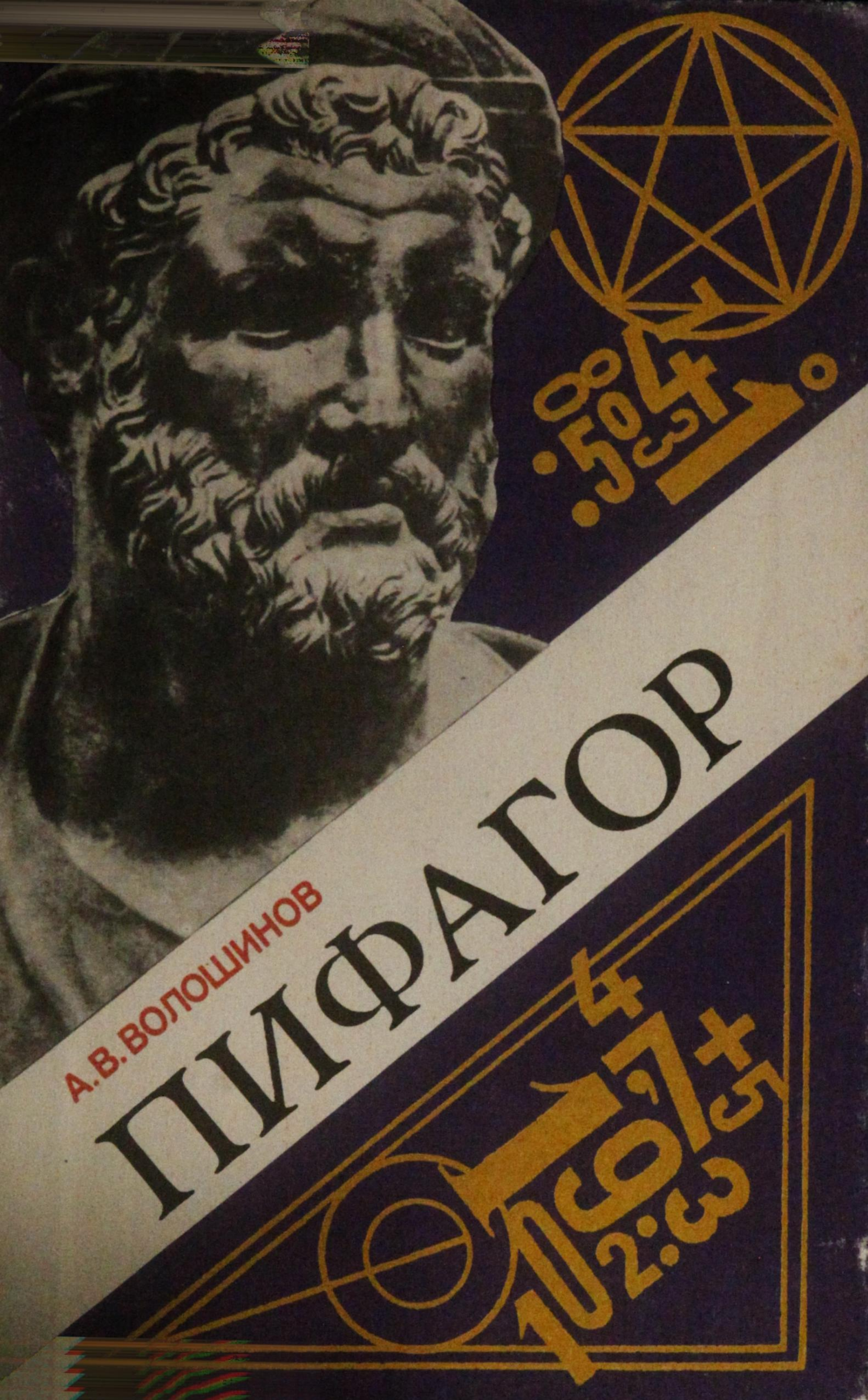


А. В. ВОЛОШИНОВ

ПИФАГОР


PYTACORA
8
16
6
4
12
2
PHYLOLAVS


PITAGORAS
4
6
8
7
12
16

В 1992 г. в рамках российской образовательной реформы была развернута программа "Обновление гуманитарного образования в России". Эта программа реализуется совместными усилиями Министерства образования России, Государственного комитета РФ по высшему образованию, Международного фонда "Культурная инициатива" и Международной ассоциации развития и интеграции образовательных систем.

Основная цель программы — гуманизация образования, создание нового поколения вариативных учебников и учебных пособий, ориентированных на ценности отечественной и мировой культуры современного демократического общества. Для реализации этой цели было организовано три тура конкурса, в котором приняло участие более полутора тысяч авторских коллективов из различных регионов России. В конкурсной комиссии работали как отечественные, так и зарубежные эксперты.

Другое направление программы — организация творческих мастерских для авторов учебников и учебных пособий, переподготовка преподавателей гуманитарных дисциплин, создание региональных экспериментальных площадок, центров гуманитарного образования, Международного центра экономического образования, Международной лаборатории гуманитарного образования и т. д.

Спонсором программы выступил известный американский предприниматель и общественный деятель Джордж Сорос.

Данное издание представляет оригинальную авторскую работу, вошедшую в число победителей конкурса. Международный фонд "Культурная инициатива" с благодарностью примет отзывы, а также замечания и предложения в адрес издания.

Стратегический комитет программы:

Евгений Ткаченко, Эдуард Днепров, Елена Ленская,
Дэн Дэвидсон, Елена Карпухина, Теодор Шанин.

Конкурсная комиссия:

Михаил Кузьмин, Виктор Болотов,
Нина Брагинская, Елена Подосенова.

А.В.ВОЛОШИНОВ

ПИФАГОР

СОЮЗ ИСТИНЫ, ДОБРА И КРАСОТЫ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1993

ББК. 22.1г
В68

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, зав. сектором истории математики ИИЕиТ РАН С. С. Демидов; научный сотрудник Института общего образования МО РФ А. Я. Крысин

Волошинов А. В.

В68 Пифагор: союз истины, добра и красоты.— М.: Просвещение, 1993.— 224 с.: ил.— ISBN 5-09-003914-3.

Пифагор (VI в. до н. э.) — не только самый популярный ученый, но и самая загадочная личность, человек-символ и человек-фантом, философ и пророк. Основоположник дедуктивного научного знания — математики и родоначальник многих мистических учений, учредитель религиозно-этического братства и создатель научно-философской школы, ставшей воистину союзом Истины, Добра и Красоты.

В книге по горсткам уцелевших античных свидетельств воссоздается образ великого мыслителя, построена авторская реконструкция биографии ученого в контексте античной культуры времен Пифагора. Излагаются основные идеи пифагорейского учения в арифметике, геометрии, космологии, музыке и обсуждается влияние этих идей на зарождение и развитие европейской науки от античности вплоть до XX в.

Книга обращена к юношеству, но будет интересна всем, кого не оставляет равнодушным великая античная культура, у колыбели которой стоял великий Пифагор.

$В\ \dfrac{4306020000-524}{103(03)-93}$ 39—93, III — IV кв. 1993

ББК 22.1г

ISBN 5-09-003914-3

© Издательство «Просвещение» 1993

Посвящаю дочери Даше,
родившейся на свет в одно время с этой книгой

27 апреля 1989 г.

ВСТУПЛЕНИЕ

Пифагор — едва ли не самый популярный ученый за всю историю человечества. Если сотни миллионов учащихся умножить на сотни исписываемых ими тетрадей в клеточку, с каждой из которых смотрит на нас таблица Пифагора, то получится астрономическая цифра. Ни одно имя ученого не повторяется так часто. Но суть, конечно, не в этих арифметических упражнениях в духе «статистика мироздания».

Пифагор был не только ученым, основателем первой научной школы. Он был и властителем дум, проповедником собственной «пифагорейской» этики, философом, которого по силе духа и силе воздействия можно сравнить разве что с его великими современниками: Конфуцием, Буддой и, возможно, Заратуштрой. Но в отличие от последних Пифагор создал самую яркую и самую современную «религию»: Пифагор воспитал в человечестве веру в могущество разума, убежденность в познаваемости природы, уверенность в том, что ключом к тайнам мироздания является математика.

Историю человечества всегда связывали с именами царей и полководцев. Между тем выдающиеся ученые могут направить цивилизацию по совершенно новому руслу. Сегодня, к несчастью, страшной ценой — ценой угрозы ядерной смерти человечества эта мысль стала очевидной для всех. Но кто и сегодня позволит себе назвать Ньютона самой значительной фигурой XVII в.? А ведь именно Ньютон определил развитие всей культуры последних трех столетий. И как Ньютон 300 лет назад раскрыл перед человечеством окно во Вселенную, так и Пифагор 2500 лет назад направил людей по пути торжества Разума.

О Ньютоне написано много. Что же можно прочитать о Пифагоре? Ничего. На русском языке нет ни одной современной книги о Пифагоре — ни научной, ни популярной[1]. Исключение, пожалуй, составляет монография А. Н. Чанышева «Италийская философия», изданная Московским университетом. Но в этой книге опущено важнейшее поле деятельности Пифагора — ма-

---

[1] Пока готовилось настоящее издание, вышла книга Л. Я. Жмудь «Пифагор и его школа» (Л.: Наука, 1990).

тематика, да и тираж книги делает ее похожей на инкунабулу.

Такое положение дел неудивительно. Начинать писать о Пифагоре просто страшно. Перед глазами предстает пустыня, по которой разбросаны горстки развалин. Кому принадлежали эти развалины? Преодолеть охватывающее чувство растерянности нелегко. Но если пристально всматриваться в зыбкое марево этой пустыни, то сказочными миражами начнут проступать очертания отживших цивилизаций, их обломки волшебным образом станут соединяться в стройные совершенные здания, здания соберутся в узкие улочки и широкие площади, которые заполнят люди со своими заботами, радостями, мыслями.

Между тем история литературы о Пифагоре знала и лучшие времена. Античные авторы наперебой рассказывали о Пифагоре, и чем дальше отстояли они от времени Пифагора (VI в. до н. э.), тем подробнее и красочнее становились эти рассказы. За 1000 лет античной истории имя Пифагора обросло таким количеством легенд, что Пифагор стал почитаться полубогом.

Так продолжалось вплоть до XIX в. Еще в 1799 г. французский философ и литератор Пьер Сильвен Марешаль опубликовал шеститомный роман «Путешествие Пифагора», в котором собрал все античные легенды о Пифагоре, нисколько не задумываясь об их критическом осмыслении. В 1804 г. этот роман единственный раз вышел на русском языке и сегодня является библиографической редкостью.

В конце XIX — начале XX в. в литературе о Пифагоре возникает обратная волна, настает время гиперкритического отношения к Пифагору. Пифагора объявили легендой, а все научные достижения стали приписывать группе его учеников — пифагорейцев. Впрочем, и это неново: так уже говорили о Гомере, Шекспире, Дюма. Досталось Пифагору и в советской литературе: в известный период его называли не иначе как идеологом реакции и мракобесом. Еще дальше «продвинулся» один итальянский историк, объявивший Пифагора «античным фашистом».

Где же лежит истина о Пифагоре? Истина лежит за легендой. Нужно только отделить кусочки легенды от целого истины так же, как советовал Микеланджело отделять лишний мрамор от статуи, спрятанной в куске мрамора. Легко ли это сделать?

Итак, вопросов, связанных с личностью Пифагора, великое множество. Лучше сказать, что вся биография Пифагора является сплошным знаком вопроса. Был ли Пифагор учеником Ферекида и встречался ли он с Фалесом? Путешествовал ли Пифагор в Египет? Был ли Пифагор в Вавилоне, и если да, то в качестве пленника Камбиза или по доброй воле? Встречался ли Пифагор с Заратуштрой? Пожалуй, только на последний вопрос можно дать достоверный ответ — отрицательный. Остальные вопросы, как и масса других, видимо, так и останутся предметом научных споров, хотя итог этим спорам еще в конце XIX в. пытался подвести немецкий исследователь античности Э. Целлер: «Я считаю недоказанным пребывание Пифагора в Египте, но и доказать, что он там не был, также невозможно». Только чудо, равное открытию Трои Генрихом Шлиманом (1822—1890), может принести новые достоверные материалы о Пифагоре.

Составление хронологии жизни Пифагора приводит к дополнительным трудностям, которые подчас и сегодня рождают новые легенды. Так, некоторые авторы сообщают, что в Египте Пифагор попал в плен к персидскому завоевателю Камбизу, был отправлен в Вавилон, где в течение семи лет изучал теорию чисел, астрологию и другие науки, а затем в 530 г. до н. э. поселился в Кротоне. Но Камбиз завоевал Египет в 525 г. до н. э., и, таким образом, легко подсчитать, что эти сообщения не стыкуются на 12 лет. Подобных недоразумений немало, и в разных биографиях они разные.

Пытаясь увязать важнейшие моменты биографии Пифагора с известными историческими событиями, автор предлагает свою версию биографии ученого. Собственно, версия эта сводится к единственному предположению, ибо главную задачу мы видели прежде всего в том, чтобы по возможности оставаться в рамках сложившейся традиции о Пифагоре. Традиция же почти единодушно утверждает, что, вернувшись из дальних странствий на родину, Пифагор был вынужден покинуть родной Самос в возрасте акме (ακμη — край, кончик, высшая степень зрелости), т. е. в возрасте около 40 лет, протестуя против расцветшей там тирании Поликрата. Зная хронологию деятельности Поликрата, получают две даты из жизни Пифагора: около 530 г. до н. э.— возраст акме и около 570 г. до н. э. — год рождения. Обе эти даты на сегодня наиболее употребительны.

Но как мы видели, 530 г. до н. э. — год отплытия Пифагора из Самоса в Кротон — противоречит 525 г. до н. э. — году завоевания Египта Камбизом и году пленения Пифагора. Разрешить это противоречие можно двояко: либо считать, что Пифагор вернулся на родину где-то после 520 г. до н. э., но в это время Поликрат уже был убит, либо отказаться от факта пленения Пифагора Камбизом.

Нам не хотелось лишать биографию Пифагора такого драматического периода, как вавилонский плен. При этом нами руководило не столько стремление к остроте сюжета, сколько сама логика отношений между Востоком и Элладой. Пифагору просто необходимо было зачерпнуть «вавилонской мудрости»: более развитая вавилонская наука того времени явилась фундаментом или по крайней мере первотолчком для греческой науки. Ведь и теорема Пифагора была начертана на глиняных вавилонских табличках более чем за 1000 лет до рождения Пифагора. Не явилось ли созерцание этих табличек тем импульсом, который подтолкнул Пифагора к строгому доказательству теоремы?

Итак, следуя античной традиции, мы полагаем, что Пифагор был взят в плен Камбизом, но не во время его египетского похода, в 525 г. до н. э., когда Камбиз был царем Персии, а ранее. Это могло произойти около 536 г. до н. э. по пути Пифагора из Египта на родину где-нибудь в Малой Азии, которая к тому времени уже была покорена персами. Отряд, руководимый Камбизом — сыном персидского царя Кира, пленил странствующих греков и препроводил их в Вавилон. (После 539 г. до н. э. Вавилон стал одной из резиденций Кира.) В 530 г. до н. э. Кир отправился в поход в Среднюю Азию, где потерпел поражение и погиб. Пифагор мог воспользоваться смутным временем и бежать на родину.

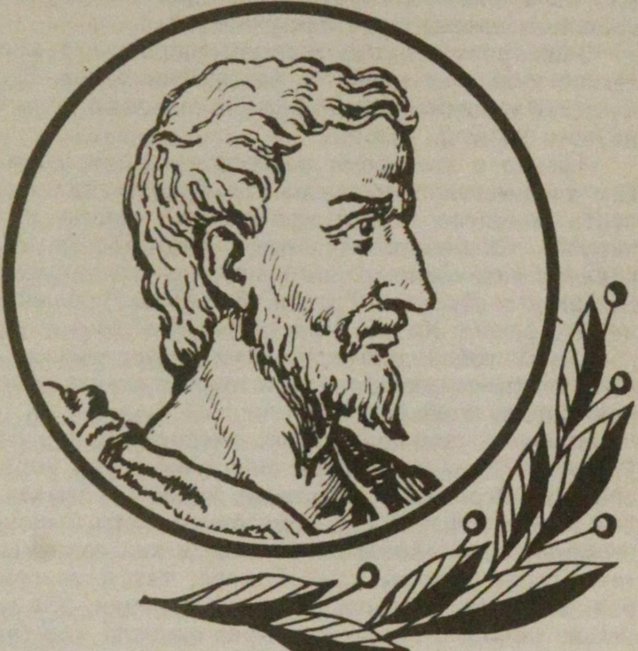
Итак, согласно нашей версии, Пифагор около 11 лет пробыл в Египте и около 6 лет — в Вавилоне. Это ровно в два раза меньше тех цифр, которые приводит древнегреческий философ Ямвлих (ок. 250 — ок. 330) — автор сочинения «Жизнь Пифагора». Памятуя о склонности древних к преувеличениям, наши сроки представляются вполне реальными, для того чтобы преодолеть языковой барьер и овладеть неизвестными науками, тем более речь идет о личности незаурядной.

Надо сказать, что сочинение Ямвлиха, написанное через 800 лет после смерти Пифагора,— одна из наиболее поздних и наиболее приукрашенных античных биографий великого мудреца. И здесь помимо общечеловеческой страсти к преувеличениям скрыты и более глубокие причины. Дело в том, что и Ямвлих, и другой поздний биограф Пифагора — Порфирий (ок. 233 — ок. 304) были неоплатониками — идейными вождями нового философского течения, ставшего теоретическим фундаментом борьбы язычников против христиан. В своих биографиях Пифагора Ямвлих и Порфирий (первый был также автором большого «Свода пифагорейских учений», а второй — объемистого сочинения «Против христиан») ставили целью показать, что явление Иисуса Христа не было уникальным и чудесным событием в жизни человечества, что мессии, подобные Христу, неоднократно посещали землю и таковым, в частности, за полтысячелетия до Христа был и Пифагор. Под знаменем неоплатонизма в середине IV в. римский император Флавий Юлиан возглавил гонения на христиан, за что впоследствии был прозван христианским духовенством Юлианом Отступником. Таким образом, сочинения Ямвлиха и Порфирия, завершающие цикл античных преданий о Пифагоре, преследовали отнюдь не однозначные цели, хотя, разумеется, нет никаких оснований подвергать их огульному отрицанию.

Таковы были принципиальные трудности, стоявшие перед автором в начале пути. Но мощное силовое поле, излучаемое личностью Пифагора, поддерживало автора. И если из вихрей ноосферы удалось извлечь интеллектуальную и духовную энергию Пифагора и через 2500 лет передать ее юному читателю, значит, путь, начатый автором, пройден недаром.

ЖИЗНЬ ПИФАГОРА

ЗА ЛЕГЕНДОЙ – ИСТИНА



> Итак, от этих занятий вся Италия наполнилась философами, и, будучи раньше страной неизвестной, позже она, благодаря Пифагору, была названа Великой Грецией, и у них явилось весьма много философов, поэтов и законодателей.
>
> *Ямвлих*

1. ПРОЛОГ. КОЛЫБЕЛЬ ЕВРОПЕЙСКОЙ ЦИВИЛИЗАЦИИ

Если XIV—XVI вв. принято называть эпохой Возрождения — временем второго рождения забытого античного наследия, то какой период в истории человечества следует назвать эпохой Рождения — временем появления самой античной культуры? Кто были они — те, кого русский поэт Валерий Брюсов назвал красивым именем «учители учителей»?

Общепринятого ответа на эти вопросы нет, ибо истоки человеческой культуры теряются во глубине веков. И тем не менее в качестве таковото века Рождения античной культуры мы рискнем назвать VI в. до н. э.

Именно в это время потаенное знание, дремавшее в тайниках дневнеегипетских храмов и древневавилонских зиккуратов, будто достигает своей критической массы и выплескивается наружу. Словно по мановению волшебства в разных концах планеты великие озарения коснулись лучших умов человечества. Пифагор в Древней Греции, Будда в Древней Индии, Конфуций в Древнем Китае — все они в VI в. до н. э. стали Учителями, повели за собой других, провозгласили учения, которые просуществовали тысячелетия и во многом определили будущую историю цивилизации.

Впрочем, при ближайшем рассмотрении в истории Древней Греции и Древнего Китая обнаруживается поразительно много общего: письменные памятники на обоих языках появляются во 2-м тысячелетии до н. э.; оба языка, хотя и изменившиеся, продолжают существовать и поныне, и как современные греки считают своим языком язык Гомера, так и современные китайцы родным языком называют язык Конфуция; оба народа исключительно рано и ослепительно ярко озарили мир своей философией и поэзией, и оба они оказали беспрецедентное воздействие на соседние народы как на Дальнем Западе, так и на Дальнем Востоке. Все это вновь и вновь приводит к мысли: а не было ли у этих народов одного общего Учителя? Не унесла ли в пучины моря легендарная Атлантида, о которой мы читаем в диалогах Платона, имя истинного Учителя Учителей?

Не стоит рассматривать эту мысль только как поэтическую гиперболу, свойственную научно-художественной книге. Крупнейший современный авторитет в истории науки голландский математик Бартел ван дер Варден в одной из своих последних работ высказывает и аргументирует гипотезу о том, что в древности существовала высокоразвитая традиция математических изысканий, ставшая впоследствии фундаментом для египетской, вавилонской, китайской, греческой и индийской математики. Эту традицию ван дер Варден возводит к индоевропейским племенам, создателям мегалитических памятников 3 — начала 2-го тысячелетия на территории Британии, которые в период расселения и распространили математические знания в самые отдаленные районы Евразии.

Однако эти вопросы уводят нас слишком далеко от времени предстоящего повествования, которое и само отстоит от дня сегодняшнего ни много ни мало на 2500 лет. И если говорить о «старушке Европе», то здесь несомненно, что именно Древней Греции уготовано было стать колыбелью европейской цивилизации.

Само географическое положение Греции, омытой морем и рассыпанной в море, определило ей эту великую миссию (рис. 1). Море издревле играет огромную роль в истории человечества: оно не только дает пропитание, но и дарует общение людям. Море не только благотворно действует на ум одного человека, но и поддерживает сознание общности у группы людей — народа и нации — и тем самым содействует развитию национальной культуры. Море объединяет людей и зовет их в дорогу. Не случайно одно из древнегреческих названий моря означало дорогу. И не от древнегреческого ли «понта» (πόντος — море) проистекает русское слово «путь»?

Но особое море — Средиземное. Оно омывает сразу три континента. Его лазурные воды ласкают и согревают все живое. И уж вовсе уникальна его восточная часть — Эгейское море, лежащее между Балканским полуостровом и Малой Азией. Во всем Эгейском море нет точки, удаленной от суши — будь то материк или ближайший остров — более чем на 60 км, как и во всей Греции нет места, отстоящего от моря более чем на 90 км.

Россыпи островов, больших и малых, покрывают Эгейское море. Не успеешь отплыть от одного из них, как на горизонте появляется второй, затем — третий. Круг Киклады[1] — вершины некогда ушедшего под воду горного хребта — и небрежно разбросанные Спорады[2] создавали идеальные условия для древнего мореплавателя, для которого упускать берег из виду было безумием. Эти острова стали опорами незримого моста, связавшего Азию с Европой (рис. 2).

Эгейское море для древних греков — это не просто место ловли кефали или сардин, но это и путь к иным народам и иной культуре, это дорога к невиданным произведениям искусства

---

[1] Киклады — от ϰύϰλος — круг. Острова Киклады образуют вытянутый круг, обрамляющий остров Делос.

[2] Спорады — от σπορᾰδιϰός — рассеянный, отдельный.

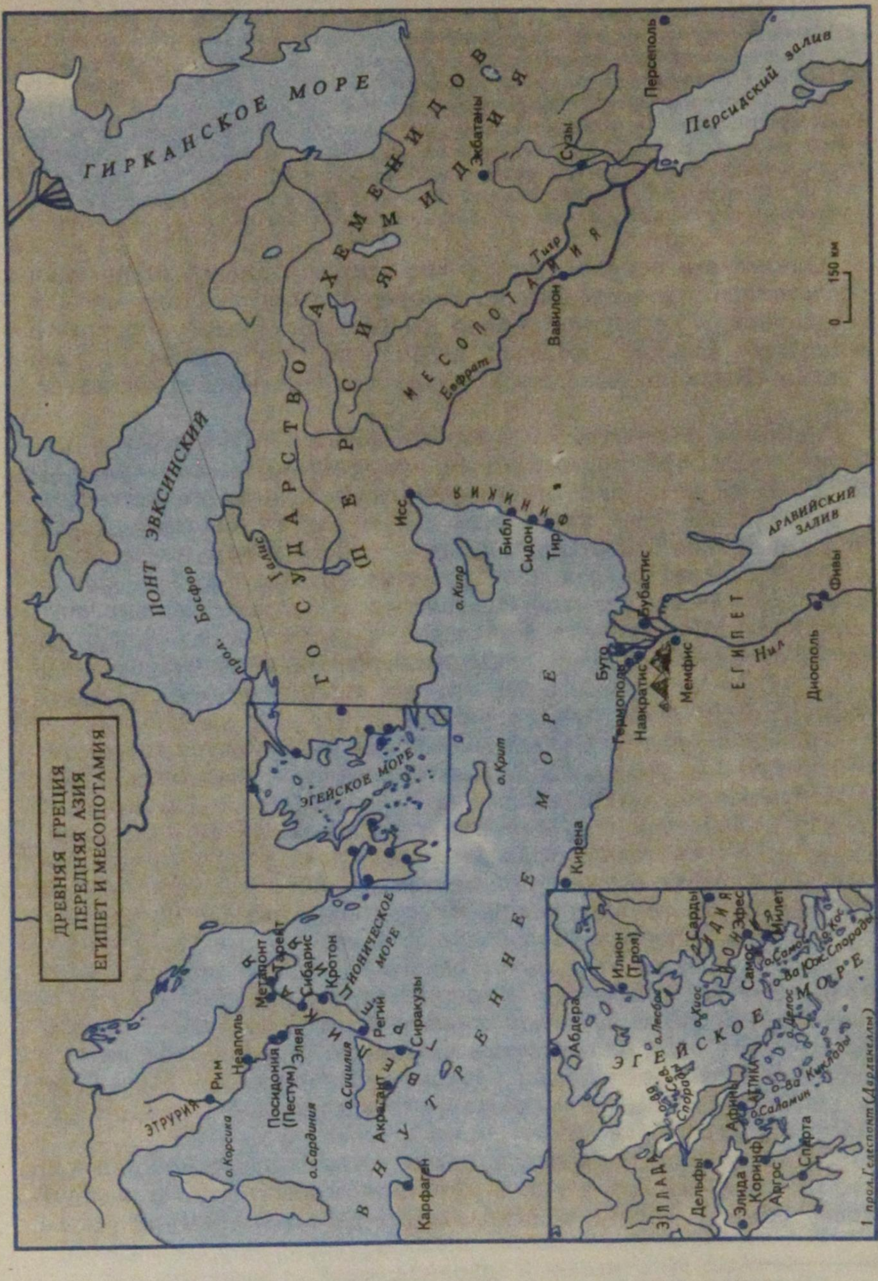


Рис. 1. Античный мир в VI в. до н. э. Все географические названия, упоминаемые в книге, отражены на карте.

и сказочным восточным богатствам, это окно в неведомый мир знаний, хранимый скупыми на слова восточными мудрецами. Море — это путешествие в волшебную страну чудес, дорогу в которую указывают звезды.

Начиная с VIII в. до н. э. у каждого большого города-государства Эллады появляются за морем свои колонии. Эти отростки сильного эллинского древа появляются всюду: в Южной Италии и по берегам Южной Галлии, в Иберии и Северной Африке, в дельте Нила и на далеком Понте Эвксинском (Черном море), где только один Милет основал около сотни поселений.

Но — и в этом источник греческого гения — открывая в плаваниях новые земли, вступая в прямые контакты с великими восточными цивилизациями, греки умели найти в себе способности усваивать их уроки, а не отмахиваться от них. Греки не только впитывали мудрость великих учителей, но и творчески преломляли ее, а главное — сказочно обогащали.

«Что бы эллины ни перенимали от варваров[1], они всегда доводили это до более высокого совершенства». Эти слова Платона из его посмертного диалога «Эпиминос», хотя и принадлежат эллину, очень точно передают суть интеллектуальных отношений между Востоком и Элладой. Вот почему именно восточ-

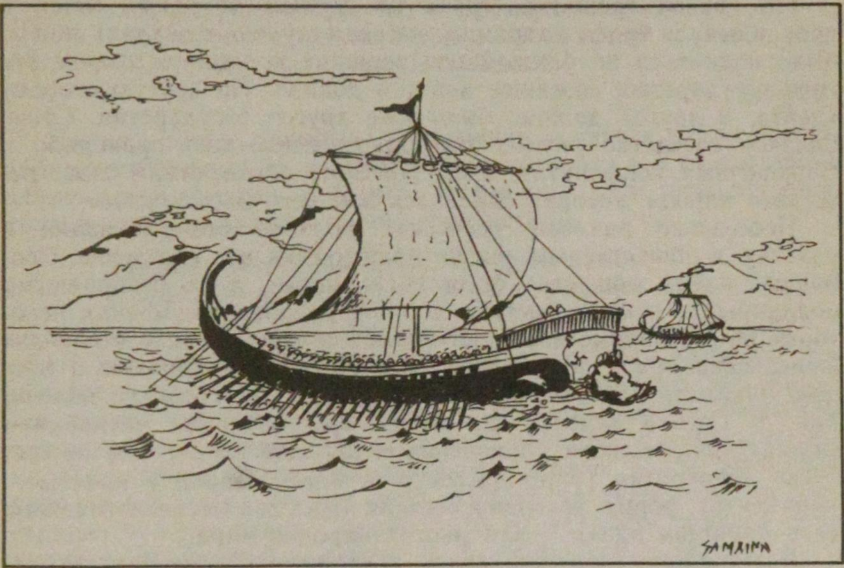


Рис. 2. Самоина — самосский военный корабль времен Пифагора.

---

[1] В слово «варвар» греки не вкладывали сегодняшнего уничижительного смысла. Это был просто иностранец, говорящий на непонятном языке и потому оставляющий впечатление какого-то бормотания — «бар-бар».

ные греки, и прежде всего ионийцы и эолийцы, заложили основы философии (Фалес из Милета), математики (Пифагор с острова Самос), лирической поэзии (поэтесса Сапфо с острова Лесбос). Так зарождалась новая оригинальная культура, так по незримому островному мосту перетекала в Европу древняя восточная мудрость.

Но и материковая Греция, изрезанная горными хребтами и глубокими долинами, походила скорее на группу островов, на каждом из которых протекала своя жизнь. Горные кряжи, будто стены крепостей, защищали жителей долин от смертоносных вихрей завоеваний, беспрепятственно проносящихся над беззащитными равнинами. Сама природа способствовала возникновению в Греции сотен обособленных городов-государств (по-гречески полисов: πόλις — город), цепко державшихся за свою политическую и хозяйственную независимость.

По сравнению с огромными рабовладельческими деспотиями Древнего Востока и уж тем более по сегодняшним меркам размеры этих государств были смехотворно малы. Например, по подсчетам профессора С. Я. Лурье, население беотийского государства Хорсий в III в. до н. э. составляло 64 человека. Впрочем, и сами Афины в лучшие времена имели не более двух-трех сотен тысяч жителей.

По крутой тропинке (греки не любили обходных путей и прокладывали тропы напрямик, высекая ступени в скалах) можно было подняться на ближайшую вершину и окинуть взором все свое государство, лежащее внизу в долине. По другую сторону хребта, в другой долине, было уже другое государство. Столь близкое соседство разных государств неизбежно приводило к бесконечным конфликтам. Увы, это была неизлечимая язва греческого народа, которая оказалась для него смертельной.

Небольшие размеры греческих полисов стимулировали к участию в общественной жизни практически все население. Свободные члены общества были гражданами, а не бесправными подданными, как на Востоке. В пору расцвета в Афинах некоторые общественные должности замещались ежегодно в порядке жеребьевки, город практически не знал слоя чиновников, а высшим законодательным органом было собрание граждан полиса, Так, в Греции задолго до нашей эры возникла невиданная форма политического управления — народовластие, или по-гречески демократия (δημο-ϰρατία — от δημος, народ и ϰρατέω — управлять), форма, которая и сегодня через два тысячелетия является манящим идеалом для многих народов мира.

Возможность общения сразу всех жителей государства породила дух состязательности, который пропитал все слои общественной жизни Эллады. Каждый праздник, посвященный любому из богов, а богов в Древней Греции было великое множество, непременно заканчивался соревнованиями атлетов, состязаниями певцов, танцоров, музыкантов, поэтов, конкурсами трагиков, комедиантов, ремесленников, конкурсами красоты — и женскими, и мужскими. На время всенародных Олимпийских или Пифийских игр воюющие стороны складывали оружие, толпы людей устремлялись по дорогам Греции к месту состязаний, жизнь в городах замирала. Награда победителю была, как правило, невелика — лавровый венок или корзина винных ягод, но всегда эта награда была очень почетна. В исключительных случаях победителю ставили памятник или избирали на ответственные государственные должности. Так, величайший драматург Эллады Софокл (ок. 496—406 до н. э.) после своей «Антигоны» был избран военачальником и, надо сказать, с честью провел ряд военных операций.

Раскрепощенный ум, чувство свободы и собственного достоинства породили взрывоподобный всплеск интеллектуальных сил Греции. Неугомонная мысль забурлила в узких, а порой и грязных улочках греческих полисов. Не в помпезных державах Древнего Востока с их чудовищно громадными пирамидами, храмами, статуями, фантастическим богатством, а в бедности, но в свободе взрастала беспримерная по силе интеллекта и духа культура. Торжество человеческого разума стало главным богатством и невиданным завоеванием греческого народа.

Влилась в века Эллада, как вино,—
В дворцовой фреске, в мраморном кумире,
В живом стихе, в обточенном сапфире,
Явя, что было, есть и суждено.

(В. Брюсов)

Именно греки первыми из древних народов стали искать тайны мироздания не в религиозных канонах, а в самом мироздании, окружающем человека. И именно греки первыми ощутили щемящую радость постижения истины.

Трижды счастливы души, которым дано
Подняться до истин подобных и звездное небо измерить.

В этих двух строках древнеримского поэта Овидия (43 до н. э.— ок. 18 н. э.) заключен еще один кладезь, которым владели древние греки (и которым они щедро одарили древних римлян),— это тонкое чувство прекрасного. С молоком матери впитывали греки краски щедрой Эллады: синеву неба, лазурь моря, золото морского песка, зелень вздыбленных хребтов, блеск неприступных скал и вновь синеву неба. «Гармоническая природа этой страны, чуждая всякой чудовищной громадности, всяких чудовищных крайностей,— писал В. Г. Белинский,— не могла не иметь влияния на чувство соразмерности и соответственности, словом, гармонии, которое было как бы врожденно грекам».

Никакой другой народ не был так богато и счастливо одарен природой. Склонные к веселью и наслаждениям, с радостью предаваясь пению, танцам и гимнастическим упражнениям, греки в то же время имели пытливый ум и живое стремление к знаниям, проницательный и трезвый взгляд на природу, лишенный схоластических умствований египетских и вавилонских мудрецов.

Чувством прекрасного и чувством гармонии пронизана вся греческая культура. Художники боготворили красоту человеческого тела, поэты воспевали радость жизни, но и ученые, все изучая и все испытуя согласно законам разума, мыслили не только логическими категориями, но и живыми образами. Величайший философ Платон (428 или 427—348 или 347 до н. э.) писал нежные лирические стихи:

Яблоко это тебе я кидаю. Поймай, если любишь,
И отведать мне дай сладость твоей красоты...

Вообще наука и искусство шли в Древней Греции рука об руку, а математика и музыка назывались родными сестрами.

Таковы были древние греки, подобно смеющемуся солнечному лучу явившиеся на небосклоне истории. Такова была великая греческая культура, которую Гегель сравнил с быстро облетающей розой.

Таков Эллады край чудесный,
Уже умершей, но прелестной.

(Дж. Г. Байрон)

И все же не следует забывать о двух тысячелетиях, отделяющих нас от Древней Эллады. Мы восхищаемся мудростью древних эллинов, предугадавших многие пути развития и многие принципиальные проблемы современного научного знания, но мы и снисходительно улыбаемся, видя их конкретные результаты — слишком далеко вперед ушло современное естествознание. Идея симметрии, положенная древними греками в основу строения атома,— эта в чистом виде идея XX в.— поражает нас своей прозорливостью, однако ее воплощение — сами атомы, мыслимые Платоном в виде правильных многогранников,— кажется сегодня безнадежно наивным. Нас пленяют беломраморные шедевры Эллады, ее восхитительные статуи и безупречные храмы, и мы не думаем о том, что во время жертвоприношений по их отполированным ступеням текли потоки крови, а безмятежная лазурь безоблачного неба была пропитана запахом крови и горящего жира.

Вообще ослепительный свет греческого интеллектуального и художественного гения никак не проникал в сумрачные подвалы их нравов и суеверий, бывших не только забавными, но порой и чудовищно жестокими. Чтобы весна вновь вернулась на землю, в Афинах ежегодно устраивалось пышное бракосочетание самой знатной афинянки, жены первого сановника города, с деревянной статуей бога плодородия Диониса, хранившейся весь год взаперти специально для этого случая; для избавления города от несчастий существовал ритуал изгнания «козлов отпуще-

Рис. 3. Ника Самофракийская — олицетворение победы, ставшая и символом духовного взлета Древней Эллады. Мрамор. Конец IV в. до н. э. Париж. Лувр.

ния», каковыми часто оказывались несчастные жители города: их жестоко избивали прутьями из морского лука, затем сжигали и пепел развеивали над морем; прославленный полководец Фемистокл накануне Саламинской битвы принес в жертву богу Дионису-Пожирателю трех знатных персидских юношей, трех красавцев — племянников персидского царя, одетых по этому случаю в роскошные, шитые золотом одежды; мудрый Демокрит, основоположник материализма и создатель учения об атомах, призывал девушек во время регул трижды обегать засеянное поле, дабы оно одарило крестьянина обильными всходами. И т. д., и т. д., и т. д.

С тех пор мир неузнаваемо переменился. Но сила и слава античной культуры продолжает сиять в веках. По двум столбовым дорогам философии — дорогам Платона и Демокрита — идут современные философы: мудрость Пифагора, энциклопедичность Евклида, искрометность идей Архимеда продолжают восхищать и питать современных математиков, совершенство линий Парфенона и божественная красота Афродиты Милосской два с половиной тысячелетия вдохновляют художников (рис. 3).

И все-таки как и почему именно в Греции, будто Афродита из пены морской, родилась поразительно современная культура? Два тысячелетия лучшие умы человечества пытаются постичь этот непостижимый феномен «греческого чуда». Вот почему нам остается лишь вернуться к началу пролога и с гордостью констатировать: Греция — это слава человеческой культуры, Греция — колыбель европейской цивилизации.

2. ВРЕМЯ СЕМИ МУДРЕЦОВ

Прежде чем приступать к жизнеописанию героя, естественно остановиться на времени, в котором он жил. Необходимо познакомиться с властителями дум, определявшими духовный климат эпохи, а значит, и изначальное мировоззрение героя. Наконец, следует рассказать о тех предтечах и учителях, на чьем фундаменте вырастало здание, построенное героем.

В случае с Пифагором эта задача (как, впрочем, и любая задача, связанная с Пифагором) становится не из легких: слишком мало мы имеем достоверных сведений и слишком много легенд. Вообще «мифологическое начало» в те далекие времена играло огромную роль как в художественном, так и в научном творчестве греков. Греческое мировоззрение выросло в недрах мифологии и, разумеется, не могло в одночасье расстаться с пестрым букетом красивых мифов. Поэтому не раз еще в нашем повествовании предания будут перемежаться с былью.

Но как прекрасны древнегреческие предания! Вся русская поэзия XIX в., начиная с великого Пушкина, пронизана любовью

Рис. 4. Ж. Л. Давид. Елена и Парис. 1788. Париж. Лувр. В правом дальнем углу стоит треножник, который вскорости беглянка Елена выбросит в море со словами «Быть за него борьбе!»

к греческой мифологии. Не следует и нам, детям рационалистического XX в., века науки, которому так часто не хватает поэзии и душевной щедрости, пренебрежительно отмахиваться от этих «сказок». Тем более что и мифы хранят в себе зерна истины и поучительной мудрости, как поучительно мудры были сказки, услышанные нами в детстве...

Однажды бог огня Гефест, бог-кузнец, дивный мастер кузнечного ремесла, выковал в подарок к свадьбе героя Пелопа золотой треножник[1]. После смерти Пелопа при его погребении были устроены игры, давшие начало Олимпийским играм, а треножник перешел к спартанскому царю Менелаю. Затем вместе с красавицей Еленой, женой Менелая, треножник был похищен

---

[1] Треножник — это прообраз современного спортивного кубка. Первоначально треножник представлял собой поставленный на три ноги бронзовый сосуд для приготовления пищи. Поскольку металл в древности был редкостью, а сама вещь — жизненно необходима в хозяйстве, треножник стал предметом вожделений каждого грека. Со временем золотым треножником стали награждать победителей Олимпийских игр, Пифийских игр в Дельфах и других состязаний, столь любимых и почитаемых греками.

Рис. 5. Семь мудрецов. Третью фигуру слева, указывающую на небесную сферу, часто отождествляют с Фалесом. Прорисовка с римской мозаики из виллы Торре Ануциата близ Помпей. I в. до н. э. Неаполь. Национальный музей.

троянским царевичем Парисом, из-за чего, как известно, и вспыхнула вскоре Троянская война (рис. 4). Однако по пути в Трою Елена выбросила треножник в море, сказав: «Быть за него борьбе!»

Прошло время, отгремела Троянская война, и несколько жителей острова Кос, лежащего у берегов Малой Азии, купили как-то у рыбаков весь их улов, в котором и был обнаружен треножник. Рыбаки и купцы стали спорить из-за него, но, так ничего и не добившись, поплыли в город Милет, свою метрополию (μητρό-πολις — от μήτηρ — мать и πόλις — город), за разрешением спора. Однако милитяне, завидев сказочную вещь, пошли на Кос войной за треножник, и много народу пало с обеих сторон. Долго продолжалось кровопролитие, и обессилевшие противники обратились к оракулу, который повелел отдать треножник мудрейшему. Обе стороны признали таковым милетянина Фалеса — философа, путешественника, купца, самого уважаемого гражданина Милета. Спор был исчерпан.

Но Фалес не принял подарка. Он посчитал более достойным афинского законодателя Солона и отослал треножник ему. Затем история повторилась, и так треножник обошел коринфского тирана[1] Периандра, Питтака из города Милетины, Клеобула с острова Родос, спартанца Хилона и Бианта из города Приены. Разумеется, круг замкнулся, треножник вернулся к Фалесу, и тот посвятил его Аполлону Дидимейскому[2].

Такова легенда о **семи мудрецах** (ἑπτά οἱ σοφοί). Характерно, что, начинаясь с личности, бесспорно, мифической — бога Гефеста, легенда заканчивается лицами историческими: все семь мудрецов жили в конце VII — начале VI в. Правда, в разных вариантах предания встречаются разные семерки мудрецов, так что общее число мудрецов переваливает за десять. В иных семерках мы видим и имя Пифагора. Но важно другое: греческое предание в магическое число семь собирает не тиранов и полководцев, не богатейших и знатнейших людей, а именно мудрецов (рис. 5). Именно мудрецы являлись властителями дум в конце VII — начале VI в., именно вера в могущество человеческого разума и одновременно восхищение им определяли духовный климат этой эпохи, которую стали называть **временем семи мудрецов.** Таким образом, легенда о семи мудрецах — это дань уважения пробуждающимся интеллектуальным силам Греции, это знак признательности тем, кто закладывал первые камни в фундамент государства и нового миропонимания. Подобно олимпийским богам — Зевсу, Посейдону, Аиду, Афродите, Аполлону, Артемиде, Афине, семь мудрецов — это олимпийцы и патриархи греческой мудрости.

Семь мудрецов называют — их родину, имя, реченье:
«Мера важнее всего»,— Клеобул говаривал Линдский;
В Спарте: «Познай себя самого»,— проповедовал Хилон;
Сдерживать гнев увещал Периандр, уроженец Коринфа;
«Лишку ни в чем!» — поговорка была милетинца Питтака;

---

[1] Тиран (τυραννος — властелин) — в древнегреческих полисах лицо, насильственно захватившее власть. На первых этапах политика тиранов (тирания) была направлена на ограничение влияния родовой аристократии, улучшение положения ремесленников, крестьянства, беднейшего городского населения, оживление торговли и колонизации. Однако, как правило, конец правления тирана знаменовался жестоким насилием, откуда и пошло нарицательное значение слова.

[2] Древний храм Аполлона, воздвигнутый близ Милета в местечке Дидимы, славился по всей Элладе. Толпы паломников со всех концов Греции стекались на поклонение знаменитому оракулу Аполлона Дидимейского. Из Милета в Дидимы вела широкая «Священная дорога», по обе стороны которой стояли мраморные статуи с изображением богатых жертвователей Дидимейского храма.

«Жизни конец наблюдай»,— повторялось Солоном Афинским;
«Худших везде большинство»,— говорилось Биантом Приенским;
«Ни за кого не ручайся»,— Фалеса Милетского слово.

(Эпиграмма неизвестного античного автора)

Как видим, каждому мудрецу приписывалось некое крылатое выражение, которое высоко ценилось греками, высекалось на гермах[1] и ставилось на перепутьях дорог.

Конечно, по прошествии двух с половиной тысячелетий можно критически отнестись и к составу мудрецов, и к самой их «мудрости», состоящей по большей части из остроумных ответов, не требующих никакой философии. Из семи мудрецов, почитаемых античностью, неумолимое время отобрало только Фалеса, который сегодня считается родоначальником европейской философии. Кстати, и сам Пифагор полагал, что мудрецом может быть только Бог, человек же в лучшем случае может быть лишь любителем мудрости — любомудром, или по-гречески философом: «Ибо преждевременно было бы философию называть «мудростью», а упражняющегося в ней — «мудрецом», как если бы он изострил уже свой дух до предела; а философ («любомудр») — это просто тот, кто испытывает влечение к мудрости».

Что касается большинства остальных мудрецов, то помимо изреченных ими банальностей они выделялись порой упрямством, хитростью и даже злодейством. В последней «премудрости» превзошел всех тиран Периандр (ок. 660 — ок. 585 до н. э.), который состоял в брачных отношениях со своей родной матерью, убил свою беременную жену и сжег своих наложниц. Не погнушался Периандр и отобрать наряды у женщин, прибывших на празднества, чтобы украсить этими драгоценностями свою золотую статую, отлитую по случаю олимпийской победы. Перед смертью он убил несколько человек, чтобы скрыть место своего захоронения (вот он, финал тирана, начинавшего с прогрессивных преобразований!). В то же время Периандр демонстрирует коварное лицедейство, изрекая: «Кто хочет править спокойно, пусть охраняет себя не копьями, а всеобщей любовью» или «Наслаждение бренно — честь бессмертна». В устах кровавого тирана эта красивая «мудрость» звучит как откровенная ложь.

Но кто по праву включался во все списки мудрецов и, бе-

---

[1] Герма (ερμῆς) — четырехгранный столб, завершенный скульптурным изображением головы бога путников и дорог Гермеса (откуда и пошло название). Гермы служили межевыми знаками, а в Аттике ставились на дорогах через каждую тысячу пар шагов. Позднее гермы венчались изображениями других богов, а потом и государственных деятелей и мудрецов. В последнем случае на гермах высекались крылатые выражения мудрецов и надписи нравоучительного характера.

зусловно, был духовным отцом Пифагора, так это Солон (ок. 640—559 до н. э.) и Фалес (ок. 625—547 до н. э.).

Афинянин Солон происходил из знатного, но обедневшего рода. В то время Афины вели борьбу за остров Саламин, имевший для Афин важное стратегическое положение. Война за Саламин была столь долгой и кровопролитной, что в конце концов афиняне отказались от борьбы, постановив казнить смертью всякого, кто заговорит о Саламине. Солон тяжело переживал унизительное перемирие, тем более что Саламин был его родиной. Однажды, притворившись сумасшедшим, Солон ворвался на городскую площадь, влез на камень, с которого обычно вещали ораторы, и стал неистово декламировать:

«На Саламин! Поспешим и сразимся за остров желанный,
Чтобы с отчизны стряхнуть горький и тяжкий позор».

Народ пришел в волнение, война с мегарянами — жителями Саламина — была возобновлена, а во главе афинского войска встал Солон. Тем временем на мысе напротив Саламина афинские женщины по древнему обычаю справляли фесмофории — пятидневный праздник в честь богини земледелия Деметры. Солон послал на Саламин верного человека, который выдал себя за перебежчика и посоветовал мегарянам захватить знатных афинянок. Мегаряне поверили ему и послали к аттическому берегу корабль с отрядом. Солон же велел женщинам уйти прочь, а юношам, не имеющим бороды, переодеться в их платья, спрятав под платьями кинжалы, и продолжать игры и пляски на берегу. Доверчивые мегаряне высадились на берег и все были перебиты. Афиняне тем же кораблем отплыли на Саламин и овладели им. Победа афинян была полной, и Солон стал самым популярным человеком во всей Аттике.

Но внутренние раздоры в Афинах не прекратились: беднейшее крестьянство оставалось в кабальной зависимости от владельцев земель и городских ростовщиков. Необходимы были реформы, и взоры всех с надеждой обратились на Солона. В 594 г. до н. э. Солона избрали архонтом[1] с правом отменять старые и вводить новые законы. Борющиеся стороны единодушно призывали Солона стать тираном Афин, однако он мудро отказался, заметив, что тирания — это такое место, на которое легко взобраться, но трудно оставить. Солон отменил все долговые обязательства и впредь запретил обращать афинян за долги в рабство. Однако Солон не стал распределять землю поровну, как того требовали обездоленные крестьяне, прозорливо заметив: «Если в государстве перевернуть все вверх дном, то у него не хватит сил поставить все на место». Воистину мудрость древних поразительно современна!

---

[1] Архонт (αρχων — вождь, предводитель) — выборное должностное лицо в Афинах. Ежегодно в Афинах избиралось девять архонтов, которые ведали всеми важнейшими государственными делами.

Закон «снятия бремени» наряду с другими законами прославил имя Солона. Законы Солона были вырезаны на деревянных вращающихся четырехгранных столбах и выставлены для всеобщего обозрения на центральной площади Афин — агоре[1]. Впрочем, сам Солон реалистично оценивал действенность своих законов и говорил, что законы подобны паутине: они удерживают слабого, но не в состоянии противостоять сильному, который их обязательно разорвет. Поощряя ремесла, Солон издал закон, по которому сын мог не кормить отца, если тот не выучил его какому-либо ремеслу. Издал Солон и закон, запрещающий дурно говорить об умершем, который впоследствии стал крылатым латинским выражением: De mortuis nil nisi bene (О мертвых или хорошее, или ничего).

Когда Солона спросили, самые ли лучшие законы он дал афинянам, он ответил: «Да, самые лучшие из тех, какие они могли принять». Солон понимал, что своими законами он никому не угодил: богатых он озлобил уничтожением долговых обязательств, а бедных — тем, что не произвел требуемого ими передела земли. Поэтому, взяв с афинян клятву, что его законы не будут меняться в течение ста лет, Солон на десять лет покинул Афины. Прощаясь с Солоном, афинские архонты клялись, что если кто-либо из них нарушит хоть что-то в солоновых законах, то он посвятит богу Аполлону в Дельфах золотую статую, равную своему росту.

Солон отправился путешествовать. Он посетил Египет, остров Кипр, а затем по приглашению лидийского царя Креза прибыл в его столицу Сарды, находящуюся в Малой Азии. Крез, царствовавший с 560 по 546 г. до н. э., был не только самым богатым царем того времени, но и по сей день его имя олицетворяет несметные богатства. Вот как описывает появление Солона во дворце Креза Плутарх[2]. «С ним случилось нечто подобное тому, что бывает с жителем континентальной страны, который в первый раз идет к морю. Как тот каждую реку принимает за море, так и Солон, проходя по дворцу и видя множество придворных в богатых нарядах, важно расхаживающих в толпе слуг и телохранителей, каждого принимал за Креза, пока нако-

---

[1] Агора (ἀγορά)— торговая площадь и место народных собраний в древнегреческих полисах.

[2] Плутарх (ок. 46 — ок. 127) — древнегреческий писатель, историк и философ-моралист, почетный гражданин города Афин. Фундаментальный труд Плутарха «Сравнительные жизнеописания», где биография каждого знаменитого грека сопоставляется с жизнеописанием «соответствующего» ему римлянина (например, Солон — Попликола, Александр Македонский — Юлий Цезарь), является неиссякаемым источником, на протяжении двух тысячелетий питающим каждого исследователя античности. Монументальная картина греко-римского прошлого открывается в сочинении Плутарха, без которого наши знания о Древней Греции и Древнем Риме были бы несравненно беднее. Высокая гражданственность создала трактату Плутарха огромную популярность от гуманистов Возрождения до лидеров Великой французской революции и декабристов.

нец его не привели к самому Крезу. На нем было надето все, что из своих драгоценных камней, цветных одежд, золотых вещей художественной работы он считал выдающимся по красоте, изысканным, завидным,— конечно, для того, чтобы глазам представилось зрелище как можно более пышное и пестрое. Но Солон, став перед ним, при этом виде ни действием, ни словом не выразил ничего такого, чего ожидал Крез; всем здравомыслящим людям было ясно, что он с презрением смотрит на отсутствие у него духовных интересов и мелочное тщеславие. Крез велел открыть ему свои сокровищницы, потом подвести его и показать свою роскошную обстановку. Но Солону не было никакой надобности в этом: сам Крез собственной особой дал ему достаточно ясное понятие о своем внутреннем содержании». Говорят, в конце концов Крез не выдержал молчание Солона и, восседая на троне в пышном убранстве, спросил Солона, видел ли он что-нибудь прекраснее. Солон ответствовал: «Видел — и петухов, и фазанов, и павлинов: их убранство дано им природой и прекраснее в тысячу раз».

Явно не удовольствовавшись таким ответом, Крез спросил Солона, знает ли он человека счастливее лидийского царя. Солон ответил, что знает: это его соотечественник Телл — человек высокой нравственности, воспитавший достойных детей и погибший со славой в сражении за отечество. Ответ Солона, который не мерил счастье обилием золота и серебра, показался Крезу простым чудачеством, и он спросил, а кто же после Телла более счастлив, чем он. Тогда Солон назвал двух братьев — Клеобиса и Битона, двух могучих богатырей, которые так любили свою мать, что однажды, когда волы долго не приходили с пастбища, сами запряглись в повозку и под общее ликование афинян отвезли счастливую мать в храм Геры. «А меня ты совсем не ставишь в число счастливых людей!» — воскликнул рассерженный Крез. «Царь лидийский!— отвечал Солон.— Нас, эллинов, боги наделили таким умом, который не позволяет предвидеть будущее, полное всяких неожиданностей. Счастливым же можно назвать лишь того, кто прожил жизнь до конца без горя и невзгод. А называть счастливым человека, еще живущего,— это все равно что провозглашать победителем и венчать венком атлета, еще не закончившего поединка». С этими словами Солон удалился, обидев, но не образумив Креза.

Гостивший в это время в Сардах знаменитый баснописец Эзоп заметил Солону: «С царями, Солон, надо говорить или как можно меньше, или как можно слаще». «Нет,— возразил Солон,— или как можно меньше, или как можно лучше».

Солон и здесь оказался провидцем: в 546 г. до н. э. персидский царь Кир захватил Лидию и всю Малую Азию и осадил Сарды. Через 14 дней осады 14-летнее царство Креза пало. Некий Гидеарт, воин Кира, заметил, как какой-то лидиец спустился за упавшим шлемом по едва заметной тропке, сбегавшей с отвесной скалы сардского акрополя, и поднялся наверх. Это место акрополя считалось неприступным и не охранялось — по нему-то и ворвались персы на стены Сард.

Жестокая трагедия разыгралась в стенах царского дворца. У Креза был сын, юноша всех мер и качеств, но немой. Несчастный отец сделал все возможное для исцеления юноши. Но тщетно. Оракул дельфийской Пифии[1] также был неутешительным:

Многих народов властитель, о мидянин, Крез неразумный!
Не пожелай ты услышать вожделенного лепета сына
В доме твоем: лучше б навеки устам его быть неотверстым!
В оный ведь день, для тебя роковой, возгласит он впервые!

Какой-то перс, ворвавшийся во дворец, занес над Крезом свой меч, и в этот миг сын Креза обрел дар речи. «Человек, не убивай Креза!» — воскликнул он.

Пленный Крез был возведен на костер, и, когда пламя костра коснулось его ног, он вспомнил вещие речи афинского мудреца и в отчаянии воскликнул: «О, Солон, Солон!» Удивленный Кир, присутствовавший на процедуре сожжения, послал узнать, что за человек или Бог этот Солон, к которому в столь безысходном положении взывал Крез. Разбушевавшееся пламя костра никак не могли потушить. Но когда Крез возвал к Аполлону, то тотчас среди ясного неба разразилась буря и сильный ливень залил костер. Несчастный пленник отвечал Киру: «Это эллинский мудрец, которого я пригласил к себе, но не с тем, чтобы послушать, а для того, чтобы похвастаться своими богатствами. Так вот, он, глядя на свое тогдашнее положение, предугадал то, что теперь и случилось. Он советовал думать о будущем, а не гордиться сиюминутным непрочным достоянием».

---

[1] Пифия — жрица-прорицательница Дельфийского оракула при храме Аполлона в Дельфах. Город Дельфы, расположенный у подножия горы Парнас, был крупнейшим религиозным центром Древней Греции. К Дельфийскому оракулу обращались с вопросами как простые греки, так и цари. Прорицательница Пифия, восседая на золотом треножнике над расселиной скалы, отпивала глоток воды из священного ручья Кассотиды, жевала листы священного лавра и в состоянии экстаза изрекала ответы вопрошавшим. Эти ответы облекались жрецами храма в стихотворную форму и трактовались как пророчества, данные богом Аполлоном. Полагают, что в экстатическое состояние Пифия приходила, вдыхая поднимавшиеся из расселины скалы ядовитые испарения. Прорицания Пифии давались в нарочито неясной и двусмысленной форме и могли иметь самые противоположные толкования. Так, Крез, спросивший у Пифии, начинать ли ему войну с Киром, получил такой оракул: «Крез, Галис перейдя, великое царство разрушит». Самовлюбленный Крез не усомнился, что Пифия имеет в виду царство персов, и ошибся. Будучи пленником Кира, он отослал свои оковы в Дельфы, укоряя Пифию в неверном оракуле. Невозмутимая Пифия ответила, что Крезу следовало получить второй уточняющий оракул и, значит, винить он должен лишь себя.

Раз в четыре года в Дельфах проводились Пифийские игры в честь победы бога Аполлона над чудовищным змеем Пифоном, охранявшим некогда окрестности Дельф. Первоначально это были соревнования поэтов и музыкантов, а с 586 г. до н. э.— и состязания атлетов. Пифийские игры проводились более 1000 лет до 394 г. н. э.

Судьба Креза произвела сильное впечатление на Кира, и у него хватило мудрости перенести ее и на собственную персону. Кир не только освободил Креза, но и относился к нему с уважением в течение всей его жизни. Так своим словом Солон спас одного царя и вразумил другого[1].

Солон же благополучно вернулся в Афины, отойдя к старости от дел, и посвятил себя поэзии. В каждом возрасте, говорил Солон, нужно уметь находить свою особенную прелесть. По мнению Солона, жизнь человека меняется каждые семь лет. В первое семилетие у ребенка происходит смена зубов, к концу второго появляются признаки зрелости, к концу третьего у мальчика пробивается борода, и лишь четвертое завершается расцветом физических сил. Жениться Солон советовал в пятом семилетии, а лучшей порой жизни мужчины считал шестую, седьмую и восьмую семилетки (возраст с 36 до 56 лет). Сам Солон прожил неполных двенадцать семилеток. По воле усопшего останки Солона были перевезены на родной Саламин и пепел его развеяли по ветру.

Яркая жизнь Солона, ставшая классическим образцом для греков, конечно же, оказала влияние на Пифагора. Хотя жили Солон и Пифагор на разных берегах Эгейского моря, рассказы о Солоне, умершем в отроческие годы Пифагора, не могли не волновать воображение юного Пифагора. Сам Пифагор также не замыкался в тиши научных уединений, вел активную общественную жизнь и создал школу, прославившую его имя в веках. Но если Солон был духовным отцом Пифагора — общественного деятеля, то еще больший интерес представляет человек, ставший духовным наставником Пифагора в науке. Таким человеком был Фалес.

Античная традиция единодушно называет Фалеса отцом греческой науки, первым из семи мудрецов. Ученик Аристотеля Евдем называл Фалеса первым астрономом, римский писатель и ученый Плиний Старший — первым физиком, а карфагенянин Апулей — первым геометром: «Фалес Милетский — один из тех знаменитых семи мудрецов и, несомненно, самый великий среди них — ведь это он был у греков первым изобретателем геометрии, самым опытным испытателем природы, самым сведущим наблюдателем светил,— проводя маленькие черточки, делал великие открытия: он изучал смены времени года, ветров дуновения, планет движения, грома дивное грохотание, звезд по кругам своим блуждания, солнца ежегодные обращения, а также луну — как она прибывает, родившись, как убывает, старея, и почему исчезает, затмившись».

---

[1] Предание о Солоне и Крезе, рассказанное отцом истории Геродотом (между 490 и 480 — ок. 425 до н. э.), к сожалению, является лишь красивой легендой. Современное уточнение хронологии древней истории делает эту встречу практически невозможной, в чем легко убедиться, сопоставляя даты на с. 21 и 22. Интересна причина ошибки Геродота, о чем см. с. 28.

Некоторые древние авторы приписывают Фалесу ряд сочинений: «Морская астрология», «О солнцестоянии», «О началах», однако ни одной строчки из них до нас не дошло. Потомок знатного финикийского рода, Фалес большую часть жизни прожил в Милете, хотя и много путешествовал, был в Египте, Лидии и, возможно, Вавилоне.

Милет, расположенный на малоазийском побережье Эгейского моря, в устье реки Меандр[1], был в то время крупнейшим торговым центром Древней Греции. Жемчужиной Эллады звали этот цветущий город, утопавший в кустах лучших в мире роз. Тончайшая шерсть милетских овец, драгоценное розовое масло, пурпурные милетские плащи, знаменитый храм Аполлона Дидимейского собирали в Милет тысячи купцов и паломников. В четырех гаванях Милета толпились корабли со всей Греции, Финикии, Египта, Крита. Шел бойкий обмен товарами, но шел и непрерывный обмен идей.

Столкновение идей, привозимых в Милет со всех концов света, увлекло Фалеса. На вершине жизни, отойдя от государственных и торговых дел, Фалес обратился к умозрению природы. Как и подобает мудрецу, традиция приписывает Фалесу ряд ярких высказываний:

Больше всего — пространство, ибо оно объемлет все;
Быстрее всего — мысль, ибо она обгоняет все;
Мудрее всего — время, ибо оно раскрывает все,

а также знаменитое изречение ΓΝΩΘΙ ΣΕΑΥΤΟΝ (Познай самого себя), славу которого Фалес часто делит с Сократом[2]. Фалес утверждал, что за три вещи он благодарен судьбе: во-первых, что он человек, а не животное; во-вторых, что он мужчина, а не женщина; в-третьих, что он эллин, а не варвар. (Со временем этот афоризм также приписали Сократу, ставшему для греков воплощением мудрости.)

На вопрос: что раньше возникло — день или ночь?— Фалес ответил: «Ночь — раньше на один день». А на вопрос: можно ли скрыть от богов дурное дело?— «Ни даже дурное помышление!» Кто-то спросил у мудреца: что на свете трудно?— «Познать себя». А что легко?— «Советовать другому». Какая жизнь самая лучшая?— «Когда мы не делаем сами того, за что осуждаем других». Кто счастлив?— «Тот, кто здоров телом, восприимчив душой и податлив на воспитание».

---

[1] Меандр (ныне Большой Мендерес) — не только самая большая, но и самая извилистая река Малой Азии, откуда и пошло его нарицательное значение. В искусстве меандром называют излюбленный в Древней Греции геометрический орнамент в виде ломаной или кривой линии с завитками. Меандрами называют также излучины русла равнинных рек.

[2] Это изречение было начертано в храме Аполлона в Дельфах и, возможно, было известно и до Фалеса.

Образ самого Фалеса рисуется противоречиво. С одной стороны, он вроде бы рассеянный чудак, «не от мира сего», ведет образ жизни отшельника и на вопрос матери, почему он не женится, один раз отвечает: «Слишком рано», а другой — «Слишком поздно». Когда Солон, прославлявший в стихах радость брака, навестил в своих путешествиях Фалеса и спросил, почему у него нет детей, тот ответил: «Из-за любви к ним». Наконец, широко известен рассказ Платона о том, что однажды, наблюдая звезды, Фалес свалился в колодец, на что фракийская красавица рабыня заметила: «Хочет знать, что делается на небе, а что у него под ногами — не видит». Столь афористичное замечание красавицы рабыни скорее напоминает ход мыслей самого Платона, склонного, как и все философы, к легкой самоиронии и одновременно гордого своими неземными интересами. Не случайно, пересказывая через 2000 лет этот эпизод в своих «Лекциях по истории философии», другой великий философ — Георг Вильгельм Фридрих Гегель (1770—1831) заметил, что и философы в свою очередь смеются над людьми, «которые, разумеется, не могут упасть в яму, потому что они раз и навсегда лежат в ней и не обращают своих взоров ввысь».

С другой стороны, мы видим Фалеса как предприимчивого купца и мудрого политика, стоящего в самой гуще бурной жизни Ионии. В ответ на упрек в бедности и запустении дел Фалес заработал однажды кучу денег на торговле оливковым маслом. Правда, занятия астрономией здесь помогли Фалесу, и в этой истории можно увидеть едва ли не первый пример практического применения науки. Дело было так: на основании астрологических расчетов Фалес предсказал будущий урожай маслин. За бесценок он скупил все маслобойни в Милете и на острове Хиос, а когда созрел невиданный урожай маслин, стал сдавать маслобойни по высоким ценам.

Фалес обладал достойной выдающегося государственного деятеля проницательностью. Он советовал (хотя и безрезультатно) всем двенадцати ионийским городам объединиться, чтобы сообща противостоять внешним врагам. Другой раз, когда персидский царь Кир пошел войной на Малую Азию, Фалес предостерег сограждан от союза против Персии с лидийским царем Крезом. На сей раз Фалеса послушались. Крез был разбит, а нейтралитет Милета спас город. Но Фалес помогал и Крезу. Начав боевые действия с Киром, Крез подошел к реке Галис, но никак не мог через нее переправиться. Тогда Фалес предложил выкопать еще одно русло так, чтобы лагерь Креза стал как бы искусственным островом. Поток бурного Галиса разделился надвое, уровень воды упал, и войско благополучно переправилось.

Самым ярким событием в жизни Фалеса стало предсказание им солнечного затмения. В то время Лидия и соседняя Мидия вели затянувшуюся войну, о жуткой причине которой рассказывает Геродот. Однажды у мидийского царя Киаксара попросила убежища орда мятежных скифов-кочевников. Киаксар дружественно принял скифов и даже отдал им своих сыновей для обучения искусству стрельбы из лука, в коем скифы были непревзойденные мастера. Как-то раз, когда удачливые в охоте скифы вернулись домой с пустыми руками, Киаксар, человек вспыльчивый, оскорбил их. Тогда скифы убили одного из царских сыновей и подали его на стол приготовленным как охотничья добыча. Ничего не подозревавший Киаксар и его гости съели это ужасное угощенье, а скифы тем временем сбежали под защиту лидийского царя. Обезумевший от случившегося, Киаксар пошел войной на Лидию, отказавшуюся выдать вероломных скифов. Так у лидийцев с мидянами началась война.

«Пять лет,— рассказывает Геродот,— длилась эта война, причем верх одерживали то мидяне, то побеждали лидийцы... Так с переменным успехом продолжалась эта затяжная война, и на шестой год во время одной битвы внезапно день превратился в ночь. Это солнечное затмение предсказал ионянам Фалес Милетский и даже точно определил заранее год, в котором оно и наступило. Когда лидийцы и мидяне увидели, что день обратился в ночь, то прекратили битву и поспешно заключили мир».

Сегодня установлено, что Геродот описал в этом отрывке затмение, произошедшее 30 сентября 610 г. до н. э., тогда как Фалес предсказал затмение 28 мая 585 г. до н. э. Сдвиг событий на 25 лет привел Геродота к другой ошибке — включению в число исторических фактов свидание Креза с Солоном (см. сноску на с. 25).

Но гораздо важнее другой вопрос, который просто не укладывается в воображении: каким образом Фалес мог предсказать затмение? Ведь не на основании же расчетов по законам динамики и тяготения Ньютона? Значит, с помощью эмпирических наблюдений. Но для этого необходим опыт многих поколений, а предшественников у Фалеса в Греции не было. Выходит, Фалес был знаком с астрономией Востока. И все-таки как было предсказано затмение?

Известно, что уже в VIII — VII вв. до н. э. вавилонские жрецы умели предсказывать лунные и солнечные затмения. Вот текст одной из клинописных табличек начала VII в. до н. э.: «Четырнадцатого произойдет затмение; это неблагоприятно для Элама и Амурру (области на Ближнем Востоке.—*А. В*), но благоприятно для царя, мой господин; пусть царь, мой господин, успокоится. Оно будет видно без Венеры. Царю, мой господин, я говорю: будет затмение. Из Ирасшиилу, царский слуга».

Анализируя данные многовековых астрономических наблюдений, вавилонские жрецы заметили, что через определенный промежуток времени (позднее его назвали **саросом** — от египетского «повторение») затмения повторяются в той же последовательности. Сарос составляет 6585 дней, или 18 лет и 10—11 суток (в зависимости от числа високосных лет, приходящихся на сарос). В течение одного сароса бывает 43 затмения Солнца и 28 затмений Луны. В Британском музее хранится клинописная табличка, содержащая таблицу саросов с 372 по 276 г. до н. э., есть основания полагать, что часть таблички, уходящая в древность еще на два века — до 571 г. до н. э., обломана.

