Лекции по математике, III семестр

А.М.Будылин
budylin@mph.phys.spbu.ru

16 декабря 2001 г.

Веб – страница
Титульный лист
Страница 1 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Часть I

Кратные интегралы

Содержание

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература

Веб – страница
Титульный лист
Страница 2 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

1. Определение и свойства кратных интегралов

1.1. Введение. Двойные и тройные интегралы — интуитивный подход

Пусть $\mathcal{D}$ — область на плоскости. Разобьем ее на непересекающиеся подобласти $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots \mathcal{D}_n$

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{D}_k \,, \qquad \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset \quad (i \neq j) \,.$$

Совокупность этих подобластей назовем *разбиением* области $\mathcal{D}$ и обозначим через λ:

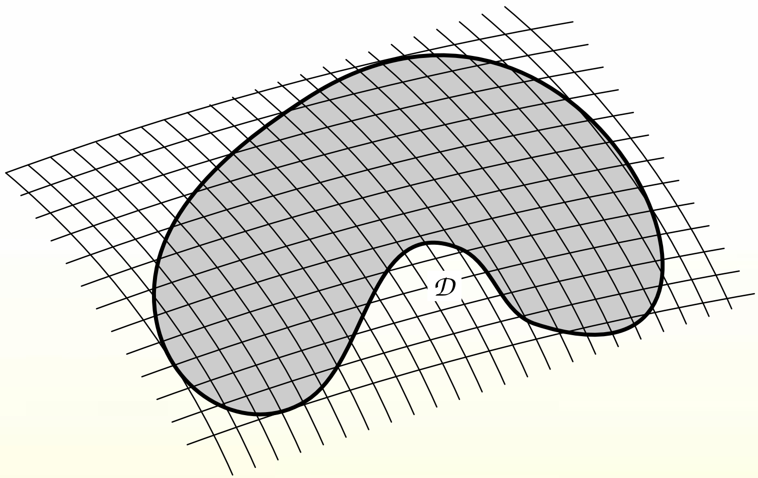


Рис. 1: Разбиение области

$$\lambda = \{\mathcal{D}_1, \ldots \mathcal{D}_n\} .$$

Диаметром области $\mathcal{D}$ называется расстояние между наиболее удаленными одна от другой точками области $\mathcal{D}$, точнее

$$\operatorname{diam} \mathcal{D} = \sup_{P,Q \in \mathcal{D}} |PQ| .$$

(Очевидно, это — диаметр круга, описанного около данной области). Наибольший из

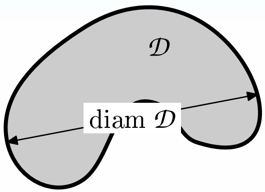


Рис. 2: Диаметр области

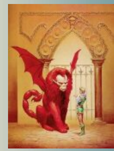
диаметров подобластей $\mathcal{D}_i$ разбиения λ называется *рангом* разбиения $|\lambda|$:

$$|\lambda| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathcal{D}_i .$$

Пусть $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, определенная на области $\mathcal{D}$. Выберем в каждой подобласти $\mathcal{D}_i$ разбиения λ точку P_i и составим *интегральную сумму Римана*

$$s(f, \Lambda) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) S(\mathcal{D}_i) , \qquad P_i \in \mathcal{D}_i . \tag{1.1}$$

Здесь $S(\mathcal{D}_i)$ — площадь области $\mathcal{D}_i$ и $\Lambda = \{(\mathcal{D}_1, P_1), \ldots (\mathcal{D}_n, P_n)\}$. Последний символ (так сказать — «нагруженное» разбиение) зависит как от разбиения λ, так и от выбора точек дробления P_i.



Если существует предел интегральных сумм при ранге разбиения стремящемся к нулю, он называется двойным интегралом от функции f по области $\mathcal{D}$ и обозначается

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f\,dS = \lim_{|\lambda|\to 0} s(f,\Lambda)\,.$$

Уточним, что это означает:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \qquad |\lambda|<\delta \quad \Rightarrow \left|s(f,\Lambda)-\iint\limits_{\mathcal{D}} f\,dS\right|<\varepsilon$$

при любом выборе точек $P_i\in\mathcal{D}_i$.

Как и в случае однократного интеграла, очевидно, такой предел может существовать лишь если функция f ограничена:

$$\sup_{P\in\mathcal{D}}|f(P)| = M < \infty\,.$$

Аналогичные построения можно провести и в случае трехмерной области, естественно заменяя термин «площадь» на термин «объем». При этом получим тройной интеграл от функции f по области $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^3$

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} f\,dV = \lim_{|\lambda|\to 0} s(f,\Lambda)\,, \qquad s(f,\Lambda)=\sum_{i=1}^{n} f(P_i)V(\mathcal{D}_i)\,,$$

$V(\mathcal{D}_i)$ — объем области $\mathcal{D}_i$.

Как и в одномерном случае мы должны задаться вопросами существования таких интегралов, а также описать свойства этих интегралов. Однако в отличие от теории определенного (однократного) интеграла мы сталкиваемся с рядом новых вопросов, которых по существу не было ранее. Именно:

1. Какие множества (на плоскости или в пространстве, соответственно) можно брать для построения кратного интеграла?

2. Какие подмножества допустимы при разбиениях?

3. Что такое площадь или объем, соответственно?

Эти вопросы, в действительности, весьма трудны и неоднозначны. Чтобы дать представление о возникающих на этом пути трудностях, коснемся понятий площади и объема.

Под *площадью* S мы понимаем неотрицательную функцию $S(\mathcal{D}) \geqslant 0$, определенную на плоских множествах $\mathcal{D}$ такую, что

1. Площадь прямоугольника со сторонами длины a и b равна произведению ab,

2. $S(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) = S(\mathcal{D}_1) + S(\mathcal{D}_2)$ если множества $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ не пересекаются,

3. Площадь множества не меняется при его жестком перемещении (конгруэнтные фигуры имеют равные площади).

Аналогично, под *объемом* V мы понимаем неотрицательную функцию $V(\mathcal{D}) \geqslant 0$, определенную на множествах $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ такую, что

1. Объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами длины a, b и c равна произведению abc,

2. $V(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) = V(\mathcal{D}_1) + V(\mathcal{D}_2)$, если множества $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ не пересекаются,

3. Объем множества не меняется при его жестком перемещении (конгруэнтные тела имеют равные объемы).

Параллели, казалось бы, очевидны. При этом, однако, доказано (С.Банах), что площадь существует, хотя и не единственна, т.е. существуем много разных функций S, определенных на произвольных плоских множествах и удовлетворяющих описанным выше свойствам. Все эти функции для сравнительно простых множеств показывают одно и

то же значение площади, однако для множеств сложной структуры ответы оказываются разными. Вместе с тем объема не существует вовсе (Ф.Хаусдорф), т.е. не существует такой функции V, удовлетворяющей описанным выше свойствам и определенной для всех множеств в пространстве.

Интересно, что столь разные ответы на вопрос о существовании и единственности понятия меры (площади или объема) множеств приводят к одному и тому же заключению: не следует пытаться наделить мерой произвольные множества. Надо довольствоваться только достаточно «хорошими» множествами, для которых понятие площади или, соответственно, объема существует и определено однозначно. Однако вопрос о том, что же такое эти «хорошие» множества решается, по-существу, в рамках построения теории (кратного) интеграла.

Мы начнем изложение строгой теории кратных интегралов для самых простых областей — прямоугольных параллелепипедов. Это позволит, кстати, строить теорию совершенно параллельно со случаем однократного определенного интеграла.

1.2. Интеграл по n-мерному интервалу

Определение 1.1. *Замкнутый прямоугольный параллелепипед* или *n-мерный интервал* $D \subset \mathbb{R}^n$ определен условием

$$P(x_1, \dots x_n) \in D \iff a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\,, \qquad i = 1, \dots n\,.$$

При этом пишут

$$D = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]\,.$$

В дальнейшем такие параллелепипеды будем называть *брусами*. *Объем* $V(D)$ бруса определим равенством

$$V(D) \overset{\text{Опр.}}{=} \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)\,. \tag{1.2}$$

Напомним, что разбиением λ интервала $[a, b]$ удобно называть множество точек $\{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$ таких, что

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b\,.$$

Множество λ действительно делит интервал $[a, b]$ на k интервалов $[t_{i-1}, t_i]\,, \quad i = 1, \ldots k$.

Определение 1.2. *Разбиением* λ бруса D называется кортеж[1] $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ одномерных разбиений λ_i интервалов $[a_i, b_i]$.

Пусть, например, $\lambda_1 = \{t_0, \ldots t_k\}$ — разбиение интервала $[a_1, b_1]$ и $\lambda_2 = \{s_0, \ldots s_m\}$ — разбиение интервала $[a_2, b_2]$. Тогда разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ прямоугольника $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ делит его на $k \cdot m$ прямоугольников $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$.

Вообще, если $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ —разбиение бруса $D = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ и разбиение λ_i делит интервал $[a_i, b_i]$ на k_i частей, то брус D делится на $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ частей (брусы–ячейки). Допуская определенную вольность речи, мы будем в дальнейшем о данных ячейках говорить как о *параллелепипедах (ячейках, брусах) из* разбиения λ.

Пусть $f: \quad D \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция:

$$\sup_{P \in D} |f(P)| = M < \infty\,.$$

Для каждого множества $A \subset D$ положим

$$M_A(f) = \sup_{P \in A} f(P)\,, \qquad m_A(f) = \inf_{P \in A} f(P)\,. \tag{1.3}$$

Разность

$$\omega_A(f) = M_A(f) - m_A(f) \tag{1.4}$$

называется *колебанием* функции f на множестве A.

---

[1]кортеж - это упорядоченный набор элементов

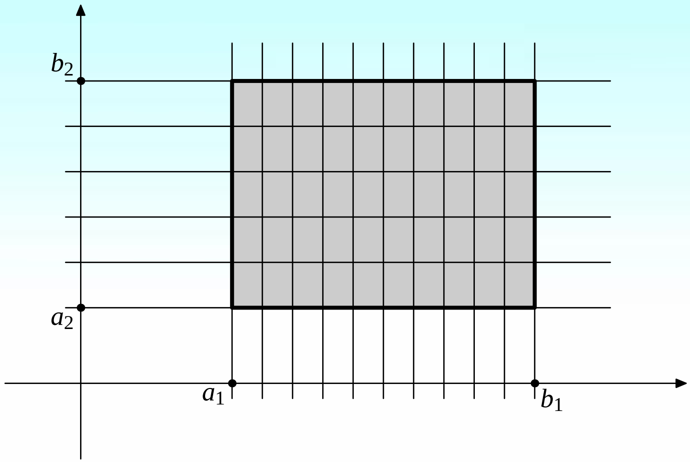


Рис. 3: К определению 1.2

Определение 1.3. Пусть λ — разбиение бруса D и $f: \quad D \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция. *Верхняя и нижняя суммы Дарбу* определяются, соответственно, равенствами

$$\sigma^*(f,\lambda) = \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} M_A(f)V(A)\,, \qquad \sigma_*(f,\lambda) = \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} m_A(f)V(A)\,,$$

суммирование ведется по всем параллелепипедам A из разбиения λ.

По построению, очевидно,

$$\sigma_*(f,\lambda) \leqslant \sigma^*(f,\lambda)\,.$$

Более того.

Теорема 1.4. *Пусть λ' — продолжение разбиения λ, что означает, что каждый параллелепипед разбиения λ' содержится в некотором параллелепипеде разбиения λ или, что то же самое, $\lambda'_i \supset \lambda_i$, $\quad i = 1, \dots n$, где $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ и $\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_n)$. Тогда*

$$\sigma_*(f, \lambda) \leqslant \sigma_*(f, \lambda'), \qquad \sigma^*(f, \lambda') \leqslant \sigma^*(f, \lambda),$$

т.е. при продолжении разбиения нижняя сумма Дарбу может лишь увеличиться, а верхняя сумма — только уменьшиться.

Доказательство. Пусть A — произвольный параллелепипед из разбиения λ. В результате продолжения разбиения параллелепипед A распадается на параллелепипеды $A'_1, \dots A'_k$ из разбиения λ'. При этом $m_A(f) \leqslant m_{A'_i}(f)$, $\quad i = 1, \dots k$, откуда

$$m_A(f)V(A) = m_A(f)[V(A'_1) + \ldots + V(A'_k)] \leqslant m_{A'_1}(f)V(A'_1) + \ldots + m_{A'_k}V(A'_k).$$

Суммирование по всем параллелепипедам A из разбиения λ ведет к неравенству

$$\sigma_*(f, \lambda) \leqslant \sigma_*(f, \lambda').$$

Доказательство для верхних сумм аналогично. □

Следствие 1.5. *Для произвольных разбиений λ и μ*

$$\sigma_*(f, \lambda) \leqslant \sigma^*(f, \mu).$$

Доказательство. Пусть разбиение ν продолжает как λ, так и μ. Например, если $\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_n)$ и $\mu = (\mu_1, \dots \mu_n)$, можно положить $\nu = (\lambda_1 \cup \mu_1, \dots \lambda_n \cup \mu_n)$. Тогда

$$\sigma_*(f, \lambda) \leqslant \sigma_*(f, \nu) \leqslant \sigma^*(f, \nu) \leqslant \sigma^*(f, \mu).$$

□

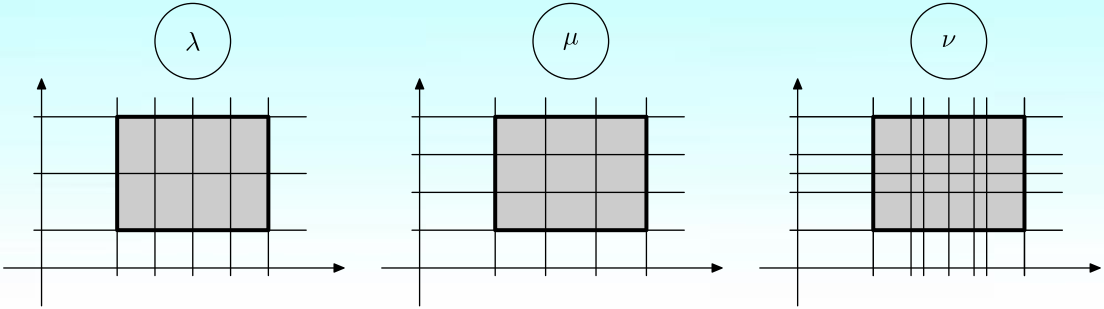


Рис. 4: К доказательству следствия 1.5

Определение 1.6. Если
$$\sup_{\lambda} \sigma_*(f,\lambda) = \inf_{\lambda} \sigma^*(f,\lambda)$$
(точные границы берутся по всем разбиения λ), функция f называется *интегрируемой* по брусу D и величина $I = \sup\limits_{\lambda} \sigma_*(f,\lambda) = \inf\limits_{\lambda} \sigma^*(f,\lambda)$ называется *интегралом* от функции f по D. При этом пишут
$$\int\limits_D f = I\,.$$

Замечание 1.7. Величины
$$I_*(f,D) = \sup_{\lambda} \sigma_*(f,\lambda)$$
и
$$I^*(f,D) = \inf_{\lambda} \sigma^*(f,\lambda)$$

всегда существуют и называются, соответственно, *нижним и верхним интегралами Дарбу*. В силу следствия 1.5

$$I_*(f, D) \leqslant I^*(f, D)\,.$$

Функция интегрируема тогда и только тогда, когда нижний и верхний интегралы Дарбу равны меду собой и их общее значение и называется интегралом (Дарбу) функции f.

Замечание 1.8. Если в обозначении интеграла нужно подчеркнуть размерность пространства, вместо $\int_D f$ пишут

$$\underbrace{\int \cdots \int_D}_{n \text{ раз}} f \qquad \text{или} \qquad \int \cdots \int\limits_D f(x_1, \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n\,.$$

Например, интеграл по прямоугольнику $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ будет обозначаться

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$$

и называться *двойным* интегралом, а интеграл по параллелепипеду $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ будет обозначаться

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\, dxdydz$$

и называться *тройным* интегралом. Возможны и другие естественные модификации обозначений, как

$$\int\limits_D f(P)\, dV \qquad \text{или} \qquad \int\limits_D f(P)\, dP\,.$$

Удобство таких обозначений станет ясно в дальнейшем.

Из свойств точных границ вытекает следующий критерий интегрируемости функции.

Теорема 1.9 (Критерий интегрируемости).

$$f \text{ — } \textit{интегрируема} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda : \qquad \sigma^*(f, \lambda) - \sigma_*(f, \lambda) < \varepsilon \,.$$

Доказательство. $\Rightarrow$

$$\exists \mu : \qquad \int\limits_D f - \sigma_*(f, \mu) < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\exists \nu : \qquad \sigma^*(f, \nu) - \int\limits_D f < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Если λ продолжает разбиения μ и ν, то тем более

$$\sigma^*(f, \lambda) - \int\limits_D f < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{и} \qquad \int\limits_D f - \sigma_*(f, \lambda) < \frac{\varepsilon}{2} \,,$$

что ведет к оценке $\sigma^*(f, \lambda) - \sigma_*(f, \lambda) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : \qquad I^*(f, D) - I_*(f, D) < \varepsilon \,,$$

т.е. есть равенство верхнего и нижнего интегралов. □

В качестве простого примера рассмотрим функцию f, принимающую постоянное значение на брусе D: $\quad f(P) \equiv c = \mathrm{Const}$. Тогда

$$\sigma_*(f, \lambda) = \sigma^*(f, \lambda) = \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} cV(A) = c \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} V(A) = cV(D) \,,$$

откуда

$$\int\limits_D f = cV(D) \,.$$

Приведем, также, пример неинтегрируемой функции. Пусть

$$f(x,y)=\begin{cases}0\,, & \text{если } x \text{ рационален}\\ 1\,, & \text{в остальных случаях}\,.\end{cases}$$

Тогда для любой ячейки A разбиения λ произвольного прямоугольника D получим $m_A(f)=0$ и $M_A(f)=1$, откуда

$$\sigma_*(f,\lambda)=0 \qquad \text{и} \qquad \sigma^*(f,\lambda)=\sum V(A)=V(D)\,,$$

т.е. (если прямоугольник D не вырождается в отрезок)

$$I_*(f,D)=0\neq I^*(f,D)=V(D)\,.$$

1.3. Свойства интеграла

Важнейшее свойство интеграла — его *линейность*, устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1.10. *Если функции f и g интегрируемы на брусе D, то функции $f+g$ и αf ($\alpha=\mathrm{Const}$) также интегрируемы, причем*

$$\int\limits_D (f+g)=\int\limits_D f+\int\limits_D g\,,$$

$$\int\limits_D \alpha f=\alpha\int\limits_D f\,.$$

Доказательство. Пусть A — произвольный параллелепипед из разбиения λ. Тогда $\forall P\in A$

$$m_A(f)+m_A(g)\leqslant f(P)+g(P)\leqslant M_A(f)+M_A(g)\,,$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 15 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

откуда
$$m_A(f) + m_A(g) \leqslant m_A(f+g) \leqslant M_A(f+g) \leqslant M_A(f) + M_A(g)\,.$$
Умножая на $V(A)$ и суммируя по всем ячейкам разбиения, приходим к неравенствам
$$\sigma_*(f,\lambda) + \sigma_*(g,\lambda) \leqslant \sigma_*(f+g,\lambda) \leqslant \sigma^*(f+g,\lambda) \leqslant \sigma^*(f,\lambda) + \sigma^*(g,\lambda)\,.$$
Далее, как следствие,
$$\sigma_*(f,\lambda) + \sigma_*(g,\lambda) \leqslant I_*(f+g,D) \leqslant I^*(f+g,D) \leqslant \sigma^*(f,\lambda) + \sigma^*(g,\lambda)\,.$$
Отсюда (в силу интегрируемости f и g)
$$\int\limits_D f + \int\limits_D g = I_*(f,D) + I_*(g,D) \leqslant I_*(f+g,D) \leqslant I^*(f+g,D) \leqslant I^*(f,D) + I^*(g,D) = \int\limits_D f + \int\limits_D g\,,$$
что доказывает равенства
$$I_*(f+g,D) = I^*(f+g,D) = \int\limits_D f + \int\limits_D g$$
и, как следствие, равенство
$$\int\limits_D (f+g) = \int\limits_D f + \int\limits_D g\,.$$

Докажем теперь однородность интеграла (возможность вынесения постоянного множителя за знак интеграла). Если $\alpha > 0$, то
$$m_A(\alpha f) = \alpha m_A(f) \qquad \text{и} \qquad M_A(\alpha f) = \alpha M_A(f)\,,$$
откуда немедленно (при $\alpha > 0$)
$$I_*(\alpha f, D) = \alpha I_*(f,D) \qquad \text{и} \qquad I^*(\alpha f, D) = \alpha I^*(f,D)\,,$$

в частности,

$$\int\limits_D \alpha f = \alpha \int\limits_D f\,.$$

Далее заметим, что

$$m_A(-f) = -M_A(f) \qquad \text{и} \qquad M_A(-f) = -m_A(f)\,,$$

откуда

$$I_*(-f, D) = -I^*(f, D) \qquad \text{и} \qquad I^*(-f, D) = -I_*(f, D)\,,$$

т.е. (в случае интегрируемости функции f)

$$I_*(-f, D) = I^*(-f, D) = -\int\limits_D f$$

и, следовательно,

$$\int\limits_D (-f) = -\int\limits_D f\,.$$

□

Второе полезное свойство — *монотонность*:

Теорема 1.11. *Пусть функции f и g интегрируемы на брусе D. Тогда*

$$f \leqslant g \quad \Rightarrow \quad \int\limits_D f \leqslant \int\limits_D g\,.$$

Доказательство.

$$\sigma_*(f, \lambda) \leqslant \sigma_*(g, \lambda) \leqslant \int\limits_D g\,,$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 17 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

откуда
$$\int\limits_D f \leqslant \int\limits_D g\,.$$

$\square$

Как следствие, отметим свойство *ограниченности* интеграла, выраженное неравенством:
$$m_D(f)V(D) \leqslant \int\limits_D f \leqslant M_D(f)V(D)\,, \tag{1.5}$$
где f — произвольная функция, интегрируемая на брусе D.

Докажем также следующее свойство.

Теорема 1.12. *Если f — интегрируема на брусе D, то $|f|$ — также интегрируема, причем*
$$\Bigl|\int\limits_D f\Bigr| \leqslant \int\limits_D |f|\,.$$

Доказательство.
$$M_A(|f|) - m_A(|f|) = \sup_{x\in A}|f(x)| - \inf_{y\in A}|f(y)| = \sup_{x\in A}|f(x)| + \sup_{y\in A}(-|f(y)|)$$
$$= \sup_{x,y\in A}(|f(x)| - |f(y)|) = \sup_{x,y\in A}||f(x)| - |f(y)|| \leqslant \sup_{x,y\in A}|f(x) - f(y)| = \sup_{x,y\in A}(f(x) - f(y))$$
$$= \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{y\in A}(-f(y)) = \sup_{x\in A} f(x) - \inf_{y\in A} f(y) = M_A(f) - m_A(f)\,,$$
откуда
$$\sigma^*(|f|,\lambda) - \sigma_*(|f|,\lambda) \leqslant \sigma^*(f,\lambda) - \sigma_*(f,\lambda)$$
и, как следствие,
$$I^*(|f|,D) - I_*(|f|,D) \leqslant I^{(}f,D) - I_*(f,D)\,,$$

что влечет за собой интегрируемость $|f|$ при условии, что f — интегрируема.

Оценка интеграла по абсолютной величине вытекает из монотонности интеграла:

$$\int\limits_D f \leqslant \int\limits_D |f| \qquad \text{и} \qquad -\int\limits_D f = \int\limits_D (-f) \leqslant \int\limits_D |f|\,.$$

$\square$

Наконец, отметим следующее свойство интегрируемости.

Теорема 1.13. *Если f и g — интегрируемы на брусе D, то произведение fg — также интегрируемая функция.*

Доказательство. Прежде всего, докажем, что квадрат интегрируемой функции — также интегрируемая функция. Действительно, полагая $M = M_D(|f|)$, находим

$$\begin{aligned} M_A(f^2) - m_A(f^2) &= \sup_{x\in A} f^2(x) - \inf_{y\in A} f^2(y) = \sup_{x\in A} f^2(x) + \sup_{y\in A}(-f^2(y)) \\ &= \sup_{x,y\in A}(f^2(x) - f^2(y)) = \sup_{x,y\in A}|f^2(x) - f^2(y)| = \sup_{x,y\in A}(|f(x)+f(y)||f(x)-f(y)|) \\ &\leqslant 2M\sup_{x,y\in A}(f(x)-f(y)) = 2M[\sup_{x\in A} f(x) + \sup_{y\in A}(-f(y))] \\ &= 2M[\sup_{x\in A} f(x) - \inf_{y\in A} f(y)] = 2M[M_A(f) - m_A(f)]\,, \end{aligned}$$

откуда

$$\sigma^*(f^2,\lambda) - \sigma_*(f^2,\lambda) \leqslant 2M[\sigma^*(f,\lambda) - \sigma_*(f,\lambda)]$$

и, как следствие,

$$I^*(|f|,D) - I_*(|f|,D) \leqslant 2M[I^*(f,D) - I_*(f,D)]\,,$$

что влечет интегрируемость f^2 при условии, что f — интегрируема.

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 19 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Остается заметить, что

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}\,,$$

т.е. fg — линейная комбинация интегрируемых функций. $\square$

Изучение интегрируемых функций будет продолжено в следующем параграфе, чтение которого предполагает знакомство с элементами топологии пространства $\mathbb{R}^n$, см. приложение A.

2. Интегрируемые функции

2.1. Множества объема-ноль

Определение 2.1. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет *объем-ноль* ($\operatorname{vol} A = 0$), если для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества A брусами $B_1, \dots B_k$, суммарный объем которых меньше ε:

$$\operatorname{vol} A = 0 \overset{\text{Опр.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bigcup_{j=1}^{k} B_j \supset A : \qquad \sum_{j=1}^{k} V(B_j) < \varepsilon \,.$$

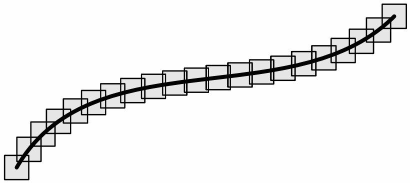


Рис. 5: Объем-ноль (площадь-ноль) гладкой кривой на плоскости.

В этом определении покрытие замкнутыми брусами может быть заменено на открытое покрытие:

Лемма 2.2.

$$\operatorname{vol} A = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bigcup_{j=1}^{k} \mathring{B}_j \supset A : \qquad \sum_{j=1}^{k} V(B_j) < \varepsilon \,,$$

здесь $\mathring{B}_j$ — внутренность бруса B_j, т.е. открытый брус.

Доказательство. $\Rightarrow$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть

$$\bigcup_{j=1}^{k} B_j \supset A: \qquad \sum_{j=1}^{k} V(B_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть брус C_j концентричен брусу B_j и подобен ему с некоторым коэффициентом подобия, строго большим единицы (т.е. брус C_j является растяжением бруса B_j во всех направлениях), при этом $B_j \subset \mathring{C}_j$. Коэффициент подобия фиксируем таким, чтобы было выполнено неравенство

$$V(C_j) \leqslant V(B_j) + \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Тогда открытые брусы $\mathring{C}_j$ покрывают множество A, причем

$$\sum_{j=1}^{k} V(C_j) \leqslant \sum_{j=1}^{k} V(B_j) + k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Очевидна. $\square$

Элементарным примером множества объема-ноль является множество конечного числа точек.

Теорема 2.3. *Пусть D — брус в $\mathbb{R}^n$. Ограниченная функция $f: D \to \mathbb{R}$, множество точек разрыва которой имеет объем-ноль, — интегрируема.*

Доказательство. Пусть E — множество точек разрыва функции f. Положим $M = \sup\limits_{P \in D} |f(P)|$ и фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу $\operatorname{vol} E = 0$

$$\exists \bigcup_{j=1}^{k} \mathring{B}_j \supset E: \qquad \sum_{j=1}^{k} V(B_j) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Пусть λ — разбиение бруса D такое, что каждый брус B_j представим объединением брусов A из разбиения λ. Функция f непрерывна на $D \setminus E$, тем более — на $F = D \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} \mathring{B}_j$. Множество F является замкнутым (и ограниченным), а потому — компактным. По теореме Кантора A.9 функция f равномерно непрерывна на F. Пусть $\delta > 0$ таково, что

$$P, Q \in F \quad \text{и} \quad |PQ| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(P) - f(Q)| < \frac{\varepsilon}{2V(D)}\,.$$

Разбиение λ будем считать столь мелким, что $|\lambda| < \delta$ (напомним, что $|\lambda|$ — ранг разбиения, т.е. наибольший диаметр ячеек разбиения). Тогда

$$\sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} M_A(f)V(A) - \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} m_A(f)V(A) = \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} [M_A(f) - m_A(f)]V(A) = \sum{}' + \sum{}''\,.$$

Здесь сумма $\sum'$ берется по тем ячейкам A из разбиения λ, которые вписаны в брусы покрытия $B_1, \ldots B_k$, при этом

$$\sum{}' \leqslant 2M \sum_{j=1}^{k} V(B_j) < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Сумма $\sum''$ берется по остальным ячейкам разбиения, т.е. тем, которые вписаны в F и на которых колебание функции мало, при этом:

$$\sum{}'' < \frac{\varepsilon}{2V(D)} \sum V(A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2V(D)} \cdot V(D) = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Итак,

$$\sigma^*(f, \lambda) - \sigma_*(f, \lambda) = \sum{}' + \sum{}'' < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

откуда, в силу критерия интегрируемости 1.9, и вытекает утверждение теоремы. □

Как элементарное следствие доказанной теоремы получаем утверждение об интегрируемости непрерывной функции или функции, имеющей конечное число точек разрыва. Так, функция f, равная нулю на брусе D всюду, за исключением конечного числа точек, интегрируема. Заметим, что при этом нижние суммы Дарбу будут равны нулю и, следовательно, интеграл от такой функции также равен нулю. Как следствие этого факта и линейности интеграла заключаем, что интегрируемость функции не нарушится и значение интеграла не изменится, если функцию изменить в конечном числе точек.

Для того, чтобы сформулировать необходимое и достаточное условие интегрируемости функции в терминах множества ее точек разрыва нам придется несколько расширить понятие множеств объема-ноль. Это будет сделано в следующем параграфе.

2.2. Множества меры-ноль

Определение 2.4. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет *меру-ноль* ($\operatorname{mes} A = 0$), если для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества A последовательностью брусов B_j, $j \in \mathbb{N}$, суммарный объем которых меньше ε:

$$\operatorname{mes} A = 0 \overset{\text{Опр.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \supset A : \qquad \sum_{j=1}^{\infty} V(B_j) < \varepsilon\,.$$

Как и в случае объема-ноль в этом определении покрытие замкнутыми брусами может быть заменено на открытое покрытие:

Лемма 2.5.

$$\operatorname{mes} A = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathring{B}_j \supset A : \qquad \sum_{j=1}^{\infty} V(B_j) < \varepsilon\,,$$

где $\mathring{B}_j$ *— внутренность бруса* B_j.

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 24 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Доказательство. $\Rightarrow$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \supset A : \qquad \sum_{j=1}^{\infty} V(B_j) < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Пусть брус C_j концентричен брусу B_j и подобен брусу B_j с некоторым коэффициентом подобия, строго большим единицы, так что $B_j \subset \mathring{C}_j$. Коэффициент подобия фиксируем таким, чтобы было выполнено неравенство

$$V(C_j) \leqslant V(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \,.$$

Тогда открытые брусы $\mathring{C}_j$ покрывают множество A, причем

$$\sum_{j=1}^{\infty} V(C_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} V(B_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

$\Leftarrow$ Очевидна. $\square$

Теорема 2.6. *Объединение последовательности множеств меры-ноль есть множество меры ноль:*

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,, \quad \operatorname{mes} A_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{mes} A = 0 \,.$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть брусы B_{ij} таковы, что

$$A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij} \,, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} V(B_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^i} \,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Тогда

$$A \subset \bigcup_{i,j\geqslant 1} B_{ij} \qquad \text{и} \qquad \sum_{i,j\geqslant 1} V(B_{ij}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon\,.$$

$\square$

Множества объема-ноль безусловно являются множествами меры-ноль. Обратное, вообще говоря, не верно и разница между этими понятиями существенна. Например, граница множества объема-ноль сама является множеством объема-ноль:

$$\operatorname{vol} A = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{vol} \partial A = 0\,.$$

Это вытекает из того факта, что объединение конечного числа замкнутых брусов является замкнутым множеством и, как следствие, покрытие множества A брусами $B_1, \ldots B_k$, является также покрытием замыкания $\overline{A}$. Однако объединение бесконечного числа замкнутых множеств уже может не быть множеством замкнутым, а как следствие, граница множества меры-ноль может не быть уже множеством меры-ноль. Например, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ на прямой $\mathbb{R}$ является множеством меры-ноль, при этом, однако, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Теорема 2.7. *Компактное множество меры-ноль имеет объем-ноль.*

Доказательство. Очевидна ввиду лемм 2.2 и 2.5 и определения A.5 компактности множества. $\square$

Следствие 2.8. *Пусть A — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\operatorname{mes} \partial A = 0 \iff \operatorname{vol} \partial A = 0\,.$$

Доказательство. Граница множества — замкнута. В силу теоремы A.7 граница ограниченного множества — компактна. $\square$

Теорема 2.9 (Критерий интегрируемости функции). *Пусть D — брус в $\mathbb{R}^n$ и E — множество точек разрыва ограниченной функции $f: D \to \mathbb{R}$. Тогда*

$$f \text{ — интегрируема на } D \iff \operatorname{mes} E = 0\,,$$

т.е. ограниченная функция интегрируема тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва имеет меру-ноль.

Доказательство. $\Leftarrow$
Положим

$$\omega_P(f) = \lim_{r \to 0} \omega_{B_r(P)}(f)\,,$$

где $\omega_{B_r(P)}(f)$ — колебание функции f в шаре $B_r(P)$ радиуса r с центром в точке P, см. (1.4). Этот предел существует (ввиду убывания [нестрого] функции $\omega_{B_r(P)}(f)$ при убывании r) и называется *колебанием функции f в точке P*. Очевидно, функция f непрерывна в точке P тогда и только тогда, когда ее колебание в точке P равно нулю.

Заметим, что множество точек $F = \{P \in D : \ \omega_P(f) \geqslant \varepsilon\}$ — замкнуто и, как следствие, компактно. Действительно, если $P \notin F$, то либо $P \notin D$, либо $\omega_P(f) < \varepsilon$. В последнем случае по теореме о перерастании предела

$$\exists r > 0 : \qquad \omega_{B_r(P)}(f) < \varepsilon\,.$$

Положим $r = 2\rho$ и рассмотрим точку $Q \in B_\rho(P)$. Заметим, что

$$|QR| < \rho \quad \Rightarrow \quad |PR| \leqslant |PQ| + |QR| \leqslant \rho + \rho = r\,,$$

т.е. $B_\rho(Q) \subset B_r(P)$. Отсюда, если $Q \in D$,

$$\omega_Q(f) \leqslant \omega_{B_\rho}(Q) \leqslant \omega_{B_r(P)}(f) < \varepsilon\,.$$

Таким образом,

$$P \in \mathbb{R}^n \setminus F \quad \Rightarrow \quad B_\rho(P) \subset \mathbb{R}^n \setminus F\,,$$

т.е. $\mathbb{R}^n \setminus F$ — открыто.

Рассмотрим множество

$$E_\varepsilon = \left\{ P \in D : \quad \omega_P(f) \geqslant \frac{\varepsilon}{2V(D)} \right\}, \qquad \varepsilon > 0\,.$$

Согласно определению $E_\varepsilon \subset E$, откуда $\operatorname{mes} E_\varepsilon = 0$, и следовательно, в силу компактности E_ε, $\operatorname{vol} E_\varepsilon = 0$, см. теорему 2.7. Пусть брусы $C_1, \ldots C_k$ таковы, что

$$\bigcup_{j=1}^{k} \mathring{C}_j \supset E_\varepsilon \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{k} V(C_j) < \frac{\varepsilon}{4M}\,,$$

где $M = \sup\limits_{P \in D} |f(P)|$.

Положим

$$G = D \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \mathring{C}_j\,.$$

Множество G замкнуто и, следовательно, компактно, при этом

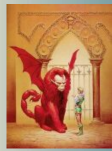
$$P \in G \quad \Rightarrow \quad \omega_P(f) < \frac{\varepsilon}{2V(D)}\,.$$

По теореме о перерастании предела

$$\forall P \in G \quad \exists r = r(P) : \qquad \omega_{B_r(P)}(f) < \frac{\varepsilon}{2V(D)}\,.$$

Заменим каждый такой шар $B_r(P)$ вписанным брусом (кубом) $D(P)$ с центром в точке P; колебание функции на таком брусе не увеличится:

$$\omega_{D(P)}(f) < \frac{\varepsilon}{2V(D)}\,.$$



В силу компактности множества G, уже конечное число таких брусов $D_1, \dots D_m$ покроет G.

Рассмотрим разбиение λ бруса D такое, что каждый из брусов C_j, $j = 1, \dots C_k$ и $D_1, \dots D_m$ представим как объединение ячеек A из разбиения λ. Тогда

$$\sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} M_A(f)V(A) - \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} m_A(f)V(A) = \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} [M_A(f) - m_A(f)]V(A) = \sum{}' + \sum{}'',$$

где сумма $\sum'$ берется по тем ячейкам, которые вписаны в брусы C_j, $j = 1, \dots k$, при этом

$$\sum{}' \leqslant 2M \sum_{j=1}^{k} V(C_j) \leqslant 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сумма $\sum''$ берется по остальным ячейкам A — вписанным в брусы D_j, $j = 1, \dots m$, т.е. по тем, где

$$\omega_A(f) < \frac{\varepsilon}{2V(D)}.$$

Тогда

$$\sum{}'' < \frac{\varepsilon}{2V(D)} \sum V(A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2V(D)} \cdot V(D) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак,

$$\sigma^*(f, \lambda) - \sigma_*(f, \lambda) = \sum{}' + \sum{}'' < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

откуда, в силу критерия интегрируемости 1.9, и вытекает интегрируемость функции f.

$\Rightarrow$

Пусть f — интегрируема. Рассмотрим последовательность множеств F_k:

$$F_k = \left\{P \in D : \quad \omega_P(f) \geqslant \frac{1}{k}\right\}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Заметим, что

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\,.$$

Фиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$ и пусть λ — разбиение бруса D такое, что

$$\sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} \omega_A(f)V(A) = \sigma^*(f,\lambda) - \sigma_*(f,\lambda) < \frac{\varepsilon}{k}\,.$$

Рассмотрим все те ячейки A из разбиения λ, которые пересекаются с множеством F_k и, тем самым, покрывают его. Для этих ячеек

$$\omega_A(f) \geqslant \frac{1}{k}\,.$$

Тогда

$$\frac{1}{k}\sum_{A\cap F_k\neq\varnothing} V(A) \leqslant \sum_{A\cap F_k\neq\varnothing} \omega_A(f)V(A) \leqslant \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} \omega_A(f)V(A) < \frac{\varepsilon}{k}\,,$$

откуда

$$\sum_{A\cap F_k\neq\varnothing} V(A) < \varepsilon\,,$$

т.е. $\operatorname{vol} F_k = 0$. В отношении меры-ноль множества E утверждение теоремы вытекает из теоремы 2.6. $\square$

2.3. Измеримые множества и интегралы по ним

До сих пор мы имели дело лишь с интегралами по брусам. Интегралы по другим ограниченным множествам легко сводятся к рассмотренным.

Пусть D — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. *Характеристической функцией* множества D называется функция χ_D, определенная равенством

$$\chi_D(P) = \begin{cases} 1\,, & P \in D\,,\\ 0\,, & P \notin D\,. \end{cases}$$

Определение 2.10. Пусть A — брус в $\mathbb{R}^n$ и $f: \quad A \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция на A. Пусть $D \subset A$. Тогда

$$\int\limits_D f \overset{\text{Опр.}}{=} \int\limits_A (f \cdot \chi_D)\,,$$

если функция $f \cdot \chi_D$ — интегрируема.

Определение 2.11. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ и $f: \quad D \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция на множестве D. Пусть D — ограничено и A — произвольный брус в $\mathbb{R}^n$, содержащий D: $D \subset A$. Тогда

$$\int\limits_D f \overset{\text{Опр.}}{=} \int\limits_D \widetilde{f}\,,$$

где

$$\widetilde{f}(P) = \begin{cases} f(P)\,, & P \in D\,,\\ 0\,, & P \notin D\,, \end{cases}$$

— *продолжение функции f нулем.*

Очевидно, что эти определения не зависят от выбора бруса A, содержащего множество D.

Заметим, что функция f будет интегрируемой на множестве D всегда, если она (или ее продолжение нулем) и характеристическая функция χ_D интегрируемы на брусе $A \supset D$.

Теорема 2.12. *Пусть D — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\chi_D \text{ — интегрируема} \iff \operatorname{vol} \partial D = 0\,.$$

Доказательство. Элементарное следствие теоремы 2.9 и следствия 2.8, поскольку множество точек разрыва характеристической функции совпадает с границей множества. □

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 31 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

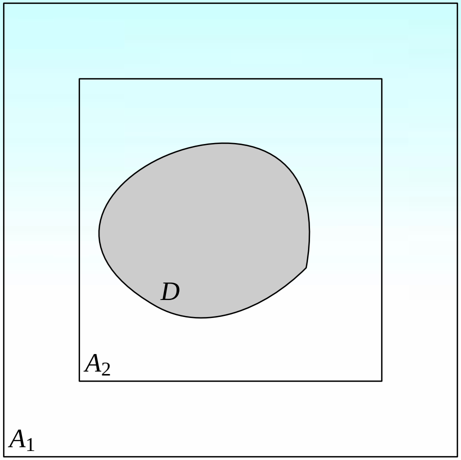


Рис. 6: К определению интеграла по области

Определение 2.13. Ограниченное множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, если $\operatorname{vol} \partial D = 0$. значение интеграла

$$\int\limits_D 1 = V(D)$$

называется *объемом* множества D. Одномерный объем называется *длиной* множества, а двумерный — *площадью*.

Теорема 2.14. *D — жорданово тогда и только тогда, когда $\exists v \geqslant 0: \quad \forall \varepsilon > 0$:*

1. В D можно заключить брусы $A_1, \dots A_k$ с непересекающимися внутренностями

$(\mathring{A}_i \cap \mathring{A}_j = \varnothing$ *при* $i \neq j)$ *так, что*

$$\sum_{j=1}^{k} V(A_j) > v - \varepsilon\,,$$

2. *D можно покрыть брусами $B_1, \ldots B_m$ так, что*

$$\sum_{j=1}^{m} V(B_j) < v + \varepsilon\,.$$

Число v совпадает с объемом $V(D)$ множества D.

Доказательство. Немедленно вытекает из определения интеграла

$$V(D) = \int_A \chi_D\,, \qquad A \supset D\,,$$

где A — брус. □

Как следствие, можно дать следующую характеристику жордановости множества D.

Следствие 2.15. *Если для произвольного положительного ε существуют жордановы множества A, B такие, что*

$$A \subset D \subset B \qquad \text{и} \qquad V(B) - V(A) < \varepsilon\,,$$

то множество D — жорданово и

$$V(D) = \sup_{A \subset D} V(A) = \inf_{B \supset D} V(B)\,.$$

Доказательство. Очевидно. □

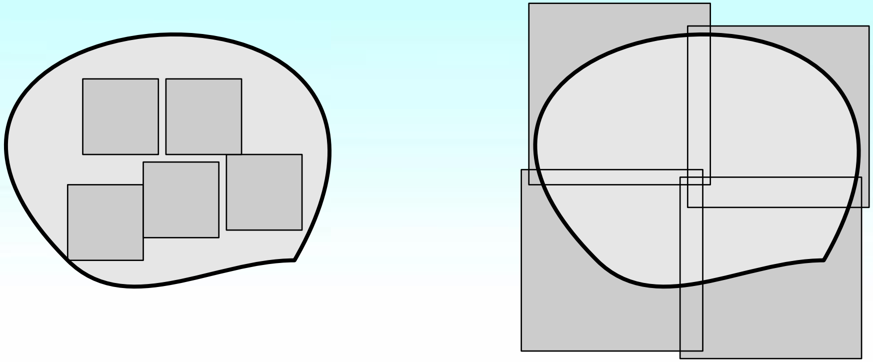


Рис. 7: К определению объема множества

Из теоремы 2.14 немедленно, также, вытекает, что множество $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет объем-ноль тогда и только тогда, когда оно жорданово и $V(D) = 0$, т.е.

$$\operatorname{vol} D = 0 \iff V(D) = 0\,.$$

Наконец, отметим еще одно важное свойство, которое приобрел интеграл — *аддитивность*.

