ИЗДАТЕЛЬСТВО

Г. А. Шишкин

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

математика и информатика

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt$$

Улан-Удэ • 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
БУРЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.А. Шишкин

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Рекомендовано Учебно-методическим советом БГУ
в качестве учебно-методического пособия для студентов
и магистров специальностей/направлений
010400.62 Прикладная математика и информатика,
010501.65 Прикладная математика и информатика,
010400.68 Прикладная математика и информатика,
а также для студентов других специальностей,
где изучаются интегральные уравнения

ИЗДАТЕЛЬСТВО
Улан-Удэ
2014

УДК 511 968
ББК 22.161.6я73
Ш 655

Утверждено к печати
редакционно-издательским
советом Бурятского госуниверситета

Рецензенты

А.Д. Мижидон, д-р техн. наук, проф.
В.В. Кибирев, канд. физ.-мат. наук, проф.

Шишкин Г.А.
Ш 655 **Линейные интегральные уравнения Фредгольма**: учеб.-метод. пособие. – Улан-Удэ: Издательство Бурятского госуниверситета, 2014. – 106 с.

В пособии кратко изложены основные разделы теории интегральных уравнений Фредгольма. Главное внимание уделено вопросам, касающимся типов уравнений и методов их решения. Рассмотрены теорема существования и единственности решения и ряд других наиболее важных теорем. К каждому типу уравнений и рассмотренных в пособии методов их решения приведены примеры с решениями, в последнем параграфе дан список задач для самостоятельного решения.

Пособие предназначено студентам специальности «Прикладная математика и информатика», может использоваться студентами специальностей: «Математика», «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» и др.

УДК 511 968
ББК 22.161.6я73

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение называют интегральным, если неизвестная функция входит в уравнение под знаком интеграла. Интегральные уравнения – это функциональные уравнения специального типа, история которых тесно связана с задачами математической физики, в частности с проблемой колебания твердого тела [2; 12]. Теория интегральных уравнений составляет значительный раздел математического анализа и имеет большое теоретическое и прикладное значение. В настоящее время все чаще интегральные уравнения рассматривают как самостоятельное научное направление. Отдельные же интегральные уравнения встречались уже в первой половине XIX в., но систематическая их теория была заложена на рубеже XIX–XX вв. в работах итальянского математика В. Вольтерра (1860–1940), шведского математика Э.И. Фредгольма (1866–1927), Д. Гильберта (1862–1943) и других математиков [20].

Этот направление в математике своим возникновением обязано Даниилу Бернулли, а затем в течение двух столетий усилия математиков были направлены на решение проблемы колебаний среды (механической, акустической, оптической, электромагнитной) и связанной с ней краевой задачей теории потенциала, которая сводится к решению интегральных уравнений.

Возможно, первый результат, который можно связать с интегральными уравнениями, это формулы обращения Фурье (1811):

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} g(t)Costx\,dt\,, \tag{1}$$

$$g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)Costx\,dt\,. \tag{2}$$

Можно считать, что формула (2) дает решение интегрального уравнения (1), в котором $g(x)$ – неизвестная, а $f(x)$ – данная функция.

Работа Фурье «Théorie analy lique de la chaleur» (1822) стала вехой на этом пути.

В последнее десятилетие XIX в. Пуанкаре разработал теоретико-функциональные методы и вместе с К. Нейманом они приступили к рассмотрению гармонической краевой задачи, которая сводилась к решению интегрального уравнения.

Однако из-за того, что в более простых ситуациях в непрерывном предельном случае возникают дифференциальные, а не интегральные уравнения, на целых два столетия внимание математиков было уделено дифференциальным уравнениям.

Значимой в изучении линейных интегральных уравнений стала работа В. Вольтерра (1896), в которой исследованы уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^{\infty} K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ – неизвестная функция, $K(x,s)$ и $f(x)$ – данные функции, λ – численный параметр, он доказал, что если $K(x,s)$ и $f(x)$ непрерывны в некотором сегменте $[a, b]$, то в этом сегменте уравнение (3) имеет при любом значении λ одно и только одно непрерывное решение, которое можно построить по методу последовательных приближений.

В 1900 г. Э.И. Фредгольм изложил основные свойства и теоремы теории линейных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования, разработал общие методы решения этого вида уравнений, которые теперь называют уравнениями Фредгольма. Фредгольм дал красивое и оригинальное решение этого класса уравнений, что открывало некоторую аналогию между интегральными и алгебраическими линейными уравнениями. В работах Фредгольма была реализована также идея превращения системы линейных уравнений, описывающей дискретную систему масс, в интегральные уравнения при переходе к предельному случаю сплошной среды. Тем не менее отметим, что результаты Фредгольма вытекают из специального вида его уравнения, которое возникает при решении проблем математической физики [2; 10; 12].

Интегральные уравнения встречаются в различных областях науки и многочисленных приложениях (в теории упругости, теории пластичности, гидродинамике, теории массо- и теплопереноса, теории управления, химической технологии, биомеханике, теории массового обслуживания, экономике, медицине и др.).

Уравнения Фредгольма второго рода типичны при описании физических процессов, связанных с явлениями последействия. В этих уравнениях переменная обычно обозначает время. Тогда состояние системы, характеризуемое функцией $\varphi(x)$, определяется внешним воздействием и зависит от состояния системы в предшествующие моменты времени. Ядро $K(x,s)$ описывает величину последействия состояния системы в момент s на состояние системы в момент $x>s$ [10].

Решение линейного интегрального уравнения второго рода с параметром λ

$$u(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x)$$

было получено с помощью трех различных методов, и притом в трех разных формах в конце 19-го и начале 20-го столетия.

1. Первый метод, а именно метод последовательных подстановок, развитый Нейманом, Лиувиллем и Вольтерра, дает $u(x)$ в виде степенного ряда относительно λ, причем коэффициенты при различных степенях λ являются функциями от x. Ряд сходится для всех значений λ, меньших по абсолютной величине, чем некоторое постоянное число.

2. Второй метод, принадлежащий Фредгольму, дает $u(x)$ в виде отношения двух целых рядов относительно λ, каждый из которых имеет бесконечный радиус сходимости. Коэффициенты при степенях в числителе являются функциями от x, знаменатель не зависит от x. Для тех значений λ, при которых знаменатель обращается в нуль, решения, вообще говоря, не существует; в тех же исключительных случаях, когда решение существует, метод Фредгольма дает возможность его получить. Решение получается в результате того, что интегральное уравнение рассматривают как предельный случай системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, когда n бесконечно возрастает.

3. Третий метод, развитый Гильбертом и Шмидтом, выражает $u(x)$ через собственные функции, которые обыкновенно представляют собой решения соответствующего однородного уравнения

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt .$$

Вообще говоря, это уравнение не имеет никакого решения, кроме тривиального $u(x) \equiv 0$, однако существует ряд чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, называемых *собственными значениями*, для каждого из которых однородное уравнение имеет ненулевые решения $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ и эти решения называются собственными функциями однородного уравнения. Тогда его решение имеет вид

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x),$$

где C_i – произвольные постоянные числа.

Целью настоящего пособия является рассмотрение основных методов аналитического решения линейных интегральных уравнений Фредгольма.

1. Классификация интегральных уравнений

Интегральными уравнениями называют уравнения, в которых неизвестная функция независимого аргумента (скалярного или векторного) входит под знак интеграла. Во-первых, различают линейные и нелинейные интегральные уравнения. Выпишем общий вид нелинейного интегрального уравнения типа Фредгольма

$$F(x, y, \int_a^b K(x,t, y(t)) dt) = 0. \qquad (1.1)$$

Более частными видами нелинейных интегральных уравнений будут уравнения вида

$$a(x) y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t, y(t)) dt \qquad (1.2)$$

и

$$a(x)y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)F(y(t))dt\,. \qquad (1.3)$$

Приведенные виды интегральных уравнений содержат интегральные операторы с постоянными пределами интегрирования. Такие уравнения будем называть интегральными уравнениями типа Фредгольма. Уравнения типа Фредгольма вида (1.2) называются уравнениями Урысона, а уравнения (1.3) – уравнениями Гаммерштейна.

Линейные интегральные уравнения Фредгольма имеют вид

$$a(x)y(x) + \lambda\int_a^b H(x,t)y(t)dt = g(x)\,. \qquad (1.4)$$

Если в уравнении (1.4) $a(x) \equiv 0$, то получим уравнение

$$g(x) = \lambda\int_a^b H(x,t)y(t)dt\,, \qquad (1.5)$$

которое называется интегральным уравнением Фредгольма первого рода.

Если $a(x) \not\equiv 0$, то уравнение (1.4) называется уравнением Фредгольма второго рода.

Если в уравнении (1.4) $a(x) \neq 0$ для всех рассматриваемых значений x, то, поделив уравнение (1.4) на $a(x)$, получим уравнение Фредгольма второго рода следующего вида

$$y(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x)\,, \qquad (1.6)$$

где $K(x,t) = \dfrac{H(x,t)}{a(x)}$, $f(x) = \dfrac{g(x)}{a(x)}$.

В уравнении (1.6) $y(x)$ – неизвестная функция $(a \le x, t \le b)$, $K(x,t)$ – ядро интегрального уравнения, $f(x)$ – известная функция, называемая свободным членом или правой частью интегрального уравнения.

Функции $y(x)$ и $f(x)$ обычно считают непрерывными на отрезке $x \in [a,b]$. Ядро интегрального уравнения полагают непрерывным в квадрате $S = \{a \le x, t \le b\}$, либо регулярным, удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt = B^2 < \infty, \qquad (1.7)$$

где B – постоянная, т.е. квадратично интегрируемым в этом квадрате. В этих классах функций решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода существует и единственно для всех значений λ, кроме характеристических значений, которые определим позже.

При $f(x) \equiv 0$ уравнения вида (1.2), (1.3) и (1.6) называют однородными, а при $f(x) \ne 0$ – неоднородными. Уравнения вида (1.4), как и алгебраические уравнения, при $a(x) \ne 0$ и $a(x) \ne 1$ называют неприведенными, а при $a(x) \equiv 1$ – приведенными.

Ядро интегрального уравнения K(x,t) называется вырожденным, если оно представимо в виде

$$K(x,t) = g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t) + \ldots + g_n(x)h_n(t).$$

Ядро интегрального уравнения $K(x,t)$ называется разностным, если оно зависит от разности аргументов: $K(x,t) = K(x-t)$.

Замечание. Случай, когда $a = -\infty$ *и / или* $b = +\infty$, вообще говоря, не исключается, но при этом следует внимательно проверять выполнение условия квадратичной интегрируемости ядра $K(x,t)$ в квадрате $a \le t \le x \le b,\ a < b.$

В уравнениях (1.4) – (1.6) λ – числовой параметр, функции $H(x,t)$ и $K(x,t)$ называются ядрами интегральных уравнений и, соответственно, $g(x)$ и $f(x)$ – свободными функциями линейных неоднородных интегральных уравнений.

Рассмотренные определения и понятия распространяются и на уравнения Вольтерра.

При построении моделей многих задач с последействием, в частности краевых задач, разрешающие уравнения могут содержать неизвестную функцию и под знаком интеграла с постоянными пределами интегрирования, и под знаком интеграла с переменными пределами интегрирования одновременно. Такие интегральные уравнения называют интегральными уравнениями смешанного типа Вольтера – Фредгольма. Ниже приведем пример линейного интегрального уравнения смешанного типа Вольтера – Фредгольма второго рода

$$u(x)+\int_a^x K(x,t)u(t)dt+\int_a^b N(x,t)u(t)dt=f(x).$$

Или другой вид

$$u(x)+\int_a^b dt\int_a^t K(x,t,s)u(s)ds=f(x).$$

Интегральное уравнение называют *особым*, если либо один, либо оба предела интегрирования бесконечны, например,

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^\infty \sin(xt)u(t)dt,$$

либо же если ядро обращается в бесконечность в одной или нескольких точках рассматриваемого интервала, например,

$$f(x)=\int_a^b \frac{H(x,t)}{(x-t)^\alpha}u(t)dt \qquad (0<\alpha<1).$$

Уравнение Абеля, рассмотренное ранее, принадлежит к этому типу [12].

При решении интегральных уравнений, как и других уравнений, сначала необходимо дать полную характеристику рассматриваемого уравнения и затем определить метод решения.

2. Решение интегральных уравнений Фредгольма методом последовательных приближений

Рассмотрим линейное уравнение второго рода

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt. \tag{2.1}$$

Теорема 1. Уравнение (2.1), если свободная функция $f(x)$ ***и***

ядро $K(x,t)$ – непрерывные функции при $a \le t \le x \le b$, имеет единственное непрерывное решение при достаточно малом значении параметра λ. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Доказательство. Примем за начальное приближение свободную функцию $y_0(x) = f(x)$.

Выпишем рекуррентную формулу последовательных приближений по методу Пикара

$$y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, y_{n-1}(t)\, dt, \; n = 1,2,... \qquad (2.2)$$

В соответствии с условием теоремы имеем ограничения $\max\limits_{a \le x \le b} |f(x)| \le M$ и $\max\limits_{a \le x,t \le b} |K(x,t)| \le N$, используя которые, оценим последовательные приближения (2.2) по модулю

$$|y_0(x)| = |f(x)| \le M,$$

$$\begin{aligned} |y_1(x)| &= \left| f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, y_0(t)\, dt \right| \le |f(x)| + \\ &+ |\lambda| \left| \int_a^b |K(x,t)| |f(t)| dt \right| \le M + |\lambda| MN |b-a|. \end{aligned} \qquad (2.2_1)$$

$$\begin{aligned} |y_2(x)| &= \left| f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, y_1(t)\, dt \right| \le \\ &\le M + |\lambda| \left| \int_a^b N\left(M + |\lambda| MN |b-a| dx\right) \right| \le \\ &\le M + |\lambda| MN |b-a| + |\lambda|^2 MN^2 |b-a|^2, \end{aligned} \qquad (2.2_2)$$

....

....

$$\left|y_n(x)\right| = \left|f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\,y_{n-1}(t)\,dt\right| \le M\sum_{i=0}^{n}\left|\lambda\right|^i N^i \,|\,b-a\,|^i. \quad (2.2_n)$$

....

Тогда для сходимости метода необходимо выполнение условия

$$|\,\lambda\,| \le \frac{1}{N\,|\,b-a\,|}. \tag{2.3}$$

Так как при $n \to \infty$ получим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии, который сходится при условии (2.3), то

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x). \tag{2.4}$$

Методом от противного можно доказать единственность полученного решения, аналогично как и для уравнений Вольтерра.

Пример 1. Решить интегральное уравнение, применив метод последовательных приближений

$$y(x) - \lambda\int_0^1 xty(t)dt = 1.$$

Решение. Приняв за начальное приближение к решению свободную функцию, последовательно найдем

$$y_0 = 1, \quad y_1(x) = 1 + \lambda\int_0^1 xty_0 dt = 1 + \lambda x\int_0^1 tdt = 1 + \lambda\frac{x}{2},$$

$$y_2(x) = 1 + \lambda\int_0^1 xty_1(t)dt = 1 + \lambda x\int_0^1 t(1 + \lambda\frac{t}{2})dt = 1 + \lambda\frac{x}{2} + \lambda^2\frac{x}{2\cdot 3},$$

$$y_3(x) = 1 + \lambda\int_0^1 xty_2(t)dt = 1 + \lambda x\int_0^1 t(1 + \frac{\lambda t}{2} + \frac{\lambda^2 t}{2\cdot 3})dt = 1 + \frac{\lambda x}{2} + \frac{\lambda^2 x}{2\cdot 3} + \frac{\lambda^3 x}{2\cdot 3^2},$$

....,

$$y_n(x) = 1 + \lambda\int_0^1 xty_{n-1}(t)dt = 1 + \lambda\frac{x}{2}(1 + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda^2}{3^2} + \ldots + \frac{\lambda^{n-1}}{3^{n-1}}),$$

....,

$$y(x) = 1 + \lambda \frac{x}{2}(1 + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda^2}{3^2} + \ldots + \frac{\lambda^{n-1}}{3^{n-1}} + \ldots) = 1 + \frac{3\lambda x}{2(3-\lambda)}.$$

Сделать проверку, подставив полученное решение в исходное уравнение.

3. Уравнения с вырожденными ядрами

Рассмотрим интегральные уравнения Фредгольма

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{3.1}$$

с вырожденными ядрами

$$K(x,y) = a_1(x)b_1(y) + \ldots + a_n(x)b_n(y).$$

В этом случае уравнение (3.1) перепишется

$$u(x) = f(x) + \lambda \left[a_1(x)\int_a^b b_1(t)u(t)dt + \ldots + a_n(x)\int_a^b b_n(t)u(t)dt \right]. \tag{3.1}$$

Если ввести обозначения для неизвестных интегральных выражений

$$\int_a^b b_i(t)u(t)dt = B_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3.2}$$

то уравнение (3.1) примет вид

$$u(x) = f(x) + \lambda\left[a_1(x)B_1 + \ldots + a_n(x)B_n\right]. \tag{3.3}$$

Подставляя в формулу (3.2) значение функции $u(x)$ из равенства (3.3), мы получим для определения постоянных B_i n уравнений

$$B_i - \lambda \left[B_1 \int_a^b a_i(t)b_i(t)dt + \ldots + B_n \int_a^b a_n(t)b_i(t)dt \right] =$$

$$= \int_a^b b_i(t)f(t)dt \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3.4}$$

которые после введения обозначений

$$\int_a^b a_k(t)b_i(t)dt = C_{ki}$$

примут вид

$$B_i - \lambda\left[C_{1i}B_1 + \ldots + C_{ni}B_n\right] = \int_a^b b_i(t)f(t)dt \quad (i = 1,\ldots,n). \quad (3.5)$$

Уравнения (3.5) представляют собой систему n неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $B_1,\ldots,B_n$ с определителем

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda C_{11} & -\lambda C_{12} & \ldots & -\lambda C_{1n} \\ -\lambda C_{21} & 1-\lambda C_{22} & \ldots & -\lambda C_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda C_{n1} & -\lambda C_{n2} & \ldots & 1-\lambda C_{nn} \end{vmatrix}.$$

Из теории линейных алгебраических уравнений мы получаем сразу следующие результаты:

а) Если $D(\lambda) \neq 0$, то уравнения (3.4) допускают одну и только одну систему решений $B_1,\ldots,B_n$, определяемых по формулам Крамера. Поэтому уравнение (3.1) имеет одно и только одно решение, представляющееся формулой (3.3).

б) Если $D(\lambda) = 0$ для некоторого $\lambda = \lambda_0$ (что имеет место для n значений λ, вещественных или же комплексных) и первым минором определителя $D(\lambda)$, не обращающимся в нуль при $\lambda = \lambda_0$, является какой-либо минор q-го порядка (т.е. определитель $(n-q)$-го порядка), то общее решение однородной системы (3.4) при $f(x) \equiv 0$ будет иметь вид

$$B_i = \alpha_1 m_{1i} + \alpha_2 m_{2i} + \ldots + \alpha_q m_{qi} \qquad (i = 1,\ldots,n),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ – произвольные постоянные.

Если мы вставим найденные таким образом значения B_i в (3.3), то получим:

$$u(x)=\lambda_0\left[\alpha_1u_1(x)+\alpha_2u_2(x)+\ldots+\alpha_qu_q(x)\right],$$

где функции

$$u_r(x)=m_{r1}\alpha_1(x)+m_{r2}\alpha_2(x)+\cdots+m_{rn}\alpha_n(x)\qquad (r=1,\ldots,q)$$

линейно независимы.

Таким образом, мы видим, что при выполнении некоторых условий однородное интегральное уравнение с параметром $\lambda=\lambda^*$ имеет q линейно независимых решений.

Сопряженное уравнение

$$\bar{u}(x)=f(x)+\lambda\left[b_1(x)\int_a^b a_1(t)\bar{u}(t)dt+\ldots+b_n(x)\int_a^b a_n(t)\bar{u}(t)dt\right]\quad(3.6)$$

получится из уравнения (3.1) после перемены местами всех функций $a_i(x)$ и $b_i(x)$. Общий член определителя уравнения (3.1) был

$$\int_a^b a_k(t)b_i(t)dt=C_{ki}.$$

Поэтому общий член определителя для сопряженного уравнения будет

$$\int_a^b b_k(t)a_i(t)dt=C_{ik}.$$

Эти два определителя равны друг другу, так как один получается из другого путем перестановки столбцов и строк. Поэтому уравнение (3.1) и сопряженное уравнение (3.6) имеют одинаковые собственные значения с одинаковыми рангами [10].

