(\frac{-a^2}{4n^2\pi^2} \right)^r. & \quad (12)
 \end{aligned}$$

Сравнивая с (11), имеем

$$P_{2r}(t) + b_{2r} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{2 \cos 2n\pi t}{(4n^2\pi^2)^r}, \quad (13)$$

$$P_{2r-1}(t) = (-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi t}{n\pi (4n^2\pi^2)^{r-1}} \quad (r > 1). \quad (14)$$

Когда $t = 0$, правая часть (13) превращается в b_{2r} , и $P_{2r}(0) = 0$, как и следовало ожидать. В частности,

$$P_2(t) + b_2 = \frac{1}{2\pi^2} \left(\cos 2\pi t + \frac{1}{2^2} \cos 4\pi t + \frac{1}{3^2} \cos 6\pi t + \dots \right), \quad (15)$$

$$P_3(t) = \frac{1}{4\pi^3} \left(\sin 2\pi t + \frac{1}{2^3} \sin 4\pi t + \frac{1}{3^3} \sin 6\pi t + \dots \right), \quad (16)$$

$$P_4(t) + b_4 = -\frac{1}{8\pi^4} \left(\cos 2\pi t + \frac{1}{2^4} \cos 4\pi t + \frac{1}{3^4} \cos 6\pi t + \dots \right). \quad (17)$$

При больших r эти многочлены, как и числа b_r , со все возрастающей точностью можно заменить одними первыми членами.

12.08. Операционные методы и контурное интегрирование.

Комплексные интегралы можно использовать для интерпретации многих операторных решений в задачах, относящихся к системам с бесконечным числом степеней свободы. Сначала покажем, как они связаны с простыми операторами p^{-n} из гл. 7.

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{z^{n+1}} dz, \quad (1)$$

где C — замкнутый путь на плоскости z , обходящий начало координат, n — целое положительное число и t не зависит от z . Разложив экспоненциальную функцию в ряд, мы видим, что коэффициент при z^{-1} равен $t^n/n!$; следовательно, это вычет подынтегральной функции в начале координат. Других полюсов внутри C нет, значит, интеграл равен $t^n/n!$.

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{z} \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right) dz = a_0 + a_1 t + \dots + \frac{a_n t^n}{n!}. \quad (2)$$

Пусть теперь ряд

$$F(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} \quad (3)$$

сходится, когда $|z| = R$; при всех больших значениях $|z|$ он будет сходиться равномерно. Тогда в интеграле

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{z} F(z) dz, \quad (4)$$

где C теперь — некоторый контур, лежащий в области, где $|z| > R$, подынтегральная функция является равномерно сходящимся рядом, так что можно интегрировать почленно. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{z} F(z) dz = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}. \quad (5)$$

Это можно сравнить с правилом для интерпретации операторного выражения

$$F(p) 1 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!} = \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n p^{-n} \right) 1, \quad (6)$$

справедливость которого была показана при условии, что существует такое положительное число r , что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ сходится для $|\xi| < r$. Заменяя ξ на $1/z$, а r на $1/R$, мы видим, что условием, при котором справедливо (5), является сущест-

вание такого R , что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ сходится при $|z| > R$. Но это в точности то самое условие, которое мы предполагали выполненным при выводе (5), и можно теперь сказать, что $F(z)$ аналитична в бесконечно удаленной точке. Значит, если $F(p)$ удовлетворяет этому условию, то

$$F(p) 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{z} F(z) dz. \quad (7)$$

Следовательно, результат применения любого из определенных до сих пор операторов можно немедленно записать в виде контурного интеграла.

Можно сразу вывести несколько других правил. Так, если $F(z)$ и $G(z)$ обе выражаются рядами по степеням $1/z$, сходящимися при $|z| > R$, то на C эти ряды сходятся абсолютно и при перемножении дают новый ряд по степеням $1/z$, который сходится равномерно. Следовательно,

$$F(p) G(p) 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{tz}}{z} F(z) G(z) dz, \quad (8)$$

поскольку, разлагая обе части в ряд, мы видим, что они тождественны.

Можно также вывести и правило элементарных дробей. В самом деле, пусть $F(z)/G(z)$ — отношение двух полиномов, причем $G(z)$ той же самой или более высокой степени, чем $F(z)$. Тогда

$$\frac{F(z)}{zG(z)} = \sum P(z - \alpha), \quad (9)$$

где $P(z - \alpha)$ — главная часть $F(z)/zG(z)$ в полюсе $z = \alpha$; при этом $\alpha = 0$ обычно является полюсом. Постоянный член отсутствует, поскольку обе части стремятся к нулю при подходе к $z = \infty$. Тем самым

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{zG(z)} e^{tz} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\sum P(z - \alpha) \right] e^{tz} dz. \quad (10)$$

Полюс при $z = 0$ дает многочлен по степеням t , тогда как общий член во вкладе от $z = \alpha$ будет

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{A_m e^{tz}}{(z - \alpha)^m} dz = \frac{A_m}{2\pi i} e^{\alpha t} \int_{C'} \frac{e^{\xi t} d\xi}{\xi^m}, \quad (11)$$

где $\xi = z - \alpha$, а преобразованный контур C' окружает теперь $\xi = 0$, поскольку C окружает $z = \alpha$. Но правая часть (11) равна

$A_m t^{m-1} e^{at} / (m-1)!$, т. е. совпадает с интерпретацией по правилу элементарных дробей.

12.081. С помощью контурных интегралов нельзя, однако, непосредственно интерпретировать результат применения оператора к произвольной функции, отличной от константы. Мы можем проверить согласованность интерпретаций в случае, когда $g(t)$ имеет вид $G(p)1$, где $G(p)$ является оператором в смысле данного выше определения. Для этого случая правило из 7.054 дает

$$F(p)g(t) = F(p)G(p)1, \quad (1)$$

что можно назвать правилом композиции операторов. Но такой вид $g(t)$ не является общим. Действительно, мы уже видели, что в случае, когда $G(z)$ разлагается в сходящийся ряд по степеням $1/z$ при $|z| > R$, то $g(t)$ — целая функция t . Поэтому мы не можем непосредственно применять (1), если, например, сила действующая на динамическую систему имеет вид $A(a+t)^{-1}$, даже если a положительно. Тем более мы не можем применять (1), когда $g(t)$ не аналитична при действительных положительных значениях t . Однако можно пользоваться таким принципом суперпозиции

$$F(p)g(t) = g(0)f(t) + \int_0^t f(t-\tau)dg(\tau), \quad (2)$$

который позволяет найти $F(p)g(t)$, если только $F(p)$ удовлетворяет основному правилу *). Пока, следовательно, интерпретация с помощью контурных интегралов является менее общей, чем операционная, так как последняя всегда дает решение в виде однократного интеграла, если задача сводится к конечной системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

12.082. Пределы операторов. Многие физические задачи выражают с помощью дифференциальных уравнений с частными производными. Формально к этим уравнениям можно прийти, рассматривая системы с большим числом n степеней свободы и устремляя n к бесконечности. В подобных случаях оператор $F_n(p)$ для любого конечного n будет удовлетворять определенным условиям, а предел $F_n(z)$, возможно, нет. В частности, он может не быть ограниченным при больших $|z|$, и тогда не найдется подходящего контура C . Простой случай,

*) Т. е. $F(z)$ аналитична в бесконечности. — Прим. перев.

поддающийся исследованию чисто операционными методами, состоит в следующем. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx_r}{dt} + \frac{n}{h} x_r = \frac{n}{h} x_{r-1},$$

где все $x_r = 0$ ($r \geq 1$) при $t = 0$ и $x_0 = g(t)$. Тогда при $r \geq 1$

$$x_r = \left(1 + \frac{ph}{n}\right)^{-r} g(t).$$

Положим $r = n$ и рассмотрим

$$F_n(p) g(t) = \left(\frac{ph}{n} + 1\right)^{-n} g(t), \quad (1)$$

где t и h положительны. $F_n(z)$ разлагается в ряд по степеням $1/z$, который сходится при всех $|z| > n/h$. Можно, следовательно, преобразовать это выражение так *)

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{h}\right)^n \left(p + \frac{n}{h}\right)^{-n} g(t) &= \left(\frac{n}{h}\right)^n \int_0^t g(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-n(t-\tau)/h} d\tau = \\ &= \left(\frac{n}{h}\right)^n \int_0^t g(t-\tau) \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{-n\tau/h} d\tau = \end{aligned} \quad (2)$$

$$= \int_0^{nt/h} g\left(t - \frac{hv}{n}\right) \frac{v^{n-1}}{(n-1)!} e^{-v} dv. \quad (3)$$

При больших n часть подынтегрального выражения, независящая от множителя g^{**}), имеет резко выраженный максимум при $v = n - 1$. Следовательно, если t положительно и больше h , а $g(t - \tau)$ — непрерывная функция, то при возрастании n интеграл стремится к

$$\int_0^\infty g(t-h) \frac{v^{n-1}}{(n-1)!} e^{-v} dv = g(t-h). \quad (4)$$

Но при $n \rightarrow \infty$ $F_n(z) \rightarrow \exp(-zh)$. Мы будем называть $F(p)$ *формальным пределом* $F_n(p)$, если $F_n(z) \rightarrow F(z)$ при $n \rightarrow \infty$. В этом смысле

$$\exp(-ph) g(t) = g(t-h) \quad (5)$$

*) См. 7.05 (21). — Прим. перев.

**) Т. е. функция $\frac{v^{n-1}}{(n-1)!} e^{-v}$. — Прим. перев.

при t и h положительных и $t > h$. Таким образом, мы получаем интерпретацию $\exp(-ph)$, хотя $\exp(-zh)$ нельзя разложить по степеням z^{-1} , и, следовательно, оператор $\exp(-ph)$ не определен нашими основными правилами.

Равенство (3) выполняется и при $h > t$, но множитель $v^{(n-1)}e^{-v}$ достигает максимума в точке $v = n - 1$, которая при $n > (1 - t/h)^{-1}$ лежит вне промежутка интегрирования. Из этого легко вывести, что интеграл стремится к нулю.

Следовательно, результат (5) существенно зависит от выполнения условия $t > h$, если $t < h$, то

$$\exp(-ph)g(t) = 0. \quad (6)$$

Итак, этот пример формального предела оператора ведет к понятному результату, но даже если $g(t)$ аналитична, функция, полученная после применения оператора, не будет аналитической: при $t < h$ она не является аналитическим продолжением функции $g(t - h)$, полученной при $t > h$.

Для математики обычно, что предел бесконечного числа операций дает нечто существенно отличное от результатов самих этих операций. Если выразить $\sqrt{2}$ десятичной дробью, то конечное число разрядов этой дроби будет выражать рациональное число. Однако вся десятичная дробь не рациональна. В теории комплексного переменного после применения любого конечного числа арифметических действий получаются только рациональные функции, у которых нет особенностей, кроме полюсов. Однако бесконечные ряды и их продолжения могут определять функцию с существенно особыми точками и точками ветвления. Следовательно, нет ничего удивительного в интерпретации $\exp(-ph)$. Нужно еще проверить, коммутует ли этот оператор с p^{-1} . Обозначим формально $\exp(-ph)$ через e^{-ph} . Тогда

$$e^{-ph}p^{-1}g(t) = e^{-ph} \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^{t-h} g(\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$p^{-1}e^{-ph}g(t) = \int_0^t g(\tau - h) d\tau = \int_{-h}^{t-h} g(\tau) d\tau, \quad (8)$$

т. е. они коммутируют тогда и только тогда, когда $g(t) = 0$ при отрицательных значениях t . Если это условие выполняется, то все наши операторы, примененные к $g(t)$, дают 0 при отрицательных t .

Если мы возьмем $h > 0$, то для $\exp(ph)$ мы не получим интерпретации, записанной формулой

$$\exp(ph)g(t) = g(t+h), \quad (9)$$

или какой-либо иной интерпретации. В этом случае мы получаем

$$\left(1 - \frac{ph}{n}\right)^{-n} g(t) = \left(-\frac{n}{h}\right)^n \int_0^t g(t-\tau) \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{n\tau/h} d\tau, \quad (10)$$

что, как можно показать [3], не стремится ни к какому пределу при $n \rightarrow \infty$. Позже (12.10) мы проиллюстрируем это утверждение специальным примером. Следовательно, $\exp(ph)$ не является в нашей системе допустимым оператором.

Эти результаты понятны с физической точки зрения. Обычно мы считаем, что состояние физической системы в момент времени t определяется ее состоянием в начальный момент и возмущениями, действующими на нее между моментами 0 и t . Для систем с конечным числом степеней свободы операционный метод прямо использует этот принцип. Но если выражение $\exp(-ph)g(t)$ было бы равно $g(t-h)$ при $h > t$, то мы должны были бы считать, что состояние в момент времени t определяется возмущениями до момента времени 0 и не зависит от состояния в момент времени 0. Если $\exp(ph)g(t)$ было бы равно $g(t+h)$ при $h > 0$, мы должны были бы считать, что на систему влияют возмущения, которые еще не успели произойти.

Таким образом, с физической точки зрения наши результаты не являются неожиданными. Задача состоит в том, чтобы выразить их математическим языком; это необходимо сделать потому, что при изучении колебаний струны и других подобных проблем операционным методом появляется оператор $\exp(-ph)$. Но он не подчиняется правилу коммутативности, если мы не ограничиваемся функциями, равными 0 при $t < 0$; хотя это ограничение не влияет на решение при $t > 0$, оно показывает, что данная нами выше интерпретация контурным интегралом представляет не совсем то, что нам нужно. Однако изменение пути интегрирования приведет к результату с требуемым свойством.

Операторы, исследованные нами выше, далеко не единственные, для которых $\exp(\pm ph)$ является формальным пределом. Следовательно, для того чтобы удовлетворительно определить $\exp(-ph)$, нужно ввести некоторый критерий непротиворечивости. То, что мы не смогли дать такого определения $\exp(ph)$, связано с видом операторов $F_n(p)$. Эти операторы

соответствуют следующему семейству дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_r}{dt} - \frac{n}{h} x_r = -\frac{n}{h} x_{r-1} \quad (r \geq 1), \quad x_0 = g(t),$$

и все x_r равны нулю при $t=0$. Но частные решения этой системы уравнений имеют вид $t^m \exp(nt/h)$ и становятся бессмысленными при $n \rightarrow \infty$. Это же будет случаться при любом способе приближения к пределу, если хотя бы одно частное решение имеет вид $\exp(\alpha_n t)$, где действительная часть $\alpha_n \rightarrow +\infty$ одновременно с n .

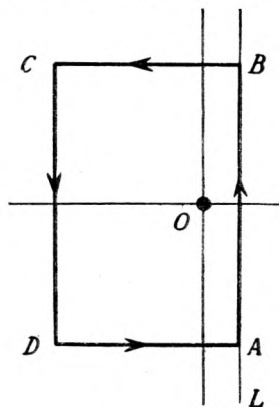


Рис. 46.

Мы можем говорить о такой последовательности систем как о *стремящейся к бесконечной неустойчивости*. Итак, необходимым условием для непротиворечивого определения оператора с помощью перехода к пределу является отсутствие у приближающих его систем частных решений указанного выше вида. Трудно изобрести разумные последовательности физических систем, стремящиеся к бесконечной неустойчивости, но тот принцип, что физические системы не приближаются к ней в пределе, оказывается, играет важную роль в обосновании применения операционного метода к решению уравнений в частных производных.

основании применения операционного метода к решению уравнений в частных производных.

12.09. Интеграл Бромвича. Схема, предложенная Бромвичем [4]*), состоит в замене пути C из 12.08 другим, идущим от $c - i\infty$ к $c + i\infty$, причем c действительно и положительно, а путь выбирается так, чтобы все особенности $F(z)$ располагались слева от него. Обозначим этот путь через L . Следует напомнить, что в случае комплексного переменного, так же как и действительного, обычное доказательство существования интеграла теряет силу, если путь интегрирования бесконечен. Интеграл определяют тогда следующим образом. Сначала рассматривают конечные пределы интегрирования: для этого случая существование интеграла можно доказать. Если интеграл стремится к предельному значению, когда пределы интегрирования стремятся к бесконечности, то это предельное значение

*) Аналогичная схема была одновременно предложена Вагнером [5].

принимают за определение интеграла по бесконечному промежутку.

Пусть теперь $F(z)$ — рациональная функция, ограниченная на бесконечности и, следовательно, такая, что ее числитель имеет ту же самую или более низкую степень, чем знаменатель. Мы покажем, что для действительных t

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{tz}}{z} F(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{tz}}{z} F(z) dz = f(t) \quad (t > 0), \quad (1)$$

$$= 0 \quad (t < 0). \quad (2)$$

12.091. Лемма Жордана. Для этого нам нужна одна из форм теоремы, известной под названием *лемма Жордана*. Прежде всего заменим $F(z)/z$ на $\varphi(z)$, наложив на $\varphi(z)$ более слабое условие: для любого ω можно выбрать r так, чтобы для любого z , удовлетворяющего неравенствам $|z| \geq r$ и $\operatorname{Re}(z) \leq c$ ($c > 0$), выполнялось неравенство $|\varphi(z)| < \omega$. Далее при $t > 0$ возьмем, как показано на рис. 46, ограниченный отрезок AB пути L и дополним его до прямоугольного контура $ABCD$, углами которого являются $c - iX$, $c + iX$, $-X + iX$, $-X - iX$.

Мы можем выбрать X так, чтобы во всех точках BC , CD и DA выполнялось неравенство $|\varphi(z)| < \omega$.

Тогда

$$\left| \int_{BC} e^{iz} \varphi(z) dz \right| = \left| \int_c^{-X} e^{t(x+iX)} \varphi(z) dx \right| < \omega \int_{-c}^X e^{-tx} dx < \frac{\omega}{t} (e^{tc} - e^{-tX}). \quad (1)$$

Аналогично,

$$\left| \int_{DA} e^{tz} \varphi(z) dz \right| < \frac{\omega}{t} (e^{tc} - e^{-tX}). \quad (2)$$

Кроме того,

$$\left| \int_{CD} e^{tz} \varphi(z) dz \right| = \left| \int_X^{-X} e^{t(-X+iy)} \varphi(z) i dy \right| < 2\omega X e^{-tX}. \quad (3)$$

Таким образом, интегралы вдоль BC , CD и DA вместе меньше, чем

$$2\omega \left(\frac{1}{t} e^{ct} + X e^{-tX} \right). \quad (4)$$

Если взять теперь произвольное ϵ , то можно выбрать $\omega < \frac{1}{4} t \epsilon e^{-c}$, а затем выбрать X так, что $2\omega X e^{-tX} < \frac{1}{2} \epsilon$; тогда указанные интегралы вместе окажутся меньше ϵ . Следовательно, $\int_L e^{tz} \varphi(z) dz$

сходится и равен интегралу по контуру, обходящему все особенности, расположенные слева от L .

Если $t < 0$, а $X > 0$, то (3) не может быть произвольно малым, ибо при больших X член e^{-tX} будет большим. Однако можно аналогичным способом построить прямоугольник справа от L , и соответствующим образом изменив доказательство, показать, что интеграл по L равен интегралу по контуру, обходящему все особенности, расположенные справа от L . Последнее можно сделать при условии, что теперь $|\varphi(z)| < \omega$ при некотором r для любого z , удовлетворяющего неравенствам $|z| \geq r$ и $\operatorname{Re}(z) \geq c$.

Доказательство остается верным, если $\varphi(z)$ имеет бесконечно много особенностей на мнимой оси. В самом деле, ничто не мешает нам непрерывно варьировать путь интегрирования, и если мы сможем найти последовательность путей, стремящуюся к бесконечности, так что $|\varphi(z)| \rightarrow 0$ для этой последовательности, то теорема по-прежнему будет следовать из наших рассуждений (так же как при доказательстве теоремы Миттаг-Леффлера).

12.092. Единичная функция Хевисайда. $F(z)/z$ из 12.09 удовлетворяет условиям, наложенным на $\varphi(z)$ при доказательстве леммы. Следовательно, формулы (1) и (2) из 12.09 справедливы, и использование пути L вместо замкнутого контура дает ту же интерпретацию при положительных t и нуль при отрицательных t , поскольку справа от L нет особенностей. В частности, при $F(z) = 1$ интеграл равен 1 при положительных t и 0 при отрицательных t . Определим, как и в 7.09, функцию

$$H(t) = 1 \quad (t > 0), \quad H(t) = 0 \quad (t < 0), \quad (1)$$

которую мы называем единичной функцией Хевисайда, так как она встречается часто у Хевисайда, обозначаемая как 1. Хевисайд рассматривал также функцию, интеграл которой равен $H(t)$, он обозначал ее через $p1$ и называл импульсной функцией. Эта функция совпадает с δ -функцией Дирака. Теория таких функций изложена в [6, 7].

Единичная функция Хевисайда разрывна при $t = 0$. Если брать главное значение интеграла, мы получим $1/2$; однако у нас не будет случая воспользоваться этим.

Если $F(z)$ аналитична и ограничена справа от L и интеграл существует, то по определению

$$F(p) H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L F(z) \frac{e^{tz}}{z} dz = f(t) H(t). \quad (2)$$

12.093. Интегрирование и дифференцирование интеграла Бромвича. Проинтегрируем

$$F(p)H(t) = f(t)H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L F(z) e^{tz} \frac{dz}{z} \quad (1)$$

под знаком интеграла от 0 до t ; получим

$$p^{-1}f(t)H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L F(z)(e^{tz} - 1) \frac{dz}{z^2}. \quad (2)$$

Но если $F(z)/z$ аналитична и ограничена справа от L , то можно написать

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L F(z) \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} F(z) \frac{dz}{z^2}, \quad (3)$$

где L' целиком лежит внутри той области, где $|F(z)/z| < \omega$, а ω произвольно мало. Следовательно, этот интеграл равен 0, и

$$p^{-1}f(t)H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L F(z) e^{tz} \frac{dz}{z^2}, \quad (4)$$

что совпадает с нашей интерпретацией $p^{-1}F(p)H(t)$. Следовательно, интеграл согласуется с интерпретацией p^{-1} как оператора определенного интегрирования от 0 до t .

Продифференцировав (1) под знаком интеграла, мы получим

$$\frac{d}{dt} f(t)H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L F(z) e^{tz} dz = pF(p)H(t), \quad (5)$$

при условии, что теперь $F(z)$, а не только $F(z)/z$, удовлетворяет условиям леммы Жордана: если этого не потребовать, интеграл не имеет смысла. Если, напротив, это условие выполнено, положим $t=0$ и используем путь L' , тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{F(z)}{z} dz = 0. \quad (6)$$

Следовательно, интерпретация

$$\frac{d}{dt} f(t)H(t) = pF(p)H(t) \quad (7)$$

справедлива при условии, что $f(0) = 0$, и не справедлива в противном случае. Наше ограничение, позволяющее отождествить p с дифференцированием, вновь проявилось, следовательно, при использовании интеграла Бромвича.

12.10. Если мы вычислим $\exp(-ph) F(p) H(t)$ или $F(p)\exp(-ph) H(t)$ по правилу Бромвича, то мы получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L F(z) \frac{e^{t-h}}{z} dz = f(z-h) H(t-h), \quad (1)$$

что согласуется с выражением, полученным при рассмотрении $\exp(-ph)$ как предела оператора. Если мы распространим правило Бромвича на $\exp(ph)$ с положительным h , то мы получим $f(t+h) H(t+h)$, тогда как выше мы убедились, что этот оператор нельзя определить однозначно. С одной стороны, это обстоятельство несущественно, так как этот оператор никогда не появляется в приложениях; однако, с другой стороны, оно показывает, что необходимы некоторые предосторожности. Характер предельного перехода, которым мы пользовались, позволяет объяснить это. Мы пытались определить $\exp(ph)$ как формальный предел $(1-ph/n)^{-n}$, но тогда в интеграле Бромвича $F(z) = (1-zh/n)^{-n}$ и имеет полюс при $z=n/h$. Следовательно, как бы мы не провели путь L , найдутся такие значения n , что подынтегральная функция имеет полюс правее L , и предел $\exp(ph)f(t)$ нельзя будет отождествить с интегралом Бромвича по некоторому пути, поскольку для определения существенно, что все особые точки лежат с отрицательной стороны. Очевидно, что подобная ситуация будет возникать всегда, когда системы стремятся к бесконечной неустойчивости.

Чтобы разобраться в этом случае, напомним [см. 12.082 (10)]

$$f_n(t) H(t) = \left(1 - \frac{ph}{n}\right)^{-n} H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \left(1 - \frac{zh}{n}\right)^{-n} e^{zt} \frac{dz}{z}. \quad (2)$$

При $t > 0$ полюс при $z=0$ дает 1; контур C около $z=n/h$ дает

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \left(-\frac{hz'}{n}\right)^{-n} e^{nt/h} e^{z't} \frac{dz'}{n/h+z'}, \quad (3)$$

где $z = n/h + z'$. Вычет $\frac{z'^{-n} e^{z't}}{1 + hz'/n}$ при $z' = 0$ равен $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left(1 + O\left(\frac{h}{t}\right)\right)$. Следовательно, $f_n(t)$ при больших t ведет себя как

$$1 - \left(-\frac{n}{h}\right)^{n-1} e^{nt/h} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + u_n(t). \quad (4)$$

Тогда

$$\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} = -e^{t/h} \frac{t}{h} \frac{(n+1)^n}{n^n} \rightarrow -\frac{t}{h} \exp\left(\frac{t}{h} + 1\right), \quad (5)$$

что меньше -1 при достаточно больших t . Следовательно, u_n , а значит, и $f_n(t)$ при достаточно больших t бесконечно колеблются, когда n возрастает.

Равенство

$$F(p, n) H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L F(z, n) e^{zt} \frac{dz}{z} \quad (6)$$

будет выполняться для пути L , проведенного так, что все особенности $F(z, n)$ лежат с отрицательной стороны. Будет верно также, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(p, n) H(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} F(z, n) e^{zt} \frac{dz}{z}, \quad (7)$$

при условии, что эти пределы существуют, а L_n соответственно выбраны для каждого n . Но если α_n — максимальная действительная часть тех z , при которых $F(z, n)$ имеет полюса, и $\alpha_n \rightarrow \infty$, то мы не всегда можем изменить порядок интегрирования и перехода к пределу. Действительно, иначе мы бы получили

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) \right\} e^{zt} \frac{dz}{z}. \quad (8)$$

Но при такой записи L — фиксированный путь, а мы не можем провести L так, чтобы все полюса $F(z, n)$ для всех n лежали с отрицательной стороны. Все же предел (8) может существовать, однако предел (7) при всех начальных условиях не существует, поскольку решения, вообще говоря, будут расти, как $e^{\alpha_n t}$, что не может иметь предел при $\alpha_n \rightarrow \infty$.

С другой стороны, если системы не стремятся к бесконечной неустойчивости, то при достаточно широких условиях возможна перемена порядка интегрирования и перехода к пределу. Действительно, тогда мы можем выбрать k большим, чем действительная часть любого полюса всех $F_n(z)$, а затем взять в интеграле Бромвича s больше, чем k , и использовать один и тот же путь L для всех n . Доказательство было дано Долзеллом [8] (см. 12.101). Таким образом, для непрерывных систем операционный метод теперь обоснован. Мы рассматриваем дифференциальное уравнение *) как формальный предел системы обыкновенных дифференциальных уравнений с конечным

*) В частных производных. — Прим. ред.

числом переменных, которую можно решить операционным методом. Формальный предел операционного решения является решением непрерывной системы с бесконечным числом переменных, и его можно вычислить с помощью интеграла Бромвича. Формальный предел операционного решения можно найти непосредственно, составляя вспомогательное уравнение для уравнения в частных производных и решая его с заданными граничными условиями.

Этот подход кажется более естественным, чем обычный, при котором в первую очередь требуется, чтобы удовлетворялось дифференциальное уравнение в частных производных. Например, для натянутой струны уравнения движения можно применить к конечному отрезку струны, если он имеет конечную массу. Но если мы захотим перейти к пределу и говорить об ускорении в заданной точке струны, нам придется дифференцировать функцию, которая может не иметь производной. Например, в начальный момент времени струну оттянули в точке $x = \xi$ на величину η , в то время как все внутренние точки находятся в покое, тогда уравнение в частных производных бессмысленно при $x = \xi$, которая является единственной точкой, где ускорение отлично от нуля. Но если заменить струну набором равномерно распределенных частиц, общая масса которых равна массе струны, то мы получим однозначно определенное решение. Когда число частиц стремится к бесконечности, предел этого решения удовлетворяет уравнению для любого конечного отрезка струны. Реальная струна имеет атомарную структуру и действительно состоит из конечного числа частиц. Поэтому изучение движения непрерывной струны не является задачей физики. Эта задача интересна лишь тем, что для многих целей она дает достаточно хорошее приближение. Однако вопросы обоснования должны быть связаны с дискретными системами, а не с законностью процессов, используемых при решении уравнения в частных производных, поскольку это уравнение, возможно, не выражает физических фактов. По существу бессмысленно считать, что dx стремится к нулю непрерывно для действительных струн, так как составляющие ее частицы имеют конечный размер. Аналогично в задачах о теплоте бессмысленно точно задавать абсолютную температуру внутри, скажем, одной частицы из 1000, если только не рассматриваются макроскопические частицы, содержащие миллионы молекул, и уравнение теплопроводности также следует рассматривать как некоторую приближенную идеализацию.

12.101. Теорема Долзелла. Пусть $F(z, n)$ — аналитическая функция z , удовлетворяющая следующим условиям:

1) Для каждого n существует такое число R_n , что при $|z| > R_n$

$$F(z, n) = a_{0, n} + \sum_1^{\infty} \frac{a_{r, n}}{z^r}.$$

2) Для всех z , у которых $\operatorname{Re}(z) > k$, $F(z, n)$ имеет предел $F(z)$ при $n \rightarrow \infty$.

3) Существуют такие положительные числа M и k , что для всех n и для всех z , у которых $\operatorname{Re}(z) > k$, $|F(z, n)| < M$.

4) Из любого ограниченного интервала оси t можно исключить конечное число интервалов сколь угодно малой общей длины δ , что при $c > k$

$$\left| \int_c^{c+iY} F(z, n) e^{zt} dz \right| < N$$

для любого действительного Y , а N зависит от δ , но не от n или t . Мы покажем, что

$$5) \quad F(p, n) H(t) \rightarrow F(p) H(t)$$

почти везде, и

$$6) \quad \frac{1}{p} F(p, n) H(t) \rightarrow \frac{1}{p} F(p) H(t)$$

для всех t .

По теореме Осгуда — Витали (11.21) из условий 2 и 3 вытекает, что в любой ограниченной области, принадлежащей полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > k$, $F(z, n) \rightarrow F(z)$ равномерно и $F(z)$ — аналитическая функция z в этой полуплоскости, быть может, имеющая особенность на бесконечности. Ясно также, что во всей полуплоскости $|F(z)| \leq M$.

Функция

$$f_n(t) = F(p, n) H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L F(z, n) e^{zt} \frac{dz}{z}, \quad (1)$$

где $\operatorname{Re}(z) = c > k$ на L , существует при всех $t \neq 0$, согласно 1, равна 0 при $t < 0$, согласно 1 или согласно 3 и лемме Жордана, и является непрерывной функцией t при $t > 0$, согласно 1. Далее если $z = c + i\eta$, то

$$\frac{1}{z} = \frac{c - i\eta}{c^2 + \eta^2}, \quad (2)$$

и функции $\operatorname{Re}(1/z)$ и $\operatorname{Im}(1/z)$ при $|\eta| > c$ монотонны и стремятся к нулю при $|\eta| \rightarrow \infty$. Следовательно, по признаку Дирихле

в любом интервале, где выполняется условие (4) для любого ω можно выбрать Y так, что

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{c-i\infty}^{c-iY} + \int_{c+iY}^{c+i\infty} F(z, n) e^{zt} \frac{dz}{z} \right) \right| < \omega \quad (3)$$

при всех n ; далее $F(z, n) e^{zt}/z \rightarrow F(z) e^{zt}/z$ равномерно при $-Y < \text{Im}(z) < Y$. Тем самым*),

$$F(p, n) H(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_L F(z) e^{zt} \frac{dz}{z} = F(p) H(t) = f(t), \quad (4)$$

причем $f(t)$, являясь пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, непрерывна во всяком интервале, где выполняется условие (4).

Далее

$$p^{-1} f_n(t) = \int_0^t f_n(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_L F(z, n) e^{zt} \frac{dz}{z^2}, \quad (5)$$

согласно 12.093, поскольку $F(z, n)$ не имеет особенностей при $\text{Re}(z) > k$; и

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{c-i\infty}^{c-iY} + \int_{c+iY}^{c+i\infty} F(z, n) e^{zt} \frac{dz}{z^2} \right) \right| \leq \frac{1}{\pi} \frac{Me^{ct}}{\sqrt{c^2 + Y^2}} < \omega, \quad (6)$$

если $Y > Me^{ct}/\pi\omega$. Кроме того, $F(z, n) e^{zt}/z^2 \rightarrow F(z) e^{zt}/z^2$ равномерно при $-Y < \text{Im}(z) < Y$; следовательно, в любом интервале оси t

$$p^{-1} f_n(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_L F(z) e^{zt} \frac{dz}{z^2}, \quad (7)$$

и правая часть непрерывна по t .

Но в любом интервале, где последовательность $\{f_n(t)\}$ сходится равномерно,

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_L F(z) (e^{zt_1} - e^{zt_0}) \frac{dz}{z^2} = \lim [p^{-1} f_n(t)]_{t_0}^{t_1} \quad (8)$$

и, следовательно, правая часть (7) имеет производную $f(t)$ в любом интервале оси t , кроме, быть может, конечного числа значений t , и непрерывна при этих значениях. Следовательно, ее можно обозначить через $p^{-1} f(t)$.

*) В формуле (4) $f(t)$ — просто краткое обозначение для предельной функции. — Прим. перев.

Из установленных ограничений условие 1 связано с тем, что мы исходим из последовательности дискретных систем, а условие 2, очевидно, необходимо. Условие 3 соответствует тому, что последовательность систем не стремится к бесконечной неустойчивости. Лишь намного менее строгое условие может быть достаточным. Ни одна из функций

$$\frac{z^2}{n^{1/2}(z^2+n^2)}, \quad \frac{z^2}{z^2+n^2}, \quad \frac{nz^2}{z^2+n^2}$$

не является равномерно ограниченной в полуплоскости, что видно, если взять $z = in + c$. Для первой функции выполняются 5 и 6; для второй 5 не выполняется, а 6 выполняется; для третьей и 5 и 6 не выполняются. Исключение множества меры δ в 4 позволяет рассматривать последовательность, стремящуюся, скажем, к $1/\operatorname{ch}(ph)$. Такие последовательности возникают в задачах о распространении волн, и разрывы являются неотъемлемой чертой решений.

Соображения Долзелла отличаются от приведенных, но они основываются на тех же физических принципах. Казалось бы, можно доказать, что поскольку $p^{-1}F(p)H(t)$ является пределом равномерно сходящейся последовательности аналитических функций, выражаемых степенными рядами, то $p^{-1}F(p)H(t)$ является аналитической функцией t и, следовательно, всюду имеет производную. Это не так. Действительно, вообще говоря, интеграл (1) не существует для комплексных t , и предельный переход не определяет $p^{-1}f(t)$ вне действительной оси.

12.11. В учебниках по дифференциальным уравнениям описывается метод нахождения частных интегралов разложением по степеням $D = d/dt$. Этот метод применим, если функция, на которую действует оператор, является многочленом (тогда ряд по степеням D заменяется конечной суммой). Связь с разложением по степеням p^{-1} состоит в следующем. Мы имеем

$$F(p)t^m = F(p)\frac{m!}{p^m}1 = m! \sum p \frac{F(p)}{p^{m+1}}1, \quad (1)$$

где берутся главные части $F(z)/z^{m+1}$ по всем полюсам, а затем z заменяется на p . Обычно $z=0$ является одним из таких полюсов. Если при этом вблизи $z=0$

$$F(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_m z^m + O(z^{m+1}), \quad (2)$$

то соответствующие члены в $F(p)t^m$ равны

$$m! \left(\frac{\alpha_0}{p^m} + \frac{\alpha_1}{p^{m-1}} + \dots + \alpha_m \right) 1 = \\ = \alpha_0 t^m + m\alpha_1 t^{m-1} + \dots + m! \alpha_m = F(D)t^m, \quad (3)$$

что совпадает с частным интегралом, найденным обычным методом. Главные части в других полюсах a дают члены, содержащие множители $\exp(at)$; при использовании обычного метода они составляют часть дополнительной функции. При использовании метода Хевисайда они встречаются с такими коэффициентами, что сама функция и все ее производные до $(n-1)$ -го порядка обращаются в нуль при $t=0$, если разложение $F(p)$ по отрицательным степеням p начинается с p^{-n} .

Отсюда следует, что

$$F(D)t^m = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{m! F(z)}{z^{m+1}} e^{zt} dz, \quad (4)$$

где C — контур, окружающий начало, но не содержащий внутри других полюсов $F(z)$; в то же время

$$F(p)t^m H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{m! F(z)}{z^{m+1}} e^{zt} dz. \quad (5)$$

Разница между двумя рассматриваемыми методами в случае, когда оператор применяется к полиному, сводится, таким образом, к различию между путями интегрирования, причем интегрируется одна и та же функция.