Теорема 2.16. *Если D_1 и D_2 — жордановы и не пересекаются ($D_1 \cap D_2 = \varnothing$), то $D = D_1 \cup D_2$ — тоже жорданово и*

$$\int\limits_D f = \int\limits_{D_1} f + \int\limits_{D_2} f\,.$$

Доказательство. Жордановость D тривиальна. Пусть брус A содержит D. Тогда в силу

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

линейности интеграла

$$\int\limits_{D_1\cup D_2} f = \int\limits_A (f\chi_{D_1\cup D_2}) = \int\limits_A [f\cdot(\chi_{D_1}+\chi_{D_2})] = \int\limits_A (f\chi_{D_1}) + \int\limits_A (f\chi_{D_2}) = \int\limits_{D_1} f + \int\limits_{D_2} f\,.$$

□

Следствие 2.17 (Усиленная аддитивность). *Если внутренности жордановых множеств D_1 и D_2 не пересекаюся ($\mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2 = \varnothing$), то $D = D_1 \cup D_2$ — тоже жорданово и*

$$\int\limits_D f = \int\limits_{D_1} f + \int\limits_{D_2} f\,.$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что если A — брус, $A \supset D$, то в силу монотонности интеграла

$$m_D(f)V(D) = m_D(f)\int\limits_A \chi_D \leqslant \int\limits_D f = \int\limits_A (f\chi_D) \leqslant M_D(f)\int\limits_A \chi_D = M_D(f)V(D)\,.$$

Отсюда вытекает, что интеграл по множеству объема-ноль равен нулю. Очевидно, множества $D_1 \setminus \mathring{D}_1$, $D_2 \setminus \mathring{D}_2$ и $D \setminus (\mathring{D}_1 \cup \mathring{D}_2)$ имеют объем-ноль (все они являются

подмножествами объединения $\partial D_1 \cup \partial D_2$). Тогда в силу аддитивности интеграла

$$\int\limits_{D_1} f = \int\limits_{\mathring{D}_1} f + \int\limits_{D_1 \setminus \mathring{D}_1} f = \int\limits_{\mathring{D}_1} f\,,$$

$$\int\limits_{D_2} f = \int\limits_{\mathring{D}_2} f + \int\limits_{D_2 \setminus \mathring{D}_2} f = \int\limits_{\mathring{D}_2} f$$

$$\int\limits_{D} f = \int\limits_{\mathring{D}_1 \cup \mathring{D}_2} f + \int\limits_{D \setminus (\mathring{D}_1 \cup \mathring{D}_2)} f = \int\limits_{\mathring{D}_1 \cup \mathring{D}_2} f$$

$$\int\limits_{\mathring{D}_1 \cup \mathring{D}_2} f = \int\limits_{\mathring{D}_1} f + \int\limits_{\mathring{D}_2} f\,.$$

$\square$

В частности, свойством усиленной аддитивности обладает объем множества $V(D)$:

$$\mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2 = \varnothing \quad \Rightarrow \quad V(D_1 \cup D_2) = V(D_1) + V(D_2)\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

3. Теорема Фубини

3.1. Сведение кратного интеграла к повторному

Пусть A — брус в $\mathbb{R}^n$, B — брус в $\mathbb{R}^m$. Тогда $A\times B$ — брус в $\mathbb{R}^{n+m}$. Рассмотрим функцию $f:\ A\times B\to\mathbb{R}$. Значение этой функции при $P\in A$, $Q\in B$ мы будем естественно обозначать через $f(P,Q)$. Для каждого фиксированного $P\in A$ положим $f_P(Q)=f(P,Q)$, чем определим семейство функций $f_P:\ B\to\mathbb{R}$. Определим, далее, еще две функции $\varphi_*,\varphi^*:\ A\to\mathbb{R}$, полагая

$$\begin{aligned}
\varphi_*(P)&=I_*(f_P)=\sup_{\lambda_B}\sigma_*(f_P,\lambda_B)\,,\\
\varphi^*(P)&=I^*(f_P)=\inf_{\lambda_B}\sigma^*(f_P,\lambda_B)\,,
\end{aligned}$$

где λ_B — разбиение бруса B. Заметим, что по построению $\varphi_*\leqslant\varphi^*$.

Теорема 3.1 (Фубини). *Если функция f интегрируема на $A\times B$, то функции φ_* и φ^* интегрируемы на A, причем*

$$\int\limits_{A\times B} f=\int\limits_A\varphi_*=\int\limits_A\varphi^*\,.$$

Доказательство. Пусть λ_A и λ_B — разбиения брусов A и B соответственно. Тогда $\lambda=(\lambda_A,\lambda_B)$ — разбиение бруса $A\times B$. Ячейка S разбиения λ имеет вид $S_A\times S_B$, где S_A и S_B — ячейки, соответственно, разбиений λ_A и λ_B. Заметим, что при этом $V(S)=V(S_A)V(S_B)$, где объемы относятся, соответственно, к пространствам $\mathbb{R}^{n+m}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$.

Тогда,

$$\sigma_*(f,\lambda)=\sum_{\text{по } S \text{ из } \lambda} m_S(f)V(S)=\sum_{\text{по } S_A \text{ из } \lambda_A}\Bigl(\sum_{\text{по } S_B \text{ из } \lambda_B} m_S(f)V(S_B)\Bigr)V(S_A)\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 37 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

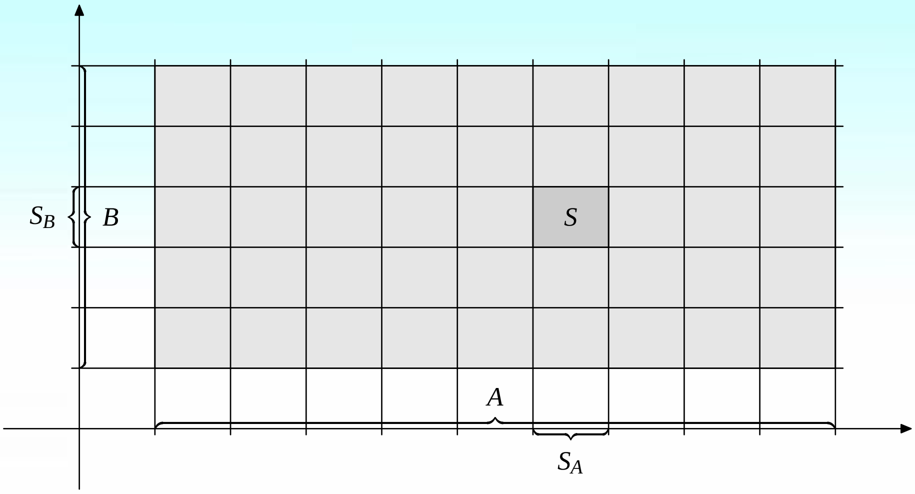


Рис. 8: К доказательству теоремы Фубини

Заметим, что если $P \in S_A$, то $m_S(f) \leqslant m_{S_B}(f_P) = \inf\limits_{Q \in S_B} f(P,Q)$. Отсюда

$$\sum_{\text{по } S_B \text{ из } \lambda_B} m_S(f)V(S_B) \leqslant \sum_{\text{по } S_B \text{ из } \lambda_B} m_{S_B}(f_P)V(S_B) = \sigma_*(f_P, \lambda_B) \leqslant I_*(f_P) = \varphi_*(P)\,.$$

В силу произвольности точки $P \in S_A$ приходим к неравенству

$$\sum_{\text{по } S_B \text{ из } \lambda_B} m_S(f)V(S_B) \leqslant m_{S_A}(\varphi_*)$$

и, следовательно,

$$\sigma_*(f,\lambda) \leqslant \sum_{\text{по } S_A \text{ из } \lambda_A} m_{S_A}(\varphi_*) V(S_A) = \sigma_*(\varphi_*,\lambda_A)\,.$$

Аналогично показывается, что

$$\sigma^*(f,\lambda) \geqslant \sum_{\text{по } S_A \text{ из } \lambda_A} M_{S_A}(\varphi^*) V(S_A) = \sigma^*(\varphi^*,\lambda_A)\,.$$

Тогда

$$\sigma_*(f,\lambda) \leqslant \underbrace{\sigma_*(\varphi_*,\lambda_A) \leqslant \sigma^*(\varphi_*,\lambda_A)}_{} \leqslant \sigma^*(\varphi^*,\lambda_A) \leqslant \sigma^*(f,\lambda)$$

и в силу теоремы 1.9 функция φ_* интегрируема на A и

$$\int\limits_A \varphi_* = \int\limits_{A\times B} f\,.$$

Аналогично, в силу

$$\sigma_*(f,\lambda) \leqslant \sigma_*(\varphi_*,\lambda_A) \leqslant \underbrace{\sigma_*(\varphi^*,\lambda_A) \leqslant \sigma^*(\varphi^*,\lambda_A)}_{} \leqslant \sigma^*(f,\lambda),$$

получаем интегрируемость функции φ^* и равенство

$$\int\limits_A \varphi^* = \int\limits_{A\times B} f\,.$$

$\square$

На практике обычно функция f_P оказывается интегрируемой, т.е.

$$\varphi_*(P) = \varphi^*(P) = \int\limits_B f_P = \int\limits_B f(P,Q)\,dQ\,,$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 39 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

здесь символ dQ в интеграле указывает по какой переменной ведется интегрирование. В этом случае приходим к равенству

$$\int\limits_{A\times B} f(P,Q)\,dPdQ = \int\limits_{A} dP \int\limits_{B} dQ\, f(P,Q)\,.$$

Если функция $f(P,Q)$ интегрируема, также, по переменной P при каждом фиксированном Q, теорема Фубини ведет к равенству

$$\int\limits_{B} dQ \int\limits_{A} dP\, f(P,Q) = \int\limits_{A} dP \int\limits_{B} dQ\, f(P,Q)\,,$$

т.е. позволяет менять порядок интегрирования в повторном интеграле.

3.2. Некоторые приложения

3.2.1. Вычисление кратных интегралов

3.2.1.1. Пример 1 Пусть область интегрирования D определена равенством

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad a\leqslant x\leqslant b\,,\quad \varphi(x)\leqslant y\leqslant \psi(x)\}\,,$$

где φ и ψ — непрерывные функции. Пусть интегрируемая функция $f(x,y)$ задана на области D и продолжена за пределы D произвольным образом. Фиксируем числа c и d так, что

$$\forall x\in[a,b]: \qquad c\leqslant\varphi(x)\leqslant\psi(x)\leqslant d\,.$$

Тогда

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\chi_D(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\chi_D(x,y)\,dy = \int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 40 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

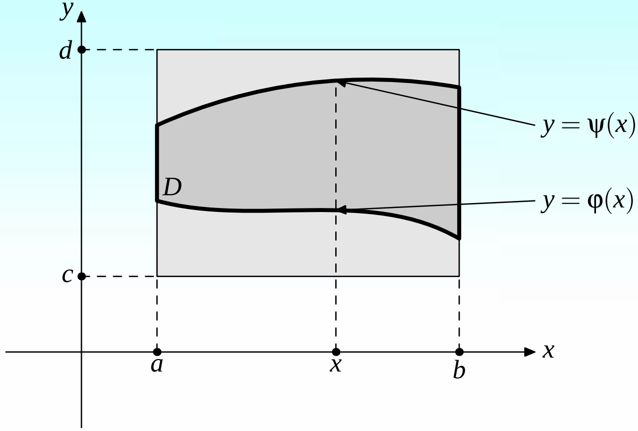


Рис. 9: К расстановке пределов в двойном интеграле

3.2.1.2. Пример 2 Пусть область интегрирования D определена равенством

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad (x, y) \in \Omega\,, \quad \Phi(x, y) \leqslant z \leqslant \Psi(x, y)\}\,,$$

где Φ и Ψ — непрерывные функции и Ω — плоская область, измеримая по Жордану (т.е. имеющая площадь). Пусть интегрируемая функция $f(x, y, z)$ задана на области D и продолжена за пределы D произвольным образом. Пусть $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ — прямоугольный параллелепипед, содержащий тело D. При этом прямоугольник $B =$

$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ будет содержать область Ω — проекцию тела D на плоскость xy. Тогда

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_A f(x,y,z)\chi_D(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_B dxdy \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\chi_D(x,y,z)\,dz$$

$$= \iint\limits_\Omega dxdy \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\chi_D(x,y,z)\,dz = \iint\limits_\Omega dxdy \int\limits_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 42 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

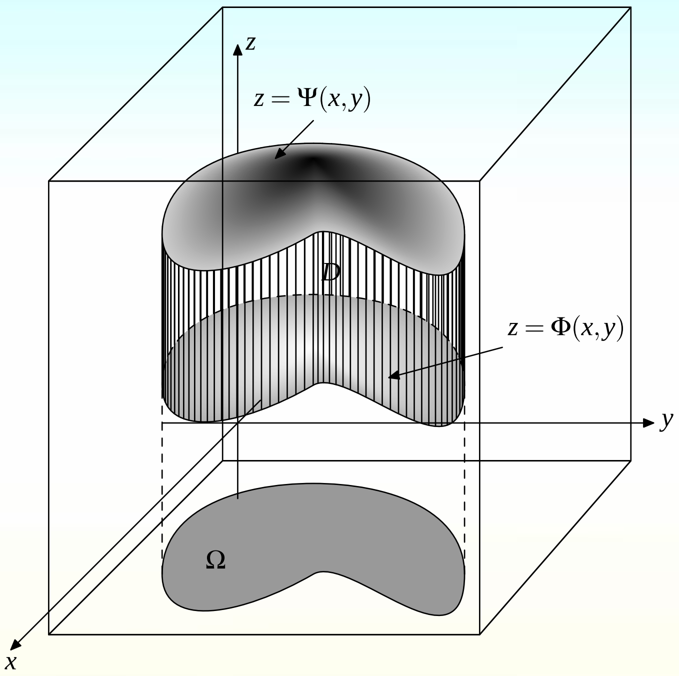


Рис. 10: К расстановке пределов в тройном интеграле

3.2.2. Объем цилиндрического тела

Теорема 3.2. *Пусть* D *— брус в* $\mathbb{R}^n$ *и* f *— неотрицательная функция* $D \to \mathbb{R}$. *Пусть* O_f *— подграфик функции* f, *т.е.*

$$O_f = \{Q \in \mathbb{R}^{n+1} : \qquad Q = (P, u)\,, \quad P \in D\,, \quad 0 \leqslant u \leqslant f(P)\}\,.$$

Тогда

$$O_f \text{ — жорданово множество в } \mathbb{R}^{n+1} \iff f \text{ — интегрируема на } D\,,$$

при этом

$$V(O_f) = \int\limits_D f\,.$$

Доказательство. Предположим, что f — интегрируема и пусть E — множество ее точек разрыва. Пусть $M = \sup\limits_{P \in D} |f(P)|$ и $A_1, A_2, \ldots$ — брусы такие, что

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{A}_k\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} V(A_k) < \frac{\varepsilon}{2M}\,.$$

Тогда брусы $B_k = A_k \times [0, M]\,,\ k = 1, 2, \ldots$ покрывают часть графика функции f, где f — разрывна и

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} V(A_k) \cdot M \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

(подчеркнем, что здесь в левой части равенства суммируются $(n+1)$-мерные объемы, а справа — n-мерные).

Отметим, далее, что множество $F = D \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathring{A}_k$ — замкнутое и, следовательно, компактное, причем на нем функция f непрерывна и, следовательно, — равномерно непре-

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 44 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

рывна. Пусть число $\delta > 0$ характеризуется условием:

$$|P_1P_2| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(P_2) - f(P_1)| < \frac{\varepsilon}{2V(D)}\,.$$

Пусть ранг разбиения λ бруса D сделан меньше δ. Если через S обозначить произвольную ячейку разбиения λ, то брусы $S \times [m_S(f), M_S(f)]$ будут покрывать оставшуюся часть графика функции f, при этом

$$\sum_{\text{по } S \text{ из } \lambda} V(S \times [m_S(f), M_S(f)]) \leqslant \sum_{\text{по } S \text{ из } \lambda} V(S) \cdot \frac{\varepsilon}{2V(D)} = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Таким образом, верхняя часть границы подграфика функции f оказывается покрыта системой брусов, суммарный объем которых не превосходит произвольно взятого положительного ε, т.е. имеет меру-ноль. С учетом того элементарного факта, что гиперплоские грани подграфика O_f имеют $(n+1)$-мерный объем-ноль, получаем, что граница подграфика O_f имеет меру ноль, т.е. характеристическая функция χ_{O_f} — интегрируема, а подграфик O_f — является жордановым множеством.

Предположим, теперь, O_f — измеримо по Жордану. Тогда по теореме Фубини

$$V(O_f) = \int\limits_{D\times[0,M]} \chi_{O_f} = \int\limits_D dP \int\limits_0^M \chi_{O_f}(P,u)\,du = \int\limits_D f(P)\,dP = \int\limits_D f\,.$$

$\square$

Следствие 3.3. *Пусть D — жорданово множество в $\mathbb{R}^n$ и f — неотрицательная функция $D \to \mathbb{R}$. Пусть O_f — подграфик функции f. Тогда*

$$O_f \text{ — жорданово множество в } \mathbb{R}^{n+1} \iff f \text{ — интегрируема на } D\,,$$

при этом

$$V(O_f) = \int\limits_D f\,.$$


Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 45 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Доказательство. Достаточно заключить D в брус, продолжить функцию f и применить предыдущую теорему к функции $f\chi_D$. $\square$

3.2.3. Принцип Кавальери

Пусть A и B — жордановы множества в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что сечения этих множеств на высоте z

$$A_z = \{(x,y): \quad (x,y,z) \in A\} \qquad \text{и} B_z = \{(x,y): \quad (x,y,z) \in B\}$$

имеют одинаковую площадь при каждом z:

$$\forall z: \qquad S(A_z) = S(B_z)\,.$$

Тогда объемы тел A и B — равны.

Для доказательства заключим тело A в брус D и воспользуемся теоремой Фубини:

$$V(A) = \int\limits_D \chi_A = \int dz \int \chi_A(x,y,z)\,dxdy = \int dz \int \chi_{A_z}(x,y)\,dxdy = \int dz\, S(A_z)$$

(здесь мы используем стандартное соглашение не выписывать пределы интегрирования в определенном интеграле, если они определяются естественным заданием интегрируемой функции).

3.2.4. Равенство непрерывных смешанных производных

Теорема Фубини позволяет получить простое доказательство равенства

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,,$$

при условии, что эти производные непрерывны.

Действительно, пусть в точке (x_0, y_0) выполнено неравенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} > 0\,.$$

Тогда в силу непрерывности это неравенство выполнено в некотором прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$ (с центром в точке (x_0, y_0)). По теореме Фубини находим

$$0 < \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) dx dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx - \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, dy$$

$$= \int\limits_c^d \frac{\partial [f(b, y) - f(a, y)]}{\partial y}\, dy - \int\limits_a^b \frac{\partial [f(x, d) - f(x, c)]}{\partial x}\, dx$$

$$= f(b, d) - f(a, d) - [f(b, c) - f(a, c)] - \{f(b, d) - f(b, c) - [f(a, d) - f(a, c)]\} = 0\,.$$

Полученное противоречие доказывает равенство производных.

4. Аддитивные функции

4.1. Плотность аддитивной функции

Определение 4.1. Функция множетсва $\Phi(A)$ называется *аддитивной* , если

$$\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B)\,,$$

при условии, что множества A и B не пересекаются. Если

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} = \varnothing \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B)\,,$$

функция Φ называется *усиленно аддитивной* .

Примерами усиленно аддитивных функций, заданных на жордановых множествах, являются: объем множества $V(A)$ и, более общо, — интеграл (от фиксированной функции f) как функция множества $\Phi(A) = \int_A f$. Заметим, что в последнем случае функция Φ обладает свойством

$$V(A) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(A) = 0\,,$$

которое называют *регулярностью* функции Φ относительно функции V.

В дальнейшем мы всегда будем считать выполненными следующие условия:

- *под аддитивностью будет пониматься усиленная аддитивность,*
- *функции множества будут рассматриваться только на классе жордановых множеств,*
- *все аддитивные функции будут считаться регулярными относительно функции объема* V.

Определение 4.2. Говорят, что последовательность множеств A_k *стягивается к точке* P и пишут[2] $A_k \to P$, если точка P лежит в замыкании любого из множеств данной

[2]не путать с обозначениями для предельного перехода или отображения

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 48 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

последовательности и произвольная окрестность точки P содержит все множества данной последовательности начиная с некоторого номера:

1. $\forall k: \quad P \in \overline{A_k}$,

2. $\forall r > 0 \quad \exists K: \qquad k \geqslant K \quad \Rightarrow \quad A_k \subset B_r(P)$,

где $B_r(P)$ — шар радиуса r с центром в точке P.

Определение 4.3. Пусть Φ — аддитивная функция множества. Если существует предел последовательности $\dfrac{\Phi(A_k)}{V(A_k)}$ при условии, что последовательность A_k стягивается к точке P, и если этот предел не зависит от выбора стягивающейся последовательности, его называют *плотностью* аддитивной функции в точке P.

Заметим, что плотность аддитивной функции (если она существует), является уже функцией точки. Для выражения того факта, что функция φ является плотностью функции Φ, естественно использовать запись

$$\varphi(P) = \lim_{A \to P} \frac{\Phi(A)}{V(A)}.$$

Теорема 4.4. *Пусть f — непрерывная функция и $\Phi(A) = \int_A f$. Тогда функция Φ имеет плотность и эта плотность совпадает с функцией f.*

Доказательство. В силу монотонности интеграла

$$m_A(f)V(A) \leqslant \Phi(A) = \int\limits_A f \leqslant M_A(f)V(A).$$

В силу непрерывности функции f

$$A \to P \qquad \Rightarrow \qquad m_A(f) \to f(P) \quad \text{и} \quad M_A(f) \to f(P)$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 49 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

(т.е. если множество [последовательность множеств] A стягивается к точке P, то величины $m_A(f)$ и $M_A(f)$ стремятся к значению функции f в точке P). Отсюда (по теореме о сжатой переменной)

$$\frac{\Phi(A)}{V(A)} \underset{A\to P}{\to} f(P)\,.$$

□

Мы увидим ниже, что иных аддитивных функций, имеющих непрерывную плотность, кроме как интегралов от непрерывных функций — не существует.[3]

Лемма 4.5. *Аддитивные функции образуют векторное пространство. При этом, если функции Φ_1 и Φ_2 имеют плотности, соответственно, φ_1 и φ_2, то функция $\alpha_1\Phi_1+\alpha_2\Phi_2$ тоже имеет плотность и эта плотность равна $\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Второе — немедленное следствие линейности операции предельного перехода. □

Определение 4.6. *Средним значением* аддитивной функции Φ на множестве A ненулевого объема называется отношение $\dfrac{\Phi(A)}{V(A)}$.

Лемма 4.7. *Если $\mathring{A}_i\cap\mathring{A}_j=\varnothing$ при $i\neq j$ и $A=\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$, то*

$$\left|\frac{\Phi(A_i)}{V(A_i)}\right|\leqslant\gamma\quad(i=1,\dots m)\qquad\Rightarrow\qquad\left|\frac{\Phi(A)}{V(A)}\right|\leqslant\gamma$$

(т.е. среднее значение аддитивной функции на множестве A не может превышать по абсолютной величине наибольшего среднего значения на ячейках разбиения множества A).

[3]напомним о принятых нами выше ограничениях, наложенных на рассматриваемый класс аддитивных функций

Доказательство. Просуммируем неравенства

$$|\Phi(A_i)| \leqslant \gamma V(A_i)\,.$$

В силу свойств аддитивности

$$|\Phi(A)| = \Bigl|\sum_{i=1}^{m} \Phi(A_i)\Bigr| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\Phi(A_i)| \leqslant \gamma \sum_{i=1}^{m} V(A_i) = \gamma V(A)\,.$$

$\square$

Лемма 4.8. *Если плотность аддитивной функции существует и равна тождественно нулю, то сама аддитивная функция также равна нулю тождественно.*

Доказательство. Предположим, для определенности, что $\Phi(A) > 0$. Положим $\gamma = \dfrac{\Phi(A)}{V(A)}$ и $A_1 = A$. Разобьем множество A на подмножества с непересекающимися внутренностями: $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$. В силу предыдущей леммы найдется подмножество B_j такое, что $\dfrac{\Phi(B_j)}{V(B_j)} \geqslant \gamma$. Положим $A_2 = B_j$ и проведем разбиение множества A_2, повторяя процедуру отбора ячейки, на которой среднее значение аддитивной функции не меньше γ. Повторяя эту процедуру неограниченное число раз получим последовательность множеств

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots$$

Процесс дробления всегда можно подчинить условию: $\operatorname{diam} A_n \to 0$. Заметим, что по свойству компактных множеств (см. теорему A.8) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{A_k} \neq \varnothing$. В нашем случае, очевидно, получим $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{A_k} = \{P\}$. Это можно увидеть и непосредственно: достаточно выбрать

$P_k \in \overline{A_k}$, заметить, что P_k — последовательность Коши и, как следствие, существует предел $P = \lim P_k$. Предельная точка P принадлежит каждому из множеств $\overline{A_k}$ ввиду их замкнутости, а следовательно — принадлежит и их пересечению.

Таким образом, построена последовательность множеств A_k, стягивающаяся к точке P, и тогда

$$\varphi(P) = \lim \frac{\Phi(A_k)}{V(A_k)} \geqslant \gamma > 0\,,$$

противоречие. $\square$

Теорема 4.9. *Если аддитивная функция Φ имеет непрерывную плотность φ, то*

$$\Phi(A) = \int\limits_A \varphi\,.$$

Доказательство. Положим

$$\Psi(A) = \int\limits_A \varphi\,.$$

Тогда аддитивная функция $\Phi - \Psi$ имеет плотность, равную $\varphi - \varphi = 0$. Откуда по предыдущей лемме $\Phi - \Psi = 0$.

$\square$

Замечание 4.10. В дальнейшем нам понадобится некоторая модификация полученного результата. Заметим, что в определении плотности функции мы могли бы ограничиться последовательностями стягивающихся множеств определенного типа, например, последовательностями стягивающихся кубов. Разумеется, это привело бы нас к расширенному понятию плотности. При таком толковании *плотности* доказательство леммы 4.8 сохранит свою силу только в отношении выбранного типа стягивающихся множеств (т.е. кубов) и, как следствие, теорема 4.9 также будет иметь силу только в отношении данного типа множеств (т.е. если A — куб).

4.2. Коэффициент искажения объема

Рассмотрим непрерывное взаимно однозначное отображение $\theta: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Заметим, что при этом

$$\mathring{A}_1 \cap \mathring{A}_2 = \varnothing \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{Int}\theta(A_1) \cap \operatorname{Int}\theta(A_2) = \varnothing\,.$$

Мы будем предполагать, также, что оно обладает свойством *жордановости*:

$$A \ \text{— жорданово:} \quad V(A) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta(A) \ \text{— жорданово:} \quad V(\theta(A)) > 0\,.$$

Рассмотрим функцию $W(A) = V(\theta(A))$. Эта функция является аддитивной:

$$W(A_1 \cup A_2) = V(\theta(A_1 \cup A_2)) = V(\theta(A_1) \cup \theta(A_2)) = V(\theta(A_1)) + V(\theta(A_2)) = W(A_1) + W(A_2)\,.$$

Эта же выкладка доказывает усиленную аддитивность функции W ввиду жордановости отображения θ и усиленной аддитивности объема V.

Пусть функция W имеет плотность

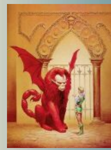
$$w(P) = \lim_{A \to P} \frac{W(A)}{V(A)} = \lim_{A \to P} \frac{V(\theta(A))}{V(A)}\,.$$

Эта плотность называется *коэффициентом искажения* объема при отображении θ.

Теорема 4.11. *Пусть f — непрерывная функция, определенная на множестве значений функции θ. Пусть коэффициент искажения объема при отображении θ определен и является непрерывной функцией $w = w(P)$. Тогда*

$$\int\limits_{\theta(A)} f = \int\limits_{A} f \circ \theta \cdot w\,,$$

где A — произвольное жорданово множество.



Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 53 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Доказательство. Определим функцию

$$\Phi(A) = \int\limits_{\theta(A)} f\,.$$

Пусть A стягивается к точке P, тогда $\theta(A)$ стягивается к точке $\theta(P)$ в силу непрерывности θ и, следовательно,

$$\frac{\Phi(A)}{V\theta((A))} \xrightarrow[\theta(A)\to\theta(P)]{} f(\theta(P))\,.$$

Но тогда

$$\frac{\Phi(A)}{V(A)} = \frac{\Phi(A)}{W(A)} \cdot \frac{W(A)}{V(A)} \xrightarrow[A\to P]{} f(\theta(P)) \cdot w(P)\,.$$

В силу непрерывности найденной плотности $\varphi = f \circ \theta \cdot w$ функции Φ, по теореме 4.9 заключаем, что

$$\Phi(A) = \int\limits_{A} f \circ \theta \cdot w\,.$$

□

Замечание 4.12. Если коэффициент искажения объема определен с использованием специального типа стягивающихся последовательностей множеств, теорема 4.11 сохранит свой смысл именно для таких множеств A, см. замечание 4.10.

5. Замена переменных в интеграле

5.1. Предварительное замечание

Напомним, что если θ — непрерывно дифференцируемая функция $[a,b] \to \mathbb{R}$ и f — интегрируемая функция на множестве значений функции ‘θ, то

$$\int\limits_{\theta(a)}^{\theta(b)} f = \int\limits_a^b f \circ \theta \cdot \theta' .$$

В таком виде формула замены переменной в интеграле не обобщается на случай кратных интегралов. Заметим, однако, что если отображение θ — взаимно однозначно, то предыдущей формуле можно придать вид

$$\int\limits_{\theta([a,b])} f = \int\limits_{[a,b]} f \circ \theta \cdot |\theta'|$$

(для доказательства достаточно заметить, что θ — монотонна, и рассмотреть случаи $\theta' \geqslant 0$ и $\theta' \leqslant 0$).

5.2. Коэффициент искажения объема в случае линейных отображений

5.2.1. Экскурс в линейную алгебру

Пусть $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, т.е.

$$\theta(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1\theta(\mathbf{x}_1) + c_2\theta(\mathbf{x}_2)\,, \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n)\,.$$

Мы предполагать, что в $\mathbb{R}^n$ фиксирован стандартный ортонормированный базис и $\mathbf{x} = (x_1, \dots x_n)$. Прежде всего отметим, что произвольное линейное отображение может быть

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

представлено как произведение (т.е. суперпозиция) *элементарных*:

$$\theta = \theta_1 \theta_2 \cdot \ldots \cdot \theta_N \,.$$

Под элементарным линейным отображением θ понимается одно из двух отображений следующего вида:

1. Растяжение (сжатие) по фиксированной оси

$$\theta(x_1, \ldots x_i, \ldots x_n) = (x_1, \ldots, cx_i, \ldots x_n)\,.$$

2. Изменение одной координаты на величину другой:

$$x_k \mapsto x_k \qquad (k \neq i)\,, \qquad x_i \mapsto x_i + x_j\,,$$

т.е., например, при $i < j$

$$\theta(x_1, \ldots x_i, \ldots x_j, \ldots x_n) = (x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots x_j \ldots x_n)\,.$$

Матрица отображения θ первого типа имеет вид

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & c & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 56 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Матрица отображения θ второго типа при $i < j$ имеет вид

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & & & 1 \end{pmatrix}$$

(здесь единицы занимают диагональ и еще одна единица расположена в i-ой строке j-го столбца, остальные — нули.) Утверждение о разложении линейного отображения в произведение таких элементарных станет очевидным, если вспомнить, что в методе Гаусса к элементарным преобразованиям помимо названных относилась, также, перестановка двух координат (т.е. преобразование, которое меняет местами две строки матрицы). Однако такая перестановка легко сводится к суперпозиции описанных выше элементарных преобразований:

$$(\dots x_i \dots x_j \dots) \mapsto (\dots x_i - x_j \dots x_j \dots) \mapsto$$
$$(\dots x_i - x_j \dots x_i \dots) \mapsto (\dots - x_j \dots x_i \dots) \mapsto (\dots x_j \dots x_i \dots)\,.$$

Напомним, далее, определение *определителя* линейного оператора. Пусть Ω — функция n переменных векторов $\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_n$ (отметим, что n — размерность пространства $\mathbb{R}^n$), принимающая вещественные значения. Она называется *полилинейной антисимметричной n-формой* или *формой объема*, если она линейна по каждому аргументу и равна нулю всякий раз, когда два каких либо ее аргумента совпадают:

1. Линейность по первому аргументу:

$$\Omega(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n) = a\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n) + b\Omega(\mathbf{y}, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n)\,, \qquad (a, b \in \mathbb{R})\,,$$

и аналогично по остальным аргументам.

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 57 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

2. Антисимметричность (кососимметричность):

$$\Omega(\ldots\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}\ldots) = 0\,.$$

Любую функцию, линейную по своим аргументам, достаточно уметь вычислять на базисных комбинациях векторов: форма Ω однозначно задается своими n^n значениями

$$\Omega(\mathbf{e}_{i_1},\ldots\mathbf{e}_{i_n})\,,$$

где $\mathbf{e}_1,\ldots\mathbf{e}_n$ — базисные векторы. Однако в силу антисимметричности, среди этих значений большинство заведомых нулей (если среди индексов $i_1,\ldots i_n$ имеются одинаковые). Неравные нулю значения появляются лишь в случае, когда индексы $i_1,\ldots i_n$ образуют перестановку чисел $1,2,\ldots n$. Заметим, далее, что перестановка любых двух аргументов функции Ω влечет изменение знака функции:

$$\begin{aligned}0 &= \Omega(\ldots\mathbf{x}+\mathbf{y},\ldots\mathbf{x}+\mathbf{y},\ldots)\\ &= \Omega(\ldots\mathbf{x},\ldots\mathbf{x},\ldots)+\Omega(\ldots\mathbf{x},\ldots\mathbf{y},\ldots)+\Omega(\ldots\mathbf{y},\ldots\mathbf{x},\ldots)+\Omega(\ldots\mathbf{y},\ldots\mathbf{y},\ldots)\\ &= \Omega(\ldots\mathbf{x},\ldots\mathbf{y},\ldots)+\Omega(\ldots\mathbf{y},\ldots\mathbf{x},\ldots)\,,\end{aligned}$$

откуда

$$\Omega(\ldots\mathbf{x},\ldots\mathbf{y},\ldots) = -\Omega(\ldots\mathbf{y},\ldots\mathbf{x},\ldots)\,.$$

Это означает, что все ненулевые значения $\Omega(\mathbf{e}_{i_1},\ldots\mathbf{e}_{i_n})$ (на перестановках векторов базиса) определяются одним единственным значением $\Omega(\mathbf{e}_1,\ldots\mathbf{e}_n)$ и отличаются от него лишь множителем равным, знаку перестановки:

$$\Omega(\mathbf{e}_{i_1},\ldots\mathbf{e}_{i_n}) = \operatorname{sgn} i\cdot\Omega(\mathbf{e}_1,\ldots\mathbf{e}_n)\,.$$

Отсюда вытекает, что полилинейные антисимметричные n-формы образуют одномерное векторное пространство. Стандартную базисную форму объема, т.е. удовлетворяющую нормировке

$$\Omega(\mathbf{e}_1,\ldots\mathbf{e}_n) = 1\,,$$

называют *определителем векторов* и обозначают символом det. Значение определителя на векторах $\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_n$ называют *внешним произведением векторов* $\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n$:

$$\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n = \det(\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_n)\,.$$

Если разложить векторы $\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_n$ по базису и записать эти разложения подряд в столбики, получим стандартную форму записи определителя в виде квадратной таблицы:

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим произвольную ненулевую форму объема Ω и пусть θ — линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. В этом случае мы можем определить еще одну форму объема:

$$\Omega_\theta(\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_n) = \Omega(\theta(\mathbf{x}_1), \dots \theta(\mathbf{x}_n))$$

(полилинейность и антисимметричность ее очевидны). В силу одномерности пространства форм объема форма Ω_θ пропорциональна исходной форме Ω: $\Omega_\theta = \lambda \cdot \Omega$, т.е.

$$\Omega_\theta(\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_n) = \lambda\Omega(\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_n)\,.$$

Априори, число λ может зависеть как от θ, так и от Ω, т.е. $\lambda = \lambda(\theta, \Omega)$. Оказывается, что в действительности, коэффициент λ не зависит от Ω. Действительно, пусть μ — коэффициент пропорциональности форм объема Υ и Ω: $\Upsilon = \mu\Omega$. Тогда, в силу определения, он будет являться также коэффициентом пропорциональности форм Υ_θ и Ω_θ: $\Upsilon_\theta = \mu\Omega_\theta$. Но тогда

$$\Upsilon_\theta = \lambda(\theta, \Upsilon)\Upsilon \qquad \text{и} \qquad \Upsilon_\theta = \mu\Omega_\theta = \mu\lambda(\theta, \Omega)\Omega = \lambda(\theta, \Omega)\mu\Omega = \lambda(\theta, \Omega)\Upsilon\,,$$

откуда $\lambda(\theta, \Upsilon) = \lambda(\theta, \Omega)$. Итак, коэффициент λ есть функция только отображения θ. Значение этой функции $\lambda(\theta)$ называют *определителем линейного отображения* θ и обозначают через $\det\theta$:

$$\Omega_\theta = \det\theta \cdot \Omega\,.$$

Последнее равенство может быть переписано в виде

$$\theta(\mathbf{x}_1) \wedge \ldots \wedge \theta(\mathbf{x}_n) = \det \theta \mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_n \,,$$

откуда выводится правило вычисления определителя $\det \theta$:

$$\det \theta = \theta(\mathbf{e}_1) \wedge \ldots \wedge \theta(\mathbf{e}_n) = \begin{vmatrix} \theta_{11} & \ldots & \theta_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \theta_{n1} & \ldots & \theta_{nn} \end{vmatrix} ,$$

где $\theta(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} \mathbf{e}_i$ и θ_{ij} — коэффициенты матрицы отображения θ.

Теорема 5.1. *Пусть θ_1 и θ_2 — линейные отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\det(\theta_1 \theta_2) = \det \theta_1 \det \theta_2 \,.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \det(\theta_1\theta_2) = \theta_1\theta_2(\mathbf{e}_1) \wedge \ldots \wedge \theta_1\theta_2(\mathbf{e}_n) = \det \theta_1 \cdot \theta_2(\mathbf{e}_1) \wedge \ldots \wedge \theta_2(\mathbf{e}_n) \\ = \det \theta_1 \det \theta_2 \mathbf{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_n = \det \theta_1 \det \theta_2 \,. \end{aligned}$$

□

5.2.2. Коэффициент искажения

Лемма 5.2. *Если D — жорданово и θ — элементарное линейное отображение первого вида (т.е. растяжение, см. предыдущий пункт), то*

$$V(\theta(D)) = |\det \theta| \cdot V(D) \,.$$

Доказательство. Если $\theta(\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_i, \dots \mathbf{x}_n) = \theta(\mathbf{x}_1, \dots c\mathbf{x}_i, \dots \mathbf{x}_n)$ и A — брус, то, очевидно, что $\det\theta = c$, $\theta(A)$ — брус и

$$V(\theta(A)) = |c| \cdot V(A) = |\det\theta| \cdot V(A)\,.$$

Отсюда немедленно вытекает утверждение для произвольного жорданова множества, см. теорему 2.14: каждый брус, вписанный в жорданово множество D или входящий в его покрытие, при отображении θ останется брусом, объем которого изменится в $|\det\theta|$ раз. □

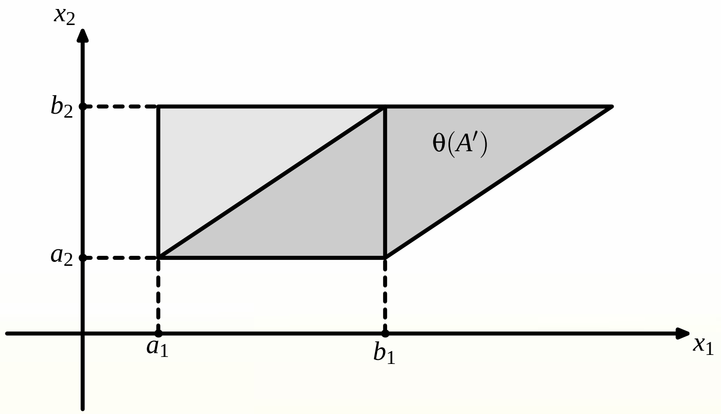


Рис. 11: Площадь параллелограмма

Рассмотрим теперь элементарное линейное отображение θ второго вида. Перенумеруем координаты так, чтобы оно имело вид

$$\theta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n)\,.$$

Пусть A — брус

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] .$$

Положим

$$A' = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] , \qquad A'' = [a_3, b_3] \times \ldots \times [a_n, b_n] ,$$

при этом

$$A = A' \times A'' , \qquad \theta(A) = \theta(A') \times A'' ,$$

где $\theta(A')$ понимается как образ естественного сужения отображения θ на плоскость $\mathbb{R}^2$. По теореме Фубини

$$V(\theta(A)) = V(\theta(A')) \cdot V(A'') ,$$

где объемы справа относятся, соответственно, к $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^{n-2}$. Очевидно, что

$$V(\theta(A')) = V(A') .$$

и тогда

$$V(\theta(A)) = V(A) .$$

Лемма 5.3. *Если D — жорданово и θ — элементарное линейное отображение второго вида, то*

$$V(\theta(D)) = |\det \theta| \cdot V(D) .$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i \subset D \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_j , \qquad \sum_{i=1}^{k} V(A_i) > V(D) - \varepsilon , \qquad \sum_{j=1}^{m} V(B_j) < v(D) + \varepsilon ,$$

где A_i и B_j — брусы, причем внутренности брусов A_i попарно не пересекаются. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{k} \theta(A_i) \subset \theta(D) \subset \bigcup_{j=1}^{m} \theta(B_j) , \qquad \sum_{i=1}^{k} V(\theta(A_i)) > V(D) - \varepsilon , \qquad \sum_{j=1}^{m} V(\theta(B_j)) < v(D) + \varepsilon$$

(здесь мы воспользовались доказанной выше неизменностью объема при данном элементарном преобразовании бруса). В силу произвольности ε отсюда заключаем, см. следствие 2.15, что $\theta(D)$ — жорданово и $V(\theta(D)) = V(D)$. Утверждение леммы теперь вытекает из равенства $\det\theta = 1$. $\square$

Теорема 5.4. *Для произвольной жордановой области D и произвольного линейного отображения θ множество $\theta(D)$ является жордановым и его объем равен*

$$V(\theta(D)) = |\det\theta| \cdot V(D)\,.$$

Доказательство. Достаточно представить линейное отображение θ как произведение элементарных и применить леммы 5.2 и 5.3 и теорему об умножении определителей. $\square$

Доказанная теорема говорит о том, что при линейном отображении коэффициент искажения объема равен абсолютной величине определителя данного линейного отображения. Например, при отображении $\mathbf{x} \mapsto r\mathbf{x}$, определитель которого равен r^n (где n — размерность пространства), единичный шар $\mathcal{B}_1$ с центром в нуле станет шаром $\mathcal{B}_r$ радиуса r:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots x_n) \in \mathcal{B}_r \iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2\,.$$

Тогда

$$V(\mathcal{B}_r) = r^n V(\mathcal{B}_1)\,.$$

5.3. Коэффициент искажения объема при непрерывно дифференцируемом отображении

5.3.1. Экскурс в дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Напомним, что отображение $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется *дифференцируемым в точке* $\mathbf{x}_0$, если существует линейное отображение $\theta'_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{x}_0) = \theta'_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 63 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Отображение $\theta' : \ \mathbf{x} \mapsto \theta'_{\mathbf{x}}$ называется *производной* или *дифференциалом* отображения θ и обозначается, также, через $d\theta$. Значение дифференциала в точке $\mathbf{x}$ совпадает со значением производной в точке $\mathbf{x}$ и обозначается через $d\theta_{\mathbf{x}}$:

$$\theta'_{\mathbf{x}} = d\theta_{\mathbf{x}} \,.$$

Подчеркнем, что это значение является линейным отображением. Матрица этого линейного отображения называется *матрицей Якоби*. В точке $\mathbf{x_0}$ она имеет вид

$$\theta'_{\mathbf{x}_0} = d\theta_{\mathbf{x}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial y_n(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} ,$$

где полагается, что отображение θ описывается равенствами

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots x_n) \\ \vdots \\ y_n = y_n(x_1, \dots x_n) \,, \end{cases}$$

так что: $\mathbf{y} = \theta(\mathbf{x})$. Отметим тот замечательный факт, что линейное отображение $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является дифференцируемым и $\theta' = \theta$. Действительно, в силу линейности

$$\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{x}_0) = \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \,.$$

В дальнейшем, вместо евклидовой нормы вектора $\mathbf{x}$

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \,,$$

нам будет удобнее использовать эквивалентную норму

$$\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|, \dots |x_n|\} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \,. \tag{5.1}$$

Эта величина наделена всеми свойствами, которыми должна обладать «длина» вектора:

1. $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$,
2. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$,
3. $\|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\| \;\; (a \in \mathbb{R})$,
4. $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Эквивалентность ее евклидовой норме вытекает из неравенства

$$\|\mathbf{x}\| \leqslant |\mathbf{x}| \leqslant \sqrt{n}\|\mathbf{x}\| \,,$$

что означает, что если длина вектора мала в одном смысле, то она мала и в другом смысле и наоборот. Выбор нормы (5.1) диктуется следующими соображениями. Если неравенство $|\mathbf{x}| < r$ определяет шар с центром в нуле радиуса r, то неравенство $\|\mathbf{x}\| < r$ (так сказать, шар в смысле нормы $\| \bullet \|$) определяет куб (брус) с центром в нуле и ребром длины $2r$.