Из общей теории мы знаем, что если λ^* есть корень уравнения $D(\lambda)=0$ ранга q, то для того, чтобы неоднородное уравнение (3.1) могло иметь решение, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\int_a^b f(x)\bar{u}_i(x)dx=0\quad(i=1,\ldots,q),$$

которые мы будем называть условиями ортогональности для функций

$$f(x) \text{ и } \overline{u}_i(x).$$

Пример 2. Решить интегральное уравнение, применив метод вырожденных ядер

$$y(x)-\lambda\int_0^1 xty(t)dt=1.$$

Решение. Из-под интеграла вынесем x и положим $\int_0^1 ty(t)dt=B$, тогда данное уравнение перепишется $y(x)-\lambda xB=1$, откуда $y(x)=1+\lambda xB.$ Подставив полученное выражение для $y(x)$ в заданное уравнение

$$1+\lambda xB-\lambda\int_0^1 xt(1+\lambda tB)dt=1$$

и вычислив интеграл, определим

$$B=\frac{3}{2(3-\lambda)}.$$

И подставив это значение B в выражение для $y(x)$, найдем решение интегрального уравнения $y(x)=1+\dfrac{3\lambda x}{2(3-\lambda)}.$

4. Решение интегральных уравнений Фредгольма с помощью ряда Неймана

Рассмотрим уравнение второго рода

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt=f(x). \tag{4.1}$$

Решение будем искать в виде ряда по степеням параметра

$$y(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\varphi_i(x). \tag{4.2}$$

Подставив ряд (4.2) в уравнение (4.1)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \varphi_i(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \varphi_i(t) dt$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ слева и справа в полученном равенстве (так как ряды слева и справа от равенства равны только в этом случае), найдем

$$\varphi_0(x) = f(x), \quad \varphi_1(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi_0(t)\,dt, \quad \varphi_2(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)\,dt,$$

....

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}(t)\,dt \,. \qquad (4.3_n)$$

Докажем сходимость ряда (4.2) при $a \le x,t \le b$ и следующих ограничениях

$$|f(x)| \le M \,, \ |K(x,t)| \le K \,, \ |\varphi_0(x)| \le M \,. \qquad (4.4)$$

Для выполнения условий (4.4) достаточно, чтобы функция f(x) и ядро K(x,t) в рассматриваемой области были непрерывными. Для ядра K(x,t) можно условие ослабить, потребовав только его регулярность или квадратичную интегрируемость.

Оценим коэффициенты ряда (4.2) по модулю в этой области

$$|\varphi_1(x)| = \left|\int_a^b K(x,t) f(t)\,dt\right| \le MK|b-a|,$$

$$|\varphi_2(x)| = \left|\int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)\,dt\right| \le MK^2|b-a|^2,$$

....

$$|\varphi_n(x)| \le MK^n|b-a|^n. \qquad (4.5_n)$$

....

Выпишем ряд для искомой функции

$$y(x) = f(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots$$

и ряд, составленный из полученных оценок (4.5n)

$$M+|\lambda|MK|b-a|+|\lambda|^2MK^2|b-a|^2+\ldots+|\lambda|^nMK^n|b-a|^n+\ldots, \quad (4.6)$$

который сходится по признаку Даламбера, так как

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{|\lambda|^{n+1}MK^{n+1}|b-a|^{n+1}}{|\lambda|^nMK^n|b-a|^n}=|\lambda|K|b-a|<1, \quad \text{если}$$

$$\lambda<\frac{1}{K|b-a|} \quad \text{или} \quad |b-a|<\frac{1}{|\lambda|K}. \quad (4.7)$$

Ряд (4.6) по построению является мажорирующим для ряда (4.2), следовательно, ряд (4.2) по критерию Вейерштрасса сходится равномерно и абсолютно при выполнении условий (4.7). Полученная функция в виде ряда (4.2) является решением уравнения (4.1).

Пример 3. Решить интегральное уравнение методом разложения по параметру

$$u(x)=x^2+\lambda\int_0^1 3xt^2u(t)\,dt.$$

Решение. Подставим ряд по степеням параметра

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\varphi_n(x),$$

в заданное уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\varphi_n(x)=x^2+\lambda\int_0^1 3xt^2\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n+1}\varphi_n(t)dt$$

и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, найдем

$$\varphi_0(x)=x^2, \ \varphi_1(x)=\int_0^1 3xt^2\varphi_0(t)\,dt=3x\frac{t^5}{5}\bigg|_0^1=\frac{3x}{5},$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^1 3xt^2\frac{3t}{5}dt=\frac{9x}{5}\int_0^1 t^3dt=\frac{9x}{5\cdot4}=\frac{3^2}{5}\cdot\frac{x}{4},$$

$$\varphi_3(x)=\int_0^1 3xt^2\frac{9t}{5\cdot4}dt=\frac{3^3}{5}\cdot\frac{x}{4^2}, \ \ldots, \ \varphi_n(x)=\frac{3^n}{5}\cdot\frac{x}{4^{n-1}},\ldots.$$

$$u(x) = x^2 + \lambda\frac{3x}{5} + \lambda^2\frac{3^2x}{5\cdot 4} + \lambda^3\frac{3^3x}{5\cdot 4^2} + \ldots + \lambda^n\frac{3^nx}{5\cdot 4^{n-1}} + \ldots =$$

$$= x^2 + \lambda\frac{3x}{5}\left(1 + \frac{3\lambda}{4} + \frac{3^2\lambda^2}{4^2} + \ldots + \frac{3^{n-1}\lambda^{n-1}}{4^{n-1}} + \ldots\right) = x^2 + \frac{3x\lambda}{5\left(1 - \frac{3\lambda}{4}\right)}.$$

Ответ: $u(x) = x^2 + \dfrac{12x\lambda}{5(4-3\lambda)}$.

Ответ получен для $\dfrac{3\lambda}{4} < 1$; $\lambda < \dfrac{4}{3}$, но нетрудно проверить, что полученное решение удовлетворяют уравнению при всех значениях λ, кроме $\lambda = \dfrac{4}{3}$.

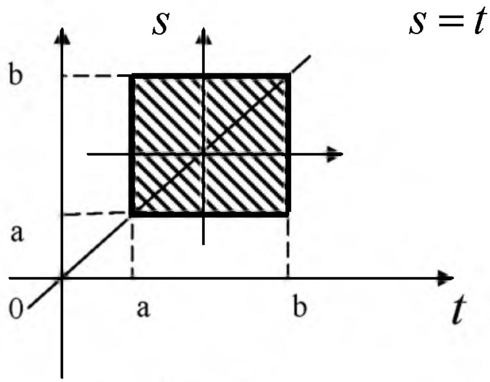
5. Итерированные ядра и резольвента интегральных уравнений Фредгольма

В полученных выражениях (4.3_n) коэффициентов ряда Неймана $\varphi_i(x)$ последовательно произведем подстановку $\varphi_0(x)$ в $\varphi_1(x)$, затем $\varphi_1(x)$ в $\varphi_2(x)$ и так далее, сменив в процессе преобразований обозначения переменных

$$\varphi_1(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi_0(t)dt = \int_a^b K(x,t)f(t)dt,$$

$$\varphi_2(x) = \int_a^b K(x,t)\int_a^b K(t,s)f(s)dsdt.$$

Далее в кратных интегралах изменим порядок интегрирования в соответствии с изображенной ниже областью интегрирования



Чертеж 1

$$\varphi_2(x) = \int_a^b f(s)ds \int_a^b K(x,t)K(t,s)dt.$$

Введем понятие итерированных ядер, положив

$$K_1(x,t) = K(x,t), \quad K_2(x,s) = \int_a^b K(x,t)K(t,s)dt, \qquad (5.2_2)$$

тогда

$$\varphi_2(x) = \int_a^b f(s)K_2(x,s)ds. \qquad (5.1_2)$$

Аналогично найдем

$$\varphi_3(x) = \int_a^b f(s)K_3(x,s)ds, \qquad (5.1_3)$$

где

$$K_3(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_2(t,s)dt\,, \qquad (5.2_3)$$

. . . .

$$\varphi_n(x) = \int_a^b f(s)K_n(x,s)ds, \qquad (5.1_n)$$

где

$$K_n(x,s)=\int_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt, \qquad (5.2_n)$$

……………………………………………………………………………………

Подставим выражения коэффициентов $\varphi_i(x)$ в соответствии с полученными формулами (5.1_n) в ряд (4.2) и, в силу равномерной и абсолютной сходимости этого ряда, можем просуммировать интегралы

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b f(s)\left[K(x,s)+\lambda\ K_2(x,s)+\ldots+\lambda^{n-1}K_n(x,s)+\ldots\right]ds.$$

Выражение в квадратных скобках назовем резольвентой интегрального уравнения Фредгольма второго рода и для нее введем обозначение

$$R(x,s;\lambda)=K(x,s)+\lambda K_2(x,s)+\ldots+\lambda^{n-1}K_n(x,s)+\ldots \qquad (5.3)$$

Если итерированные ядра найдены, а следовательно и резольвента, то решение интегрального уравнения Фредгольма (4.1) определится по формуле

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,s;\lambda)f(s)ds. \qquad (5.4)$$

Аналогично, группируя интегралы попарно в формулах

$$\varphi_n(x)=\int_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt \qquad (5.3_n)$$

для коэффициентов $\varphi_n(x)$ начиная с последней пары, для итерированных ядер получим другую формулу

$$K_n(x,s)=\int_s^b K_{n-1}(x,t)K(t,s)dt, \qquad \text{n=2,3,...} \qquad (5.5_n)$$

В формулу резольвенты (5.3) подставив выражения итерированных ядер (5.2_n) или (5.5_n), получим формулу для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda) f(s) ds. \qquad (5.6)$$

Из формулы резольвенты (5.3), заменив выражения итерированных ядер (5.2_n) и группируя интегралы, получим интегральное уравнение резольвенты

$$R(x,s;\lambda) = K(x,s) + \lambda \int_a^b K(x,t) R(t,s;\lambda) dt \;, \qquad (5.7)$$

которое называют первым фундаментальным соотношением Фредгольма.

Аналогично можно получить другое уравнение резольвенты, если воспользоваться формулами (5.5_n)

$$R(x,s;\lambda) = K(x,s) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) K(t,s) dt \;, \qquad (5.8)$$

его соответственно называют вторым фундаментальным соотношением Фредгольма.

Для итерированных ядер справедливо также соотношение

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_m(x,s) K_{n-m}(s,t) ds, \qquad (5.9)$$

где $m < n$, которое получим, если начать попарно менять порядок интегрирования одновременно слева и справа с некоторого m.

Пример 4. Найти резольвенту и записать решение уравнения

$$u(x) = 1 + \int_0^1 2x^2 t u(t) dt.$$

Найдем итерированные ядра по формулам (5.2_n)

$$K_2(x,s) = \int_0^1 2x^2 t 2t^2 s dt = 4x^2 s \int_0^1 t^3 dt = x^2 s,$$

$$K_3(x,s) = \int_0^1 K_1(x,t) K_2(t,s) ds = \int_0^1 2x^2 t t^2 s dt = \frac{1}{2} x^2 s,$$

$$K_4(x,s)=\int_0^1 K_1(x,t)K_3(t,s)ds=\int_0^1 2x^2t\frac{1}{2}t^2sdt=\frac{1}{4}x^2s,$$

....

$$K_n(x,s)=\int_0^1 K_1(x,t)K_{n-1}(t,s)dt=\frac{1}{2^{n-2}}x^2s,$$

....

Подставив значения итерированных ядер в формулу (5.3), вычислим резольвенту

$$R(x,s;\lambda)=K(x,s)+\lambda K_2(x,s)+\ldots+\lambda^{n-1}K_n(x,s)=$$

$$=2x^2s+x^2s+\frac{1}{2}x^2s+\frac{1}{4}x^2s+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}x^2s+\ldots=4x^2s,$$

и по формуле (5.4) найдем решение уравнения

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,s;\lambda)f(s)ds,$$

$$u(x)=1+\int_0^1 4x^2sds=1+4x^2\frac{s^2}{2}\Big|_0^1=1+2x^2.$$

Нетрудно проверить, что полученная функция $u(x)=1+2x^2$ тождественно удовлетворяет данному уравнению.

6. Решение линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода методом последовательных подстановок

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}K(x,t)u(t)\,dt\,, \qquad (6.1)$$

где функция $K(x,t)\not\equiv 0$ вещественна и непрерывна в прямоугольнике $R(a\le x,t\le b)$, функция $f(x)\not\equiv 0$ вещественна и непрерывна в интервале $I(a\le x\le b)$, λ – постоянное число.

Нетрудно увидеть, что если существует непрерывное решение $u(x)$ уравнения (6.1) и функция $K(x,t)$ непрерывна, то и функция $f(x)$ должна быть непрерывной.

Подставляя в правую часть уравнения (6.1) вместо функции $u(t)$ ее выражение из того же уравнения (6.1), находим

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}K(x,t)\left[f(t)+K(t,t_1)u(t_1)dt_1\right]dt=$$

$$=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}K(x,t)f(t)\,dt+\lambda^2\int_{a}^{b}K(x,t)\int_{a}^{b}K(t,t_1)u(t_1)\,dt_1dt\,.$$

Снова подставляя сюда вместо $u(t_1)$ его значение из уравнения (6.1), получаем

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}K(x,t)f(t)\,dt+$$

$$+\lambda^2\int_{a}^{b}K(x,t)\int_{a}^{b}K(t,t_1)\left[f(t_1)+\lambda\int_{a}^{b}K(t_1,t_2)u(t_2)\,dt_2\right]dt_1dt=$$

$$=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}K(x,t)f(t)\,dt+\lambda^2\int_{a}^{b}K(x,t)\int_{a}^{b}K(t,t_1)f(t_1)\,dt_1dt+$$

$$+\lambda^3\int_a^b K(x,t)\int_a^b K(t,t_1)\int_a^b K(t_1,t_2)u(t_2)\,dt_2dt_1dt.$$

После n -й подстановки мы будем иметь:

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt+\lambda^2\int_a^b K(x,t)\int_a^b K(t,t_1)f(t_1)\,dt_1dt+\ldots$$

$$\ldots+\lambda^n\int_a^b K(x,t)\int_a^b K(t,t_1)\int_a^b K(t_1,t_2)\ldots$$

$$\ldots\int_a^b K(t_{n-2},t_{n-1})f(t_{n-1})\,dt_{n-1}\ldots dt_1dt+R_{n+1}(x), \qquad (6.2)$$

где

$$R_{n+1}(x)=\lambda^{n+1}\int_a^b K(x,t)\int_a^b K(t,t_1)\ldots\int_a^b K(t_{n-1},t_n)u(t_n)\,dt_n\ldots dt_1dt$$

Это приводит нас к рассмотрению следующего бесконечного ряда:

$$f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt+\lambda^2\int_a^b K(x,t)\int_a^b K(t,t_1)f(t_1)\,dt_1dt+\ldots+$$

$$+\lambda^n\int_a^b K(x,t)\int_a^b K(t,t_1)\ldots\ldots\int_a^b K(t_{n-2},t_{n-1})f(t_{n-1})\,dt_{n-1}\ldots dt_1dt+\ldots \qquad (6.3)$$

В силу непрерывности функций, входящих в уравнение (6.1), ряд (6.3), если он равномерно сходится в I, представляет в этом интервале некоторую непрерывную функцию.

Так как $K(x,t)$ и $f(x)$ непрерывны, соответственно, в R и I, то

$$|K(x,t)|\le M \text{ в } R, \quad |f(x)|\le N \text{ в } I.$$

Рассмотрим

$$S_n(x)=\lambda^n\int_a^b K(x,t)\int_a^b K(t,t_1)\ldots\ldots\int_a^b K(t_{n-2},t_{n-1})f(t_{n-1})\,dt_{n-1}\ldots dt_1dt.$$

Согласно написанным выше неравенствам, имеем

$$|S_n(x)|\le|\lambda^n|NM^n(b-a)^n.$$

Ряд с таким общим членом сходится, лишь если

$$|\lambda| M(b-a) < 1.$$

Таким образом, мы видим, что ряд (6.3) сходится абсолютно и равномерно для всех λ, удовлетворяющих неравенству

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

Если уравнение (6.1) имеет непрерывное решение, то оно должно удовлетворять формуле (6.2). Но так как, по предположению, $u(x)$ непрерывно в I, то его абсолютное значение имеет в этом интервале некоторый максимум: $\max\limits_{a \le x \le b} u(x) = \theta.$ Тогда

$$|R_{n+1}(x)| \le |\lambda^{n+1}| \theta M^{n+1} (b-a)^{n+1}.$$

Если теперь будет выполняться неравенство $|\lambda| M(b-a) < 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} R_{n+1}(x) = 0$.

Таким образом, видим, что функция $u(x)$, удовлетворяющая формуле (6.2) при любом n, разлагается в ряд (6.3).

Можно убедиться путем непосредственной подстановки, что функция $u(x)$, представляющая сумму ряда (6.3), удовлетворяет уравнению (6.1). К этому же результату приводит и другой путь: обозначим сумму ряда (6.3) через $u(x)$, помножим обе части полученного равенства на $\lambda K(x,t)$ и проинтегрируем ряд почленно, что мы вправе сделать. Тогда получим

$$\lambda \int_a^b K(x,t) u(t)\,dt = \lambda \int_a^b K(x,t) \left[f(t) + \int_a^b K(t,t_1) f(t_1)\,dt_1 + \cdots \right] dt =$$

$$= \lambda \int_a^b K(x,t) f(t)\,dt +$$

$$\lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1) f(t_1)\,dt_1 dt + \ldots = u(x) - f(x).$$

Итак, мы получили следующую теорему.

Теорема 2. Если в уравнении

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)\,dt$$

ядро $K(x,t)\not\equiv 0$ ***вещественно и непрерывно в прямоугольнике*** R ***и*** $|K(x,t)|\le M$, ***функция*** $f(x)\not\equiv 0$ ***вещественна и непрерывна в интервале*** I, λ ***– постоянное число и*** $|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$,

то уравнение (6.1) имеет одно и только одно решение, выражающееся абсолютно и равномерно сходящимся рядом (6.3) **[10].**

Уравнение (6.1) имеет непрерывные решения, даже если условие

$$|\lambda|M(b-a)<1$$

не выполняется. Правильность этого утверждения можно иллюстрировать следующим примером.

Пример 5. Уравнение

$$u(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{3}+\int_0^1 (x+t)u(t)\,dt$$

имеет непрерывное решение $u(x)=x$, тогда как $|\lambda|M(b-a)=2>1$.

7. Уравнение Фредгольма как предел системы конечного числа линейных алгебраических уравнений. Фундаментальные соотношения Фредгольма

Решение уравнения

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt, \qquad (7.1)$$

данное в предыдущем параграфе, обладает недостатком, оно имеет силу для ограниченных значений параметра λ. Желательно же иметь, если это возможно, такое решение, которое было бы справедливо при всех λ. Такое решение было дано Фредгольмом в форме

$$u(x) = \frac{\beta_0(x) + \beta_1(x)\lambda + \ldots}{\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \ldots},$$

где числитель и знаменатель – степенные ряды, сходящиеся при всех значениях λ.

а) Система линейных алгебраических уравнений, заменяющих интегральное уравнение. Прежде чем излагать полно и строго полученные Фредгольмом результаты, мы наметим в общих чертах те основания, которые привели к их открытию [10].

Разделим интервал $[a,b]$ на n равных частей и обозначим точки деления через $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. Тогда

$$t_o = a, t_1 = a + h, t_2 = a + 2h, \ldots, t_n = a + nh, h = \frac{b-a}{n}. \qquad (7.2)$$

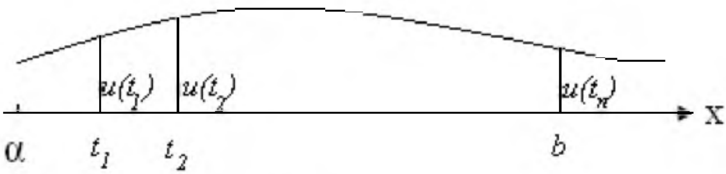
Если мы заменим определенный интеграл в уравнении (7.1) суммой, соответствующей точкам деления (7.2), пределом которой он является, то получим приближенное уравнение

$$u(x) - \lambda h\left[K(x,t_1)u(t_1) + K(x,t_2)u(t_2) + \ldots + K(x,t_n)u(t_n)\right] = f(x).$$

Так как это уравнение имеет место для всех значений x, то оно должно удовлетворяться, в частности и для $x = t_1, t_2, \ldots, t_n$. Тем самым мы получаем следующую систему n линейных уравнений относительно неизвестных $u(t_1), u(t_2), \ldots, u(t_n)$

$$\left.\begin{array}{l}
u(t_1)-\lambda h\left[K(t_1,t_1)u(t_1)+K(t_1,t_2)u(t_2)+\ldots+K(t_1,t_n)u(t_n)\right]=f(t_1) \\
u(t_2)-\lambda h\left[K(t_2,t_1)u(t_1)+K(t_2,t_2)u(t_2)+\ldots+K(t_2,t_n)u(t_n)\right]=f(t_2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u(t_n)-\lambda h\left[K(t_n,t_1)u(t_1)+K(t_n,t_2)u(t_2)+\ldots+K(t_n,t_n)u(t_n)\right]=f(t_n)
\end{array}\right\}. \quad (7.3)$$

Разрешив эту систему относительно $u(t_1), u(t_2), \ldots, u(t_n)$, мы сможем нанести найденные значения как ординаты и провести через вершины этих ординат интерполяционную кривую $u(x)$:



Черт. 2.

Мы вправе ожидать, что эта кривая будет приближенно представлять действительное решение.

Будем писать для сокращения $f_i(t_i)=f_i,\ u(t_i)=u_i,\ K(t_i,t_j)=K_{ij}$ и обозначим через Δ определитель, составленный из коэффициентов, стоящих при неизвестных u_i в написанной выше системе уравнений (7.3)

$$\Delta=\begin{vmatrix}
1-\lambda hK_{11} & -\lambda hK_{12} & \ldots & -\lambda hK_{1n} \\
-\lambda hK_{21} & 1-\lambda hK_{22} & \ldots & -\lambda hK_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
-\lambda hK_{n1} & -\lambda hK_{n2} & \ldots & 1-\lambda hK_{nn}
\end{vmatrix}.$$

Если мы обозначим через $\Delta_{\nu\mu}$ алгебраическое дополнение элемента, находящегося на пересечении ν-й строки и μ-го столбца определителя Δ, то, разрешая систему уравнений (7.3) относительно u_k, мы получим по формулам Крамера

$$u_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \Delta_{ik}}{\Delta} \qquad (k = 1, 2, ..., n) \tag{7.4}$$

в предположении, что $\Delta \neq 0$.