Если, однако, оператор применяется к функции $g(t) = t^m$, где m — дробное положительное число, то интерпретация $F(p)g(t)$ сохраняет смысл при всех положительных t , а $F(D)g(t)$ — нет; в самом деле,

$$\begin{aligned} (\alpha_0 + \alpha_1 D + \dots)t^m &= \alpha_0 t^m + m\alpha_1 t^{m-1} + \dots \\ &\dots + \alpha_r m(m-1)\dots(m-r+1)t^{m-r} + \dots, \end{aligned}$$

и если $\sum \alpha_r z^r$ сходится как геометрическая прогрессия, то вышеуказанный ряд никогда не сходится.

Хевисайд получал несходящиеся ряды в большинстве случаев именно потому, что он никогда не проводил четкого различия между p и D .

12.12. Специальные контурные интегралы. Преобразовав единичную функцию, можно получить интеграл, играющий фундаментальную роль в теории рядов Фурье.

Мы можем заменить L следующим путем интегрирования: по прямой от $-i\infty$ до $-i\delta$, и от $i\delta$ до $i\infty$, а от $-i\delta$ до $i\delta$ по маленькой полуокружности радиуса δ , обходящей 0 со стороны положительных значений. Первые два отрезка пути дают

главное значение комплексного интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-i\infty}^{-i\delta} + \int_{i\delta}^{i\infty} \frac{e^{zt}}{z} dz \right] \rightarrow \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} \frac{dy}{y} = \quad (1)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin yt \frac{dy}{y}. \quad (2)$$

Интеграл по маленькой полуокружности в пределе равен $1/2$. Следовательно,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin yt \frac{dy}{y} = H(t); \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} \sin yt \frac{dy}{y} = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi & (t > 0), \\ -\frac{1}{2} \pi & (t < 0). \end{cases} \quad (4)$$

$$\quad (5)$$

Если $t = 0$, то интеграл равен нулю, так что в общем виде мы можем записать его как $\frac{1}{2} \pi \operatorname{sgn} t$.

12.121. Другой похожий интеграл равен (для действительных λ)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda z}}{1+z^2} dz. \quad (6)$$

При $\lambda > 0$ замкнем контур, дополнив его до большого прямоугольника, примыкающего сверху к действительной оси. Внутри контур содержит полюс при $z = i$ с вычетом, равным $e^{-\lambda}/2i$. Таким образом,

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \frac{e^{-\lambda}}{2i} = \frac{1}{2} \pi e^{-\lambda}. \quad (7)$$

Это и есть значение интеграла, если взять λ положительным. Однако (6) сохраняет смысл и для отрицательных значений λ . Только в этом случае следует дополнить контур до большого прямоугольника, примыкающего *снизу* к действительной оси. Теперь контур содержит внутри полюс при $z = -i$, обходя его в отрицательном направлении. Вычет в этом полюсе равен $-e^{\lambda}/2i$; следовательно, мы получаем

$$I = \frac{1}{2} \pi e^{\lambda}. \quad (8)$$

Это то же самое, что (7), поскольку теперь мы используем отрицательные значения λ .

12.122. Этот интеграл можно также записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x} dx}{\pi(1+x^2)} = \begin{cases} e^{i\lambda} & (\text{Im}(\lambda) > 0), \\ e^{-i\lambda} & (\text{Im}(\lambda) < 0), \end{cases} \quad (9)$$

где λ — чисто мнимое. В такой форме он появляется в теории вероятностей в качестве характеристической функции одного вероятностного закона [9].

12.123. Возьмем снова

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{1}{2} \text{Re } P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2} dz. \quad (10)$$

При $b > a > 0$ мы берем так же, как в **12.121**, большой прямоугольник, идентичный маленькой полуокружности с центром в 0; в начале координат имеется простой полюс с вычетом $i(a-b)$, и интеграл равен

$$\frac{1}{2} \text{Re} [(i\pi) i(a-b)] = \frac{1}{2} \pi(b-a). \quad (11)$$

12.124. Мы знаем, что при действительных a

$$\int_0^{\infty} e^{-1/2 az^2} dz = \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{1/2}. \quad (1)$$

Однако если мы возьмем путь интегрирования, идущий в бесконечность вдоль любого направления, такого, что $-\frac{1}{4}\pi < \arg z < \frac{1}{4}\pi$, то интеграл будет иметь то же значение. В самом деле, можно замкнуть контур, добавив к нему дугу большого радиуса, на которой $|z \exp(-\frac{1}{2} az^2)|$ может быть сделан произвольно малым. Полагая

$$z = r \exp i\alpha,$$

имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-1/2 ar^2 \exp 2i\alpha} dr = \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{1/2} e^{-i\alpha}. \quad (2)$$

Откуда, разделяя действительную и мнимую части, получаем

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-1/2 ar^2 \cos 2\alpha} \cos\left(\frac{1}{2} ar^2 \sin 2\alpha\right) dr &= \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{1/2} \cos \alpha, \\ \int_0^{\infty} e^{-1/2 ar^2 \cos 2\alpha} \sin\left(\frac{1}{2} ar^2 \sin 2\alpha\right) dr &= \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{1/2} \sin \alpha, \end{aligned} \right\} -\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{4}\pi. \quad (3)$$

Можно показать, что для предельного значения $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ интеграл все еще сходится и что он непрерывен при $|\alpha| \leq \frac{1}{4}\pi$ (ср. 1.124). Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-1/2 iar^2} dr &= \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{1/2} \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \\ \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{2} ar^2\right) dr &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}, \\ \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2} ar^2\right) dr &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Эти интегралы лежат в основе метода наискорейшего спуска и метода стационарной фазы для приближенного вычисления комплексных интегралов, используемого в особенности в теории дисперсии волн и в теории вероятностей, в том числе в статистической механике.

12.125. В теории факториальных функций приносит пользу интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{z^a dz}{(1+z)^2}, \quad (1)$$

где a может быть дробным или комплексным, но $1 > \operatorname{Re}(a) > -1$. Тогда $z=0$ является точкой ветвления. Возьмем интеграл вдоль пути, показанного на рис. 47:

$$\int \frac{(ze^{i\pi})^a}{(1+z)^2} dz = 0, \quad (2)$$

здесь $\arg(ze^{i\pi})$ берется равным нулю для z , лежащих между -1 и 0 . Большие дуги в пределе вносят нулевой вклад, поскольку $\operatorname{Re}(a) < 1$. Полюс при $z = -1$ в пределе дает вклад $(-2\pi i)(-a)$, поскольку вычет равен $-a$. Интегралы по путям

из $-\infty$ и обратно взаимно уничтожаются в пределе, поскольку -1 не является точкой ветвления. Маленькая окружность с центром в 0 в пределе дает 0 , поскольку $\operatorname{Re}(a) > -1$. Таким

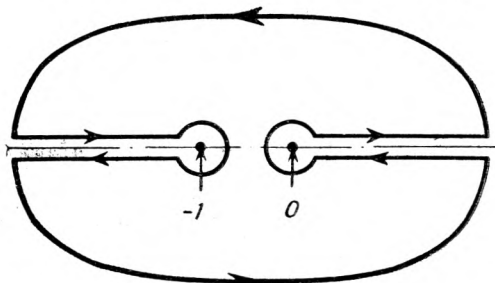


Рис. 47.

образом, остается рассмотреть только интегралы от 0 до $+\infty$. Но они в сумме равны

$$(e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}) \int_0^{\infty} \frac{z^a dz}{(1+z)^2} = -2i \sin \pi a \int_0^{\infty} \frac{z^a dz}{(1+z)^2},$$

поскольку вдоль верхней прямой $\arg(ze^{i\pi})$ равен $-\pi$, а вдоль нижней $+\pi$. Следовательно,

$$\int_0^{\infty} \frac{z^a dz}{(1+z)^2} = \frac{\pi a}{\sin \pi a}. \quad (3)$$

12.126. Рассмотрим теперь интеграл *)

$$p^m H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L z^{m-1} e^{zt} dz, \quad (1)$$

который сходится при $m < 1$, где m может быть дробным. При $m > 1$ интеграла вдоль L не существует. Если, однако, заметить путь интегрирования L на путь L' , который имеет не параллельные мнимой оси асимптоты в третьем и втором квадрантах, то интеграл будет сходиться при действительных положительных t без ограничений на m . Поэтому мы рассмотрим интеграл вдоль L' . Этот интеграл эквивалентен интегралу вдоль пути M , который состоит из окружности малого радиуса около начала координат и двух лучей из $-\infty$ и в $-\infty$. Пусть сначала

*) Перед чтением этого раздела следует прочесть гл. 15. Раздел 12.13 и следующие не зависят от гл. 15.

$m > 0$, тогда интеграл по окружности стремится к нулю, когда ее радиус стремится к нулю. Положим z равным $\mu e^{i\pi}$ и $\mu e^{-i\pi}$ на CD и AB соответственно. Тогда на CD

$$z^{m-1} e^{zt} dz = e^{m\pi i} \mu^{m-1} e^{-\mu t} d\mu, \quad (2)$$

а на AB аналогично $e^{-m\pi i} \mu^{m-1} e^{-\mu t} d\mu$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_M z^{m-1} e^{zt} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^0 e^{-m\pi i} \mu^{m-1} e^{-\mu t} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{m\pi i} \mu^{m-1} e^{-\mu t} d\mu = \\ &= \frac{1}{\pi} \sin m\pi \int_0^{\infty} \mu^{m-1} e^{-\mu t} d\mu = \frac{\sin m\pi}{\pi} \frac{(m-1)!}{t^m}. \end{aligned} \quad (3)$$

Но из тождества (15.02)

$$\frac{\sin m\pi}{m\pi} = \frac{1}{m!(-m)!} \quad (4)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_M z^{m-1} e^{zt} dz = \frac{1}{t^m (-m)!} \quad (5)$$

при $0 < m$. Но обе части этого равенства — аналитические функции m ; следовательно, оно выполняется для всех m . (Особен-

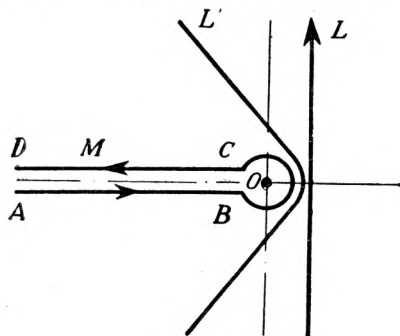


Рис. 48.

ность при $z=0$ не играет роли. Утверждение доказано для $0 < m$, когда окружность имеет сколь угодно малый радиус, следовательно, оно верно при $0 < m$ для окружности любого радиуса, а когда радиус не равен нулю, то вопрос о расходимости в нуле не возникает.) Заменим в (5) m на $-n$. Тогда для всех n при $t > 0$

$$t^{-n} H(t) = \frac{t^n}{n!}. \quad (6)$$

Здесь левая часть определяется интегралом по L' или M . Это соотношение выполняется и для пути L , если $n > -1$. В частности, поскольку

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\right)! &= \sqrt{\pi}, & \left(\frac{1}{2}\right)! &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \\ \left(\frac{3}{2}\right)! &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, & \left(-\frac{3}{2}\right)! &= -2 \sqrt{\pi}, \\ \left(-\frac{5}{2}\right)! &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} \sqrt{\pi}, \dots \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} p^{1/2}H(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \\ p^{-1/2}H(t) &= 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}, & p^{-3/2}H(t) &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \frac{t^{3/2}}{\sqrt{\pi}}, \\ p^{-5/2}H(t) &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \frac{t^{5/2}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

и в специальном смысле *)

$$p^{3/2}H(t) = -\frac{1}{2} \frac{t^{-3/2}}{\sqrt{\pi}}, \quad p^{5/2}H(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Если n — целое отрицательное число, то $n!$ бесконечно и $p^{-n}H(t) = 0$.

Операторы при $n \leq -1$, строго говоря, нельзя представлять интегралами по пути Бромвича. Чтобы придать им смысл, нужно заменить этот путь на L' или M . При решении физических проблем эти операторы непосредственно не появляются. Часто, однако, случается, что операционное решение приводит к интегралу, берущемуся по пути Бромвича, но проще всего его вычислить, заменив путь на L' или M (при условии, что между этими путями и путем L нет особенностей), и затем разложить по возрастающим степеням z на L' или M . Интегралы по L , соответствующие $n > -1$, будут такими, как установлено в (б), но при $n \leq -1$ эту формулу следует рассматривать просто как более удобную для запоминания сокращенную запись выражения

$$\frac{1}{2\pi i} \int_M e^{zt} z^{-n-1} dz = \frac{t^n}{n!} \quad (t > 0). \quad (7)$$

*) В смысле формулы (б). — Прим. перев.

Если мы продифференцируем это выражение по n под знаком интеграла, то получим другой равномерно сходящийся интеграл. При $n > -1$ он сходится на L . Итак,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_M e^{zt} z^{-n-1} \ln z \, dz = -\frac{t^n \ln t}{n!} + \frac{t^n}{n!} \frac{d}{dn} \ln n!; \quad (8)$$

или в операционной форме

$$p^{-n} \ln p H(t) = \left(\frac{d}{dn} \ln n! - \ln t \right) \frac{t^n}{n!} H(t), \quad (9)$$

в частности при $n = 0$

$$\ln p H(t) = (-\gamma - \ln t) H(t), \quad (10)$$

где γ — константа Эйлера (см. 15.04).

Особенно важными являются операторы $p^{1/2} \exp(-ap^{1/2})$ и $\exp(-ap^{1/2})$, где a — положительная константа. Их можно представить интегралами по L , поскольку на L аргумент $z^{1/2}$ заключен между $\pm 1/4\pi$ и подынтегральные выражения экспоненциально убывают в обе стороны. Следовательно,

$$p^{1/2} \exp(-ap^{1/2}) H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zt - az^{1/2}} z^{-1/2} \, dz, \quad (11)$$

$$\exp(-ap^{1/2}) H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zt - az^{1/2}} \frac{dz}{z}. \quad (12)$$

Эти интегралы могут быть вычислены двумя способами, каждый из которых имеет много других применений. Первый способ состоит в следующем. Заметим, что при $t > 0$ интегралы не изменятся, если интегрировать по L' или M . Кроме того, $\exp(-az^{1/2})$ можно разложить в абсолютно сходящийся ряд. Следовательно, мы можем поменять порядок интегрирования и суммирования (1.111) и написать

$$\begin{aligned} p^{1/2} \exp(-ap^{1/2}) H(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} e^{zt} z^{-1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n z^{1/2 n}}{n!} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{L'} a^n e^{zt} \frac{z^{1/2(n-1)}}{n!} dz = \\ &= \sum (-1)^n a^n \frac{p^{1/2(n+1)}}{n!} H(t) = \sum (-1)^n a^n \frac{t^{-1/2(n+1)}}{n! \left[-\frac{1}{2}(n+1) \right]!} H(t), \quad (13) \end{aligned}$$

используя выражение (7). Тогда все члены с нечетными n исчезнут, а если $n = 2m$, то

$$\begin{aligned} n! \left[-\frac{1}{2}(n+1) \right]! &= (2m)! \left[-\frac{1}{2}(2m+1) \right]! = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \dots 2m \sqrt{\pi}}{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{1}{2}(2m-1)\right)} = \\ &= (-2)^m 2 \cdot 4 \dots 2m \sqrt{\pi} = (-4)^m m! \sqrt{\pi}. \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно, при $t > 0$,

$$\begin{aligned} p^{1/2} \exp(-ap^{1/2}) H(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a^{2m} t^{-m-1/2}}{4^m m!} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Если убрать множитель $p^{1/2}$, то исчезнут все члены с четными n , кроме первого. В этом случае мы получим

$$\begin{aligned} \exp(-ap^{1/2}) H(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n \frac{p^{1/2 n}}{n!} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+1} t^{-m-1/2}}{(2m+1)! (-m-1/2)!} = \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{a}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)^3 + \frac{1}{2! \cdot 5} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)^5 - \dots \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Если определить

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du, \quad (17)$$

то

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2! \cdot 5} x^5 - \dots \right), \quad (18)$$

и, следовательно,

$$\exp(-ap^{1/2}) H(t) = 1 - \operatorname{erf} \frac{a}{2\sqrt{t}}. \quad (19)$$

Перейдем теперь ко второму способу. Запишем

$$zt - az^{1/2} = t \left(z^{1/2} - \frac{a}{2t} \right)^2 - \frac{a^2}{4t}. \quad (20)$$

При a и $t > 0$ величина $a/2t$ положительна. Мы можем считать, что $z^{1/2}$ изменяется по прямой, проходящей через $a/2t$ и параллельной мнимой оси. Положим тогда

$$z^{1/2} - \frac{a}{2t} = i\xi;$$

откуда

$$p^{1/2} \exp(-ap^{1/2}) H(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2}{4t} - t\xi^2\right) d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right). \quad (21)$$

Если продифференцировать (12) по a , то мы получим (11) с измененным знаком. Следовательно,

$$\exp(-ap^{1/2}) H(t) = - \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right) da + C. \quad (22)$$

Но при $a = 0$ выражение (12) равно просто $H(t)$. Откуда

$$\exp(-ap^{1/2}) H(t) = 1 - \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right) da = 1 - \operatorname{erf} \frac{a}{2\sqrt{t}}. \quad (23)$$

12.13. Обобщенный принцип суперпозиции. Операторы, которые мы только что определили, не удовлетворяют нашему исходному правилу, состоящему в том, что $F(z)$ разлагается по степеням z^{-1} , когда $|z|$ достаточно велико. Возникает вопрос, выполняется ли, по-прежнему, принцип суперпозиции. Пусть

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zt} \frac{F(z)}{z} dz. \quad (1)$$

Тогда можно показать, что при соответствующих ограничениях

$$F(u) = u \int_0^{\infty} e^{-ut} f(t) dt. \quad (2)$$

Возьмем $\operatorname{Re}(u)$ больше, чем c ; $F(z)$ аналитична при $\operatorname{Re}(z) \geq c$. Пусть интеграл от $F(z)/z^2$ по бесконечной полуокружности,

расположенной справа от L , обращается в нуль. Тогда, если можно переставлять порядок интегрирования,

$$\begin{aligned} u \int_0^{\infty} e^{-ut} f(t) dt &= u \int_0^{\infty} e^{-ut} \frac{1}{2\pi i} dt \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} \frac{F(z)}{z} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(z)}{z} dz \int_0^{\infty} u e^{-(u-z)t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{uF(z)}{z(u-z)} dz. \quad (3) \end{aligned}$$

Но $\operatorname{Re}(u)$ больше, чем c ; следовательно, если мы деформируем путь L в бесконечную полуокружность, расположенную справа от L , то при этом мы пройдем через полюс $z = u$ и не встретим никаких других особенностей. Но, по предположению, интеграл вдоль полуокружности равен нулю. Следовательно, последний интеграл равен умноженному на $-2\pi i$ вычету в полюсе $z = u$. Поэтому *) $u \int_0^{\infty} e^{-ut} f(t) dt = F(u)$. Обоснование для пере-

мены порядка интегрирования будет проведено позже, когда мы подойдем к теореме Фурье — Меллина, которая фактически является обратной по отношению к рассматриваемому утверждению.

Предположим теперь, что имеется два оператора $F(p)$ и $G(p)$, удовлетворяющих условиям, которые только что были наложены на $F(p)$. Тогда $g(t - \tau) = 0$ при $\tau > t$, и

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau &= \int_0^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_L e^{z(t-\tau)} G(z) \frac{dz}{z}. \quad (4) \end{aligned}$$

Но

$$\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-z\tau} d\tau = F(z)/z; \quad (5)$$

следовательно,

$$\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zt} F(z) G(z) \frac{dz}{z^2} = \frac{F(p) G(p)}{p} H(t). \quad (6)$$

*) Доказательство дано в [10].

Дифференцируя, получаем

$$F(p) G(p) H(t) = \int_0^t f(\tau) g'(t - \tau) d\tau + f(t) g(0). \quad (7)$$

Это наше прежнее правило суперпозиции, распространенное на значительно более широкий класс операторов. Таким образом, снова результат последовательного применения двух операторов, интерпретации которых известны, можно свести к одному интегралу.

12.14. Интегральные уравнения Абеля и Пуассона. Если

$$\int_0^x \varphi(\xi) f(x - \xi) d\xi = g(x), \quad (1)$$

где f и g — заданные функции, и нужно определить φ так, чтобы (1) было справедливо при всех x , то мы вводим операторные выражения, обозначаемые заглавными буквами и применяем принцип суперпозиции. Тогда (1) эквивалентно

$$\frac{1}{p} \Phi(p) F(p) = G(p), \quad (2)$$

$$\Phi(p) = \frac{pG(p)}{F(p)}, \quad (3)$$

откуда $\varphi(x)$ получается подстановкой в интеграл Бромвича и его вычислением. Это интегральное уравнение Абеля.

Аналогично исследуется уравнение Пуассона

$$\varphi(x) + \int_0^x \varphi(\xi) f(x - \xi) d\xi = g(x). \quad (4)$$

Получаем

$$\Phi(p) + \frac{1}{p} \Phi(p) F(p) = G(p), \quad (5)$$

$$\Phi(p) = \frac{pG(p)}{p + F(p)}, \quad (6)$$

откуда находится решение. Примеры даны в [11].

12.15. Функции $\left[\frac{t}{h}\right]$, $\frac{1}{2}(-1)^{[t/h]}$ и $\frac{t}{h} - \left[\frac{t}{h}\right] - \frac{1}{2}$. Рассмотрим ряд

$$(e^{-ph} + e^{-2ph} + e^{-3ph} + \dots) H(t) = H(t - h) + H(t - 2h) + \dots + H(t - nh) + \dots \quad (1)$$

Обозначим через $[t/h]$ целую часть t/h . Те члены ряда, у которых $n < t/h$, равны 1, а те, у которых $n > t/h$, равны 0. Следовательно, число членов ряда, отличных от нуля, равно $[t/h]$, и его сумма равна $[t/h]$. Она равна 0 для $0 < t < h$ и возрастает скачком на единицу при $t = h, 2h, 3h, \dots$. Если мы запишем теперь (1) в виде интеграла Бромвича, то p заменится на z

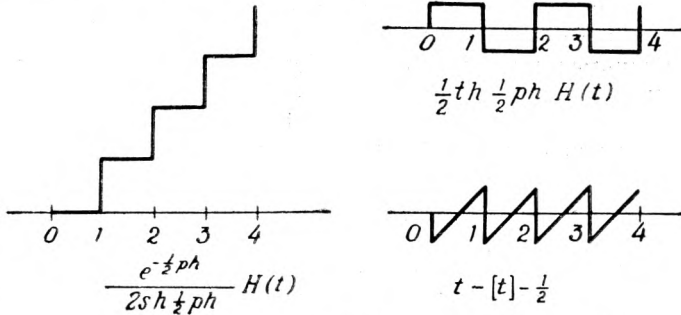


Рис. 49.

с действительной частью, равной положительной величине s . Полученный ряд будет сходящейся геометрической прогрессией и

$$e^{-zh} + e^{-2zh} + \dots = \frac{e^{-zh}}{1 - e^{-zh}} = \frac{e^{-1/2 zh}}{2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} zh},$$

откуда

$$\left[\frac{t}{h} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{z(t-1/2 h)}}{2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} zh} \frac{dz}{z} = \frac{e^{-1/2 ph}}{2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} ph} H(t). \quad (2)$$

Аналогично ряд

$$\left(\frac{1}{2} - e^{-ph} + e^{-2ph} - e^{-3ph} + \dots \right) H(t) \quad (3)$$

равен $+\frac{1}{2}$, если $[t/h]$ равно 0 или четному числу, и $-\frac{1}{2}$, если $[t/h]$ нечетное число, следовательно, его можно записать так: $\frac{1}{2}(-1)^{[t/h]}$. Этот ряд также можно просуммировать как геометрическую прогрессию. После суммирования получаем

$$\frac{1}{2} \frac{1 - e^{-ph}}{1 + e^{-ph}} H(t) = \left(\frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{1}{2} ph \right) \tilde{H}(t) = \frac{1}{2} (-1)^{[t/h]} \quad (t > 0). \quad (4)$$

Обе эти функции очень важны при исследовании операционным методом волновых процессов.

Среднее значение t/h для t между nh и $nh+h$ равно $n + 1/2 = [t/h] + 1/2$. Отсюда функция $t/h - [t/h] - 1/2$ равна $-1/2$ при $t=0$, равномерно возрастает до $1/2$ при $t=h$, разрывно падает до $-1/2$ и дальше повторяется периодически. Ее операционное выражение равно

$$\left(\frac{1}{ph} - \frac{1}{e^{ph} - 1} - \frac{1}{2} \right) H(t). \tag{5}$$

Первый этап интегрирования формулы Эйлера — Маклорена можно записать так

$$\int_0^{nh} f(t) dt = \frac{1}{2} f(0) + f(h) + f(2h) + \dots + f[(n-1)h] + \\ + \frac{1}{2} f(nh) - \int_0^{nh} \left[\frac{t}{h} - \left[\frac{t}{h} \right] - \frac{1}{2} \right] f'(t) dt, \tag{6}$$

и оператор

$$\frac{hD}{e^{hD} - 1} + \frac{1}{2} hD - 1 \tag{7}$$

встречается в операционной производной ряда Эйлера — Маклорена. Сходство двух выражений наводит на мысль о том, что они связаны, но оператор (5) действует на $H(t)$, и его нельзя разложить по возрастающим степеням p , тогда как (7) должен быть разложен по возрастающим степеням D . Возможно, что связь существует, но, по-видимому, не настолько простая, чтобы заменить вывод формулы Эйлера — Маклорена интегрированием по частям.

12.16. Интегралы Фруллани. Рассмотрим

$$I = \int_0^{\infty} [f(ax) - f(bx)] \frac{dx}{x}.$$

Условия, которым удовлетворяет $f(x)$, будут сформулированы в процессе изложения. Промежуток интегрирования разобьем на две части: от 0 до δ и от δ до ∞ , где δ произвольно мало. Тогда, если интеграл I сходится в окрестности нуля, то интеграл от 0 до δ произвольно мал. Тем самым,

$$I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} [f(ax) - f(bx)] \frac{dx}{x} = \lim \left\{ \int_{a\delta}^{\infty} f(u) \frac{du}{u} - \int_{b\delta}^{\infty} f(u) \frac{du}{u} \right\},$$

при условии, что оба интеграла сходятся; их разность равна

$$\int_{a\delta}^{b\delta} f(u) \frac{du}{u}.$$

Но если $f(u)$ непрерывна и стремится к конечному пределу при $u \rightarrow 0$, то предел этой разности равен

$$f(0+) \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{du}{u} = f(0+) \ln \frac{b}{a}.$$

Тогда

$$I = f(0+) \ln \frac{b}{a},$$

в частности,

$$\int_0^{\infty} (\cos ax - \cos bx) \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} (e^{-ax} - e^{-bx}) \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}.$$

Ни один из последних двух интегралов нельзя вычислить с помощью контурного интегрирования. Под знаком первого интеграла стоит нечетная функция, и интеграл, который получается при замене промежутка интегрирования на $(-\infty, \infty)$, тождественно равен нулю.

Тот же метод можно распространить на многие интегралы от нечетных функций. Например,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^2} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{4} \int_{\delta}^{\infty} (3 \sin x - \sin 3x) \frac{dx}{x^2} = \\ &= \frac{1}{4} \lim \left\{ \int_{\delta}^{\infty} 3 \sin x \frac{dx}{x^2} - \int_{3\delta}^{\infty} 3 \sin u \frac{du}{u^2} \right\} = \frac{3}{4} \lim \int_{\delta}^{3\delta} \sin x \frac{dx}{x^2} = \frac{3}{4} \ln 3. \end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ

1. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{1+x^3}. \quad (\text{М. Т., 1943.})$$

2. Показать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+x^2)} dx = \frac{1}{4} \pi (1 + e^{-2}).$$

3. Найти главное значение интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tg} x}{x} dx.$$

4. Доказать, что при X , стремящемся к бесконечности,

$$\int_0^X \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{1}{2} \pi (b - a) + O\left(\frac{1}{X^2}\right) \quad (a > 0, b > 0). \quad (\text{М. Т., 1938}).$$

5. Доказать, что если B_r — числа Бернулли, то

$$\frac{B_{r-1}}{1!(r-1)!} + \frac{B_{r-2}}{2!(r-2)!} + \dots + \frac{B_2}{(r-2)!2!} - \frac{1}{2(r-1)!} + \frac{1}{r!} = 0.$$

6. Доказать, что

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - B_2 \frac{(2x)^2}{2!} + B_4 \frac{(2x)^4}{4!} - \dots$$

7. Пусть a и b — действительные, положительные и неравные между собой константы. Найти

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2 (x^2 + b^2)^2}.$$

Верен ли результат при $a = b$? (М. Т., 1935.)

8. Доказать из теоремы Лиувилля, рассматривая $z^n f(z)$, что всякий полином $f(z)$ положительной степени n имеет хотя бы один корень.

(М. Т., 1935.)

9. Показать, что корни уравнения

$$z^5 - 12z^2 + 14 = 0$$

лежат между окружностями $|z| = 1$ и $|z| = \frac{5}{2}$. Сколько корней внутри окружности $|z| = 2$? (М. Т., 1939.)

10. Если $f(z) = (z - a_1) \dots (z - a_n)$, доказать, что все нули $f'(z)$ лежат внутри любого выпуклого многоугольника, содержащего все нули $f(z)$.

11. Если $|f(z)|$ — константа на замкнутом контуре, где $f'(z)$ не обращается в нуль и $f(z)$ аналитична внутри контура, то показать, что $f(z)$ имеет на один нуль больше, чем $f'(z)$, внутри контура.

12. Если

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + \dots,$$

где $b_1 \neq 0$, то корень $\varphi(z) = 0$, ближайший от начала координат, равен коэффициенту при $1/t$ в разложении в ряд Лорана функции

$$-\ln \frac{\varphi(t)}{t} = -\ln \left\{ b_1 + \frac{b_0}{t} + (b_2 t + \dots) \right\}. \quad \{[12]$$

13. Показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x+a) \sin(x-a)}{x^2 - a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \sin 2a.$$

14. Если $f(z)/z$ равномерно ограничена на множестве контуров, определенных, как в теореме Миттаг-Леффлера, и бесконечно расширяющихся, и $f(z)$ имеет простые полюса в точках α_r с вычетами β_r , то доказать, что

$$f(z) = f(0) + zf'(0) + \sum \left(\frac{\beta_r}{z - \alpha_r} + \frac{\beta_r(z + \alpha_r)}{\alpha_r^2} \right).$$

15. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x(x^2 + a^2)^2} dx \quad (m > 0).$$

16. Интегрируя функцию $\frac{e^{az}}{1 + e^z}$ ($0 < a < 1$) по прямоугольнику ширины 2π , докажите, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a},$$

и проведите другое доказательство из того, что

$$z!(-z)! = \pi z \operatorname{cosec} \pi z.$$

17. Доказать, что для $h > 0$

$$\int_0^{\infty} \sin \kappa x e^{-\kappa h} \frac{d\kappa}{\kappa} = \arctg \frac{x}{h}.$$

18. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{u du}{e^u - e^{-u}} = \frac{1}{4} \pi^2. \quad (\text{I. C., 1944.})$$

19. Если для малых $|z|$

$$\sec z = 1 + \sum a_{2r} z^{2r},$$

то доказать, что

$$1 - \frac{1}{3^{2r+1}} + \frac{1}{5^{2r+1}} - \dots = \frac{\pi^{2r+1}}{2^{2r+2}} a_{2r}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Bleieck W. E., Phil. Mag., (7) 33, 637—638 (1942).
2. Bickley W. G., Miller J. C. P., Phil. Mag., (7) 34, 35—36 (1943).
3. Jeffreys H., Dalzell D. P., Proc., Cambr. Phil Soc., 36, 274 (1940).
4. Bromwich. Proc. Lond. Math. Soc., (2) 15, 401—448 (1916).
5. Wagner K. W., Archiv. f. Electrotechnik, 4, 159—193 (1916).
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции, т. I, 1964.
7. Lighthill M. J., An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions, 1958.
8. Dalzell D. P., Proc. Cambr. Phil. Soc., 36, 276—279 (1940).
9. Jeffreys H., Theory of Probability, p. 76.
10. Goldstein S., Proc. Lond. Math. Soc., (2) 34, 104 (1931).
11. Goldstein S., J. Lond. Math. Soc., 6, 262—268 (1931).
12. Address W. R., Math. Gaz., 27, 92 (1943).

КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ*)

Чем больше меняется, тем
больше становится самим собой.

Альфонс Карр „Осы“, 1849

13.01. Условия конформного отображения. Пусть ξ и z — две комплексные переменные, связанные соотношением

$$z = f(\xi), \quad (1)$$

где $f(\xi)$ — аналитическая функция. Тогда, если ξ движется вдоль кривой на плоскости ξ, η , то z движется вдоль кривой на плоскости x, y . Каждому значению ξ , для которого функция $f(\xi)$ определена, соответствует точка на плоскости x, y , и наоборот, если существует обратная функция, то значению z сопоставляется значение ξ . Таким образом, (1) можно рассматривать как *преобразование*, позволяющее нам отобразить по крайней мере часть плоскости ξ, η на плоскость x, y и обратно.

Важность преобразования этого типа основана на том, что оно, вообще говоря, *непрерывно* и *конформно*. В самом деле, возьмем сначала малое комплексное число γ и рассмотрим $z + c = f(\xi + \gamma)$. Имеем

$$c = f(\xi + \gamma) - f(\xi) = \gamma [f'(\xi) + v],$$

где v стремится к нулю вместе с γ . Следовательно, если $f'(\xi)$ существует, то и действительная, и мнимая части c стремятся к нулю, когда то же происходит с действительной и мнимой частью γ . Таким образом, преобразование ξ в z непрерывно. Обратное, преобразование z в ξ непрерывно при условии, что $d\xi/dz = 1/f'(\xi)$ существует. Напротив, в окрестности точки, где $f'(\xi)$ или $1/f'(\xi)$ не существует, само преобразование или обратное ему может и не быть непрерывным.

*) Вопросы, рассмотренные в этой главе, имеют важное прикладное значение. Более подробно они изложены в книге Лаврентьева М. А. и Шабата Б. В. „Методы теории функций комплексного переменного“, Физматгиз, М., 1958. — *Прим. ред.*

Теперь возьмем два малых комплексных числа γ и γ' и рассмотрим поведение отношения

$$\frac{c'}{c} = \frac{f(\xi + \gamma') - f(\xi)}{f(\xi + \gamma) - f(\xi)} = \frac{\gamma'}{\gamma} \cdot \frac{f'(\xi) + v'}{f'(\xi) + v},$$

где теперь v стремится к нулю вместе с γ , а v' — вместе с γ' . Тогда, если γ и γ' стремятся к нулю, находясь между собой в заданном отношении, то c'/c стремится к тому же самому отношению (снова при условии, что $f'(\xi)$ принимает определенное значение, отличное от нуля). Если $f'(\xi)$ равно нулю, то предел c'/c , разумеется, зависит от предела отношения v'/v , о котором мы пока ничего не можем сказать. Не считая этих особых случаев, мы имеем тогда

$$\lim \frac{c'}{c} = \lim \frac{\gamma'}{\gamma},$$

что эквивалентно паре соотношений

$$\lim \left| \frac{c'}{c} \right| = \lim \left| \frac{\gamma'}{\gamma} \right|, \quad \lim (\arg c' - \arg c) = \lim (\arg \gamma' - \arg \gamma).$$

Другими словами, если взять малый треугольник на плоскости ξ , то его вершины перейдут в вершины малого треугольника на плоскости z , и если взять последовательность треугольников той же формы с размерами, стремящимися к нулю на плоскости ξ , то соответствующие треугольники на плоскости z стремятся принять ту же форму (все это при условии, что $f'(\xi) \neq 0$). Вот что мы имеем в виду, называя преобразование *конформным*. Для любых двух пересекающихся кривых угол, под которым они пересекаются, не меняется при преобразовании, и чтобы перейти с одной кривой на другую, мы должны обходить точку пересечения в одном и том же направлении. В частности, поскольку оси ξ и η образуют прямой угол, то две кривые на плоскости z , вдоль которых ξ и η постоянны, пересекаются под прямым углом. Мы получаем на плоскости z семейство кривых, соответствующих прямым, параллельным оси ξ , и другое семейство кривых, соответствующих прямым, параллельным оси η , и пересекающих кривые первого семейства под прямыми углами. Мы будем говорить о них как о семействах, где η и ξ соответственно постоянны. Разумеется, ξ (и соответственно η) меняется на такой кривой.

Таким образом, преобразование конформно и непрерывно, кроме, быть может, тех мест, где $f'(\xi)$ или $1/f'(\xi)$ не существует. Мы должны, следовательно, посмотреть, что происходит в особых и стационарных точках $f(\xi)$. Сначала рассмотрим точку ветвления. Поскольку $f(\xi)$ не возвращается к первоначальному значению, когда ξ совершает обход вокруг этой точки, то дан-

ной точке на плоскости ζ будет соответствовать более чем одна точка на плоскости z , если только мы не ограничим область на плоскости ζ так, чтобы подобные обходы оказались запрещены. Аналогично обстоит дело для стационарных точек: если $m > 1$ — целое число и

$$f(\zeta) = f(\zeta_0) + a(\zeta - \zeta_0)^m + \dots,$$

то ζ не будет однозначно определенной функцией z .