Нам понадобится также, далее, понятие нормы линейного отображения. Конечномерные линейные отображения являются ограниченными, т.е. для данного линейного отображения θ

$$\exists C : \qquad \|\theta(\mathbf{x})\| \leqslant C\|\mathbf{x}\| \qquad (\forall \mathbf{x}) \,.$$

Это легко увидеть, если воспользоваться матричным представлением отображения θ. Наилучшая из возможных констант C и называется *нормой линейного отображения* θ:

$$\|\theta\| = \inf\{C : \;\|\theta(\mathbf{x})\| \leqslant C\|\mathbf{x}\|\} \,,$$

при этом

$$\|\theta(\mathbf{x})\| \leqslant \|\theta\| \cdot \|\mathbf{x}\| \,.$$

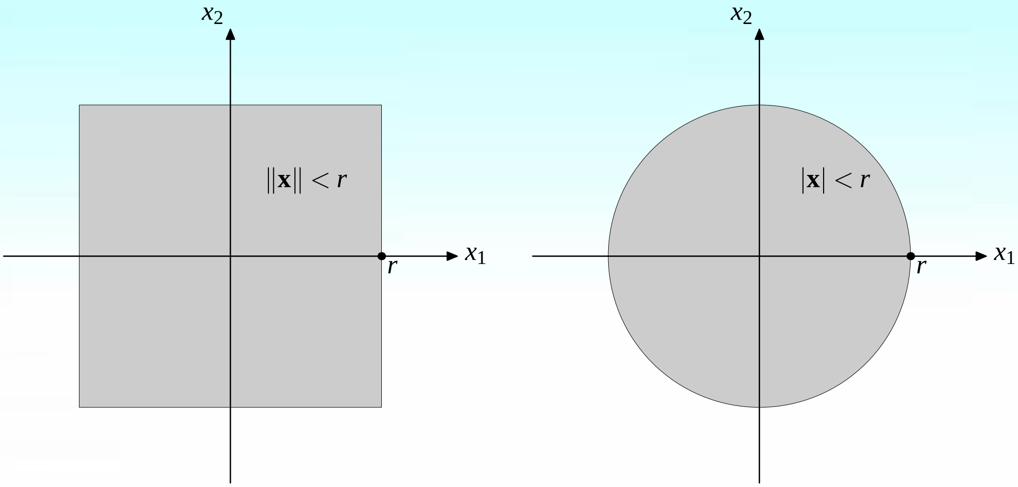


Рис. 12: Куб и шар

Норма отображения зависит от того, какую норму используют для векторов. В нашем случае для вычисления нормы отображения θ с матрицей (a_{ij}) нужно проанализировать неравенство

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant C \max_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j|\,.$$

Нетрудно видеть, что

$$\|\theta\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,.$$

Отметим, также, следующее свойство нормы отображений: если θ_1 и θ_2 — два конеч-

номерных линейных отображения, то

$$\|\theta_1\theta_2\| \leqslant \|\theta_1\| \cdot \|\theta_2\| \, .$$

Доказательство этого свойства элементарно:

$$\|\theta_1\theta_2(\mathbf{x})\| \leqslant \|\theta_1\| \cdot \|\theta_2(\mathbf{x})\| \leqslant \|\theta_1\| \cdot \|\theta_2\| \cdot \|\mathbf{x}\| \, .$$

Теперь мы можем напомнить формулировку следующей важной теоремы дифференциального исчисления функций нескольких переменных.

Теорема 5.5 (Лагранж: о конечных приращениях). *Если θ — непрерывно дифференцируемой отображение в окрестности отрезка прямой $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$, соединяющей точки $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, то*

$$\|\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{x}_0)\| \leqslant \max_{\mathbf{u}\in[\mathbf{x}_0,\mathbf{x}]} \|\theta'_{\mathbf{u}}\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \, .$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{y} = \theta(\mathbf{x})$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots y_n)$. Из формулы Лагранжа для одномерного случая

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

вытекает, что

$$y_i(\mathbf{x}) - y_i(\mathbf{x}_0) = y_i'(\mathbf{u}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i(\mathbf{u}_i)}{\partial x_j} \cdot (x_j - x_{0j}) \, ,$$

где $\mathbf{u}_i \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ (достаточно применить формулу Лагранжа к функции $f(t) = y_i((1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x})$ на отрезке $[0,1]$). Тогда

$$|y_i(\mathbf{x}) - y_i(\mathbf{x}_0)| \leqslant \|y_i'(\mathbf{u}_i)\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \, ,$$

где

$$\|y_i'(\mathbf{u})\| = \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial y_i \cdot (\mathbf{u})}{\partial x_j} \right| .$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

И тогда

$$\|\theta(\mathbf{x})-\theta(\mathbf{x}_0)\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |y_i(\mathbf{x})-y_i(\mathbf{x}_0)| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|y_i'(\mathbf{u}_i)\|\cdot\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \leqslant \max_{\mathbf{u}\in[\mathbf{x}_0,\mathbf{x}]} \|\theta'_{\mathbf{u}}\|\cdot\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\,.$$

$\square$

5.3.2. Лемма о трех концентрических кубах

Лемма 5.6. *Пусть θ — непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что $\theta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и $\theta'_{\mathbf{0}} = I$ (I — тождественное отображение). Пусть, далее, C_r — куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и ребром $2r$ такой, что*

$$\mathbf{x}\in C_r \quad\Rightarrow\quad \|\theta'_{\mathbf{x}} - I\| \leqslant \varepsilon < 1\,.$$

Тогда

$$C_{(1-\varepsilon)r} \subset \theta(C_r) \subset C_{(1+\varepsilon)r}\,.$$

Доказательство. Применим теорему Лагранжа 5.5 к отображению $\theta - I$ имея в виду, что

$$(\theta - I)' = \theta' - I' = \theta' - I$$

и $\mathbf{x}\in C_r$. Тогда

$$\|\theta(\mathbf{x})-\mathbf{x}\| = \|\theta(\mathbf{x}) - I(\mathbf{x}) - (\theta(\mathbf{0}) - I(\mathbf{0}))\| \leqslant \max_{\mathbf{z}\in[\mathbf{0},\mathbf{x}]} \|\theta'_{\mathbf{z}} - I\|\cdot\|\mathbf{x}-\mathbf{0}\| \leqslant \varepsilon\|\mathbf{x}\|\,,$$

откуда

$$\|\theta(\mathbf{x})\| \leqslant (1+\varepsilon)\|\mathbf{x}\| \leqslant (1+\varepsilon)r\,,$$

т.е.

$$\mathbf{x}\in C_r \quad\Rightarrow\quad \theta(\mathbf{x}) \in C_{(1+\varepsilon)r}$$

или, что то же самое, $\theta(C_r)\subset C_{(1+\varepsilon)r}$.

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 68 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Пусть, теперь, $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in C_r$. Тогда аналогично с предыдущим

$$\|\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{v}) - (\mathbf{x} - \mathbf{v})\| \leqslant \max_{\mathbf{u} \in [\mathbf{x}, \mathbf{v}]} \|\theta'_{\mathbf{u}} - I\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| \leqslant \varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|\,,$$

откуда

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| = \|\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{v}) - (\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{v}) - (\mathbf{x} - \mathbf{v}))\| \leqslant \|\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{v})\| + \|\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{v}) - (\mathbf{x} - \mathbf{v})\| \\ \leqslant \|\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{v})\| + \varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$(1 - \varepsilon)\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| \leqslant \|\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{v})\|\,.$$

Это означает, что отображение θ обратимо в C_r.

Фиксируем, теперь, произвольно $\mathbf{y} \in C_{(1-\varepsilon)r}$. Для точек $\mathbf{x} \in C_r$ определим функцию

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \theta(\mathbf{x}) + \mathbf{y}\,.$$

При этом

$$\|\varphi(\mathbf{x})\| \leqslant \|\mathbf{x} - \theta(\mathbf{x})\| + \|\mathbf{y}\| \leqslant \varepsilon \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \leqslant \varepsilon r + (1 - \varepsilon) r = r\,,$$

т.е. $\varphi(\mathbf{x}) \in C_r$ и, следовательно, $\varphi:\ C_r \to C_r$. Заметим, далее, что

$$\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{v} - (\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{v}))\| \leqslant \varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|.$$

Это означает, что отображение φ является в C_r сжимающим ($\varepsilon < 1$). По теореме B.2 отображение φ имеет неподвижную точку:

$$\exists \mathbf{z} \in C_r : \quad \varphi(\mathbf{z}) = \mathbf{z}\,.$$

Но это означает, что $\mathbf{z} - \theta(\mathbf{z}) + \mathbf{y} = \mathbf{z}$, т.е. $\mathbf{y} = \theta(\mathbf{z})$ или, что то же самое (ввиду произвольности $\mathbf{y}$): $C_{(1-\varepsilon)r} \subset \theta(C_r)$. $\square$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 69 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

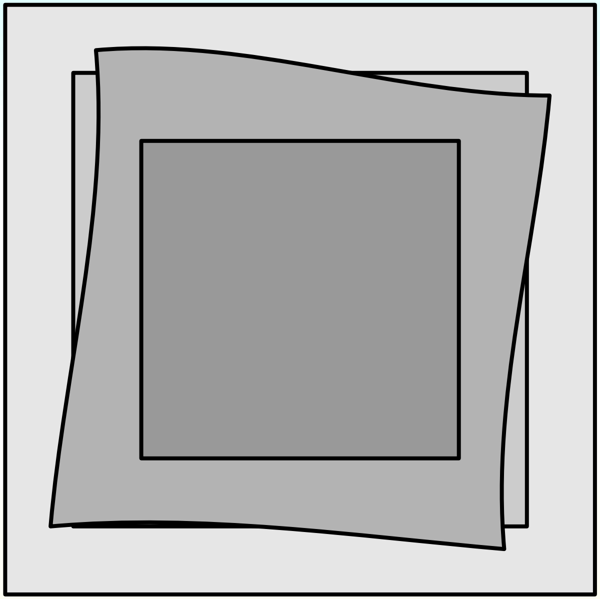


Рис. 13: К лемме о трех кубах

Прежде чем сформулировать важное следствие из леммы о трех концентрических кубах, отметим следующее.

Теорема 5.7. *Пусть D — жорданово множество и θ — непрерывно дифференцируемое отображение, определенное в окрестности D. Тогда $\theta(D)$ является жордановым множеством.*

Доказательство. Заметим, что $V(\partial D) = 0$. Пусть кубы $A_1, \dots A_k$ покрывают ∂D и

$$\sum_{i=1}^{k} V(A_i) \leqslant \varepsilon\,.$$

В силу непрерывной дифференцируемости $\|\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{v})\| \leqslant C\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|$. Считая, что $\mathbf{u}$ — центр куба A_i, отсюда заключаем, что $\theta(A_i)$ содержится в кубе B_i (с центром в $\theta(\mathbf{u})$) объема $V(B_i) = C^n V(A_i)$. Кубы $B_1, \dots B_k$ покрывают $\partial\theta(D)$ и

$$\sum_{i=1}^{k} V(B_i) \leqslant C^n \varepsilon\,.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $\partial\theta(D)$ имеет объем-ноль. $\square$

Следствие 5.8. *Пусть θ — непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Пусть $\boldsymbol{a}$ — центр куба D, причем*

$$\mathbf{x} \in D \qquad \Rightarrow \qquad \|(\theta'_{\boldsymbol{a}})^{-1}\theta'_{\mathbf{x}} - I\| \leqslant \varepsilon < 1\,.$$

Тогда

$$(1-\varepsilon)^n \cdot |\det\theta'_{\boldsymbol{a}}| \cdot V(D) \leqslant V(\theta(D)) \leqslant (1+\varepsilon)^n \cdot |\det\theta'_{\boldsymbol{a}}| \cdot V(D)\,.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ и $\theta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Тогда $D = C_r$ — куб радиуса r с центром в нуле. Заметим, что отображение $\varphi = (\theta'_{\mathbf{0}})^{-1}\theta$ удовлетворяет условиям леммы. Действительно, $\varphi' = (\theta'_{\mathbf{0}})^{-1}\theta'$ (где мы воспользовались

цепным правилом и тем, что производная от линейного отображения равна самому отображению) и тогда

$$\mathbf{x} \in C_r \qquad \Rightarrow \qquad \|\varphi'_{\mathbf{x}} - I\| \leqslant \varepsilon < 1\,.$$

В силу заключения леммы

$$C_{(1-\varepsilon)r} \subset \varphi(C_r) \subset C_{(1+\varepsilon)r}\,.$$

Под действием линейного отображения $\theta'_{\mathbf{0}}$ получаем

$$\theta'_{\mathbf{0}}\big(C_{(1-\varepsilon)r}\big) \subset \theta(C_r) \subset \theta'_{\mathbf{0}}\big(C_{(1+\varepsilon)r}\big)\,.$$

Но $V\big(\theta'_{\mathbf{0}}(C_{cr})\big) = |\det\theta'_{\mathbf{0}}| \cdot V(C_{cr}) = |\det\theta'_{\mathbf{0}}| \cdot c^n V(C_r)$ и, следовательно,

$$(1-\varepsilon)^n \cdot |\det\theta'_{\mathbf{0}}| \cdot V(C_r) \leqslant V(\theta(C_r)) \leqslant (1+\varepsilon)^n \cdot |\det\theta'_{\mathbf{0}}| \cdot V(C_r)\,.$$

□

5.3.3. Замена переменных в кратном интеграле

Теорема 5.9. *Пусть θ — непрерывно дифференцируемо на окрестности бруса D, обратимо на этой окрестности, причем $\det\theta'_{\mathbf{x}} \neq 0$. Тогда*

$$\int\limits_{\theta(D)} f = \int\limits_{D} f\circ\theta \cdot |\det\theta'|\,,$$

где f — произвольная интегрируемая функция на $\theta(D)$.

Доказательство. 1) $\theta'_{\mathbf{x}}$ — непрерывная функция от $\mathbf{x}$ на компактном множестве (брусе), а потому — равномерно непрерывна. Положим $M = \max\limits_{\mathbf{x}\in D}\|(\theta'_{\mathbf{x}})^{-1}\|$. В силу $\det\theta'_{\mathbf{x}} \neq 0$ заключаем, что $M < \infty$. Пусть $\delta > 0$ таково, что

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| \leqslant \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|\theta'_{\mathbf{x}} - \theta'_{\mathbf{v}}\| < \frac{\varepsilon}{M}\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 72 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Пусть A — куб с центром в точке $\boldsymbol{a}$ и ребром длины $2r$, т.е.

$$A = \{\mathbf{x} : \ \|\mathbf{x} - \boldsymbol{a}\| \leqslant r\} \subset D\,.$$

Будем считать, что $r < \delta$. Тогда

$$\|(\theta'_{\boldsymbol{a}})^{-1}\theta'_{\mathbf{x}} - I\| = \|(\theta'_{\boldsymbol{a}})^{-1}(\theta'_{\mathbf{x}} - \theta'_{\boldsymbol{a}})\| \leqslant \|(\theta'_{\boldsymbol{a}})^{-1}\| \cdot \|\theta'_{\mathbf{x}} - \theta'_{\boldsymbol{a}}\| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\,.$$

В силу следствия 5.8

$$(1-\varepsilon)^n \cdot |\det \theta'_{\boldsymbol{a}}| \cdot V(A) \leqslant V(\theta(A)) \leqslant (1+\varepsilon)^n \cdot |\det \theta'_{\boldsymbol{a}}| \cdot V(A)\,,$$

и следовательно,

$$(1-\varepsilon)^n \cdot |\det \theta'_{\boldsymbol{a}}| \leqslant \frac{V(\theta(A))}{V(A)} \leqslant (1+\varepsilon)^n \cdot |\det \theta'_{\boldsymbol{a}}|\,.$$

Пусть куб A стягивается к точке $\boldsymbol{b}$. Тогда $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{b}$ и $|\det \theta'_{\boldsymbol{a}}| \to |\det \theta'_{\boldsymbol{b}}|$. Рассмотрим отношение

$$\frac{V(\theta(A))}{V(A)}$$

при $A \to \boldsymbol{b}$. Мы не знаем, пока, существует ли предел этого отношения. Воспользуемся понятиями верхнего и нижнего пределов, т.е. наибольшего и наименьшего из возможных пределов подпоследовательностей. Тогда

$$(1-\varepsilon)^n \cdot |\det \theta'_{\boldsymbol{b}}| \leqslant \underline{\lim} \frac{V(\theta(A))}{V(A)} \leqslant \overline{\lim} \frac{V(\theta(A))}{V(A)} \leqslant (1+\varepsilon)^n \cdot |\det \theta'_{\boldsymbol{b}}|\,.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что предел существует (верхний и нижний пределы совпадают) и равен $|\det \theta'_{\boldsymbol{b}}|$:

$$\lim_{A \to \boldsymbol{b}} \frac{V(\theta(A))}{V(A)} = |\det \theta'_{\boldsymbol{b}}|\,.$$

По теореме 4.11

$$\int\limits_{\theta(A)} f = \int\limits_A f \circ \theta \cdot |\det \theta'|,$$

где A — куб и f — произвольная непрерывная функция на $\theta(A)$.

2) Пусть B — брус, $B \subset D$. Пусть ρ — линейное отображение такое, что $B = \rho(A)$, где A — куб. Тогда в силу заключения предыдущего пункта

$$V(\theta(B)) = V(\theta \circ \rho(A)) = \int\limits_{\theta\circ\rho(A)} 1 = \int\limits_A |\det(\theta\circ\rho)'| = \int\limits_A |\det \theta'\circ\rho| \cdot |\det \rho'| = \int\limits_{\rho(A)} |\det \theta'| = \int\limits_B |\det \theta'|$$

(функция $|\det \theta'|$ — непрерывна). Как следствие,

$$\int\limits_{\theta(B)} f = \int\limits_B f \circ \theta \cdot |\det \theta'|,$$

где B — брус и f — произвольная непрерывная функция на $\theta(B)$.

3) Положим $\psi = \theta^{-1}$. Пусть теперь B — брус на образе функции θ. Воспользуемся заключением предыдущего пункта применительно к функции ψ. Тогда

$$\int\limits_B 1 = \int\limits_B |\det(\theta \circ \psi)'| = \int\limits_B |\det(\theta' \circ \psi)| \cdot |\det \psi'| = \int\limits_{\psi(B)} |\det \theta'| = \int\limits_{\theta^{-1}(B)} |\det \theta'|$$

(функция $|\det \theta'|$ — непрерывна).

4) Пусть f — интегрируема на брусе B. Пусть λ — разбиение бруса B. Тогда

$$\sigma_*(f,\lambda) = \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} m_A(f) V(A) = \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} m_A(f) \int\limits_A 1 = \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} m_A(f) \int\limits_{\theta^{-1}(A)} |\det \theta'|$$

$$\leqslant \sum_{\text{по } A \text{ из } \lambda} \int\limits_{\theta^{-1}(A)} f \circ \theta \cdot |\det \theta'| = \int\limits_{\theta^{-1}(B)} f \circ \theta \cdot |\det \theta'|,$$

откуда

$$\int\limits_B f \leqslant \int\limits_{\theta^{-1}(B)} f\circ\theta\cdot|\det\theta'|\,.$$

Аналогично (с заменой σ_* на σ^*) доказывается обратное неравенство

$$\int\limits_B f \geqslant \int\limits_{\theta^{-1}(B)} f\circ\theta\cdot|\det\theta'|\,,$$

а следовательно, равенство

$$\int\limits_B f = \int\limits_{\theta^{-1}(B)} f\circ\theta\cdot|\det\theta'|\,.$$

5) Воспользуемся заключением предыдущего пункта в отношении ψ, тогда

$$\int\limits_D f\circ\theta\cdot|\det\theta'| = \int\limits_{\psi^{-1}(D)} f\circ\theta\circ\psi\cdot|\det\theta'\circ\psi|\cdot|\det\psi'| = \int\limits_{\theta(D)} f$$

ввиду $\theta=\psi^{-1}$.

$\square$

Доказанная теорема не всегда удобна в приложениях. Однако имеет место простое обобщение.

Теорема 5.10. *Пусть θ — непрерывно дифференцируемо на окрестности бруса D, обратимо внутри D, причем внутри D $\det\theta'_{\mathbf{x}}\neq 0$. Тогда*

$$\int\limits_{\theta(D)} f = \int\limits_D f\circ\theta\cdot|\det\theta'|\,,$$

где f — произвольная интегрируемая функция на $\theta(D)$.

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 75 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Доказательство. Пусть B — брус, концентрический с D и такой, что $B \subset \mathring{D}$. Тогда по предыдущей теореме

$$\int\limits_{\theta(B)} f = \int\limits_{B} f \circ \theta \cdot |\det \theta'|\,,$$

при этом

$$\int\limits_{\theta(D)} f = \int\limits_{\theta(B)} f + \int\limits_{\theta(D\smallsetminus B)} f\,,$$

$$\int\limits_{D} f \circ \theta \cdot |\det \theta'| = \int\limits_{B} f \circ \theta \cdot |\det \theta'| + \int\limits_{D\smallsetminus B} f \circ \theta \cdot |\det \theta'|\,,$$

Можно считать, что $V(D \smallsetminus B) < \varepsilon$, где ε произвольно мало. Тогда

$$\Big|\int\limits_{\theta(D\smallsetminus B)} f\Big| \leqslant M \cdot V(\theta(D \smallsetminus B)) \leqslant MC\varepsilon\,,$$

где $M = \sup\limits_{P\in\theta(D)} |f(P)|$ и C — константа, зависящая от θ[4]. Аналогично,

$$\Big|\int\limits_{D\smallsetminus B} f \circ \theta \cdot |\det \theta'|\Big| \leqslant MT \cdot V(D \smallsetminus B) \leqslant MT\varepsilon\,,$$

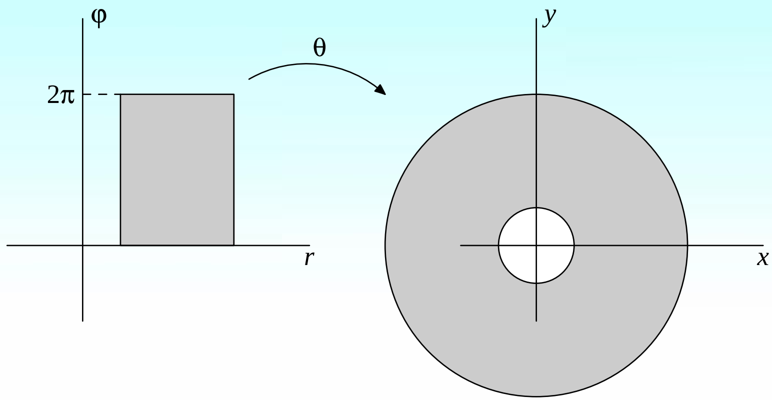
где $T = \max\limits_{\mathbf{x}\in D} |\det \theta'_{\mathbf{x}}|$.

Ссылка на произвольность выбора ε завершает доказательство. □

5.3.4. Примеры

[4]например, можно взять $C = \max\limits_{\mathbf{x}\in D} \|\theta'_{\mathbf{x}}\|^n$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 76 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход



5.3.4.1. Полярные координаты. Полярные координаты (r,φ) определяются отображением

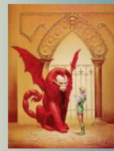
$$\theta: \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi\,, \\ y = r\sin\varphi\,, \end{cases} \qquad (r,\varphi)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)\,.$$

Производная (матрица Якоби) этого отображения равна

$$\theta' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}\,,$$

откуда $|\det\theta'| = r$. Тогда согласно теореме о замене переменных

$$\iint\limits_{\theta(D)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,drd\varphi\,.$$



5.3.4.2. Параболические координаты. Вычислим интеграл

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy\,,$$

где область D ограничена гиперболами

$$\begin{aligned} xy &= 1\,, & x^2-y^2 &= 1\,,\\ xy &= 3\,, & x^2-y^2 &= 4\,. \end{aligned}$$

Положим

$$\psi: \qquad \begin{cases} u = x^2-y^2\,,\\ v = xy\,. \end{cases}$$

Тогда

$$\det\psi' = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2+y^2)$$

и, следовательно,

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_{\psi(D)} dudv = \int\limits_1^4 du\int\limits_1^3 dv = 3\,.$$

В этом примере в качестве криволинейных координат выступают координаты x, y, которые по отношению к декартовым координатам u, v называются параболическими.

5.3.4.3. Цилиндрические координаты. Это координаты r, φ, z, определенные равенствами

$$\theta: \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi\,,\\ y = r\sin\varphi\,,\\ z = z\,. \end{cases}$$

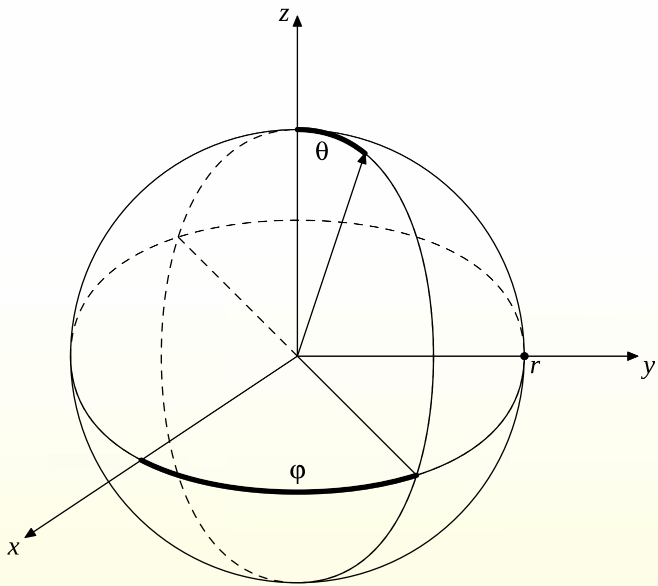
Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Тогда

$$\det \theta' = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\,,$$

откуда

$$\iiint\limits_{\theta(D)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot r\,drd\varphi dz\,.$$



5.3.4.4. Сферические координаты. Это координаты r, θ, φ, определенные равенствами

$$\Theta: \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta\,, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta\,, \\ z = r\cos\theta\,, \end{cases} \qquad r \in [0, \infty), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi)\,.$$

Тогда

$$\det\Theta' = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\theta\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta\,,$$

откуда

$$\iiint\limits_{\Theta(D)} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{D} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi\,.$$

5.3.4.5. Сферические координаты в n-мерном случае. Отображение Θ определим равенствами

$$\Theta: \quad \begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1\,, \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2\,, \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\,, \\ \vdots \\ x_{n-2} = r\sin\theta_1\cdot\ldots\cdot\cos\theta_{n-2}\,, \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{n-2}\cos\varphi\,, \\ x_n = r\sin\theta_1\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{n-2}\sin\varphi\,, \end{cases}$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 80 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

где $r \geqslant 0\,, \theta_i \in [0,\pi]$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Координаты $r, \theta_1, \ldots \theta_{n-2}, \varphi$ называются сферическими (или полярными). При этом

$$|\det \Theta'| =$$

$$\left| \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & 0 \\ \sin\theta_1\cdot\ldots\cdot\cos\varphi & r\cos\theta_1\cdot\ldots\cdot\cos\varphi & r\sin\theta_1\cos\theta_2\cdot\ldots\cdot\cos\varphi & \ldots & -r\sin\theta_1\cdot\ldots\cdot\sin\varphi \\ \sin\theta_1\cdot\ldots\cdot\sin\varphi & r\cos\theta_1\cdot\ldots\cdot\sin\varphi & r\sin\theta_1\cos\theta_2\cdot\ldots\cdot\sin\varphi & \ldots & r\sin\theta_1\cdot\ldots\cdot\cos\varphi \end{vmatrix} \right|$$

$$= r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{n-2}\,.$$

Этот результат элементарен: если вынести из второго, третьего и т.д. столбцов множители $r, r\sin\theta_1$ и т.д., равные длинам этих векторов–столбцов, останется определитель ортогональной матрицы (согласно определению этих координат). Тогда

$$\int\limits_{\Theta(D)} f(x_1,\ldots x_n)\,dx_1\ldots dx_n = \int\limits_D f\circ\Theta(r,\theta_1,\ldots\varphi)\,r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{n-2}\,dr d\theta_1\ldots d\varphi\,.$$

Например, объем единичного шара $\mathcal{B}_1$ будет равен

$$V(\mathcal{B}_1) = \int\limits_0^1 r^{n-1}dr\int\limits_{\mathcal{S}_1} d\sigma = \frac{1}{n}\int\limits_{\mathcal{S}_1} d\sigma\,,$$

где через $\int_{\mathcal{S}_1} d\sigma$ мы обозначили интеграл по углам:

$$\int\limits_{\mathcal{S}_1} d\sigma = 2\pi\prod_{k=1}^{n-2}\int\limits_0^\pi \sin^k\theta\,d\theta\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 81 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Его смысл будет выяснен несколько позже.

6. Несобственные интегралы

6.1. Абсолютно интегрируемые функции

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и f — функция, заданная на G. Функция f называется *локально интегрируемой* на G, если она интегрируема на любом компактном жордановом подмножестве F:

$$\forall F \subset G : \quad \exists \int\limits_F f \, .$$

Локально интегрируемая функция называется *абсолютно интегрируемой* на G, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \subset G : \qquad F \subset A \subset G \quad \Rightarrow \quad \Big| \int\limits_A f - \int\limits_F f \Big| \leqslant \varepsilon \, ,$$

где F и A — компактные и жордановы. Последнее неравенство можно записать в виде

$$\Big| \int\limits_{A \setminus F} f \Big| \leqslant \varepsilon \, .$$

Отметим, что абсолютно интегрируемые на G функции образуют линейное пространство (очевидно).

6.2. Положительные абсолютно интегрируемые функции

Пусть $f \geqslant 0$ и абсолютно интегрируема на G. Если $A_1 \subset A_2 \subset G$, где A_1 и A_2 компактны и жордановы, то

$$\int\limits_{A_1} f \leqslant \int\limits_{A_2} f \, .$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 83 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Положим $\varepsilon = 1$ и пусть F_0 — компактное и жорданово множество, существование которого гарантировано определением абсолютной интегрируемости, т.е. для любого компактного и жорданова множества A

$$\Bigl|\int\limits_A f - \int\limits_{F_0} f\Bigr| \leqslant 1\,,$$

если $F_0 \subset A \subset G$. Тогда с очевидностью заключаем, что для произвольного компактного и жорданова множества $A \subset G$ верно неравенство

$$0 \leqslant \int\limits_A f \leqslant \int\limits_{F_0} f + 1\,,$$

т.е. интегралы $\int_A f$ ограничены в совокупности и, следовательно, существует их конечная точная верхняя граница

$$I_G(f) = \sup_{A \subset G} \int\limits_A f\,, \qquad A \text{ — компактное и жорданово.}$$

Величина $I_G(f)$ называется *несобственным интегралом* неотрицательной функции f и обозначается через $\int_G f$.

Теорема 6.1. *Неотрицательная локально интегрируемая функция является абсолютно интегрируемой тогда и только тогда, когда*

$$\exists C: \qquad \int\limits_A f \leqslant C$$

при любом компактном и жордановом множестве $A \subset G$.

Веб – страница
Титульный лист
Страница 84 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Доказательство. Ограниченность в совокупности таких интегралов в случае абсолютной интегрируемости уже была показана. Докажем обратное. Положим

$$I = \sup_{A \subset G} \int_A f \, .$$

По свойству точной верхней грани

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists F \; \text{ — компактное и жорданово} : \qquad I - \int_F f \leqslant \varepsilon \, .$$

Тогда в силу монотонности интеграла

$$F \subset A \subset G \qquad \Rightarrow \qquad \int_A f - \int_F f \leqslant \varepsilon \, .$$

$\square$

Следствие 6.2 (Теоремы сравнения). *Если* $0 \leqslant f \leqslant g$, *то*

1. g *— абсолютно интегрируема* $\quad\Rightarrow\quad$ f *— абсолютно интегрируема,*
2. f *— абсолютно неинтегрируема* $\quad\Rightarrow\quad$ g *— абсолютно неинтегрируема.*

Доказательство. Второе утверждение является следствием первого, первое вытекает из оценки

$$\int_A f \leqslant \int_A g \leqslant \int_G g = \mathrm{Const} \, .$$

$\square$

6.3. Абсолютная интегрируемость функций

В случае произвольной локально интегрируемой функции f положим

$$f_+(P) = \begin{cases} f(P)\,, & \text{при} \quad f(P) \geqslant 0, \\ 0\,, & \text{при} \quad f(P) < 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad f_-(P) = \begin{cases} -f(P)\,, & \text{при} \quad f(P) \leqslant 0, \\ 0\,, & \text{при} \quad f(P) > 0\,. \end{cases}$$

По определению $f_\pm \geqslant 0$ и

$$f = f_+ - f_-\,.$$

Теорема 6.3. *Если $|f|$ — абсолютно интегрируема, то и f — абсолютно интегрируема.*[5]

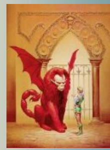
Доказательство. Заметим, что $|f| = f_+ + f_-$, откуда $f_\pm \leqslant |f|$ и, следовательно, $f_\pm$ — абсолютно интегрируемы, а тогда абсолютно интегрируема функция f (как их разность). □

Теорема 6.4. *Если f — абсолютно интегрируема, то $|f|$ — также абсолютно интегрируема.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда либо f_+, либо f_- является абсолютно неинтегрируемой. Допустим, для определенности, что f_+ не является абсолютно интегрируемой. Это означает, что интеграл $\int_B f_+$, где B — компактное и жорданово подмножество в G, можно сделать сколь угодно большим за счет выбора B. Обозначим через F_0 множество, существование которого оговаривается в определении абсолютной интегрируемости функции f и которое обладает свойством

$$F_0 \subset A \subset G \qquad \Rightarrow \qquad \Big|\int\limits_A f - \int\limits_{F_0} f\Big| \leqslant 1\,.$$

[5] при условии, что f — локально интегрируема



В силу аддитивности интеграла и неотрицательности f_+ замечаем, что интеграл $\int_B f_+$ можно делать сколь угодно большим при условии $B \cap F_0 = \varnothing$.

Фиксировав множество B и пользуясь определением интеграла, найдем теперь нижнюю сумму Дарбу для интеграла $\int_B f_+$ такую, что

$$\int\limits_B f_+ - \sum m_S(f_+)V(S) \leqslant 1\,.$$

Оставим, естественно, в этой сумме Дарбу только ненулевые слагаемые. Однако если $m_S(f_+) > 0$, то $f_+ > 0$ на параллелепипеде S и, следовательно, $f > 0$ на S, т.е. в этом случае имеем равенство $f = f_+$ и

$$\int\limits_B f_+ - \sum{}' m_S(f)V(S) \leqslant 1\,,$$

где штрих у знака суммы указывает на то, что суммирование ведется только по тем параллелепипедам S, где $f_+ > 0$. Обозначим объединение таких параллелепипедов через C, тогда

$$\sum{}' m_S(f)V(S) \leqslant \int\limits_C f\,,$$

откуда

$$\int\limits_C f \geqslant \int\limits_B f_+ - 1\,.$$

Положим $D = F_0 \cup C$, при этом по построению $C \subset B$, т.е. $F_0 \cap C = \varnothing$. Тогда в силу определения F_0

$$\Bigl|\int\limits_{D \setminus F_0} f\Bigr| \leqslant 1\,,$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 87 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

но по построению

$$\int\limits_{D\setminus F_0} f = \int\limits_{C} f\,,$$

где последний интеграл сколь угодно велик. Противоречие. $\square$

Теорема 6.5. *Если f абсолютно интегрируема на G, то $\exists!\ I \in \mathbb{R}$:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \subset G: \qquad F \subset A \subset G \quad \Rightarrow \quad \Big|\int\limits_A - I\Big| \leqslant \varepsilon\,,$$

где A и F — компактны и жордановы.

Доказательство. Положим

$$I = \int\limits_G f_+ - \int\limits_G f_-\,.$$

Фиксировав $\varepsilon > 0$ найдем множества $F_\pm$ такие, что

$$F_+ \subset A \subset G \quad \Rightarrow \quad \Big|\int\limits_A f_+ - \int\limits_G f_+\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$F_- \subset A \subset G \quad \Rightarrow \quad \Big|\int\limits_A f_- - \int\limits_G f_-\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Положим $F = F_+ \cup F_-$. Тогда при $F \subset A \subset G$ будут выполнены оба неравенства и, следовательно,

$$\Big|\int\limits_A f - I\Big| = \Big|\int\limits_A f_+ - \int\limits_A f_- - \Big(\int\limits_G f_+ - \int\limits_G f_-\Big)\Big| \leqslant \Big|\int\limits_A f_+ - \int\limits_G f_+\Big| + \Big|\int\limits_A f_- - \int\limits_G f_-\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Единственность I элементарна: если I_1 и I_2 — два числа, обладающие описанным в теореме свойством, то интеграл $\int_A f$ должен быть одновременно близок как к I_1, так и к I_2, откуда вытекает равенство $I_1 = I_2$. □

Определение 6.6. Число I, определенное теоремой 6.5, называется несобственным интегралом функции f по области G и обозначается $\int_G f$. Если несобственный интеграл существует и конечен (т.е. если функция f является абсолютно интегрируемой) говорят, несобственный интеграл $\int_G f$ *сходится*. В противном случае говорят, что несобственный интеграл *расходится*.

Заметим, что если интеграл $\int_G f$ существует как интеграл Римана, то он существует и как несобственный и оба значения интеграла совпадают между собой.[6].

Определение 6.7. Последовательность множеств A_k называется *аппроксимативной* для G или *исчерпывающей* множество G, если

1. A_k — компактны и жордановы,
2. $A_k \subset A_{k+1}$,
3. $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathring{A}_k$.

Теорема 6.8. *Если A_k — аппроксимативная последовательность для G, то*

$$\int\limits_G f = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{A_k} f \, .$$

[6]это вытекает из единственности несобственного интеграла и того факта, что интеграл Римана обладает свойством, описанным в теореме 6.5 в отношении числа I


Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 89 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и множество F выбрано согласно теореме 6.5:

$$F \subset A \subset G \quad \Rightarrow \quad \left| \int\limits_G f - \int\limits_A f \right| \leqslant \varepsilon \,.$$

В силу включения $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathring{A}_k$ и компактности F уже конечное семейство множеств $\mathring{A}_k$ покрывает множество F : $\quad F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathring{A}_k = \mathring{A}_m$. Тогда

$$k \geqslant m \quad \Rightarrow \quad \left| \int\limits_G f - \int\limits_{A_k} f \right| \leqslant \varepsilon \,,$$

т.е. $\int_{A_k} f \to \int_G f$. $\square$

Примеры.

1) Пусть B_R — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центром в нуле и $G = \mathbb{R}^n \setminus B_1$. Рассмотрим на G функцию $f(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{|\mathbf{x}|^p}$ и интеграл от нее. Аппроксимативной последовательностью является последовательность множеств $A_R = B_R \setminus B_1$ при $R \to \infty$. В сферических координатах, см. стр. 80,

$$\int\limits_{A_R} f = \int\limits_1^R \frac{1}{r^p}\, r^{n-1}\, dr \int\limits_{\mathcal{S}_1} d\sigma = C_n \frac{R^{n-p} - 1}{n - p} \,, \qquad C_n = \int_{\mathcal{S}_1} d\sigma \,.$$

Сходимость несобственного интеграла будет иметь место при $n < p$, при этом

$$\int\limits_G \frac{dx_1 \dots dx_n}{|\mathbf{x}|^p} = \frac{C_n}{p - n} \,.$$

При $n \geqslant p$ интеграл расходится.

2) Пусть теперь $G = B_1(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ и функция f та же, что и выше. Аппроксимативная последовательность может быть взята в виде $A_R = B_1(\mathbf{0}) \setminus B_R(\mathbf{0})$ при $R \to 0$. Тогда

$$\int\limits_{A_R} f = \int\limits_{R}^{1} \frac{1}{r^p}\, r^{n-1}\, dr \int\limits_{\mathcal{S}_1} d\sigma = C_n \frac{1 - R^{n-p}}{n-p}\,.$$

Несобственный интеграл будет сходится при $n > p$, при этом

$$\int\limits_{G} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{|\mathbf{x}|^p} = \frac{C_n}{n-p}\,.$$

6.4. Интеграл Пуассона. Объем единичного шара

Интегралом Пуассона называется интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle A\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle} d\mathbf{x}\,,$$

где A — положительно определенная матрица порядка n. Напомним, что положительная определенность означает, во-первых, что матрица A является симметричной (т.е. $A^t = A$) и, следовательно, имеет ровно n (с учетом кратности) собственных значений $\alpha_1\,, \ldots \alpha_n$, и во-вторых, положительная определенность означает, что все эти собственные значения положительны ($\lambda_i > 0$). Вычислим, прежде всего, однократный интеграл

$$J = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx\,.$$

Заметим, что

$$J^2 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\infty} e^{-r^2}\, rdr = \pi\,.$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{x}|^2}\,d\mathbf{x} = (\sqrt{\pi})^n\,.$$

Последняя формула позволяет вычислить объем n-мерного шара $\mathcal{B}_1$. Действительно, как мы знаем,

$$V(\mathcal{B}_1) = \frac{1}{n}\int\limits_{\mathcal{S}_1} d\sigma\,.$$

С другой стороны,

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{x}|^2}\,d\mathbf{x} = \int\limits_0^\infty e^{-r^2}\,r^{n-1}dr\int\limits_{\mathcal{S}_1} d\sigma = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\frac{n-2}{2}}\,dt\int\limits_{\mathcal{S}_1} d\sigma = \frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)\int\limits_{\mathcal{S}_1} d\sigma\,,$$

где

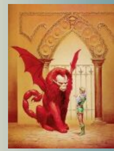
$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

— гамма-функция Эйлера. Отсюда заключаем, что

$$V(\mathcal{B}_1) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}\,.$$

Напомним, что $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}\,, \Gamma(1) = 1\,, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. В частности, $V(\mathcal{B}_1) = \pi$ при $n = 2$ и $V(\mathcal{B}_1) = \frac{4}{3}\pi$ при $n = 3$.

Вернемся к общему случаю интеграла Пуассона. Пусть $\boldsymbol{a}_1\,, \ldots \boldsymbol{a}_n$ — базис ортонормированных собственных векторов матрицы A, отвечающих собственным значениям $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ и T — матрица, составленная из собственных векторов-столбцов $T =$



$(\boldsymbol{a}_1\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)$. Тогда $A = T\Lambda T^{-1}$, где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

при этом $\det A = \det T^{-1} \det \Lambda \det T = \det \Lambda = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$. Сделаем замену переменных $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$ в интеграле Пуассона, при этом в силу ортогональности $|\det T| = 1$ и $\langle A\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle = \langle \Lambda\mathbf{y}|\mathbf{y}\rangle$, тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle A\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle}\, d\mathbf{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle \Lambda\mathbf{y}|\mathbf{y}\rangle}\, d\mathbf{y} = \prod_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\alpha_i y_i^2}\, dy_i = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_i}} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}.$$

7. Предельный переход под знаком интеграла

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 7.1. *Пусть функция $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ равномерно непрерывна на множестве $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, где A — жорданово. Тогда функция*

$$g(\mathbf{y}) = \int\limits_A f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$

равномерно непрерывна на B.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть δ определено импликацией

$$|(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2) - (\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1)| \leqslant \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2) - f(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Тогда

$$|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1| \leqslant \delta \qquad \Rightarrow \qquad |g(\mathbf{y}_2) - g(\mathbf{y}_1)| \leqslant \int\limits_A |f(\mathbf{x},\mathbf{y}_2) - f(\mathbf{x},\mathbf{y}_1)|\,d\mathbf{x} \leqslant \varepsilon V(A)\,.$$

□

Теорема 7.2. *Пусть последовательность непрерывных функций f_n равномерно на жордановом множестве A сходится к функции f. Тогда*

$$\int\limits_A f_n \to \int\limits_A f\,.$$

Доказательство. Равномерная сходимость означает, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N: \qquad n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon \qquad (\forall\mathbf{x} \in A).$$

Тогда при $n \geqslant N$

$$\left|\int\limits_A f - \int\limits_A f_n\right| \leqslant \int\limits_A |f - f_n| \leqslant \varepsilon V(A)\,.$$

$\square$

Теорема 7.3. *Пусть* $\dfrac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t}$ *равномерно непрерывна на* $A \times T$*, где* A *— жорданово и* T *— интервал. Тогда функция*

$$g(t) = \int\limits_A f(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}$$

непрерывно дифференцируема на T *и*

$$g'(t) = \int\limits_A \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t}\,d\mathbf{x}\,.$$

Доказательство. В согласии с формулой Лагранжа (о конечных приращениях) и теоремой 7.1

$$\frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} = \int\limits_A \frac{f(\mathbf{x},t+\Delta t) - f(\mathbf{x},t)}{\Delta t}\,d\mathbf{x} = \int\limits_A \frac{\partial f(\mathbf{x},t+\theta\Delta t)}{\partial t}\,d\mathbf{x} \underset{\Delta t \to 0}{\to} \int\limits_A \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t}\,d\mathbf{x}\,,$$

здесь $0 < \theta < 1$. $\square$

Эти теоремы можно обобщить и на несобственные интегралы, если в условие каждой из теорем включить требование *равномерной сходимости* интеграла[7]. Несобственный интеграл

$$\int\limits_G f(\mathbf{x},\tau)\,d\mathbf{x}\,,$$

[7] в случае последней теоремы равномерную сходимость надо требовать для интеграла от производной

зависящий от параметра τ, сходится равномерно (относительно параметра), если $\forall\varepsilon > 0$ существует компактное жорданово множество $F \subset G$ такое, что

$$F \subset A \subset G \qquad \Rightarrow \qquad \Bigl| \int\limits_{G \setminus A} f(\mathbf{x}, \tau)\, d\mathbf{x} \Bigr| \leqslant \varepsilon \qquad (\forall \tau)\,,$$

где A — жорданово множество.