б) Предел определителя Δ. Развертывая Δ по степеням λ, получаем

$$\Delta = 1 - \lambda \sum_{i=1}^{n} K_{ii} h + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} h^2 \begin{vmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^n h^n \lambda^n \begin{vmatrix} K_{11} & \ldots & K_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n1} & \ldots & K_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если теперь мы будем безгранично увеличивать n, то каждый член этого ряда будет стремиться к определенному пределу. Таким образом, по крайней мере формально, мы получим

$$\lim_{n \to \infty} \Delta = 1 - \lambda \int_a^b K(t,t)\,dt + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 +$$

$$+\frac{\lambda^3}{3!} \int_a^b \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & K(t_1,t_3) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & K(t_2,t_3) \\ K(t_3,t_1) & K(t_3,t_2) & K(t_3,t_3) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 dt_3 + \ldots \equiv D(\lambda). \tag{7.5}$$

$D(\lambda)$ называют *определителем Фредгольма* ядра $K(x,t)$.

в) Предел определителей Δ_{ik}. Определители $\Delta_{\mu\mu}$ развертываются по степеням λ совершенно аналогично тому, как это выполнялось для Δ

$$\Delta_{\mu\mu} = 1 - \lambda \sum_{i=1}^{n}{}' - K_{ii} h + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{i,j=1}^{n}{}' \begin{vmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{vmatrix} h^2 - \ldots,$$

где знак $'$ означает, что сумма не распространяется на члены с индексом $i = \mu$. Переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_{\mu\mu} = D(\lambda). \tag{7.6}$$

Далее согласно правилам разложения определителей

$$\Delta_{\nu\mu} = \lambda h \left\{ K_{\mu\nu} - \lambda \sum_{i=1}^{n} h \begin{vmatrix} K_{\mu\nu} & K_{\mu i} \\ K_{i\mu} & K_{ii} \end{vmatrix} + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} h^2 \begin{vmatrix} K_{\mu\nu} & K_{\mu i} & K_{\mu j} \\ K_{i\nu} & K_{ii} & K_{ij} \\ K_{j\nu} & K_{ji} & K_{jj} \end{vmatrix} - \ldots \right\}.$$

Положим $hД_{\mu\nu} = \Delta_{\nu\mu}$. Если при бесконечном увеличении n мы будем изменять (t_μ, t_ν) так, чтобы $\lim(t_\mu, t_\nu) = (x, y)$, то, по крайней мере формально, получим

$$\lim_{n\to\infty} Д_{\mu\nu} = \lambda K(x,y) - \lambda^2 \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,t) \\ K(t,y) & K(t,t) \end{vmatrix} dt +$$

$$+\frac{\lambda^3}{2!} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,t_1) & K(x,t_2) \\ K(t_1,y) & K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) \\ K(t_2,y) & K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 - \ldots \equiv D(x,y,\lambda). \quad (7.7), \ (7.8)$$

Это выражение называют *первым минором Фредгольма*.

г) Предел для значений u_k. Выражение (7.4) можно переписать в форме

$$u_k = f_k \frac{\Delta_{kk}}{\Delta} + \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{f_i \Delta_{ik}}{\Delta} = f_k \frac{\Delta_{kk}}{\Delta} + \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{f_i h Д_{ki}}{\Delta},$$

что в пределе при $n \to \infty$ переходит в

$$u(t_k) = f(t_k) + \frac{1}{D(\lambda)} \int_a^b f(t) D(t_k, t; \lambda) dt.$$

Но t_k есть любая точка деления. Поэтому мы можем заменить t_k на x и написать

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{D(\lambda)} \int_a^b f(t) D(x, t; \lambda) dt. \qquad (7.9)$$

Путь, которым мы получили этот результат, не является строгим математическим путем. Тем не менее представляется весьма вероятным, что выражение (7.9) для $u(x)$ действительно есть решение уравнения (7.1). Ниже будет показано, что это на самом деле так.

д) *Фундаментальные соотношения Фредгольма*

Выведем теперь два соотношения, которые нам будут нужны дальше для получения решения интегрального уравнения (7.1).

Напомним одну из фундаментальных теорем теории определителей, которая гласит, что сумма произведений элементов некоторого столбца на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца равна нулю. Эта теорема в применении к определителю Δ дает:

$$\left(1 - \lambda h K_{jj}\right) \Delta_{jk} - \lambda h K_{kj} \Delta_{kk} - \sum_{i=1}^{n}{}'' \lambda h K_{ij} \Delta_{ik} = 0,$$

где знак $''$ означает, что сумма не распространяется на значения $i = j, k$. Применяя соотношение $\Delta_{\nu\mu} = hД(t_\mu, t_\nu)$, находим:

$$\left(1 - \lambda h K_{ij}\right) hД_{kj} - \lambda h K_{kj} \Delta_{kk} - \sum_{i=1}^{n}{}'' \lambda h^2 K_{ij} Д_{ki} = 0.$$

Разделим обе части этого равенства на h, что мы можем делать, т.к. $h \neq 0$. При $h \neq 0$ полученное после деления на h уравнение перейдет согласно формулам (7.6) и (7.7) в

$$D(t_k, t_j; \lambda) - \lambda K(t_k, t_j) D(\lambda) - \lambda \int_a^b K(t, t_j) D(t_k, t; \lambda) dt = 0.$$

Последнее уравнение имеет место для любых двух значений t_j, t_k, лежащих в интервале $\left[a,b\right]$. Поэтому мы можем положить $t_k = x$, $t_j = y$ и написать:

$$D\left(x,y;\lambda\right)-\lambda K\left(x,y\right)D\left(\lambda\right)=\lambda\int_a^b K\left(t,y\right)D\left(x,t;\lambda\right)dt. \qquad (7.10)$$

Это есть второе фундаментальное соотношение Фредгольма (оно ранее нами получено в §5).

Применим теорему: сумма произведений элементов некоторой строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов любой другой строки равна нулю. Эта теорема в применении к определителю Δ дает

$$\left(1-\lambda hK_{jj}\right)\Delta_{kj}-\lambda hK_{jk}\Delta_{kk}-\sum_{i=1}^{n}{}''\lambda hK_{ji}\Delta_{ki}=0.$$

Поступая как выше, находим:

$$D\left(t_j,t_k;\lambda\right)-\lambda K\left(t_j,t_k\right)D\left(\lambda\right)-\lambda\int_a^b K\left(t_j,t\right)D\left(t,t_k;\lambda\right)dt=0.$$

Это уравнение имеет место для любых двух значений t_j, t_k, лежащих в промежутке $\left[a,b\right]$. Поэтому полагаем $t_j = x, t_k = y$ и пишем

$$D\left(x,y;\lambda\right)-\lambda K\left(x,y\right)D\left(\lambda\right)-\lambda\int_a^b K\left(x,t\right)D\left(t,y;\lambda\right)dt=0. \qquad (7.11)$$

Это есть первое фундаментальное соотношение Фредгольма (также получено в §5).

Эти фундаментальные соотношения нетрудно получить из уравнений резольвенты (5.7) и (5.8), если положив

$$R\left(x,y;\lambda\right)=\frac{D\left(x,y;\lambda\right)}{D\left(\lambda\right)},$$

умножить каждое на $D\left(\lambda\right)$, при условии, что $D\left(\lambda\right)\neq 0$.

8. Доказательство сходимости рядов Фредгольма

С помощью теоремы Адамара мы можем теперь доказать сходимость рядов $D(\lambda)$ и $D(x,y;\lambda)$ [10].

а) Сходимость ряда $D(\lambda)$. $D(\lambda)$ выражается рядом

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}A_n, \tag{8.1}$$

где

$$A_n=\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix}K(t_1,t_1)\ldots K(t_1,t_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ K(t_n,t_1)\ldots K(t_n,t_n)\end{vmatrix}dt_1\ldots dt_n \quad (n>0). \tag{8.2}$$

Ранее мы предполагали, что $|K(x,t)|\le M$. Тогда определитель, входящий в A_n, удовлетворяет всем условиям теоремы Адамара [10], (§14), поэтому

$$|A_n|\le\int_a^b\ldots\int_a^b M^n\sqrt{n^n}\,dt_1\ldots dt_n=\sqrt{n^n}M^n(b-a)^n$$

и, следовательно,

$$\left|(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}A_n\right|\le M^n(b-a)^n\left|\lambda^n\right|\frac{\sqrt{n^n}}{n!}\equiv C_n.$$

Покажем теперь, что ряд с общим членом C_n сходится. Применяя известный критерий сходимости по Даламберу, находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}}{C_n}=M(b-a)|\lambda|\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]=0<1.$$

Поэтому ряд с общим членом C_n сходится, следовательно, ряд $D(\lambda)$ сходится абсолютно при всех λ. Мы запишем этот результат в виде следующей теоремы:

Теорема 3. Степенной ряд $D(\lambda)$ *абсолютно сходится при всех значениях параметра* λ **.**

б) Сходимость ряда $D(x,y;\lambda)$**.** Имеем

$$D(x,y;\lambda)=\lambda K(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n+1}}{n!}B_n(x,y), \qquad (8.3)$$

где

$$B_n(x,y)=\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix} K(x,y)K(x,t_1)\ldots K(x,t_n)\\ K(t_1,y)K(t_1,t_1)\ldots K(t_1,t_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K(t_n,y)K(t_n,t_1)\ldots K(t_n,t_n)\end{vmatrix}dt_1\ldots dt_n. \qquad (8.4)$$

Формулу (8.3) иногда удобнее писать

$$D(x,y;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n+1}}{n!}B_n(x,y),$$

где мы полагаем $B_0(x,y)=K(x,y)$ и $0!=1$. Определитель, входящий в B_n, удовлетворяет всем условиям теоремы Адамара, поэтому

$$|B_n|\le\int_a^b\ldots\int_a^b\sqrt{(n+1)^{n+1}}M^{n+1}dt_1\ldots dt_n=\sqrt{(n+1)^{n+1}}M^{n+1}(b-a)^n,$$

откуда

$$\left|(-1)^n\frac{\lambda^{n+1}}{n!}B_n\right|\le M^{n+1}(b-a)^n\left|\lambda^{n+1}\right|\frac{\sqrt{(n+1)^{n+1}}}{n!}\equiv E_n.$$

Докажем теперь, что ряд с общим членом E_n сходится. Применяя тот же критерий сходимости, что и в предыдущем случае, находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E_n}{E_{n-1}} = M\left(b-a\right)\left|\lambda\right|\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n}\right] = 0 < 1.$$

Поэтому ряд с общим членом E_n сходится, и, значит, ряд $D(x,y;\lambda)$ абсолютно и равномерно сходится при всех значениях λ относительно всех x и y, находящихся в области R. Таким образом, мы имеем следующую теорему:

Теорема 4. Ряд $D(x,y;\lambda)$ абсолютно и равномерно сходится при всех значениях параметра λ в области R.

9. Решение интегрального уравнения, данное Фредгольмом при $D(\lambda)\neq 0$. Первая фундаментальная теорема Фредгольма

Фундаментальные соотношения Фредгольма, т.е. формулы (7.10) и (7.11), позволят нам теперь получить решение интегрального уравнения

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (9.1)$$

для любых $\lambda \neq 0$.

Наведением на метод решения этого интегрального уравнения служит метод решения конечной системы линейных алгебраических уравнений

$$u_i - \lambda h\sum_{j=1}^{n} K_{ij}u_i = f_i, \qquad (i = 1,\ldots,n) \qquad (9.3)$$

Как известно, для нахождения u_k из этой системы уравнений каждое уравнение умножают на Δ_{ik} и суммируют по i от 1 до n. Тогда получается:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \Delta_{ik} - \lambda h \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} u_j \Delta_{ik} = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta_{ik} ,$$

откуда

$$\Delta_{uk} = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta_{ik} . \tag{9.4}$$

Но теперь, по определению (§ 7, в),

$$\Delta_{ik} = hD_{ki} ,$$

и по формуле (7.7)

$$\lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} hD_{ki} = \int_{a}^{b} D(x,t;\lambda)\,dt .$$

Это, естественно, наводит на мысль аналогичным образом поступить с нашим интегральным уравнением (9.1). Напишем его в форме

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_{a}^{b} K(t,\xi) u(\xi)\,d\xi .$$

Предполагая, что это уравнение удовлетворяется для некоторой непрерывной функции $u(t)$, помножим обе его части на $D(x,t;\lambda)$ и проинтегрируем затем по t в пределах от a до b, получим

$$\int_{a}^{b} D(x,t;\lambda) u(t)\,dt = \int_{a}^{b} D(x,t;\lambda) f(t)\,dt +$$

$$+\lambda \int_{a}^{b} \int_{a}^{b} D(x,t;\lambda) K(t,\xi) u(\xi)\,d\xi\,dt . \tag{9.5}$$

Подынтегральное выражение в двойном интеграле непрерывно относительно t и ξ, поэтому мы можем поменять порядок интегрирования и написать этот двойной интеграл так

$$\int_{a}^{b} u(\xi) \left[\lambda \int_{a}^{b} D(x,t;\lambda) K(t,\xi)\,dt \right] d\xi ,$$

что по формуле (7.10) переходит в

$$\int_{a}^{b} \left[D(x,\xi;\lambda) - \lambda D(\lambda) K(x,\xi) \right] u(\xi)\,d\xi .$$

Поэтому формулу (9.5) можно написать в виде

$$\int_a^b D(x,t;\lambda)u(t)\,dt = \int_a^b D(x,t;\lambda)f(t)\,dt +$$

$$+\int_a^b D(x,\xi;\lambda)u(\xi)\,d\xi - \lambda D(\lambda)\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi,$$

что согласно уравнению (9.1) приводится к

$$\int_a^b D(x,t;\lambda)f(t)\,dt - D(\lambda)\big[u(x)-f(x)\big]=0.$$

Разрешая теперь это уравнение относительно $u(x)$ в предположении, что $D(\lambda)\neq 0$, мы получаем

$$u(x)=f(x)+\int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)f(t)}{D(\lambda)}\,dt. \qquad (9.6)$$

Таким образом, если и есть непрерывная функция от x, удовлетворяющая уравнению (9.1), и если $D(\lambda)\neq 0$, то $u(x)$ выражается формулой (9.6).

Нам остается показать, что и обратно функция $u(x)$, определяемая формулой (9.6), является решением уравнения (9.1). В этом можно убедиться простой подстановкой. Подставляя значение $u(x)$ из формулы (9.6) в уравнение (9.1), получаем

$$f(x)+\int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)f(t)}{D(\lambda)}\,dt =$$

$$= f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\left\{f(t)+\int_a^b \frac{D(t,\xi;\lambda)f(\xi)}{D(\lambda)}\,d\xi\right\}dt.$$

Разбивая последний член на две части и меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, находим

$$\int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)f(t)}{D(\lambda)}\,dt = \lambda\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{D(\lambda)}\int_a^b f(\xi)\left[\lambda\int_a^b K(x,t)D(t,\xi;\lambda)\,dt\right]d\xi,$$

что, согласно формуле (7.11), может быть написано в виде

$$\int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)f(t)}{D(\lambda)}dt = \lambda\int_a^b K(x,t)f(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{D(\lambda)}\int_a^b f(\xi)\big[D(x,\xi;\lambda)-\lambda K(x,\xi)D(\lambda)\big]d\xi.$$

Но последнее уравнение, как в этом нетрудно убедиться, представляет собой на самом деле тождество. Следовательно, функция $u(x)$, выражаемая формулой (9.6), действительно удовлетворяет уравнению (9.1).

Таким образом, мы доказали следующую теорему, называемую *первой фундаментальной теоремой Фредгольма*.

Теорема 5. ***Если*** $D(\lambda)\neq 0$, ***ядро*** $K(x,t)$ ***непрерывно в*** R, ***функция*** $f(x)$ ***непрерывна в*** I, ***то уравнение*** **(9.1)** ***имеет только одно непрерывное решение, оно выражается формулой (9.6), где*** $D(x,t;\lambda)$ ***и*** $D(\lambda)$ ***– степенные ряды, сходящиеся при всех значениях параметра*** λ, ***а ряд*** $D(x,t;\lambda)$, ***кроме того, сходится равномерно по*** x ***и*** t ***в области*** R.

Следствие. ***Если*** $D(\lambda)\neq 0$, ***то однородное уравнение***

$$u(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)\,dt$$

имеет только одно непрерывное решение, а именно тривиальное

$$u(x)\equiv 0.$$

Здесь также следует отметить аналогию с конечной системой линейных алгебраических уравнений

$$u_i - \lambda h \sum_{j=1}^{n} K_{ij} u_i = f_i, \quad (i = 1, \dots, n)$$

с определителем Δ. Если $\Delta \neq 0$, то эта система имеет одно и только одно решение. Если все $f_i \equiv 0$, то единственным решением является тривиальное $u_1 = u_2 = \dots = u_n \equiv 0$.

Но $D(\lambda)$ является пределом определителя Δ. Поэтому по аналогии с конечной системой линейных алгебраических уравнений мы и должны были ожидать, что имеют место теорема 5 и ее следствие.

Пример 6. Найти решение интегрального уравнения

$$u(x) - \int_0^1 xe^t u(t)\,dt = f(x),$$

вычислив $D(\lambda)$ и $D(x,t;\lambda)$.

Решение. Воспользуемся формулой (9.6), предварительно вычислив по формулам (8.2) и (8.4) A_n и $B_n(x,t)$

$$A_1 = \int_0^1 K(t_1,t_1)dt_1 = \int_0^1 t_1 e^{t_1} dt_1 = 1, \quad A_2 = \int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n = 0,$$

очевидно, что и все последующие $A_n = 0$. Далее имеем

$$B_0(x,t) = xe^t, \qquad B_1(x,t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0,$$ очевидно, что и все последующие $B_n(x,t) = 0$.

По формулам (8.1) и (8.3) вычисляем $D(\lambda)$ и $D(x,t;\lambda)$

$$D(\lambda) = 1 - \lambda, \quad D(x,t;\lambda) = K(x,t) = xe^t$$

и решение уравнения по формуле (9.6) запишется

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{xe^t}{1-\lambda} f(t)\,dt, \quad \lambda \neq 1.$$

В частности, для $f(x) = e^{-x}$ получим

$$u(x) = e^{-x} + \frac{\lambda x}{1-\lambda}, \ \ \lambda \neq 1.$$

10. Решение однородных интегральных уравнений. Вторая фундаментальная теорема Фредгольма

Рассмотрим сначала случай для однородного уравнения

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \tag{10.1}$$

если $D(\lambda) = 0$ и $D'(\lambda) \neq 0$ или $D(x,t;\lambda) \neq 0$. Пусть λ^* будет значение λ, для которого

$$D(\lambda^*) = 0. \tag{10.2}$$

Будем решать теперь однородное интегральное уравнение (10.1) для этого частного значения параметра $\lambda = \lambda^*$:

$$u(x) = \lambda^* \int_a^b K(x,t)u(t)dt. \tag{10.1*}$$

Решение уравнения (10.1^*) мы получим с помощью первого фундаментального соотношения (7.11) Фредгольма, которое имеет место для всех значений λ и, следовательно, для $\lambda = \lambda^*$. При этом значении параметра λ формула (7.11) переходит, по (10.2), в

$$D(x,y;\lambda^*) = \lambda^* \int_a^b K(x,t)D(t,y;\lambda^*)dt\,.$$

Это равенство имеет место для всех значений y в промежутке $[a,b]$, значит в частности и для $y = y_0$

$$D(x,y_0;\lambda^*) = \lambda^* \int_a^b K(x,t)D(t,y_0;\lambda^*)dt\,.$$

Но это и есть как раз уравнение (10.1^*), где $u(x)$ заменено на $D(x, y_0; \lambda^*)$. Таким образом, мы видим, что $u(x) = D(x, y_0; \lambda^*)$ есть решение уравнения (10.1^*). Более того, это решение непрерывно, так как ряд $D(x, y; \lambda)$ сходится равномерно относительно x и y и его члены непрерывны. Но $D(x, y_0; \lambda)$ может быть тождественно равно нулю для всех x либо при специальном выборе значения y_0 – и в этом случае мы можем взять какое-нибудь другое значение для y_0, при котором этого тождественного обращения в нуль уже не будет, либо если $D(x, y; \lambda^*) \equiv 0$ для всех x и y, и в этом случае приведенное решение сводится к тривиальному $u \equiv 0$, независимо от выбора y_0. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 6. Если $D(\lambda^*) = 0$ ***и*** $D(x, y; \lambda) \not\equiv 0$, ***то функция*** $u(x) = D(x, y_0; \lambda^*)$ ***при надлежащем выборе значения*** y_0 ***будет непрерывным решением уравнения*** (10.1^*), ***не равным тождественно нулю.***

В только что установленной теореме условие $D(x, y; \lambda) \not\equiv 0$ можно заменить условием $D'(\lambda) \neq 0$. Это можно доказать, используя следующую формулу

$$\int_a^b D(x, x; \lambda) dx = -\lambda D'(\lambda) . \tag{10.3}$$

Для доказательства этой формулы представим $D'(\lambda)$ и $D(x, x; \lambda)$ в виде степенных рядов

$$D(\lambda) = 1 - \lambda A_1 + \frac{\lambda^2}{2!} A_2 - \frac{\lambda^3}{3!} A_3 + \ldots ,$$

где A_n определяется формулой(8.2). Отсюда

$$D'(\lambda) = -A_1 + \lambda A_2 - \frac{\lambda^2}{2!} A_3 + \ldots = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_{n+1} .$$

В полном выражении для A_{n+1}

$$A_{n+1} = \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \ldots & K(t_1,t_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_{n+1},t_1) & K(t_{n+1},t_2) & \ldots & K(t_{n+1},t_{n+1}) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_{n+1}$$

вместо $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, t_{n+1}$ подставим $x, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}, t_n$, тогда будем иметь

$$A_{n+1} = \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,x) & K(x,t_1) & \ldots & K(x,t_n) \\ K(t_1,x) & K(t_1,t_1) & \ldots & K(t_1,t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n,x) & K(t_n,t_1) & \ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dx dt_1 \ldots dt_n$$

Меняя здесь порядок интегрирования, а именно интегрируя сперва по $dt_1 \ldots dt_n$, получаем

$$A_{n+1} = \int_a^b \left\{ \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,x) & K(x,t_1) & \ldots & K(x,t_n) \\ K(t_1,x) & K(t_1,t_1) & \ldots & K(t_1,t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n,x) & K(t_n,t_1) & \ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n \right\} dx,$$

что, согласно формуле (8.4), переходит в

$$A_{n+1} = \int_a^b B_n(x,x) dx,$$

так как

$$B_n(x,y) = \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,y) K(x,t_1) \ldots K(x,t_n) \\ K(t_1,y) K(t_1,t_1) \ldots K(t_1,t_n) \\ \ldots \\ K(t_n,y) K(t_n,t_1) \ldots K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n.$$

Поэтому

$$D'(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b B_n(x,x) dx.$$

Но

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} B_n(x,x)$$

есть ряд, равномерно сходящийся относительно x. Поэтому мы можем в выражении для $D'(\lambda)$ переменить порядок суммирования и интегрирования и написать

$$D'(\lambda) = -\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} B_n(x,x)dx.$$

Умножая обе части этого равенства на $-\lambda$ и принимая во внимание формулу (8.3), убеждаемся в том, что действительно

$$\int_a^b D(x,x;\lambda)dx = -\lambda D'(\lambda). \qquad (10.3)$$

Предположим теперь, что $D(\lambda^*) = 0$ и $D'(\lambda^*) \neq 0$. Тогда во всяком случае $\lambda^* \neq 0$, так как $D(0) = 1$. Поэтому, если мы положим в формуле (10.3) $\lambda = \lambda^*$, то правая часть этого равенства будет отлична от нуля, а значит и левая часть не будет равна нулю. Из этого вытекает, что $D(x,x;\lambda^*) \not\equiv 0$ и, следовательно, $D(x,y;\lambda^*) \not\equiv 0$. Значит, действительно условие $D(x,y;\lambda) \not\equiv 0$ в теореме 6 можно заменить условием $D'(\lambda) \neq 0$.