Открытие сароса является величайшим вкладом в науку вавилонских астрономов, которые, по-видимому, первыми в истории человечества научились предсказывать солнечные и лунные затмения[1]. Но дело осложняется тем, что в отличие от лунных затмений затмения Солнца видны только на небольшом участке земной поверхности, и притом не в одном и том же месте. Так что «одновременные» по саросу солнечные затмения происходят в разных точках планеты и, таким образом, предсказывать солнечные затмения только по саросу рискованно. Видимо, Фалесу повезло, и предсказанное им по саросу солнечное затмение в Ионии наблюдалось.

Фалесу приписывается и ряд других астрономических открытий: определение того, что величина Солнца и величина Луны составляют 1/720 часть их кругового пути (факт равенства «видимых» угловых размеров Солнца и Луны и сегодня кажется загадочным: случайно ли такое совпадение?), открытие годового движения Солнца на фоне звезд, определение времени солнцестояний (наивысшего и наинизшего в году положений Солнца над горизонтом). Фалес научил греческих мореплавателей ориентироваться ночью по Малой Медведице, как это делали финикияне, а не по Большой Медведице, как это ранее делали греки.

Ученику Фалеса Анаксимандру традиция приписывает изобретение солнечных часов — гномона — вертикального стержня, установленного на горизонтальной плоскости. Фалес и Анаксимандр впервые обнаружили, что тень от вертикального столбика равномерно движется по кругу и, следовательно, может служить для отсчета времени. По самой короткой в течение дня тени столбика определяли полдень и направление на юг, а по самой короткой и самой длинной полуденной тени за год — дни летнего и зимнего солнцестояний.

Апулей рассказывает, как некий Мандраит из Приены, которому Фалес поведал о своем открытии равенства угловых размеров Солнца и Луны, пришел в восторг от неожиданной истины и предложил за нее философу любое вознаграждение. «Для меня будет достаточным вознаграждением, если, пожелав сообщить кому бы то ни было, чему ты у меня научился, ты не станешь приписывать это открытие себе, но заявишь во всеуслы-

---

[1] Известная древнекитайская легенда о том, что придворные астрономы Хи и Хо, жившие в XXII в. до н. э., не смогли вовремя предсказать солнечное затмение 22 октября 2137 г. до н. э. по причине обыкновенного пьянства, за что и поплатились отрубленными головами, скорее всего является не более чем легендой.

шание, что оно сделано мною, и никем иным» — таков был ответ философа. «Прекрасное вознаграждение,— комментирует слова Фалеса Апулей,— достойное такого мужа и непреходящее! Да, потому что и по сей день и впредь во все времена Фалес получал и будет получать от нас — всех тех, кто действительно знакомится с его трудами,— это вознаграждение за свои исследования небесных явлений». Поистине замечательно читать сегодня, по прошествии 1800 лет, эти пророческие слова Апулея, написанные в свою очередь через 700 лет после смерти Фалеса.

Да, именно научные исследования, а не деятельность Фалеса как политика, государственного мужа и советника Креза стяжали философу подлинную славу. По этому поводу Плутарх писал: «Вообще, по-видимому, Фалес был тогда единственным ученым, который в своих исследованиях пошел дальше того, что нужно было для практических потребностей, все остальные получили название ученых за свое искусство в государственных делах». Вот почему из семи мудрецов, сегодня полузабытых, неумолимое время сохранило прежде всего имя Фалеса — первого естествоиспытателя и философа.

В области математики с именем Фалеса связывают следующие достижения:

доказательство того, что диаметр делит круг пополам;

установление равенства углов при основании равнобедренного треугольника;

открытие равенства вертикальных углов при пересечении двух прямых;

обнаружение пропорциональности отрезков, образующихся на прямых, пересеченных несколькими параллельными прямыми (теорема Фалеса в школьных учебниках);

доказательство теоремы о равенстве двух треугольников по одной стороне и двум прилежащим углам.

Последней теореме Фалес нашел важное практическое приложение: в гавани Милета был построен дальномер, определяющий расстояние до корабля в море. Не следует воображать дальномер Фалеса в виде сложного оптического прибора. На самом деле он представлял собой три вбитых колышка A, B, C ($AB = BC$) и размеченную прямую $CK \perp CA$ (рис. 6). При появлении корабля на прямой CK находили точку D, такую, чтобы точки D, B, E оказывались на одной прямой. Как ясно из рисунка 6, расстояние на земле CD и является искомым расстоянием до корабля AE по воде.

Вообще, для Фалеса характерно стремление к практическому применению теоретических знаний. Так, Фалес определял высоту египетских пирамид по их тени не только простейшим способом, «дождавшись часа, когда наша тень одной длины с нами» (тогда и длина тени пирамиды равна ее высоте), но и через установление пропорциональных отношений между тремя

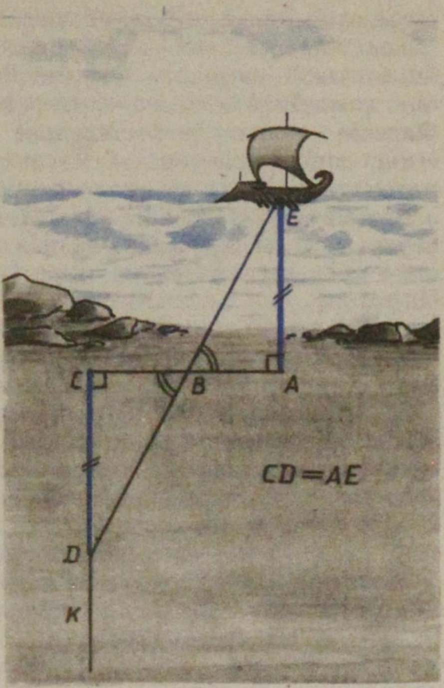


Рис. 6. Геометрический дальномер Фалеса.

поддающимися измерению величинами и искомой величиной. В последнем случае высоту пирамиды можно измерить в любое время дня (рис. 7).

Конечно, все эти сообщения о математических открытиях Фалеса требуют критического отношения. Дело в том, что известны они в основном из сочинений античного философа Прокла (ок. 410—485), жившего через 1000 лет после Фалеса. Прокл так же далек от Фалеса, как мы от князя Владимира Мономаха, и за 1000 лет любые устные предания могут обрасти легендами.

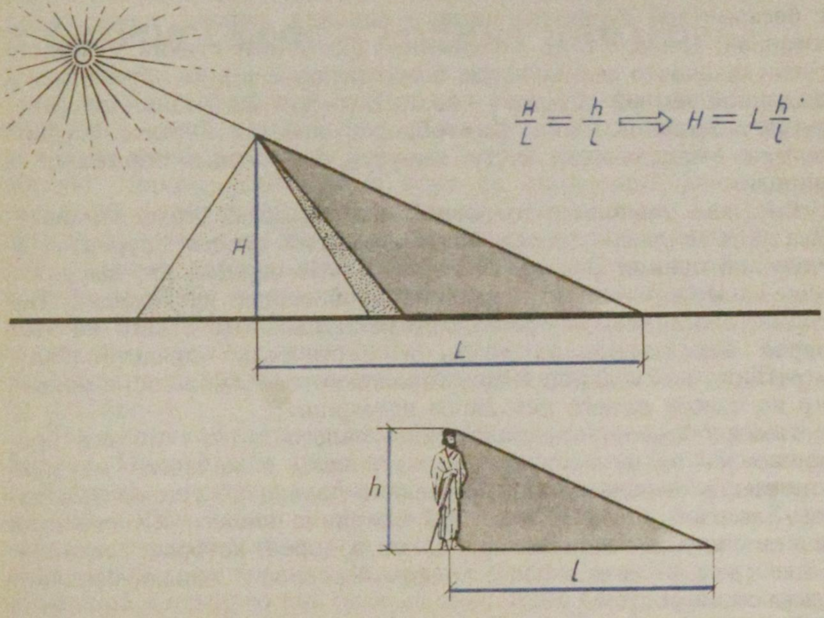


Рис. 7. Определение высоты египетских пирамид по Фалесу.

Вряд ли Фалес строго доказывал свои утверждения, а без доказательства они либо были известны вавилонянам, либо слишком очевидны. Но именно с Фалесом античная традиция связывает интерес к теоретическому знанию, и именно с Фалеса начинается постепенное преобразование эмпирической египетской и вавилонской математики в греческую дедуктивную математику. Честь же систематического введения доказательства в математику, превращения математики в строгую дедуктивную науку, замены жреческих вопросов «как?» на научные вопросы «почему?» принадлежит преемнику Фалеса в математике — Пифагору.

А Фалес в историю науки вошел как философ, основатель **милетской школы** философии. Но в философии Фалеса прежде всего интересовало природное начало — возможность за многообразием явлений усмотреть некую материальную сущность вещей, некое первоначало. Учение Фалеса можно свести к двум пунктам: 1. Все произошло из воды; 2. Земля плавает в воде, подобно куску дерева. Вот, собственно, и все. По прошествии 2500 лет такая «философия» выглядит наивной и куцей. Но не стоит спешить с высокомерными оценками.

Философия Фалеса — это первая попытка увидеть начало в самой природе, взять за первоначало материальную стихию (воду), а не сверхприродные божественные начала, как это было до Фалеса. Для этого Фалесу потребовалось отойти от мифологических образов, отказаться от сонма олимпийских богов, от бесконечной вереницы нимф — океанид, нереид, наяд, ореад, лимониад, дриад и т. д., населяющих различные стихии. И вместо этого сказочного великолепия, божественной поэзии обратиться к обыденной земной «прозе» — воде. Ведь это же подлинная революция в мировоззрении! Как образно заметил Герцен, «судьба Олимпа была решена в ту минуту, как Фалес обратился к природе».

Вот как оценивает основной философский тезис Фалеса: «Все есть вода» — современный немецкий физик лауреат Нобелевской премии Вернер Гейзенберг: «Во-первых, это высказывание содержит вопрос о материальной основе всех вещей. Во-вторых, оно содержит требование рационального ответа на этот вопрос без ссылки на мифы и мистические представления. В-третьих, оно содержит предположение о возможности понять мир на основе одного исходного принципа».

Таким образом, предположение Фалеса о том, что все произошло из воды, следует рассматривать в качестве научной гипотезы, а отнюдь не как брошенное походя абсурдное замечание. Заметим, что еще в первой половине нашего XX столетия физики считали основой мироздания водород, который составляет две трети воды и в более точном переводе с латыни означает рождающий воду.

Таково учение первого античного философа. Но заслуга Фалеса не только в том, что он был первым. Как каждый человек должен посадить дерево, так и каждый настоящий ученый должен оставить после себя учеников — школу. Фалес стал основателем милетской школы философии. На смену Фалесу пришел его ученик Анаксимандр (ок. 610—546 до н. э), который в свою очередь подготовил ученика Анаксимена (ок. 585—ок. 525 до н. э.). На этом, увы, цепь милетской школы обрывается. В 546 г. до н. э. персидский царь Кир завоевал Лидию и греческие города Малой Азии. Правда, Милет сумел сохранить относительную свободу, памятуя мудрые советы умершего незадолго до этого Фалеса. Но тем ужаснее была участь города, когда после неудавшегося восстания Милет в 496 г. до н. э. был полностью разгромлен персами. Все оставшиеся в живых были уведены в плен или проданы в рабство.

Возможно, не будь столь трагичной история Милета, судьба милетской школы сложилась бы иначе. Возможно, и нет, ибо все-таки все три милетских философа были слишком разными. А мы переходим к жизнеописанию создателя другой философской школы, могучей школы, которая нашла в себе силы противостоять ударам судьбы, противостоять разрушающей силе времени и которая оказала огромное влияние на все последующее развитие научной мысли вплоть до наших дней. Мы переходим к жизнеописанию Пифагора.

3. ОСТРОВ САМОС — РОДИНА ПИФАГОРА

«Самос — небольшой остров в Икарийском море, расположенный напротив Милета, к западу от него, на расстоянии немногих часов плавания: в тихую погоду судно, идущее в ту или другую сторону, приходит в порт на следующий день. Земля эта плохо родит хлеб, непригодна для плуга, более благоприятна для маслин, и ни виноградарь, ни огородник не тревожат ее. Все полевые работы там состоят в окапывании и прививках, и, судя по сбору фруктов, остров скорее плодоносен, чем плодороден... Есть там город, далеко не отвечающий своей громкой славе, но свидетельствующий о былом величии своем многочисленными развалинами стен. Исстари знаменит храм Юноны на острове...»

Так описывал остров Самос во II в. древнеримский писатель Апулей. Икарийским древние римляне называли Эгейское море, а Юноной — греческую богиню Геру, покровительницу супружеской любви. Самос у греков считался родиной богини Геры, поэтому неудивительно, что именно здесь был поставлен прославленный храм богини. Лишь храм Артемиды в Эфесе (рис. 8), вошедший в историю как одно из семи чудес света, мог поспорить красотой с храмом Геры на Самосе. Двойной ряд колонн — дип-

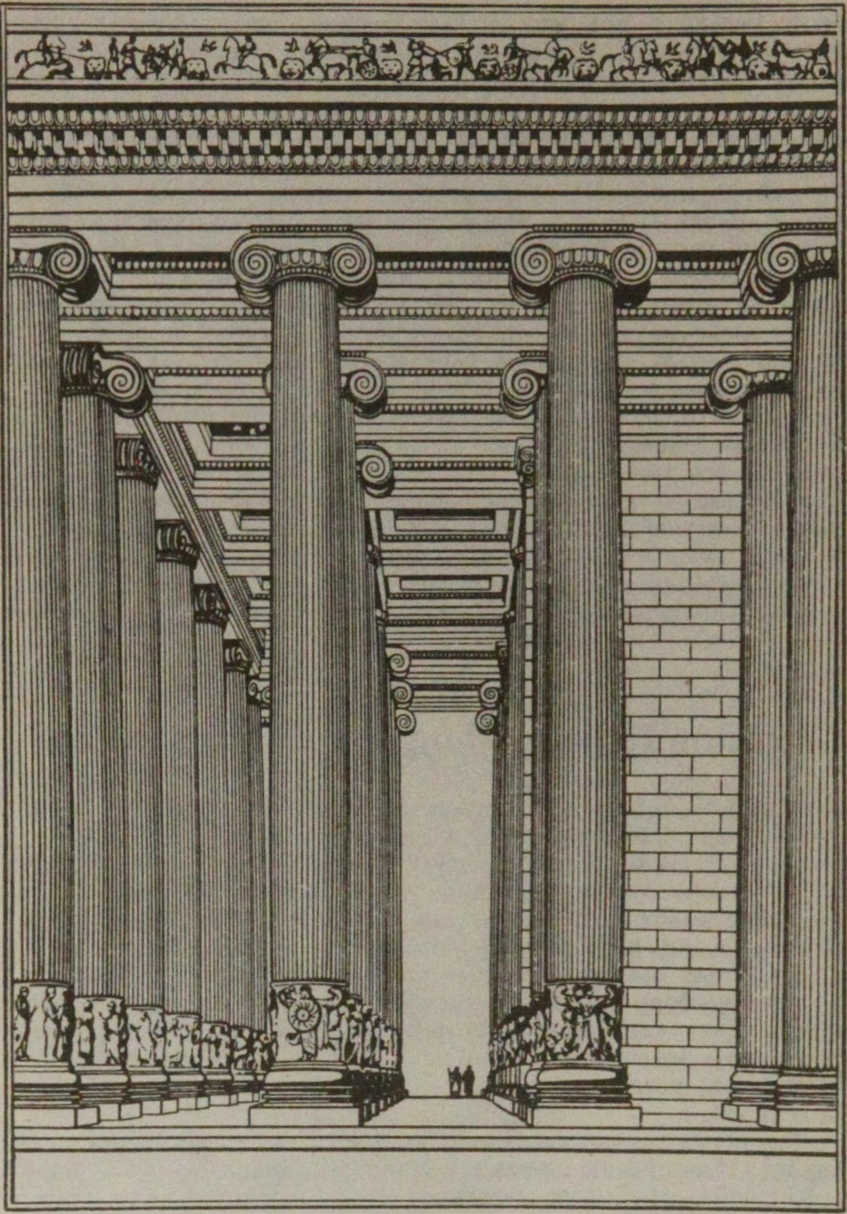


Рис. 8. Храм Артемиды в Эфесе — одно из семи чудес света. Ок. 550 г. до н. э., сожжен в 356 г. до н. э. Геростратом. Реконструкция.

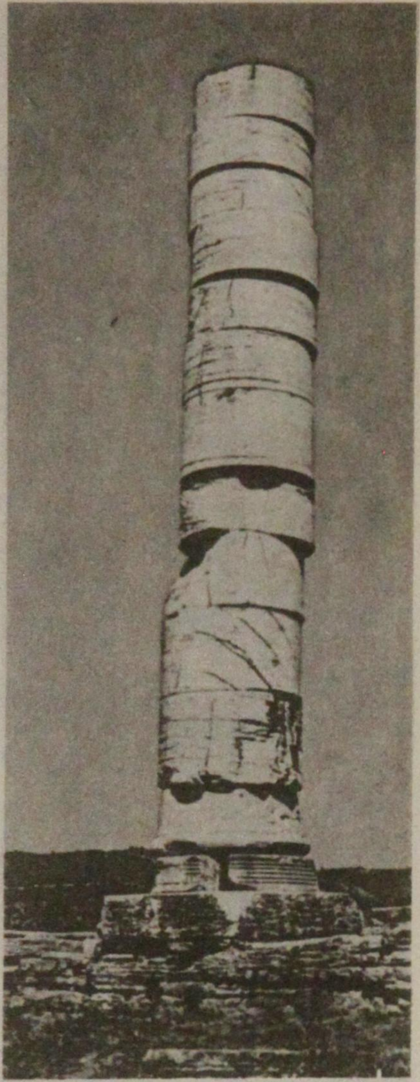


Рис. 9. Колонна храма Геры. VI в. до н. э. Остров Самос.

тер, изящные локоны волют, венчавших колонны, богатство и легкость декора роднили оба эти щедевра ионической архитектуры. Как показали археологические раскопки, храм Геры Самосской был построен на основе строгих математических пропорций, а именно системы правильных треугольников или шестиугольников.

Сегодня от храма Геры Самосской сохранилась однаединственная колонна (рис. 9). Двенадцать мраморных дисков метровой толщины, образующих колонну, позволяют судить о былом величии храма. Но от былого изящества, увы, не осталось и следа: капитель колонны утеряна, диски смещены друг относительно друга и нависают в разных направлениях. Все это никак не напоминает стройную юную деву с локонами, стянутыми в две тугие волюты, каковую изначально призвана символизировать ионическая колонна, а похоже скорее на обезглавленного, но оставшегося стоять воина с искореженным годами и войнами телом.

Остров Самос был заселен с незапамятных времен критомикенской культуры. Самос неоднократно упоминается в «Илиаде» Гомера — Библии греческого народа:

Прочих сынов у меня Ахиллес, быстроногий ристатель,
Коих живых полонил, за моря пустынные продал,
В Имброс, в далекий Самос и в туманный, беспристанный
Лемнос.
(Илиада, XXIV, 753)

Рис. 10. Гера Самосская. Мрамор. Ок. 560 г. до н. э. Париж. Лувр.

К VIII в. до н. э. остров Самос, а точнее одноименный полис в юго-восточной части острова, стал цветущим торгово-ремесленным центром. Жителям Самоса греческая традиция приписывает изобретение бронзового литься. Самосцы были прекрасными мореплавателями и расторопными купцами, имевшими торговые дома по всему Средиземноморью, в том числе в Кротоне на юге Италии и Навкратисе в Египте, в западной части дельты Нила. Оба эти города тесно связаны с биографией Пифагора.

Страбон (64/63 до н. э.— 23/24 н. э.) — древнегреческий географ и историк, автор энциклопедической «Географии в 17 книгах» оставил нам описание города Самоса и его окрестностей. «Самос и его гавани с якорной стоянкой обращены к югу. Большая часть города омывается морем и расположена на равном месте, но одна часть его поднимается в гору, лежащую над ним. Если подъехать к городу с правой стороны, то увидим мыс Посидий, образующий с горой Микале пролив в 7 стадий шириной (менее 1,5 км.— *А. В*). На мысе находится храм Посидона; перед ним лежит островок Нарфекида; на левой стороне расположено предместье святилища Геры, течет река Имбрас и стоят древнее святилище Геры и большой храм, превращенный теперь в склад картин. Кроме множества хранящихся там картин, есть еще и другие склады картин, а также несколько маленьких храмов, полных древними произведениями искусства». Древний город Самос жив и поныне — это сбегающий с окрестных холмов к морю небольшой городок, называемый сегодня в честь прославленного земляка Пифагорионом.

Наивысшего расцвета Самос достиг во второй половине VI в. до н. э. при тиране Поликрате, став самым сильным греческим государством во всей Ионии. Именно тогда вокруг города были воздвигнуты крепостные стены, которые ко времени Апулея, через восемь столетий, превратились в величественные развалины.

Но не богиня Гера и ее храм и не тиран Поликрат стяжали подлинную славу маленькому острову в Эгейском море: около 570 г. до н. э. на Самосе родился основоположник современной математики Пифагор. Сегодня в Лувре хранится мраморная статуя Геры Самосской, которую специалисты относят к 560 г. до н. э. (рис. 10). Мраморные складки одежды Геры Самосской хранят, быть может, взгляд юного Пифагора.

Отцом Пифагора был Мнесарх — резчик по драгоценным камням. Мнесарх, по словам Апулея, «славился среди мастеров своим искусством вырезать геммы, но стяжал скорее славу, чем богатство».

Сохранилось предание, согласно которому Мнесарх вместе со своим учеником — прославленным скульптором Феодором вырезал перстень дивной красоты. Этот перстень перешел к Поликрату и ценился им превыше всего на свете.

Однажды египетский фараон Амасис[1], состоявший с самосским тираном в дружеских отношениях, встревожился его великим преуспеванием и написал Поликрату следующее письмо: «Амасис Поликрату говорил так: «Приятно узнать, что друг ваш и гостеприимец счастлив. Но все же твои великие успехи не радуют меня, так как я знаю, сколь ревниво божество к человеческому счастью. Поэтому я желал бы, чтобы и у меня самого, и моих друзей одно удавалось, а другое — нет, чтобы лучше на своем веку мне попеременно сопутствовали успехи и неудачи, чем быть счастливому всегда. Ведь мне не приходилось слышать еще ни об одном человеке, кому бы все удавалось, а в конце концов он не кончил плохо. Поэтому послушайся моего совета теперь и ради своего счастья поступи так: обдумай, что тебе дороже всего на свете и потеря чего может больше всего огорчить тебя. Эту-то вещь ты закинь так, чтобы она больше не попалась никому в руки. И если и тогда успехи у тебя не будут сменяться неудачами, то и впредь применяй то же средство по моему совету».

---

[1] Амасис, или Яхмос II,— египетский фараон из XXVI династии. Правил в 569—525 гг. до н. э. Стремясь оградить Египет от агрессии Персии, заключал союзы с Афинами, Спартой, Самосом, а также Лидией. При жизни Амасис избежал вторжения персов, но сразу после его смерти, в 525 г. до н. э., персидский царь Камбиз завоевал Египет. В слепой ярости Камбиз приказал бичевать тело Амасиса и всячески осквернил его.

Поликрат нашел совет Амасиса мудрым. «Посадив людей на 50-весельный корабль,— рассказывает Геродот,— он сам поднялся на борт и приказал затем выйти в море. Когда корабль отошел далеко от острова, Поликрат снял перстень и на глазах у всех своих спутников бросил в море. После этого он отплыл назад и, опечаленный потерей, возвратился во дворец.

А спустя пять или шесть дней после этого случилось вот что. Какой-то рыбак поймал большую красивую рыбу и решил, что это достойный подарок Поликрату. Рыбак принес рыбу к воротам дворца и сказал, что желает предстать перед Поликратовы очи. Когда желание рыбака было исполнено, он подал Поликрату рыбу со словами: «Царь! Поймав эту рыбу, я не захотел нести ее на рынок, хотя и живу от трудов рук своих. Я решил, что она достойна тебя и твоего царства. Поэтому я приношу ее тебе в дар». А Поликрат обрадовался таким словам и отвечал: «Ты поступил прекрасно. Я благодарю тебя вдвойне: за речь и за подарок. Приглашаю тебя на обед». Рыбак, польщенный, отправился домой, а слуги выпотрошили рыбу и нашли в ее брюхе тот Поликратов перстень. Увидев перстень, они тотчас же с радостью понесли его Поликрату. Отдавая перстень, слуги рассказали, как он нашелся. А Поликрат понял тогда, что это божественное знамение, и написал послание Амасису обо всем, что он сделал и что из этого вышло. А написав послание, он велел отправить его в Египет.

Амасис же, прочтя послание Поликрата, убедился, что ни один человек не может уберечь другого от предреченной ему участи и что Поликрат не кончит добром, так как он преуспевает во всем и даже находит то, что сам забросил».

Пророчество Амасиса сбылось. Опасаясь владычества Поликрата на море, персы хитростью выманили Поликрата из Самоса и зверски убили его. Случилось это около 523 г. до н. э., примерно через семь лет после того, как Пифагор, протестуя против жестокостей самого Поликрата, навсегда покинул родной Самос и переселился в Кротон.

Легенда о Поликратовом перстне, в котором нашла отражение вечная тема непостоянства земного счастья, стала популярным литературным сюжетом. Вспомним «Поликратов перстень» Шиллера:

На кровле он стоял высоко
И на Самос богатый око
С весельем гордым преклонял.
«Сколь щедро взыскан я богами!
Сколь счастлив я между царями!» —
Царю Египта он сказал.

С именем скульптора Феодора связано и другое предание, рассказанное древнегреческим историком Диодором Сицилийским (ок. 90—21 до н. э.) в его «Исторической библиотеке».

Скульпторы Феодор и Телекл изваяли для самосцев статую Аполлона Пифийского. При этом они разделили работу пополам: одна половина Аполлона была изготовлена на Самосе, а другая — на побережье, в Эфесе. «Будучи сложенными,— говорит Диодор,— эти части настолько соответствовали одна другой, что казалось, будто все произведение исполнено одним мастером».

Надо сказать, что такой способ ваяния, который современному читателю напомнит скорее о сегодняшних штамповках, был заимствован древними греками у египтян. Египтяне в изображении человека строго следовали **канону** (ϰᾰνων — правило, норма) — системе жестко регламентированных правил. Совершенно ясно, что при таком способе изготовления статуи без математических расчетов (хотя бы и элементарных) обойтись невозможно. Плоды этих расчетов, когда сделанные в разных местах части сливались в единое целое, конечно же, приводили в изумление. Быть может, именно в этот момент, наблюдая за соединением «вычисленного» в разных местах Аполлона, в голове юного Пифагора впервые промелькнула мысль: «Все есть число».

Имя матери Пифагора не сохранилось. Некоторые называли ее Пифаидой, дочерью рода Анкея — основателя Самоса. Другие утверждали, будто бы это сам Мнесарх назвал жену Пифаидой, а сына — Пифагором в честь дельфийской прорицательницы Пифии. Сделал же так Мнесарх после того, как получил от Дельфийского оракула весть о том, что жена подарит ему необыкновенного сына. Развивая эту мысль, один самосский поэт уверял, что истинным отцом Пифагора являлся не Мнесарх, а сам бог Аполлон:

Фебу[1], Зевесову сыну, рожден Пифагор Пифаидой,
Той, что в Самосской земле всех затмевала красой.

Наконец, многие, имея на то все основания, считали, что Пифагор — это не имя, а прозвище. Поскольку мудрый учитель высказывал истину столь же постоянно и авторитетно, как и дельфийская Пифия, он и был прозван Пифагором.

В самом деле, в слове ΠΥΘΑΓΟΡΗΣ можно выделить два корня: ΠΥΘ — указывающий на Πυθία — Пифия и ΑΓΟΡΗΣ — восходящий, видимо, к ’αγορεύω — обращаться с речью, объявлять (однокоренным является и слово ’αγορά — народное собрание, где произносят речи). Таким образом, имя ΠΥΘΑΓΟΡΗΣ можно толковать как «Пифовещатель», т. е. вещающий (прорицающий) от Пифии или как Пифия. Поскольку Бог Аполлон после победы над змеем Пифоном получил прозвище Аполлон Пифий, то «Пифовещатель» превращается в «Аполловещателя» или «Уста Аполлона», как иногда переводят имя Пифагора. Со временем античная традиция развила эту идею и стала называть Пифа-

---

[1] Феб (Φοιβος — лучезарный) — распространенное в эпической поэзии второе имя Аполлона.

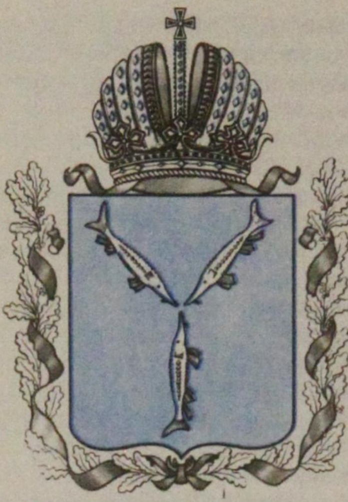


Рис. 11. Герб города Саратова.

гора не только «Устами Аполлона», но и сыном лучезарного покровителя искусств Аполлона.

Версия о том, что Пифагор — это не имя собственное, а прозвище, представляется наиболее правдоподобной. Ведь и знаменитый философ Аристокл известен нам не по своему настоящему имени, а по прозвищу, которое он получил за свою мускулатуру гимнаста,— широкий, широкоплечий, по-гречески Платон (ΠΛΑΤΩΝ, πλάτος — ширина).

Интересно, что философское осмысление буквы ϒ (греческая ипсилон, латинская игрек (т. е. «и» греческое), старославянская ижица), второй буквы в имени Пифагора, античная традиция приписывает самому великому философу. Поэтому и псилон называли философской или пифагоровой буквой, а ее правую и левую ветви — самосскими ветвями. Считалось, что буква ϒ, называемая также виловатым крестом, являет собой графическое изображение выбора двух дорог: пути добродетели и пути порока. В каноническом начертании правая ветвь и псилона изображалась прямой, идущей вверх, и символизировала добродетель, а левая — кривой, загибающейся книзу, и означала порок. Вплоть до средних веков было распространено выражение: «По пифагоровой букве выбирать дорогу», т. е. выбирать достойный путь на пересечении жизненных стезей.

Пифагорова буква ϒ в чистом виде нашла отражение в гербе старинного русского города Саратова (рис. 11). Три серебряного цвета стерляди, символизировавшие богатство волжского края рыбой, образуют пифагорову букву. Полагают, что число геральдических рыб на гербе Саратова (рыба издавна является христианским символом) равнялось числу монастырей в городе, которые по праву считались форпостами обороны, культуры и духовного богатства города. Расположение рыб в форме философской буквы должно было напоминать горожанам о выборе достойного, правого пути на ежедневных жизненных перепутьях. Увы, сегодня в нашей памяти стерты не только осетровые породы рыб и старинные гербы городов, но и извечное напоминание о выборе праведного пути, заложенное в пифагоровой букве.

Но вернемся к самому Пифагору, сыну счастливой Пифаиды. По многим античным свидетельствам, родившийся мальчик был сказочно красив, а вскоре проявил и свои незаурядные способности. Среди учителей юного Пифагора традиция называет имена старца Гермодаманта и Ферекида Сиросского.

Гермодамант был потомком Креофилидов — рода эпических певцов на Самосе. Подобно роду Гомеридов с соседнего острова Хиоса Креофилиды странствовали по всей Элладе и под аккомпанемент кифары исполняли народные предания и поэмы Гомера. Эпические певцы — аэды и рапсоды — рассказывали о «деяниях мужей и богов», о силе и благородстве героев, о красоте, радости и любви. Но, чаруя слушателей прекрасными мелодиями, аэды были и воспитателями: их исполнения понимались как знания, полученные певцом от музы эпической поэзии Калиопы.

Целые дни проводил юный Пифагор у ног старца Гермодаманта, внимая мелодии кифары и гекзаметрам Гомера. Страсть к музыке и поэзии великого Гомера Пифагор сохранил на всю жизнь. И, будучи признанным мудрецом, окруженным толпой учеников, Пифагор начинал день с пения одной из песен Гомера:

> Страшную брань меж троян и ахеян оставили боги;
> Но свирепствовал бой, или здесь, или там по долине,
> Воинств, один на других устремляющих медные копья,
> Между брегов Симоиса и пышноструистого Ксанфа.
>
> (Илиада, VI, 1)

Но музыка стала для Пифагора не только видом отдохновения и даже не средством вдохновения. Музыка стала и предметом научных изысканий, и именно в музыке Пифагор нашел прямое доказательство своему знаменитому тезису: «Все есть число».

Ферекида Сиросского, ученика мудреца Питтака, самого часто причисляли к семерке мудрецов. И как о всяком мудреце о нем рассказывали много удивительного. Будто однажды, прогуливаясь по Самосу, Ферекид увидел корабль под парусом и сказал, что он сейчас потонет,— и он потонул на глазах. Будто, отведав воды из колодца, он сказал, что на третий день случится землетрясение,— и оно случилось. Ну, и так далее.

Но если отбросить легенды, то Ферекид был философом и вслед за Питтаком считался основателем италийской школы философии. Третьим в цепи италийских философов стал Пифагор. Таким образом, если Гермодамант ввел юного Пифагора в круг муз, то Ферекид обратил его ум к логосу. Ферекид направил взор Пифагора к природе и в ней одной советовал видеть своего первого и главного учителя.

У нас нет твердой уверенности в том, что именно Гермодамант и Ферекид были первыми учителями Пифагора. Но как бы то ни было, неугомонному воображению Пифагора очень скоро стало тесно на маленьком Самосе (рис. 12). Бродя по

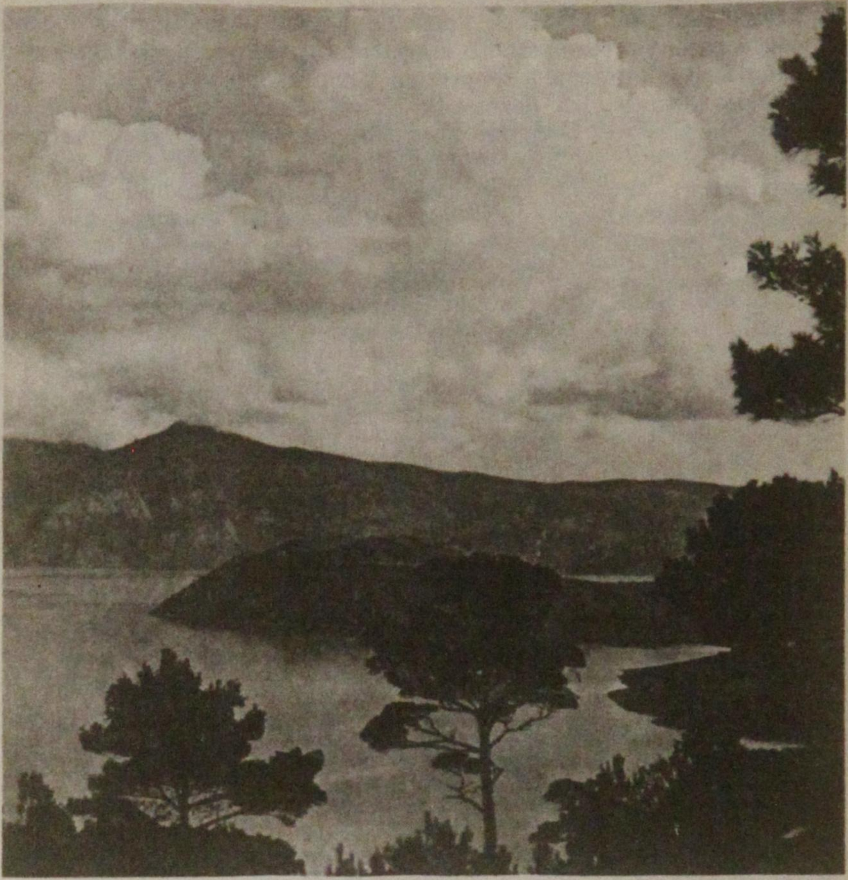


Рис. 12. Вид на священную гору Микале (Малая Азия) с мыса Трогилия на о. Самос. Современное фото.

острову, юноша невольно выходил на скалистые оконечности мыса Трогилия, отстоящего в 40 стадиях от города Самоса, и сквозь теплую дымку жадно вглядывался в синеву манящих очертаний. Только 7 стадий Самосского пролива отделяли остров от берегов Малой Азии.

Часами просиживал юный Пифагор на теплых скалах мыса. К полудню этезии[1] достигали своей наибольшей силы. Лазурь моря наливалась чернотой и вздыбливалась крутыми волнами. Ветер срывал с их вершин серебряную пыль и бросал в лицо

---

[1] Этезии (ἐτησιαι — от ἔτος — год) — дующие ежегодно с конца июня до середины октября северные (у берегов Малой Азии — северо-восточные) ветры, обусловленные повышением давления над сильно нагретой Западной Азией.

освежающие пригоршни. Волны неистово бросались на скалы и отступали, превратившись в шипящую, как молодое вино, пену. В эти минуты Пифагору казалось, что со священной горы Микале, вздымавшейся на том берегу, до него долетают праздничные песнопения в честь бога Посейдона, что он чувствует запах жертвенных костров, зажженных на том берегу, что он видит скачущие колесницы, в клубах пыли уносящие счастливых седоков в огромный неведомый мир.

Мудрый Ферекид понимал все без слов. «Ты вырос из Самоса,— сказал он Пифагору однажды.— Отправляйся путешествовать — только так утолишь ты жажду познания. Помни: путешествия и память суть два средства, возвышающие человека и открывающие ему врата мудрости».

Между тем покровитель путников бог Гермес уже увлекал Пифагора в свои объятия. Шел 550 год до н. э.

4. ГОДЫ СТРАНСТВИЙ. ЕГИПЕТ

Для жителя Самоса все дороги вели в Милет — ионийскую метрополию. Его корабль проплывал мимо двух громадных мраморных львов, охранявших узкий вход в главную гавань Милета — Львиную, и швартовался у набережной. Пестрая толпа носильщиков, торговцев, менял набрасывалась на чужестранца. Разноликий водоворот, втянувший в себя жителей трех континентов — Европы, Азии и Африки, кружился по милетской агоре. Были здесь и надменные, изнеженные египтяне, и доверчивые, иссиня-черные эфиопы с блестящей лакированной кожей и лучисто-белыми зубами, и жужжащие, прилипчивые как мухи финикияне, и желтоликие с извечной печалью в черных глазах иудеи, и стройные красавцы персы с женской сладостью в мужских лицах.

Поток толпы выносил приезжего к шестнадцати колоннам ворот порта, откуда в город шла широкая главная улица. Но для Пифагора все улицы Милета вели к Фалесу.

Разыскать Фалеса в Милете было столь же просто, как найти храм Геры на Самосе. За первой встречей Пифагора с Фалесом и его учеником Анаксимандром последовали долгие, оживленные беседы. Так свидетельствует Ямвлих, и, пожалуй, из всех приключений Пифагора, описанных Ямвлихом, эта встреча является наиболее правдоподобной. В самом деле, во-первых, Пифагору трудно было миновать Милет. Во-вторых, оказавшись в Мителе, Пифагор не мог не искать встречи с мудрецом, слава о котором гремела по всей Элладе. И в-третьих, трудно представить, чтобы Фалес отказал в этой встрече: в отличие от тиранов мудрецы не боятся юных умов, а видят в них продолжение жизни своих знаний.

В то время Фалесу шел восьмой десяток, да и Анаксимандр был не намного моложе учителя. Конечно же, общение юноши с двумя прославленными седобородыми мудрецами озарило всю его дальнейшую творческую биографию. Но талант ученика проявляется в том, что он не копирует учителя, а идет дальше. Не воду, как Фалес, и не мифический апейрон — некую бескачественную материю, как Анаксимандр, увидел Пифагор в основе мироздания. Сущность вещей и явлений Пифагор разглядел в числе, в числовых отношениях. Пифагор первым поверил в рациональное устройство мироздания и возможность описания этого устройства с помощью числа. Таким образом, в важнейшем философском вопросе — вопросе о природе первоначал — Пифагор не пошел ни путем Фалеса, ни путем Анаксимандра, а избрал путь, который из античности вел прямо в современность.

Но это произошло потом. А пока, видя проницательным оком внутреннюю неудовлетворенность своего юного собеседника, Фалес советует ему отправиться в Египет, к жрецам Мемфиса и Диосполя, у которых и сам он некогда учился мудрости. По тем временам этот совет был совершенно естественным. Из «Исторической библиотеки» Диодора, который в свою очередь ссылается на записи в священных египетских книгах, мы видим, что и до Пифагора древнейшие поэты и законодатели — Орфей, Мусей, Гомер, Ликург, Солон, Фалес и после Пифагора — ученые Платон, Евдокс, Демокрит отправлялись за знаниями в Египет. Греки боготворили египетскую культуру, они считали себя детьми по сравнению с древностью египетской цивилизации, хотя в сравнении с тем, что греки дали для мировой культуры, египтяне выглядят просто младенцами. Возможно, чудеса египетской архитектуры, и прежде всего подавляющее величие и древность египетских пирамид, внушали грекам этот благоговейный трепет. В самом деле, пирамиды для греков были столь же древними, как и развалины акрополя для нас, и мудрые греки подчас простодушно отождествляли древность с мудростью.

Итак, возраст эфеба[1] — двадцатилетнего юноши — для Пифагора заканчивался. Следовало выбирать свою дорогу и в жизни, и в науках. Пифагор принимает решение и отправляется в Египет.

В то время путь из Милета в Египет был неблизким. Плыли вдоль берегов, от порта к порту, от острова к острову. Всюду останавливались, запасались пресной водой, провиантом и просто общались.

Проплыли овеянный легендами остров Крит, где в глубокой пещере родился отец и повелитель богов всемогущий Зевс. Предание говорит, что Пифагор, одетый в черную шкуру, спустился

---

[1] ἔφ-ηβος — юноша, эфеб (εφ — почти, ἡβός — возмужалый).

в эту пещеру, пробыл там положенные трижды девять дней, совершил всесожжение Зевсу, а на гробнице громовержца высек эпитафию. Проплыли увитый виноградниками солнечный остров Кипр, на берега которого вышла из пены морских волн богиня любви Афродита.

Последними перед Египтом были финикийские города Библ, Сидон, Тир. Рассказы финикинянина Фалеса пробудили у Пифагора уважение и интерес к этому мужественному народу. Его энергией на узкой полоске земли длиной в 300 и шириной в 30 километров родилась могучая морская держава, имевшая колонии по всему Средиземноморью. Пшеница и свинец с берегов Черного моря, медь и кипарис с Кипра, слоновая кость из Африки, янтарь с Балтики, местный пурпур — богатства всей Ойкумены[1] стекались на финикийские рынки. Но самым громким подвигом финикинян было недавнее плавание вокруг Африки. Выйдя из Красного моря по повелению египетского фараона Нехо II, финикийцы за три года обогнули всю Африку и благополучно возвратились к берегам Нила. (Напомним, что произошло это за 2000 лет до Васко да Гама!)

С равным усердием постигал Пифагор и секреты морского искусства финикийцев, и таинства религиозных церемониалов жрецов Библа и Тира, и знаки гениально простого финикийского алфавита — бесценного дара финикинян человечеству. Но настал час, и корабль отплыл в последний переход к берегам Египта.

Цель путешествия Пифагора была близка.

Три дня и две ночи, которые заняло плавание от Тира до Египта, Пифагор молча просидел на корабельной скамье. Он не менял позы, не принимал ни воды, ни пищи и не заснул ни на мгновение. Нетерпение и ожидание сковали его. Он не проронил ни слова и только напряженно вглядывался в синюю дымку горизонта.

На исходе третьего дня вдали стал угадываться низкий болотистый берег. То была дельта Нила, который разливается здесь на сотни протоков. Требовалось незаурядное искусство, чтобы по едва уловимым признакам найти единственно нужное Канобское устье Нила, ведущее к Навкратису. Навкратис был греческой колонией в Египте и единственным торговым портом, открытым для чужестранцев. Если иноземный корабль заходил в другое устье Нила, то с команды брали клятву, что это случилось неумышленно, после чего даже при неблагоприятном ветре заставляли плыть обратно в Канобское устье.

Традиция утверждает, что Пифагор имел рекомендательные письма от тирана Поликрата к египетскому фараону Амасису,

---

[1] Ойкумена (οἰκέω — обитаю, населяю) — греческое название населенной части земли. Для древних греков Ойкумена включала Европу, Малую и Переднюю Азию, Индию и Северную Америку.

который был другом и гостеприимцем Поликрата. Последнее верно, но к 548 г. до н. э., когда, по нашей версии, Пифагор прибыл в Египет, Поликрат еще не был тираном Самоса. Вряд ли простой смертный мог позволить себе обращаться с письмом к фараону. Но ясно, что Пифагор приехал не на пустое место: Навкратис был самосской колонией и там, конечно же, было у кого найти и кров, и помощь в изучении чужого языка.

Итак, цель была достигнута. Перед Пифагором открывалась неизвестная страна и неведомая культура. Оставалось только раствориться в ее просторах и окунуться в кладезь ее мудрости.

Страна, где нет ни гроз, ни грома
В размерной смене тьмы и дня,
Ни молнебыстрого излома
Живого вышнего огня.
Страна без радуги окружной,
Что семикратно славит свет,
Твой край — и северный, и южный —
Однообразием одет.

(К. Бальмонт)

Что такое Египет? Это Пустыня и это Нил. Нил — это жизнь, Пустыня — это смерть. В узкой полоске нильской долины, между жизнью и смертью, родилась великая цивилизация. Древний египтянин боялся сделать и двух шагов в сторону пустыни, ибо он с молоком матери впитал ее смертельное дыхание. Сам воздух, застывший между Ливийскими и Аравийскими горами, казался пропитанным смертельной тоской. Здесь нет даже желтых песков, радующих глаз,— здесь серая пыль, подобная праху тысячелетий. Лишь миражи ткут здесь свои причудливые узоры: два красных солнца глядят друг на друга, горбатые верблюды бродят по небу и пьют из зеркальной глади воздушных озер, из которых никогда нельзя напиться. Здесь нет воды и нет жизни.

Но вот эту мертвую равнину рассекает мутный поток Нила. В «ночь капли», когда с неостывшего неба падает первая капля — слеза Исиды, оплакивающей растерзанного Осириса, Нил пробуждается. Ко дню летнего солнцестояния он выходит из берегов и на мертвый песок выносит животворящий ил. Проснувшиеся воды Нила заливают плоскую долину, и лишь города, построенные на возвышении, сказочными островами плывут над водой. Никто не знал, отчего происходят разливы Нила, как никто не знал, откуда он течет. Пытливые греки, начиная с самого Фалеса, пробовали разгадать эту загадку великого Нила, но долго еще она оставалась нерешенной, как не поддавалась разрешению и другая вечная проблема античности — проблема квадратуры круга.

Но так было каждый год, так было тысячелетия, и тысячелетия в разливы Нила воскресший Осирис целовался с Исидой, а человек устремлялся на поля, увлажненные животворящим поцелуем Нила.

«Привет, о Нил, привет тебе, что явился на этой земле, тебе, что приходишь дать жизнь Египту. Бог сокровенный, исходящий из мрака, орошатель лугов, созданных Солнцем, чтобы дать жизнь стадам. Ты напояешь землю. Дорога небесная, ты нисходишь, друг хлебов, взрощатель зерен, Бог открыватель, озаряющий все дома». Этими словами начинался древний «Гимн Нилу».

«Подобно тому, как небо в Египте иное, чем где-либо в другом месте, и как река у них отличается иными природными свойствами, чем остальные реки, так и нравы и обычаи египтян почти во всех отношениях противоположны нравам и обычаям остальных народов». Так в V в. до н. э. писал о Египте Геродот. Так было и в VI в. до н. э. при Пифагоре.

Часами бродил Пифагор по улицам Навкратиса, прислушиваясь к непонятной речи, приглядываясь к чужой жизни. Многое в этой жизни поражало грека своим контрастом с Элладой: египетские женщины, торгующие на рынке, и египетские мужчины, сидящие дома за ткацкими станками; бритые головы египетских жрецов; животные, живущие с людьми под одной крышей; таинственные узоры египетских иероглифов, читаемых справа налево. Поражала сладкая нильская вода, которая неделями стояла в домах и никогда не портилась. Изумляли необычайная чистоплотность египтян, мывшихся четыре раза в сутки, их свежепостиранные, ослепительно белые одежды изо льна.

Шло время, и на смену уличным впечатлениям пришел интерес к внутренней жизни египтян, их религии, преданиям, обрядам. Здесь поводов для удивления было еще больше. Если греческие боги были воплощением самих людей, которыми они повелевали, с людскими заботами, радостями, страстями и страстишками, то боги Египта носили облик зверей или причудливо сочетали человеческие и животные черты. Для грека, почитавшего красавицу Афродиту или атлета Зевса, было странным, а порой и страшным видеть, как египтяне преклоняются перед уродливыми полулюдьми-полузверьми: перед богиней Исидой — женщиной с рогами коровы или перед богом Гором — мужчиной с головой сокола (рис. 13).

Тем более странным было видеть обычных животных, считавшихся египтянами воплощением этих звероподобных божеств. Черный бык с белыми отметинами был «земным представителем» бога плодородия Аписа, обычная корова почиталась как богиня Исида, крокодил представлял бога воды Себека, кошка — богиню радости и веселья Баст, сокол — сына Исиды Гора, ибис — бога мудрости, счета и письма Тота (рис. 14).

Священным животным оказывали необычайные почести. Трупы кошек отвозили в город Бубастис, где их бальзамировали и погребали в священных покоях. Соколов хоронили в городе

Буто, а ибисов — в Гермополе. Жители Фив содержали по одному ручному крокодилу. В уши ему продевали серьги из золота и стекла, на передние лапы надевали кольца, кормили священной пищей, ухаживали, а после смерти бальзамировали и погребали в священных покоях.

Рис. 13. Исида́ ведет царицу Нефертари. Роспись в гробнице Нефертари в Фивах. XIII в. до н. э.

Мумии священных быков погребали в огромном храме — Серапейоне, охраняемом сотнями каменных сфинксов. Тысячи имен богов-быков были начертаны на стенах погребальных камер этого гигантского, вытянутого в одну линию пантеона. Серапейон был настолько древним, что с одного конца его уже

Рис. 14. Тот — бог мудрости, счета и письма. Рельеф в храме Рамсеса II в Фивах. XIII в. до н. э.

наполовину засыпал песок, тогда как с другого захоронения все продолжались (рис. 15).

Все эти религиозные обряды и ритуалы представляли собой целую науку. Так, священный бык Апис выбирался советом жрецов из тысяч мирно пасшихся животных по 29 признакам: он должен был быть черным, иметь на лбу белый четырехугольник, на спине — изображение орла, на хвосте — двойные волосы, под языком — изображение жука и т. д. Чужестранцу разобраться во всей этой премудрости, создаваемой на протяжении тысячелетий, было совершенно невозможно. Но Пифагор понимал, что путь к знаниям, охраняемым кастой жрецов, лежит через религию. Только изучив в совершенстве сложную иерархию египетских богов, мифов, обрядов и таинств, можно было надеяться проникнуть в плотный круг египетского жречества, а значит, и получить доступ к научному знанию. Другого пути не было, и даже Пифагору на это потребовались годы.

Всякое образование начинается с обучения чтению и письму.

Рис. 15. Храм Амона в Карнаке. Колоннада. XVI — XII вв. до н. э.

Рис. 16. Писцы. Рельеф. Конец XV в. до н. э. Археологический музей. Флоренция.

Древний Египет был страной высокой грамотности. Необозримое количество текстов в погребальных камерах пирамид и гробниц — древние «Тексты пирамид», рельефов на стенах и колоннах дворцов и храмов, записей на хрупких листах папируса сохранилось до наших дней. Чтобы написать все это, в Древнем Египте существовала целая армия писцов, прекрасно организованная и великолепно обученная (рис. 16).

Писцов готовили с детства в специальных школах. Папирус был слишком дорог, и поначалу ученики писали на пластинках известняка, разграфленных в линейку или клетку. Это были «тетради» для упражнений, на которых учились выводить иероглифы или скорописные знаки, а затем и целые тексты — классические и священные, такие, как «Гимн Нилу» или «Поучение Аменемхата». Наконец, перед тем как выйти на самостоятельную дорогу, выпускник получал драгоценный папирус. Он садился на корточки, разворачивал свиток, выбирал нужные кисточки, готовил чернила: красные — для заголовков и начальных строк и черные — для остального текста, и начиналось священнодействие письма. Каждый писец был не просто чертежником иероглифов — он был художником. Он расцвечивал свой текст различными красками, он украшал его миниатюрами, он выделял главные места. Он священнодействовал.

За всем этим действом следил цепкий взор учителя. «Счастлив писец искусный в деле своем. Будь настойчив в работе ежедневно, и ты овладеешь своим делом. Не проводи ни одного дня в безделье, иначе будут бить тебя. Уши юноши на спине его, и он внемлет, когда бьют его. Пусть внемлет сердце твое тому, что я сказал,— будет это полезно тебе. Обучают обезьян танцам, объезжают лошадей. Будь настойчив в получении советов! Не ленись! Пиши!» Этой записи на папирусе более 3000 лет. Но ее смело может взять как девиз любой сегодняшний школьник.

Вместе с египетскими мальчишками сел за известняковые пластинки и возмужалый эллин с черной курчавой бородой. Но в отличие от своих меньших сотоварищей уши бородатого эллина не были на спине, да и голова его стояла на месте. Очень скоро ученик писцов Пифагор далеко обогнал своих однокашников и мог по памяти записать и продекламировать полюбившийся ему стих «Прославление писцов»:

Мудрые писцы
Времен преемников самих Богов,
Предрекавшие будущее,
Их имена сохранятся навеки.
Они ушли, завершив свое время,
Позабыты все их близкие.
Они не строили себе пирамид из меди
И надгробий из бронзы.
Не оставили после себя наследников,
Детей, сохранивших их имена.
Но они оставили свое наследство в писаниях,
В поучениях, сделанных ими.

(Перевод А. Ахматовой)

Но школа писцов была лишь первой ступенью на пути к тайному знанию. Далее нужно было войти в жреческий храм, который был государством в государстве, в особую храмовую школу и досконально изучить египетскую мифологию, образы пантеона Богов, их эпитеты и атрибуты, их разветвленную родословную; нужно было пройти через обряды и мистерии, выдержать испытания духа и проверку знаний. Только тогда открывалась дорога в высший храмовый институт — «дом жизни».

«Дом жизни» был собранием ученых, жрецов и мудрецов. Здесь хранились религиозные традиции; здесь велись, записывались и обобщались астрономические наблюдения; здесь на протяжении столетий следили за разливами Нила и, основываясь на аналогиях, делали предсказания; здесь хранились тайны криптографии — особого шифрованного письма, изобретенного жрецами; здесь совершались научные открытия и технические изобретения; здесь рождались магические свитки, где, скрытая тонкой системой криптографических знаков, безмолвно праздновала тысячелетия египетская мудрость.

«Дом жизни» — это мозг интеллектуальной жизни Древнего

Египта, ее память, разум и действие. В библиотеке «дома жизни» хранилась тысячелетняя история Древнего Египта, скрупулезно, год за годом, век за веком, тысячелетие за тысячелетием составленные «Анналы фараонов» и «Анналы Тота» — Бога мудрости и хранителя знаний.

«Приди ко мне, Тот, священный ибис, Бог любящий Шмун, главный писец Эннеады Богов. Приди ко мне, направь меня, сделай меня умелым в твоем искусстве, ибо твое искусство — самое прекрасное». Так гласит древнеегипетский папирус. Чьей рукой написан он? Сколько ладоней разглаживало его, сколько глаз читало его? Скольких людей своим взволнованным призывом направил он к истине? Не было ль среди них эллинского мудреца Пифагора?

Наконец, Пифагор почувствовал себя готовым к осуществлению главной цели своего путешествия — поездке в святая святых жреческой мудрости город Мемфис. В путь двинулись во время разлива Нила, когда весь Египет покрывала вода и лишь города возвышались над ней, будто острова в Эгейском море. Плыли против течения и не по руслу реки, а напрямик по равнине, залитой водой. Однажды вечером на подходе к Мемфису путникам открылась сказочная картина.

На горизонте прямо из сумрака вечерних вод яркими светильниками стали подниматься острые вершины пирамид. По мере движения корабля пирамиды все росли и росли из воды, пока не заслонили собой полнеба. Корабль проплывал совсем близко, и в звонкой тишине вечера плеск весел пугающим эхом отражался от граней гигантских могил фараонов. Окрашенные низким солнцем зеркальные бока каменных громад горели зловещим багряным огнем. Столбы красного сияния вонзались в темноту вечернего неба. Казалось, будто сами фараоны гневаются на тех, кто осмелился нарушить вечную неподвижность этих мест, и огненными лучами хотят сжечь возмутителей своего спокойствия.

Рядом с пирамидами дремало огромное чудовище с телом льва и головой человека. Его туловище уже погрузилось в ночную темноту, но возвышавшаяся голова была освещена солнцем, и потому каменные глаза чудовища, будто глаза разъяренного быка, наливались кровавым светом. В священном трепете проплыли египтяне мимо гробниц фараона. Да и сам Пифагор в эту ночь не сомкнул глаз.

Когда каменное изваяние растворилось в ночи, египтяне рассказали эллину, что оно поставлено охранять покой царских гробниц, что на голове у него надет царский полосатый платок, на лбу высечен урей — священная змея, оберегающая фараонов, а лицо высотой в три человеческих роста повторяет облик самого фараона Хаффа, погребенного в пирамиде. Со своей стороны Пифагор заметил, что египетский страж пирамид очень похож на эллинскую Сфинкс — чудовище с телом льва, головой и грудью

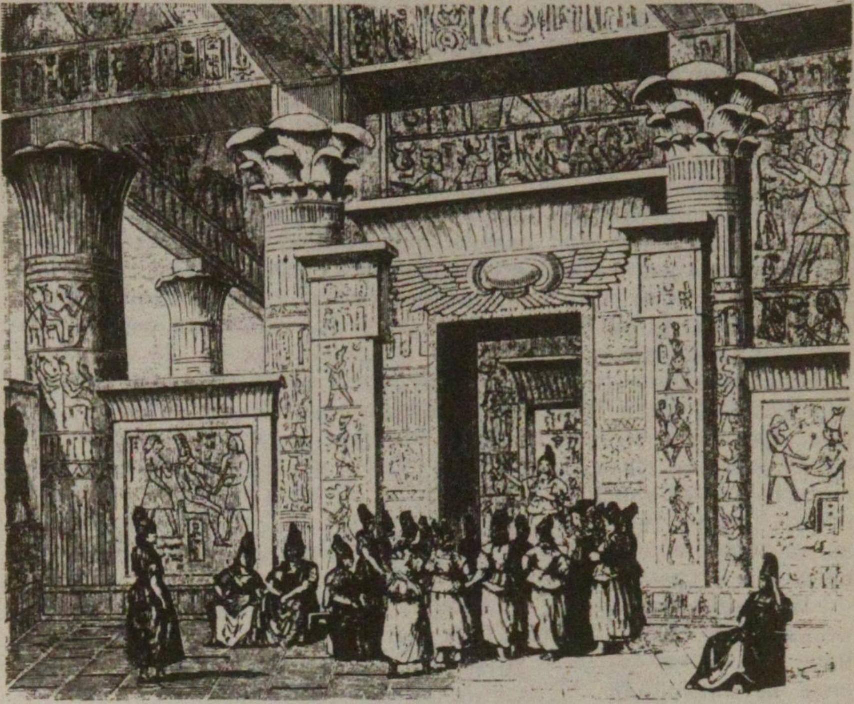


Рис. 17. Пифагор среди египетских жрецов. Гравюра из книги XIX в.

женщины и крыльями птицы. Сфинкс обитала близ греческих Фив и убивала каждого, кто не мог разгадать ее загадку: «Кто ходит утром на четырех ногах, в полдень — на двух, а вечером — на трех?» Загадку Сфинкс разгадал хитроумный Эдип, сын фиванского царя. «Это человек,— сказал он Сфинкс,— в младенчестве, зрелом возрасте и старости». Жизнь Сфинкс стала бессмысленной, она бросилась со скалы и разбилась, а фиванцы сделали Эдипа своим царем. С легкой руки греков египетские изваяния также стали называть сфинксами.

Вслед за своим стражем слились с ночной темнотой и пирамиды. Но долго еще их зеркальные грани сияли в глазах Пифагора. Ощущение незыблемости и вечности пирамид приводило воображение в трепет. Сколько столетий простояли эти рукотворные громады и сколько предстоит им еще нести над пустыней свой гордый и божественно простой очерк!

Все минет. Как льется вода,
Исчезнут в веках города,
Разрушатся стены и своды,
Пройдут племена и народы;
Но будет звучать наш завет

Сквозь сонмы мятущихся лет!
Что в нас, то навек неизменно,—
Все призрачно, бренно и тленно,—
Песнь лиры, созданье резца.
Но будем стоять до конца,
Как истина под покрывалом Изиды,
Лишь мы, Пирамиды!
Строители наши в веках
Осилили сумрачный прах,
И тайну природы постигли,
И вечные знаки воздвигли,
Мечтами в грядущем паря.
Пусть канул их мир, как заря
В пыланиях нового века,—
Но смутно душа человека
Хранит в глубине до сих пор,
Что знали — Орфей, Пифагор,
Христос, Моисей, Заратустра, друиды,
И мы, Пирамиды!

(В. Брюсов)

В Мемфисе Пифагор встретил немало эллинов, живших здесь издавна, но не встретил главного — расположения жрецов. Несмотря на рекомендательные письма от самого Амасиса, жрецы не спешили открывать свои тайны. Не решаясь прямо отказать подателю письма фараона, они пытались отпугнуть Пифагора безмерными тяготами, назначали ему трудные и противные греческим обычаям задания. Но Пифагор мужественно сносил все испытания и в конце концов его настойчивость победила. Двери мемфисских храмов открылись перед ним (рис. 17).

Сумрак и мертвое молчание окутывали каждого, кто входил в египетский храм. Лес гигантских каменных колонн был настолько частым, что казалось, будто они сходятся друг к другу, чтобы раздавить пришельца (рис. 18). И стены, и колонны были испещрены множеством рисунков, знаков, иероглифов, разобраться в которых было выше человеческих сил. Чаще других попадалось изображение мужчины с головой ибиса и палочкой писца в руке. Это был бог Тот — создатель и покровитель египетской мудрости. Тот разделил время на месяцы и годы, создал письменность и научил людей письму и счету, написал священные книги, в том числе и знаменитую «Книгу мертвых». Под покровительством Тота находились все архивы и огромная библиотека Гермополя.

Тот, владыка написанных слов,
Тот, царящий над мудростью книг!
Научи меня тайне письмен,
Подскажи мне слова мудрецов.

(В. Брюсов)

Рис. 18. Храм бога Амона-Ра в Карнахе близ Фив. Гипостильный зал XVI — XII вв. до н. э.

Незаметно храм переходил в подземелье, свет меркл, и человек от белого солнца египетской пустыни, от жизни и цвета погружался в тьму безвременья. Атмосфера отрешенности и тайны обволакивала его. Казалось, что все остановилось — и время, и телесная жизнь — и только мысль металась по временам и пространствам. Где они, радость и свет полупрозрачного мрамора храмов Эллады?

Темный коридор подземелья упирался в статую Исиды, сидящую в глубоком раздумье с закрытой книгой на коленях. «Смертному не дано поднять моего покрывала»,— гласила надпись у ее ног. Рядом скрывалась еле заметная дверь. «Подумай, ты еще можешь вернуться,— сказал ему жрец.— Многие нищие духом ступали за эту дверь, но никто из них не вернулся». Пифагор молча шагнул в темноту, и дверь Исиды захлопнулась за ним.

Маленький светильник был бессилен перед нахлынувшей темнотой, а коридор все петлял и петлял под землей, запутывая ориентацию в пространстве. Наконец, лабиринт переходил в ступени винтовой лестницы, прорубленной в скале, поднявшись по которой путник оказывался в середине просторного зала. Стены и своды зала терялись в темноте, отчего он казался беспредельным. Потоки густой черноты обрушивались на вошедшего, и непонятно было, стоит ли он на земле или парит в черном бесконечном пространстве. «Здесь погибают безумцы, возжелавшие тайного знания»,— троекратно повторило эхо округлого зала чей-то вкрадчивый скрипучий голос. Пифагора и ранее не покидало ощущение, что чьи-то глаза следят за ним из ниш лабиринта. Теперь это чувство находило материальное подтверждение и вместо страха, задуманного по жреческому сценарию, пришло спокойствие.

В черной бесконечности зала Пифагор разглядел слабые отблески огня. Он инстинктивно двинулся на чуть заметные блики и через несколько десятков шагов ощутил холод стены зала, а затем различил и нишу, откуда они шли. Ниша переходила в извилистый коридор, с каждым поворотом которого свет все усиливался. Наконец, коридор распрямился, и его дальний конец замыкала сплошная стена огня. Вперед пути не было, но не было пути и назад, ибо найти крошечный ход в середине огромного черного зала казалось безумием.

Пифагор остановился в раздумье, и, когда глаза его после непроглядной тьмы привыкли к яркому свету, он увидел, что сквозь огонь есть проход. Обратной дороги не было, и Пифагор прыгнул сквозь обруч пламени. По ту сторону огненной стены стояли два неокора — помощники верховного жреца — и знаком пригласили следовать за ними. Вновь они шли темными закоулками лабиринта, и вновь он оканчивался круглым залом. Но к величайшему удивлению Пифагора, над головой он увидел не беспроглядную темень, а серебряный блеск ночных звезд. Сколько же времени бродил он по лабиринту? Понять это было невозможно.

Неокоры объяснили, что Пифагору надлежит три ночи провести под сводами ночного неба, каждое утро с первыми проблесками рассвета возвращаясь назад в подземную галерею, где его будет ждать чаша с водой и легкая пища. Свет факелов неокоров качнулся в темноте, и Пифагор вновь оказался один. После долгого времени, проведенного в подземелье, звезды виделись особенно яркими. Медленно совершая свое извечное вращение, одни из них уплывали за край черного колодца, другие выступали им на смену. Пифагор лежал на шерстяной подстилке лицом к звездам. Их острые лучи проникали прямо в его сердце и рассыпались по телу искорками колдовской силы.

Теперь Пифагору стал понятен смысл долгого блуждания по подземному лабиринту. Он потерял точку отсчета на земле, он потерял счет времени — он слился с ночным небом, он влетел в первозданную стихию и плыл по ее безграничным просторам. Потоки мыслей о смысле короткой земной жизни и смысле вечного мироздания несли его по эфирному морю, усыпанному звездами. Как лучи далеких звезд, его мысли собирались в тугие пучки, освещая самые сокровенные тайники сознания. Три дня и три ночи промелькнули, как падающая звезда.

Пифагор был счастлив. Ночное одиночество, подаренное жрецами, многое изменило в его сознании. Перед жаждущим истины эллином открылись сияющая красота и разумность устройства мироздания. Какая сила удерживает эту неизмеримую громаду в вечном движении? Отчего она не распадается на части и не собирается воедино? Где начало и где конец ее? От этих вопросов разум приходил в немое оцепенение, которое сменялось оживленной работой мысли. Видимо, в эти минуты и решился Пифагор назвать звездный мир словом **«космос»** (κόσμος), что на языке его далекой родины означало порядок, совершенство, прекрасную обустроенность.

И все-таки чувство неудовлетворенности не покидало Пифагора. В глубине души он понимал, что не только под сводом звездного неба, но и над чистым листом папируса открывается истина. Долгие размышления, в которые погружает искателя истины звездное небо, должны быть закреплены и выверены в четких линиях геометрических чертежей, в стройных шеренгах астрономических таблиц, в затейливых столбцах арифметических вычислений. Путь к истине сокрыт не столько в ночных жреческих таинствах, сколько в математических таблицах и чертежах. Истина сокрыта в числе! В этом для Пифагора не оставалось сомнений, но холодной мудрости чисел предстояло еще долго учиться.

Что же приобрел Пифагор за годы учений в Египте как ученый и прежде всего как математик? С высоты сегодняшнего знания оценивая вклад самого Пифагора в математику, пожалуй, следует сказать: немногое. Египетская математика была чисто прикладной наукой: она удовлетворяла потребность в счете (арифметика) и в измерении земельных участков (геометрия). Если первое приложение математики естественно для каждой страны, то второе играло особую роль именно в Египте. Важность для Египта отдельной науки — землемерия (по-гречески геометрии) объяснил еще Геродот: «Этот царь (фараон Сесострис.— *А.В.*), как передавали жрецы, разделил землю между всеми жителями и дал каждому по квадратному участку равной величины. От этого царь стал получать доходы, повелев взимать ежегодно поземельную подать. Если река отрывала у кого-нибудь часть его участка, то владелец мог прийти и объяснить царю о случившемся. А царь посылал людей удостовериться в этом и измерить, насколько уменьшился участок, для того чтобы владелец уплачивал подать соразмерно величине оставшегося надела. Мне думается, что при этом-то и было изобретено землемерное искусство и затем перенесено в Элладу».

К сожалению, папирус, на котором египтяне записывали математические тексты, слишком подвержен ударам времени. К сегодняшнему дню уцелело лишь два полноценных математических папируса. Первый из них — так называемый папирус Райнда (по имени обнаружившего папирус англичанина) — хранится в Британском музее, второй находится в Музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина и называется Московским. Папирус Райнда содержит 84 задачи и датируется приблизительно 1800 г. до н. э., хотя, как утверждает его писец Ахмес, он восходит к более древнему оригиналу. В Московском папирусе 25 задач примерно того же содержания, и он, возможно, на два столетия старше. Вот практически и все, что осталось от египетской математики.

Проницательный читатель, привыкший к бурным процессам в современной науке, конечно, возразит: по этим папирусам нельзя судить о египетской математике времен Пифагора, ибо за 1500 лет, прошедших со времени их написания, египетская математика могла сделать огромный скачок вперед. Однако сохранившиеся остатки египетских папирусов более позднего происхождения, в том числе и римской эпохи, показывают, что это не так. За 2000 лет своего существования египетская математика практически не претерпела никаких качественных изменений! Вообще, долина Нила — Египет, защищенная с трех сторон пустыней, а с четвертой стороны — морем, представляет собой уникальный пример удивительно статичного общества. В Египте тысячелетиями ничего не менялось! Не изменялась и математика.