Часть II
Криволинейные и поверхностные интегралы

Содержание

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература

Веб – страница
Титульный лист

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

8. Криволинейные интегралы

8.1. Кривые и пути в $\mathbb{R}^n$

Интуитивное понятие кривой в пространстве достаточно плохо формализуется и неудобно для использования. Вместо этого удобно использовать понятие параметризованного пути.

Определение 8.1. *[Параметризованным] путем* в $\mathbb{R}^n$ называется непрерывно отображение $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Определение 8.2. *Путем класса C^1* в $\mathbb{R}^n$ называется непрерывно дифференцируемое отображение $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

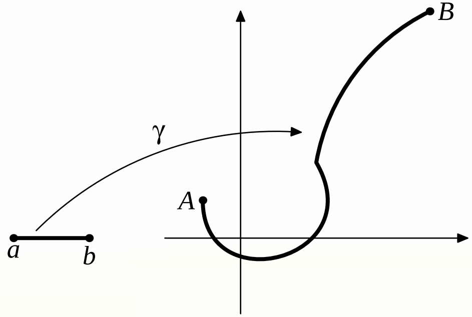


Рис. 14: Путь γ

Напомним, что физический смысл производной $\gamma'(t)$ — скорость движения точки $\gamma(t)$. Она называется *скоростью пути* γ. Если производная обращается в ноль в некоторой точке, движение в этой точке приостанавливается и может быть продолжено в любом направлении от этой точки, т.е. точка, где производная γ обращается в ноль, может оказаться *угловой*.

Веб – страница
Титульный лист
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Определение 8.3. Путь γ класса C^1 называется *гладким*, если $\gamma' \neq 0$ $(\forall t \in [a,b] : \gamma'(t) \neq 0)$.

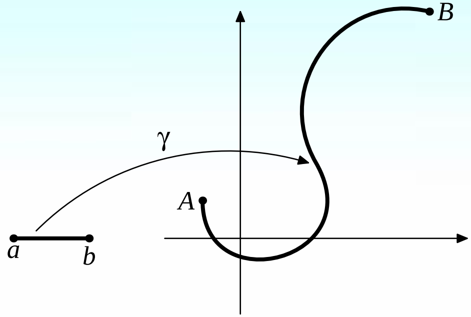


Рис. 15: Гладкий путь γ

Определение 8.4. Разбиением пути $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ называется разбиение интервала $[a,b]$.

Определение 8.5. Путь γ называется *кусочно гладким*, если существует его разбиение

$$\lambda = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b\}$$

такое, что пути $\gamma : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^n$ (т.е. сужения пути γ на интервалы разбиения) при всех $i = 1, \ldots k$ являются гладкими.

Такие пути появляются, например, как *составные* пути. Именно, если $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ и $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^n$ — два гладких пути такие, что

$$\gamma_1(b) = \gamma_2(b)\,,$$

то путь $\gamma : [a,c] \to \mathbb{R}^n$, определенный равенствами

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t)\,, & t \in [a,b]\,, \\ \gamma_2(t)\,, & t \in [b,c]\,, \end{cases}$$

называется *композицией* путей γ_1 и γ_2.

Кривая, которую описывает точка $\gamma(t)$ при изменении параметра t, может иметь достаточно сложную форму. В частности, возможны *самопересечения*.

Определение 8.6. Путь $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если $\gamma(a) = \gamma(b)$. В противном случае путь называется *незамкнутым*.

Определение 8.7. Незамкнутый путь γ называется *простым*, если отображение γ обратимо. Замкнутый путь $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ называется *простым*, если

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \quad \text{и} \quad t_1 < t_2 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = a\,, \quad t_2 = b\,.$$

Одно и то же множество точек в $\mathbb{R}^n$, которое мы интуитивно воспринимаем как кривую, может быть образом (множеством значений) разных параметризованных путей. Например, верхнюю половину окружности

$$x^2 + y^2 = R^2$$

мы можем задать явно: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, т.е. как путь

$$\begin{cases} x = t\,, \\ y = \sqrt{R^2 - t^2}\,, \end{cases} \qquad t \in [-R, R],$$

или используя в качестве параметра полярный угол:

$$\begin{cases} x = R\cos t\,, \\ y = R\sin t\,, \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]\,.$$

Определение 8.8. Гладкий путь $\gamma_1 : \ [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$ называется *эквивалентным* гладкому пути $\gamma_2 : \ [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$ (что будем обозначать как $\gamma_1 \sim \gamma_2$), если существует непрерывно дифференцируемое отображение $\varphi : \ [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ такое, что

1. $\varphi([a_1, b_1]) = [a_2, b_2]$,
2. $\varphi' > 0$.
3. $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Заметим, что введенное понятие действительно является отношением эквивалентности, т.е. обладает свойствами

1. $\forall \gamma : \quad \gamma \sim \gamma$,
2. $\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 \sim \gamma_1$,
3. $\gamma_1 \sim \gamma_2$ и $\gamma_2 \sim \gamma_3 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_1 \sim \gamma_3$,

столь хорошо известными в отношении знака равенства.

Это определение, полный смысл которого станет ясен чуть позже, позволяет нам отождествить разные параметризованные пути, если, во-первых, их образы совпадают, и если, во-вторых, «движение» вдоль этих путей совершается в одинаковом направлении: векторы скоростей (т.е. производные путей), отнесенные к одной и той же точке графика этих путей, параллельны и сонаправлены:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_1'(t) = \varphi'(t) \cdot \gamma_2'(\varphi(t)) \,.$$

Определение 8.9. Класс эквивалентных между собой простых гладких путей называется *ориентированной [гладкой] кривой*. Каждый путь данного класса эквивалентности (т.е. кривой) называется *реализацией* или *параметризацией* данной кривой. Кривая называется *замкнутой* или *незамкнутой*, если таковыми являются ее параметризации. Если $\gamma : \ [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — одна из параметризаций незамкнутой кривой, то точка $A = \gamma(a)$ называется *началом* кривой, а точка $B = \gamma(b)$ — ее *концом*.

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Определение 8.10. *Гладкой кривой* в $\mathbb{R}^n$ называется множество точек в $\mathbb{R}^n$, которое служит образом некоторого простого гладкого пути.

Пусть кривая Γ является образом простого гладкого пути $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Равенство

$$\alpha(t) = \gamma((1-t)a + tb)$$

определяет путь $\alpha: [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, эквивалентный пути γ, а равенство

$$\beta(t) = \gamma(ta + (1-t)b)$$

определяет путь $\beta: [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, не эквивалентный пути γ. Можно показать, что любой

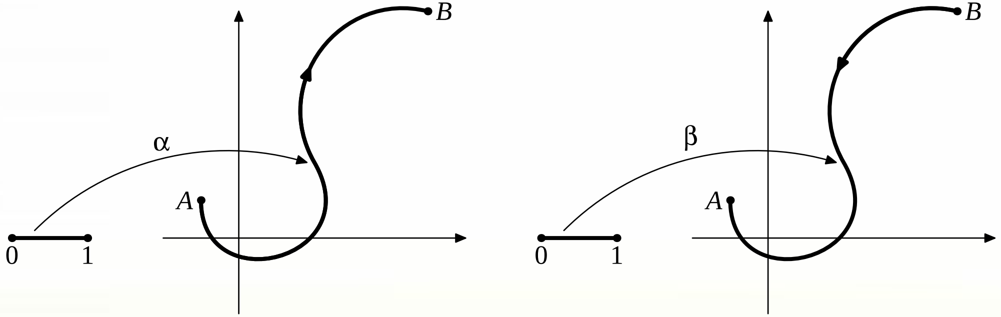
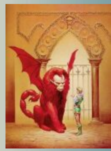


Рис. 16: Противоположные пути

другой простой гладкий путь, чей образ совпадает с кривой Γ, будет эквивалентен либо пути α, либо пути β. Действительно, если $\eta: [c, d] \to \mathbb{R}^n$ — простой гладкий путь, чей образ совпадает Γ, то функция $\varphi = \eta^{-1} \circ \gamma$ будет непрерывным взаимно однозначным отображением $[a, b]$ на $[c, d]$. При этом $\gamma = \eta \circ \varphi$ и в силу дифференцируемости функций γ и η

$$\gamma'(t)\Delta t + o(\Delta t) = \eta'(\varphi(t))\Delta\varphi + o(\Delta\varphi)\,.$$



Это равенство влечет за собой существование производной $\varphi'(t)$ и пропорциональность векторов $\gamma'(t)$ и $\eta'(\varphi(t))$, поскольку при $\Delta t \to 0$ в силу непрерывности φ имеем также $\Delta\varphi \to 0$.[8] Таким образом,

$$\gamma'(t) = \eta'(\varphi(t))\varphi'(t)\,,$$

откуда заключаем, что $\varphi' \neq 0$. По теореме Дарбу φ' является знакопостоянной. Непрерывность φ' будет теперь вытекать из равенства $|\gamma'(t)| = |\eta'(\varphi(t))|\varphi'(t)$ в случае положительности φ' и из равенства $-|\gamma'(t)| = |\eta'(\varphi(t))|\varphi'(t)$ в случае ее отрицательности. В первом случае путь η эквивалентен пути α, во втором — пути β.

Пути, эквивалентные пути β мы будем называть *противоположными* по отношению к тем, которые эквивалентны пути α. Запись $\alpha \sim -\beta$ будет означать, что пути α и β — противоположны.

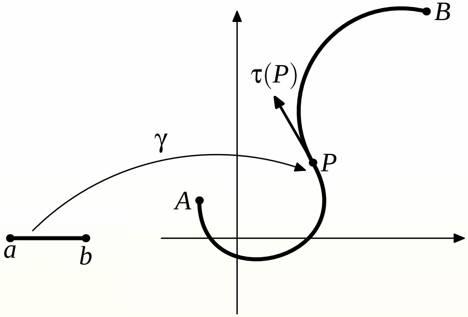


Рис. 17: Касательный вектор к кривой

Это же свойство может быть охарактеризовано в следующем виде. В каждой точке данной гладкой кривой существует ровно два единичных касательных вектора τ,

[8] заключение станет очевидным, если данное векторное равенство записать для координат

непрерывно зависящие от точки кривой: в точке $\gamma(t)$ эти касательные векторы равны соответственно $\pm\xi(t)$, где

$$\xi(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\,.$$

Подчеркнем, что равенства

$$\begin{cases} P = \gamma(t)\,, \\ \tau(P) = \xi(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [a,b]$$

корректно определяют непрерывное отображение $\tau :\ \Gamma \to \mathbb{R}^n$, т.е. значение касательного вектора τ в точке P не зависит от параметризации данной ориентированной кривой. Действительно, если α и β — произвольные гладкие эквивалентные пути так, что согласно определению $\alpha = \beta \circ \varphi$, $\varphi' > 0$, то

$$\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{\beta'(\varphi(t))\varphi'(t)}{|\beta'(\varphi(t))\varphi'(t)|} = \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|}\,,$$

где $s = \varphi(t)$ и $\alpha(t) = \beta(s)$.

Итак, с каждой гладкой кривой ассоциировано ровно две ориентированные гладкие кривые. Выбор любой из них или, что то же самое, выбор направления единичного касательного вектора к кривой (непрерывного на данной кривой), называют выбором *ориентации* на кривой. Если кривая не замкнутая, ориентация на ней определяется выбором начала и конца для этой кривой.

8.2. Криволинейные интегралы 1-го рода

Пусть $\gamma :\ [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — гладкий параметризованный путь и $\lambda = \{t_0, t_1, \dots t_k\}$ — его разбиение. Соединяя последовательно точки пути $\gamma(t_i)$ отрезками прямых, получим ломаную γ_λ:

$$\gamma_\lambda = [\gamma(t_0), \gamma(t_1)] \cup [\gamma(t_1, \gamma(t_2))] \cup \ldots \cup [\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 106 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

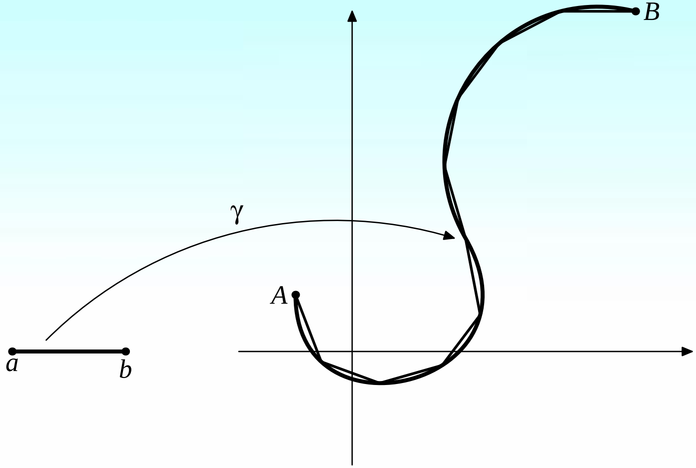


Рис. 18: К определению длины пути

Длина ее, по определению, равна сумме длин всех звеньев:

$$l(\gamma_\lambda) = \sum_{i=1}^{k} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \, .$$

При продолжении разбиения в силу неравенства треугольника для нормы вектора, длина ломаной может лишь увеличиться:

$$\mu \supset \lambda \qquad \Rightarrow \qquad l(\gamma_\mu) \geqslant l(\gamma_\lambda) \, .$$

Длиной пути γ называется точная верхняя грань длин вписанных ломаных:

$$l(\gamma) = \sup_{\lambda} l(\gamma_\lambda)\,.$$

Теорема 8.11. *Длина гладкого пути* $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *конечна и определена равенством*

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int\limits_{[a,b]} |\gamma'|\,.$$

Доказательство. Обозначим координаты точки $\gamma(t)$ через $x_j(t)$, $j = 1, \dots n$. Для разбиения $\lambda = \{t_0, t_1, \dots t_k\}$

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \sqrt{\sum_{j=1}^n [x_j(t_i) - x_j(t_{i-1})]^2}\,,$$

при этом по теореме Лагранжа находим

$$x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}) = x_j'(t_{ij})(t_i - t_{i-1})\,, \qquad t_{ij} \in (t_{i-1}, t_i)\,.$$

Тогда

$$l(\gamma_\lambda) = \sum_{i=1}^k \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(t_{ij})} \cdot (t_i - t_{i-1})\,.$$

Функция $g(u_1, \dots u_n) = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'^2(u_j)}$ непрерывна на компакте $[a,b]^n$ и, следовательно, равномерно непрерывна, т.е. при произвольном $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|u_i - t_i| < \delta \quad (\forall i = 1, \dots n) \qquad \Rightarrow \qquad |g(u_1, \dots u_n) - g(t_1, \dots t_n)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,.$$

Если ранг разбиения λ меньше δ, то

$$|t_{ij} - t_i| < \delta \quad (\forall i = 1, \dots n \quad \text{и} \quad \forall j = 1, \dots k)$$

и тогда ввиду $g(t, \dots, t) = |\gamma'(t)|$

$$\Big| l(\gamma_\lambda) - \sum_{i=1}^{k} |\gamma'(t_i)|(t_i - t_{i-1}) \Big| = \Big| \sum_{i=1}^{k} [g(t_{i1}, \dots t_{in}) - g(t_i, \dots t_i)](t_i - t_{i-1}) \Big|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} |g(t_{i1}, \dots t_{in}) - g(t_i, \dots t_i)|(t_i - t_{i-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Заметим, что сумма $\sum_{i=1}^{k} |\gamma'(t_i)|(t_i - t_{i-1})$ является суммой Римана для интеграла $\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$ и разбиение λ можно выбрать таким, что

$$\Big| \int\limits_{[a,b]} |\gamma'| - \sum_{i=1}^{k} |\gamma'(t_i)|(t_i - t_{i-1}) \Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Таким образом, при произвольном $\varepsilon > 0$

$$\Big| \int\limits_{[a,b]} |\gamma'| - l(\gamma_\lambda) \Big| \leqslant \varepsilon\,.$$

$\square$

Теорема 8.12. *Пусть $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ и $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ — гладкие пути. Тогда*

$$\alpha \sim \beta \qquad \Rightarrow \qquad \int\limits_{[a,b]} f \circ \alpha \cdot |\alpha'| = \int\limits_{[c,d]} f \circ \beta \cdot |\beta'|\,,$$

где f — непрерывная функция.

Доказательство. Пусть (в согласии с определением эквивалентности путей) $\alpha = \beta \circ \varphi, \quad \varphi' > 0$. По теореме о замене переменной в интеграле:

$$\int\limits_{[c,d]} f \circ \beta \cdot |\beta'| = \int\limits_{\varphi^{-1}([c,d])} f \circ \beta \circ \varphi \cdot |\beta' \circ \varphi| \cdot |\varphi'| = \int\limits_{[a,b]} f \circ \alpha \cdot |\alpha'| .$$

$\square$

Последнее утверждение позволяет определить интеграл по гладкой кривой Γ.

Определение 8.13. Пусть Γ — гладкая кривая и $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — некоторая ее параметризация. Пусть $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f \overset{\text{Опр.}}{=} \int\limits_{[a,b]} f \circ \gamma \cdot |\gamma'| .$$

Этот интеграл называется *криволинейным интегралом 1-го рода*. Интеграл $\int\limits_{[a,b]} f \circ \gamma \cdot |\gamma'|$ называют также *интегралом от функции f по пути γ* и обозначают $\int_\gamma f$. Величина

$$l(\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} 1$$

называется *длиной кривой* Γ.

Заметим, что криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от ориентации кривой Γ: формула замены переменной в интеграле не чувствительна к знаку якобиана (т.е. к знаку φ' в обозначениях доказательства теоремы 8.12) — теорема 8.12 остается в силе и для путей противоположных.

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 110 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

В координатной записи $\gamma = (x_1, \dots x_n)$ и

$$\int_\Gamma f = \int_a^b f(x_1(t), \dots x_n(t)) \cdot \sqrt{x_1'^2(t) + \dots + x_n'^2(t)}\, dt\,.$$

Заметим, далее, что произвольный гладкий путь эквивалентен некоторому гладкому пути с единичной скоростью. Именно, пусть $\gamma : [a, b] \to$ гладкий путь. Положим

$$l(t) = \int_a^t |\gamma'(s)|\, ds\,.$$

Тогда $l'(t) = |\gamma'(t)| > 0$ и, следовательно, функция $l : [a, b] \to [0, L]$, где L — длина пути γ, — обратима. Обратная функция $t(l)$ — дифференцируема и

$$t'(l) = \frac{1}{l'(t)} > 0 \qquad (t = t(l))\,.$$

Остается заметить, что путь $\sigma = \gamma \circ t : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ эквивалентен пути γ и

$$\sigma'(l) = \gamma'(t(l))t'(l) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\,,$$

т.е. скорость пути σ равна (по модулю) единице: $|\sigma'| = 1$. Параметр l пути с единичной скоростью называется *естественным*. Он имеет смысл длины соответствующей части пути. Параметризация кривой Γ посредством пути σ с единичной скоростью ($|\sigma'| = 1$) также называется *естественной*. Криволинейный интеграл 1-го рода при выборе естественной параметризации принимает вид

$$\int_\Gamma f = \int_{[0,L]} f \circ \sigma = \int_0^L f(\sigma(l))\, dl\,,$$

и потому часто называется *криволинейным интегралом по длине дуги*. Желая это подчеркнуть, в обозначение интеграла по длине дуги привносится символ дифференциала длины дуги: $\int\limits_{\Gamma} f dl$.

На кусочно гладкие пути определение криволинейных интегралов 1-го рода распространяется по аддитивности — как сумма интегралов по гладким частям пути.

Отметим физический смысл криволинейных интегралов 1-го рода. Если Γ — массивная тонкая проволока с плотностью ρ, то масса проволоки $M(\Gamma)$ может быть определена как предел интегральных сумм

$$\sum \rho(P_i)\Delta l_i\,,$$

где $P_1, \dots P_k$ — последовательность точек разбиения кривой Γ и Δl_i — длина интервала $[P_{i-1}, P_i]$, и следовательно, — как интеграл

$$M(\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} \rho\,.$$

8.3. Криволинейные интегралы 2-го рода

Пусть теперь Γ — ориентированная кривая и $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — некоторая ее параметризация. Напомним, что ориентация кривой Γ определяется непрерывным единичным касательным вектором $\tau: \Gamma \to \mathbb{R}^n$, который в точке $\gamma(t)$ равен

$$\xi(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\,,$$

но не зависит от выбора параметризации γ (ориентированной кривой).

Пусть $\mathbf{f}: \Gamma \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная вектор-функция и $\langle\cdot|\cdot\rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Определение 8.14. Интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \langle \mathbf{f} | \tau \rangle = \int\limits_{a}^{b} \langle \mathbf{f}(\gamma(t)) | \xi(t) \rangle \, |\gamma'(t)| dt$$

называется *криволинейным интегралом 2-го рода.*

Как видно из определения, этот интеграл зависит от ориентации кривой (но, разумеется, не зависит от параметризации ориентированной кривой): при выборе другой ориентации он меняет знак.

Ввиду $\gamma' = |\gamma'|\xi$, приходим к равенству

$$\int\limits_{\Gamma} \langle \mathbf{f} | \tau \rangle = \int\limits_{a}^{b} \langle \mathbf{f}(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle \, dt \, .$$

Оно позволяет дать следующую физическую интерпретацию криволинейного интеграла 2-го рода. Пусть в каждой точке кривой Γ действует сила $\mathbf{F}$. Работа этой силы по перемещению частицы из точки $P_{i-1} = \gamma(t_{i-1})$ в точку $P_i = \gamma(t_i)$ может быть приближенно оценена как скалярное произведение

$$\Delta A \approx \langle \mathbf{F}(P_i) | \overrightarrow{P_{i-1} P_i} \rangle = \langle \mathbf{F}(\gamma(t_i)) | \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle \approx \langle \mathbf{F}(\gamma(t_i)) | \gamma'(t_i) \rangle \Delta t_i \, .$$

Полная работа силы $\mathbf{F}$ по перемещению частицы из начала в конец кривой Γ может быть определена как предел сумм Римана $\sum \langle \mathbf{F}(\gamma(t_i)) | \gamma'(t_i) \rangle \Delta t_i$, т.е. как интеграл

$$A = \int\limits_{a}^{b} \langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle \, dt = \int\limits_{\Gamma} \langle \mathbf{F} | \tau \rangle \, .$$

Перейдем к координатной записи векторов $\mathbf{f}$ и γ:

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots f_n) \, , \qquad \gamma = (x_1, \dots x_n).$$

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} \langle \mathbf{f} | \tau \rangle = \int\limits_{a}^{b} [f_1(\gamma(t))x_1'(t) + \ldots f_n(\gamma(t))x_n'(t)]\, dt\,.$$

Классической аббревиатурой для данной формулы ввиду равенств $dx_i = x_i' dt$ является:

$$\int\limits_{\Gamma} \langle \mathbf{f} | \tau \rangle = \int\limits_{\Gamma} f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n\,.$$

Величина $\sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$, появившаяся в интеграле, называется *дифференциальной формой* или точнее — дифференциальной 1-формой. По этой причине криволинейные интегралы 2-го рода носят также название криволинейных интегралов от дифференциальных форм.

Напомним некоторые определения из линейной алгебры. *Линейный функционал* на $\mathbb{R}^n$ — это линейная функция $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Линейные функционалы часто называются также *линейными формами* или *1-формами*. Множество всех линейных форм само образует векторное пространство — сопряженное к $\mathbb{R}^n$.

Пусть $(\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ однозначно разлагается по базису и отождествляется с последовательностью своих координат:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i = (v_1, \ldots v_n)\,.$$

Если ω — линейный функционал, то он имеет вид

$$\omega(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} f_i v_i\,. \tag{8.1}$$

Последовательность чисел $(f_1, \ldots f_n)$ однозначно определяет форму ω:

$$\omega \leftrightarrow (f_1, \ldots f_n)\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 114 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Они являются значениями функционала ω на базисных векторах: $\omega(\mathbf{e}_i) = f_i$. Функционалы π_i, определенные равенствами

$$\pi_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \ ,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, образуют базис в пространстве 1-форм:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \pi_i \ .$$

Эти базисные формы называются *проекциями* на координатные оси:

$$\pi_i(\mathbf{v}) = v_i \ .$$

В дифференциальном исчислении функций нескольких переменных для этих базисных форм приняты обозначения dx_i:

$$dx_i(\mathbf{v}) = v_i \ .$$

Таким образом, любая линейная форма представима в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i \ .$$

Отметим также, что равенство (8.1) может быть проинтерпретировано как скалярное произведение векторов $\mathbf{f} = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{v}$:

$$\omega(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f} | \mathbf{v} \rangle \ .$$

Таким образом, скалярное произведение позволяет каждой линейной форме поставить в однозначное соответствие некоторый вектор (*сопряженный с формой* или *дуальный форме*) и наоборот:

$$\omega \leftrightarrow \mathbf{f} \ .$$

Определение 8.15. Дифференциальной 1-формой называется линейная форма ω, коэффициенты которой являются непрерывными функциями $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, так что при любом фиксированном $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ дифференциальная 1-форма ω является линейной формой $\omega_{\mathbf{x}}$

$$\omega_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) dx_i \, .$$

Примером дифференциальной формы является дифференциал функции нескольких переменных $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, именно

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i \, , \qquad df_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \, dx_i \, .$$

Определение 8.16. Интеграл от дифференциальной формы ω по ориентированной кривой Γ определяется равенством

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_{a}^{b} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \, dt \, ,$$

где $\gamma : \; [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — параметризация кривой Γ. Интеграл $\int\limits_{a}^{b} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \, dt$ называют также *интегралом от формы ω по пути γ* и обозначают $\int\limits_{\gamma} \omega$.

Обратим внимание на тот факт, что при введенных выше обозначениях

$$\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\gamma(t)) x_i'(t) \, ,$$

т.е.

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_{\Gamma} \langle \mathbf{f} | \tau \rangle \, ,$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 116 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

где вектор-функция $\mathbf{f}$ является сопряженной с формой ω. Это доказывает корректность введенного определения интеграла от формы (т.е. его независимость от параметризации ориентированной кривой).

Определение 8.17. *Границей* $\partial\Gamma$ кривой Γ называется множество ее концов $\{A, B\}$. *Ориентация границы* $\partial\Gamma$ задается выбором пары (A, B) или (B, A). Если Γ — ориентированная кривая, то *согласованная ориентация на границе* определяется как пара (A, B), где A — начало, а B — конец кривой. Если кривая Γ замкнута, ее граница пуста.

Определение 8.18. Если $f: \partial\Gamma \to \mathbb{R}$ — функция, заданная на ориентированной границе (A, B) кривой Γ, то

$$\int\limits_{\partial\Gamma} f \overset{\text{Опр.}}{=} f(B) - f(A)\,.$$

Это определение принято лишь для того, чтобы в следующем виде записать элементарное обобщение формулы Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_{\Gamma} df = \int\limits_{\partial\Gamma} f\,. \tag{8.2}$$

Действительно,

$$\int\limits_{\Gamma} df = \int\limits_{a}^{b} df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt = \int\limits_{a}^{b} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_i}\, x_i'(t)\, dt$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A) = \int\limits_{\partial\Gamma} f\,.$$

Формула (8.2) называется одномерным вариантом общей *формулы Стокса*.

Заметим, что если кривая Γ — замкнута, то $\partial\Gamma = \varnothing$ и, следовательно,

$$\oint\limits_{\Gamma} df = \int\limits_{\varnothing} f = 0\,.$$

Здесь знак интеграла $\oint$ подчеркивает факт замкнутости кривой.

Наше цель — написать аналоги формулы (8.2) в высших размерностях.

9. Формула Грина

9.1. Обсуждение

Мы сделаем сейчас следующий шаг в обобщении формулы Ньютона–Лейбница и напишем двумерный вариант формулы Стокса — формулу Грина. Эта формула связывает дифференциальную 1-форму ω в $\mathbb{R}^2$ и ее дифференциал:

$$\int\limits_D d\omega = \int\limits_{\partial D} \omega\,. \tag{9.1}$$

В этой формуле D — достаточно «хорошая» область на плоскости $\mathbb{R}^2$, чья граница ∂D состоит из кусочно гладких кривых, ориентированных *положительно*.

Разумеется, здесь многое требует объяснений. Что такое дифференциал 1-формы? Как понимается интеграл от него? Что такое хорошая область? Что такое положительная ориентация границы области? Как понимается интеграл от 1-формы по границе?

Начнем с последнего вопроса, поскольку ответ на него почти готов. Как уже отмечалось ранее, интеграл по кусочно гладкому пути определяется по аддитивности.

Определение 9.1. *Кусочно гладкой кривой* Γ называется образ простого кусочно гладкого пути γ, при этом сам путь γ называется *параметризацией* кривой Γ. Говорят, что две параметризации кривой Γ определяют одну и ту же *ориентацию* на кривой Γ, если единичные касательные векторы, ассоциированные с этими параметризациями, совпадают всюду, где они определены. Ориентированная кусочно гладкая кривая Γ — это класс всех параметризаций кривой, определяющих одну и ту же ориентацию на Γ.

Заметим, что как и в гладком случае, если кривая не замкнутая, ее ориентация определяется заданием начальной и конечной точки. В случае замкнутой кривой (а именно этот случай важен в дальнейшем) ориентация задается направлением касательного вектора, который может быть не определен лишь в конечном числе точек — точек стыковки

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 119 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

путей. Определение композиции путей[9] таково , что на кусочно гладкой кривой можно (как и ранее в случае гладкой кривой) определить лишь только две разные ориентации.

Итак, если ориентированная кривая Γ состоит из гладких кривых $\Gamma_1, \dots \Gamma_k$, то

$$\int\limits_{\Gamma} \omega \overset{\text{Опр.}}{=} \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\Gamma_j} \omega\,.$$

В формуле Грина будет предполагаться, что граница ∂D состоит из конечного числа непересекающихся кусочно гладких ориентированных кривых $\Gamma_1, \dots \Gamma_n$. При этом как и выше

$$\int\limits_{\partial D} \omega \overset{\text{Опр.}}{=} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_j} \omega\,.$$

Перейдем к вопросу о положительной ориентации границы. Он неразрывно связан с вопросом о хорошей области D. Область D будет предполагаться *связной* и компактной (в дополнении к предположению о границе области).

Определение 9.2. Замкнутое множество D называется *связным*, если его нельзя представить как объединение двух непересекающихся замкнутых множеств.

Заметим, что так как граница ∂D имеет объем-ноль на плоскости (площадь гладкой кривой равна нулю), то D — жорданово множество. Это означает, что интеграл по D от непрерывной (или даже просто интегрируемой) функции существует.

С областью D мы свяжем *правую* ориентацию на плоскости. Напомним определения. На $\mathbb{R}^2$ существует выделенный базис, образованный векторами $\mathbf{i} = (1,0)$, $\mathbf{j} = (0,1)$ (в данном порядке). Именно в отношении этого базиса определяется функция det — такая билинейная антисимметрическая функция пары векторов, что:

$$\det(\mathbf{i},\mathbf{j}) = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

[9] то, что начало последующего пути присоединяется к концу предыдущего

При этом все базисы на плоскости $\mathbb{R}^2$ разделяются на два класса. В один класс входят те базисы $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, для которых $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 > 0$, в другой — $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 < 0$. Эти два класса базисов называются *ориентациями* на плоскости. Таким образом, ориентацию на плоскости задает выбор базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Говорят, что плоскость *право ориентирована*, если $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 > 0$ и *лево ориентирована*, если $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 < 0$. Вместе с тем, можно сказать, что ориентацию плоскости задает функция $\det$ (или любая другая ненулевая форма объема на плоскости). Именно выбор такой функции позволяет относить базисы к одной или другой ориентации. Это замечание становится особенно существенным, если рассматривается двумерное пространство общего вида (не $\mathbb{R}^2$), на котором нет выделенного базиса.

Определение 9.3. Граница ∂D называется *положительно* или *согласованно* ориентированной, если ее ориентация определяется единичным касательным вектором τ таким, что базис $(\tau, \boldsymbol{n})$, где $\boldsymbol{n}$ — вектор внутренней нормали к ∂D, является право ориентированным.

Определенности ради отметим, что вектор внутренней нормали $\boldsymbol{n}$ в точке $P \in \partial D$ обладает тем свойством, что при всех достаточно малых положительных значениях ε точки $P + \varepsilon \boldsymbol{n}$ лежат в области D.

Положительная ориентация границы может быть охарактеризована и при помощи вектора внешней нормали $\mathbf{N} = -\boldsymbol{n}$. Единичный касательный вектор τ будет определять согласованную ориентацию, если базис $(\mathbf{N}, \tau)$ является право ориентированным. Это вытекает из свойств определителя:

$$\tau \wedge \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n} \wedge \tau = \mathbf{N} \wedge \tau\,.$$

В соответствии с теоремой Жордана[10] о плоской замкнутой кривой, каждая непрерывная замкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$ разделяет плоскость на две связные открытые компоненты — внутреннюю и внешнюю. Из этой теоремы вытекает, что среди кривых Γ_i, которые составляют границу ∂D (т.е. $\partial D = \bigcup \Gamma_i$) есть одна, внутренняя компонента которой содержит все остальные кривые Γ_i. Она будет называться *внешней границей*, остальные кривые — *внутренними*.

[10]теорема Жордана является трудной топологической теоремой и принимается нами без доказательства

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 121 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

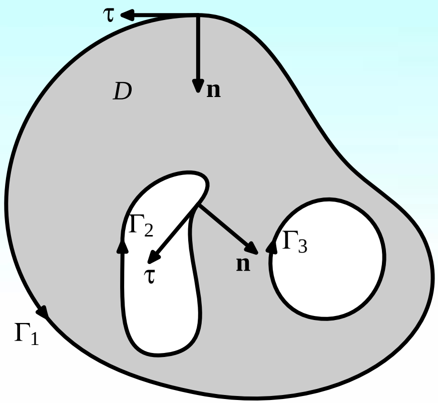


Рис. 19: К теореме Грина

Решим теперь вопрос с дифференциалом 1-формы. Прежде всего мы хотим каждой паре 1-форм (ω_1, ω_2) поставить в соответствие билинейную антисимметричную форму, которую будем обозначать $\omega_1 \wedge \omega_2$ и называть *внешним произведением* форм ω_1 и ω_2. Мы хотим, также, чтобы отображение

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2$$

было билинейным и антисимметричным, т.е. чтобы

$$\begin{aligned}
(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 &= \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3\,, \\
\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) &= \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3\,, \\
(a\omega_1) \wedge \omega_2 &= \omega_1 \wedge (a\omega_2) = a(\omega_1 \wedge \omega_2) \qquad (a \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

и

$$\omega \wedge \omega = 0 \qquad (\forall \omega).$$

Следствием этих свойств, как мы уже знаем, будет равенство

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1 \,.$$

Свойства полилинейности и антикоммутативности позволяют ограничиться определением внешнего произведения лишь на базисных формах dx_1 и dx_2. Последние мы будем считать дуальными к векторам $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ ортонормированного базиса на плоскости. Поскольку на плоскости любая билинейная антисимметричная форма пропорциональна определителю векторов $\det$, положим по определению

$$dx_1 \wedge dx_2 = \det \,,$$

откуда, в частности,

$$dx_1 \wedge dx_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = 1, ,$$

и более общо,

$$dx_1 \wedge dx_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} = \det(dx_i(\mathbf{v}_j)) \,,$$

где последний определитель следует понимать как определитель матрицы с элементами $v_{ij} = dx_i(\mathbf{v}_j)$. Как следствие, если ω_1 и ω_2 — произвольные дифференциальные 1-формы на плоскости, то

$$\omega_1 \wedge \omega_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det(\omega_i(\mathbf{v}_j)) \,.$$

Для доказательства этой формулы заметим, что обе части равенства являются линейными по ω_1 и ω_2 и антисимметричными, а следовательно, достаточно установить равенство на базисных формах, что и было сделано выше.

Наряду с операцией внешнего произведения 1-форм полезно ввести в некотором роде обратную операцию. Она называется *внутренним произведением* 2-формы ω на вектор $\boldsymbol{a}$:

$$(\omega, \boldsymbol{a}) \mapsto \boldsymbol{a} \lrcorner \omega \,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 123 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Внутреннее произведение $\boldsymbol{a} \lrcorner \omega$ является, по определению, 1-формой такой, что

$$\boldsymbol{a} \lrcorner \omega(\mathbf{v}) = \omega(\boldsymbol{a}, \mathbf{v})\,.$$

Иначе говоря, если в 2-форме ω зафиксировать первую переменную, то получим 1-форму. Вычислим внутреннее произведение формы $\omega_1 \wedge \omega_2$, где ω_1 , ω_2 — 1-формы, на вектор $\boldsymbol{a}$:

$$\omega_1 \wedge \omega_2(\boldsymbol{a}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \omega_1(\boldsymbol{a}) & \omega_1(\mathbf{v}) \\ \omega_2(\boldsymbol{a}) & \omega_2(\mathbf{v}) \end{vmatrix} = \omega_1(\boldsymbol{a})\omega_2(\mathbf{v}) - \omega_2(\boldsymbol{a})\omega_1(\mathbf{v})\,,$$

откуда

$$\boldsymbol{a} \lrcorner \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1(\boldsymbol{a})\omega_2 - \omega_2(\boldsymbol{a})\omega_1\,.$$

Данные структуры позволяют описать согласование ориентаций области D и ее границы ∂D в следующем виде. Во-первых, заметим, что ориентация может быть описана как выбор соответствующей дифференциальной формы. Действительно, именно задание формы $dx_1 \wedge dx_2$ (определитель) позволяет отделять базисы одной ориентации (правой) от базисов другой (левой). Поскольку это отделение зависит лишь от знака значения, мы можем вместо формы $dx_1 \wedge dx_2$ использовать и любую другую, если коэффициент пропорциональности между формами объема — положителен. Наоборот, форма $dx_2 \wedge dx_1$ будет задавать противоположную ориентацию. Аналогично и для граничной кривой ∂D, выбор ориентации, т.е. касательного вектора τ можно осуществлять дуальной к τ дифференциальной формой или любой другой 1-формой, значения которой на векторе τ положительны. Дуальную форму к вектору τ, задающему положительную ориентацию легко описать. Это форма

$$\mathbf{N} \lrcorner dx_1 \wedge dx_2\,,$$

где $\mathbf{N}$ — вектор внешней нормали. Действительно,

$$\mathbf{N} \lrcorner dx_1 \wedge dx_2(\tau) = dx_1 \wedge dx_2(\mathbf{N}, \tau) = \mathbf{N} \wedge \tau = 1\,.$$

Таким образом, 1-форма, определяющая согласованную ориентацию к ориентации $dx_1 \wedge dx_2$, равна

$$dx_1(\mathbf{N})dx_2 - dx_2(N)dx_1 = N_1 dx_2 - N_2 dx_1\,,$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

где N_1, N_2 — координаты вектора внешней нормали $\mathbf{N}$. Это и есть дуальная форма к вектору τ

$$T_1 dx_1 + T_2 dx_2\,,$$

где T_1, T_2 — координаты единичного касательного вектора τ $(T_1 = -N_2\,,\ T_2 = N_1)$.

Теперь мы готовы дать определение дифференциала 1-формы $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$:

$$d\omega \overset{\text{Опр.}}{=} df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2$$

(предполагается, что функции f_1, f_2 имеют непрерывные производные). Это определение легко привести к координатному виду:

$$\begin{aligned} d\omega &= \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,dx_2\Big) \wedge dx_1 + \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\,dx_2\Big) \wedge dx_2 \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,dx_1 \wedge dx_2 = \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big)\,dx_1 \wedge dx_2\,. \end{aligned}$$

Из этого представления и равенства

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

(производные предполагаются непрерывными) вытекает, что

$$d(df) = 0\,.$$

Действительно,

$$d(df) = d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2\Big) = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\Big)\,dx_1 \wedge dx_2 = 0\,.$$

Это свойство и свойства дифференциала функции позволяют заключить, что определение дифференциала 1-формы не зависит от выбора системы координат. Действительно, если

$\omega = f_1 dy_1 + f_2 dy_2$, но f_1, f_2, y_1, y_2 являются функциями координат x_1, x_2, то

$$d\left(f_i \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\, dx_j\right) = d\left(f_i \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j = \left[df_i \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + f_i \cdot d\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)\right] \wedge dx_j = df_i \wedge \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\, dx_j\right) + f_i d\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\, dx_j\right),$$

откуда по линейности

$$\begin{aligned} d(f_i dy_i) &= d\left(f_i \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\, dx_j\right) = \sum_{j=1}^{2} d\left(f_i \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\, dx_j\right) \\ &= df_i \wedge \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\, dx_j\right) + f_i d\left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\, dx_j\right) = df_i \wedge dy_i + f_i d(dy_i)\,. \end{aligned}$$

Ввиду $d(dy_i) = 0$, получаем снова

$$d\omega = df_1 \wedge dy_1 + df_2 \wedge dy_2\,.$$

Данное вычисление побуждает рассмотреть еще одну операцию над дифференциальными формами. Пусть $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ является непрерывно дифференцируемым отображением. Будем считать, что в пространстве определения и в пространстве значений отображения θ системы координат (базисы) выбраны независимо. Координаты на плоскости определения назовем x_1, x_2, а на плоскости образов — y_1, y_2. Функцию θ будем описывать равенствами

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2) \\ y_2 = y_2(x_1, x_2)\,. \end{cases}$$

Имея это ввиду, запишем $\theta : \mathbb{R}^2_{\mathbf{x}} \to \mathbb{R}^2_{\mathbf{y}}$.

Функция θ индуцирует отображение θ^*, которое форме в координатной плоскости $\mathbb{R}^2_{\mathbf{y}}$ ставит в соответствие форму в координатной плоскости $\mathbb{R}^2_{\mathbf{x}}$ — так называемый прообраз формы при отображении θ.

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Рассмотрим, сначала, случай 0-формы, т.е. функции $f:\ \mathbb{R}^2_{\mathbf{y}} \to \mathbb{R}$. Ее прообраз определяется как суперпозиция:

$$\theta^* f = f \circ \theta\,, \qquad \theta^* f:\ \mathbb{R}^2_{\mathbf{x}} \to \mathbb{R}\,.$$

Пусть теперь ω является дифференциальной 1-формой на пространстве $\mathbb{R}^2_{\mathbf{y}}$. Она имеет вид

$$\omega = f_1 dy_1 + f_2 dy_2\,,$$

где f_1, f_2 — непрерывные функции $\mathbb{R}^2_{\mathbf{y}} \to \mathbb{R}$. Прообразом формы ω при отображении θ называется форма на $\mathbb{R}^2_{\mathbf{x}}$

$$\theta^*\omega = \theta^* f_1 \cdot \theta^* dy_1 + \theta^* f_2 \cdot \theta^* dy_2\,,$$

где

$$\theta^* dy_j \stackrel{\text{Опр.}}{=} d(\theta^* y_j) = d(y_j \circ \theta) = \frac{\partial y_j}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial y_j}{\partial x_2}\,dx_2\,.$$

Подчеркнем отличие здесь между dy_j и $d(y_j \circ \theta)$. В первом случае это дифференциал независимой переменной y_j, во втором — это дифференциал функции $y_j(x_1, x_2)$. Таким образом, смысл отображения θ^* элементарен: это замена переменных в записи дифференциальной формы — всюду переменные y_j надо заменить на функции $y_j(x_1, x_2)$.