Чтобы карта была полезна, очевидно, необходимо взаимно-однозначное соответствие между местом на земле и его изображением на карте. Простые полюса $f(\zeta)$ сами по себе еще не страшны. Но если $f(\zeta)$ имеет где-нибудь кратный полюс или изолированную существенно особую точку, то заданное значение $z = f(\zeta)$ достигается в окрестности особенности более чем при одном значении ζ . Это верно и в том случае, когда особенность — на бесконечности. Таким образом, если исключить из рассмотрения неизоллированные существенно особые точки (с ними трудно иметь дело и в общей теории, и в конкретных задачах), то преобразование может быть взаимнооднозначным во всей плоскости только тогда, когда $f(\zeta)$ рациональная функция, имеющая, самое большее, простые полюса, не имеющая стационарных точек и ведущая себя на бесконечности либо как ζ , либо как константа, либо как $1/\zeta$. Таким образом, рассматриваются только функции вида

$$f(\zeta) = a + b\zeta + \sum_{r=1}^n \frac{a_r}{\zeta - b_r},$$

$$f'(\zeta) = b - \sum_{r=1}^n \frac{a_r}{(\zeta - b_r)^2}.$$

Производная $f'(\zeta)$ имеет n двукратных полюсов в большом круге C . Но

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[2 \sum \frac{a_r}{(\zeta - b_r)^3} / \left(b - \sum \frac{a_r}{(\zeta - b_r)^2} \right) \right] d\zeta = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } b \neq 0, \\ -2, & \text{если } b = 0, \quad \sum a_r \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, $f'(\zeta)$ имеет $2n$ нулей, если $b \neq 0$, и $(2n - 2)$ нуля, если $b = 0$, а $\sum a_r \neq 0$. Если $b = 0$ и $\sum a_r = 0$, то $f(\zeta) - a$ ведет себя при больших ζ , как ζ^{-m} , где $m \geq 2$, и преобразо-

вание от z к ξ не является однозначным. Следовательно, чтобы ξ была однозначной функцией z , должно быть либо

$$b \neq 0, \quad n = 0, \quad f(\xi) = a + b\xi,$$

либо

$$b = 0, \quad n = 1, \quad f(\xi) = a + \frac{a_1}{\xi - b_1}.$$

Таким образом, среди преобразований без неизолированных существенно особых точек только указанные два таковы, что не нужно проводить никаких разрезов, чтобы получить взаимнооднозначное соответствие между целыми плоскостями. Первое преобразование тривиально, будучи просто комбинацией сдвига и изменения масштаба. Второе представляет интерес. Мы рассмотрим это преобразование, записав его в более простой форме.

Будет показано, что последовательное применение преобразований этого вида сводится к преобразованию того же вида, только с другими константами.

В других случаях нужно проводить такие разрезы, чтобы нули $f'(\xi)$ и все особенности $f(\xi)$ лежали на границе или вне отображаемой области. Когда эти разрезы проведены, то нарушение конформности в некоторых точках дает возможность отображать простые контуры на плоскости ξ в самые разнообразные контуры на плоскости z , что в свою очередь позволяет решать весьма сложные задачи.

Всякую точку на плоскости z или ξ , при приближении к которой $f'(\xi)$ стремится к пределу, отличному от 0 и ∞ , мы будем называть обыкновенной точкой преобразования. Всякую точку, при приближении к которой либо $f'(\xi) \rightarrow 0$, либо $|f'(\xi)| \rightarrow \infty$, либо, наконец, $f'(\xi)$ не имеет предела, будем называть особой точкой преобразования. Мы говорим, что точка является особой точкой преобразования, независимо от того, имеет ли особенность z как функция ξ или ξ как функция z (точно так же при рассмотрении кратных интегралов мы называли преобразование особым и в том случае, когда якобиан стремился к 0, и в том, когда он стремился к ∞).

13.02. Отображения, коэффициент растяжения. Пусть $F(\xi)$ — аналитическая функция и

$$z = f(\xi), \quad w = F(\xi) = \varphi + i\psi.$$

Тогда w — аналитическая функция от z . Следовательно, φ и ψ как функции от x и y удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа. Если одна из них постоянна на кривой в плоскости ξ , то она постоянна и на преобразованной кривой в плоскости z .

Найдя решение уравнения Лапласа в какой-нибудь области плоскости ξ, η , постоянное на ее границе, и выразив ту же функцию через x, y , мы получим решение уравнения Лапласа, постоянное на преобразованной границе. Благодаря этому с помощью конформных отображений решается множество задач; каждая аналитическая функция увеличивает их число.

Если обозначить через $d\sigma$ элемент площади на плоскости ξ, η , а через dS — на плоскости z , то из соотношений Коши — Римана следует

$$dS = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} d\sigma = \left| \frac{dz}{d\xi} \right|^2 d\sigma.$$

Величина $|dz/d\xi|$ называется *модулем*, или коэффициентом растяжения этого отображения.

Если ξ описывает кривую, то близким точкам, находящимся слева или справа от нее, соответствуют на плоскости z точки, находящиеся соответственно слева или справа от кривой z ; это следует из того, что отображение сохраняет направление вращения. Расстояния этих точек от кривой умножаются на $|dz/d\xi|$.

Если w имеет логарифмическую особенность в обыкновенной точке ξ_0 плоскости ξ, η , то

$$w = A \ln(\xi - \xi_0) + g(\xi) = A \ln \frac{z - z_0}{f'(\xi)} + G(z),$$

где $g(\xi)$ и $G(z)$ аналитические функции. Поэтому w имеет и в плоскости z логарифмическую особенность с тем же коэффициентом. Если же точка ξ_0 особая, то коэффициенты будут различны или особенность w может быть не логарифмической. Тем не менее мы должны всегда быть готовы встретить такие особенности на границе или вне области и обратить на них особое внимание, чтобы обеспечить соответствие физическим условиям.

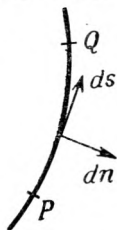


Рис. 50.

13.03. Интерпретация комплексного потенциала в электростатике и гидродинамике.

Гидродинамика.

$$w = \varphi + i\psi,$$

где φ — потенциал скорости, а ψ — функция тока. Тогда

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i \frac{\partial\varphi}{\partial y} = u - iv,$$

где u и v — компоненты скорости, а

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = (u^2 + v^2)^{1/2} = q,$$

результатирующая скорость. Если взять кривую, соединяющую P и Q , то

$$\int_P^Q \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = \int_P^Q \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = [\Psi]_P^Q = \int_P^Q u dy - v dx,$$

так что $[\Psi]_P^Q$ представляет собой поток жидкости через кривую, отнесенный к единице длины цилиндра с образующими, перпендикулярными к плоскости x, y . Направления ds и dn должны быть ориентированы так, как показано на рис. 50.

Линейный источник в точке z_0 , испускающий жидкость со скоростью $2\pi m$ на единицу длины, образующей цилиндра, имеет комплексный потенциал

$$m \ln(z - z_0).$$

Электростатика.

$$w = \varphi + i\psi,$$

где φ — электростатический потенциал, а ψ — зарядовая функция *). Тогда

$$\frac{dw}{dz} = -(E_x - iE_y), \quad \left| \frac{dw}{dz} \right| = (E_x^2 + E_y^2)^{1/2},$$

где E_x, E_y — компоненты напряженности электрического поля. Если заряженный проводник соединяет P и Q и dn — элемент внешней нормали к проводнику, то поверхностная плотность заряда $\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial n}$, а заряд на PQ равен

$$-\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = -\frac{1}{4\pi} [\Psi]_P^Q$$

на единицу длины прямой, перпендикулярной к плоскости контура. Более того, если $z = f(\zeta)$ и P', Q' и кривая, соединяющая их в плоскости ζ , соответствуют P, Q и кривой PQ , то φ и ψ одни и те же для обеих плоскостей и заряд на $P'Q'$ на единицу длины перпендикуляра к плоскости контура равен такому же заряду на PQ , хотя поверхностные плотности в соответствующих точках различны. Итак, емкость проводника в двух измерениях инвариантна по отношению к конформным преобразованиям.

Знак лучше всего выбирать из физических соображений.

*) φ — скалярный потенциал, $E = -\text{grad } \varphi$; ψ — проекция векторного потенциала на ось, перпендикулярную плоскости x, y . — Прим. ред.

Линейный заряд в точке z_0 плотности e на единицу длины имеет комплексный потенциал

$$-2e \ln(z - z_0).$$

Электродинамика.

Рассмотрим постоянные токи, текущие в пластинке, имеющей толщину t и удельную проводимость σ ; если φ — электростатический потенциал, \mathbf{j} — плотность тока, \mathbf{E} — поле, то

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \operatorname{grad} \varphi.$$

Электрический ток через электрод, соединяющий две точки P и Q , равен

$$-\sigma t \int_P^Q \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = -\sigma t \int_P^Q \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = -\sigma t [\varphi]_P^Q.$$

Комплексный потенциал, соответствующий электроду с малым круговым сечением, через который проходит ток J в точке z_0 , равен

$$-\frac{J}{2\pi\sigma t} \ln(z - z_0).$$

Если есть источник жидкости или тока или электрический заряд, то при конформном отображении они переходят в источник или заряд равной величины.

Пусть источник находится на границе, которая в этой точке имеет излом, образуя угол величины α . Если бы источник целиком находился внутри области, то весь поток попал бы внутрь. Если же источник находится в вершине угла, то только доля $\alpha/2\pi$ потока попадет в нашу область. Если в этой точке преобразование не конформно и стороны угла переходят в линии, пересекающиеся под углом β , то в его вершину мы должны поместить источник, величина которого составляет α/β от прежнего.

Перейдем к рассмотрению частных случаев.

13.04. Пусть $z = A/\zeta$ (A вещественно). Тогда

$$z = A \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2}, \quad x = \frac{A\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = -\frac{A\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

$$\xi = \frac{Ax}{x^2 + y^2}, \quad \eta = -\frac{Ay}{x^2 + y^2}.$$

Это преобразование похоже на инверсию, поскольку $|z| |\zeta| = |A|$, т. е. постоянно. Но в отличие от инверсии, направления векторов (x, y) и (ξ, η) не совпадают. Если ζ обходит окружность

вокруг начала координат, то и z тоже, но в другую сторону; преобразование переводит внутренность каждой из этих окружностей во внешнюю область другой. Кроме того, при этом преобразовании все окружности, не проходящие через начало координат, переходят в окружности, а проходящие через начало координат — в прямые.

В качестве примера рассмотрим круговой цилиндр радиуса a , лежащий на плоскости. Выберем оси, как показано на рис. 51. Пусть несжимаемая жидкость течет параллельно оси x

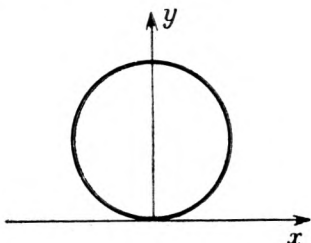


Рис. 51.

со скоростью U на бесконечности. Граничное условие состоит в том, что функция тока ψ постоянна на твердой стенке и потому имеет одно и то же значение на плоскости и на поверхности цилиндра. Для больших $|z|$ комплексный потенциал w должен стремиться к Uz .

Положив $z = A/\zeta$, мы видим, что ось x переходит в ось ξ . Окружность переходит в прямую, параллельную оси ξ . Какую именно — легко узнать, взяв $z = 2ia$, откуда $\zeta = -iA/2a$. Удобно выбрать A так, чтобы это значение ζ стало равным $i\pi/2$, т. е.

$$A = -\pi a.$$

Тогда

$$z = -\frac{\pi a}{\zeta}.$$

Если $z \rightarrow \infty$, то w стремится к $Uz = -\pi aU/\zeta$, что соответствует дипольному источнику в начале координат. Теперь надо еще прибавить такие дополнительные члены, чтобы w стало действительным на границах $\eta = 0$ и $\eta = i\pi/2$. Для $\eta = 0$ это и так выполняется, а для $\eta = i\pi/2$ достигается прибавлением $-\pi aU/(\xi - i\pi)$. Эта функция аналитична при $0 \leq \eta \leq \pi/2$ и потому допустима, но она нарушает условие при $\eta = 0$, и приходится прибавить еще $-\pi aU/(\xi + i\pi)$.

Продолжая так неограниченно и используя **12.06**, мы получаем

$$\begin{aligned} \omega &= -\pi a U \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta - i\pi} + \frac{1}{\zeta + i\pi} + \frac{1}{\zeta - 2i\pi} + \frac{1}{\zeta + 2i\pi} + \dots \right) = \\ &= -\pi a U \operatorname{cth} \zeta = \pi a U \operatorname{cth} \frac{\pi a}{z}. \end{aligned}$$

Чтобы убедиться, что этот ряд удовлетворяет всем условиям, заметим прежде всего, что он действителен при $z = x$ и стремится к Uz при $|z| \rightarrow \infty$, как и требовалось. На окружности радиус-вектор равен $2a \sin \theta$, а

$$z = 2a \sin \theta e^{i\theta},$$

$$\zeta = -\frac{1}{2} \pi \operatorname{cosec} \theta e^{-i\theta} = -\frac{1}{2} \pi (\operatorname{ctg} \theta - i),$$

$$\omega = -\pi a U \operatorname{cth} \left(\frac{1}{2} \pi i - \frac{1}{2} \pi \operatorname{ctg} \theta \right) = \pi a U \operatorname{th} \left(\frac{1}{2} \pi \operatorname{ctg} \theta \right),$$

и, таким образом, ω действительно. Нас интересуют главным образом скорость q и давление. Величина скорости

$$q = \left| \frac{d\omega}{dz} \right| = \left| \frac{U\pi^2 a^2}{z^2 \operatorname{sh}^2 \pi a/z} \right|.$$

Если z действительно и стремится к нулю, то $q \rightarrow 0$; отсюда следует, что скорость равна нулю на линии касания цилиндра с плоскостью. В верхней точке окружности $z = 2ia$, $\zeta = i\pi/2$,

$$q = \left| \frac{1}{4} \pi^2 U \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2} \pi \right| = \frac{1}{4} \pi^2 U.$$

Таким образом, скорость непосредственно над цилиндром, примерно в 2,5 раза больше скорости в бесконечности. Тогда давление там соответственно меньше. Это значит, что течение стремится приподнять предметы, лежащие на дне. Этот факт используется в теории перемещения осадков в водоемах*).

13.05. $z = \zeta^n$ (n — действительно, $n \neq 1$). Преобразование не является конформным в начале координат. Поскольку $|z| = |\zeta|^n$, $\arg z = n \arg \zeta$, то лучи, выходящие из θ на плоскости z , соответствуют лучам, выходящим из 0 на плоскости ζ , а окружности с центром 0 на плоскости z соответствуют окружностям с центром 0 на плоскости ζ . Вследствие этого преобразование применимо к областям, границы которых — *двугранные углы*.

*) За вычислением результирующей силы, действующей на цилиндр, отсылаем читателя к [1].

Если фигура на плоскости ζ — пара лучей, образующих угол π , т. е. отделяет верхнюю полуплоскость, то лучи на плоскости z образуют угол $n\pi$. Здесь n не может быть больше 2, так как иначе соответствие станет неоднозначным. Это преобразование применимо к двугранным углам величины $\leq 2\pi$.

Рассмотрим линейный источник жидкости при $z = z_0$ в области, ограниченной двугранным углом $n\pi$. Комплексный потенциал, соответствующий такому источнику, равен

$$\omega_0 = -\frac{m}{2\pi} \ln(z - z_0),$$

а комплексный потенциал для ζ равен $-\frac{m}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_0)$, поскольку z_0 — обыкновенная точка преобразования. Функция тока равна

$$\psi_0 = -\frac{m}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0}.$$

Потребуем, чтобы полная функция тока была постоянна при $\eta = 0$. Но ψ_0 будет удовлетворять этому условию, если прибавить к ней функцию, которая получится из нее заменой η_0 на $-\eta_0$. Итак,

$$\omega = -\frac{m}{2\pi} \ln[(\zeta - \xi_0 - i\eta_0)(\zeta - \xi_0 + i\eta_0)]$$

удовлетворяет всем условиям. Поэтому решением будет

$$\omega = -\frac{m}{2\pi} \ln[(z^{1/n} - z_0^{1/n})(z^{1/n} - z_0^{*1/n})]$$

где $z_0^* = x_0 - iy_0$. В случае, если число n обратное целому, этот результат можно получить и методом изображений. В прочих случаях этот способ не годится; внутри области течения возникают изображения и, следовательно, новые особенности.

Вектор, сопряженный скорости, равен

$$u - iv = \frac{d\omega}{dz} = \frac{d\omega}{d\zeta} \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|.$$

Функция $d\omega/d\zeta$ аналитична при $z = 0$, но $dz/d\zeta$ при этом ведет себя как $\zeta^{n-1} = z^{1-(1/n)}$, что стремится к 0 при $n > 1$ и к ∞ при $n < 1$. Отсюда скорость в вершине угла стремится к 0 или ∞ в зависимости от того, $n > 1$ или $n < 1$, т. е. меньше или больше угол, чем π . Во втором случае классическая теория дает плохое приближение: из-за вязкости реальная жидкость обтекает выступающие углы неплавно.

13.05а. В учебниках по гидродинамике еще встречается утверждение, что жидкость обтекает углы, бóльшие 180° , не-

плавно вследствие образующегося отрицательного давления. Релей давно уже показал, что это же явление имеет место и в случае газа, когда не может быть и речи об отрицательном давлении. (См. также [2].)

13.06. $z = ae^{\xi}$ (a действительно). Так как $\xi = \ln(z/a)$, то ξ — многозначная функция от z и $z = 0$ является точкой ветвления. Имеем

$$x = ae^{\xi} \cos \eta, \quad y = ae^{\xi} \sin \eta;$$

следовательно, любая пара значений x, y , кроме $(0, 0)$, будет получена, если изменять η на отрезке длины 2π , а ξ — от $-\infty$ до $+\infty$. Вся плоскость x, y отображается, таким образом, на

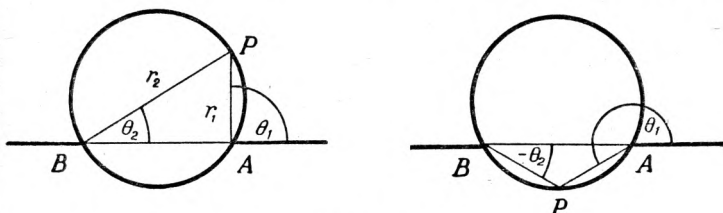


Рис. 52.

бесконечную полосу между $\eta = 0$ и $\eta = 2\pi$, или, как нам будет здесь удобнее, на полосу $-\pi < \eta \leq \pi$. Полу плоскость отображается на полосу ширины π . Окружность $|z| = a$ соответствует отрезку прямой $\xi = 0, 0 \leq \eta < 2\pi$; внутренность круга соответствует *полубесконечной полосе*, лежащей слева от оси η , а внешняя область его — *полуполосе*, лежащей справа от оси η . На плоскости z кривые постоянного ξ — это окружности с центром в начале координат, а кривые постоянного η — лучи, выходящие из начала координат.

13.07. Окружности с общей осью симметрии. $\xi = c \ln \frac{z-a}{z+a}$.

Для простоты возьмем a и c действительными. Тогда

$$\xi + i\eta = c \left[\ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

(см. рис. 52). Здесь $\theta_1 - \theta_2$ неоднозначно, и, чтобы добиться однозначности ξ, η , надо заключить $\theta_1 - \theta_2$ в отрезок длины не больше 2π . Этого можно достичь, сделав разрезы либо по действительной оси от $-\infty$ до $-a$ и от $+a$ до $+\infty$, либо от $-a$ до $+a$. Выберем первое. Тогда

$$0 \leq \theta_1 < 2\pi, \quad -\pi < \theta_2 \leq \pi.$$

Кривые $\eta = \text{const}$ — это семейство окружностей, проходящих через $A(+a)$ и $B(-a)$, имеющих общую ось симметрии Oy . Кривые $\xi = \text{const}$ — это другое семейство окружностей, ортогональных к первым, с общей осью симметрии Ox , стягивающихся к точкам A и B .

Для части окружности C , лежащей выше действительной оси,

$$\theta_1 - \theta_2 = APB = \alpha,$$

углу, вписанному в сегмент APB . Для нижней части

$$(2\pi - \theta_1) + \theta_2 = \pi - \alpha,$$

т. е.

$$\theta_1 - \theta_2 = \pi + \alpha.$$

Таким образом, $\theta_1 - \theta_2$ скачком изменяется на $\pm\pi$, когда P проходит A или B . Так как $0 < \alpha < \pi$, то $\theta_1 - \theta_2$ всегда равно тому из двух углов APB , который обращен *книзу*.

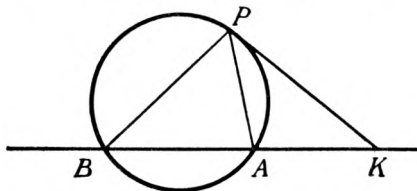


Рис. 53.

Если брать все такие окружности с α , меняющимся от 0 до π , то η будет меняться от 0 до 2π . Прямые $\eta = c\alpha$ при $0 < \alpha < \pi$ соответствуют верхним дугам AB окружностей, а при $\pi < \alpha < 2\pi$ — нижним; $\eta = \pi$ соответствует отрезку BA . Для точек, приближающихся к оси x вне BA , $\eta \rightarrow 0$ при приближении сверху, $\eta \rightarrow 2\pi$ при приближении снизу.

Теперь займемся ортогональной системой линий

$$\ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{\xi}{c}.$$

Для произвольной точки P проведем окружность APB и касательную к ней в точке P , пересекающую ось Ox в точке K . Треугольники KPA и KBP подобны, и поэтому

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{AP}{BP} = \frac{PK}{BK} = \frac{AK}{PK}.$$

Тогда

$$\frac{AK}{BK} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = e^{2\xi/c}.$$

Следовательно, если ξ задано, то точка K постоянна. К тому же

$$KP^2 = KA \cdot KB,$$

т. е. длина отрезка KP постоянна. Итак, множество точек P при фиксированном ξ образует окружность. Если $r_1/r_2 \rightarrow 0$, то окружность стягивается к точке A , а если $r_1/r_2 \rightarrow \infty$, то к точке B . Таким образом, кривые $\xi = \text{const}$ — это окружности с общей

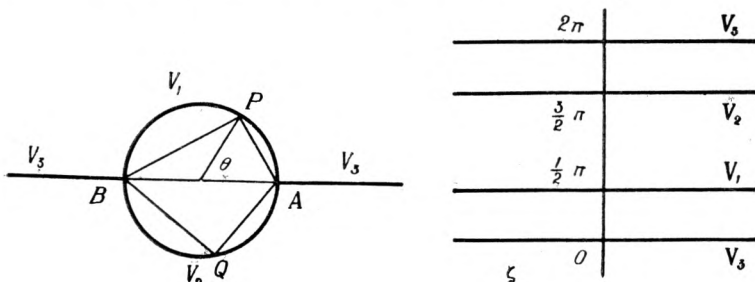


Рис. 54.

осью симметрии Ox , стягивающиеся к точкам A и B , ортогональные к окружностям $\eta = \text{const}$.

Можно выписать их уравнение

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} = e^{2\xi/c},$$

$$\frac{x^2 + y^2 + a^2}{2ax} = -\frac{e^{2\xi/c} + 1}{e^{2\xi/c} - 1} = -\text{cth} \frac{\xi}{c},$$

$$x^2 + y^2 + 2ax \text{cth} \frac{\xi}{c} + a^2 = 0.$$

Итак, установлено взаимно однозначное соответствие между всей плоскостью z и бесконечной полосой ширины 2π , параллельной оси ξ в плоскости ζ .

Это преобразование чрезвычайно полезно в задачах, где имеются цилиндры с общей плоскостью симметрии.

13.071. Длинный полый металлический цилиндр, уравнение которого $r = a$, разделен на две части плоскостью $\sin \theta = 0$. Части чуть раздвинуты и заряжены до потенциалов V_1, V_2 . Две тонкие металлические пластинки с потенциалом V_3 занимают положения $r > a, \theta = 0$ и $r > a, \theta = \pi$. С помощью преобразования $\zeta = \ln(z - a) - \ln(z + a)$ или как-нибудь иначе показать, что

поверхностная плотность заряда на внутренней стороне цилиндра равна

$$\frac{V_1 - V_2}{4\pi^2 a \sin \theta},$$

и найти поверхностную плотность на внешней стороне цилиндра и на обеих сторонах пластин.

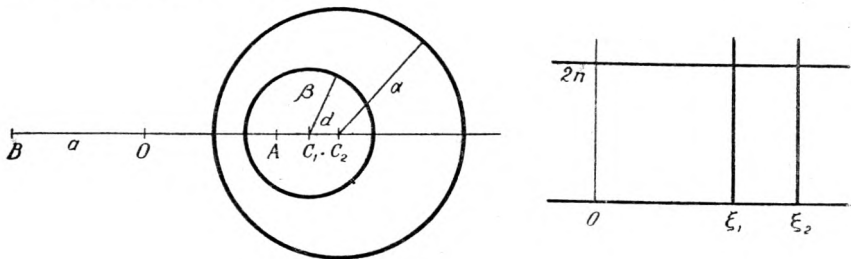


Рис. 55.

Указанное преобразование переводит верхние стороны лучей $-\infty B$ и $A \infty$ в прямую $\eta = 0$, а нижние — в $\eta = 2\pi$. Полуокружность BPA (см. рис. 54) переходит в $\eta = \pi/2$, PQA — в $\eta = 3\pi/2$. Тем самым мы свели исходную задачу к задаче о параллельных плоских конденсаторах. Сначала рассмотрим средний конденсатор между $\eta = \pi/2$ и $\eta = 3\pi/2$. Там поверхностная плотность для плоскости ξ равна

$$\pm \frac{(V_1 - V_2)}{4\pi \cdot \pi}.$$

Следовательно, на внутренней стороне цилиндра в плоскости z она равна

$$\pm \frac{V_1 - V_2}{4\pi^2} \left| \frac{d\xi}{dz} \right|.$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dz} &= \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} = \frac{2a}{(z-a)(z+a)}, \\ \left| \frac{d\xi}{dz} \right| &= \frac{2a}{r_1 r_2} = \frac{2a}{4a^2 \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta} = \frac{1}{a \sin \theta}. \end{aligned}$$

Тогда поверхностная плотность равна

$$\frac{V_1 - V_2}{4\pi^2 a \sin \theta}.$$

Аналогично на внешней стороне цилиндра она равна

$$\frac{V_1 - V_3}{2\pi^2 a \sin \theta}, \quad \frac{V_2 - V_3}{2\pi^2 a \sin \theta},$$

на верхней стороне плоскостей

$$-\frac{V_1 - V_3}{\pi^2} \frac{a}{x^2 - a^2},$$

а на нижней

$$-\frac{V_2 - V_3}{\pi^2} \frac{a}{x^2 - a^2}.$$

13.072. Емкость конденсатора, образованного двумя неконцентрическими окружностями. Положим $c=1$, и пусть эти окружности имеют радиусы α и β ($\alpha > \beta$), а расстояние между центрами d . Запишем их одной формулой

$$(x + a \operatorname{cth} \xi)^2 + y^2 = a^2 \operatorname{csch}^2 \xi,$$

причем

$$\alpha = a \operatorname{csch} \xi_1, \quad \beta = a \operatorname{csch} \xi_2,$$

$$d = a (\operatorname{cth} \xi_1 - \operatorname{cth} \xi_2) = a \frac{\operatorname{sh} (\xi_2 - \xi_1)}{\operatorname{sh} \xi_1 \operatorname{sh} \xi_2}.$$

Тогда

$$\operatorname{sh} (\xi_2 - \xi_1) = \frac{da}{a\beta}.$$

Пусть $OC_1 = X$, $OC_2 = X + d$; тогда, поскольку касательные из точки O ко всем кругам равны a , то

$$a^2 = X^2 - \beta^2 = (X + d)^2 - \alpha^2.$$

Отсюда

$$2dX = \alpha^2 - \beta^2 - d^2,$$

$$a^2 = \frac{(\alpha^2 - \beta^2 - d^2)^2}{4d^2} - \beta^2,$$

$$\operatorname{ch}^2 (\xi_2 - \xi_1) = \frac{a^2 d^2}{\alpha^2 \beta^2} + 1 = \frac{(\alpha^2 - \beta^2 - d^2)^2 - 4d^2 \beta^2 + 4\alpha^2 \beta^2}{4\alpha^2 \beta^2},$$

$$\operatorname{ch} (\xi_2 - \xi_1) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - d^2}{2\alpha\beta}.$$

Теперь, если у нас был конденсатор, образованный двумя проводящими цилиндрами, в плоскости z , то в плоскости ζ получится конденсатор из двух плоских параллельных пластин с расстоянием $\xi_2 - \xi_1$. Его емкость на единицу длины равна

$$\frac{2\pi}{4\pi |\xi_2 - \xi_1|} = \frac{1}{2 \operatorname{Arch} [(\alpha^2 + \beta^2 - d^2)/2\alpha\beta]},$$

и мы получили емкость в плоскости z .

13.073. Преобразование **13.07** можно записать и так

$$\frac{z-a}{z+a} = e^{\xi/c},$$

или

$$\frac{z}{a} = \frac{e^{\xi/c} + 1}{1 - e^{\xi/c}} = -\operatorname{cth} \frac{\xi}{2c}.$$

Здесь c и a могут быть комплексными; можно рассмотреть и более общее преобразование

$$\xi = c \ln \frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

Если c взять чисто мнимым, то это все равно, что повернуть ось в плоскости ξ на 90° .

Это преобразование связано с некоторыми важнейшими двумерными задачами. Так, в электростатике, если две параллельные проволоки несут заряд λ на единицу длины, то комплексный потенциал равен

$$w = -\lambda \ln \frac{z-a}{z+a},$$

откуда сразу следует, что эквипотенциальные поверхности — это круговые цилиндры с общей плоскостью симметрии, стягивающиеся к обеим проволокам, а силовые линии образуют ортогональное к этим цилиндрам семейство окружностей. Точно так же в гидродинамике, если из двух параллельных линий одна — источник, а другая — сток жидкости равной мощности, то аналогичные цилиндры будут поверхностями постоянного ϕ , а ортогональные поверхности — линиями тока. То же происходит и при движении жидкости, порожденном парой линейных вихрей, и в магнитном поле пары электрических проводов.

13.08. Софокусные конические сечения. $z = c \operatorname{ch} \xi$ (c вещественно):

$$x + iy = c(\operatorname{ch} \xi \cos \eta - i \operatorname{sh} \xi \sin \eta),$$

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta.$$

Тогда кривые $\xi = \operatorname{const}$ суть

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = 1.$$

Это эллипсы с фокусами $(\pm c, 0)$ и полуосями $c \operatorname{ch} \xi$, $c \operatorname{sh} \xi$, а η — угол, который образует радиус-вектор с большой осью эллипса.

Если $\eta = \text{const}$, то

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1.$$

Это гиперболы с теми же фокусами.

Заметим, однако, что одно значение η не дает целой гиперболы. Если $0 \leq \eta < \frac{\pi}{2}$ и ξ пробегает от $-\infty$ до $+\infty$, то мы получаем правую ветвь; если же $\frac{\pi}{2} < \eta \leq \pi$, то левую. С другой стороны, значения $+\xi$ и $-\xi$ дают один и тот же эллипс, когда η пробегает от 0 до 2π .

В задачах эллиптические границы встречаются гораздо чаще, чем гиперболические. Поэтому наложим ограничение $\xi \geq 0$ и тогда при $0 \leq \eta < 2\pi$ получим целый эллипс.

Но теперь одно значение η уже не даст нам даже целой ветви гиперболы; например, если угол η острый, то, чтобы получить части гиперболы, лежащие в четырех четвертях, надо взять значения η , $\pi - \eta$, $\pi + \eta$, $2\pi - \eta$.

При этом ограничении полуполоса ширины 2π в плоскости ξ преобразуется во всю плоскость z . Функция $\operatorname{Arch}(z/c)$ многозначна, но мы делаем ее однозначной, проведя разрез в плоскости z от $(-c, 0)$ до $(\infty, 0)$. Верхняя половина плоскости z переходит в полуполосу $\xi > 0$, $0 \leq \eta \leq \pi$, а нижняя — в $\xi > 0$, $\pi \leq \eta < 2\pi$. Если $\xi = 0$, то z движется от $(c, 0)$ до $(-c, 0)$ и обратно, когда η возрастает от 0 до 2π .

Конформность отображения нарушается при $z = \pm c$, и угол π между частями оси x , выходящими из этих точек, переходит в $\pi/2$ на плоскости ξ .

Пусть теперь нам надо найти решение $\nabla^2 \varphi = 0$ в области, ограниченной одним из наших эллипсов. Чтобы φ была однозначной, необходимо, чтобы она была периодичной с периодом 2π ; иначе она причинит нам такие же неудобства, как жилет, у которого петли расположены в местах, не соответствующих пуговицам. Этому условию удовлетворяет любая линейная комбинация $e^{n\xi}$ и $e^{-n\xi}$, где n — целое.

В случае, если нашу область пересекает прямая, проходящая через фокусы, требуется еще одно условие. Ведь наш разрез не имеет физического смысла: это только математический прием, и на нем не должно быть разрывов физических величин. Следовательно, не только φ , но и $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$ должны быть непрерывны при переходе через разрез, т. е. при замене η на $2\pi - \eta$. Но при удалении от линии фокусов

в обе стороны по перпендикуляру к ней ξ возрастает, а y возрастает вверху и убывает внизу. Далее, при $\xi \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = c \left(\operatorname{sh} \xi \cos \eta \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \operatorname{ch} \xi \sin \eta \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \rightarrow c \sin \eta \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \\ &= c \left(-\operatorname{ch} \xi \sin \eta \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \operatorname{sh} \xi \cos \eta \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \rightarrow -c \sin \eta \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \end{aligned}$$

и, если мы хотим, чтобы $\partial \Phi / \partial x$, $\partial \Phi / \partial y$ не изменялись при замене η на $2\pi - \eta$ при $\xi = 0$, $\partial \Phi / \partial \xi$ и $\partial \Phi / \partial \eta$ должны быть равны 0 или менять знак.

Допустимыми решениями являются поэтому $\operatorname{ch} n\xi \cos n\eta$, для которых $\partial \Phi / \partial \xi = 0$ при $\xi = 0$, а $\partial \Phi / \partial \eta$ меняет знак, и $\operatorname{sh} n\xi \sin n\eta$, для которых $\partial \Phi / \partial \eta = 0$, а $\partial \Phi / \partial \xi$ меняет знак. Решения $\operatorname{ch} n\xi \sin n\eta$ и $\operatorname{sh} n\xi \cos n\eta$ не годятся для области полного эллипса. Они были бы пригодны, если бы по линии фокусов шел барьер, при переходе через который $\partial \Phi / \partial x$ и $\partial \Phi / \partial y$ претерпевали разрыв.

Для областей, лежащих по внешнюю сторону от границы, в условия задач входят требования к поведению Φ при больших ξ . Возмущение, вызванное присутствием эллиптической границы, должно тогда стремиться к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, и допустимые решения имеют вид $e^{-n\xi} \cos n\eta$, $e^{-n\xi} \sin n\eta$.