Заметим далее, что если $u(x) = D(x, y_0; \lambda^*)$ есть решение однородного интегрального уравнения (10.1^*), то $Cu(x)$, где C есть произвольный постоянный множитель, также является решением этого уравнения. Таким образом, имеется бесчисленное множество решений, отличающихся друг от друга только постоянным множителем. Это находится в полной аналогии с положением дел для конечной системы линейных алгебраических уравнений

$$u_i - \lambda h \sum_{j=1}^{n} K_{ij} u_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

с определителем Δ. Действительно, если $\Delta = 0$, причем по крайней мере один из первых миноров не равен нулю, то эти уравнения определяют единственным образом отношение величин $u_1, u_2, \ldots, u_n$, т.е. $u_j = C_j u_n \quad (j = 1,...,n; C_n = 1)$. Но равенство $\Delta = 0$ соответствует обращению $D(\lambda)$ в нуль, а неисчезновение по крайней мере одного из первых миноров соответствует условию $D(x, y; \lambda^*) \not\equiv 0$.

Вторая фундаментальная теорема Фредгольма

Дадим далее строгое доказательство второй фундаментальной теоремы Фредгольма. Рассмотрим случай $D(\lambda^*) = 0$ и $D(x, y; \lambda^*) \equiv 0$, которому в линейной алгебраической системе соответствует обращение в нуль определителя Δ со всеми его первыми минорами. Тогда, как известно, становится необходимым рассмотрение миноров высшего порядка. Соответственно этому для случая интегрального уравнения нам необходимо найти предельные выражения, к которым стремятся высшие миноры определителя Δ, когда $h \to 0$.

В последующем мы будем употреблять вместе с Хейвудом и Фреше (Heywood – Frechet, L'Equation de Fredholm [10]) обозначение

$$K\begin{pmatrix} s_1, s_2, ..., s_n \\ t_1, t_2, ..., t_n \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} K(s_1, t_1) & ... & K(s_1, t_n) \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ K(s_n, t_1) & ... & K(s_n, t_n) \end{vmatrix}. \qquad (10.5)$$

а) Определение *p-го* минора для $D(\lambda)$**.** Пусть

$$B_n\begin{pmatrix} x_1, ..., x_p \\ y_1, ..., y_p \end{pmatrix} = \int_a^b ... \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1, ..., x_p, t_1, ..., t_n \\ y_1, ..., y_p, t_1, ..., t_n \end{pmatrix} dt_1 ... dt_n \qquad (10.6)$$

и

$$B_0\begin{pmatrix} x_1, ..., x_p \\ y_1, ..., y_p \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} x_1, ..., x_p \\ y_1, ..., y_p \end{pmatrix}. \qquad (10.7)$$

Тогда p-й минор для $D(\lambda)$, по определению, выражается рядом

$$D\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_p \\ y_1,\ldots,y_p \end{pmatrix}\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^{n+p}}{n!} B_n\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_p \\ y_1,\ldots,y_p \end{pmatrix} \equiv D_p(x,y;\lambda), \tag{10.8}$$

который при p = 1 приводится к $D(x,y;\lambda)$.

С помощью теоремы Адамара можно доказать, вполне аналогично тому, как мы делали это раньше, следующую теорему.

Теорема 7. *Бесконечный ряд для* $D\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_p \\ y_1,\ldots,y_p \end{pmatrix}\lambda$ *абсолютно сходится для всех значений* λ *и равномерно относительно* $x_1,\ldots,x_p$; $y_1,\ldots,y_p$, *удовлетворяющих неравенствам* $a \le x_\alpha \le b$, $a \le y_\beta \le b$ $(\alpha,\beta = 1,2,\ldots,p)$.

Следствие. *Если два значения x с различными индексами становятся равными, например* $x_r = x_s$, *или же два значения y:* $y_i = y_j$, *то* $D_p(x,y;\lambda)$ *обращается в нуль.*

Действительно, тогда в определителе, стоящем в выражении (10.6) для $B_n\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_p \\ y_1,\ldots,y_p \end{pmatrix}$ под знаком интеграла, две строки (два столбца) становятся одинаковыми. Поэтому

$$B_n\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_p \\ y_1,\ldots,y_p \end{pmatrix} = 0,$$

и, следовательно,

$$D_p(x,y;\lambda) = 0.$$

На таком же основании, если в $D_p(x,y;\lambda)$ переменить местами два x или же два y с разными индексами, то $D_p(x,y;\lambda)$ переменит знак.

б) Обобщение фундаментальных соотношений Фредгольма. Разложим определитель, стоящий в $B_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_p \end{pmatrix}$ под знаком интеграла, по элементам столбца y_p:

$$B_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_p \end{pmatrix} =$$

$$= \int_a^b \dots \int_a^b \left\{ \sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} K(x_\alpha, y_\beta) K\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1},\dots,x_p,t_1,\dots,t_n \\ y_1,\dots,y_{\beta-1},y_{\beta+1},\dots,y_p,t_1,\dots,t_n \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{p+i+\beta} K(t_i, y_\beta) K\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p,t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n \\ y_1,\dots,y_{\beta-1},y_{\beta+1},\dots,y_p,t_1,\dots,t_n \end{pmatrix} \right\} dt_1 \dots dt_n$$

В первой сумме множитель $K(x_\alpha, y_\beta)$ можно вынести за знак интеграла. Тогда согласно формуле (10.6), эта сумма перейдет в

$$\sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} K(x_\alpha, y_\beta) B_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1},\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_{\beta-1},y_{\beta+1},\dots,y_p \end{pmatrix}.$$

Если мы переменим обозначения во второй сумме и вместо $t_i, t_{i+1}, t_{i+2},\dots,t_n$ напишем $t, t_i, t_{i+1},\dots,t_{n-1}$ то i-й член этой суммы примет вид

$$(-1)^{p+i+\beta} K(t, y_\beta) K\begin{pmatrix} x_1,\dots\dots\dots\dots,x_p,t_1,\dots\dots\dots\dots,t_{n-1} \\ y_1,\dots,y_{\beta-1},y_{\beta+1},\dots,y_p,t_1,\dots,t_{i-1},t,t_i,\dots,t_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Перенесем теперь столбец t на место между столбцами $y_{\beta-1}$ и $y_{\beta+1}$, на что понадобится $i+p-\beta-1$ перестановок. Тогда для i-го члена второй суммы мы получим выражение

$$-K(t, y_\beta) K\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_{\beta-1},x_\beta,x_{\beta+1},\dots,x_p,t_1,\dots,t_{n-1} \\ y_1,\dots,y_{\beta-1},t,y_{\beta+1},\dots,y_p,t_1,\dots,t_{n-1} \end{pmatrix},$$

которое показывает, что все члены второй суммы равны между собой. Поэтому, если мы проинтегрируем сперва по $t, \dots, t_{n-1}$, эту сумму можно будет записать в виде

$$-n\int_a^b K(t, y_\beta)\left\{\int_a^b \dots \int_a^b \left\{K\begin{pmatrix} x_1, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, x_p, t_1, \dots, t_{n-1} \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, t, y_{\beta+1}, y_p, t_1, \dots, t_{n-1}\end{pmatrix} dt_1 \dots dt_{n-1}\right\} dt,\right.$$

что согласно формуле (10.6) приводится к

$$-n\int_a^b K(t, y_\beta) B_{n-1}\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_{\beta-1}, x_\beta, x_{\beta+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, t, y_{\beta+1}, \dots, y_p\end{pmatrix} dt .$$

Таким образом, мы пришли к формуле

$$B_n\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p\end{pmatrix} = \sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} K(x_\alpha, y_\beta) B_n\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, y_{\beta+1}, \dots, y_p\end{pmatrix} -$$

$$-n\int_a^b K(t, y_\beta) B_{n-1}\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_{\beta-1}, x_\beta, x_{\beta+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, t, y_{\beta+1}, \dots, y_p\end{pmatrix} dt . \qquad (10.9)$$

Подобным же образом, разлагая определитель, стоящий в выражении (10.6) для $B_n\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p\end{pmatrix}$ под знаком интеграла, по элементам строки x_α, мы получим формулу

$$B_n\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_p\end{pmatrix} = \sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} K(x_\alpha, y_\beta) B_n\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\beta-1}, y_{\beta+1}, \dots, y_p\end{pmatrix} -$$

$$-n\int_a^b K(x_\alpha, t) B_{n-1}\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_{\alpha-1}, t, x_{\alpha+1}, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_{\alpha-1}, y_\alpha, y_{\alpha+1}, \dots, y_p\end{pmatrix} dt . \qquad (10.10)$$

Умножая теперь обе части формул (10.9) и (10.10) на $(-1)^n \dfrac{\lambda^{n+p}}{n!}$ и суммируя по n от $n = 0$ до ∞, мы получаем согласно формуле (10.8) следующие два соотношения, представляющие собой обобщения фундаментальных соотношений Фредгольма (7.11) и (7.10)

$$D\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_p \end{pmatrix}\lambda = \sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha+\beta}\lambda K(x_\alpha,y_\beta)D\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1},\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_{\beta-1},y_{\beta+1},\dots,y_p \end{pmatrix}\lambda +$$

$$+\lambda\int_a^b K(t,y_\beta)D\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_{\beta-1},x_\beta,x_{\beta+1},\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_{\beta-1},t,y_{\beta+1},\dots,y_p \end{pmatrix}\lambda\, dt = \qquad (10.11)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha+\beta}\lambda K(x_\alpha,y_\beta)D\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1},\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_{\beta-1},y_{\beta+1},\dots,y_p \end{pmatrix}\lambda +$$

$$+\lambda\int_a^b K(x_\alpha,t)D\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_{\alpha-1},t,x_{\alpha+1},\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_{\alpha-1},y_\alpha,y_{\alpha+1},\dots,y_p \end{pmatrix}\lambda\, dt .$$

(10.12)

Отметим аналогию с конечной системой линейных алгебраических уравнений $u_i - \lambda h\sum_{j=1}^{n} K_{ij}u_j = f_i \quad (i=1,\dots,n)$ с определителем Δ. Если $\Delta \neq 0$, то эта система имеет одно и только одно решение. Если все $f_i \equiv 0$, то единственным решением является тривиальное $u_1 = u_2 = \dots = u_n \equiv 0$.

Если ввести определитель $D(\lambda)$, являющийся пределом определителя Δ, то по аналогии с конечной системой линейных алгебраических уравнений можно ожидать, что имеют место аналогичные теоремы и ее следствия для интегральных уравнений Фредгольма.

в) Соотношение между $D^{(p)}(\lambda)$ и $D\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_p \end{pmatrix}\lambda$.

Соотношение (10.3) между $D'(\lambda)$ и $D(x,x;\lambda)$ является частным случаем следующего общего соотношения:

$$\int_a^b \dots \int_a^b D\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p & \lambda \\ y_1,\dots,y_p & \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_p = (-1)^p \lambda^p \frac{d^p D(\lambda)}{d\lambda^p}. \quad (10.13)$$

Доказательство. Дифференцируя p раз подряд ряд

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n,$$

мы получаем

$$D^{(p)}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n-p}}{(n-p)!} A_n,$$

что после замены $(n-p)$ на n принимает вид

$$D^{(p)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+p} \frac{\lambda^n}{n!} A_{n+p}.$$

Но по формуле (8.2)

$$A_{n+p} = \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} t_1,\dots,t_{n+p} \\ t_1,\dots,t_{n+p} \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_{n+p}.$$

Если теперь вместо $t_1 \dots t_p, t_{p+1}, \dots, t_{p+n}$ мы подставим $x_1 \dots x_p, t_1, \dots, t_n$ и переменим затем порядок интегрирования, производя сначала интегрирование по $t_1, \dots, t_n$, то получим:

$$A_{n+p} = \int_a^b \dots \int_a^b \left\{ \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p,t_1,\dots,t_n \\ x_1,\dots,x_p,t_1,\dots,t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n \right\} dx_1 \dots dx_p,$$

что согласно формуле (10.6) переходит в

$$A_{n+p} = \int_a^b \dots \int_a^b B_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ x_1,\dots,x_p \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_p.$$

Помножив обе части этого равенства на $(-1)^n \dfrac{\lambda^n}{n!}$ и суммируя затем по n от $n=0$ до ∞, мы получим

$$(-1)^p \lambda^p \frac{d^p D(\lambda)}{d\lambda^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \dots \int_a^b (-1)^n \frac{\lambda^{n+p}}{n!} B_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ x_1,\dots,x_p \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_p.$$

Здесь суммирование можно произвести под знаком кратного интеграла. Применяя после этого формулу (10.8), получаем:

$$(-1)^p \lambda^p \frac{d^p D(\lambda)}{d\lambda^p} = \int_a^b \ldots \int_a^b D\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_p \\ y_1, \ldots, y_p \end{pmatrix} \lambda \, dx_1 \ldots dx_p,$$

и формула (10.13) доказана.

Применим этот результат для доказательства того, что не все миноры Фредгольма обращаются в нуль. Пусть λ^* будет корень уравнения $D(\lambda) = 0$. Тогда $\lambda^* \neq 0$, так как $D(0) = 1$. Далее, корень λ^* имеет конечную кратность r $(r \geq 1)$

$$D\left(\lambda^*\right) = 0, \quad D'\left(\lambda^*\right) = 0, \quad \ldots, D^{r-1}\left(\lambda^*\right) = 0, \quad D^r\left(\lambda^*\right) \neq 0.$$

Конечной кратность корня λ^* должна быть потому, что в противном случае мы имели бы $D(\lambda) \equiv 0$. Положим в формуле (10.13) $\lambda = \lambda^*$ и $p = r$, тогда интеграл, стоящий в левой части этой формулы, будет отличен от нуля, ибо, согласно нашему предположению, правая часть не равна нулю. Так как $\lambda^* \neq 0$, то отсюда следует, что

$$D\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_r \\ y_1, \ldots, y_r \end{pmatrix} \lambda \not\equiv 0 \quad \text{и, значит,} \quad D\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_r \\ y_1, \ldots, y_r \end{pmatrix} \lambda \not\equiv 0.$$

Поэтому, рассматривая последовательность

$$D\left(\lambda^*\right) = 0, \quad D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \lambda^*, \quad D\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ y_1, y_2 \end{pmatrix} \lambda^*, \quad D\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \end{pmatrix} \lambda^*, \ldots$$

мы должны прийти к некоторому числу $q \leq r$, называемому рангом корня λ^*, такому, что

$$D\left(\lambda^*\right) = 0, \quad D(x, y; \lambda^*) = 0, \ldots, D\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{q-1} \\ y_1, \ldots, y_{q-1} \end{pmatrix} \lambda^* \equiv 0,$$

$$D\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_q \\ & \lambda^* \\ y_1,\ldots,y_q \end{pmatrix} \neq 0.$$

Последнее неравенство выражает собой, что существует некоторая совокупность значений $x'_1,\ldots,x'_q, y'_1,\ldots,y'_q$, принимаемых переменными $x_1,\ldots,x_q, y_1,\ldots,y_q$,при которой имеет место численное неравенство

$$D\begin{pmatrix} x'_1,\ldots,x'_q \\ & \lambda^* \\ y'_1,\ldots,y'_q \end{pmatrix} \neq 0.$$

В ходе наших рассуждений мы попутно доказали следующую теорему.

Теорема 8. Ранг q ***корня*** λ^* ***уравнения*** $D(\lambda)=0$ ***не превосходит кратности*** r ***этого корня*** $q \le r$.

г) q независимых решений однородного уравнения.

Пусть λ^* будет корнем уравнения $D(\lambda)=0$ с рангом q, так что

$$D\left(\lambda^*\right)=0, \quad D(x,y;\lambda^*)=0,\ldots,D\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_{q-1} \\ & \lambda^* \\ y_1,\ldots,y_{q-1} \end{pmatrix} \equiv 0,$$

но $D\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_q \\ & \lambda^* \\ y_1,\ldots,y_q \end{pmatrix} \neq 0.$

Для значений $\lambda=\lambda^*$, $p=q$ и численных значений x_i и y_i:

$$x_1=x'_1,\ldots,x_{\alpha-1}=x'_{\alpha-1},x_\alpha=x,x_{\alpha+1}=x'_{\alpha+1},\ldots,x_q=x'_q,$$

$$y_1=y'_1,\ldots,y_{\alpha-1}=y'_{\alpha-1},y_\alpha=y'_\alpha,y_{\alpha+1}=y'_{\alpha+1},\ldots,y_q=y'_q$$

напишем второе обобщенное фундаментальное соотношение Фредгольма (10.12)

$$D\begin{pmatrix} x'_1,\dots,x'_{\alpha-1},x,x'_{\alpha+1},\dots,x'_q \\ y'_1,\dots,y'_{\alpha-1},y'_\alpha,y'_{\alpha+1},y'_q \end{pmatrix}\lambda^* =$$

$$=\lambda^*\int_a^b K(x,t)D\begin{pmatrix} x'_1,\dots,x'_{\alpha-1},t,x'_{\alpha+1},\dots,x'_q \\ y'_1,\dots,y'_{\alpha-1},y'_\alpha,y'_{\alpha+1},y'_q \end{pmatrix}\lambda^* dt,$$

ибо по предположению

$$D\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1}\dots,x_q \\ y_1,\dots,y_{\beta-1},y_{\beta+1}\dots,y_q \end{pmatrix}\lambda^* \equiv 0.$$

Если мы теперь разделим обе части полученного равенства на

$$D\begin{pmatrix} x'_1,\dots,x'_q \\ y'_1,\dots,y'_q \end{pmatrix}\lambda^*$$

и положим

$$D\begin{pmatrix} x'_1,\dots,x'_{\alpha-1},x,x'_{\alpha+1},\dots,x'_q \\ y'_1,\dots,y'_{\alpha-1},y'_\alpha,y'_{\alpha+1},y'_q \end{pmatrix}\lambda^* = \varphi_\alpha(x,\lambda^*)D\begin{pmatrix} x'_1,\dots,x'_q \\ y'_1,\dots,y'_q \end{pmatrix}\lambda^*, \quad (10.14)$$

то будем иметь $\varphi_\alpha(x,\lambda^*)=\lambda^*\int_a^b K(x,t)\varphi_\alpha(\mathrm{t},\lambda^*)dt$, что выражает, что функции $\varphi_1(x,\lambda^*),\varphi_2(x,\lambda^*),\dots,\varphi_q(x,\lambda^*)$ являются решениями однородного уравнения (10.1). Эти решения непрерывны, причем по формулам (10.8) и (10.6)

$$\varphi_\alpha(x'_\beta,\lambda^*)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad \beta=\alpha, \\ 0, & \text{если} \quad \beta\neq\alpha. \end{cases} \quad (10.15)$$

Далее, они линейно независимы, т.е. если найдено какое-нибудь соотношение вида

$$C_1\varphi_1(x)+\mathrm{C}_2\,\varphi_2(x)+\dots+\mathrm{C}_q\,\varphi_q(x)\equiv 0,$$

где $C_1,\ldots,C_q$ – постоянные, а $\varphi_\alpha(x)=\varphi_\alpha(x,\lambda^*)$, то должно быть $C_1=C_2=\ldots=C_q=0$. В самом деле, положив в этом соотношении $x=x'_\alpha$, мы получим по формулам (10.15), что $C_\alpha=0$ $(\alpha=1,\ldots,n)$.