Это правило сохраняется и для 2-форм. Если ω — дифференциальная 2-форма на $\mathbb{R}^2_{\mathbf{y}}$, т.е. $\omega = \ f dy_1 \wedge y_2$, то

$$\theta^*\omega \stackrel{\text{Опр.}}{=} \theta^* f \cdot \theta^* dy_1 \wedge \theta^* dy_2\,.$$

Из определения легко вытекают следующие свойства отображения θ^*:

1. Если ω_1 и ω_2 — 1-формы на $\mathbb{R}^2_{\mathbf{y}}$, то $\theta^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \theta^*\omega_1 \wedge \theta^*\omega_2\,.$

2. Если ω — 1-форма на $\mathbb{R}^2$, то $\theta^* d\omega = d\theta^*\omega\,.$

Доказательство первого из свойств из соображений симметрии (точнее — антисимметрии) и билинейности достаточно провести для случая $\omega_1 = f dy_1$ и $\omega_2 = dy_2$. Но это в точности соответствует определению. Второе свойство в точности означает независимость определения дифференциала 1-формы от системы координат и было проверено выше.

Получим формулы для $(\theta^*\omega)_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})$ в случае 1-формы ω и $(\theta^*\omega)_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ в случае 2-формы.

$$\begin{aligned}(\theta^* dy_i)_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) &= \Big(\frac{\partial y_i(\mathbf{x})}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial y_i(\mathbf{x})}{\partial x_2}\, dx_2\Big)(\mathbf{v}) = \frac{\partial y_i(\mathbf{x})}{\partial x_1}\, dx_1(\mathbf{v}) + \frac{\partial y_i(\mathbf{x})}{\partial x_2}\, dx_2(\mathbf{v}) \\ &= \frac{\partial y_i(\mathbf{x})}{\partial x_1}\, v_1 + \frac{\partial y_i(\mathbf{x})}{\partial x_2}\, v_2 = (\theta'_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}))_i = dy_i(\theta'_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}))\,,\end{aligned}$$

откуда в случае 1-формы $\omega = f_1 dy_1 + f_2 dy_2$ находим

$$(\theta^* f_1 \cdot \theta^* dy_1 + \theta^* f_2 \cdot \theta^* dy_2)_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = f_1(\theta(\mathbf{x})) dy_1(\theta'_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})) + f_2(\theta(\mathbf{x})) dy_2(\theta'_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}))\,,$$

т.е.

$$(\theta^*\omega)_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \omega_{\theta(\mathbf{x})}(\theta'_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}))\,.$$

Подчеркнем, что $\theta'_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})$ есть результат умножения матрицы Якоби θ' в точке $\mathbf{x}$ на вектор $\mathbf{v}$.

Далее,

$$\begin{aligned}\theta^* dy_1 \wedge \theta^* dy_2 &= \Big(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\, dx_2\Big) \wedge \Big(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\, dx_2\Big) \\ &= \Big(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\Big)\, dx_1 \wedge dx_2 = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}\, dx_1 \wedge dx_2 = \det\theta' \cdot dx_1 \wedge dx_2\,.\end{aligned}$$

Отсюда в случае 2-формы $\omega = f dy_1 \wedge dy_2$

$$\theta^*\omega = f \circ \theta \cdot \det\theta' \cdot dx_1 \wedge dx_2$$

и

$$(\theta^*\omega)_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\theta(\mathbf{x})) \cdot \det\theta'(\mathbf{x}) \cdot dx_1 \wedge dx_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\theta(\mathbf{x})) \cdot \det\theta'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\,.$$

Мы заканчиваем обсуждение формулы Грина определением интеграла от дифференциальной формы по ориентированной области. Если $\omega = f dx_1 \wedge dx_2$ и область D ориентирована заданием формы $dx_1 \wedge dx_2$, то

$$\int\limits_D \omega \overset{\text{Опр.}}{=} \int\limits_D f\,.$$

Здесь справа стоит обычный двукратный интеграл от функции f. Таким образом, в случае правой ориентации

$$\int\limits_D f(x_1,x_2)dx_1 \wedge dx_2 = \int\limits_D f(x_1,x_2)dx_1 dx_2\,.$$

При изменении ориентации интеграл от формы изменит знак.

Таким образом, формула Грина принимает вид

$$\int\limits_D \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big)\,dx_1 dx_2 = \int\limits_{\partial D} f_1 dx_1 + f_2 dx_2$$

или (в стандартных обозначениях)

$$\int\limits_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dxdy\,.$$

Для доказательства формулы Грина нам понадобится следующие варианты формул замены переменных в криволинейном и кратном интегралах. Пусть Γ — ориентированная гладкая кривая с параметризацией $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ и $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — непрерывно дифференцируемое отображение. Тогда $\theta(\Gamma)$ — тоже гладкая кривая с параметризацией $\theta \circ \gamma$ (чем задается ее ориентация). В случае 1-формы $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ находим

$$\int\limits_\Gamma \theta^*\omega = \int\limits_a^b (\theta^*\omega)_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,dt = \int\limits_a^b \omega_{\theta(\gamma(t))}(\theta'_{\gamma(t)}(\gamma'(t)))\,dt = \int\limits_{[a,b]} \omega_{\theta\circ\gamma}((\theta\circ\gamma)') = \int\limits_{\theta(\Gamma)} \omega\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 129 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

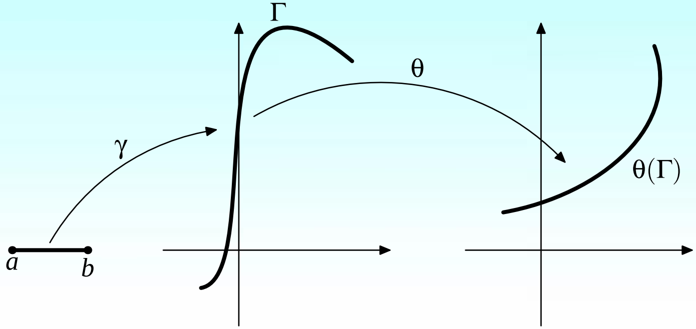


Рис. 20: Образ кривой Γ при отображении θ

Аналогично, в случае 2-формы $\omega = f\,dx_1 \wedge dx_2$ и жордановой области D

$$\int\limits_D \theta^*\omega = \int\limits_D f\circ\theta \det\theta' \cdot dx_1 \wedge dx_2 = \int\limits_D f\circ\theta\cdot\det\theta' = \int\limits_{\theta(D)} f = \int\limits_{\theta(D)} \omega\,,$$

где мы воспользовались формулой замены переменных в кратном интеграле.

Таким образом, имеют место формулы замены переменных для форм:

$$\begin{aligned} \int\limits_\Gamma \theta^*\omega &= \int\limits_{\theta(\Gamma)} \omega\,, \\ \int\limits_D \theta^*\omega &= \int\limits_{\theta(D)} \omega\,, \end{aligned} \tag{9.2}$$

В координатной форме эти формулы примут вид

$$\int\limits_{\theta(\Gamma)} f_1(y_1, y_2)\, dy_1 + f_2(y_1, y_2)\, dy_2$$
$$= \int\limits_{\Gamma} \Big[f_1\big(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)\big) \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + f_2\big(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)\big) \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \Big]\, dx_1$$
$$+ \Big[f_1\big(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)\big) \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + f_2\big(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)\big) \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \Big]\, dx_2$$

и

$$\int\limits_{\theta(D)} f(y_1, y_2)\, dy_1 \wedge dy_2 = \int\limits_{D} f\big(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)\big) \cdot \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial x_1, x_2} \cdot dx_1 \wedge dx_2\,.$$

9.2. Теорема Грина для единичного квадрата

Положим $J = [0, 1]$. Тогда J^2 — квадрат.

Теорема 9.4. *Пусть $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ — дифференциальная форма на J^2, где f_1, f_2 — непрерывно дифференцируемые функции $J^2 \to \mathbb{R}$. Пусть ∂J^2 ориентирована согласовано с ориентацией J^2. Тогда*

$$\int\limits_{J^2} d\omega = \int\limits_{\partial J^2} \omega\,.$$

Доказательство. Вычислим левую часть доказываемой формулы. Согласно теореме Фу-

бини

$$\int\limits_{J^2} d\omega = \int\limits_{J^2} \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big)\, dx_1 dx_2 = \int\limits_0^1 dx_2 \int\limits_0^1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\, dx_1 - \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\, dx_2$$

$$= \int\limits_0^1 [f_2(1, x_2) - f_2(0, x_2)]\, dx_2 - \int\limits_0^1 [f_1(x_1, 1) - f_1(0, x_1)]\, dx_1 \,.$$

Граница ∂J^2 является кусочно гладкой и состоит из четырех гладких кусков $\partial J^2 = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i$. Введем параметризации этих кривых, согласованную с их ориентацией:

$$\gamma_1(t) = (t, 0)\,, \quad \gamma_2(t) = (1, t)\,, \quad \gamma_3(t) = (1 - t, 1)\,, \quad \gamma_4(t) = (0, 1 - t)\,,$$

здесь везде $t \in [0, 1]$.

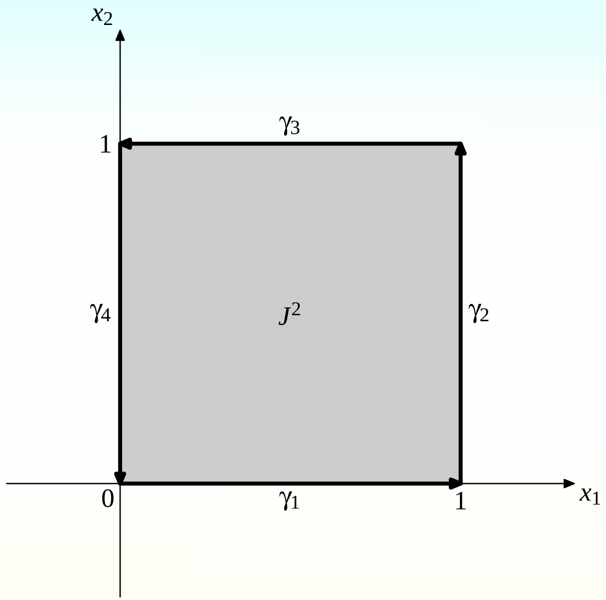


Рис. 21: К теореме Грина для квадрата

Вычислим теперь правую часть формулы.

$$\int\limits_{\partial J^2} \omega = \sum_{i=1}^{4} \int\limits_{\Gamma_i} \omega = \int\limits_0^1 f_1(t,0)\,dt + \int\limits_0^1 f_2(1,t)\,dt + \int\limits_0^1 f_1(1-t,1)(-1)\,dt + \int\limits_0^1 f_2(0,1-t)(-1)\,dt$$

$$= \int\limits_0^1 f_1(x_1,0)\,dx_1 + \int\limits_0^1 f_2(1,x_2)\,dx_2 + \int\limits_1^0 f_1(x_1,1)\,dx_1 + \int\limits_1^0 f_2(0,x_2)\,dx_2$$

$$\int\limits_0^1 f_1(x_1,0)\,dx_1 + \int\limits_0^1 f_2(1,x_2)\,dx_2 - \int\limits_0^1 f_1(x_1,1)\,dx_1 - \int\limits_0^1 f_2(0,x_2)\,dx_2\,.$$

Оба вычисления приводят к одному результату. $\square$

9.3. Теорема Грина для ориентированной клетки

Полагаем, что квадрат J^2 и его граница ориентированы согласовано.

Определение 9.5. Область $D \subset \mathbb{R}^2$ называется *ориентированной клеткой*, если существует взаимно однозначное непрерывно дифференцируемой отображение θ, определенное в окрестности квадрата J^2 такое, что $D = \theta(J^2)$ и $\det \theta' > 0$ на окрестности квадрата J^2. Отображение θ называется *картой* клетки D.

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 134 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

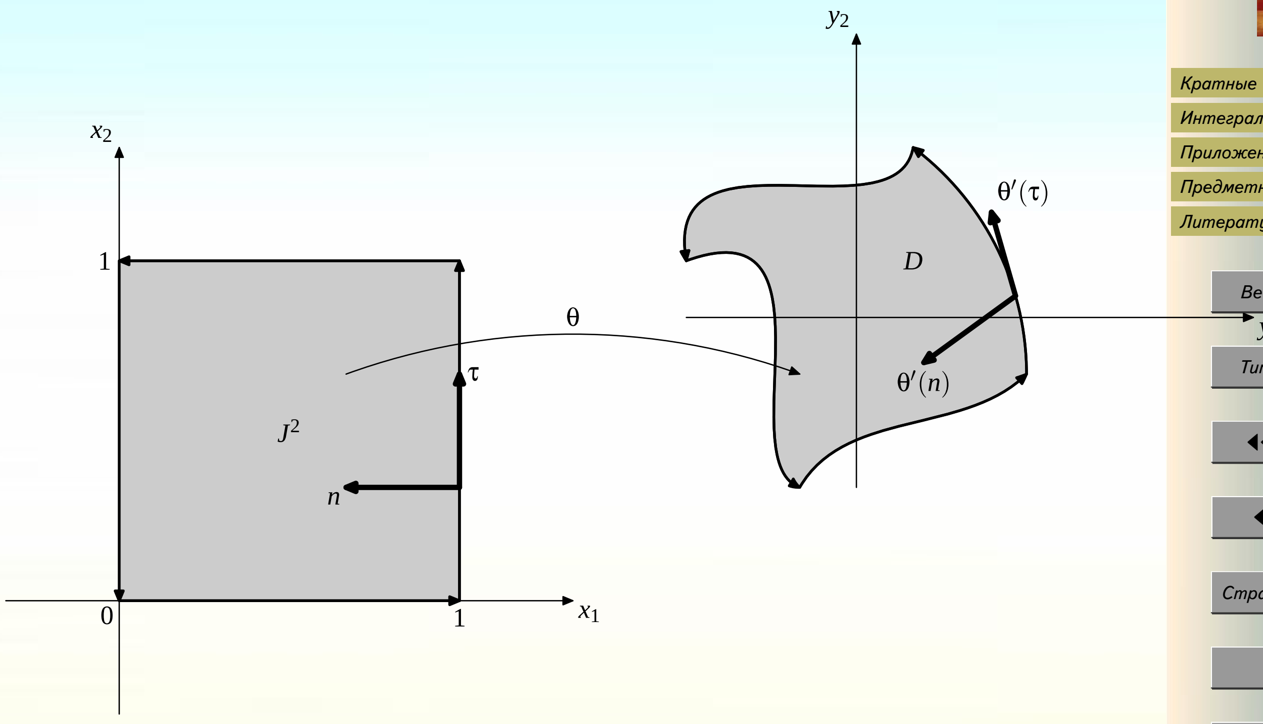
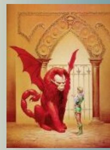


Рис. 22: Двумерная клетка


Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 135 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Заметим, что

$$\theta^*(dy_1 \wedge dy_2) = \det \theta' \cdot dx_1 \wedge dx_2 \,,$$

т.е. отображение θ сохраняет ориентацию на плоскости (формы $dy_1 \wedge dy_2$ и $dx_1 \wedge dx_1$ задают одну и ту же ориентацию плоскости $\mathbb{R}^2$). Как следствие, положительная ориентация на ∂J^2 индуцирует положительную ориентацию на границе клетки D, т.е. на ∂D.

Опишем эту ситуацию несколько подробнее. Если $\gamma:\ [a,b] \to \mathbb{R}^2$ — гладкий путь, то $\theta \circ \gamma:\ [a,b] \to \mathbb{R}^2$ — тоже гладкий путь. Скорость пути $\theta \circ \gamma$ равна $(\theta \circ \gamma)' = \theta' \circ \gamma \cdot \gamma'$. Напомним, что здесь знак умножения обозначает действие линейного отображения θ' в точке γ на вектор γ' (в координатной форме — умножение матрицы Якоби на вектор). Отсюда, если $\tau_{\mathbf{x}}$ — единичный касательный вектор в точке $\mathbf{x}$ к пути γ, то $\theta'_{\mathbf{x}}(\tau_{\mathbf{x}})$ — касательный (не обязательно единичный) вектор к пути $\theta \circ \gamma$ в точке $\theta(\mathbf{x})$. Этот факт можно описать как тот, что при гладком отображении касательный вектор к кривой отображается в касательный же вектор к образу кривой. С нормальными векторами дело обстоит иначе: если $\boldsymbol{n}_{\mathbf{x}}$ — нормаль к пути γ в точке $\mathbf{x}$, то вектор $\theta'_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{n}_{\mathbf{x}})$ уже не будет, вообще говоря, нормальным вектором к пути $\theta \circ \gamma$. Но ориентация векторов $\theta'(\tau), \theta'(\boldsymbol{n})$ (в данном порядке) будет той же, что и векторов $\tau, \boldsymbol{n}$:

$$\theta'(\tau) \wedge \theta'(\boldsymbol{n}) = \det \theta' \cdot \tau \wedge \boldsymbol{n} \,,$$

причем нормальная составляющая вектора $\theta'(\boldsymbol{n})$ будет вектором внутренней нормали (считая, что путь $\theta \circ \gamma$ является частью границы клетки), если нормаль $\boldsymbol{n}$ является внутренней к границе квадрата.

Углы клетки D являются образами углов квадрата J^2. Поскольку отображение θ сохраняет ориентацию, углы клетки будут по величине меньше 180°. В силу взаимной однозначности отображения θ, количество углов сохранится. Это означает, что ни круг, ни треугольник, ни не выпуклый четырехугольник не могут быть клетками. Примером клетки может служить подграфик гладкой не обращающейся в ноль функции на интервале.

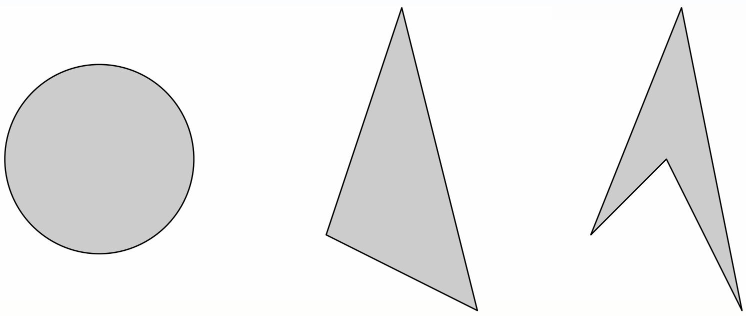


Рис. 23: Не клетки

Теорема 9.6. *Пусть $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ — дифференциальная форма на D, где f_1, f_2 — непрерывно дифференцируемые функции $D \to \mathbb{R}$, где D — ориентированная клетка. Пусть ∂D ориентирована согласовано с ориентацией D. Тогда*

$$\int\limits_{D} d\omega = \int\limits_{\partial D} \omega\,.$$

Доказательство. Пусть $\theta :\ J^2 \to D$ — карта клетки D. Тогда, ввиду перестановочности операторов d и θ^*, формул (9.2) и формулы Грина для квадрата

$$\int\limits_{D} d\omega = \int\limits_{\theta(J^2)} d\omega = \int\limits_{J^2} \theta^* d\omega = \int\limits_{J^2} d\theta^*\omega = \int\limits_{\partial J^2} \theta^*\omega = \int\limits_{\theta(\partial J^2)} \omega = \int\limits_{\partial D} \omega\,.$$

□

9.4. Общий случай

Для общего случая достаточно заметить, что сложные плоские фигуры могут быть разбиты на клетки, при этом в силу вступает свойство аддитивности интегралов.

Определение 9.7. Говорят, что связная область D *допускает клеточное разбиение*, если

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i\,,$$

где D_i — ориентированная клетка, причем либо $D_i \cap D_j = \varnothing \quad (i \neq j)$, либо $D_i \cap D_j$ является общим ребром этих клеток.[11]

[11] ребро клетки — это образ стороны квадрата

Для данного ребра клетки разбиения D_i существует две возможности. Либо это ребро не входит в границу никакой другой клетки и тогда оно называется *внешним*, либо оно является также ребром еще одной клетки и тогда оно называется *внутренним*. В последнем случае ориентация ребра в каждой из двух клеток будет различна. Граница ∂D состоит из граничных ребер, чем и определяется ее ориентация. Два разных клеточных разбиения определяют одну и туже ориентацию границы ∂D. Это вытекает из того факта, что ориентация границы индуцируется однозначно ориентацией области D.

Примеры клеточного разбиения кольца, круга и треугольника можно увидеть на рисунке 24.

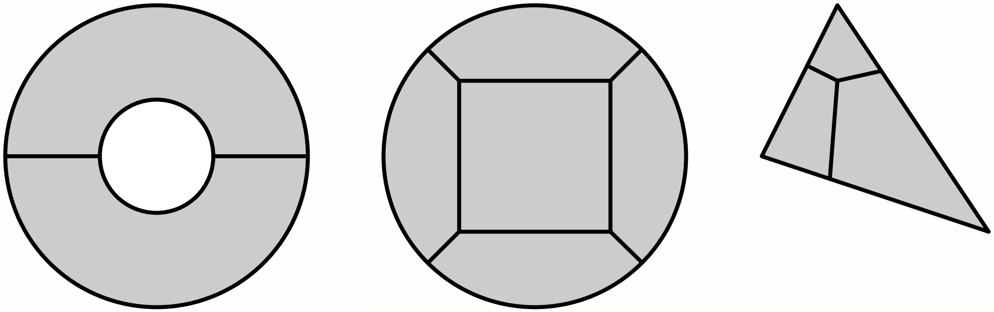


Рис. 24: Клеточные разбиения кольца, круга и треугольника

Теорема 9.8 (Грин). *Пусть $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ — дифференциальная форма на D, где f_1, f_2 — непрерывно дифференцируемые функции $D \to \mathbb{R}$, где D — связная компактная область, допускающая клеточное разбиение. Пусть ∂D ориентирована согласовано с ориентацией D. Тогда*

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega\,.$$

Доказательство. В силу аддитивности интеграла, теоремы Грина для клетки и сокращения криволинейных интегралов по внутренним ребрам находим

$$\int\limits_D d\omega = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{D_i} d\omega = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial D_i} \omega = \int\limits_{\partial D} \omega \,.$$

□

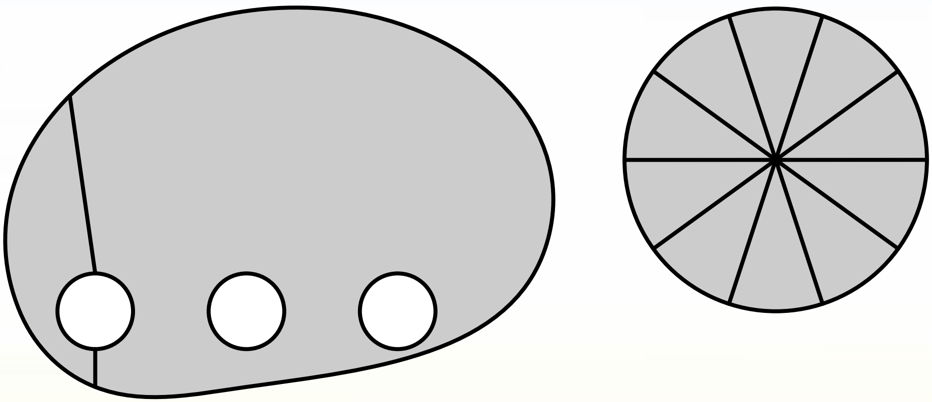


Рис. 25: К вопросу о триангуляции

При анализе сложных областей бывает удобно установить *триангулируемость* области, т.е. разложение ее в сумму криволинейных треугольников, которые пересекаются также как это было определено при разбиении области на клетки. Поскольку каждый [криволинейный] треугольник легко разлагается на клетки, то вся триангулируемая область допускает клеточное разбиение. Если область имеет несколько внутренних границ,

то она может быть представлена как объединение двух областей, одна из которых вообще не имеет внутренних границ, а другая имеет внутренних границ на одну меньше по сравнению исходной областью, см. рисунок 25. Индукция сводит эту ситуацию к триангулируемой.

9.5. Независимость криволинейного интеграла от пути

В этом вопросе нам будет удобно вернуться к координатам xy на плоскости.

Теорема 9.9. *Пусть $P, Q : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемые функции и $\omega = Pdx + Qdy$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $\exists f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \qquad \omega = df$,
2. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ *на* $\mathbb{R}^2$, *т.е.* $d\omega = 0$,
3. *интеграл* $\int\limits_\gamma \omega$ *не зависит от пути* γ, *если начало* $A = \gamma(a)$ *и конец* $B = \gamma(b)$ *пути* $\gamma : \ [a, b] \to \ \mathbb{R}^2$ *фиксированы.*

Доказательство. $\boxed{1 \Rightarrow 3}$ Пусть γ_1 и γ_2 — два пути, начало и конец которых совпадают. Пусть $-\gamma_2$ является путем, противоположным пути γ_2. Область, лежащую между образами путей γ_1 и γ_2 обозначим через D. Тогда

$$\int\limits_{\gamma_1} df - \int\limits_{\gamma_2} df = \int\limits_{\gamma_1} df + \int\limits_{-\gamma_2} df = \int\limits_{\partial D} df = \int\limits_{D} d(df) = 0\,.$$

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ В случае $\omega = df = Pdx + Qdy$ имеем $P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$, откуда виду равенства

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\,,$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 141 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

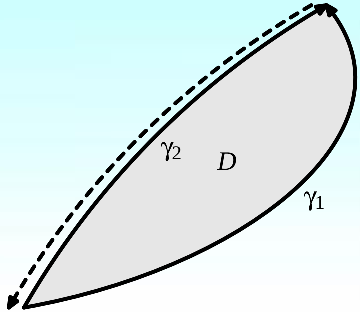


Рис. 26: К доказательству теоремы 9.9

заключаем $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Фиксируем точку $A = (0,0)$ и положим

$$f(x,y) = \int\limits_{\gamma(x,y)} \omega\,,$$

где $\gamma(x,y)$ — произвольный путь с началом в точке A и концом в точке $B = (x,y)$. Например, $\gamma(x,y) = AC \cup CB$, где $C = (x,0)$ и AC и CB — пути вдоль отрезков $[A,C]$ и $[C,B]$. Тогда

$$f(x,y) = \int\limits_{AC} \omega + \int\limits_{CB} \omega = \int\limits_0^x P(t,0)\,dt + \int\limits_0^y Q(x,t)\,dt\,.$$

При этом $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$. Аналогично доказывается равенство $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P(x,y)$ (как в этом случае следует выбрать путь интегрирования?). Как следствие, $df = \omega$. $\square$

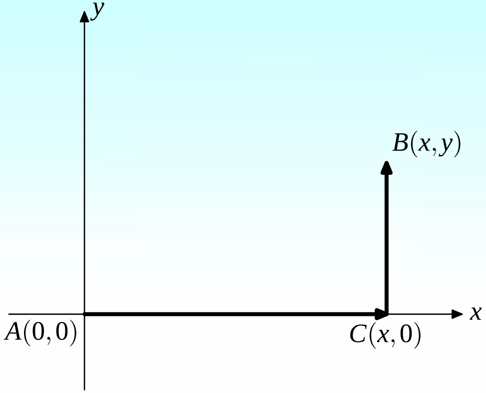


Рис. 27: К доказательству теоремы 9.9

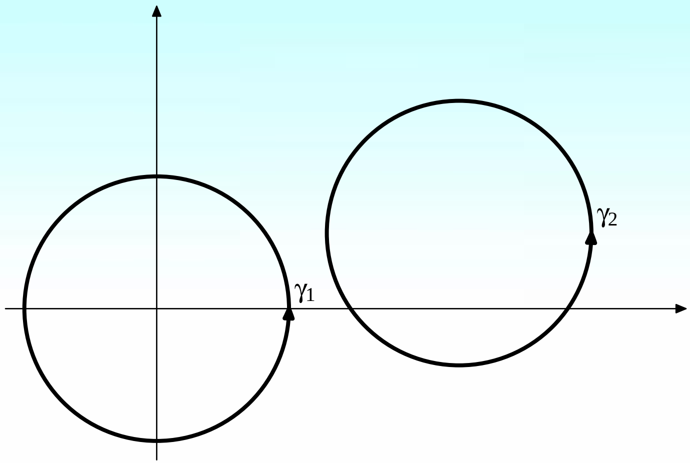
Данная теорема не верна для произвольной открытой области. В качестве примера приведем форму

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}\,,$$

определенную на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Очевидно, $d\omega = 0$. Рассмотрим два замкнутых пути γ_1 и γ_2. Пусть γ_1 — единичная окружность с центром в нуле:

$$\gamma_1 : \qquad \begin{cases} x = \cos t\,, \\ y = \sin t\,, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

а γ_2 — окружность, внутри которой не содержится точка $(0,0)$, например, лежащая в



правой полуплоскости. Тогда

$$\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi\,,$$

но

$$\int\limits_{\gamma_2} \omega = \oint\limits_{\gamma_2} d\Big(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big) = \int\limits_{\varnothing} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0\,.$$

Форму ω называют *точной*, если $\omega = df$, ее называют *замкнутой*, если $d\omega = 0$. Точная форма всегда замкнута (лемма Пуанкаре), обратное, как мы только что видели, не всегда верно и ответ в действительности зависит от области определения данной замкнутой формы. Покажем, например, как доказать точность замкнутой формы для так называемых звездных областей. Область D называют *звездной* относительно точки M, если отрезки, соединяющие точку M и точки границы ∂D целиком лежат в области D. Пусть $\omega = P dx + Q dy$ и $d\omega = 0$ в звездной области D. Без ограничения общности можем считать, что D является звездной относительно начала координат. Тогда для точек (x, y) области D можно определить функцию

$$f(x,y) = \int_0^1 [P(tx,ty)\cdot x + Q(tx,ty)\cdot y]\,dt\,.$$

При этом

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_0^1 \Big[\frac{\partial P}{\partial x}\cdot tx + P + \frac{\partial Q}{\partial x}\cdot ty\Big]\,dt = \int_0^1 \Big[\frac{\partial P}{\partial x}\cdot tx + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot ty\Big]\,dt + \int_0^1 P\,dt$$

$$= \int_0^1 t\cdot\frac{dP}{dt}\,dt + \int_0^1 P\,dt = tP(tx,ty)\Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 P\,dt + \int_0^1 P\,dt = P(x,y)$$

и, аналогично,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)\,,$$

откуда $\omega = df$.

На самом деле для справедливости рассматриваемой теоремы (о точности замкнутой формы) существенным является «стягиваемость» области в точку. Звездную область относительно точки M можно стянуть в точку M. Если же область имеет «дыры» (выколотые точки), — что препятствует стягиванию области — теорема не верна.

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 145 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

10. Понятие о дифференциальных формах

10.1. Внешние формы

В этом разделе в качестве векторного пространства будет выступать $V = \mathbb{R}^n$.

Определение 10.1. Полилинейная и антисимметричная функция $\omega : \ V^k \to \mathbb{R}$ называется *внешней k-формой.*

Внешняя k-форма — это функция k переменных векторов

$$y = \omega(\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_k)\,, \qquad \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n\,.$$

Напомним, что полилинейность означает линейность по каждому аргументу, а антисимметричность — обращение в ноль всякий раз, когда какие-либо два аргумента совпадают, что влечет, также, изменение знака при перестановке местами двух аргументов.

Формы объема являются частным случаем внешних k-форм при $k = n$. Внешняя форма однозначно определяется своими значениями на базисных векторах. Именно, набор C_n^k чисел

$$\omega(\mathbf{e}_{i_1}, \dots \mathbf{e}_{i_k})\,,$$

где $\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n$ — базис в пространстве V и $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, однозначно задают (по линейности и антисимметричности) форму ω. Отсюда можем заключить, что внешние k-формы образуют векторное пространство размерности C_n^k $(k \leqslant n)$. В частности, 1-формы и $(n-1)$-формы образуют n-мерные векторные пространства. Нетривиальных k-форм при $k > n$ нет.

Пусть $\alpha_1, \dots \alpha_k$ — линейные 1-формы. Мы хотим каждому такому набору 1-форм поставить в соответствие k-форму, которую будем обозначать $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k$ и называть *внешним произведением* форм $\alpha_1, \dots \alpha_k$. При этом мы хотим, чтобы отображение

$$(\alpha_1, \dots \alpha_k) \mapsto \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k$$

было линейно по каждому аргументу и антисимметрично. Для этого достаточно определить это отображение на всевозможных наборах базисных 1-форм $dx_{i_1}, \dots dx_{i_k}$ при $i_1 < \dots < i_k$. Напомним, что форма dx_i является проекцией векторов на i-ю координату:

$$dx_i(\mathbf{v}) = v_i\,, \qquad \mathbf{v} = (v_1, \dots v_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i\,.$$

Мы положим по определению

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(\mathbf{e}_{j_1}, \dots \mathbf{e}_{j_k}) = \begin{cases} 1\,, & \text{при} \quad (i_1, \dots i_k) = (j_1, \dots j_k)\,, \\ 0\,, & \text{в остальных случаях}\,, \end{cases}$$

при этом считается, что $i_1 < \dots < i_k$ и $j_1 < \dots < j_k$. Это, конечно, означает, что k-формы $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ (при всех комбинациях возрастающих последовательностей индексов) образуют базис в пространстве k-форм. Таким образом, в случае k-формы ω имеем

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\,.$$

Отметим, что

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k(\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_k) = \det(\alpha_i(\mathbf{v}_j)) = \begin{vmatrix} \alpha_1(\mathbf{v}_1) & \dots & \alpha_1(\mathbf{v}_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_k(\mathbf{v}_1) & \dots & \alpha_k(\mathbf{v}_k) \end{vmatrix}\,, \tag{10.1}$$

в частности, $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(\mathbf{v_1}, \dots \mathbf{v}_k)$ — минор матрицы векторов-столбцов $(\mathbf{v_1}, \dots \mathbf{v}_k)$, отвечающий выбору строк с номерами $i_1, \dots i_k$:

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(\mathbf{v_1}, \dots \mathbf{v}_k) = \begin{vmatrix} v_{i_1 1} & \dots & v_{i_1 k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{i_k 1} & \dots & v_{i_k k} \end{vmatrix}\,,$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Страница 147 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

здесь v_{ij} — i-я координата вектора $\mathbf{v}_j$.

Для доказательства (10.1) заметим, что обе части равенства являются полилинейными и антисимметричными как по векторам, так и по формам, а следовательно, достаточно проверить равенство на базисных комбинациях форм и векторов. Последнее же верно в силу определения. Отметим, также, что равенство (10.1) доказывает само существование внешнего произведения $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$.

Пример. Пусть $V = \mathbb{R}^3$ со стандартным базисом $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Тогда пространство 1-форм трехмерно с базисом (dx, dy, dz). Внешняя 1-форма имеет вид

$$\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz\,, \qquad (A, B, C \in \mathbb{R})\,.$$

Пространство 2-форм также трехмерно: $C_3^2 = 3$. Базис, например, образуют формы $dx\wedge\, dy$, $dx\wedge\, dz$, $dy\wedge\, dz$, однако чаще в качестве базиса выбирают $dy\wedge dz$, $dz\wedge dx$, $dx\wedge dy$. Внешняя 2-форма ω имеет вид

$$\omega = A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dy + C\,dx \wedge dy\,.$$

Пространство 3-форм одномерно. Базис образует форма объема $dx\wedge dy\wedge dz$, любая другая ей пропорциональна.

Определим внешнее произведение двух внешних форм. Мы хотим каждой паре форм (α, β), где α — k-форма, а β — m-форма, поставить в соответствие $(k+m)$-форму, обозначаемую $\alpha \wedge \beta$ и называемую *внешним произведением* форм α и β, причем так, чтобы отображение

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

было линейно по каждому аргументу. Для этого достаточно определить такое отображение на *мономах* $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ и $\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m$, где α_i и β_j — 1-формы. В этом случае по определению полагаем

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \wedge (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m) = \alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m\,.$$

В силу определения, если α, β и γ, соответственно, k, m и p-формы:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)\,.$$

Это свойство (ассоциативность) дает основание для обозначения $\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$ в случае произведения трех форм.

Перестановка сомножителей осуществляется по следующему правилу. Если α и β, соответственно, k и m-формы, то

$$\alpha\wedge\beta=(-1)^{km}\beta\wedge\alpha\,.$$

Доказательство (в силу линейности) достаточно провести для мономов. В этом случае

$$\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_k\wedge\beta_1\wedge\ldots\wedge\beta_m=(-1)^k\beta_1\wedge\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_k\wedge\beta_2\wedge\ldots\wedge\beta_m=(-1)^{km}\beta_1\wedge\ldots\wedge\beta_m\wedge\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_k\,.$$

Примеры. 1) В случае $V=\mathbb{R}^3$ рассмотрим произведение 1-форм $\alpha=A\,dx+B\,dy+C\,dz$ и $\beta=E\,dx+F\,dy+G\,dz$:

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\beta&=(A\,dx+B\,dy+C\,dz)\wedge(E\,dx+F\,dy+G\,dz)\\&=AF\,dx\wedge dy+AG\,dx\wedge dz+BE\,dy\wedge dx+BG\,dy\wedge dz+CE\,dz\wedge dx+CF\,dz\wedge dy\\&=(AF-BE)\,dx\wedge dy+(CE-AG)\,dz\wedge dx+(BG-CF)\,dy\wedge dz\\&=\begin{vmatrix}dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy\\ A & B & C\\ E & F & G\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

2) Найдем теперь произведение 1-формы α и 2-формы $\omega=P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$:

$$\begin{aligned}\alpha\wedge\omega&=(A\,dx+B\,dy+C\,dz)\wedge(P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy)\\&=(AP+BQ+CR)\,dx\wedge dy\wedge dz\end{aligned}$$

(т.к. $dx\wedge dy\wedge dz=dz\wedge dx\wedge dy=dy\wedge dz\wedge dx$).
3) В классической механике важную роль играет 2-форма $\omega=dp_1\wedge dq_1+\ldots+dp_n\wedge dq_n$, которая определяет так называемую симплектическую структуру в фазовом пространстве. Здесь q_i и p_i так называемые *обобщенные координаты и импульсы* — координаты в

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 149 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Найдем форму $\omega^n \overset{\text{Опр.}}{=} \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n \text{ раз}}$. [12] Замечая, что 2-формы $dp_i \wedge dq_i$ и $dp_j \wedge dq_j$ перестановочны между собой (знак меняется дважды), имеем

$$\omega^n = n!\, dp_1 \wedge dq_1 \wedge \ldots \wedge dp_n \wedge dq_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!\, dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n \wedge dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_n \,.$$ [13]

Определим теперь внутреннее произведение вектора $\boldsymbol{a}$ и k-формы ω. Оно обозначается через $\boldsymbol{a} \lrcorner \omega$ и определяется как следующая $(k-1)$-форма

$$\boldsymbol{a} \lrcorner \omega(\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_{k-1}) = \omega(\boldsymbol{a}, \mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_{k-1}) \,.$$

Если ω — моном $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$, то

$$\boldsymbol{a} \lrcorner \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k = \alpha_1(\boldsymbol{a})\alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k - \alpha_2(\boldsymbol{a})\alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \ldots \wedge \alpha_k + \ldots + (-1)^{k+1}\alpha_k(\boldsymbol{a})\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k-1} \,.$$

Эта формула является ничем иным, как разложением Лапласа определителя по первому столбцу. Ее удобно записать в виде

$$\boldsymbol{a} \lrcorner \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \alpha_i(\boldsymbol{a}) \alpha_1 \wedge \ldots \widehat{\alpha_i} \ldots \wedge \alpha_k \,, \tag{10.2}$$

где шляпка над α_i во внешнем произведении означает, что этого множителя нет.

Например, в случае $\mathbf{v} = (A, B, C) \in V = \mathbb{R}^3$ и $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ находим

$$\mathbf{v} \lrcorner dx \wedge dy \wedge dz = dx(\mathbf{v})\, dy \wedge dz - dy(\mathbf{v})\, dx \wedge dz + dz(\mathbf{v})\, dx \wedge dy = A\, dy \wedge dz + B\, dz \wedge dx + C\, dx \wedge dy \,,$$

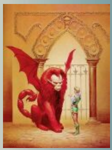
а в n-мерном случае

$$\boldsymbol{a} \lrcorner dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i\, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n \,, \tag{10.3}$$

где a_i — i-я координата вектора a.

[12] ω не является 1-формой или мономом и потому ее внешнее произведение на саму себя не обязано быть нулем

[13] чтобы объяснить знак в последнем выражении достаточно заметить, что мы переставляем dp_2 с dq_1, далее dp_3 с $dq_1 \wedge dq_2$ и т.д., откуда число перестановок равно $1 + 2 + \ldots + (n-1)$



Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 150 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

10.2. Дифференциальные формы

Определение 10.2. Дифференциальной k-формой в области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется функция ω, которая при каждом фиксированном $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ является внешней k-формой $\omega_{\mathbf{x}}$3.

Таким образом, дифференциальные формы — это внешние формы с коэффициентами, зависящими от переменной $\mathbf{x}$:

$$\omega_{\mathbf{x}} = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\,.$$

Функции $f_{i_1 \ldots i_k}$ мы будем считать непрерывно дифференцируемыми столько раз, сколько это нужно.

В качестве примера вычислим значение формы

$$\omega = x_2\, dx_2 \wedge dx_3 - 2x_1 x_4^2\, dx_2 \wedge dx_4$$

в точке $\mathbf{x} = (5, -1, 0, 2, 4) \in \mathbb{R}^5$ на векторах $\mathbf{v}_1 = (0, 2, 2, 4, 3)$ и $\mathbf{v}_2 = (2, 1, -2, 3, 1)$. Находим, во-первых,

$$\omega_{\mathbf{x}} = -dx_2 \wedge dx_3 - 40 dx_2 \wedge dx_4\,,$$

далее,

$$dx_2 \wedge dx_3(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6\,, \qquad dx_2 \wedge dx_4(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\,,$$

откуда

$$\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 6 - 80 = -74\,.$$

Каждой дифференциальной k-форме (с гладкими коэффициентами) мы хотим поставить в соответствие $(k+1)$-форму, обозначаемую $d\omega$ и называемую *дифференциалом* формы ω. Именно, если

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\,,$$

то

$$d\omega \overset{\text{Опр.}}{=} \sum_{i_1<\ldots<i_k} df_{i_1\ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\,,$$

где $df_{i_1\ldots i_k}$ — дифференциал функции $f_{i_1\ldots i_k}$:

$$df_{i_1\ldots i_k} = \frac{\partial f_{i_1\ldots i_k}}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_{i_1\ldots i_k}}{\partial x_n}\,dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1\ldots i_k}}{\partial x_i}\,dx_i\,.$$

Из определение немедленно вытекает линейность дифференциала: если α и β — дифференциальные k-формы, то

$$d(\alpha+\beta) = d\alpha + d\beta\,.$$

Следующее свойство операции дифференцирования: если α — дифференциальная k-форма и β — дифференциальная m-форма, то

$$d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge d\beta\,. \tag{10.4}$$

Действительно, в силу линейности дифференциала и внешнего произведения, достаточно доказать это свойство для мономов $\alpha = f\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$ и $\beta = g\,dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_m}$. Заметим, что в силу определения

$$d(dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}) = 0\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 152 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Тогда

$$
\begin{aligned}
d(\alpha\wedge\beta) &= d(fg)\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_m}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\Bigl(\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g + f\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}\Bigr)\,dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_m}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\Bigl(\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g\,dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_m}\\
&\quad + (-1)^k f\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_i\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_m}\Bigr)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\wedge g\,dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_m}\\
&\quad + (-1)^k f\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\wedge\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx_i\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_m}\\
&= d\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge d\beta\,.
\end{aligned}
$$

Наконец, отметим еще одно важное свойство, составляющее содержание леммы Пуанкаре:

$$
d(d\omega) = 0\,. \tag{10.5}
$$

Опять, в силу линейности, достаточно его проверить для мономов. Пусть $\omega = f\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$, тогда

$$
d\omega = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}
$$

и

$$
\begin{aligned}
d(d\omega) &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_{j<i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} + \sum_{j>i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_{j<i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} - \sum_{j>i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_{j<i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} - \sum_{i>j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_{j<i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = 0
\end{aligned}
$$

в силу равенства смешанных производных

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,.
$$

<u>Примеры.</u> 1) Пусть $\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ — дифференциальная 1-форма в $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$
\begin{aligned}
d\omega = &\Big(\frac{\partial A}{dx}\,dx + \frac{\partial A}{\partial y}\,dy + \frac{\partial A}{\partial z}\,dz\Big)\wedge dx \\
&+\Big(\frac{\partial B}{dx}\,dx + \frac{\partial B}{\partial y}\,dy + \frac{\partial B}{\partial z}\,dz\Big)\wedge dy + \Big(\frac{\partial C}{dx}\,dx + \frac{\partial C}{\partial y}\,dy + \frac{\partial C}{\partial z}\,dz\Big)\wedge dz \\
&= \Big(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\Big)\,dx\wedge dy + \Big(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\Big)\,dz\wedge dx + \Big(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\Big)\,dy\wedge dz \\
&= \begin{vmatrix} dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

2) Пусть $\omega = P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$ — дифференциальная 2-форма в $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$
\begin{aligned}
d\omega = &\Big(\frac{\partial P}{dx}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy + \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\Big)\wedge dy\wedge dz \\
&+\Big(\frac{\partial Q}{dx}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy + \frac{\partial Q}{\partial z}\,dz\Big)\wedge dz\wedge dx + \Big(\frac{\partial R}{dx}\,dx + \frac{\partial R}{\partial y}\,dy + \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\Big)\wedge dx\wedge dy \\
&= \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\,dx\wedge dy\wedge dz\,.
\end{aligned}
$$

10.3. Прообраз дифференциальной формы при гладком отображении

Пусть $\theta:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — непрерывно дифференцируемое отображение. Оно индуцирует отображение θ^*, которое формам на $\mathbb{R}^m$ ставит в соответствие формы на $\mathbb{R}^n$.