Что касается коэффициента растяжения, то

$$\frac{dz}{d\xi} = c \operatorname{sh} \xi,$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{dz}{d\xi} \right|^2 &= c^2 (\operatorname{sh}^2 \xi \cos^2 \eta + \operatorname{ch}^2 \xi \sin^2 \eta) = c^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) = \\ &= \frac{1}{2} c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |z^2| &= c^2 (\operatorname{ch}^2 \xi \cos^2 \eta + \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta) = c^2 (\operatorname{ch}^2 \xi + \sin^2 \eta) = \\ &= \frac{1}{2} c^2 (\operatorname{ch} 2\xi + \cos 2\eta). \end{aligned}$$

13.081. Проводящий эллиптический цилиндр в однородном силовом поле, параллельном большей оси. Потенциал невозмущенного поля равен

$$-Fx = -Fc \operatorname{ch} \xi \cos \eta + \text{const.}$$

Пусть цилиндр задан уравнением $\xi = \alpha$. Тогда добавочный член, вызванный присутствием цилиндра, должен иметь вид

$Ae^{-\xi} \cos \eta$ (при $\xi \rightarrow \infty$ это выражение стремится к нулю) и компенсировать изменения Fx на эллипсе $\xi = \alpha$. Таким образом,

$$Ae^{-\alpha} - Fc \operatorname{ch} \alpha = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{const} - Fc \operatorname{ch} \xi \cos \eta + Fce^{\alpha-\xi} \operatorname{ch} \alpha \cos \eta = \\ &= \text{const} - Fce^{\alpha} \operatorname{sh}(\xi - \alpha) \cos \eta. \end{aligned}$$

Соответственно

$$\psi = \text{const} - Fce^{\alpha} \operatorname{ch}(\xi - \alpha) \sin \eta.$$

Заряд, индуцируемый на части цилиндра, лежащей справа от оси Oy , равен

$$-\frac{1}{4\pi} \left(\psi_{\eta=\frac{1}{2}\pi} - \psi_{\eta=\frac{3}{2}\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} Fce^{\alpha} = \frac{1}{2\pi} F(a+b).$$

13.082. Эллиптический цилиндр с диэлектрической постоянной K в однородном поле, параллельном большей оси. Пусть φ_1 — потенциал внутри цилиндра, а φ_0 — снаружи. Они могут быть либо постоянными, либо иметь вид

$$\varphi_0 = -Fc \operatorname{ch} \xi \cos \eta + Ae^{-\xi} \cos \eta, \quad \varphi_1 = B \operatorname{ch} \xi \cos \eta.$$

Граничные условия суть $\varphi_0 = \varphi_1$, $K \partial \varphi_1 / \partial \xi = \partial \varphi_0 / \partial \xi$ при $\xi = \alpha$, так как $\partial \xi / \partial \eta$ непрерывна. Тогда

$$Ae^{-\alpha} - Fc \operatorname{ch} \alpha = B \operatorname{ch} \alpha, \quad -Ae^{-\alpha} - Fc \operatorname{sh} \alpha = KB \operatorname{sh} \alpha,$$

откуда

$$A = Fc \frac{K-1}{\operatorname{ch} \alpha + K \operatorname{sh} \alpha} \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha e^{\alpha},$$

$$B = -Fc \frac{e^{\alpha}}{\operatorname{ch} \alpha + K \operatorname{sh} \alpha}.$$

13.083. Вращающийся эллиптический цилиндр, наполненный жидкостью. Пусть ω — угловая скорость. Компоненты скорости на границе цилиндра — $(-v_y, v_x)$. Если ψ — функция тока, то

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v,$$

и, следовательно, на границе

$$\psi = \int (u dy - v dx) = -\frac{\omega}{2} |z|^2 = -\frac{1}{4} \omega c^2 (\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\eta).$$

Здесь первый член — константа, не имеющая значения, поэтому можно взять

$$\psi = -\frac{1}{4} \omega c^2 \frac{\operatorname{ch} 2\xi}{\operatorname{ch} 2\alpha} \cos 2\eta,$$

$$\varphi = \frac{1}{4} \omega c^2 \frac{\operatorname{sh} 2\xi}{\operatorname{ch} 2\alpha} \sin 2\eta = \frac{\omega}{\operatorname{ch} 2\alpha} xy.$$

Итак, для внутренних точек

$$(u, v) = \frac{\omega}{\operatorname{ch} 2\alpha} (y, x).$$

Кроме того, поскольку $\operatorname{th} \alpha = \frac{b}{a}$, то

$$\operatorname{ch} 2\alpha = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

Таким образом, как и следовало ожидать, если цилиндр круговой, внутри него нет никакого движения. Тем, кто сомневается в правильности этого результата, мы предлагаем следующее. Возьмите чашку с водой и положите на воду лист. Если вы будете вращать чашку, лист останется на прежнем месте. Конечно, этот результат верен только для жидкостей с малой вязкостью.

13.09. Обобщенные функции Жуковского. Пусть нам дано уравнение замкнутой кривой в плоскости z' в форме $f(x', y') = 0$. Мы не можем сразу сказать, какое преобразование так переводит эту кривую в окружность $|z| = a$, что при этом внешняя область переходит во внешнюю область. Мы станем, по-видимому, перебирать разные преобразования и смотреть, какие кривые в плоскости z' они переводят в окружность. Было, однако, обнаружено, что многие преобразования, важные для математической физики, принадлежат к очень общему классу преобразований, который мы сейчас рассмотрим в общем виде, прежде чем перейдем к частным случаям. Пусть

$$z' = z \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{z^r}, \quad (1)$$

где a_r могут быть комплексными и $a_0 \neq 0$.

На практике обычно берут $a_0 = 1$. Предположим далее, что этот ряд сходится при $|z| \geq a$ и что dz'/dz не обращается в нуль вне круга C , определенного равенством $|z| = a$. Тогда преобразование конформно для всех z вне круга C . Когда z обходит окружность C , z' описывает замкнутую кривую C' . Если dz'/dz имеет простой корень на C , то на кривой C' в со-

ответствующей точке будет точка возврата. Далее, большая окружность в плоскости z с центром в начале координат соответствует в плоскости z' большой замкнутой кривой, имеющей приблизительно форму круга, и обратно. Если мы будем двигаться из точки большой окружности внутрь по радиусу к центру, то кривая в плоскости z' , соответствующая продолжению этого радиуса вне C , будет иметь в каждой точке единственную касательную. Следовательно, z — тоже однозначная функция z' и выражается степенным рядом вида

$$z = z' \sum_{r=0}^{\infty} \frac{b_r}{z'^r},$$

если z' достаточно велико.

Далее, с помощью преобразования $z = ae^{\xi}$ мы отобразим часть плоскости z' , лежащую вне C' , на полубесконечную полосу $\xi \geq 0$, $0 \leq \eta < 2\pi$ на плоскости ξ . Поэтому если замкнутую кривую в плоскости z' можно представить параметрически в виде

$$x' + iy' = ae^{i\eta} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{a^r} e^{-r\eta} \quad (2)$$

(a действительное, a_r комплексные, $a_0 \neq 0$),

то мы можем сразу заявить, что это кривая, соответствующая $\xi = 0$, из семейства

$$z' = ae^{\xi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{a^r} e^{-r\xi} = z \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{z'^r}. \quad (3)$$

Частные случаи

13.091. Эллипс. Пусть

$$z' = \frac{1}{2} \left[\frac{a+b}{a} z + \frac{a(a-b)}{z} \right]. \quad (4)$$

При $z = ae^{i\eta}$ (на окружности C)

$$z' = x' + iy' = \frac{1}{2} (a+b) e^{i\eta} + \frac{1}{2} (a-b) e^{-i\eta} = a \cos \eta + ib \sin \eta, \quad (5)$$

и кривая C' — эллипс с полуосями a , b и углом η , составленным радиусом-вектором с большой осью эллипса. Это преобразование часто пишут и так

$$z' = z + \frac{a^2}{z}, \quad (6)$$

при этом коэффициент растяжения на бесконечности равен единице; тогда окружности $|z|=a$ соответствуют две стороны отрезка с концами $(2a, 0)$ и $(-2a, 0)$, т. е. по отрезку туда и обратно. Его же можно записать и таким образом

$$\frac{z' + 2a}{z' - 2a} = \left(\frac{z + a}{z - a} \right)^2. \quad (7)$$

13.091a. Если мы положим в функции Осгуда (11.18) $z' = z + \frac{1}{z}$, то получим функцию от z' , ограниченную на всей плоскости z' , но не константу. Это не противоречит теореме Лиувилля потому, что у функции есть целый отрезок из особых точек с концами -2 и 2 .

13.092. Крыло Жуковского. Пусть

$$\frac{dz'}{dz} = \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{z_r}{z} \right), \quad \sum z_r = 0, \quad |z_1| = a, \quad (8)$$

$$|z_r|_{r \neq 1} < a.$$

Тогда C' имеет точку возврата z'_1 , вблизи которой

$$\frac{dz'}{dz} = g(z)(z - z_1), \quad (9)$$

где $g(z)$ аналитична и не равна нулю при $z = z_1$ и, следовательно,

$$z' - z'_1 = \frac{1}{2} g(z_1)(z - z_1)^2 + \dots \quad (10)$$

Поэтому, когда z движется по нашей окружности и проходит точку z_1 , точка z' приближается к z'_1 , а потом возвращается по кривой, имеющей ту же касательную.

Если $n = 2$, $z_1 = a$, $z_2 = -a$, то

$$\frac{dz'}{dz} = 1 - \frac{a^2}{z^2}, \quad z' = z + \frac{a^2}{z},$$

и мы снова приходим к (6). Но если мы возьмем теперь вместо окружности C немного бóльшую, так что $+a$ лежит на ней, а $-a$ внутри, чуть отступя, и подвергнем ее преобразованию, то получим фигуру вроде дубинки с острием при $z' = 2a$, и закругленным концом при z' , немного меньшем, чем $-2a$. Если мы слегка сдвинем центр этой окружности с оси x , фигура в плоскости z' перестанет быть симметричной относительно оси x' . Таким образом, двух параметров достаточно, чтобы получить фигуру, хорошо представляющую форму реального крыла самолета. Самое важное расхождение состоит в том, что крыло

Жуковского всегда имеет точку возврата на заднем конце, в то время как реальное крыло не имеет. Этот недостаток исправляет следующая модификация, принадлежащая Глауэрту.

13.093. Область, ограниченная круговыми дугами. Пусть теперь

$$\frac{z' - (2-n) a \cos \beta}{z' + (2-n) a \cos \beta} = \left(\frac{z - ae^{-i\beta}}{z + ae^{i\beta}} \right)^{2-n},$$

где n и β — малые положительные числа. Это, очевидно, результат применения двух преобразований вида 13.07 с разными

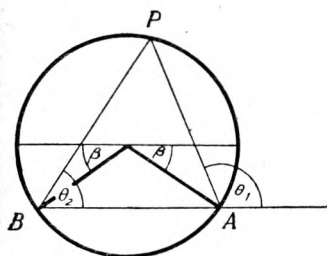


Рис. 56.

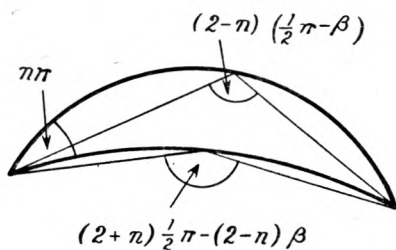


Рис. 57.

значениями c , но теперь нас интересует внешняя область. Обозначим

$$\begin{aligned} \arg(z - ae^{-i\beta}) &= \theta_1, & \arg(z' - (2-n) a \cos \beta) &= \theta'_1, \\ \arg(z + ae^{i\beta}) &= \theta_2, & \arg(z' + (2-n) a \cos \beta) &= \theta'_2, \end{aligned}$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta'_1, \theta'_2$ равны нулю по определению, когда z лежит на продолжении BA , и непрерывно меняются, когда z движется по какой-нибудь кривой вне круга.

Тогда

$$\theta'_1 - \theta'_2 = (2-n)(\theta_1 - \theta_2),$$

для z , лежащих вне C . Во всякой точке P на верхней дуге AB $\theta_1 - \theta_2 = (\pi/2) - \beta$. Точка P' , в которую переходит P , лежит на дуге с концами $\pm (2-n) a \cos \beta$ с вписанным углом $(2-n) [(\pi/2) - \beta]$. Теперь, если P подойдет близко к B и обойдет ее по малой полуокружности, то θ_2 возрастет на π ; следовательно, $\theta'_1 - \theta'_2$ станет равным

$$(2-n) \left(\frac{1}{2} \pi - \beta \right) - (2-n) \pi = - (2-n) \left(\frac{1}{2} \pi + \beta \right).$$

Получился отрицательный угол; прибавим 2π и получим положительный угол, вписанный в нижнюю дугу, обращенный книзу (как в 13.07). Значит, нижняя дуга AB переходит на плоскости z' в дугу со вписанным углом, обращенным книзу,

$$2\pi - (2 - n)\left(\frac{1}{2}\pi + \beta\right) = (2 + n)\frac{1}{2}\pi - (2 - n)\beta.$$

Если это выражение меньше π , то нижняя дуга будет *выгнута вверх*. Вообще фигура в плоскости z' состоит из двух дуг окружностей, пересекающихся под углом $n\pi$.

Если вместо C мы возьмем окружность, проходящую через A , но у которой B лежит внутри (близко от нее), то передняя кромка этого крыла закруглится. Это и есть преобразование Глауэрта. Можно выписать первые члены разложения этой функции в ряд, считая z большим,

$$z' = z + ia \sin \beta + \frac{(1-n)(3-n)}{3} \cos^2 \beta \frac{a^2}{z} + \dots$$

13.09А. Граница — многоугольник. Рассмотрим преобразование

$$\frac{dz'}{dz} = A \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{z_r}{z}\right)^{\alpha_r/\pi}, \quad (1)$$

где A — константа и $|z_r| = a$ при всех r . Пусть

$$z = ae^{i\eta}, \quad z_r = ae^{i\eta_r}. \quad (2)$$

Тогда

$$\frac{dz'}{dz} = Be^{i\eta(1-1/2 \sum \alpha_r/\pi)} \prod_{r=1}^n \left[\sin \frac{1}{2}(\eta - \eta_r)\right]^{\alpha_r/\pi}, \quad (3)$$

где B — другая константа. Следовательно, если $\sum \alpha_r = 2\pi$, то $\arg(dz'/dz)$ постоянен. Вследствие этого, когда z проходит дугу от z_r до z_{r+1} , z' движется по прямолинейному отрезку. Когда z обходит z_r по малой полуокружности, $\eta - \eta_r$ меняет знак и $\arg(dz'/dz)$ изменяется на $\pm \alpha_r$. Итак, кривая C' представляет собой многоугольник с внешними углами $\pm \alpha_r$.

Займемся сначала внешней областью. Тогда z может обходить z_r в положительном направлении, и $\arg(z - z_r)$ при этом *увеличится* на π ; кривые будут обходиться так, как показано на рис. 58.

Внешние углы замкнутого многоугольника всегда в сумме дают 2π . При разложении (1) по степеням $1/z$ появится член

$\sum \frac{\alpha_r z_r}{z}$ и, следовательно, z' будет однозначной, если еще потребовать $\sum \alpha_r z_r = 0$.

Если это условие выполнено и $\sum \alpha_r = 2\pi$, то внешняя область окружности C отображается во внешнюю область многоугольника.

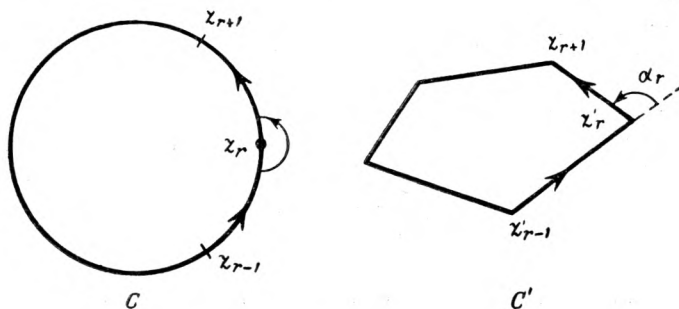


Рис. 58.

Для внутренней области многоугольника это преобразование не годится. Действительно, если мы возьмем внутренность круга, то нам придется обходить z_r в отрицательном направлении, и $\arg(dz'/d\eta)$ при этом будет уменьшаться на α_r . Тем самым мы получим не внутренность того же самого многоугольника, а внешнюю часть его зеркального отражения.

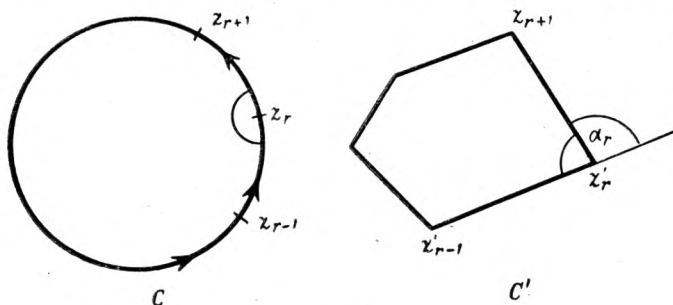


Рис. 59.

С другой стороны, функцию z' от z , определяемую (1), можно продолжать внутрь C через любую дугу $z_r z_{r+1}$. Но тогда придется сделать разрез по всему контуру C , кроме этой дуги, чтобы z' была однозначной; этот разрез придется пересекать, и мы снова получим отрицательный результат.

13.095. Рассмотрим, однако, отображение

$$z' = \sum_{r=1}^{\infty} b_r z^r. \quad (4)$$

(Мы ничего не теряем в общности, опустив константу b_0 справа.) Будем считать, что этот ряд сходится при $|z| \leq a$ и все нули dz'/dz находятся вне этого круга. Как и прежде, C соответствует в плоскости z' замкнутая кривая C' , но теперь малая окружность с центром в нуле переходит в малую кривую, близкую к окружности. Таким образом, внутренность C отображается во внутренность C' . Для случая многоугольника преобразование такого типа известно и представляет значительный интерес. Надо взять

$$\frac{dz'}{dz} = A \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_r}\right)^{-\alpha_r/\pi}, \quad (5)$$

где A постоянно и $|z_r| = a$. Как и прежде, получаем

$$\frac{dz'}{d\eta} = iae^{i\eta} A e^{-\frac{i}{2\pi} \sum \alpha_r (\eta - \eta_r)} \prod \left[-2i \sin \frac{1}{2} (\eta - \eta_r)\right]^{-\alpha_r/\pi} \quad (6)$$

и $\arg(dz'/d\eta)$ постоянен на каждой дуге, если выполнено условие $\sum \alpha_r = 2\pi$. Теперь, однако, когда z описывает полукруг вокруг z_r с *внутренней* стороны, $\arg(z - z_r)$ *уменьшается* на π , а $\arg(dz'/d\eta)$ увеличивается на α_r . Значит, α_r — снова внешние углы, но теперь внутренность C переходит во внутренность C' .

13.096. Следующие преобразования принадлежат разным авторам [3–5].

Можно показать, что преобразование, отображающее внешнюю область окружности во внешнюю область произвольной замкнутой кривой, единственно. Действительно, представим себе, что кривая C' — проводник, несущий определенный заряд на единицу длины. Тогда поле во внешней области определено однозначно, и можно так подобрать заряд, что при больших r потенциал будет вести себя как $\ln r'$, а функция заряда — как θ' . Тогда

$$\varphi + i\psi \doteq \ln z' \quad (r' \text{ большое}).$$

Теперь если $z' = f(z)$ переводит окружность C в кривую C' , то $\ln z$ это такая функция от z' , что ее действительная часть постоянна на C' и, следовательно, должна быть равна φ , если только $z' - z \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Итак,

$$\ln z = \varphi + i\psi, \quad z = \exp(\varphi + i\psi),$$

и определяется однозначно. Фактически преобразование внешней области определено, если решена задача о потенциале, и обратно. Важное достоинство преобразований внешней области этого типа состоит в том, что они имеют коэффициент растяжения, равный 1, и сохраняют ориентацию на бесконечности. Поэтому, если вид комплексного потенциала вблизи бесконечности известен, то простой заменой z' на z мы получаем его же для преобразованной функции.

В случае внутренней области, если φ постоянна на замкнутой кривой и $\nabla^2\varphi=0$ всюду внутри, то φ постоянна всюду внутри и не дает нам никакой информации о z . Можно сделать так, чтобы φ была непостоянной, взяв $\varphi = \ln r' + \varphi'$ внутри C' , где $r' = |z' - c|$ и c лежит внутри C' , $\nabla^2\varphi' = 0$ внутри C' , а $\varphi = 0$ на C' . Тогда если $z = \exp(\varphi + i\psi)$, то $z \doteq z' - c$ при малых $z' - c$ и $|z| = 1$, когда z' лежит на C' . Тогда преобразование переводит C' и его внутренность в единичную окружность и ее внутренность, причем любая наперед заданная точка c внутри C' переходит в точку $z = 0$.

В обоих случаях существование решения задачи о потенциале физически правдоподобно, но аналитически доказать его нелегко.

13.10. Шварцу и Кристофелю принадлежит класс преобразований, близких к описанным, но изученный несколько лучше. Сохраним обозначение z' для преобразованной плоскости. Положим

$$\frac{dz'}{dt} = A \prod (t - t_r)^{-\alpha_r/\pi},$$

где контур в плоскости t — действительная ось, на которой и лежат все t_r . Преобразуется верхняя половина плоскости t . Тогда по мере того, как t обходит t_r (обязательно в отрицательном направлении), $\arg(dz'/dt)$ возрастает на α_r .

Если $\sum \alpha_r = 2\pi$, то мы получаем внутренность многоугольника; если $\sum \alpha_r = -2\pi$, то мы не получаем его внешней области, потому что, когда t опишет большой полукруг, $\arg z'$ возрастет на 3π . Если $\sum \alpha_r = \pi$, то две стороны получатся параллельными и уйдут в бесконечность. Чтобы увидеть связь с **13.095**, положим

$$z + ia = \frac{2a^2}{t - ia}, \quad z = -ia \frac{t + ia}{t - ia}. \quad (2)$$

Получаем

$$\frac{dz'}{dt} = -\frac{2a^2 A}{(t - ia)^2} \prod \left[\frac{2ia(t - t_r)}{(t - ia)(t_r + ia)} \right]^{-\alpha_r/\pi} = C \prod (t - t_r)^{-\alpha_r/\pi}, \quad (3)$$

поскольку $\sum \alpha_r = 2\pi$. Эта формула в точности того же вида, что (1); единственная разница состоит в том, что t_r лежат на действительной оси, а z_r — на окружности.

Преобразование внешней области 13.094 (1) ведет себя иначе. Положим сначала $z = a^2/\zeta$, чтобы отобразить внешнюю область окружности во внутреннюю, и затем заменим в (2) z на ζ . В результате получим

$$z = ia \frac{t - ia}{t + ia}, \quad (4)$$

$$\frac{dz'}{dt} = - \frac{2a^2 A}{(t + ia)^2} \prod \left(\frac{2ia(t - t_r)}{(t - ia)(t_r + ia)} \right)^{\alpha_r/\pi}. \quad (5)$$

Эта функция при $\sum \alpha_r = 2\pi$ имеет двойные полюса в точках $t = \pm ia$. Следовательно, в верхней половине плоскости t есть особая точка, и z' , вообще говоря, не будет однозначной функцией t . Поэтому мы снова нуждаемся в дополнительном условии, как и в случае отображения на внешнюю область окружности. Поскольку тут возникает особая точка, не лежащая на пути интегрирования, это отображение, возможно, менее полезно для задач с внешними областями, чем отображение на внутренность круга.

Чтобы отобразить внутреннюю или внешнюю область заданного многоугольника на верхнюю половину плоскости t , надо взять углы α_r , равными его внешним углам; кроме того, надо подобрать такие значения t_r , чтобы получить стороны нужной длины. Это всегда можно сделать, но доказать, что это можно сделать, легко только для треугольника.

Три из величин t_r в преобразовании Шварца — Кристоффеля для любого многоугольника можно выбрать произвольно. Действительно, если положить (при $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$)

$$t = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{(\gamma s + \delta)^2} \quad t - t_r = \frac{(\alpha\delta - \gamma\beta)(s - s_r)}{(\gamma s + \delta)(\gamma s_r + \delta)},$$

$$\frac{dz'}{ds} = \frac{D'}{(\gamma s + \delta)^2} \prod \left(\frac{s - s_r}{\gamma s + \delta} \right)^{-\alpha_r/\pi},$$

множитель $\gamma s + \delta$ полностью сокращается. Но можно так выбрать $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, чтобы придать трем из s_r любые заданные значения. Обычно их приравнивают к 0, ± 1 или ∞ . То же самое, очевидно, верно и для преобразования внутрь круга. Если многоугольник имеет более трех вершин, то выбор трех из s_r однозначно определяет остальные.

Преобразование внешней области единственно и никаким аналогичным упрощением не поддается. Соотношение $\sum \alpha_r z_r = 0$ эквивалентно двум соотношениям между η_r ; во всех z_r множитель с модулем 1 сократится с множителем в A .

В [6] предложена теория, обобщающая эти преобразования на криволинейные границы.

ПРИМЕРЫ

1. В большом тонком проводящем листе вырезана длинная прямолинейная щель шириной $2a$. Покажите, что, если лист заряжен, поле вблизи щели (вдали от ее концов) можно определить с помощью преобразования $w = c(z^2 - a^2)^{1/2}$. Покажите, что поверхностная плотность заряда σ меняется по закону

$$\sigma = \sigma_0 (1 - a^2/x^2)^{-1/2},$$

где x — расстояние от средней линии щели, и что поверхность постоянного потенциала V определяется уравнением

$$x^2 y^2 = \left(\frac{V}{4\pi\sigma_0} \right)^2 \left[x^2 - y^2 - a^2 + \left(\frac{V}{4\pi\sigma_0} \right)^2 \right]. \quad (\text{M. T., 1943.})$$

2. Покажите, что сопротивление между двумя круговыми электродами равных радиусов b , находящимися в бесконечной плоской пластине, материал которой имеет двумерную проводимость σ , равно приблизительно

$$\frac{1}{\pi\sigma} \ln \frac{c}{b},$$

если расстояние c между электродами велико по сравнению с b .

Пусть теперь проводящая пластина ограничена бесконечным углом AOB . В нее вделаны два электрода с равными радиусами b и центрами P и Q , лежащими соответственно на OA и OB , причем b мало по сравнению с PQ . Пусть угол $AOB = \alpha$ и $OP = OQ = a$. Покажите, что сопротивление между электродами равно приблизительно

$$\frac{2}{\pi\sigma} \ln \frac{2a\alpha}{\pi b}. \quad (\text{M. T., 1941.})$$

3. На прямой $x = y = 0$ распределен заряд с плотностью e , а область $|y| \geq a$ заполнена проводником с потенциалом, равным нулю. Выведите для потенциала ϕ в пространстве между проводниками следующую формулу:

$$\phi + i\psi = -2e \ln \operatorname{th} \frac{\pi z}{4a}, \quad z = x + iy.$$

Покажите еще, что заряд, индуцированный на куске полосы единичной длины поверхности проводника, определяемой условиями $y = a$, $0 < x < b$, равен

$$-\frac{e}{\pi} \operatorname{arctg} \operatorname{th} \frac{\pi b}{4a}. \quad (\text{Prelim. 1937.})$$

4. Решите с помощью формул

$$\frac{\pi z}{2a} = \sqrt{t^2 - 1} - \operatorname{Arch} t + \frac{1}{2} \pi i,$$

$$\frac{\pi w}{2a} = Ut$$

задачу о движении жидкости по одну сторону от ступенчатой границы состоящей из трех кусков $y = -a$ при $x < 0$, $y = a$ при $x > 0$ и $x = 0$ при $-a < y < a$.

Докажите, что если давление на бесконечности равно нулю, то сила давления на единицу ширины поперечной части (т. е. второго куска границы) равна нулю.

5. Нарисуйте, во что перейдут оси координат плоскости z и линии деления координатных углов на углы по 30° после преобразования

$$w = -\frac{1}{z+i}. \quad (\text{I. C., 1942.})$$

6. Рассматривая преобразование $w = \exp z^2$ в области A , определяемой условиями $-1 \leq xy \leq 1$, $x^2 - y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, докажите, что

$$\int_A \int (x^2 + y^2) e^{2(x^2 - y^2)} dx dy = \frac{1}{2} e^2. \quad (\text{I. C., 1936.})$$

7. Найдите семейство кривых, ортогональных ко всем кривым вида $x^3 - 3xy^2 = c$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jeffreys H., Proc. Cambr. Phil. Soc., 25, 272—276 (1929).
2. Jeffreys H., Proc. Roy. Soc., A128, 376—393 (1930).
3. Bickley W. G., Phil. Trans., A228, 235—274 (1929).
4. Morris R. M., Proc. Cambr. Phil. Soc., 33, 474—484 (1937).
5. Morris R. M., Math. Ann., 116, 374—400 (1939).
6. Leathem J. G., Phil. Trans., A215, 439—487 (1915).

ТЕОРЕМА ФУРЬЕ

Я должен войти и выйти.

Бернард Шоу

„Дом, где разбиваются сердца“

14.01. Разложение на гармоники функции, заданной в n равноотстоящих точках. Пусть значения $f(x)$ определены в n равноотстоящих точках оси x , а именно

$$x_r = \frac{2r\pi}{n} = r\lambda \quad (r = 0, 1, \dots, n-1). \quad (1)$$

Коротко обозначим $f(x_r)$ через f_r . Мы хотим определить коэффициенты C_s , так, чтобы

$$f_r = \sum_{s=0}^{n-1} C_s e^{irs\lambda}. \quad (2)$$

Имеем n уравнений относительно n неизвестных. Умножим r -е уравнение на $\exp(-irm\lambda)$, где m — одно из чисел $0, 1, \dots, n-1$, и просуммируем по всем значениям r . Получим

$$\sum_{r=0}^{n-1} f_r e^{-irm\lambda} = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1} C_s e^{ir(s-m)\lambda}. \quad (3)$$

Теперь, если $s \neq m$, то

$$\sum_{r=0}^{n-1} e^{ir(s-m)\lambda} = \frac{1 - e^{in(s-m)\lambda}}{1 - e^{i(s-m)\lambda}} = 0, \quad (4)$$

поскольку $n\lambda = 2\pi$; если же $s = m$, то каждое слагаемое равно 1, а сумма равна n . Отсюда

$$\sum_{r=0}^{n-1} f_r e^{-irm\lambda} = nC_m. \quad (5)$$

Покажем, что эти коэффициенты удовлетворяют исходным уравнениям. Заменяя m на s , имеем

$$\sum_{s=0}^{n-1} C_s e^{its\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} f_r e^{i(t-r)s\lambda}. \quad (6)$$

Сумма по s экспонент $e^{i(t-r)s\lambda}$ равна 0, если $r \neq t$, и равна n , если $r = t$. Следовательно, сумма (6) равна f_t , и (5) является решением.

При $s=0$ C_s просто равно $\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} f_t$. Если m — некоторое значение s , отличное от нуля, то $n-m$ — другое значение. Следовательно, не считая $s=0$, можно объединить члены (2) в пары; при этом

$$C_s e^{its\lambda} + C_{n-s} e^{it(n-s)\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f_r [e^{i(t-r)s\lambda} + e^{i(t-r)(n-s)\lambda}] = \\ = \frac{2}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f_r \cos(t-r)s\lambda. \quad (7)$$

Если n четно, то $s = \frac{1}{2}n$ — одно из возможных значений и встречается только один раз; для этого значения

$$C_s e^{its\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f_r e^{i/2 n i (t-r)\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f_r \cos \frac{1}{2} n (t-r)\lambda, \quad (8)$$

поскольку

$$\sin \frac{1}{2} n (t-r)\lambda = \sin(t-r)\pi = 0.$$

Итак,

$$f_t = A_0 + \sum A_s \cos st\lambda + \sum B_s \sin st\lambda, \quad (9)$$

где суммирование производится по s от 1 до $\frac{1}{2}n$ или $\frac{1}{2}(n-1)$, в зависимости от того, четное n или нечетное; при этом

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f_r, \quad (10)$$

$$A_s = \frac{2}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f_r \cos sr\lambda,$$

$$B_s = \frac{2}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f_r \sin sr\lambda \quad \left(0 < s < \frac{1}{2}n\right), \quad (11)$$

и, если n четно,

$$A_{1/2n} = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f_r \cos \frac{1}{2} nr\lambda = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r f_r, \quad (12)$$

где член с синусом исчезает, поскольку $\sin r\pi = 0$.

Другой способ состоит в том, чтобы прямо взять формулу (9) и вычислить $\sum f_r$, $\sum f_r \cos sr\lambda$, $\sum f_r \sin sr\lambda$. Однако при этом способе суммирование несколько сложнее.

Таким образом, мы точно выразили функцию в виде суммы одного постоянного и $n - 1$ тригонометрического члена. Этот метод называется *гармоническим анализом* и широко применяется при изучении данных наблюдений. Например, в метеорологии давление, температура, влажность и т. д. регистрируются с интервалом в час. По этим значениям на каждый час можно ежедневно получать разложение по гармоникам, содержащее члены с периодами 24, 12, 8, 6, $24/5$, . . . , 2 час. Правда, для последней гармоники данные позволяют определить только член с косинусом, поскольку соответствующий член с синусом обращается в нуль во все моменты времени, когда производятся наблюдения. Чтобы найти член с синусом, нужно производить последовательные наблюдения через более короткие интервалы времени. Если распространить (9) на дробные значения t , то f_t можно рассматривать как интерполирующую функцию. Можно производить анализ ежедневно в течение некоторого промежутка времени и, сравнивая результаты, посмотреть, повторяются ли гармоники и можно ли поэтому делать долгосрочный прогноз. Например, 24-часовой период для температуры является очевидным, но его амплитуда и фаза найдены с помощью гармонического анализа. В то же время суточный или полусуточный периоды для давления составляют примечательные особенности климата во многих районах.

Полезные таблицы с двумя знаками для гармонического анализа составлены Тернером [1] для случаев от 9 до 21 интервала. Его r соответствует нашему $r + 1$.

14.02. Ряды Фурье. Предположим теперь, что $f(x)$ задана для всех значений x от 0 до 2π . Мы можем безгранично увеличивать n , добиваясь согласования нашей интерполирующей функции с $f(x)$ во все большем и большем числе точек, причем интервал берется равным $2\pi/n$, а $r\lambda = x$. Если коэффициенты стремятся при этом к определенным пределам, то эти пределы равны

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$A_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos sx dx, \quad (1)$$

$$B_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin sx dx,$$

при условии, что интегралы существуют. Справедливость формул (1) можно установить другими методами. Используемый нами метод разбиения — только один из путей, которые должны привести к одному и тому же пределу, если интегралы (1) существуют. Достаточно, чтобы сама $f(x)$ была интегрируема, что влечет за собой существование всех остальных интегралов.

Пусть $g_n(x)$ — интерполирующая функция, полученная так же, как в 14.01, для n интервалов. Естественно ожидать, что при неограниченном возрастании n интерполирующая функция должна стремиться в пределе к $f(x)$ для каждого значения x . К сожалению, это трудно доказать непосредственно; более того, это не всегда верно. Пусть $f(x)$ одна из тех особых функций, которые интересуют математиков, — функция, равная 0 для всех значений x , соизмеримых с 2π , и равная 1 для всех x , несоизмеримых с 2π . Тогда поскольку мы используем ее значения только в точках первого множества, то ясно, что коэффициенты $g_n(x)$ всегда будут равны нулю и получающийся в пределе ряд будет обращаться в нуль при всех x . Следовательно, он окажется несогласованным с $f(x)$ при всех x , несоизмеримых с 2π . В этом случае интегралы (1) не будут сходиться в смысле Римана, однако они сходятся по Лебегу, так что ряд с соответствующими коэффициентами представляет функцию, когда значения $x/2\pi$ иррациональны, и не представляет ее, когда они рациональны. Даже если $f(x)$ непрерывна, мы не можем заключить, что $g_n(x) \rightarrow f(x)$, не показав предварительно, что предел существует, а это не всегда верно*).

Проще всего перейти прямо к изучению рядов по синусам и косинусам вида

$$A_0 + \sum (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

где A_n и B_n определяются формулами (1). Такой ряд называется *рядом Фурье* функции $f(x)$. Напомним, что функция $f(x)$, имеющая ограниченную вариацию на интервале (a, b) , не обязана быть непрерывной, но для любого x внутри интервала существуют $f(x-)$ и $f(x+)$, а также $f(a+)$ и $f(b-)$. Далее мы докажем следующее:

1) Если $f(x)$ имеет на $(0, 2\pi)$ ограниченную вариацию, то ее ряд Фурье сходится к

$$\frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)]$$

*) Сформулированные утверждения можно доказать, если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица. См. [2, стр. 130; 3].

в любой внутренней точке интервала и сходится к $\frac{1}{2} [f(0+) + f(2\pi-)]$ в концевых точках.

2) A_n, B_n стремятся к нулю при возрастании n не медленнее, чем $1/n$.

3) Если, кроме того, $f(x)$ непрерывна во всех точках интервала, то сумма ряда Фурье равна $f(x)$ во всех точках интервала.

4) Если $f(x)$ дифференцируема во всех точках интервала, а $f'(x)$ имеет ограниченную вариацию, то коэффициенты убывают по крайней мере как n^{-2} . Аналогичные утверждения справедливы для производных более высокого порядка.

Если несколько производных имеют ограниченную вариацию, то быстрое убывание начальных членов ряда делает ряды полезными при вычислениях. Примером служит уже рассмотренный случай полиномов Бернулли. Приведенные для них в 12.07 разложения являются разложениями Фурье. Для $P_4(t)$ амплитуда четвертого члена разложения составляет $1/256$ от амплитуды первого, так что несколько членов ряда дают хорошее представление об общем поведении функции. Соответствующую частичную сумму можно даже использовать для вычислений, если их достаточно проводить с точностью до трех знаков.

Ряды Фурье находят также важные применения в теории потенциала. Наряду с ними там используются так называемые сопряженные ряды*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin nx - B_n \cos nx).$$

Для сходимости последних нужны несколько более жесткие условия.

Чтобы доказать сформулированные выше утверждения, нам нужна следующая лемма.

14.03. Лемма Римана. Если $\varphi(x)$ — неубывающая функция, ограниченная на отрезке $[a, b]$, то при больших λ

$$\int_a^b \varphi(x) \cos \lambda x dx \quad \text{и} \quad \int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x dx = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

В самом деле,

$$\int_a^b \varphi(x) \cos \lambda x dx = \left[\frac{\varphi(x)}{\lambda} \sin \lambda x \right]_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_{x=a}^b \sin \lambda x d\varphi(x),$$

*) Автор использует введенный Юнгом термин (allied) *союзные*. В русской литературе употребляется название «сопряженные ряды». — Прим. перев.

причем в правой части в случае, когда $\varphi(x)$ не непрерывна, стоит интеграл Стильтьеса. Все элементы $\delta\varphi(x) \geq 0$ и $|\sin \lambda x| \leq 1$; следовательно, если $|\varphi(x)| < A$, то

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \frac{2}{\lambda} A + \frac{2}{\lambda} A = \frac{4A}{\lambda}.$$

Аналогично

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x dx \right| \leq \frac{4A}{\lambda}.$$

Заменяя $\varphi(x)$ на $-\varphi(x)$, мы видим, что доказанный результат верен и в том случае, когда $\varphi(x)$ — невозрастающая функция.

Мы знаем, что если $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ ограниченную вариацию, то $f(x)$ можно представить в виде суммы невозрастающей и неубывающей функций, причем оба слагаемых ограничены на отрезке. Следовательно, для любой функции *ограниченной вариации*

$$\int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

14.04. Суммирование рядов Фурье и сопряженных рядов. Мы можем написать

$$A_n \cos nx + B_n \sin nx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n(t-x) dt, \quad (1)$$

$$A_n \sin nx - B_n \cos nx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n(t-x) dt. \quad (2)$$

Частичные суммы ряда Фурье и сопряженного ряда (до членов, содержащих nx , включительно) обозначим через $S_n(x)$ и $T_n(x)$. Пусть $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $(0, 2\pi)$. Тогда

$$\begin{aligned} S_n(x) + iT_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + e^{-i(t-x)} + \dots + e^{-ni(t-x)} \right] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left[-\frac{1}{2} + \frac{1 - e^{-(n+1)i(t-x)}}{1 - e^{-i(t-x)}} \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left[\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} - i \frac{\cos \frac{1}{2}(t-x) - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} \right] dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Каждая из сумм $S_n(x)$ и $T_n(x)$ сведена к одному интегралу. Мы должны изучить их поведение при $n \rightarrow \infty$. Заметим прежде всего, что подинтегральные функции принимают конечные значения во всех точках, даже при $t = x$. Для $S_n(x)$ исключим сначала произвольно малый отрезок $x - \delta < t < x + \delta$. Тогда на оставшихся отрезках функция $f(t) \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(t-x)$ ограничена и имеет ограниченную вариацию (поскольку это верно для $f(t)$). Следовательно, по лемме Римана вклад, который эти отрезки дают в сумму $S_n(x)$, стремится к 0 с ростом n . При $x - \delta < t < x + \delta$ функция

$$f(t) \left[\frac{1}{\frac{1}{2}(t-x)} - \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} \right]$$

тоже имеет ограниченную вариацию. Следовательно,

$$S_n(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) \frac{\sin(n+1/2)(t-x)}{\frac{1}{2}(t-x)} dt \rightarrow 0. \quad (4)$$

Поскольку δ произвольно мало, отсюда следует, что если ряд сходится, то его сумма зависит только от значений $f(t)$ вблизи $t = x$. Положив

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x) = u, \quad (5)$$

получаем

$$S_n(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-(n+1/2)\delta}^{(n+1/2)\delta} f\left(x + \frac{u}{n+1/2}\right) \frac{\sin u}{u} du \rightarrow 0. \quad (6)$$

При $n \rightarrow \infty$ пределы интегрирования стремятся к $\pm \infty$. А при $t \rightarrow x$ со стороны больших или со стороны меньших значений $f(t) \rightarrow f(x+)$ или соответственно $f(t) \rightarrow f(x-)$. Согласно 1.093, мы можем так выбрать δ , чтобы $f(t)$ по каждую сторону от x изменялась сколь угодно мало. Следовательно, по второй теореме о среднем в форме Дюбуа-Реймона (1.134), положив

$$f(u) = \frac{\sin u}{u}, \quad \varphi(u) = f\left(x + \frac{u}{n+1/2}\right),$$

мы можем сделать интеграл сколь угодно близким к

$$\int_0^{\infty} f(x+) \frac{\sin u}{u} du + \int_0^{\infty} f(x-) \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{2} \pi [f(x+) + f(x-)], \quad (7)$$

и поэтому

$$S_n(x) \rightarrow \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]. \quad (8)$$

Следовательно, ряд сходится в любой точке x , такой, что $f(t)$ стремится к определенным пределам, когда t приближается к x с одной или с другой стороны. Если эти пределы одни и те же и равны $f(x)$, то сумма ряда есть $f(x)$. Если они различны, т. е. $f(t)$ делает в точке x конечный скачок, то сумма ряда равна среднему арифметическому из двух пределов.

При $x=0$ или 2π формулу (4) следует модифицировать; произведя нужные изменения, мы найдем

$$S_n(0) = S_n(2\pi) \rightarrow \frac{1}{2} [f(0+) + f(2\pi-)].$$

Теперь рассмотрим

$$T_n(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\cos \frac{1}{2}(t-x) - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} dt. \quad (9)$$

Последний интеграл сходится, но лишь благодаря присутствию члена $\cos \left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)$, а мы хотим пренебречь им, как остаточным членом. Можно, однако, поступить следующим образом. Сначала, как и раньше, исключим окружающий x отрезок длины 2δ ; вне этого отрезка часть выражения, зависящая от $\cos \left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)$, стремится к 0. Значит, $T_n(x)$ имеет тот же предел, что и

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{2\pi} \right] f(t) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(t-x) dt - \\ & -\frac{1}{2\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) \frac{\cos \frac{1}{2}(t-x) - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} dt, \end{aligned} \quad (10)$$

при этом последнее слагаемое равно

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} [f(x+v) - f(x-v)] \frac{\cos \frac{1}{2}v - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)v}{\sin \frac{1}{2}v} dv. \quad (11)$$

Теперь, если выражение $[f(x+v) - f(x-v)] \operatorname{cosec} \frac{1}{2}v$ имеет ограниченную вариацию при $0 \leq v \leq \delta$, мы можем снова применить лемму Римана и утверждать, что член, содержащий

$\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)v$, стремится к 0. Но тогда, если верхняя грань этого выражения равна M , то

$$\left| \int_0^{\delta} [f(x+v) - f(x-v)] \operatorname{ctg} \frac{1}{2} v \, dv \right| \leq \int_0^{\delta} M \cos \frac{1}{2} v \, dv = 2M \sin \frac{1}{2} \delta. \quad (12)$$

Правую часть можно заранее сделать сколь угодно малой с помощью подходящего выбора δ . Использованное в доказательстве условие выполняется, если $f(t)$ дифференцируема по каждую сторону от x ; при этом вывод остается справедливым, если сама производная разрывна в x . В результате из дифференцируемости $f(t)$ по каждую сторону от x вытекает, что сопряженный ряд сходится и его сумма равна

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_0^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{2\pi} \right] f(t) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (t-x) \, dt = \\ = -\frac{1}{2\pi} P \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (t-x) \, dt, \quad (13) \end{aligned}$$

где P — главное значение интеграла.

14.041. Условие Липшица. Если при некоторых положительных M и α и при $|v| \leq \delta$ выполняется условие

$$|f(x+v) - f(x)| \leq M |v|^\alpha,$$

то, по-прежнему, остается верным вывод о том, что (12) можно сделать произвольно малым с помощью соответствующего выбора δ . При выполнении указанного условия справедливость (8)

немедленно следует из (6) и из того, что $\int_0^{\infty} \sin u \frac{du}{u}$ сходится.

Если некоторая функция удовлетворяет этому условию при $\alpha = 1$ и при каком-нибудь M , не зависящем от x , то отсюда также сразу следует, что эта функция имеет ограниченную вариацию; в самом деле, полная вариация равна верхней грани сумм

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots \\ + |f(2\pi) - f(x_n)| \leq M \sum |x_r - x_{r-1}| = 2\pi M. \end{aligned}$$

Следовательно, достаточным условием для сходимости ряда Фурье к $f(x)$, а сопряженного ряда к (13) в $(0, 2\pi)$ является равномерное выполнение для $f(x)$ условия Липшица с показателем 1; последнее содержит условие ограниченности вариации.

14.05. Комплексная область. Заменяем x на θ , а t на χ и будем рассматривать θ как аргумент комплексного переменного z , модуль которого будем обозначать через a . Мы покажем, что при соответствующих условиях ряд Фурье имеет простую связь с задачей восстановления потенциала, в которой требуется по заданным значениям потенциала φ на окружности $|z| = a$ определить его значения внутри окружности. Мы знаем из теоремы Лорана, что предположение об аналитичности $\varphi + i\psi$ в кольце, содержащем окружность, приводит к разложению Фурье. Сейчас мы увидим, что условие аналитичности не является необходимым.

Ряд Фурье и сопряженный ряд для $f(\theta)$ можно объединить в одной записи

$$S + iT = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\chi) d\chi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(\chi) e^{ni(\theta-\chi)} d\chi, \quad (1)$$

Положим

$$t = ae^{i\chi}, \quad z = re^{i\theta} \quad (r < a) \quad (2)$$

и рассмотрим ряд

$$\varphi + i\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\chi) d\chi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(\chi) \left(\frac{z}{t}\right)^n d\chi. \quad (3)$$

Когда $r \rightarrow a$, его члены переходят в члены ряда (1). Так как ряд равномерно сходится на любом замкнутом интервале, содержащем значения $r < a$, то

$$\begin{aligned} \varphi + i\psi &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\chi) \left[\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{z}{t}\right)^n \right] d\chi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\chi) \frac{t+z}{t-z} d\chi = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\chi) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t}, \quad (4) \end{aligned}$$

где последний интеграл берется по окружности $|t| = a$. Эта функция определена, если потребовать всего лишь, чтобы $f(\chi)$ была интегрируема, и она послужит отправной точкой в нашем исследовании. Мы хотим изучить ее свойства и, в частности,

понять, верно ли, что $\varphi \rightarrow f(\theta)$ при $|z| \rightarrow a$. Положим $\chi - \theta = \vartheta$ и отделим действительную и мнимую части. Получим

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos \vartheta + r^2} f(\theta + \vartheta) d\vartheta, \quad (5)$$

$$\psi = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ar \sin \vartheta}{a^2 - 2ar \cos \vartheta + r^2} f(\theta + \vartheta) d\vartheta. \quad (6)$$

Будучи действительной и мнимой частями функции комплексного переменного z , эти функции являются решениями двумерного уравнения Лапласа всюду внутри окружности, и можно ожидать, что φ будет потенциалом, а ψ — функцией заряда при условии, что φ принимает значения $f(\theta)$ на границе и внутри нет зарядов. Учитывая это, приступим к изучению поведения φ и ψ при $r \rightarrow a$.

Предположим, что когда χ близко к θ , то $f(\chi)$ стремится к пределам $f(\theta -)$ и $f(\theta +)$ при $\chi \rightarrow \theta$ со стороны меньших и соответственно больших значений. Тогда для любого ω можно подобрать некоторое δ , так что

$$\begin{aligned} |f(\theta + \vartheta) - f(\theta +)| &< \omega & (0 < \vartheta \leq \delta), \\ |f(\theta + \vartheta) - f(\theta -)| &< \omega & (-\delta \leq \vartheta < 0). \end{aligned} \quad (7)$$

Далее

$$2\pi\varphi = \left[\int_{\delta}^{2\pi-\delta} + \int_{-\delta}^0 + \int_0^{\delta} \right] \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos \vartheta + r^2} f(\theta + \vartheta) d\vartheta. \quad (8)$$

При $r \rightarrow a$ первый из интегралов стремится к 0. Оценим третий интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} [f(\theta +) - \omega] \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos \vartheta + r^2} d\vartheta &\leq \\ &\leq \int_0^{\delta} f(\theta +) \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos \vartheta + r^2} d\vartheta \leq \\ &\leq \int_0^{\delta} [f(\theta +) + \omega] \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos \vartheta + r^2} d\vartheta. \end{aligned} \quad (9)$$

Если теперь обозначить $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta = u$, то

$$\int_0^{\delta} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos \vartheta + r^2} d\vartheta = \int_0^{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta} \frac{(a^2 - r^2) 2du}{(a-r)^2 + (a+r)^2 u^2} = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{a+r}{a-r} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta \right), \quad (10)$$

что стремится к π при $r \rightarrow a$. Следовательно, при $r \rightarrow a$ второй интеграл в формуле (9) расположен между $\pi [f(\theta +) \pm \omega]$. С помощью доказательства такого же типа, как уже известное нам из теории потенциала, находим, что φ имеет предел при $r \rightarrow a$, равный

$$\lim_{r \rightarrow a} \varphi = \frac{1}{2} [f(\theta -) + f(\theta +)]. \quad (11)$$

Аналогичным образом разобьем промежуток интегрирования для ψ . Промежуток от δ до $2\pi - \delta$ дает

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi - \delta} f(\theta + \vartheta) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \vartheta d\vartheta, \quad (12)$$

а промежуток от $-\delta$ до δ дает

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{\vartheta = -\delta}^{\delta} 4f(\theta + \vartheta) \frac{arudu}{(1+u^2)[(a-r)^2 + (a+r)^2 u^2]} = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta} [f(\theta + \vartheta) - f(\theta - \vartheta)] \left[\frac{u}{1+u^2} - \frac{(a+r)^2 u}{(a-r)^2 + (a+r)^2 u^2} \right] du. \quad (13) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части (13) не зависит от r . Второе меньше по абсолютной величине, чем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta} [f(\theta + \vartheta) - f(\theta - \vartheta)] \frac{du}{u}, \quad (14)$$

что стремится к нулю вместе с δ , если $f(\theta)$ дифференцируема при $\vartheta = 0$. (Фактически это обеспечивается даже условием Липшица: достаточно, чтобы $[f(\theta + \vartheta) - f(\theta - \vartheta)] u^{-\alpha}$ было ограничено для какого-нибудь положительного числа α .) Тогда оба слагаемых в правой части (13) стремятся к 0 вместе с δ , и

$$\psi \rightarrow -\frac{1}{2\pi} P \int_0^{2\pi} f(\theta + \vartheta) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \vartheta d\vartheta, \quad (15)$$

т. е. к выражению, найденному в 14.04 для суммы сопряженного ряда на окружности. Если $f(\theta + \vartheta) - f(\theta - \vartheta)$ ведет себя как $1/(-\ln|u|)$, то интеграл (14) не стремится к 0 и главное значение не существует, однако подобные случаи не важны для физики.

Итак, если ввести множители $(r/a)^n$ и заставить r стремиться к a , то для сумм рядов получаются те же самые значения, что дает и прямое суммирование. Согласно теореме Абеля, этого можно было ожидать: мы ведь знаем, что если степенной ряд сходится в некоторой точке на границе круга сходимости, то сумма его в этой точке равна пределу сумм в точках, стремящихся к данной граничной точке изнутри. Полученные нами сейчас результаты верны, однако, при несколько более широких условиях; в самом деле, в доказательстве предполагалось только, что $f(\theta)$ интегрируема, и не считалось, что $f(\theta)$ имеет ограниченную вариацию. Таким образом, использованная процедура может придать значение сумме ряда на окружности даже в том случае, когда последний не сходится. Тогда нашу теорему можно сформулировать так.

Если $f(\theta)$ интегрируема и

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta,$$

то ряд Фурье

$$\varphi = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

и сопряженный ряд

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\theta - B_n \cos n\theta)$$

при суммировании по методу Абеля дают

$$\varphi = \frac{1}{2} \lim_{\delta, \eta \rightarrow 0} [f(\theta + \delta) + f(\theta - \eta)],$$

где $\delta, \eta > 0$, а θ — произвольное значение, при котором такой предел существует, и

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} P \int_0^{2\pi} f(\chi) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\chi - \theta) d\chi$$

для любого значения θ , где $f(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица.

Польза от теоремы Абеля немедленно подтверждается в широком классе случаев. Условия, сформулированные в **14.04**, достаточны для сходимости на окружности.

Если свойства $f(\theta)$ заранее неизвестны, но известны коэффициенты ряда, то кое-что можно все-таки сказать о его сходимости. По теореме Таубера ряд Фурье сходится, если существует сумма Абеля и nA_n и nB_n стремятся к 0; согласно обобщению, принадлежащему Литтлвуду, достаточно, чтобы nA_n и nB_n были ограничены.

В той части, где эта теорема относится к φ , она носит имя Фурье *). Изучение сопряженного ряда относится к более современным исследованиям (см. [4]). Приведенная формулировка теоремы имеет, по-видимому, наиболее непосредственные физические применения. Известно, что ряд Фурье всегда можно просуммировать во всех точках, где существуют $f(\theta+)$ и $f(\theta-)$ (даже в том случае, когда ряд не является сходящимся), используя метод Чезаро (метод, менее действенный, чем суммирование по Абелю). Однако в задачах теории потенциала тригонометрические множители так связаны со степенями r , что естественно возникает суммирование по Абелю, и при этом функции φ и ψ определяются во внутренних точках интегралами (5) и (6) по заданным значениям φ на границе. Поскольку φ и ψ — сопряженные функции, то с равным успехом можно принять за $f(\theta)$ значения ψ на границе — при том только условии, что ψ дифференцируема; тогда (5) определит ψ во внутренних точках, а (6) определит $-\varphi$. Если в некоторых точках сконцентрированы заряды, то ψ будет иметь там простые разрывы, а φ не определена, поскольку в таких точках не существует представляющее ее главное значение интеграла; при подходе к разрыву ψ функция φ логарифмически стремится к бесконечности. Точечные разрывы φ соответствуют диполям в электростатике, с осями, направленными вдоль контура, заряд в таких точках не определен. Таким образом, возникающие при суммировании особые случаи соответствуют также и физическим трудностям.

Суммирование по Абелю ввел Пуассон.

*) По не совсем ясной причине. Задача о колебаниях струны с дважды дифференцируемым начальным отклонением была решена Даламбером и Эйлером в 1747 г. Д. Бернулли получил решение в виде ряда по синусам в 1753 г. Если решение единственно, то обе формы должны совпадать, а отсюда следует теорема Фурье для рядов по синусам. Фурье в своей книге „Аналитическая теория теплоты“, 1822 г., ссылаясь на указанные работы, дал очень неубедительное доказательство, хотя его книга — блестящая работа по теплопроводности. Первое доказательство теоремы для сравнительно общих условий принадлежит Дирихле и относится к 1829 г.

Мы видели, что функция, аналитическая внутри контура, полностью определяется своими значениями на контуре. Более того, и действительная, и мнимая части удовлетворяют уравнению Лапласа. Следовательно, в соответствии с общей теорией потенциала, каждая из них определяется своими значениями на контуре. Далее, согласно теореме Коши, действительная и мнимая части связаны между собой, в том числе и на контуре. Приведенный выше результат показывает, какова эта связь в случае, когда контур есть окружность. Не нарушая условий Коши — Римана, можно включить либо в φ , либо в ψ аддитивную константу. Мы произвольно приняли эту константу равной нулю в выражении для ψ . Физически это не имеет значения, поскольку обычно нас не слишком интересуют сами значения φ или ψ , а интересуют лишь их приращения при переходе от одного места к другому; поэтому обычно бывает безразлично, какую выбрать константу.

14.051. Ряды по косинусам и по синусам. Предположим, что $f(x)$ такова, что $f(2\pi - x) = f(x)$. Тогда

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad (1)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (2)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = 0. \quad (3)$$

Следовательно, ряд Фурье

$$A_0 + \sum A_n \cos nx \quad (4)$$

представляет $f(x)$ от 0 до π и $f(2\pi - x)$ от π до 2π .

С другой стороны, если $f(2\pi - x) = -f(x)$, то

$$A_0 = 0, \quad A_n = 0, \quad (5)$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad (6)$$

и ряд $\sum B_n \sin nx$, где B_n определены по формуле (6), представляет $f(x)$ от 0 до π и $-f(2\pi - x)$ от π до 2π . Таким образом, у нас имеются два представления для одной и той же функции, справедливые от 0 до π ; однако они представляют

разные функции от π до 2π . Это свойство существенно отличает ряды Фурье от степенных рядов. Разложение функции в ряд можно рассматривать как метод продолжения функции; однако если, например, $f(x) = x$ от $x = 0$ до $x = \pi$, то аналитическое продолжение $f(x)$ равно x при $\pi < x < 2\pi$, продолжение по формуле (4) равно $2\pi - x$, а по формуле (5) равно $-(2\pi - x)$. Все они разумны сами по себе, а уж какое из них предпочесть, зависит от конкретной задачи, в которой должно быть указано, является ли функция аналитической или она симметрична, либо антисимметрична относительно $x = \pi$. Если $f(-x) = f(x) = f(2\pi - x)$ и $f(\pi - x) = -f(x)$, так что функция четна и антисимметрична относительно $1/2\pi$, то

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-1/2\pi} + \int_{-1/2\pi}^0 + \int_0^{1/2\pi} + \int_{1/2\pi}^{\pi} f(x) dx \right], \quad (7)$$

где первый интеграл сокращается со вторым, а третий с четвертым

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \quad \text{при } n \text{ четном}, \quad (8)$$

$$A_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{1/2\pi} f(x) \cos nx dx \quad \text{при } n \text{ нечетном}, \quad (9)$$

$$B_n = 0. \quad (10)$$

Отсюда

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \cos(2m+1)x \int_0^{1/2\pi} f(x) \cos(2m+1)x dx. \quad (11)$$

Примеры. Возьмем $f(\theta) = 1$ при $0 < \theta < \pi$; тогда постоянный член в разложении в ряд по косинусам равен 1, а остальные члены равны 0, и функция оказывается всюду равной 1; так и должно было случиться, поскольку функция, разлагаемая по косинусам, удовлетворяет условиям

$$f(2\pi - \theta) = f(\theta) = f(2\pi + \theta).$$

Напротив, для ряда по синусам мы имеем

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos n\pi) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{4}{\pi n} \quad (12)$$

в зависимости от того, четно n или нечетно. Отсюда

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin \theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta + \frac{1}{5} \sin 5\theta + \dots \right) \quad (0 < \theta < \pi). \quad (13)$$

Выполняя суммирование по Абелю, имеем

$$S = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{2}{\pi i} \left[\left(r e^{i\theta} + \frac{1}{3} r^3 e^{3i\theta} + \dots \right) - \left(r e^{-i\theta} + \frac{1}{3} r^3 e^{-3i\theta} + \dots \right) \right] = \quad (14)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{2}{\pi i} [\text{Arth}(r e^{i\theta}) - \text{Arth}(r e^{-i\theta})]. \quad (15)$$

Но

$$\text{th}(x - y) = \frac{\text{th } x - \text{th } y}{1 - \text{th } x \text{ th } y}, \quad (16)$$

и

$$S = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{2}{\pi i} \text{Arth} \frac{2ir \sin \theta}{1 - r^2} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{2}{\pi} \text{arctg} \frac{2r \sin \theta}{1 - r^2}. \quad (17)$$

В связи с тем, что $\text{arctg } z$ — многозначная функция, мы должны еще указать, что берем значение, стремящееся к 0 вместе с r [это значение выбирается потому, что так ведет себя ряд в правой части (14)]. Далее, если $\sin \theta > 0$, то предел в формуле (17) равен 1, что является проверкой правильности результата. Если же $\sin \theta < 0$, то этот предел равен -1 ; этого и следовало ожидать, поскольку ряд по синусам представляет функцию, антисимметричную относительно π . При $\theta = 0$ или π сумма ряда обращается в 0. Это согласуется с нашим результатом, что в точке разрыва сумма ряда равна полусумме односторонних пределов при подходе к этой точке с противоположных сторон (здесь эти пределы равны $+1$ и -1).

Сопряженный ряд равен

$$\Psi = -\frac{4}{\pi} \left(\cos \theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta + \dots \right),$$

и

$$\begin{aligned} (\varphi + i\Psi)_{r < 1} &= -\frac{4i}{\pi} \left(r e^{i\theta} + \frac{r^3}{3} e^{3i\theta} + \dots \right) = \\ &= -\frac{4i}{\pi} \text{Arth } r e^{i\theta} = -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1 + r e^{i\theta}}{1 - r e^{i\theta}} = \\ &= -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1 + r \cos \theta + ir \sin \theta}{1 - r \cos \theta - ir \sin \theta} = \\ &= -\frac{2i}{\pi} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{(1 + r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta}{(1 - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} + \right. \\ &\quad \left. + i \text{arctg} \frac{r \sin \theta}{1 + r \cos \theta} + i \text{arctg} \frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{2i}{\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} + i \frac{\theta}{2} + i \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \theta \right) \right] = \\ &= 1 - \frac{2i}{\pi} \ln \text{ctg} \frac{1}{2} \theta \quad (\text{при } 0 < \sin \theta < 1). \end{aligned}$$

Мы вновь получаем прежнее значение для φ , а

$$\psi = -\frac{2}{\pi} \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \theta;$$

как и ожидалось, ψ обращается в бесконечность в точка разрыва. При изменении знака θ значение ψ не меняется; следовательно, общий вид зависимости ψ от θ таков:

$$\psi = -\frac{2}{\pi} \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \theta \right|.$$

Мы видим, что точки разрыва φ соответствуют точкам $z = re^{i\theta} = \pm 1$, в которых $\varphi + i\psi$ имеет точки ветвления. Поведение φ и ψ в таких точках связано с тем фактом, что вблизи $z = 0$ действительная часть $i \ln z$ изменяется на $\pm \pi$, если мы совершим пол-обхода вокруг нуля, а мнимая часть равна $\ln r$ и логарифмически стремится к бесконечности.

Далее возьмем

$$f(\theta) = \theta(\pi - \theta), \quad 0 < \theta < \pi.$$

Для ряда по косинусам

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \theta(\pi - \theta) d\theta = \frac{1}{6} \pi^2,$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \theta(\pi - \theta) \cos n\theta d\theta = -\frac{2}{n^2} [1 + (-1)^n],$$

$$f(\theta) = \frac{1}{6} \pi^2 - \cos 2\theta - \frac{\cos 4\theta}{4} - \frac{\cos 6\theta}{9} - \dots$$

Заметим, что, поскольку $f(\theta) \rightarrow 0$ при подходе к $\theta = 0$,

$$\frac{1}{6} \pi^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots;$$

в свое время мы нашли это соотношение, рассматривая числа Бернулли.

Ряд по синусам равен

$$\theta(\pi - \theta) = \frac{8}{\pi} \left(\sin \theta + \frac{\sin 3\theta}{3^3} + \frac{\sin 5\theta}{5^3} + \dots \right).$$

Отметим, что ряд по синусам сходится гораздо быстрее. Три члена его дают приближение с точностью около 0,3% от максимума, тогда как три члена ряда по косинусам дают ошибку, составляющую более 4% максимума. Противоположная особенность была отмечена для функции $f(\theta) = 1$, там было достаточно одного члена ряда по косинусам, а сходимость ряда по синусам была медленной.

В общем случае, если функция на конце интервала стремится к нулю, то сходимость оказывается быстрее для рядов, у которых все члены обращаются здесь в нуль; если производная функции равна нулю, то лучше использовать ряды, члены которых имеют здесь нулевые производные.

Отметим, что если мы положим $\theta = \pi/2$ в ряду по синусам, то получим

$$\pi^3 = 32 \left(1 - \frac{1}{3^3} + \dots \right).$$

Сопряженный ряд будет

$$-\frac{8}{\pi} \left(\cos \theta + \frac{\cos 3\theta}{3^3} + \dots \right),$$

он сходится для всех значений θ . Имеются, однако, особенности на единичной окружности, иначе ряд

$$z + \frac{z^3}{3^3} + \frac{z^5}{5^3} + \dots$$

сходился бы для некоторого значения $|z| > 1$, а этого нет. Из того факта, что ряд по синусам представляет $\pi\theta + \theta^2$ для $-\pi < \theta < 0$, мы видим, что первая производная по θ непрерывна, вторая терпит разрыв, и можно предполагать, что $\Phi + i\psi$ содержит члены вида $(z-1)^2 \ln(z-1)$ и аналогично $(z+1)^2 \ln(z+1)$.

14.06. Интегрирование рядов Фурье. Мы знаем, что равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций представляет непрерывную функцию и его можно интегрировать почленно. Члены ряда Фурье — непрерывные функции, но сумма его, как мы видели, может быть разрывной функцией. Значит, в таких случаях ряд сходится неравномерно. Поэтому естественно спросить, нарушается ли для таких рядов и другое свойство, присущее равномерно сходящимся рядам и состоящее в том, что ряд можно почленно интегрировать. Ответ: нет, не нарушается. *Ряд Фурье всегда можно интегрировать почленно, не требуется даже, чтобы он сходиллся; почленное интегрирование дает интеграл функции, определяющей ряд Фурье.* Пусть $f(x)$ имеет ряд Фурье на отрезке от 0 до 2π

$$a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1)$$

Тогда существует функция

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad (2)$$

потому что если $f(x)$ имеет ряд Фурье, это включает требование ее интегрируемости. Далее из интегрируемости $f(x)$ следует, что $F(x)$ непрерывна, а если $f(x)$ ограничена, то $F(x)$ имеет ограниченную вариацию. Тогда $F(x) - a_0x$ имеет сходящийся ряд Фурье:

$$F(x) - a_0x = A_0 + \sum (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (0 \leq x \leq 2\pi), \quad (3)$$

причем

$$\begin{aligned} \pi A_n &= \int_0^{2\pi} [F(x) - a_0x] \cos nx \, dx = \left[\frac{1}{n} [F(x) - a_0x] \sin nx \right]_0^{2\pi} - \\ & - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin nx [f(x) - a_0] \, dx = - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = - \frac{\pi b_n}{n} \end{aligned} \quad (n \neq 0), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \pi B_n &= \int_0^{2\pi} [F(x) - a_0x] \sin nx \, dx = \left[-\frac{1}{n} [F(x) - a_0x] \cos nx \right]_0^{2\pi} + \\ & + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx [f(x) - a_0] \, dx = - \frac{1}{n} [F(2\pi) - 2\pi a_0] + \frac{\pi a_n}{n}, \end{aligned} \quad (5)$$

и первое слагаемое в правой части (5) равно нулю, так как, согласно определению, $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$. Следовательно,

$$F(x) - a_0x = A_0 + \sum \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right). \quad (6)$$

Но $F(0) = 0$; следовательно,

$$F(x) = a_0x + \sum \left[\frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{b_n}{n} (1 - \cos nx) \right], \quad (7)$$

что представляет собой результат почленного интегрирования ряда Фурье для $f(x)$.

Даже в том случае, когда $f(x)$ не ограничена, но $f(x)$ и $|f(x)|$ имеют несобственные интегралы Римана, теорема остается справедливой.

14.061. Дифференцирование рядов Фурье. Утверждение о дифференцировании справедливо при том условии, что дифференцирование должно выполняться внутри первоначальной окружности; это верно потому, что $\varphi + i\psi$ аналитична при z_0 , лежащем внутри окружности. Далее можно повторить доказа-

тельство того, что предел производной при подходе z_0 к окружности равен производной на окружности и равен продифференцированному ряду на окружности в любой точке, где последний сходится. Но обычно ряд, продифференцированный один или несколько раз, не сходится нигде на окружности, несмотря на то что сама производная может существовать почти во всех точках. Так, например, функция, равная 1 при $0 < \theta < \pi$ и -1 при $\pi < \theta < 2\pi$, дает продифференцированный ряд

$$\frac{4}{\pi} (\cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \dots).$$

Значение этого ряда не очевидно, хотя его и можно просуммировать по методу Абеля; тем не менее производная рассматриваемой функции существует и равна 0 всюду, кроме точки $\theta = \pi$.

В некотором специальном смысле мы можем все же говорить о ряде Фурье для такой производной, ибо даже в том случае, когда обычное определение интеграла теряет смысл, мы часто можем определить „несобственный“ интеграл как предел последовательности интегралов, для которых области интегрирования не содержат ни одной особой точки. Этот процесс как раз применим к такой производной, как рассмотренная выше; мы берем промежутки интегрирования, не включающие значения π , при котором производная не существует, а затем устремляем предел интегрирования к π . В рассматриваемом случае все коэффициенты Фурье, вычисленные таким способом, окажутся равными 0, и ряд Фурье будет равен 0, в согласии с тем, что производная равна нулю во всех точках, кроме одной.

Предположим теперь, что $f(x)$ имеет производную всюду, кроме отдельных точек, и нам нужно найти ряд Фурье, который представляет эту производную во всех остальных точках. Возьмем при $0 < x < \pi$

$$f(x) = A_0 + \sum A_n \cos nx \quad (1)$$

и предположим, что $f'(x)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим у нее разложение Фурье всюду, кроме, быть может, 0 и π . Далее положим

$$f'(x) = \sum b_n \sin nx. \quad (2)$$

Имеем

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} [f(x) \sin nx]_0^{\pi} - \\ &\quad - \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = -nA_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, если $f'(x)$ разлагается в ряд Фурье по синусам при $0 < x < \pi$, то это разложение можно найти путем почленного дифференцирования разложения $f(x)$ по косинусам.

Если при $0 < x < \pi$

$$f(x) = \sum B_n \sin nx, \quad (4)$$

то мы полагаем

$$f'(x) = a_0 + \sum a_n \cos nx. \quad (5)$$

Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(0)], \quad (6)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f'(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} [f(x) \cos nx]_{0+}^{\pi-} +$$

$$+ \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} [(-1)^n f(\pi-) - f(0+)] + nB_n. \quad (7)$$

Таким образом, если $f(x)$ разложена в ряд по синусам, то ряд Фурье для производной $f'(x)$ нельзя отыскать с помощью почленного дифференцирования, если только исходная функция не стремится к нулю в обеих концевых точках. Однако, если мы знаем пределы $f(x)$ при x , стремящемся к 0 и к π , то мы можем найти правильные коэффициенты. Положив

$$f(0+) + f(\pi-) = A,$$

$$f(0+) - f(\pi-) = B,$$

мы можем написать

$$a_0 = -B/\pi,$$

$$a_n = nB_n - 2A/\pi \text{ при } n \text{ нечетном,}$$

$$a_n = nB_n - 2B/\pi \text{ при } n \text{ четном,}$$

и формула (5) будет выполняться всюду, кроме, быть может, 0 и π .

14.062. Жидкость, подогреваемая снизу. Этот результат можно иногда использовать при численном решении дифференциальных уравнений. Если тонкий слой жидкости подогревается снизу, то он не сразу становится неустойчивым, так как вязкость и теплопроводность стремятся уничтожить градиенты скорости и температуры. Если же градиент температуры достаточно велик, то в одних местах возникают восходящие потоки, а в других — нисходящие, и они образуют ячеистую структуру. Температура теперь уже

не постоянна на горизонтальных плоскостях, и простейшее решение имеет вид $\beta z + Z \cos lx \cos my$, где z — высота, x и y — горизонтальные координаты, а Z — функция от z . Известно, что в момент, когда возникает неустойчивость, Z должно удовлетворять безразмерному дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - b^2\right)^3 Z + \mu b^2 Z = 0, \quad (1)$$

в котором ξ пропорционально z , а μ пропорционально β — градиенту температуры до нарушения равновесия. Граничные условия в случае твердых, идеально проводящих тепло границ таковы:

$$Z = 0, \quad Z' = 0, \quad Z''' - b^2 Z' = 0 \quad (\xi = 0, \pi). \quad (2)$$

Нам нужно найти значение μ , при котором это уравнение имеет ненулевое решение, удовлетворяющее этим шести граничным условиям. Поскольку $Z = 0$ на границах, то его естественно искать в виде ряда синусов

$$Z = \sum A_n \sin n\xi. \quad (3)$$

Тогда по 14.061 (7)

$$Z' = \sum n A_n \cos n\xi, \quad (4)$$

отсюда по 14.061 (3)

$$Z'' = - \sum n^2 A_n \sin n\xi. \quad (5)$$

Но $Z'' = 0$ на концах. Следовательно,

$$Z''' = - \sum n^3 A_n \cos n\xi, \quad (6)$$

$$Z^{(4)} = \sum n^4 A_n \sin n\xi. \quad (7)$$

На $Z^{(4)}$ граничных условий не наложено. Поэтому мы полагаем

$$\frac{2}{\pi} [Z^{(4)}(0) + Z^{(4)}(\pi)] = A, \quad (8)$$

$$\frac{2}{\pi} [Z^{(4)}(0) - Z^{(4)}(\pi)] = B \quad (9)$$

и

$$Z^{(5)} = - \frac{B}{2} + \sum [n^5 A_n - (A, B)] \cos n\xi, \quad (10)$$

где A или B берется в зависимости от четности n .

Наконец,

$$Z^{(6)} = - \sum [n^6 A_n - (A, B) n] \sin n\xi \quad (11)$$

и

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - b^2\right)^3 Z + \mu b^2 Z = - \sum (n^2 + b^2)^3 A_n \sin n\xi + \sum [(A, B) n + \mu b^2 A_n] \sin n\xi = 0. \quad (12)$$

Поскольку стоящая слева функция равна нулю, то все коэффициенты ее ряда Фурье должны быть равны нулю:

$$[(n^2 + b^2)^3 - \mu b^2] A_n = \begin{cases} nA & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ nB & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases} \quad (13)$$

У нас есть еще третья пара граничных условий

$$Z''' - b^2 Z' = 0, \quad (14)$$

откуда

$$\sum (n^2 + b^2) n A_n = 0, \quad (15)$$

$$\sum (-1)^n (n^2 + b^2) n A_n = 0. \quad (16)$$

Итак, каждая из сумм с n четными и нечетными в отдельности равна нулю; подстановкой получаем

$$\sum \frac{n^2 (n^2 + b^2)}{(n^2 + b^2)^3 - \mu b^2} A = 0 \text{ при } n \text{ нечетном,} \quad (17)$$

$$\sum \frac{n^2 (n^2 + b^2)}{(n^2 + b^2)^3 - \mu b^2} B = 0 \text{ при } n \text{ четном.} \quad (18)$$

Таким образом, есть два различных класса решений: с нечетными n , симметричные относительно срединной плоскости $\xi = \pi/2$ и с четными, антисимметричные относительно той же плоскости. Мы хотим для каждого класса найти наименьшее μ . Это можно сделать так. Изменения всех членов при изменении μ состоят в умножении на число, убывающее как n^{-6} , а сами члены убывают как n^{-2} . Поэтому если мы сможем вычислить сумму ряда при $\mu = 0$, то добавочный ряд, зависящий от μ , будет убывать как n^{-8} , т. е. очень быстро сходиться. Возьмем сначала решение с нечетными n ; тогда

$$\operatorname{th} \frac{1}{2} \pi b = \frac{4b}{\pi} \left(\frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 9} + \dots \right), \quad (19)$$

откуда

$$\begin{aligned} \sum_{n \text{ нечет}} \frac{n^2}{(n^2 + b^2)^2} &= \frac{1}{8} \pi \left(\frac{d}{db} + \frac{1}{b} \right) \operatorname{th} \frac{1}{2} \pi b = \\ &= \frac{1}{8} \pi \left(\frac{1}{b} \operatorname{th} \frac{1}{2} \pi b + \frac{1}{2} \pi \operatorname{sch}^2 \frac{1}{2} \pi b \right) \equiv T(b). \end{aligned} \quad (20)$$

Это выражение можно вычислить непосредственно как функцию от b , а вычитание дает

$$\sum \frac{n^2 \mu b^2}{(n^2 + b^2)^2 [(n^2 + b^2)^3 - \mu b^2]} + T(b) = 0. \quad (21)$$

Поскольку уже второй член ряда довольно мал, запишем это так:

$$\frac{\mu b^2}{(1 + b^2)^2 [(1 + b^2)^3 - \mu b^2]} + T(b) + K = 0, \quad (22)$$

где

$$K = \sum_{n=3, 5, \dots} \frac{n^2 \mu b^2}{(n^2 + b^2)^2 [(n^2 + b^2)^3 - \mu b^2]}, \quad (23)$$

откуда

$$\mu b^2 = \frac{(1 + b^2)^3}{1 - 1^2/(1^2 + b^2)^2 [T(b) + K]}. \quad (24)$$

Отбросим сначала K , возьмем несколько пробных значений b и вычислим для каждого из них μ . Вот результаты:

b	μ	Δ	Δ^2	Δ^3	Уточненное μ
0,90	17,836	-184			
0,95	17,652	-43	+141		17,587
1,00	17,609	+82	+125	-16	17,537
1,05	17,691	+200	+118	-7	17,613
1,10	17,891				

Теперь вычислим первые два члена K при $b = 0,95$ и $b = 1,00$, используя имеющиеся приближенные значения μ . Они равны 0,0014 и 0,0016 соответственно, тогда как $T(b)$ равны 0,5177 и 0,4581. Пересчитав (22) с учетом этих значений и интерполируя, чтобы вычислить минимум, получаем $\mu = 17,536$ и $b = 0,995$. При этом переменные $a = \pi b$ и $\lambda = \pi^4 \mu$ получают равными соответственно 3,14 и 1708,2. Саутвелл и Пеллю, решая уравнение прямо в комплексных показательных функциях, получили $\lambda = 1707,8$.

Минимальная частота для четных n ищется аналогично; из равенства

$$\sum_{n \text{ четн.}} \frac{b^2}{b^2 + n^2} = \frac{1}{4} \pi \operatorname{cth} \frac{1}{2} \pi b - \frac{1}{2b}, \quad (25)$$

получаем

$$\begin{aligned} T(b) &= \sum \frac{n^2}{(n^2 + b^2)^2} = \frac{1}{8} \pi \left(\frac{d}{db} + \frac{1}{b} \right) \operatorname{cth} \frac{1}{2} \pi b = \\ &= \frac{1}{8} \pi \left(\frac{1}{b} \operatorname{cth} \frac{1}{2} \pi b - \frac{1}{2} \pi \operatorname{csch}^2 \frac{1}{2} \pi b \right), \end{aligned} \quad (26)$$

и, действуя, как прежде, находим

$$\mu b^2 = \frac{(4 + b^2)^3}{1 - 4/(4 + b^2)^2 [T(b) + K]}. \quad (27)$$

где

$$K = \frac{16\mu b^2}{(16 + b^2)^2 [(16 + b^2)^3 - \mu b^2]} + \frac{36\mu b^2}{(36 + b^2)^2 [(36 + b^2)^3 - \mu b^2]} + \dots \quad (28)$$

Если отбросить K , то имеем

b	μ	b	μ
1,5	186,9	1,7	182,8
1,55	185,1	1,75	183,0
1,6	183,9	1,8	183,5
1,65	183,0	1,85	184,4

При $b = 1,70$, $K = 0,0040$, а $T(b) = 0,2213$. Уточненное $\mu = 180,8$.

Случай четного n интересен, как указали Саутвелл и Пеллю, тем, что при нем решения удовлетворяют условиям $Z = Z'' = 0$ при $\xi = \pi/2$, а также $Z^{(4)} - b^2 Z'' = 0$ — условию на свободной поверхности, заменяющему $Z''' - b^2 Z' = 0$. Следовательно, получилось решение для жидкости с идеально теплопроводной жесткой границей снизу и глубиной вдвое меньшей, чем та, которая была в первом случае. Мы получим b и μ , соответствующие той же глубине, что и в первом случае, если умножим их на 2 и 16 соответственно. Умножим еще на π^4 и получим $\lambda = 1100,6$. Саутвелл и Пеллю получили $\lambda = 1100$.

Этому вопросу посвящена обширная литература [5–7]. Возможность такого способа нахождения рядов Фурье для производных функции без особенностей на отрезке указана Голдстейном. Быстрая сходимость обусловлена тем, что ряд $\sum n^{-8}$ убывает очень быстро с самого начала, и тем, что здесь можно объединить все члены, которые не содержат μ , в известную функцию b . Очень помогает учет того, что решение зависит от уравнения шестого порядка с двумя параметрами.

14.07. Явление Гиббса. Речь идет об одной особенности частичных сумм рядов Фурье для функций, имеющих разрывы первого рода. Достаточно рассмотреть функции, равную 1 при $0 < x < \pi$ и -1 при $\pi < x < 2\pi$. Согласно 14.04 (3), сумма членов до $n\pi$ равна

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} dt - \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} - \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t+x)}{\sin \frac{1}{2}(t+x)} \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^{\pi-x} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_x^{\pi+x} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-x}^x - \int_{\pi-x}^{\pi+x} \right] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Можно считать, что в первом интеграле сосредоточены последствия разрыва в точке 0, а во втором — в точке π . При малых x второй интеграл мал, поскольку $\sin \frac{1}{2}\theta$ близок к 1,

когда θ близко к π . Что касается первого, можно написать

$$n + \frac{1}{2} = m, \quad m\theta = \xi,$$

$$S_n \doteq \frac{1}{\pi} \int_0^{mx} \frac{\sin \xi \, d\xi}{m \sin \xi/2m}.$$

Это выражение равно 0 при $x=0$ и возрастает, пока не станет $mx = \pi$. Значит, его максимальная величина есть

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi \, d\xi}{m \sin \xi/2m} \doteq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} \, d\xi,$$

если m велико. Если бы верхний предел был ∞ , то интеграл был бы равен $\pi/2$, а предел 1, чего естественно и ожидать. Однако

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} \, d\xi = \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} \, d\xi + \int_{\pi}^{3\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} \, d\xi + \int_{3\pi}^{5\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} \, d\xi + \dots,$$

причем все члены, кроме первого, отрицательны. Следовательно,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} \, d\xi > 1.$$

В действительности эта величина равна примерно 1,179*). Таким образом, вблизи разрыва при $x=0$ сумма конечного числа членов ряда Фурье заметно превосходит нужное значение. Когда число членов возрастает, эта особенность не пропадает, она просто придвигается ближе к точке разрыва.

Объясняется это просто. Сумма конечного числа членов ряда — это непрерывная функция, и разность между ней и $f(x)$ ортогональна ко всем членам до $\cos nx$ и $\sin nx$. Но в некоторой окрестности нуля при $x > 0$ $S_n(x)$ меньше $f(x)$, потому что $f(x)$ там изменяется скачком, а $S_n(x)$ — нет. Эта разность дает отрицательный вклад в $\int [S_n(x) - f(x)] \sin mx \, dx$ ($m \leq n$), который должен быть погашен положительным вкладом в каком-то другом месте. Приблизительно скомпенсировать ее для всех достаточно малых m можно, взяв $S_n(x) > f(x)$ в прилегающем отрезке.

Такой ряд не удобен для вычислений, и явление Гиббса — это лишь дополнительное предостережение против прямого

*) В некоторых книгах дано неверное численное значение.

использования рядов Фурье в вычислениях, если только коэффициенты не убывают хотя бы, как n^{-3} .

14.08. Теорема Вейерштрасса о приближении многочленами.

Если функция непрерывна на каком-нибудь конечном интервале и на концах его принимает одно и то же значение, то можно найти конечное число гармоник*), таких, что сумма их отличается от этой функции меньше, чем на ϵ , в каждой точке интервала; можно также найти многочлен, обладающий тем же свойством. При доказательстве теоремы Фурье в 14.04 предполагалось, что функция имеет ограниченную вариацию; мы увидим, что это предположение в некотором смысле не является необходимым. Очевидно, что с помощью линейного преобразования независимого переменного можно свести исходный интервал к интервалу от 0 до 2π , и по отношению к новому переменному заданная функция по-прежнему будет непрерывна. Итак, на $f(x)$ накладываются следующие условия: она непрерывна при $0 \leq x \leq 2\pi$, и $f(0) = f(2\pi)$.

Далее, поскольку непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна, то по заданному положительному ω можно так выбрать точки деления $0, x_1, x_2, \dots, x_n, 2\pi$, чтобы верхняя и нижняя грани $f(x)$ на любом интервале отличались друг от друга меньше, чем на ω . На каждом интервале (x_r, x_{r+1}) возьмем линейную функцию, которая в концах x_r и x_{r+1} совпадает с $f(x)$. Тогда эта функция отличается от $f(x)$ не больше, чем на ω , поскольку всюду на интервале (x_r, x_{r+1}) она лежит между верхней и нижней границами $f(x)$.

Таким образом, у нас имеется функция $g(x)$, определенная на каждом интервале разбиения, непрерывная во всех точках, включая точки деления x_r , и ограниченной вариации ($\leq (m+1)\omega$) от 0 до 2π . Следовательно, она может быть выражена с помощью ряда Фурье, и этот ряд нигде не отличается от $f(x)$ больше, чем на ω . Введение $g(x)$ срезает малые, но быстрые флуктуации (такие, как у $x \sin(1/x)$ вблизи $x=0$), из-за которых $f(x)$ могла, не будучи разрывной, иметь бесконечную полную вариацию.

Посмотрим теперь, какой вклад в коэффициенты Фурье дает промежуток от x_r до x_{r+1} . В этом промежутке

$$g(x) = \frac{(x - x_r) f(x_{r+1}) + (x_{r+1} - x) f(x_r)}{x_{r+1} - x_r} = ax + b \text{ (введем такое обозначение);}$$

*) Функций тригонометрической системы. — Прим. перев.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x_r}^{x_{r+1}} g(x) dx = \frac{1}{4\pi} (x_{r+1} - x_r) [f(x_r) + f(x_{r+1})],$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{x_r}^{x_{r+1}} g(x) \cos nx dx &= \frac{1}{n\pi} [(ax + b) \sin nx]_{x_r}^{x_{r+1}} + \frac{a}{n^2\pi} [\cos nx]_{x_r}^{x_{r+1}} = \\ &= \frac{1}{n\pi} [f(x_{r+1}) \sin nx_{r+1} - f(x_r) \sin nx_r] + \\ &+ \frac{f(x_{r+1}) - f(x_r)}{(x_{r+1} - x_r) n^2\pi} (\cos nx_{r+1} - \cos nx_r), \\ \frac{1}{\pi} \int_{x_r}^{x_{r+1}} g(x) \sin nx dx &= -\frac{1}{n\pi} [f(x_{r+1}) \cos nx_{r+1} - f(x_r) \cos nx_r] + \\ &+ \frac{f(x_{r+1}) - f(x_r)}{(x_{r+1} - x_r) n^2\pi} (\sin nx_{r+1} - \sin nx_r). \end{aligned}$$

Если просуммировать вклады, которые дают различные интервалы, то члены, стоящие в круглых скобках сократятся, причем члены, соответствующие точке 2π , сократятся с членами в точке 0. Следовательно,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{r=0}^m \frac{1}{4\pi} (x_{r+1} - x_r) [f(x_{r+1}) + f(x_r)] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^m \frac{f(x_{r+1}) - f(x_r)}{(x_{r+1} - x_r) n^2\pi} [\cos n(x - x_{r+1}) - \cos n(x - x_r)], \end{aligned}$$

где $x_0 = 0$, $x_{m+1} = 2\pi$. Член написанного ряда с номером n меньше некоторой фиксированной константы, умноженной на $1/n^2$. Следовательно, ряд равномерно сходится. Поэтому можно так выбрать n , чтобы сумма членов, кончая теми, которые содержат nx , отличалась при любом x от $g(x)$ меньше, чем на ω , и, значит, от $f(x)$ меньше, чем на 2ω .

Таким образом, мы получили конечное число гармоник. Но $\cos nx$ и $\sin nx$ можно разложить в равномерно сходящиеся степенные ряды. Выпишем для каждой гармоники разложение вплоть до такой степени x , скажем x^s , чтобы общая ошибка, допускаемая при отбрасывании во всех членах степеней старше x^s , была меньше, чем ω . Приведем подобные члены, мы получим полином от x степени s , который нигде не отличается от $f(x)$ больше, чем на 3ω .

Для заданного ε можно взять $\omega = 1/3\varepsilon$; тогда сумма гармоник вплоть до членов с nx нигде не отличается от $f(x)$

больше, чем на $2/3\varepsilon$, а полином нигде не отличается от $f(x)$ больше, чем на ε . Теорема доказана.

Для приближения функции полиномом необязательно, чтобы было $f(0) = f(2\pi)$. В самом деле, можно положить

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} [xf(2\pi) + (2\pi - x)f(0)] + h(x),$$

в этом выражении первое слагаемое — полином, а второе удовлетворяет условиям доказанной теоремы.

Рассмотренная теорема важна, в частности, потому, что она позволяет заменять функции непрерывные, но неограниченной вариации, функциями двух простейших возможных типов, так что при этом ошибка лежит в заданных границах. Кроме того, она заменяет непрерывные, но недифференцируемые функции функциями, которые имеют производные любого порядка; после того как это сделано, многие доказательства упрощаются (см. 14.08а).

Ряды Фурье для $f(x)$ и $g(x)$, очевидно, различны. Однако их первые члены близки между собой. Выражение с помощью полинома, вообще говоря, не совпадает с интерполяционным полиномом, построенным по значениям $f(0), f(x_1), \dots, f(2\pi)$ с помощью разделенных разностей, поскольку члены, которые мы отбрасываем, не равны нулю в точности в этих точках, и для достижения нужной точности, возможно, понадобится сохранить *более*, чем $m+1$ член, если $f(x)$ быстро колеблется. В этом случае численная интерполяция может дать неверный результат из-за большой величины высших производных.

14.08а. Лебег [17] дал прямое доказательство теоремы о приближении многочленами, не содержащее интегрирования. Существуют и другие доказательства, не использующие рядов Фурье. Одно из них, принадлежащее Вейерштрассу, применимо к любому числу измерений. Для него записывается, например, такая формула

$$g(x, y, z) = \frac{\int_D \int \int f(\xi, \eta, \zeta) \exp\{-k[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2]\} d\xi d\eta d\zeta}{\int_D \int \int \exp\{-k[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2]\} d\xi d\eta d\zeta},$$

где f непрерывно в области D . Для любого $\omega > 0$ найдется такое большое k , что будет $|g-f| < \omega$ всюду в заданной области D' , внутренней по отношению к D ; тогда, разлагая показательную функцию в ряд, мы получаем требуемое приближение. См. также [18, 19].

14.081. Обобщение теоремы Вейерштрасса. Если существует

$\int_0^{2\pi} f(x) dx$ и наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ отличаются

на M , то для любых ε, δ можно найти такое конечное число гармоник, что их сумма будет отличаться от $f(x)$ меньше, чем на ε во всех точках промежутка, кроме, может быть, множества интервалов с общей длиной, не превышающей δ , на которых эта сумма будет отличаться от $f(x)$ не более, чем на $M + \varepsilon$; можно также найти многочлен, обладающий тем же свойством.

Мы воспользуемся необходимым и достаточным условиями существования интеграла Римана, принадлежащими Дюбуа-Реймону. При любом ω мы можем заключить в конечное число m подынтервалов с общей длиной δ все разрывы $f(x)$, имеющие скачок $\geq \omega$, причем все эти точки разрыва будут внутренними для этих подынтервалов, за исключением 0 и 2π .

Обозначим совокупность этих интервалов G . Как и в 14.08, разделим оставшуюся часть интервала $(0, 2\pi)$ на n подынтервалов, в каждом из которых колебание $f(x)$ будет меньше ω , и построим кусочно-линейную непрерывную функцию $g(x)$. Эта функция имеет ограниченную вариацию, не превышающую $n\omega + mM$. На m подынтервалах, составляющих G , $|g(x) - f(x)| \leq M$; на остальной части

$$|g(x) - f(x)| < \omega.$$

Теперь мы можем найти сумму конечного числа гармоник, нигде не отличающуюся от $g(x)$ более чем на ω , и многочлен, нигде не отличающийся от $g(x)$ более чем на 2ω . Следовательно, эта сумма гармоник нигде не отличается от $f(x)$ более чем на $M + 2\omega$, а всюду, кроме G , отличается от $f(x)$ не более чем на 2ω . Для многочлена надо только заменить 2ω на 3ω . Взяв $\omega = \varepsilon/2$ или $\varepsilon/3$ (которое не зависит от δ), получаем требуемые результаты.

Следствие. Пусть T — сумма гармоник, обладающая свойствами, которые утверждает теорема; рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} [f(x) - T]^2 dx.$$

Он существует, если $f(x)$ интегрируема по Риману. Тогда

$$I < (M + \varepsilon)^2 \delta + (2\pi - \delta) \varepsilon^2.$$

Пусть η — произвольное положительное число. Мы можем выбрать ϵ так, что $2\pi\epsilon^2 < \eta/2$, а затем δ так, что $(M+\epsilon)^2\delta < \eta/2$. Тогда будет $I < \eta$. Следовательно, если $f(x)$ интегрируема по Риману, то можно найти сумму T конечного числа гармоник, такую, что интеграл I будет сколь угодно мал.

14.09. Приближение методом наименьших квадратов. Теорема Парсеваля. Пусть $S'_n(x)$ — произвольная конечная сумма вида

$$S'_n(x) = A'_0 + \sum_{r=1}^n (A'_r \cos rx + B'_r \sin rx), \quad (1)$$

и пусть

$$S_n(x) = A_0 + \sum_{r=1}^n (A_r \cos rx + B_r \sin rx),$$

где A_r, B_r — коэффициенты Фурье $f(x)$. Тогда если $f(x)$ интегрируема, то

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [f(x) - S'_n(x)]^2 dx = \\ = \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx - 2 \int_0^{2\pi} f(x) S'_n(x) dx + \int_0^{2\pi} [S'_n(x)]^2 dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Интегралы всех произведений вида $\cos rx \sin sx$ равны нулю, а при $r \neq s$ и всех произведений вида $\cos rx \cos sx$ и $\sin rx \sin sx$ также равны нулю. Тогда

$$\int_0^{2\pi} [S'_n(x)]^2 dx = 2\pi A_0'^2 + \pi \sum_{r=1}^n (A_r'^2 + B_r'^2). \quad (3)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx = 2\pi A_0, \quad \int_0^{2\pi} f(x) \cos rx dx = \pi A_r, \\ \int_0^{2\pi} f(x) \sin rx dx = \pi B_r, \end{aligned} \quad (4)$$

ПОЭТОМУ

$$\int_0^{2\pi} f(x) S'_n(x) dx = 2\pi A_0 A'_0 + \pi \sum_{r=1}^n (A_r A'_r + B_r B'_r) \quad (5)$$

и

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S'_n(x)]^2 dx = \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx + 2\pi (A_0'^2 - 2A_0 A'_0) + \\ + \pi \sum_{r=1}^n (A_r'^2 - 2A_r A'_r + B_r'^2 - 2B_r B'_r). \quad (6)$$

Но

$$A_r'^2 - 2A_r A'_r = (A'_r - A_r)^2 - A_r^2, \quad B_r'^2 - 2B_r B'_r = (B'_r - B_r)^2 - B_r^2 \quad (7)$$

и

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S'_n(x)]^2 dx = \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx - 2\pi A_0'^2 - \pi \sum_{r=1}^n (A_r^2 + B_r^2) + \\ + 2\pi (A'_0 - A_0)^2 + \pi \sum_{r=1}^n [(A'_r - A_r)^2 + (B'_r - B_r)^2]. \quad (8)$$

В последнем выражении все члены, содержащие A'_r и B'_r , неотрицательны и обращаются в нуль при $A'_r = A_r$, $B'_r = B_r$. Итак, если искать приближение $f(x)$ среди функций вида (1) и за меру отклонения принять интеграл квадрата их разности, то отклонение будет минимальным, если коэффициенты (1) равны коэффициентам Фурье $f(x)$. Можно сравнить этот результат с нашим первоначальным методом, когда мы искали такие коэффициенты, чтобы тригонометрическая сумма была в точности равна $f(x)$ при определенных значениях x , разделенных равными промежутками. Здесь же мы стремимся не к точному равенству в каких-то определенных точках, но к наилучшему приближению функции в целом, оценивая отличие с помощью интеграла квадрата разности. Наилучшими приближениями оказываются куски разложения в ряд Фурье до любого выбранного номера. Аналогичные результаты получены для всех ортогональных систем функций, не только для рядов Фурье.

Пусть снова $S'_n(x)$ — это функция T , определенная в следствии к 14.081, так что для любого ε

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S'_n(x)]^2 dx < \varepsilon. \quad (9)$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx < \varepsilon, \quad (10)$$

и, следовательно,

$$\left| \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx - 2\pi A_0^2 - \pi \sum_1^n (A_r^2 + B_r^2) \right| < \varepsilon. \quad (11)$$

Итак,

$$A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n (A_r^2 + B_r^2) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx. \quad (12)$$

Это теорема Парсеваля.

Заметим, что если на $f(x)$ не наложено никаких других ограничений, кроме интегрируемости по Риману, то она может иметь бесконечную вариацию и разрывы второго рода; тогда ее ряд Фурье может расходиться и даже не быть суммируемым по Абелю для некоторых значений x .

Если существуют интегралы $f(x)$ и $\{f(x)\}^2$, хотя бы несобственные, (8) сохраняет силу, и

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx - 2\pi A_0^2 - \pi \sum_{r=1}^n (A_r^2 + B_r^2). \quad (13)$$

Здесь левая часть неотрицательна и по предположению об интегрируемости $\{f(x)\}^2$ конечна. Следовательно, сумма из положи-

тельных членов $\sum_{r=1}^n (A_r^2 + B_r^2)$ не может возрастать безгранично при возрастании n . Итак, если функция и ее квадрат имеют несобственные интегралы, то ряд из квадратов ее коэффициентов Фурье сходится.

Отсюда следует, что если $f(x)$ и ее квадрат интегрируемы на $[0, 2\pi]$, хотя бы в несобственном смысле, то $\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$

и $\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$ стремятся к нулю. Этот факт положен в основу некоторых современных подходов к теореме Фурье и интерполирования тригонометрическими многочленами [2, 8].

14.10. Гармонический анализ; случай усредненных данных. В практических задачах часто встречается модификация задачи

из 14.01, при которой известны не сами значения $f(x)$ при $x_r = r\lambda$, а усредненные значения $f(x)$ по промежуткам с центрами в точках x_r . Например, при изучении суточных колебаний атмосферного давления естественно снимать показания барометра каждый час, что приводит к условиям 14.01. А при изучении скорости ветра считаются обороты анемометра за каждый час, откуда мы узнаем средние значения. К ним можно было бы применить те же самые формулы, но при этом мы получили бы не лучшее приближение гармонических компонент самого ветра. Фактически мы берем среднее e^{isx} по промежутку от $(r - \frac{1}{2})\lambda$ до $(r + \frac{1}{2})\lambda$, т. е.

$$\frac{1}{\lambda} \int_{(r-\frac{1}{2})\lambda}^{(r+\frac{1}{2})\lambda} e^{isx} dx = \frac{2 \sin \frac{1}{2} s\lambda}{s\lambda} e^{isr\lambda},$$

и, приближая гармониками средние значения, мы находим коэффициенты с ошибкой в $(2/s\lambda) \sin \frac{1}{2} s\lambda$ раз. Следовательно, коэффициенты, полученные из средних значений, надо разделить на эту величину, чтобы получить гармоническое разложение $f(x)$.

14.101. Эмпирические периодики; периодограмма. В 14.01 сумма гармоник приравнивалась точно к значениям функции в некотором конечном числе точек. Значения этой суммы вне исходного отрезка (нужные, например, для прогнозирования), периодичны, так как все слагаемые периодичны. Однако функция может иметь период, не укладывающийся целое число раз в исходном интервале, и нам может понадобиться определить ее амплитуду, фазу и, может быть, даже сам период. Например, в теории приливов из общих соображений известно, что должны быть гармонические компоненты, периоды которых можно вычислить, зная периоды вращения и движения Земли по орбите и период обращения Луны вокруг Земли, а их амплитуды и фазы нельзя вычислить из-за сложной формы мирового океана. Можно установить измеритель высоты прилива в каждой гавани, где нужно знать наперед уровень воды. Он регулярно записывает уровень воды, например, каждый час. Пользуясь этими данными, можно определить амплитуду и фазу каждой компоненты, а это позволяет прогнозировать уровень воды. Года наблюдений достаточно, чтобы знать уровень воды вперед на любой срок (если, конечно, гавань не заносит песком или илом). Этот полумпирический метод, при котором периоды

определяются данными астрономии, а амплитуды и фазы — прямыми наблюдениями, впервые предложил Дж. Г. Дарвин, а ныне систематически применяет Ливерпульский институт приливов под руководством Праудмана и Дудсона.

Если бы речь шла только об одной гармонике, вычисления были бы простыми; чтобы найти коэффициенты в выражении $a + A \cos \gamma t + B \sin \gamma t$, достаточно трех наблюдений, хотя для большей точности можно собрать больше данных и применить метод наименьших квадратов. В действительности приливное движение содержит 7 лунных и 7 солнечных компонент, периоды которых несонизмеримы, и приходится применять метод последовательных приближений. Выбирается интервал с длиной как можно более близкой к общему кратному периодов *двух* приливных волн *) с наибольшими амплитудами, и приближения для коэффициентов берутся из формулы

$$A \sum \cos^2 \gamma t = \sum f(t) \cos \gamma t, \quad B \sum \sin^2 \gamma t = \sum f(t) \sin \gamma t,$$

где суммирование производится по выбранному интервалу наблюдений. При таком выборе интервала члены, входящие в $f(t)$ для пары гармоник, влияют пренебрежимо мало на значения соответствующих коэффициентов второй пары. Затем вклады от этих двух наибольших компонент вычитаются из результатов наблюдения, и выделяется новая пара периодов. Поскольку данные для определения последних, вообще говоря, неточны, то может возникнуть необходимость после определения всех членов, что в принципе возможно, начать сначала и, пользуясь невязками, вычислить поправки ко всем членам.

В тех случаях, когда период неизвестен, но его существование подозревается, вычисления гораздо труднее. Допустим, что в 14.01

$$f(x) = C \exp i(\gamma x + \alpha),$$

где C и α действительные, а γ не целое. При нахождении C_m из 14.01 (5) мы получаем

$$\begin{aligned} nC_m &= Ce^{i\alpha} \sum_{r=0}^{n-1} \exp \left[\frac{2\pi i r}{n} (\gamma - m) \right] = Ce^{i\alpha} \frac{1 - \exp [2\pi i (\gamma - m)]}{1 - \exp [2\pi i (\gamma - m)/n]} = \\ &= C \frac{\sin \pi (\gamma - m)}{\sin \pi (\gamma - m)/n} \exp \left[i\alpha + \pi i \left(1 - \frac{1}{n} \right) (\gamma - m) \right]. \end{aligned}$$

Очевидно, величина $|C_m|$ наибольшая, когда число m как можно ближе к γ . Если принять за m целую часть γ , так что $m + 1$

*) Т. е. так, чтобы узлы обеих волн в начале и в конце интервала по возможности совпадали. — Прим. ред.

будет наименьшим целым числом, большим γ , то соответствующие гармоники проявят себя тем, что будут иметь самые большие коэффициенты, а их фазы при $x=0$ будут приблизительно противоположны. Выделив действительную часть и положив $f = C \cos(\gamma x + \alpha)$, мы для наибольших членов получаем выражение

$$C \frac{\sin \pi (\gamma - m)}{\sin \pi (\gamma - m)/n} \cos \left[mx + \alpha + \pi \left(1 - \frac{1}{n} \right) (\gamma - m) \right] + \\ + C \frac{\sin \pi (m + 1 - \gamma)}{\sin \pi (m + 1 - \gamma)/n} \cos \left[(m + 1)x + \alpha + \pi \left(1 - \frac{1}{n} \right) (\gamma - m) - \pi \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right].$$

Отношение амплитуд определяет γ , C известно. По фазам обоих членов находим α .

Такое исследование часто применяется для выявления периодичностей в опытных данных; быть может, наиболее известным случаем является нахождение периода для солнечных пятен. На практике дело усложняется нерегулярными возмущениями, из-за которых опытная кривая не является простой гармоникой, хотя в большинстве случаев ее удастся приблизить суммой небольшого числа членов гармонического ряда. Пусть в результате наблюдения получено n чисел y_r со средним арифметическим A_0 ; положим

$$\sum (y_r - A_0)^2 = (n - 1) s^2.$$

Но каждый коэффициент ряда Фурье A_m или B_m ($m \geq 1$) дает вклад $\frac{1}{2} A_m^2$ или $\frac{1}{2} B_m^2$ в среднее квадратичное, а всего их $n - 1$. (Легко убедиться, что все произведения сокращаются.) Тогда среднее всех $\frac{1}{2} A_m^2$ или $\frac{1}{2} B_m^2$ равно $s^2/(n - 1)$.

Это было бы верно, даже если бы y_r были выбраны случайно. Следовательно, набор гармонических коэффициентов сам по себе не позволяет ничего предсказывать: чтобы прогноз был возможен, нужно, чтобы какие-то гармоники имели амплитуды, квадраты которых были бы много больше $4s^2/(n - 1)$. В описанном только что методе лучше полагаться только на самые большие коэффициенты, так как они пропорционально меньше подвержены влиянию возможных нерегулярных отклонений.

Оценивать погрешность, вызываемую этими отклонениями, нужно смотря по обстоятельствам [9—11]. Часто бывает полезно поделить всю запись на равные куски и исследовать каждый отдельно. Если каждый кусок содержит n чисел, то фаза гармоники с периодом n/γ увеличивается от куска к куску на 2π , а если при анализе мы берем члены с $\cos mx$ и $\sin mx$ вместе, то фаза будет возрастать на $2\pi(\gamma - m)$. Поэтому поиски фазы

для нескольких кусков дадут систему линейных уравнений для γ и α , которую можно решать методом наименьших квадратов, а невязки дают оценку неопределенности. Без каких-либо предосторожностей такого рода и при отсутствии теоретического обоснования периодичности, найденные путем разложения в ряд Фурье, не заслуживают доверия, так как по многим причинам периоды могут быть найдены неверно; едва ли десятая часть из тех периодов, о существовании которых известно, статистически обоснована.

14.11. Интегральная теорема Фурье; предварительное об- суждение. Запишем теорему Фурье в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos n(u-x) dx \quad (1)$$

(нужные для этого условия указаны выше) и положим

$$x = \frac{X}{T}, \quad u = \frac{U}{T}, \quad f(x) = F(X). \quad (2)$$

Тогда

$$F(X) = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi T}^{\pi T} F(U) dU + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi T} \int_{-\pi T}^{\pi T} F(U) \cos \frac{n}{T}(U-X) dU. \quad (3)$$

Тем самым теорема обобщается на случай произвольного отрезка. Теперь пусть T очень велико; положим

$$\frac{n}{T} = \kappa. \quad (4)$$

Значения κ для последовательных членов отличаются на $1/T$, и первый член стремится к нулю, если $\int_{-\infty}^{\infty} F(U) dU$ сходится.

Поэтому можно ожидать, что

$$F(X) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\kappa \int_{-\infty}^{\infty} F(U) \cos \kappa(U-X) dU \quad (5)$$

для тех значений X , где $F(X)$ непрерывна, а в точках разрыва первого рода $F(X)$ этот повторный интеграл будет равен $\frac{1}{2}[F(X+) + F(X-)]$. В этом состоит интегральная теорема Фурье. Но можно ожидать также, что двойной интеграл с бесконечными пределами интегрирования приведет к новым проблемам сходимости. Их серьезность показывает пример

$$F(X) = \cos \alpha X. \quad (6)$$

Для этой функции интеграл по U бесконечен при $\kappa = \alpha$ и неопределен при всех других значениях κ , а второй интеграл вообще не имеет смысла. Столь полный провал в простейшем возможном случае может служить предостережением для физиков, которые обычно убеждены в легкости интегральной теоремы Фурье. Даже если

$$F(X) = \frac{1}{X} \sin \alpha X, \quad (7)$$

то, хотя $\int_{-\infty}^{\infty} F(X) dX$ и существует, интеграл по U все же обращается в бесконечность при $\kappa = \alpha$. Таким образом, сходимости $\int_{-\infty}^{\infty} F(X) dX$ недостаточно для справедливости этой теоремы.

Однако, если существует $\int_{-\infty}^{\infty} |F(X)| dX$, то интеграл будет сходиться равномерно по всем κ ; и, как и в случае ряда, для сходимости повторного интеграла нам придется наложить еще одно условие, например, что $F(X)$ имеет ограниченную вариацию, и, следовательно, не имеет разрывов второго рода.

14.111. Родственная задача теории потенциала. Мы знаем (см. 6.093), что если на плоскости задан потенциал φ и точка P находится на расстоянии x от этой плоскости, причем заряды могут находиться только на плоскости и на ее обратной стороне, и если φ удовлетворяет на больших расстояниях подходящим условиям, то

$$2\pi\varphi_P = \iint \frac{\varphi_Q}{R^3} x dS. \quad (1)$$

Если Q имеет координаты $(0, \eta, \xi)$, а $P - (x, y, z)$ и если $\varphi_Q = f(\eta)$ есть функция одного η , то

$$\begin{aligned} 2\pi\varphi_P &= \int_{-\infty}^{\infty} x d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta)}{[x^2 + (\eta - y)^2 + (\xi - z)^2]^{3/2}} d\xi = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x f(\eta)}{x^2 + (\eta - y)^2} d\eta. \end{aligned} \quad (2)$$

Кроме того,

$$\int_0^{\infty} e^{-\kappa x} \cos \kappa (\eta - y) d\kappa = \frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2}, \quad (3)$$

и, следовательно, (2) эквивалентно равенству

$$\varphi_P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta \int_0^{\infty} e^{-\kappa x} \cos \kappa(\eta - y) d\kappa. \quad (4)$$

Если мы поменяем порядок интегрирования и затем положим $x=0$, то снова получим интегральную теорему Фурье. Положить $x=0$, не изменив предварительно порядок интегрирования, мы, очевидно, не можем. С другой стороны, при $x>0$ интеграл 14.111 (2) существует при гораздо более слабых условиях, чем 14.11 (5): достаточно, чтобы $f(\eta)$ была интегрируема на любом конечном промежутке и существовало такое Y , чтобы $\int_Y^{\infty} \frac{f(\eta)}{\eta^2} d\eta$ и $\int_{-\infty}^{-Y} \frac{f(\eta)}{\eta^2} d\eta$ сходились. Например, $f(\eta)$ может быть равно $\eta \cos a\eta$ или $\eta \sin a\eta$. Тогда, если (2) при $x \rightarrow 0$ имеет предел $f(y)$, то мы получаем гораздо более общую теорему.

Этот подход интересен еще и потому, что

$$\frac{x}{x^2 + (\eta - y)^2} = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{x + i(y - \eta)} \right),$$

$$e^{-\kappa x} \cos \kappa(\eta - y) = \operatorname{Re} \{ \exp[-\kappa(x + iy - i\eta)] \} \quad (5)$$

и, следовательно, при выполнении определенных условий будет существовать функция ψ_P , сопряженная с φ_P , т. е. такая, что $\varphi_P + i\psi_P$ будет аналитической функцией комплексного аргумента $x + iy$. Если φ_P — это потенциал, то ψ_P представляет собой соответствующую функцию заряда. Итак, мы приходим к рассмотрению функции

$$\psi_P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\eta - y) f(\eta)}{x^2 + (\eta - y)^2} d\eta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta \int_0^{\infty} e^{-\kappa x} \sin \kappa(\eta - y) d\kappa. \quad (6)$$

Разумеется, существуют такие φ_P , для которых нельзя построить ψ_P . Аналогом 14.11 (5) здесь будет повторный интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\kappa \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \sin \kappa(\eta - y) d\eta. \quad (7)$$

Эту сопряженную функцию ввел Титчмарш [12] (но см. также [13]); кроме двумерной теории потенциала, она полезна при описании линейных характеристик записывающих приборов (14.15).

14.112. Доказательство интегральной теоремы Фурье. Если $f(y)$ имеет конечную вариацию и $|f(y)|$ интегрируем от $-\infty$ до ∞ , то

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \cos x(\eta - y) d\eta = \frac{1}{2} [f(y+) + f(y-)].$$

При названных условиях $\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \cos x(\eta - y) d\eta$ равномерно сходится по M -признаку и, следовательно, при любом конечном A

$$\begin{aligned} I_A &= \int_0^A dx \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \cos x(\eta - y) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta \int_0^A \cos x(\eta - y) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \frac{\sin A(\eta - y)}{\eta - y} d\eta. \end{aligned} \quad (1)$$

Дальнейший ход доказательства, в сущности, такой же, как для рядов Фурье. Мы пишем

$$\begin{aligned} I_A &= \int_0^{\delta} [f(y + \theta) + f(y - \theta)] \frac{\sin A\theta}{\theta} d\theta + \\ &+ \int_{\delta}^{\infty} [f(y + \theta) + f(y - \theta)] \frac{\sin A\theta}{\theta} d\theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где δ не зависит от A . Тогда, поскольку $\frac{f(y \pm \theta)}{\theta}$ имеет ограниченную вариацию при $\delta \leq \theta < \infty$, второй интеграл стремится к нулю при $A \rightarrow \infty$ по лемме Римана, а первый стремится к $\frac{1}{2} \pi [f(y+) + f(y-)]$, как и в доказательстве теоремы о рядах. Отсюда сразу следует утверждение теоремы.

Соответствующая теорема о сопряженном интеграле формулируется так. Если $f(y)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, то для всякого значения y , при котором $f(y)$ удовлетворяет условию Липшица,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \sin x(\eta - y) d\eta = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \frac{d\eta}{\eta - y}.$$

Аналогично прежнему

$$\begin{aligned} J_A &= \int_0^A d\kappa \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \sin \kappa(\eta - y) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta \int_0^A \sin \kappa(\eta - y) d\kappa = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \frac{1 - \cos A(\eta - y)}{\eta - y} d\eta. \end{aligned} \quad (3)$$

Условие Липшица означает, что существуют такие M и α , $0 < \alpha \leq 1$ (возможно, зависящие от y), что

$$|f(\eta) - f(y)| \leq M |\eta - y|^\alpha. \quad (4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_A &= \int_0^\delta [f(y + \theta) - f(y - \theta)] \frac{1 - \cos A\theta}{\theta} d\theta + \\ &+ \int_\delta^\infty [f(y + \theta) - f(y - \theta)] \frac{1 - \cos A\theta}{\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Первый интеграл по модулю меньше $4M\delta^\alpha/\alpha$. Выберем δ так, чтобы это выражение было меньше ω ; это можно сделать независимо от A . Тогда при $A \rightarrow \infty$

$$\int_\delta^\infty [f(y + \theta) - f(y - \theta)] \frac{\cos A\theta}{\theta} d\theta \rightarrow 0, \quad (6)$$

и, следовательно, можно выбрать такое A , что будет

$$\left| J_A - \int_\delta^\infty [f(y + \theta) - f(y - \theta)] \frac{d\theta}{\theta} \right| < 2\omega. \quad (7)$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\kappa \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \sin \kappa(\eta - y) d\eta &= \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^\infty [f(y + \theta) - f(y - \theta)] \frac{d\theta}{\theta} = \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \frac{d\eta}{\eta - y}. \end{aligned} \quad (8)$$

Это верно, в частности, если $f(\eta)$ имеет производную в точке $\eta = y$.

14.113. Обобщение интегральной теоремы Фурье. Если $f(y)$ ограничена на всей прямой и интегрируема по любому конечному промежутку значений y , то интеграл

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_0^{\infty} f(\eta) e^{-\kappa x} \cos \kappa(\eta - y) d\kappa$$

является решением уравнения Лапласа при $x > 0$; если же x стремится к нулю, этот интеграл стремится к $\frac{1}{2}[f(y+) + f(y-)]$ при любом y , при котором имеет смысл это выражение.

Этот интеграл равен

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \frac{x d\eta}{x^2 + (\eta - y)^2}. \quad (1)$$

Последний интеграл по M -признаку сходится равномерно по x, y при $x \geq c > 0$. Интегралы, получаемые из него одно- и двукратным дифференцированием, тоже равномерно сходятся и, следовательно, его можно дифференцировать под знаком интеграла. Выполнив дифференцирование, мы убеждаемся, что

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (x > c > 0). \quad (2)$$

Теперь положим

$$\eta = y + x \operatorname{tg} \theta. \quad (3)$$

Тогда

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} f(y + x \operatorname{tg} \theta) d\theta. \quad (4)$$

Отсюда сразу следует, что, если верхняя и нижняя границы $f(y)$ равны M и m , то при всех положительных x справедливо $m \leq \varphi(x, y) \leq M$.

Предположим, что $f(\eta)$ непрерывна с обеих сторон от точки $\eta = y$, но не обязательно в самой этой точке. Для любого $\omega > 0$ можно выбрать такое $\delta > 0$, что, если $0 < x \operatorname{tg} \theta \leq \delta$, то

$$|f(y + x \operatorname{tg} \theta) - f(y+)| < \omega, \quad |f(y - x \operatorname{tg} \theta) - f(y-)| < \omega. \quad (5)$$

Тогда запишем

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\operatorname{arctg}(\delta/x)} [f(y + x \operatorname{tg} \theta) + f(y - x \operatorname{tg} \theta)] d\theta + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\operatorname{arctg}(\delta/x)}^{\frac{1}{2}\pi} [f(y + x \operatorname{tg} \theta) + f(y - x \operatorname{tg} \theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Первый член можно записать как

$$\frac{1}{\pi} \{ [f(y+) + f(y-)] + 2\lambda\omega \} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\delta}{x}, \quad (7)$$

где $|\lambda| \leq 1$, и при $x \rightarrow 0$ он стремится к выражению

$$\frac{1}{2} [f(y+) + f(y-)], \quad (8)$$

от которого он отличается не более, чем на $\lambda\omega$, что произвольно мало.

Второй член в (6) стремится к нулю, если $f(y)$ ограничена, так как нижний предел интегрирования стремится к $\frac{1}{2}\pi$. Итак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x, y) = \frac{1}{2} [f(y+) + f(y-)]. \quad (9)$$

Соответствующая теорема для сопряженной функции такова: если $f(y)$ ограничена на всей прямой и интегрируема по любому конечному промежутку значений y и если при некотором положительном Y интегралы

$$\int_y^{\infty} \frac{f(y)}{y} dy \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{-y} \frac{f(y)}{y} dy$$

сходятся, то при $x > 0$ интеграл

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_0^{\infty} f(\eta) e^{-\kappa\eta} \sin \kappa(\eta - y) d\kappa$$

представляет собой мнимую часть аналитической функции от $x + iy$, действительная часть которой равна $\varphi(x, y)$; и при $x \rightarrow 0$

$$\psi(x, y) \rightarrow \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \frac{d\eta}{\eta - y}$$

при любом значении y , при котором $f(\eta)$ удовлетворяет условию Липшица. При $x > 0$ имеем

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \frac{\eta - y}{x^2 + (\eta - y)^2} d\eta; \quad (10)$$

по условиям теоремы этот интеграл сходится. Далее

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) + i\psi(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \frac{x + i(\eta - y)}{x^2 + (\eta - y)^2} d\eta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \frac{d\eta}{x + iy - i\eta}, \quad (11) \end{aligned}$$

а это аналитическая функция от $x + iy$.

Выберем δ настолько малым, что

$$\int_0^{\delta} |f(y + \theta) - f(y - \theta)| \frac{d\theta}{\theta} < \omega; \quad (12)$$

это возможно, поскольку $f(\eta)$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда

$$\left| \int_0^{\delta} [f(y + \theta) - f(y - \theta)] \frac{\theta}{x^2 + \theta^2} d\theta \right| < \omega \quad (13)$$

и

$$\int_{\delta}^{\infty} [f(y + \theta) - f(y - \theta)] \frac{\theta}{x^2 + \theta^2} d\theta \rightarrow \int_{\delta}^{\infty} [f(y + \theta) - f(y - \theta)] \frac{d\theta}{\theta}, \quad (14)$$

так как при всех $x < \delta$ выполнены условия критерия равномерной сходимости по Абелю. Отсюда сразу следует утверждение теоремы.

Условия этих двух теорем можно значительно ослабить. Например, для

$$f(y) = y \cos ay \quad \text{или} \quad y \sin ay$$

легко получить те же самые результаты с помощью контурного интегрирования. Но, быть может, самым важным является обобщение на те случаи, когда $f(y)$ имеет конечные пределы при $y \rightarrow \pm \infty$. Если $f(y) = A = \text{const}$, то и $\varphi(x, y) \equiv A$, и из соотношений Коши—Римана сопряженная функция—тоже константа. Если $f(y) = A$ при $y > 0$, $f(y) = -A$ при $y < 0$, то

$$\varphi(x, y) = \frac{2A}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

и сопряженная функция равна $-\frac{2A}{\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

Поэтому, если $f(y) \rightarrow C$ при $y \rightarrow \infty$, $f(y) \rightarrow D$ при $y \rightarrow -\infty$ и интегралы

$$\int_Y^{\infty} \frac{f(y) - C}{y} dy, \quad \int_{-\infty}^{-Y} \frac{f(y) - D}{y} dy$$

сходятся при некотором положительном Y , то мы тоже можем найти сопряженную функцию, проводя все те же рассуждения по отношению к

$$g(y) = \begin{cases} f(y) - C, & y > 0, \\ f(y) - D, & y < 0 \end{cases}$$

и прибавляя $\frac{1}{2}(C + D) + \frac{C - D}{\pi} \arctg \frac{y}{x}$ к φ и $-\frac{C - D}{\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ к ψ .

14.12. Косинусные и синусные преобразования. Если $f(y)$ задана при всех y и $f(-y) = f(y)$, то, при выполнении тех же условий сходимости, что в 14.112,

$$f(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(\eta) \cos x\eta \cos xy d\eta. \quad (1)$$

Аналогично, если $f(-y) = -f(y)$, то

$$f(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(\eta) \sin x\eta \sin xy d\eta. \quad (2)$$

Это можно выразить иначе. Если

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\eta) \cos x\eta d\eta,$$

то

$$f(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \cos xy dx. \quad (3)$$

Если

$$h(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\eta) \sin x\eta d\eta,$$

то

$$f(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} h(x) \sin xy dx. \quad (4)$$

Эти формулы показывают, что $f(y)$ совершенно равноправна с $g(x)$ и $h(x)$.

Последние известны как косинусный и синусный образы Фурье функции $f(y)$. Они принадлежат к одним из первых полученных решений интегральных уравнений и были найдены Лапласом. Интегральная теорема Фурье тоже может быть в общем виде записана аналогичным образом. Если

$$v(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \cos x(\eta - y) d\eta,$$

то

$$f(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} v(x, y) dx, \quad (5)$$

или более симметрично, если

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{-ix\eta} d\eta,$$

то

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{ixy} dx.$$

14.121. Теорема Парсеваля для интегралов. Из (3) заменой η на y и переменной порядка интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f_1(y) f_2(y) dy &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1(y) dy \int_0^{\infty} g_2(x) \cos xy dx = \\ &= \int_0^{\infty} g_1(x) g_2(x) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично

$$\int_0^{\infty} f_1(y) f_2(y) dy = \int_0^{\infty} h_1(x) h_2(x) dx. \quad (7)$$

В случае $f_1(y) = f_2(y) = f(y)$ получаем

$$\int_0^{\infty} f^2(y) dy = \int_0^{\infty} g^2(x) dx = \int_0^{\infty} h^2(x) dx. \quad (8)$$

Это интегральный аналог теоремы Парсеваля для рядов. Физический смысл обеих теорем в случае колебаний в динамиче-

ских системах состоит в том, что общая энергия системы равна сумме энергий собственных колебаний.

14.13. Теорема Фурье—Меллина. Если $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, то сумма

$$f(\tau_1)[H(t - \tau_1) - H(t - \tau_2)] + f(\tau_2)[H(t - \tau_2) - H(t - \tau_3)] + \dots \\ \dots + f(\tau_r)[H(t - \tau_r) - H(t - \tau_{r+1})], \quad (1)$$

где $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{r+1}$, равна $f(\tau_1)$ при $\tau_1 < t < \tau_2$, равна $f(\tau_2)$ при $\tau_2 < t < \tau_3$ и так далее. Переходя к пределу путем все более плотной расстановки этих значений t при $f(t)$ непрерывной, мы получаем интеграл Стильбеса

$$f(t) = - \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) dH(t - \tau). \quad (2)$$

Можно считать, что $f(t) = 0$ при $t < 0$. Выразим теперь $H(t - \tau)$ через интеграл Бромвича:

$$f(t) = - \int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau) d \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{z(t-\tau)} \frac{dz}{z} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{zt}}{z} dz \int_0^{\infty} z f(\tau) e^{-z\tau} d\tau. \quad (3)$$

Мы считаем возможным менять порядок интегрирования и дифференцировать под знаком интеграла. Тогда, если при $\operatorname{Re}(z) = c > 0$ обозначить

$$\int_0^{\infty} z f(\tau) e^{-z\tau} d\tau = F(z), \quad (4)$$

то

$$F(p) H(t) = f(t) H(t). \quad (5)$$

Этим дается правило получения такого оператора над произвольной функцией $f(t)$, что интеграл (4) существует при $\operatorname{Re}(z) \geq c$. Выражение (4) называется *преобразованием Лапласа* над $f(t)$; так же часто называют и преобразование, дающее $F(z)/z$.

Чтобы доказать это, положим $z = c + iy$. Тогда второй интеграл в (3) равен

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{yt} dy \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-c\tau} e^{iy(t-\tau)} d\tau = \\ = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-c\tau} \cos y(t - \tau) d\tau, \quad (6)$$

и (3) эквивалентно

$$f(t) e^{-ct} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-c\tau} \cos y(t - \tau) d\tau. \quad (7)$$

Но это интегральная теорема Фурье, примененная к функции, равной 0 при $t < 0$ и равной $f(t) e^{-ct}$ при $t > 0$. Если при каком-нибудь $c > 0$ эта функция удовлетворяет условиям теоремы, то оператор, соответствующий $f(t)$, определяется формулой (4). Формула (7) верна, если c достаточно велико, чтобы абсолютно

сходился интеграл (4), т. е. чтобы сходился интеграл $\int_0^{\infty} |f(\tau)| \times \times e^{-c\tau} d\tau$. Тогда $F(z)$, найденное таким способом, аналитично при $\text{Re}(z) > c$, но, вообще говоря, не удовлетворяет нашим требованиям к фундаментальным операторам, т. е. не разлагается по отрицательным степеням z при всех z , достаточно больших по модулю.

Поэтому в последнее время появилось мнение о необходимости отказа от операторного метода; некоторые считают даже, что этот метод уже отброшен и заменен теоремой Фурье — Меллина *). Нам это представляется в корне неправильным. Операторный метод рассматривает состояние системы в момент времени 0 и позволяет вычислить ее состояние в момент t , не пользуясь ничем, кроме информации об ее состоянии в момент $t = 0$ и о возмущениях в промежутке от 0 до t . Равенство же (4) имеет смысл, если нам известны значения функции при всех t до бесконечности. Правда, ее значение в момент t часто не зависит от значения в более поздние моменты времени. Но если $f(t) = e^{at^2}$, где $a > 0$, то интеграл расходится при любом c ; и в реальном эксперименте мы никогда не можем быть уверены, что функция не поведет себя так при достаточно больших t . Даже в отсутствие возмущений мы обычно отбрасываем какие-то члены более высоких порядков, которые, скорее всего, начнут играть важную роль при достаточно больших t и, кроме того, незаконно сводить уравнение к линейному при всех t ;

*) Некоторые энтузиасты, чтобы решить уравнение $dx/dt = \cos t$, поступают следующим образом: сначала применяют преобразование Лапласа к $\cos t$; затем умножают на $1/z$, подставляют результат вместо $F(z)/z$ в интеграл Бромвича и вычисляют его, интегрируя по контуру.

Если $f(t)$ вблизи нуля не ограничена, но имеет несобственный интеграл Римана, то операторный метод применим непосредственно; с другой стороны, доказательство теоремы Фурье — Меллина, когда функция не ограничена, встречает новые трудности (см. также 14.13а).

вся теория о равномерном распределении энергии по степеням свободы основана на этом. В операторном методе нет всех этих усложнений: он основывается прямо на данных до момента t и ни на чем больше. В методе же, основанном на теореме Фурье — Меллина, верность ответа зависит от выполнения нового условия, что при всех будущих влияниях интеграл (4) будет абсолютно сходящимся при каком-то c . На своем месте этот метод полезен, что, в частности, показал Вандер-Поль, поскольку, если мы знаем, что решение дифференциального уравнения удовлетворяет условиям применимости этого метода, то его часто можно получить в форме, удобной для контурного интегрирования.

Недопустимо, однако, обозначать при этом комплексную переменную через p . Этот метод не заменяет операторного метода, у каждого из них своя область применимости, и из смещения обозначений ничего, кроме путаницы, не может получиться. Существует обычное обозначение для комплексной переменной z да еще введенное Бромвичем λ , и нет никаких оснований использовать для этого уже занятое p .

Особенно недопустимо обозначать через $F(z)$ то, что мы обозначаем $F(z)/z$. Эта функция отличается от $f(t)$ по размерности, и ее употребление порождает ненужную работу по проверке размерности. Это замечание высказал Мак-Лэчлан.

14.13а. Широко рекомендуемый в последние годы метод решения линейных дифференциальных уравнений состоит в том, чтобы 1) применить ко всему уравнению преобразование Лапласа, 2) затем найти изображение-преобразование Лапласа решения и 3) найти решение-оригинал, пользуясь таблицей преобразований по Лапласу известных функций. Можно возразить против 1, что без предварительного изучения свойств решений этого уравнения в целом нельзя предполагать, что преобразование Лапласа применимо, а против 3, что интеграл Бромвича дает ответ независимо от того, включена ли функция в какие-либо таблицы или нет. Даже если включена, необходимо еще доказывать единственность решения. Примечательно, что такой подход пропагандируется даже в применении к конечным системам обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых прямой операторный подход непосредственно дает доказательство существования и единственности решения. Для уравнений в частных производных подстановка комплексных интегралов типа Бромвича дает доказательство существования; единственность требует применения общей теории таких уравнений. Применение преобразования Лапласа не дает ни того, ни другого (см. также [18]).

Если решение нужно на промежутке $0 \leq t \leq T$, то можно видоизменить метод, интегрируя от 0 до $T' \geq T$, а не от 0 до ∞ . Результат такого преобразования, очевидно, зависит от T' , но легко доказать, что его представление в виде интеграла Бромвича одно и то же для $t \leq T$ при условии $T' \geq T$.

14.14. Гармонические колебания конечной продолжительности. Пусть

$$f(t) = \begin{cases} \cos \gamma t, & \text{если } -\frac{1}{2}T < t < \frac{1}{2}T, \\ 0, & \text{если } t < -\frac{1}{2}T, t > \frac{1}{2}T. \end{cases}$$

Мы хотим представить $f(t)$ в виде интеграла Фурье. Находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \kappa(\tau - t) d\tau &= \int_{-1/2T}^{1/2T} \cos \gamma \tau \cos \kappa(t - \tau) d\tau = \\ &= \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma - \kappa)T}{\gamma - \kappa} + \frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma + \kappa)T}{\gamma + \kappa} \right] \cos \kappa t, \end{aligned}$$

откуда

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma - \kappa)T}{\gamma - \kappa} + \frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma + \kappa)T}{\gamma + \kappa} \right] \cos \kappa t d\kappa.$$

Таким образом, интеграл Фурье для гармоники конечной продолжительности включает бесконечную полосу частот. Если взять γ положительным, то второй член будет мал по сравнению с первым для значений κ , близких к γ ; первый имеет максимум, равный $1/2T$ при $\kappa = \gamma$, и при удалении от γ обращается в нуль впервые при $\kappa - \gamma = \pm 2\pi/T$.

Далее имеется пара минимумов при $\kappa = \gamma \pm 3\pi/T$, составляющих приблизительно $-0,2$ от главного максимума. Таким образом, если γT велико, то наибольшие амплитуды сосредоточены вблизи $\kappa = \gamma$; но для любого конечного T существуют такие конечные области значений κ и γ , для которых и другие амплитуды непренебрежимо малы. В оптике этот факт проявляется в расширении спектральных линий.

14.15. Характеристики записывающих приборов. Приборы обычно нуждаются в проверке. Обычный метод проверки прибора для записи колебаний, такого, как сейсмограф, состоит в подаче на его вход гармонических колебаний разных перио-

дов. Для каждого периода отмечают установившиеся запаздывание и увеличение. Для того чтобы прибор был полезен, он должен быть стабилен и демпфирован; его характеристика может удовлетворять дифференциальному уравнению второго порядка, хотя это не обязательно; во всяком случае, если в отсутствие возмущений возможны решения вида $e^{\lambda t}$, то все допустимые λ должны иметь отрицательные действительные части. Если на прибор подается возмущение вида $\cos \gamma t$, то он даст на выходе $\mu \cos(\gamma t - \epsilon)$, где μ и ϵ зависят от γ . Это можно записать иначе: на сигнал $e^{i\gamma t} + e^{-i\gamma t}$ следует реакция $\mu(e^{i\gamma t - i\epsilon} + e^{-i\gamma t + i\epsilon})$, т. е. $\mu e^{-i\epsilon}$ есть функция от γ , причем μ — четная, а ϵ — нечетная функция γ при всех γ . Если обозначить $i\gamma = \lambda$, то $\mu e^{-i\epsilon}$ будет аналитической функцией λ , когда действительная часть λ положительна; функции $\mu \cos \epsilon$ и $-\mu \sin \epsilon$ связаны между собой так же, как электростатический потенциал и функция заряда. Таким образом, из 14.112 (8)

$$-\mu \sin \epsilon = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [(\mu \cos \epsilon)_{\gamma+\eta} - (\mu \cos \epsilon)_{\gamma-\eta}] \frac{d\eta}{\eta},$$

а поскольку $i\mu e^{-i\epsilon}$ — тоже аналитическая функция, то

$$\mu \cos \epsilon = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [(\mu \sin \epsilon)_{\gamma+\eta} - (\mu \sin \epsilon)_{\gamma-\eta}] \frac{d\eta}{\eta}.$$

Полученные соотношения между наблюдаемыми величинами можно использовать либо для проверки гипотезы о линейности характеристики прибора, либо для уточнения полученных значений μ и ϵ . Как правило, μ стремится к нулю вместе с γ (очень большой период). Если γ очень велико, μ может стремиться к конечному пределу μ_0 , как в маятнике с затуханием, или к нулю, как в сейсмографе Галицына. Можно доказать*), что для возмущения, равного $H(t)$, характеристика при $t < 0$ равна нулю, а при $t > 0$ равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mu \sin(\gamma t - \epsilon) \frac{d\gamma}{\gamma} &= \mu_0 H(t) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [(\mu \cos \epsilon - \mu_0) \sin \gamma t + \mu \sin \epsilon (1 - \cos \gamma t)] \frac{d\gamma}{\gamma}. \end{aligned}$$

*) См. [14]. В формуле (29) этой статьи пропущен член $-\mu_0 \sin \gamma t$.

ПРИМЕРЫ

1. Докажите, что при $0 \leq x \leq \pi$

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right).$$

Чему равна сумма этого ряда при $-\pi \leq x \leq 0$? (Prelim., 1936.)

2. Докажите, что сумма $\sum a^n \cos b^n \pi x$ при $|a| < 1$ непрерывна по x , но ее производная, вообще говоря, не разлагается в ряд Фурье при $0 \leq x \leq 1$, если b целое и $|ab| > 1$. Какие выводы можно сделать о производной на основании этого? (В действительности, как можно доказать другими методами, сумма этого ряда, хотя и непрерывна, при указанных условиях не дифференцируема ни при каком x . Ср. [15].)

3. Разложите по косинусам и синусам $\cos \frac{1}{2} x$ и $\sin \frac{1}{2} x$ в промежутке $0 < x < \pi$ и проверьте, что эти ряды удовлетворяют условиям почленного дифференцирования.

4. Докажите, что при $0 < \theta \leq \pi$

$$\sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta + \dots = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \theta.$$

5. Пусть $f(n)$ определена при всех целых n . Докажите, что при подходящих условиях сходимости функция

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(x-n)}{x-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \mu(x-n) f(n) \right] d\mu,$$

равна $f(n)$ при $x = n$, и что

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx = \sum_{-\infty}^{\infty} f^2(n). \quad (\text{см. [16]}).$$

6. Пусть

$$f(x) = A_0 + \sum A_n \cos nx + \sum B_n \sin nx \quad (0 < x < 2\pi),$$

$$f'(x) = a_0 + \sum a_n \cos nx + \sum b_n \sin nx \quad (0 < x < 2\pi),$$

$$A = f(2\pi -) - f(0+).$$

Докажите, что

$$a_0 = \frac{A}{2\pi}, \quad a_n = \frac{A}{\pi} + nB_n, \quad b_n = -nA_n.$$

7. Пусть

$$f(x) = A_0 + \sum (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

$$g(x) = C_0 + \sum (C_n \cos nx + D_n \sin nx).$$

Докажите, что при определенных условиях

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx = A_0 C_0 + \frac{1}{2} \sum (A_n C_n + B_n D_n),$$

и найдите эти условия.

8. Докажите, что если $g(x)$ приближает $f(x)$, как в 14.01, то, в зависимости от того, нечетно или четно n , имеем

$$g(x) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f\left(\frac{2r\pi}{n}\right) \frac{\sin \frac{1}{2} n \left(x - \frac{2r\pi}{n}\right)}{\sin \frac{1}{2} \left(x - \frac{2r\pi}{n}\right)} \left[1, \cos \frac{1}{2} \left(x - \frac{2r\pi}{n}\right)\right]$$

и объясните, как можно было вывести эту формулу из теории функций комплексного переменного.

9. Разложите e^x на отрезке $-\pi < x < \pi$ в ряд по синусам и косинусам и начертите график суммы этого ряда на всей прямой. Выведите отсюда, что

$$\operatorname{cth} \pi = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \dots \right). \quad (\text{I. C., 1939.})$$

10. Найдите решение интегрального уравнения

$$\int_0^{\infty} g(x) \cos ax \, dx = f(a),$$

где

$$f(a) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} a^2 & \text{при } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{при } a > 1. \end{cases} \quad (\text{I. C., 1943.})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Turner H. H., Tables for facilitating the use of Harmonic Analysis, 1913.
2. Jackson D., The Theory of Approximation, 1930, p. 130.
3. Offord A. C., Duke Math J., **6**, 505—510 (1940).
4. Hardy G. H., Littlewood J. E., Proc. Lond. Math. Soc., (2) **24**, 211—240 (1925).
5. Jeffreys H., Phil. Mag., (7) **2**, 833—844 (1926).
6. Jeffreys H., Proc. Roy. Soc., **A118**, 195—208 (1928).
7. Pellew A., Southwell R. V., Proc. Roy. Soc., **A176**, 312—343 (1940).
8. Jackson D., Fourier Series and Orthogonal Polynomials, 1941.
9. Jeffreys H., Theory of Probability, p. 291—295.
10. Jeffreys H., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **100**, 139—155 (1940).
11. Jeffreys H., Gerlands Beitr. z. Geophysik, **53**, 111—139 (1938).
12. Titchmarsh, Proc. Lond. Math. Soc., (2), 109—130 (1926).
13. Lamb H., Phil. Trans., **A203**, 26 (1904).
14. Jeffreys H., Phil. Mag., (7) **30**, 165—167 (1940).
15. Hardy G. H., Trans. Amer. Math. Soc., **17**, 301—325 (1916).
16. Whittaker E. T., Proc. Roy. Soc. Edin., **35**, 181—194 (1915).
17. Lebesgue H., Bull. des Sci. Math., **22**, part 1, 278—287 (1898).
18. Courant R., Hilbert D., Methoden der Mathematischen Physik I, 69—72 (1924). (Русский перевод: Курант и Гильберт, Методы математической физики, т. I, М., Гостехиздат, 1951.)
19. Littlewood J. E. Mathematician's Miscellany, p. 30—34. (Русский перевод: А. Литтлвуд, Математическая смесь. М., Физматгиз, 1961.)
20. Jeffreys H., Proc. Inst. Electr. Eng. (Heaviside Centenary Volume, 1950),

ФАКТОРИАЛ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ФУНКЦИИ

К одной лишь строфе таинственной
Оды имеется 372 толкования; и ведь
сказано, что даже появление жирафа
должно иметь какое-то разумное
объяснение.

Эрнст Брама „Луна большой радости“

15.01. При $\operatorname{Re}(z) > -1$ определим факториал *) формулой

$$z! = \int_0^{\infty} u^z e^{-u} du. \quad (1)$$

Этот интеграл сходится равномерно в любой области $\operatorname{Re}(z) \geq -1 + \delta$, где $\delta > 0$.

Интегрируя по частям получаем, что

$$(z+1)! = (z+1)z!, \quad (2)$$

и, следовательно, поскольку

$$0! = 1, \quad (3)$$

для целых положительных z

$$z! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots z. \quad (4)$$

*) Обычно в математической литературе эту функцию обозначают через $\Gamma(z+1)$, кроме тех случаев, когда z — целое положительное число. Обозначение через Γ появляется, по-видимому, в связи с тем, что $n!$ определяется в первую очередь для целых положительных n , и поэтому, когда мы расширяем область определения, необходимо новое обозначение. Это противоречит практике, ибо если определение применимо в некоторой области и найдено другое, применимое в более широкой области и эквивалентное первому, то полагают, что второе определяет старое понятие в более широкой области. Так, x^2 сначала определяется только для целых положительных x , а затем распространяется последовательно на рациональные, отрицательные иррациональные и комплексные числа; $\sin x$ первоначально определяется для действительного аргумента и распространяется на комплексные числа с помощью степенных рядов. Теория аналитического продолжения Вейерштрасса основывается на том же принципе. Нет причин, по которым факториал должен составлять исключение. Дополнительная единица в определении $\Gamma(z)$ — незначительное, но постоянное неудобство. Поскольку обозначение через факториал принято в [1], которые являются наиболее полными таблицами этой функции, то нет основания вводить постоянное обозначение через Γ . Часто используется $\Pi(z)$ Гаусса и это эквивалентно $z!$; однако его можно спутать с общим обозначением произведения.

Значит, $z!$ — аналитическая функция, так как она имеет производную

$$\frac{d}{dz} z! = \int_0^{\infty} u^z \ln u \cdot e^{-u} du. \quad (5)$$

При $\operatorname{Re}(z) > -1$ этот интеграл равномерно сходится в любой замкнутой области z .

Теперь, поскольку $z!$ — аналитическая функция, можно предположить, что она имеет аналитическое продолжение в область, где интеграл (1) не сходится. Действительно, если $\operatorname{Re}(z) < -1$, то мы можем выбрать целое число n , большее чем $\operatorname{Re}(-z)$, и определить

$$z! = \frac{(z+n)!}{(z+n)(z+n-1)\dots(z+1)}. \quad (6)$$

Из соотношения (2) следует, что это равенство выполняется при $\operatorname{Re}(z) > -1$. При $\operatorname{Re}(z) < -1$ выражение, стоящее в правой части, является отношением двух аналитических функций и поэтому аналитической функцией для всех z с $\operatorname{Re}(z) > -n$, кроме полюсов при целых отрицательных z . Чтобы эта функция была однозначно определена, ее значение не должно зависеть от выбора n при условии, что $\operatorname{Re}(n+z) > -1$; но если m целое число, большее n , то

$$\begin{aligned} \frac{(z+m)!}{(z+m)(z+m-1)\dots(z+1)} / \frac{(z+n)!}{(z+n)(z+n-1)\dots(z+1)} &= \\ &= \frac{(z+m)!}{(z+n)!(z+n+1)\dots(z+m)} = 1, \quad (7) \end{aligned}$$

и, следовательно, формула (6) определяет функцию однозначно. Таким образом, эта формула задает аналитическое продолжение, и с ее помощью можно доопределить функцию. Очевидно, что $z!$ имеет простые полюса при всех целых отрицательных значениях z , и при конечных z не имеет других особенностей.

Мы уже получили (5.056), что

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}, \quad (8)$$

откуда

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)! = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \dots, \quad (9)$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}, \quad \left(-\frac{5}{2}\right)! = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} \sqrt{\pi}, \dots \quad (10)$$

15.02. Бета-функция. Пусть $\operatorname{Re}(m), \operatorname{Re}(n) > -1$. Положим $\operatorname{Re}(m) = \mu, \operatorname{Re}(n) = \nu$, тогда

$$m!n! = \int_0^\infty e^{-x}x^\mu dx \int_0^\infty e^{-y}y^\nu dy = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \int_0^A e^{-(x+y)}x^\mu y^\nu dx dy. \quad (1)$$

Рассмотрим отдельно интегралы по треугольникам $(0, 0) (A, 0) (0, A)$ и $(0, A) (A, A) (A, 0)$. Для первого треугольника сделаем

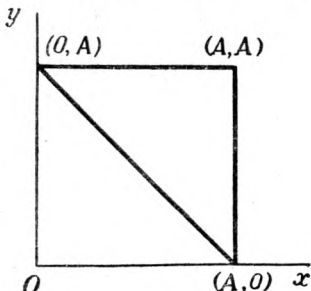


Рис. 60.

замену $x + y = z$ и исключим y . Тогда $z \leq A$, а x меняется от 0 до z , поскольку $y \geq 0$. После замены интеграл будет выглядеть так:

$$\int_0^A dz \int_0^z e^{-z}x^\mu (z-x)^\nu dx. \quad (2)$$

Положим $x = tz$, тогда

$$\begin{aligned} \int_0^A dz \int_0^1 z^{m+n+1} e^{-z}t^\mu (1-t)^\nu dt &= \int_0^1 t^\mu (1-t)^\nu dt \int_0^A z^{m+n+1} e^{-z} dz \rightarrow \\ &\rightarrow (m+n+1)! \int_0^1 t^\mu (1-t)^\nu dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Модуль интеграла $x^\mu y^\nu$ по второму треугольнику не превосходит

$$\int_0^A \int_0^A x^\mu y^\nu dx dy = \frac{A^{\mu+\nu+2}}{(\mu+1)(\nu+1)},$$

а модуль интеграла $e^{-z}x^\mu y^\nu$ не превосходит

$$\frac{e^{-A}A^{\mu+\nu+2}}{(\mu+1)(\nu+1)} \rightarrow 0. \quad (4)$$

Следовательно, если $\operatorname{Re}(m) > -1$, $\operatorname{Re}(n) > -1$, то

$$\int_0^1 t^m (1-t)^n dt = \frac{m! n!}{(m+n+1)!}. \quad (5)$$

Этот интеграл обычно обозначают $B(m+1, n+1)$, но несколько легче пользоваться приведенной выше формой.

Положим в выражении (5) $t = \frac{u}{1+u}$, тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{u^m du}{(1+u)^{m+n+2}} = \frac{m! n!}{(m+n+1)!}. \quad (6)$$

Положим $m = z$, $n = -z$, где $-1 < \operatorname{Re}(z) < 1$, тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{u^z}{(1+u)^2} du = z! (-z)!. \quad (7)$$

Но, как мы видели в **12.125**, этот интеграл равен $\pi z \operatorname{cosec} \pi z$, следовательно,

$$z! (-z)! = \frac{\pi z}{\sin \pi z}, \quad (8)$$

что сразу же обобщается на все z , не являющиеся целыми положительными или отрицательными, с помощью аналитического продолжения. Полученная формула удобнее, чем соответствующая формула в Γ -обозначениях, и ее легче запомнить, благодаря очевидной проверке при $z = 0$.

Для z , у которых $-1 < \operatorname{Re}(z)$,

$$\frac{z! z!}{(2z+1)!} = \int_0^1 t^z (1-t)^z dt. \quad (9)$$

Положим $2t = 1 + s$, тогда этот интеграл будет равен

$$\begin{aligned} 2^{-2z-1} \int_{-1}^1 (1-s^2)^z ds &= 2^{-2z} \int_0^1 (1-s^2)^z ds = \\ &= 2^{-2z-1} \int_0^1 (1-u)^z u^{-1/2} du = 2^{-2z-1} \frac{z! \left(-\frac{1}{2}\right)!}{\left(z + \frac{1}{2}\right)!}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$z! \left(z + \frac{1}{2}\right)! = 2^{-2z-1} \pi^{1/2} (2z+1)!,$$

или

$$z! \left(z - \frac{1}{2}\right)! = 2^{-2z} \pi^{1/2} (2z)! \cdot \left(\operatorname{Re}(z) > -\frac{1}{2}\right). \quad (10)$$

Это можно обобщить с помощью аналитического продолжения. Если z — целое положительное число, то можно дать простое доказательство:

$$\begin{aligned} (2z)! &= (2z)(2z-2) \dots 2 \cdot (2z-1)(2z-3) \dots 1 = \\ &= 2^{2z} z! \left(z - \frac{1}{2}\right)! / \left(-\frac{1}{2}\right)!. \end{aligned} \quad (11)$$

15.03. Определение Гаусса. Если в выражении (5) заметить t на z , а t на u/n , то

$$\frac{z! n!}{(n+z+1)!} = n^{-z-1} \int_0^n u^z \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du, \quad (\operatorname{Re}(z) > -1). \quad (1)$$

Так как $(1 - u/n)^n < e^{-u}$ для $0 < u \leq n$, то выполняется M -признак, и, если $n \rightarrow \infty$, этот интеграл стремится к

$$\int_0^\infty u^z e^{-u} du = z!. \quad (2)$$

Следовательно, при фиксированном z и n , стремящемся к бесконечности,

$$\frac{(n+z+1)!}{n! n^{z+1}} \rightarrow 1, \quad (3)$$

независимо от z . Поскольку $(n+z+1)/n \rightarrow 1$ мы можем записать это так:

$$\frac{(n+z)!}{n! n^z} \rightarrow 1. \quad (4)$$

Это становится равенством при всех положительных n , если $z = -1$ или $z = 0$.

Подставим (4) в 15.01 (6). Поскольку мы можем взять n сколь угодно большим целым числом, то

$$z! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{(z+1)(z+2) \dots (z+n)} \quad (\operatorname{Re}(z) > -1), \quad (5)$$

что дает определение $z!$ без помощи интегралов, так как $n!$ можно определить прямо как произведение 15.01 (4). Выражение (5) Гаусс взял как определение функции и обозначил

через $\Pi(z)$. Мы не доказали еще, что (5) согласуется с 15.01 (6) при $\operatorname{Re}(z) < -1$, но

$$\Pi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \left[(1+z) \left(1 + \frac{z}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right]^{-1}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \ln \Pi(z) &= \lim \left[z \left(\ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n}{n-1} \right) - \sum_{m=1}^n \ln \left(1 + \frac{z}{m} \right) \right] = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[z \ln \frac{m+1}{m} - \ln \left(1 + \frac{z}{m} \right) \right], \quad (7) \end{aligned}$$

и поскольку

$$\begin{aligned} z \ln \frac{m+1}{m} - \ln \left(1 + \frac{z}{m} \right) &= \\ &= z \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + \dots \right) - \frac{z}{m} + \frac{z^2}{2m^2} - \dots = O \left(\frac{1}{m^2} \right), \quad (8) \end{aligned}$$

то ряд для $\ln \Pi(z)$ сходится при всех z . Также $\frac{d}{dz} \ln \Pi(z)$ — равномерно сходящийся ряд аналитических функций в любой замкнутой области, не содержащей целых отрицательных z . Следовательно, $\Pi(z)$ — аналитическая функция в любой области, не содержащей целых отрицательных значений z . Поэтому наше обобщенное определение $z!$ должно совпадать с этим определением, и в (5) можно отбросить ограничение $\operatorname{Re}(z) > -1$. Определение Гаусса имеет то преимущество, что оно годится для всех z , кроме очевидных полюсов, но на практике эта функция обычно появляется в виде интеграла.

Из выражения (5) следует, что

$$\frac{\Pi(z)}{\Pi(z-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{n^{z-1}} \frac{z}{z+n} = z, \quad (9)$$

что непосредственно доказывает индуктивное соотношение из определения Гаусса. Также

$$\begin{aligned} z!(-z)! &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n!}{(1-z^2)(2^2-z^2) \dots (n^2-z^2)} = \\ &= \lim (1-z^2) \left(1 - \frac{z^2}{2^2} \right) \left(1 - \frac{z^2}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) = \frac{\pi z}{\sin \pi z}, \quad (10) \end{aligned}$$

согласно 15.02 (8).

15.04. Дигамма-функция (\mathcal{F}) и тригамма-функция (\mathcal{F}'). Так называются функции

$$\mathcal{F}(z) = \frac{d}{dz} \ln z! = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \frac{1}{z+1} - \dots - \frac{1}{z+n} \right), \quad (1)$$

$$\mathcal{F}'(z) = \frac{d^2}{dz^2} \ln z! = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \dots + \frac{1}{(z+n)^2} + \dots \quad (2)$$

Если в выражении (1) положить $z = 0$, то

$$\mathcal{F}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right) = -\gamma, \quad (3)$$

где γ — константа Эйлера, ее численное значение равно 0,577215665.... Таким образом,

$$\left(\frac{d}{dz} z! \right)_{z=0} = -\gamma. \quad (4)$$

Значения этих функций при $0 \leq z \leq 1,0$ и $z \geq 10,0$ имеются в [1]. Значения при $0 \leq z \leq 20,0$ см. в [2]. Дигамма-функция, которую также обозначают через $\psi(z+1)$, имеет важные приложения в статистике и при решении дифференциальных уравнений. Вебстер обозначает ее через $\Psi(z)$, так как \mathcal{F} похоже на F , впрочем на практике это не ведет к путанице.

Заметим, что

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(z+n) - \frac{1}{z+n} - \dots - \frac{1}{z+1}. \quad (5)$$

15.05. Асимптотические формулы. Разложение в ряд для функций $\ln z!$, $\mathcal{F}(z)$ и $\mathcal{F}'(z)$ можно получить с помощью формулы Эйлера — Маклорена (9.08). Если z не является действительным отрицательным числом то,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{(z+x)^2} = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \dots - b_2 \cdot \frac{2}{z^3} - \\ &- b_4 \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{z^5} - \dots \sum_{m=0}^{\infty} \int_m^{m+1} \frac{P_{2r+1}(x-m)(2r+2)!}{(z+x)^{2r+3}} dx. \end{aligned} \quad (1)$$

Сравнивая это выражение с формулой 15.04 (2), мы видим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(z) &= \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{B_2}{z^3} + \frac{B_4}{z^5} + \dots + \frac{B_{2r}}{z^{2r+1}} + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \int_m^{m+1} \frac{(2r+2)\varphi_{2r+1}(x-m)}{(z+x)^{2r+3}} dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку при действительных положительных z все нечетные производные $(z+x)^{-2}$ имеют один и тот же знак, то значения функции $\mathcal{F}'(z)$ при этих z лежат между суммами r и $r+1$ членов ряда (2). Такое неравенство труднее установить при комплексных z , и оно, очевидно, вообще неверно, если z — действитель-

тельное и отрицательное. Аналогично *)

$$\mathcal{F}(z) = \ln z + \frac{1}{2z} - \frac{B_2}{2z^2} - \frac{B_4}{4z^4} - \dots - \frac{B_{2r}}{2rz^{2r}} - \sum_{m=0}^{\infty} \int_m^{m+1} \frac{\Psi_{2r+1}(x-m)}{(z+x)^{2r+2}} dx,$$

и, интегрируя еще раз, получаем

$$\ln z! = C + \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{B_2}{2z} + \frac{B_4}{3 \cdot 4z^3} + \dots, \quad (4)$$

опять в том смысле, что значения функции слева при действительных положительных z лежат между суммами r и $r+1$ членов ряда. Чтобы определить константу C , запишем 15.02 (10) следующим образом:

$$\ln z! + \ln \left(z - \frac{1}{2}\right)! = -2z \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \pi + \ln(2z)!. \quad (5)$$

Подставив (4) в это выражение, находим, что

$$C = \frac{1}{2} \ln 2\pi. \quad (6)$$

Итак, для больших z получаем разложение

$$\begin{aligned} \ln z! = \frac{1}{2} \ln 2\pi + \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \\ - \frac{1}{1680z^7} + \frac{1}{1188z^9} - \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Это *формула Стирлинга*. Ее обычно используют для приближенного вычисления факториалов больших чисел. Формулу Стирлинга не следует рассматривать как ряд при фиксированном z , так как члены этого ряда будут неограниченно колебаться. Действительно, мы видели (12.07), что при больших r

$$B_{2r} \div (-1)^{r-1} \frac{2(2r)!}{(2\pi)^{2r}},$$

и, следовательно, общий член выражения (7) приближенно равен

$$(-1)^{r-1} \frac{2(2r-2)!}{(2\pi)^{2r} z^{2r-1}}. \quad (8)$$

Таким образом, при любых z члены не ограничены ни сверху, ни снизу. Тем не менее начальные члены убывают так быстро, что это разложение очень полезно для вычислений. Даже при $z=1$, суммируя члены (7) до z^{-5} и z^{-7} , получаем

$$1,83730 < \ln 2\pi < 1,83849.$$

Истинное значение $\ln 2\pi = 1,83788$. Оно лежит почти посередине между этими двумя приближениями, которые различаются всего

*) Почему первый член этого разложения имеет вид $\ln z$, а не $\ln Cz$, можно понять из формулы 15.04 (1). — *Прим. перев.*

на 0,00119. Этот действительно замечательный результат получен из предположения, что 1 — большое число. Лежандр вычислял $z!$ для больших z , используя формулу Стирлинга, и затем, производя последовательные деления, вычислил $z!$ для малых z . Расходимость ряда была показана Байесом [3]. Первое доказательство асимптотических свойств принадлежит Коши (1843).

На самом деле Стирлинг [5] дал следующий ряд:

$$\ln z! = \frac{1}{2} \ln 2\pi + \zeta \ln \zeta - \zeta - \frac{1}{2,12\zeta} + \frac{7}{8,360\zeta^3} - \\ - \frac{31}{32,1260\zeta^5} + \frac{127}{128,1680\zeta^7} - \dots, \quad (9)$$

где $\zeta = z + \frac{1}{2}$ и z — любое целое число. Выражение (7), обычно приписываемое Стирлингу, было найдено Муавром после того, как он получил письмо от Стирлинга. Коэффициенты в (9) несколько меньше, чем в (7), но их труднее вычислять. Изобретательность, проявленная для получения этого ряда математическими средствами того времени даже без общего определения $z!$, поразительна. Правильнее всего называть (7) формой Муавра ряда Стирлинга, поскольку все принципы, использованные при ее отыскании, были даны Стирлингом. Его метод состоял в выражении $\ln n$ в виде разности $f(n+1) - f(n)$.

Если мы вернемся к 9.08, то увидим, что формулу (7) можно записать так:

$$\ln z! = \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi - \int_0^{\infty} \frac{t - [t] - \frac{1}{2}}{z + t} dt, \quad (10)$$

где $[t]$ обозначает целую часть t . Последний член есть остаточный член в форме Буге — Стилтеса [5]. Фактически он полностью принадлежит Стилтесу. Буге нашел соответствующее выражение в виде ряда Фурье, а Стилтес заметил, что это $t - [t] - \frac{1}{2}$.

15.06. Можно проверить, что

$$\int_0^{1/2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{1/2(n-1)} (1-t)^{1/2(m-1)} dt = \\ = \frac{1}{2} \frac{\left[\frac{1}{2}(m-1)\right]! \left[\frac{1}{2}(n-1)\right]!}{\left[\frac{1}{2}(m+n)\right]!}.$$

Когда m и n — целые положительные числа, мы можем подставить явные выражения для факториалов и вывести обычные элементарные формулы для этих интегралов.

15.07. Формула Валлиса для π . При положительных m

$$\int_0^{1/2\pi} \sin^{2m-1} \theta \, d\theta > \int_0^{1/2\pi} \sin^{2m} \theta \, d\theta > \int_0^{1/2\pi} \sin^{2m+1} \theta \, d\theta,$$

откуда для целых m

$$\frac{(2m-2)(2m-4)\dots 2}{(2m-1)(2m-3)\dots 1} > \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 1}{2m(2m-2)\dots 2} \frac{\pi}{2} > \frac{2m(2m-2)\dots 2}{(2m+1)(2m-1)\dots 1},$$

т. е.

$$\frac{2m(2m-2)^2\dots 2^2}{(2m-1)^2(2m-3)^2\dots 1^2} > \frac{1}{2}\pi > \frac{(2m)^2(2m-2)^2\dots 2^2}{(2m+1)(2m-1)^2\dots 1^2}.$$

Отношение крайних членов этого неравенства равно $\frac{2m}{2m+1}$ и стремится к 1 при $m \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2m)^2(2m-2)^2\dots 2^2}{(2m+1)(2m-1)^2\dots 1^2}.$$

Это формула Валлиса, представляющая исторический интерес, как первое выражение для $\frac{1}{2}\pi$ в виде предела алгебраических функций. Формулу Валлиса можно использовать для нахождения константы в формуле Стирлинга и даже первого ее члена. Покажем, как это сделать. Умножим числитель и знаменатель на

$$(2m)^2(2m-2)^2\dots 2^2.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{4m}(m!)^4}{(2m+1)(2m!)^2}. \quad (1)$$

Если m велико, то

$$\begin{aligned} \ln(2m)! - \ln m! &= \ln(m+1) + \dots + \ln 2m = \int_{m+1/2}^{2m+1/2} \ln x \, dx + O\left(\frac{1}{m}\right) = \\ &= \left(2m + \frac{1}{2}\right) \ln\left(2m + \frac{1}{2}\right) - \left(m + \frac{1}{2}\right) \ln\left(m + \frac{1}{2}\right) - m + O\left(\frac{1}{m}\right). \quad (2) \end{aligned}$$

Пользуясь этим соотношением, исключим $\ln(2m!)$ из (1), тогда, пренебрегая малыми членами, получим

$$\ln \frac{1}{2} \pi = \lim \left[2 \ln m! + 4m \ln 2 - (4m + 1) \left(\ln 2m + \frac{1}{4m} \right) + \right. \\ \left. + (2m + 1) \left(\ln m + \frac{1}{2m} \right) + 2m - \ln 2m \right] = \lim 2 \left[\ln m! - \right. \\ \left. - \left(m + \frac{1}{2} \right) \ln m + m - \ln 2 \right], \quad (3)$$

откуда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!}{\sqrt{2\pi} m^{m+1/2} e^{-m}} = 1. \quad (4)$$

Этот метод, разумеется, подходит только, когда m — целое и положительное. Если принять во внимание удивительную изобретательность многих математиков того времени, то становится странным, что первый член не был найден таким способом, пока Стирлинг не получил полного разложения.

15.08. Интегралы Дирихле. Возьмем

$$I = \iint x^m y^n dx dy \quad (m, n > -1) \quad (1)$$

по области $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a$. После подстановки $y = z - x$ получаем

$$I = \int_0^a \int_0^z x^m (z - x)^n dz dx, \quad (2)$$

поскольку если бы x превосходило z , то y было бы меньше нуля. Положим $x = zt$, тогда

$$I = \int_0^a \int_0^1 z^{m+n+1} t^m (1-t)^n dz dt = \frac{a^{m+n+2} m! n!}{(m+n+2)!}. \quad (3)$$

Если при фиксированных m и n изменять a , то

$$\frac{dI}{da} = a^{m+n+1} \frac{m! n!}{(m+n+1)!}. \quad (4)$$

Возьмем теперь

$$I_2 = \iiint x^m y^n z^p dx dy dz \quad (5)$$

по области $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq a$. Поскольку x и y связаны соотношением

$$0 \leq x + y \leq a - z,$$

то, интегрируя по ним, получаем, согласно (3), что

$$I_2 = \int_0^a \frac{(a-z)^{m+n+2} m! n!}{(m+n+2)!} z^p dz = \frac{a^{m+n+p+3} m! n! p!}{(m+n+p+3)!}. \quad (6)$$

Вообще, если

$$I = \int \int \dots \int x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_r^{m_r} dx_1 dx_2 \dots dx_r, \quad (7)$$

по области $x_s \geq 0$, $\sum x_s \leq a$, то

$$I = a^{\sum m+r} \frac{m_1! m_2! \dots m_r!}{(\sum m+r)!}. \quad (8)$$

Если мы положим в (1) $m = n = 0$, а $a = 1$, то получим $\frac{1}{2}$ — площадь треугольника с вершинами (0, 0), (1, 0), (0, 1). Если в (5) мы положим $m = n = p = 0$, а $a = 1$, то получим $\frac{1}{6}$ — объем тетраэдра с вершинами (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

Эти рассуждения легко обобщить для интегралов вида

$$J = \int \int \dots \int f\left(\sum x_s\right) x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_r^{m_r} dx_1 dx_2 \dots dx_r, \quad (9)$$

где переменные связаны теми же соотношениями. Действительно, из (8)

$$\frac{dI}{da} = a^{\sum m+r-1} \frac{m_1! m_2! \dots m_r!}{(\sum m+r-1)!} \quad (10)$$

и

$$\frac{dJ}{da} = f(a) \frac{dI}{da}. \quad (11)$$

Следовательно,

$$J = \int_0^a f(s) s^{\sum m+r-1} ds \frac{m_1! m_2! \dots m_r!}{(\sum m+r-1)!}. \quad (12)$$

Более подробное доказательство см. [6].

Эти интегралы имеют важные применения в статистике, где часто приходится вычислять интегралы вида:

$$L = \int \int \dots \int f\left(\sum x_s^2\right) dx_1 dx_2 \dots dx_r, \quad (13)$$

при условии, что $\sum x_r^2 \leq a^2$. Положим

$$x_s = \xi_s^{1/2}, \quad (14)$$

и возьмем все $\xi_s \geq 0$. Тогда

$$L = \int \int \dots \int f\left(\sum \xi\right) 2^{-r} \xi_1^{-1/2} \xi_2^{-1/2} \dots \xi_r^{-1/2} d\xi_1 \dots d\xi_r = \\ = 2^{-r} \int_0^{a^2} f(s) s^{1/2r-1} ds \frac{\pi^{1/2r}}{\left(\frac{1}{2} r - 1\right)!}.$$

Это интегралы по обобщенному квадранту, если же позволить переменным принимать отрицательные значения, то нужно умножить на 2^r .

В частности, при $f(s) = 1$ мы получаем объем r -мерной сферы радиуса a

$$L = \frac{\pi^{1/2 r}}{\left(\frac{1}{2} r\right)!} a^r. \quad (16)$$

Для $r = 1, 2, 3$ получим $2a, \pi a^2, \frac{4}{3} \pi a^3$, что соответствует длине отрезка, площади круга, объему сферы.

15.09. Интегральная показательная функция и связанные с ней интегралы. Рассмотрим случай неполной факториальной функции, которую мы будем обозначать через

$$\text{ei}(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (1)$$

Этот интеграл сходится, если верхний предел равен $\infty \text{exp} i\alpha$ и не зависит от α , пока $-\frac{1}{2}\pi \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$. В интеграле

$$\int_0^z (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t} \quad (2)$$

подынтегральное выражение является целой функцией, поэтому, разлагая в ряд и интегрируя, получаем, что этот интеграл равен

$$z - \frac{z^2}{2 \cdot 2!} + \frac{z^3}{3 \cdot 3!} - \dots, \quad (3)$$

и, следовательно,

$$\int_z^Z \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_z^Z \frac{dt}{t} - \int_z^Z \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = \left[\ln z - \left(z - \frac{z^2}{2 \cdot 2!} + \frac{z^3}{3 \cdot 3!} - \dots \right) \right]_z^Z. \quad (4)$$

Левая часть этого выражения стремится к пределу при $Z \rightarrow \infty$; следовательно, правая часть тоже стремится к этому пределу. Тогда

$$\int_z^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t} = C - \ln z + z - \frac{z^2}{2 \cdot 2!} + \frac{z^3}{3 \cdot 3!} - \dots, \quad (5)$$

где C — константа. Определим ее следующим образом:

$$\frac{dz}{dz} = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \ln t \, dt, \quad (6)$$

следовательно,

$$-\gamma = \mathcal{F}(0) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt, \quad (7)$$

где γ — константа Эйлера. Теперь

$$\begin{aligned} \int_z^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt &= [-e^{-t} \ln t]_z^{\infty} + \int_z^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t} = \\ &= e^{-z} \ln z + \text{ei}(z) = C - (1 - e^{-z}) \ln z + O(z), \end{aligned} \quad (8)$$

и это равно

$$-\gamma - \int_0^z e^{-t} \ln t \, dt.$$

Откуда, устремляя z к нулю, получаем, что

$$C = -\gamma, \quad (9)$$

и

$$\text{ei}(z) = -\gamma - \ln z + z - \frac{z^2}{2 \cdot 2!} + \frac{z^3}{3 \cdot 3!} - \frac{z^4}{4 \cdot 4!} + \dots \quad (10)$$

Если z — действительное отрицательное число и мы берем главное значение интеграла, то

$$P \text{ei}(-x) = -\gamma - \ln x - x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - \dots \quad (11)$$

В таблицах эту функцию обозначают через $-\text{Ei}(x)$.

Асимптотическое разложение *) для больших z сразу же получается из 17.01 при $n = 1$

$$\begin{aligned} \text{ei}(z) &= e^{-z} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2!}{z^3} - \frac{3!}{z^4} + \dots + (-1)^r \frac{r!}{z^{r+1}} \right) - \\ &\quad - (-1)^r (r+1)! \int_z^{\infty} e^{-t} t^{-r-2} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

*) Этот раздел следует читать после начала гл. 17.

Если $z = iy$, где y — действительное положительное число, то

$$\begin{aligned} \operatorname{ei}(iy) &= \int_{iy}^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t} = \int_y^{\infty} e^{-iu} \frac{du}{u} = \int_y^{\infty} \frac{\cos u}{u} du - i \int_y^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \\ &= -\gamma - \ln y - \frac{1}{2} \pi i + i \left(y - \frac{y^3}{3 \cdot 3!} + \frac{y^5}{5 \cdot 5!} + \dots \right) + \\ &+ \left(\frac{y^2}{2 \cdot 2!} - \frac{y^4}{4 \cdot 4!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Откуда

$$\int_y^{\infty} \frac{\cos u}{u} du = -\gamma - \ln y + \frac{y^2}{2 \cdot 2!} - \frac{y^4}{4 \cdot 4!} + \dots, \quad (13)$$

$$\int_y^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{2} \pi - y + \frac{y^3}{3 \cdot 3!} - \frac{y^5}{5 \cdot 5!} + \dots. \quad (14)$$

Асимптотические формулы получаются из того, что

$$\operatorname{ei}(iy) \sim e^{-iy} \left(-\frac{i}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{i \cdot 2!}{y^3} - \frac{1 \cdot 3!}{y^4} + \dots \right),$$

откуда

$$\int_y^{\infty} \frac{\cos u}{u} du \sim \cos y \left(\frac{1!}{y^2} - \frac{3!}{y^4} + \dots \right) - \sin y \left(\frac{1}{y} - \frac{2!}{y^3} + \frac{4!}{y^5} - \dots \right), \quad (15)$$

$$\int_y^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \sim \cos y \left(\frac{1}{y} - \frac{2!}{y^3} + \frac{4!}{y^5} + \dots \right) + \sin y \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3!}{y^4} + \dots \right). \quad (16)$$

Функции $\operatorname{Ci}(y)$ и $\operatorname{Si}(y)$

$$\operatorname{Ci}(y) = - \int_y^{\infty} \frac{\cos u}{u} du, \quad (17)$$

$$\operatorname{Si}(y) = \frac{1}{2} \pi - \int_y^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \int_0^y \frac{\sin u}{u} du. \quad (18)$$

являются табличными.

Если мы положим в (1)

$$z = -\ln \zeta, \quad t = -\ln u,$$

то

$$\operatorname{ei}(-\ln \zeta) = - \int_0^{\zeta} \frac{du}{\ln u}. \quad (19)$$

Эта функция обозначается через $-\operatorname{li}(\zeta)$, причем при действительном и большем единицы ζ берется главное значение интеграла.

Интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{1+t^2} dt$$

нельзя вычислить в точности тем же способом, как соответствующий интеграл с $\cos xt$ (*), поскольку подынтегральное выражение нечетно по t . Однако его можно записать в виде

$$\operatorname{Im} \int_0^{\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt,$$

и перейти к интегрированию по пути от 0 до $i\infty$ с полуокружностью около $t=i$. Вычет в этом полюсе равен $e^{-x}/2i$ и, следовательно, интеграл по полуокружности не дает вклада в мнимую часть интеграла. Следовательно, при $x > 0$

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Im} P \int_0^{i\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt = \operatorname{Im} P \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu}}{1-u^2} i du = \\ &= -P \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-xu} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = \\ &= -\frac{1}{2} P \int_{-1}^{\infty} e^{-x-xv} \frac{dv}{v} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} e^{x-xv} \frac{dv}{v} = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x} P \operatorname{ei}(-x) + \frac{1}{2} e^x \operatorname{ei}(x) = \\ &= \operatorname{ch} x \left(x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots \right) - \operatorname{sh} x \left(\gamma + \ln x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Повторным интегрированием по частям можно показать, что

$$I \sim \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} + \dots$$

ПРИМЕРЫ

1. Найдите такое положительное число α , что при больших n произведение $1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \dots n^n$ больше или меньше $n^{\alpha n^2}$ в зависимости от того, $\alpha > \alpha'$ или $\alpha < \alpha'$. (М. Т., 1943.)

*) См. 12.121. — Прим. перев.

2. Докажите, что вычет функции $z!$ в точке $z = -n$, где n — целое положительное число, равен $(-1)^{n-1}/(n-1)!$.

3. Докажите, что, если n — целое положительное, то

$$z! \left(z - \frac{1}{n}\right)! \dots \left(z - \frac{n-1}{n}\right)! = (2\pi)^{1/2} (n-1)! n^{-nz-1/2} (nz)!. \quad (\text{Эйлер.})$$

[Покажите, что отношение левой и правой частей не меняется при замене z на $z+1$ и для больших z это отношение равно $1 + O(1/z)$.]

4. Получите этот результат, пользуясь определением Гаусса.

5. Докажите, что при $\text{Re}(z) > -1$

$$\mathcal{F}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \int_0^{\infty} e^{-tz} \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}} dt \right) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-(z+1)t}}{1 - e^{-t}} \right) dt \quad (\text{Гаусс.})$$

(ср. с интегралом Фруллани).

6. Пользуясь теоремой Фурье — Меллина, докажите, что если p^{-1} обозначает интегрирование от 0 до x , то

$$e^{ix} H(x) = \ln(1+p) \cdot H(x)$$

и, следовательно,

$$e^{ix} + \ln x + \gamma = x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - \dots$$

7. Докажите, что

$$\int_0^{\infty} \frac{u^m du}{(Au^2 + B)^{1/2(m+n+2)}} = \frac{\left[\frac{1}{2}(m-1)\right]! \left[\frac{1}{2}(n-1)\right]!}{\left[\frac{1}{2}(m+n)\right]!} \frac{1}{2A^{1/2(m+1)} B^{1/2(n+1)}} \quad (m > -1, n > -1).$$

8. Докажите, что

$$\int_0^{\infty} \sigma^{-n} e^{-k/\sigma^2} d\sigma = \frac{\left(\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}\right)!}{2k^{1/2} n^{-1/2}} \quad (n > 1).$$

9. Докажите, что для действительных положительных n

$$\frac{1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} < 0, \quad \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} > 0,$$

и прямо из этого покажите, что существует предел, определяющий константу Эйлера.

10. Если

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(\xi)}{(x-\xi)^\mu} d\xi,$$

где $f(0) = 0$, $0 < \mu < 1$ и $f'(x)$ непрерывно, то докажите, что

$$u(x) = \frac{\sin \mu\pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(\eta) d\eta}{(x-\eta)^{1-\mu}}. \quad (\text{Абель.})$$

11. Докажите, что

$$\mathcal{F}'(x) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) - \sum B_{2r} \left(\frac{1}{x^{2r}} - \frac{1}{(x+1)^{2r}} \right),$$

и выведите соответствующие соотношения для $\mathcal{F}(x)$ и $\ln x!$ (А. Лодж.)

12. Покажите, что, если $\int_0^t f(\tau) d\tau$ существует, $\alpha, \beta \geq 0$, но не обязательно целые, и $p^{-\alpha} f(t) H(t)$ определяется формулой

$$p^{-\alpha} f(t) H(t) = \int_{\tau=0-}^t f(t-\tau) d \left(\frac{t^\alpha}{\alpha!} H(\tau) \right),$$

то

$$p^0 f(t) H(t) = f(t) H(t),$$

$$p^{-\alpha} p^{-\beta} f(t) H(t) = p^{-\beta} p^{-\alpha} f(t) H(t) = p^{-\alpha-\beta} f(t) H(t)$$

и для $h > 0$

$$p^{-\alpha} e^{-ph} g(t) = e^{-ph} p^{-\alpha} g(t),$$

где $g(t)$ — интегрируемая функция, равная нулю при отрицательных t .

13. Используя 15.05 (7) и 15.02 (11), выведите 15.05 (9).

14. Используя формулу Валлиса и 15.03 (4), покажите, что формулу Стирлинга можно распространить на комплексные z , у которых $\operatorname{Re}(z)$ большая и положительная.

15. Докажите, что если $C(x)$ и $S(x)$ — интегралы Френеля, определенные для действительных x формулой

$$C(x) + iS(x) = \int_0^x e^{it^2} dt,$$

то для больших положительных x

$$C(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - P \cos x^2 + Q \sin x^2,$$

$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - P \sin x^2 - Q \cos x^2,$$

где

$$P(x) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^7} + \dots \right),$$

$$Q(x) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 x^9} \dots \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. British Association Tables.
2. P a i r m a n E., Tracts for Computers, № 1.
3. B a y e s T., Phil. Trans., 53, 269—271 (1763).
4. S t i r l i n g, Methodus Differentialis, 1730, Prop. 28.
5. B o u r g u i d L., J. des Math., (4) 5, 425—444 (1889).
6. M o r d e l l L. Y., Edin. Math. Soc., Math. Notes, 34, 15—17 (1944).

УКАЗАТЕЛЬ

- Абель (Abel N. H.) 349
 Абеля теорема 188
 — суммирование 189, 291
 Алгебраические уравнения 202
 Аналитическая функция 132, 141
 Аналитическое продолжение 175
 Аргана диаграмма 143
 Асимптотические формулы 339
- Белл** (Bell E. T.) 143
 Бернулли Д. (Bernoulli D.) 292
 Бернулли И. (Bernoulli J.) 104
 Бернулли числа и полиномы 213, 283
 Бесконечная неустойчивость 222
 Бета-функция 335
 Бикли (Bickley W. G.) 55, 97
 Брахистохрона 104
 Бриггс (Briggs L. J.) 27
 Бромвича интеграл 222, 225
 Буге-Стилтьеса остаточный член 341
- Вагнер** (Wagner K. W.) 222
 Валлиса формула 342
 Вариационное исчисление 101, 106, 109
 Вейерштрасс (Weierstrass) 176
 Вейерштрасса приближение 306, 309
 Виртингер (Wirtinger W.) 39
 Волчок 116
 Вычет 171
- Гамильтона принцип** 108, 110
 — уравнение 120
 Гамильтона—Якоби уравнение 118
 Гармонические колебания 329
 Гармонический анализ 281, 312
 Гаусс (Gauss C. F.) 337, 349
 Гаусса $\Pi(z)$ -функция, см. Факториал
 Гейне—Бореля теорема 179
 Гиббса явление 304
 Гироскопические члены 129
 Главное значение аргумента 145
 — — интеграла 154, 198
 — — логарифма 171
 Глауэрт (Glauert H.) 271
 Горнер (Horner W. G.) 31
 Графические методы 56
 Грегори (Gregory J.) 14, 47, 50
 Грина лемма 151
 Гурса (Goursat E.) 146, 150, 152
- Даламбер** (D'Alembert J.) 292
 Даламбера принцип 113
- Дигамма-функция 338
 Дирихле (Dirichlet P. G. L.) 292
 Дирихле интегралы 343
 Дифференциальные уравнения, краевые задачи 87
 — — численное решение 57, 61, 63, 75
 Дифференцирование численное 34
 Дифференцируемость функций 138
 Долзелл (Dolzell D. P.) 227, 228
 δ -функция 224
- Емкость конденсатора** 263
- Жидкость**, подогреваемая снизу 300
 Жордана лемма 223
 Жуковского крыло 270
 — обобщенные функции 268
- Закон переместительный** 134
 — распределительный 134
 — сочетательный 134
- Интегральная показательная функция** 346
 Интегральные уравнения 405
 Интегральные синус и косинус 347
 Интегрирование функции комплексного переменного 146, 155
 — численное 36
 Интерполяционная формула 7, 10, 14, 18, 19, 20
 Интерполяция 7, 29
- Комплексные числа** 132, 136
 Комплексный потенциал 253—255
 Комри (Comrie L. J.) 21, 27
 Контурное интегрирование 171, 196
 Конформное отображение 249
 Косинусные преобразования 324
 Коши (Cauchy A. L.) 341
 Коши задача 87
 — интеграл 172
 — неравенство 174
 — теорема 149, 152
 Коши — Римана условия 138
 Коэффициент растяжения 252
- Лагранжа интерполяционная формула** 7
 — разложение 207
 — уравнение 111
 Лаплас (Laplace P. S.) 325

- Лапласа преобразование 326
 Лебег (Lebesgue H.) 308
 Лежандр (Legendre A. M.) 341
 Линейные алгебраические уравнения 82
 Липшица условие 282, 287
 Литтлвуд (Littlewood J. E.) 292
 Лиувилля теорема 175
 Лорана теорема 182
- Маклорен (Maclaurin C.) 17**
 Метод отбрасывания 22
 Милн-Томсон (Milne-Thomson L. M.) 21, 27, 39
 Миттаг-Леффлера теорема 209
 Морера теорема 190
 Муавр (Moivre A.) 341
- Наименьшего действия принцип 127**
 Неголономные системы 114
 Непрерывность 143, 145, 146
 Ньютон (Newton I.) 31
- Область 140**
 Обобщенные координаты 111
 Обратные функции 203
 Окрестность 146
 Окружности с общей осью симметрии 259
 Операционные методы 215
 Осгуд (Osgood W. F.) 187
 Осгуда—Витали теорема 191, 229
 Особые точки 165, 168, 169
- Парсеваля теорема 310, 325.**
 Периодограмма 313
 Пирсон (Pearson K.) 7, 19
 Полюсы 167, 184
 Правило трех восьмых 51
 Пределы операторов 218
 Предельные точки 163
 Принцип максимума модуля 180
 Простые функции 204
 Пуассон (Poisson S. D.) 292
- Разделенные разности 8**
 Разрезы 116
 Раусс (Routh E. J.) 128
 Регулярная функция 141
 Релея принцип 79
 Релаксационные методы 88
 Риман (Riemann G. F. B.) 131
 Римана лемма 283
 Ритц (Ritz W.) 82
 Ричардсона метод 53, 97
 Руше теорема 202
- Саутвелл (Southwell R. V.) 85, 91, 97, 303**
 Сейсмограф 330
 Симпсона правило 50
 Синусные преобразования 324
 Сопряженные ряды 283
 Софокусные конические сечения 264
 Степенные ряды 156, 161, 162
 Стирлинга формула 340
 Суперпозиции принцип 241
 Существенно особые точки 168, 172
 Сходимость 157—159
- Тейлор (Taylor A.) 16**
 Тейлора теорема 164
 Теория преобразований 122
 Титчмарш (Titchmarsh E. C.) 318
 Точки ветвления 165
 Триганма-функция 338
- Уиттекер (Whittaker E. T.) 49**
 Уэддла правило 53
- Факториал 333**
 Ферма принцип 108
 Фруллани интегралы 245
 Фурье интегральная теорема 316, 319, 321
 Фурье—Меллина теорема 326
 Фурье ряды 281
 — — дифференцирование 298
 — — интегрирование 297
 — — по косинусам 293
 — — по синусам 293
 — — суммирование 284
 — теорема 186
- Характеристики записывающих приборов 329**
 Характеристическая функция 128
 Хевисайда единичная функция 224
- Цейпель фон (Zeipel H. von) 124, 126**
 Целые функции 161
 Цилиндр 261
- Шварца—Кристофеля преобразование 275**
 Шварца лемма 182
 Шредингера уравнение 130
- Эйлер (Euler L.) 7, 189, 292, 349**
 Эйлера константа 239
 Эйлера—Маклорена формула 36, 39, 339
 Эйнштейн (Einstein A.) 131
 Эйри (Airy J. R.) 58
- Якоби теорема 121**

1. p. 22 r.