Из однородности уравнения (10.1) следует, что функция

$$u(x)=C_1\varphi_1(x)+C_2\,\varphi_2(x)+\ldots+C_q\,\varphi_q(x), \qquad (10.16)$$

где $C_1,\ldots,C_q$ – произвольные постоянные, также являются решениями уравнения (10.1). Таким образом, мы уже имеем ∞^q решений.

д) Доказательство полноты. Остается показать, что каждое решение уравнения (10.1) может быть представлено в виде (10.16).

Если $u(x)$ есть какое-нибудь решение уравнения (10.1)

$$u(x)=\lambda^*\int_a^b K(x,t)u(t)dt,$$

то отсюда следует, что для любой непрерывной функции $H(x,t)$ выполняется тождество

$$0=\int_a^b H(x,t)\left\{u(t)-\lambda^*\int_a^b K(t,s)u(s)ds\right\}dt.$$

Вычитая почленно второе равенство из первого, получаем

$$u(x)=\lambda^*\int_a^b N(x,t)u(t)dt, \qquad (10.17)$$

где $$\lambda^*\,N(x,t)=\lambda^*K(x,t)-\left\{H(x,t)-\lambda^*\int_a^b H(x,s)K(s,t)ds\right\}.$$

Положим теперь в формуле (10.11) $p=q+1$, $x_{q+1}=x$, $y_{q+1}=y$.

Учитывая, что перемена местами двух x или двух y с разными индексами изменяет знак при D, мы получим

$$D\begin{pmatrix} x,x_1,\ldots,x_q \\ y,y_1,\ldots,y_q \end{pmatrix}\lambda^*\Bigg)=\lambda K(x,y)D\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_q \\ y_1,\ldots,y_q \end{pmatrix}\lambda\Bigg)-$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{q}\lambda K(\mathrm{x}_\alpha,\mathrm{y})D\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_{\alpha-1},x,x_{\alpha+1},\dots,x_q \\ y_1,\dots,\mathrm{y}_{\alpha-1},\mathrm{y}_\alpha,\mathrm{y}_{\alpha+1},y_q \end{pmatrix}\lambda+$$

$$+\lambda\int_a^b K(t,y)D\begin{pmatrix} x,x_1,\dots,x'_q \\ y,y_1,\dots,y_q \end{pmatrix}\lambda\,dt.$$

Если мы выберем для x и λ значения

$x_1=x'_1,\dots,x_q=x'_q,y_1=y'_1,\dots,y_q=y'_q,y=t,\lambda=\lambda^*,$

и разделим обе части этой формулы на

$$D\begin{pmatrix} x'_1,\dots,x'_q \\ y'_1,\dots,y'_q \end{pmatrix}\lambda^*$$

и введем обозначение

$$H(x,y)=\frac{D\begin{pmatrix} x,x'_1,\dots,x'_q \\ y,y'_1,\dots,y'_q \end{pmatrix}\lambda^*}{D\begin{pmatrix} x'_1,\dots,x'_q \\ y'_1,\dots,y'_q \end{pmatrix}\lambda^*}, \tag{10.18}$$

то получим:

$$\sum_{\alpha=1}^{q}\lambda^*K(x'_\alpha,t)\varphi_\alpha(x)=\lambda^*K(x,t)-H(x,t)+\lambda^*\int_a^b H(x,s)K(s,t)ds. \tag{10.19}$$

Так как правая часть этого равенства есть не что иное, как $\lambda^*N(\mathrm{x},\mathrm{t})$, то мы можем переписать уравнение (10.17) следующим образом:

$$u(x)=\lambda^*\sum_{\alpha=1}^{q}\varphi_\alpha(\mathrm{x})\int_a^b K(x'_\alpha,t)u(t)dt.$$

Это показывает, что $u(x)$ может быть написано в форме (10.16), если придать постоянным C_α значения

$$C_\alpha = \lambda^* \int_a^b K(x'_\alpha, t) u(t) dt.$$

Таким образом, мы получили вторую фундаментальную теорему Фредгольма.

Вторая фундаментальная теорема Фредгольма

***Теорема 9**. Если $\lambda = \lambda^*$ есть корень уравнения $D(\lambda) = 0$ ранга q, то однородное интегральное уравнение*

$$u(x) = \lambda^* \int_a^b K(x,t) u(t) dt \tag{10.1*}$$

имеет q линейно независимых решений и каждое другое решение выражается через них линейно и однородно. Эта система независимых решений определяется формулами

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{D\begin{pmatrix} x'_1, \ldots, x'_{\alpha-1}, x, x'_{\alpha+1}, \ldots, x'_q & \\ & \lambda^* \\ y'_1, \ldots, y'_{\alpha-1}, y'_\alpha, y'_{\alpha+1}, \ldots, y'_q & \end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix} x'_1, \ldots, x'_{\alpha-1}, x'_\alpha, x'_{\alpha+1}, \ldots, x'_q & \\ & \lambda^* \\ y'_1, \ldots, y'_{\alpha-1}, y'_\alpha, y'_{\alpha+1}, \ldots, y'_q & \end{pmatrix}}, \text{где } \alpha = 1, 2, \ldots, q. \quad (10.14)$$

В формуле (10.14) x'_i и y'_i для всех i любые, при которых

$$D\begin{pmatrix} x'_1, \ldots, x'_{\alpha-1}, x'_\alpha, x'_{\alpha+1}, \ldots, x'_q & \\ & \lambda^* \\ y'_1, \ldots, y'_{\alpha-1}, y'_\alpha, y'_{\alpha+1}, \ldots, y'_q & \end{pmatrix} \neq 0.$$

11. Собственные значения и собственные функции и их вычисление

1. Определения. ***Если $D(\lambda)$ есть определитель Фредгольма для ядра $K(x,t)$ и $D_0(\lambda^*) = 0$, то λ^* называют собственным (или характеристическим) значением ядра $K(x,t)$.***

Далее, если $\varphi(x)$ непрерывна, не обращается тождественно в нуль в интервале и удовлетворяет уравнению $\varphi(x) = \lambda^* \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$, то $\varphi(x)$ называют собственной функцией ядра $K(x,t)$, принадлежащей собственному значению λ^*.

Функции $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_q(x)$ образуют полную систему собственных функций ядра $K(x,t)$, принадлежащих собственному значению λ^*, если каждое другое решение выражается линейно через эти q решений. Таким образом, если $\psi_1,\ldots,\psi_q$ – какие-либо другие q решений, то должны иметь место q соотношений

$$\psi_1 = C_{11}\varphi_1 + \ldots + C_{1q}\varphi_q,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\psi_q = C_{q1}\varphi_1 + \ldots + C_{qq}\varphi_q.$$

Если, кроме того,

$$\begin{vmatrix} C_{11} & \ldots & C_{1q} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{q1} & \ldots & C_{qq} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то функции $\psi_1,\ldots,\psi_q$, в свою очередь, образуют другую полную систему собственных функций, принадлежащих λ^*.

Замечание. Интегральные уравнения Фредгольма могут не иметь собственных (характеристических) чисел и собственных функций.

Пример 7. Уравнение

$$u(x)-\lambda\int_0^1(3x-2)tu(t)dt=0$$

не имеет собственных (характеристических) чисел и собственных функций.

Решение. Действительно полагая $C=\int_0^1 tu(t)dt$, найдем

$u(x)=C\lambda(3x-2)$. Подставив полученное значение для u(x) в данное уравнение, получим, что C=0 и, следовательно, $u(x)\equiv 0$.

Вывод: для любых значений λ данное уравнение имеет только нулевое решение, а значит, оно не имеет характеристических чисел и собственных функций.

Для строгого доказательства второй фундаментальной теоремы Фредгольма, а также для нахождения фундаментальных функций по формуле (10.4) необходимо определить миноры Фредгольма высших порядков.

а) Определение *p-го* минора для $D(\lambda)$.

Р-й минор для $D(\lambda)$, по определению, выражается рядом

$$D\begin{pmatrix}x_1,\dots,x_p\\ y_1,\dots,y_p\end{pmatrix}\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n+p}}{n!}B_n\begin{pmatrix}x_1,\dots,x_p\\ y_1,\dots,y_p\end{pmatrix}\equiv D_p(x,y;\lambda), \tag{11.1}$$

который при p=1 приводится к $D(x,y;\lambda)$, где

$$B_0\begin{pmatrix}x_1,\dots,x_p\\ y_1',\dots,y_p\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}x_1,\dots,x_p\\ y_1',\dots,y_p\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}K(x_1,y_1)\dots K(x_1,y_p)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ K(x_p,y_1)\dots K(x_p,y_p)\end{vmatrix}, \tag{11.2}$$

$$B_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y'_1,\dots,y_p \end{pmatrix} = \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p t_1,\dots,t_n \\ y'_1,\dots,y_p t_1,\dots,t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n. \qquad (11.3)$$

С помощью теоремы Адамара можно доказать, вполне аналогично тому, как мы делали это раньше, следующую теорему.

Теорема 10. ***Бесконечный ряд для*** $D\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p & \\ & \lambda \\ y_1,\dots,y_p & \end{pmatrix}$ ***абсолютно сходится для всех значений*** λ ***и равномерно относительно*** $x_1,\dots,x_p$; $y_1,\dots,y_p$, ***удовлетворяющих неравенствам*** $a \le x_\alpha \le b$, $a \le y_\beta \le b$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p)$.

Следствие. ***Если два значения x с различными индексами становятся равными, например*** $x_r = x_s$, ***или же два значения y:*** $y_i = y_j$, ***то*** $D_p(x, y; \lambda)$ ***обращается в нуль.***

Действительно, тогда в определителе, стоящем в выражении (11.3) для $B_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_p \end{pmatrix}$ под знаком интеграла, две строки (два столбца) становятся одинаковыми. Поэтому

$$B_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_p \end{pmatrix} = 0$$

и, следовательно,

$$D_p(x, y; \lambda) = 0.$$

На таком же основании, если в $D_p(x, y; \lambda)$ поменять местами два x или же два y с разными индексами, то $D_p(x, y; \lambda)$ поменяет знак.

12. Вычисление собственных значений и собственных функций по методу Келлога

Выпишем линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода и рассмотрим линейный интегральный оператор Ay

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds=\lambda Ay, \tag{12.1}$$

где $K(x,s)$ – вещественная и непрерывная функция, при этом $K(x,s)\not\equiv 0$ и ядро симметрическое $K(x,s)=K(s,x)$.

Ранее было доказано существование собственных функций ядра $K(x,s)$, удовлетворяющих этим требованиям. Рассмотрим метод их конструктивного определения, например, путем последовательных приближений по методу Келлога.

Докажем, что собственные функции и собственные значения могут быть найдены методом последовательных приближений.

а) Выбор начальной функции. Возьмем произвольную непрерывную функцию $y_0(x)$, такую, что $Ay_0\not\equiv 0$ и пусть

$$y_n = Ay_{n-1}. \tag{12.2}$$

Обозначим $\|y_n\|=N_n$, тогда

$$\|y_n\|^2=N_n^2=(y_p,y_q), \tag{12.3}$$

где $p+q=2n$.

Доказательство. Пусть $p=n+m$, а $q=n-m$, тогда в силу симметрии оператора A найдем

$$(y_p,y_q)=(A^m y_n,y_q)=(y_n,A^m y_q)=(y_n,y_n)=N_n^2.$$

Для нормированных функций $\varphi_n = \frac{y_n}{\|y_n\|} = \frac{y_n}{N_n}$, тогда из (12.2) имеем $\varphi_n = \frac{Ay_{n-1}}{N_n} = \frac{A\varphi_{n-1}N_{n-1}}{N_n}$, откуда, положив $\mu_n = \frac{N_{n-1}}{N_n}$, получаем

$$\varphi_n = \mu_n A y_{n-1}. \tag{12.4}$$

1. Докажем сходимость последовательности μ_n.

Так как $N_n^2 = (y_{n-1}, y_{n+1})$, то в силу неравенства Коши – Буняковского $N_n^2 \le N_{n-1}N_{n+1}$, тогда следует $\frac{N_{n-1}}{N_n} \ge \frac{N_n}{N_{n+1}}$ или $\mu_n \ge \mu_{n+1} \ge 0$ и последовательность μ_n – монотонно невозрастающая и ограничена снизу, следовательно существует $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \mu \ge 0$.

Покажем, что $\mu \ne 0$, для этого соотношение (12.2) $y_n = Ay_{n-1}$ умножим на y_n, проинтегрируем по x и воспользуемся неравенством Коши – Буняковского.

$$N_n^{\ 2} = (y_n, y_n) = (y_n, Ay_{n-1}) = \int\limits_a^b y_n(x)dx\int\limits_a^b K(x,s)\,y_{n-1}(s)ds \le$$

$\le \sqrt{\int\limits_a^b\int\limits_a^b K^2(x,s)dxds}\sqrt{\int\limits_a^b y_n^2dx\int\limits_a^b y_{n-1}^2ds} = CN_nN_{n-1}$, отсюда следует $N_n \le CN_{n-1}$ и $\mu_n = \frac{N_{n-1}}{N_n} \ge \frac{1}{C} > 0$, где $\int\limits_a^b\int\limits_a^b K^2(x,s)dxds = C^2$.

При $n \to \infty$ $\mu_n = \lim\limits_{n\to\infty}\mu_n \ge \frac{1}{C} > 0$. Что и требовалось доказать.

б) Рациональность выбора начальной функции. Убедимся, что $N_n \ne 0$, тогда и $y_n(x) \ne 0$. Действительно y_0 выбрана так, что $y_1 = Ay_0 \neq 0$ и, следовательно, $N_0 > 0$ и $N_1 > 0$. Из неравенства $N_2 N_0 \geq N_1^2 \Rightarrow N_2 \neq 0$ и т.д. $\Rightarrow N_n \neq 0$ для $n \geq 0$.

в) Сходимость в среднем четных и нечетных итераций.

Докажем, что четные итерации φ_{2n} сходятся в среднем к некоторой функции $\overline{\varphi}(x)$, а нечетные $\varphi_{2n} \to$к $\overline{\overline{\varphi}}(x)$.

Функции $\varphi_n(x)$ непрерывны и нормированы на единицу. Оператор A переводит такие функции в последовательность равномерно ограниченных и равностепенно-непрерывных функций (см. теоремы функционального анализа). Т.к. $A\varphi_{n-1} = \dfrac{\varphi_n}{\mu_n}$, то последовательность $\dfrac{\varphi_n}{\mu_n}$ состоит из равномерно ограниченных и равностепенно-непрерывных функций. По доказанному $\dfrac{1}{\mu_n} \geq \dfrac{1}{\mu_0}$ следует, что последовательность φ_n также состоит из равномерно ограниченных и равностепенно-непрерывных функций, что верно в отдельности и для последовательностей φ_{2n} и φ_{2n+1}.

По теореме Арцела существует подпоследовательность φ_m последовательности φ_{2n}, равномерно сходящаяся к некоторой непрерывной функции $\overline{\varphi}(x)$, и из равномерной сходимости следует сходимость φ_m к $\overline{\varphi}$ в среднем. Далее можно доказать, что из этой сходимости следует, что вся последовательность φ_{2n} сходится к $\overline{\varphi}$ в среднем. Аналогично устанавливается сходимость в среднем последовательности φ_{2n+1} к некоторой непрерывной функции $\overline{\overline{\varphi}}(x)$ и доказывается, что из равностепенной непрерывности и сходимости в среднем φ_{2n} следует ее равномерная сходимость к $\overline{\varphi}(x)$ (рассмотреть самостоятельно). И так $\varphi_{2n} \Rightarrow \overline{\varphi}$ равномерно. Аналогично доказывается, что $\varphi_{2n+1} \Rightarrow \overline{\overline{\varphi}}$ также равномерно. Совершая предельный переход в (12.4) по последовательности с четными и нечетными номерами, получим

$$\overline{\varphi} = \mu A\overline{\overline{\varphi}},\ \overline{\overline{\varphi}} = \mu A\overline{\varphi}. \qquad (12.5)$$

Откуда $\overline{\varphi} = \mu^2 A^2 \overline{\varphi}$ или $(\mu A+1)(\mu A-1)\overline{\varphi} = 0.$

Последнее равенство возможно в двух случаях:

1) $(\mu A-1)\overline{\varphi}=0$, т.е. $\overline{\varphi}=\mu A\overline{\varphi}$ и μ является собственным значением уравнения (12.1), а из (12.5) $\Rightarrow$ что $\overline{\overline{\varphi}}=\overline{\varphi};$

2) $z=(\mu A-1)\overline{\varphi}\not\equiv 0$, тогда $(\mu A+1)z=0$, или $z=-\mu Az$.

Следовательно, $-\mu$ является собственным значением уравнения (12.1). Из (12.5) тогда следует, что $z=\mu A\overline{\varphi}-\overline{\varphi}=\overline{\overline{\varphi}}-\overline{\varphi}.$ Таким образом, либо $\lambda=\mu$, тогда $y=\overline{\varphi}=\overline{\overline{\varphi}}$, либо $\lambda=-\mu$ и тогда $y=\overline{\overline{\varphi}}-\overline{\varphi},$ являются собственным значением и собственной функций уравнения (12.1).

Итак, мы доказали существование собственных значений и собственных функций при рассмотренных условиях и построили алгоритм их определения.

Пример 8. Найти собственные значения и функции уравнения

$$y(x)=\lambda\int_0^1\left(-e^{x+s}\right)y(s)ds.$$

Решение. Возьмем $y_0=1$ и в соответствии с (12.2) при n=1,2,…,n найдем

$$y_1=\int_0^1\left(-e^{x+s}\right)ds=-e^x\left(e-1\right),$$

$$y_2\left(x\right)=\int_0^1\left(-e^{x+s}\right)\left(-e^s\right)\left(e-1\right)ds=e^x\left(e-1\right)\frac{e^2-1}{2},$$

……………………………………………………………………

$$y_n(x) = (-1)^n e^x (e-1)\left[\frac{e^2-1}{2}\right]^{n-1}.$$

Далее находим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\|y_n\|}{\|y_{n+1}\|} = \frac{2}{e^2-1} = |\lambda|$ и строим нормированные функции $\varphi_n \frac{y_n}{\|y_n\|} = (-1)^n \frac{e^x}{e^2-1}$, откуда следует

$$\overline{\varphi} = \lim_{n\to\infty}\varphi_{2n} = \frac{e^x}{e^2-1} = -\lim_{n\to\infty}\varphi_{2n+1} = -\overline{\overline{\varphi}},$$

т.е. $\overline{\varphi} - \overline{\overline{\varphi}} = \frac{2e^x}{e^2-1}$ является собственной функцией данного интегрального уравнения, соответствующей собственному значению $\lambda = -\frac{2}{e^2-1}$.

13. Сопряженные однородные интегральные уравнения

Перед тем как перейти к исследованию неоднородного интегрального уравнения при $D(\lambda) = 0$, рассмотрим однородное интегральное уравнение

$$v(x) = \lambda^* \int_b^a K(t,x)v(t)dt, \tag{13.1}$$

которое называется сопряженным к интегральному уравнению (10.1^*)

$$u(x) = \lambda^* \int_b^a K(x,t)u(t)dt.$$

Заметим, что ядро $\overline{K}(x,t) \equiv K(t,x)$ сопряженного уравнения получается из первоначального ядра перестановкой аргументов x и t. Между решениями уравнений (13.1) и (10.1^*) существует важное соотношение. Прежде чем вывести его, вычислим определитель и миноры Фредгольма для ядра $\overline{K}(x,t)$; мы будем употреблять для них соответствующие обозначения с чертой наверху.

а) Определитель Фредгольма для сопряженного ядра.

Выпишем определитель Фредгольма для ядра $K(x,t)$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n,$$

где
$$A_n = \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & \ldots & K(t_1,t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n,t_1) & \ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n.$$

Сообразно с этим получаем $\overline{D}(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \overline{A}_n,$

где
$$\overline{A}_n = \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} \overline{K}(t_1,t_1) & \ldots & \overline{K}(t_1,t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{K}(t_n,t_1) & \ldots & \overline{K}(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n.$$

Но $\overline{K}(x,t) = K(t,x)$. Поэтому

$$\overline{A}_n = \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & \ldots & K(t_n,t_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_1,t_n) & \ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n.$$

Определитель, стоящий под знаком интеграла в $\overline{A}_n$, отличается от аналогичного определителя, входящего в A_n, лишь тем, что в нем строки и столбцы переставлены. Но, как известно, эта перестановка не меняет величины определителя. Поэтому $\overline{A}_n = A_n$ и, следовательно,

$$\overline{D}(\lambda) \equiv D(\lambda). \qquad (13.2)$$

Отсюда мы заключаем, что $K(t,x)$ и $K(x,t)$ имеют одни и те же собственные значения.

б) Миноры Фредгольма для сопряженного ядра. Согласно формуле (10.8)

$$D\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_p \end{pmatrix}\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^{n+p}}{n!} B_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_p \end{pmatrix},$$

где B_n определяется формулой (10.6). Аналогично этому для $\overline{B}_n$ получаем выражение

$$\overline{B}_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_p \end{pmatrix} = \int_a^b\dots\int_a^b \begin{vmatrix} \overline{K}(x_1,y_1)\dots\overline{K}(x_1,y_p)\overline{K}(x_1,t_1)\dots\overline{K}(x_1,t_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{K}(x_p,y_1)\dots\overline{K}(x_p,y_p)\overline{K}(x_p,t_1)\dots\overline{K}(x_p,t_n) \\ \overline{K}(t_1,y_1)\dots\dots\overline{K}(t_1,y_p)\overline{K}(t_1,t_1)\dots\dots\overline{K}(t_1,t_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{K}(t_n,y_1)\dots\dots\overline{K}(t_n,y_p)\overline{K}(t_n,t_1)\dots\dots\overline{K}(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1\dots dt_n.$$

Но $\overline{K}(x,\mathrm{t}) = K(t,x)$, поэтому

$$\overline{B}_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_p \end{pmatrix} = \int_a^b\dots\int_a^b \begin{vmatrix} K(y_1,x_1)\dots K(y_p,x_1)K(t_1,x_1)\dots K(t_n,x_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K(y_1,x_p)\dots K(y_p,x_p)K(t_1,x_p)\dots K(t_n,x_p) \\ K(y_1,t_1)\dots K(y_p,t_1)K(t_1,t_1)\dots K(t_n,x_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K(y_1,t_n)\dots K(y_p,t_n)K(t_1,t_n)\dots K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1\dots dt_n.$$

Переставляя в определителе, стоящем в подынтегральном выражении, строки и столбцы, что не изменит величины этого определителя, получаем:

$$\overline{B}_n\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_p \\ y_1,\ldots,y_p \end{pmatrix} = \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} y_1,\ldots,y_p,t_1,\ldots,t_n \\ x_1,\ldots,x_p,t_1,\ldots,t_n \end{pmatrix} dt_1\ldots dt_n.$$

Сопоставляя это выражение с формулой (10.6), определяющей B_n, убеждаемся в том, что

$$\overline{B}_n\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_p \\ y_1,\ldots,y_p \end{pmatrix} = B_n\begin{pmatrix} y_1,\ldots,y_p \\ x_1,\ldots,x_p \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$D\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_p & \\ & \lambda \\ y_1,\ldots,y_p & \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} y_1,\ldots,y_p & \\ & \lambda \\ x_1,\ldots,x_p & \end{pmatrix}. \tag{13.3}$$

Так как λ^* есть собственное значение ядра $K(x,t)$ ранга q, то для значений p от 1 до q-1 имеем

$$D\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_p & \\ & \lambda^* \\ y_1,\ldots,y_p & \end{pmatrix} \equiv 0,\ p = 1,\ldots,q\text{-}1, \text{ тогда как } D\begin{pmatrix} x'_1,\ldots,x'_q & \\ & \lambda^* \\ y'_1,\ldots,y'_q & \end{pmatrix} \neq 0..$$

Отсюда, согласно тождеству (13.3), получаем, что при $p = 1,\ldots,q\text{-}1$

$$\overline{D}\begin{pmatrix} x_1,\ldots,x_p & \\ & \lambda^* \\ y_1,\ldots,y_p & \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} y_1,\ldots,y_p & \\ & \lambda^* \\ x_1,\ldots,x_p & \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Если мы далее положим

$$\overline{x}'_\alpha = \overline{y}'_\alpha, \quad \overline{y}'_\alpha = \overline{x}'_\alpha, \tag{13.4}$$

то будем иметь

$$\overline{D}\begin{pmatrix} \overline{x}'_1,\ldots,\overline{x}'_q & \\ & \lambda^* \\ \overline{y}'_1,\ldots,\overline{y}'_q & \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} \overline{y}'_1,\ldots,\overline{y}'_q & \\ & \lambda^* \\ \overline{x}'_1,\ldots,\overline{x}'_q & \end{pmatrix} \neq 0.$$

Отсюда следует, согласно определению, что λ^*, рассматриваемое как собственное значение ядра $K(t,x)$, имеет ранг $\overline{q}$, равный q. Мы запишем этот результат в виде следующей теоремы:

Теорема 11. ***Если λ^* есть собственное значение ядра K(x,t) с рангом q, то λ^* является также собственным значением ядра K(t,x) с тем же рангом $\overline{q} = q$.***

в) Собственные функции сопряженного уравнения.

Применяя теперь теорему 9 к уравнению (13.1), мы находим, что оно также имеет q линейно независимых решений. И фундаментальная система этих решений дается формулами

$$\overline{\varphi}_\alpha(\mathrm{x}) = \frac{\overline{D}\left(\begin{matrix} \overline{x}'_1,\dots,\overline{x}'_{\alpha-1}, x, \overline{x}'_{\alpha+1},\dots,\overline{x}'_q \\ \overline{y}'_1,\dots,\overline{y}'_{\alpha-1}, \overline{y}'_\alpha, \overline{y}'_{\alpha+1}, \overline{y}'_q \end{matrix}\;\lambda^*\right)}{\overline{D}\left(\begin{matrix} \overline{x}'_1,\dots,\overline{x}'_q \\ \overline{y}'_1,\dots,\overline{y}'_q \end{matrix}\;\lambda^*\right)} =$$

$$= \frac{D\left(\begin{matrix} \overline{y}'_1,\dots,\overline{y}'_{\alpha-1}, \overline{y}'_\alpha, \overline{y}'_{\alpha+1}, \overline{y}'_q \\ \overline{x}'_1,\dots,\overline{x}'_{\alpha-1}, x, \overline{x}'_{\alpha+1},\dots,\overline{x}'_q \end{matrix}\;\lambda^*\right)}{D\left(\begin{matrix} \overline{y}'_1,\dots,\overline{y}'_q \\ \overline{x}'_1,\dots,\overline{x}'_q \end{matrix}\;\lambda^*\right)} \quad \alpha = 1,\dots,q,$$

которые после выполнения замены обозначений (13.4) примут вид

$$\overline{\varphi}_\alpha(\mathrm{x}) = \frac{\overline{D}\left(\begin{matrix} x'_1,\dots,x'_{\alpha-1}, x'_\alpha, x'_{\alpha+1},\dots,x'_q \\ y'_1,\dots,y'_{\alpha-1}, x, y'_{\alpha+1}, y'_q \end{matrix}\;\lambda^*\right)}{\overline{D}\left(\begin{matrix} x'_1,\dots,x'_q \\ y'_1,\dots,y'_q \end{matrix}\;\lambda^*\right)}. \qquad (13.5)$$

Наиболее общее решение уравнения (13.1) будет теперь

$$v(x) = C_1\overline{\varphi}_1(x) + C_2\overline{\varphi}_2(x) + \ldots + C_q\overline{\varphi}_q(x).$$

г) Функция $\overline{H}(x, y)$ для сопряженного ядра. Согласно данному выше определению функции $H(x, y)$, имеем:

$$\overline{H}(x,y)=\frac{\overline{D}\begin{pmatrix} x, \overline{x}_1', \ldots, \overline{x}_q' \\ y, \overline{y}_1', \ldots, \overline{y}_q' \end{pmatrix} \lambda^*}{\overline{D}\begin{pmatrix} \overline{x}_1', \ldots, \overline{x}_q' \\ \overline{y}_1', \ldots, \overline{y}_q' \end{pmatrix} \lambda^*}.$$

Применяя тождество (13.3) и производя замену обозначений (13.4), получаем

$$\overline{H}(x,y)=\frac{D\begin{pmatrix} y, \overline{x}_1', \ldots, \overline{x}_q' \\ x, \overline{y}_1', \ldots, \overline{y}_q' \end{pmatrix} \lambda^*}{D\begin{pmatrix} \overline{x}_1', \ldots, \overline{x}_q' \\ \overline{y}_1', \ldots, \overline{y}_q' \end{pmatrix} \lambda^*}=H(y,x). \qquad (13.6)$$

Вследствие этого соотношение (10.19), написанное для ядра $\overline{K}(x,t)=K(t,x)$, после замены обозначений (13.4) примет вид

$$\sum_{\alpha=1}^{q}\lambda^* K(t,y_\alpha')\overline{\varphi}_\alpha(x)=\lambda^* K(t,x)-H(t,x)+\lambda^*\int_a^b H(s,x)K(t,s)ds. \quad (13.7)$$

д) Теорема об ортогональности.

Теорема 12. Если λ_0 и λ_1 – два различных собственных значения ядра K(x,t), $\varphi_0(x)$ – собственная функция ядра K(x,t), принадлежащая собственному значению λ_0, а $\overline{\varphi}_1(x)$ – собственная функция ядра $\overline{K}$ (x,t), принадлежащая собственному значению λ_1, т.е.

$$\varphi_0(x)=\lambda_0\int_a^b K(x,t)\varphi_0(t)dt\ , \qquad (13.8)$$

$$\overline{\varphi}_1(x)=\lambda_1\int_a^b \overline{K}(x,t)\overline{\varphi}_1(t)dt=\lambda_1\int_a^b K(t,x)\overline{\varphi}_1(t)dt, \qquad (13.9)$$

то

$$\int_a^b \varphi_0(x)\overline{\varphi}_1(x)dx=0. \qquad (13.10)$$

Доказательство. Из формулы (13.8) и (13.9) следует, что

$$(\lambda_0-\lambda_1)\int_a^b \varphi_0(x)\overline{\varphi}_1(x)dx=\lambda_0\lambda_1\int_a^b\int_a^b \varphi_0(x)K(t,x)\overline{\varphi}_1(t)dtdx-$$

$$-\lambda_0\lambda_1\int_a^b\int_a^b \overline{\varphi}_1(x)K(x,t)\varphi_0(t)dtdx.$$

Если мы напишем теперь в последнем интеграле, стоящем в правой части, t и x вместо x и t, то убедимся непосредственно, что оба интеграла, стоящие в правой части, равны между собой. Так как по предположению $\lambda_0\neq\lambda_1$, то отсюда и вытекает справедливость формулы (13.10).

Определение. Две непрерывные функции g(x) и h(x), между которыми существует соотношение

$$\int_a^b g(x)h(x)dx=0$$

называют взаимно ортогональными.

Полученный результат может быть теперь сформулирован так: функции $\varphi_0(x)$ и $\overline{\varphi}_1(x)$ взаимно ортогональны.

14. Решение неоднородных интегральных уравнений для случая, когда $D(\lambda)=0$. Третья фундаментальная теорема Фредгольма

Опираясь на результаты, изложенные в § 7-11, можем сформулировать третью фундаментальную теорему Фредгольма.

Теорема 13. ***Если*** $\lambda=\lambda^*$ ***есть собственное значение ядра*** $K(x,t)$ ***ранга*** q***, то неоднородное интегральное уравнение***

$$u(x)=f(x)+\lambda^*\int_a^b K(x,t)u(t)dt, \qquad \textbf{(14.1)}$$

вообще говоря, не имеет непрерывного решения. Для того чтобы существовало непрерывное решение, необходимо выполнение условий

$$\int_a^b f(t)\overline{\varphi_\alpha}(t)dt=0, \qquad \textbf{(14.2)}$$

где $\alpha=1,2,...,q$ ***и функции*** $\overline{\varphi_\alpha}(x)$ ***образуют полную систему собственных функций сопряженного однородного уравнения***

$$v(x)=\lambda^*\int_a^b K(t,x)v(t)dt. \qquad \textbf{(14.3)}$$

Если эти условия выполняются, то существует ∞^q ***решений, определяемых формулой***

$$u(x)=f(x)+\int_a^b H(x,t)f(t)dt+C_1\varphi_1(x)+...+C_q\varphi_q(x), \qquad \textbf{(14.4)}$$

где $C_1,...,C_q$ ***– произвольные постоянные,*** $\{\varphi_\alpha(x)\}$ ***– полная система собственных функций однородного уравнения***

$$u(x)=\lambda^*\int_a^b K(x,t)u(t)dt, \qquad \textbf{(10.1)}$$

где $H(x,t)$ ***определяется формулой***

$$H(x,t)=\frac{D\begin{pmatrix} x, x_1', \dots, x_q' \\ t, t_1', \dots, t_q' \end{pmatrix}\lambda^*}{D\begin{pmatrix} x_1', \dots, x_q' \\ t_1', \dots, t_q' \end{pmatrix}\lambda^*}, \tag{10.18}$$

Собственные функции сопряженного однородного уравнения определяются формулами

$$\overline{\varphi_\alpha}(x)=\frac{D\begin{pmatrix} x_1', \dots, x_{\alpha-1}', x_\alpha', x_{\alpha+1}', \dots, x_q' \\ t_1', \dots, t_{\alpha-1}', \; x \;, t_{\alpha+1}', \dots, t_q' \end{pmatrix}\lambda^*}{D\begin{pmatrix} x_1', \dots, x_{\alpha-1}', x_\alpha', x_{\alpha+1}', \dots, x_q' \\ t_1', \dots, t_{\alpha-1}', \; t_\alpha' \;, t_{\alpha+1}', \dots, t_q' \end{pmatrix}\lambda^*}, \tag{13.5}$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, q$.

Пример 9. Найти решение интегрального уравнения

$$u(x)-4\int_0^1 xt^2u(t)\,dt = x-\frac{3}{4}.$$

Решение. Решая соответствующее однородное уравнение

$$v(x)-4\int_0^1 xt^2v(t)\,dt = 0$$

как уравнение с вырожденным ядром, найдем характеристическое число и собственную функцию

$$\lambda^* = 4, \quad \varphi(x) = x.$$

Аналогично определяем характеристическое число и собственную функцию сопряженного уравнения

$$\psi(x)-4\int_0^1 tx^2\psi(t)\,dt = 0, \qquad \mu = 4, \quad \psi(x) = x^2.$$

Проверяем выполнение условия ортогональности

$$\int_0^1 (x-\frac{3}{4})x^2 dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{4}\right)\Big|_0^1 = 0,$$

оно выполняется. Применяя тот же метод вырожденных ядер, найдем решение неоднородного уравнения.

Ответ: $u\left(x\right) = 4cx + x - \frac{3}{4} = Cx - \frac{3}{4}.$

Далее дадим строгое доказательство третьей фундаментальной теоремы Фредгольма. С помощью результатов, полученных в предыдущем параграфе, мы можем теперь полностью завершить решение неоднородного интегрального уравнения

$$u(x) = f(x) + \lambda^* \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \qquad (14.1)$$

а именно рассмотреть случай $D(\lambda) = 0$, и λ^* имеет ранг q.

Конечная система линейных алгебраических уравнений

$$u_i - \lambda_h \sum_{j=1}^{n} K_{ij} u_j = f_i \qquad (i = 1,\ldots,n),$$

в качестве предела которой может рассматриваться интегральное уравнение (14.1), при $\Delta = 0$, вообще говоря, не имеет никакого конечного решения. Если, однако, величины f_i удовлетворяют определенным условиям, то эта система имеет бесконечную совокупность конечных решений. Аналогично этому мы найдем, что и уравнение (14.1) в случае, когда $D(\lambda) = 0$ не имеет никакого решения, но если $f(x)$ удовлетворяет определенным условиям, то уравнение (14.1) имеет бесконечную совокупность решений.

а) Необходимые условия. Для того чтобы получить необходимые условия, которым должна удовлетворять функция $f(x)$, поступим следующим образом. Предположим, что $u(x)$ есть непрерывная функция от x, удовлетворяющая уравнению (14.1). Помножим обе части этого уравнения на функцию $\overline{\varphi}_a(x)$, являющуюся собственной функцией сопряженного однородного уравнения, принадлежащей собственному значению λ^*:

$$\overline{\varphi}_a(x) = \lambda^* \int_a^b K(t,x)\overline{\varphi}_a(t)dt,$$

и проинтегрируем по x от a до b, тогда получим:

$$\int_a^b f(x)\overline{\varphi}_a(x)dx = \int_a^b u(x)\overline{\varphi}_a(x)dx - \lambda^* \int_a^b \overline{\varphi}_a(x)\{\int_a^b K(x,t)u(t)dt\}dx. \quad (14.5)$$

В последнем интеграле, стоящем в правой части, функцию можно рассматривать как постоянную относительно t и поэтому внести под знак внутреннего интеграла. Если мы изменим затем порядок интегрирования и вынесем u(t) за знак интеграции по переменной x, то последний член равенства (14/5) примет вид

$$\int_a^b u(t)\{\lambda^* \int_a^b \overline{\varphi}_a(x)K(x,t)dx\}dt = \int_a^b u(t)\overline{\varphi}_a(t)dt.$$

Таким образом, первый и второй члены в правой части взаимно уничтожаются, откуда

$$\int_a^b f(x)\overline{\varphi}_a(x)dx = 0 \qquad (a = 1,\dots,q). \qquad (14.2)$$

Значит, для того чтобы могло существовать непрерывное решение u(x) уравнения (14.1), функция f(x) должна удовлетворять q условиям (14.2).

б) Доказательство достаточности. Покажем теперь, обратно, что если $f(x)$ удовлетворяет q условиям (14.2), то уравнение (14.1). действительно имеет непрерывное решение.

Согласно нашему предположению, имеют место q равенств (14.2)

В таком случае $$\sum_{\alpha}^{q} \lambda^* K(x,y'_\alpha)\int_a^b f(t)\overline{\varphi}_a(t)dt = 0.$$

Но выражение $\lambda^* K(x,y'_\alpha)$ не зависит от t и поэтому может быть помещено под знаком интеграла. Меняя порядок суммирования и интегрирования, что мы имеем право делать, получаем:

$$\int_a^b \left\{ \sum_{\alpha}^{q} \lambda^* K(x, y'_\alpha) f(t) \overline{\varphi}_a(t) \right\} dt = 0,$$

что вследствие формулы (13.7) равносильно уравнению

$$\sum_{\alpha=1}^{q} \lambda^* K(t, y'_\alpha) \overline{\varphi}_\alpha(x) = \lambda^* K(t, x) - H(t, x) + \lambda^* \int_a^b H(s, x) K(t, s) ds.$$

$$0 = \int_a^b \lambda^* K(x,t) f(t) dt - \int_a^b H(x,t) f(t) dt + \lambda^* \int_a^b f(t) \left\{ \int_a^b H(s,t) K(x,s) ds \right\} dt.$$

(14.6)

Последний член можно переписать в виде

$$\lambda^* \int_a^b \int_a^b f(t) H(s,t) K(x,s) ds dt,$$

что после замены t и s на s и t примет вид

$$\lambda^* \int_a^b K(x,t) \left\{ \int_a^b f(s) H(t,s) ds \right\} dt.$$

Внося это выражение в уравнение (14.6) и соединяя первый член с последним, получаем:

$$0 = \lambda^* \int_a^b K(x,t) \left\{ f(t) + \int_a^b H(t,s) f(s) ds \right\} dt - \int_a^b H(x,t) f(t) dt. \quad (14.7)$$

Если мы теперь положим

$$u_0(t) = f(t) + \int_a^b H(t,s) f(s) ds,$$

то получим

$$\int_a^b H(x,t) f(t) dt = u_0(x) - f(x),$$

и уравнение (14.7) перейдет в

$$u_0(x) = f(x) + \lambda^* \int_a^b K(x,t) u_0(t) dt.$$

Таким образом, мы доказали, что если удовлетворяются условия (14.2), то уравнение (14.1) имеет по крайней мере одно решение $u_0(x)$, а именно определяемое формулой

$$u_0(x) = f(x) + \int_a^b H(x,t) f(t) dt. \tag{14.8}$$

в) Нахождение всех решений. Предположим, что уравнение (14.1) имеет еще какое-нибудь другое непрерывное $u_0(x)$ Тогда разность $u(\mathrm{x}) - u_0(x)$ будет являться решением однородного уравнения

$$\mathrm{v}(x) = \lambda^* \int_a^b K(x,t)\, \mathrm{v}(t) dt. \tag{14.9}$$

Действительно, вычитая почленно (14.8) из (14.1), получаем:

$$u(x) - u_0(x) = \lambda^* \int_a^b K(x,t) \left[u(t) - u_0(t) \right] dt. \tag{14.10}$$

По теореме 9 общее решение уравнения (14.9) имеет вид

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_q\varphi_q(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_q$ – произвольные постоянные. Поэтому общее решение уравнения (14.10) будет:

$$u(x) - u_0(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_q\varphi_q(x)$$

и значит,

$$u(x) = f(x) + \int_a^b H(x,t) f(t) dt + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_q\varphi_q(x)$$

будет общим решением уравнения (14.1). Таким образом, мы доказали третью фундаментальную теорему Фредгольма.

15. Теорема Адамара

Для строгого обоснования результатов §8 и §10 нужна теорема Адамара. При доказательстве этой теоремы будем опираться на следующую лемму:

Лемма. ***Если все элементы*** a_{ik} ***определителя***

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots\quad\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \textit{(15.1)}$$

вещественны и удовлетворяют условиям

$$a^2_{r1}+a^2_{r2}+\ldots+a^2_{rn}=1, \quad r=1,2,\ldots,n, \qquad \textit{(15.2)}$$

то $\quad |A|\leq 1.$

Приведем сначала два частных случая этой леммы, допускающих геометрическую интерпретацию.

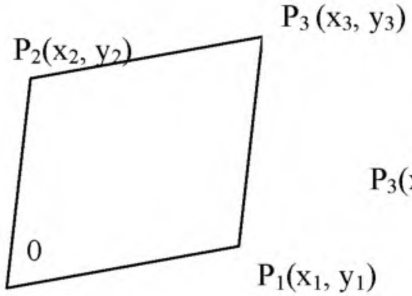
1 случай $n=2$**.** Параллелограмм $OP_1P_3P_2$ (чертеж 3) имеет вершину O в начале прямоугольной системы координат. Координаты вершин P_1 и P_2 обозначены на чертеже. Площадь параллелограмма $OP_1P_3P_2$ выражается формулой

$$A=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

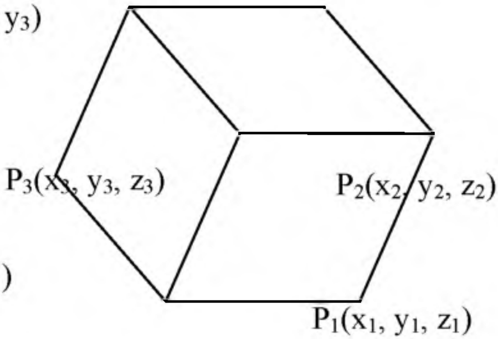
Если $OP_1=1$, $OP_2=1$, т.е. если $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=1$

то геометрически очевидно, что наибольшая площадь получится, когда наш параллелограмм обратится в прямоугольник, причем в этом случае она будет равна 1. Поэтому вообще $|A|\leq 1$.

2 случай $n=3$**.** Одна вершина параллелепипеда $OP_1P_2P_3$ (чертеж 3) находится в начале прямоугольной системы координат.



Чертеж 3



Чертеж 4

Координаты вершин P_1, P_2, P_3 обозначены на чертеже. Объем параллелепипеда $OP_1P_2P_3$ выражается формулой

$$\upsilon = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Если $OP_1 + OP_2 + OP_3 = 1$, т.е. если

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 1,$$

то геометрически очевидно, что объем будет наибольшим, когда параллелепипед станет прямоугольным, причем в этом случае объем будет равен единице. Поэтому вообще $|\upsilon| \le 1$.

Доказательство леммы. $A(a_{11},...,a_{nn})$ есть функция от аргументов a_{rs}, непрерывная в области U, ограничена и замкнута. Поэтому в этой области определитель A имеет максимум и минимум. Эти максимум и минимум, которые мы хотим определить, представляют собой так называемые абсолютные максимум и минимум. Но если некоторая система значений дает абсолютный максимум (минимум) для A, то она дает также и относительный максимум (минимум). Поэтому для определения последнего могут быть применены обыкновенные методы дифференциального исчисления.

Теперь, если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных, связанных с h различными соотношениями

$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, ...,

$\varphi_h(x_1, \ldots, x_n) = 0,$

принимает максимальное или минимальное значение, то n первых частных производных от вспомогательной функции

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_h\varphi_h,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ постоянные числа, должны обратиться в нуль.

В данном случае $f = A, x_r = a_{rs,}$ $\varphi_r = \sum_{s=1}^{n} a_{rs}^2 - 1$,

$r = 1, 2, \ldots, n$

и, значит, вспомогательная функция F имеет вид

$$F = A + \sum_{s=1}^{n} \frac{\lambda_s}{2}(a_{s1}^2 + a_{s1}^2 + \ldots + a_{sn}^2 - 1).$$

По только что приведенной теореме в точке, в которой A имеет максимум (минимум), должны выполняться соотношения

$$\frac{\partial F}{\partial a_{jk}} = \frac{\partial A}{\partial a_{jk}} + \lambda_j a_{jk} = 0,$$

или по правилу дифференцирования определителей имеем

$$A_{jk} + \lambda_j a_{jk} = 0, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (15.3)$$

где A_{jk} обозначает алгебраическое дополнение элемента a_{jk} в определителе A. Помножим обе части этого уравнения на a_{jk} и просуммируем по k от 1 до n. Так как $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2 = 1$, то мы получим

$$A + \lambda_j = 0 \quad \text{или} \quad \lambda_j = -A, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Подставим в уравнение (15.3) вместо λ_j эти значения; тогда мы будем иметь $A_{jk} = Aa_{jk}$, и поэтому определитель

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots A_{nn} \end{vmatrix},$$

сопряженный с А, будет равен

$$\begin{vmatrix} Aa_{11} & Aa_{12} & \dots Aa_{1n} \\ Aa_{21} & Aa_{22} & \dots Aa_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ Aa_{n1} & Aa_{n2} & \dots Aa_{nn} \end{vmatrix}.$$

Первый из этих определителей равен A^{n-1}, а второй, как это нетрудно вычислить, приводится к A^{n+1}. Поэтому $A^{n+1}=A^{n-1}$.

Так как этому уравнению должны удовлетворять и максимум, и минимум определителя, то значит, максимум определителя А равен +1, а минимум равен -1 и, следовательно, $|A| \le 1$.

Теперь мы можем доказать более общую теорема Адамара.

Теорема Адамара. Если элементы b_{jk} определителя

$$\mathbf{B}= \begin{vmatrix} \mathbf{b_{11}} & \mathbf{b_{12}} & \dots & \mathbf{b_{1n}} \\ \mathbf{b_{21}} & \mathbf{b_{22}} & \dots & \mathbf{b_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{b_{n1}} & \mathbf{b_{n2}} & \dots & \mathbf{b_{nn}} \end{vmatrix}$$

вещественны и удовлетворяют неравенствам $|\mathbf{b_{jk}}| \le M$, ***то***

$$|\mathbf{B}| \le M\sqrt[n]{n^n}.$$

Доказательство: Пусть $b^2_{i1}+b^2_{i2}+\ldots+b^2_{in}=s_i$, $(i=1,2,\ldots,n)$.

Случай I. Одна или несколько из величин s_i обращается в нуль, например $s_k=0$. Тогда $b_{ki}=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, следовательно, также и $B=0$, и теорема в этом случае доказана.

Случай II. Ни одна из величин s_i не равна нулю. Тогда каждое s_i положительно, т.е. $s_1>0, s_2>0,\ldots, s_n>0$.

Рассмотрим теперь определитель

$$\frac{B}{\sqrt{s_1 s_2 \ldots s_n}} = \begin{vmatrix} \dfrac{b_{11}}{\sqrt{s_1}} \ldots \dfrac{b_{1n}}{\sqrt{s_1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{b_{n1}}{\sqrt{s_n}} \ldots \dfrac{b_{nn}}{\sqrt{s_n}} \end{vmatrix}.$$

В нем $\left(\dfrac{b_{i1}}{\sqrt{s_i}}\right)^2 + \left(\dfrac{b_{i2}}{\sqrt{s_i}}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{b_{in}}{\sqrt{s_i}}\right)^2 = 1$ $(i=1,2,\ldots,n)$ и, значит, он удовлетворяет условиям леммы. Поэтому $|B| \le \sqrt{s_1 s_2 \ldots s_n}$. Но так как $|b_{ik}| \le M$, то из равенства $s_i=b^2_{i1}+b^2_{i2}+\ldots+b^2_{in}$ вытекает, что

$$s_i \le nM^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Поэтому

$$|B| \le M\sqrt[n]{n^n}.$$

Задачи для самостоятельного решения

I. Проверить, являются ли данные функции решением интегральных уравнений:

I.1. $\varphi(x)=1$, $\quad \varphi(x)+\int\limits_0^1 x(e^{xt}-1)\varphi(t)dt = e^x - x$.

Ответ: да.

I.2. $\varphi(x)=2e^{x}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$, $\varphi(x)+2\int\limits_{0}^{1}e^{x-t}\varphi(t)dt=2xe^{x}$.

Ответ: да.

I.3. $\varphi(x)=1-\dfrac{2\sin x}{1-\dfrac{\pi}{2}}$, $\varphi(x)-\int\limits_{0}^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)dt=1$.

Ответ: да.

I.4. $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $\varphi(x)-\int\limits_{0}^{1}K(x,t)\varphi(t)dt=\sqrt{x}+\dfrac{x}{15}(4x^{3/2}-7)$,

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2}, 0\le x\le t\\ \dfrac{t(2-x)}{2}, t\le x\le 1\end{cases}.$$

Ответ: да.

I.5. $\varphi(x)=e^{x}$, $\varphi(x)+\lambda\int\limits_{0}^{1}\sin xt\varphi(t)dt=1$.

Ответ: нет.

I.6. $\varphi(x)=\cos x$, $\varphi(x)-\int\limits_{0}^{\pi}(x^{2}+t)\cos t\varphi(t)dt=\sin x$.

Ответ: нет.

I.7. $\varphi(x)=xe^{-x}$, $\varphi(x)-4\int\limits_{0}^{\infty}e^{-(x+t)}\varphi(t)dt(x-1)e^{-x}$.

Ответ: да.

I.8. $\varphi(x)=\cos 2x$, $\varphi(x)-3\int\limits_{0}^{\pi}K(x,t)\varphi(t)dt=\cos x$,

$$K(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t, & 0\le x\le t,\\ \sin t\cos x, & t\le x\le \pi.\end{cases}$$

Ответ: да.

I.9. $\varphi(x)=\dfrac{4C}{\pi}\sin x,$ где C – произвольная постоянная,

$$\varphi(x)-\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\sin x\frac{\sin^2 t}{t}\varphi(t)dt=0.$$ Ответ: да.

II. Решить интегральные уравнения Фредгольма методом последовательных приближений:

II.1. $\varphi(x)=x-\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt,\ \ \varphi_0(x)=0;$

Ответ: $\varphi(x)=\sin x.$

II.2. $\varphi(x)=1-\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt,\ \ \varphi_0(x)=0;$

Ответ: $\varphi(x)=\cos x.$

II.3. $\varphi(x)=1+\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt,\ \ \varphi_0(x)=1;$

Ответ: $\varphi(x)=chx.$

II.4. $\varphi(x)=x+1-\int_0^x\varphi(t)dt,\ \ a)\varphi_0(x)=1;\ \ б)\varphi_0(x)=x+1;$

Ответ: $\varphi(x)=1.$

II.5. $\varphi(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\int_0^x\varphi(t)dt,\ \ a)\varphi_0(x)=1;\ \ б)\varphi_0(x)=x;$

Ответ: $\varphi(x)=x.$

II.6. $\varphi(x)=1+x+\int_0^x(\mathrm{x}-\mathrm{t})\varphi(t)dt,\ \ \varphi_0(x)=1;$

Ответ: $\varphi(x)=e^x.$

II.7. $\varphi(x)=2x+2-\int_0^x\varphi(t)dt,\ \ a)\varphi_0(x)=1;\ \ б)\varphi_0(x)=2;$

Ответ: $\varphi(x)=2.$

II.8. $\varphi(x) = 2x^2 + 2 - \int\limits_0^x x\varphi(t)dt,\ \ a)\varphi_0(x) = 2;\ \ б)\varphi_0(x) = 2x;$

Ответ: $\varphi(x) = 2.$

II.9. $\varphi(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x - \int\limits_0^x \varphi(t)dt,\ \ \varphi_0(x) = x^2;$

Ответ: $\varphi(x) = x^2 - 2x.$

II.10. $\varphi(x) = x + 4\int\limits_0^1 x^2t^2\varphi(t)dt, \quad \varphi_0(x) = x;$

Ответ: $\varphi(x) = x + 5x^2.$

II.11. $\varphi(x) = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 xt\varphi(t)dt, \quad \varphi_0(x) = 0;$

Ответ: $\varphi(x) = x$

III. Найти все решения интегральных уравнений Фредгольма методом для вырожденных ядер, где не даны ответы, сделать проверку (ответы даны только для $\lambda \neq \lambda^*$):

III.1. $u(x) = \sec^2 x + \lambda\int\limits_0^1 u(t)dt.$

III.2. $u(x) = \cos x + \lambda\int\limits_0^\pi \sin x \cdot u(t)dt.$

III.3. $u(x) = e^x + \lambda\int\limits_0^{10} xtu(t)dt.$

III.4. $u(x) = x^2 + \lambda\int\limits_0^{10} tu(t)dt.$

III.5. $u(x) = \sin x + \lambda\int\limits_4^{10} xu(t)dt.$

III.6. $u(x)=e^{x}+\lambda\int_{0}^{1}2e^{x}e^{t}u(t)dt.$

III.7. $u(x)=x^{2}+\lambda\int_{0}^{1}(1+xt)u(t)dt.$

III.8. $u(x)=x+\lambda\int_{0}^{\pi}(1+\sin x\sin t)u(t)dt.$

III.9. $u(x)=x+\lambda\int_{0}^{1}(1+x+t)u(t)dt.$

III.10. $u(x)=x+\lambda\int_{0}^{1}(x-t)u(t)dt.$

III.11. $u(x)=x+\lambda\int_{0}^{1}(x-t)^{2}u(t)dt.$

III.12. $\varphi(x)-4\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2}(x)\varphi(t)dt=2x-\pi$.

Ответ: $\varphi(x)=\dfrac{\pi^{2}}{\pi-1}Sin^{2}x+2x-\pi.$

III.13. $\varphi(x)-\int_{-1}^{1}e^{\arcsin(x)}\varphi(t)dt=tg(x)$.

Ответ: $\varphi(x)=tgx.$

III.13. $\varphi(x)-\lambda\int_{-\pi/4}^{\pi/4}tg(t)\varphi(t)dt=ctg(x)$.

Ответ: $\varphi(x)=\dfrac{\pi^{2}}{2}\lambda+Ctgx.$

III.14. $\varphi(x)-\lambda\int_{0}^{1}\cos(q\ln t)\varphi(t)dt=1$.

Ответ: $\varphi(x)=\dfrac{1+q^{2}}{1+q^{2}-\lambda}.$

III.15. $\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^1 \arccos(t)\varphi(t)dt = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ответ: $\varphi(x) = \dfrac{-\pi^2\lambda}{8(\lambda-1)} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \lambda \neq 1.$

III.16. $\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos t\varphi(t)dt = \sin x$.

Ответ: $\varphi(x) = \dfrac{2}{2-\lambda} Sin\, x; \quad \lambda \neq 2.$

III.17. $\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^{2\pi} |\pi - t| \sin x\varphi(t)dt = x$.

Ответ: $\varphi(x) = \lambda\pi^2 Sinx + x.$

III.18. $\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^{\pi} \sin(x-t)\varphi(t)dt = \cos x$.

Ответ: $\varphi(x) = 2\dfrac{2Cosx + \lambda\pi Sinx}{4 + \lambda^2\pi^2}.$

III.19.

$$\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^{2\pi} (\sin x\cos t - \sin 2x\cos 2t + \sin 3x\cos 3t)\varphi(t)dt = \cos x.$$

Ответ: $\varphi(x) = \lambda\pi Sinx + Cosx.$

III.20.. $\varphi(x) - \dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} [x - \dfrac{1}{2}(3t^2 - 1) + \dfrac{1}{2}t(3x^2 - 1)]\varphi(t)dt = 1$.

Ответ: $\varphi(x) = \dfrac{15}{32}(x+1)^2 + \dfrac{5}{16}.$

IV. Решить интегральные уравнения Фредгольма, вычислив итерированные ядра и резольвенту:

IV.1. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{2\pi}\sin(x+t)\varphi(t)dt=1.$

Ответ: $\varphi(x)=1.$

IV.2. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1(2x-t)\varphi(t)dt=\frac{x}{6}..$

Ответ: $\varphi(x)=\frac{1}{6}\left[x+\frac{\lambda(6x-2)-\lambda^2x}{\lambda^2-3\lambda+6}\right].$

IV.3. $\varphi(x)-\int\limits_0^{2\pi}\sin x\cos t\quad\varphi(t)dt=cos2x.$.

Ответ: $\varphi(x)=\cos 2x.$

IV.4. $\varphi(x)=e^x-\int\limits_0^1 e^{x-t}\varphi(t)dt.$

Ответ : $\varphi(x)=\frac{1}{2}e^x.$

IV.5. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1(4xt-x^2)\varphi(t)dt=x.$

Ответ: $\varphi(x)=\frac{3x(2\lambda-3\lambda+6)}{\lambda^2-18\lambda+18}.$

V. Пользуясь определителями Фредгольма, найти резольвенты следующих ядер:

V.1. $K(x,t)=2x-t;\ \ 0\le x\le 1,\ \ 0\le t\le 1.$

Ответ: $R(x,t;\lambda)=\frac{2x-t+(x+t-2xt-\frac{2}{3})\lambda}{1-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6}}.$

V.2. $K(x,t)=x^2t-xt^2;\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le t\le 1.$

Ответ: $$R(x,t;\lambda)=\frac{x^2t-xt^2+xt(\frac{x+t}{4}-\frac{xt}{3}-\frac{1}{5})\lambda}{1+\frac{\lambda^2}{240}}.$$

V.3. $K(x,t)=\sin x\cos t;\ \ 0\le x\le 2\pi,\ \ 0\le t\le 2\pi.$

Ответ: $$R(x,t;\lambda)=sinx\cdot cost.$$

V.4. $K(x,t)=\sin x-\sin t;\ \ 0\le x\le 2\pi,\ \ 0\le t\le 2\pi.$

Ответ: $$R(x,t;\lambda)=\frac{\sin x-\sin t-\pi(1+2\sin x\cdot\sin t)\lambda}{1+\lambda^2\pi^2}.$$

V.5. $K(x,t)=x+t+1;\ \ -1\le x,t\le 1.$

Ответ: $$R(x,t;\lambda)=\frac{x+t+1+2(xt+\frac{1}{3})\lambda}{1-2\lambda-\frac{4}{3}\lambda^2}.$$

V.6. $K(x,t)=e^{x-t};\ \ 0\le x,t\le 1.$

Ответ: $$R(x,t;\lambda)=\frac{e^{x-t}}{1-\lambda}.$$

V.7. $K(x,t)=\sin(\mathrm{x+t});\ \ 0\le x,t\le 2\pi.$

Ответ: $$R(x,t;\lambda)=\frac{\sin(x+t)+\pi cos(x-t)}{1-\pi^2\lambda^2}.$$

V.8. $K(x,t)=e^{x+t};\ \ a=0,\ \ b=1.$

Ответ: $$R(x,t;\lambda)=\frac{2e^{x+t}}{2-(e^2-1)\lambda}.$$

V.9. $K(x,t)=\mathrm{sinx\,cost};\ \ a=0,\ \ b=\frac{\pi}{2}.$

Ответ: $$R(x,t;\lambda)=\frac{2\sin x\cos t}{2-\lambda}.$$

V.10. $K(x,t)=xe^t;\ \ a=-1,\ \ b=1.$

Ответ: $R(x,t;\lambda)=\dfrac{xe^{t+1}}{e-2\lambda}.$

V.11. $K(x,t)=(1+x)(1-\mathrm{t});\quad a=-1,\quad b=0.$

Ответ $R(x,t;\lambda)=\dfrac{3(1+x)(1-t)}{3-2\lambda}.$

V.12. $K(x,t)=x^2t^2;\quad a=-1,\quad b=1.$

Ответ: $R(x,t;\lambda)=\dfrac{5x^2t^2}{5-2\lambda}.$

V.13. $K(x,t)=xt;\quad a=-1,\quad b=1.$ K(x,t)=xt; a=-1, b=1.

Ответ: $R(x,t;\lambda)=\dfrac{3xt}{3-2\lambda}.$

VI. Вычислить $D(\lambda)$ и $D(x,y;\lambda)$ для уравнения Фредгольма $u(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b K(x,t)u(t)dt$ со следующими ядрами и пределами интегрирования:

VI.1. $K(x,t)=1, a=0, b=1.$

Ответ: $D(\lambda)=1-\lambda.$

VI.2. $K(x,t)=-1, a=0, b=1.$

Ответ: $D(\lambda)=1+\lambda.$

VI.3. $K(x,t)=\sin x, a=0, b=\pi.$

Ответ: $D(\lambda)=1-2\lambda.$

VI.4. $K(x,t)=xt, a=0, b=10.$

Ответ: $D(\lambda)=1-\dfrac{1,000}{3}\lambda.$

VI.5. $K(x,t)=t, a=0, b=10.$

Ответ: $D(\lambda)=1-50\lambda.$

VI.6. $K(x,t)=x, a=4, b=10.$

Ответ: $D(\lambda)=1-42\lambda.$

VI.7. $K(x,t)=g(x), a=a, b=b.$

Ответ: $D(\lambda)=1-\lambda\int\limits_a^b g(t)dt.$

VI.8. $K(x,t)=g(t),\ a=a,\ b=b.$

Ответ: $D(\lambda)=1-\lambda\int\limits_a^b g(t)dt.$

VI.9. $K(x,t)=2e^x e^t,\ a=0,\ b=1.$

Ответ: $D(\lambda)=1-(e^2-1)\lambda.$

VI.10. $K(x,t)=x-t,\ a=0,\ b=1.$

Ответ: $D(\lambda)=1+\dfrac{1}{12}\lambda^2.$

VII. Решить интегральные уравнения Фредгольма, вычислив $D(\lambda)$ и $D(x,t;\lambda)$:

VII.1. $\varphi(x)+\int\limits_0^1 x(e^{xt}-1)\varphi(t)dt=e^x-x$.