Именно, если f — 0-форма, т.е функция $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, то

$$\theta^* f \overset{\text{Опр.}}{=} f\circ\theta\,.$$

В координатах отображение θ задается равенствами

$$\theta: \qquad \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots x_n)\,, \\ \vdots \\ y_m = y_m(x_1, \dots x_n)\,. \end{cases}$$

При этом

$$\theta^* f(x_1, \dots x_n) = f(y_1(x_1, \dots x_n), \dots y_m(x_1, \dots x_n))\,.$$

Далее, если dy_i — базисная 1-форма на $\mathbb{R}^m$, то

$$\theta^* dy_i \overset{\text{Опр.}}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\, dx_j\,.$$

На мономах отображение θ^* определяется равенством

$$\theta^*(f\, dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) \overset{\text{Опр.}}{=} \theta^* f \cdot \theta^* dy_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^* dy_{i_k}$$

и по линейности распространяется на произвольные дифференциальные формы.

Отображение θ^* является ничем иным как заменой переменных в дифференциальной форме.

В силу определения имеем

$$\theta^*(\alpha \wedge \beta) = \theta^* \alpha \wedge \theta^* \beta$$

для любых дифференциальных форм α и β.

Исключительно важно следующее свойство:

$$\theta^*(d\omega) = d(\theta^* \omega)\,. \tag{10.6}$$

Доказательство проведем по индукции. Для 0-формы $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ это равенство эквивалентно свойству инвариантности первого дифференциала

$$d\theta^* f = d(f \circ \theta) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \theta)}{\partial x_j}\, dx_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i} \circ \theta \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\, dx_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \theta^* \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \theta^* dy_i = \theta^* \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i}\, dy_i = \theta^* df\,.$$

Пусть формула (10.6) доказана для j-форм при $0 \leqslant j \leqslant k-1$. Докажем ее для k-форм. Прежде всего, заметим, что

$$d\theta^*(dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}) = d\theta^* d(y_{i_1}\, dy_{i_2} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}) = dd\theta^*(y_{i_1}\, dy_{i_2} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}) = 0\,.$$

Тогда в силу равенства (10.4) формула верна для мономов

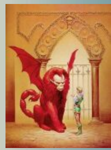
$$\begin{aligned} d\theta^*(f\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}) &= d[\theta^* f \cdot \theta^*(dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k})] \\ &= (d\theta^* f) \wedge \theta^*(dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}) + \theta^* f \cdot d\theta^*(dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}) \\ &= (\theta^* df) \wedge \theta^*(dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}) = \theta^*(df \wedge dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}) = \theta^* d(f\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k})\,, \end{aligned}$$

но тогда (по линейности) она верна и для произвольной k-формы.

Подчеркнем, что равенство (9.2) является обоснованием корректности определения дифференциала формы — независимости дифференциала от выбора системы координат. Действительно, переход к другой системе координат осуществляется непрерывно дифференцируемым взаимно однозначным отображением $\theta : \mathbb{R}^n_{\mathbf{x}} \to \mathbb{R}^n_{\mathbf{y}}$, отображение же θ^* осуществляет при этом замену переменных в формах.

В качестве примера найдем прообраз формы $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ при сферической замене переменных

$$\Theta : \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi \sin\theta\,, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta\,, \\ z = r\cos\theta\,. \end{cases}$$



Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 157 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

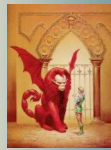
Тогда

$$\begin{aligned}\Theta^*\omega = (&\cos\varphi\sin\theta\,dr - r\sin\varphi\sin\theta\,d\varphi + r\cos\varphi\cos\theta\,d\theta)\\ &\wedge(\sin\varphi\sin\theta\,dr + r\cos\varphi\sin\theta\,d\varphi + r\sin\varphi\cos\theta\,d\theta)\\ &\wedge(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta)\\ = (r\sin^2\theta\,dr\wedge d\varphi &+ r^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta\wedge d\varphi)\wedge(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta) = r^2\sin\theta\,dr\wedge d\theta\wedge d\varphi\,.\end{aligned}$$

Имея в виду, что x, y, z — функции переменных r, θ, φ мы пишем

$$dx\wedge dy\wedge dz = r^2\sin\theta\,dr\wedge d\theta\wedge d\varphi\,.$$

В силу (9.2) можно считать что, наоборот, r, θ, φ являются функциями от x, y, z.



Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 158 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

11. Дифференциальные операции векторного анализа

11.1. Основные определения

В качестве одного из приложений техники дифференциальных форм рассмотрим дифференциальные операции векторного анализа.

11.1.1. Градиент функции

Прежде всего напомним понятие градиента функции. Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, то

$$df_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{h}\,,$$

где справа стоит действие линейной (при фиксированном $\mathbf{x}$) функции (функционала) $f'(\mathbf{x})$ на вектор $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Однако в евклидовом пространстве всякому линейному функционалу l может быть поставлен во взаимно однозначное соответствие вектор $\boldsymbol{l}$ такой, что

$$\forall \mathbf{h} : \qquad l(\mathbf{h}) = \langle \boldsymbol{l} | \mathbf{h} \rangle\,,$$

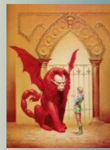
здесь $\langle \cdot | \cdot \rangle$ — скалярное произведение. Вектор, который таким образом ставится в соответствие функционалу $f'(\mathbf{x})$ называется *градиентом* функции f в точке $\mathbf{x}$ и обозначается через $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$. В декартовых координатах

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$$

и

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, \mathbf{e}_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathbf{e}_i\,,$$

где $(\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.



Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 159 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

11.1.2. Дивергенция векторного поля

Если градиент функции определяется заданием евклидовой структуры пространства, т.е. заданием скалярного произведения, то дивергенция определяется заданием формы объема на $\mathbb{R}^n$. Если Ω — фиксированная ненулевая форма объема, т.е. n-форма, то *дивергенцией* векторного поля $\boldsymbol{a}$ (т.е. функции $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) называется функция $\operatorname{div} \boldsymbol{a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что

$$d(\boldsymbol{a} \lrcorner \Omega) = \operatorname{div} \boldsymbol{a} \cdot \Omega\,.$$

В смысле этого определения дивергенция не зависит от евклидовой структуры, а зависит только от формы объема. Однако в евклидовых пространствах форму объема как правило выбирают согласованно со скалярным произведением. Именно, в $\mathbb{R}^n$ есть выделенная форма объема — $\Omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Такое согласование формы объема с евклидовой структурой приводит к зависимости дивергенции от евклидовой структуры. Следует заметить, что дивергенция не зависит от ориентации пространства.

Получим формулу для дивергенции в $\mathbb{R}^n$ в декартовых координатах, считая, что $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots a_n)$.

$$d(\boldsymbol{a} \lrcorner dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = d \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i\, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^{n} da_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\, dx_1 \wedge \ldots \ldots \wedge dx_n\,,$$

откуда

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 160 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

11.1.3. Ротор векторного поля

В трехмерном евклидовом пространстве можно ввести еще одну важную операцию векторного анализа — ротор. Фиксируем опять форму объема Ω в $\mathbb{R}^3$. *Ротор* поля $\boldsymbol{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ определяется как векторное поле $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такое, что

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{a}) \lrcorner \Omega = d\alpha \,,$$

где α — дифференциальная 1-форма, определенная равенством

$$\alpha(\mathbf{h}) = \langle \boldsymbol{a} | \mathbf{h} \rangle \,.$$

Следует подчеркнуть, что данное определение определяет ротор однозначно. Это вытекает из того факта, что в случае ненулевой формы объема Ω

$$\boldsymbol{b} \lrcorner \Omega = 0 \iff \boldsymbol{b} = \mathbf{0} \,,$$

см. (10.2).

Ротор поля зависит как от евклидовой структуры, так и от формы объема, причем, очевидно, он зависит от ориентации пространства.

Найдем формулу для вычисления ротора в декартовых координатах. Полагая $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ находим

$$\alpha = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3$$

и

$$d\alpha = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \,.$$

Кроме того при $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ в силу (10.2)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} \lrcorner dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 &= b_1\, dx_2 \wedge dx_3 - b_2\, dx_1 \wedge dx_3 + b_3\, dx_1 \wedge dx_2 \\ &= b_1\, dx_2 \wedge dx_3 + b_2\, dx_3 \wedge dx_1 + b_3\, dx_1 \wedge dx_2 \,. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} .$$

11.1.4. Дифференциальные операции векторного анализа второго порядка

Прежде всего отметим равенства

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \mathbf{0}\,,$$
$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0\,.$$

Эти равенства являются проявлениями леммы Пуанкаре: $d(d\omega) = 0$. Действительно,

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f \lrcorner \Omega = d(df) = 0$$

и

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\cdot\Omega = d[(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})\lrcorner\Omega] = d(d\alpha) = 0\,.$$

Чрезвычайно важную роль в физике играет следующий оператор:

$$\triangle f \overset{\text{Опр.}}{=} \operatorname{div}\operatorname{grad} f\,.$$

Он называется *оператором Лапласа* функции $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

В декартовых координатах оператор Лапласа определяется равенством

$$\triangle f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\,.$$

11.2. Оператор Гамильтона

Удобно описывать рассмотренные операции в терминах *оператора Гамильтона* ∇. Он определяется как формальный оператор дифференцирования

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^3$. Действие его на функцию $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ определяется как градиент функции и формально записывается как умножение вектора ∇ на число f:

$$\nabla f = \operatorname{grad} f\,.$$

Формальное скалярное умножение оператора Гамильтона на векторное поле совпадает с дивергенцией векторного поля:

$$\langle \nabla | \boldsymbol{a} \rangle = \nabla \cdot \boldsymbol{a} = \operatorname{div} \boldsymbol{a}\,,$$

а формальное векторное произведение — с ротором векторного поля:

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\,.$$

Оператор Гамильтона удобен для запоминания формул векторного анализа. Например, дифференциальные операции второго порядка примут вид

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\operatorname{grad} f &= \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \triangle f\,,\\
\operatorname{rot}\operatorname{grad} f &= \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}\,,\\
\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} &= \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{a} = 0\,.\\
\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} &= \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{a} - \triangle \boldsymbol{a}\,,
\end{aligned}$$

в последнем случае мы воспользовались формулой

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,, \tag{11.1}$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 163 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

причем действие оператора Лапласа на векторное поле определяется покомпонентно.

Далее, в силу того, что оператор Гамильтона является оператором дифференцирования и, следовательно, подчинен правилу Лейбница дифференцирования произведений, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(fg) &= \nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g\,, \\ \operatorname{div}(f\boldsymbol{a}) &= \nabla\cdot(f\boldsymbol{a}) = \nabla f\cdot\boldsymbol{a} + f\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} f\cdot\boldsymbol{a} + f\operatorname{div}\boldsymbol{a}\,, \\ \operatorname{rot}(f\boldsymbol{a}) &= \nabla\times(f\boldsymbol{a}) = \nabla f\times\boldsymbol{a} + f\nabla\times\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} f\times\boldsymbol{a} + f\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,. \end{aligned}$$

Несколько сложнее обстоит дело с дифференцированием произведений векторных полей:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= \nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})\,, \\ \operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) &= \nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}) \\ &= (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{b}\,, \\ \operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= \nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b}) \\ &= (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b}\,. \end{aligned}$$

Первую из этих формул легко увидеть. Применяя правило Лейбница, напишем:

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \overset{a}{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + \overset{b}{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,,$$

где значок сверху оператора Гамильтона указывает на какой из множителей действует данное дифференцирование. Остается воспользоваться свойствами смешанного произведения:

$$\overset{a}{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})\,, \qquad \overset{b}{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})\,.$$

Для доказательства второй формулы поступим аналогично:

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \overset{a}{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + \overset{b}{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,,$$

замечая, далее, что в силу формулы (11.1) будут выполняться равенства

$$\boldsymbol{a} \times (\nabla \times \boldsymbol{b}) = \overset{b}{\nabla}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{b} \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \overset{a}{\nabla}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a}.$$

И то же самое в случае третьей формулы:

$$\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \overset{a}{\nabla} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \overset{b}{\nabla} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

с учетом равенств

$$\overset{a}{\nabla} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}(\nabla \cdot \boldsymbol{a}),$$

$$\overset{b}{\nabla} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}(\nabla \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b}.$$

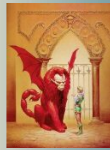
11.3. Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах

11.3.1. Определение криволинейных координат. Коэффициенты Ламе

Пусть на пространстве $\mathbb{R}^n$ введен стандартный ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$. Соответствующие декартовы координаты будем обозначать через $x_1, \ldots x_n$, а само пространство $\mathbb{R}^n$ при этом снабжать индексом $\mathbf{x}$: $\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$.

Возьмем теперь второй экземпляр пространства $\mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами $u_1, \ldots u_n$ и рассмотрим непрерывно дифференцируемое отображение $\theta : \mathbb{R}^n_{\mathbf{u}} \to \mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$, определенное равенствами

$$\theta : \quad \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \ldots u_n), \\ \vdots \\ x_n = x_n(u_1, \ldots u_n). \end{cases}$$



Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 165 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Мы не будем требовать того, чтобы область определения отображения θ совпадала со всем пространством, но мы будем предполагать, что отображение θ является обратимым на своей области определения и что обратное отображение $\psi = \theta^{-1}$ является непрерывно дифференцируемым.

В этом случае координаты $u_1, \dots u_n$ называют *криволинейными координатами* на пространстве $\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$. Это, конечно, означает, что криволинейными координатами на $\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$ называются координаты функции

$$\psi : \qquad \begin{cases} u_1 = u_1(x_1, \dots x_n)\,, \\ \vdots \\ u_n = u_n(x_1, \dots x_n)\,. \end{cases}$$

Заметим, далее, что евклидова структура на пространстве векторов индуцирует евклидову структуру на пространстве линейных 1-форм. Именно, если форма α дуальна вектору $\boldsymbol{a}$, а форма β дуальна вектору $\boldsymbol{b}$, т.е.

$$\forall \mathbf{h} : \qquad \alpha(\mathbf{h}) = \langle \boldsymbol{a} | \mathbf{h} \rangle\,, \qquad \beta(\mathbf{h}) = \langle \boldsymbol{b} | \mathbf{h} \rangle\,,$$

то по определению

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} \rangle\,.$$

В этом смысле формы $dx_1 \dots dx_n$ образуют ортонормированный базис в пространстве 1-форм.

Настало время сделать важное замечание. Тот факт, что символ u_i обозначает как независимую координату в пространстве $\mathbb{R}^n_{\mathbf{u}}$, так и координатную функцию $u_i(x_1, \dots x_n)$, может привести к некоторому недоразумению. Именно, в первом случае формы $du_1, \dots du_n$ образуют ортонормированный базис. Во втором случае это, вообще говоря, не так. Дело в том, что во втором случае форма du_i является дифференциалом функции $u_i(\mathbf{x})$, т.е. формой на пространстве $\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$, а не на пространстве $\mathbb{R}^n_{\mathbf{u}}$. В тех случаях, когда возникает опасность смешения этих понятий, для формы на $\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$ следует использовать обозначение $\psi^* du_i$. На практике же такое смешение не является опасным,

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 166 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

поскольку из контекста обычно всегда ясно, в каком смысле следует понимать то или иное обозначение. Так, равенство

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\, du_j$$

можно трактовать как

$$\theta^* dx_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\, du_j \,,$$

т.е. как равенство форм на пространстве $\mathbb{R}^n_{\mathbf{u}}$, так и

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\, \psi^* du_j \,,$$

т.е. как равенство форм на пространстве $\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$. В вопросах, касающихся криволинейных координат, мы примем вторую точку зрения, т.е. **под формами** du_i **мы будем понимать дифференциалы функций** $u_i(\mathbf{x})$.

Далее мы будем считать, что формы $du_1, \ldots du_n$ взаимно ортогональны, но вообще говоря не ортонормированы. Соответствующую систему ортонормированных форм обозначим через $\sigma_1, \ldots \sigma_n$, при этом

$$\sigma_i = h_i\, du_i \qquad (i = 1, \ldots n)\,,$$

коэффициенты h_i носят название *коэффициентов Ламе.*

Получим явные формулы для коэффициентов Ламе. Заметим, что

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\, du_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{h_j} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\, \sigma_j \,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 167 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Напомним, что матрица перехода, связывающая ортонормированные базисы, является ортогональной, т.е. обратная матрица совпадает с транспонированной. Отсюда

$$\sigma_j = \frac{1}{h_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\,dx_i$$

и тогда

$$1 = |\sigma_j|^2 = \frac{1}{h_j^2}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\Big)^2 ,$$

откуда

$$h_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\Big)^2}\,.$$

Отметим геометрический смысл коэффициентов Ламе. Если фиксировать все криволинейные координаты кроме координаты u_j, то отображение θ индуцирует некоторый путь $u_j \mapsto \gamma(u_j) = \theta(u_1, \dots u_n)$, образ которого можно назвать координатной кривой u_j. Вектор

$$\mathbf{r}_j = \Big(\frac{\partial x_1}{\partial u_j}, \dots \frac{\partial x_n}{\partial u_j}\Big)$$

является касательным вектором к координатной кривой u_j. Коэффициент Ламе h_j совпадает с длиной этого вектора: $h_j = |\mathbf{r}_j|$. Заметим, что единичные векторы $\mathbf{s}_i = h_i^{-1}\mathbf{r}_i$ являются дуальными к формам σ_i и, следовательно, образуют ортонормированный базис $(\mathbf{s}_1, \dots \mathbf{s}_n)$. Действительно, в силу ортогональности матрицы перехода $\Big(\dfrac{1}{h_j}\dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}\Big)$:

$$\sigma_j(\mathbf{s}_k) = \frac{1}{h_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\,dx_i\Big(\frac{\mathbf{r}_\mathbf{k}}{h_k}\Big) = \frac{1}{h_j h_k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\frac{\partial x_i}{\partial u_k} = \delta_{jk}\,.$$

Вычислим коэффициенты Ламе в случае цилиндрических и сферических координат.

Цилиндрические координаты (r, φ, z).

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\,, \\ y = r\sin\varphi\,, \\ z = z\,. \end{cases}$$

Тогда

$$h_r = h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0} = 1\,,$$

$$h_\varphi = h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi + 0} = r\,,$$

$$h_z = h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1\,.$$

В этом случае ортонормированный базис 1-форм образуют формы dr, $rd\varphi$, dz.

Сферические координаты (r, θ, φ).

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta\,, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta\,, \\ z = r\cos\theta\,. \end{cases}$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Тогда

$$h_r = h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1\,,$$

$$h_\theta = h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r\,,$$

$$h_\varphi = h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + 0} = r\sin\theta\,.$$

В этом случае ортонормированный базис 1-форм образуют формы $dr, rd\theta, r\sin\theta d\varphi$.

11.3.2. Градиент в криволинейных координатах

Пусть $f : \mathbb{R}^n_{\mathbf{x}} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция и $u_1, \ldots u_n$ — криволинейные координаты на $\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$. Тогда

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i}\, du_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i}\, \frac{\partial f}{\partial u_i}\, \sigma_i\,,$$

откуда

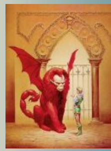
$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i}\, \frac{\partial f}{\partial u_i}\, \mathbf{s}_i\,.$$

В этой формуле производная по u_i от функции f должна пониматься в смысле следующего равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{\partial (f\circ\theta)}{\partial u_i}\circ\psi\,.$$

Например, в градиент в сферических координатах в трехмерном пространстве будет находиться по формуле:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\mathbf{e}_\varphi\,, \qquad (11.2)$$



где для векторов $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ были приняты естественные обозначения $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$, соответственно.

11.3.3. Дивергенция в криволинейных координатах

Рассмотрим непрерывно дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{a}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Его дивергенция определяется равенством

$$d(\boldsymbol{a} \lrcorner \Omega) = \operatorname{div} \boldsymbol{a} \cdot \Omega\,.$$

В криволинейных координатах форма объема имеет вид

$$\Omega = \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n = h_1 \cdot \ldots \cdot h_n \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n\,.$$

Положим

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{s}_i\,,$$

тогда

$$\boldsymbol{a} \lrcorner \Omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i \, \sigma_1 \wedge \ldots \widehat{\sigma_i} \ldots \wedge \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} h_1 \cdot \ldots \widehat{h_i} \ldots \cdot h_n a_i \, du_1 \wedge \ldots \widehat{du_i} \ldots \wedge du_n$$

и

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{a} \lrcorner \Omega) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (h_1 \cdot \ldots \widehat{h_i} \ldots \cdot h_n a_i)}{\partial u_j} \, du_j \wedge du_1 \wedge \ldots \widehat{du_i} \ldots \wedge du_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial (h_1 \cdot \ldots \widehat{h_i} \ldots \cdot h_n a_i)}{\partial u_i} \, du_i \wedge du_1 \wedge \ldots \widehat{du_i} \ldots \wedge du_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (h_1 \cdot \ldots \widehat{h_i} \ldots \cdot h_n a_i)}{\partial u_i} \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n\,. \end{aligned}$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 171 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Следовательно,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{h_1\cdot\ldots\cdot h_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(h_1\cdot\ldots\widehat{h_i}\ldots\cdot h_n a_i)}{\partial u_i}\,.$$

Напомним, что шляпка над одним из сомножителей означает его отсутствие в произведении.

В сферических координатах в трехмерном пространстве получим

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{a} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\Bigl(\frac{\partial(r^2\sin\theta a_r)}{\partial r}+\frac{\partial(r\sin\theta a_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial\varphi}\Bigr)\\ &= \frac{\partial a_r}{\partial r}+\frac{2a_r}{r}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}+\frac{\operatorname{ctg}\theta\cdot a_\theta}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\,. \qquad (11.3)\end{aligned}$$

11.3.4. Оператор Лапласа в криволинейных координатах

Как следствие двух предыдущих пунктов находим

$$\begin{aligned}\triangle f &= \frac{1}{h_1\cdot\ldots\cdot h_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_i}\Bigl(\frac{h_1\cdot\ldots\widehat{h_i}\ldots\cdot h_n}{h_i}\,\frac{\partial f}{\partial u_i}\Bigr)\\ &= \frac{1}{h_1\cdot\ldots\cdot h_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_i}\Bigl(\frac{h_1\cdot\ldots\cdot h_n}{h_i^2}\,\frac{\partial f}{\partial u_i}\Bigr)\,.\end{aligned}$$

Например, в сферических координатах в трехмерном пространстве, см. формулы (11.2), (11.3),

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\,.$$

11.3.5. Ротор в криволинейных координатах

Полагая

$$\boldsymbol{a} = a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + a_3\mathbf{s}_3\,,$$

находим дуальную форму

$$\alpha = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 = a_1h_1\,du_1 + a_2h_2\,du_2 + a_3h_3\,du_3\,,$$

откуда

$$d\alpha = \begin{vmatrix} du_2\wedge du_3 & du_3\wedge du_1 & du_1\wedge du_2 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ a_1h_1 & a_2h_2 & a_3h_3 \end{vmatrix}.$$

Вместе с тем,

$$\boldsymbol{b}\lrcorner\Omega = b_1\sigma_2\wedge\sigma_3 + b_2\sigma_3\wedge\sigma_1 + b_3\sigma_1\wedge\sigma_2 = b_1h_2h_3\,du_2\wedge du_3 + b_2h_1h_3\,du_3\wedge du_1 + b_3h_1h_2\,d_1\wedge du_2\,.$$

Тогда заключаем, что

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial(a_3h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(a_2h_2)}{\partial u_3}\right)\mathbf{s}_1 + \frac{1}{h_1h_3}\left(\frac{\partial(a_1h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(a_3h_3)}{\partial u_1}\right)\mathbf{s}_2 + \frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial(a_2h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(a_1h_1)}{\partial u_2}\right)\mathbf{s}_3\,.$$

12. Понятие о точных и замкнутых формах

12.1. Теорема Пуанкаре

Дифференциальная k-форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$. Она называется *точной*, если существует дифференциальная $(k-1)$-форма α такая, что $\omega = d\alpha$. Форма α называется *первообразной формой* для формы ω.

Как было показано ранее, точная форма всегда замкнута (лемма Пуанкаре).

Теорема 12.1 (Пуанкаре). *Замкнутая форма на звездной области является точной.*

Доказательство. Будем считать, что область является звездной относительно начала координат. Для произвольной k-формы

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} f_{i_1\ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

определим $(k-1)$-форму $J\omega$, полагая

$$J\omega_{\mathbf{x}} = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \int\limits_0^1 t^{k-1} f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})\, dt \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} x_{i_j}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \widehat{dx_{i_j}} \ldots \wedge dx_{i_k}\,.$$

Тогда, если $d\omega = 0$,

$$\begin{aligned} J(d\omega)_{\mathbf{x}} &= J\Big(\sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \Big) \\ &= \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^1 t^k \frac{\partial f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})}{\partial x_i}\, dt \big(x_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\ &\qquad - dx_i \wedge \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x_{i_j}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \widehat{dx_{i_j}} \ldots \wedge dx_{i_k} \big) = 0\,, \end{aligned}$$

т.е.

$$\sum_{i_1<\ldots<i_k}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^1 t^k\frac{\partial f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})}{\partial x_i}\,dt\cdot dx_i\wedge\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}x_{i_j}\,dx_{i_1}\wedge\ldots\widehat{dx_{i_j}}\ldots\wedge dx_{i_k}$$

$$=\sum_{i_1<\ldots<i_k}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^1 t^k\frac{\partial f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})}{\partial x_i}\,dt\cdot x_i\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$$

$$=\sum_{i_1<\ldots<i_k}\int\limits_0^1 t^k\frac{d}{dt}f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})\,dt\cdot dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 175 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Как следствие,

$$
\begin{aligned}
d(J\omega)_{\mathbf{x}} = \sum_{i_1<\ldots<i_k} d\Big(\int\limits_0^1 t^{k-1} f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})\,dt\Big) \wedge \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1} x_{i_j}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \widehat{dx_{i_j}} \ldots \wedge dx_{i_k} \\
+ \sum_{i_1<\ldots<i_k} \int\limits_0^1 t^{k-1} f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})\,dt \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1} dx_{i_j} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \widehat{dx_{i_j}} \ldots \wedge dx_{i_k} \\
= \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^1 t^k \frac{\partial f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})}{\partial x_i}\,dt \cdot dx_i \wedge \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1} x_{i_j}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \widehat{dx_{i_j}} \ldots \wedge dx_{i_k} \\
+ \sum_{i_1<\ldots<i_k} \int\limits_0^1 t^{k-1} f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})\,dt \sum_{j=1}^{k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
= \sum_{i_1<\ldots<i_k} \int\limits_0^1 t^k \frac{d}{dt} f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})\,dt \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} + \sum_{i_1<\ldots<i_k} \int\limits_0^1 t^{k-1} f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})\,dt \cdot k\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
= \sum_{i_1<\ldots<i_k} \int\limits_0^1 \Big[t^k \frac{d}{dt} f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x}) + k t^{k-1} f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})\Big]\,dt \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
= \sum_{i_1<\ldots<i_k} \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\, t^k f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})\,dt \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
= \sum_{i_1<\ldots<i_k} t^k f_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})\Big|_{t=0}^{t=1} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = \omega_{\mathbf{x}}\,,
\end{aligned}
$$

т.е. $\omega = d(J\omega)$. $\square$

Заметим, что в ходе доказательства теоремы была получена формула для построения первообразной формы, т.е. формы $\alpha = J\omega$. Оператор J называют *оператором гомотопии*.

В качестве примера, найдем первообразную формы

$$\omega = xy\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx - (z+yz)\,dx\wedge dy\,.$$

Проверим, во-первых, замкнутость формы ω:

$$\begin{aligned} d\omega &= (ydx + xdy)\wedge dy\wedge dz + dy\wedge dz\wedge dx - (dz + zdy + ydz)\wedge dx\wedge dy \\ &= ydx\wedge dy\wedge dz + dy\wedge dz\wedge dx - dz\wedge dx\wedge dy - ydz\wedge dx\wedge dy = 0\,. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} J\omega &= \int\limits_0^1 t(tx)(ty)dt\cdot(ydz-zdy) + \int\limits_0^1 t(ty)dt\cdot(zdx-xdz) - \int\limits_0^1 t[(tz)+(ty)(tz)]dt\cdot(xdy-ydx) \\ &= \frac{xy}{4}\,(ydz-zdy) + \frac{y}{3}\,(zdx-xdz) - \Big(\frac{z}{3}+\frac{yz}{4}\Big)(xdy-ydx) \\ &= \Big(\frac{2yz}{3}+\frac{y^2z}{4}\Big)\,dx - \Big(\frac{xyz}{2}+\frac{xz}{3}\Big)\,dy + \Big(\frac{xy^2}{4}-\frac{xy}{3}\Big)\,dz\,. \end{aligned}$$

12.2. Уравнения Максвелла

В качестве еще одного приложения теоремы Пуанкаре, рассмотрим с позиций исчисления дифференциальных форм уравнения Максвелла:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho \qquad \text{(закон Гаусса)}\,, \tag{12.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \qquad \text{(отсутствие магнитных зарядов)}\,, \tag{12.2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \qquad \text{(закон Фарадея)}\,, \tag{12.3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \qquad \text{(закон Ампера)}\,. \tag{12.4}$$

Здесь $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ — электрическое поле, $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ — магнитное поле, ρ — плотность заряда и $\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)$ — плотность тока. Уравнения рассматриваются при фиксированном времени t в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (т.е. здесь дивергенция и, конечно, ротор относятся к трехмерному случаю).

Удобно ввести четырехмерное пространство с координатами x, y, z, t. В этом пространстве введем формы

$$\begin{aligned}
E &= E_x dx + E_y dy + E_z dz\,,\\
*E &= \mathbf{E} \lrcorner dx \wedge dy \wedge dz = E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy\,,\\
H &= \mathbf{H} \lrcorner dx \wedge dy \wedge dz = H_x dy \wedge dz + H_y dz \wedge dx + H_z dx \wedge dy\,,\\
*H &= H_x dx + H_y dy + H_z dz\,,\\
j &= \mathbf{j} \lrcorner dx \wedge dy \wedge dz = j_x dy \wedge dz + j_y dz \wedge dx + j_z dx \wedge dy\,.
\end{aligned}$$

Тогда уравнения (12.2), (12.3) примут вид

$$d(E \wedge dt + H) = 0\,, \tag{12.5}$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 178 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

а уравнения (12.1), (12.4)

$$d(*H \wedge dt - *E) = j \wedge dt - \rho\, dx \wedge dy \wedge dz\,. \tag{12.6}$$

Чтобы убедиться в этом, положим $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$ и обозначим дифференциал по пространственным переменным через ∂. Тогда

$$dE = \partial E + dt \wedge \left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\, dx + \dots\right),$$

откуда

$$d(E \wedge dt) = dE \wedge dt = \partial E \wedge dt = (\operatorname{rot} \mathbf{E} \lrcorner \Omega) \wedge dt\,.$$

Далее,

$$dH = \partial H + dt \wedge \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \lrcorner \Omega\right) = \operatorname{div} \mathbf{H} \cdot \Omega + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \lrcorner \Omega\right) \wedge dt\,.$$

Складывая с предыдущим, получаем

$$d(E \wedge dt + H) = \operatorname{div} \mathbf{H} \cdot \Omega + \left[\left(\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) \lrcorner \Omega\right] \wedge dt\,.$$

Аналогично,

$$d(*H \wedge dt - *E) = -\operatorname{div} \mathbf{E} \cdot \Omega + \left[\left(\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \lrcorner \Omega\right] \wedge dt\,.$$

Уравнениями Максвелла теперь приводят к формулам (12.5), (12.6).

Заметим, что в силу уравнения (12.6)

$$d(j \wedge dt - \rho \cdot \Omega) = 0\,,$$

или в компонентах

$$\frac{\partial j_x}{\partial x}\, dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt + \frac{\partial j_y}{\partial y}\, dy \wedge dz \wedge dx \wedge dt + \frac{\partial j_z}{\partial z}\, dz \wedge dx \wedge dy \wedge dt - \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz = 0\,,$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 179 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

что в векторных обозначениях дает (ввиду $dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz = -dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$)

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,. \tag{12.7}$$

Это так называемое *уравнение неразрывности*.

Заметим, теперь, что в силу теоремы Пуанкаре, форма $E \wedge dt + H$ является точной, т.е. существует первообразная 1-форма:

$$E \wedge dt + H = d\alpha\,, \qquad \alpha = A_x dx + A_y dy + A_z dz - \varphi dt + df\,,$$

где f — произвольная дифференцируемая функция (форма α определена неоднозначно). Вектор $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ называется векторным потенциалом, а функция φ — скалярным потенциалом. Они определены неоднозначно. Фиксируя f, положим

$$\alpha = G_x dx + G_y dy + G_z dz - g dt\,.$$

Разумеется, вектор $\mathbf{G} = (G_x, G_y, G_z)$ является векторным потенциалом, а функция g — скалярным. Тогда

$$\begin{aligned} d\alpha &= \operatorname{rot} \mathbf{G} \lrcorner \Omega + \Big(\frac{\partial G_x}{\partial t}\, dt \wedge dx + \frac{\partial G_y}{\partial t}\, dt \wedge dy + \frac{\partial G_z}{\partial t}\, dt \wedge dz\Big) - \Big(\frac{\partial g}{\partial x}\, dx + \frac{\partial g}{\partial y}\, dy + \frac{\partial g}{\partial z}\, dz + \frac{\partial g}{\partial t}\, dt\Big) \wedge dt \\ &= \operatorname{rot} \mathbf{G} \lrcorner \Omega - \Big[\Big(\frac{\partial G_x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x}\Big) dx + \Big(\frac{\partial G_y}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\Big) dy + \Big(\frac{\partial G_z}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial z}\Big) dz\Big] \wedge dt\,, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} - \operatorname{grad} g\,, \\ \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{G}\,. \end{aligned}$$

Прежде чем воспользоваться оставшейся частью уравнений Максвелла (т.е. уравнением (12.6)), удобно фиксировать калибровочную функцию f так, чтобы

$$\operatorname{div} \mathbf{G} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Страница 180 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Последнее условие эквивалентно следующему уравнению для f:

$$\triangle f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\operatorname{div} \mathbf{A} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,.$$

Это уравнение называется *волновым уравнением*.

Элементарное вычисление дифференциала формы $*H \wedge dt - *E$ с учетом калибровки приводит к равенству

$$d(*H \wedge dt - *E) = \Big(\frac{\partial^2 G_x}{\partial t^2} - \triangle G_x\Big) dy \wedge dz \wedge dt + \Big(\frac{\partial^2 G_y}{\partial t^2} - \triangle G_y\Big) dz \wedge dx \wedge dt$$
$$+ \Big(\frac{\partial^2 G_z}{\partial t^2} - \triangle G_z\Big) dx \wedge dy \wedge dt - \Big(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \triangle g\Big) dx \wedge dy \wedge dz\,.$$

Нам будет проще показать это, воспользовавшись операциями векторного анализа:

$$\operatorname{div}\Big(-\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} - \operatorname{grad} g\Big) = -\frac{\partial(\operatorname{div}\mathbf{G})}{\partial t} - \operatorname{div}\operatorname{grad} g = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \triangle g$$

и

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{G} + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \operatorname{grad} g\Big) = \nabla(\operatorname{div}\mathbf{G}) - \triangle \mathbf{G} + \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} - \triangle \mathbf{G}\,.$$

Остается выписать полученные волновые уравнения на потенциалы:

$$\triangle g - \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -\rho\,,$$
$$\triangle \mathbf{G} - \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = -\mathbf{j}\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 181 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

13. Поверхностные интегралы

13.1. k-мерный объем k-мерного параллелепипеда в n-мерном пространстве

Рассмотрим параллелепипед G, построенный на векторах $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_k$ в пространстве $\mathbb{R}^n \quad (k \leqslant n)$. По определению, это множество точек $\mathbf{x}$ вида

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} t_i \mathbf{a}_i \,, \qquad t_i \in [0,1] \,, \quad i = 1, \dots k \,.$$

Считая, что векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_k$ являются линейно независимыми, мы можем построить линейное k-мерное пространство (k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$) с базисом из этих векторов. Нас интересует объем параллелепипеда G относительно этого подпространства — т.е. k-мерный объем. Мы будем обозначать его через $S(G)$ в отличии от объема $V(D)$ n-мерного параллелепипеда D.

Теорема 13.1. *Пусть A — матрица, составленная из векторов-столбцов $\boldsymbol{a}_1, \dots \boldsymbol{a}_k$. Тогда*

$$S(G) = \sqrt{\det(A^t A)} \,,$$

где A^t — транспонированная матрица.

Доказательство. Пусть $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_k$ — ортонормированный базис в подпространстве, натянутом на векторы $\boldsymbol{a}_1, \dots \boldsymbol{a}_k$. Дополним его до ортонормированного базиса $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n$ в $\mathbb{R}^n$. Согласно теореме Фубини

$$S(G) = V(D) \,,$$

где D — параллелепипед, построенный на векторах $\boldsymbol{a}_1, \dots \boldsymbol{a}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots \mathbf{v}_n$.

Определим линейное отображение θ, полагая $\mathbf{e}_i = \theta(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, \dots n$, где $\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n$ — исходный (стандартный) ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что отображение θ

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

является ортогональным, в частности $|\det\theta| = 1$. Пусть $\boldsymbol{b}_i = \theta(\boldsymbol{a}_i)$, $i = 1, \dots k$. Тогда

$$S(G) = |\boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_k \wedge \mathbf{v}_{k+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_n| = |\det\theta| \cdot |\boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_k \wedge \mathbf{v}_{k+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_n|$$
$$= |\theta(\boldsymbol{a}_1) \wedge \ldots \wedge \theta(\boldsymbol{a}_k) \wedge \theta(\mathbf{v}_{k+1}) \wedge \ldots \wedge \theta(\mathbf{v}_n)| = |\boldsymbol{b}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{b}_k \wedge \mathbf{e}_{k+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_n| = S(H),$$

где H — параллелепипед, построенный на векторах $\boldsymbol{b}_1, \dots \boldsymbol{b}_k$. Векторы $\boldsymbol{b}_i = \theta(\boldsymbol{a}_i)$, $i = 1, \dots k$ лежат в подпространстве, натянутом на векторы $\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_k$. Обозначим через B матрицу порядка k, составленную из векторов-столбцов $\boldsymbol{b}_i$ относительно упомянутого подпространства. Тогда

$$S(G) = |\det B| = \sqrt{(\det B)^2} = \sqrt{\det B^t \det B} = \sqrt{\det(B^t B)}.$$

Заметим, далее, что

$$B^t B = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{b}_1 | \boldsymbol{b}_1 \rangle & \ldots & \langle \boldsymbol{b}_1 | \boldsymbol{b}_k \rangle \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{b}_k | \boldsymbol{b}_1 \rangle & \ldots & \langle \boldsymbol{b}_k | \boldsymbol{b}_k \rangle \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\det(B^t B) = \det(\langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{b}_j \rangle) = \det(\langle \theta(\boldsymbol{a}_i) | \theta(\boldsymbol{a}_j) \rangle) = \det(\langle \boldsymbol{a}_i | \boldsymbol{a}_j \rangle) = \det(A^t A),$$

поскольку ортогональное преобразование θ сохраняет скалярное произведение векторов. $\square$

Теорема 13.2 (Бине–Коши). *Пусть A — матрица $k \times n$ и B — матрица $n \times k$. Тогда*

$$\det(AB) = \sum_{i_1 < \ldots < i_n} A^{i_1 \ldots i_k} B_{i_1 \ldots i_k},$$

где $A^{i_1 \ldots i_k}$ — минор матрицы A при выборе столбцов с номерами $i_1, \dots i_k$, а $B_{i_1 \ldots i_k}$ — минор матрицы B при выборе строк с номерами $i_1, \dots i_k$.

Доказательство. Обозначим i-ю строку матрицы A через $\boldsymbol{a}_i$ и j-й столбец матрицы B через $\boldsymbol{b}_j$. Тогда

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{a}_1 | \boldsymbol{b}_1 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{a}_1 | \boldsymbol{b}_k \rangle \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{a}_k | \boldsymbol{b}_1 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{a}_k | \boldsymbol{b}_k \rangle \end{vmatrix} .$$

Как видим, эта величина является полилинейной антисимметричной формой относительно векторов $\boldsymbol{b}_1, \dots \boldsymbol{b}_k$. Любая такая форма разлагается по базису форм

$$\det(AB) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} c_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} (\boldsymbol{b}_1, \dots \boldsymbol{b}_k) .$$

Коэффициенты разложения легко вычислить, полагая $\boldsymbol{b}_1 = \mathbf{e}_{j_1}, \dots \boldsymbol{b}_k = \mathbf{e}_{j_k}$, где $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$:

$$c_{j_1 \ldots j_k} = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{a}_1 | \mathbf{e}_{j_1} \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{a}_1 | \mathbf{e}_{j_k} \rangle \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{a}_k | \mathbf{e}_{j_1} \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{a}_k | \mathbf{e}_{j_k} \rangle \end{vmatrix} = A^{j_1 \ldots j_k} .$$

Остается заметить, что

$$B_{i_1 \ldots i_k} = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} (\boldsymbol{b}_1, \dots \boldsymbol{b}_k) .$$

$\square$

Следствие 13.3. *Пусть A — матрица $n \times k$, составленная из векторов–столбцов $\boldsymbol{a}_1, \dots \boldsymbol{a}_k$. Тогда объем $S(G)$ k-мерного параллелепипеда G, построенного на векторах $\boldsymbol{a}_1, \dots \boldsymbol{a}_k$, равен*

$$S(G) = \sqrt{\sum_{i_1 < \ldots < i_k} (A_{i_1 \ldots i_k})^2} .$$

Доказательство. Вытекает из двух предыдущих теорем с учетом равенства $(A^t)^{i_1 \ldots i_k} = A_{i_1 \ldots i_k}$. $\square$

В качестве примера вычислим площадь параллелограмма G, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = (1, 2, -1, 3)$ и $\boldsymbol{b} = (2, -2, 1, -1)$.

Первый способ.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$A^t A = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}, \qquad \det(A^t A) = 114, \qquad S(G) = \sqrt{114}.$$

Второй способ.

$$S(G)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}^2$$
$$= 36 + 9 + 49 + 0 + 16 + 4 = 114,$$

откуда опять $S(G) = \sqrt{114}$.

13.2. Площадь поверхности

Положим $J = [0, 1]$. Тогда J^k — единичный куб в $\mathbb{R}^k$ (k-мерный куб).

Определение 13.4. Множество G в $\mathbb{R}^n$ называется *k-мерной клеткой*, если существует взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение $\theta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ $(k \leqslant n)$, определенное в окрестности J^k такое, что $G = \theta(J^k)$ и $\forall \mathbf{u} \in J^k : \ \operatorname{rank} \theta'_{\mathbf{u}} = k$. Ограничение θ на J^k называется *параметризацией* клетки G или *сингулярным k-мерным кубом* в $\mathbb{R}^n$.

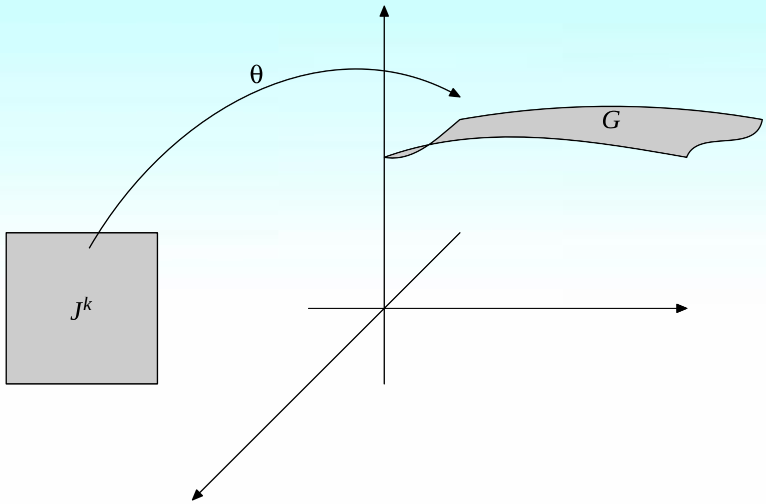


Рис. 28: Клетка

Многомерные клетки являются примерами простейших многомерных поверхностей. Определим площадь поверхности клетки. В отличии от определения длины дуги кривой площадь поверхности невозможно определить как предел (точную верхнюю грань) сумм площадей (объемов) вписанных *полиэдров* (это многомерный аналог одномерного отрезка и двумерного треугольника) — оказывается, что такого предела не существует. Причину этого нетрудно понять на примере какой-либо не плоской двумерной поверхности в трехмерном пространстве: вписанные треугольники могут оказаться почти перпендикулярными к поверхности и, как следствие, сильно искажать размеры соответствующего куска поверхности. Создавшееся затруднение можно преодолеть, если заметить, что при определении длины кривой мы могли бы не вписывать ломаную, а описывать ее около

кривой. Обобщение этого приема оказывается успешным и в случае определения площади поверхности. Однако в действительности мы откажемся от аккуратного воплощения этой процедуры и воспользуемся ею только в качестве наводящего соображения к определению площади поверхности.