Папирус Райнда начинается громким обещанием научить «совершенному и основательному исследованию всех вещей, пониманию их сущности, познанию всех тайн...». Однако, по существу, папирус открывает не происхождение вещей, а тайны счета, и его содержание сводится к двум вопросам: 1) сведение всех арифметических операций к сложению; 2) правила действия с дробями.

Умножение проводилось последовательным удвоением первого сомножителя, а затем составлялась сумма так, чтобы число удвоений давало второй сомножитель. Например, чтобы умножить 12 на 13, писали

$$\begin{array}{cc} /1 & 12 \\ 2 & 24 \\ /4 & 48 \\ /8 & 96 \\ \hline (1+4+8=13) & (12+48+96=156=13\cdot 12) \end{array}$$

и складывали все числа, отмеченные наклонной чертой.

Правила действия с дробями были куда более громоздкими. Все дроби сводились к сумме так называемых основных дробей, т. е. дробей, имеющих в числителе единицу. Поскольку умножение было двоичным, то достаточно было уметь разлагать на основные дроби лишь дроби вида $\frac{2}{n}$. Папирус Райнда дает таблицу таких разложений для всех нечетных n от 5 до 331. Например:

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}.$$

Такие действия с дробями были исключительно тяжеловесными. Тем не менее они были заимствованы греками и применялись не только в эпоху эллинизма (эпоху Александра Великого), но и в средние века. Таким образом, если Пифагор и привез из Египта правила действия с дробями (а скорее всего так и было), то тем самым в европейскую математику вошел громоздкий математический аппарат, который резко осложнял вычислительные работы. Остается лишь сожалеть, что Пифагор не внедрил в греческую математику несравненно более прогрессивную вавилонскую технику счета (если, конечно, Пифагор был в Вавилоне). Впрочем, в истории науки есть немало примеров тому, как простые и естественные методы подолгу пробивали себе дорогу к жизни, тогда как громоздкие теории укоренялись с легкостью сорняков.

Все тайны счета преподносились в египетских папирусах на конкретных задачах. В папирусе Райнда мы находим и решение знаменитой задачи о семи кошках: в каждом из 7 домов живет по 7 кошек; каждая кошка съела по 7 мышей; каждая мышь съела по 7 колосьев; из каждого колоса можно получить 7 мер хлеба. Так сколько всего предметов мы перечислили? Решение этой задачи на геометрическую прогрессию сегодня доступно каждому школьнику. Но кто сможет ответить на другой вопрос: сколько всего человек обучалось математике на этой задаче за 4000 лет?

Но ни в одном папирусе, ни в одной задаче мы не найдем и намека на объяснение, почему следовало действовать так, а не иначе. В египетских папирусах полностью отсутствует главное содержание сегодняшней математики — доказательство. Этим содержанием наполнил математику Пифагор.

И наконец, два слова о египетской геометрии. Геометрия египтян носила исключительно прикладной характер и касалась измерения площадей, объемов и поверхностей. Помимо площадей прямоугольника, треугольника и трапеции египтяне умели вычислять и площадь круга. Она принималась равной площади квадрата со стороной в 8/9 диаметра, т. е.

$$\left.\begin{aligned} S^* &= \left(\frac{8}{9}d\right)^2 \\ S &= \frac{\pi d^2}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3{,}1605.$$

Таким образом, египтяне получили прекрасное приближение для числа π (напомним, что $\pi = 3{,}14159...$). И вавилоняне, чья математика была намного выше египетской, и древние китайцы пользовались значением $\pi = 3$. Это же значение числа π названо в Библии священным.

Но самым замечательным результатом египетской геометрии является совершенно точное вычисление объема усеченной пирамиды с квадратным основанием:

$$V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)\,h.$$

Здесь a и b — длины сторон оснований; h — высота. Этот результат, содержащийся в Московском математическом папирусе (рис. 19), не имеет аналогов ни в какой другой древней математике и является одной из загадок великой египетской цивилизации[1].

Итак, желая узнать, чему научился Пифагор в Египте, мы попали в нелегкую ситуацию. Мы ничего не знаем о египетской математике времен Пифагора, мы не знаем ни одной строчки сочинений Пифагора и в то же время мы пытаемся сделать какие-то выводы. Все это напоминает сказку: пойди туда, не знаю куда, принеси то, не знаю что. И тем не менее, анализируя ход развития египетской и греческой математики, можно уверенно сказать: греческая математика избрала свой путь. Греческий путь в математике заключается в выборе системы самоочевидных истин

---

[1] В качестве другой великой загадки научного гения египтян следует назвать также и точное вычисление поверхности полусферы. Некоторое время этот результат, отраженный в задаче 10 Московского математического папируса, считался научным подвигом египтян, более чем на 1000 лет опередившим гениальные работы Архимеда. Однако при ближайшем рассмотрении было замечено, что текст этой задачи не вполне ясен, а возможно, и неполон. Это дало основание скептикам считать, что речь в задаче идет о вычислении боковой поверхности полуцилиндра, высота которого равна диаметру, а это уже несравненно более простая задача.

Заметим, что факт равенства боковой поверхности цилиндра с высотой, равной диаметру цилиндра ($H = 2R$), т. е. $S = 2\pi RH = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$, поверхности вписанной в этот цилиндр сферы $S = 4\pi R^2$ сам по себе является поразительным.

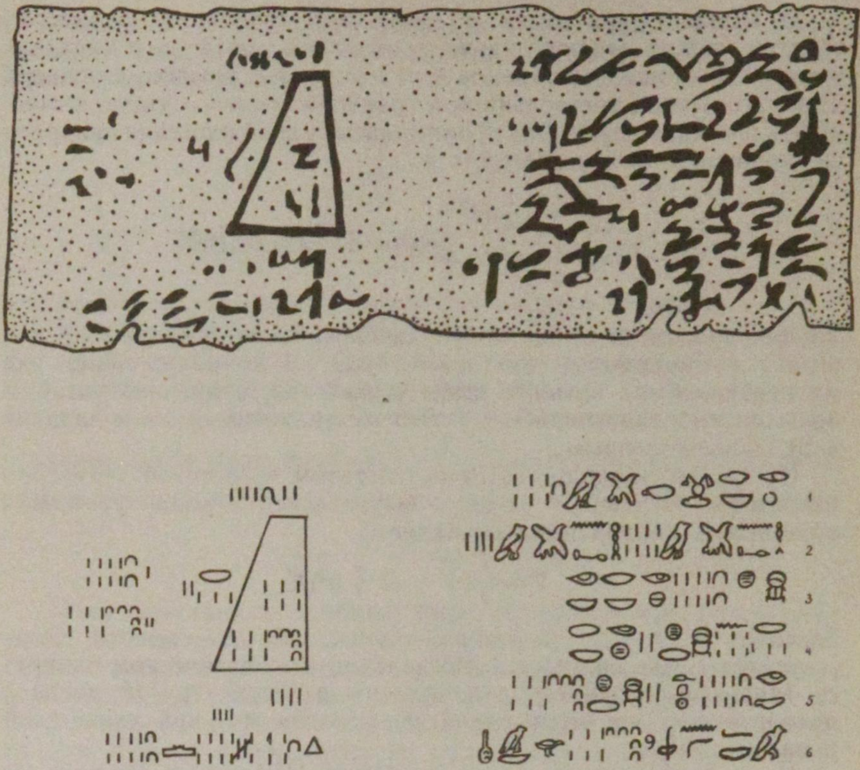


Рис. 19. Фрагмент Московского математического папируса, содержащий вычисление объема усеченной пирамиды со сторонами основания 2 и 4 локтя и высотой 6 локтей. Внизу приведен перевод демотического письма папируса на иероглифическую запись. XIX — XVII вв. до н. э. Москва. Музей изобразительных искусств им. А. С. Пушкина.

(аксиом) и выявлении с помощью рассуждений (доказательств) глубинных связей между абстрактными фундаментальными понятиями. Что касается египетской науки, то она обращала главное внимание на установление разнообразных конкретных фактов, частных закономерностей, на виртуозное владение простейшими полуинтуитивными методами. Таким образом, в науке Пифагор выбрал свой путь и начиная с Пифагора «греческий» стиль мышления стал господствовать в математике, что и явилось главной причиной ее сегодняшнего расцвета.

Но вот чего Пифагор в избытке заимствовал у египетских жрецов, так это всякого рода мистики, пристрастия к таинствам, священнодействиям, магии чисел и т. д. Можно с уверенностью сказать, что вся числовая магия, пышным букетом расцветшая в средневековой Европе, имела своим «крестным отцом» Пифагора. Идея о магических свойствах чисел, вера в бессмертие души и переселение души человека в животных, артистически разработанный спектакль разнообразнейших священнодействий и таинств — все это и составляло основной «предмет» жреческой науки. Долгое пребывание в атмосфере таинства оставило свой отпечаток в сознании Пифагора. Впрочем, как человек тонкий и впечатлительный, он и сам был склонен к подобного рода мистериям.

Как бы то ни было, но пора ученичества подходила к концу. Все было уже изведано, понято, прочувствовано, ничего нового жрецы не могли уже дать своему талантливому ученику. Возможно, неудовлетворенность бездоказательностью египетской математики ускорила окончательное решение Пифагора возвращаться на родину. Нужно было ехать домой и создавать свою школу, в которой ясность логики и твердость доказательств стали бы главными строительными материалами.

Но нелегко было теперь осуществить это решение, обратное тому, что привело Пифагора 11 лет назад в Египет. Жрецы неохотно открывали двери своих храмов входящему, но еще крепче закрывали их перед выходящим. Никто не должен был разносить по свету тайны египетских храмов. Мы не знаем, как Пифагору удалось выбраться из цепких жреческих объятий, но знаем, что и эту преграду Пифагор сумел преодолеть. Мысль Пифагора уже летела к лазурным берегам родной Эллады.

5. ВАВИЛОНСКИЙ ПЛЕН И ВАВИЛОНСКАЯ МУДРОСТЬ

В то время как Пифагор постигал жреческую науку, к востоку от Египта, в Междуречье, из плотного тумана легенд и безвестности вставала звезда нового властелина мира — персидского царя Кира. Потомок мелкого вождя персидских племен Ахемена на глазах у оторопевших бывших владык становился всесильным деспотом Киром Великим, основоположником новой царской династии Ахеменидов.

Подробное жизнеописание Кира оставил древнегреческий писатель и историк Ксенофонт (ок. 445—355 до н. э.) в своей знаменитой «Киропедии»[1], которая начинается таким рассуждени-

---

[1] Ученик Сократа Ксенофонт — один из самых популярных и плодовитых авторов древности. Судьба во всем благоволила Ксенофонту: он прожил без малого сто лет и до конца дней своих находился в гуще политической жизни Эллады; в родных Афинах он был заочно приговорен к смертной казни, но чаша сия миновала его, а «виновник» дожил до своей реабилитации; и, наконец, главное — время пощадило практически все сочинения Ксенофонта. В «Киропедии» («ΚΥΡΟΥ ΠΑΙΔΕΙΑ» — «Воспитание Кира») Ксенофонт нарисовал образ «идеального» правителя и «идеального» государства. Писал Ксенофонт просто и живо, и его стиль считался классическим образцом аттической речи.

ем: «Некогда пришлось нам задуматься о том, какое множество демократий было низвергнуто сторонниками иного, не демократического строя, какое множество монархий и олигархий пало, свергнутое восставшим народом, как много лиц, домогавшихся тиранической власти, очень быстро ее утратили, а тем, кому удалось хотя бы на короткий срок встать у кормила правления, удивляются и сейчас как мудрецам и счастливцам. Нам часто встречались люди, из которых одни владели многими, другие — немногочисленными рабами, но даже этими немногими в собственном доме они не смогли управлять так, чтобы те с достаточной готовностью повиновались своим господам. Далее, подумали мы, что и пастухи выступают в роли правителей рогатого скота, как табунщики — своих табунов; и вообще все, называющиеся пастырями каких бы то ни было животных, находящихся под их властью, могли бы равным образом считаться их повелителями. Легко можно увидеть, что все эти стада охотнее повинуются своим пастухам, чем люди — своим правителям...

На основании всего этого мы решили, что человеку намного легче установить свое господство над всеми прочими существами, чем над людьми. Но, познакомившись с жизнью перса Кира, ставшего властителем множества подчинившихся ему людей, государств и народов, мы были вынуждены изменить свое мнение и признать, что установление власти над людьми не должно считаться трудным или невозможным предприятием, если браться за него со знанием дела. Нам известно, что Киру охотно подчинялись народы, жившие от него в отдалении, измеряемом многими днями пути, другие — даже месяцами, третьи вообще его не видели в глаза, а четвертые прекрасно понимали, что никогда не получат возможности его увидеть... Сами эти народы были столь многочисленны, что одно путешествие через все эти страны могло бы считаться подвигом, будь то на восток от царской резиденции, или на запад, или на север, или на юг».

В 550 г. до н. э. Кир покорил Мидию, а через три года отправил на костер лидийского царя Креза. Так в течение трех лет пали две самые могущественные державы Ближнего Востока, а вместе с ними распался и хрупкий механизм международного равновесия. Следом за Лидией пришла очередь греческих полисов в Малой Азии, из которых лишь Милет мудростью Фалеса сумел на полстолетия отодвинуть лавину персидского порабощения. В 539 г. до н. э. Кир появился у «Врат Божьих» — Вавилона (Вавилон — от аккадского Баб-Илу — Врата Бога).

Красавец Вавилон, столица Нововавилонского царства, богатейший и огромнейший город древнего мира, утопал в роскоши, праздности и разврате. «Вавилон великий, великая блудница, мать блудницам и мерзостям земным» — так сказано о Вавилоне того времени в Откровении Иоанна Богослова — знаменитом Апокалипсисе. Вавилон, как через 1000 лет и Рим, затягивала трясина праздной лени. И это закончилось тем, что самый большой в древнем мире, немалый и по современным меркам город с полумиллионным населением фактически некому было защищать.

Вавилон располагался по обоим берегам реки Евфрат и со всех сторон был защищен мощными стенами и глубокими рвами. Стены Вавилона, согласно Геродоту, имели 200 царских локтей высоты и 50 локтей ширины, т. е. 106 м и 26 м соответственно. Геродот, конечно, и на этот раз сильно преувеличивал, но бесспорно, что это были очень сильные укрепления. Недаром Кир, увидев стены Вавилона, сказал: «Доблестные союзники, мы осмотрели кругом вражеский город. Что касается меня, то я, признаюсь, не вижу, каким образом можно взять штурмом столь мощные и высокие стены. Но раз в городе находится множество людей, то, я думаю, легче будет одолеть их голодом, если только они не рискнут выйти и сразиться» (Ксенофонт. Киропедия).

Началась осада Вавилона, над которой сами вавилоняне только посмеивались, ибо в городе было продуктов на 20 лет. Но Кир нашел выход. Со стороны реки город, естественно, был укреплен слабо, ибо река сама по себе являлась преградой для врага. Поэтому выше по течению Евфрата Кир прокопал обводной канал и, выждав подходящий момент, когда «...в Вавилоне наступает такой праздник, во время которого все горожане целую ночь пьют и гуляют», отвел воды Евфрата в сторону. «Друзья мои,— обратился Кир к своему войску,— река уступила нам дорогу в город. Войдем же в него без колебаний и страха».

Вавилон был взят практически без боя. Город был так велик, а отряды Кира столь стремительны, что вавилоняне, беспечно танцевавшие по случаю праздника в центре города, даже не знали, что жители окраин уже взяты в плен или убиты. В своем дворце пировал и вавилонский царевич Валтасар (рис. 20).

Пир Валтасара, ставший синонимом обреченности праздной власти, с потрясающей силой образности и поэтики описан в Библии в Книге пророка Даниила: «Валтасар царь сделал большое пиршество для тысячи вельмож своих и перед глазами тысячи пил вино. Вкусив вина, Валтасар приказал принести золотые и серебряные сосуды, которые Навуходоносор, отец его, вынес из храма Иерусалимского, чтобы пить из них царю, вельможам его, женам его и наложницам его... В тот самый час вышли персты руки человеческой и писали против лампады на извести стены чертога царского, и царь видел кисть руки, которая писала. Тогда царь изменился в лице своем; мысли его смутили его, связи чресл его ослабели, и колени его стали биться одно о другое. Сильно закричал царь, чтобы привели обаятелей, Халдеев и гадателей. Царь начал говорить и сказал мудрецам Вавилонским: кто прочитает это написанное и объяснит мне значение его, тот будет облечен в багряницу, и золотая цепь будет на шее у него, и третьим властелином будет в царстве. И вошли все мудрецы царя, но не могли прочитать написанного и объяснить царю значение его...»

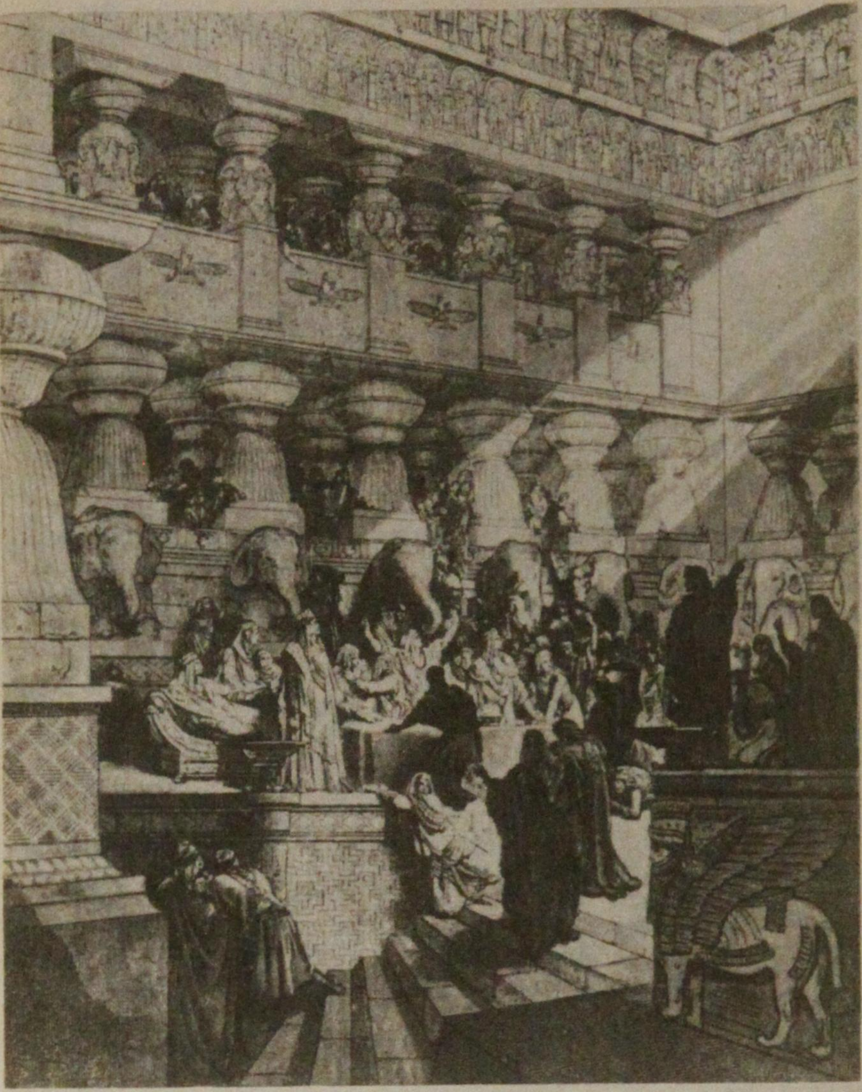


Рис. 20. Гюстав Доре. Пир Валтасара. 1864—1866. Иллюстрация к Библии.

Наконец, по совету матери-царицы Нитокрис вспомнили о Данииле, иудейском пленнике, томившемся в вавилонском плену среди других десяти тысяч евреев. И сказал Даниил царю: «Дары твои пусть останутся у тебя, и почести отдай другому; а написанное я прочитаю царю и значение объясню ему». Затем Даниил сказал о беззакониях Навуходоносора, который «кого хотел, возвышал и, кого хотел, унижал», о том, что «и ты, сын его Валтасар, не смирил сердца твоего», об осквернении иерусалимских реликвий. «За это,— сказал Даниил,— и послана от Него кисть руки, и начертано это писание. И вот что начертано: мене, мене, текел, перес. Вот и значение слов: мене — исчислил Бог царство твое и положил конец ему; текел — ты взвешен на весах и найден очень легким; Перес— разделено царство твое и дано Мидянам и Персам».

Мене, мене, текел, перес — исчислен, исчислен, взвешен, разделен. Это пророчество арамейской надписи, облеченное в сказочно-поэтическую форму, содержало глубокий историко-философский смысл: исчислена и взвешена беспутная жизнь Валтасара и царство его разделено между мидянами и персами.

О Валтасар, оставь свой пир
И оргий хаос сладострастный!
Уж на стене — гляди, кумир!—
Слова пылают: знак ужасный...
То, что не Бог — тиран всевластный,
Легко ль порой уразуметь?
Ужель, злодей, тебе не ясно,
Что обречен ты умереть?

Беги! Венки с чела сорви!
Ведь седина им не пристала...
Напрасно юность не лови,
Корона дряхлость увенчала.
Алмазов блещет в ней немало,
Но им придется потускнеть...
Чтоб чернь ее не презирала,
Учись героем умереть!

Судьбой ты взвешен на весах
И слишком легок оказался...
Давно ты превратился в прах,
Гораздо раньше, чем скончался.
Веселый смех кругом раздался,
И остается лишь жалеть,
Что зря ты и на свет рождался—
Чтоб так царить и умереть.

(Дж. Г. Байрон)

Так, 12 октября 539 г. до н. э. пал Вавилон. Валтасар был убит. Царем Вавилона был поставлен Камбиз, старший сын и наследник Кира, а Вавилон наряду с Сузами, Персеполем и Экбатаной стал одной из столиц гигантской империи Ахеменидов.

Надо сказать, что Кир был не только удачливым завоевателем, но и осмотрительным политиком. Он сумел снискать симпатии покоренных народов, оставляя в неприкосновенности их обычаи и религию. Завоевав Вавилон, Кир вернул свободу евреям и положил конец их 60-летнему «вавилонскому плену». Дух терпимости, бесспорно, делает Кира одной из наиболее благородных фигур античности. «Что царство Кира было самым великолепным и самым могущественным из государств Азии — это подтверждается уже его размерами. На востоке оно было ограничено Красным морем (Персидский залив.— *А. В.*), на севере — Понтон Эвксинским, на западе — Кипром и Египтом, на юге — Эфиопией. Будучи столь огромным, оно управлялось единственно волею самого Кира; он дорожил своими подданными и пекся о них как о собственных детях, но зато и подвластные Киру народы чтили его как родного отца» (Ксенофонт. Киропедия).

Такова была обстановка в Передней Азии, когда Пифагор отправился из Египта на родину. Ничто не омрачало его путь, сердце рвалось вперед, а в голове роились научные планы. Прибыв в Исс, древний город в северо-восточной оконечности Средиземного моря, город, у стен которого два века спустя, осенью 333 г. до н. э., Александр Великий наголову разбил огромную армию персов, Пифагор решил оставшийся путь проделать по суше: увидеть новые земли и новые народы. Однако путь этот растянулся на долгие семь лет.

Однажды в полдень (трагичный или счастливый для Пифагора?) караван купцов, с которым шел Пифагор, столкнулся с отрядом самого Камбиза. Вавилонский царь возвращался с инспекторской поездки по огромной империи своего отца. Раздосадованный нерегулярным сбором податей, молодой властелин не преминул упустить дорогую добычу, и маршрут путников изменился на 180 градусов. Они отправились в Вавилон, но уже в качестве пленников.

Прошел месяц пути. Дорога шла вдоль берега Тигра, и пыльное небо раскаленным котлом пылало над их головами. Наконец, показались развалины Ниневии. Еще три четверти века назад это был богатейший город Востока, столица великой Ассирии, резиденция самого Ашшурбанипала. Повелитель самой могущественной империи слыл человеком контрастов: тонкий ценитель искусства, собравший лучших скульпторов мира, и погрязший в пороках сладострастник; покровитель наук, чьими трудами была собрана богатейшая в древнем мире библиотека, и кровожадный головорез; храбрый красавец, выходивший один на один на льва, и моральный урод.

Пленники вошли в остатки восточных ворот Ниневии — «Вход толп народов». Некогда здесь в клетках на собачьей цепи сидели цари, плененные Ашшурбанипалом, и в ступах толкли вырытые из могил кости своих предков. Прошли развалины дворца Ашшурбанипала и, возможно, переступили через валявшийся под ногами рельеф раненой львицы, который сегодня является гордостью собрания Британского музея и считается жемчужиной античного искусства (рис. 21). Впрочем, пленники думали не о рельефах,

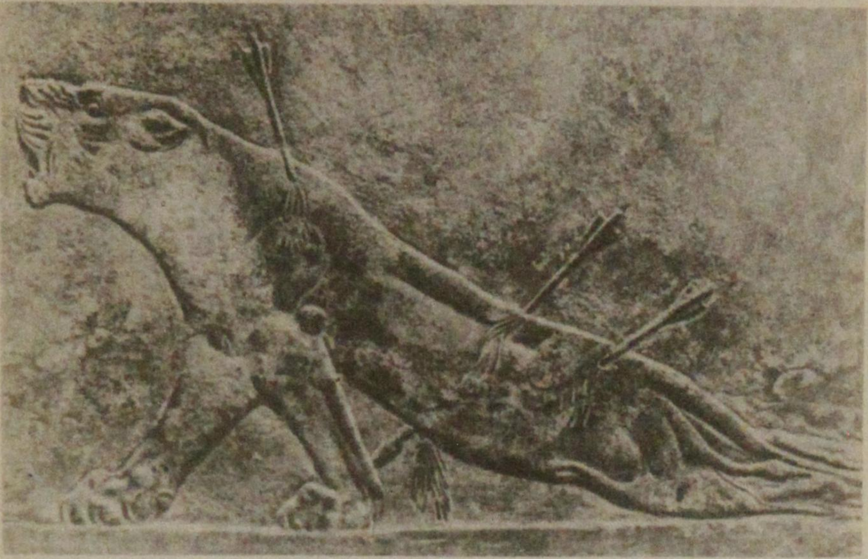


Рис. 21. Раненая львица. Рельеф из дворца Ашшурбанипала в Ниневии. Алебастр. VII в. до н. э. Лондон. Британский музей.

украшавших дворец Ашшурбанипала, а о стенах и башнях Ниневии, некогда покрытых кожей, содранной с врагов ассирийского деспота. Что-то ждало их в Вавилоне?

Еще через месяц пути там, где воды Тигра и Евфрата почти вплотную подходят друг к другу, путники перешли в долину Евфрата. А вскоре показались и зеленые холмы Вавилона.

Пленники вошли в город по Аккадской дороге через парадные Ворота богини Иштар. Башни и арка ворот были сплошь облицованы глазурованным кирпичом. Сверкавшую на солнце лазурную гладь изразцов украшали рельефные изображения могучих быков и грифонов. Ровесник Пифагора — Ворота Иштар — один из немногих шедевров Нового Вавилона, сохранившихся до наших дней. Сегодня они украшают залы Переднеазиатского музея в Берлине (рис. 22).

Пройдя Ворота Иштар, изумленные путники, забыв о своем незавидном положении, увидели то, что еще недавно они приняли за зеленые холмы Вавилона. То были знаменитые Висячие сады полумифической царицы Семирамиды, причисленные греками к одному из семи чудес света. Многоярусные каменные возвышения, похожие с виду на горы, были засажены самыми редкими и красивыми деревьями. Каменные террасы устилал толстый слой почвы, на котором произрастали растения. В недрах каменных громад были спрятаны трубы, по которым с помощью насосов подавалась наверх вода. Затем эта вода стекала вниз игривыми ручейками, шумными водопадами, останавливалась таинственны-

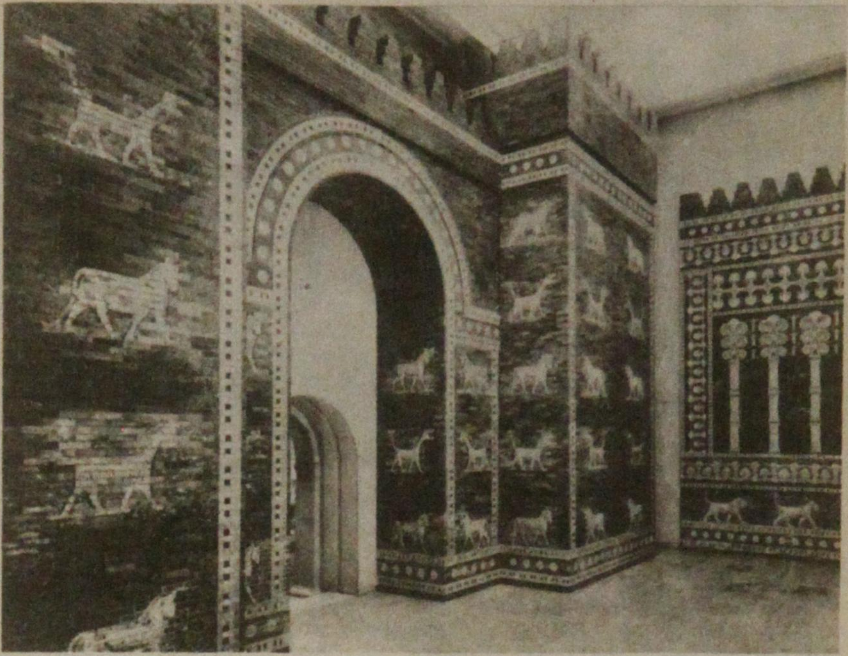


Рис. 22. Ворота Иштар в Вавилоне. Облицовка из поливных изразцов. Ок. 570 г. до н. э. Берлин. Переднеазиатский музей.

ми заводями, на берегу которых располагались гроты и беседки. Излишне уточнять, что приводились насосы в движение мускулами многочислённых рабов.

Молва утверждала, что эти диковинные сады были построены по прихоти жены Навуходоносора — царицы Семирамиды, которая происходила родом из горной Мидии и тосковали на равнинах Вавилонии по горным пейзажам.

Для первых властителей завиден мой жребий,
И Боги не так горды.
Столпами из мрамора в пылающем небе
Укрепились мои сады.

Там рощи с цистернами для розовой влаги,
Голубые, нежные мхи,
Рабы, и танцовщицы, и мудрые маги,
Короли четырех стихий.

Все манит и радует, все ясно и близко,
Все таит восторг вышины,
Но каждою полночью так страшно и низко
Наклоняется лик луны.

И в сумрачном ужасе от лунного взгляда,
От цепких лунных сетей,
Мне хочется броситься из этого сада
С высоты семисот локтей.

(Н. Гумилев)

Миновав Висячие сады, Аккадская дорога переходила в широкую Дорогу Процессий — проспект Айбуршабум, вымощенный белыми и красными плитами. Дорога Процессий прорезала почти весь город и вела к Главному храмовому комплексу Вавилона — Эсагиле[1] — жилищу бога Бэла-Мардука[2]. Храм Бэла-Мардука, как и всякий главный ассиро-вавилонский храм, имел ступенчатую башню-зиккурат — «храм неба». Зиккурат храма Бэла-Мардука — башня Этеменанки[3] — и есть знаменитая по Библии Вавилонская башня.

Строительство зиккуратов в Месопотамии имеет тысячелетнюю историю. Когда-то древние шумеры обитали в горах и поклонялись богам, живущим на вершинах гор. Затем шумеры спустились на равнины Междуречья, но не изменили своим обрядам и стали строить искусственные горы-зиккураты. Еще позже религию шумеров восприняли ассирийцы и вавилоняне. Так появились зиккураты, соединявшие, по мнению верующих, землю и небо. Именно за это, как повествует известный отрывок из книги Бытия, Бог смешал языки дерзких людей, лишив их возможности построить башню до небес. Отсюда и пошло крылатое выражение — вавилонское столпотворение, последнее слово которого означало сотворение столпа, башни, а затем уже стало синонимом беспорядка.

«И сказали они: построим себе город и башню, высотою до небес, и сделаем себе имя, прежде нежели рассеемся по лицу всей земли. И сошел Господь посмотреть город и башню, которые строили сыны человеческие. И сказал Господь: вот, один народ, и один у всех язык; и вот что начали они делать, и не отстанут они от того, что задумали делать; сойдем же и смешаем там язык их, так чтобы один не понимал речи другого. И рассеял их Господь оттуда по всей земле; и они перестали строить город и башню. Почему дано ему имя Вавилон: ибо там смешал Господь язык всей земли, и оттуда рассеял их Господь по всей земле» (рис. 23).

Вавилонская башня Этеменанки была грандиозным семиярусным сооружением. Ее высота составляла девяносто метров, а сторона квадратного основания — 91,5 м. Каждый ярус был окрашен в свой цвет: черный, белый, пурпурный, синий, ярко-красный, серебряный и золотой. Система наружных каменных

---

[1] Эсагила (шумер.) — дом, в котором поднимают голову.

[2] Бэл считался главой всего вавилонского пантеона богов, а Мардук — покровителем города Вавилона.

[3] Этеменанки (шумер.) — дом основания небес и земли.

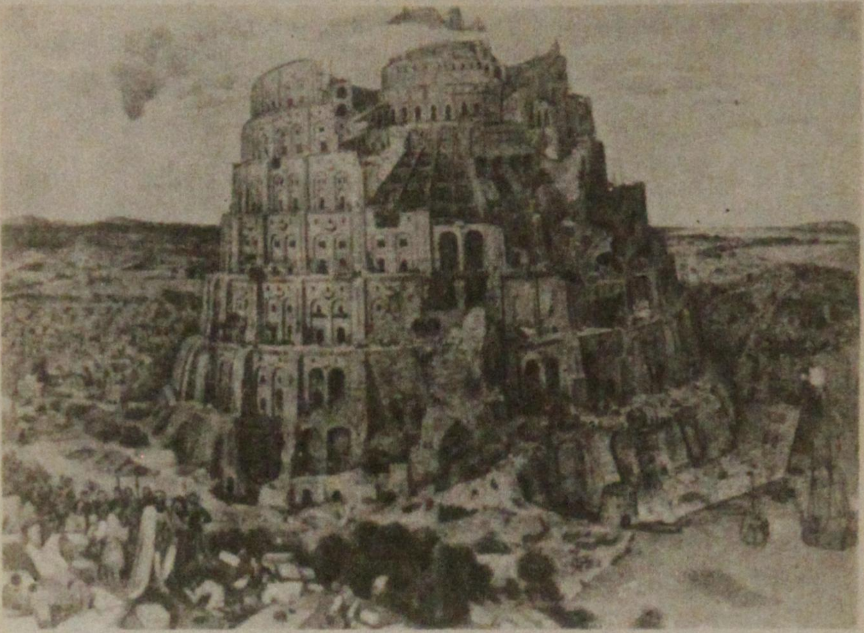


Рис. 23. Питер Брейгель Старший. Вавилонская башня. 1563 г. Вена. Художественно-исторический музей.

лестниц, стремительно возносящихся вверх, различные галереи, площадки отдыха, ниши, переходы и контрфорсы придавали башне причудливый вид. Однако во всем этом царил порядок симметрии и соразмерности. На верхнем этаже зиккурата помещался храм, в котором стояло прекрасное ложе, предназначенное для самого бога Мардука. Наконец, сам зиккурат располагался посреди широкого внутреннего двора, образованного каре служебных помещений. Этот двор и был центром вавилонской науки (рис. 24).

Впрочем, о всех чудесах Вавилона коротко рассказать невозможно. Ведь в городе было 24 больших проспекта, 53 храма и 600 часовен; статуя бога Мардука из чистого золота весила более двух тонн; по стенам Вавилона могли свободно разъехаться две колесницы, запряженные четверкой лошадей, и т. д. и т. д. Так что нам лучше всего вернуться к судьбе вавилонского пленника.

Вряд ли стоит слишком драматизировать вавилонский плен Пифагора. Во все времена пленник, если он не являлся властелином порабощенной державы, а был умелым ремесленником или мудрым мыслителем, находил свое место под солнцем. Следует вспомнить о терпимости Кира к покоренным народам и о том, что Кир освободил плененных Навуходоносором евреев, многие из которых предпочли остаться в Вавилоне. Видимо, нашел свое место среди вавилонских мудрецов и Пифагор. Место же это находилось на широком дворе перед Вавилонской башней, и нам остается лишь войти туда вслед за Пифагором и познакомиться с вавилонской мудростью.

Вавилонская наука была значительно более развитой, нежели египетская. Есть мнение, что причиной тому, как, впрочем, и причиной возникновения всей цивилизации Междуречья, были все те же Тигр и Евфрат. В самом деле, как Египет, по словам Геродота, был «даром Нила», так и Месопотамия была даром Тигра и Евфрата. Но в отличие от Нила, этой «самой добропорядочной из всех рек», для орошения и ирригации долин блуждающих рек Тигра и Евфрата требовалось немалое техническое искусство. Первоначально эти долины представляли собой хаос воды и суши, непроходимые тростниковые плавни и выжженные солончаковые отмели, рассадник холеры, дизентерии, малярии, полчищ комаров, гнуса, ядовитых змей и скорпионов. Требовались гигантские усилия, не только физические, но и интеллектуальные, для того, чтобы превратить этот заболоченный ад в цветущий рай на земле.

Однако прошли века, и земной рай оказался погребенным под толстым слоем земли. О культуре Междуречья вообще забыли, и лишь библейская легенда о Вавилонской башне да предание о садах Семирамиды смутно напоминали о ней. Сбылись слова иудейского пророка Исайи: «И Вавилон, краса царств, гордость Халдеев, будет ниспровержен Богом, как Содом и Гоморра, не заселится никогда, и в роды родов не будет жителей в нем; не раскинет Аравитянин шатра своего, и пастухи со стадами не будут

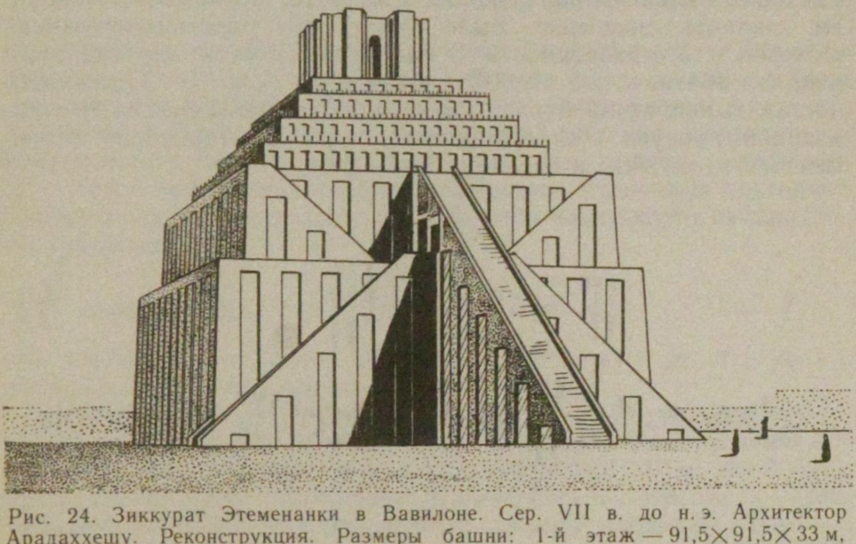


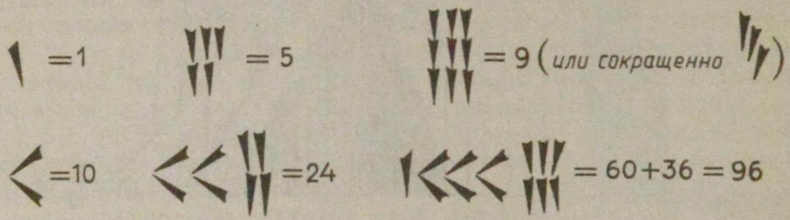
Рис. 24. Зиккурат Этеменанки в Вавилоне. Сер. VII в. до н. э. Архитектор Арадаххешу. Реконструкция. Размеры башни: 1-й этаж — 91,5×91,5×33 м, 2-й этаж — 78×78×18 м, 3-й этаж — 60×60×6 м, 4-й этаж — 51×51×6 м, 5-й этаж — 42×42×6 м, 6-й этаж — 33×33×6 м, 7-й этаж — 24×21×15 м.

отдыхать там. Но будут обитать в нем звери пустыни, и домы наполнятся филинами; и страусы поселятся, и косматые будут скакать там. Шакалы будут выть в чертогах их, и гиены — в увеселительных домах».

К счастью, шумеры, а вслед за ними ассирийцы и вавилоняне писали на глиняных табличках, которые не пожирал огонь пожарищ, а напротив, превращал их в крепкие обожженные черепки. Только в библиотеке Ашшурбанипала найдено 20 000 таких табличек, а всего на сегодня по музеям мира их рассеяно около полумиллиона. Из этого несметного числа лишь 150 табличек содержат математические задачи, а еще 200 — числовые таблицы. Вот из этих 350 небольших табличек размером с ладонь и происходят наши сведения о вавилонской математике.

Нелегко было расшифровать узоры вавилонской клинописи. Лишь в 30-е гг. XX в. (т. е. через 30—40 веков!) прежде всего усилиями немецкого историка науки, после войны работавшего в США, Отто Нейгебауэра были вновь открыты богатства древней вавилонской мудрости.

Что же отличает вавилонскую математику? Прежде всего это высокоразвитое вычислительное искусство. Еще шумеры на рубеже 3—2-го тысячелетий до н. э. изобрели **позиционную систему счисления.** Суть изобретения шумеров заключалась в том, что значение знака, изображающего цифру, как и у наших современных цифр, зависело не только от самого знака, но и от его положения (позиции) во всем числе. При этом для записи цифр обходились всего двумя знаками: вертикальный клин обозначал 1, а пара наклонных клиньев, образующих угол,— 10. Поскольку основанием системы счисления было число 60 (шестидесятеричная система)[1], то в зависимости от положения в числе вертикальный клин мог обозначать 1, 60, 60^2, ..., а также 60^{-1}, 60^{-2}, ... Оставалось поставить последний штрих — ввести специальный символ, обозначающий пропуск соответствующего разряда (прообраз современного нуля), что и сделали вавилоняне:



---

[1] Напомним, что шестидесятеричная система счисления сохранилась до нашего времени в измерении времени и углов.

Позиционная система счисления давала огромные преимущества при вычислениях, особенно при умножении, делении и действиях с дробями. Благодаря ей стали возможными сложные математические расчеты, которые и обеспечили развитие вавилонской астрономии. Вавилонская система счисления наряду с финикийским алфавитом прочно вошла в золотой фонд изобретений человечества.

Для облегчения вычислений вавилонянами составлялись разного рода таблицы: таблица умножения, таблица обратных величин, таблица квадратов и кубов чисел и др. Но наиболее поразительны успехи вавилонской алгебры.

Во времена царя Хаммурапи, т. е. в XVIII в. до н. э., вавилоняне умели решать линейные, квадратные и некоторые виды кубических уравнений, а также системы линейных и квадратных уравнений с двумя неизвестными! В современной символике это следующие уравнения и системы:

$$ax=b; \qquad x^3=a; \qquad \begin{cases} x\pm y=a, \\ xy=b; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\pm y=a, \\ x^2+y^2=b. \end{cases}$$
$$x^2\pm ax=b; \qquad x^2(x+1)=a;$$

Кроме того, вавилонянам были известны формулы:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$
$$1+2+4+\ldots+2^k=2^k+(2^k-1);$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n\right)(1+2+3+\ldots+n).$$

Конечно, все эти уравнения, системы уравнений и формулы были растворены в тексте конкретных задач с конкретными числовыми коэффициентами. Но нет никаких сомнений в том, что вавилоняне владели общими методами их решения. Например, из клинописного текста ясно видно, что для решения уравнения $x^2-ax=b$ вавилоняне следуют алгоритму, полностью повторяющему современную формулу для положительного корня квадратного уравнения:

$$x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b}+\frac{a}{2}.$$

Напомним, что египтяне в ту же эпоху могли решать только простые линейные уравнения.

Что касается вавилонской геометрии, то она не могла похвастаться столь же крупными успехами, как вавилонская алгебра. Мы уже отмечали, что вавилонское число $\pi=3$ было существенно хуже египетского. Вавилоняне пользовались неправильной формулой для определения объема усеченной пирамиды с квадратным основанием, тогда как египтяне знали правильную формулу. Однако вавилоняне знали и успешно применяли теорему Пифагора уже в эпоху царя Хаммурапи, т. е. более чем за 1000 лет до Пифагора!

Как пришли вавилоняне к теореме Пифагора, неизвестно, но известно, что они ею прекрасно владели. Сохранилась табличка, содержащая 15 строк чисел, удовлетворяющих свойству $a^2+b^2=c^2$ и называемых сегодня пифагоровыми тройками (рис. 25). А вот текст другой древней таблички с задачей на теорему Пифагора: «Шест длины $\frac{1}{2}$ прислонен к стене. Его верхний конец опустили на $\frac{1}{10}$. Как далеко отодвинется его нижний конец?» Задача сводится к решению прямоугольного треугольника с гипотенузой $s=\frac{1}{2}$ и одним из катетов

$$b=c-\frac{1}{10}=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{2}{5}.$$

Неизвестный катет вычисляется по теореме Пифагора:

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{4}{25}}=\sqrt{\frac{9}{100}}=\frac{3}{10}.$$

Этой задаче 4000 лет! Заметим, что числители дробей в этой задаче

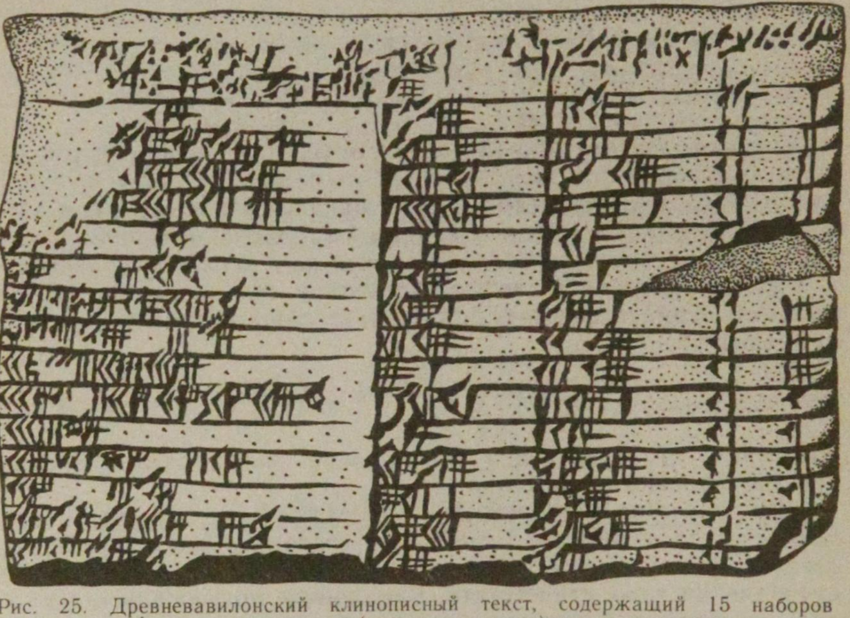



Рис. 25. Древневавилонский клинописный текст, содержащий 15 наборов пифагоровых троек, среди которых (четвертая строка) есть и такая нетривиальная тройка как (12709, 13500, 18541): $12709^2+13500^2=18541^2$. Нью-Йорк. Плимптоновский фонд библиотеки Колумбийского университета.

$(a=\frac{3}{10}; b=\frac{4}{10}; c=\frac{5}{10})$ есть числа так называемого египетского треугольника — простейшей пифагоровой тройки ($3^2+4^2=5^2$).

Итак, Пифагору, бесспорно, было чему поучиться в Вавилоне. Хотя, как и в египетской математике, в математике Вавилона не обнаруживаются хоть какие-то намеки на то, что мы сегодня называем доказательством, и хотя по форме изложения вавилонская математика носила столь же авторитарный характер, как и свод законов Хаммурапи, тем не менее само содержание вавилонской математики указывает на то, что вавилоняне владели некими логическими дедуктивными принципами, с помощью которых и были получены их первоклассные результаты. В самом деле, невозможно заставить себя вообразить, что, например, такие пифагоровы тройки, как (4961, 6480, 8161) (десятая строка — рис. 25) или (12 709, 13 500, 18 541) (четвертая строка — рис. 25), были найдены эмпирически.

И тем не менее вопрос «почему?» — главный вопрос любой науки — еще не занял должного места в вавилонской математике. Более того, вавилонская математика времен Пифагора почти не отличалась от вавилонской математики времен Хаммурапи и явно клонилась к закату. Так, рассмотренная нами задача о шесте в течение полутора тысячелетий кочует из таблички в табличку.

Если наши предположения верны и Пифагор все-таки был в Вавилоне, то он не мог не заметить предкризисного состояния вавилонской математики, как, впрочем, и всего вавилонского общества. Но и возраст самого Пифагора подходил к критической отметке: близился 530 г. до н. э.— 40-й год жизни Пифагора, возраст акме. Вопрос о выборе жизненного пути также подошел к последней черте. Завершался шестой год вавилонского плена. Либо предстояло оставаться в роли вечного ученика — прислужника вавилонских халдеев, либо следовало сделать последнюю попытку вырваться на самостоятельную дорогу в жизни. Пифагор выбрал второе.

В 530 г. до н. э. Кир отправился в поход против массагетских племен Средней Азии. А вскоре оттуда пришли тревожные вести: то ли Кир был убит, то ли попал в плен, то ли нуждался в подкреплении. В Вавилоне начался переполох: кто сколачивал отряды на подмогу Киру, а кто плел сети заговора против Камбиза, сына Кира. Но и то и другое как нельзя кстати было для Пифагора. Лучшего случая для того, чтобы незамеченным прошмыгнуть через городские ворота и примкнуть к торговому каравану, не предвиделось.

Говорят, что будущий царь персов Дарий, который, возможно, был учеником Пифагора и который, безусловно, с юношеских пор вынашивал в своем воображении самые дерзкие планы, узнав о побеге эллинского мудреца, сказал: «Если этому умнику не хочется быть свободным на чужбине, он станет нашим рабом у себя на родине!» Увы, слова Дария оказались пророческими.

Но пока Пифагор радовался неожиданному подарку судьбы, сердце его вновь отчаянно застучало. 20 лет разлуки и 10 тысяч стадий[1] пути отделяли Пифагора от родной Эллады. И он устремился навстречу пространству и времени.

6. ВОЗВРАЩЕНИЕ НА РОДИНУ И БЕГСТВО ОТ РОДИНЫ

И вот радостное видение, долгие двадцать лет грезившееся во снах Пифагору, становилось явью: на крутом мысе засверкал знакомый силуэт храма Геры Самосской. С каждым порывом ветра берег был все ближе, и Пифагору казалось, что он различает не только колонны храма, их каннелюры, каждый завиток их изящных волют, но и ощущает теплоту их мрамора. Синее небо, синее море и бело-розовый мрамор. Как все это было знакомо и как забыто за долгие годы скитаний!

Преобразился и похорошел старый храм Геры. Фронтоны украсились скульптурными группами, славившими великую богиню. Вместо извилистых троп широкая мраморная лестница, украшенная статуями богов, вела к подножию храма (рис. 26, 27). Впрочем, и вся жизнь на острове неузнаваемо переменилась.

К власти на Самосе пришел тиран Поликрат. Поначалу он разделил город на три части и правил вместе с братьями Пантагнотом и Силосонтом. Однако вскоре и этим остаткам былой демократии пришел конец: Поликрат убил старшего брата, а младшего — Силосонта изгнал из Самоса. Поликрат стал безграничным властелином острова.

Как сообщает Геродот, Поликрат «заключил договор о дружбе с Амасисом, царем Египта, послал ему дары и получил ответные подарки. Вскоре затем могущество Поликрата возросло и слава о нем разнеслась по Ионии и по всей Элладе. Ведь во всех походах ему неизменно сопутствовало счастье. У него был флот в сто 50-весельных кораблей и войско из тысячи стрелков. И с этой военной силой Поликрат разорял без разбора земли врагов и друзей. Ведь лучше, говорил он, заслужить благодарность друга, возвратив ему захваченные земли, чем вообще ничего не отнимать у него».

Поликрат захватил окрестные острова Эгейского моря и немало городов Малой Азии. Казалось, будто сама Афина Паллада — богиня справедливой войны отступилась от этих народов, тогда как

---

[1] По преданию, 1 стадий равнялся 600 ступням Геракла. Поскольку Геракла в живых уже не было, греки установили и другой способ нахождения стадия. 1 стадий определялся как расстояние, которое проходит грек за время, пока солнечный диск, коснувшись горизонта, полностью уходит за горизонт. В идейном плане это вполне современный способ установления единицы измерения. 1 олимпийский стадий равен 192,27 м; 1 аттический стадий — 177,6 м.

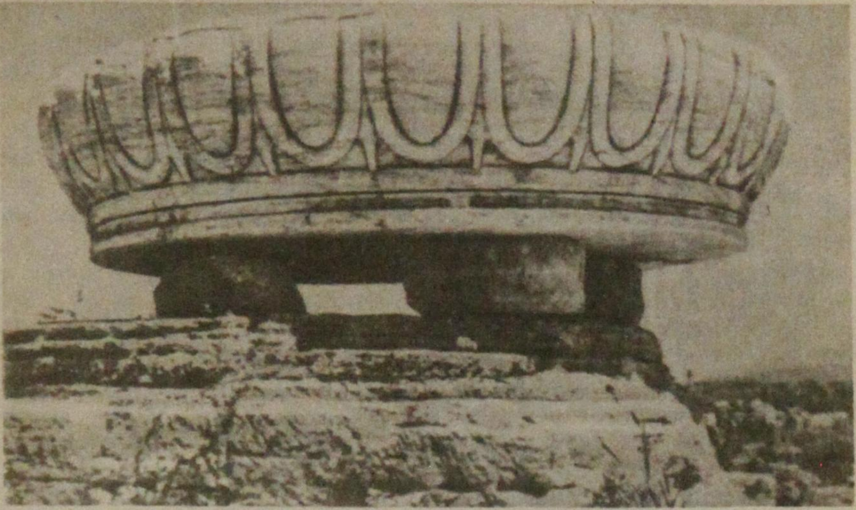


Рис. 26. Мраморная капитель, покоящаяся у земли,— все что осталось от былой красы Гераиона, храма Геры на Самосе.

коварный бог Арес, бог вероломных войн, вел Поликрата от победы к победе. Среди прочих побед, тиран разбил флот острова Лесбос, и теперь несчастные лесбосцы, взятые в плен, в оковах копали ров вокруг городских стен Самоса.

Для достижения цели Поликрат не выбирал средства. Много кривотолков вызвало на Самосе неожиданное отплытие лакедемонян. Лакедемоняне высадились на остров и провели удачное сражение, так что самосцам пришлось укрыться за стенами города, а двое из лакедемонян по пятам бегущих самосцев ворвались в город, но были убиты, когда путь назад оказался отрезан. И вдруг после 40-дневной осады Самоса лакедемоняне свернули лагерь и спешно отплыли назад в Пелопонес. На Самосе ходили слухи, что это Поликрат подкупил лакедемонян фальшивыми деньгами из позолоченного свинца, отлитыми за время осады города.

Оживление строительной и торговой деятельности замечалось на Самосе всюду. Строился новый рынок, перестраивался храм Геры, вокруг самосской гавани возводилась огромная дамба более тридцати метров высотой и длиной около четырехсот метров, чеканилась новая монета. Сын морского торговца и владелец мастерских бронзовых изделий — исконно самосского промысла, Поликрат всячески поддерживал интересы торгово-ремесленных слоев демоса.

Но самым грандиозным и искусным сооружением времен Поликрата был самосский тоннель. Вот что рассказывает о нем Геродот: «Я потому так подробно писал о самосцах, что они — создатели трех самых больших сооружений во всей Элладе. Первое из них — это подземный тоннель, пробитый в горе высотой в 150 оргий (около 270 м.— *А. В.*), начинающийся у ее подошвы, с выходами по обеим сторонам. Длина тоннеля 7 стадий (около 1,3 км.— *А. В.*), а высота и ширина по 8 футов (2,4 м.— *А. В.*). По всей длине тоннеля тянется водосток в 20 локтей глубины (около 8 м.— *А. В.*) и 3 фута ширины (около 1 м.— *А. В.*), по которому бежит в изобилии ключевая вода и затем по трубам достигает города Самоса. Строителем этого сооружения был Евпалий, сын Настрофа, мегарец». Вторым самосским чудом Геродот называет описанную нами дамбу, а третьим — храм Геры Самосской, считавшийся современниками равным по красоте храму Артемиды в Эфесе — одному из семи чудес света.

Надо сказать, что лавры искусных строителей долго еще оставались за самосскими мастерами. Именно самосец Мандрокл в 512 г. до н. э. во время похода персидского царя Дария на скифов построил понтонный мост через Босфор, по которому персы беспрепятственно перешли из Азии в Европу. Дарий щедро одарил Мандрокла за его искусное сооружение, а Мандрокл часть награды пожертвовал на создание фрески в храме Геры Самосской. Фреска изображала Дария, сидящего на троне на берегу пролива и наблюдающего за переправой войска по мосту Мандрокла[1].

Прошли тысячелетия. Из семи чудес света уцелело лишь одно — египетские пирамиды. Самосские чудеса также исчезли бесследно. Но каковы были удивление и радость немецких археологов, когда в 1882 г. при раскопках самосских древностей они обнаружили под горой Кастро тоннель, в точности такой, каким его описывал Геродот! Но главный сюрприз ждал археологов в середине тоннеля, где он имел резкий излом. Этот излом свидетельствовал лишь об одном: подземный водопровод копался с двух сторон одновременно и приблизительно в середине пути работники встретились с ошибкой менее 10 метров в горизонтальном и 3 метров в вертикальном направлении. Это прекрасная точность для древних строителей, ибо, как легко подсчитать, заданные углы выдерживались ими с точностью до 20 угловых минут (рис. 28, 29)!

Любопытно, что аналогичный тоннель был пробит около 700 г. до н. э. иудейским царем Езекией для снабжения Иерусалима питьевой водой. Однако известный по Библии иерусалимский акведук строился менее искусно, чем самосский. Правильность направления при прокладке иерусалимского тоннеля контролиро-

---

[1] Любопытно, что через 32 года, в 480 г. до н. э., аналогичная инженерная задача встала перед сыном Дария Ксерксом, шедшим с огромным войском войной против Греции. Однако на сей раз оба моста (один был построен финикинянами, а другой — египтянами) были снесены течением Гелеспонта (греческое название пролива Дарданеллы). Пришедший в ярость, Ксеркс приказал высечь море. На середину пролива выплыли царские палачи и триста раз ударили по воде плетьми. Строителям отрубили головы, после чего греческий инженер оказался более удачлив и тем самым навлек неисчислимые беды на своих соотечественников.

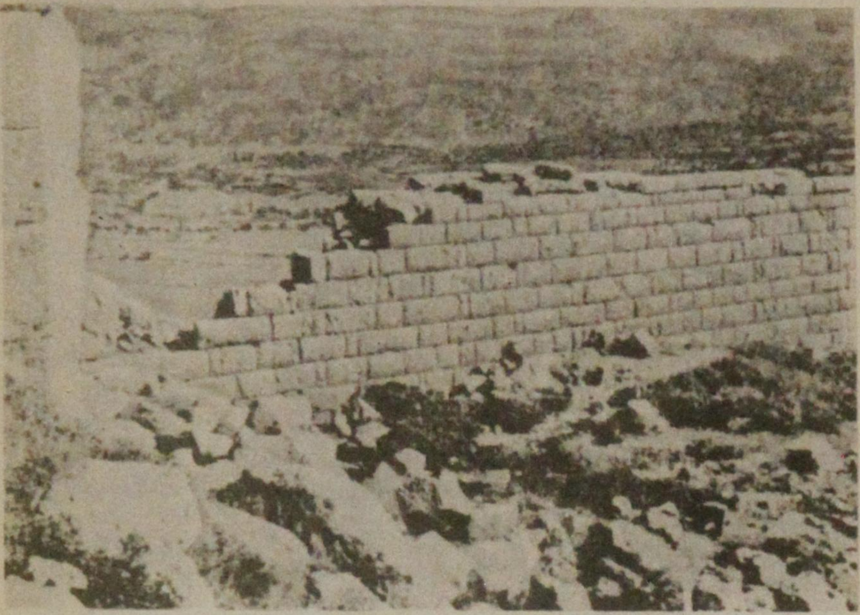


Рис. 27. Остатки крепостной стены древнего города Самоса.

валась самым примитивным образом — с помощью вертикальных колодцев, пробиваемых сверху. Тоннель получился зигзагообразным, и его длина в два раза превышала расстояние между его концами! Существующее мнение, будто зигзаги тоннеля были сделаны для того, чтобы обойти выдолбленные в той же скале гробницы иудейских царей Давида и Соломона, конечно, может служить лишь слабым утешением для древних иерусалимских строителей.

Самосский тоннель поражает прямолинейной смелостью своих линий. Только строитель, вооруженный математическими знаниями и свято верящий в их непогрешимость, мог так дерзко, без оглядки прокладывать под землей прямую линию. Самосский акведук является едва ли не единственным «живым» свидетелем прекрасной математической подготовки древнегреческих строителей и смелого воплощения математических знаний на практике.

Строительство самосского тоннеля относят приблизительно к 530 г. до н. э. Но ведь это как раз время пребывания Пифагора на Самосе! И хотя Геродот строителем самосского тоннеля называет Евпалия, вполне возможно, что Пифагор принимал участие в обсуждении проекта этого смелого инженерного сооружения. Вполне возможно, что в этом проекте нашли воплощение геометрические построения (или хотя бы геометрические идеи) вернувшегося на родину Пифагора.

Как же был построен самосский тоннель? Ответ на этот вопрос

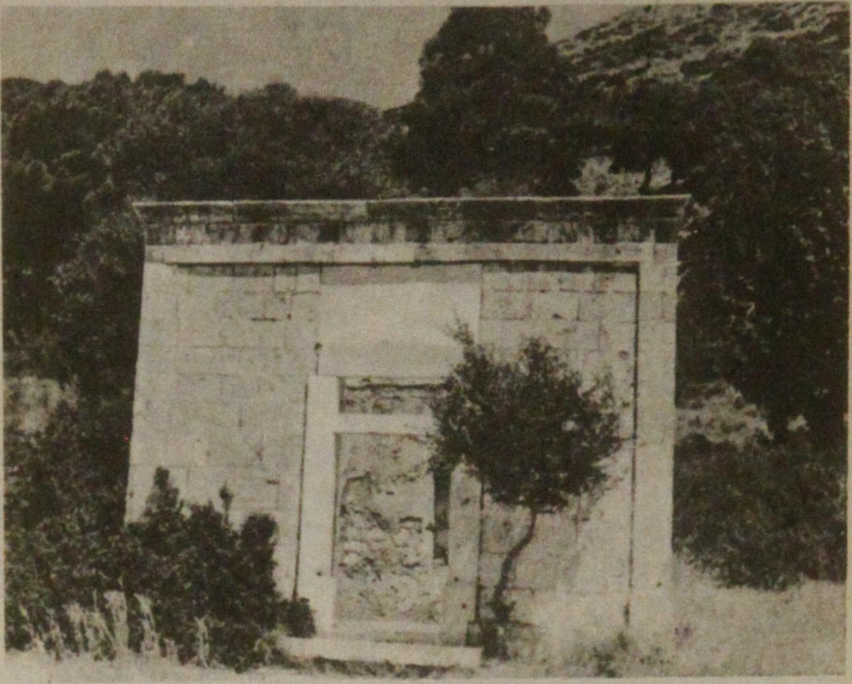


Рис. 28. Вход в самосский тоннель. Современное фото.

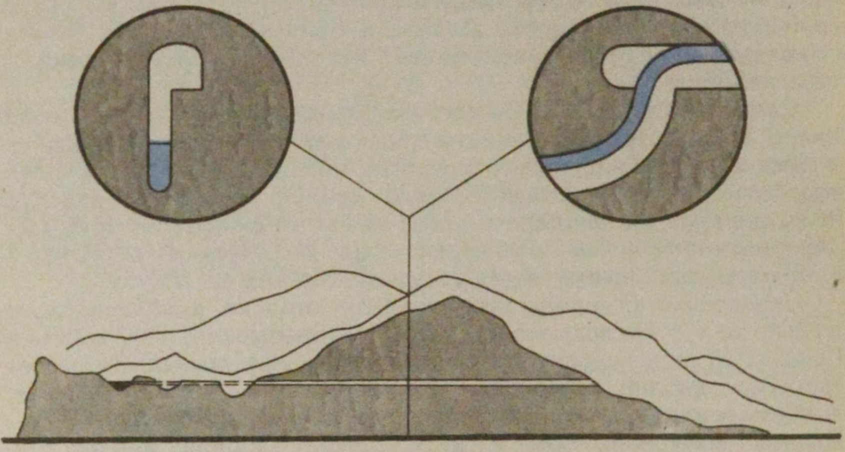


Рис. 29. Самосский тоннель. Поперечное сечение горы Кастро (внизу), поперечное сечение тоннеля и водостока (слева) и горизонтальный план тоннеля в месте стыковки (справа).

сохранился лишь в трудах александрийского математика Герона, относящихся к началу нашей эры (I в.). В сочинении «О диоптре» Герон описывает диоптр — горизонтальную линейку с двумя смотровыми отверстиями, служащую для измерения углов на местности,— прототип современного теодолита. После описания прибора Герон рассматривает ряд практических задач съемки на местности, решение которых фактически основано на использовании прямоугольной системы координат.

В задаче 15 «Через гору $ABCD$ нужно провести прямолинейный тоннель, если даны его выходы B и D». Для решения задачи Герон проводит из точки B прямую BE и затем строит систему взаимно перпендикулярных отрезков $EF \perp BE$, $GF \perp EF$ и т. д. (рис. 30). Затем, двигаясь по прямой KL, он находит точку M, такую, что $MD \perp KL$. Зная длины «меридианов» BE, FG, KH, MD и «параллелей» EF GH, KM, легко вычислить длины катетов BN и DN «подземного» прямоугольного треугольника BDN и найти их отношение $DN{:}BN = \operatorname{tg}\alpha$. Наконец, построив в точках B и D прямоугольные треугольники BEP и DMQ с тем же отношением катетов, легко видеть, что гипотенузы этих треугольников и укажут искомые горизонтальные направления, в которых необходимо рыть тоннель. «Если тоннель будет выкопан по этому способу,— подводит итог Герон,— то рабочие должны будут встретиться».

Но вернемся к Пифагору. Скорее всего, Поликрат поспешил всячески обласкать знаменитого путешественника, слава о мудрости которого уже бежала впереди него. Ведь самосский тиран слыл «просвещенным деспотом» и всячески стремился поддерживать эту лестную для него репутацию.

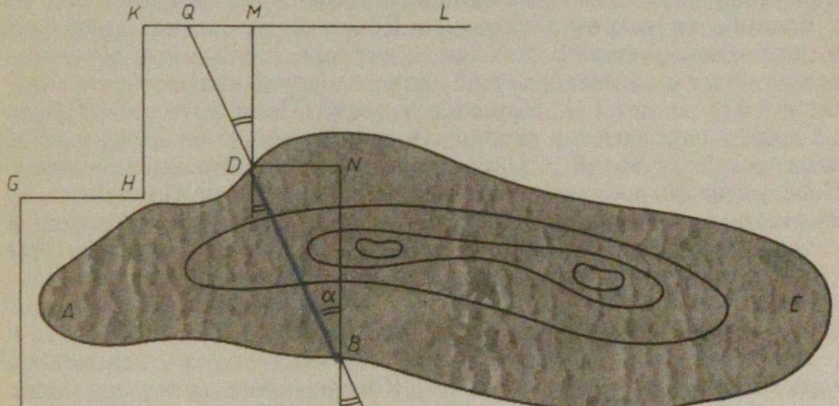


Рис. 30. Геометрические построения на плане местности при прокладке Самосского тоннеля.

Поликрат собирал рукописи и произведения искусства. Поэты Ивик и Анакреонт, жившие при дворе Поликрата, воспевали радости придворной жизни, пышные праздники, пиры и любовные приключения. Под влиянием беззаботной лирики Анакреонта легкая «анакреонтическая» поэзия обрела второе рождение в литературе Возрождения и Просвещения, а в России — в стихах Ломоносова, Державина, Пушкина:

Что же сухо в чаше дно?
Наливай мне, мальчик резвый,
Только пьяное вино
Раствори водою трезвой.

Мы не скифы, не люблю,
Други, пьянствовать бесчинно:
Нет, за чашей я пою
Иль беседую невинно. (А. С. Пушкин)

При дворе Поликрата жил знаменитый кротонский врач Демокед, которого самосский тиран переманил щедрыми вознаграждениями. Школа врачей в Кротоне, основанная Демокедом и разрабатывавшая свое учение на основе философских теорий и опытных наблюдений, считалась в те времена лучшей во всей Элладе, а сам Демокед, по свидетельству Геродота, был «врач, превосходивший искусством всех своих современников».

Пифагор, конечно же, встречался с Демокедом на Самосе и испытал на себе его влияние. Однако вскоре судьба, щедро осыпавшая своими немилостями и Пифагора, и Демокеда, надолго разлучила двух единомышленников. Пифагор покинул Самос, но в Кротоне он встретил учеников Демокеда и охотно принял их в свой союз. Демокед остался при дворе Поликрата, но покои самосского тирана недолго еще охраняли покой кротонского врача. Около 523 г. до н. э. Демокед в свите Поликрата отправился в Сарды к персидскому сатрапу Орету. Поликрат возмечтал стать владыкой всех морей, и Орет предложил ему денежную помощь. Перед такими посулами трудно было устоять, и Поликрата не сдержали ни предупреждения оракулов, ни дурной сон собственной дочери. Приглашение Орета оказалось западней: Поликрат был убит, по словам Геродота, «таким способом, о котором я не хочу даже рассказывать», а Демокед с остальной свитой был взят в плен.

Так и погиб бы Демокед в цепях пленника, если бы персидский царь Дарий не вывихнул себе ногу. Когда египетские знаменитости только обострили течение болезни, вспомнили об эллинском пленнике. Поначалу Демокед прикидывался простаком, но когда принесли плети и скорпионов, пришлось взяться за дело. Демокед вылечил Дария, за что тот великодушно сменил ему пару обычных цепей на две пары золотых.

Но Демокед нашел способ оплатить «щедрость» Дария той же монетой. Однажды жена Дария Атосса, также исцеленная Демокедом, по наущению эллина сказала Дарию: «Царь! При всем твоем могуществе ты бездействуешь. Еще ни один народ ты не покорил персам и не преумножил персидской державы. Человеку молодому, как ты, властителю великих сокровищ, следует прославлять себя великими подвигами, дабы персы знали, что над ними властвует муж».

Дарий внял словам Атоссы, которые стали прелюдией к полувековым греко-персидским войнам. Для начала он снарядил к берегам Эллады разведывательный корабль с Демокедом во главе. Но только корабль прибыл к берегам Великой Греции, Демокед бежал в родной Кротон. Кротонцы не выдали персам своего великого соотечественника, а Демокед женился на дочери Милона — любимого ученика Пифагора и прославленного атлета. Круг замкнулся, и на склоне лет своих Пифагор вновь встретился с Демокедом.

Но все это произошло через долгие три десятилетия, а пока Демокед жил при дворе Поликрата и по мере сил заботился о сохранении не только телесного, но и духовного здоровья самосского тирана. Вместе со знаменитым врачом и прославленными поэтами украшал двор Поликрата и известный по всей Элладе Феодор — архитектор и скульптор, искусный резчик гемм. В поте лица умножал Феодор красу покоев Поликрата великолепными статуями, а жен и наложниц тирана без счета осыпал изящными инталиями и камеями. При дворе самосского тирана не хватало только прославленного мудреца, и Поликрат изо всех сил старался заполнить этот пробел.

Но Пифагор не спешил принимать милости Поликрата. Роль придворного полураба, пусть и украшенного лаврами, никак не устраивала его. За долгие годы скитаний, унизительного ученичества и вавилонского плена сердце Пифагора обнажилось к чужим страданиям. Толстые стены дворца тирана и роскошь придворной жизни не могли заглушить острую боль, которую причиняла ему царившая вне этих стен несправедливость. Пифагор не мог жить рядом с источником несчастий своих сограждан. Он удалился за город и для своих занятий облюбовал пещеру в окрестностях Самоса.

Непрерывная череда единомышленников, становившихся учениками, старых друзей и знакомых и просто любопытных потянулась к этой пещере. Дни и ночи проводил Пифагор в беседах, в которых обсуждалось все — от тайников души самосского тирана до тайн мироздания. Возможно, в одной из таких бесед обсуждались геометрические принципы строительства самосского тоннеля.

Предание рассказывает, что в это время Пифагор помог самосскому атлету Евримену стать победителем на Олимпийских играх. Пифагор посоветовал Евримену ежедневно питаться мясом, а не сыром и смоковами, как это по старинному обычаю делали остальные атлеты. Евримен последовал Пифагоровой мудрости, набрался сил и, несмотря на свой малый рост, одержал победу в борьбе. Однако в дальнейшем Пифагор советовал Евримену бороться, но не побеждать, «ибо человек должен принимать на себя труды, но не навлекать, побеждая, зависти: ведь и увенчанные победители небезупречны».

Жизнь Пифагора в самосской пещере становилась все более уединенной. Но чем дальше отходил Пифагор от жизни общества, тем теснее сближался он с тайной общиной орфиков, разыгрывавших свои мистерии неподалеку от обиталища Пифагора. Орфики исповедовали религиозное учение, основанное, по их верованиям, самим поэтом Орфеем.

Древние мифы утверждали, что Орфей изобрел музыку и искусство стихосложения. Музыка Орфея была столь прекрасна, что, заслышав ее, деревья склоняли ветви, а камни сдвигались с места. Пение и игра Орфея на лире растрогали даже владыку царства мертвых — Аида, когда Орфей спустился под землю за своей любимой женой Эвридикой, погибшей от укуса змеи. Аид вернул Орфею Эвридику, но пылкий Орфей взглянул на свою возлюбленную ранее отмеренного часа, и она вновь растворилась в царстве Аида.

Никто не мог заменить Эвридику убитому горем Орфею. Он сторонился поклонниц, в коих у всякого музыканта нет недостатка, за что и был растерзан в дикой злобе менадами — спутницами Бога Диониса. Голова несчастного Орфея выплыла по реке Герб к острову Лесбос, где она пророчествовала и творила чудеса. Птицы, звери, деревья и камни оплакивали своего кумира.

> Так плыли: голова и лира:
> Вниз, в отступающую даль.
> И лира уверяла: — мира!
> А губы повторяли: — жаль!
>
> Кроваво-серебряный, серебро-
> Кровавый след двойной лия,
> Вдоль обмирающего Герба—
> Брат нежный мой! сестра моя!
>
> (М. Цветаева)

Учение орфиков тесно переплеталось с культом Бога растительности Диониса — покровителя виноградарства и виноделия. Орфей преобразовал первобытно-разнузданное поклонение Дионису в религиозно-философское учение. Но, как это часто бывает, союз Орфея и Диониса закончился трагически: Дионису показалось, что Орфей своими песнопениями стал более служить покровителю искусств Аполлону, и напустил на Орфея неистовых менад.

Согласно учению орфиков, Дионис первоначально был рожден Зевсу владычицей преисподней Персефоной под именем Загрея, но был растерзан и съеден титанами, а затем вновь родился, уже Дионисом. Зевс испепелил титанов и из их золы создал людей. Вот почему все люди вместе с грубым естеством титанов, от которых они произошли, носят в себе и частицу божественного Диониса, вошедшего в плоть их предков. Таким образом, в каждом человеке заложены два противоборствующих начала: «титаническое» — скопище пороков и скверны и «дионисическое» — воплощение божественной добродетели. Задачей человека является поэтому очищение от унаследованной от титанов скверны ради освобождения божественной дионисической духовности. Надо сказать, что в этой части учения орфиков сквозь мифологическую оболочку видится тонкое и глубоко верное знание естества человека.

Ради освобождения божественной души, заточенной в темнице тела, орфики совершали особые очистительные обряды и вообще подчиняли свою жизнь системе особых жизненных правил — βίος Ὀρφικός — «орфическая жизнь». Тех, кто в земной жизни преуспел в благочестии, за гробом ожидало блаженство, а нечестивых — мука в темницах Тартара.

Как достичь загробного блаженства? Орфики верили в то, что душа человека бессмертна и подвержена непрерывной цепи перевоплощений. После смерти человека его душе определяется войти в тело одного животного, потом другого и т. д. Только тот, кто вел на земле «орфическую жизнь» праведника, мог избавить свою душу от бесконечной цепи перевоплощений и обрести вечное пристанище на «островах блаженных», которые располагались то ли на звездах, то ли где-то на небесах. Поскольку в теле животного могла обитать душа умершего человека, животных запрещалось убивать и питаться их мясом.

Итак, культ Диониса-Загрея, или Вакха, как его часто называли, воплощал для орфиков беспрерывный круговорот жизни, всеполноту вечно рождающей природы, в которой даже смерть не есть конец жизни, а есть только перевоплощение в новую жизнь. Орфический культ Диониса — это поклонение буйной мощи и изобилию вечно творящей природы, это раскрепощение и творческих сил самого человека, спрятанных в бренной оболочке его тела.

Вот почему столь бурно и безудержно, как сама жизнь, исполнялись орфические обряды — мистерии (μυστήριον — таинство). К таинству мистерий допускались только посвященные в орфическое учение — мисты. Орфические мистерии совершались весной в годовщину гибели и воскресения Диониса-Загрея, когда воскресает и вся природа. Потому и мистерии изображали муки, смерть и воскресение Вакха и открывали перед вновь посвященными — неофитами — вечную радость бытия. Все горести жизненного пути, все тяготы и невзгоды земного существования и даже сама смерть отходили для миста на второй план, ибо все они становились лишь крошечными звеньями беспрерывной череды природных перевоплощений.

В вакхическом исступлении восставали орфики против привычного хода вещей и стесняющих рамок благоразумия. Они освобождали заточенные в глубинах души буйные дионисические силы и позволяли им выплеснуться наружу, слиться с окружавшей их матерью-природой. Вот как объясняет состояние души миста В. В. Вересаев, тонкий знаток античной культуры: «В священном оргийном безумии человек «исходит из себя», впадает в исступление, в экстаз. Грани личности исчезают, и душе открывается свободный путь к сокровеннейшему зерну вещей, к первоединому бытию. Это состояние блаженного восторга мы яснее можем себе представить по аналогии с опьянением. Либо под влиянием наркотического напитка, либо при могучем, радостно проникающем всю природу приближении весны в человеке просыпаются те дионисические чувствования, в подъеме которых его «я» исчезает до полного самозабвения. Этого «я» уже нет, нет множественности, нет пространства и времени, все — где-то далеко внизу. Об этом именно состоянии говорит у Достоевского Кириллов: «Как будто вдруг ощущаете всю природу и вдруг говорите: да, это правда!»

Под чарами Диониса каждый чувствует себя не только соединенным, примиренным, слитым со своим ближним, но **единым** с ним; сама отчужденная природа снова празднует праздник примирения со своим блудным сыном — человеком, принимает его в свое лоно. Все слилось в одном огромном мистическом единстве. В человеке теперь звучит нечто сверхприродное: он чувствует себя Богом, он шествует теперь восторженный и возвышенный, он разучился ходить и говорить и готов в пляске взлететь в воздушные выси. Человек стал в собственных глазах как бы художественным произведением: словно огромная творческая сила природы проявляется здесь, в трепете опьянения...»

Все, что происходило во время мистерий — тексты молитв и заклинаний, тайные имена Богов, скрытый смысл мифов, разъясняемый неофитам жрецами, да и сами события, должно было сохраняться в строжайшей тайне. Рассказывают, что один юноша, не посвященный в таинства мистерий, спросил у миста, похоже ли хоть отчасти виденное им во сне на то, что совершается в действительности во время мистерий. Мист только кивнул головой, за что и поплатился ею как разгласивший тайну.

Поздним вечером среди мистической тишины и мрака раздавались устрашающей силы удары. Подобные раскатам грома, они заглушали шорох морского прибоя и повергали в трепет души посвящаемых. Темнота ночи вдруг озарялась ярким светом факелов, и на их блики из непроглядной черноты вылезали грозные чудовища. Их отгоняли ударами бубнов, треском трещоток, звуками авлосов, и начиналась безудержная вакхическая пляска. Из пены прибоя в свете огня появлялись красавицы гетеры, они врывались в круговерть хоровода, и вихри неистового танца срывали их мокрые одежды.

Кипящий поток, в котором тела трепетали, как пламя факелов, а пламя факелов танцевало, как тела, устремлялся к жертвенному огню, зажженному на открытом возвышенном мысе. Огромные тени в красных бликах огня скакали по прибрежным скалам. Пламя жертвенного огня пожирало животных, и смоченные жиром искры с треском выпрыгивали из костра до небес. Радостные гимны Дионису разливались над морем, как лилось и вино из расселин между камнями жертвенника. Начиналась буйная вакхическая ночь, остановить которую мог лишь отрезвляющий свет нового дня.

Только звезды бесстрастно взирали на искрящееся в темной ночи таинство. Но и они не должны были оставаться в стороне от безудержного порыва человека к природе, и им посылали орфики свои взволнованные гимны:

Звезды небесные! Чада любимые Ночи всечерной!
Вы, кто, кружась, обтекаете мир огненосной волною,
Вы, кто, сияя и вечно горя, все и вся породили,
Вы — сопричастницы Мойр, указатели всяческой доли,
Вы направляете смертных людей по божественным тропам,
Вам пояса семикратные зримы, воздушным скитальцам,
Вы и небесные, вы и земные, вам нет истощенья.
Пеплос Ночи непроглядной вы сделали взору доступным,
Блеском осыпав своим, о дарящие время веселью.

Пифагору нравились мистерии орфиков. Нравилась чистота «орфической жизни», призванной развивать в человеке лучшие дионисические начала, нравилось стремление орфиков стать частицей единой гармонии природы, хотя удавалось им это лишь в недолгие часы мистерий. Но не столько внешняя сторона вакхических обрядов, сколько внутренняя философия единения с природой, философия всеобщей гармонии и непрерывного творчества природы занимала самосского мудреца. Оставалось только найти единое первоначало единой природы, отыскать единый источник ее неиссякаемых творческих сил, увидеть первопричину ее гармонии и прекраснейшего устройства. И такую первопричину Пифагор отыскал в числе. Теория числа как единого организующего принципа мироздания стала стержнем всей философской системы Пифагора.

Заметим, что само слово «теория», без которого немыслима современная наука, имеет орфико-пифагорейское происхождение. Первоначально теория (θεωρία) означала наблюдение, созерцание. Созерцание театрализованных мистерий и слушание тайных толкований мифов, а вместе с тем и вакхический восторг, который охватывал неофита от открываемых ему истин,— все это и называлось одним словом «теория». С орфических таинств в математику перенес теорию Пифагор, ибо постижение истины во все времена вызывает у человека вакхическое восхищение. «Удивление —

источник появления науки»,— сказал Аристотель. Восхищение — муза научных теорий.

Однокоренным словом с теорией является и теорема (Θεωρήμα) — зрелище, представление, которое трудами Пифагора стало означать и умозрение, умозаключение, т. е. математическую теорему.

Но орфики составляли лишь ничтожную часть самосского общества, а жить в обществе и быть свободным от общества, как известно, нельзя. Пифагора угнетала сама атмосфера тирании и произвола, царившая на Самосе, атмосфера, от которой не защищали даже гулкие своды его пещеры. Мысль о том, что не пристало философу, свободному духом, жить в атмосфере насилия, все чаще посещала его. Притязания на дружбу со стороны Поликрата становились все настойчивее, а дух сопротивления деспоту в душе Пифагора — все решительнее.

Как ни горька была эта правда, но она оставалась таковой: родина не дала Пифагору духовной свободы, столь необходимой мудрецу. То, чего долгие двадцать лет скитаний он мечтал обрести на родине — душевного равновесия, на родине не было. Судьба вечного странника вновь выбирала дорогу. Быть может, беседы с Демокедом укрепили Пифагора в решении переселиться в Кротон.

Кротон был небольшим греческим полисом на юге Аппенинского полуострова. Первые греческие поселения возникли здесь с незапамятных времен. Сиракузы и Акрагант на острове Сицилия, Неаполь, Кротон, Сибарис, Тарент, Метапонт на южноиталийском побережье были самостоятельными городами-государствами, называемыми Великой Грецией. Временами полисы Великой Греции объединялись против общего врага: этрусков на севере и карфагенян на юге, а в остальное время соперничали между собой.

Кротон и Самос связывали давние торговые отношения. Отец Пифагора Мнесарх не раз бывал в Кротоне. Возможно, жили там и родственники Пифагора. Остальное — сесть на корабль и отплыть к неведомым берегам — было делом привычным.

Но одно дело — отплыть из Египта или уйти пешком из Вавилона, и совсем иное — расстаться с родиной. Тяжело далось Пифагору это расставание. Сердце липкой смолой затягивала печаль — кто-кто, а оно-то знало, что это прощание навсегда. Горький смоляной ком от сердца подступал к горлу.

Свершалось библейское, вечное: нет пророка в отечестве своем. Пророк покидал свое отечество.

Упругие этезии, как и двадцать лет назад, хлопнули и натянули белый парус триеры, земля побежала вспять, синева неба и синева моря сомкнулись и навсегда поглотили родные самосские берега...

Повороты колеса истории порой удивляют нас своим фатальным постоянством. Впрочем, мы слишком легко забываем о неизбежной и закономерной похожести движений всякого вращающегося колеса. И только все убыстряющийся бег вечно катящегося колеса истории, все возрастающий поток вовлекаемых им в свой круговорот людских судеб, все разрастающийся трагизм повторяемых им событий заставляют нас вспомнить об этой роковой закономерности. Тогда мы останавливаемся пораженные, будто ударом грома: и это уже было!

Прошло 2450 лет, и хмурым сентябрьским утром 1922 г. от берегов России, истерзанной голодом и истрепанной безумной круговертью бездумных идей, отплывал пароход «Обербургомистр Хакен» — первый «философский пароход» из России. За ним вскоре последовал второй, третий и, кажется, четвертый — никто их тогда толком и не считал.

Лучшие умы России, ее пророки, ее совесть и слава, ее генетический фонд насильно изгонялись из своего отечества. Титаны русской философской мысли, мыслители мирового масштаба: Николай Бердяев, Сергей Булгаков, Иван Ильин, Лев Карсавин, Николай Лосский, десятки, сотни ведущих профессоров во главе с ректором и деканом математического факультета Московского университета оказались ненужными, более — вредными для своей родины.

Как и 2450 лет назад, пароход качнуло, земля побежала вспять, серая балтийская волна и серое северное небо сомкнулись и навсегда поглотили родной петербургский берег.

Русские пророки покидали свое отечество.

Но как Пифагор возвратился в родную Элладу и стал городом Пифагорионом, так и русские пророки через 70 лет попрания русской культуры возвращаются в родную Россию. Их именами назовут еще университеты, улицы и, быть может, города. Жаль, что дожить до этого часа пророкам не дано.

И ветер, обошедший все края,
То налетавший с севера, то с юга,
На круги возвращается своя.
Нет выхода из замкнутого круга,
В моря впадают реки, но полней
Вовек моря от этого не станут,
И реки, не наполнивши морей,
К истокам возвращаться не устанут.

(Екклезиаст. Поэтическое
переложение Г. Плисецкого)

7. КРОТОН: ПИФАГОРЕЙСКОЕ БРАТСТВО

«Достигнув Италии, он появился в Кротоне и сразу привлек там всеобщее уважение как человек, много странствовавший, многоопытный и дивно одаренный судьбою и природою: с виду он был величав и благороден, а красота и обаяние были у него и в голосе, и в обхождении, и во всем. Сперва он взволновал городских старейшин; потом, долго и хорошо побеседовав с юношами, он по просьбе властей обратил свои увещевания к молодым; и наконец, стал говорить с мальчиками, сбежавшимися из училищ, и даже с женщинами, которые тоже собрались на него посмотреть. Все это умножило громкую его славу и привело к нему многочисленных учеников из этого города, как мужчин, так и женщин, среди которых достаточно назвать знаменитую Феано; даже от соседних варваров приходили к нему цари и вожди...

Он так привлекал к себе всех, что одна только речь, произнесенная при въезде в Италию, пленила своими рассуждениями более двух тысяч человек; ни один из них не вернулся домой, а все они вместе с детьми и женами устроили огромное училище в той части Италии, которая называется Великой Грецией, поселились при нем, а указанные Пифагором законы и предписания соблюдали ненарушимо как божественные заповеди».

Так описывал приезд Пифагора в Кротон в сочинении «Жизнь Пифагора» древнегреческий философ Порфирий. Но столь же восторженно писали о кротонском периоде Пифагора не только его поздние биографы Порфирий, Диоген Лаэртский[1] и Ямвлих, но и ранние, жившие в V в. до н. э., те кто если не сами видели Пифагора, то вполне могли общаться с его непосредственными учениками. Однако от этих свидетельств остались лишь жалкие обрывки. Известно, например, что древнегреческий философ-материалист Демокрит (ок. 460 — ок. 370 до н. э.) написал сочинение «Пифагор», в котором высказывал свое восхищение самосским мудрецом. Увы, из 70 сочинений Демокрита до нас дошло лишь около 300 небольших фрагментов.

Итак, с приездом Пифагора в Кротон начинается самый славный период его биографии. Возраст акме — вершина творческих сил человека — стал и временем расцвета философии Пифагора.

Кротон был древнейшей ахейской колонией на юге Аппенинского полуострова. Предание рассказывает, что часть ахейцев,

---

[1] Диоген Лаэртский — личность полумифическая в античной культуре. Неизвестно, где и когда он жил, неизвестно название его сочинения. Неизвестно, что означает прилагательное «Лаэртский», ибо обычно оно указывало на город, в котором жил хозяин имени, но ни города, ни местечка Лаэрты нет ни на одной карте Древней Греции. Полагают, что годы творчества Диогена Лаэртского приходятся на конец II — начало III в., а его трактат, читаемый как захватывающий роман из истории античной культуры, переведен на русский язык под названием «О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов».

Не следует путать Диогена Лаэртского и Диогеном Синопским (ок. 404 — ок. 323 до н. э.), который жил в бочке, отвергал цивилизацию и государство, а на вопрос Александра Македонского, что бы он хотел от него принять, ответил: «Отойди и не загораживай мне солнце». Ученик Аристотеля Александр за словом в карман не лез. Он ответил: «Если бы я не был Александром, я хотел бы стать Диогеном». Эти и массу других сведений о Диогене Синопском (и не только о нем) мы и знаем благодаря Диогену Лаэртскому.

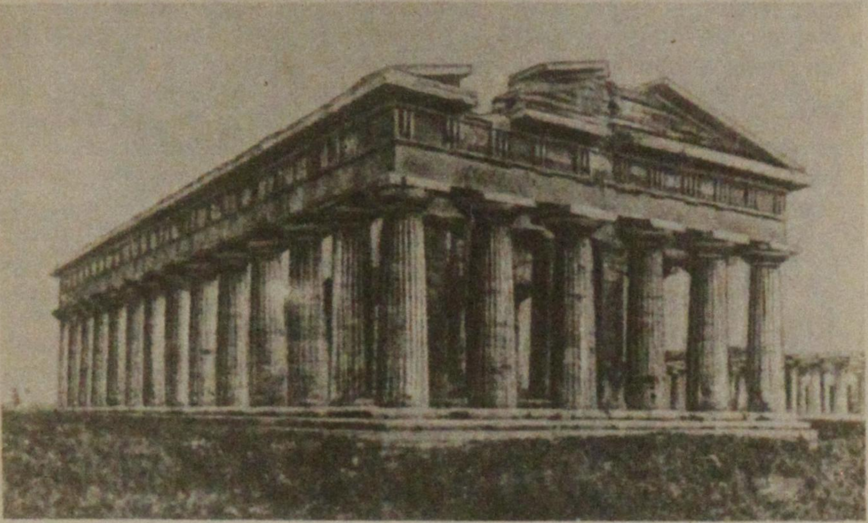


Рис. 31. Храм Посейдона в Пестуме. V в. до н. э.

возвращавшихся с Троянской войны, была занесена ветрами в эти края. Ахейцы вылезли осмотреть незнакомый берег. Плывшие с ними троянские женщины, измотанные бурей, завидев наконец уютные берега, сожгли покинутые мужчинами корабли. Выбора не было — пришлось обосновываться на новом месте, благо земля оказалась здесь на диво плодородной. За первыми поселенцами потянулись и другие. Так возник Кротон и еще множество греческих колоний на юге Италии.

Кротон и соседствующий с ним Сибарис, расположенные в наиболее плодородных местах, быстро распространили свое влияние не только вдоль побережья, но и в глубь полуострова. Неподалеку от современного Неаполя Сибарис основал город Посидонию (у римлян Пестум), который сегодня знаменит прекрасно сохранившимся храмом Посейдона (рис. 31). Храм Посейдона в Пестуме — классический образец дорийского ордера в архитектуре Греции. Полный строгого величия, мощный и, быть может, несколько тяжеловатый, он сохранил для нас ауру величия и силы, которой во времена Пифагора отличалась Великая Греция.

В Кротоне Пифагор учредил нечто вроде религиозно-этического братства или тайного монашеского ордена, члены которого обязывались вести так называемый пифагорейский образ жизни. Это был одновременно и религиозный союз, и политический клуб, и научное общество. Основу пифагорейского союза, скорее всего, составили многочисленные братства орфиков. Орфики были близки Пифагору по духу, и он сумел объединить их в единый религиозно-политический союз. Таким образом, семена учения Пифагора упали на подготовленную орфиками почву, и именно поэтому союз быстро завоевал в Кротоне широкую известность и стал ведущим центром духовной и общественной жизни полиса.

Чем же объясняется феноменальная популярность Пифагора в Кротоне? По-видимому, прежде всего незаурядными личными качествами философа, его умением увлечь за собой людей. Для эмигранта из далекого Самоса ораторское искусство на первых порах было, пожалуй, единственным средством в борьбе за признание. Конечно же, и ореол вечного странника, а возможно, и мученика, вобравшего в себя мудрость великой восточной культуры, придавал образу Пифагора особую притягательную силу (рис. 32).

Но не только сила личности и мудрость Пифагора, но и высокая нравственность проповедуемых им идей и жизненных принципов притягивала к нему единомышленников. Поначалу именно талант политического оратора и религиозного проповедника, а не мудрость философа и тем более естествоиспытателя принесли Пифагору успех. Нравственные принципы и правила, проповедуемые Пифагором, и сегодня достойны подражания.

«Для всех, и для многих и для немногих, было у него на устах правило: беги от всякой хитрости, отсекай огнем, железом и любым оружием от тела болезнь, от души — невежество, от утробы — роскошество, от города — смуту, от семьи — ссору, от всего, что есть,— неумеренность».

«Вещей, к которым стоит стремиться и которых следует добиваться, есть на свете три: во-первых, прекрасное и славное, во-вторых, полезное для жизни, в-третьих, доставляющее наслаждение. Наслаждение имеется в виду не пошлое и обманчивое, но прочное, важное, очищающее от хулы. Ибо наслаждение бывает двоякого рода: одно, утоляющее роскошествами наше чревоугодие и сладострастие, он уподоблял погибельным песням Сирен, а о другом, которое направлено на все прекрасное, праведное и необходимое для жизни, которое и переживаешь сладко, и, пережив, не жалеешь, он говорил, что оно подобно гармонии Муз».

Эти два отрывка из «Жизни Пифагора» Порфирия рисуют высокий нравственный облик великого эллина. Есть две поры, учил Пифагор, наиболее подходящие для размышлений: когда идешь ко сну и когда пробуждаешься ото сна. И в тот и в другой час следует потребовать от себя отчета во всем происходящем, окинуть мысленным взором все, что сделано и что предстоит еще сделать. День пифагорейцу надлежало заканчивать стихами:

Не допуская ленивого сна на усталые очи,
Прежде чем на три вопроса о деле дневном не ответишь:
Что я сделал? чего не сделал? и что мне осталось сделать?

и начинать со стихов:

Прежде чем встать от сладостных снов, навеваемых ночью,
Думой раскинь, какие дела тебе день приготовил.

Рис. 32. Рафаэль. Пифагор в окружении учеников. Прорисовка фрагмента фрески. Афинская школа. 1510—1511. Рим. Ватиканский дворец.

Не правда ли, эти стихи современны и по прошествии двух с половиной тысячелетий?!

Система морально-этических правил, завещанная своим ученикам Пифагором, была собрана в своеобразный моральный кодекс пифагорейцев — «Золотые стихи». «Золотые стихи» переписывались и дополнялись на протяжении всей тысячелетней истории античности, а затем и в эпоху средневековья и Возрождения. В XVIII — XIX вв. «Золотые стихи» были особенно популярны в России. В 1808 г. в Санкт-Петербурге вышла карманного формата книжечка «Пифагоровы законы и нравственные правила», начинавшаяся словами:

> Зороастр был законодателем персов.
> Ликург был законодателем спартанцев.
> Солон был законодателем афинян.
> Нума был законодателем римлян.
> Пифагор есть законодатель всего человеческого рода.

Вот некоторые извлечения из этой книжечки, содержащей 325 Пифагоровых заповедей:

> **С**ыщи себе верного друга; имея его, ты можешь обойтись без богов.
>
> **Ю**ноша! Если ты желаешь себе жизни долгоденственной, то воздержи себя от пресыщения и всякого излишества.
>
> **Ю**ные девицы! Памятуйте, что лицо лишь тогда бывает прекрасным, когда оно изображает изящную душу.
>
> **Н**е гоняйся за счастьем: оно всегда находится в тебе самом.
>
> **Н**е пекись о снискании великого знания: из всех знаний нравственная наука, быть может, есть самая нужнейшая; но ей не обучаются.

Сегодня абсолютно невозможно сказать, какие из сотен подобных заповедей восходят к самому Пифагору. Но совершенно очевидно, что все они выражают вечные общечеловеческие ценности, которые остаются актуальными всегда, покуда жив человек.

Следуя этим правилам, Пифагор выработал для себя и своих учеников особый распорядок дня. Встав до восхода солнца, пифагорейцы шли на морской берег встречать рассвет. Кротон расположен на восточном берегу Аппенинского полуострова, и солнце встает там прямо из моря. В утренней прохладе священной рощи обдумывали пифагорейцы труды предстоящего дня, после чего делали гимнастические упражнения и принимали завтрак. Сам Пифагор в утренние часы часто успокаивал душу игрой на лире и пением стихов Гомера. Многолюдным сборищам он предпочитал уединенные прогулки с двумя-тремя учениками, замечая при этом, что «где тише всего, там и лучше всего». В конце дня следовали совместная прогулка, морское купание и ужин. После ужина — возлияние богам и чтение. Читал обычно самый младший, а самый старший комментировал прочитанное.

Как видим, пифагорейцы с равным усердием заботились и о физическом, и о духовном развитии Именно в пифагорейской среде родился термин **калокагатия** (καλο-κ̓αγαϑια — от καλόν— прекрасное и ʼαγαϑόν — добро), обозначавший греческий идеал человека, сочетающего в себе эстетическое (прекрасное) и этическое (добро) начала, гармонию физических и духовных качеств.

Гармония духовного и физического, взлелеянная пифагорейцами, давала прекрасные всходы. Не случайно среди дошедших до нас имен олимпийских победителей древности так много кротонцев: шестикратный победитель Олимпийских игр среди борцов ученик Пифагора Милон; легендарный прыгун Фаилл, согласно преданию, прыгнувший в длину на 55 дельфийских стоп (16, 3 м), и др. Как сообщает Страбон, однажды на Олимпийских играх все семь победителей в беге на одну стадию оказались кротонцами. В те времена в ходу были поговорки: «Последний из кротонцев — первый из остальных греков» или «Здоровее кротонца», что означало высшую степень физического совершенства.

На протяжении всей истории Древней Эллады калокагатия оставалась своеобразным культом для древних греков и от них перешла к древним римлянам (вспомним римское: «*Mens sana in corpore sano*» — «В здоровом теле здоровый дух»)[1].

Пифагор, предписывая чтить старейших, «ибо всюду предшествующее почетнее последующего», учил почитать родителей, высоко ценил дружбу, считая, что у друзей все общее и что друг — это второе «я». Эти и многие другие заповеди и составляли основу пифагорейской этики.

Даже философия для Пифагора была не просто умственным любомудрием, но и особой системой жизненных правил. Для философа-пифагорейца недостаточно было лишь теоретически любить мудрость. Любовь к мудрости должна была охватывать не только ум, но и все существо философа, подчиняя его себе и делая его аристократом духа и добродетели. Эта мысль нашла прекрасное выражение в одной из сентенций Пифагора: «Одни приходят на Олимпийские игры, чтобы состязаться, другие, чтобы покупать или продавать, а третьи, чтобы смотреть,— это люди высшей категории».

Кстати, изобретение самого термина **философия** (φιλο-σοφία) традиция приписывает Пифагору. Пифагор видел себя не обладателем истины, а лишь человеком, стремящимся к ней как к недостижимому идеалу. Поэтому Пифагор утверждал, что он не есть воплощение мудрости — мудрец (софос — σοφός), а лишь любитель мудрости — любомудр (философ — φιλόσοφος).

По преданию, слово **космос**, первоначально обозначавшее у греков **порядок, надлежащую меру, прекрасное устройство,** Пифагор впервые употребил в его сегодняшнем смысле для определения всего мироздания. Тем самым Пифагор хотел подчеркнуть важнейшую сторону мироздания — его упорядоченность, организованность, симметрию, а значит, и красоту. Ведь

---

[1] Сегодня слова «*Mens sana in corpore sano*» понимаются как предостережение от одностороннего увлечения умственными упражнениями, тогда как в изначальную строку из «Сатир» Ювенала: «*Orandum est ut sit mens sana in corpore sano*» («Надо молить, чтоб ум был здравым в теле здоровом») — был вложен прямо противоположный смысл. Оба этих значения крылатого римского выражения и составляют смысл калокагатии.

пифагорейцы исходили из своего главнейшего тезиса о том, что «порядок и симметрия прекрасны и полезны, а беспорядок и асимметрия безобразны и вредны». Но красота макрокосмоса — Вселенной, верили пифагорейцы, открывается лишь тому, кто ведет правильный, «прекрасно устроенный» образ жизни, т. е. кто в своем внутреннем микрокосмосе поддерживает порядок и красоту. Следовательно, пифагорейский образ жизни имел прекрасную «космическую» цель — перенести гармонию мироздания в жизнь самого человека.

Но вместе с этими благородными и, к сожалению, отнюдь не достигнутыми современным человечеством истинами было в учении Пифагора и много мистического, туманного и просто смешного не только для наших современников, но и для современников Пифагора. Среди такого рода доктрин было восходящее к орфикам учение о бессмертии души, о посмертном переселении души человека в животных, о том, «что все рожденное вновь рождается через промежутки времени, что ничего нового на свете нет и что все живое должно считаться родственным друг другу».

Учение о переселении душ — **метемпсихоз**[1] — было подвергнуто язвительной критике еще современником Пифагора поэтом и философом Ксенофаном (VI — V вв. до н. э.), который свел религиозную идею Пифагора к анекдотической ситуации:

Раз он проходит и видит — визжит от побоев собачка,
Жаль ему стало, и он слово такое изрек:
Полно, не бей! В этом визге покойника милого голос,
Это родной мне щенок, друга я в нем узнаю.

(Перевод С. Я. Лурье)

Впрочем, есть основания считать, что критика Ксенофана имела скорее личные мотивы: Ксенофан, как и Пифагор, эмигрировал в Великую Грецию, жил в соседнем с Кротоном полисе Элея, однако если последний имел в Кротоне фантастический успех, то первому в Элее приходилось зарабатывать на хлеб пением поэм Гомера.

Из учения о переселении душ следовали и предписания, запрещающие убивать животных и питаться их мясом, так как в животном могла обитать душа умершего человека. Легко понять, что энергичным грекам, чей организм требовал высококалорийной пищи, это табу Пифагора приходилось не по душе. Да и сам Пифагор, готовя Евримена к Олимпийским играм, вынужден был нарушать его. Поэтому греки весьма прохладно принимали эту часть пифагорейского учения и не упускали случая вспомнить Пифагору его собственные прегрешения, о чем свидетельствует, например, эпиграмма Диогена Лаэртского:

---

[1] μετ-εμψύχωσις — переселение душ (от μετα — перемещение, ἐμ-ψυχόω — одушевлять, ψυχή — душа).

Был Пифагор мудрецом, и таким, что мяса не трогал
И говорил, что оно недопустимый соблазн.
Но угощал им других. Я дивлюсь мудрецу: как же сам он,
Не соблазняясь, других прямо толкал на соблазн.

Вообще, светлому мироощущению грека были чужды «потусторонние» метафизические учения типа учения о переселении душ, его часто осмеивали и при первом удобном случае приписывали иностранным влияниям.

Да, по существу так оно и было. В пифагорейском учении о метемпсихозе многие историки видят доказательство тому, что Пифагор был в Египте. Это доказательство прежде всего опирается на труд Геродота, в котором отец истории сообщает, что египтяне первыми из людей создали учение о посмертном круге души: «Когда умирает тело, душа переходит в другое существо, как раз рождающееся в тот момент. Пройдя через тела всех земных и морских животных и птиц, она снова вселяется в тело новорожденного ребенка. Это круговращение продолжается три тысячи лет. Учение это заимствовали некоторые эллины как в древнее время, так и недавно. Я знаю их имена, но не назову». Исследователи античности сходятся в том, что Геродот здесь имеет в виду Пифагора, однако не называет его имени, памятуя о тайном **эзотерическом** (’εσωτερίϰός — внутренний, сокровенный) характере учения философа. Сам Геродот испытывал к Пифагору глубочайшее уважение и в другом месте своей «Истории» называет его «величайшим эллинским мудрецом».

Египетские влияния просматриваются и во многих других внешних и внутренних сторонах жизни пифагорейского братства. Как и египетские жрецы, пифагорейцы запрещали употреблять в пищу бобы и даже прикасаться к ним. Ямвлих рассказывает, как однажды отряд из тридцати воинов сиракузского тирана Дионисия напал на дороге из Тарента в Метапонт на десятерых пифагорейцев. Завязался неравный бой, и вскоре безоружные пифагорейцы были вынуждены отступить, ибо, как говорит Ямвлих, «храбрость состоит в точном знании, когда и где силе уступить или противиться должно». Пифагорейцы отступили и легко оторвались бы от погони, но на пути им попалось поле, засеянное бобами. Свято следуя заветам учителя, они не могли ступить на это поле, вновь приняли неравный бой, и все погибли.

Остывшие после боя сиракузяне весьма огорчились, что никого не взяли в плен, и тут им попались еще двое пифагорейцев — кротонец Милиас со своей беременной женой Тимихою. Сиракузские разбойники пленили безвинную пару и препроводили их к Дионисию. Тиран выразил лицемерное сожаление о случившемся и пригласил Милиаса быть его соправителем. Получив твердый отказ, Дионисий сказал: «Ответствуйте мне только на один вопрос, после чего отпущу я вас с честью и славою домой: почему ваши друзья предпочли смерть бегству через бобовое поле?» «Друзья мои,— отвечал Милиас,— решили лучше умереть, нежели прикоснуться к бобам; а я скорее умру, чем объявлю причину, по которой мы к бобам не прикасаемся».

Любезность Дионисия иссякла, а любопытство, напротив, разгорелось, и он приказал принести орудия пыток. Начать решено было с несчастной Тимихи, а муж ее должен был смотреть на муки своей жены. Однако, исполненная геройского духа, пифагореянка упредила палачей: она откусила себе язык и плюнула его в лицо тирану — теперь она ничего уже не сможет сказать ему!

К сожалению, у нас нет уверенности в том, что этот подвиг пифагореянки не есть лишь красивая легенда. Настораживает и тот факт, что эту же историю описал за сто лет до Ямвлиха и Диоген Лаэртский, у которого на месте пифагореянки Тимихи оказывается элейский философ Зенон, автор знаменитых апорий. Но бесспорным остается то, что и Диоген, и Ямвлих рисуют философов людьми высочайшей нравственной силы. Бесспорным является то, что обожаемая философами мудрость не только просветляет их разум, но и очищает душу, возносит ее на недосягаемые высоты и делает возможными поступки, невозможные для других.

А все-таки почему пифагорейцам нельзя было прикасаться к бобам? Как нам представляется, этого толком не знали ни погибшие пифагорейцы, ни героическая Тимиха. Согласно одному из орфических мифов, бобы произошли из капель крови растерзанного Диониса-Загрея, поэтому их и запрещалось есть. В целом же все эти истории только лишний раз нам напоминают, что жили пифагорейцы очень давно — два с половиной тысячелетия назад, что ясный ум и высокая нравственность окутаны были в сознании древнего человека красивой сказочной пеленой. Как далеко с тех пор подвинулся разум человечества и сколь ничтожны на этом фоне его успехи в сфере нравственного!

Забота о чистоте духа не заслоняла для пифагорейцев заботу и о чистоте тела. Как и египтяне, пифагорейцы пеклись о чистоте тела и чистоте одежды. Сам Пифагор всегда облачался в ослепительно белые одежды, подобно египетским жрецам, и любил носить восточный тюрбан (рис. 33). Возможно, жреческой замкнутостью объясняется и тайный характер всего пифагорейского учения.

Здесь мы подошли к едва ли не самому «больному» месту всего «пифагорейского вопроса». Поскольку учение Пифагора было тайным, то оно, видимо, не записывалось. Вот почему не сохранилось ни одной строчки трудов самого Пифагора, да скорее всего он их просто и не писал. В силу этого, а также в силу существовавшей в античности традиции приписывать результаты открытий учеников своему учителю сегодня невозможно определить, что сделал в науке сам Пифагор, а что — его ученики и последующие представители пифагорейской школы. Древние верили, что идеи, подобно вину, только улучшаются с возрастом. Поэтому ученики щедро приписывали свои открытия учителям, которые чаще всего об этих открытиях и не подозревали.

Рис. 33. Пифагор (?). Бронзовый бюст. Римская копия с греческого оригинала IV в. до н. э. (?) из Вилла деи Папири в Геркулануме. Неаполь. Национальный музей.

Споры вокруг «пифагорейского вопроса», начатые еще Аристотелем, ведутся третье тысячелетие, однако общего мнения не существует и сегодня. Достаточно сказать, что два крупнейших современных авторитета в истории античной науки — голландец Бартел ван дер Варден и немец Отто Нейгебауэр — принципиально расходятся в оценке деятельности Пифагора. Вот почему вместо слов «учение Пифагора» принято осторожно говорить «пифагорейское учение», «пифагореизм», как это сделано в заглавии второй части настоящей книги.

Ритуал посвящения в члены пифагорейского братства был окружен множеством таинств, разглашение которых сурово каралось. «Когда к нему приходили младшие и желающие жить совместно,— рассказывает Ямвлих,— он не сразу давал согласие, а ждал, пока их не проверит и не вынесет о них свое суждение». Но и попав в орден после строгого отбора и испытательного периода, новички могли только из-за занавеса слушать голос учителя, видеть же его самого разрешалось только после нескольких лет очищения музыкой и аскетической жизнью. Впрочем, это не был суровый христианский аскетизм, умерщвляющий плоть. Пифагорейский аскетизм для новичка сводился прежде всего к обету молчания. «Первое упражнение мудреца,— свидетельствует Апулей,— состояло у Пифагора в том, чтобы до конца смирить свой язык и слова, те самые слова, что поэты называют летучими, заключить, ощипав перья, за белой стеною зубов. Иначе говоря, вот к чему сводились начатки мудрости: научиться размышлять, разучиться болтать». Не правда ли, прекрасный совет философ Пифагор дает современным философам!

Обет молчания, даваемый пифагорейцами, нашел отражение в символе — «Бык на языке», что на современный лад означает «Держи язык за зубами». Вообще, пифагорейцы имели множество символических изречений, смысл которых часто был непонятен и неоднозначен. Собрание этих изречений-символов, называемых **акусмами** (*ακουσμα* — услышанное), заменяло собой устав общества. В основном акусмы регулировали скорее внешнюю сторону жизни пифагорейцев, тогда как «Золотые стихи» ставили целью их нравственное совершенствование. Вот некоторые из пифагорейских акусм и их толкования:

Сердце не ешь (т. е. не подтачивай душу страстями или горем).
Огня ножом не вороши (т. е. не задевай гневных людей).
Через весы не шагай (т. е. не нарушай справедливости).
Уходя, не оглядывайся (т. е. перед смертью не цепляйся за жизнь).
Не садись на хлебную меру (т. е. не живи праздно).
Будь с теми, кто ношу взваливает, а не с теми, кто ее сваливает (т. е. живи в труде).
Ласточек в доме не держи (т. е. не привечай в доме шептунов и доносчиков).

Впрочем, есть мнение, что первоначально пифагорейские акусмы понимались в прямом смысле, а их толкования были надуманы позднее. Например, первая акусма отражала общий пифагорейский запрет на животную пищу, тем более сердце - символ всего живого; последнюю акусму часто связывали с мифом о Прокне и Филомене[1] и т. д.

---

[1] Миф о сестрах Прокне и Филомене еще раз напоминает нам о суровых нравах древности. Над Филоменой надругался муж Прокны фракийский царь Терей, и, чтобы скрыть свое преступление, он вырвал у Филомены язык. Но Филомена сумела сообщить о случившемся, выткав на одежде свое печальное

Но главным пифагорейским символом — символом здоровья и опознавательным знаком — была пентаграмма, или пифагорейская звезда,— звездчатый пятиугольник, образованный диагоналями правильного пятиугольника. Пентаграмма обладает замечательными математическими свойствами, которые мы рассмотрим во второй части книги. Она содержит все пропорции, известные пифагорейцам: арифметическую, геометрическую, гармоническую и так называемую золотую. Видимо, поэтому пентаграмма и была выбрана в качестве главного пифагорейского символа.

Поразительным является и еще одно обстоятельство. Звездчатый пятиугольник обладает поворотной симметрией пятого порядка. Но именно этот тип симметрии наиболее распространен в живой природе (вспомним цветы незабудки, гвоздики, колокольчика, вишни, яблони, малины, рябины и т. д.) и принципиально не возможен в кристаллических решетках неживой природы. Симметрию пятого порядка называют симметрией жизни; это своеобразный защитный механизм живой природы против кристаллизации, против окаменения, за сохранение живой индивидуальности. И именно геометрическую фигуру с симметрией пятого порядка пифагорейцы выбирают в качестве символа здоровья и жизни! Что это — случайное совпадение или проницательный взгляд пифагорейцев заметил и эту особенность живой природы?!

Нарисованная пентаграмма была тайным знаком, по которому пифагорейцы узнавали друг друга. Согласно легенде, когда один пифагореец умирал на чужбине и не мог расплатиться с гостеприимным хозяином дома, ухаживавшим за ним, он велел хозяину нарисовать на стене своего дома пентаграмму. «Если когда-нибудь мимо пойдет пифагореец, он обязательно сюда заглянет»,— сказал умиравший. Действительно, через несколько лет другой странствующий пифагореец увидел знак, расспросил о случившемся хозяина и щедро вознаградил его.

О верности пифагорейцев долгу повествует и другое предание. Все тот же Дионисий, жестокий тиран Сиракуз, который, конечно же, в тайниках души ощущал разницу между собой и пифагорейцами и оттого еще более тянулся к ним и еще более их ненавидел, решил испытать пифагорейцев на верность. Дионисий приказал схватить пифагорейца Финтия, затем обвинил его в преступном заговоре и объявил смертный приговор. Как последнее желание Финтий попросил отпустить его до вечера домой, чтобы закончить свои дела и помочь младшему товарищу Дамону, которого он опекал на правах старшего. Дионисий согласился, но при условии, что Дамон останется заложником. Дамон с готовностью согласился, чем в первый раз изумил Дионисия. Между тем придворные

повествование. В отместку за насилие сестры (одна из них была в то же время и матерью!) убили сына Терея и накормили отца мясом ребенка. За это ужасное злодеяние боги превратили всех троих в птиц: Прокну — в соловья, Терея — в удода, а немую Филомену — в ласточку, которая была лишена дара пения.

тирана потешались над Дамоном, не сомневаясь, что он обрек себя на верную смерть. Но не успело закатиться солнце, как Финтий вернулся, чтобы идти на казнь. Дионисий растрогался во второй раз; он заключил друзей в свои объятия и попросил принять его третьим в их дружеский союз. Согласия, однако, тиран не получил.

К сожалению, за 1000 лет античной традиции реальные и вызывающие глубокое уважение к личности Пифагора сведения были перемешаны со множеством легенд, сказок и небылиц, которые со временем породили несерьезное отношение к Пифагору как исторической личности. Легенды наперебой объявляли Пифагора чудотворцем; сообщали, что у него было золотое бедро, что люди видели его одновременно в двух разных городах говорящим со своими учениками, что однажды, когда он с многочисленными спутниками переходил реку и заговорил с ней, река вышла из берегов и громким сверхчеловеческим голосом воскликнула: «Да здравствует Пифагор!», что в Тиррении он умертвил своим укусом ядовитую змею, унесшую жизни многих терренцев, что он предсказывал землетрясения, останавливал повальные болезни, отвращал ураганы, укрощал морские волны.

Порфирий рассказывает о Пифагоре такую историю: в «Таренте он увидел быка на разнотравье, жевавшего зеленые бобы, подошел к пастуху и посоветовал сказать быку, чтобы тот этого не делал. Пастух стал смеяться и сказал, что не умеет говорить побычьи; тогда Пифагор сам подошел к быку и прошептал ему что-то на ухо, после чего тот не только тут же пошел прочь от бобовника, но и более никогда не касался бобов, а жил с тех пор и умер в глубокой старости в Таренте при храме Геры, где слыл священным быком и кормился хлебом, который давали ему прохожие». Не правда ли, прекрасная иллюстрация к пифагорейскому табу на бобы!

Надо заметить, что повторяемая многими позднеантичными авторами легенда о том, что река Кос вышла из берегов и пропустила Пифагора на другой берег, напоминает известное христианское предание о шествии Иисуса Христа к ученикам по воде: «Они, увидев Его идущего по морю, подумали, что это призрак, и вскричали. Ибо все видели Его и испугались. И тотчас заговорил с ними и сказал им: ободритесь; это Я, не бойтесь. И вошел к ним в лодку, и ветер утих» (Евангелие от Марка, 6:49—51).

Перекликается с евангельскими сказаниями о Христе и легенда о том, как Пифагор предсказал рыбакам их улов. Таким образом, в легендах о Пифагоре явно прослеживается стремление позднеантичных авторов, и прежде всего Порфирия и Ямвлиха — непримиримых критиков христианства, показать Пифагора не меньшим чудотворцем, чем появившийся на закате античной культуры новый мессия Иисус Христос.

Были, конечно, и более трезвые суждения о чудесах Пифагора. Диоген Лаэртский, например, рассказывает так: «Появившись в Италии, Пифагор устроил себе жилье под землей, а матери велел записывать на дощечках все, что происходит и когда, а дощечки спускать к нему, пока он не выйдет. Мать так и делала; а Пифагор, выждав время, вышел, иссохший, как скелет, предстал перед народным собранием и заявил, будто пришел из аида, а при этом прочитал им обо всем, что с ними случилось. Все были потрясены прочитанным, плакали и рыдали, а Пифагора почли Богом и даже поручили ему своих жен, чтобы те у него чему-нибудь научились; их прозвали «пифагореянками». И тем не менее основной тон всех преданий о Пифагоре был один: «Ни о ком не говорят так много и так необычайно» (Порфирий).

Много еще различных чудес можно было бы рассказать о Пифагоре. Но главное «чудо», прославившее в веках имя великого эллина, было в другом. Это чудо Пифагора состояло в том, что он вывел человечество из лабиринтов мифотворчества и богоискательства к берегам океана точного знания. Утренние купания пифагорейцев в волнах Ионического моря были и ежедневной прелюдией к плаванию по океану знания. Только целью плавания на сей раз были не поиски золотого руна, а поиски сокровища, куда более ценного. То были поиски истины.

Матовая седина ниспадающих на плечи волос Пифагора переходила в сверкающую белизну его жреческих одежд. И только пурпурная перевязь на лбу оттеняла исходящее от него ослепительное сияние. Лучистый взгляд мудреца падал прямо в душу собеседника, но не обжигал, а согревал ее ровным и мягким светом. Воистину окружавшей толпе учеников он представлялся богом Аполлоном, сошедшим с небес и льющим в их души божественный свет истины. Вот почему пифагорейцы искренне верили, что разумные существа подразделяются на три вида: Бог, человек и существо, подобное Пифагору! Вот почему боготворили они каждое слово учителя, снабжали каждую идущую от него фразу весомой преамбулой (ἄυτος ἔφα — **сам сказал**).

«Поистине был он в близкой сущности с богами и знал, чем могут люди их порадовать и чем прогневить; от богов было и то, что говорил он о природе, по его словам, другие способны лишь гадать о божественном да препираться в суетных мудрствованиях, а к нему-де явился Аполлон, свидетельством подтвердив неложность своего явления... Все, явленное Пифагору, его последователи полагали законом, его самого чтили как посланца Зевса, а на себя, благоговея перед божественным, накладывали обет молчания...» Так писал о Пифагоре греческий литератор II — III вв. н. э. Флавий Филострат.

Пифагор был, видимо, первым, кто открыл человечеству могущество абстрактного знания. Он показал, что именно разум и прежде всего разум, а не органы чувств приносит человеку истинное знание. Вот почему он советовал своим ученикам переходить от изучения «телесного», т. е. физических объектов, которые никогда не бывают в одном и том же состоянии, к изучению «бестелесного», т. е. к изучению абстрактных математических объектов, дарующих человеку вечные непреходящие истины. Так математика становится у Пифагора орудием познания мира. А за математикой следует и философия, ибо философия есть не что иное, как распространение накопленного специального (в данном случае математического) знания на область мировоззрения. Так рождается знаменитый пифагорейский тезис: «Все есть число» — кредо философии Пифагора. Так в недрах пифагорейского союза рождаются математика и философия.

Просто поразительно, как быстро пифагорейская мысль о превосходстве разума над чувствами в процессе познания была осознана древними греками. Она прочно вошла в плоть и кровь греческих мыслителей. В V в. до н. э. Демокрит решился на беспрецедентный шаг: он выжег себе глаза, дабы чувственное зрение не отвлекало его от внутреннего умозрения, в котором великий философ вслед за Пифагором видел единственный путь к истине. В IV в. до н. э. великий Платон наперерез «линии Демокрита» прочертил в философии свою линию — «линию Платона». Платон противопоставил постигаемому чувствами изменчивому «миру вещей» непреходящие истины рожденного разумом «мира идей». Но не есть ли «мир идей» Платона мир математических абстракций Пифагора?! И не нашла ли в философии Платона отражение все та же пифагорейская мысль о превосходстве разума над чувствами?! И почти через 1000 лет после Пифагора, на заре нашей эры, эта же мысль была по достоинству оценена в сочинениях Порфирия и Прокла, о чем еще скажем в конце книги.

А сейчас нам хочется закончить рассказ о пифагорейском союзе прекрасной характеристикой, данной ему нашим современником — математиком и историком науки ван дер Варденом: «Стремление уйти от мира, замкнутая монашеская жизнь, вегетарианство и общность имущества встречались у многих сект. Но что отличало пифагорейцев от всех других — это способ, при помощи которого они считали возможным достигнуть очищения и соединения с божеством; это делалось именно при помощи математики. Математика была одной из составных частей их религии. Бог, учили они, положил числа в основу мирового порядка. Бог — это единство, а мир — множество и состоит из противоположностей. То, что приводит противоположности к единству и соединяет все в космос, есть гармония. Гармония является божественной и заключается в числовых отношениях. Кто до конца изучит эту божественную числовую гармонию, сам станет божественным и бессмертным».

Таков был пифагорейский союз — любимое детище великого эллинского мудреца. Воистину то был союз истины, добра и красоты. В умножении знания, постижении гармонии физического и духовного совершенства годы летели как мгновения. Казалось, так было всегда и так будет вечно. Ничто не предвещало близкой беды.

8. РАЗГРОМ ПИФАГОРЕЙЦЕВ. СМЕРТЬ ПИФАГОРА

Прошло двадцать лет. Слава о пифагорейском братстве и его мудром основателе давно перешагнула пределы Великой Греции. Ученики Пифагора разъехались по многим городам южноиталийского побережья, и это в немалой степени способствовало установлению дружественных отношений между непрестанно соперничавшими полисами. Некоторым из городов-государств, издавна терзаемых распрями, Пифагор через своих учеников дал новые законы. «И не только через своих друзей умирял он раздоры внутренние и междоусобные, но и через их потомков и по всем городам Италии и Сицилии» (Порфирий).

Атмосфера высокой нравственности и самосовершенствования окружала пифагорейский союз, а ее благотворное дыхание ощущалось и далеко вне его. Рассказывают, что тиран Симих после пребывания в кругу пифагорейского братства сложил свою власть, а накопленные богатства раздал частью сестре, а частью — согражданам. Вообще, не знатность и богатство, а ясный ум и чистая совесть ценились в пифагорейском братстве превыше всего.

Ямвлих в жизнеописании Пифагора называет имена 235 членов пифагорейского союза. То были жители не только полисов Великой Греции — Кротона, Сибариса, Тарента, Метапонта, Регия, но и уроженцы Самоса, полиса Аргоса в Аркадии и даже один афинянин и один коринфянин. Разумеется, мы не можем поручиться за достоверность числа учеников Пифагора, сообщаемого Ямвлихом. Вместо этого мы предлагаем старинную задачу о числе пифагорейцев, отражающую, как станет ясно для тех, кто ее решит, иную точку зрения на это число. Итак, однажды у Пифагора спросили, сколько у него учеников, на что великий мудрец ответил: «Половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны вечной природы, седьмая часть молча упражняет силу духа, храня в сердце учение. Добавь к ним трех юношей, из которых Теон превосходит прочих своими способностями. Столько учеников веду я к рождению вечной истины?» Так сколько же учеников было у Пифагора?

В пифагорейское братство принимали не только мужчин, но и женщин. Ямвлих называет 17 женщин-пифагореянок. Среди них дочь Пифагора и жена Милона Мия; знаменитая Феано, которую некоторые биографы называют женой Пифагора, «женщиной мудрой и выдающейся душевными дарованиями». Рассказывают, что как-то к Феано пришли жены кротонцев с просьбой убедить Пифагора побеседовать с их мужьями о благосклонном отношении к своим женам. На это Феано заметила, что «добродетель супруги состоит не в том, чтобы сберечь своего мужа, но чтобы нравиться ему и угождать его желаниям, а сие исполнит она тогда, когда глупости его с терпением переносить будет».

Обучение в школе Пифагора было двухступенчатым. «Одни ученики назывались «математиками», то есть познавателями, а другие — «акусматиками»[1], то есть слушателями: математики — те, кто изучал всю суть науки и полнее и подробнее, акусматики те, кто только прослушивал обобщенный свод знаний без подробного изложения» (Порфирий). Акусматики представляли собой первую ступень в школе Пифагора. Они слушали учителя молча, изучая лишь общие положения, без их логического и критического осмысления. Видеть учителя акусматикам не позволялось. Наиболее одаренные акусматики переводились в математики, на вторую ступень обучения. Математикам подробно излагалось тщательно разработанное учение, им разрешалось видеть учителя и даже вести с ним научные споры. Самые талантливые из математиков, такие, как Гиппас из Метапонта, Филолай из Кротона, Архит из Тарента, в V и IV вв. до н. э. продолжили учение Пифагора.

Конечно, пифагорейское знание не было еще наукой в современном значении этого слова. Наряду с открытыми пифагорейцами непреходящими математическими истинами, которые остаются истинными и сегодня, было в учении пифагорейцев много фантазии и мистики, которые уже в античную пору вызывали насмешки. Пифагорейцы обожествляли числа и геометрические фигуры, а их богатая фантазия наделяла их самыми невероятными свойствами. Четные числа считались несчастливыми, а нечетные — счастливыми. (Эта «пифагорейская традиция» сохранилась и сегодня в обычае дарить нечетное число цветов.) Однако, противореча себе, четное число 8 пифагорейцы считали лежащим в основе дружбы. Зато в основу любви клали нечетное число 5. Пифагорейцы геометризировали античную мифологию и мифологизировали геометрию. Углы треугольника они посвящали Аиду, Дионису и Деметре; углы четырехугольника — богиням Рее, Афродите, Деметре и Гере и т. д. Особую роль играли у пифагорейцев числа 1, 2, 3, 4, образующие так называемый **тетрактис** (τετραϰτυς — четверица), о чем мы еще расскажем во второй части книги.

Но такова уж, видимо, природа человека, рано или поздно приводившая мирную жизнь любого общества к катастрофе: несть числа малым и великим сообществам людей, которые зависть, обман, внутренние и внешние распри подтачивали и беспощадно разрывали. Пифагорейский союз не составил исключения, а последующие 2500 лет истории человечества лишь подтвердили эту горькую истину.

Как рассказывает Порфирий, «Был в Кротоне человек по имени Килон, первый между гражданами и богатством, и знатностью, и славою своих предков, но сам обладавший нравом тяжелым

---

[1] От μάθημα — знание, учение, наука и ʼάϰουσμα — слышимое (отсюда акустика — наука о звуке). Символично, что словом «математика» во времена Пифагора обозначалась наука вообще.

и властным, а силою друзей своих и обилием богатств пользовавшийся не для добрых дел; и вот он-то, полагая себя достойным всего самого лучшего, почел за нужнейшее причаститься к Пифагоровой философии. Он пришел к Пифагору, похваляясь и притязая стать его другом. Но Пифагор сразу прочитал весь нрав этого человека по лицу его и остальным телесным признакам, которые он примечал у каждого встречного, и, поняв, что это за человек, велел ему идти прочь и не в свои дела не мешаться. Килон почел себя этим обиженным и оскорбился; а нрава он был дурного и в гневе безудержен. И вот, созвав своих друзей, он стал обличать перед ними Пифагора и готовить с ними заговор против философа и его учеников».

Однажды во время собрания пифагорейцев в доме шестикратного олимпийского победителя Милона Килон со своими сообщниками поджег дом со всех сторон. Согласно преданию, во время пожара рухнула центральная колонна, поддерживавшая потолочную балку. Милон, спасая товарищей, взвалил тяжесть перекрытия на свои могучие плечи и так продержал его до тех пор, пока все не выбежали из здания. Впрочем, здесь античные свидетельства расходятся: по другой версии, в доме Милона погибли все собравшиеся, кроме двоих — Архиппа и Лисида.

Что было с самим Пифагором во время пожара, также не вполне ясно. По одной версии, Пифагора в Кротоне не было: он ездил на остров Делос ухаживать за своим тяжело заболевшим учителем старцем Ферекидом. Другие источники говорят, что Пифагор находился в доме Милона, но был спасен верными учениками, затем долго скитался в поисках пристанища, пока не нашел его в Метапонте, где и провел остаток своих дней.

Роковому пожару в Кротоне предшествовали следующие исторические события, которые, видимо, и стимулировали заговор Килона. Неподалеку от Кротона находился город Сибарис, занимавший господствующее положение среди южноиталийских полисов. Жители Сибариса — сибариты — настолько прославились своим богатством, любовью к роскоши и праздному времяпрепровождению, что с тех пор слово «сибарит» приобрело нарицательное значение. Капризные гурманы, сибариты боготворили своих поваров и защищали их авторские права на каждое новое блюдо патентами. За городом сибариты строили искусственные гроты: в их прохладу жаркой летней порой они окунали свои изнеженные тела. В Сибарисе запрещалось держать мастерские и даже петухов, дабы этот шум не нарушал покой сибаритов.

В XII книге своей истории Доидор Сицилийский сообщает, что где-то около 510 г. до н. э. демагог[1] Телис, возможно, пытаясь

---

[1] Демагог (δεμ-αγωγός — народный вождь) — в Древней Греции первоначально политический деятель демократического направления. Со временем (и, видимо, не без оснований) у противников термин «демагог» приобрел отрицательный смысл и стал обозначать правителей, стремящихся стяжать себе популярность путем лживых обещаний. Отсюда и пошло сегодняшнее нарицательное значение слова.

оздоровить атмосферу праздного безделья в Сибарисе, изгнал из полиса 500 самых влиятельных и богатых мужей, а их имущество конфисковал: «Изгнанники прибыли в Кротон и прибегли к алтарям, стоявшим на агоре, с мольбой о защите. Тогда Телис отправил к кротонцам послов с требованием либо выдать изгнанников, либо ждать войны. Собрали народное собрание и вынесли на обсуждение вопрос, следует ли выдать просителей сибаритам или отважиться на войну с более сильным противником. Синклит и народ пребывали в нерешительности. Поначалу мнение большинства склонялось к выдаче просителей ввиду угрозы войны. Но после того как философ Пифагор подал совет спасать просителей, мнение их переменилось и они предприняли войну за спасение просителей. Сибариты пошли на них войском в тридцать мириад (300 тысяч.— *А. В.*), кротонцы выставили против них десять мириад (100 тысяч.— *А. В.*) под командованием атлета Милона, который благодаря своей огромной телесной силе первым обратил в бегство противников. Рассказывают, что сей муж, будучи шестикратным победителем на Олимпийских играх и обладая отвагой, соответствующей его телесной мощи, пошел в бой увенчанный олимпийскими венками и обряженный в наряд Геракла — львиную шкуру с палицей. Виновник победы, он снискал восхищение сограждан. В гневе кротонцы не пожелали брать живьем ни единого пленного и всех, кто во время преследования сдавался, убивали на месте. Поэтому большинство сибаритов были изрублены, а город они разграбили и сделали его совершенно пустынным».

В результате пифагорейцы, и в их числе Милон, пришли к политической власти в Кротоне. Но политическая власть предполагает и политических противников. Вот тогда-то, по-видимому, на арену и вышел Килон со своими сторонниками. Исходя из анализа исторической ситуации того времени, А. Н. Чанышев предлагает следующую реконструкцию событий.

В конце VI в. до н. э. (около 510 г.) Килон просит Пифагора принять его в пифагорейский союз, но получает решительный отказ. Килон и его сторонники начинают борьбу против Пифагора и его братства, и немолодой уже Пифагор не выдерживает этой борьбы. Он удаляется в Метапонт, где проводит остаток своих дней и на рубеже VI и V вв. до н. э. умирает (около 500 г. до н. э.). Между тем борьба килоновцев и пифагорейцев разгорается. Это уже не борьба Килона и Пифагора, которых, возможно, к тому времени и не было, а борьба двух партий — килоновцев и пифагорейцев. Пифагорейцы терпят одно поражение за другим во всех полисах Южной Италии, и в конце концов и в Кротоне. Происходит пифагорейская диаспора: оставшиеся в живых пифагорейцы, ища спасения, рассеиваются по всей Элладе. Последнее обстоятельство и способствовало распространению пифагорейского учения по всему Средиземноморью.

«Бедствие это, обрушившееся на людей,— писал Порфирий,—

задело вместе с этим и науку их, потому что до этих пор они ее хранили неизреченно в сердцах своих, а вслух высказывали лишь темными намеками. И от Пифагора сочинений не осталось, а спасшиеся Архипп, Лисид и остальные, кто был тогда на чужбине, сберегли лишь немногие искры его философии, смутные и рассеянные. В одиночестве, угнетенные случившимся, скитались они где попало, чуждаясь людского общества. И тогда, чтобы не погибла вовсе в людях память о философии и чтобы за это не прогневались на них боги, стали они составлять сжатые записки, собирать сочинения старших и все, что сами помнили, и каждый оставлял это там, где случалось ему умереть, а сыновьям, дочерям и жене завещал никому это из дому не выносить; и это завещание они долго соблюдали, передавая его от потомка к потомку».

Так возникло пифагорейское учение, которое мы рассмотрим во второй части книги. А сейчас, прощаясь с Пифагором, нам остается лишь рассказать еще одно предание о смерти великого мудреца, предание, на наш взгляд, наиболее поэтичное.

Когда был подожжен дом Милона, где собрались пифагорейцы, когда стали рушиться подпорки и перекрытия, державшие крышу, Пифагор в задумчивости сидел в центре большой залы. Великий мудрец и не помышлял сделать хоть одно движение к своему спасению. Тогда ученики Пифагора бросились в огонь и проложили в нем дорогу учителю, чтобы он по их телам, как по мосту, вышел из объятого пламенем дома. Пифагора спасли, но страшной ценой — ценой жизней его единомышленников. Оставшись один, Пифагор так затосковал, что удалился из города и там лишил себя жизни. Жизнь без продолжателей учения была для Пифагора лишена смысла.

9. ЭПИЛОГ. ВЕЧНЫЙ КЛАДЕЗЬ МУДРОСТИ

Но учение Пифагора не погибло в кротонском пожаре. Подобранные горсткой оставшихся в живых учеников зерна этого учения не только были сохранены, но и дали обильные всходы. Благодарная память единомышленников сохранила для человечества имя Пифагора — выдающегося математического гения, творца акустики, основоположника теории музыки, «Коперника древней астрономии», основателя религиозного братства — прообраза средневековых монашеских орденов, богослова и реформатора, человека высокой нравственности, личности богатой, противоречивой и загадочной, стоящей на рубеже пробуждающейся науки и пышно цветущей мифологии.

И чем дальше неумолимое время уносит нас от времени Пифагора, тем острее видится поразительная прозорливость эллинского мудреца, объявившего два с половиной тысячелетия назад, что «Все есть число». Если снять с этого тезиса мистическую патину, то нам откроется гениальное пророчество, определившее весь последующий путь развития науки. Тогда древний пифагорейский тезис примет современное звучание: математика есть ключ к познанию всех тайн природы.

Именно так определяет роль Пифагора в истории естествознания современный американский математик и историк науки М. Клайн: «Но то ли по счастливому стечению обстоятельств, то ли благодаря гениальной интуиции пифагорейцам удалось сформулировать два тезиса, общезначимость которых подтвердило все последующее развитие науки: во-первых, что основополагающие принципы, на которых зиждется мироздание, можно выразить на языке математики; во-вторых, что объединяющим началом всех вещей служат числовые отношения, которые выражают гармонию и порядок природы».

Ну а как же быть с пифагорейской числовой мистикой, которая и породила бесконечные насмешки над пифагорейцами, начатые еще Аристотелем? Здесь мы советуем прислушаться к мнению выдающегося современного знатока античности, «самого крупного русского гуманиста и философа настоящего времени» А. Ф. Лосева, который отмечал, что человек XX в. «настолько далек от древнего пифагорейства, что даже не испытывает потребности его критиковать, а должен рассмотреть его со всеми объективно-историческими причинами, делающими его существование понятным». Мистика чисел была у пифагорейцев следствием эмбрионального состояния науки, философии, да и всего мышления того времени, которое только начинало проклевывать скорлупу мифологии. Но за этой по-детски наивной сказочной формой нельзя не видеть гениально угаданного содержания, значение которого все яснее проступает по мере развития научного знания.

Впрочем, о значении пифагорейского учения уместнее будет поговорить во второй части книги, где будет рассмотрено и само это учение. А сейчас обратимся еще раз к личности Пифагора.

Что говорили о Пифагоре его современники? Увы, сохранилось, пожалуй, лишь два таких свидетельства — Ксенофанта и Гераклита (ок. 540 до н. э.— ?). С ироничным стихотворением Ксенофанта мы познакомились на с. 98. Но оказывается, Гераклит был еще более недоброжелателен к своему старшему современнику. В уцелевшем фрагменте Гераклита мы читаем: «Пифагор, сын Мнесарха, предавался исследованию больше всех прочих людей и мудрость свою состряпал из многознайства и обмана». И это отзыв о человеке, которому поклонялись толпы учеников и которого потомки считали за полубога?!

Нам кажется, в отзыве Гераклита нашли отражение не только личные качества самого творца диалектики, который среди своих любвеобильных соотечественников слыл высокомерным нелюдимом и который с одобрением писал лишь об одном человеке — своем друге Гермодоре, зато всем остальным, включая и великого Гомера, отпустил щедрую порцию насмешек. В отзывах Ксенофанта и Гераклита заключена истина более глубокая, чем личные

Рис. 34. Абдерская монета с изображением Пифагора — первый подписанный портрет на греческих монетах. 430—420 гг. до н.э.

Рис. 35. Самосская монета с изображением Пифагора. II — III вв. Прорисовка. Конечно, это не портрет Пифагора, а обобщенный образ ученого.

амбиции обоих авторов, истина, которая не раз еще подтверждалась историей человечества: нет пророка в отечестве своем.

Нужно было время, чтобы Пифагор был понят не только своими учениками, но и своими соотечественниками. Но как быстро это время пришло! Фактически сам Гераклит, которого отделяло от Пифагора два моря — Ионийское и Эгейское, свидетельствует нам о том, что слава Пифагора еще при жизни перелетала через моря. Однако понят он был чуть позже.

Уже в V в. до н. э. мы находим восторженные отзывы о Пифагоре у людей, которые, возможно, общались с теми, кто видел Пифагора живым. Это и древнегреческий философ, врач и политический деятель Эмпедокл (ок. 490 — ок. 430 до н. э.). писавший о Пифагоре: «Был среди них муж редких знаний, достигший величайшего богатства ума и весьма искусный во всех видах мудрых дел...» Это и отец истории Геродот, живший в 40-х гг. V в. до н. э. совсем рядом с Кротоном, когда изустная память о Пифагоре здесь еще жила, и назвавший Пифагора «великим эллинским мудрецом». Это и отец атома Демокрит, живший совсем в другом регионе, на самом севере Эгейского моря, в Абдерах, и написавший о Пифагоре восторженное сочинение (см. с. 92).

Как полагает большинство историков, именно благодаря Демокриту в Абдерах в 430—420-х гг. до н. э. (т. е. менее чем через 100 лет после смерти Пифагора) произошло невиданное событие: в Абдерах были выпущены монеты с изображением Пифагора и подписью ΠΥΘΑΓΟΡΗΣ (рис. 34). Абдерские монеты — это не только первый в истории чеканный портрет философа вообще (изображения выдающихся философов на монетах появятся значительно позже, и только в родных городах), но это и первое на греческих монетах подписанное изображение человека. И таким человеком оказался не царь, не тиран, не полководец, а мудрец! Что касается Пифагора-математика, то он, видимо, навсегда останется первым и последним математиком в истории человечества, чей профиль удостоился столь высокой чести!

Но для ученого важнее не внешние атрибуты славы, а признание и дальнейшая жизнь его идей (рис. 35). И здесь

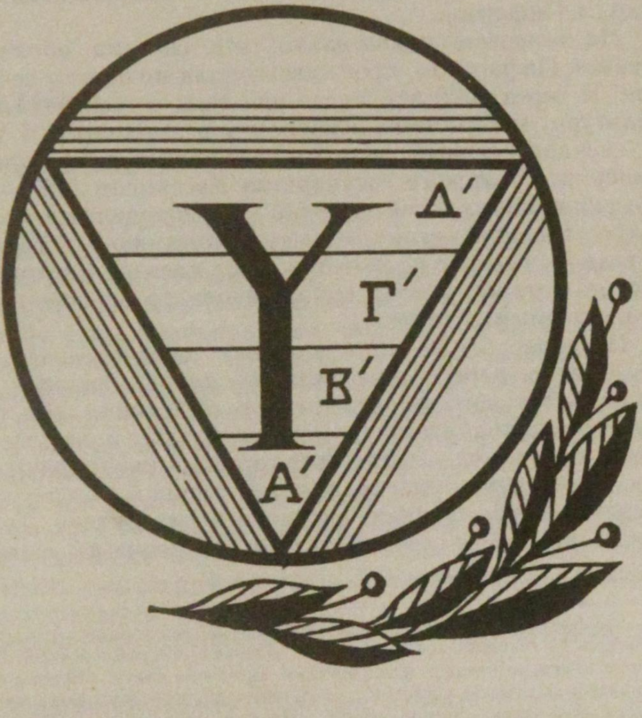
Пифагору также светила счастливая звезда. Идеями Пифагора пронизано творчество Платона — величайшего философа в истории человечества. Античные неоплатоники III — VI вв.: Плотин, Порфирий, Ямвлих, Прокл, первая женщина философ и математик Гипатия, растерзанная толпой фанатиков-христиан,— все они были страстными приверженцами Пифагора. Неоплатонизм, уходящий корнями в древнее пифагорейство, стал мощным философским течением, идущим из античности в современность. Идеи неоплатоников питали Аврелия Августина (354—430) и Иоанна Скота Эриугену (810—877), Николая Кузанского (1401—1464) и Джероламо Кардано (1501—1576), Томмазо Кампанеллу (1568—1639) и Джордано Бруно (1548—1600), Фридриха Шеллинга (1775—1854) и Георга Гегеля (1770—1831), Владимира Соловьева (1853—1900) и Сергея Булгакова (1871—1944), Павла Флоренского (1882—1937?) и Алексея Лосева (1893—1988).

Не менее плодотворными оказались идеи Пифагора и для естествознания. Открытие Пифагором закона целочисленных музыкальных отношений, названного немецким физиком и математиком Арнольдом Зоммерфельдом (1868—1951) первым законом математической физики, явилось одновременно и открытием эвристического (от архимедовой «Эврики» ἑυρίσϰω — находить) свойства математики. Это могучее свойство математики, позволяющее делать физические открытия «на кончике пера», со времен Пифагора повергает в священный трепет естествоиспытателей. «Чудесная загадка соответствия математического языка законам физики является удивительным даром, который мы не в состоянии понять и которого мы, возможно, недостойны» — так писал об этом свойстве математики, открытом Пифагором, современный американский физик лауреат Нобелевской премии Юджин Вигнер.

Пифагору принадлежит и бессмертная идея о всеобщей гармонии, лежащей в основе мироздания. Заложенная Пифагором вера в красоту и гармонию природы, в мудрую простоту и целесообразность ее законов, построенных на единых математических принципах, окрыляла творчество титанов современного естествознания от Иоганна Кеплера (1571—1630) до Альберта Эйнштейна (1879—1955). Это и есть путеводная звезда современного естествознания, тот вечный кладезь мудрости, который открыл человечеству Пифагор.

ПИФАГОРЕИЗМ

У ИСТОКОВ НАУЧНОГО ЗНАНИЯ



> За исключением слепых сил природы, все, что движется в этом мире, имеет свое начало в Греции.
>
> *Г. Мэн*

> Греки совершили открытие, величайшее из когда-либо совершенных человеком: они открыли могущество разума.
>
> *М. Клайн*

Пифагорейская система знаний (Μάθημα) состояла из четырех разделов: арифметики (учении о числах), геометрии (учении о фигурах и их измерении), музыки (учении о гармонии или теории музыки) и астрономии (учении о строении Вселенной). С тех пор все четыре ветви пифагорейского учения стали объединяться одним словом — μάθημα (учение, знание) или μαθηματικά. Известно, что на рубеже (V — IV вв. до н. э. софист[1] Гиппий из Элиды обучал в своей школе именно этим наукам. Об этих же четырех науках как о родственных говорил и Архит Тарентский — последний и наиболее выдающийся представитель школы Пифагора.

Но поистине удивительно, что система образования, заложенная Пифагором, просуществовала не просто века, а тысячелетия! И через 1000 лет, когда пал Рим, а вместе с ним и античная культура, эта система оставалась незыблемой. В VI в. писатель и государственный деятель возникшего на руинах Римской империи остготского государства Кассиодор (487—578) отмечал: «Высшая наука — математика — подразделяется на следующие искусства: арифметику, музыку, геометрию и астрономию. Арифметика — учение о количестве, выражаемом числом, музыка же — учение, которое рассматривает числа по отношению к явлениям, наблюдаемым в звуке».

И через 2000 лет, в эпоху средневековья, **квадривиум** (буквально пересечение четырех дорог) являлся повышенным курсом светского образования и объединял все те же четыре предмета: арифметику, геометрию, музыку и астрономию. Средневековые монахи лишь предпослали квадривиуму **тривиум** — начальный курс образования, состоявший из трех гуманитарных дисциплин: грамматики, риторики и диалектики. Тривиум вместе с квадривиумом соединялся в знаменитые **«семь свободных**

---

[1] Софистами (σοφιστης — знаток, мудрец) именовались странствующие учителя мудрости, бывшие одновременно и учеными, и преподавателями, и популяризаторами науки, а порой и дипломатами. Бродя по свету, софисты останавливались то в одном полисе, то в другом, где за плату обучали молодежь различным наукам. Наибольшей известностью среди софистов пользовался Протагор из Абдеры, прославившийся своим афоризмом «Человек есть мера всех вещей».

искусств» — систему средневекового образования. По мнению средневековых схоластов, это был свод элементарных знаний, необходимый монахам для понимания Библии. Лишь в эпоху Возрождения на смену «семи свободным искусствам» пришла классическая система образования, отчасти сохранившаяся и поныне.

Итак, в строении второй части книги, посвященной пифагорейской μάθημα, мы стремились сохранить и ту классификацию составляющих ее элементов, которая восходит к самому Пифагору. Но если арифметика и геометрия и поныне являются частью математики, а в астрономии математика нашла одно из своих триумфальных приложений (вспомним хотя бы открытие «на кончике пера» планеты Нептун), то включение музыки в число «математических» наук сегодня выглядит весьма странным. А между тем именно благодаря счастливому союзу в пифагорейской μάθημα музыка получила прочный математический фундамент гамм и универсальный язык нот, подобный универсальному языку математических формул, которые и обеспечили на тысячелетия, если не навечно, последующее свободное развитие искусства музыки. Впрочем, не будем забегать вперед. Итак...

1. АРИФМЕТИКА

1.1. УЧЕНИЕ О ЧИСЛЕ

Числа древними греками, а вместе с ними Пифагором и пифагорейцами мыслились зримо, в виде камешков[1], разложенных на песке или на счетной доске — абаке. По этой причине греки не знали нуля, так как его невозможно было «увидеть». Но и единица еще не была полноправным числом, а представлялась как некий «числовой атом», из которого образовывались все числа. Пифагорейцы называли единицу «границей между числом и частями», т. е. между целыми числами и дробями, но в то же время видели в ней «семя и вечный корень». Число же определялось как **множество, составленное из единиц.** Особое положение единицы как «числового атома» роднило ее с точкой, считавшейся «геометрическим атомом». Вот почему Аристотель писал: «Точка есть единица, имеющая положение, единица есть точка без положения». Итак, пифагорейские числа в современной терминологии — это натуральные числа.

Числа-камешки раскладывались в виде правильных геометри-

---

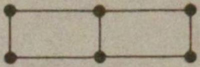
[1] Именно от «счета камешками» произошли популярные сегодня слова «калькуляция», «калькулятор». *Calculus* — по-латыни камешек. Счет камешками — *calculatio* — древние римляне переняли у древних греков.

ческих фигур, эти фигуры классифицировались. Так возникли числа, сегодня именуемые **фигурными:**

линейные числа (т. е. простые числа) — числа, которые делятся только на единицу и на самих себя и, следовательно, представимы в виде последовательности точек, выстроенных в линию:

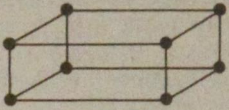
(линейное число 5);

плоские числа — числа, представимые в виде произведения двух сомножителей:



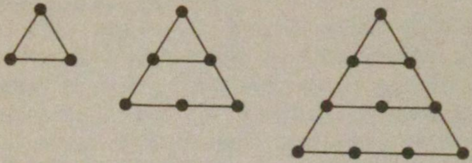
(плоское число 6);

телесные числа, выражаемые произведением трех сомножителей:



(телесное число 8);

треугольные числа:

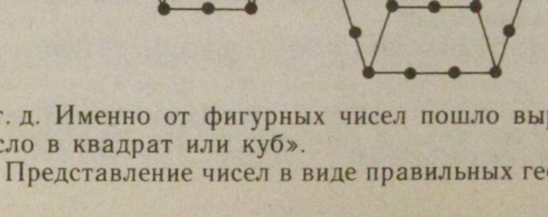


(треугольные числа 3, 6, 10);

квадратные числа:

(квадратные числа 4, 9, 16);

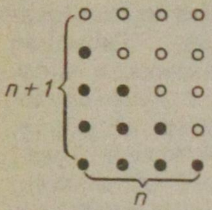
пятиугольные числа:



(пятиугольные числа 5, 12, 22)

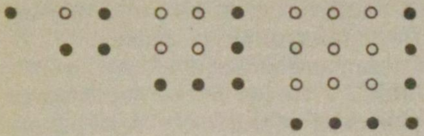
и т. д. Именно от фигурных чисел пошло выражение: «Возвести число в квадрат или куб».

Представление чисел в виде правильных геометрических фигур помогало пифагорейцам находить различные числовые закономерности. Например, чтобы получить общее выражение для n-го треугольного числа, которое есть не что иное, как сумма n натуральных чисел $1+2+3+...+n$, достаточно дополнить это число до прямоугольного числа $n\cdot(n+1)$ и увидеть (именно увидеть глазами!) равенство



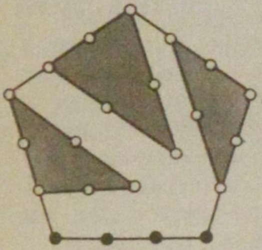
$$1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n\cdot(n+1). \qquad (1.1.1)$$

Написав последовательность квадратных чисел, опять-таки легко увидеть глазами выражение для суммы n нечетных чисел:



$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2. \qquad (1.1.2)$$

Наконец, разбивая n-е пятиугольное число на три $(n-1)$ треугольных (после чего остается еще n «камешков»), легко найти его общее выражение:



$$1+4+7+...+3n-2=$$

$$=n+3\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}. \qquad (1.1.3)$$

Разбиением на треугольные числа получается и общая формула для n-го k-угольного числа:

$$P_n^k=n+(k-2)\frac{n(n-1)}{2}, \qquad (1.1.4)$$

откуда при $k=2$, 3, 4 следуют формулы (1.1.1—1.1.3).

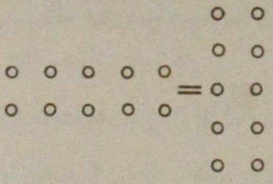
Конечно, сегодняшний школьник легко заметит, что суммы (1.1.1—1.1.3) есть не что иное, как арифметические прогрессии, разность которых d соответственно равна 1, 2, 3 (для k-угольного числа $d=k-2$), и по соответствующей формуле найдет эти суммы и общую формулу (1.1.4):

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n=\frac{2+(n-1)(k-2)}{2}n=n+(k-2)\frac{n(n-1)}{2}.$$

Но в том-то и прелесть пифагорейских доказательств, что они не требуют никаких предварительных знаний и в буквальном смысле очевидны. (Не отсюда ли пошло это столь любимое математиками слово?)

Заметим, что при выводе равенства (1.1.2) был использован излюбленный пифагорейцами метод гномона. **Гномоном** (Γνωμων — знаток, толкователь) пифагорейцы называли число или фигуру (черные точки в (1.1.2)), которая, будучи приложенной к основной фигуре (белые точки), сохраняет ее форму. Первоначально гномоном (буквально тот, кто знает) греки называли солнечные часы — прибор, позволявший по линиям, которые пересекает тень от вертикального столбика, разделять беспредельность времени на зримые части. Впоследствии число и стало для пифагорейцев таким гносеологическим гномоном, дававшим возможнось различать вещи и тем самым овладевать ими в сознании. Методом гномона растут все живые организмы, что позволяет им сохранять свою индивидуальную форму.

Фигурное представление чисел помогало пифагорейцам открывать законы арифметических операций, а также легко переходить к числовой характеристике геометрических объектов — измерению площадей и объемов. Так, представляя плоское число 10 в двух формах:

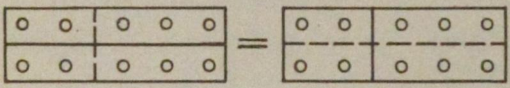


$$5\cdot2=2\cdot5=10,$$

легко «увидеть» переместительный закон умножения:

$$ab=ba.$$

В том же числе 10:



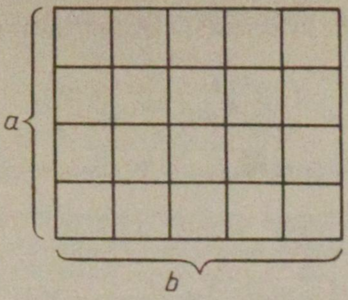
$$(2+3)\cdot2=2\cdot2+3\cdot2=10$$

можно «разглядеть» и распределительный закон сложения относительно умножения:

$$(a+b)c=ac+bc$$

и т. д.

Наконец, если «камешки», образующие фигурные числа, мыслить в виде равных по площади квадратиков, то, укладывая их в прямоугольное число ab:



мы автоматически получаем формулу для вычисления площади прямоугольника: $S=ab$.

Важнейшей частью пифагорейской арифметики было учение о четных и нечетных числах. Не случайно Платон в своих диалогах неоднократно определял арифметику как «учение о четном и нечетном». Четное и нечетное были для пифагорейцев не только основными понятиями теории чисел, но и важнейшими философскими категориями. Пара четное — нечетное наряду с такими парами, как предел — беспредельное, мужское — женское, доброе — злое, включалась в 10 пар противоположностей, которые пифагорейцы считали началами всего сущего.

Исследователи Евклида давно обратили внимание на конец IX книги его «Начал» (предложения 21—34), который явно выпадал из общего контекста книги и выделялся своей архаичностью. Сегодня ни у кого не вызывает сомнения, что эта часть «Начал» есть не что иное, как целиком воспроизведенный фрагмент древнего пифагорейского учения о четном и нечетном.

Мы не будем приводить здесь все 14 предложений о четном и нечетном, а отметим лишь их основной результат, который можно сформулировать так: **произведение двух чисел четно тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей четен.** Этой теореме суждено было сыграть кардинальную роль во всем пифагорейском учении, ибо именно на нее опиралось доказательство знаменитой теоремы о несоизмеримости, которую мы рассмотрим на с. 141.

Вершиной пифагорейского учения о четном и нечетном является последнее предложение IX книги «Начал» Евклида — предложение 36, посвященное **совершенным числам.** Совершенным называется натуральное число, равное сумме всех своих правильных (т. е. меньших этого числа) делителей. Например:

$$6=1+2+3;$$
$$28=1+2+4+7+14;$$
$$496=1+2+4+8+16+31+62+124+248.$$

Предложение 36 утверждает, что если сумма

$$1+2+2^2+\ldots+2^n=p$$

является простым числом, то число $2^n\cdot p$ будет совершенным.

Поскольку ясно, что правильными делителями числа $2^n \cdot p$ будут числа

$$\begin{gathered} 1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^{n-1},\ 2^n; \\ p,\ 2p,\ 2^2p,\ \ldots,\ 2^{n-1}p, \end{gathered} \tag{1.1.5}$$

то доказательство предложения 36 сводится к доказательству двух утверждений:

1) других делителей, кроме (1.1.5), у числа $2^n \cdot p$ нет;
2) сумма делителей равна самому числу, т. е.

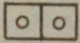
$$1+2+2^2+\ldots+2^n+p(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})=2^n \cdot p. \tag{1.1.6}$$

Первое утверждение доказывается с помощью учения о четном и нечетном (предложения 21—34). А вот второе доказательство легко провести на «камешках».

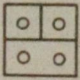
В самом деле, так как по условию $1+2+2^2+\ldots+2^n=p$, то, сокращая в (1.1.6) обе части равенства на p, имеем

$$1+(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})=2^n. \tag{1.1.7}$$

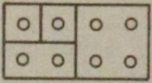
Теперь изобразим данную сумму фигурными числами:



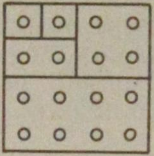
$1+1=2;$



$1+1+2=4;$



$1+1+2+4=8;$



$1+1+2+4+8=16;$

откуда легко «усмотреть» равенство (1.1.7).

Учитывая (1.1.7), получим компактную форму записи совершенного числа $2^n \cdot p$:

$$\begin{aligned} 2^n \cdot p &= 2^n(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}+2^n)= \\ &= 2^n(2^n-1+2^n)=2^n(2^{n+1}-1). \end{aligned}$$

Итак, число

$$q=2^n(2^{n+1}-1) \tag{1.1.8}$$

является совершенным при тех значениях n, при которых число $p=2^{n+1}-1$ является простым.

Легко найти первые подходящие значения n:

$n=1$, $p=3$, $q=2\cdot p=6$;
$n=2$, $p=7$, $q=2^2\cdot p=28$;
$n=4$, $p=31$, $q=2^4\cdot p=496$;
$n=6$, $p=127$, $q=2^6\cdot p=8128$;
$n=12$, $p=8191$, $q=2^{12}\cdot p=33550336$.

Первые четыре совершенных числа были известны пифагорейцам.

А есть ли другие совершенные числа, кроме чисел вида (1.1.8), найденных пифагорейцами? Этот вопрос вот уже 2500 лет, увы, остается открытым. Ясно, что совершенные числа вида (1.1.8) являются четными. Лишь в XVIII в. великий Эйлер доказал, что никаких других четных совершенных чисел нет. Однако до сих пор не известно ни одного нечетного совершенного числа и вопрос об их существовании все еще ждет своего решения. На сегодня лишь известно, что нечетных совершенных чисел в промежутке $[1;\ 10^{50}]$ нет. Четных совершенных чисел на сегодня найдено 27, наибольшее из них равно $2^{44496}(2^{44497}-1)$.

Не правда ли, удивительно, как в, казалось бы, невинной забаве с раскладыванием камешков на песке древние пифагорейцы сумели отыскать математическую проблему, которая и по сей день остается нерешенной?! И просто поражает интуиция пифагорейцев, нашедших задолго до нашей эры единственную (пока или навсегда?!) формулу для совершенного числа!

1.2. ПИФАГОРОВЫ ТРОЙКИ

Изучение свойств натуральных чисел привело пифагорейцев к еще одной «вечной» проблеме теоретической арифметики (теории чисел) — проблеме, ростки которой пробивались задолго до Пифагора в Древнем Египте и Древнем Вавилоне, а общее решение не найдено и поныне. Начнем с задачи, которую в современных терминах можно сформулировать так: решить в натуральных числах неопределенное уравнение

$$x^2+y^2=z^2. \qquad (1.2.1)$$

Сегодня эта задача именуется **задачей Пифагора**, а ее решения — тройки натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению (1.2.1), — называются **пифагоровыми тройками.** В силу очевидной связи теоремы Пифагора с задачей Пифагора последней можно дать геометрическую формулировку: найти все прямоугольные треугольники с целочисленными катетами x, y и целочисленной гипотенузой z.

Частные решения задачи Пифагора были известны в глубокой древности. В папирусе времен фараона Аменемхета I (ок. 2000 до н. э.), хранящемся в Египетском музее в Берлине, мы находим прямоугольный треугольник с отношением сторон 3:4:5

$(3^2+4^2=5^2)$. По мнению крупнейшего немецкого историка математики М. Кантора (1829—1920), в Древнем Египте существовала особая профессия **гарпедонаптов** — «натягивателей веревок», которые во время торжественной церемонии закладки храмов и пирамид размечали прямые углы с помощью веревки, имеющей 12 $(=3+4+5)$ равноотстоящих узлов. Способ построения прямого угла гарпедонаптами очевиден из рисунка 36.

Надо сказать, что с Кантором категорически не согласен другой знаток древней математики — ван дер Варден, хотя сами пропорции древнеегипетской архитектуры свидетельствуют в пользу Кантора. Как бы то ни было, сегодня прямоугольный треугольник с отношением сторон 3:4:5 называется **египетским.**

Как отмечалось на с. 76, сохранилась глиняная табличка, относящаяся к древневавилонской эпохе и содержащая 15 строк пифагоровых троек. Помимо тривиальной тройки, получаемой из египетской (3, 4, 5) умножением на 15 (45, 60, 75), здесь есть и весьма сложные пифагоровы тройки, такие, как (3367, 3456, 4825) и даже (12709, 13500, 18541)! Нет никаких сомнений, что эти числа были найдены не простым перебором, а по неким единым правилам.

И тем не менее вопрос об общем решении уравнения (1.2.1) в натуральных числах был поставлен и решен только пифагорейцами. Общая постановка какой бы то ни было математической задачи была чужда как древним египтянам, так и древним вавилонянам. Только с Пифагора начинается становление математики как дедуктивной науки, и одним из первых шагов на этом пути было решение задачи о пифагоровых тройках. Первые решения уравнения (1.2.1) античная традиция связывает с именами Пифагора и Платона. Попробуем реконструировать эти решения.

Ясно, что уравнение (1.2.1) Пифагор мыслил не в аналитической форме, а в виде квадратного числа z^2, внутри которого нужно

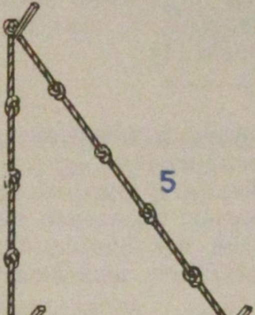


Рис. 36.

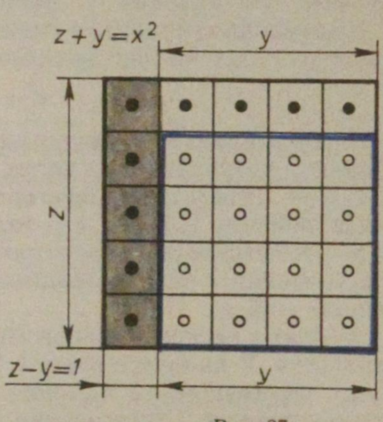


Рис. 37.

было отыскать квадратные числа y^2 и x^2. Число y^2 естественно было представить в виде квадрата со стороной y на единицу меньше стороны z исходного квадрата, т. е. $z-y=1$. Тогда, как легко видеть из рисунка 37 (именно видеть!), для оставшегося квадратного числа x^2 должно выполняться равенство $z+y=x^2$. Таким образом, мы приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} z-y=1, \\ z+y=x^2. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Складывая и вычитая эти уравнения, находим решение уравнения (1.2.1):

$$\begin{cases} z=\frac{x^2+1}{2}, \\ y=\frac{x^2-1}{2}, \\ x=x. \end{cases}$$

Легко убедиться в том, что полученное решение дает натуральные числа только при нечетных $x=2m+1$. Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{cases} x=2m+1, \\ y=2m^2+2m, \\ z=2m^2+2m+1, \ m=1,\ 2,\ 3,\ldots; \end{cases} \tag{1.2.3}$$

$m=1$: (3, 4, 5); $m=2$: (5, 12, 13); $m=3$: (7, 24, 25) и т. д. Это решение традиция связывает с именем Пифагора.

Заметим, что система (1.2.2) может быть получена и формально из уравнения (1.2. 1). В самом деле,

$$x^2+y^2=z^2 \Rightarrow x^2=z^2-y^2 \Rightarrow x^2=(z-y)(z+y),$$

откуда, полагая $z-y=1$, приходим к (1.2.2).

Ясно, что решение Пифагора найдено при достаточно жестком ограничении $(z-y=1)$ и содержит далеко не все пифагоровы тройки. Следующим шагом можно положить $z-y=2$, тогда $z+y=2n^2$, так как только в этом случае $x^2=(z-y)(z+y)=4n^2$ будет квадратным числом. Так возникает система

$$\begin{cases} z-y=2, \\ z+y=2n^2, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{cases} x=2n, \\ y=n^2-1, \\ z=n^2+1,\ n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots; \end{cases} \tag{1.2.4}$$

$n=2$: (4, 3, 5); $n=3$: (6, 8, 10); $n=4$: (8, 15, 17); $n=5$: (10, 24, 26) и т. д. Автором этого решения часто называют Платона.

Легко видеть, что тройки Платона (1.2.4) при нечетных n и после сокращения на 2 дают тройки Пифагора (1.2.3), т. е. решение Платона является более общим. И хотя решение Платона не исчерпывает всего множества решений уравнения (1.2.1), путь получения общего решения теперь просматривается. Найдем это решение.

Прежде всего заметим, что искать следует только **примитивные** пифагоровы тройки (x, y, z), для которых НОД $(x, y, z)=1$ (символ НОД, как обычно, обозначает наибольший общий делитель), ибо ясно, что если (x, y, z) — пифагорова тройка, то для любого натурального $k>1$ (kx, ky, kz) также будет пифагоровой тройкой. Теперь может быть доказана основная

Теорема. Если p и q взаимно простые числа разной четности $(p>q)$, то все примитивные пифагоровы тройки находятся по формулам

$$\begin{cases} x=2pq, \\ y=p^2-q^2, \\ z=p^2+q^2. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Доказательство

1. Для пифагоровых троек условие НОД $(x, y, z)=1$ влечет

$$\text{НОД } (x, y)=\text{НОД } (x, z)=\text{НОД } (y, z)=1. \tag{*}$$

В самом деле, если, например, НОД $(x, y)=k>1$, то z^2 делится на k^2 в силу того, что $z^2=x^2+y^2$, т. е. z делится на k, или НОД $(x, y, z)=k>1$, что противоречит условию.

2. Для любой примитивной пифагоровой тройки (x, y, z) числа x, y разной четности. Действительно, x и y не могут быть оба четными в силу (*). Если x и y оба нечетные, т. е. $x=2m+1$, $y=2n+1$, то $z^2=x^2+y^2=4(m^2+n^2+m+n)+2$, т. е. z^2 делится на 2, но не на 4. Итак, z^2 четно, тогда z тоже четно (см. с. 121), т. е. $z=2l$, значит, z^2 делится на 4. Получили противоречие.

3. Положим для определенности $x=2m$, $y=2n+1$. Тогда $z^2=x^2+y^2=4(m^2+n^2+n)+1$, т. е. z^2 нечетно и, следовательно, z нечетно, т. е. $z=2l+1$. Тогда $z+y=2(l+n+1)=2\alpha$ и $z-y=$ $=2(l-n)=2\beta$, следовательно, $x^2=(z+y)(z-y)=4\alpha\beta$.

4. Покажем, что α и β взаимно простые числа разной четности.

а) Пусть НОД$(\alpha, \beta)=k>1$, т. е. $\alpha=k\alpha_1$, $\beta=k\beta_1$. Тогда

$$\begin{matrix} z+y=2k\alpha_1 \\ z-y=2k\beta_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} z=k(\alpha_1+\beta_1) \\ y=k(\alpha_1-\beta_1) \end{matrix} \Rightarrow \text{НОД}(y, z)=k>1,$$

что противоречит (*).

б) Пусть $\alpha=2\alpha_1$, $\beta=2\beta_1$. Тогда

$$\begin{matrix} z+y=2\cdot 2\alpha_1 \\ z-y=2\cdot 2\beta_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} z=2(\alpha_1+\beta_1) \\ y=2(\alpha_1-\beta_1) \end{matrix} \Rightarrow \text{НОД}(y, z)=2,$$

что противоречит (*).

в) Аналогично доказывается, что α и β одновременно не могут быть нечетными.

5. Итак, $x^2=4\alpha\beta$, тогда $\alpha=p^2$, $\beta=q^2$, причем p^2 и q^2 взаимно простые числа разной четности. Но тогда p и q также являются взаимно простыми числами разной четности, причем

$$z+y=2p^2;$$
$$z-y=2q^2.$$

Отсюда легко находим: $z=p^2+q^2$, $y=p^2-q^2$, $x=2pq$.

Теорема доказана. Ясно, что при $q=1$ (1.2.5) переходит в (1.2.4). Решение (1.2.5) при любых натуральных $p>q$ дает всевозможные пифагоровы тройки без учета их примитивности. Оно было хорошо известно в античную эпоху и указано в таких великих книгах древности, как «Начала» Евклида (III в. до н. э.) и «Арифметика» Диофанта (III в. н. э.). На этом можно было бы поставить точку, но...

Около 1630 г. скромный юрист из французского города Тулузы Пьер Ферма (1601—1665), проводивший свободное от работы время в математических упражнениях, на полях «Арифметики» Диофанта против того места, где Диофант решает задачу Пифагора, сделал запись: «Наоборот, невозможно разложить куб на два куба или биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень выше второй нельзя разложить на сумму двух степеней с теми же показателями. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки».

Так, на полях Диофантовой «Арифметики» Ферма сформулировал утверждение, вошедшее в историю математики как **великая теорема Ферма**: для любого натурального $n>2$ уравнение

$$x^n+y^n=z^n$$

не имеет решений в целых положительных числах x, y, z.

Однако общее доказательство теоремы, обещанное Ферма, бесследно исчезло: вместо него в бумагах Ферма было найдено лишь частное доказательство для случая $n=4$. Не нашли это доказательство и поныне лучшие математические умы мира.

Прошло более 350 лет, в течение которых предпринимались героические усилия для доказательства коварной теоремы. В 1770 г. Л. Эйлер доказал теорему для $n=3$, в 1825 г. П. Дирихле и А. Лежандр — для $n=5$, в 1839 г. Г. Ламе — для $n=7$. Затем Э. Куммер наметил общий подход к проблеме и доказал теорему для всех простых чисел n из промежутка $[3; 100]$. Страсти вокруг теоремы Ферма накалялись. В 1907 г. за ее доказательство была объявлена международная премия в 100 000 немецких марок. Теорема Ферма стала каким-то математическим наваждением.

К настоящему времени с помощью ЭВМ установлено, что

$n \leqslant 125000$. Последняя сенсация облетела математический мир в 1993 г.: английский математик Эндрю Уайлс из Пристонского университета в докладе, сделанном в Институте математических наук имени Исаака Ньютона Кембриджского университета перед 75 виднейшими математиками мира, представил доказательство теоремы Ферма. Время покажет: будет ли в нем обнаружена ошибка, как и в великом множестве предыдущих доказательств, или нет.

Тем не менее все эти поиски и прежде всего идеи российского математика А. Паршина нельзя назвать бесполезными. Они породили массу новых плодотворных направлений в математике и, таким образом, необычайно обогатили саму математику.

Так, начатое Пифагором во времена, когда человечество знало лишь натуральные числа, исследование «безобидного» уравнения

$$x^2+y^2=z^2$$

привело к сложнейшей проблеме современной теории чисел — исследованию в целых числах уравнения

$$x^n+y^n=z^n \text{ —}$$

великой и неприступной на протяжении четырех столетий теореме Ферма.

1.3. ТАБЛИЦА ПИФАГОРА

Кроме теоретической арифметики, ставшей фундаментом современной теории чисел и оставившей ей ряд нерешенных проблем, была у пифагорейцев и другая ветвь арифметики, более близкая современному значению слова,— учение о правилах действия над числами. Этот раздел арифметики назывался у пифагорейцев **логистикой** (Λογιστικμ́ — счетное искусство). В состав логистики входили арифметические действия с натуральными числами вплоть до извлечения квадратных и кубических корней, действия с дробями, техника вычислений на счетной доске. Хотя задачи вычислительной арифметики отвечали насущным потребностям жизни — торговле, строительству, расчету метательных орудий, логистика (искусство вычислять) по сравнению с арифметикой (наукой о числах) считалась пифагорейцами наукой второго сорта и развивалась весьма слабо.

Как и в теоретической арифметике, числа-камешки играли в логистике значительную роль. Они успешно использовались в первой в истории человечества «вычислительной машине» — **абаке.** Абак выглядел просто: это была разлинованная плита, в каждой колонке которой камешки имели разные значения: единицы, десятки, сотни и т. д. Сегодня так до конца и не выяснено, откуда произошло слово «абак»: его греческое толкование неговорящий (’Α-βακής — бессловесный), возможно, указывает на молчаливый характер процесса счета, а семитическое — означает дощечка, покрытая слоем пыли. Трудно сказать, где появился первый абак — в Древнем Египте, Древней Греции или Древнем Китае. Ясно лишь, что китайская модель абака — **суаньпань** — в виде бусинок, нанизанных на прутики, оказалась наиболее практичной и встречается даже в наш век электронных микрокалькуляторов.

Как бы то ни было, в V в. до н. э., по свидетельству Геродота, абак был хорошо известен и в Греции, и в Египте и отличался лишь направлением перекладывания камешков. О популярности абака говорит и отрывок из «Истории» древнегреческого историка Полибия (ок. 201 — ок. 120 до н. э.): «Придворные — как камешки на счетной доске: захочет счетчик, и они будут стоить один халк, а захочет — так и целый талант».

В 1848 г. при раскопках на острове Саламин был найден мраморный абак огромных размеров (1,5×0,75 м). Расшифровка надписи на мраморной доске позволила воспроизвести способ пользования абаком (рис. 38). Если пронумеровать все 10 колонок справа налево (именно так передвигали камешки греки), то в первых 8 колонках каждый камешек соответственно обозначал 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000 драхм (драхма и талант — денежные единицы в Греции; 1 талант=6000 драхм). Последние две колонки служили для подсчета числа талантов.

Но подсчитанные числа необходимо было запомнить, лучше записать. Так появляется письменное фиксирование чисел — нумерация, а затем и письменный счет. Надо сказать, что греческая нумерация была шагом назад по сравнению с вавилонской. Обе ее разновидности — аттическая и ионийская — не были позици-

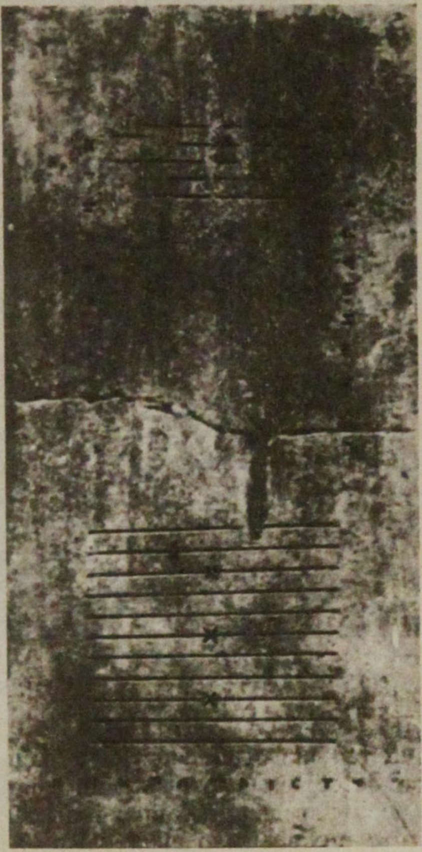


Рис. 38. Мраморный абак, найденный на острове Саламин. IV в. до н. э. (?) Афины. Национальный музей.

онными, и в этом был их главный недостаток. Аттическая нумерация (очень похожая на римскую) была со временем вытеснена более компактной ионийской, которую мы и рассмотрим коротко.

В основу ионийской нумерации положены все 24 буквы греческого алфавита и три архаические финикийские буквы (Fς — вау, T ϡ — сампи и ϙς — коппа). Числовые значения этих 27 знаков показаны в таблице, откуда также ясно, что с их помощью можно было изобразить все числа от 1 до 999. Например: $\iota\alpha=11$, $\rho\beta=102$, $\varphi\xi\gamma=563$ и т. д. Чтобы отличать буквы-слова от букв-чисел, над последними ставилась черта (поскольку нам путаница не грозит, мы черту опускаем).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$1\cdot n$	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	ϑ
$10\cdot n$	ι	ϰ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ς
$100\cdot n$	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ

(1.3.1)

Для обозначения тысяч применялся штрих слева внизу буквы, например $,\alpha=1000$, $,\gamma=3000$. Десятки тысяч обозначались знаком М с соответствующей буквой сверху, например $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}=10\,000$, $\overset{\beta}{\mathrm{M}}=20\,000$, $\overset{\varkappa\varepsilon}{\mathrm{M}}=250\,000$. Запись чисел свыше 1000 можно рассматривать как зачатки позиционной системы счисления, окончательный переход к которой в Греции так и не был осуществлен.

Заметим, что алфавитная ионийская система нумерации была целиком воспринята в России с той лишь разницей, что греческие буквы были заменены сходными по начертанию буквами кириллицы. Лишь в конце XVII в. вместе с реформами Петра I в России стала вводиться так называемая арабская нумерация, ставшая сегодня международной.

Непозиционная ионийская система счисления делала письменный счет весьма громоздким. Так, чтобы умножить два числа, их представляли в виде суммы чисел вида (1.3.1), которые затем перемножались и складывались. Например:

$$134\cdot 43=(100+30+4)\cdot(40+3)=$$
$$=(100\cdot 40+100\cdot 3)+(30\cdot 40+30\cdot 3)+(4\cdot 40+4\cdot 3)=$$
$$=(4000+300)+(1200+90)+(160+12)=5762.$$

Вот как это выглядело бы в античном оригинале (справа дан «перевод» в арабскую нумерацию)[1]:

---

[1] Хотя подобную реконструкцию греческого умножения приводят такие знатоки древней математики, как ван дер Варден или М. Я. Выгодский, существует вполне обоснованное мнение о том, что вычисления в алфавитных системах нумерации все-таки не проводились. Выкладки проводились на абаке, а уже записывались в алфавитных системах.

τάδέ	$\overline{\rho\lambda\delta}$			т. е.	134		
ἐπι	$\overline{\mu\gamma}$			на	43		
	͵δ	$\overline{\tau}$			4000	300	
	͵ασ	ς			1200	90	
		$\overline{\rho\xi}$	$\overline{\iota\beta}$			160	12
ὁμοῦ	͵$\overline{\varepsilon\psi\xi\beta}$			Итого	5762		

Для вычисления промежуточных результатов (т. е. для перемножения чисел вида (1.3.1) составлялись таблицы умножения. Такие таблицы были известны грекам издревле, и их изобретение приписывалось герою Троянской войны Паламеду — тому самому Паламеду, который разоблачил хитроумного Одиссея, прикинувшегося сумасшедшим, чтобы не идти на Троянскую войну.

Таблицы Паламеда были весьма громоздкими, ибо помимо сомножителей 1, 2, ..., 9, которые составляют современную таблицу умножения — таблицу Пифагора, они должны содержать сомножители 10, 20, ..., 90; 100, 200, ..., 900 и т. д. Известны таблицы, составленные для 37×37 сомножителей от α до $\overset{\alpha}{M}$:

α, β, ..., ϑ, ι, κ, ..., ς, ρ, σ, ..., ϡ, ͵α, ͵β, ..., ͵ϑ, $\overset{\alpha}{M}$;
1, 2, ..., 9, 10, 20, ..., 90, 100, 200, ..., 900, 1000, 2000, ..., 9000, 10 000.

Таблицы содержали три столбца: множимое, множитель и произведение; они учитывали закон коммутативности умножения, и фактически в них было не 37×37 членов, а $37+36+35+...+1=\frac{38\cdot 37}{2}=703$. Фрагмент такой таблицы умножения, написанной на восковой доске безвестным древнегреческим школьником, хранится сегодня в Британском музее.

Ну а где же таблица Пифагора? Ее мы находим именно такой, какой привыкли видеть на обложке тетрадки в клеточку, в сочинении «Введение в арифметику» неопифагорейца Никомаха Геразского[1] (I — II вв.). Трактат Никомаха — наиболее полное из сохранившихся изложений пифагорейской арифметики. Несмотря на то что Никомах жил четырьмя столетиями позже Евклида, его сочинение выглядит гораздо примитивнее арифметических книг (VII — IX книги) Евклидовых «Начал». Именно в сочинении

---

[1] Никомаха из Геразы не следует путать с Никомахом из Афин — сыном Аристотеля, которому его великий отец посвятил свою «Никомахову этику». Увы, все работы Никомаха Аристотелевича утеряны. В этом смысле Никомах из Геразы оказался более счастливым: хотя его «Жизнь Пифагора» пропала, сохранились «Введение в арифметику» и некоторые работы по теории музыки.

Никомаха каким-то чудом сохранилась в первозданном виде вся аура пифагорейского учения о числе со всей ее мистикой, пространными рассуждениями о божественном назначении чисел и т. д.

Итак, перед нами таблица Пифагора:

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	υ	ι
β	δ	ς	η	ι	ιβ	ιδ	ις	ιη	ϰ
γ	ς	υ	ιβ	ιε	ιη	ϰα	ϰδ	ϰζ	λ
δ	η	ιβ	ις	ϰ	ϰδ	ϰη	λβ	λς	μ
ε	ι	ιε	ϰ	ϰε	λ	λε	μ	με	ν
ς	ιβ	ιη	ϰδ	λ	λς	μβ	μη	νδ	ξ
ζ	ιδ	ϰα	ϰη	λε	μβ	μδ	νς	ξγ	ο
η	ις	ϰδ	λβ	μ	μη	νς	ζδ	οβ	π
υ	ιη	ϰζ	λς	με	νδ	ξγ	οβ	πα	ς
ι	ϰ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ς	ρ

Разумеется, Никомах утверждает, что эта таблица, как и все в его книге, восходит к самому Пифагору. Но если это даже и так, то, как легко видеть из рассмотренного примера, античному вычислителю было мало толку от этой таблицы. По ней он смог бы найти произведение сомножителей не больших 10. Например: δ·γ=ιβ (4·3=12). Для остальных произведений ему необходимы были более подробные таблицы. В таблице Пифагора только 55 неравных членов — это менее чем 1/12 часть от тех 703 произведений, которые фигурировали в таблицах Паламеда.

Как таблица умножения таблица Пифагора стала эффективной лишь с изобретением десятичной позиционной системы счисления, когда все умножение свелось к умножению целых чисел от 1 до 9. Разумеется, произошло это не вдруг. В XV в. в Европе разгорелась борьба между «абацистами» — защитниками старой счетной доски и «алгоритмиками» — приверженцами новой позиционной системы и новой индийской («арабской») нумерации.

На старинной гравюре XVI в. мы видим аллегорическое изображение этой борьбы: справа сидит Пифагор, считавшийся изобретателем абака, а слева — Боэций — римский философ VI в., которому в средневековой Европе приписывали изобретение новых цифр (рис. 39). Суд в споре Пифагора и Боэция призвана вершить сама Арифметика, стоящая за ними. Однако выражение лица Пифагора отнюдь не оптимистично, и, видимо, как честный ученый, он готов признать Боэция победителем.

Итак, по существу, имя Пифагора в названии таблицы умножения отражает скорее дань уважения основоположнику

Рис. 39. «Абацист» Пифагор (справа) и «алгоритмик» Боэций (слева). Гравюра из книги XVI в.

логистики (арифметики), хотя по форме сегодняшняя таблица целиком скопирована с греческого оригинала.

Что касается таблицы Пифагора, приведенной у Никомаха, то скорее всего она была задумана не как таблица умножения, а как таблица, иллюстрирующая свойство пропорциональности чисел.

В самом деле, легко видеть, что любые две строки этой таблицы представляют собой набор чисел, находящихся в одинаковых отношениях друг к другу, т. е. пропорциональных. Таким образом, таблица Пифагора приводит нас к новой странице пифагорейской арифметики — учению о пропорциях.

1.4. УЧЕНИЕ О ПРОПОРЦИЯХ

Характерной особенностью пифагорейского мышления было не просто стремление все измерять, постигая вещи при помощи чисел, но и **соизмерять**, т. е. сравнивать измеренные величины и тем самым раскрывать внутренние связи между ними. Вот почему пропорции, т. е. равенства отношений, стали изучаться пифагорейцами раньше, чем сами отношения. К этому побуждала не только пифагорейская философия «извлечения числа из вещей», но и сама жизнь и прежде всего искусство архитектуры, где пропорции во все времена играли заглавную роль. И только впоследствии из учения о пропорциях родилось учение об отношениях, вершиной которого стала общая теория отношений Евдокса[1] (ок. 408 — ок. 355) — одно из высочайших достижений греческой математики.

Слово «пропорция» ввел в употребление в I в. до н. э. Цицерон, переведя им на латынь греческий термин «аналогия», который буквально означал «вновь отношение», или, как мы говорим, соотношение. С тех пор вот уже 2000 лет пропорцией в математике называют равенство между двумя отношениями четырех величин — a, b, c, d:

$$a:b=c:d, \tag{1.4.1}$$

причем величины a, $d \neq 0$ называют крайними членами пропорции, а величины $b \neq 0$ и c — средними.

Сегодня, когда известны рациональные и иррациональные числа, это определение кажется тривиальным, ибо всякое отношение двух величин может быть представлено рациональным или иррациональным числом. Сегодня, когда законы арифметических операций, установленные для натуральных чисел, распространены и на другие множества чисел вплоть до иррациональных, нет никакой необходимости создавать специальные правила действия с отношениями, а само равенство отношений легко перевести в равенство произведений, именуемое **основным свойством пропорции**: произведение средних членов пропорции равно произведению ее крайних членов:

---

[1] Евдокс был не только блестящим математиком, но и знаменитым астрономом, медиком, прекрасным оратором, известным философом и географом. За эти разносторонние качества друзья и прозвали его *Εὐ δοξος* — окруженный почетом, знаменитый. Таким образом, как и Платона, а возможно, и Пифагора, мы знаем Евдокса не по настоящему имени, а по прозвищу.

$$bc = ad. \qquad (1.4.2)$$

Совсем в иной ситуации находился древнегреческий математик. Как следовало ему понимать отношение величин $a:b$? Хорошо, если меньшая величина b целое число раз m укладывалась в большей a, т. е. $a = mb$. Тогда отношением величин $a:b$ можно было бы назвать число m, т. е. $a:b = m$. Однако так было далеко не всегда, и вот тут-то для греческого математика, знавшего только натуральные числа, возникали серьезные трудности.

Мы не знаем, как преодолевали эти трудности ранние пифагорейцы, хотя известно, что они широко пользовались пропорциями. (Вспомним, что еще Фалес, измеряя высоту пирамиды по длине ее тени и высоте и длине тени шеста, фактически пользовался пропорцией.) Но нам доподлинно известно, что в трудах друзей Платона Теэтета (? — 369 до н. э.) и Архита была построена теория отношений для соизмеримых величин (целых чисел), которую затем обобщил на случай несоизмеримых величин ученик Архита Евдокс. Все эти теории вошли в «Начала» Евклида, откуда мы их и знаем. Считается, что V книга «Начал» принадлежит Евдоксу, VII — Теэтету, а VIII — Архиту.

Итак, дробь как число для пифагорейцев не существовала, поскольку единица («числовой атом») считалась ими неделимой. Поэтому дробь $\frac{a}{b}$ понималась не как доля единицы $\frac{a}{b}\cdot 1$, а как отношение двух целых чисел $\frac{a\cdot 1}{b\cdot 1}$. Согласно VII книге «Начал», отношения $a:b$ и $c:d$ назывались равными, если у a и b существовал такой общий делитель p, а у c и d — делитель q, что

$$\begin{matrix} a = mp; & c = mq; \\ b = np; & d = nq \end{matrix} \qquad \left(\text{т. е. } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}\right)$$

(в частности, при $n = 1$ $a = mb$, $c = md$). Тогда пары целых чисел разбивались на непересекающиеся классы пар, имеющих одинаковые отношения:

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots .$$

Именно такие классы пропорциональных пар и дают любые две строки таблицы Пифагора. Далее в «Началах» доказывалось, что наименьшая пара $\frac{a_0}{b_0}$ полностью определяет свой класс. Сегодня эту пару (несократимую дробь) мы бы назвали рациональным числом, определяющим данный класс.

В основе большей части доказательств теории отношений лежал универсальный способ нахождения наибольшего общего делителя двух чисел. Этот способ и сегодня с успехом применяется в теории чисел и называется **алгоритмом Евклида.** Суть алгоритма Евклида состоит в том, что a делят на b с остатком, затем b делят на этот остаток и т. д.

$$\begin{cases} a=mb+r_1, \\ b=m_1r_1+r_2, \\ r_1=m_2r_2+r_3, \\ \ldots\ldots\ldots \\ r_{n-2}=m_{n-1}r_{n-1}+r_n. \end{cases} \tag{1.4.3}$$

Евклид доказал, что:

1) если $r_n=1$, то НОД$(a, b)=1$, т. е. числа a и b взаимно простые;

2) если $r_n=0$, то НОД$(a, b)=r_{n-1}$.

Записывая систему равенства (1.4.3) в виде

$$\begin{cases} \frac{a}{b}=m+\frac{r_1}{b}, \\ \frac{b}{r_1}=m_1+\frac{r_2}{r_1}, \\ \frac{r_1}{r_2}=m_2+\frac{r_3}{r_2}, \\ \ldots\ldots \\ \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=m_{n-1}+\frac{r_n}{r_{n-1}} \end{cases}$$

и подставляя последующие равенства в предыдущие, получим

$$\frac{a}{b}=m+\frac{r_1}{b}=m+\cfrac{1}{m_1+\cfrac{r_2}{r_1}}=m+\cfrac{1}{m_1+\cfrac{1}{m_2+\cfrac{r_3}{r_2}}}=$$

$$=m+\cfrac{1}{m_1+\cfrac{1}{m_2+\cfrac{1}{m_3+\ldots+\cfrac{1}{m_{n-1}+\cfrac{r_n}{r_{n-1}}}}}} \tag{1.4.4}$$

Дробь (1.4.4) называется **непрерывной.** Из самого принципа построения непрерывной дроби видно, что если она конечна, то, значит, числа a и b имеют общую меру, т. е. число $\frac{a}{b}$ является рациональным. Бесконечная непрерывная дробь будет получаться в случае, если a и b несоизмеримы, т. е. когда число $\frac{a}{b}$ иррациональное. Таким образом, непрерывная дробь является прекрасным критерием рациональности или иррациональности числа. Однако переход от алгоритма Евклида к непрерывным дробям был осуществлен только через 2000 лет, в эпоху Возрождения.

Стремясь обобщить теорию отношений на несоизмеримые величины, Евдокс вводит новое определение величины. Это определение включало в себя как числа, так и любые непрерывные величины (отрезки, площади), в том числе и несоизмеримые. Понятие величины определялось с помощью аксиом равенства и неравенства, и в частности двумя знаменитыми аксиомами.

1. «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга» («Начала», кн. V, опред. 4). Иначе, для любых a и b существуют такие числа m и n, что $ma>b$ и $nb>a$. Эта аксиома известна в математике как аксиома Архимеда, а величины a и b, для которых она выполняется, называются архимедовыми.

2. «Говорят, что величины находятся в том же отношении первая ко второй и третья к четвертой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвертой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке» («Начала», кн. V, опред. 5). Иначе, $a:b=c:d$, если для любых m и n справедливо одно из утверждений:

$$\begin{aligned} ma>nb &\Rightarrow mc>nd; \\ ma=nb &\Rightarrow mc=nd; \\ ma<nb &\Rightarrow mc<nd. \end{aligned}$$

Эта аксиома, ставшая через 23 века отправным пунктом современной теории действительных чисел, позволяла сравнивать отношения несоизмеримых величин. Оставалось только назвать отношение $a:b$ числом (рациональным, если a и b имели общую меру, и иррациональным в противном случае). Однако это сделал только Ньютон в своей «Всеобщей арифметике» в 1707 г.: «Под числами мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу».

Истинная же глубина теории Евдокса была до конца осознана лишь во второй половине XIX в., после того как немецкий математик Рихард Дедекинд (1831—1916) построил теорию действительного числа как сечения во множестве рациональных чисел. Вторая аксиома Евдокса, по существу, стала отправным пунктом теории Дедекинда, которая настолько близко следовала ходу мыслей Евдокса, что это дало повод его соотечественнику Р. Липшицу в одном из писем спросить Дедекинда, что же он сделал нового по сравнению с Евдоксом. В это же время еще один выдающийся немецкий математик Феликс Клейн (1849—1925) назвал теорию отношений Евдокса одним из перлов античной математической мысли.

Но вернемся к пропорциям. Традиция утверждает, что древние пифагорейцы знали три вида пропорций:

$$\begin{aligned} &\text{арифметическая:} \quad a-b=c-d; \\ &\text{геометрическая:} \quad a:b=c:d; \\ &\text{гармоническая:} \quad \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}. \end{aligned} \qquad (1.4.5)$$

Помимо обычных пропорций пифагорейцы особое внимание уделяли **непрерывным пропорциям,** или **средним величинам,** т. е. таким пропорциям, у которых средние члены совпадали ($b=c$). Пифагорейцы не только изучали математические свойства средних, но и наполняли их глубоким эстетическим содержанием. Об этом красноречиво свидетельствует следующий отрывок из платоновского «Тимея»: «Невозможно, чтобы две вещи совершенным образом соединились без третьей, так как между ними должна появиться связь, которая скрепила бы их. Это наилучшим образом может выполнить пропорция...»

Полагая в (1.4.5) $b=c$ и переобозначая d через c, получим следующие выражения для средних:

$$\begin{aligned} &\text{арифметическое среднее:} \quad a-b=b-c \Rightarrow b=\frac{a+c}{2}; \\ &\text{геометрическое среднее:} \quad a:b=b:c \Rightarrow b=\sqrt{ac}; \\ &\text{гармоническое среднее:} \quad \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c} \Rightarrow b=\frac{2ac}{a+c}. \end{aligned} \qquad (1.4.6)$$

Арифметическое среднее понималось пифагорейцами арифметически: как отрезок b, меньший большего отрезка a и больший меньшего c на одну и ту же величину $a-b=b-c$. Геометрическое среднее ($b^2=ac$) — геометрически: как площадь квадрата со стороной b, равновеликого прямоугольнику со сторонами a и c. Наконец, гармоническое среднее — как арифметическое среднее для обратных величин. Гармоническое среднее играло большую роль в пифагорейской теории музыки — гармонии, откуда и происходит его название.

Среди бесчисленного множества геометрических средних уникальными свойствами обладает одно, делящее данный отрезок a на две части x и $a-x$ в геометрической пропорции, т. е. так, что отношение целого отрезка a к его большей части x равняется отношению большей части x к меньшей $a-x$:

$$a:x=x:(a-x). \qquad (1.4.7)$$

Эта геометрическая пропорция приводит к уравнению

$$x^2+ax-a^2=0,$$

которое имеет один положительный корень:

$$x=a\varphi; \quad \varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Заметим, что $\frac{1}{\varphi}=\Phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, т. е. $\varphi\cdot\Phi=1$, причем

$$\varphi=0{,}618033988...;$$
$$\Phi=1{,}618033988... .$$

Найдем разложение φ в непрерывную дробь. Рассмотрим бесконечную непрерывную дробь:

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}, \tag{1.4.8}$$

в знаменателе которой нетрудно обнаружить выражение $1+x$, т. е.

$$x=\frac{1}{1+x}.$$

Отсюда находим уравнение

$$x^2+x-1=0$$

и его положительный корень $x=\varphi$. Следовательно, дробь (1.4.8) и есть искомое разложение для φ.

Уже этих двух свойств достаточно для того, чтобы заметить в пропорции (1.4.7) нечто поистине уникальное. Вот почему эта удивительная пропорция, известная со времен древних пифагорейцев, в эпоху Возрождения была названа ее страстным почитателем и неутомимым исследователем Леонардо да Винчи (1452—1519) **золотым сечением.** Но, несмотря на более чем двухтысячелетнюю историю, золотое сечение и сегодня раскрыло далеко не все свои тайны. Помимо массы интереснейших математических свойств золотое сечение имеет множество подчас загадочных проявлений как в природе, так и в искусстве. С некоторыми из этих свойств, выходящих за рамки нашего повествования, можно познакомиться, например, в книге Н. Васютинского «Золотая пропорция» (М.: Молодая гвардия, 1990).

А сейчас мы ограничимся лишь оценкой золотого сечения, данной более 300 лет назад выдающимся немецким математиком и астрономом Иоганном Кеплером: «Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них — это теорема Пифагора, а другое — деление отрезка в среднем и крайнем отношении... Первое можно сравнить с мерой золота; второе же больше напоминает драгоценный камень.

Отметим одно любопытное свойство всех трех средних величин, которое, как утверждает Ямвлих во «Введении в никомахову арифметику», Пифагор привез из Вавилона. Пусть даны две величины $a > d$. Составим их среднее арифметическое $b = \frac{a+d}{2}$ и среднее гармоническое $c = \frac{2ad}{a+d}$. Легко показать, что $b > c$:

$$b > c \Leftarrow \frac{a+d}{2} > \frac{2ad}{a+d} \Leftarrow (a+d)^2 - 4ad > 0 \Leftarrow \quad (a-d)^2 > 0,$$

т. е. $a > b > c > d$. Кроме того, легко видеть, что

$$bc = \frac{a+d}{2} \cdot \frac{2ad}{a+d} = ad,$$

т. е. выполняется основное свойство пропорции (1.4.2), и, следовательно, **среднее арифметическое и среднее гармоническое двух величин a и d образуют с ними геометрическую пропорцию:**

$$a : \frac{a+d}{2} = \frac{2ad}{a+d} : d. \tag{1.4.9}$$

Эта пропорция играла значительную роль в пифагорейской теории музыки, отчего ее часто называют **музыкальной.**

Знакомясь с пифагорейским учением, мы не раз еще встретимся с музыкальной пропорцией и со всеми видами средних. Пропорции помогали пифагорейцам «извлекать числа из вещей» и щедро раскрывали перед ними свои сокровища. Возможно, что именно изучение геометрической пропорции и геометрической средней привело пифагорейцев к их главному и трагическому открытию — открытию несоизмеримости.

1.5. ОТКРЫТИЕ НЕСОИЗМЕРИМОСТИ

Открытие несоизмеримости, т. е. обнаружение таких величин, отношение которых не может быть выражено с помощью отношения целых чисел, является наивысшим достижением пифагорейской школы и поворотным этапом в развитии всей математики. По силе революционизирующего воздействия это открытие, сделанное на рубеже VI — V вв. до н. э., можно сравнить разве что с открытием дифференциального и интегрального исчислений Ньютоном и Лейбницем в XVII в., открытием неевклидовой геометрии Лобачевским в XIX в. или теории относительности Эйнштейном в начале XX в.

Проблема несоизмеримости уже в античности получила громкую известность и была осознана как выдающееся достижение теоретического знания. Об этом красочно свидетельствует отрывок из диалога Платона «Законы», где некий афинянин признается в том, что долго не знал о существовании несоизмеримых величин: «Друг мой, Клиний, я и сам был поражен, что лишь так поздно узнал то состояние, в котором мы находимся. Мне показалось, что это свойственно не человеку, но скорее каким-то свиньям. Я устыдился не только за себя, но и за всех эллинов».

Мы не знаем доподлинно, решение какой конкретной задачи привело пифагорейцев к открытию несоизмеримости. Это могло быть сделано в любом из пифагорейских учений: и в арифметике при нахождении средней геометрической чисел 1 и 2, и в геометрии при отыскании общей меры диагонали и стороны квадрата, и в музыке при попытках разделить октаву пополам, что также приводит к нахождению средней геометрической между числами 1 и 2.

Как бы то ни было, но бесспорным является то, что доказательство существования несоизмеримых величин было найдено ранними пифагорейцами и к середине V в. до н. э. было широко известно. Вот это доказательство.

Теорема. Сторона AB и диагональ AC квадрата несоизмеримы, т. е. отношение $AC{:}AB$ не выражается отношением целых чисел (рис. 40).

Доказательство. Допустим противное. Пусть AC и AB соизмеримы, т. е. их отношение равно отношению целых чисел:

$$AC{:}AB=m{:}n, \qquad (1.5.1)$$

причем числа m и n одновременно не являются четными, так как иначе дробь можно было бы сократить на 2. Возводя (1.5.1) в квадрат, имеем

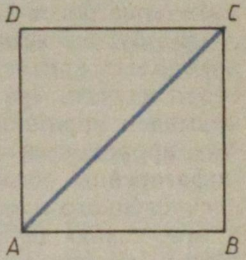


Рис. 40.

$$AC^2{:}AB^2=m^2{:}n^2.$$

По теореме Пифагора $AC^2=2AB^2$, т. е. $AC^2{:}AB^2=2$, и, значит,

$$m^2{:}n^2=2 \Rightarrow m^2=2n^2,$$

т. е. m^2 четно. Согласно учению о четном и нечетном (см. с. 121) m также четно (так как произведение двух четных чисел четно, а двух нечетных — нечетно), т. е. $m=2k$, откуда $m^2=4k^2$. Тогда

$$4k^2=2n^2, \text{ или } 2k^2=n^2,$$

т. е. n^2 четно, и, следовательно (учение о четном и нечетном), n также четно. Итак, m и n одновременно являются четными, что противоречит первоначальному допущению о несократимости дроби. Это противоречие доказывает теорему.

Как видим, доказательство несоизмеримости носит чисто пифагорейский характер, так как целиком основано на учении о четном и нечетном. Но — и в этом была трагедия пифагорейцев — родившись в недрах пифагорейского учения, это доказательство наносило смертельный удар породившему его учению.

Открытие несоизмеримости опрокидывало всю философскую систему пифагорейцев, которые были убеждены, что «элементы чисел являются элементами всех вещей и весь мир в целом является гармонией и числом». Но никаких чисел, кроме целых и их отношений, пифагорейцы не знали. И вот получалось, что для таких элементарных геометрических объектов, как диагональ и сторона квадрата, нет общей меры, т. е. нет измеряющего их числа. Какое уж там «все есть число»!

Согласно преданию, несоизмеримость открыл сам Пифагор и это открытие долго держалось в тайне. Лишь ученик Пифагора Гиппас, как утверждает Ямвлих, «открыл недостойным участия в учениях природу пропорции и несоизмеримости». За это, продолжает Ямвлих, пифагорейцы «его столь возненавидели, что не только изгнали его из общего товарищества, но даже соорудили ему могилу, как будто некогда бывший их товарищ в самом деле ушел из земной жизни». Вскоре Гиппас действительно погиб во время кораблекрушения, и пифагорейцы видели в этом наказание богов за разглашение тайны[1].

Но, будучи истинными рыцарями науки, пифагорейцы пытались преодолеть кризис, вызванный открытием несоизмеримости. Они стали изучать эти «неразумные» величины, которые мы сегодня называем иррациональными (от лат. irrationalis — неразумный). Так, иррациональность отношения диагонали и стороны квадрата пифагорейцы объясняли тем, что оба этих отрезка состоят из бесчисленного множества точек и поэтому их отношение сводится к отношению двух бесконечно больших целых чисел. Хотя эта мысль не выдерживает критики для геометрических объектов, находящихся в рациональных отношениях (ведь они также состоят из бесчисленного множества точек!), по отношению к иррациональным числам она является справедливой. Действительно, всякое иррациональное число можно с любой степенью точности представить в виде отношения двух целых чисел, причем чем больше будут эти числа, тем точнее их отношение будет выражать иррациональное число.

В качестве иллюстрации этой пифагорейской мысли рассмотрим метод Архита — нахождение приближенных значений иррациональных чисел. Метод Архита — античного знатока пропорций — основан на музыкальной пропорции (1.4.9).

Пусть даны два числа $a_0 > b_0$. Рассмотрим их среднее арифметическое $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ и среднее гармоническое $b_1 = \frac{2a_0b_0}{a_0 + b_0}$. Как мы показали (см. с. 140), $a_0 > a_1 > b_1 > b_0$ и $a_1b_1 = a_0b_0$. Затем

---

[1] Следует весьма осторожно относиться ко всем рассказам, связанным с именем Гиппаса, ибо достоверных сведений о Гиппасе сохранилось еще меньше, чем о Пифагоре. Не случайно канадский историк науки Дж. Филин заметил, что «Гиппас — это вешалка, на которую историки математики вешают свои гипотезы».

образуем те же средние из полученных значений: $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ и $b_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}$ $(a_2b_2=a_1b_1=a_0b_0)$ и т. д. В результате получим две последовательности:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \text{ и } b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}, \tag{1.5.2}$$

обладающие следующим свойством:

$$a_nb_n=a_{n-1}b_{n-1}=...=a_1b_1=a_0b_0. \tag{1.5.3}$$

Обозначая $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ и переходя в равенствах (1.5.2) к пределу при $n\to\infty$, имеем

$$a=\frac{a+b}{2};\ b=\frac{2ab}{a+b},$$

откуда легко находим, что $a=b$. Учитывая это равенство и переходя к пределу в (1.5.3), получим

$$a^2=b^2=a_0b_0 \ \Rightarrow\ a=b=\sqrt{a_0b_0}.$$

Итак, обе последовательности a_n и b_n при $n\to\infty$ стремятся к числу $\sqrt{a_0b_0}$.

Пусть теперь $a_0=2$, $b_0=1$. Эти числа можно рассматривать как нулевые приближения числа $\sqrt{a_0b_0}=\sqrt{2}$ $(a_0-b_0=1)$, которое будет пределом последовательностей a_n и b_n. Найдем первые члены этих последовательностей:

$$a_1=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2};\ b_1=\frac{2\cdot2\cdot1}{2+1}=\frac{4}{3}\ \left(a_1-b_1=\frac{1}{6};\ a_1b_1=2\right);$$

вторые члены:

$$a_2=\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{17}{12}\approx1{,}4167;\quad b_2=\frac{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}=\frac{24}{17}\approx1{,}4118$$

$$\left(a_2-b_2=\frac{1}{204};\quad a_2b_2=2\right)$$

и третьи члены:

$$a_3=\frac{\frac{17}{12}+\frac{24}{17}}{2}=\frac{577}{408}\approx1{,}4142157;\quad b_3=\frac{2\cdot\frac{17}{12}\cdot\frac{24}{17}}{\frac{17}{12}+\frac{24}{17}}=\frac{816}{577}\approx1{,}4142114$$

$$\left(a_3-b_3=\frac{1}{235\,416}\approx0{,}000004;\ a_3b_3=2\right).$$

Как видим, последовательности a_n и b_n очень быстро сходятся к своему пределу и уже их третьи члены дают прекрасное приближение (пять верных знаков!) числа $\sqrt{2} \approx 1{,}414213...$ (a_n — с избытком и b_n — с недостатком). Попутно мы убеждаемся в справедливости пифагорейской мысли о том, что, чем больше целые числа в отношении, тем точнее они выражают иррациональное число.

Достаточно быстро было обнаружено, что диагональ и сторона квадрата не составляют исключения. К концу V в. до н. э. пифагореец Феодор из Кирены (? — 369 до н. э.), математик, астроном и музыковед, учитель Платона, показал, что стороны квадратов, площади которых равны 3, 5, 6, ..., 15, несоизмеримы со стороной единичного квадрата, т. е. числа $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ..., $\sqrt{15}$ иррациональные.

Мы не знаем доказательства Феодора, но ясно, что он рассматривал каждую иррациональность в отдельности. Существуют различные гипотезы относительно того, почему Феодор не смог доказать иррациональность следующего числа: $\sqrt{17}$ и выше. Наиболее убедительная из них утверждает, что все доказательства Феодора основывались только на учении о четном и нечетном, а первое число, для которого этот способ не проходит, как раз и есть $\sqrt{17}$.

Но уже в самом начале IV в. до н. э. (по-видимому, в 399 г. до н. э., в год казни Сократа) юным и талантливым учеником Феодора Теэтетом было получено общее доказательство иррациональности чисел вида $\sqrt{N}$, где N — целое число, не являющееся полным квадратом. В своем доказательстве Теэтет, по-видимому, опирался на основную теорему созданной им же теории делимости: произведение двух целых чисел AB делится на простое число P тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей делится на P. Если знать эту теорему, то доказательство иррациональности $\sqrt{N}$ ($N \neq M^2$) фактически не отличается от доказательства иррациональности $\sqrt{2}$. Позднее Теэтет доказал иррациональность чисел вида $\sqrt[3]{N}$ ($N \neq M^3$), а также рассмотрел иррациональности вида $\sqrt{M} \pm \sqrt{N}$, $\sqrt{M} \pm N$, $\sqrt{\sqrt{M} \cdot \sqrt{N}}$ и предпринял попытку классификации иррациональностей. Эти результаты Теэтета собраны в X, наиболее трудной, книге «Начал» Евклида.

Итак, открытие несоизмеримости не загнало пифагорейцев в тупик, но, напротив, стимулировало развитие новых, красивых и глубоких теорий. Открытие несоизмеримости было едва ли не первым теоретическим результатом, который невозможно получить с помощью опыта. Более того, оно противоречило всей измерительной практике, ибо в жизни все величины соизмеримы в пределах точности измерительного инструмента. Таким образом, открытие несоизмеримости было сделано не благодаря опыту, а вопреки ему, и в этом его можно сравнить с открытием Коперника, который «остановил Солнце» вопреки нашим ежедневным наблюдениям.

Открытие несоизмеримости оказало решающее влияние на все дальнейшее развитие греческой математики. Поскольку некоторые геометрические объекты не измерялись отношением целых чисел, то естественно было предположить, что геометрические объекты являются величинами более общей природы, чем рациональные числа. Поэтому уже в пифагорейской школе предпринимается попытка построить всю математику, основываясь не на арифметике, а на геометрии. Для этого величины (и в первую очередь числа) представлялись отрезками, площадями и все алгебраические операции (в том числе и извлечение корня) интерпретировались геометрически. Более того, геометрически записывались и решались даже уравнения.

Так в пифагорейской школе родилась «геометрическая алгебра», а на первое место в пифагорейской μάθημα вышла геометрия.

2. ГЕОМЕТРИЯ

2.1. ПРАВИЛЬНЫЕ ФИГУРЫ И ТЕЛА

«Пифагор преобразовал геометрию, придав ей форму свободной науки, рассматривая ее принципы чисто абстрактным образом и исследуя теоремы с нематериальной, интеллектуальной точки зрения. Именно он нашел теорию иррациональных количеств и конструкцию космических тел». Так оценивал вклад Пифагора в геометрию Прокл, и эта оценка античного философа совершенно справедлива.

В самом деле, в школе Пифагора геометрия оформляется в самостоятельную научную дисциплину. Именно Пифагор и его ученики первыми стали изучать геометрию систематически — как теоретическое учение о свойствах абстрактных геометрических фигур, а не как сборник прикладных рецептов по землемерию. При этом, что самое главное, свойства геометрическхих фигур устанавливались пифагорейцами не путем измерений, а с помощью логических доказательств.

Обладая широчайшей областью практических приложений, геометрия первой из учений пифагорейской μάθημα сбросила пелену «секретности» и стала самой популярной наукой. Впрочем, Ямвлих в «Жизни Пифагора» причины популярности геометрии представлял несколько иначе: «Вот как пифагорейцы объясняют, почему геометрия стала открыто распространяться. Это произошло по вине одного из них, который потерял деньги пифагорейской общины. После этого несчастья община позволила ему зарабатывать деньги при помощи геометрии — и геометрия получила название «Предание Пифагора». Памятуя, что в V в. до н. э. были весьма популярны софисты — странствующие учителя мудрости, вполне возможно, что и пифагорейцы не гнушались пополнять казну преподаванием.

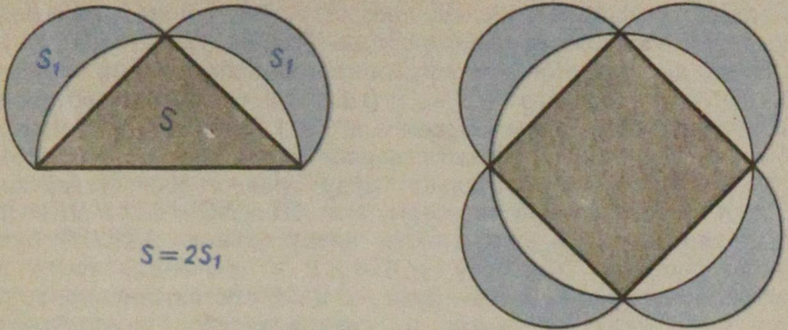
Но каково было содержание «Предания Пифагора» — первого греческого учебника геометрии? К сожалению, мы этого не знаем. Однако сохранились фрагменты из сочинений замечательного греческого математика середины V в. до н. э. Гиппократа с ионийского острова Хиоса[1]. Так вот, в сочинениях Гиппократа Хиосского свойства плоских прямолинейных фигур предполагаются хорошо известными, тогда как свойства круга и хорд подробно изучаются. Поскольку до Гиппократа геометрией занимались только пифагорейцы, то естественно предположить, что все, что Гиппократ считает хорошо известным, было открыто пифагорейцами.

Таким образом, благодаря Гиппократу Хиосскому у нас есть основания считать, что пифагорейцы в целом построили всю планиметрию прямолинейных фигур. Они изучили свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов, трапеций, доказали теорему о сумме углов треугольников, теорему о стороне треугольника, лежащей против тупого угла, теоремы о равновеликости треугольников. Вершиной же планиметрии прямолинейных фигур явилось доказательство знаменитой теоремы Пифагора. Эти результаты пифагорейской геометрии, по-видимому, и составили основу I книги «Начал» Евклида, которая завершается теоремой Пифагора.

Пифагорейцы проявляли повышенный интерес к правильным фигурам и телам. Правильные геометрические формы благодаря их «правильности», т. е. наличию зеркальной или поворотной (а часто и той и другой) симметрий, как нельзя более отвечали всей пифагорейской философии о закономерном, структурно-упорядоченном гармоничном устройстве мироздания. (К этому

---

[1] Гиппократа с острова Хиос не следует путать с Гиппократом с острова Кос (460—377 (356?) до н. э.) — прославленным древнегреческим врачом, отцом медицины, автором знаменитой «Клятвы Гиппократа» — морального кодекса врача. Гиппократ Хиосский, как и Фалес, начал купцом, а закончил известным геометром, автором изящной **теоремы о гиппократовых луночках.** Пытаясь решить одну из трех знаменитых задач древности — задачу о квадратуре круга, Гиппократ нашел три фигуры, ограниченные дугами окружностей, для которых с помощью циркуля и линейки можно построить равновеликие им прямолинейные фигуры. Простейшая из таких конфигураций изображена на рисунке 41, *а*: сумма площадей двух луночек, образованных двумя полукругами на катетах и полукругом на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, равна площади этого треугольника. Эта конфигурация легко обобщается в красивый орнамент (рис. 41, *б*), у которого площадь квадрата равна площади четырех луночек. Идея квадрируемости выступает здесь со всей ясностью и красотой. Однако это — квадратура луночек, а не квадратура круга.



а) б)

Рис. 41.

вопросу мы еще вернемся в пп. 2.2 и 4.3.) Геометрические формы, в особенности правильные, наиболее выразительно выявляли число и как нельзя более подходили для «извлечения числа из вещей». Пифагорейцы раскладывали одни геометрические формы на другие (чаще на правильные или «несущие» какие-либо «священные» числа) и в этом видели постижение внутренней взаимосвязи явлений.

Вот почему пифагорейцы придавали особое значение доказанной ими теореме о том, что плоскость можно сплошь (т. е. без «дырок» и наложений) покрыть лишь тремя правильными многоугольниками: треугольниками, квадратами и шестиугольниками (рис. 42). Доказательство этой теоремы достаточно прозрачно, и мы его оставляем читателю. Не представляет труда и построение этих правильных фигур, а также фигур, получаемых из них удвоением сторон.

Но вот построение правильного пятиугольника уже не столь очевидно. Мы не знаем, как строили правильный пятиугольник пифагорейцы. Но известно, что пятиконечную звезду — свой главный символ и опознавательный знак — они складывали из трех равнобедренных треугольников. А это явно перекликается с методом построения правильного пятиугольника, описанным

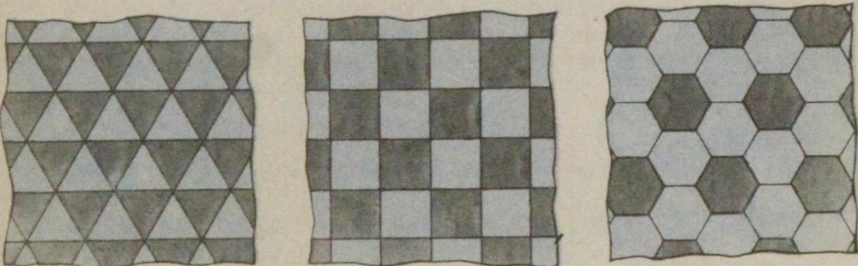


Рис. 42.

у Евклида («Начала», кн. IV, пред. 11). Так что метод Евклида, возможно, восходит к пифагорейцам. Рассмотрим его.

Пусть дан вписанный в окружность равнобедренный треугольник ACD, у которого $\angle C = \angle D = 2\angle A$. (Способ построения такого треугольника мы укажем в п. 2.2.) Проведем биссектрисы CE и DB углов C и D соответственно. Тогда углы 1—5 (рис. 43) будут равны, а следовательно, будут равны соответствующие им дуги и стягивающие их хорды, т. е. $AB = BC = CD = DE = EA$. Итак, вписанный в окружность пятиугольник $ABCDE$ будет равносторонним. Поскольку $\angle 6 = \angle 2$ и $\angle 7 = \angle 5$ как углы, опирающиеся на одинаковые дуги AE и AB соответственно, то все углы 1—7 будут равными и, следовательно, каждый угол пятиугольника $ABCDE$ будет составлен из трех равных углов, т. е. $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 3\angle 1$. Таким образом, построенный пятиугольник является равносторонним и равноугольным, т. е. правильным.

Со временем древнегреческими математиками был найден более простой способ построения правильного пятиугольника. Он описан в другом выдающемся сочинении античности — «Альмагесте» Птолемея (ок. 150), которое, подобно «Началам» Евклида в геометрии, является энциклопедией античных знаний по астрономии. Птолемей делит радиус окружности OA пополам (точка C) и радиусом CD описывает окружность до пересечения с диаметром AB в точке E (рис. 44). Тогда ED и есть сторона правильного пятиугольника. (После прочтения п. 2.2 читатель без труда докажет это самостоятельно.)

Еще через полтора тысячелетия, в 1525 г., Альбрехт Дюрер (1471—1528), художник и ученый, один из титанов эпохи Возрождения, в трактате «Руководство к измерению при помощи циркуля и линейки» указал приближенный способ построения правильного пятиугольника по заданной стороне AB с помощью «заржавевшего» циркуля, т. е. одним раствором циркуля. Способ

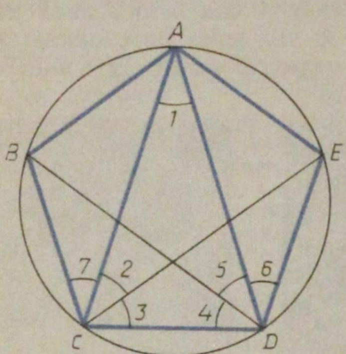


Рис. 43.

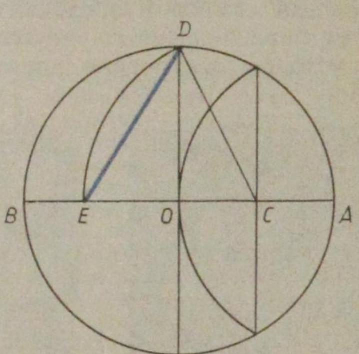


Рис. 44.

Дюрера понятен из рисунка 45, где цифрами последовательно обозначены положения ножки циркуля. Метод Дюрера отличается большой точностью (углы 1 и 2 равны не 108°, а 108°21′58″, углы 4 и 5 чуть больше 107°, а угол C чуть больше 109°), так что его погрешности на глаз совершенно не воспринимаются. Сам Дюрер ни словом не обмолвился о приближенном характере своих построений, возможно, считая их точными. И тем не менее метод Дюрера является приближенным. (Попробуйте доказать это.)

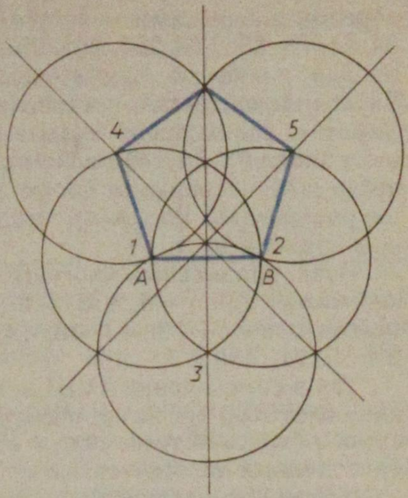


Рис. 45.

А как построить с помощью циркуля и линейки следующую правильную фигуру — семиугольник? Эта задача оказалась непосильной не только древним пифагорейцам, но оставалась неразрешенной более двух тысячелетий! Лишь в 1796 г. 19-летний немецкий юноша Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), прозванный позднее королем математиков, решил ее. Гаусс показал, что задача построения с помощью циркуля и линейки правильного n-угольника, равносильная задаче деления окружности на n равных частей, связана с изучением корней уравнения $x^n=1$. Далее Гаусс доказал, что правильный N-угольник может быть построен циркулем и линейкой в том и только том случае, когда N — простое число вида

$$N_k=2^{2^k}+1 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (2.1.1)$$

Простые числа вида (2.1.1) называются числами Ферма, и до сих пор известно лишь пять таких чисел: $k=0$, $N_0=3$; $k=1$, $N_1=5$; $k=2$, $N_k=17$; $k=3$, $N_3=257$; $k=4$, $N_4=65\,537$.

Этот результат Гаусса обобщается на случай, когда число сторон многоугольника n является произведением чисел вида (2.1.1). Учитывая также возможность удвоения n, сформулируем **теорему Гаусса:** правильный многоугольник можно построить с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда число его сторон имеет вид

$$n=N_0^{\delta_0}\cdot N_1^{\delta_1}\cdot\ldots\cdot N_k^{\delta_k}\cdot 2^m (\delta_i=0 \text{ или } 1;\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (2.1.2)$$

Фактически в (2.1.2) $k\leqslant 4$, так как других чисел Ферма пока неизвестно.

Легко видеть, что все многоугольники, которые умели строить древние греки, а именно те, у которых $n=3\cdot 2^m$, $4\cdot 2^m (=2^{m+2})$, $5\cdot 2^m$, $3\cdot 5\cdot 2^m$ ($m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$), содержатся в (2.1.2). Таким образом, к античным многоугольникам добавились новые с $n=17$, 34, 51, 68, 85, 126, 252, 255, 257, ..., причем принципиально новыми из них являются 17-угольник, 257-угольник и 65 537-угольник. Гаусс нашел метод построения первых двух многоугольников. Заметим, что описание метода построения правильного 257-угольника заняло у Гаусса около полусотни страниц. Гаусс всю жизнь чрезвычайно гордился своим юношеским открытием и завещал выгравировать на своем надгробии правильный 17-угольник, вписанный в круг.

Итак, правильный многоугольник построить циркулем и линейкой **можно** при $n=3$, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 32, 34, ...; **нельзя** при $n=7$, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, ...

Так в самом конце XVIII в. была решена проблема, поставленная более 2000 лет назад пифагорейцами. Ее решение помимо гения самого Гаусса потребовало и всей суммы математических знаний, накопленных человечеством за два тысячелетия. Нам же остается лишь вновь в восхищении спросить себя: откуда у пифагорейцев была столь безупречная интуиция на «вечные» математические проблемы?

Перейдем теперь к правильным многогранникам. Их всего пять, и Прокл помимо замечательных открытий в планиметрии приписывает Пифагору построение всех пяти правильных тел. Однако сегодня историки математики предпочитают верить не Проклу, а обнаруженной схолии (σχόλιον — толкование, объяснение) в XIII книге «Начал» Евклида, где говорится, что Пифагор знал лишь три правильных тела — тетраэдр, гексаэдр (куб) и додекаэдр, а позднее Теэтет открыл и два оставшихся — октаэдр и икосаэдр. И в том и в другом случае эти античные свидетельства говорят нам об интересе пифагорейцев к правильным телам.

По-видимому, сама природа подсказала пифагорейцам форму правильных тел: кристаллы поваренной соли имеют форму куба, кристаллы квасцов — октаэдра, а кристаллы пирита — додекаэдра. Последний, как показывают раскопки в Италии, был любимой игрушкой этрусских детей во времена Пифагора.

Название правильному многограннику дается по числу его граней (например, тетраэдр — τετρά-εδρον — τετράς — четыре + εσρα – область, часть тела, грань — четырехгранник). Правильные многогранники показаны на рисунке 46, а их геометрические характеристики собраны в таблице, где *m* обозначает число граней при вершине.

Пифагорейцы заметили, что в кубе число вершин (8) есть среднее гармоническое числа граней (6) и числа ребер (12) и поэтому называли куб гармоническим телом. Особое предназначение куба виделось также и в том, что он единственный из правильных тел сплошь заполняет пространство.

Ко времени Евклида было замечено, что куб и октаэдр, а также додекаэдр и икосаэдр **дуальны** (двойственны), т. е. число граней

Правильный многогранник	Число			Геометрия грани	m
	граней, M	вершин, L	ребер, N		
Тетраэдр	4 (тетра)	4	6	△	3
Октаэдр	8 (окто)	6	12	△	4
Икосаэдр	20 (икоси)	12	30	△	5
Гексаэдр	6 (гекса)	8	12	□	3
Додекаэдр	12 (додека)	20	30	⬠	3

одного тела равно числу вершин другого и наоборот. Тогда одно тело может быть получено из другого, если центры тяжести граней одного принять за вершины другого или наоборот (рис. 46). Тетраэдр дуален сам себе.

Однако важнейшее свойство выпуклых многогранников было установлено лишь в середине XVIII в. **теоремой Эйлера:** во всяком выпуклом многограннике число вершин (L) плюс число граней (M) минус число ребер (N) есть величина постоянная, равная двум:

$$L+M-N=2. \tag{2.1.3}$$

К сожалению, мы не можем подробнее остановиться на массе любопытных геометрических свойств и физических приложений правильных тел — они выходят далеко за рамки нашей книги. Заметим только, что строгое построение всех правильных тел было дано в XIII книге «Начал» Евклида, которая является венцом всего великого сочинения[1]. Как построение правильного многоугольника начинается с окружности, точно так же и сфера является основой для построения правильного многогранника. Как в правильном многоугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают, так и в правильном многограннике совпадают центры вписанной и описанной сфер. Последнее свойство

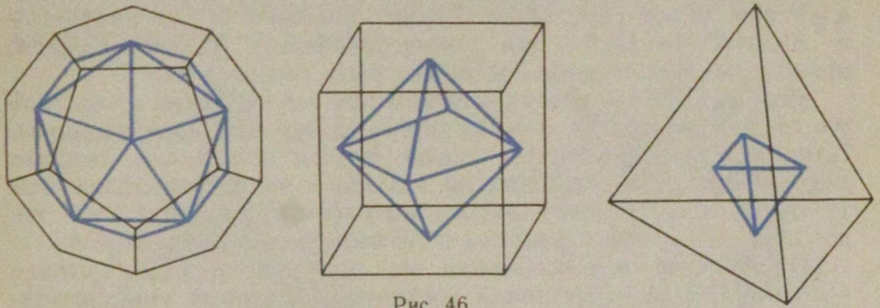


Рис. 46.

---

[1] Прокл отмечал, что сам Евклид конечной целью своих «Начал» ставил построение правильных тел. Это обстоятельство дало повод английскому ученому У. Д'Арси Томпсону как-то шутливо заявить, что «Начала» Евклида есть просто сочинение о пяти правильных телах, которое, однако, несколько затянулось, ибо автор хотел предварительно сообщить читателю все необходимые сведения.

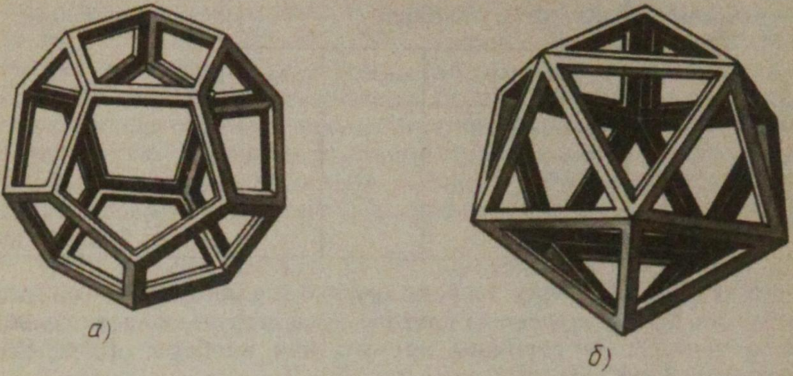


Рис. 47. Рисунки деревянных моделей додекаэдра и икосаэдра, выполненные Леонардо да Винчи для книги его друга Луки Пачоли «О божественной пропорции». Венеция. 1509 г.

легло в основу кеплеровской модели Вселенной, которую мы рассмотрим в п. 4.3.

И все-таки самым интригующим свойством правильных тел является то, что их существует всего пять. Не случайно доказательством этого факта завершалась последняя XIII книга «Начал» Евклида[1]. В самом деле, сумма плоских углов S при вершине выпуклого многогранника должна быть строго меньше 360°, а число граней при вершине $m \geqslant 3$. Значит, гранями правильных тел могут быть только три правильных многоугольника: треугольник, квадрат и пятиугольник, ибо уже для шестиугольника $S=120^\circ \cdot 3=360^\circ$. Из правильных треугольников можно составить три правильных тела: $m=3$ — тетраэдр, $m=4$ — октаэдр и $m=5$ — икосаэдр (при $m=6$ $S=60^\circ \cdot 6=360^\circ$). Из квадратов и правильных пятиугольников — только по одному (куб и додекаэдр) при $m=3$ (при $m=4$ $S=90^\circ \cdot 4=360^\circ$) — для квадратов и $S=108^\circ \cdot 4=432^\circ$ — для пятиугольников). Таким образом, правильных многогранников может быть только пять.

Этот факт не мог оставить равнодушными склонных к числовой мистике пифагорейцев, а вслед за ними Платона и неоплатоников. Платон развил знаменитое учение о пяти «стихиях» — основах мироздания, атомы которых он мыслил в виде правильных тел. (Подробнее это учение Платона мы рассмотрим в п. 4.3.) С тех пор правильные многогранники часто называют телами Платона.

Правильные многогранники на протяжении всей истории человечества не переставали восхищать пытливые умы симметрией, мудростью и совершенством своих форм. Леонардо да Винчи любил мастерить каркасы правильных тел и преподносить их в дар

---

[1] Позднее к «Началам» стали присоединять еще две книги: XIV — написанную во II в. до н. э. александрийским математиком Гипсиклом и XV — составленную в VI в. в школе Исидора Милетского.

знатным особам, возможно, пытаясь таким образом приобщить сильных мира сего к философским размышлениям о красоте вечных истин (рис. 47).

Но на пяти правильных телах история многогранников не остановилась. Вслед за правильными телами Платона были открыты **полуправильные тела Архимеда**, грани которых составлены из правильных равных многоугольников нескольких видов, причем в каждой вершине сходится одно и то же число одинаковых граней в одинаковом порядке и многогранные углы при вершинах равны. Заметим, что тела Архимеда могут быть получены из соответствующих тел Платона снятием равных фасок. Тел Архимеда всего 13. Любопытно, что во второй половине XX в. было обнаружено еще одно тело Архимеда — **псевдоромбокубооктаэдр**, которое не может быть получено путем однотипных усечений тела Платона и поэтому в течение 2000 лет оставалось незамеченным.

В XVII в. Кеплером и в XVIII в. Пуансо были найдены различные формы звездчатых невыпуклых многогранников, получаемых продолжением граней правильного или полуправильного тела до самопересечения. Простейшее тело такого типа — «звезда Кеплера» — было обнаружено Кеплером в 1619 г. и получается продолжением граней октаэдра (рис. 48). Впрочем, это же тело можно представить и как пересечение двух тетраэдров. Звездчатые многогранники поражают воображение красотой и причудливым разнообразием своих форм (рис. 49). Тем, кого вдохновит эта форма, мы рекомендуем книгу М. Венниджера «Модели многогранников» (М.: Мир, 1974), познакомившись с которой можно на свой вкус выбрать и сделать самый экзотический звездчатый многогранник.

И все-таки знакомство с многогранниками мы советуем начать с «Начал» Евклида, ибо, как сказал Альберт Эйнштейн, «Тот не рожден для теоретических исследований, кто в молодости не восхищался этим творением».

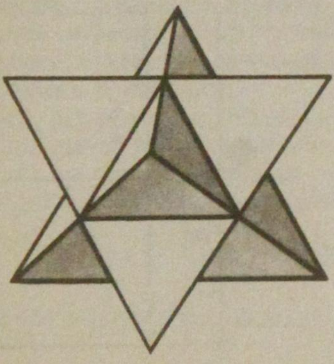


Рис. 48.

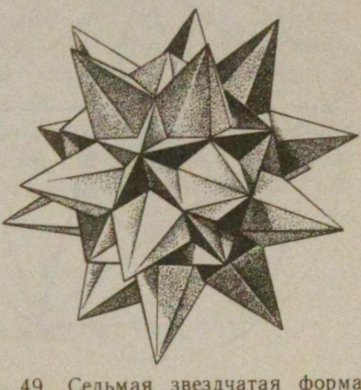


Рис. 49. Седьмая звездчатая форма тела Архимеда — икосододекаэдр.

2.2. ПЕНТАГРАММА

Почему именно пентаграмму пифагорейцы выбрали в качестве символа приветствия и тайного опознавательного знака? Возможно, знакомство с математическими свойствами пентаграммы поможет нам ответить на этот вопрос.

Пусть окружность разделена на пять равных частей. Соединяя последовательно точки деления, получим правильный пятиугольник, диагонали которого образуют пятиконечную звезду, или звездчатый пятиугольник. Это и есть **пентаграмма** (πεντάγραμμον, πεντε — пять+γράμμα — черта, линия). Легко видеть, что внутри пятиконечной звезды вновь образуется правильный пятиугольник, диагонали которого дают новую звезду, и т. д. (рис. 50).

Рассмотрим треугольник ABC. Он равнобедренный, так как хорды AB и AC стягивают равные дуги. Далее, $\angle A=36°$, $\angle B=\angle C=72°$ как вписанные в окружность углы, опирающиеся на дуги в 72° (=360°: 5) и в 144° (=72°·2) соответственно. Но $\angle BCD$ равен 36° как опирающийся на дугу FB в 72°, и, следовательно, CD является биссектрисой в $\triangle ABC$ и отсекает от него $\triangle BCD \backsim \triangle ABC$. Из подобия этих треугольников имеем $AB:BC=BC:DB$. Учитывая, что $BC=CD=AD$ (так как в $\triangle ADC$ $\angle A=\angle C$ и, следовательно, $CD=AD$), приходим к пропорции

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{BD}, \tag{2.2.1}$$

т. е. данный отрезок AB так относится к его большей части AD, как большая часть относится к меньшей AB. Иначе говоря, **точка *D* делит отрезок *AB* в золотой пропорции** (см. (1.4.7)).

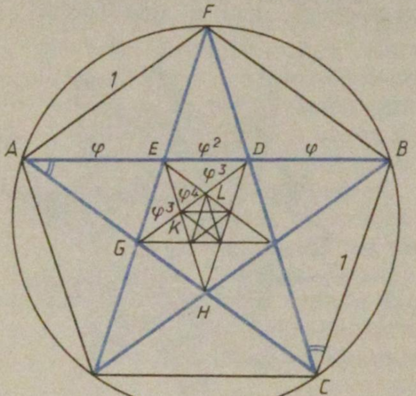


Рис. 50.

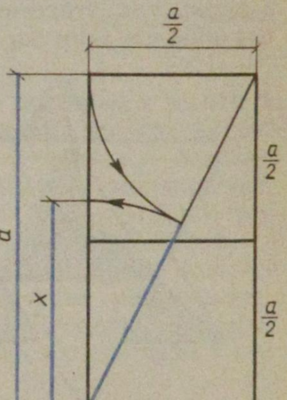


Рис. 51.

Итак, равнобедренный треугольник, у которого углы при основании (72°) вдвое больше угла при вершине (36°), обладает уникальным свойством: **биссектриса угла при основании делит противоположную сторону в золотом сечении.** За свое замечательное свойство этот треугольник был прозван средневековыми математиками **возвышенным.**

Именно золотое свойство возвышенного треугольника и использовал Евклид для его построения, а значит, и для построения правильного пятиугольника (см. с. 148). В самом деле, если данный отрезок AB точкой D разделить в золотой пропорции, а затем циркулем из точки B сделать засечку радиусом AD, а из точки A — радиусом AB, то точка пересечения C и будет вершиной возвышенного треугольника ABC. Далее остается лишь описать окружность около ABC и провести биссектрисы углов B и C до пересечения с окружностью. Окружность разделена на пять равных частей, и, значит, правильный пятиугольник готов.

Остается показать, как во времена Евклида делили отрезок в золотой пропорции. Мы знаем (с. 138), что величина x, делящая отрезок a в золотом сечении, удовлетворяет уравнению

$$x^2+ax-a^2=0,$$

положительный корень которого можно представить в виде

$$x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}. \qquad (2.2.2)$$

Греки это решение находили геометрически. В самом деле, подкоренное выражение в (2.2.2), согласно теореме Пифагора, можно рассматривать как гипотенузу треугольника с катетами a и $\frac{a}{2}$ (или как диагональ двойного квадрата со стороной $\frac{a}{2}$). Отнимая с помощью циркуля от гипотенузы отрезок $\frac{a}{2}$, мы и найдем искомую величину x. Остается только (опять-таки с помощью циркуля) перенести отрезок x на отрезок a (рис. 51). Золотое сечение отрезка a построено. Заметим, что способ построения золотого сечения с помощью двойного квадрата был известен и древним египтянам.

Но вернемся к пентаграмме. Принимая сторону исходного правильного пятиугольника за единицу $AF=AD=1$, полагая $DB=x$ и, следовательно, $AB=1+x$ и подставляя все это в (2.2.1), приходим к уравнению

$$\frac{1+x}{1}=\frac{1}{x}\Rightarrow x^2+x-1=0,$$

которое имеет единственный положительный корень:

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\varphi.$$

Так как

$$1-\varphi=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

и

$$\varphi^2=(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2=\frac{5-2\sqrt{5}+1}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

то

$$1-\varphi=\varphi^2,$$

и мы окончательно находим

$$AD=DC=CB=AF=...=1;$$
$$x=DB=AF=EF=...=\varphi;$$
$$ED=EG=GH=...=1-\varphi=\varphi^2.$$

Повторяя наши рассуждения для $\triangle DGH$, в котором $DG=\varphi$, легко видеть, что стороны внутренней звезды будут равны φ^3, а стороны ее внутреннего правильного пятиугольника — φ^4 и т. д. (см. рис. 50).

Таким образом, последовательность правильных пятиугольников и вписанных в них звезд образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\varphi=0{,}618...<1$, или ряд золотого сечения:

$$∺\ 1,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \varphi^3,\ \varphi^4,\ \varphi^5,\ ...,$$

причем стороны правильных пятиугольников образуют ряд четных степеней:

$$∺\ 1,\ \varphi^2,\ \varphi^4,\ ...,$$

а стороны звезд — ряд нечетных степеней:

$$∺\ \varphi,\ \varphi^3,\ \varphi^5,\ ...$$

Наконец, если продолжить стороны правильного пятиугольника до пересечения, то получим звезду, сторона y которой находится со стороной исходного пятиугольника $AF=1$ в золотой пропорции, т. е.

$$\frac{1}{y}=\varphi\Rightarrow y=\frac{1}{\varphi}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\Phi=1{,}618...>1.$$

Итак, данную пентанграмму можно неограниченно продолжать как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения. При этом стороны правильных пятиугольников и вписанных в них звезд образуют ряд золотого сечения общего вида

$$...,\ \Phi^{-3},\ \Phi^{-2},\ \Phi^{-1},\ \Phi^0,\ \Phi,\ \Phi^2,\ \Phi^3,\ ...,$$

или (2.2.3)

$$...,\ \varphi^3,\ \varphi^2,\ \varphi,\ 1,\ \Phi,\ \Phi^2,\ \Phi^3,\ ...$$

Из множества геометрических прогрессий ряд (2.2.3) отличается замечательным свойством, называемым **аддитивным свойством:** сумма двух соседних членов ряда равна следующему члену ряда:

$$a_{n-2}+a_{n-1}=a_n, \text{ или } \Phi^{n-2}+\Phi^{n-1}=\Phi^n \qquad (2.2.4)$$

В самом деле, поскольку $1-\varphi=\varphi^2$, то

$$1+\Phi=1+\frac{1}{\varphi}=\frac{1+\varphi}{\varphi}=\frac{1+\varphi}{1-\varphi^2}=\frac{1}{1-\varphi}=\frac{1}{\varphi^2}=\Phi^2$$

и, значит,

$$a_{n-2}+a_{n-1}=\Phi^{n-2}+\Phi^{n-1}=\Phi^{n-2}(1+\Phi)=\Phi^{n-2}\cdot\Phi^2=\Phi^n=a_n.$$

Аддитивное свойство ряда золотого сечения прекрасно видно на пентаграмме (рис. 50): $AD=AE+ED$ $(1=\varphi+\varphi^2)$, $DG=DK+KG\,(\varphi=\varphi^2+\varphi^3)$, $DK=DL+LK\,(\varphi^2=\varphi^3+\varphi^4)$ и т. д.

Именно благодаря аддитивному свойству ряд золотого сечения играет важнейшую роль в архитектуре, в том числе и в архитектуре Древней Греции. Архитектурное произведение (как, впрочем, и любое произведение искусства) смотрится как единое целое, **гармонично**, когда все его части находятся в непрерывной пропорциональной зависимости (это знаменитый принцип гармонии, сформулированный еще Гераклитом: «Из всего — единое и из единого — все»):

$$\frac{a}{a_1}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\ldots$$

Но вместе с тем эти части должны образовывать целое, т. е.

$$\begin{aligned} a_1+a_2&=a, \\ a_2+a_3&=a_1, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Одновременно выполнение этих двух условий может обеспечить только ряд золотого сечения.

Итак, пентаграмма обладает массой интереснейших математических свойств:

1. Лучи пентаграммы делят друг друга в золотой пропорции:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{DB}=\Phi.$$

2. Сторона правильного пятиугольника, сторона вписанной в него пентаграммы и сторона образованного пентаграммой внутреннего пятиугольника также относятся в золотой пропорции:

$$\frac{AF}{AE}=\frac{AE}{ED}=\Phi.$$

3. Лучи пентаграммы, выходящие из одной точки, образуют возвышенный треугольник.

4. Последовательность сторон правильных пятиугольников и вписанных в них пентаграмм образует ряд золотого сечения:

$$\div\div\; 1,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \varphi^3,\ \varphi^4,\ \ldots, \qquad (2.2.5)$$

который является бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем $\varphi < 1$ и обладает аддитивным свойством:

$$\varphi^n = \varphi^{n+1} + \varphi^{n+2} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

5. Отрезки пентаграммы $AB = \Phi$, $AD = 1$, $AE = \varphi$ и $ED = \varphi^2$ связаны между собой всеми видами средних (1.4.6), известных пифагорейцам, а именно

$$AD = \frac{AB + ED}{2} \quad \text{— арифметическое среднее;}$$

$$\left.\begin{aligned} AD &= \sqrt{AB \cdot AE} \\ AE &= \sqrt{AD \cdot ED} \end{aligned}\right\} \text{— геометрическое среднее;}$$

$$AE = \frac{2AB \cdot ED}{AB + ED} \quad \text{— гармоническое среднее.}$$

В общем случае для четырех последовательных членов ряда (2.2.5) φ^n, φ^{n+1}, φ^{n+2}, φ^{n+3} нетрудно доказать соотношения

$$\varphi^{n+1} = \frac{\varphi^n + \varphi^{n+3}}{2}; \qquad \varphi^{n+2} = \sqrt{\varphi^{n+1} \cdot \varphi^{n+3}};$$

$$\varphi^{n+1} = \sqrt{\varphi^n \cdot \varphi^{n+2}}; \qquad \varphi^{n+2} = \frac{2\varphi^n \varphi^{n+3}}{\varphi^n + \varphi^{n+3}}.$$

Подведем итог. Мы видим, что пентаграмма буквально соткана из золотой пропорции и всех видов средних. Можно только догадываться, в какой священный восторг приводило пифагорейцев столь редкое обилие математических свойств в одной геометрической фигуре! К математике присоединялась и числовая мистика: число 5=2+3 было для пифагорейцев числом любви как сумма первого женского (2) и первого мужского (3) чисел. Теперь становится понятным, почему именно пентаграмма была выбрана пифагорейцами в качестве символа жизни и здоровья.

Столь необычайно пропорциональное строение пентаграммы, красота ее внутреннего математического содержания являются основой и красоты ее внешней формы. Пентаграмма пропорциональна и, значит, красива. Не случайно и сегодня пятиконечная звезда реет на флагах едва ли не половины стран мира.

Но первыми, кто обратил пятиконечную звезду в символ, были опять-таки пифагорейцы.

2.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В ГЕОМЕТРИИ

Важнейшей научной заслугой Пифагора считается систематическое введение доказательства в математику, и прежде всего в геометрию.

Строго говоря, только с этого момента математика и начинает существовать как наука, а не как собрание древнеегипетских и древневавилонских практических рецептов. С рождением же математики зарождается и наука вообще, ибо «ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства» (Леонардо да Винчи).

Что же такое математическое доказательство? Допустим, на ряде примеров мы обнаружили некую математическую закономерность. Значит ли это, что она справедлива всегда? Отнюдь. Таких примеров в математике предостаточно. Скажем, известные нам числа Ферма $N_k = 2^{2^k} + 1$. Они являются простыми при $k=0$, 1, 2, 3, 4. Одно время казалось, что все числа Ферма являются простыми, пока Эйлер не обнаружил у числа N_5 делитель. Но следует ли отсюда, что все числа Ферма при $k \geqslant 5$ являются составными? Тоже нет. Из того, что мы не знаем простых чисел Ферма при $k \geqslant 5$, еще не следует, что их не существует вообще. Вопрос о свойствах чисел Ферма при $k \geqslant 5$ просто не решен, не доказан. Но ясно, что доказывать его нужно для любого k, т. е. для бесконечного множества значений k, ибо в противном случае у нас не будет уверенности в том, что следующее значение не даст числа с противоположными свойствами.

Другой пример. Пусть мы хотим установить, чему равна сумма углов треугольника. Измерив десяток-другой треугольников, мы легко обнаружим, что эта сумма колеблется где-то около 180°, хотя вряд ли мы хоть раз получим точно 180° или два одинаковых результата. Эти разночтения вызваны как погрешностью наших измерений, так и погрешностью самих измеряемых объектов, которые не являются идеально прямолинейными фигурами. Делая скидку на эти ошибки, мы можем предположить, что сумма углов треугольника все-таки равна 180°, хотя никакой уверенности в этом у нас быть не может, ибо треугольников существует опять-таки бесконечное множество.

Так вот, заслуга Пифагора и состояла в том, что он, по-видимому, первым пришел к следующей мысли: в геометрии, во-первых, должны рассматриваться абстрактные идеальные объекты (**точки** — «то, что не имеет частей», **линии** — «длина без ширины», **поверхности** — «то, что имеет только длину и ширину» и т. д.) и, во-вторых, свойства этих идеальных объектов должны устанавливаться не с помощью измерений на конечном числе объектов, а с помощью рассуждений, справедливых для бесконечного числа объектов. Эта цепочка рассуждений, которая с помощью законов логики сводит неочевидные утверждения к известным или очевидным истинам, и есть **математическое доказательство.**

Но на этом пути математика подстерегает другая опасность. Избежав рассмотрения бесконечного множества объектов, у нас нет никакой уверенности в том, что цепочка рассуждений, приводящая неочевидное утверждение A к очевидной истине, сама не окажется бесконечной:

$$A \Leftarrow B \Leftarrow C \Leftarrow \ldots \Leftarrow Z \Leftarrow \cdots$$

Правда, эту бесконечность можно легко устранить, оборвав на каком-то этапе цепочку рассуждений и приняв последнее утверждение *Z* за очевидную истину. Однако эта легкость обманчива, ибо здесь возникает новая опасность: в каждой цепочке рассуждений последняя «очевидная» истина, на которой мы оборвем цепочку, может быть своя, и поскольку мы вряд ли захотим ограничить себя конечным числом доказываемых истин, то и число «последних» предложений может оказаться бесконечным.

И вот следующая гениальная догадка Пифагора (или его учеников) состояла в том, что в геометрии можно выбрать именно конечное число первоначальных истин, из которых с помощью логических правил выводимо неограниченное число геометрических предложений. Эти отправные недоказуемые («очевидные») положения были названы **аксиомами** (ἀξίωμα — ценность, основное положение).

Так в геометрии впервые возник **аксиоматический метод** построения науки. Начало этому методу было положено на рубеже VI — V вв. до н. э. в школе Пифагора, а уже в III в. до н. э. в «Началах» Евклида грандиозная программа аксиоматизации геометрии была полностью завершена. Число первоначальных, принимаемых без доказательства утверждений — **аксиом** — было сведено к минимуму, а все остальные геометрические истины — **теоремы** — получались из них цепочкой логических рассуждений — **доказательств.** Так родилась триада **аксиома — доказательство — теорема**, которая и составила ядро нового метода.

Выработка системы аксиом — это долгий и кропотливый процесс накопления первоначальных факторов, их проверки, перепроверки, систематизации, уточнения и исключения лишних либо, наоборот, обнаружения недостающих. В этом процессе и рождается система аксиом — минимальная совокупность первоначальных утверждений, необходимая и достаточная для доказательства (или опровержения) любого нового утверждения.

Итак, аксиоматическое построение геометрии или любой другой науки (например, механики) заключается в следующем:

1. Перечисляются первоначальные **неопределимые понятия**. (Эти изначальные понятия можно лишь описать, но не определить. Так, определение 1 Евклида: «Точка есть то, что не имеет частей» — есть фактически лишь описание неопределимого понятия точки.)

2. Составляется **система аксиом,** описывающих свойства этих неопределимых понятий и взаимоотношений между ними.

3. С помощью **определений** вводятся новые понятия, сводимые к неопределимым.

4. С помощью **теорем** доказываются новые утверждения, вытекающие из системы аксиом.

К системе аксиом предъявляются три важнейших требования: непротиворечивость, полнота и независимость. **Непротиворечивость** состоит в том, что из данной системы аксиом нельзя получить две теоремы, противоречащие друг другу. **Полнота** обеспечивает логическое следствие из системы аксиом всех верных утверждений. Наконец, **независимость** означает, что каждая аксиома не является логическим следствием, т. е. «независима» от остальных аксиом данной системы.

Одновременно с разработкой аксиоматического метода развивались и методы перехода от одних истинных утверждений к другим, т. е. методы построения цепочки рассуждений, именуемой доказательством. Одним из таких приемов был **метод приведения к противоречию,** которым пифагорейцы доказали несоизмеримость стороны и диагонали квадрата и который в V в. до н. э. становится необычайно популярным.

В это же время южноиталийский философ Парменид (ок. 540 до н. э.— ?), идейно связанный с пифагорейцами, формулирует **закон исключенного третьего,** состоящий в том, что из двух противоположных утверждений одно и только одно является истинным. В следующем, IV в. до н. э. Аристотель проводит формализацию и каталогизацию правил умозаключений и высказывает утверждение об их конечности. Эта догадка Аристотеля не менее поразительна, чем гипотеза пифагорейцев о конечном числе аксиом геометрии. Так вместе с разработкой аксиоматического метода зарождалась и новая наука о приемлемых способах рассуждений — **логика** (λόγος — слово, суждение).

Но вернемся к задаче о сумме углов треугольника. Предание приписывает первое доказательство этой теоремы Пифагору. К сожалению, доказательство Пифагора не сохранилось, поэтому рассмотрим, как доказывает эту теорему Евклид. Обратим внимание на то, что каждый шаг в евклидовой цепочке доказательств обоснован. Именно так и должно строиться всякое математическое доказательство! Свои теоремы Евклид называет предложениями (предложения мы будем обозначать буквой П, аксиомы — А, определения — О). Мы сохраняем формулировки Евклида, хотя текст доказательств приближаем к современному. Обоснование каждого шага доказательства указано в скобках.

Итак, в книге I «Начал» Евклида мы находим:

П.32. *Во всяком треугольнике по продолжении одной из сторон внешний угол равен двум внутренним и противолежащим и внутренние три угла треугольника вместе равны двум прямым.*

Доказательство. Требуется доказать (рис. 52): $\angle 1+\angle 2=\angle 4$ и $\angle 1+\angle 2+\angle 3=2d$. Через точку C проведем прямую $CE \parallel AB$. Тогда $\angle 1=\angle 1'$ и $\angle 2=\angle 2'$ (П.29), откуда $\angle 4=\angle 1'+\angle 2'=\angle 1+\angle 2$ (О.8). Итак, $\angle 1+\angle 2=\angle 4$. Тогда $\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 4+\angle 3$ (А.2). Но $\angle 4+\angle 3=2d$ (П.13), тогда $\angle 1+\angle 2+\angle 3=2d$ (А.1). Что и требовалось доказать.

Как видим, при доказательстве П.32 Евклид использует П.29, П.13, А.2 и О.8.

П.29. *Прямая, падающая на параллельные прямые, образует*

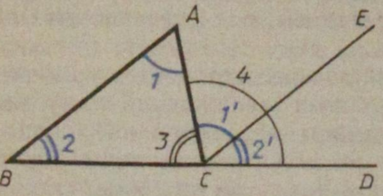


Рис. 52.

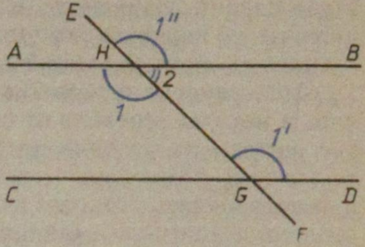


Рис. 53.

накрест лежащие углы, равные между собой, и внешний угол, равный внутреннему, противолежащему с той же стороны, и внутренние односторонние углы, вместе равные двум прямым.

Доказательство. Требуется доказать (рис. 53): $\angle 1=\angle 1'$, $\angle 1''=\angle 1'$ и $\angle 2+\angle 1'=2d$. Доказательство проводим методом от противного. Пусть $\angle 1\neq\angle 1'$. Положим для определенности $\angle 1>\angle 1'$, тогда $\angle 1+\angle 2>\angle 1'+\angle 2$ (А.2). Но $\angle 1+\angle 2=2d$ (П.13), и, следовательно, $\angle 1'+\angle 2<2d$. Тогда по 5-му постулату[1] прямые AB и CD пересекаются, а по условию они параллельны. Получили противоречие. (Случай $\angle 1<\angle 1'$ доказывается аналогично.) Итак, $\angle 1=\angle 1'$. Но $\angle 1=\angle 1''$ (П.15), и, значит, $\angle 1''=\angle 1'$ (А.1). Тогда $\angle 1''+\angle 2=\angle 1'+\angle 2$ (А.2). Но $\angle 1''+\angle 2=2d$ (П.13), следовательно, $\angle 2+\angle 1'=2d$. Что и требовалось доказать.

В этом доказательстве использованы П.15, П.13, А.1, А.2 и постулат 5.

П.15. *Если две прямые пересекаются, то образуют углы через вершину[2], равные между собой.*

Доказательство. Требуется доказать (рис. 54): $\angle 1=\angle 1'$ и $\angle 2=\angle 2'$; $\angle 1+\angle 2'=2d$ (П.13). Аналогично $\angle 2'+\angle 1'=2d$ (П.13). Тогда $\angle 1+\angle 2'=\angle 2'+\angle 1'$ (А.1), откуда $\angle 1=\angle 1'$ (А.3). Аналогично доказывается, что $\angle 2=\angle 2'$. Доказательство завершено.

Здесь использованы П.13, А.1 и А.3.

П.13. *Если прямая, восставленная к прямой, образует углы, то она будет образовывать или два прямых, или вместе равные двум прямым.*

Доказательство. Требуется доказать (рис. 55): $\angle 1=\angle 2=d$ или $\angle 1+\angle 2=2d$. Если $\angle 1=\angle 2$, то $\angle 1=\angle 2=d$ (О.10). Если это не так, то восставим в точке B перпендикуляр $BE\perp CD$. Тогда $\angle 1'=\angle 2'=d$ (О.10). Но $\angle 1'=\angle 1+\angle 3$ (О.8), тогда $\angle 1'+\angle 2'=\angle 1+\angle 3+\angle 2'$ (А.2). Но $\angle 2=\angle 2'+\angle 3$ (О.8), тогда $\angle 2+\angle 1=\angle 2'+\angle 3+$

---

[1] Постулатами (от лат. *postulatum* — требуемое) Евклид называет группу из 5 аксиом.

[2] Вертикальные углы.

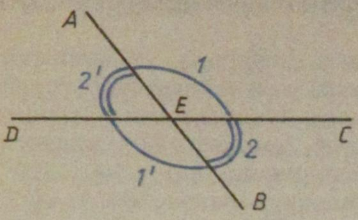


Рис. 54.

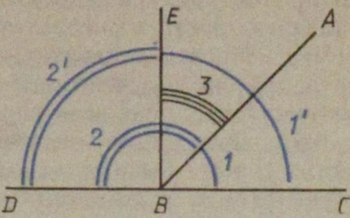


Рис. 55.

$+\angle 1$ (А.2). Следовательно, $\angle 1' + \angle 2' = \angle 1 + \angle 2$ (А.1). Но $\angle 1' + \angle 2' = 2d$ (О.10), откуда $\angle \mathbf{1} + \angle \mathbf{2} = \mathbf{2d}$ (А.1). Что и требовалось доказать.

В последнем доказательстве использованы только аксиомы и определения, т. е. цепочка доказательств здесь обрывается. Нам остается лишь перечислить использованные определения, постулаты и аксиомы.

О.8. Плоский же угол есть наклонение друг к другу двух линий, в плоскости встречающихся друг с другом, но не расположенных по одной прямой.

О.10. Когда же прямая, восставленная к другой прямой, образует рядом углы, равные между собой, то каждый из равных углов есть прямой, а восставленная прямая называется перпендикуляром к той, на которой она восставлена.

Постулат 5. И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых.

А.1. Равные одному и тому же равны и между собой.

А.2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

А.3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

Итак, доказательство теоремы о сумме углов треугольника проводится следующей цепочкой утверждений:

П.32 $\Leftarrow$ П.29 $\Leftarrow$ П.15 $\Leftarrow$ П.13 $\Leftarrow$ {О.8, О.10, постулат 5, А.1, А.2, А.3} (2.3.1)

Эту цепочку можно протянуть через все XIII книг Евклидовых «Начал» вплоть до последнего положения последней XIII книги — предложения о существовании только пяти правильных многогранников (см. с. 152)!

Логическая безупречность доказательств Евклида потрясает! Трудно осознать, что столь безукоризненная отточенность математической мысли была достигнута в III в. до н.э.! Вот почему более двух тысячелетий, вплоть до 1899 г., когда выдающийся немецкий математик Давид Гильберт (1862—1943) предложил более строгую аксиоматику евклидовой геометрии, «Начала»

Евклида оставались недосягаемым образцом логической строгости и завершенности в математике.

Что касается доказательства самого Пифагора, то полагают, что оно было получено как следствие из важнейшей пифагорейской теоремы о покрытии плоскости тремя правильными фигурами (с. 147). Легко заметить, что в точке A (см. рис. 42) сходятся шесть углов равносторонних треугольников. Но $\angle A = 360°$, откуда угол в равностороннем треугольнике равен $360°:6=60°$, а значит, сумма трех углов составит $60° \cdot 3 = 180°$. Далее эта теорема была обобщена на случай произвольного треугольника.

Итак, начиная с Пифагора доказательство становится могучим и единственным способом обретения истины в геометрии, а начиная с Евклида аксиоматический метод построения геометрии является образцом отточенности научной мысли. Лишь в XVII в. человечество обрело силы дерзнуть на подобный научный подвиг: в 1687 г. в грандиозном труде «Математические начала натуральной философии» Исааком Ньютоном (1648—1727) было дано построение механики на основе аксиоматического метода по образцу «Начал» Евклида.

Вообще, XVII век стал веком расцвета аксиоматического метода. Универсальный гений — философ, математик, физик, юрист, историк, языковед, дипломат и тайный советник Петра I — Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) много сил отдал составлению «Алфавита человеческого мышления», из которого можно было бы получить все истинные высказывания, так чтобы «химеры, которые не понимает даже тот, кто их выдвигает, не могли быть записаны в этих знаках». Нидерландский философ Бенедикт Спиноза (1632—1677) пытался аксиоматизировать этику, а французский математик и астроном, «Ньютон Франции» Пьер Симон де Лаплас (1749—1827) — юридические науки. Увы, эти попытки не дали ожидаемых результатов: слишком сложным и противоречивым оказался предмет исследований.

С 1939 г. группа французских математиков, объединившихся под псевдонимом Никола Бурбаки, пытается осуществить идею Гильберта — изложить всю математику с единых позиций формального аксиоматического метода. В многотомном и далеком от завершения трактате Н. Бурбаки «Элементы математики»[1] развивается формальная аксиоматическая система, которая, по замыслу авторов, должна охватить если не все, то главнейшие разделы математики как частные случаи единой общей концепции.

Так в наши дни продолжают успешно развиваться великие идеи, заложенные на заре цивилизации Пифагором.

---

[1] Не случайно и Ньютон, и Бурбаки в названия своих трактатов выносят слово «Начала», что подчеркивает преемственность с «Началами» Евклида и служит знаком глубокого уважения к великому основателю аксиоматического метода (во французском оригинале «Элементы математики» звучат как «Начала математики»).

2.4. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Трудно найти человека, у которого имя Пифагора не ассоциировалось бы с теоремой Пифагора. Пожалуй, даже те, кто в своей жизни навсегда распрощался с математикой, сохраняют воспоминания о «пифагоровых штанах» — квадрате на гипотенузе, равновеликом двум квадратам на катетах. Причина такой популярности теоремы Пифагора триедина: это простота — красота — значимость. В самом деле, теорема Пифагора проста, но не очевидна. Это сочетание двух противоречивых начал и придает ей особую притягательную силу, делает ее красивой. Но, кроме того, теорема Пифагора имеет огромное значение: она применяется в геометрии буквально на каждом шагу, и тот факт, что существует около 500 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т. д.), свидетельствует о гигантском числе ее конкретных реализаций.

Открытие теоремы Пифагором окружено ореолом красивых легенд. Прокл, комментируя последнее предложение I книги «Начал» Евклида, пишет: «Если послушать тех, кто любит повторять древние легенды, то придется сказать, что эта теорема восходит к Пифагору; рассказывают, что он в честь этого открытия принес в жертву быка». Впрочем, более щедрые сказители одного быка превратили в одну гекатомбу, а это уже целая сотня. И хотя еще Цицерон заметил, что всякое пролитие крови было чуждо уставу пифагорейского ордена, легенда эта прочно срослась с теоремой Пифагора и через две тысячи лет продолжала вызывать горячие отклики.

Так, оптимист Михайло Ломоносов (1711—1765) писал: «Пифагор за изобретение одного геометрического правила Зевесу принес на жертву сто волов. Но ежели бы за найденные в нынешние времена от остроумных математиков правила по суеверной его ревности поступать, то едва бы в целом свете столько рогатого скота сыскалось».

А вот ироничный Генрих Гейне (1797—1856) видел развитие той же ситуации несколько иначе: «Кто знает! Кто знает! Возможно, душа Пифагора переселилась в беднягу кандидата, который не смог доказать теорему Пифагора и провалился из-за этого на экзаменах, тогда как в его экзаменаторах обитают души тех быков, которых Пифагор, обрадованный открытием своей теоремы, принес в жертву бессмертным богам».

И хотя сегодня теорема Пифагора обнаружена в различных частных задачах и чертежах: и в египетском треугольнике в папирусе времен фараона Аменемхета I (ок. 2000 до н. э.), и в вавилонских клинописных табличках эпохи царя Хаммурапи (XVIII в. до н. э.), и в древнейшем китайском трактате «Чжоу-би суань цзинь» («Математический трактат о гномоне»), время создания которого точно не известно, но где утверждается, что в XII в. до н. э. китайцы знали свойства египетского треугольника, а к VI в. до н. э.— и общий вид теоремы, и в древнеиндийском геометрическо-теологическом трактате VII — V вв. до н. э. «Сульва сутра» («Правила веревки»),— несмотря на все это, имя Пифагора столь прочно сплавилось с теоремой Пифагора, что сейчас просто невозможно представить, что это словосочетание распадется. То же относится и к легенде о заклании быков Пифагором. Да и вряд ли нужно препарировать историко-математическим скальпелем красивые древние предания.

Сегодня принято считать, что Пифагор дал первое доказательство носящей его имя теоремы. Увы, от этого доказательства также не сохранилось никаких следов. Поэтому нам ничего не остается, как рассмотреть некоторые классические доказательства теоремы Пифагора, известные из древних трактатов. Сделать это полезно еще и потому, что в современных школьных учебниках дается алгебраическое доказательство теоремы. При этом бесследно исчезает первозданная геометрическая аура теоремы, теряется та нить Ариадны, которая вела древних мудрецов к истине, а путь этот почти всегда оказывался кратчайшим и всегда красивым. Итак,

Теорема Пифагора. ***Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах.***

Простейшее доказательство теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. Вероятно, с него и начиналась теорема. В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников (рис. 56), чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для $\triangle ABC$: квадрат, построенный на гипотенузе AC, содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах,— по два. Теорема доказана.

Древнекитайское доказательство. Математические трактаты Древнего Китая дошли до нас в редакции II в. до н. э. Дело в том, что в 213 г. до н. э. китайский император Ши Хуан-ди, стремясь ликвидировать прежние традиции, приказал сжечь все древние книги. Во II в. до н. э. в Китае была изобретена бумага и одновременно начинается воссоздание древних книг. Так возникла «Математика в девяти книгах» — главное из сохранившихся математико-астрономических сочинений.

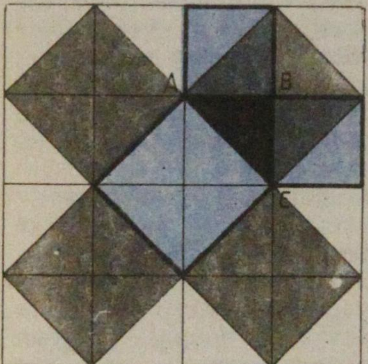
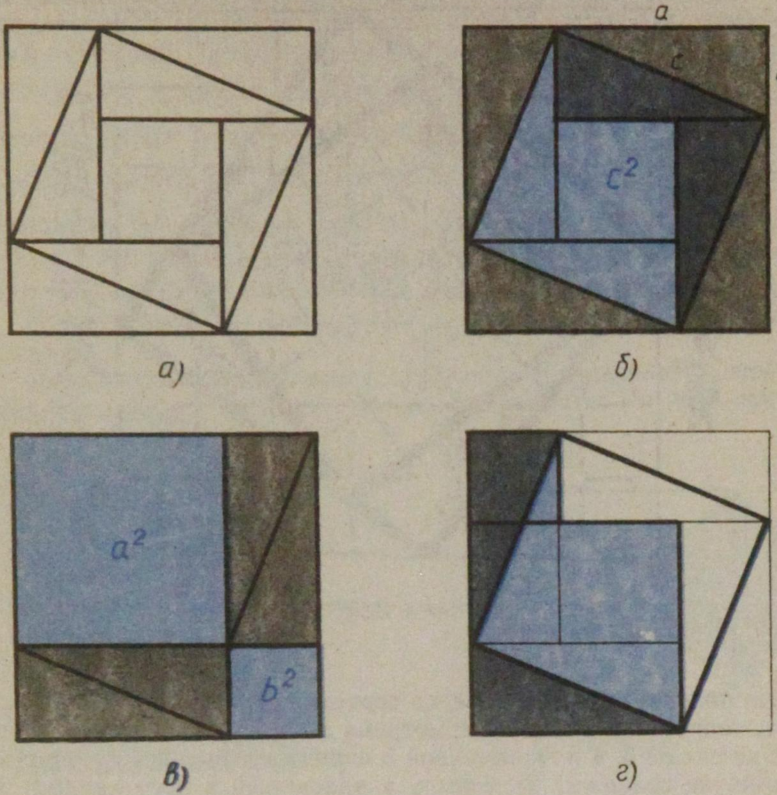


Рис 56.

В IX книге «Математики» помещен чертеж (рис. 57, *а*), доказывающий теорему Пифагора. Ключ к этому доказательству



а) б) в) г)

Рис. 57.

подобрать нетрудно. В самом деле, на древнекитайском чертеже четыре равных прямоугольных треугольника с катетами a, b и гипотенузой c уложены так, что их внешний контур образует квадрат со стороной $a+b$, а внутренний — квадрат со стороной c, построенный на гипотенузе (рис. 57, *б*). Если квадрат со стороной c вырезать и оставшиеся 4 затушеванных треугольника уложить в два прямоугольника (рис. 57, *в*), то ясно, что образовавшаяся пустота, с одной стороны, равна c^2, а с другой — a^2+b^2, т. е. $c^2=a^2+b^2$. Теорема доказана.

Заметим, что при таком доказательстве построения внутри квадрата на гипотенузе, которые мы видим на древнекитайском чертеже (рис. 57, *а*), не используются. По-видимому, древнекитайские математики имели другое доказательство. Именно если в квадрате со стороной c два заштрихованных треугольника (рис. 57, *б*) отрезать и приложить гипотенузами к двум другим гипотенузам (рис. 57, *г*), то легко обнаружить, что полученная фигура, которую иногда называют «креслом невесты», состоит из двух квадратов со сторонами a и b, т. е. $c^2=a^2+b^2$.

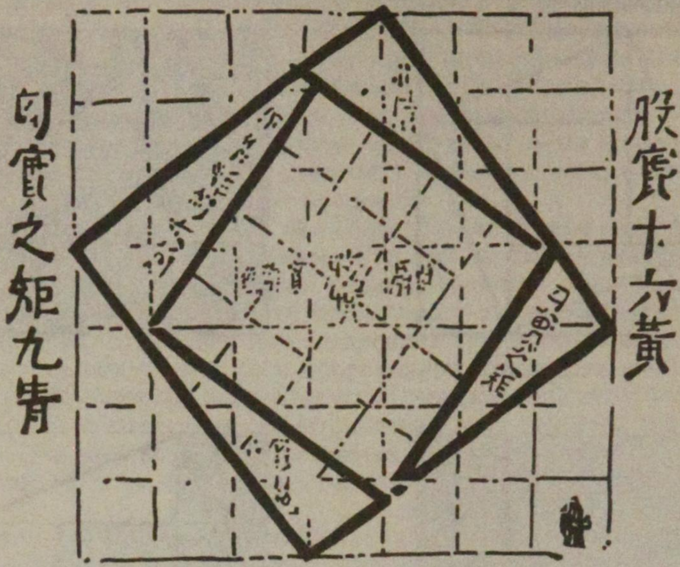


Рис. 58. «Теорема Пифагора» в древнейшем китайском трактате «Чжоу-би суань цзинь».

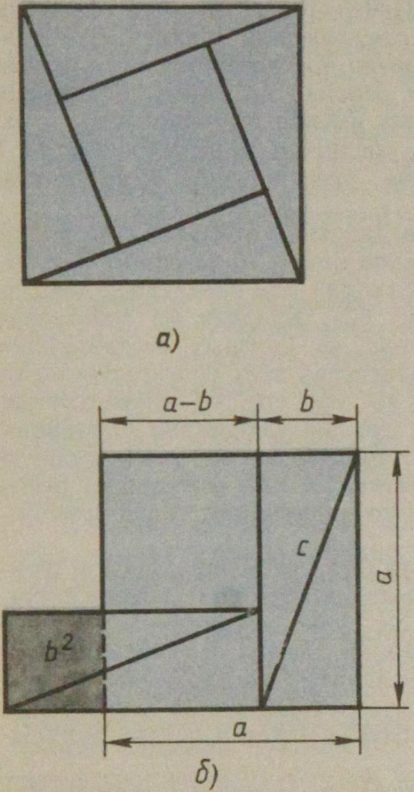
На рисунке 58 воспроизведен чертеж из трактата «Чжоу-би...». Здесь теорема Пифагора рассмотрена для египетского треугольника с катетами 3, 4 и гипотенузой 5 единиц измерения. Квадрат на гипотенузе содержит 25 клеток, а вписанный в него квадрат на большем катете — 16. Ясно, что оставшаяся часть содержит 9 клеток. Это и будет квадрат на меньшем катете.

Древнеиндийское доказательство. Математики Древней Индии заметили, что для доказательства теоремы Пифагора достаточно использовать внутреннюю часть древнекитайского чертежа. В написанном на пальмовых листьях трактате «Сиддханта широмани» («Венец знания») крупнейшего индийского математика XII в. Бхаскары помещен чертеж (рис. 59, *а*) с характерным для индийских доказательств словом «смотри!». Как видим, прямоугольные треугольники уложены здесь гипотенузой наружу и квадрат c^2 перекладывается в «кресло невесты» a^2+b^2 (рис. 59, *б*). Заметим, что частные случаи теоремы Пифагора (например, построение квадрата, площадь которого вдвое больше площади данного квадрата — рис. 60) встречаются в древнеиндийском трактате «Сульва сутра» (VII — V вв. до н. э.).

Доказательство Евклида приведено в предложении 47 I книги «Начал». На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника *ABC* строятся соответствующие квадраты (рис. 61) и доказывается, что прямоугольник *BJLD* равновелик квадрату *ABFH*, а прямоугольник *JCEL* — квадрату *ACKG*. Тогда сумма квадратов на катетах будет равна квадрату на гипотенузе. В самом деле, затушеванные на рисунке треугольники ABD и BFC равны по двум сторонам и углу между ними: $FB=AB$, $BC=BD$ и $\angle FBC=d+\angle ABC=\angle ABD$. Но $S_{ABD}=\frac{1}{2}S_{BJLD}$, так как у треугольника ABD и прямоугольника $BJLD$ общее основание BD и общая высота LD. Аналогично $S_{FBC}=\frac{1}{2}S_{ABFH}$ (BF — общее основание, AB — общая высота). Отсюда, учитывая, что $S_{ABD}=S_{FBC}$, имеем $S_{BJLD}=S_{ABFH}$. Аналогично, используя равенство треугольников BCK и ACE, доказывается, что $S_{JCEL}=S_{ACKG}$.

Итак, $S_{ABFH}+S_{ACKG}=S_{BJLD}+S_{JCEL}=S_{BCED}$, что и требовалось доказать.

Доказательство Евклида в сравнении с древнекитайским или древнеиндийским выглядит чрезмерно сложным. По этой причине



а)

б)

Рис. 59.

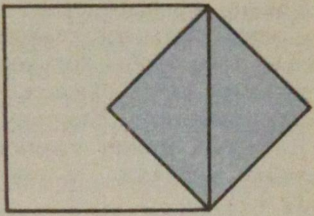


Рис. 60.

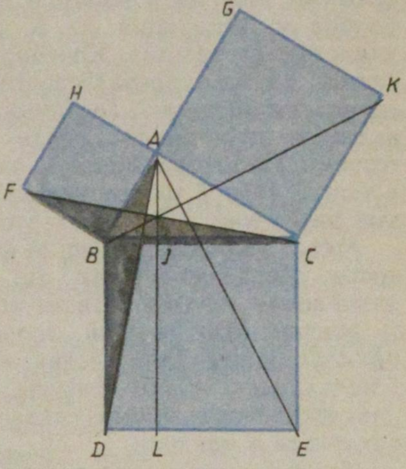


Рис. 61.

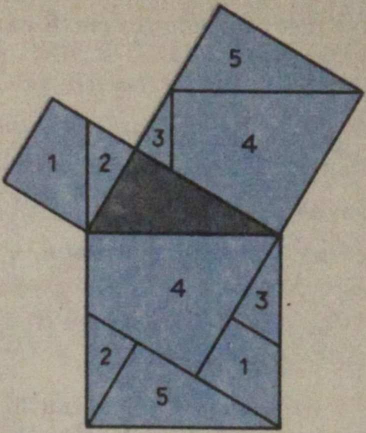


Рис. 62.

его нередко называли «ходульным» и «надуманным». Но такое мнение поверхностно. Теорема Пифагора у Евклида является заключительным звеном в цепи предложений I книги «Начал». Для того чтобы логически безупречно построить эту цепь, чтобы каждый шаг доказательства был основан на ранее доказанных предложениях, Евклиду нужен был именно выбранный им путь. Читатель может самостоятельно убедиться в этом, прочитав I книгу «Начал» и построив цепь рассуждений, аналогичную (2.3.1).

Доказательство Аннариция. Багдадский математик и астроном X в. ан-Найризий (латинизированное имя — Аннариций) в арабском комментарии к «Началам» Евклида дал следующее доказательство теоремы Пифагора (рис. 62). Квадрат на гипотенузе разбит у Аннариция на 5 частей, из которых составляются квадраты на катетах. Конечно, равенство всех соответствующих частей требует доказательства, но мы его за очевидностью оставляем читателю. Любопытно, что доказательство Аннариция является простейшим среди огромного числа доказательств теоремы Пифагора методом разбиения: в нем фигурирует всего 5 частей (или 7 треугольников). Это наименьшее число возможных разбиений. (Докажите это.)

Метод равносоставленных фигур был очень популярен в древности. Вероятно, тогда же была изобретена головоломка, называемая сегодня «Пифагор». Нетрудно убедиться в том, что в основе семи частей головоломки лежат равнобедренный прямоугольный треугольник и квадраты, построенные на его катетах, или, иначе, фигуры, составленные из 16 одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников и потому укладывающиеся в квадрат.

Такова лишь малая толика богатств, скрытых в жемчужине античной математики — теореме Пифагора. Не случайно на обложке последнего издания «Математического энциклопедического словаря» (М.: СЭ, 1988) рисунок из древнекитайского доказательства теоремы Пифагора воспроизведен золотыми линиями в качестве символа математики.

Но почему все древние доказательства теоремы Пифагора были геометрическими? Почему древние греки так боялись алгебры и фактически свели ее к геометрии? Это очень важные вопросы, определившие весь дальнейший после Пифагора путь развития античной математики, имя которому — **геометрическая алгебра.**

2.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Что же побудило греков избрать геометрический путь развития математики? Почему именно пифагорейцы, научным кредо которых был тезис: «Все есть число»,— отвернулись от чисел и перешли к изучению исключительно фигур? Помимо врожденного у греков чувства преклонения перед пластическими формами и зримыми образами, помимо врожденной влюбленности в мягкие линии античной скульптуры и строгую прямолинейность архитектурных памятников тому были и более глубокие причины. Главная из них — это открытие несоизмеримости.

Открытие несоизмеримости разрушало философскую систему пифагорейцев, ибо уже такой простой геометрический объект, как диагональ квадрата со стороной, равной единице, не могла быть измерена известными им числами — целыми числами и их отношениями. Пифагорейцы предприняли интенсивные попытки выхода из этого тупика, и здесь, естественно, просматривалось два пути: либо расширить понятие числа так, чтобы новыми числами стало возможным характеризовать отношение любых двух геометрических отрезков; либо строить математику не на основе арифметики целых чисел и их отношений, а на основе геометрии, определив для геометрических величин все алгебраические операции.

Первый путь на столь ранней ступени развития математики представлял огромные трудности, которые, заметим, были окончательно преодолены лишь в конце XIX в. И пифагорейцы пошли по второму пути — по пути построения алгебры на основе геометрии, по пути **геометрической алгебры.**

Пифагорейцы отказались от традиционного, ими же разработанного представления чисел в виде дискретных «камешков», укладываемых в правильные фигуры, а стали мыслить числа в виде отрезков, полученных повторением конечного числа раз некоего единичного отрезка. **Сложение** чисел-отрезков производилось путем приставления одного отрезка к другому вдоль некоторой прямой, **вычитание** — путем отбрасывания от большего отрезка меньшего. **Умножение** двух чисел-отрезков представля-

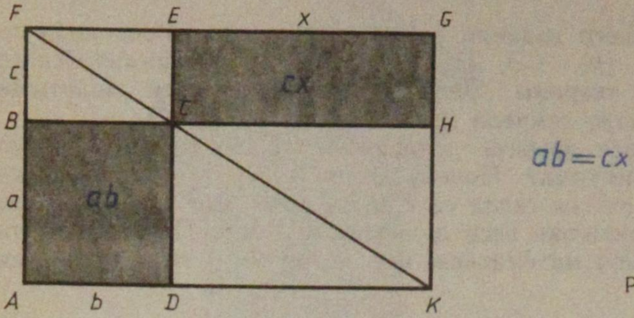


Рис. 63.

лось в виде построения прямоугольника на этих отрезках, площадь которого и выражала произведение чисел. Складывать и вычитать, естественно, позволялось только однородные величины (либо только отрезки, либо только площади), поэтому исчисление отрезков было ступенчатым. Наконец, **деление** определялось как задача «приложения площадей»: «приложить» к данному отрезку c прямоугольник, равновеликий данному прямоугольнику ab, т. е. найти вторую сторону x прямоугольника так, чтобы $cx=ab$.

«Геометрическое деление» производилось следующим образом. К стороне $a=AB$ прямоугольника ab приставлялся отрезок c, на котором достраивался прямоугольник $BCEF$ (рис. 63). Затем проводилась диагональ FC до пересечения с продолжением стороны AD в точке K и строился внешний прямоугольник $AKGF$. Тогда затушеванные на рисунке 63 прямоугольники $ABCD$ и $CEGH$ оказывались равновеликими, так как они получались из равных треугольников AFK и FKG путем отбрасывания двух равных частей: $\triangle BCF=\triangle FCE$ и $\triangle CDK=\triangle CKH$. Итак, сторона FG, равная стороне CH прямоугольника $CEGH$, и есть искомая сторона x.

Геометрически выводились и многие алгебраические соотношения. Например:

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad; \qquad (2.5.1)$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2; \qquad (2.5.2)$$

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2. \qquad (2.5.3)$$

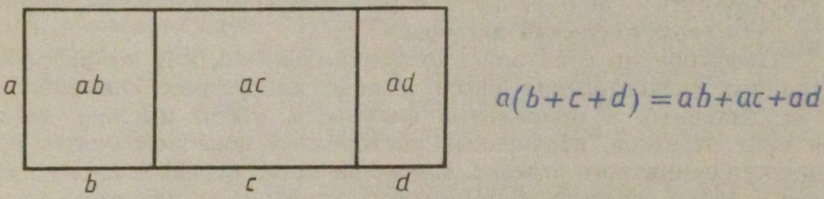


Рис. 64.

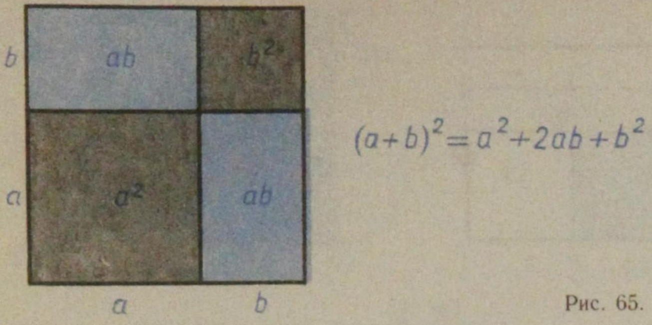


Рис. 65.

Доказательство первых двух тождеств очевидно из рисунков 64 и 65. Для доказательства третьего к прямоугольнику $ab=ABCD$ достроим квадрат $b^2=BCFE$, найдем точку G, делящую отрезок AE пополам, т. е. $AG=GE=\frac{a+b}{2}$, и построим квадрат $GHKE=(\frac{a+b}{2})^2$ (рис. 66). По построению прямоугольник $AGMD$ равен прямоугольнику $BEKL$, поэтому исходный прямоугольник $ABCD$ равновелик гномону $GEKLCM$, так как у них $GBCM$ — общая часть, а остальные части равны. Но гномон $GEKLCM$ является разностью двух квадратов: $GEKH=(\frac{a+b}{2})^2$ и $MCLH=(\frac{a-b}{2})^2$. Таким образом, $S_{ABCD}=S_{GEKLCM}=S_{GEKH}-$ $-S_{MCLH}$, откуда $ab=(\frac{a+b}{2})^2-(\frac{a-b}{2})^2$.

Однако уже геометрическое представление произведения трех величин требовало пространственных построений, а произведение большего числа сомножителей вообще не поддавалось геометрической интерпретации в пространстве трех измерений. Вот почему античная геометрическая алгебра ограничивалась произведениями двух сомножителей, т. е. основывалась на планиметрии, в которой все построения делались с помощью циркуля и линейки. По этой же причине геометрическая алгебра оказалась хорошо приспособленной для решения квадратных уравнений и фактически этим и ограничивалась.

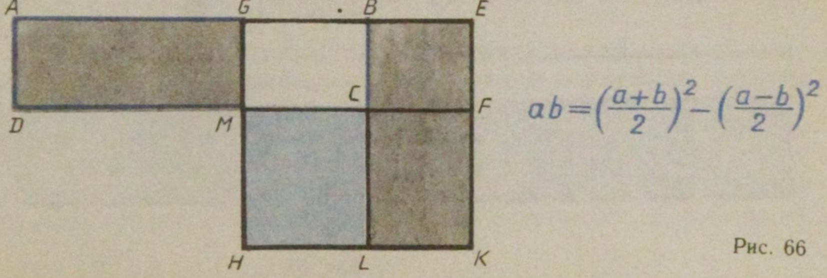


Рис. 66

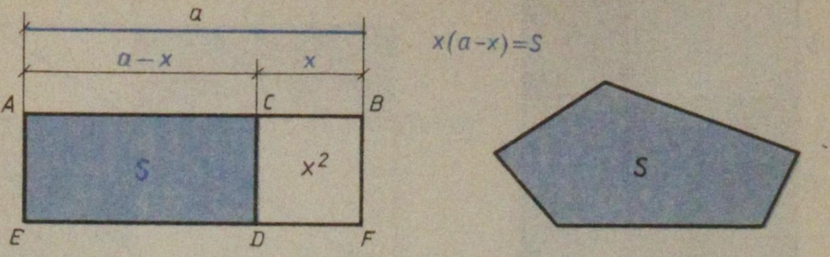


Рис. 67.

Пифагорейцами рассматривались три типа геометрических задач, эквивалентных квадратным уравнениям:

1. Построить квадрат, равновеликий прямоугольнику ab. На языке алгебры это означает решить уравнение

$$x^2 = ab. \tag{2.5.4}$$

2. К данному отрезку a приложить прямоугольник, равновеликий прямолинейной фигуре площади S, так, чтобы «недостаток» был квадратом. Иначе, на отрезке $a = AB$ построить прямоугольник $ACDE$ площади S так, чтобы прямоугольник $CBFD$ был квадратом (рис. 67). Обозначая сторону квадрата через x, приходим к уравнению

$$x(a - x) = S. \tag{2.5.5}$$

3. К данному отрезку a приложить прямоугольник, равновеликий прямолинейной фигуре площади S, так, чтобы «избыток» был квадратом. Иначе, на отрезке $a = AB$ построить прямоугольник $ACDE$ площади S так, чтобы прямоугольник $BCDF$ был квадратом (рис. 68). Обозначая сторону квадрата через x, имеем

$$x(a + x) = S. \tag{2.5.6}$$

Задачи 1—3 решались геометрически путем преобразования произведений ab, $x(a - x)$ и $x(a + x)$ в разности квадратов по формуле (2.5.3). Уравнение (2.5.4) при этом принимало вид $x^2 = (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2$,

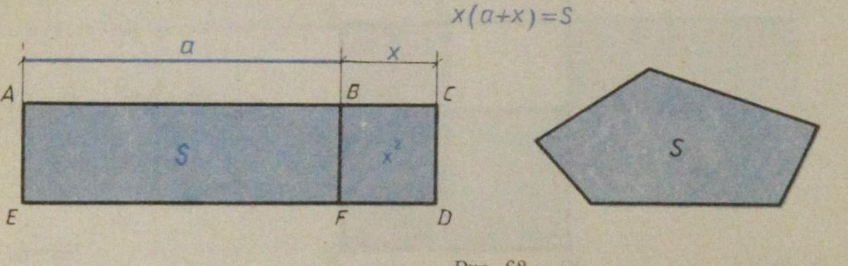


Рис. 68.

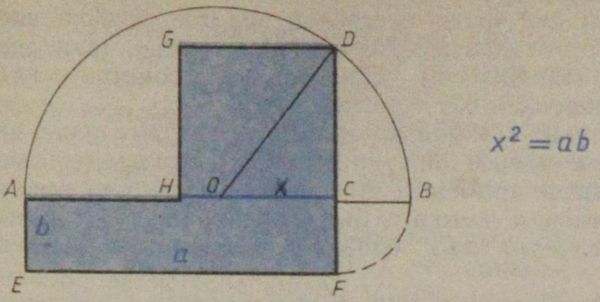


Рис. 69.

т. е. x, согласно теореме Пифагора, находился как катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $\frac{a+b}{2}$ и другим катетом $\frac{a-b}{2}$. Построением такого треугольника и заканчивается II книга Евклидовых «Начал».

Для этого на отрезке $AB=AC+CB=a+b$ как на диаметре строим окружность (рис. 69). Из точки C к прямой AB восстанавливаем перпендикуляр до пересечения с окружностью в точке D. Тогда в треугольнике ODC $OD=\frac{a+b}{2}$, $OC=\frac{a-b}{2}$ и, следовательно, по теореме Пифагора CD и есть искомая величина x. Таким образом, квадрат $CDGH=x^2$ будет равновеликим прямоугольнику $ACFE=ab$. Итак, уравнение $x^2=ab$ решено геометрически, или из величины ab геометрически извлечен квадратный корень.

Задачи 2, 3 решаются аналогично, причем задача 2 называлась **эллиптической** (от ελ-λειψις — недостаток), а задача 3— **гиперболической** (от υπερ-βαλλων — избыток). Древнегреческие математики не только нашли общее решение этих задач, но для эллиптической задачи указали ограничение на начальные данные, при котором это решение возможно, а именно

$$S \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant a} x(a-x)=\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Заметим, что проведенное нами на с. 155 геометрическое построение золотого сечения, т. е. геометрическое построение решения (2.2.2), есть не что иное, как решение гиперболической задачи (2.5.6) при $S=a^2$.

Итак, все задачи, связанные с решением квадратных уравнений, решались пифагорейцами геометрически с помощью циркуля и линейки. Можно доказать и обратное: все задачи на построение циркулем и линейкой эквивалентны решению конечной цепочки квадратных уравнений. Геометрические методы решения этих уравнений были хорошо разработаны, причем никаких проблем с несоизмеримостью при геометрических построениях не возникало.

(В самом деле, мы без труда построили золотое сечение или диагональ единичного квадрата, которые, как известно, являются иррациональными величинами.) Казалось, в геометрической алгебре надолго воцарился безоблачный покой.

Однако уже в V в. до н. э. появились задачи, которые никак не удавалось решить с помощью циркуля и линейки. Это знаменитые **три классические задачи древности**, сыгравшие выдающуюся роль в истории математики и которые были окончательно решены только в XIX в., т. е. через два с половиной тысячелетия! Вот эти задачи:

1. **Удвоение куба.** Построить куб, объем которого в два раза больше объема данного куба.
2. **Трисекция угла.** Произвольный угол разделить на три равные части.
3. **Квадратура круга.** Построить квадрат, равновеликий данному кругу.

Мы остановимся подробно лишь на первой задаче, поскольку ее поразительное по красоте решение было найдено на рубеже V — IV вв. до н. э. последним и наиболее выдающимся представителем пифагорейской школы Архитом. Что касается двух других классических задач, то они также были решены примерно в это же время софистом Гиппием из Элиды и его учеником Диностратом. Гиппий дал способ построения особой линии, называемой **квадратрисой**[1], с помощью которой и было найдено решение задач о трисекции угла и квадратуре круга. Но ни решение Архита, ни решения Гиппия и Динострата не были классическими решениями классических задач древности, так как они либо привлекали другие построения, кроме построений циркулем и линейкой, либо (как у Архита) выходили из плоскости в пространство.

Начиная с эпохи Возрождения, с возрождением интереса к античному наследию и развитием математики, страсти вокруг классических задач разгораются с новой силой. Простота постановки задач завораживала и притягивала как магнит. Поток «решений» рос как снежный ком, так что в 1775 г. Парижская Академия наук, а вслед за ней и другие академии стали отказываться от рассмотрения этих «решений». Лишь в 1837 г. французский математик Пьер Ванцель (1814—1848) доказал, что задачи удвоения куба и трисекции угла сводятся к решению кубических уравнений

$$x^3 - 2a^3 = 0;$$
$$x^3 - 3x - a = 0,$$

которые неразрешимы в квадратичных радикалах и, значит, не могут быть решены с помощью циркуля и линейки. Еще через 50 лет, в 1882 г., немецкий математик Карл Линдеман (1852—

---

[1] От лат. *quadratrix* — плоская кривая, осуществляющая квадратуру круга (*quadratura* — придание квадратной формы).

1939) доказал **трансцендентность** (от лат. *transcendens* — выходящий за пределы) числа π (т. е. тот факт, что число π не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами), а значит, и невозможность построения квадратуры круга с помощью циркуля и линейки. Так лишь в конце XIX в. была поставлена последняя точка над *i* в трех классических задачах древности.

Но вернемся к задаче об удвоении куба. Эту задачу называют еще **делосской проблемой,** ибо с ней связана красивая легенда. Однажды на острове Делос вспыхнула эпидемия чумы. Испуганные жители острова обратились за советом к Дельфийскому оракулу, который сказал, что нужно удвоить золотой жертвенник богу Аполлону, имеющий форму куба. Простодушные делосцы отлили еще один куб и поставили его на первый. Однако чума не унималась. Тогда они вновь обратились к оракулу, и оракул ответил, что они не решили поставленной задачи: новый жертвенник имел вдвое больший объем, но не имел формы куба. Не найдя нужного решения, жители Делоса обратились к Платону, но великий философ ответил уклончиво: «Боги недовольны вами за то, что вы мало занимаетесь геометрией». Платон сам не знал решения задачи, которую вскоре блестяще решил его друг Архит.

Архит из Тарента (ок. 428—365 до н. э.) — ярчайшая личность в античной истории. Живое воплощение пифагорейского идеала калокагатии, последний пифагореец, Архит «вызывал к себе удивление народа по причине своего совершенства во всех отношениях» (Диоген Лаэртский). Математик и механик, философ и музыкант, полководец и политический деятель, крупнейший пифагорейский теоретик музыки, Архит первым упорядочил механику на основе математики, работал над деревянной моделью летающего голубя. Как доказал ван дер Варден, Архит является автором арифметической теории пропорций, изложенной в VIII книге «Начал» Евклида. В родном Таренте Архит пользовался исключительным уважением и семь раз избирался стратегом, хотя закон демократического Тарента запрещал одному лицу занимать этот пост дважды. Путем искусных дипломатических маневров Архит вызволил из плена Платона и тем самым спас жизнь великому философу. Таков был «Славный Архит, земель, и морей, и песков исчислитель...» (Гораций).

И все-таки самой яркой страницей в научной биографии Архита является решение делосской проблемы. Если ребро данного куба равно a, а ребро искомого — x, то задача об удвоении куба приводит к уравнению

$$x^3 = 2a^3. \qquad (2.5.7)$$

Сегодня его решение без труда найдет каждый школьник

$$x = a\sqrt[3]{2}, \qquad (2.5.8)$$

но вот построит ли он циркулем и линейкой $\sqrt[3]{2}$?

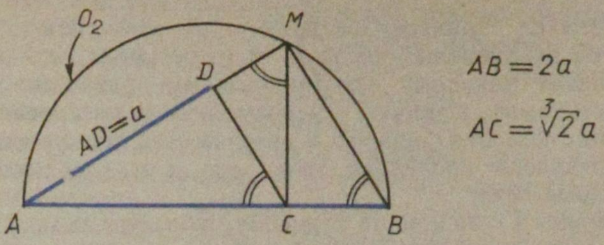


Рис. 70. Треугольник Архита.

Пифагорейцы не знали иррациональных чисел, поэтому они искали геометрическое решение задачи. В V в. до н. э. Гиппократ Хиосский показал, что решение делосской проблемы можно свести к отысканию двух средних пропорциональных x и y, называемых **вставками**, которые, будучи «вставленными» между данными величинами a и $2a$, образуют непрерывную пропорцию

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}. \tag{2.5.9}$$

В самом деле, из первого равенства имеем $x^2=ay$, а из второго — $y^2=2ax$. Следовательно,

$$x^4=a^2y^2=2a^3x\Rightarrow x^3=2a^3.$$

Итак, первая вставка x и есть ребро искомого куба.

Архит заметил, что если из вершины M прямоугольного треугольника, опирающегося на диаметр, опустить перпендикуляр в точку C, а из C опустить перпендикуляр на другой катет (рис. 70), то получится пять подобных треугольников. Назовем их треугольниками Архита. Достаточно рассмотреть три из них:

$$\triangle ADC \infty \triangle AMC \infty \triangle AMB,$$

откуда

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AM}=\frac{AM}{AB}.$$

Это и есть непрерывная пропорция вида (2.5.9).

Пусть теперь $AB=2a$ и пусть точка M движется по полуокружности диаметра $2a$ от точки B к точке A. Тогда точка C будет двигаться по диаметру AB от точки B к точке A, а длина отрезка AD примет все возможные значения от $2a$ (при $M=B$) до 0 (при $M=A$). Следовательно, найдется такое промежуточное положение точки M, при котором $AD=a$. Тогда $AC=x=\sqrt[3]{2a}$ и $AM=y=\sqrt[3]{4a}$. Это и будет решение делосской проблемы. Осталось только найти его.

Для этого Архит фиксирует в плоскости окружность диаметра $AB=2a$. Назовем ее O_1. На диаметре AB строится окружность O_2 в перпендикулярной плоскости (по этой окружности и будет пробегать точка M). Далее Архит начинает вращать O_2 вокруг точки A, причем положение точки M на O_2 определяется положением точки C, которая все время движется по O_1. Таким образом, точка M пробегает O_2 от точки B к точке A (рис. 71). Поверхность, которую окружность O_2 опишет в пространстве, будет тором с внутренним диаметром, равным нулю. Поверхность, описываемая в пространстве перпендикуляром CM, будет круговым цилиндром с радиусом a и образующей CM. Наконец, траектория точки M будет линией пересечения L_1 тора и цилиндра. Линия L_1 в плоскостях, перпендикулярных плоскости окружности O_1, определяет совокупность треугольников Архита (рис. 71), у которых наибольшая гипотенуза постоянна $AB=2a$, а катет AD изменяется от $2a$ (когда $B'=B$) до 0 (когда $AB' \perp AB$).

Остается «поймать» нужное положение точки M на L_1, при котором $AD=a$. Для этого Архит делает следующее построение (рис. 72). (Для большей наглядности на рисунках 72—74 прямая BE_0 показана не как касательная.) Из точки A на окружности O_1 откладывается хорда $AD_0=a$, прямая AD_0 продолжается до пересечения в точке E_0 с касательной к O_1 в точке B, и затем строится конус с образующей AE_0 и осью AB. Угол полураствора конуса $\angle BAD_0=60°$ (так как $\triangle ABD_0$ прямоугольный, как опирающийся на диаметр, и $AB=2a$, $AD_0=a$). Конус пересекает цилиндр по некоторой линии L_2. Так вот, пространственные линии L_1 и L_2

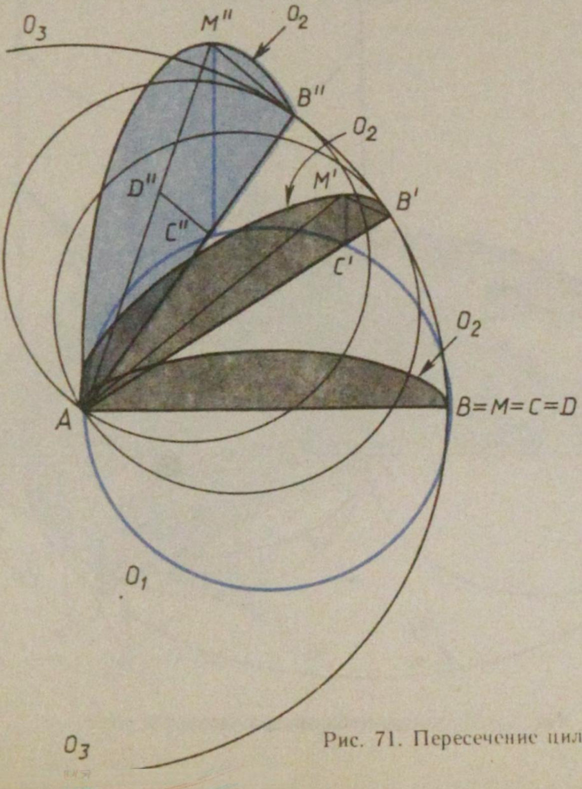


Рис. 71. Пересечение цилиндра и тора.

пересекаются и их точка пересечения M^* и дает искомое положение точки M на окружности O_2 или торе. Докажем это.

Пусть M_1 — произвольная точка на L_2 (рис. 73). Образующая цилиндра, проходящая через M_1, пересекает O_1 в точке C_1. Пусть $\angle BAC_1 = \alpha$ $(\alpha \leqslant 60°)$, перпендикуляр, опущенный из точки C_1 на AM_1, попадает в точку D_1, а перпендикуляр, восставленный из точки M_1 к AM_1, попадает в точку B_1 и пусть проходящее через M_1 круговое сечение конуса пересекает AB в точке K_1. Тогда линия L_2 также будет определять совокупность треугольников Архита, которые также располагаются в плоскостях, перпендикулярных плоскости окружности O_1. Рассмотрим подробнее эти треугольники.

Из $\triangle AC_1B$ находим

$$AC_1 = AB\cos\alpha = 2a\cos\alpha. \qquad (2.5.10)$$

Из $\triangle AK_1C_1$, учитывая (2.5.10), имеем

$$AK_1 = AC_1\cos\alpha = 2a\cos^2\alpha. \qquad (2.5.11)$$

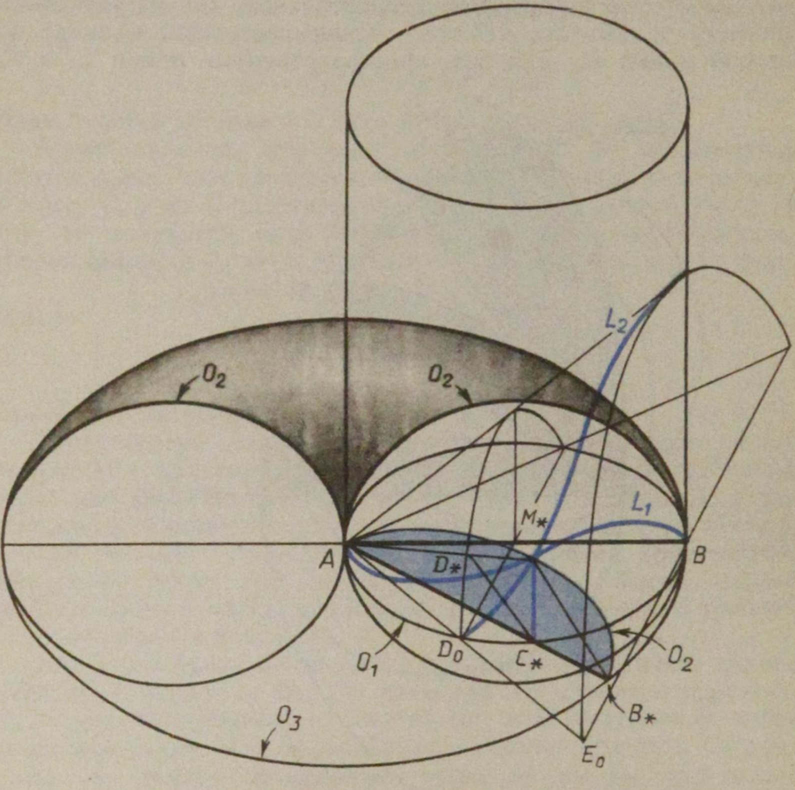


Рис. 72. Пересечение цилиндра, конуса и тора.

Из $\triangle AK_1M_1$, учитывая (2.5.11), находим

$$AM_1=\frac{AK_1}{\cos 60^\circ}=2AK_1=4a\cos^2\alpha. \tag{2.5.12}$$

Из $\triangle AM_1C_1$, обозначая $\angle M_1AB_1=\beta$ и учитывая (2.5.10) и (2.5.12), имеем

$$\cos\beta=\frac{AC_1}{AM_1}=\frac{2a\cos\alpha}{4a\cos^2\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha}. \tag{2.5.13}$$

Наконец, из $\triangle AD_1C_1$, учитывая (2.5.10) и (2.5.13), находим

$$AD_1=AC_1\cos\beta=\frac{2a\cos\alpha}{2\cos\alpha}=a.$$

Итак, точки M_1 линии L_2 определяют треугольники Архита, у которых катет AD_1 постоянен и равен a: $AD_1=a$, а наибольшая гипотенуза AB_1 изменяется от a (при $C_1=D_0$) до $8a$ (при $C_1=B$).

Таким образом, линия L_1 определяет треугольники Архита с постоянной гипотенузой $AB=2a$, а линия L_2 в тех же плоскостях определяет треугольники Архита, у которых наибольшая гипотенуза AB_1 изменяется от a до $8a$, а катет $AD_1=a$ постоянен. Из

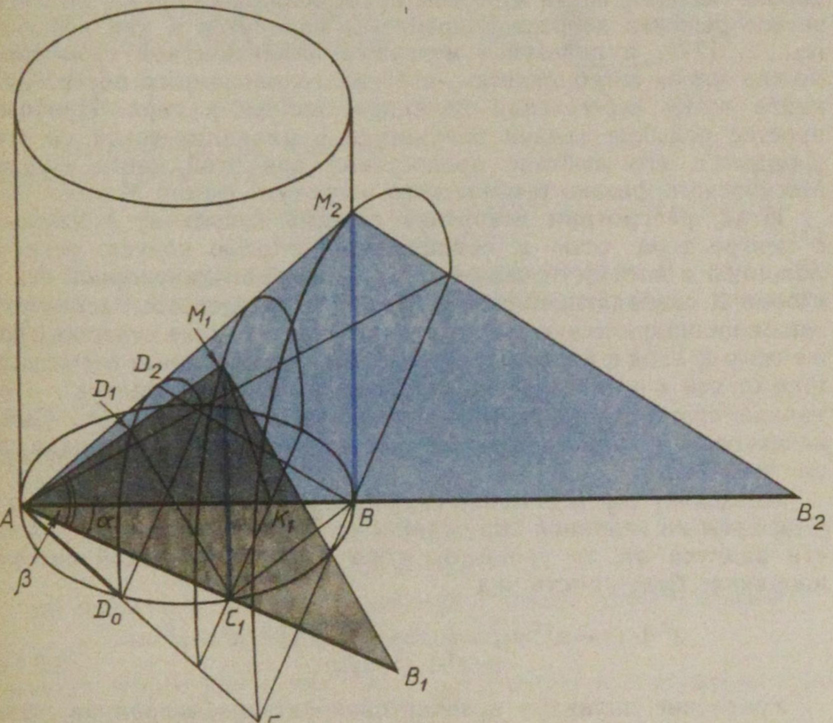


Рис. 73. Пересечение цилиндра и конуса.

соображений непрерывности следует, что найдется такая точка $M_\bullet$ на L_2, в которой $AB_\bullet = 2a$. При этом точка B_1 треугольников Архита, определяемых линией L_2 (см. рис. 73), попадает на окружность O_3, т. е. лежит на поверхности тора (см. рис. 72). Следовательно, линии L_1 и L_2 пересекаются и в точке их пересечения у треугольников Архита $AB_\bullet = 2a$, $AD_\bullet = a$ и, значит, $AC_\bullet = a\sqrt[3]{2}$, что и дает решение делосской проблемы.

Итак, проекция точки пересечения цилиндра, тора и конуса на окружность O_1 — точка $C_\bullet$ — определяет решение задачи об удвоении куба.

Не правда ли, полет фантазии Архита поразителен?! «Архита, должно быть, осенило некое поистине божественное вдохновение, когда он нашел это построение»,— писал ван дер Варден. Нам, людям XX в., подчас слишком гордым достижениями века науки и порой высокомерно забывающим, что история цивилизации началась не с нашим пришествием, трудно, но поучительно осознать, что столь блестящие озарения посещали человечество и более двух тысячелетий назад!

И все-таки две тысячи лет развития человечества не прошли даром. Сегодня, когда известны иррациональные числа, аналитическое решение делосской проблемы находится в два действия (см. с. 177), а пользуясь методами аналитической геометрии, можно чисто алгебраически, избегая головоломных построений, найти точку пересечения цилиндра, конуса и тора. Наиболее простое решение задачи получается в цилиндрической системе координат, его любезно предоставил для этой книги студент Московского физико-технического института Роман Малков.

Итак, рассмотрим декартову систему координат с началом в центре тора, осью x, совпадающей с осью конуса, осью y, лежащей в плоскости окружности O_1 и перпендикулярной оси x, и осью z, совпадающей с образующей цилиндра AS. Рассмотрим также цилиндрическую систему координат с тем же центром и той же осью z. Угол φ в цилиндрической системе координат отсчитывается от оси x против часовой стрелки, а полярный радиус r — от начала системы координат в плоскости окружности O_1. Связь декартовой и цилиндрической систем координат очевидна из рисунка 74.

Поскольку тор есть набор окружностей постоянного радиуса a с центром на заданной окружности (в нашем случае — окружности радиуса a), то уравнение тора в цилиндрической системе координат будет иметь вид

$$z^2 + (r-a)^2 = a^2 \Rightarrow z^2 + r^2 - 2ar + a^2 = a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z^2 + r^2 = 2ar. \qquad (2.5.14)$$

Уравнение цилиндра в декартовой системе координат имеет вид

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

откуда, учитывая связь декартовых координат с цилиндрическими:

$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi,$$

получаем уравнение цилиндра в цилиндрической системе координат:

$$(r\cos\varphi - a)^2 + (r\sin\varphi)^2 = a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (r\cos\varphi)^2 - 2ar\cos\varphi +$$
$$+ a^2 + (r\sin\varphi)^2 = a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r^2 - 2ar\cos\varphi = 0. \qquad (2.5.15)$$

Наконец, конус — это набор окружностей переменного радиуса R с центрами на оси x. Так как угол полураствора конуса равен 60°, то радиус конуса связан с координатой x соотношением $R = x\,\mathrm{tg}\,60^\circ = x\sqrt{3}$. Таким образом, уравнение конуса в декартовой системе координат имеет вид

$$y^2 + z^2 = (\sqrt{3}x)^2,$$

а в цилиндрической системе координат соответственно

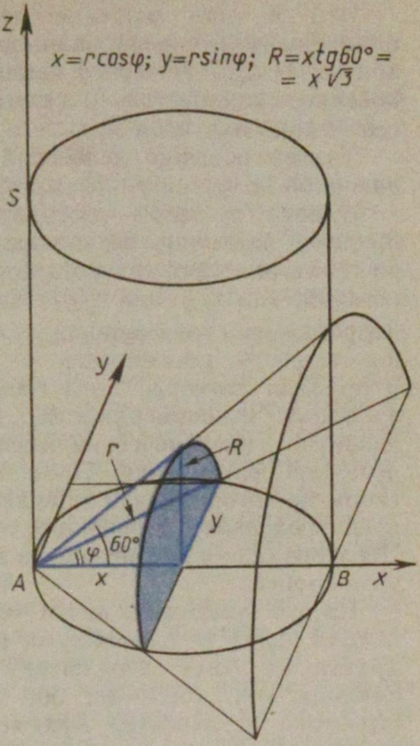


Рис. 74.

$$(r\sin\varphi)^2 + z^2 = 3(r\cos\varphi)^2 \Rightarrow r^2 - (r\cos\varphi)^2 + z^2 = 3(r\cos\varphi)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r^2 + z^2 = 4(r\cos\varphi)^2. \qquad (2.5.16)$$

Итак, мы приходим к системе уравнений (2.5.14) — (2.5.16), которая определяет пересечение поверхностей тора, цилиндра и конуса:

$$\begin{cases} z^2 + r^2 = 2ar, \\ r^2 = 2ar\cos\varphi, \\ z^2 + r^2 = 4(r\cos\varphi)^2, \end{cases}$$

или, вводя новую переменную $x = r\cos\varphi$, системе вида

$$\begin{cases} z^2 + r^2 = 2ar, \\ r^2 = 2ax, \\ z^2 + r^2 = 4x^2. \end{cases} \qquad (2.5.17)$$

Из первого и третьего уравнений системы (2.5.17) имеем

$$4x^2 = 2ar \Rightarrow x^2 = \frac{ar}{2}.$$

Возводя второе уравнение (2.5.17) в квадрат и подставляя туда найденное выражение для x^2, находим

$$r^4 = 4a^2x^2 \ \Rightarrow\ r^4 = 4a^2\frac{ar}{2} \ \Rightarrow\ r^3 = 2a^3 \ \Rightarrow\ r = a\sqrt[3]{2}.$$

Это и есть решение делосской проблемы. Как видим, аналитический способ нахождения точки пересечения цилиндра, конуса и тора не менее изящен, нежели геометрический, хотя, конечно, изюминкой и этого решения остается блестящая геометрическая идея Архита о пересечении трех поверхностей.

Таково решение делосской проблемы Архита — жемчужины античной геометрической алгебры.

Однако в целом разговор о геометрической алгебре нам придется закончить на минорной ноте. Хотя построение алгебры на геометрической основе и позволило оперировать с величинами (такими, как $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{2}$), которые в античной теории чисел попросту не существовали, хотя геометрическая форма и дала возможность рассмотреть с общих позиций многие теоремы и правила алгебры, хотя геометрическая алгебра и устранила проблему несоизмеримости, тем не менее при дальнейшем развитии геометрические доспехи, как панцирь, сковали тело античной математики. Прошло время, и «геометрический раствор», на котором была замешена античная алгебра, застыл, и это предопределило дальнейшее увядание античной математики. Последовавшая вскоре гибель всей античной культуры завершила этот процесс.

Но это произошло почти через 1000 лет после пифагорейцев. А пока вслед за блестящими работами последнего пифагорейца Архита античную математику ждали энциклопедический труд Евклида (ок. 356 — ок. 300 до н. э.), гениальное творчество «Ньютона античности» Архимеда (ок. 287—212 до н. э.), фундаментальная теория конических сечений Аполлония из Перги (ок. 260—170 до н. э.).

Взращенное пифагорейцами древо геометрии еще ждали могучие побеги.

3. МУЗЫКА

3.1. ГАРМОНИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ОТНОШЕНИЙ

Музыка и математика... Сегодня эти два слова редко стоят вместе. Между тем в пифагорейской «математе» именно музыке суждено было стать первым и, пожалуй, единственным физическим свидетелем, подтверждавшим справедливость пифагорейского тезиса: «Все есть число». Именно в музыке впервые была обнаружена таинственная направляющая роль чисел в природе. В свою очередь, родство с арифметикой в пифагорейской «математе» обогатило музыку методами построения ее фундамента — музыкальной гаммы, фундамента, на котором и было возведено прекрасное здание искусства музыки. За два с половиной тысячелетия этот математический фундамент музыки, заложенный пифагорейцами, настолько глубоко «врос в землю», что о его существовании почти забыли. А ведь без него рухнуло бы все здание музыки. Но по порядку...

Согласно преданию, сам Пифагор обнаружил, что приятные слуху созвучия — **консонансы** (от лат. *consonantia* — созвучие) — получаются лишь в том случае, когда длины струн, издающих эти звуки, относятся как целые числа первой четверки, т. е. как 1:2, 2:3, 3:4. При этом также было замечено, что, чем меньше число n в отношении $\frac{n}{n+1}$ $(n=1, 2, 3)$, тем созвучнее интервал. Это открытие потрясло Пифагора. Еще бы: ведь столь эфемерное физическое явление, как звук и тем более приятное созвучие, поддавалось числовой характеристике! Именно это открытие впервые указывало на существование числовых закономерностей в природе, и именно оно послужило отправной точкой в развитии пифагорейской философии. Вот почему день, когда было сделано это открытие, немецкий физик А. Зоммерфельд назвал днем рождения математической физики.

Столь счастливый день, разумеется, был окружен ореолом красивых легенд. Вот как описывает его в «Трактате о музыке» римский философ и сенатор Северин Боэций (480—524): «И вот однажды, под влиянием какого-то божественного наития, проходя мимо кузницы, он слышит, что удары молотков из различных звуков образуют некое единое звучание. Тогда, пораженный, он подошел вплотную к тому, что долгое время искал, и после долгого размышления решил, что различие звуков обусловлено силами ударяющих, а для того, чтобы уяснить это лучше, велел кузнецам поменяться молотками. Однако выяснилось, что свойство звуков не заключено в мышцах людей и продолжает сопровождать молотки, поменявшиеся местами. Когда, следовательно, Пифагор это заметил, то исследовал вес молотков. Этих молотков было пять, причем обнаружилось, что один из них был вдвое больше другого и эти два отвечали друг другу соответственно созвучию октавы. Вес вдвое большего был на 4/3 больше веса третьего, а именно того, с которым он звучал в кварту...»

Далее Боэций рассказывает, что Пифагор, придя домой, взял четыре одинаковые, вертикально подвешенные струны и нагрузил их тяжестями, относящимися как 6:8:9:12 (т. е. как 8:6=4:3, 9:6=3:2, 12:6=2:1). В итоге четвертая струна зазвучала на октаву выше первой, третья — на квинту выше первой, а вторая — на кварту. К сожалению, мы должны констатировать, что здесь Боэций заблуждался. Сегодня известно, что частота колебания струны (или **высота тона,** которая есть отражение в сознании частоты колебания звучащего тела) пропорциональна не натяжению, а корню квадратному из натяжения струны (см. с. 199). Поэтому, если уж Пифагор и проводил описываемые Боэцием опыты, то, чтобы получить, например, созвучие октавы, он должен был брать грузы не в отношении 2:1, а в отношении 4:1.

И тем не менее закон целочисленных отношений в консонансах был открыт Пифагором верно. Просто он неверно был описан Боэцием. Скорее всего, Пифагор ставил эксперименты, не меняя натяжение струны с помощью различных грузов, а меняя длину струны на монохорде.

Монохорд (μονο-χορδον — однострунный) был одним из первых музыкальных инструментов древних греков. Он представлял собой длинный ящик, необходимый для усиления звука, над которым натягивалась струна. Снизу струна поджималась передвижной подставкой. Таким образом, струна имела постоянное натяжение, но разную длину. Позднее под струной укрепили шкалу делений, которая позволяла точно отмерять звучащую часть струны. Конечно, как музыкальный инструмент монохорд был слишком примитивным. Зато, снабженный шкалой делений струны, он стал прекрасным физическим прибором и учебным пособием для изучения законов звучащих тел.

Видимо, на монохорде и было впервые обнаружено, что струна, вдвое короче данной струны, звучит на октаву выше. Но полной ясности в том, каков физический смысл чисел n в отношении $\frac{n}{n+1}$, определяющем консонанс, у древних долгое время не было. Одни толковали их как силу натяжения струны, другие — как длину струны, третьи — как высоту тона, хотя никто не знал, что такое высота тона. Ясность в этом вопросе наступила, пожалуй, только после Архита, который сущность высоты тона видел не в длине струны и не в силе ее натяжения (ведь один и тот же тон можно получить на струнах разной длины и разного натяжения), а в скорости ее движения, т. е. в скорости ударения струны по частичкам воздуха. Сегодня эту «скорость движения» мы называем частотой колебания струны. Далее Архит установил, что высота тона (или частота колебания струны) обратно пропорциональна ее длине. Что касается истинной роли натяжения струны в высоте тона, то она была до конца выяснена лишь после «великой научной революции» XVI — XVII вв.

Два закона легли в основу пифагорейской теории музыки:

1. Две звучащие струны дают консонанс лишь тогда, когда их длины относятся как целые числа, составляющие треугольное число $10=1+2+3+4$, т. е. как 1:2, 2:3, 3:4. При этом интервал тем созвучнее, чем меньше число n в отношении

$$\frac{n}{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3). \tag{3.1.1}$$

2. Высота тона определяется частотой колебания струны ω, которая обратно пропорциональна длине струны l:

$$\omega=\frac{a}{l}. \tag{3.1.2}$$

В дальнейшем нам потребуются некоторые понятия теории музыки. **Гаммой, или звукорядом,** называется последовательность звуков (**ступеней** звукоряда) некоторой музыкальной системы, расположенных начиная от основного звука (основного тона) в восходящем или нисходящем порядке. (Название «гамма» происходит от греческой буквы Γγ (гамма), которой в средние века обозначали крайний нижний тон звукоряда, а затем и весь звукоряд.) **Интервалом** между тонами называется порядковый номер ступени верхнего тона относительно нижнего в данном звукоряде, а **интервальным коэффициентом** I_{21} двух тонов — отношение частоты колебаний верхнего тона к частоте нижнего:

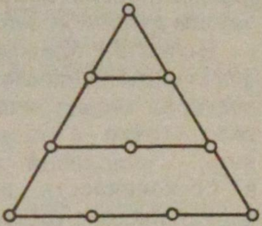
$$I_{21}=\frac{\omega_2}{\omega_1}(\omega_2>\omega_1). \qquad (3.1.3)$$

Интервальные коэффициенты (3.1.1) и соответствующие им интервалы в средние века были названы **совершенными консонансами** и получили латинские названия[1]:

октава $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{2}{1}\ (\frac{l_2}{l_1}=\frac{1}{2})$;

квинта $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{3}{2}\ (\frac{l_2}{l_1}=\frac{2}{3})$;

кварта $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{4}{3}\ (\frac{l_2}{l_1}=\frac{3}{4})$.



треугольное число 10

Звуки в музыкальной системе связаны между собой определенными зависимостями. Одни из них являются **неустойчивыми** и тяготеют к другим — **устойчивым.** В каждой музыкальной системе существует наиболее устойчивый, основной тон, именуемый **тоникой**, с которого начинается данная система. Помимо связей между отдельными тонами музыкальная система в целом имеет некую общую характеристику, называемую **наклонением.** Наклонений два — мажорное и минорное; первое как бы окрашено в светлые тона, а второе — в пасмурные, хотя эти оценки и весьма условны. Так, мы приходим к краеугольному понятию всего музыкознания — понятию лада. **Ладом** называется приятная для слуха взаимосвязь музыкальных звуков, определяемая зависимостью неустойчивых звуков от устойчивых, и прежде всего от тоники, и имеющая определенный характер звучания — наклонение. Наиболее распространенные лады состоят из семи основных ступеней. Наконец, математическое выражение системы звуковысотных отношений (лада) называется **музыкальным строем.**

---

[1] Названиями интервалов в музыке служат латинские числительные, которые указывают порядковый номер ступени звукоряда, составляющей интервал с исходной ступенью: октава — восьмая ступень, квинта — пятая, кварта — четвертая и т. д.

Пифагорейцев и интересовал прежде всего музыкальный строй, ибо, как свидетельствует Плутарх, «почтенный Пифагор отвергал оценку музыки, основанную на свидетельстве чувств. Он утверждал, что достоинства ее должны восприниматься умом, и потому судил о музыке не по слуху, а на основании математической гармонии, и находил достаточным ограничить изучение музыки пределами одной октавы».

Исходя из закона целочисленных отношений для консонансов и учения о пропорциях, пифагорейцы блестяще справились с задачей математического построения различных музыкальных ладов, т. е. нашли их музыкальный строй. С тех пор четверка чисел 1, 2, 3, 4 — **тетрада** (τετράδιον), лежащая в основе закона консонансов (3.1.1), а значит, и всей теории музыки, была наделена пифагорейцами магическими свойствами и считалась ниспосланной людям богами: «Что такое Дельфийский оракул? Тетрада! Ведь она — гамма, по которой поют сирены». Пифагорейская клятва гласила: «Клянусь именем Тетрады, ниспосланной нашим душам. В ней источник и корни вечно цветущей природы».

Вслед за благозвучными интервалами — консонансами — пифагорейцы спешили увидеть тетраду в основе всего мироздания: четверка геометрических элементов — точка, линия, поверхность, тело (точке — «геометрическому атому» — соответствовала единица — «числовой атом»; линии — число 2, означавшее уход в бесконечность по прямой линии; поверхности — число 3, определяющее треугольник или плоскость двух измерений; телу — число 4 — пирамида, первое пирамидальное число, дающее представление о пространстве трех измерений); четверка физических элементов — земля, вода, огонь, воздух (это учение мы рассмотрим в п.4.3). Сумма чисел, образующих тетраду, составляла священную десятку и олицетворяла всю Вселенную.

Не стоит спешить упрекать пифагорейцев в числовой мистике. Гармония целочисленных отношений и сегодня поражает каждого, кто впервые открывает ее для себя. Что же говорить о пифагорейцах, которые на заре цивилизации стали боготворить числа, управляющие музыкой. «Это считается чем-то вроде суеверия древних греков. Но далеко ли ушел наш современный научный интерес к количественным отношениям? — спрашивает в своих знаменитых лекциях лауреат Нобелевской премии американский физик Ричард Фейнман.— Открытие Пифагора, помимо геометрии, было первым примером установления числовых связей в природе. Поистине, должно быть, было удивительно вдруг неожиданно обнаружить, что в природе есть факты, которые описываются простыми числовыми отношениями».

Итак, гармония целочисленных отношений послужила первым «экспериментальным» подтверждением пифагорейской мысли о рациональном устройстве природы по точному математическому плану. Восторг пифагорейцев перед этим законом был безграничен. Пифагорейцы объявили, что «Все есть число» и распространили закон целочисленных музыкальных отношений всюду, где это представлялось возможным, в том числе и на строение Вселенной. О знаменитой пифагорейской «музыке сфер» мы расскажем в п.4.2, а сейчас нам предстоит увидеть, как с помощью закона целочисленных отношений и учения о пропорциях строилась пифагорейцами музыкальная гамма.

3.2. ПИФАГОРОВА ГАММА

В основу музыкальной шкалы — гаммы — пифагорейцы положили интервал октавы. Октава настолько созвучный консонанс, что верхний звук кажется уменьшенной копией нижнего, поэтому его и принято называть октавным повторением нижнего тона и обозначать той же нотой. Далее октаву предстояло разделить на какие-то благозвучные части. И здесь пифагорейцы, страстные поклонники пропорций (вспомним слова Платона на с. 138), прежде всего, конечно, обратились к средним величинам.

Составляя арифметическое среднее для основного тона ω_1 и его октавного повторения $\omega_2 = 2\omega_1$:

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{3\omega_1}{2} \Rightarrow \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{3}{2},$$

мы обнаруживаем прекрасный результат: это арифметическое среднее дает следующий совершенный консонанс — квинту. При этом длина струны l_3 согласно (3.1.2) и (1.4.6) будет средней гармонической длин струн l_1 и $l_2 = \frac{1}{2}l_1$:

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Rightarrow \frac{a}{l_3} = \frac{\frac{a}{l_1} + \frac{a}{l_2}}{2} \Rightarrow l_3 = \frac{2l_1 l_2}{l_1 + l_2} = \frac{2}{3}l_1 \Rightarrow \frac{l_3}{l_1} = \frac{2}{3}.$$

Но если теперь среднее гармоническое взять для частот основного тона ω_1 и октавы ω_2:

$$\omega_4 = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{4\omega_1}{3} \Rightarrow \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{4}{3},$$

то оно даст последний совершенный консонанс — кварту. Ясно, что длины струн будут при этом связаны арифметической средней:

$$\omega_4 = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \Rightarrow \frac{a}{l_4} = \frac{2\frac{a}{l_1} \cdot \frac{a}{l_2}}{\frac{a}{l_1} + \frac{a}{l_2}} \Rightarrow l_4 = \frac{l_1 + l_2}{2} = \frac{3}{4}l_1 \Rightarrow \frac{l_4}{l_1} = \frac{3}{4}.$$

Итак, **квинта есть среднее арифметическое частот основного тона ω_1 и октавы ω_2, а кварта — среднее гармоническое ω_1 и ω_2.** Или **квинта есть среднее гармоническое длин струн основного тона l_1 и октавы l_2, а кварта — среднее арифметическое l_1 и l_2.**

Но произведение среднего арифметического на среднее гармоническое равно произведению исходных величин:

$$l_3 l_4=\frac{2l_1 l_2}{l_1+l_2}\cdot\frac{l_1+l_2}{2}=l_1 l_2, \tag{3.2.1}$$

откуда, разделив обе части на l_1^2, получим второй важный вывод:

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{l_3}{l_1}\cdot\frac{l_4}{l_1}\Rightarrow\frac{l_1}{l_2}=\frac{l_1}{l_3}\cdot\frac{l_1}{l_4}\left(\frac{2}{1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\right),$$

или

$$I_{21}=I_{31}\cdot I_{41}, \tag{3.2.2}$$

т. е. **октава делится на два неравных консонансных интервала — квинту и кварту** или **интервальный коэффициент октавы равен произведению интервальных коэффициентов квинты и кварты.**

Разделив же (3.2.1) на $l_1 l_4$, мы получим музыкальную пропорцию (1.4.10):

$$\frac{l_2}{l_4}=\frac{l_3}{l_1},\ \text{или}\ l_2:\frac{l_1+l_2}{2}=\frac{2l_1 l_2}{l_1+l_2}:l_1, \tag{3.2.3}$$

или **октава относится к квинте, как кварта к основному тону.**

Наконец, найдем интервальный коэффициент между струнами квинты l_3 и кварты l_4, который вместе со своим интервалом называется **тоном** (не следует путать тон-интервал и тон-звук данной высоты):

$$I_{34}=\frac{\omega_3}{\omega_4}=\frac{\omega_3}{\omega_1}\cdot\frac{\omega_1}{\omega_4}=\frac{\omega_3}{\omega_1}:\frac{\omega_4}{\omega_1}=\frac{I_{31}}{I_{41}}\left(=\frac{9}{8}\right), \tag{3.2.4}$$

т. е. **тон-интервал равен отношению квинты к кварте.**

Полученные результаты, известные из сохранившихся фрагментов сочинений Архита, собраны на рисунке 75, где интервалы, которые целая струна монохорда l_1 образует со своими частями l_2, l_3, l_4, показаны двойными стрелками.

Заметим, что в отличие от обычного расстояния на прямой $r_{21}=x_2-x_1$, определяемого как разность координат конца и начала, интервальный коэффициент — высотное расстояние — определен как отношение составляющих его тонов: $I_{21}=\frac{\omega_2}{\omega_1}$. Тогда три тона $\omega_1<\omega_2<\omega_3$, отстоящих друг от друга на равных интервалах I, образуют геометрическую прогрессию ω_1, $\omega_2=\omega_1 I$, $\omega_3=\omega_1 I^2$ в отличие от трех точек на прямой $x_1<x_2<x_3$, расположенных на равных расстояниях r и образующих арифметическую прогрессию x_1, $x_2=x_1+r$, $x_3=x_1+2r$. Поэтому интервальные коэффициенты складываются и вычитаются «геометрически», а сами интервалы — «арифметически», как обычные расстояния, а именно:

сумма двух интервалов равна произведению их интервальных коэффициентов:

$$I_{31}=I_{32}\cdot I_{21}; \tag{3.2.5}$$

разность двух интервалов равна частному их интервальных коэффициентов:

$$I_{32}=I_{31}:I_{32}; \qquad (3.2.6)$$

n-я часть интервала I равна корню степени n из его интервального коэффициента:

$$I_n=\sqrt[n]{I} \qquad (3.2.7)$$

и т. д.

Решение задачи деления октавы подсказало Архиту «музыкальное доказательство» иррациональности $\sqrt{2}$. В самом деле, если разделить октаву на два равных интервала I, то, полагая в (3.2.2) $I_{31}=I_{41}=I$, имеем

$$I^2=2 \Rightarrow I=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{l_3}{l_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Но при таком соотношении длин струн прослушивается явный диссонанс. Поскольку же консонанс определяется отношением целых чисел вида $\frac{n}{n+1}$, то напрашивается мысль, что число

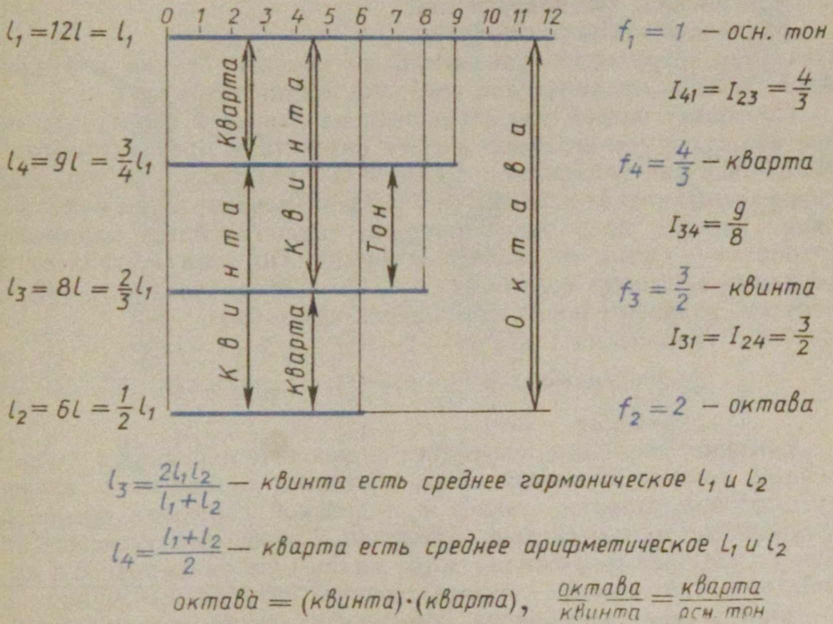


Рис. 75. Деление струны монохорда (l_1) на части, образующие с ней совершенные консонансы: октаву (l_2), квинту (l_3) и кварту (l_4) и соотношения между ними.

$\sqrt{2}$ не может быть выражено отношением двух целых чисел, т. е. является иррациональным.

Но вернемся к построению музыкальной гаммы. Интервал между квинтой и квартой (3.2.4), или тон-интервал, и был принят пифагорейцами в качестве основной ладообразующей ступеньки гаммы. Оставалось только отложить от тоники ($\omega_1=1$) тон-интервал ($\omega_2=\frac{9}{8}$), затем еще один тон-интервал ($\omega_3=$ $=\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}=\frac{81}{64}$), а оставшийся интервал между вторым тоном и тоном кварты ($\omega_4=\frac{4}{3}$) назвать **полутоном**: $I_{43}=\frac{4}{3}:\frac{81}{64}=\frac{256}{243}$.

Название это вполне оправдано, так как деление тона-интервала пополам по формуле (3.2.7) дает $\sqrt{\frac{9}{8}}\approx 1{,}0607$, а $\frac{256}{243}\approx 1{,}0545$, т. е. полутон практически равен половине тона. Так был построен **тетрахорд** (τετρά-χορδον) — четырехструнный звукоряд в пределах кварты — основа всей древнегреческой музыки. Имеется только три возможности для помещения полутона в пределах тетрахорда, что и определило характер и название тетрахорда:

дорийский: **полутон**-тон-тон;
фригийский: тон-**полутон**-тон;
лидийский: тон-тон-**полутон.**

Названия тетрахордов указывали на области Греции и Малой Азии, каждая предпочитала свой лад и свой тетрахорд.

Поскольку октава уже разделена на квинту и кварту или на две кварты и тон-интервал между ними, то в пределах октавы умещались два тетрахорда, соединенные интервалом в тон. Два одноименных тетрахорда вместе с разделительным тоном и составляли гамму, или, как говорили пифагорейцы, **гармонию** (ʼαρμονία — связь, согласие, гармония). По числу тетрахордов основных гармоний получалось три (1 — обозначает тон, 1/2 — полутон, разделительный тон обведен кружком):

дорийская: 1/2—1—1— ① —1/2—1—1;
фригийская: 1—1/2—1— ① —1—1/2—1;
лидийская: 1—1—1/2— ① —1—1—1/2.

Античные гармонии почти без изменений перешли в современные гаммы. В самом деле, каждый, знакомый с азами музыкальной грамоты, узнает в лидийской гармонии обычный натуральный мажор (2 тона — полутон, 3 тона — полутон, или на белых клавишах фортепиано до-ре-ми-фа-соль-ля-си-до), а в дорийской и фригийской — чуть измененный натуральный минор.

Зная размеры интервалов, образующих, например, лидийскую гармонию, и правила действия с ними, легко получить математическое выражение этой гаммы, или ее музыкальный строй. Приняв частоту нижнего тона за единицу $\omega_1=1$, находим первый тетрахорд: $\omega_1=1$, $\omega_2=\frac{9}{8}$, $\omega_3=\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}=\frac{81}{64}$, $\omega_4=\frac{4}{3}$. Второй тетрахорд получается сдвигом первого на квинту:

$$\omega_5=\frac{3}{2}\omega_1=\frac{3}{2},\ \omega_6=\frac{3}{2}\omega_2=\frac{27}{16},\ \omega_7=\frac{3}{2}\omega_3=\frac{243}{128},\ \omega_8=\frac{3}{2}\omega_4=2.$$

Окончательно для интервальных коэффициентов имеем

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & \frac{9}{8} & \frac{81}{64} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{27}{16} & \frac{243}{128} & 2. \\ \text{до} & \text{ре} & \text{ми} & \text{фа} & \text{соль} & \text{ля} & \text{си} & \text{до}_1 \end{array} \qquad (3.2.8)$$

Это и есть музыкальный строй лидийской гаммы, называемый также пифагоровым строем или каноном Пифагора (рис. 76).

По преданию, Орфей настраивал лиру по канону Пифагора. А доподлинно известно, что в античной лире четыре струны тон-кварта-квинта-октава имели постоянную настройку по тетраде, или как числа 6:8:9:12 $(1:\frac{4}{3}:\frac{3}{2}:2)$, а остальные струны перестраивались в зависимости от лада, в котором предстояло на ней играть.

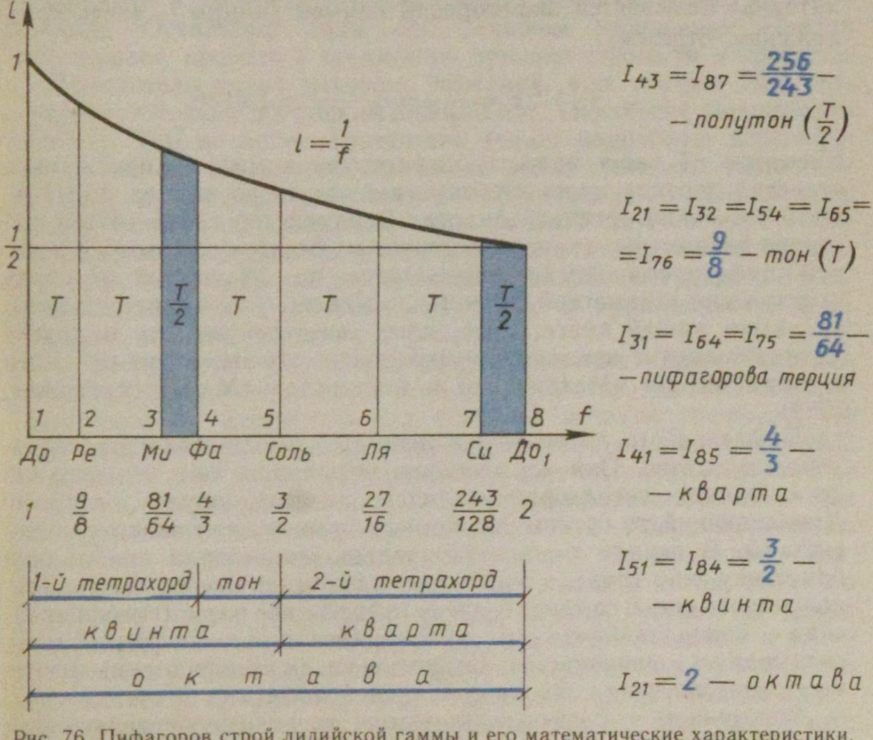


Рис. 76. Пифагоров строй лидийской гаммы и его математические характеристики.

Пифагорейцы владели и другим способом построения музыкальной гаммы, который был более практичным и до сих пор применяется при настройке музыкальных инструментов. Оказывается, гамму можно построить, пользуясь лишь двумя совершенными консонансами — квинтой и октавой. Суть этого метода состоит в том, что от исходного звука, например до, $\left(\frac{3}{2}\right)^0=1$, мы движемся по квинтам вверх и вниз и полученные звуки собираем в одну октаву. Так, мы получим

$\left(\frac{3}{2}\right)^1 \quad =\frac{3}{2}$ соль

$\left(\frac{3}{2}\right)^2:2=\frac{9}{8}$ ре

$\left(\frac{3}{2}\right)^3:2=\frac{27}{16}$ ля

$\left(\frac{3}{2}\right)^4:2^2 \quad =\frac{81}{64}$ ми

$\left(\frac{3}{2}\right)^5:2^2 \quad =\frac{243}{128}$ си

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot 2=\frac{4}{3}$ фа

Располагая эти звуки и их интервальные коэффициенты по порядку, находим пифагоров строй лидийской гаммы (3.2.8).

Однако, двигаясь по квинтам вверх и вниз, мы никогда не получим в точности октавного повторения исходного звука. Лишь 12 квинт приближенно равны 7 октавам, а разделяющий их интервал называется **пифагоровой коммой** (κόμμα — часть предложения, отрезок):

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}:2^7=\frac{3^{12}}{2^{19}}=\frac{531\,441}{524\,288}\approx 1{,}0136.$$

Несмотря на свою малость, пифагорова комма на протяжении столетий портила кровь музыкантам вплоть до начала XVIII в., когда немецкий органист Андреас Веркмейстер (1645—1706) построил равномерно-темперированную музыкальную гамму, в которой пифагорова комма разделилась на 12 частей и стала практически незаметной. Впрочем, здесь мы уже выходим далеко за рамки нашей книги, а те, кого заинтересуют эта и другие математичекские изюминки музыкальной гаммы, могут их найти в книге автора «Математика и искусство» (М.: Просвещение, 1992).

Пифагорейцы умели также и по-другому располагать тетрахорды в октаве. Они «склеивали» тетрахорды так, что верхний звук одного тетрахорда являлся нижним звуком второго. Дополняющий до октавы тон помещали внизу или наверху такой системы. В первом случае к названию тетрахорда прибавляли приставку гипо (под), а во втором — приставку гипер (над). Так, получалось еще 6 гармоник, среди которых две пары (гипофригийская — гиперлидийская и гиподорийская — гиперфригийская) оказывались одинаковыми. Отбросив их, оставалось семь основных ладов по числу основных ступеней лада.

Вспоминая, что сегодня в музыке господствуют только два лада — мажор и минор, остается только удивляться тому, насколько утонченным было античное музыкальное сознание. Каждый лад пифагорейцы наполняли определенным этико-эстетическим содержанием — **этосом** (ηθος — нрав, натура), устанавливая ясную связь между музыкальными образами и состоянием души. Вообще, музыке пифагорейцы приписывали врачующие и даже магические функции, но особое значение придавалось музыке как средству воспитания. Просто поразительно, сколь созвучны этим мыслям пифагорейцев были слова древнекитайского философа Конфуция (ок. 551—479), который в это же время на другом конце Земли говорил: «Если хотите знать, как страна управляется и какова ее нравственность — прислушайтесь к ее музыке». Здесь мы находим прекрасное подтверждение удивительного родства образа мысли древнегреческих и древнекитайских мыслителей, о котором шла речь на с. 8).

Пифагорейское учение об этосе ладов развили Платон и Аристотель. Платон для мирной жизни оставляет строгий дорийский лад, считая его подлинно греческим, мужественным, способным сопровождать на подвиг и на смерть. Для чрезвычайных событий он предпочитает фригийский лад как наиболее страстный и возбуждающий. Лидийский же лад Платон называет печальным и соответствующим более женской, а не мужской психике. Остальные лады как слишком утонченные Платон отбрасывает, проводя в воспитании принцип строгости и простоты.

Аристотель судит о ладах, пожалуй, еще строже Платона, признавая только дорийский лад как лад, способный тренировать психику. Тем не менее Аристотель делает подробную классификацию ладов. Прекрасное описание этоса греческих ладов мы находим во «Флоридах» Апулея: «Жил когда-то флейтист по имени Антигенид. Сладостен был каждый звук в игре этого музыканта, все лады были знакомы ему, и мог он воссоздать для тебя, по твоему выбору, и простоту эолийского лада, и богатство ионийского, и грусть лидийского, и приподнятость фригийского, и воинственность дорийского».

Впрочем, стоп! Нет ли здесь противоречия? Дорийский лад называется воинственным, а ведь по существу это наш минор?! Поскольку же дорийский лад считался истинно греческим, то получается, что основной характер греческой музыки печальный, минорный? Для греков же дорийский лад является выражением бодрости, жизнерадостности и даже воинственности. Вот как объясняет это кажущееся противоречие А. Ф. Лосев: «Греческое искусство — неизменное жизнеутверждение. Благородная сдержанность и даже печаль не оставляют грека и тогда, когда он веселится, когда он бодро строит жизнь, когда он воюет и погибает. «Веселые» же лады так или иначе тяготеют к этому прекрасному, благородному, бодрому, важному и в то же время величественно-печальному ладу — дорийскому. Дорийский лад — это скульптурный стиль греческой музыки... Так задумчива, печальна и благородна вся греческая скульптура».

Итак, пифагорейцы не только нашли строгие математические методы построения музыкальных ладов, которые практически без изменения вошли в современную музыку, но и заложили основы учения об этосе каждого лада. В пифагорейской теории музыки был достигнут союз математики и искусства, союз, принесший неоценимую пользу и науке математике, и искусству музыки.

«Природу и силу числа можно видеть в преизбытке не только в духовных и божественных вещах, но и во всех человеческих делах и мыслях, везде, даже в произведениях искусств и в музыке». Так писал пифагореец Филолай.

На этом можно было бы расстаться с пифагорейской теорией музыки. Но читатель вправе спросить: какова природа столь удивительного и загадочного закона целочисленных отношений консонансов, закона одновременно физико-математического и эстетического, закона, который составляет основу всей этой теории? Сегодня математика способна ответить и на это вопрос.

3.3. МАТЕМАТИКА КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ И ТАЙНЫ ГАРМОНИИ

В 1747 г. Жан ле Рон Д'Аламбер (1717—1783), французский математик, философ, писатель, один из создателей знаменитой «Энциклопедии наук, искусств и ремесел», член Парижской и Петербургской Академий, опубликовал статью «Исследование по вопросам о кривой, которую образует натянутая струна, приведенная в колебание», где впервые задача о колебании струны сводилась к решению дифференциального уравнения в частных производных, названного **волновым уравнением:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (3.3.1)$$

Здесь t — время; x — координата струны в положении равновесия; $u=u(x, t)$ — неизвестная функция, выражающая отклонение точки с координатой x в момент времени t от положения равновесия; a^2 — коэффициент пропорциональности, характеризующий упругие свойства струны ($a=\sqrt{T/\rho}$; T — сила натяжения струны; ρ — плотность однородной струны). Символы $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ обозначают частную производную второго порядка, которая определяется как производная от производной $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)$. Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$, как и обыкновенная производная

$\frac{dy}{dx}$, характеризуют скорость изменения функции $u(x,t)$ по каждой из переменных x или t в отдельности при условии, что другая переменная не изменяется. Предполагается, что струна совершает малые колебания, происходящие в одной плоскости.

Еще через полвека другой соотечественник Д'Аламбера Жан Батист Жозеф Фурье (1768—1830), выдающийся математик и сподвижник императора Наполеона, изобрел новый метод, позволивший получить общее решение задачи о колебании конечной струны. Эта задача формулируется так: найти решение волнового уравнения (3.3.1), удовлетворяющее начальным и граничным условиям:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0)=f(x), \text{ начальные условия} \\ u_t(x,0)=g(x), \\ u(0,t)=0, \quad \text{граничные условия} \\ u(l,t)=0. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Начальные условия означают, что в момент времени $t=0$ струне придали некоторую форму $f(x)$ и сообщили ускорение $g(x)$. Граничные условия показывают, что на концах $x=0$ или $x=l$ струна жестко закреплена.

Опуская промежуточные выкладки, выпишем решение Фурье задачи о колебании конечной струны, которое представляет собой бесконечную сумму слагаемых, или, как говорят, разложение функции $u(x,t)$ в ряд:

$$\begin{aligned} &u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t); \\ &u_n(x,t)=\sin\frac{n\pi x}{l}(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}); \\ &a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx; \\ &b_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Выясним физический смысл решения (3.3.3), и прежде всего функций $u_n(x,t)$, составляющих это решение. Для этого выполним искусственное преобразование:

$$a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}=$$

$$=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\,(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin\frac{n\pi at}{l})=$$

$$=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\,(\sin\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\cos\varphi_n\sin\frac{n\pi at}{l})=$$

$$=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\sin(\frac{n\pi at}{l}+\varphi_n).$$

Итак,

$$u_n(x,t)=A_n(x)\sin(\frac{n\pi a}{l}t+\varphi_n);$$
$$A_n(x)=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\,\sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad (3.3.4)$$

Из формулы (3.3.4) видно, что каждое решение u_n представляет собой гармоническое колебание (т. е. колебание по закону синуса) с одной и той же частотой $\omega_n=\frac{n\pi a}{l}$ и фазой φ_n. Амплитуда же колебаний $A_n(x)$ для разных точек струны разная. Ясно также, что при $x=0$ и $x=l$ $A_n(0)=A_n(l)=0$, т. е. на концах струна неподвижна. Итак, во времени колебания струны происходят с постоянной частотой ω_n, но с переменной по координате x амплитудой. При этом все точки струны одновременно достигают своего максимального отклонения в одну или другую сторону и одновременно проходят положения равновесия. Такие колебания называют **стоячими волнами.** Пользуясь выражением для амплитуды стоячей волны (3.3.4) и учитывая, что $0\leqslant x\leqslant l$, найдем неподвижные точки стоячих волн:

$n=1$: $\sin\frac{\pi}{l}x=0 \Rightarrow x=0,\ x=l;$

$n=2$: $\sin\frac{2\pi}{l}x=0 \Rightarrow x=0,\ x=l/2,\ x=l;$

$n=3$: $\sin\frac{3\pi}{l}x=0 \Rightarrow x=0,\ x=l/3,\ x=2l/3,\ x=l.$

. . . .

$n=k$: $\sin\frac{k\pi}{l}x=0 \Rightarrow x=0,\ x=l/k,\ x=2l/k,\ ...,\ x=l.$

Неподвижные точки называются **узлами стоячей волны.** Ясно, что посередине между узлами расположены точки, в которых отклонения в стоячей волне достигают максимума. Эти точки называются **пучностями стоячей волны.**

Сделаем общий вывод: колебание конечной струны представляет собой бесконечную сумму стоячих волн $u_n(x,t)$, каждая из которых имеет постоянную частоту колебания $\omega_n=\frac{n\pi a}{l}$ и переменную по длине струны амплитуду $A_n(x)=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\sin\frac{n\pi}{l}x.$ В k-й стоячей волне имеется k пучностей и $(k+1)$ узлов. На рисунке 77 показаны четыре первые стоячие волны струны.

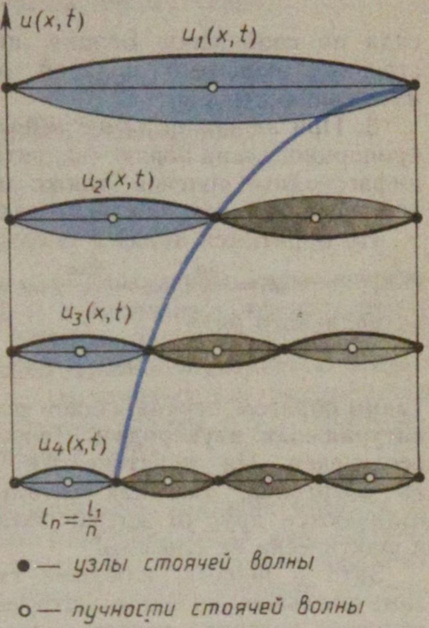


Рис. 77. Четыре первые стоячие волны (гармоники) колеблющейся струны.

Перейдем теперь к «музыкальному содержанию» решения (3.3.3). Мы пришли к выводу, что струна колеблется не только всей своей длиной, но одновременно и отдельными частями: половинками, третями, четвертями и т. д. Следовательно, струна издает звук не только основной частоты $\omega_1=\frac{\pi a}{l}$, но и призвуки частот $\omega_2=\frac{2\pi a}{l}$, $\omega_3=\frac{3\pi a}{l}$, ... $\omega_k=\frac{k\pi a}{l}$, ... Тон основной частоты струны ω_1 называется **основным тоном струны,** а остальные тона, соответствующие частотам ω_2, ω_3, ..., ω_k, ..., называются **обертонами** (верхними тонами) или **гармониками.** Основной тон струны принимается за первый обертон. Именно обертоны, сливаясь в общем звучании с основным тоном, который имеет наибольшую амплитуду и потому наиболее заметен, придают звуку музыкальную окраску, называемую **тембром.**

Различие тембров музыкальных звуков прежде всего объясняется составом и интенсивностью обертонов у разных источников звуков. Чем больше у звука обертонов, тем красивее, «богаче» он нам кажется. По тембру, т. е. по составу обертонов, мы отличаем звуки одной и той же высоты и одинаковой громкости, воспроизводимые на скрипке или фортепьяно, голосом или на флейте.

Рассмотрим подробнее основной тон струны. Вспоминая, что $a=\sqrt{T/\rho}$, получим формулу для частоты основного тона:

$$\omega_1=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \qquad (3.3.5)$$

откуда легко увидеть законы колебания струны, которые экспериментально пытались обнаружить на монохорде пифагорейцы. А именно:

1. Для струн одинаковой плотности и одинакового натяжения частота колебания обратно пропорциональна длине струны (это в точности пифагорейский закон (3.1.2)).

2. При заданной длине и плотности струны ее частота пропорциональна корню квадратному из натяжения (этот закон,

судя по сообщению Боэция, пифагорейцы знали только качественно, ошибочно полагая высоту тона пропорциональной натяжению струны).

3. При заданной длине и натяжении частота струны обратно пропорциональна корню квадратному из ее плотности (этот закон пифагорейцы, конечно, также могли знать только качественно: чем толще струна, тем ниже издаваемый ею звук).

Но обратимся вновь к обертонам. Легко видеть, что частоты обертонов $\omega_1=\frac{\pi a}{l}$, $\omega_2=\frac{2\pi a}{l},\ldots$, $\omega_k=\frac{k\pi a}{l},\ldots$ относятся как числа натурального ряда:

$$\omega_1:\omega_2:\omega_3:\ldots:\omega_k:\ldots=1:2:3:\ldots:k:\ldots \qquad (3.3.6)$$

Таким образом, струна издает целый звукоряд тонов, называемый **натуральным звукорядом.** Теоретически натуральный звукоряд бесконечен. На практике же имеют значение лишь первые 16 обертонов, так как остальные обертоны слишком мало отличаются друг от друга, обладают слишком малой энергией и фактически не слышны.

Зато в первых, наиболее сильных обертонах мы находим замечательное свойство: второй обертон с основным тоном образует интервал октавы $\omega_2:\omega_1=2:1$, третий и второй обертоны — интервал квинты $\omega_3:\omega_2=3:2$, четвертый и третий — кварты $\omega_4:\omega_3=4:3$. Но ведь это есть не что иное, как набор совершенных консонансов! Причем у второй гармоники с первой совпадает каждый второй узел стоячей волны, у третьей с первой — каждый третий, а у четвертой с первой — каждый четвертый (рис. 77). Ясно, что, чем больше узлов у двух стоячих волн совпадает, тем они «больше похожи» друг на друга, т. е. тем созвучнее образуемый ими интервал. Следовательно, с ростом номера гармоники степень консонантности интервала убывает.

Итак, мы приходим к разгадке закона целочисленных отношений консонансов (3.1.1), который, по преданию, был экспериментально открыт самим Пифагором. Все совершенные консонансы, т. е. интервалы с отношением частот вида $\frac{n+1}{n}$ ($n=1, 2, 3$), определены самой природой колебания струны. **Все совершенные консонансы заключены в первых четырех, наиболее мощных гармониках колеблющейся струны, причем по мере удаления от первой гармоники (основного тона) степень консонантности интервала убывает.** Этот «закон консонансов» является следствием математического решения задачи о колебании конечной струны (3.3.3).

Со временем в теории музыки стали различать и **несовершенные консонансы**: большую и малую терции. Эти интервалы как среднее арифметическое и среднее гармоническое основного тона (1) и квинты (3/2) нашел еще Архит. В самом деле, для интервального коэффициента большой терции имеем

$$\frac{1+\frac{3}{2}}{2}=\frac{5}{4},$$

а для интервального коэффициента малой терции:

$$\frac{2\cdot 1\cdot\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{6}{5}.$$

Легко видеть, что несовершенные консонансы определяются следующими — пятой и шестой — гармониками колеблющейся струны. По этому поводу еще в XVIII в. французский музыкальный теоретик Балльер с присущей французу легкостью писал: «Разница между древностью и современностью заключается в том, что тогда начинали считать диссонансы с 5-го призвука, а теперь начинают их считать лишь с 7-го».

Но почему именно шесть гармоник определяют все консонансы? Почему знаменитый «фальшивый», седьмой, обертон не входит ни в какие музыкальные созвучия, тогда как девятый и восьмой образуют основу всей музыкальной гаммы — известный нам тон-интервал (9/8)? Эти и немало других вопросов все еще остаются тайнами гармонии.

В заключение заметим, что пифагорейцы имели практически такое же объяснение явлению консонансов, которое следует из решения (3.3.3). Начиная с Архита греки представляли звук как совокупность множества отдельных ритмических ударов струны по воздуху и таких же колебаний воздуха. Тогда в консонансе октавы отдельные удары верхнего тона происходят в два раза чаще, чем у более низкого основного тона. Следовательно, каждый второй удар верхнего тона достигает нашего уха одновременно с одним ударом основного тона, при этом основной тон как бы целиком переходит в верхний и сливается с ним в едином звучании. В консонансе квинты каждый третий удар верхнего тона совпадает с каждым вторым ударом основного тона, и поэтому квинта звучит менее слитно, чем октава. И так далее. Но совпадение числа ударов струны по воздуху эквивалентно совпадению числа узлов в стоячей волне, которые и определяют число таких ударов в единицу времени, т. е. частоту колебания струны.

Таким образом, пифагорейцы совершенно правильно представляли себе физические основы явления консонанса! Мы же имеем еще одну возможность убедиться в блестящей интуиции и глубоком проникновении пифагорейцев в суть физических явлений.

Начиная с Пифагора теории музыки посвящали глубокие исследования такие прославленные ученые, как Архит и Евклид, Клавдий Птолемей и Северин Боэций, а впоследствии Иоганн Кеплер, Готфрид Лейбниц, Леонард Эйлер. Не всегда эти изыскания приносили желанные плоды (так, о математической теории музыки Эйлера говорили, что она слишком музыкальна для математиков и слишком математична для музыкантов), но всегда они служили развитию как науки математики, так и искусства музыки. И в математике, и в музыке продолжали звучать могучие аккорды, некогда взятые Пифагором.

На этом мы расстаемся с пифагорейской теорией музыки. Но расстаемся ненадолго, ибо пифагорейская музыка продолжала звучать в... пифагорейской астрономии.

4. АСТРОНОМИЯ

4.1. КОСМОС ПИФАГОРЕЙЦЕВ

Луций Анней Сенека (ок. 4 до н. э.— 65 н. э.) — римский мудрец и воспитатель малолетнего Нерона — сказал как-то, что, если бы на Земле было только одно место, откуда можно наблюдать звезды, к нему непрерывно со всех концов стекались бы люди. Сколько существует человек, столько его притягивает звездное небо, и этому «звездному притяжению» столь же подвержен разум человека, как и земному — его тело.

Где начало и где конец этой черной бездны? Сколько звезд рассыпано в ней? Кто я в этом безбрежном безмолвии? Несть числа вопросам, идущим от звездного неба, они приводят в трепет и восторг и простого селянина, и прославленного мудреца. «Вселенная своей неизмеримой громадностью, безграничным разнообразием и красотой, которые сияют в ней со всех сторон, повергает дух в немое удивление» — так через два тысячелетия после Сенеки писал о звездном небе Иммануил Кант (1724—1804).

Разумеется, звездное небо будоражило и разум пифагорейцев, и в пифагорейской μάθημα астрономия была наиболее мировоззренчески значимой и одновременно наиболее поэтической наукой. Астрономия, как никакая другая наука, давала пищу богатому воображению пифагорейцев, и они мало заботились об обуздании своих фантазий логическими и эмпирическими доказательствами. Если вавилонская астрономия кропотливо накапливала и обобщала эмпирический материал, который доставляло ей звездное небо, и в результате смогла прийти к выдающимся научным открытиям, каким было, например, открытие сароса (см. с. 28), то пифагорейская астрономия была чисто умозрительной. Она парила на крыльях поэтических фантазий, не отягощая их грузом научных сомнений.

И все-таки в своих астрономических гипотезах пифагорейцы исходили из одной глобальной идеи. Они верили в гармоническое устройство Мироздания, в его стройную организованность, рациональную упорядоченность, симметрию, а значит, и красоту.

Вот почему Вселенную пифагорейцы впервые назвали словом **Космос**, что в буквальном переводе означает строй, порядок, прекрасное устроение. «Скажи мне... разве есть что-либо стройное и прекрасное, что не было бы подражанием миру. Отсюда имя Космос, которое греки дали ему» — так писал Апулей через полтысячелетия после Пифагора. К сожалению, сегодня это первоначальное пифагорейское значение слова «космос» забыто.

Поистине замечательно, что верная посылка о рациональном устройстве Мироздания привела Пифагора и к ряду верных заключений о его строении. Пифагор из всех плоских линий самой совершенной считал окружность, а из пространственных тел — шар. Ясно, что мерой совершенства этих геометрических объектов служила для Пифагора их симметрия: только окружность и только шар обладают центральной симметрией бесконечного порядка, т. е. при любом повороте вокруг центра они совмещаются сами с собой. Именно «из соображений совершенства» пифагорейцы и утверждали, что траекториями планет являются окружности, а их форма шарообразна.

Сегодня хорошо известно, что пифагорейцы в целом оказались правы: планеты действительно движутся почти по окружностям, а их форма почти шарообразна. Это маленькое «почти» представляет одну из больших научных загадок, ибо в каждом типе симметрии, наблюдаемом в природе, при ближайшем рассмотрении обнаруживается маленький изъян. Природа не терпит точных симметрий! Природа почти симметрична, но не абсолютно симметрична. Однако на вопрос, почему это именно так, сегодня, как отмечает Р. Фейнман, «ни у кого нет никакой разумной мысли».

Итак, постулаты о том, что Земля есть шар, а траектории планет — окружности, являются важнейшими астрономическими догадками Пифагора. Впрочем, в отличие от орфиков, считавших «по определению» мир яйцом, у которого Земля была желтком, воздух — белком, а небосвод — скорлупой, это скорее были не постулаты, а логические следствия гипотезы о совершенном устройстве Мироздания — гениального мировоззренческого постулата пифагорейцев. Подтверждением этому может служить и тот факт, что миф о мировом яйце пришел к орфикам с Востока. Он известен из древнеиндийских и древнеегипетских легенд. Но ни индийцы, ни египтяне не сделали из этого мифа вывода о шарообразности Земли, хотя если Земля мыслилась ими как желток, то вывод этот был просто очевиден. По-видимому, и Пифагор руководствовался не внешним сходством формы желтка и Земли — такое умопостроение представляется слишком примитивным, а внутренней идеей о совершенстве космоса.

Издревле люди отмечали на небосклоне две самые яркие и самые красивые звезды. Они сияли в течение недолгого времени сразу после захода Солнца и незадолго до его восхода и потому были названы Вечерней и Утренней звездами. Об Утренней и Вечерней звездах говорится в поэмах Гомера. Так вот, Пифагор впервые высказал предположение о том, что Утренняя и Вечерняя звезды суть одно и то же и есть не что иное, как планета Венера. Впрочем, честь этого открытия, как и гипотезы о шарообразности Земли, Пифагор часто делит со своим младшим современником Парменидом, древнегреческим философом, который, как и Пифагор, жил в Великой Греции и был идейно связан с пифагорейцами.

По преданию, Пифагору принадлежит и первая простейшая космологическая модель, т. е. модель устройства Вселенной. В центре Мироздания Пифагор помещает Землю, вокруг которой вращаются три сферы: сфера Луны, сфера Солнца и сфера звезд вместе с планетами. Очень скоро эта модель была заменена более совершенными моделями, в которых каждой планете выделялась своя круговая траектория. Однако пифагорейская мысль о том, что каждая планета прикреплена к своей прозрачной небесной сфере и вместе с ней совершает круговое вращение, продолжала жить в астрономии вплоть до Иоганна Кеплера.

Пифагореец Филолай, живший столетием позже своего учителя, по-видимому, является первым в истории астрономии, кто отважился убрать Землю из центра Мироздания и поместить ее на круговую орбиту. Несмотря на наивную причудливость всей космологической системы Филолая, его модель явилась выдающимся событием в истории астрономии, ибо в ней впервые исключалась особая роль Земли как центра Вселенной и, следовательно, особая роль человечества в этом мире. Вот почему Филолай населяет также и Луну животными и растениями, причем более крупными, красивыми и совершенными, чем земные. Лунные животные, по Филолаю, в 15 раз сильнее земных и настолько совершенны, что вовсе не выделяют остатков пищеварения. Другой важнейшей особенностью Филолаевой модели было то, что она шла вразрез с повседневным опытом, который вроде бы со всей очевидностью указывал на неподвижность Земли.

Но Филолай не был гелиоцентристом, он сделал лишь первый шаг в этом направлении. В центре своего космоса Филолай помещает не Солнце, а некий Центральный огонь. Происхождение идеи Центрального огня скорее всего умозрительно, и, видимо, он поставлен в центр Вселенной как источник жизни. Не случайно Филолай называет Центральный огонь Гестией Вселенной: ведь Гестия в греческой мифологии была богиней домашнего очага. Кроме того, по Филолаю, Вселенная и замыкается некой огненной сферой, служащей ее наружной границей.

Между двух огней Филолай на концентрических сферах располагает Землю, Луну, Солнце, пять планет — Меркурий, Венеру, Марс, Юпитер, Сатурн (их последовательность Филолаем не указана)[1] и, наконец, сферу неподвижных звезд. Но помимо

---

[1] Напомним, что остальные три планеты Солнечной системы — Уран, Нептун и Плутон — были открыты лишь в XVIII, XIX и XX вв. соответственно.

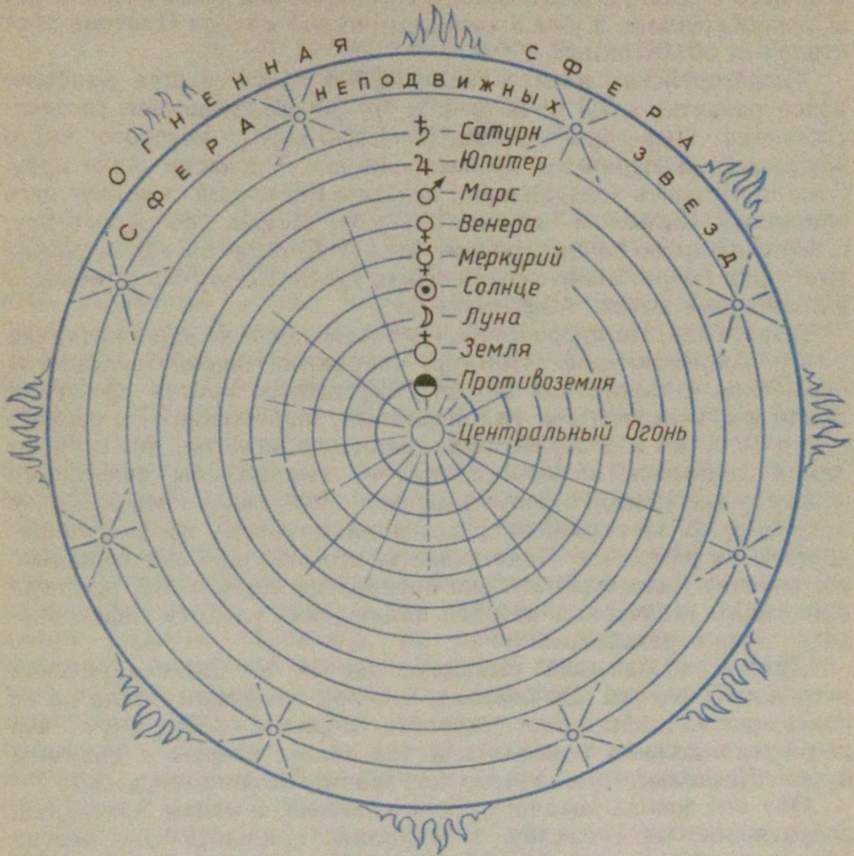


Рис. 78. Система мира по Филолаю (порядок следования планет Филолаем не указан).

этих известных космических тел Филолай между Центральным огнем и Землей помещает еще и некую придуманную им Противоземлю, или Антихтон (рис. 78). Земля, по Филолаю, всегда обращена к Центральному огню одной и той же необитаемой стороной, поэтому ни Центрального огня, ни Антихтона не видно. Солнце же якобы лишь отражает свет и тепло Центрального огня.

Зачем Филолай придумал Противоземлю? По наиболее распространенной версии, для ровного счета, чтобы число сфер равнялось священной десятке. Но при ближайшем рассмотрении эта версия кажется малоубедительной, ибо Филолай мог зачесть в десятку либо Центральный огонь, либо Огненную сферу. Возможно, Антихтон нужен был Филолаю, чтобы защитить Землю от чрезмерного разогревания Центральным огнем, возможно, для объяснения солнечных затмений. Как бы то ни было, но надуманность и Центрального огня, и Противоземли была очень скоро осознана греками, и уже в космологической модели Платона этих странных объектов нет.

Пифагорейская идея о движущейся Земле нашла наиболее яркое развитие в III в. до н. э. в трудах выдающегося соотечественника Пифагора Аристарха Самосского, которого часто называют «Коперником древнего мира». Согласно Аристарху, Солнце являлось неподвижным центром Вселенной. а вокруг него вращались Земля и другие планеты. Земля, по Аристарху, совершала один полный оборот вокруг Солнца за год и, кроме того, один оборот вокруг своей оси за сутки: Но это же в точности Коперникова модель Мироздания!

Да, это так. Но пророческие идеи Аристарха не нашли отклика у его современников. Помимо неприятия, «непочтительного» отношения к Земле как центру Мироздания против вращения Земли выдвигалось два существенных возражения. Во-первых, еще в IV в. до н. э. Аристотель правильно заметил, что если бы Земля двигалась в космосе, то это вызвало бы кажущееся перемещение звезд. Допустить же, что такое перемещение незаметно из-за огромных расстояний до звезд во Вселенной, древние не решались. Надо сказать, что это наиболее серьезное возражение было окончательно преодолено лишь в XIX в., когда с помощью утонченных методов наблюдения удалось зафиксировать такое перемещение.

Другое возражение выдвинул во II в. александрийский астроном Птолемей. Он показал, что при вращении Земли на ее поверхности достигаются скорости порядка 2000 км/ч, что неминуемо должно приводить к ураганным ветрам и пылевым бурям. Поскольку ничего этого нет, значит, Земля неподвижна.

Оба эти довода казались убедительными, и идеям Аристарха, восходящим, по существу, к Филолаю, пришлось еще долгих 18 столетий ждать своего возрождения в трудах великого Коперника. Надо сказать, что сам Коперник в бессмертном труде «Об обращении небесных кругов», составившем основу современной астрономии, неоднократно ссылался на Филолая и других пифагорейцев как на основоположников доктрины о движении Земли.

Таков был космос пифагорейцев, в котором гениальные научные озарения переплетались с самыми сказочными фантазиями. Однако главный принцип устройства Мироздания оставался у пифагорейцев неизменным: это был принцип гармонии. С этого принципа начиналось и знаменитое сочинение Филолая «О природе», которое после полуторавековых споров вокруг сохранившихся от него фрагментов все-таки признано подлинным: «Природа, сущая в космосе гармонически слажена из беспредельного и определяющих начал. Так устроен весь космос и все, что в нем».

Но истинная гармония немыслима без музыки, и это волшебное звучание пифагорейского космоса нам предстоит услышать.

4.2. «ПИФАГОРОВО ПЕНЬЕ СВЕТИЛ»

> Я, как древний Коперник, разрушил
> Пифагорово пенье светил
> И в основе его обнаружил
> Только лепет и музыку крыл.
>
> (Н. Заболоцкий)

Увы, редкий поклонник творчества Николая Заболоцкого (1903—1958) может толком объяснить, что это такое «Пифагорово пенье светил». Учение о музыке сфер — самый поэтичный и самый сказочный мотив пифагорейской астрономии — сегодня прочно забыто. А ведь этот мотив имеет тысячелетнюю историю, он исполнялся в тысячах вариантов, начиная от самого Пифагора вплоть до «Гармонии мира» Кеплера, написанной в XVII в. Впрочем, еще раз этот мотив неожиданно зазвучал в начале XX в.

Согласно Пифагору, Солнце, Луна и планеты располагались на небесных сферах и совершали вместе с ними круговое вращение. Как и все движущиеся тела, вследствие трения об эфир они издавали звуки, которые соединялись в музыкальные созвучия. Так рождалась чудесная музыка — «мировая музыка», или «гармония сфер»,— музыка, без которой мир бы распался на части. Земная же музыка — это первое из искусств, дарующих людям радость,— являлась, по мнению пифагорейцев, лишь отражением «мировой музыки», царящей среди небесных сфер. По этой причине земная музыка как отголосок мировой находила живейший отклик в душе человека, ибо сам человек был частичкой Мироздания и, значит, в нем изначально звучали мировые гармонии. Вот почему музыка считалась греками главнейшей в семье искусств.

Система мира Пифагора, как нам известно, состояла из трех сфер — Луны, Солнца и звезд вместе с планетами, вращавшихся вокруг Земли. Чем дальше находилась сфера от Земли, тем больше была ее линейная скорость и тем выше издаваемый ею тон. Эти рассуждения скорее всего подсказывались простым опытом: камень, раскручиваемый на веревке, со свистом разрезает воздух и прекрасно демонстрирует все описываемые закономерности. Пифагор, естественно, полагал, что эти сферы звучат совершенными консонансами, т. е. если издаваемый Землей тон принять за тонику (1), то сфера Луны звучала в тон кварты (4/3), сфера Солнца — квинты (3/2), а сфера звезд и планет — октавы (2). Таким образом, получался аккорд из совершенных консонансов: до — фа — соль — до$_1$.

Итак, внутреннее устройство пифагорова космоса напоминало своеобразную музыкальную шкатулку, в которой каждая из движущихся сфер издавала некоторый звук. «Когда несутся Солнце, Луна и еще столь великое множество таких огромных светил со столь великой быстротою, невозможно, чтобы не возникал некоторый необыкновенный по силе звук»,— утверждал неизвестный пифагорейский автор, возможно Филолай. Таким образом, колеблемый движением сфер эфир издает чудесную мировую музыку. Однако человеческое ухо не слышит этой ни с чем не сравнимой музыки. Как рожденный на берегу моря человек перестает в конце концов различать беспрестанный рокот волн, так и слух человека привыкает и не замечает гармонического звучания небесных сфер. И лишь душа человека охотно откликается на это звучание.

Дальнейшее развитие пифагорейское учение о гармонии сфер получило в трудах Платона. Платоновский диалог «Тимей», эта квинтэссенция древнего пифагореизма, является лучшим образцом античной космологии. Однако многое в «Тимее» изложено туманными и заумными намеками, что уже в древности вызывало бесконечные споры, разночтения и комментарии, которые длятся и до сего времени.

Платон исходит из геоцентрической модели космоса: центром Мироздания для него является неподвижная Земля, вокруг которой на семи сферах вращаются Луна, Солнце, Венера, Меркурий, Марс, Юпитер и Сатурн. Далее следует сфера неподвижных звезд (рис. 79). На базе этой системы Мироздания Платон развивает теорию **небесного гептахорда** (’επτα-ϰορδον — **семиструнника,**— т. е. теорию семи подвижных сфер, настроенных в музыкальных отношениях. Согласно Платону, небесный гептахорд описывается рядом чисел

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 9 \quad 8 \quad 27, \qquad (4.2.1)$$

однако ни физический смысл членов этого ряда, ни их порядок в космической системе Платоном не указан.

Мы не будем погружаться в пучину толкований и интерпретаций платонова гептахорда, которых за два с половиной тысячелетия накопилось великое множество. Заметим только, что ряд (4.2.1) содержит в себе все основные музыкальные интервалы: октаву (2/1), квинту (3/2), кварту (4/3), тон (9/8) и полутон $\left(\frac{256}{243}=\frac{8}{27}\cdot\frac{8}{9}\cdot 2\cdot 2\right)$. Объясняется это просто, ибо платонов гептахорд составлен из первых трех степеней чисел 2 и 3. Но квинта (3/2) и октава (2/1), как было показано на с. 194, позволяют получить любой звук пифагоровой гаммы и, значит, любой интервал. Таким образом, платонов гептахорд содержит в себе строй любого лада, и неудивительно, что Платон находит в нем дорийский лад — этот истинно национальный лад древних греков.

Ключ же к платонову гептахорду спрятан в числах 1, 2, 3, а именно в пифагорейском понимании единицы как символа неделимого начала, двойки — как символа неопределенной бесконечности и тройки — как символа определенности. Но для Платона это слишком просто, и в качестве символа беспредельного он берет куб со стороной 2, площадью грани 4 и объемом

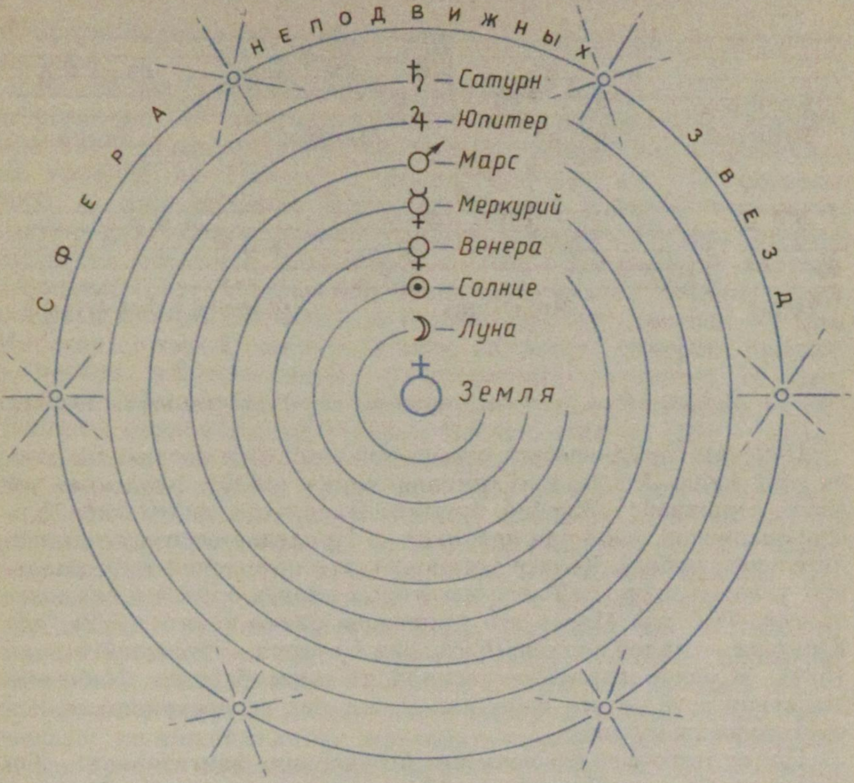


Рис. 79. Система мира по Платону.

8. А в качестве символа определенности — куб со стороной 3 и параметрами 3, 9, 27. Тогда взаимное переплетение этих двух троек чисел плюс начало всего — единица — и дают то единство «беспредельного и определяющих начал», о котором говорил Филолай.

Пифагорейское учение о музыке сфер фактически без изменений просуществовало всю античную эпоху, все средневековье, всю эпоху Возрождения вплоть до «великой научной революции» XVI — XVII вв. И заключительный грандиозный каскад аккордов мировой гармонии прозвучал в работах Иоганна Кеплера, «светлого мистика», как красиво назвал его Герман Вейль. Свято следуя пифагорейско-платоновской традиции, Кеплер верил, что в основе Мироздания лежат простые числовые соотношения и совершенные геометрические формы. Всю свою трудную жизнь Кеплер посвятил поиску этих соотношений, «попутно» открыв три знаменитых астрономических закона, которые принесли ему подлинную научную славу, но которые сам автор ценил значительно ниже, чем открытые им мистические соотношения.

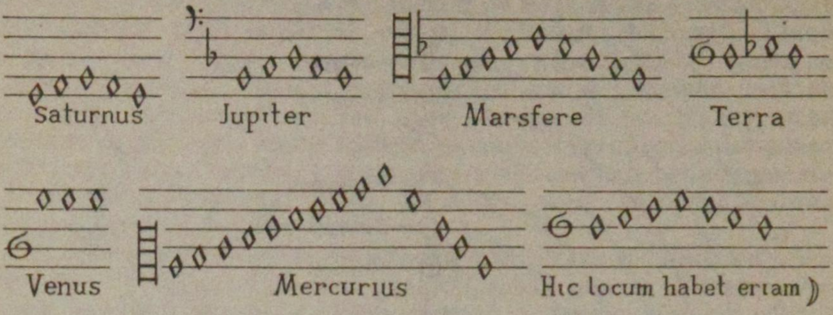



Рис. 80. Нотная запись «небесной музыки» из «Гармонии мира» Кеплера.

Поискам гармонических отношений в космосе посвящена одна из глав книги Кеплера «Гармония мира» (1619), названная им своей вершиной: «Жребий брошен. Я написал книгу либо для современников, либо для потомков...» Проделав огромную вычислительную работу, Кеплер установил, что отношения экстремальных угловых скоростей[1] для некоторых планет близки к гармоническим. Так, для Марса это отношение равно квинте (3/2), для Юпитера — малой терции (6/5), для Сатурна — большой терции (5/4). «Солнце гармонии засияло во всем блеске... Небесные движения есть не что иное, как ни на миг не прекращающаяся многоголосая музыка».

После этого Кеплер начинает безудержно фантазировать. Он утверждает, что Сатурн и Юпитер «поют» басом, Марс — тенором, Земля и Венера — альтом, а Меркурий — дискантом. Кеплер приводит даже нотную запись этих космических мелодий, которую мы воспроизводим непосредственно из «Гармонии мира» на рисунке 80. Более того, Кеплер дает и «слова» к этим космическим песням. Например, он утверждает, что «Земля поет ноты *MI*, *FA*, *MI*, откуда можно догадаться, что в нашей юдоли царят *MIseria* (бедность) и *FAmes* (голод)».

Никаких «математических доказательств» этому Кеплер уже не приводит, да и вообще значительная доля «Гармонии мира» занята повторением мыслей Кеплера, изложенных им в его блестящей юношеской работе «Тайна мироздания» (1696). Кеплер устал от сверхчеловеческой вычислительной работы и сам признавался в этом: «Мозг мой устает, когда я пытаюсь понять, что я написал, и мне уже трудно восстановить связь между рисунками и текстом, которую я сам когда-то нашел...» Между тем на смену фантазиям Кеплера уже шли уравнения Ньютона: занималась заря нового естествознания. Красивая сказка о музы-

---

[1] Из второго закона Кеплера следует, что угловые скорости планет не постоянны и имеют наименьшее значение в афелии и наибольшее — в перигелии.

ке сфер доживала свой век, и работы Кеплера были ее лебединой песней.

Не следует спешить обвинять Кеплера в мистицизме, увлечении астрологией и числовых спекуляциях. Правильнее, видимо, вспомнить о времени, в котором он жил и творил: XVI в. закончился костром на Площади Цветов в Риме, где 17 февраля 1600 г. был сожжен Джордано Бруно. Следует вспомнить трагическую историю матери Кеплера Катерины Кеплер, которую публично объявили ведьмой и процесс над которой тянулся страшные 6 лет. Обвиняемую заковывали в цепи, ставили перед палачом и орудиями пыток, и только искусные действия ее сына Иоганна, который сам вел защиту, позволили выиграть процесс у церкви. «Арестованную, к сожалению, защищает ее сын, господин Иоганн Кеплер, математик»,— писал судебный писец. Только в родном городе Кеплера Вейле с 1615 по 1629 г. из нескольких сот жителей ужасная смерть постигла 38 «колдуний». Вот в какое время рождалось современное естествознание!

И все-таки самым удивительным, пожалуй, является то, что пифагорова музыка сфер вновь зазвучала в 20-е гг. XX в. в самой современной области естествознания — атомной физике. Из макрокосмоса мировая музыка перешла в микрокосмос!

Согласно теории Нильса Бора, развитой им в 1913 г., движение электрона вокруг атомного ядра возможно только по избранным «разрешенным» орбитам, двигаясь по которым электрон вопреки законам классической электродинамики не излучает энергии, но может скачком переходить с одной орбиты с энергией E_i на другую «дозволенную» орбиту с энергией E_k, испуская ($i > k$) или поглощая ($i < k$) при этом порцию «квант» электромагнитной энергии с частотой:

$$\nu_{ik} = \frac{E_i - E_k}{h}, \ h \text{ — постоянная Планка.} \qquad (4.2.2)$$

В простейшем случае для атома водорода, содержащего один электрон, энергия n-го энергетического уровня равна:

$$E_n = -\frac{R}{n^2}, \ R \text{ — постоянная Ридберга.} \qquad (4.2.3)$$

Здесь $n = 1, 2, 3, \ldots$ называется квантовым числом. Тогда совокупность частот, излучаемых атомом водорода при переходе с верхнего энергетического уровня на нижний ($i > k$), определяет оптический спектр испускания данного атома и каждому такому переходу соответствует своя спектральная линия. Для атома водорода согласно (4.2.3) получаем совокупность спектральных линий с частотами:

$$\nu_{ik} = \frac{E_i - E_k}{h} = \frac{R}{h}\left(\frac{1}{n_k^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = \frac{R}{h}\alpha_{ik}.$$

При переходе со второго, третьего и т. д. энергетических уровней ($n_i = 2, 3, 4, \ldots$) на первый ($n_b = 1$) получается так называемая спектральная серия Лаймана, для которой $\alpha_{21}=3/4$, $\alpha_{31}=8/9$, $\alpha_{41}=15/16$. Но ведь это — кварта, тон и полутон чистого строя! Таким образом, как отмечал Эйнштейн, было открыто некоторое подобие между колебанием струны и атомом, испускающим излучение.

Вот что по этому поводу писал в 1925 г. А. Зоммерфельд: «Управляемые целыми квантовыми числами спектральные серии фактически по смыслу являются обобщением древнего трезвучия лиры, из которого пифагорейцы еще 2500 лет назад выводили гармонию явлений в природе, а наши кванты действительно напоминают о той роли, которую, по-видимому, играли целые числа у пифагорейцев, причем не в качестве некоего атрибута, а как суть физических явлений. Возможно, начало математической физики надо отнести именно ко времени пифагорейцев, которые около 600 лет до н. э. в Южной Италии установили целочисленные отношения между длинами струн лиры при их гармоническом звучании, т. е. впервые выразили физическое явление математическими соотношениями. И когда сегодня в путанице линий спектра железа мы наводим порядок, то нами руководит твердая вера в целочисленность и гармонию явлений природы...

Вот Кеплеру бы дожить до современной квантовой теории! Он увидел бы осуществленной свою самую смелую юношескую мечту, но не в макрокосмосе небесных тел, а в микрокосмосе атома. Строение оболочки атома гораздо чудесней той космографии, которую представлял себе Кеплер. То, что Кеплер писал в 1619 г. о небесной механике, подходит столь же хорошо к нашей сегодняшней атомной динамике...»

Итак, по прошествии 2000 лет после Пифагора музыка сфер вновь зазвучала в астрономических открытиях Кеплера, а через 300 лет после Кеплера та же гармония целочисленных отношений была обнаружена в микрокосмосе атома. За огромный промежуток времени, практически равный всей истории европейской цивилизации, наука совершила два гигантских витка по спирали, в каждом из которых старый пифагорейский мотив о всеобщей гармонии звучал в хоре самых современных научных знаний. Сколько еще таких витков предстоит сделать науке?!

4.3. ПЯТЬ СТИХИЙ МИРОЗДАНИЯ

Музыка целочисленных отношений, мотив всеобщей гармонии звучали и в пифагорейском микрокосмосе. Это, конечно, не более чем курьез, но «музыкальное строение» микрокосмоса, открытое квантовой механикой XX в., было угадано пифагорейцами 2500 лет назад. Произошло это благодаря тому, что гармонические отношения пифагорейцы считали основой всего Мироздания, и они не замедлили умозрительно распространить их и на строение микрокосмоса. Как же был устроен микрокосмос пифагорейцев?

Во времена пифагорейского союза, а возможно, и в нем самом в древнегреческой натурфилософии родилась концепция четырех элементов (четырех стихий) — первооснов материального мира: огня, воздуха, воды и земли. Согласно некоторым античным источникам, четыре космические стихии — первоосновы Мироздания — были геометризированы самим Пифагором: атом каждой стихии мыслился в виде определенного правильного многогранника. Видимо, данное утверждение близко к истине, ибо впоследствии, когда идея геометризации материальных стихий была блестяще развита в диалоге Платона «Тимей», это послужило поводом для обвинения Платона в плагиате пифагорейских книг. Так или иначе, но о пифагорейском микрокосмосе мы знаем в основном от Платона, поэтому сегодня нам остается только благодарить Платона за сохранение и развитие пифагорейских идей.

Итак, огонь и землю Платон называет основными компонентами Мироздания: «...всему, что имело произойти, надлежало, конечно, быть телесным, видимым и осязаемым. Но быть видимым ничто не может без посредства огня, точно так же и осязаемым ничто не может быть без чего-нибудь твердого, твердым же ничто не может быть без земли».

Поскольку «невозможно, чтобы две вещи совершенным образом соединились без третьей» (Платон. «Тимей»), между основными стихиями помещались две средние — вода и воздух, причем первая из них являлась средней арифметической двух основных, а вторая — средней гармонической. В итоге все четыре стихии оказывались связанными музыкальной пропорцией (1.4.10):

$$\frac{\text{земля}}{\text{вода}} = \frac{\text{воздух}}{\text{огонь}}.$$

Принимая отношение основных элементов — атомов земли к атомам огня — за октаву (2/1), для атомов воды получается интервал квинты (3/2), а для атомов воздуха — кварты (4/3). Ясно, что атомы земли и воды также образуют интервал кварты, воды и воздуха — интервал тона (9/8) и т. д. Итак, атомы четырех стихий «настраивались» Платоном в совершенных консонансах, как и четыре основные струны лиры, т. е. в отношении 6:8:9:12.

Атомам земли Платон придавал форму куба, так как и земля, и куб отличаются неподвижностью и устойчивостью. Атомам воды — форму икосаэдра, ибо вода отличается текучестью, а из всех правильных тел икосаэдр — наиболее «катящийся». Атомам воздуха — форму октаэдра, поскольку воздух движется взад и вперед и октаэдр как бы направлен одновременно в разные стороны. Атомам огня — форму тетраэдра как наиболее острого, мечущегося в разные стороны. Не у дел остался пятый правильный многогранник — додекаэдр. Для него Платон вводит пятый элемент — «пятую сущность»[1] — мировой эфир, атомам которого придается форма додекаэдра как наиболее близкого к шару — самому совершенному по форме телу. С тех пор правильные многогранники называются также **платоновыми телами.**

На рисунке 81 показаны платоновы тела и их «физическая» и «музыкальная» интерпретации, согласно Платону. Надо сказать, что, несмотря на любовь Платона к геометрии, музыкальные отношения в платоновых телах являются чисто умозрительными и не имеют под собой никакой геометрической основы. Этими отношениями не связаны ни число вершин платоновых тел, ни объемы правильных многогранников, вписанных друг в друга, ни число ребер или граней.

Видимо, и Платон, и его античные последователи прекрасно осознавали этот недостаток теории Платона, вот почему поиск музыкальных отношений в геометрических образах сильно увлекал античных математиков. Достаточно сказать, что из всех своих первоклассных открытий Архимед больше всего ценил именно открытие отношения объемов и площадей поверхности цилиндра и вписанного в него шара, равного 3/2, т. е. квинте (рис. 82). Чертеж этих фигур и эпитафия, называющая это открытие величайшим, были выбиты на могильной плите Архимеда, как хотел того сам ученый.

Конечно, пифагорейско-платоновская теория пяти стихий Мироздания вызывает сегодня лишь вежливую улыбку. Мы вообще склонны одаривать такими улыбками «простодушных», на наш просвещенный взгляд, древних, забывая при этом, что, оказавшись волей судьбы на вершине огромной пирамиды знаний, построенной человечеством, сами мы не добавили к ней и песчинки. И сколь жалкими и наивными оказываются часто наши собственные попытки прибавить хоть ничтожную частицу в эту пирамиду. Так, не лучше ли поискать ту внутреннюю мудрость, которая вела древних к их отжившему учению?

А такая мудрость в пифагорейско-платоновской теории есть, более того, она оказывается удивительно современной. Сегодняшнее Мироздание объемлет не пять стихий, а чуть более ста атомов элементов, но, как и 2500 лет назад, это число ничтожно в сравнении с огромным разнообразием рождаемых ими веществ.

Сверхзадачу современной физики составляет выявление истинных «кирпичиков» Мироздания — элементарных частиц — первичных, неразложимых далее элементов, из которых состоит вся материя. Еще в начале XX в. считалось, что таких частиц три: электрон, протон и нейтрон. Однако катастрофический рост числа

---

[1] Пятая сущность (от лат. *quinta essentia* — квинтэссенция) у средневековых алхимиков стала означать тончайший элемент, якобы составляющий сущность вещей. В настоящее время квинтэссенция — синоним самого главного, наиболее существенного.

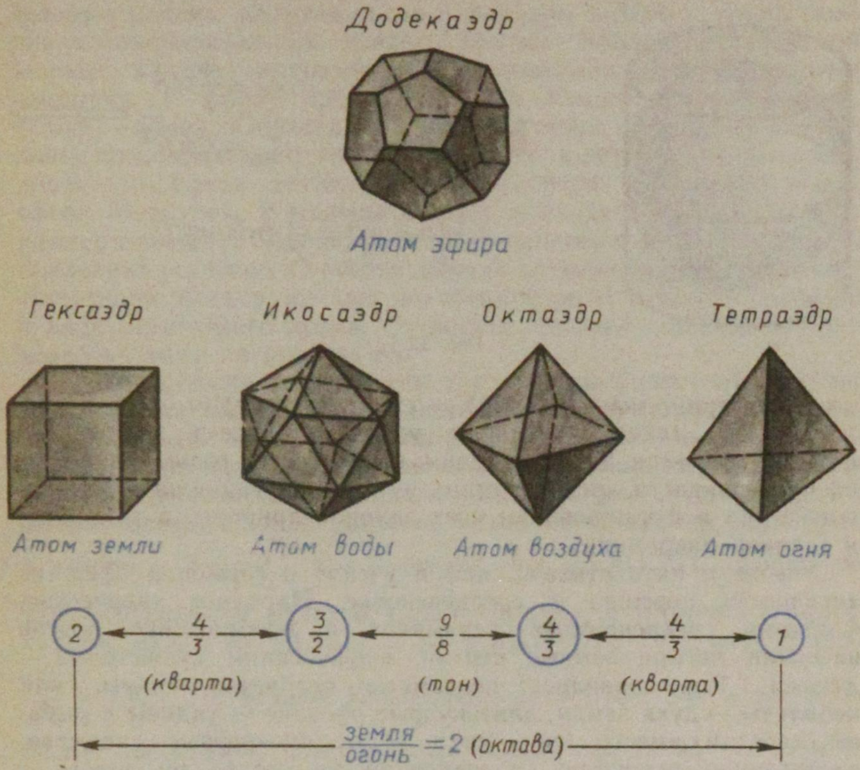
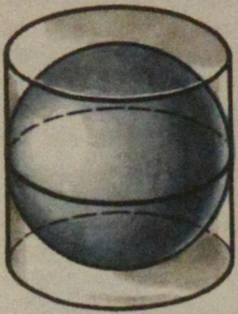


Рис. 81. Правильные многогранники и их физическая и музыкальная интерпретация по Платону.

открываемых элементарных частиц привел во второй половине XX в. к пересмотру воззрений об их элементарности. Сегодня есть основания считать, что такие «экс-элементарные» частицы, как протоны, нейтроны, мезоны, гипероны и др., состоят из различных комбинаций трех типов **кварков** (либо пар кварк — антикварк) — самых современных стихий Мироздания. Но, как и во времена Платона, принцип простоты является той нитью Ариадны, которая ведет физиков XX в. по темным лабиринтам микромира.

Еще более современным выглядит пифагорейско-платоновское стремление видеть элементы Мироздания в виде правильных симметричных тел. Именно принцип симметрии руководил Платоном совместно с Пифагором при отборе пяти правильных, в высшей степени симметричных тел в качестве «кирпичиков» Мироздания. Но этот же принцип является одним из всеобщих принципов всего современного естествознания. Современная наука все глубже проникает в тайну того, что за внешним проявлением симметрии — от симметрии кристаллов и снежинок



$$V_ц = 2\pi R^3 \qquad V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \Longrightarrow$$

$$S_ц = 6\pi R^2 \qquad S_ш = 4\pi R^2$$

$$\frac{V_ц}{V_ш} = \frac{S_ц}{S_ш} = \frac{3}{2} \text{ (квинта)}$$

Рис. 82.

до симметрии молекул ДНК — стоит симметрия тех фундаментальных законов, которые управляют всеми процессами физического мира. Таким образом, нам остается только удивляться прозорливости древних, столь чутко предугадавших значение симметрии в формировании всех законов природы, в том числе и законов микромира.

Учение о пяти стихиях, как и учение о гармонии сфер, из античности перешло в средневековье. Народное творчество, фантазия средневековых алхимиков и воображение поэтов населили четыре земные стихии мифическими существами — духами. Так появились подземные человечки **гномы**, или **кобольды**,— духи земли; златокудрые русалки — **ундины** с рыбьим хвостом вместо ног — духи воды; прекрасные существа, населяющие атмосферу, с шапочкой из цветка на голове — **сильфы**, или **эльфы**,— духи воздуха; и наконец, пляшущие в огне в виде ящериц духи огня — **саламандры.** Карлики-гномы помогали людям находить подземные богатства, красавицы ундины пели вечерами обворожительные песни, беззаботные эльфы кружились в своем вечном танце, а ящерицы-саламандры метались в языках пламени. Так отжившая научная теория возрождалась в красивых сказаниях.

Но созвездию пяти платоновых тел суждено было еще раз вспыхнуть на небосводе естествознания, причем на сей раз не в пифагорейско-платоновском микрокосмосе, а в макрокосмосе Иоганна Кеплера. Все та же пифагорейская вера в гармонию, красоту и математически закономерное устройство Мироздания привела Кеплера к его озарению: существует только пять платоновых тел и только шесть планет. Вряд ли это случайно, рассуждал Кеплер, значит, сферы планет связаны между собой вписанными в них платоновыми телами. Поскольку для каждого правильного многогранника центры вписанной и описанной сфер совпадают (см. с. 151), то вся модель будет иметь единый центр, которым и будет наше светило Солнце.

Остальное было делом техники. Проделав огромную вычислительную работу, испытав сотни вариантов, в 1596 г. безвестный двадцатичетырехлетний учитель Иоганн Кеплер в маленькой книжке «Тайна мироздания»[1] опубликовал формулу своего открытия. В сферу орбиты Сатурна Кеплер вписывает куб, в куб — сферу Юпитера, в сферу Юпитера — тетраэдр, и так далее последовательно вписываются друг в друга сфера Марса — додекаэдр, сфера Земли — икосаэдр, сфера Венеры — октаэдр, сфера Меркурия. В едином центре всей системы коперниканец Кеплер помещает Солнце. Тайна Мироздания кажется раскрытой! Вселенная устроена на основе единого геометрического принципа! Ликующий Кеплер мечтает изготовить свою модель Вселенной в виде серебряного кубка, старинная гравюра которого воспроизведена нами на рисунке 83.

Сегодня, когда открыты еще три планеты Солнечной системы, таинственная связь между планетными расстояниями и свойствами правильных многогранников рассыпалась окончательно и модель Кеплера может служить не более чем изящным упражнением по стереометрии. Заитересовавшийся читатель может самостоятельно воспроизвести расчеты Кеплера. Например, для куба с ребром a $R=a\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r=\frac{a}{2}$, откуда $\frac{R}{r}=\sqrt{3}\approx 1{,}732$. Современные усредненные радиусы орбит Сатурна и Юпитера соответственно равны $R_С=1{,}427\cdot 10^9$ км и $R_Ю=0{,}788\cdot 10^9$ км, откуда $\frac{R_С}{R_Ю}=1{,}834$. По данным Коперника, $\frac{R_С}{R_Ю}=1{,}758$. Это и все остальные совпадения действительно поразительны, но все-таки не столь точны, как того бы хотелось педантичному Кеплеру. Особые неприятности доставила Кеплеру сфера Меркурия, которую в конце концов пришлось вписать в октаэдр так, чтобы она касалась не граней, а середины ребер последнего. Остальные незначительные расхождения между теорией и опытными данными пришлось списать на толщину реальных небесных сфер.

Однако червь сомнения поселился в душе Кеплера. Можно сказать, что оставшиеся тридцать лет жизни Кеплер посвятил спасению своей модели Вселенной от самого себя. Эта работа привела к открытию истинных астрономических законов — трех знаменитых законов Кеплера, на базе которых Ньютон построил свою теорию тяготения. Сам же Кеплер, «светлый мистик», так в полной мере и не осознал своих истинных открытий и до конца жизни более всего ценил свою изящную юношескую работу.

---

[1] На самом деле работа Кеплера, как требовала мода того времени, называлась более вычурно: «Предвестник космографических исследований, содержащий тайну мироздания относительно чудесных пропорций между небесными кругами и истинных причин числа и размеров небесных сфер, а также периодических движений, изложенный с помощью пяти правильных тел Иоганном Кеплером из Вюртемберга, математиком достославной провинции Штирии».

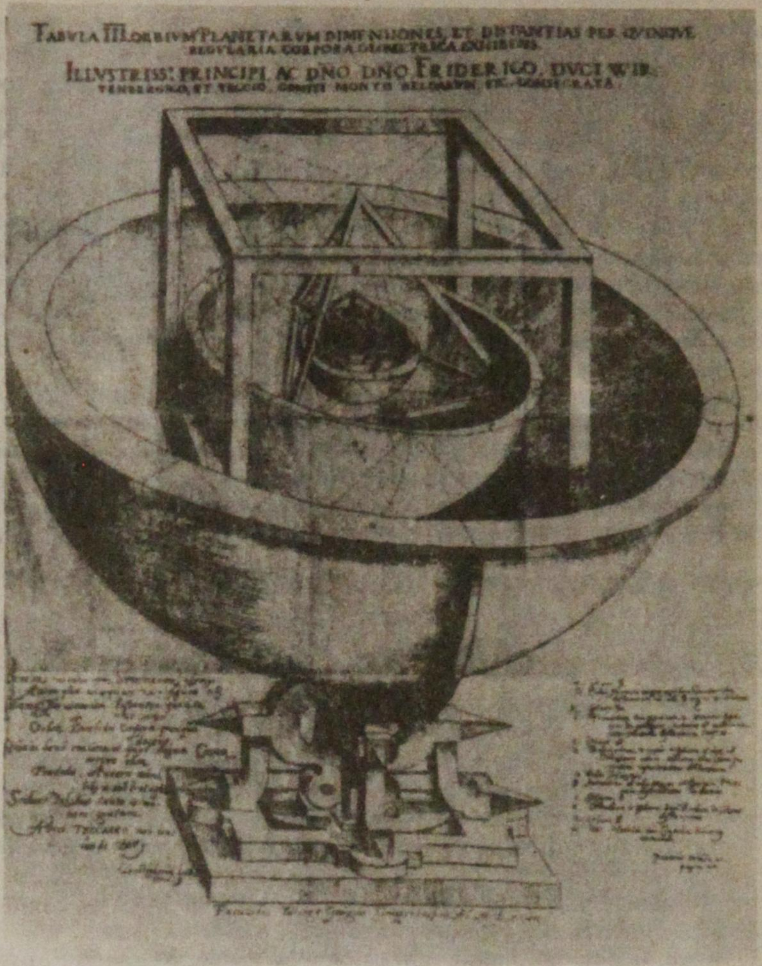


Рис. 83. Космический кубок Кеплера. Гравюра из книги XVII в.

«Тайна мироздания» и «Гармония мира» Кеплера прозвучали заключительным аккордом всей пифагорейской астрономии. Этими работами завершился долгий эмбриональный период науки астрономии, длившийся более 2000 лет, от умозрительных построений Пифагора до мистических изысканий Кеплера, подкрепленных математическими расчетами.

Но вместе с тем работы Кеплера явились и прелюдией к новой астрономии, астрономии, в которую вместе с теорией тяготения Ньютона смело вошла математика и совершила в ней подлинную революцию. Гениальное предвидение Пифагора о том, что математика откроет человечеству двери к тайнам Мироздания, сбылось, хотя ждать этого пришлось более двух тысячелетий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. СОВРЕМЕННАЯ МЫСЛЬ ДРЕВНИХ

«Тысячи путей ведут к заблуждению, к истине — только один». Этот афоризм французского просветителя Жана Жака Руссо преследовал автора с первых страниц книги. Каким же путем прошли мы в этой книге? Вряд ли это был тот единственный путь, след от которого безнадежно стерт тысячами промелькнувших лет. Но вряд ли справедливо будет сказать, что путь наш нигде не пересекался с тем единственным истинным путем, который прошел сам Пифагор. Нашу задачу мы видели в том, чтобы отыскать как можно больше таких точек пересечения.

Но даже если истинного пути Пифагора вообще не существовало, даже если Пифагор целиком был легендарной фигурой, и в этом случае за ней стоит нечто реальное, ибо Пифагор стал образом раннеантичной эпохи, эпохи, в которую закладывались основы современной математики, философии, да и всей современной науки вообще. Без Пифагора и пифагорейцев невозможно представить всю античную культуру: столь прочно пифагореизм вошел в ее плоть и кровь.

Гениальные идеи Пифагора, предвосхитившие эвристическую роль математики в познании окружающего мира, укрепили у последующих поколений веру в могущество человеческого разума, убежденность в познаваемости Природы; они послужили отправной точкой для многих блестящих самостоятельных учений, подаренных человечеству греками. В парафраз эпиграфу ко второй главе книги мы рискнем сказать, что все, что двигалось в греческом мире, имело свое начало в пифагореизме.

В качестве доказательства сошлемся на авторитет Платона, этого величайшего философа не только античности, но и всех времен и народов, который подчас был настолько близок к пифагореизму, что его даже упрекали в плагиате. Желчный скептик Тимон писал:

«Эх, Платон... И тебя к учению страсть охватила!
Деньги большие ты отдал в обмен на малую книжку:
Сливки снимая с нее, «Тимеи» строчить научился».

Хотя обвинение Тимона в целом и несостоятельно, оно говорит об огромном авторитете пифагорейских книг (в данном случае речь идет о филолаевском сочинении «О природе») в античную эпоху.

Но влияние пифагорейцев не ограничивается рамками античности. Через два тысячелетия, в эпоху великой научной революции, пророческий пифагорейский тезис о рациональном, в конечном счете математическом устройстве Мироздания — тезис, не нашедший в свое время достаточного научного обоснования, обрел второе рождение. В устах Галилея пифагорейское «Все есть число» зазвучало более выразительно: книга Природы написана на языке математики. И если Кеплер был последним пифагорейцем-мистиком, то все последующие естествоиспытатели от Ньютона до Эйнштейна были пифагорейцами-рационалистами, объединенными верой в разумную целесообразность, красоту и гармонию Природы, управляемой по законам математики.

Таким образом, впервые в истории человеческой мысли обратившись не к самим материальным стихиям Мироздания, а к их геометрической структуре и арифметическим отношениям, пифагорейцы предвосхитили возникновение математического естествознания, стремительное развитие которого стало символом эпохи XX в.

Безграничная вера пифагорейцев в число — в единственно верный математический путь к истине — наиболее страстно и по античному благородно прозвучала в одном из сохранившихся фрагментов сочинения Филолая «О природе»: «В число же никогда не проникает ложь, потому что она противна и ненавистна его природе, истина же родственна числу и неразрывно связана с ним с самого начала».

Но не только философия числа стяжала бессмертную славу пифагорейцам. Знакомясь во второй части книги с пифагорейской «математой», мы на каждом шагу убеждались в поразительном умении пифагорейцев «смотреть в корень», находить глубокие «вечные» проблемы, решение которых и в XX в. может составить славу каждому, дерзнувшему взяться за них. До сего дня ждет своего решения проблема совершенных чисел, единственную (пока или навсегда?) формулу для которых нашли пифагорейцы. Ждет объяснения и загадка феномена золотого сечения, которое также впервые было обнаружено пифагорейцами.

Лишь в самом конце XVIII в. юный «король математиков» Карл Гаусс расставил все точки над *i* в древней пифагорейской задаче о построении правильного многоугольника. Лишь в конце XIX в. было окончательно доказано, что все три классические задачи древности, также восходящие к пифагорейцам, неразрешимы с помощью циркуля и линейки. Лишь во второй половине XIX в. Рихард Дедекинд построил теорию действительных чисел, обнаруженных за 2500 лет до Дедекинда Пифагором. Что касается самой теории действительных чисел Дедекинда, то она опять-таки идейно восходит к общей теории отношений Евдокса, знаменитого ученика последнего пифагорейца Архита.

Но пифагорейцы могут гордиться не только постановкой нерешенных (или решенных через тысячелетия) проблем, но и решением ряда важнейших задач, а также созданием могучих методов, не утративших свою силу и сегодня. Главнейшим из этих методов является метод доказательства, который, по преданию, сам Пифагор ввел в математику и которым он фактически превратил математику из собрания кустарных эмпирических рецептов в самостоятельную дедуктивную науку.

К методу доказательства примыкает и аксиоматический метод. Его сущность состоит в выделении конечного набора недоказуемых первоначальных истин — аксиом, из которых с помощью доказательств выводятся все остальные математические истины — теоремы. Идея аксиоматического метода также родилась в школе Пифагора. Очень скоро эта идея была блестяще развита в «Началах» Евклида, а еще через два тысячелетия — в «Математических началах натуральной философии» Ньютона и «Началах математики» Бурбаки.

Выдающимся вкладом в математику является теорема Пифагора, устанавливающая связь между квадратом, построенным на гипотенузе прямоугольного треугольника, и квадратами, построенными на его катетах. Как и все гениальное, теорема Пифагора отличается не только изысканной простотой и массой геометрических приложений, но и имеет огромное число интерпретаций в самых различных областях математики, начиная от векторной алгебры и кончая теорией рядов Фурье и функциональным анализом.

Открытие несоизмеримости Пифагором или его учениками — это едва ли не первое чисто математическое открытие, которое невозможно обнаружить на опыте и которое противоречит опыту,— является революционным завоеванием теоретической мысли человечества, первым камнем современного математического анализа.

Решение делосской проблемы пифагорейцем Архитом, дерзнувшим искать среднее пропорциональное как точку пересечения трех пространственных поверхностей, на все века останется образцом высочайшего полета фантазии человеческого гения.

Наконец, созданная пифагорейцами теория музыки, которая более двух тысячелетий является незыблемым фундаментом искусства музыки, в то же время является и классическим примером того, что нет ничего практичнее хорошей теории.

Таковы основные математические результаты, полученные в школе Пифагора. Все они легли в основу современных методов и теорий, а это и есть, как отмечал Эйнштейн, лучший удел для всякой научной теории.

Но, разумеется, как и всем людям, пифагорейцам было свойственно ошибаться. Сегодня пифагорейские поиски «числа любви», или филолаева Противоземля, или «пифагорово пенье светил» могут вызывать лишь улыбку, которая, увы, нередко

Рис. 84. Андрей Рублев. Спас из деисусного чина. Нач. XV в. Третьяковская галерея. Москва.

переходила в улюлюканье и огульное отрицание всех истинных достижений школы Пифагора. И здесь уместно будет вспомнить слова универсального гения естествознания Леонарда Эйлера (1707—1783): «Все, что мы теперь достоверно знаем из физики, было прежде облечено в догадки, и если б никогда не допускались догадки, даже ошибочные, то мы бы не добыли ни одной истины».

И все-таки наибольшую популярность Пифагору принесли не занятия науками, а внимание к общечеловеческим ценностям, которое он культивировал в своей школе. Пифагор не был кабинетным ученым, а был властителем дум, окруженным толпой поклонников и учеников, он был трибуном, живущим радостями и печалями общества, он был носителем и проповедником высоких нравственных идеалов. Он был пророком, а его союз был союзом истины, добра и красоты.

Все эти качества позволили нам во вступлении сравнить Пифагора с его великими современниками Буддой и Конфуцием, но эти же качества позволяют нам в заключение сравнить Пифагора с нашими выдающимися современниками, первоклассными учеными и пламенными трибунами, такими, как математик Бертран Рассел, физик Андрей Сахаров[1], историк культуры Дмитрий Лихачев.

Сегодняшний день — это время осознания угрозы ядерного и экологического самоуничтожения человечества, это время самоочищения нашего общества, и в это время роль ученого-борца становится неизмеримо высока. Вот почему сегодня пронзительно современно выглядит отделенный от нас тысячелетиями образ Пифагора — ученого, мыслителя, трибуна.

Несмотря на невосполнимые утраты, образ Пифагора, подобно образу Спаса, чудом уцелевшему на голых досках знаменитой иконы Андрея Рублева, пристально вглядывается в наши сегодняшние деяния. Потоки мысли излучает он. И как истинные произведения искусства не стареют и живут вечно, так и истинная мудрость, подаренная человечеству такими мыслителями, каким был Пифагор, навсегда остается с нами.

Она живет и действует в нашем сегодняшнем дне, эта современная мысль древних.

---

[1] Пока книга готовилась к печати, 14 декабря 1989 г. Андрея Дмитриевича Сахарова не стало. В слове прощания на траурном митинге академик Лихачев сказал об академике Сахарове: «Он был настоящий пророк. Пророк в древнем, исконном смысле этого слова, то есть человек, призывавший своих современников к нравственному обновлению ради будущего. Человек будущего XXI века, он был не понят в веке XX и, как всякий пророк, был изгнан из своего города». По счастью, на исходе дней своих русский пророк Андрей Сахаров был услышан. Но был ли он понят и была ли до конца осознана бездонная глубина его пророческих идей? Как все-таки похожи разделенные тысячелетиями судьбы пророков!

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Волошинов Александр Викторович

ПИФАГОР: СОЮЗ ИСТИНЫ, ДОБРА И КРАСОТЫ

Зав. редакцией Т. А. Бурмистрова. Редактор Т. А. Бурмистрова. Младшие редакторы Е. В. Казакова, Т. Ю. Федорова. Художники О. В. Гонтарь, Е. П. Титцов. Художественный редактор Ю. В. Пахомов. Технический редактор Н. Н. Матвеева. Корректор И. Н. Панкова

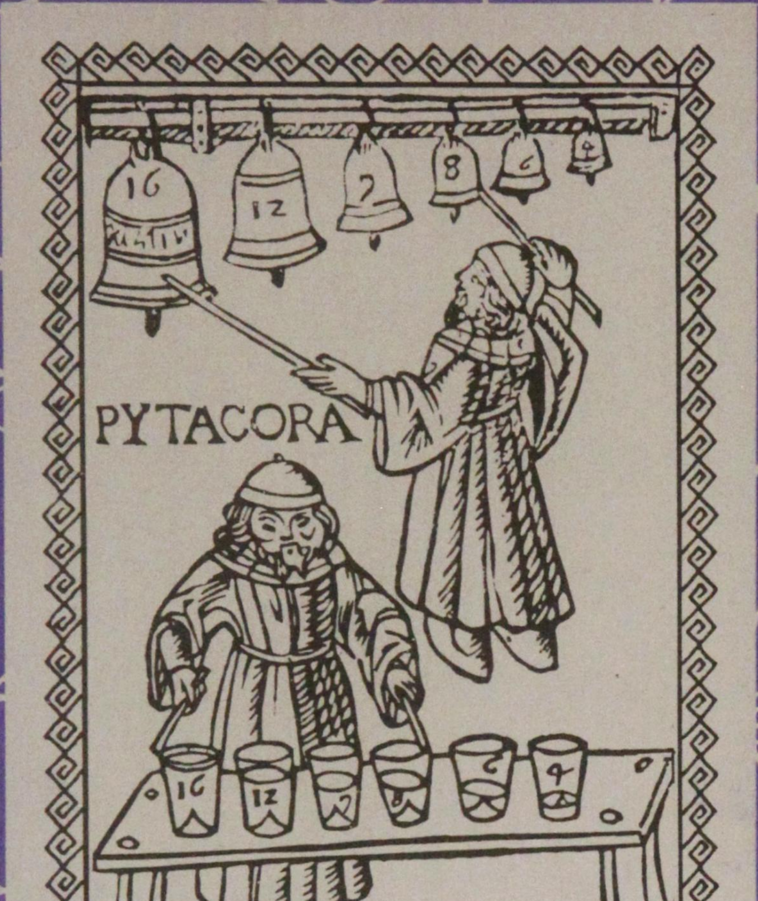
ИБ № 13948

Сдано в набор 17.06.92. Подписано к печати 12.07.93. Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Бум. офсетная № 1. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,0+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 28,81. Уч.-изд. л. 14,09+0,42 форз. Тираж 37 000 экз. Заказ № 3463.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства печати и информации Российской Федерации. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Смоленский полиграфический комбинат Министерства печати и информации Российской Федерации. 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.


IV BAL


16
12
8
6
4
PYTACORA
16
12
6
4