Ответ: $\varphi(x)=1$.

VII.2. $\varphi(x)+2\int\limits_0^1 e^{x-t}\varphi(t)dt=2xe^x.$

Ответ: $\varphi(x)=2e^x\left(x-\dfrac{1}{3}\right).$

VII.3. $\varphi(x)-\int\limits_0^\pi \cos(x+t)\varphi(t)dt=1.$

Ответ: $\varphi(x)=1-\dfrac{2\sin x}{1-\dfrac{\pi}{2}}.$

VII.4. $\varphi(x)-\int\limits_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=\sqrt{x}+\dfrac{x}{15}(4x^{3/2}-7),$

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2}, 0\le x\le t\\ \dfrac{t(2-x)}{2}, t\le x\le 1\end{cases}.$$

Ответ: $\varphi(x)=\sqrt{x}.$

VII.5. $\varphi(x)-4\int\limits_0^\infty e^{-(x+t)}\varphi(t)dt(x-1)e^{-x}.$

Ответ: $\varphi(x)=xe^{-x}.$

VII.6. $\varphi(x)-3\int\limits_0^\pi K(x,t)\varphi(t)dt=\cos x,$

$$K(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t, & 0\le x\le t,\\ \sin t\cos x, & t\le x\le \pi.\end{cases}$$

Ответ: $\varphi(x)=\cos 2x,$

VII.7. $\varphi(x)-\dfrac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty \sin x\dfrac{\sin^2 t}{t}\varphi(t)dt=0.$

Ответ: $\varphi(x)=\dfrac{4C}{\pi}\sin x.$

VII.8. $\varphi(x)=x+4\int\limits_0^1 x^2t^2\varphi(t)dt,$ *Ответ:* $\varphi(x)=x+5x^2.$

VII.9. $\varphi(x)=\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 xt\varphi(t)dt,$ *Ответ:* $\varphi(x)=x.$

VII.10. $\varphi(x)-4\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2(x)\varphi(t)dt=2x-\pi.$

Ответ: $\varphi(x)=\dfrac{\pi^2}{\pi-1}Sin^2x+2x-\pi.$

VII.11. $\varphi(x)-\int\limits_{-1}^1 e^{\arcsin(x)}\varphi(t)dt=tg(x).$

Ответ: $\varphi(x) = tgx.$

VII.12. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} tg(t)\varphi(t)dt = ctg(x)$.

Ответ: $\varphi(x) = \frac{\pi^2}{2}\lambda + Ctgx.$

VII.13. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^1 \cos(q \ln t)\varphi(t)dt = 1$.

Ответ: $\varphi(x) = \frac{1+q^2}{1+q^2-\lambda}.$

VII.14. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^1 \arccos()\varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\varphi(x) = \frac{-\pi^2\lambda}{8(\lambda-1)} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \lambda \neq 1.$$

VII.15. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos t \varphi(t)dt = \sin x$.

Ответ: $\varphi(x) = \frac{2}{2-\lambda} Sin\, x; \quad \lambda \neq 2..$

VII.16. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin(x+t)\varphi(t)dt = 1.$.

Ответ: $\varphi(x) = 1.$

VII.17. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^1 (2x-t)\varphi(t)dt = \frac{x}{6}..$

Ответ: $\varphi(x) = \frac{1}{6}\left[x + \frac{\lambda(6x-2) - \lambda^2 x}{\lambda^2 - 3\lambda + 6}\right].$

VII.18. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t)dt = \cos 2x$.

Ответ: $\varphi(x)=\cos 2x.$

VII.19. $\varphi(x)=e^x-\int\limits_0^1 e^{x-t}\varphi(t)dt.$

Ответ: $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}e^x.$

VII.20. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1 (4xt-x^2)\varphi(t)dt=x.$

Ответ: $\varphi(x)=\dfrac{3x(2\lambda-3\lambda+6)}{\lambda^2-18\lambda+18}.$

VIII. Решить следующие однородные интегральные уравнения и сделать проверку:

VIII.1. $u(x)=\int\limits_0^1 u(t)dt.$ **VIII.2.** $u(x)=\dfrac{1}{50}\int\limits_1^{10} tu(t)dt.$

VIII.3. $u(x)=\int\limits_0^1 (-1)u(t)dt.$ **VIII.4.** $u(x)=\dfrac{1}{42}\int\limits_4^{10} xu(t)dt.$

VIII.5. $u(x)=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin x\cdot u(t)dt.$ **VIII.6.** $u(x)=\dfrac{1}{e^2-1}\int\limits_0^1 2e^x e^t u(t)dt.$

VIII.7 $u(x)=\dfrac{3}{1,000}\int\limits_0^1 xtu(t)dt.$

IX. Найти характеристические числа и собственные функции для следующих однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром:

IX.1. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{\pi/4} \sin^2 x\quad \varphi(t)dt=0.$

Ответ: $\lambda_1=\dfrac{8}{\pi-2},\;\; \varphi_1(x)=\sin^2 x.$

IX.2. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{2\pi}\sin x\cos t\varphi(t)dt=0$.

Ответ: нет.

IX.3. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{2\pi}\sin x\sin t\varphi(t)dt=0$.

Ответ: $\lambda_1=\dfrac{1}{\pi}$, $\varphi_1(x)=\sin x$.

IX.4. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)dt=0$.

Ответ: $\lambda_1=-\dfrac{2}{\pi}$, $,\lambda_2=\dfrac{2}{\pi}$,

$\varphi_1(x)=\sin x$, $\varphi_2(x)=\cos x$.

IX.5. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{1}(45x^2\ln t-9t^2\ln x)\varphi(t)dt=0$.

Ответ: действительных нет.

IX.6. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{1}(2xt-4x^2)\varphi(t)dt=0.$

Ответ: $\lambda_1=\lambda_2=3, \varphi_1(x)=x-2x^2$.

IX.7. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}(5xt^3+4x^2t)\varphi(t)dt=0$.

Ответ: $\lambda_1=\dfrac{1}{2}$, $\varphi_1(x)=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{10}{3}x^2$.

IX.8. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}(5xt^3+4x^2t+3xt)\varphi(t)dt=0$.

Ответ: $\lambda_1=\dfrac{1}{4}$, $\varphi_1(x)=\dfrac{3}{2}x+x^2$.

IX.9. $\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(xch(t)-tsh(x))\varphi(t)dt=0$.

Ответ: $\lambda_1=-\dfrac{e}{2}$, $\varphi_1(x)=shx$..

IX.10. $\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(xch(t)-t^2sh(x))\varphi(t)dt=0$.

Ответ: нет.

IX.11. $\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(xch(t)-tch(x))\varphi(t)dt=0$.

Ответ: действительных нет.

X. По методу Келлога найдите наименьшие характеристические числа и собственные функции однородных интегральных уравнений Фредгольма, если эти ядра имеют следующий вид (проверить верность полученных результатов):

X.1. $K(x,t)=xt;\ \ 0\le x,t\le 1$.

Ответ: $\lambda_1=3$.

X.2. $K(x,t)=\sin x\cos t;\ \ -\pi\le x,t\le\pi$.

Ответ: $\lambda_1=4$.

X.3. $K(x,t)=\begin{cases} t, & x\ge t,\\ x, & x\le t,\end{cases}\quad 0\le x,t\le 1.$

Ответ: $\lambda_1=2,475$.

X.4. $K(x,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{x}(2-\mathrm{t}), & x\le t,\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{t}(2-x), & x\ge t;\end{cases}\quad 0\le x,t\le 1.$

Ответ: $\lambda_1=4,998$.

X.5. $K(x,t)=x^2t^2;\ \ 0\le x,t\le 1$.

Ответ: $\lambda_1 = 5$.

X.6. $K(x,t) = \begin{cases} t, & x \ge t, \\ x, & x \le t, \end{cases} \quad 0 \le x,t \le 1.$

Ответ: $\lambda_1 = 3$.

X.7. $K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x(2-t), & x \le t, \\ \dfrac{1}{2}t(2-x), & x \ge t, \end{cases} \quad 0 \le x,t \le 1.$

Ответ: $\lambda_1 = 4,59$.

X.8. $K(x,t) = 1 + xt + x^2t^2; \; -1 \le x,t \le 1$.

Ответ: $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}, \quad \varphi_1(x) = Cx.$

X.9. $K(x,t) = \begin{cases} t(\mathrm{x}+1), & 0 \le x \le t, \\ x(\mathrm{t}+1), & t \le x \le 1. \end{cases}$

Ответ: $\lambda_1 = 1, \quad \varphi_1(x) = Cx.$

X.10. $K(x,t) = \begin{cases} -\sqrt{xt}\ln t, & x \le t, \\ -\sqrt{xt}\ln x, & x \ge t, \end{cases} \quad 0 \le x,t \le 1,$

Ответ: $\lambda_1 = 5,78$.

XI. Используя вторую фундаментальную теорему Фредгольма, найти решение следующих однородных интегральных уравнений для всех значений λ (сделать проверку, если не даны ответы):

XI.1. $\varphi(x) - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\varphi(t)}{1+\cos 2t}dt = 0.$

Ответ: $\varphi(x) = C$.

XI.2. $\varphi(x)+6\int_0^1(x^2-2\,\mathrm{xt})\varphi(t)dt=0.$

Ответ: $\varphi(x)=C(x-x^2).$

XI.3. $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \mathrm{arc\,cosx}\,\varphi(t)dt=0.$

Ответ: $\varphi(x)=\begin{cases} C\arccos x, \lambda=1,\\ 0, \qquad \lambda\neq 1, \end{cases}$

XI.4. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(\mathrm{x+t})\varphi(t)dt=0.$

Ответ: $$\varphi(x)=\begin{cases} C\sin x, & \lambda_1=-\dfrac{2}{\pi},\\ C\cos x, & \lambda_2=\dfrac{2}{\pi},\\ 0, & \lambda\neq\pm\dfrac{2}{\pi}. \end{cases}$$

XI.5. $\varphi(x)-\dfrac{1}{4}\int_{-2}^{2}|x|\varphi(t)dt=0.$

Ответ: $\varphi(x)=C|x|.$

XII. Исследовать на разрешимость неоднородные интегральные уравнения и найти существующие решения:

XII.1. $\varphi(x)-\dfrac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=\dfrac{x}{2},$

$$K(x,t)=\begin{cases} \dfrac{x(2-t)}{2}, & 0\le x\le t,\\ \dfrac{t(2-x)}{2}, & t\le x\le 1 \end{cases}.$$

Ответ: $\varphi(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}.$

XII.2. $\varphi(x)+\int\limits_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = xe^x,$

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{sh(x)sh(t-1)}{sh(1)}, & 0\le x\le t,\\ \dfrac{sh(t)sh(x-1)}{sh(1)}, & t\le x\le 1.\end{cases}$$

Ответ: $\varphi(x)=2e^x-2+(2-e)x.$

XII.3. $\varphi(x)-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} K(x,t)\varphi(t)dt=\cos 2x,$

$$K(x,t)=\begin{cases}\sin x \quad \cos t, & 0\le x\le t,\\ \sin t \quad \cos x, & t\le x\le \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Ответ: $\varphi(x)=3\cos 2x+\dfrac{2\sin\sqrt{3}(x-\frac{\pi}{4})}{\sin\dfrac{\sqrt{3}\pi}{4}}.$

XII.4. $\varphi(x)-\int\limits_0^{\pi} K(x,t)\varphi(t)dt=\sin x,$

$$K(x,t)=\begin{cases}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\sin(\mathrm{t}-\dfrac{\pi}{4}) & ,0\le x\le t,\\ \sin(\mathrm{t}+\dfrac{\pi}{4})\sin(\mathrm{x}-\dfrac{\pi}{4}) & ,t\le x\le \pi.\end{cases}$$

Ответ: $\varphi(x)=-1.$

XII.5. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{\pi}\cos^2 x\varphi(t)dt=1$.

Ответ: $\varphi(x)=1+\dfrac{2\lambda\pi}{2-\lambda\pi}\cos^2 x;\quad \lambda\neq\dfrac{2}{\pi}$. При $\lambda=\dfrac{2}{\pi}$ решений нет.

XII.6. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}xe^t\varphi(t)dt=x$.

Ответ: $\varphi(x)=\dfrac{e}{e-2\lambda}x;\quad \lambda\neq\dfrac{e}{2}$. При $\lambda=\dfrac{e}{2}$ решений нет.

XII.7. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{2\pi}|x-\pi|\varphi(t)dt=x$.

Ответ: $\varphi(x)=x+\dfrac{2\lambda\pi^2}{2-\lambda\pi^2}|x-\pi|;\quad \lambda\neq\dfrac{1}{\pi^2}$. При $\lambda=\dfrac{1}{\pi^2}$ решений нет.

XII.8. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{1}(2xt-4x^2)\varphi(t)dt=1-2x$.

Ответ: $\varphi(x)=\dfrac{3x(2\lambda^2x-2\lambda^2-5\lambda-6)+(\lambda+3)^2}{(\lambda+3)^2};\quad \lambda\neq-3$.

При $\lambda=-3$ решений нет.

XII.9. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}(x^2-2xt)\varphi(t)dt=x^3-x$.

Ответ:

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^3-\dfrac{3(4\lambda+5)}{5(4\lambda+3)}x & \lambda\neq\dfrac{3}{2},\quad \lambda\neq-\dfrac{3}{4}, \\ x^3-\dfrac{11}{15}x+cx^2, & \lambda=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

При $\lambda=-\dfrac{3}{4}$ решений нет.

XII.10.

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{\pi}\cos x\cos t+\tfrac{1}{\pi}\sin 2x\sin 2t\right)\varphi(t)dt=\sin x\,.$$

Ответ: $\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & \lambda\neq 1,\\ c_1\cos x+c_2\sin 2x+\sin x, & \lambda=1.\end{cases}$

XII.11. $u(x)=\sec^2 x+\lambda\int_0^1 u(t)dt.$ **XII.12.**

$u(x)=\sec x\, tg\, x-\lambda\int_0^1 u(t)dt.$

XII.13. $u(x)=\cos x+\lambda\int_0^{\pi}\sin x\cdot u(t)dt.$ **XII.14.**

$u(x)=e^x+\lambda\int_0^{10} xtu(t)dt.$

XII.15. $u(x)=x^2+\lambda\int_0^{10} tu(t)dt.$ **XII.16**

$u(x)=\sin x+\lambda\int_4^{10} xu(t)dt.$

XII.17. $u(x)=e^x+\lambda\int_0^1 2e^x e^t u(t)dt.$

XII.18. $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^1 xt\varphi(t)dt+\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Ответ: при $\lambda\neq\dfrac{3}{2}$ α,β,γ – любые числа; При $\lambda=\dfrac{3}{2}$ уравнение разрешимо при $\beta=0$ и любых α,γ.

XII.19. $\varphi(x)=\lambda\int_0^1 (x+t)\varphi(t)dt+\alpha e^x+\beta x.$.

Ответ: при $\lambda \neq -6 \pm 4\sqrt{3}$ $\alpha, \beta -$ любые числа; при $\lambda = -6 + 4\sqrt{3}$ уравнение разрешимо при условии $(e+\sqrt{3}-1)\alpha + (\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3})\beta = 0$; при $\lambda = -6 - 4\sqrt{3}$ уравнение разрешимо при условии $(e-\sqrt{3}-1)\alpha + (\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3})\beta = 0.$

XII.20. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^{\pi/2} xt\varphi(t)dt + \alpha x + \beta \sin x$ **.**

Ответ: при $\lambda \neq \dfrac{24}{\pi^3}$ $\alpha, \beta -$ любые числа; при $\lambda = \dfrac{24}{\pi^3}$ уравнение разрешимо при условии $\pi^2\alpha + 24\beta = 0.$

Примерный вариант тест-контрольной работы

1. Является ли функция $y = x$ решением интегральных уравнений

1.1. $\int\limits_0^1 y(t)dt = 1,$ 1.2. $y(x) = 1 - \int\limits_0^1 ty(t)dt.$

2.Укажите тип интегральных уравнений

2.1. $y(x) = x^3 - \int\limits_a^b t \ln\, y(t)dt.$

2.2. $\int\limits_a^b xty(t)dt = 1 + x,$

3. Выписать интегральное уравнение Фредгольма эквивалентное данному уравнению Вольтерра

$$\int\limits_0^x (t - x)y(t)dt = 1,$$

4.1. Применив метод вырожденных ядер, найти решение уравнения

$$\int_0^1 e^{t-x} y(t)\,dt = 1,$$

4.2. Получить интегральное уравнение эквивалентное следующей задаче

$$\begin{cases} y'' - y = Sin\ x, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

5. Применив степенной ряд (по степеням «x» или «x-a»), найти три члена разложения решения уравнения

$$v(x) = x^2 + \int_0^1 v(t)dt.$$

6. Применив ряд по степеням параметра, найти третий член разложения решения уравнения

$$u(x) = 1 + \int_0^1 tu(t)dt.$$

7. Найти третье итерированное ядро ядра K(x,s) = x-s для уравнения Вольтерра.

8. Найти три слагаемых разложения в ряд резольвенты ядра

K(x,s)= xs уравнения Фредгольма.

9. Записать решение уравнения, если резольвента ядра известна

$$y(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t) y(t)dt = f(x).$$

10. Найти третье приближение к решению, применив метод последовательных приближений для уравнения

$$z(x) = x^3 + \int_0^x t\ z(t)dt.$$

Приложение

В таблице 1 сведены вместе результаты решения уравнения Фредгольма

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt.$$

и после неё помещена для сопоставления аналогичная таблица 2 для конечной системы линейных уравнений.

Таблица 1

Случай I: $D(\lambda) \neq 0$		Случай II: $D(\lambda) = 0$ ранг q	
Неоднородное	Однородное	Неоднородное	Однородное
Единственное решение $u(x) = f(x) + \int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} f(t) dt$	Единственное решение $u \equiv 0$	Решения существуют только тогда, когда функция f удовлетворяет условиям $\int_a^b f(x) \varphi_\alpha(x) dx$ В этом случае имеется ∞^q решений.	∞^q решений $\sum_{a=1}^{q} C_\alpha \varphi_\alpha(x)$

Для системы алгебраических уравнений

$$u_i - \lambda h \sum_{j=1}^{n} K_{ij} u_j = f_i, (i = 1, \ldots, n)$$

результаты её решения также поместим в таблицу.

Таблица 2

Случай I: $\Delta \neq 0$		Случай II: $\Delta = 0$ ранг q	
Неоднородная Система	Однородная Система	Неоднородная Система	Однородная система
Едииственная система решений $u_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \Delta_{ik}}{\Delta}$	Единственное решение $u_k \equiv 0$	И меем ∞^q решенний в случае, если f_i удовлетворяют определенным q соотношениям внда $C_{\alpha 1} f_1 + \ldots + C_{\alpha n} f_n = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, q)$	∞^q решений, если оиределитель Δ имеет ранг r, где q=n-r

Библиографический список

1. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление / А.Б. Васильева, Т.Н. Медведев, Н.А. Тихонов, Т.А. Уразгильдина. – Москва, 2003.
2. Васильева А.Б. Интегральные уравнения / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. – Москва: Физматлит, 2002.
3. Виарда Г. Интегральные уравнения / Г. Виарда. – Москва: ГТТИ, 1933.
4. Трикоми Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. – Москва: ИЛ, 1960.
5. Интегральные уравнения / П.П. Забрейко [и др.]. – Москва: Наука, 1968.
6. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – Москва: Наука, 1962.
7. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию / М.Л. Краснов. – Москва: Наука, 1975.
8. Краснов М.Л. Интегральные уравнения / М.Л. Краснов, А.И. Кисилев, Г.И. Макаренко. – Москва: УРСС, 2003.
9. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа / П.И. Лизоркин. – Москва: Наука, 1965.
10. Ловит У.В. Линейные интегральные уравнения / У.В. Ловит. – Москва: Госиздат, 1957. – 266 с.
11. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – Москва: Высшая школа, 1982.
12. Михлин С.Г. Интегральные уравнения и их приложения / С.Г. Михлин. – Москва: ОГИЗ, 1949.
13. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям / С.Г. Михлин. – Москва: Физматгиз, 1959.
14. Михлин С.Г. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / С.Г. Михлин, Х.Л. Смолицкий. – Москва: Наука, 1965.
15. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений / И.Г. Петровский. – Москва: УРСС, 2003.
16. Привалов И.И. Интегральные уравнения / И.И. Привалов. – Москва: ОНТИ, 1937.
17. Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям / А.Д. Полянин, А.В. Манжирова. – Москва: Физматлит, 2003.
18. Тихонов А.Н. Численные методы / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Москва: Наука, 1967.
19. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения / Л.Я. Цлаф. – Москва: Лань, 2005.
20. Математические уравнения. [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.eqworld.ipmnet.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Геннадий Александрович Шишкин

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е.П. Евдокимова*
Компьютерная верстка *Т.А. Олоевой*

Свидетельство о государственной аккредитации
№ 1289 от 23 декабря 2011 г.

Подписано в печать 15.09.2014. Формат 60x84 1/16.
Уч.-изд. л. 5,73. Усл. печ. л. 6,17. Тираж 65. Заказ 194.
Цена договорная

Издательство Бурятского госуниверситета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
riobsu@gmail.com

Отпечатано в типографии Издательства
Бурятского государственного университета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Сухэ-Батора, 3а