Пусть λ — разбиение куба J^k на кубы и A — произвольный куб этого разбиения с образующими $h\mathbf{e}_1, \ldots h\mathbf{e}_k$ в вершине $\mathbf{u}$. В силу дифференцируемости θ

$$\theta(\mathbf{u} + h\mathbf{e}_i) - \theta(\mathbf{u}) = \theta'_{\mathbf{u}}(h\mathbf{e}_i) + o(|\lambda|) = \frac{\partial\theta(\mathbf{u})}{\partial u_i}\, h + o(h)\,,$$

следовательно, объем параллелепипеда, построенного на векторах

$$\frac{\partial\theta(\mathbf{u})}{\partial u_1}\, h\,, \ldots \frac{\partial\theta(\mathbf{u})}{\partial u_k}\, h$$

должен служить хорошей аппроксимацией для площади поверхности куска $\theta(A)$. Матрица, образованная этими векторами–столбцами, равна с точностью до множителя h матрице Якоби: $h\theta'_{\mathbf{u}}$, тогда в силу теоремы 13.1

$$S(\theta(A)) \approx \sqrt{\det[h^2(\theta'_{\mathbf{u}})^t\theta'_{\mathbf{u}}]} = \sqrt{\det[(\theta'_{\mathbf{u}})^t\theta'_{\mathbf{u}}]} \cdot h^k = \sqrt{\det[(\theta'_{\mathbf{u}})^t\theta'_{\mathbf{u}}]} \cdot V(A)\,.$$

Суммируя по всем кубам разбиения, получим сумму Римана для интеграла

$$S(G) = \int\limits_{J^k} \sqrt{\det[(\theta')^t\theta']}\,.$$

Теорема 13.5. *Пусть G — k-мерная клетка в $\mathbb{R}^n$ и $f:\ G \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, определенная на G. Пусть θ и φ — две параметризации клетки G. Тогда*

$$\int\limits_{J^k} f\circ\theta \cdot \sqrt{\det[(\theta')^t\theta']} = \int\limits_{J^k} f\circ\varphi \cdot \sqrt{\det[(\varphi')^t\varphi']}\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Доказательство. Пусть $\theta(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v})$. Линейные отображения $\theta'_{\mathbf{u}}$ и $\varphi'_{\mathbf{v}}$, оба ранга k, отображают пространство $\mathbb{R}^k$ на одно и то же линейное подпространство L размерности k в $\mathbb{R}^n$. Действительно, в силу дифференцируемости θ и φ

$$\theta(\mathbf{u}+t\mathbf{h}) - \theta(\mathbf{u}) \underset{t\to 0}{=} t\theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}) + o(t)\,,$$

$$\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{k}) - \varphi(\mathbf{v}) \underset{|\mathbf{k}|\to 0}{=} \varphi'_{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) + o(|\mathbf{k}|)\,.$$

Выберем вектор $\mathbf{k} = \mathbf{k}(t)$ так, чтобы $\varphi(\mathbf{v}+\mathbf{k}) = \theta(\mathbf{u}+t\mathbf{h})$ (такой вектор существует и определен однозначно в силу взаимной однозначности отображения φ). По теореме о неявной функции, см. приложение C, делаем заключение о непрерывности функции $\mathbf{k}(t)$ в нуле, при этом $\mathbf{k}(0) = \mathbf{0}$. Более того, ввиду максимальности ранга $\varphi'_{\mathbf{v}}$ (с учетом $k \leqslant n$)

$$|\varphi'_{\mathbf{v}}(\mathbf{k})| \geqslant C|\mathbf{k}|\,,$$

откуда $|\mathbf{k}(t)| = O(t)$ при $t \to 0$ и, следовательно,

$$\theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}) = \lim_{t\to 0} \varphi'_{\mathbf{v}}\left(\frac{\mathbf{k}(t)}{t}\right).$$

Это означает, что вектор $\theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{h})$ лежит в пространстве значений линейного отображения $\varphi'_{\mathbf{v}}$ и аналогичное заключение можно сделать, меняя ролями θ и φ. Подпространство L, образованное векторами $\theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{h})$ при $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^k$, называется касательным пространством (касательной плоскостью) к поверхности G в точке $\mathbf{x} = \theta(\mathbf{u})$, а векторы из L называются *касательными векторами* к G в точке $\mathbf{x}$.

Итак, линейные отображения $\theta'_{\mathbf{u}}, \varphi'_{\mathbf{v}}$ взаимно однозначно отображают пространство $\mathbb{R}^k$ на касательное пространство L. Как следствие, взаимно однозначное отображение $T = \theta^{-1}\circ\varphi :\ J^k \to J^k$ является непрерывно дифференцируемым на J^k, причем $\det T' \neq 0$. В силу $\varphi = \theta \circ T$, получим

$$(\varphi')^t\varphi' = ((\theta\circ T)')^t(\theta\circ T)' = ((\theta'\circ T)\cdot T')^t\cdot\theta'\circ T\cdot T' = (T')^t\cdot(\theta'\circ T)^t\cdot\theta'\circ T\cdot T'\,,$$

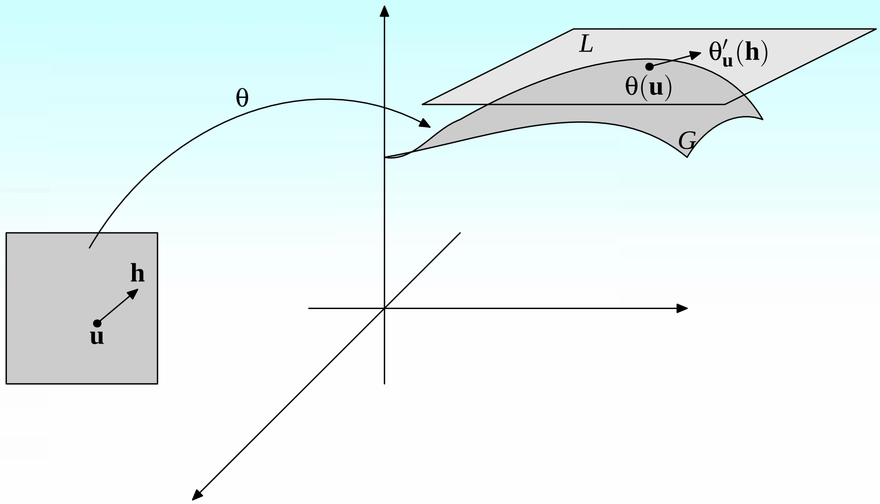


Рис. 29: Касательная плоскость

откуда

$$\det[(\varphi')^t\varphi'] = \det(T')^t \cdot \det[(\theta' \circ T)^t \cdot \theta' \circ T] \cdot \det T' = \det[(\theta' \circ T) \cdot \theta' \circ T] \cdot \det^2 T' \,,$$

т.е.

$$\sqrt{\det[(\varphi')^t\varphi']} = \sqrt{\det[(\theta' \circ T) \cdot \theta' \circ T]} \cdot |\det T'| \,, \tag{13.1}$$

и, следовательно, по теореме о замене переменной в кратном интеграле,

$$\int\limits_{J^k} f \circ \theta \cdot \sqrt{\det[(\theta')^t\theta']} = \int\limits_{J^k} f \circ \theta \circ T \cdot \sqrt{\det[(\theta' \circ T)^t\varphi' \circ T]} \cdot |\det T'| = \int\limits_{J^k} f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det[(\varphi')^t\varphi']} \,.$$

$\square$

Доказанная теорема (т.е. независимость интеграла от параметризации клетки) является основанием для следующего определения.

Определение 13.6. Пусть G — клетка и θ — ее параметризация. Интеграл

$$\int\limits_{J^k} f\circ\theta\cdot\sqrt{\det[(\theta')^t\theta']}$$

называется *поверхностным интегралом 1 рода* от функции $f:\ G\to\mathbb{R}$ и обозначается через

$$\int\limits_G f \quad \text{или} \quad \int\limits_G f\,dS\,.$$

Интеграл

$$S(G)=\int\limits_G 1=\int\limits_G dS$$

называется *площадью поверхности* G.

Сделаем несколько элементарных замечаний. Во-первых, понятие параметризации θ клетки G легко расширить до случая, когда θ определено на брусе $D\in\mathbb{R}^k$ (с сохранением других свойств отображения θ). При этом

$$\int\limits_G f=\int\limits_D f\circ\theta\cdot\sqrt{\det[(\theta')^t\theta']}\,.$$

Это немедленно вытекает из теоремы о замене переменных в кратном интеграле, поскольку брус D может быть линейным преобразованием переведен в куб J^k. Более того, понятие поверхностного интеграла 1-го рода легко расширить на такие разрывные функции f, для которых суперпозиция $f\circ\theta$ (при выборе разных параметризаций θ), является

интегрируемой функцией. Это означает, что в качестве области интегрирования D может фигурировать не только брус, но и более сложные жордановы области в $\mathbb{R}^k$. Далее, понятие площади поверхности и поверхностного интеграла 1-го рода можно распространить по аддитивности на кусочно–гладкие поверхности, состоящие из конечного числа k-мерных клеток, пересекающихся лишь по клеткам размерности не больше $(k-\ 1)$. Таким образом, соображения аддитивности и формула замены переменных в кратном интеграле позволяют охватить различные ситуации, возникающие в приложениях. Несколько более подробное обсуждение этих вопросов будет сделано позже при знакомстве с понятием ориентируемого многообразия.

Примеры. 1) Рассмотрим поверхность G, которая задана как график функции $z = f(x,y)$, определенной на области $D \subset \mathbb{R}^2$. В этом случае параметризация θ поверхности G может быть описана равенствами

$$\begin{cases} x = x\,, \\ y = y\,, \\ z = f(x,y)\,, \end{cases}$$

откуда

$$\theta' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}, \qquad \det[(\theta')^t\theta'] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$$

и, следовательно,

$$S(G) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy\,.$$

Аналогично, в случае $(n-1)$-мерной поверхности G в $\mathbb{R}^n$, заданной уравнением

$$x_n = f(x_1, \ldots x_{n-1})\,,$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 191 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

получим

$$S(G)=\int\limits_D\!\!\ldots\!\int\sqrt{1+\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)^2+\ldots+\Big(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\Big)^2}\,dx_1\ldots dx_{n-1}=\int\limits_D\sqrt{1+|\mathrm{grad}\,f|^2}\,.$$

2) Пусть поверхность G определена параметризацией

$$\theta:\qquad \begin{cases} x=x(u,v)\,,\\ y=y(u,v)\,,\\ z=z(u,v)\,.\end{cases}$$

где $(u,v)\in D$. Тогда

$$\theta'=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix},\qquad \det[(\theta')^t\theta']=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}^2$$

и, следовательно,

$$S(G)=\iint\limits_D\sqrt{\Big(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big)^2+\Big(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\Big)^2+\Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\Big)^2}\,dudv\,.$$

3) Более общо, пусть G — двумерная поверхность (клетка) в $\mathbb{R}^n$ с параметризацией

$$\theta:\qquad \begin{cases} x_1=x_1(u,v)\,,\\ \vdots\\ x_n=x_n(u,v)\,,\end{cases}$$

где $(u, v) \in D$. Тогда

$$\theta' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u} & \frac{\partial x_n}{\partial v} \end{pmatrix}, \qquad (\theta')^t \theta' = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

где

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \right)^2, \qquad F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial v}, \qquad G = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial v} \right)^2.$$

Тогда

$$S(G) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv\,.$$

4) Вычислим площадь поверхности единичной $(n-1)$-мерной сферы $\mathcal{S}_1^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.[14] В сферических координатах

$$\Theta : \quad \begin{cases} x_1 = \cos\theta_1\,, \\ x_2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2\,, \\ \vdots \\ x_{n-1} = \sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2} \cos\varphi\,, \\ x_n = \sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2} \sin\varphi\,, \end{cases}$$

где $\theta_i \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\Theta' = \begin{pmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cos\theta_1 \cos\theta_2 & -\sin\theta_1 \sin\theta_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \cos\theta_1 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi & \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi & \ldots & -\sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi \\ \cos\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi & \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi & \ldots & \sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

[14] сфера не является клеткой, но ее можно представить как объединение клеток

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 193 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

В этой матрице столбцы ортогональны между собой, а длина каждого вектора столбца равна, соответственно,

$$1, \quad \sin\theta_1, \quad \sin\theta_1 \sin\theta_2, \ \ldots \sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2}\,,$$

откуда

$$\sqrt{\det\left[(\Theta')^t\Theta\right]} = \sin^{n-2}\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2}$$

и

$$S(\mathcal{S}_1^{n-1}) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-2}\theta_1\, d\theta_1 \ldots \int\limits_0^{\pi} \sin\theta_{n-2}\, d\theta_{n-2} = nV(\mathcal{B}_1^n)\,,$$

где $V(\mathcal{B}_1^n)$ — объем единичного шара.

13.3. Интегрирование дифференциальных форм

Прежде всего определим интеграл от дифференциальной формы объема, т.е. от n-формы ω в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Выбор базиса определяет ориентацию пространства $\mathbb{R}^n$. Эту ориентацию можно отождествить с выбором формы объема

$$\Omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\,,$$

где формы $dx_1, \ldots dx_n$ дуальны соответствующим векторам базиса $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$. В силу одномерности пространства форм объема, форма ω пропорциональна (в каждой точке) базисной форме Ω, т.е.

$$\omega = f\Omega\,,$$

где f — некоторая функция $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Считая, что f определена и интегрируема на брусе D, полагаем

$$\int\limits_D \omega \overset{\text{Опр.}}{=} \int\limits_D f\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 194 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Так, например, в $\mathbb{R}^3$

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\wedge dy\wedge dz = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz\,.$$

Заметим, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 13.7. *Пусть* θ *— непрерывно дифференцируемое отображение* $\mathbb{R}^n_{\mathbf{u}} \to \mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$ *и* ω *— дифференциальная форма объема на* $\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$: $\omega = f\Omega_{\mathbf{x}}\,,\ \Omega_{\mathbf{x}} = dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$. *Тогда*

$$\theta^*\omega = f\circ\theta\cdot\det\theta'\cdot\Omega_{\mathbf{u}}\,,\quad \Omega_{\mathbf{u}} = du_1\wedge\ldots\wedge du_n\,.$$

Доказательство. Прежде всего напомним, что если A — линейное преобразование в $\mathbb{R}^n$, то

$$A(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij}\mathbf{e}_i\,,\qquad A(\mathbf{e}_1)\wedge\ldots\wedge A(\mathbf{e}_n) = \det A\cdot\mathbf{e}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{e}_n\,.$$

Но, по определению,

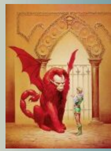
$$\theta^*\omega = f\circ\theta\cdot\theta^*(dx_1)\wedge\ldots\wedge\theta^*(dx_n)\,,$$

при этом

$$\theta^*(dx_j) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial u_i}\,du_i = A(du_j)\,.$$

Последнее равенство следует рассматривать как определение линейного отображения A в векторном пространстве 1-форм; поскольку суммирование совершается по индексу строки матрицы A, то матрица A совпадает с транспонированной матрицей к матрице Якоби:

$$A = (\theta')^t\,,\qquad \theta' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n}\,. \end{pmatrix}\,.$$



Согласно упомянутому выше свойству внешнего произведения

$$A(du_1) \wedge \ldots \wedge A(du_n) = \det A \cdot du_1 \wedge \ldots \wedge du_n = \det \theta' \cdot du_1 \wedge \ldots \wedge du_n\,.$$

$\square$

Следствие 13.8. *В условиях предыдущей теоремы при* $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$*:*

$$(\theta^*\omega)_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n) = \omega_{\theta(\mathbf{u})}(\theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1), \ldots \theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_n))\,.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что значение формы $du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$ на векторах $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$ равно определителю этих векторов:

$$du_1 \wedge \ldots \wedge du_n(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_n\,,$$

а по свойству внешнего произведения

$$\theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1) \wedge \ldots \wedge \theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_n) = \det \theta'_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_n\,.$$

$\square$

Доказанная теорема 13.7 имеет еще одно следствие. Если θ — непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям теоремы 5.9 о замене переменной, то

$$\int\limits_D \theta^*\omega = \pm \int\limits_{\theta(D)} \omega\,.$$

Знак в формуле зависит от знака определителя $\det \theta'$:

$$\int\limits_D \theta^*\omega = \int\limits_D f \circ \theta \cdot \det \theta' = \pm \int\limits_D f \circ \theta \cdot |\det \theta'| = \pm \int\limits_{\theta(D)} f = \pm \int\limits_{\theta(D)} \omega\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 196 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Это означает, что понятие интеграла от формы зависит от ориентации пространства: при изменении ориентации интеграл меняет знак. Подчеркнем, однако, что по абсолютной величине интеграл от формы не зависит от выбора ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$. Переход к другому ортонормированному базису осуществляется ортогональным преобразованием θ, при этом $\det\theta = \pm 1$, а в силу линейности θ имеем $\theta' = \theta$. Это доказывает корректность нашего определения.

Пусть теперь G — k-мерная клетка в $\mathbb{R}^n$ с параметризацией $\theta: \ D \to G$, т.е. $G = \theta(D)$. Пусть, далее, ω — k-форма, определенная в окрестности клетки G. Положим по определению

$$\int\limits_G \omega \overset{\text{Опр.}}{=} \int\limits_D \theta^*\omega\,.$$

Следует обратить внимание на то, что форма $\theta^*\omega$ является формой объема в $\mathbb{R}^k$ и интеграл в этом случае был определен выше. Если ω — моном: $\omega = f\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$, то согласно теореме 13.7

$$\theta^*\omega = f\circ\theta\cdot\frac{\partial(x_{i_1},\ldots x_{i_k})}{\partial(u_1,\ldots u_k)}\cdot du_1\wedge\ldots\wedge du_k\,,$$

где $\frac{\partial(x_{i_1},\ldots x_{i_k})}{\partial(u_1,\ldots u_k)}$ — минор матрицы Якоби

$$\theta' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial u_k} \end{pmatrix},$$

отвечающий выбору строк с номерами $i_1,\ldots i_k$.

Для выяснения геометрического смысла интеграла заметим , что в силу определения определителя линейного преобразования

$$dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}(\theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1),\ldots\theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_k)) = \frac{\partial(x_{i_1},\ldots x_{i_k})}{\partial(u_1,\ldots u_k)}\cdot\mathbf{v}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{v}_k\,.$$

Подставим в эту формулу в качестве векторов $\mathbf{v}_i$ векторы $\mathbf{s}_1, \ldots \mathbf{s}_k$ ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^k_{\mathbf{u}}$, дуального к формам $du_1, \ldots du_k$, при этом $\mathbf{s}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{s}_k = 1$, тогда

$$\int\limits_G f\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = \int\limits_D f(\theta(\mathbf{u})) \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}(\theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{s}_1), \ldots \theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{s}_k))\, du_1 \ldots du_k$$

и в общем случае, ввиду равенств $\theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{s}_j) = \frac{\partial\theta(\mathbf{u})}{\partial u_j}$,

$$\int\limits_G \omega = \int\limits_D \omega_{\theta(\mathbf{u})}(\theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{s}_1), \ldots \theta'_{\mathbf{u}}(\mathbf{s}_k))\, du_1 \ldots du_k = \int\limits_D \omega_{\theta(\mathbf{u})}\left(\frac{\partial\theta(\mathbf{u})}{\partial u_1}, \ldots \frac{\partial\theta(\mathbf{u})}{\partial u_k}\right) du_1 \ldots du_k\,. \tag{13.2}$$

Здесь справа стоит многократный интеграл от функции. Векторы $\frac{\partial\theta(\mathbf{u})}{\partial u_1}, \ldots \frac{\partial\theta(\mathbf{u})}{\partial u_k}$ являются касательными векторами к поверхности G в направлении координатных кривых локальных координат $u_1, \ldots u_k$, т.е. при движении точки $\theta(\mathbf{u})$ по поверхности G, когда меняется лишь одна из координат u_i.

Пример. Пусть клетка G имеет параметризацию $\theta : \ D \to \mathbb{R}^3\,, \quad D = [0,1] \times [0,1]$, определенную равенствами

$$x = u + v\,, \quad y = u - v\,, \quad z = uv\,.$$

Пусть $\omega = x\, dy \wedge dz + y\, dx \wedge dz$. Найдем интеграл $\int_G \omega$.

Первый способ.

$$\begin{aligned}\theta^*\omega &= (u+v)(du - dv) \wedge (v\, du + u\, dv) + (u - v)(du + dv) \wedge (v\, du + u\, dv)\\ &= (u+v)(u\, du \wedge dv - v\, dv \wedge du) + (u-v)(u\, du \wedge dv + v\, dv \wedge du)\\ &= (u+v)^2\, du \wedge dv + (u-v)^2\, du \wedge dv = 2(u^2+v^2)\, du \wedge dv\,.\end{aligned}$$

Тогда

$$\int\limits_G \omega = 2\int\limits_D (u^2+v^2)\, du \wedge dv = 2\int\limits_0^1 u^2\, du \int\limits_0^1 dv + 2\int\limits_0^1 du \int\limits_0^1 v^2\, dv = \frac{4}{3}\,.$$

Второй способ.

$$\theta' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ v & u \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$dy \wedge dz\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ u \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ v & u \end{vmatrix} = u + v$$

и

$$dx \wedge dz\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ u \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{vmatrix} = u - v\,.$$

Поэтому опять

$$\int\limits_G \omega = \int\limits_D [(u+v)(u+v) + (u-v)(u-v)]\,dudv = \frac{4}{3}\,.$$

Второй способ будет выигрышнее на формах больших порядков.

13.4. Форма площади

Пусть G — k-мерная клетка в $\mathbb{R}^n$ с параметризацией $\theta:\ D \to G$. Напомним, что площадь поверхности G находится по формуле

$$S(G) = \int\limits_D \sqrt{\det[(\theta')^t\theta']}\,.$$

Положим $N = \sqrt{\det[(\theta')^t\theta']}$. Тогда по теореме Бине-Коши, см. 13.3,

$$N = \frac{1}{N}\sum_{i_1 < \ldots < i_k} |\theta'_{i_1,\ldots i_k}|^2\,,$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 199 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

где

$$|\theta'_{i_1,\dots i_k}| = \frac{\partial(x_{i_1},\dots x_{i_k})}{\partial(u_1,\dots u_k)}\,.$$

В точке $\mathbf{x} = \theta(\mathbf{u})$ положим

$$n_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N(\mathbf{u})}\cdot\frac{\partial(x_{i_1},\dots x_{i_k})}{\partial(u_1,\dots u_k)}\,.$$

Определение этих функций не зависит от выбора параметризации клетки G при условии сохранения ориентации клетки. Именно, если φ — другая параметризация, $\varphi = \theta\circ T$ и $\det T' > 0$, то при $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{v})$ значение той же функции будет определятся равенством

$$n_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x}) = \frac{1}{K(\mathbf{v})}\cdot\frac{\partial(x_{i_1},\dots x_{i_k})}{\partial(v_1,\dots v_k)}\,,\qquad K = \sqrt{\det[(\varphi')^t\varphi']}\,.$$

Действительно, как мы видели раньше, см. (13.1),

$$K = N\circ T\cdot|\det T'|\,,\quad \text{т.е.}\quad K(\mathbf{v}) = N(\mathbf{u})\cdot\det T'_{\mathbf{v}}\,,$$

а согласно правилу дифференцирования сложной функции и теореме умножения определителей

$$\frac{\partial(x_{i_1},\dots x_{i_k})}{\partial(v_1,\dots v_k)} = \frac{\partial(x_{i_1},\dots x_{i_k})}{\partial(u_1,\dots u_k)}\cdot\frac{\partial(u_1,\dots u_k)}{\partial(v_1,\dots v_k)} = \frac{\partial(x_{i_1},\dots x_{i_k})}{\partial(u_1,\dots u_k)}\cdot\det T'_{\mathbf{v}}\,.$$

Это позволяет нам определить k-форму в $\mathbb{R}^n$

$$dS \overset{\text{Опр.}}{=} \sum_{i_1<\dots<i_k} n_{i_1\dots i_k}dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}\,.$$

Эта форма и называется *формой площади* поверхности G, поскольку согласно определения интеграла от формы

$$\int\limits_G dS = \int\limits_D \sum_{i_1<\dots<i_k} n_{i_1\dots i_k}\cdot\frac{\partial(x_{i_1},\dots x_{i_k})}{\partial(u_1,\dots u_k)}\cdot du_1\dots du_k = \int\limits_D N = S(G)\,.$$

Примеры. Найдем форму площади сферы в трехмерном пространстве. Единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ задается в сферических координатах равенствами:

$$x = \cos\varphi \sin\theta\,, \quad y = \sin\varphi\sin\theta\,, \quad z = \cos\theta\,.$$

Тогда

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \end{vmatrix} = \cos\theta\sin\theta\,,$$
$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -\sin\varphi\sin^2\theta\,,$$
$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \cos\varphi\sin^2\theta$$

и следовательно

$$N = \sqrt{(\cos\theta\sin\theta)^2 + (-\sin\varphi\sin^2\theta)^2 + (\cos\varphi\sin^2\theta)^2} = \sin\theta\,,$$
$$n_{12} = \cos\theta = z\,, \quad n_{13} = -\sin\varphi\sin\theta = -y\,, \quad n_{23} = \cos\varphi\sin\theta = x\,,$$

т.е.

$$\begin{aligned} dS &= z\,dx\wedge dy - y\,dx\wedge dz + x\,dy\wedge dz \\ &= x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy\,. \end{aligned}$$

Рассмотрим, также, $(n-1)$-мерную клетку G в $\mathbb{R}^n$, определенную параметризацией

$$\theta : \quad \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \dots u_{n-1})\,, \\ \vdots \\ x_n = x_n(u_1, \dots u_{n-1})\,. \end{cases}$$

Тогда ее форма площади имеет вид

$$dS = \sum_{i=1}^{n} n_{\hat{i}}\, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n \,,$$

где

$$n_{\hat{i}} = \frac{M_i}{N}\,, \qquad M_i = \frac{\partial(x_1, \ldots \widehat{x_i} \ldots x_n)}{\partial(u_1, \ldots u_{n-1})}\,, \qquad N = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} M_i^2}\,.$$

Если положить

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} n_{\hat{i}} \mathbf{e}_i \,, \tag{13.3}$$

то

$$dS = \mathbf{N} \lrcorner \Omega \,, \qquad \Omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \,,$$

см. (10.3). Очевидно, что длина вектора $\mathbf{N}$ равна единице: $|\mathbf{N}| = 1$. Нетрудно найти его геометрический смысл. Действительно,

$$\langle \mathbf{N} | \frac{\partial \theta}{\partial u_j} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} M_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_j} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u_j} \wedge \frac{\partial \theta}{\partial u_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial \theta}{\partial u_{n-1}} = 0 \,,$$

где мы воспользовались теоремой Лапласа о разложении определителя с одинаковыми первым и j-ым столбцами по [первому] столбцу.[15] Но векторы $\frac{\partial \theta}{\partial u_j}$ являются касательными к поверхности G. Это означает, что вектор $\mathbf{N}$ является единичным вектором *нормали* к поверхности G. Направление этого вектора зависит от ориентации клетки, т.е. от выбора базиса в локальной системе координат. При изменении ориентации клетки вектор нормали меняет знак. Имея это в виду говорят, что клетка является *двусторонней* поверхностью. Выбор ориентации клетки равносилен выбору *стороны* этой поверхности, а в

[15] M_i являются минорами в этом разложении

случае $(n-1)$-мерной поверхности — равносилен выбору вектора нормали к поверхности. Заметим, что векторы $\mathbf{N}, \frac{\partial\theta}{\partial u_1}, \dots \frac{\partial\theta}{\partial u_{n-1}}$ задают стандартную ориентацию пространства $\mathbb{R}^n$. Действительно, по теореме Пуассона о разложении определителя по первому столбцу

$$\mathbf{N}\wedge\frac{\partial\theta}{\partial u_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial\theta}{\partial u_{n-1}} = \sum_{i=1}^{n} N_i\cdot(-1)^{i+1}M_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}M_i\cdot(-1)^{i+1}M_i = \frac{1}{N}\cdot N^2 = N > 0\,. \tag{13.4}$$

Отметим следующее свойство формы площади $(n-1)$-мерной поверхности: на касательных векторах имеет место равенство

$$n_{\hat{i}}\,dS = dx_1\wedge\ldots\widehat{dx_i}\ldots\wedge dx_n\,. \tag{13.5}$$

Действительно,

$$n_{\hat{i}}\,dS\Big(\frac{\partial\theta}{\partial u_1},\dots\frac{\partial\theta}{\partial u_{n-1}}\Big) = \frac{M_i}{N}\sum_{j=1}^{n} n_{\hat{j}}\cdot dx_1\wedge\ldots\widehat{dx_j}\ldots\wedge dx_n\Big(\frac{\partial\theta}{\partial u_1},\dots\frac{\partial\theta}{\partial u_{n-1}}\Big)$$

$$= \frac{M_i}{N}\sum_{j=1}^{n} n_{\hat{j}}\cdot\frac{\partial(x_1,\dots\widehat{x_j}\dots x_n)}{\partial(u_1,\dots u_{n-1})} = \frac{M_i}{N^2}\sum_{j=1}^{n} M_j^2 = \frac{M_i}{N^2}\cdot N^2 = M_i$$

и

$$dx_1\wedge\ldots\widehat{dx_i}\ldots\wedge dx_n\Big(\frac{\partial\theta}{\partial u_1},\dots\frac{\partial\theta}{\partial u_{n-1}}\Big) = \frac{\partial(x_1,\dots\widehat{x_i}\dots x_n)}{\partial(u_1,\dots u_{n-1})} = M_i\,.$$

Например, в трехмерном случае, если $\mathbf{N} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то на касательных векторах

$$\cos\alpha\,dS = dy\wedge dz\,,$$
$$\cos\beta\,dS = dz\wedge dx\,,$$
$$\cos\gamma\,dS = dx\wedge dy\,.$$

Подчеркнем, что равенства самих форм нет. Однако благодаря равенству (13.2) в случае $(n-1)$-мерной клетки G и векторного поля $\mathbf{F} = (F_1, \dots F_n)$ будем иметь

$$\int\limits_G \mathbf{F} \lrcorner \Omega = \int\limits_G \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} F_i \, dx_1 \wedge \dots \widehat{dx_i} \dots \wedge dx_n = \int\limits_G \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} F_i \cdot n_{\hat{i}} \, dS = \int\limits_G \langle \mathbf{F} | \mathbf{N} \rangle \, dS \, . \tag{13.6}$$

Скалярное произведение $\langle \mathbf{F} | \mathbf{N} \rangle$ является нормальной составляющей векторного поля $\mathbf{F}$ по отношению к поверхности G. Интеграл $\int_G \langle \mathbf{F} | \mathbf{N} \rangle \, dS$ называется *потоком векторного поля* $\mathbf{F}$ через поверхность G.

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 204 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

14. Формула Стокса

14.1. Теорема Стокса для куба

Теорема 14.1. *Пусть* ω — $(k-1)$*-форма, определенная в окрестности куба* J^k *в* $\mathbb{R}^k$. *Тогда при согласованной ориентации куба* J^k *и его границы* ∂J^k

$$\int\limits_{J^k} d\omega = \int\limits_{\partial J^k} \omega\,.$$

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему, мы должны сначала объяснить, что означает согласованность ориентаций. На самом деле, согласованность ориентаций диктуется как раз этой формулой. Именно, форма ω имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} f_i\, du_1 \wedge \ldots \widehat{du_i} \ldots \wedge du_k\,.$$

Тогда

$$d\omega = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial u_i}\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 205 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

и, следовательно, по теореме Фубини

$$\int\limits_{J^k} d\omega = \int\limits_{J^{k-1}} \sum_{i=1}^{k} \Big((-1)^{i+1} \int\limits_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial u_i}\, du_i \Big) du_1 \wedge \ldots \widehat{du_i} \ldots \wedge du_k$$

$$= \int\limits_{J^{k-1}} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} [f_i|_{u_i=1} - f_i|_{u_i=0}]\, du_1 \wedge \ldots \widehat{du_i} \ldots \wedge du_k$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=0,1} (-1)^{i+l} \int\limits_{J^{k-1}} f_i|_{u_i=l}\, du_1 \wedge \ldots \widehat{du_i} \ldots \wedge du_k\,.$$

Последняя сумма по i и l является суммой интегралов от формы ω по всем граням куба J^k, т.е. по границе куба J^k. Знак перед интегралами определяет правильную (согласованную) ориентацию граней куба. Противоположные грани куба имеют противоположную ориентацию. В целом согласованную ориентацию граней можно описать следующим образом. Базис векторов $\tau_1, \ldots \tau_{k-1}$, лежащих в данной грани куба, определяет правильную ориентацию этой грани, если векторы $\mathbf{N}, \tau_1, \ldots \tau_{k-1}$, где $\mathbf{N}$ — вектор внешней нормали к данной грани, определяют ориентацию пространства $\mathbb{R}^k$. Действительно, если $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_k$ — стандартный базис $\mathbb{R}^k$, то при $i = 1$ согласованную ориентацию грани $u_1 = 1$ определяют векторы $\mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_k$ (т.е. форма $du_2 \wedge \ldots du_k$), а вектор внешней нормали совпадает с вектором $\mathbf{e}_1$. Для остальных граней утверждение вытекает из свойства антисимметричности форм. $\square$

Можно также сказать, что если форма объема Ω задает ориентацию куба J^k, то правильную ориентацию ∂J^k задает форма $\mathbf{N} \lrcorner \Omega$.

В дальнейшем согласованную ориентацию нам будет удобнее описывать при помощи не внешней нормали, а внутренней. Если $\boldsymbol{n}$ — вектор внутренней нормали к грани куба J^k, то базис векторов $\tau_1, \ldots \tau_{k-1}$, лежащих в данной грани, определяет согласованную ориентацию этой грани, если векторы $\boldsymbol{n}, \tau_1, \ldots \tau_{k-1}$ задают противоположную ориентацию по отношению к ориентации пространства $\mathbb{R}^k$.

14.2. Теорема Стокса для клетки

Теорема 14.2. *Пусть G — k-мерная клетка в $\mathbb{R}^n$ и ω — k-форма, определенная в окрестности G. Тогда при согласованной ориентации G и ∂G*

$$\int\limits_G d\omega = \int\limits_{\partial G} \omega \,.$$

Доказательство. Прежде всего подчеркнем, что граница клетки не является границей множества точек клетки. Если клетка G имеет параметризацию $\theta : \ J^k \to \mathbb{R}^n, \quad G = \theta(J^k)$, то по определению границу клетки G образует множество $\theta(\partial J^k)$. Разумеется, это понятие не зависит от выбора параметризации клетки: если $\varphi : \ J^k \to \mathbb{R}^n$ — еще одна параметризация, то непрерывно дифференцируемое отображение $T = \theta^{-1} \circ \varphi$ взаимно однозначно отображает куб J^k на весь куб J^k, но при таком отображении каждая внутренняя точка куба переходит во внутреннюю точку и тогда каждая граничная точка (уже в топологическом смысле) переходит в граничную, откуда и вытекает корректность определения границы клетки.

Ориентация клетки и ее границы (граней) определяется ориентацией куба в локальных координатах. Независимо от параметризации согласованность ориентаций клетки и ее границы можно описать следующим образом. Базис касательных векторов к грани клетки $\tau_1, \ldots \tau_{k-1}$ определяет правильную ориентацию клетки, если векторы $\mathbf{n}, \tau_1, \ldots \tau_{k-1}$, где $\mathbf{n}$ — вектор внутренней нормали к границе клетки, определяет противоположную ориентацию по отношению к ориентации клетки. Отметим, что именно это правило диктует выбор не внешней, а внутренней нормали: внешних нормалей (ортогональных между собой) к границе клетки может быть много, в то время как внутренняя нормаль определяется однозначно.

Доказательство собственно формулы элементарно:

$$\int\limits_G d\omega = \int\limits_{J^k} \theta^*(d\omega) = \int\limits_{J^k} d(\theta^*\omega) = \int\limits_{\partial J^k} \theta^*\omega = \int\limits_{\partial G} \omega \,,$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 207 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

см. (10.6). □

14.3. Концепция многообразия

Клетка представляет собой пример простой поверхности. В этом пункте мы дадим беглое описание общих поверхностей в $\mathbb{R}^n$ — гладких многообразий. Гладкие многообразия «склеиваются» из клеток.

Определение 14.3. Взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение φ открытого множества $U \subset \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$ $\quad (k \leqslant n)$ называется *картой* размерности k, если ранг производной этого отображения максимален $(\operatorname{rank} \varphi'_{\mathbf{u}} = k)$ всюду на U $(\forall \mathbf{u} \in U)$.

Определение 14.4. Семейство карт размерности k называется *атласом* размерности k при выполнении следующего условия «наложения» карт: если образы карт $\varphi : \ U \to \mathbb{R}^n$ и $\psi : \ V \to \mathbb{R}^n$ имеют непустое пересечение, то прообразы пересечения являются открытыми множествами в $\mathbb{R}^k$, т.е. открыты множества

$$\varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V)) \quad \text{и} \quad \psi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$$

см. рис. 30.

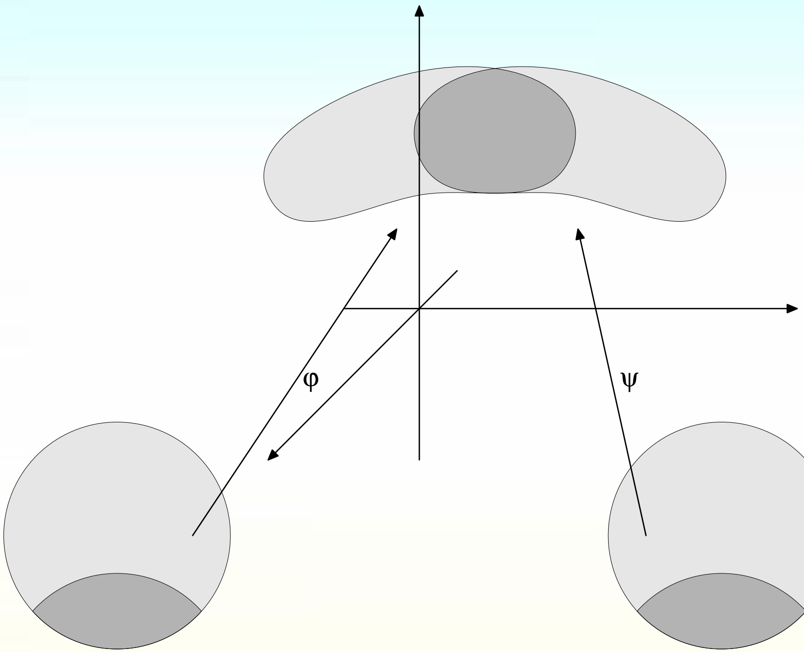


Рис. 30: К определению многообразия

Определение 14.5. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *гладким многообразием* в $\mathbb{R}^n$ размерности k, если существует атлас $\mathcal{A}$ размерности k, объединение образов всех карт которого совпадает с M:

$$M = \bigcup_{\varphi_\alpha \in \mathcal{A}} \varphi_\alpha(U_\alpha)\,.$$

Многообразие M называется *подмногообразием в* $\mathbb{R}^n$, если

$$\forall \alpha : \qquad \varphi_\alpha(U_\alpha) = M \cap V_\alpha\,,$$

где V_α — открыто в $\mathbb{R}^n$.[16]

Последнее условие исключает некоторые патологические случаи многообразий, когда две разные точки многообразия не имеют непересекающихся окрестностей (случай так называемых *неотделимых* или *нехаусдорфовых* многообразий), см. рис. 31. Мы не будем вдаваться в подробное обсуждение этих понятий, ограничившись лишь определениями и апеллируя к геометрической интуиции читателя. Нашей целью является теорема Стокса, которая будет доказана нами для случая тех многообразий, для которых какая–либо патология заведомо исключается.

Если φ — карта $U \to \mathbb{R}^n$, то выбор базиса на U определяет *ориентацию* этой карты и ее образа $\varphi(U)$. Координаты на U называются *локальными координатами* на образе карты $\varphi(U)$. Если образы карт $\varphi :\ U \to \mathbb{R}^n$ и $\psi :\ V \to \mathbb{R}^n$ пересекаются, то на множестве $\psi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$ определено взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое отображение

$$T :\ \psi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V)) \to \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$$

такое, что $\varphi = \psi \circ T$. Это отображение осуществляет замену локальных координат для области пересечения карт. Если $\det T' > 0$, то карты φ и ψ называются ориентированными

[16] достаточно требовать, чтобы любая точка многообразия M обладала окрестностью в $\mathbb{R}^n$, пересечение которой с многообразием содержалось в образе какой-либо карты: $\forall P \in M\ \exists V$ (открытое в $\mathbb{R}^n$) и $\alpha :\quad M \cap V \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$

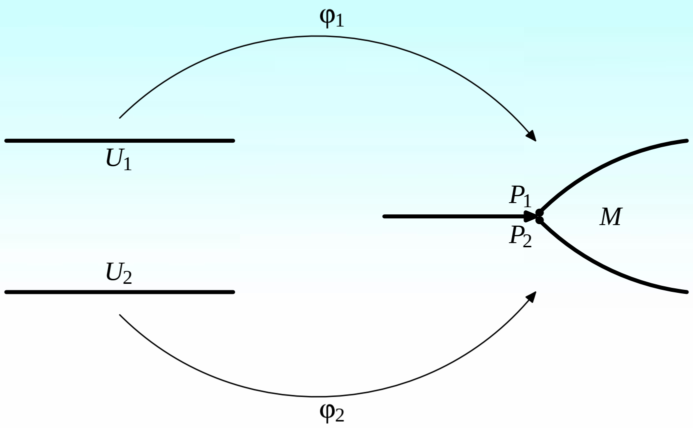


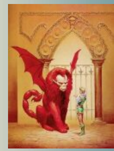
Рис. 31: Точки P_1 и P_2 неотделимы.

согласованно, т.е. — одинаково. Непересекающиеся карты[17] ориентированы согласовано по определению.

Определение 14.6. Многообразие M называется *ориентируемым*, если существует атлас этого многообразия, любые две карты которого имеют согласованную ориентацию. Ориентируемое многообразие называется *ориентированным* , если такой атлас фиксирован.

Бывают многообразия неориентируемые. Таким является. например, лист Мебиуса — поверхность, которая получается при отождествлении (склеивании) накрест лежащих точек двух противоположных сторон параллелограмма, см. рис. 32. Говорят, что лист Мебиуса является односторонней поверхностью.

[17] т.е. если образы карт не пересекаются



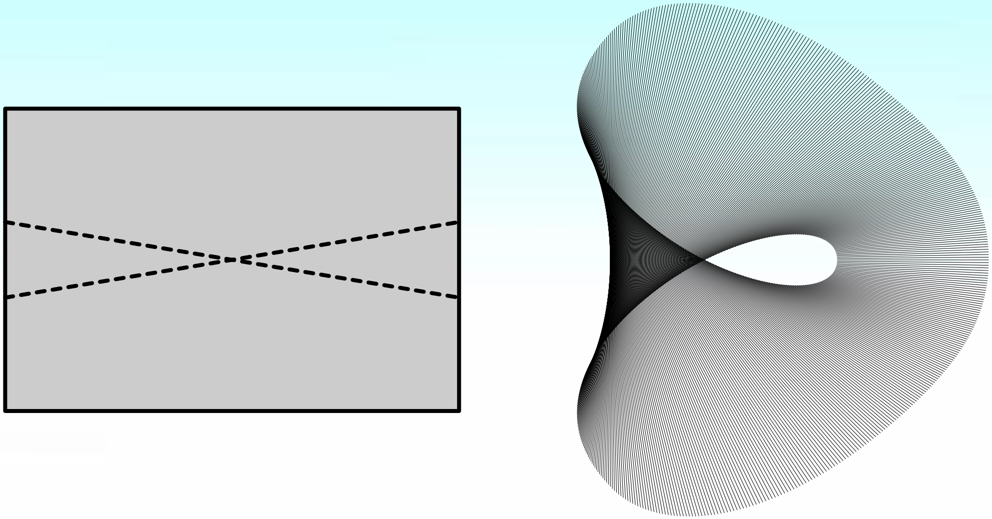


Рис. 32: Лист Мебиуса

В дальнейшем рассматриваются только ориентируемые многообразия.

Заметим, что объединение двух атласов данного многообразия также является его атласом. *В случае ориентируемого многообразия атлас всегда будет считаться состоящим из согласованно ориентированных карт.* Два атласа ориентируемого многообразия называются эквивалентными, если их объединение также является атласом ориентируемого многообразия, т.е. все карты ориентированы одинаково. Класс эквивалентных атласов называется *ориентацией* многообразия. Связное ориентируемое многообразие может иметь (и имеет) лишь две разные ориентации.

Наряду с многообразиями существуют *многообразия с краем*. Положим $\mathbb{R}^k_+ = \{\mathbf{x} \in$

$\mathbb{R}^k : x_1 \geqslant 0\}$. Многообразие M с краем является объединением множеств вида как $\varphi(U)$, так и $\psi(U \cap \mathbb{R}^k_+)$, где φ и ψ — карты и U — открытый шар в $\mathbb{R}^k$ с центром в нуле. В последнем случае точки $\psi(\mathbf{x})|_{x_1=0}$ называются точками *края* многообразия. Их объединение обозначается через ∂M. Край многообразия размерности k является многообразием размерности $(k-1)$ без края.

Общую теорему Стокса мы сформулируем для ориентируемых многообразий с краем, допускающих клеточное разбиение.

Напомним, что k-мерными клетками A в $\mathbb{R}^n$ мы называли образы k-мерного куба J^k при взаимно однозначных и непрерывно дифференцируемых отображениях φ, определенных на окрестностях этого куба.

Определение 14.7. Клетка $A = \varphi(J^k)$ называется *клеткой в многообразии* M (с краем или без), если отображение φ (определенное на окрестности куба J^k) является картой многообразия M.

Определение 14.8. Говорят, что многообразие M (с краем) допускает клеточное разбиение, если выполнены следующие условия.

1. $M = \bigcup\limits_{i=1}^{l} A_i$, где A_i — клетки.

2. Пересечения $A_i \cap A_j$ либо пусты, либо являются объединениями общих граней[18] клеток A_i и A_j.

[18] грань клетки — образ грани куба

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 213 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

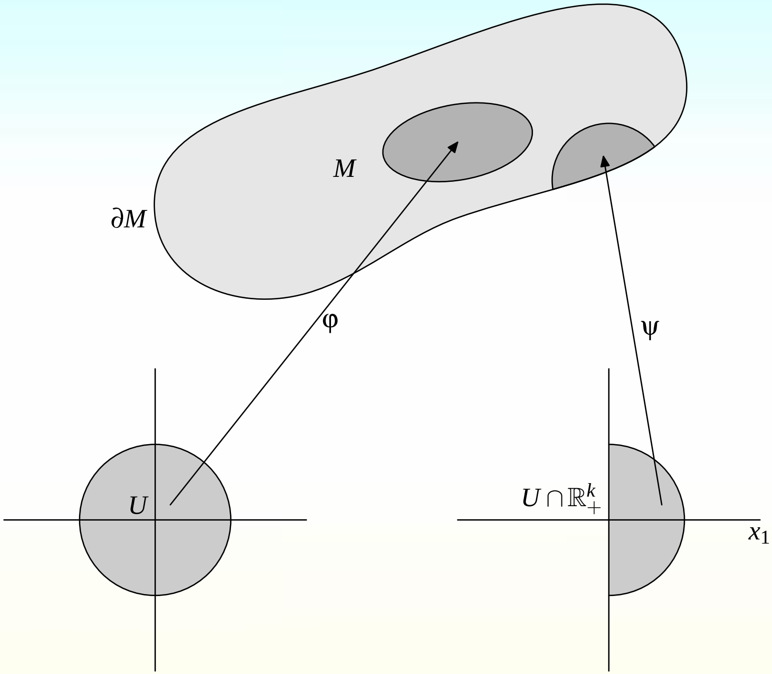


Рис. 33: Многообразие с краем

Если B — $(k-1)$-мерная грань клетки A разбиения, то либо она принадлежит лишь этой одной клетке (данного разбиения), либо она является общей гранью двух клеток (A и $\widetilde{A}$). В первом случае грань называется *внешней* гранью, во втором — *внутренней*. Объединение всех внешних граней составляет край ∂M многообразия M. Если многообразие ориентировано, то внутренняя грань будет иметь разные ориентации, согласованные с ориентациями содержащих ее клеток. Ориентация внешних клеток индуцирует ориентацию всего края ∂M, согласованную с ориентацией многообразия M, при этом согласованная ориентация края не зависит от разбиения, поскольку она может быть определена инвариантным образом выбором базиса касательных векторов к краю: касательный репер $\tau_1, \dots \tau_{k-1}$ задает согласованную ориентацию края, если репер $\boldsymbol{n}, \tau_1, \dots \tau_{k-1}$, где $\boldsymbol{n}$ — вектор внутренней нормали к ∂M, определяет ориентацию M, противоположную исходной.

Как и в двумерном случае мы теперь легко можем доказать теорему:

Теорема 14.9 (Стокса). *Пусть ω — дифференциальная форма на связном ориентированном многообразии M с краем, допускающим клеточное разбиение. Тогда*

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega$$

при условии, что край ∂M ориентирован согласованно.

Доказательство. В силу аддитивности интеграла, теоремы Стокса для клетки и сокращения поверхностных интегралов по внутренним граням находим

$$\int\limits_M d\omega = \sum_{i=1}^{l} \int\limits_{A_i} d\omega = \sum_{i=1}^{l} \int\limits_{\partial A_i} \omega = \int\limits_{\partial M} \omega\,.$$

□

14.4. Классические теоремы

14.4.1. Формула Остроградского–Гаусса

Пусть $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — гладкое векторное поле, определенное на замкнутой области $D \subset \mathbb{R}^n$. Тогда поток поля $\mathbf{F}$ через границу области ∂D равен интегралу от дивергенции поля, взятому по области D:

$$\int\limits_D \operatorname{div} \mathbf{F} = \int\limits_{\partial D} \langle \mathbf{F} | \mathbf{N} \rangle \, dS \,, \tag{14.1}$$

где $\mathbf{N}$ — вектор внешней нормали к ∂D.

Для доказательства достаточно выписать формулу Стокса для формы $\omega = \mathbf{F} \lrcorner \Omega$, где $\Omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, при этом $d\omega = \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot \Omega$. По теореме Стокса и формуле (13.6)

$$\int\limits_D \operatorname{div} \mathbf{F} = \int\limits_D d\omega = \int\limits_{\partial D} \omega = \int\limits_{\partial D} \mathbf{F} \lrcorner \Omega = \int\limits_{\partial D} \langle \mathbf{F} | \mathbf{N} \rangle \, dS \,.$$

Сделаем пояснения по поводу согласования ориентаций D и ∂D. В случае многообразий в $\mathbb{R}^n$ размерности n при описании согласованной ориентации можно воспользоваться вектором внешней нормали $\mathbf{N}$ вместо вектора внутренней нормали $\boldsymbol{n}$. При этом касательные векторы $\tau_1, \ldots \tau_{n-1}$ к границе ∂D определяют согласованную ориентацию, если векторы $\mathbf{N}, \tau_1 \ldots \tau_{n-1}$ задают ориентацию пространства $\mathbb{R}^n$. Данное правило часто интерпретируют как выбор внешней стороны поверхности ∂D при согласовании ориентаций.

Дивергенция непрерывно дифференцируемого поля $\mathbf{F}$ является плотностью аддитивной функции $\Phi(D) = \int_D \operatorname{div} \mathbf{F}$. Из формулы Остроградского–Гаусса и определения плотности вытекает следующая формула для дивергенции непрерывно дифференцируемого векторного поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \lim_{D \to \mathbf{x}} \frac{\int\limits_{\partial D} \langle \mathbf{F} | \mathbf{N} \rangle \, dS}{V(D)} \,, \tag{14.2}$$

где $V(D)$ — объем области D.

Отметим одно полезное следствие из теоремы Остроградского–Гаусса. Пусть u и v — дважды непрерывно дифференцируемые функции, определенные в замкнутой области D. Заметим, что

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) = \nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u) = \nabla u \cdot \nabla v + u\triangle v - (\nabla v \cdot \nabla u + v\triangle u) = u\triangle v - v\triangle u$$

и

$$\langle \operatorname{grad} u | \mathbf{N} \rangle = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}} \,,$$

где производная по направлению единичного нормального вектора $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}}$ называется *нормальной производной* функции u. Тогда в силу теоремы Остроградского–Гаусса

$$\int\limits_D (u\triangle v - v\triangle u) = \int\limits_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{N}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}} \right) dS \,.$$

Эта формула называется *второй формулой Грина*.

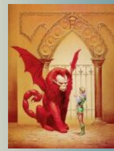
14.4.2. Уравнение неразрывности

Пусть $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — вектор скорости потока жидкости и ρ — плотность жидкости (все — функции x, y, z, t). Тогда масса жидкости в области D равна

$$M(t) = \int\limits_D \rho = \int\limits_D \rho \, dxdydz \,.$$

Через элементарную площадку ΔS границы области D за время Δt вытечет масса жидкости, равная

$$\Delta M = \rho\langle \mathbf{v} | \mathbf{N} \rangle \, \Delta t \Delta S \,,$$



Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 217 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

здесь $\mathbf{N}$ — нормаль к элементу поверхности ΔS. Отсюда, скорость изменения массы жидкости в области D равна

$$M'(t) = -\int\limits_{\partial D} \rho\langle \mathbf{v}|\mathbf{N}\rangle\, dS - \int\limits_{\partial D} \langle \mathbf{F}|\mathbf{N}\rangle\, dS\,,$$

что составляет физический смысл понятия потока вектора. По формуле Остроградского–Гаусса

$$M'(t) = -\int\limits_{D} \operatorname{div} \mathbf{F}\,.$$

Но ту же скорость можно найти дифференцированием под знаком интеграла:

$$M'(t) = \int\limits_{D} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,.$$

Как следствие

$$\int\limits_{D} \left(\operatorname{div} \mathbf{F} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0\,.$$

По теореме о плотности (в случае непрерывно дифференцируемых функций ρ и $\mathbf{v}$)

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,.$$

Это уравнение называется *уравнением неразрывности*. Если жидкость *несжимаема* (т.е. ρ постоянна), то

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0\,.$$

14.4.3. Формула Стокса

Пусть $\mathbf{F}$ — гладкое векторное поле в $\mathbb{R}^3$ и D — ориентированная двумерная поверхность с границей ∂D, ориентированной согласованно, т.е. так, что касательный вектор τ, определяющий ориентацию границы ∂D, совместно с вектором внутренней нормали $\boldsymbol{n}$ к границе определяют (в данном порядке) ориентацию поверхности D. Тогда

$$\int\limits_D \langle \operatorname{rot} \mathbf{F} | \mathbf{S} \rangle \, dS = \int\limits_{\partial D} \langle \mathbf{F} | \tau \rangle \,, \tag{14.3}$$

где $\mathbf{S} = \tau \times \boldsymbol{n}$ — вектор единичной нормали к поверхности D, согласованный с ориентациями на D и ∂D. Эту формулу читают так: поток ротора через ориентированную поверхность D равен *циркуляции* векторного поля по краю поверхности.

Для доказательства напишем общую формулу Стокса с дифференциальной формой $\omega = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, дуальной полю $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$, при этом $(\operatorname{rot} \mathbf{F}) \lrcorner \Omega = d\omega$, где $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$. С учетом формулы (13.6)

$$\int\limits_D \langle \operatorname{rot} \mathbf{F} | \mathbf{S} \rangle \, dS = \int\limits_D (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \lrcorner \Omega = \int\limits_D d\omega = \int\limits_{\partial D} \omega = \int\limits_{\partial D} \langle \mathbf{F} | \tau \rangle \,.$$

Следует опять дать пояснения по поводу согласования ориентаций. Как мы знаем, векторы $\mathbf{S}, \tau, \mathbf{n}$ определяют стандартную ориентацию пространства $\mathbb{R}^3$, см. (13.4). Но тогда в силу их ортонормированности и определения векторного произведения имеем $\mathbf{S} = \tau \times \boldsymbol{n}$.

Как и в случае с дивергенцией можно найти следующую формулу для ротора

$$\langle \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}) | \mathbf{S} \rangle = \lim_{D \to \mathbf{x}} \frac{\int\limits_{\partial D} \langle \mathbf{F} | \tau \rangle}{S(D)} \,,$$

где $S(D)$ — площадь стягивающейся поверхности D с нормальным вектором $\mathbf{S}$ в точке $\mathbf{x}$.

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист

Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

14.5. О восстановлении поля по его ротору и дивергенции

14.5.1. Сведение к уравнению Пуассона

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{X} = b\,, \\ \operatorname{rot} \mathbf{X} = \mathbf{B}\,, \end{cases} \tag{14.4}$$

где b и $\mathbf{B}$ — заданные непрерывные функции переменных x, y, z и $\mathbf{X}$ — искомое поле.

Согласно определения ротора

$$\operatorname{rot} \mathbf{X} \lrcorner \Omega = dX\,,$$

где $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$ и X — 1-форма, дуальная к вектору $\mathbf{X}$. В силу замкнутости точных форм приходим к следующему условию разрешимости системы

$$d(\mathbf{B} \lrcorner \Omega) = 0\,.$$

Если оно выполнено, то по теореме Пуанкаре 12.1 (в случае звездной области) существует 1-форма α такая, что $d\alpha = \mathbf{B} \lrcorner \Omega$. Форму α можно построить при помощи оператора гомотопии, см. стр. 177, мы положим $\alpha_0 = J(\mathbf{B} \lrcorner \Omega)$. Тогда в общем случае форма α (а в частном — форма X) имеет вид $\alpha = \alpha_0 + df$, где f — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Если обозначить через $\mathbf{A}$ векторное поле, дуальное форме α_0, то для вектора $\mathbf{X}$ получим представление

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f\,.$$

Ввиду $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \triangle f$, функция f должна быть фиксирована как решение уравнения Пуассона

$$\triangle f = b - \operatorname{div} \mathbf{A}\,.$$

14.5.2. Потенциальные, соленоидальные и гармонические поля

Наряду с системой (14.4) рассмотрим две вспомогательные задачи:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{Y} = b\,, \\ \operatorname{rot} \mathbf{Y} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{14.5}$$

и

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{Z} = 0\,, \\ \operatorname{rot} \mathbf{Z} = \mathbf{B}\,. \end{cases} \tag{14.6}$$

Определение 14.10. Поле $\mathbf{F}$ называется *потенциальным*, если $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Примером потенциального поля является поле градиента (ротор градиента равен нулю). В случае звездных областей (или, более общо, стягивающихся в точку) любое потенциальное поле является полем градиента. Действительно, если $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, и обозначая через F 1-форму, дуальную вектору $\mathbf{F}$, получим

$$dF = \operatorname{rot} \mathbf{F} \lrcorner \Omega = 0\,,$$

откуда по теореме Пуанкаре существует 0-форма (т.е. функция) U такая, что $dU = F$ и, следовательно, $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$. Функцию U можно построить оператором гомотопии: $U = J(F)$. Она называется *потенциалом* поля $\mathbf{F}$. Разумеется, потенциал определен не однозначно, а с точностью до константы.

Пример. Положим $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и рассмотрим поле вида

$$\mathbf{F} = \varphi(r)\mathbf{r}\,,$$

называемое *центрально симметричным*. Функцию φ будем считать непрерывно дифференцируемой. Заметим, что $\operatorname{grad} r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{r} = \mathbf{0}$, следовательно

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \nabla \varphi = \varphi' \nabla r = \varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 221 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

и тогда

$$\operatorname{rot}(\varphi(r)\mathbf{r}) = \nabla \times (\varphi \mathbf{r}) = \nabla\varphi \times \mathbf{r} + \varphi \nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}\,.$$

Найдем потенциал этого поля[19]:

$$U = J[\varphi(r)(xdx+ydy+zdz)] = \int\limits_0^1 \varphi(tr)(tx\cdot x+ty\cdot y+tz\cdot z)\,dt = \int\limits_0^1 \varphi(tr)tr^2\,dt = \int\limits_0^r \varphi(s)s\,ds\,.$$

Определение 14.11. Поле $\mathbf{F}$ называется *соленоидальным*, если $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$.

Примером соленоидального поля является поле ротора (так как дивергенция ротора равна нулю). В условиях теоремы Пуанкаре любое соленоидальное поле является полем ротора. Действительно, пусть $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$. Тогда

$$d(\mathbf{F}\lrcorner\Omega) = \operatorname{div}\mathbf{F}\cdot\Omega = 0$$

и по теореме Пуанкаре существует 1-форма α такая, что $d\alpha = \mathbf{F}\lrcorner\Omega$. По определению ротора вектор $\mathbf{F}$ является ротором векторного поля $\mathbf{A}$, дуального форме α : $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$. Поле $\mathbf{A}$ называется *векторным потенциалом* поля $\mathbf{F}$. Форма α может быть построена оператором гомотопии: $\alpha = J(\mathbf{F}\lrcorner\Omega)$.

Задачи (14.5) и (14.6) можно охарактеризовать как задачу построения потенциального поля с заданной дивергенцией и задачу построения соленоидального поля с заданным ротором, соответственно. Если $\mathbf{Y}_0$ и $\mathbf{Z}_0$ являются, соответственно, решениями этих задач, то в силу линейности операций дифференцирования заключаем, что поле $\mathbf{X}_0 = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Z}_0$ является решением исходной задачи (14.4). Нетрудно описать произвол в решении. Если $\mathbf{X}$ любое другое решение (14.4), то поле $\mathbf{H} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$ является решением задачи

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{H} = 0\,, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{0}\,. \end{cases} \tag{14.7}$$

[19] то же самое можно получить без привлечения оператора гомотопии, заметив, что $rdr = xdx + ydy + zdz$

Поле $\mathbf{H}$ является одновременно потенциальным и соленоидальным и называется *гармоническим*. Ясно, что $\mathbf{H} = \operatorname{grad} U$, где потенциал U удовлетворяет уравнению

$$\triangle U = 0\,. \tag{14.8}$$

Решения уравнения (14.8) называются *гармоническими функциями*.

14.5.3. Поле Ньютона

Найдем в $\mathbb{R}^n$ соленоидальные центрально симметрические поля, полагая

$$r = |\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,, \qquad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\,.$$

Заметим, что $\operatorname{div} \mathbf{x} = n$ и как в трехмерном случае

$$\operatorname{grad}(\varphi(r)\mathbf{x}) = \nabla\varphi == \varphi'(r)\frac{\mathbf{x}}{r}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{x}) = \nabla\cdot(\varphi\mathbf{x}) = \langle\nabla\varphi|\mathbf{x}\rangle + \varphi\nabla\cdot\mathbf{x} = \varphi'(r)r + \varphi n\,.$$

Из условия соленоидальности $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{x}) = 0$ находим

$$r\varphi' + n\varphi = 0\,,$$

откуда при условии $\varphi \neq 0$

$$(\ln\varphi)' = -\frac{n}{r}\,,$$

т.е.

$$\varphi = \frac{C}{r^n}\,.$$

Поскольку полученный результат не зависит от выбора начала координат, заключаем, что при $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x_0}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^n} = 0\,. \tag{14.9}$$

Определение 14.12. Поле $\mathbf{F}$ вида

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int\limits_D \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\,,$$

где D — замкнутая (жорданова) область в $\mathbb{R}^n$, называется *полем Ньютона*.

В силу (14.9)

$$\mathbf{x} \notin D \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0\,.$$

Пусть теперь $\mathbf{y} \in D_2 \subset D_1$ и $D = D_1 \setminus D_2$. Тогда $\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_1$ и по теореме Остроградского–Гаусса

$$0 = \int\limits_D \operatorname{div}_z \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{y})}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^n}\, d\mathbf{z} = \int\limits_{\partial D_1} \frac{\langle \mathbf{z} - \mathbf{y} | \mathbf{N}_z \rangle}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^n}\, dS_z - \int\limits_{\partial D_2} \frac{\langle \mathbf{z} - \mathbf{y} | \mathbf{N}_z \rangle}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^n}\, dS_z\,,$$

здесь индекс z указывает на то, в отношении каких переменных ведется дифференцирование или интегрирование, а вектор $\mathbf{N}_z$ считается вектором внешней нормали по отношению к областям D_1 или D_2. Выберем в качестве D_2 шар радиуса ε с центром в точке $\mathbf{y}$, в этом случае $\langle \mathbf{z} - \mathbf{y} | \mathbf{N}_z \rangle = |\mathbf{z} - \mathbf{y}| = \varepsilon$ и тогда

$$\int\limits_{\partial D_1} \frac{\langle \mathbf{z} - \mathbf{y} | \mathbf{N}_z \rangle}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^n}\, dS_z = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{\partial D_2} dS = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \cdot \varepsilon^{n-1} \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1\,,$$

здесь $\mathcal{S}_1$ — площадь поверхности единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Таким образом,

$$\int\limits_{\partial D_1} \frac{\langle \mathbf{z} - \mathbf{y} | \mathbf{N}_z \rangle}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^n}\, dS_z = \begin{cases} 0\,, & \mathbf{y} \notin D_1\,, \\ \mathcal{S}_1\,, & \mathbf{y} \in D_1 \setminus \partial D_1\,. \end{cases} \tag{14.10}$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 224 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

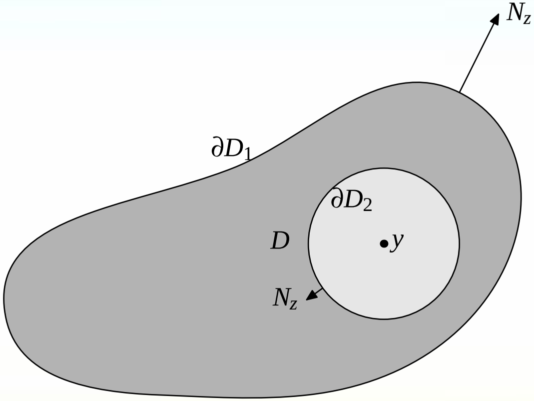


Рис. 34: К интегралу Гаусса

Эта формула называется *интегралом Гаусса*. Воспользуемся теперь формулой (14.2), считая, что $\mathbf{x} \in D$. Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \lim_{D_1 \to \mathbf{x}} \frac{1}{V(D_1)} \int\limits_{\partial D_1} dS_z \int\limits_{D} \frac{\langle \mathbf{z} - \mathbf{y} | \mathbf{N}_z \rangle}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^n} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

$$= \lim_{D_1 \to \mathbf{x}} \frac{1}{V(D_1)} \int\limits_{D} d\mathbf{y}\, f(\mathbf{y}) \int\limits_{\partial D_1} \frac{\langle \mathbf{z} - \mathbf{y} | \mathbf{N}_z \rangle}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^n}\, dS_z = \mathcal{S}_1 \lim_{D_1 \to \mathbf{x}} \frac{1}{V(D_1)} \int\limits_{D_1} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \mathcal{S}_1 \cdot f(\mathbf{x})\,.$$

Изменение порядков интегрирования оправдывается теоремой Фубини и равномерной сходимостью несобственных интегралов.

Остается заметить, что поле Ньютона является потенциальным. Действительно, если $\varphi' = \dfrac{1}{r^{n-1}}$, то при $n > 2$

$$\varphi = -\frac{1}{(n-2)r^{n-2}} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{grad} \varphi = \frac{\mathbf{r}}{r^n}\,,$$

откуда

$$U(\mathbf{x}) = -\frac{1}{n-2} \int\limits_{D} \frac{f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-2}}$$

является (в силу теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру) потенциалом поля Ньютона $\mathbf{F}$. В случае $n = 2$ получим $\varphi = \ln r$ и потенциал равен

$$U(\mathbf{x}) = \int\limits_{D} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|\, f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\,.$$

Таким образом, поле Ньютона вне области D является гармоническим полем. В области D оно дает частное решение задачи о построении потенциального поля с заданной

дивергенцией. Именно, потенциальное поле $\mathbf{Y}$, с дивергенцией $\operatorname{div}\mathbf{Y} = b$ с точностью до гармонического слагаемого имеет вид

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathcal{S}_1}\int\limits_D \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\, b(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\,, \qquad \mathbf{x}\in D\,.$$

Потенциал этого поля

$$U(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\mathcal{S}_1(n-2)}\displaystyle\int\limits_D \frac{b(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-2}}\, d\mathbf{y}\,, & (n>2)\\ \dfrac{1}{\mathcal{S}_1}\displaystyle\int\limits_D \ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\, b(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\,, & (n=2)\end{cases}$$

при $\mathbf{x}\in D$ дает частное решение уравнения Пуассона

$$\triangle U = b\,.$$

Вне области D функция U является гармонической.

В трехмерном случае полученный результат доказывает теорему Гельмгольца о возможности разложения произвольного гладкого векторного поля на потенциальную и соленоидальную составляющие: если $\mathbf{F}$ — гладкое поле, то решая задачи

$$\begin{cases}\operatorname{div}\mathbf{Y} = \operatorname{div}\mathbf{F}\,,\\ \operatorname{rot}\mathbf{Y} = \mathbf{0}\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}\operatorname{div}\mathbf{Z} = 0\,,\\ \operatorname{rot}\mathbf{Z} = \operatorname{rot}\mathbf{F}\end{cases}$$

(сводя их к уравнениям Пуассона, как это было описано выше), получим требуемое разложение

$$\mathbf{F} = \mathbf{Y} + \mathbf{Z} + \text{ГАРМОНИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ}\,.$$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 227 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Приложения

Кратные интегралы

Интегралы на многообразиях

Приложения

Предметный указатель

Литература

Веб – страница

Титульный лист

Страница 228 из 245

Назад

Полный экран

Закрыть

Выход

A. Элементы топологии пространства $\mathbb{R}^n$

Определение A.1. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым* , если любая точка множества A содержится в A вместе с некоторой окрестностью, т.е.

$$P \in A \quad \Rightarrow \quad \exists B_r(P) \subset A\,,$$

где $B_r(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : |PQ| < r\}$ — шар радиуса r с центром в точке P.

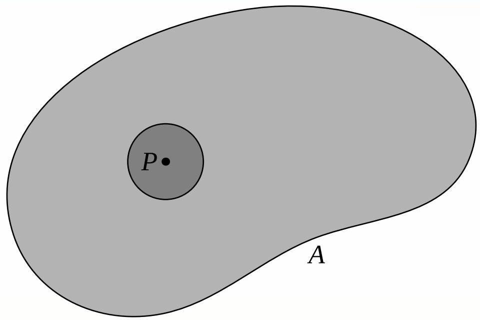


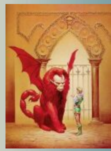
Рис. 35: К определению открытого множества

Определение A.2. A — *замкнуто* $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus A$ — открыто.

Определение A.3. Точка P называется *предельной точкой* множества A, если она является пределом последовательности точек множества A:

$$\exists P_n \in A : \qquad P_n \to P \qquad (\text{т.е. } |P_nP| \to 0)\,.$$

Теорема A.4. *A — замкнуто $\iff$ A содержит все свои предельные точки.*



Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 229 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Доказательство. $\Rightarrow$

Пусть $P_n \in A$, $P_n \to P$, но $P \notin A$. Тогда P лежит в открытом дополнении к A и, следовательно, $\exists B_r(P) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. В шаре $B_r(P)$ нет точек из A, что противоречит условию $P_n \in A$, $P_n \to P$.

$\Leftarrow$

Пусть $P \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Тогда существует окрестность (шар) $B_r(P)$, в которой нет точек из A (иначе точка P была бы предельной для множества A и, следовательно, принадлежала бы A). Как следствие, $\mathbb{R}^n \setminus A$ — открыто. $\square$

Пусть A — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Для точек из $\mathbb{R}^n$ имеется три возможности:

1. $\exists B_r(P) \subset A$.
2. $\exists B_r(P) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$
3. $\forall B_r(P) \quad \exists Q \in A \cap B_r(P)$ и $\exists R \in (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap B_r(P)$.

Точки первого типа называются *внутренними точками* множества A и составляют открытое множество $\mathrm{Int} A = \mathring{A} \subset A$, называемое *внутренностью* множества A. Точки второго типа — внутренние точки дополнения к A — составляют *внешность* A. Точки третьего типа называются *граничными* и составляют *границу* ∂A множества A. В силу

$$\partial A = \mathbb{R}^n \setminus [\mathring{A} \cup \mathrm{Int}(\mathbb{R}^n \setminus A)]\,,$$

граница множества — замкнута. Объединение множества A с его границей называют *замыканием* множества A:

$$\overline{A} = A \cup \partial A\,.$$

Очевидно, что

$$A \text{ — замкнуто} \iff A = \overline{A}\,.$$

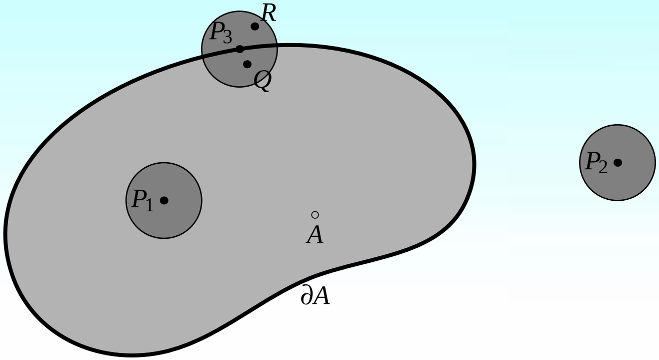


Рис. 36: К классификации точек

Определение A.5. Семейство множеств $G_t \subset \mathbb{R}^n$, $t \in T$ (T — множество индексов), называется *открытым покрытием* множества $A \subset \mathbb{R}^n$, если каждое множество G_t данного семейства является открытым и $A \subset \bigcup\limits_{t\in T} G_t$. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *компактным*, если любое открытое покрытие множества A содержит конечное подпокрытие (т.е. уже некоторый конечный набор множеств произвольного покрытия покрывает множество A):

$$A \subset \bigcup_{t\in T} G_t \quad \Rightarrow \quad \exists t_1, \ldots t_k : \quad A \subset G_{t_1} \cup \ldots \cup G_{t_k} .$$

Лемма A.6. *Замкнутое подмножество компактного множества — компактно.*

Доказательство. Пусть $B \subset A$, B — замкнуто, A — компактно. Пусть $B \subset \bigcup\limits_{t\in T} G_t$. Тогда семейство множеств G_t совместно с множеством $\mathbb{R}^n \setminus B$ образуют открытое покрытие

любого множества в $\mathbb{R}^n$, в частности, — множества A. В силу компактности A, некоторый набор множеств $G_{t_1} \dots G_{t_k}$ и (вообще говоря) $\mathbb{R}^n \setminus B$ образуют конечное покрытие множества A, тем более — множества B. Однако множество $\mathbb{R}^n \setminus B$ не содержит ни одной точки из B, т.е. множества $G_{t_1} \dots G_{t_k}$ образуют покрытие множества B. $\square$

Теорема А.7. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$A \text{ — компактно} \iff A \text{ — замкнуто и ограничено}.$$

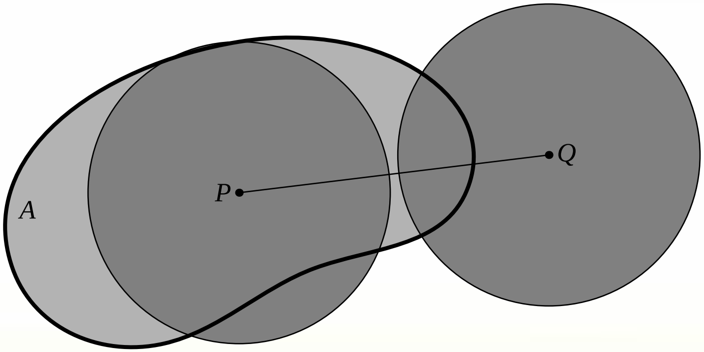


Рис. 37: К доказательству теоремы А.7

Доказательство. $\Rightarrow$
Обозначим через $B_r(P)$ открытый шар радиуса r с центром в точке P. Заметим, что

$$\forall P \in A \text{ и } \forall Q \notin A \quad \exists B_r(P), B_r(Q): \qquad B_r(P) \cap B_r(Q) = \varnothing$$

(достаточно взять радиус r строго меньше половины расстояния между точками P и Q). Фиксируем точку Q, при этом $r = r(P)$ и шары $B_{r(P)}(P)$ образуют открытое покрытие множества A. В силу компактности A

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_{r_j}(P_j)\,,$$

где $r_j = r(P_j)$. Положим $r_0 = \min\{r_1, \ldots r_k\}$ и заметим, что шар $B_{r_0}(Q)$ не пересекается с шарами $B_{r_1}(P_1), \ldots B_{r_k}(P_k)$, в частности, $B_{r_0}(Q) \cap A = \varnothing$, т.е. дополнение к A — открыто и, следовательно, A — замкнуто. Ограниченность A тривиальна:

$$\operatorname{diam} A \leqslant \sum_{j=1}^{k} \operatorname{diam} B_{r_j}(P_j) = 2(r_1 + \ldots + r_k)\,.$$

$\Leftarrow$

Рассмотрим замкнутый n-мерный куб C и докажем, что он компактен (это утверждение известно как лемма Гейне–Бореля–Лебега). Предположим, что некоторое открытое покрытие куба не содержит никакого конечного подпокрытия. Разделим каждое ребро куба C пополам, куб C разделится на 2^n одинаковых частей. Хотя бы один из полученных меньших кубов также не будет покрываться никаким конечным набором множеств из рассматриваемого покрытия куба C. Обозначим этот меньший куб через C_1 и повторим процедуру дробления применительно к кубу C_1 и т.д. Получим последовательность вложенных кубов $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ с тем свойством, что ребро каждого следующего куба вдвое меньше ребра предыдущего. Положим

$$C_k = [a_1(k), b_1(k)] \times \ldots \times [a_n(k), b_n(k)]\,,$$

тогда последовательность $a_j(k)$ (при каждом фиксированном j, $1 \leqslant j \leqslant n$) возрастает, последовательность $b_j(k)$ убывает и

$$b_j(k+1) - a_j(k+1) = \frac{b_j(k) - a_j(k)}{2}\,.$$

Согласно теории Кантора–Дедекинда существуют и равны пределы:

$$c_j = \lim_{k\to\infty} a_j(k) = \lim_{k\to\infty} b_j(k)\,.$$

Это означает, что

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \{P\}\,, \qquad P = (c_1, \ldots c_n)\,.$$

Точка P содержится хотя бы в одном из открытых множеств рассматриваемого покрытия куба C, обозначим это множество через G. Согласно определению открытых множеств, G будет включать все кубы C_k с достаточно большими номерами, т.е. все эти кубы будут покрываться всего одним множеством G данного покрытия, что противоречит правилу отбора кубов C_k, согласно которому кубы C_k не могут быть покрыты никаким конечным набором множеств из этого покрытия. Полученное противоречие и доказывает лемму Гейне–Бореля–Лебега.

Теперь утверждение теоремы будет следовать из леммы A.6, поскольку ограниченное множество (по определению) является подмножеством некоторого куба. $\square$

Теорема A.8. *Если множества A_k компактны, не пусты и $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, то*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \varnothing\,.$$

Доказательство. Если $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$, то в силу формул де Моргана

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus A_k)\,,$$

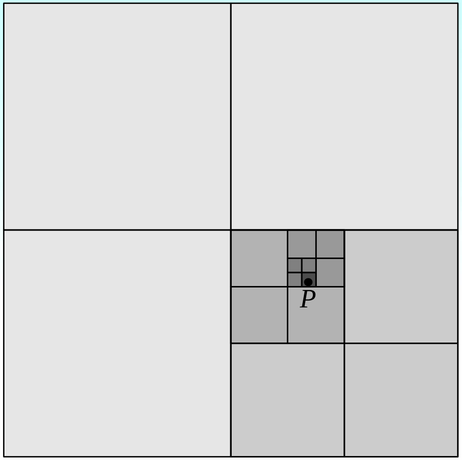


Рис. 38: К доказательству леммы Гейне–Бореля–Лебега

т.е. множества $\mathbb{R}^n \setminus A_k$ образуют открытое покрытие компактного множества A_1 и, следовательно, при некотором m

$$A_m \subset A_1 \subset \bigcup_{k=1}^{m} (\mathbb{R}^n \setminus A_k) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k=1}^{m} A_k = \mathbb{R}^n \setminus A_m \,,$$

противоречие. $\square$

Компактные множества важны, в частности, ввиду следующего свойства.

Теорема A.9 (Кантор). *Функция $f: A \to \mathbb{R}$, непрерывная на компактном множестве*

$A \subset \mathbb{R}^n$, *равномерно непрерывна на нем, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \qquad |PQ| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(P) - f(Q)| < \varepsilon \,,$$

($P, Q \in A$*).*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции f

$$\forall P \in A \quad \exists \delta(P) > 0 : \qquad |QP| < \delta(P) \quad \Rightarrow \quad |f(P) - f(Q)| < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Обозначим через $B_r(P)$ открытый шар радиуса r с центром в точке P. Положим $2r(P) = \delta(P)$. Шары $B_{r(P)}(P)$ покрывают A, когда точка P пробегает множество A. В силу компактности множество A будет покрываться каким-то конечным набором шаров $B_{r_1}(P_1), \dots B_{r_k}(P_k)$, где $r_j = r(P_j)$. Положим $\delta = \min\{r_1, \dots r_k\}$. Пусть $|Q_1, Q_2| < \delta$. Предположим, для определенности, что $Q_1 \in B_{r_1}(P_1)$. Тогда

$$|P_1 Q_2| \leqslant |P_1 Q_1| + |Q_1 Q_2| < r_1 + \delta \leqslant \delta(P_1) \,,$$

откуда

$$|f(Q_2) - f(Q_1)| \leqslant |f(Q_2) - f(P_1)| + |f(P_1) - f(Q_1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

$\square$

B. Метод сжимающих отображений

Пусть X — *метрическое пространство*, т.е. некоторое множество, на котором задана *функция расстояния* $d: \; X^2 \to [0,\infty)$, т.е. функция, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $d(P,Q) = d(Q,P) \quad (\forall P,Q \in X)$,
2. $d(P,Q) \leqslant d(P,Q) + d(Q,R) \quad (\forall P,Q,R \in X)$,
3. $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$.

Эти условия называются, соответственно, *симметричностью, неравенством треугольника и невырожденностью.*

В качестве простого примера метрического пространства можно назвать любое множество X в $\mathbb{R}^n$ с функцией расстояния $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

Определение B.1. Отображение $\Phi: \; X \to X$ называется *сжимающим*, если

$$d(\Phi(P),\Phi(Q)) \leqslant \lambda \cdot d(P,Q)\,,$$

где P,Q — произвольны, а $\lambda < 1$.

Теорема B.2. *Пусть Φ — сжимающее отображение. Если X обладает тем свойством, что*

$$d(P_n,P_m) \underset{n,m\to\infty}{\to} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \exists P: \quad P_n \to P$$

(так называемая **полнота пространства***), то*

$$\exists! P: \qquad \Phi(P) = P\,.$$

т.е. сжимающее отображение имеет и при том единственную **неподвижную точку**.

Доказательство. Пусть P_0 — произвольная точка из X. Построим последовательность

$$P_1 = \Phi(P_0)\,,\ P_2 = \Phi(P_1)\,, \ldots P_{n+1} = \Phi(P_n)\,, \ldots$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} d(P_{n+m}, P_n) = d(\Phi(P_{n+m-1}), \Phi(P_{n-1})) \leqslant \lambda \cdot d(P_{n+m-1}, P_{n-1}) \leqslant \ldots \leqslant \lambda^n d(P_m, P_0) \\ \leqslant \lambda^n \cdot \left[d(P_m, P_{m-1}) + d(P_{m-1}, P_{m-2}) + \ldots + d(P_1, P_0) \right] \\ \leqslant \lambda^n \cdot \left[\lambda^{m-1} \cdot d(P_1, P_0) + \lambda^{m-2} \cdot d(P_1, P_0) + \ldots + d(P_1, P_0) \right] \\ \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(P_1, P_0) \underset{n\to\infty}{\to} 0\,. \end{aligned}$$

В силу полноты, существует предельная точка $P = \lim P_n$. В силу непрерывности сжимающего отображения $\lim \Phi(P_n) = \Phi(P)$. Тогда, переходя к пределу в равенстве $P_{n+1} = \Phi(P_n)$, получаем $P = \Phi(P)$. Существование неподвижной точки доказано. Единственность элементарна:

$$Q = \Phi(Q)\,, \quad P = \Phi(P) \qquad \Rightarrow \qquad d(P, Q) = d(\Phi(P), \Phi(Q)) \leqslant \lambda \cdot d(P, Q) \quad \Rightarrow \quad P = Q\,.$$

$\square$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 238 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

C. Теорема о неявной функции

Теорема C.1. *Пусть* $f: D \to \mathbb{R}^n$ — *непрерывная функция на открытом множестве* $D \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, *имеющая непрерывную частную производную* $\dfrac{\partial f(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}$, *обратимую в точке* $\mathbf{x} = \boldsymbol{a}, \mathbf{y} = \boldsymbol{b}$[20]. *Тогда существует окрестность* $U \times V \subset D$ *точки* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *такая, что*

$$\forall \mathbf{x} \in U \quad \exists! \mathbf{y} \in V: \qquad f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{c} = f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

Так определенная функция $g: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ *является непрерывной.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ и $\dfrac{\partial f(\mathbf{0},\mathbf{0})}{\partial y} = I$. Положим $\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - f(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Уравнение $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \boldsymbol{c}$ запишется в виде

$$\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}.$$

Заметим, что $\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \Phi_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}) = 0$. Используя непрерывность производной функции Φ, найдем шары U_1 и V с центрами в нуле такие, чтобы

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in U_1 \times V \qquad \Rightarrow \qquad \|\tfrac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда по теореме Лагранжа

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in U_1 \times V \qquad \Rightarrow \qquad \|\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_2) - \Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_1)\| \leqslant \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|,$$

т.е. отображение $\Phi_{\mathbf{x}}$ является сжимающим. Пользуясь непрерывностью функции Φ найдем окрестность $U \subset U_1$ такую, что

$$\mathbf{x} \in U \qquad \Rightarrow \qquad \|\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{0})\| \leqslant \frac{r}{2},$$

[20] т.е. $\operatorname{rank} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\Big|_{(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})} = n$

где r — радиус шара V. Тогда

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})\in U\times V \qquad\Rightarrow\qquad \|\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\|\leqslant\|\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\|+\|\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})-\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{0})\|\leqslant\frac{r}{2}+\frac{\|\mathbf{y}\|}{2}\leqslant r\,.$$

Таким образом, $\Phi_{\mathbf{x}}$ при $\mathbf{x}\in U$ является сжимающим отображением $V\to V$. По теореме о сжимающем отображении существует и единственна неподвижная точка $\mathbf{y}$ этого отображения. Существование функции g доказано. Ее непрерывность является следствием непрерывности функции $\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ (как функции двух переменных): полагая $\mathbf{y}_i=g(\mathbf{x_i})$, $i=1,2$, находим

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1\| &= \|\Phi_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{y}_2)-\Phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}_1)\|\leqslant\|\Phi_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{y_2})-\Phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}_2)\|+\|\Phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}_2)-\Phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}_1)\|\\ &\leqslant\|\Phi_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{y_2})-\Phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}_2)\|+\frac{1}{2}\|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_2\|\,,\end{aligned}$$

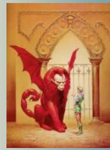
откуда

$$\|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1\|\leqslant 2\|\Phi_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{y_2})-\Phi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}_2)\|\underset{\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\|\to 0}{\longrightarrow}0\,.$$

$\square$

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 240 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Предметный указатель



Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 241 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Список литературы

[1] Картан А. *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.* Мир, 1971.

[2] Мизер Ч., Торн К., Уилер Дж. *Гравитация*, тт. 1-3. Мир, 1977.

[3] Смирнов В.И. *Курс высшей математики*, ч. 2. Наука, 1974.

[4] Спивак М. *Математический анализ на многообразиях.* Мир, 1968.

[5] Торп Дж. *Начальные главы дифференциальной геометрии.* Мир, 1982.

[6] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 2. Наука, 1966.

[7] Шварц Л. *Анализ*, тт. 1,2. Мир, 1972.

[8] Шилов Г.Е. *Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных*, части 1,2. Наука, 1972.

[9] Edwards C.H., Jr. *Advanced calculus of several variaables.* Dover Publications,Inc., 1994.

[10] Flanders H. *Differentiaal forms with applications to the physycal sciences.* Dover Publications, Inc., 1989.

[11] Frankel T. *The geometry of physics. An Introduction.* Cambridge University Press, 1997.

Кратные интегралы
Интегралы на многообразиях
Приложения
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 245 из 245
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход