Д.К. ФАДДЕЕВ
М.С. НИКУЛИН
И.Ф. СОКОЛОВСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Д. К. ФАДДЕЕВ
М. С. НИКУЛИН
И. Ф. СОКОЛОВСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.11
Ф15
УДК 51 (075.4)

Рекомендовано Главным управлением общего среднего образования Министерства просвещения СССР в качестве пособия для учащихся классов и групп с углубленным изучением математики

Фаддеев Д. К., Никулин М. С., Соколовский И. Ф. **Элементы высшей математики для школьников.**— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1987.— 336 с.

В книге излагаются основные понятия дифференциального и интегрального исчислений, их приложения к исследованию элементарных функций, применения к приближенным вычислениям, решению некоторых задач механики и физики. Имеются главы, посвященные изучению тригонометрических функций, комплексных чисел, элементов теории вероятностей. Каждая глава снабжена упражнениями.

Для учащихся старших классов школ и ПТУ, студентов техникумов и вузов, а также преподавателей математики, инженеров и техников.

Ил. 150.

Рецензенты:

кафедра высшей алгебры МГУ (заведующий кафедрой член-корреспондент АН СССР профессор *А. И. Кострикин*)
доктор физико-математических наук *К. И. Осколков*

$Ф \frac{1702050000-083}{053(02)\text{-}87}$ 70-87

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана на основе материалов, по которым велось экспериментальное преподавание курса алгебры и начал математического анализа, предложенного Д. К. Фаддеевым для средней школы. Содержание книги охватывает круг вопросов, входящих в программу по математике для старших классов. В идейном плане книга тесно связана с курсом алгебры Д. К. Фаддеева, изложенным в его книге «Алгебра 6—8», которая вышла в 1983 г. в издательстве «Просвещение» в серии «Библиотека учителя математики» *).

Предлагаемая читателю книга по содержанию значительно шире существующих сейчас учебников по математике для средней школы. Например, кроме традиционного уже для курса средней школы понятия первой производной (и ее приложений к исследованию функций), в книге рассмотрено понятие производных высшего порядка и на его основе дан вывод формулы бинома Ньютона, введено понятие порядка близости функций, получена формула Тейлора, рассмотрены проблемы приближенных вычислений на основе понятия дифференциала.

В главе «Элементы интегрального исчисления» даны методы приближенных вычислений интегралов, решена задача определения длины плоской кривой, более подробно рассмотрены способы вычисления неопределенных интегралов и вопросы решения простейших дифференциальных уравнений, а также некоторые численные методы их решения.

Многие из затронутых в книге вопросов предполагают и стимулируют применение современных вычислительных средств от простейших микрокалькуляторов до ЭВМ.

---

*) Эта книга Д. К. Фаддеева в ссылках в дальнейшем будет просто указываться как «Алгебра 6—8».

В книге даны несколько более полные и строгие доказательства теорем, чем это обычно принято в школе, но не это было основной задачей, которую ставили перед собой авторы. Эти места, а также другие, отмеченные знаками ◀ и ▶, можно опустить при первом чтении.

Одна из главных целей этой книги — показать, что основные идеи математического анализа очень просты и наглядны, если их излагать на том интуитивном уровне, на котором они фактически возникли. Поэтому с первых страниц книги вводится простое соображение, которое авторы называют «основным принципом» дифференциального исчисления. Согласно этому принципу достаточно малый кусочек гладкой кривой почти совпадает с отрезком некоторой прямой, и их различие постепенно исчезает по мере стягивания участка кривой к некоторой точке. Наглядные рассуждения, основанные на этом принципе, везде, где это оказалось возможным, предшествуют строгим доказательствам.

Авторы считают, что понимание основного принципа дифференциального исчисления и неформальное владение этим принципом имеют большое методологическое и мировоззренческое значения и должны предшествовать изучению серьезных вузовских, в том числе и университетских курсов математического анализа.

Авторы приносят глубокую благодарность учителям средней школы № 280 г. Ленинграда Н. Э. Скучас и З. А. Иоффе, проводившим преподавание алгебры и начал анализа по материалам, положенным в основу этой книги и «Алгебры 6—8». Мы рассчитываем на то, что предлагаемая книга окажется интересной и полезной для учащихся старших классов школ и ПТУ, интересующихся математикой и ее применениями в физике и технике, для студентов техникумов и вузов, а также для преподавателей математики и физики.

Авторы

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Основной принцип дифференциального исчисления

Главной целью области математики, носящей название математического анализа, является исследование функций, достаточно «хороших», именно тех, которые возникают при количественном исследовании задач классической физики, механики, техники. При этом важную роль играет изучение функции «в малом», т. е. *в достаточно малых окрестностях каждой точки* области задания функции. Наиболее простые и важные вопросы, на которые требуется получить ответ,— возрастает ли функция в окрестности данной точки (или убывает) и какова скорость этого возрастания (или убывания). Изучение функций «в малом» составляет предмет раздела математического анализа, называемого *дифференциальным исчислением.*

Не менее важной является обратная задача — если известно поведение функции в окрестности каждой точки ее области определения, то как восстановить функцию в целом, т. е. во всей области ее определения? Эта задача составляет предмет изучения так называемого *интегрального исчисления.*

Основной принцип дифференциального исчисления очень прост. Если не входить в подробности, он заключается в следующем. Пусть дана «гладкая» функция $y=f(x)$, т. е. такая, что ее графиком является непрерывная плавная линия без изломов. Возьмем маленький интервал, примыкающий к данной точке x_0 (рис. 1). Если выбранный интервал действительно мал, то график функции на нем не успеет сильно изогнуться и будет близок к отрезку некоторой прямой линии. Если брать интервалы все более малые, близость участка графика к прямолинейному отрезку будет все более совершенной. Кусочек графика будет все теснее примыкать к некоторой прямой линии. Прямая линия есть график линейной функции. Следовательно, *мы можем сказать, что любая гладкая функция «в малом», т. е. на достаточно малом интервале изменения аргумента, почти линейна и тем ближе к линейной, чем меньше интервал.*

В этом состоит смысл основного принципа дифференциального исчисления.

Разумеется, приведенная формулировка принципа не является теоремой в строгом смысле этого слова, ибо как предпосылка (гладкость функции), так и заключение (близость функции к линейной) не даны здесь посредством строгих математических определений, но лишь при помощи наглядных геометрических представлений. В этом слабость приведенной формулировки, но ее сила заключается в простоте и наглядности, так что она легко используется в приложениях математики.

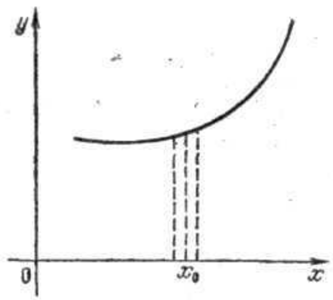

Рис. 1

Прямая, к которой наиболее тесно прижимается график функции $y=f(x)$ в окрестности точки с абсциссой x_0, называется *касательной* к графику в этой точке. Ее угловой коэффициент называется *значением производной* от функции $f(x)$ в точке x_0. Значение производной в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ или $y'_{x=x_0}$.

Значение производной $f'(x_0)$ зависит от абсциссы x_0 точки, для которой это значение вычисляется. Поэтому $f'(x_0)$ является значением некоторой функции, называемой *производной от функции* $f(x)$. Эта функция обозначается через $f'(x)$.

Проследим на примерах, как происходит приближение гладкой функции к линейной на малом интервале.

Пример 1. Пусть $y=f(x)=x^2$ и $x_0=1$. Вблизи точки $x_0=1$ можно положить $x=1+h$, где h — переменная, принимающая сколь угодно малые значения. Тогда

$$x^2=(1+h)^2=1+2h+h^2\approx 1+2h=1+2(x-1)=2x-1.$$

При переходе к приближенному равенству мы отбросили h^2, учитывая, что $h^2=(x-1)^2$ уменьшается существенно быстрее, чем $|h|=|x-1|$, ибо h^2 во столько же раз меньше $|h|$, во сколько $|h|$ меньше 1.

Таким образом, ордината точки на графике функции $f(x)=x^2$ отличается от соответствующей ординаты на прямой $y=2x-1$ на величину $h^2=|x-1|^2$, существенно меньшую при малых $|h|$, чем отклонение $|h|=|x-1|$ абсциссы x от 1.

Итак, прямая с уравнением $y=2x-1$ особенно тесно примыкает к графику функции $y=x^2$ в окрестности точки $x_0=1$, т. е. эта прямая есть касательная к графику в этой точке и ее угловой коэффициент 2 есть значение $f'(1)$ производной при $x_0=1$.

◀ Не очень трудно убедиться в том, что прямая $y=2x-1$ примыкает к графику функции x^2 в точке (1,1) более тесно, чем любая другая прямая, проходящая через точку (1,1). Уравнение любой наклонной прямой, проходящей через точку (1, 1), есть $y=kx-(k-1)$, где k — ее угловой коэффициент. Ордината точки на графике функции x^2 отличается от ординаты соответствующей точки на прямой на величину

$$x^2-(kx-(k-1))=x^2-kx+k-1=(x-1)(x-k+1).$$

Эта величина по модулю меньше $|x-1|$ во столько же раз, во сколько $|x-k+1|=|x-1+2-k|$ меньше 1. Но при $k\neq 2$ величина $|x-1+2-k|$ при x, достаточно близком к 1, становится сколь угодно близкой к $|2-k|\neq 0$, в то время как при $k=2$ величина $|x-1+2-k|=|x-1|$ становится сколь угодно малой. Таким образом, разность $x^2-(kx-(k-1))$ становится самой малой именно при $k=2$ для достаточно малых $|x-1|$. ▶

Теперь найдем значение производной от функции $f(x)=x^2$ в точке с абсциссой x_0. Для этого вычислим значения функции при x, близких к x_0, для чего положим $x=x_0+h$ и будем считать, что $|h|$ безгранично уменьшается. Имеем

$$x^2=(x_0+h)^2=x_0^2+2x_0h+h^2\approx x_0^2+2x_0h=$$
$$=x_0^2+2x_0(x-x_0)=2x_0x-x_0^2.$$

Мы снова при переходе к приближенному равенству отбросили $h^2=(x-x_0)^2$ как величину, уменьшающуюся существенно быстрее, чем $|h|$. Поэтому линейная функция $2x_0x-x_0^2$ имеет своим графиком касательную к графику функции x^2 в точке x_0. Ее угловой коэффициент $2x_0$ есть значение производной от функции x^2 в точке x_0. Поэтому эта производная, рассматриваемая как функция, равна $2x$. Итак, $(x^2)'=2x$.

Упражнения

◀ 1. Найти прямую, которая плотнее других прижимается к графику функций $y=\sqrt{x}$ вблизи точки $x=x_0$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; \sqrt{x_0})$, имеет вид $y=k(x-x_0)+\sqrt{x_0}$. Пусть $x=x_0+h$, где h — переменная, принимающая сколь угодно малые значения (стремящаяся к нулю). Рассмотрим разность функций

$$\sqrt{x} \quad \text{и} \quad k(x-x_0)+\sqrt{x_0}$$

вблизи точки $x=x_0$:

$$\sqrt{x_0+h}-k(x_0+h-x_0)-\sqrt{x_0}=\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}-kh=$$
$$=\frac{x_0+h-x_0}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}-kh=h\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}-k\right).$$

Ясно, что если $k=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, то при h, стремящемся к нулю, не только первый, но и второй сомножитель $\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}-\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\right)$ тоже неограниченно приближается к нулю. Если $k\neq\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, то модуль второго сомножителя при неограниченном приближении h к нулю стремится принять значение, отличное от нуля. Значит, прямая с угловым коэффициентом $k=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ лучше, плотнее других прямых прижимается к графику функции $y=\sqrt{x}$ вблизи точки $x=x_0$. Согласно определению число $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ является значением производной от функции $\sqrt{x}$ в точке $x=x_0$, а функция $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ называется производной от функции $y=\sqrt{x}$. ▶

2. Вычислить значение производной от функции $y=\sqrt{x}$ в точке $x=4$. Написать уравнение касательной к графику функции $y=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x=4$.

3. С помощью калькулятора составить таблицу значений функции $y=\sqrt{x}$ и $y=\frac{1}{4}x+1$ на интервале [3,95; 4,05] с шагом 0,01. По полученной таблице построить графики этих функций на интервале [3,95; 4,05], приняв за единицу масштаба 50 см (не стремиться поместить на рисунках оси координат). Убедиться, что в пределах точности построений графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=\frac{1}{4}x+1$ неразличимы.

§ 2. Бесконечно малые величины

В § 1 мы видели, что при изучении функций «в малом» приходится рассматривать переменные, значения которых становятся сколь угодно близкими к нулю. Такие переменные носят название *исчезающих* или *бесконечно малых величин*. Обращаем внимание на то, что **бесконечно малая величина есть величина переменная,** а не какая-то постоянная, занимающая «промежуточное» положение между нулем и другими числами.

Уточним определение бесконечно малой величины и установим некоторые простейшие свойства бесконечно малых, полезные для дальнейшего. Ограничимся рассмотрением переменной, принимающей бесконечную последовательность значений, зависящих от номера n. Напомним, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ значений переменной x называется *исчезающей* (*бесконечно убывающей*), *если все ее члены, начиная с некоторого номера, становятся сколь угодно малыми по модулю.* Например, члены последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ становятся меньше 0,01, начиная со 101-го члена; становятся меньше 10^{-6}, начиная с 1000001-го и т. д. Сама переменная x, принимающая исчезающую последовательность значений, называется *исчезающей* или *бесконечно малой величиной.*

Рассмотрим вопрос о результатах арифметических действий над бесконечно малыми.

Теорема 1. *Если x — исчезающая переменная и a — постоянное число, то их произведение ax — тоже исчезающая переменная.*

Доказательство. Если $a=0$, то ax принимает только значение 0. Такую нулевую «переменную» мы должны согласно определению тоже отнести к исчезающим (даже считать уже «исчезнувшей»). Если же $a\neq0$, то при любом $c>0$ значения $|ax_n|$ переменной $|ax|$ станут меньше c, как только $|x_n|$ станет меньше $\frac{c}{|a|}$, что произойдет, начиная с достаточно большого n.

Теорема 2. *Если x и y — исчезающие переменные, то их сумма $x+y$ — тоже исчезающая.*

Доказательство. Действительно, $|x_n+y_n|$ станет меньше данного $c>0$, как только $|x_n|$ и $|y_n|$ станут меньше $c/2$, что наступит, начиная с достаточно большого n, так как x и y — исчезающие переменные.

Еще более очевидна следующая теорема.

Теорема 3. *Произведение xy двух исчезающих переменных x и y есть исчезающая переменная.*

Доказательство. Действительно, $|x_n y_n|$ во столько раз меньше $|x_n|$, во сколько $|y_n|$ меньше 1.

Скажем, что исчезающая переменная z стремится к нулю *существенно быстрее* исчезающей переменной x, если найдется исчезающая переменная y такая, что $z=xy$. Значениями переменной y являются z_n/x_n при тех n, для которых $x_n \neq 0$ (при $x_n=0$ должно быть и $z_n=0$). В этом случае говорят также, что z есть бесконечно малая более высокого порядка, чем x. Так, например, переменная z со значениями $z_n=2/n^2$ стремится к нулю существенно быстрее переменной x со значениями $x_n=1/n$. Действительно, здесь y имеет значения $y_n=2/n$, безгранично приближающиеся к нулю.

Ясно, что произведение двух бесконечно малых приближается к нулю существенно быстрее каждого из сомножителей.

Переменная называется *ограниченной*, если все ее значения по модулю меньше некоторого положительного числа a. Иными словами, если все значения содержатся в промежутке $(-a,a)$ при некотором $a>0$.

Теорема 4. *Произведение xy исчезающей переменной x на ограниченную переменную y есть исчезающая переменная.*

Доказательство. $|x_n y_n|=|x_n|\cdot|y_n|<|x_n|a$, где a — число, ограничивающее модули значений переменной y. Значения $|x_n|a$ становятся сколь угодно малыми, начиная с некоторого n, и то же самое подавно выполняется для значений $|x_n y_n|$, меньших чем $|x_n|a$.

Упражнения

1. Показать, что переменная x, принимающая последовательность значений $x_n=a^n$, где a — const и $0<a<1$, является исчезающей.

2. Показать, что если $0<a<b<1$, то последовательность $x_n=a^n$ стремится к нулю существенно быстрее, чем последовательность $y_n=b^n$.

§ 3. Сходящиеся переменные и их пределы

Напомним, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется *сходящейся*, если составляющие ее числа приближаются, начиная с некоторого n, сколь угодно близко к некоторому числу a. Это число называется *пределом последовательности* $x_1, \ldots, x_n \ldots$ и обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

или $\lim x_n$ при $n\to\infty$; часто будем, рассматривая последовательность, писать просто $\lim x_n$. Если переменная x принимает сходящуюся последовательность значений x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$, то переменная x называется *сходящейся*. Предел последовательности ее значений называется ее *пределом*. То, что пределом переменной x является число a, записывается формулой $\lim x=a$ или $x\to a$ (последняя запись читается: x стремится к a).

Ясно, что любая бесконечно малая переменная сходится и ее пределом является 0. Часто вместо слов «x есть бесконечно малая» пользуются записью $x\to 0$ или словами «x стремится к 0».

Из определения предела сходящейся переменной ясно, что *если $x\to a$, то $x-a$ — бесконечно малая*. Верно и обратное: *если $x-a=z$, т. е. $x=a+z$, где a — постоянная и z — бесконечно малая, то x — сходящаяся переменная и ее предел равен a.*

Теорема 5. *Если x и y — сходящиеся переменные с пределами соответственно a и b, то их сумма и произведение тоже сходятся к пределам соответственно $a+b$ и ab.*

Доказательство. $x=a+z$, $y=b+t$, где z и t — бесконечно малые. Тогда $x+y=(a+b)+(z+t)$ и $xy=ab+(at+bz+zt)$. Вторые слагаемые в правых частях этих равенств являются бесконечно малыми величинами. Следовательно, $a+b=\lim(x+y)$ и $ab=\lim(xy)$.

Теорема 6. *Если переменная x имеет отличный от нуля предел a, то $1/x$ имеет предел $1/a$.*

Доказательство. $\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{a-x}{ax}=-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x}\cdot(x-a)$.

Множитель $1/x$ ограничен, начиная с некоторого места: достаточно далекие значения x_n переменной x станут по модулю больше $\frac{2}{3}|a|$. Для этого нужно только, чтобы x_n отличалось от a меньше, чем на $\frac{1}{3}|a|$. Поэтому начиная с этого места $\left|\frac{1}{x_n}\right|<\frac{3}{2|a|}$. Далее, в выражении $-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x}\times(x-a)$ множитель $-1/a$ постоянный, а множитель $x-a$ есть бесконечно малая величина. Следовательно, $\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{-1}{a}\cdot\frac{1}{x}\cdot(x-a)$ — тоже бесконечно малая и $1/x$ сходится к $1/a$.

Теорема 7. *Если $\lim y=b$ и $\lim x=a\neq 0$, то y/x имеет предел и этот предел равен b/a.*

Доказательство. $y/x = y \cdot \frac{1}{x}$. Предел первого сомножителя равен b, предел второго в силу теоремы 6 равен $1/a$. Согласно теореме 5 предел $\frac{y}{x} = y \cdot \frac{1}{x}$ существует и равен $b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$.

Пример 1. Пользуясь определением предела переменной величины, показать, что переменная величина x, принимающая последовательность значений $x_n = \frac{5n}{n+2}$, имеет пределом число 5.

Решение. Покажем, что, начиная с некоторого номера, все члены последовательности x_n сколь угодно близко приближаются к числу 5.

Расстояние между x_n и числом 5 равно

$$|x_n - 5| = \left|\frac{5n}{n+2} - 5\right| = \left|\frac{-10}{n+2}\right| = \frac{10}{n+2} \to 0.$$

◀ Действительно, пусть ε — произвольное положительное число. Решив неравенство

$$|x_n - 5| = \frac{10}{n+2} < \varepsilon,$$

получим $10 < \varepsilon(n+2)$, $n > \frac{10}{\varepsilon} - 2$.

Таким образом, все члены последовательности x_n, начиная с номера, большего чем $\frac{10}{\varepsilon} - 2$, удалены от числа 5 на расстояние, меньшее чем ε. Так как ε можно выбирать сколь угодно малым числом, то, значит, все члены последовательности, начиная с некоторого номера, сколь угодно близко приближаются к числу 5, т. е. число 5 есть предел последовательности x_n: $\lim x_n = 5$, а значит, 5 есть предел переменной x: $\lim x = 5$. ▶

Пользуясь понятием бесконечно малой переменной, можно следующим образом обосновать утверждение, что $\lim x = 5$. Разность $x - 5$ равна $\frac{5n}{n+2} - 5 = -\frac{10}{n+2}$. Ясно, что при безграничном возрастании номера n дробь $-\frac{10}{n+2}$ сколь угодно близко приближается к нулю, т. е. является бесконечно малой (исчезающей) переменной, следовательно, число 5 есть предел переменной x.

§ 4. Бесконечно большие величины

Переменная x, значения которой становятся, начиная с некоторого номера, сколь угодно большими по модулю, называется *бесконечно большой* или *стремящейся к бесконечности*. Это записывается в форме $x \to \infty$ или $\lim x = \infty$ (эти записи не следует понимать так, что существует некоторое «число» бесконечность ∞, к которому сколь угодно близко приближаются значения переменной). Типичным примером бесконечно большой переменной является переменная со значениями $x_n = n$, пробегающими натуральный ряд чисел в естественном порядке.

Иногда бывает целесообразно подчеркнуть в записи то, что значения переменной становятся сколь угодно большими положительными числами. Это записывается в форме $x \to +\infty$ или $\lim x = +\infty$. Записи же $x \to -\infty$ или $\lim x = -\infty$ обозначают, что значения x становятся сколь угодно большими по модулю, оставаясь отрицательными.

Если y — исчезающая величина, не принимающая значений 0, то переменная $x = 1/y$, очевидно, бесконечно большая, ибо числа, обратные к сколь угодно малым, становятся сколь угодно большими.

§ 5. Примеры на вычисление пределов

Пример 1. Дано: $x_n \to 2$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + x_n + 2}{x_n + 2}$.

В силу теоремы 5 предел x_n^2 равен $2^2 = 4$, предел $x_n^2 + x_n + 2$ равен $4 + 2 + 2 = 8$, предел $x_n + 2$ равен $2 + 2 = 4$. В силу теоремы 7 искомый предел равен $8/4 = 2$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1}$.

Вынесем n за скобку в числителе и в знаменателе и сократим дробь. Получим

$$\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1+(1/n)}{2+(1/n)}.$$

При $n \to \infty$ величина $1/n$ будет исчезающей, так что предел величины $1 + (1/n)$ равен 1, предел $2 + (1/n)$ равен 2. Применив теорему 7, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+(1/n)}{2+(1/n)} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$. Здесь требуется найти предел разности квадратных корней $\sqrt{n^2+n}$ и $n=\sqrt{n^2}$ из довольно близких чисел.

Положим *)

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$

$$=\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Ясно, что $\sqrt{1+\frac{1}{n}}\to 1$ при $n\to\infty$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

§ 6. Пределы функций

Пусть функция $y=f(x)$ определена во всех точках некоторого промежутка, быть может, за исключением одной точки x_0, лежащей внутри или на границе промежутка. Скажем, что число b является пределом функции $f(x)$ при $x\to x_0$, если для любой последовательности значений переменной $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ из этого промежутка, сходящейся к x_0 ($x_n\neq x_0$), последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к b. Это записывается в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b.$$

Здесь требование $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n)=b$ для любой последовательности $x_n\to x_0$ очень существенно, ибо может быть, что для одной последовательности значений переменной этот предел существует и равен b, а для какой-либо другой последовательности предел не существует или существует, но отличен от b.

Данное выше определение предела функции равносильно следующему: число b есть предел функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$, если, какова бы ни была окрестность $(b-\alpha, b+\alpha)$ числа b, все значения функции при значениях x, достаточно близких к x_0, попадают в эту окрестность.

*) Техника преобразования таких алгебраических выражений подробно изложена, например, в гл. 7 книги «Алгебра 6—8».

Доказательство равносильности двух данных определений предела функции мы здесь приводить не будем.

Пример 1. Вычислить предел функции $y=\frac{3x-4}{x^2+2}$ при $x\to 2$, пользуясь определением предела функции.

Решение. Пусть x_n — некоторая последовательность значений переменной x, сходящаяся к числу 2, тогда n-й член соответствующей последовательности значений функции имеет вид $y_n=\frac{3x_n-4}{x_n^2+2}$. Вычислим предел последовательности y_n при $x_n\to 2$:

$$\lim_{x_n\to 2}(3x_n-4)=3\cdot 2-4=-2;$$

$$\lim_{x_n\to 2}(x_n^2+2)=2^2+2=6;$$

$$\lim_{x_n\to 2}\frac{3x_n-4}{x_n^2+2}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}.$$

Полученный результат справедлив для любой последовательности x_n, сходящейся к числу 2, следовательно, согласно определению, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-4}{x^2+2}=-\frac{1}{3}$.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$.

Решение. При $x=2$ функция не имеет смысла. Сделаем предварительное замечание. Понятие предела функции при $x\to x_0$ связано с поведением функции вблизи точки x_0, исключая из рассмотрения саму точку x_0 (см. определение). Дробь $\frac{x^2-4}{x-2}$ тождественно равна выражению $x+2$ во всех точках за исключением точки $x=2$. Следовательно, и вблизи точки $x=2$ функции $\frac{x^2-4}{x-2}$ и $x+2$ совпадают и

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Таким образом, хотя функция $\frac{x^2-4}{x-2}$ не имеет смысла в точке $x=2$, это не мешает существованию предела функции при $x\to 2$.

Пример 3. Поскольку вычисление предела функции $f(x)$ при $x\to x_0$ сводится к вычислению предела последовательности $f(x_n)$ при $x_n\to x_0$, то легко формулируются и доказываются теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух функций, имеющих пределы при $x\to x_0$.

Сформулируем и докажем, например, теорему о пределе суммы двух функций:

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))= =a+b$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность x_n, сходящуюся к x_0. Согласно условию теоремы последовательности $f(x_n)\to a$ и $g(x_n)\to b$. К последовательности $f(x_n)+g(x_n)$ применим теорему 5 о пределе суммы последовательностей. Получим $\lim\limits_{x_n\to x_0} (f(x_n)+g(x_n))=a+b$. Так как рассуждения справедливы для любой последовательности x_n, сходящейся к x_0, то $\lim\limits_{x=x_0} (f(x)+g(x))=a+b$.

Сформулируйте и докажите аналогичные теоремы о пределе произведения и частного двух функций, имеющих предел при $x\to x_0$.

Упражнения

1. На основе теорем о пределе суммы, произведения и частного двух функций вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1} (3x^2-2x+7)$. 2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-3x+4}{x^2-5}$.

§ 7. Непрерывность функций

Понятие непрерывности функции можно ввести исходя из наглядных представлений, именно: функция называется *непрерывной*, если ее график состоит из одной непрерывной линии *). Только что введенное понятие предела функции позволяет дать более точное определение непрерывности.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, содержащем точку x_0 внутри или на границе. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и этот предел равен $f(x_0)$. Геометрически непрерывность функции в точке x_0 означает, что ее график не разрывается в точке x_0.

Функция называется *непрерывной на промежутке*, если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

*) Именно так введено понятие непрерывной функции, например, в гл. 5 «Алгебры 6—8».

Точка, в которой функция не непрерывна, но определена в некоторой ее окрестности, носит название *точки разрыва*.

К точкам разрыва относятся также точки, в которых функция не определена (но определена в окрестности). Иногда в таких точках имеет место *несущественный* или *устранимый разрыв*, который ликвидируется за счет надлежащего «доопределения» функции в такой точке.

Так, функция $\frac{x^2-1}{x-1}$ не определена в точке $x=1$. Однако при $x\neq 1$ она равна $x+1$ и при $x\to 1$ имеет предел равный 2. «Доопределив» функцию, считая число 2 ее значением при $x=1$, получим непрерывную функцию. Она равна $x+1$ при всех значениях x, включая 1.

Функция $\operatorname{sign} x$ тоже не определена при $x=0$ и имеет в этой точке неустранимый разрыв. При $x\to 0$ справа (т. е. со стороны положительных значений) $\operatorname{sign} x=1$ и предел равен 1, при $x\to 0$ слева предел функции $\operatorname{sign} x$ равен -1, так что предел $\operatorname{sign} x$ при $x\to 0$ не существует и «доопределить» эту функцию при $x=0$ так, чтобы она стала непрерывной, невозможно.

◄ Аналогичный разрыв имеет функция $\dfrac{2^{1/x}+2}{2^{1/x}+1}$ в точке $x=0$, в которой функция не определена. Действительно, при $x\to 0$ слева $1/x\to -\infty$, так что $2^{1/x}\to 0$ и $\dfrac{2^{1/x}+2}{2^{1/x}+1}$ имеет предел 2. При $x\to 0$ справа $1/x\to +\infty$, $2^{1/x}\to\infty$, $2^{-1/x}\to 0$, а тогда

$$\frac{2^{1/x}+2}{2^{1/x}+1}=\frac{2^{1/x}(1+2\cdot 2^{-1/x})}{2^{1/x}(1+2^{-1/x})}=\frac{1+2\cdot 2^{-1/x}}{1+2^{-1/x}}\to 1.$$

Итак, рассматриваемая функция имеет предел 2 при $x\to 0$ слева и предел 1 при $x\to 0$ справа. Эти пределы различны, так что имеющийся здесь разрыв неустраним. ►

Другого рода разрыв имеет функция $\frac{1}{x-1}$ в точке $x= =1$. Ясно, что $\frac{1}{x-1}\to -\infty$, если x стремится к 1 слева и $\frac{1}{x-1}\to +\infty$, если $x\to 1$ справа. Разрыв этого рода обычен для дробно-рациональных функций в точках, где знаменатель обращается в нуль. Возможно и стремление к бесконечности одного знака. Примером этого может служить разрыв функции $\frac{1}{(x-1)^2}$ в точке $x=1$.

Поясним понятие непрерывности функций в несколько иных терминах. Соотношение $x \to x_0$ равносильно тому, что $x - x_0$ — бесконечно малая переменная. Соответственно соотношение $f(x) \to f(x_0)$ равносильно тому, что $f(x) - f(x_0)$ — бесконечно малая величина. Разности $x - x_0$ и $f(x) - f(x_0)$ называются *приращениями* независимой переменной x и функции $f(x)$ при переходе от x_0 к x *). Таким образом, определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x можно сформулировать так: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если бесконечно малому приращению $x - x_0$ независимой переменной соответствует бесконечно малое приращение $f(x) - f(x_0)$ функции. Можно доказать, что целые рациональные функции, дробно-рациональные функции, а также степенная, показательная и логарифмическая функции непрерывны во всей области определения.

Рассмотрите следующие примеры.

Пример 1. Если известно, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то это обстоятельство делает задачу вычисления предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$ тривиальной, так как согласно определению непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

т. е. вычисление предела сводится к простому вычислению значения функции в точке x_0.

Пусть, например, надо найти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-3}{x-1}$. Как было сказано выше (без доказательства), все дробно-рациональные функции непрерывны в каждой точке области определения. Значение $x=2$ входит в область определения функции $\frac{x^2-3}{x-1}$. Следовательно, искомый предел равен значению функции в точке $x=2$, т. е.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3}{x-1} = \frac{2^2-3}{2-1} = 1.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-2-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$.

Решение. Функция $\frac{x-2-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$ не имеет смысла в точке $x=3$, поэтому, очевидно, ее нельзя считать непрерывной в точке $x=3$, однако, как мы знаем, это не

*) См., например, «Алгебру 6—8», гл. 5.

исключает возможности существования предела при $x \to 3$. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела:

$$\frac{x-2-\sqrt{x-2}}{x^2-9} = \frac{(x-2-\sqrt{x-2})(x-2+\sqrt{x-2})}{(x^2-9)(x-2+\sqrt{x-2})} =$$
$$= \frac{x^2-4x+4-x+2}{(x^2-9)(x-2+\sqrt{x-2})} = \frac{x^2-5x+6}{(x^2-9)(x-2+\sqrt{x+2})} =$$
$$= \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)(x-2+\sqrt{x-2})} = \frac{x-2}{(x+3)(x-2+\sqrt{x-2})}.$$

Сопоставляя исходное и получившееся выражения, видим, что можно найти окрестность точки $x=3$, в каждой точке которой, кроме самой точки $x=3$, значения этих выражений совпадают. Значит, равны пределы функций при $x \to 3$, задаваемых этими выражениями, но получившееся выражение имеет смысл в точке $x=3$, и соответствующая функция непрерывна в точке $x=3$, так что ее предел при $x \to 3$ равен ее значению в этой точке. Окончательно имеем

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-2-\sqrt{x-2}}{x^2-9} =$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{x-2}{(x+3)(x-2+\sqrt{x-2})} = \frac{3-2}{(3+3)(3-2+\sqrt{3-2})} = \frac{1}{12}.$$

Ситуация, подобная описанной в приведенном примере, постоянно возникает при вычислении производных.

Пример 3. Рассмотрим примеры графиков функций, имеющих различного рода разрывы в некоторых точках.

а) $y = \operatorname{sign} x$. См. рис. 2. Стрелки на концах прямолинейных участков графика означают, что при $x=0$ функция не определена, но справа стремится при приближении к $x=0$ к значению $y=1$, а слева — к значению $y=-1$.

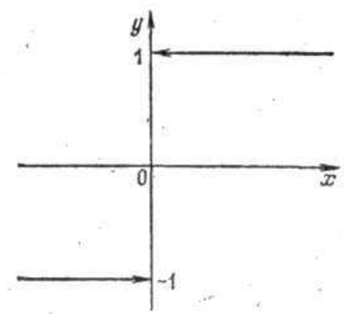

Рис. 2

б) $y = \frac{2^{1/x}+2}{2^{1/x}+1}$, иначе $y = 1 + \frac{1}{2^{1/x}+1}$. См. рис. 3. В точке $x=0$ функция не определена и имеет разрыв такого же рода, как и в примере а). При неограничен-

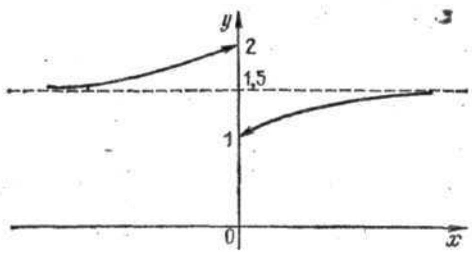

Рис. 3

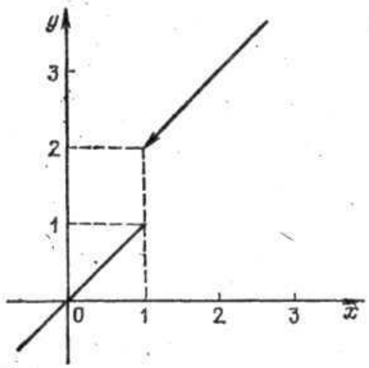

Рис. 4

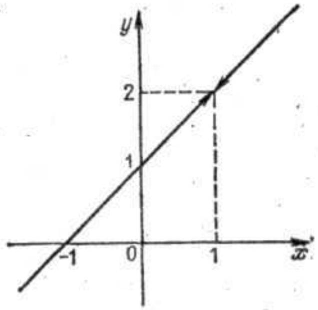

Рис. 5

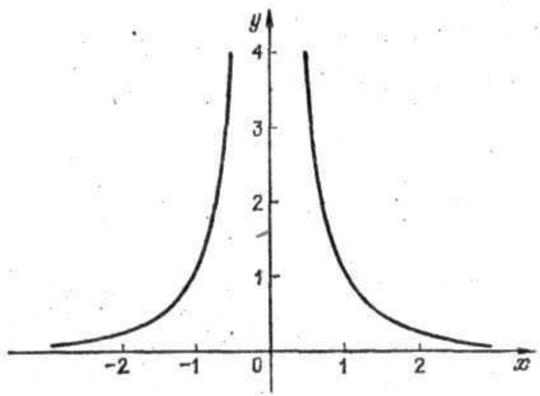

Рис. 6

ном возрастании x ($x \to \infty$) значения функции приближаются к 1,5 снизу, при $x \to -\infty$ значения функции приближаются к 1,5 сверху. ▶

в) $y = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant 1, \\ x+1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$ См. рис. 4. Функция определена в точке $x=1$, но терпит разрыв такого же рода, как и в примерах 1 и 2.

г) $y = \frac{x^2-1}{x-1}$. См. рис. 5. Функция не имеет смысла в точке $x=1$, но $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$. В точке $x=1$ устранимый разрыв.

д) $y = \frac{1}{x^2}$. См. рис. 6. Функция не имеет смысла в точке $x=0$. В точке $x=0$ типичный для дробно-рациональных функций разрыв.

§ 8. Уточнение понятия производной

Линейная функция $l(x) = kx + b$ обладает следующим свойством: приращение линейной функции **пропорционально** приращению независимой переменной и коэффициент пропорциональности равен угловому коэффициенту k. Действительно, $l(x) - l(x_0) = kx + b - (kx_0 + b) = k(x - x_0)$ *).

Согласно основному принципу § 1, «хорошая» функция $f(x)$ на малом промежутке, скажем, примыкающем к точке x_0, почти линейна и тем лучше приближается к линейной, чем меньше промежуток. Пусть k — угловой коэффициент этой линейной функции, т. е. значение $f'(x_0)$ производной функции в точке x_0. Тогда приращение функции $f(x)$ **почти пропорционально** приращению независимой переменной с коэффициентом пропорциональности k, т. е. имеет место приближенное равенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx k,$$

и это равенство тем точнее, чем меньше $x - x_0$. Это значит, что

$$f'(x_0) = k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Для приращения $x = x_0$ независимой переменной принято обозначение Δx (оно не очень удачно, так как в нем

*) См. также, например, «Алгебру 6—8», гл. 5.

не отражена исходная точка x_0). Соответственно для приращения $f(x)-f(x_0)$ функции $y=f(x)$ принято обозначение Δy. В этих обозначениях

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

или словами: *значение производной $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 равно пределу отношения приращения функции к соответствующему приращению независимой переменной, когда последнее стремится к нулю.* Конечно, в этой формулировке подразумевается, что значение x_0, от которого отсчитывается приращение независимой переменной, остается постоянным.

Приведенная формулировка является, по-существу, определением значения производной в данной точке, уточняющим наглядное геометрическое определение, данное в § 1.

Для вычислений удобно несколько преобразовать формулу $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Ясно, что $x=x_0+\Delta x$ и $\Delta y=$ $=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Поэтому

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если в соответствии со сказанным в § 1 рассматривать производную $f'(x)$ как функцию от того же аргумента x, мы получим для этой функции

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Нужно только помнить, что в последней формуле нужно рассматривать x как постоянную и осуществить предельный переход при переменной Δx, стремящейся к нулю.

Если функция $f(x)$ обозначена одной буквой, скажем y, то производная (как функция) обозначается также через y'.

Теорема 8. *Если производная $f'(x_0)$ в некоторой точке x_0 существует, то функция $f(x)$ в этой точке непрерывна.*

Доказательство. Действительно, если $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ имеет предел $f'(x_0)$ при $\Delta x\to 0$, то $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ $=f'(x_0)+\alpha$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Следовательно, величина $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$ тоже стремится к нулю при $\Delta x\to 0$, ибо оба слагаемых в правой части стремятся к нулю. Но то, что $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$, и означает, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

◀ Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Не всякая непрерывная в точке x_0 функция имеет в этой точке производную. Например, функция $y=|x|$ не имеет производной в точке $x=0$, в чем легко убедиться. Более того, можно сконструировать непрерывную на некотором промежутке функцию, которая не имеет производной ни в одной точке промежутка. Наглядно ее можно представить так: график функции имеет вид волнистой линии, каждая волна состоит из волн меньшего размера, которые состоят из еще меньших волн, и т. д. Ни в одной точке отрезок графика в окрестности этой точки не будет приближаться к линейной и производная существовать не будет ни в одной точке. Описание такой функции с помощью формулы непросто и содержит предельный переход, заменяющий слова «и т. д.» в словесном описании.

Теперь мы в состоянии дать более точное определение гладкой функции *). Именно, функция $f(x)$ называется *гладкой* на некотором промежутке, если во всех точках этого промежутка существует производная $f'(x)$ и она непрерывна. Непрерывность производной, которая является угловым коэффициентом касательной, означает, что касательная к графику изменяет свое направление непрерывно при непрерывном изменении абсциссы точки касания. Это вполне соответствует наглядному представлению о графике как о непрерывной гладкой линии без изломов. ▶

В следующей главе мы увидим, что целые и дробно-рациональные функции, а также показательные и логарифмические функции имеют непрерывные производные во всей естественной области существования каждой из этих функций.

Рассмотрим несколько примеров вычисления производных.

Пример 1. Найти производную функции $y=x^2$.

Решение.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

*) См. также «Алгебру 6—8», гл. 5.

Пример 2. Найти производную функции $y=\frac{1}{x}$.

Решение.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x-(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot x\,(x+\Delta x)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{1}{x\,(x+\Delta x)}\right]=-\frac{1}{x^2}.$$

Пример 3. Найти производную функции $y=\sqrt{x}$, $x>0$.

Решение.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})\,\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})\,\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Заметим, что при $x=0$ производная не существует.

§ 9. Уравнение касательной к графику функции

Пусть дана функция $f(x)$, имеющая производную в точке x_0. Мы уже знаем, что $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к графику в точке с абсциссой x_0. Поэтому уравнение касательной имеет вид $y=f'(x_0)\,x+b$. Точка касания имеет абсциссу x_0 и ординату $f(x_0)$. Эти координаты должны удовлетворять уравнению касательной, откуда следует равенство $f(x_0)=f'(x_0)\,x_0+b$, из которого получаем $b=f(x_0)-f'(x_0)\,x_0$. Подставив это значение в уравнение касательной, получим его в виде

$$y=f'(x_0)\,x+f(x_0)-f'(x_0)\,x_0$$

или, после очевидных преобразований,

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0).$$

Пример 1. Написать уравнение касательной к графику функции $y=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x=4$.

Решение. Чтобы написать уравнение касательной к графику функции $f(x)$, надо найти три числа: x_0 — абсциссу точки касания, $f(x_0)$ — ординату точки касания и $f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной ($f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, см. рис. 7). По условию задачи $x_0=4$. $f(x_0)=\sqrt{4}=2$.

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ и $f'(4)=\frac{1}{4}$. Подставляя найденные числа в уравнение касательной, получим $y-2=\frac{1}{4}(x-4)$ или $y=\frac{1}{4}x+1$.

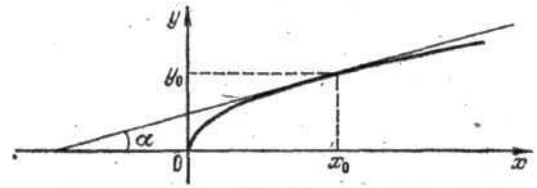

Рис. 7

Пример 2. Используя результат предыдущего примера, найти приближенно $\sqrt{4{,}03}$.

Решение. В соответствии с основным принципом дифференциального исчисления график гладкой функции на малом интервале изменения аргумента почти совпадает с отрезком прямой и касательная в точке с абсциссой x_0 — та прямая, которая плотнее других прижимается к графику функции вблизи этой точки. Поэтому по уравнению касательной к графику функции $y=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0=4$ можно приближенно вычислить значение самой функции вблизи точки касания:

$$\sqrt{4{,}03}\approx\frac{1}{4}\cdot 4{,}03+1=1{,}0075+1=2{,}0075.$$

Для сравнения: корень $\sqrt{4{,}03}$ с точностью до 0,000001 равен 2,007486.

В этом примере мы говорим только о принципиальной возможности получения приближенного значения функции по уравнению касательной. Соображения, позволяющие оценить погрешность приближения, будут приведены в последующих главах курса.

§ 10. Скорость изменения функции

Рассмотрим, например, функцию $y=x^2$ и ее график при $x\geqslant 0$ (рис. 8). При взгляде на этот график становится ясно, что вначале, около 0, функция возрастает медленно, а затем возрастание становится все более скорым. Уточним это представление о скорости изменения функции.

Средней скоростью изменения функции $f(x)$ при изменении независимой переменной от x до $x+\Delta x$ естественно считать дробь $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$,

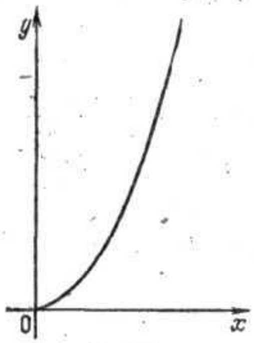

Рис. 8

т. е. отношение величины изменения функции к величине изменения аргумента. Если при $\Delta x \to 0$ средняя скорость имеет предел, то этот предел принимается за истинную скорость изменения функции в точке x. Но этот предел есть не что иное, как производная $f'(x)$ от функции $f(x)$.

Итак, мы получили следующее важное истолкование производной: *производная от функции $f(x)$ в некоторой точке равна скорости изменения функции в этой точке.*

Этот результат хорошо согласуется с представлением о производной как об угловом коэффициенте касательной — ясно, что скорость возрастания функции больше

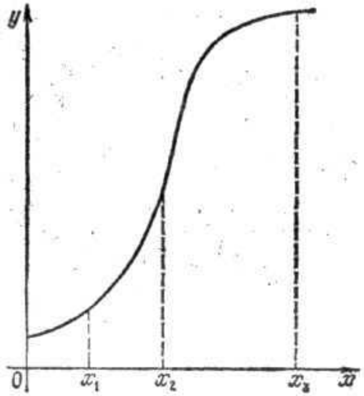

Рис. 9

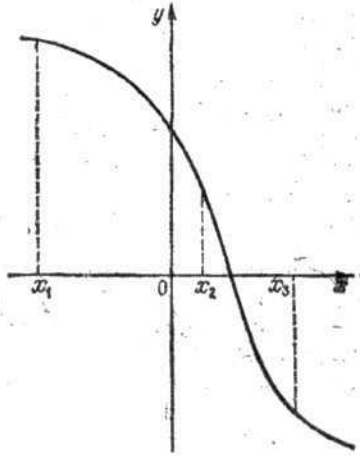

Рис. 10

там, где график функции поднимается круче, т. е. где угловой коэффициент касательной больше; соответственно скорость убывания функции больше там, где график функции круче опускается, т. е. где отрицательный в этом случае угловой коэффициент касательной больше по модулю.

Упражнения

1. По графику функции $y=f(x)$ (рис. 9) «на глаз» определить, в какой из точек x_1, x_2, x_3 производная функции $f(x)$ больше.

2. По графику функции $y=g(x)$ (рис. 10) «на глаз» определить, в какой из точек x_1, x_2, x_3 производная функции $g(x)$ меньше; в какой из этих точек модуль производной больше.

3. Сформулировать ответы к двум предыдущим задачам в терминах «скорость возрастания», «скорость убывания».

§ 11. Скорость механического движения точки по прямой

Пусть точка двигается по некоторой прямой линии, так что ее положение меняется с течением времени. Рассмотрим эту прямую как числовую ось, т. е. выберем масштаб, начало отсчета и положительное направление. Тогда положение точки определяется ее координатой и с течением времени эта координата меняется, являясь тем самым функцией от времени. Пусть y — координата движущейся точки, t — время (в секундах или в других удобных для данного случая единицах времени). *Уравнением движения* называется запись $y=f(t)$, показывающая, каким образом меняется координата с течением времени (функция $f(t)$ считается данной).

Движение называется *равномерным*, если изменение координаты точки пропорционально времени движения. Коэффициент пропорциональности, т. е. путь, проходимый за единицу времени (со знаками плюс или минус, при движении в положительном или в отрицательном направлении) называется *скоростью равномерного движения*. Если v — скорость и y_0 — координата точки в начальный момент времени, то, очевидно, $y-y_0=vt$, так что уравнение движения есть

$$y=y_0+vt.$$

Таким образом, при равномерном движении координата движущейся точки является линейной функцией от времени.

Однако в природе и в технике часто приходится встречаться с неравномерными движениями. Мы хорошо воспринимаем качественно, когда при неравномерном движении точка двигается быстрее и когда медленнее, но для того, чтобы понять количественную сторону вопроса, необходимо обратиться к понятиям дифференциального исчисления, подобно тому, как это было сделано для уяснения понятия скорости изменения функции. Повторим предыдущие рассуждения в применении к рассматриваемой ситуации.

Средней скоростью движения на данном промежутке времени называется частное от деления величины изменения координаты движущейся точки (если точка двигается в положительном направлении, эта величина совпадает с длиной пройденного пути) на величину промежутка времени. Пусть $y=f(t)$ — уравнение движения; рассмотрим промежуток времени от момента t до момента $t+\Delta t$. Величина изменения координаты равна, очевидно,

$$\Delta y=f(t+\Delta t)-f(t).$$

Длина промежутка времени равна Δt. Средняя скорость на рассматриваемом промежутке равна

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

При безграничном уменьшении длины Δt промежутка времени средняя скорость будет стремиться к пределу (если движение плавное), который и является *скоростью движения в момент времени* t. Но этот предел есть производная $f'(t)$ от функции $f(t)$, определяющей уравнение движения.

Итак, *скорость движения с уравнением* $y=f(t)$ *в момент времени* t *равна значению производной* $f'(t)$ *в этот момент времени.*

Один из основоположников дифференциального исчисления великий математик, физик и астроном И. Ньютон (1643—1727) положил в основу своего исчисления понятие скорости движения.

Скорость движения при неравномерном движении изменяется с течением времени. Скорость изменения скорости называется *ускорением*. Ускорение равно производной скорости как функции времени. Понятие ускорения особенно важно для механики и физики в силу так называемого второго закона Ньютона. Этот закон состоит в том, что при движении точки под действием силы ускорение пропорционально действующей силе и обратно пропорционально массе точки.

Одним из важнейших примеров движения является движение с уравнением

$$y=at^2+bt+c.$$

Найдем скорость и ускорение при этом движении. Вычислим скорость:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a(t+\Delta t)^2+b(t+\Delta t)+c-(at^2+bt+c)}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{at^2+2at\,\Delta t+a(\Delta t)^2+bt+b\,\Delta t+c-at^2-bt-c}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2at\,\Delta t+a(\Delta t)^2+b\,\Delta t}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(2at+a\,\Delta t+b)=2at+b.$$

Таким образом, $v=2at+b$.

Теперь вычислим ускорение, обозначив его буквой j:

$$j=v'=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2a(t+\Delta t)+b-(2at+b)}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2a\,\Delta t}{\Delta t}=2a.$$

Итак, при движении с уравнением $y=at^2+bt+c$ ускорение оказывается не зависящим от времени и равным $2a$. Движение с постоянным ускорением называется *равноускоренным*. Таким образом, движение с уравнением $y=at^2+bt+c$ оказывается равноускоренным. Коэффициент a равен половине ускорения.

Легко найти истолкование остальных коэффициентов. Координата y_0 точки и ее скорость v_0 в момент времени $t=0$ называются *начальной координатой* и *начальной скоростью*. Ясно, что $y_0=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=c$ и $v_0=2a\cdot 0+$ $+b=b$. Таким образом, коэффициенты b и c оказываются равными соответственно начальной скорости и начальной координате.

Итак, уравнение $y=at^2+bt+c$ есть уравнение равноускоренного движения с ускорением $2a$, при начальной координате c и начальной скорости b. В дальнейшем будет доказано, что любое равноускоренное движение имеет уравнение вида $y=at^2+bt+c$.

Пример 1. На рис. 11 изображен график движения точки по координатной прямой, а именно график изменения координаты точки как функции времени. Единицы измерения и масштаб: по оси абсцисс — время, одно деление соответствует 1 с, по оси ординат — координата, одно деление соответствует 1 м.

Определить по графику:

1) начальное положение точки,

2) примерное значение начальной скорости,

3) промежутки времени, в течение которых точка двигалась практически равномерно,

4) промежутки времени, в течение которых точка двигалась с замедлением,

5) момент «остановки», т. е. момент, в который скорость равна нулю,

6) промежутки времени, в течение которых точка двигалась с ускорением, т. е. модуль скорости возрастал,

7) в какие моменты времени модуль скорости был наибольшим,

8) путь, который прошла точка с начала движения до момента $t=13$ с.

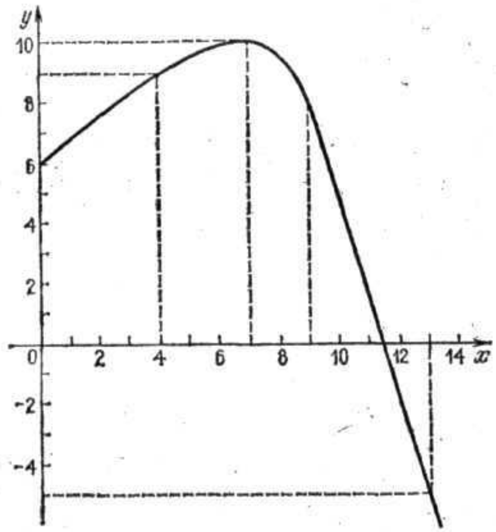

Рис. 11

Решение. Начальное положение точки находится непосредственно из рисунка $y(0)=6$.

Сначала ответим на третий вопрос. Приложив линейку, легко убедиться, что участки графика на промежутках от 0 до 4 и от 9 до 13 практически совпадают с отрезками прямых. Это означает, что в течение этих промежутков времени точка двигалась практически равномерно, т. е. с постоянной скоростью. На промежутке от 0 до 4 эта скорость равна начальной скорости, найти ее можно, разделив приращение координаты на длину промежутка времени $v(0)\approx\frac{9-6}{4}=0{,}75$ м/с. Замечаем, что на интервале от 4 до 7 крутизна графика постепенно уменьшается.

Это означает, что модуль скорости на этом интервале убывает, т. е. точка движется замедленно. На промежутке от 7 до 9 крутизна наклона графика возрастает, но график идет вниз. Это означает, что скорость изменила знак, но модуль скорости возрастает, т. е. точка движется ускоренно. «На глаз» видно, что на интервале от 9 до 13 график идет круче, чем на интервале от 0 до 4. Это означает, что на интервале от 9 до 13 модуль скорости больше, чем на интервале от 0 до 4. В точке с абсциссой 7 касательная к графику параллельна оси абсцисс, это означает, что производная ординаты как функции времени в этот момент равна нулю, т. е. мгновенная скорость движения в момент $t=7$ с равна нулю — это момент остановки. Путь, пройденный точкой за время от начала движения до $t=13$ с, можно сосчитать непосредственно по графику. Двигаясь в положительном направлении, за время от $t=0$ до $t=7$ точка прошла путь $S_1=10-6=4$ м. Двигаясь в отрицательном направлении, за время от $t=7$ до $t=13$ точка прошла путь $S_2=10-(-5)=15$ м. Всего за время от $t=0$ до $t=13$ точка прошла путь $S=S_1+S_2=4+15=19$ м.

Заметим, что путь, пройденный точкой за время от $t=0$ до $t=13$, нельзя путать с изменением (приращением) координаты точки за это время $\Delta y=y(13)-y(6)=-5-6=-11$ м.

12. Дифференциал функции

Наряду с производной важнейшим понятием математики является понятие дифференциала функции.

Дифференциалом dy функции $y=f(x)$ называется произведение производной $f'(x)$ на приращение Δx независимой переменной:

$$dy=f'(x)\,\Delta x.$$

Очевидно, что для $y=x$ имеет место $y'=1$. Действительно, здесь

$$\Delta y=\Delta x,\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=1 \text{ и } y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$$

Поэтому $dx=1\cdot\Delta x=\Delta x$, так что для независимой переменной приращение и дифференциал совпадают. Принимая это во внимание, мы можем записать для $y=f(x)$:

$$dy=f'(x)\,dx.$$

В формальном определении дифференциала никаких ограничений на dx не накладывается. Однако для приложений этого понятия к различным вопросам математики, физики и вообще теоретического естествознания величина dx *рассматривается как бесконечно малая* (тем самым переменная). Заметим еще, что производная равна отношению дифференциалов: $y'=\frac{dy}{dx}$. Эта дробь часто используется как обозначение производной.

Вникнем подробнее в понятие дифференциала, стараясь уяснить его сущность и наглядный смысл. Вспомним, что производная $y'=f'(x)$ равна пределу отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приращений, когда $\Delta x \to 0$. Поэтому само отношение приращений отличается от своего предела $f'(x)$ на бесконечно малую величину, которую мы обозначим α. Таким образом,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha, \text{ где } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Умножив это равенство на Δx, получим:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x+\alpha\,\Delta x = dy+\alpha\,dx.$$

Второе слагаемое $\alpha\,dx$ в правой части этого равенства *стремится к нулю существенно быстрее*, чем $dx=\Delta x$. Тем самым dy составляет часть приращения Δy, отличаясь от него на слагаемое, стремящееся к нулю существенно быстрее, чем Δx. Поэтому дифференциал dy называют *главной частью* приращения Δy. Далее, дифференциал dy при фиксированном x пропорционален приращению dx независимой переменной. Все сказанное позволяет сформулировать следующее утверждение: *дифференциал dy функции $y=f(x)$ составляет главную часть приращения Δy, пропорциональную Δx.*

Справедливо и обратное утверждение, именно если $k\,dx$ есть главная часть приращения Δy функции $y=f(x)$, пропорциональная dx, то она есть дифференциал dy. Действительно, пусть $k\,dx=k\,\Delta x$ — такая главная часть, т. е. $\Delta y=k\,\Delta x+\lambda$, где λ — бесконечно малая, стремящаяся к нулю существенно быстрее, чем Δx. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x}=k+\frac{\lambda}{\Delta x}$. Но $\frac{\lambda}{\Delta x}\to 0$ при $\Delta x\to 0$, ибо λ стремится к нулю существенно быстрее, чем Δx. Поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=k$, т. е. $k=y'$, так что действительно

$$k\,\Delta x = y'\,dx = dy.$$

Таким образом, свойство дифференциала быть главной частью приращения, пропорциональной приращению независимой переменной, вполне характеризует дифференциал и его можно было бы принять за определение дифференциала.

Рассмотрение дифференциала как главной линейной части приращения позволяет во многих случаях вычислять дифференциал функции, минуя вычисление производной. Например, пусть $y=x^3$. Тогда

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^2\,\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3=$$
$$=3x^2\,\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.$$

Второе $3x(\Delta x)^2$ и третье $(\Delta x)^3$ слагаемые стремятся к нулю существенно быстрее, чем Δx, а первое слагаемое пропорционально Δx. Поэтому оно и есть искомый дифференциал: $dy=3x^2\,\Delta x=3x^2\,dx$.

Выделение дифференциала из приращения функции как главной части определяет основное направление применений этого понятия. Именно, оно часто позволяет находить дифференциал функции раньше, чем известна сама функция.

Рассмотрим важный для дальнейшего пример этого рода (мы к нему еще вернемся). Пусть $y=f(x)$ — положительная функция, определенная на промежутке $[a, b]$. Ее график расположен выше оси абсцисс. Обозначим через $F(x)$ площадь фигуры (рис. 12), ограниченной графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и вертикальными прямыми с абсциссами a и x. Площадь $F(x)$ действительно является функцией от абсциссы x правой стенки. Придадим числу x приращение dx. Тогда площадь $F(x)$ получит приращение в виде площади полоски с шириной dx. Эта полоска близка к прямоугольнику с высотой $y=f(x)$. «На глаз» ясно, что площадь полоски отличается от площади $y\,dx$ прямоугольника на величину λ, стремящуюся к нулю существенно быстрее, чем dx. Это утверждение можно строго доказать. Итак,

$$\Delta F(x)=y\,dx+\lambda.$$

Таким образом, ydx есть главная часть приращения $\Delta F(x)$ и пропорциональна dx. Следовательно, $d(F(x))=ydx$.

Таким образом, в этом примере мы показали возможность вычисления дифференциала (следовательно, и производной) функции, которая еще неизвестна. Для того чтобы ее найти, нужно выполнить действие, обратное действию вычисления дифференциала, именно, действие отыскания функции по данному дифференциалу. Действие вычисления дифференциала (и производной) данной функции носит название *дифференцирования*. Обратное действие — отыскание функции по данному дифференциалу — носит название *интегрирования*. Таким образом, для того чтобы найти площадь $F(x)$, нужно выполнить интегрирование дифференциала $y\,dx$.

Дифференциал имеет простое геометрическое истолкование. На рис. 13 изображены график некоторой функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Сравним приращение функции $f(x)$ с приращением ординаты точки на касательной. Приращение Δy функции изображается длиной отрезка GK. Приращение ординаты

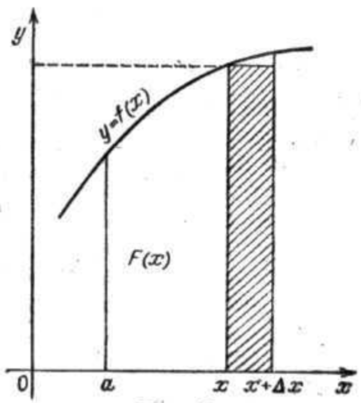

Рис. 12

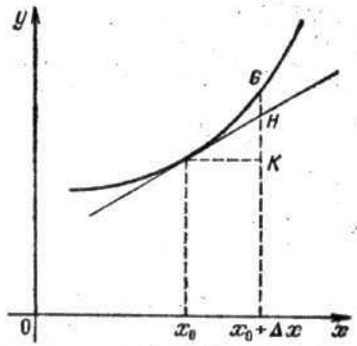

Рис. 13

точки на касательной равно длине отрезка HK. Исходя из уравнения касательной $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, находим, что приращение ординаты вдоль касательной равно

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)=f'(x_0)\,\Delta x=dy.$$

Итак, длина отрезка HK равна значению дифференциала dy в точке x_0. Разность $\Delta y-dy$ равна длине отрезка GH. Мы знаем, что эта разность есть бесконечно малая, стремящаяся к нулю существенно быстрее, чем Δx. Это хорошо видно и «на глаз».

Наконец, вспомним «основной принцип»: отрезок гладкой линии похож на отрезок прямой (касательной) и тем ближе к прямой, чем меньше отрезок; гладкая функция при малом изменении аргумента близка к линейной и тем ближе, чем меньше промежуток изменения. Из всего сказанного выше ясно, что дифференциал функции в данной

точке равен ее приращению с точностью до замены данной функции ближайшей к ней в окрестности этой точки линейной функцией.

§ 13. Дифференциал функции от функции

Пусть $y=F(u)$ является функцией от переменной u, которая, в свою очередь, есть функция $u=f(x)$ от независимой переменной x. Таким образом, $y=F(f(x))$. Заданная так функция y называется *функцией от функции* или функцией, заданной как *сложная* (здесь слово «сложная» имеет смысл «составная»).

Найдем дифференциал функции y. Пусть независимая переменная x получила приращение Δx. Через Δu и Δy обозначим соответствующие приращения переменных u и y. Мы знаем, что если переменная u получила приращение Δu, то функция $y=F(u)$ получит приращение

$$\Delta y=F'(u)\,\Delta u+\alpha\,\Delta u,$$

где α — переменная, стремящаяся к нулю вместе с Δu. Далее,

$$\Delta u=f'(x)\,\Delta x+\beta\,\Delta x=du+\beta\,\Delta x,$$

где β — переменная, стремящаяся к нулю вместе с Δx. Заметим, что как только $\Delta x\to 0$, так и $\Delta u\to 0$, и, следовательно, $\alpha\to 0$. Подставив выражение для Δu в Δy, получим:

$$\begin{aligned}\Delta y&=F'(u)\,du+F'(u)\,\beta\,\Delta x+\alpha\,du+\alpha\beta\,\Delta x=\\&=F'(u)\,du+F'(u)\,\beta\,\Delta x+\alpha f'(x)\,\Delta x+\alpha\beta\,\Delta x=\\&=F'(u)\,du+(F'(u)\,\beta+\alpha f'(x)+\alpha\beta)\,\Delta x.\end{aligned}$$

Первое слагаемое $F'(u)\,du=F'(u)\,f'(x)\,\Delta x$ пропорционально Δx. В скобках второго слагаемого находится бесконечно малая, ибо все три слагаемых внутри этих скобок — бесконечно малые. Следовательно, все второе слагаемое

$$(F'(u)\,\beta+\alpha f'(x)+\alpha\beta)\,\Delta x$$

есть бесконечно малая, стремящаяся к нулю существенно быстрее, чем Δx. Следовательно, $F'(u)\,du$ есть дифференциал функции $y=F(u)$.

Полученная очень простая формула для дифференциала функции от функции означает, что форма записи дифференциала не зависит от того, что находится под знаком функции — независимая переменная или функция от другой переменной. Это свойство дифференциала носит название *инвариантности*.

Пример 1. Зная, что $d(x^2)=2x\,dx$, найти $d(x^4)$, представив x^4 в виде $(x^2)^2$.

Решение. $d(x^2)^2=2x^2\,d(x^2)=2x^2\cdot 2x\,dx=4x^3\,dx$.

Обратим внимание на то, что выражение $F'(u)$ следует понимать так. Сначала вычисляется производная от функции $F(u)$ так, как будто u есть независимая переменная. Затем в результат подставляется выражение для u как функции от x. Таким образом,

$$F'(u)=F'(f(x)).$$

Из формулы для дифференциала немедленно следует формула для производной функции от функции.

Именно, если $y=F(u)=F(f(x))$, то

$$y'=\frac{dy}{dx}=F'(u)\frac{du}{dx}=F'(u)\,u'=F'(f(x))\,f'(x).$$

Формула дифференцирования функции от функции

$$(F(f(x)))'=F'(f(x))\,f'(x)$$

имеет очень большое значение как для дифференциального, так и для интегрального исчисления.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 1

1. Построить часть графика функции $y=x^2$ на промежутке $[0,5;\ 1,5]$. Взять на $[0,5;\ 1,5]$ точки через 0,1. За единицу масштаба принять 5 см. Затем построить часть графика функции $y=x^2$ на промежутке $[0,95;\ 1,05]$. Взять точки через 0,01 и принять за единицу масштаба 50 см (не стремиться поместить на рисунок оси координат). Выделить на первом графике ту его часть, которая в увеличенном виде изображена на втором графике.

Составить таблицу значений функции $y=2x-1$ на промежутке $[0,95;\ 1,05]$ через 0,01. Проследить, как изменяется разность $x^2-(2x-1)$ в табличных точках по мере приближения к $x=1$.

Убедиться, что на втором рисунке графики функции $y=x^2$ и прямой $y=2x-1$ неразличимы.

2. Построить часть графика функции $y=1/x$ на промежутке $[0,5;\ 2]$. Взять точки через 0,1. За единицу масштаба принять 5 см. Затем построить часть графика функции $y=1/x$ на промежутке $[0,96;\ 1,04]$. Взять точки через 0,01. За единицу масштаба принять 50 см. Вычисления провести с точностью до 0,0001.

Составить таблицу значений функции $y=-x+2$ на промежутке $[0,95;\ 1,04]$ через 0,01. Проследить, как изменяется разность

$\frac{1}{x}-(-x+2)$ в табличных точках по мере приближения к $x+1$.

Убедиться, что на втором рисунке графики функций $y=1/x$ и $y=-x+2$ неразличимы.

3. Проверить на микрокалькуляторе, имеющем восьмиразрядную мантиссу, что уже в точках $x=0,9999$ и $x=1,0001$ значения функции $y=1/x$ и $y=-x+2$ совпадают в пределах точности, которую обеспечивает калькулятор. Это значит, что работая с приближенным значением x вблизи числа 1 значения функции $y=1/x$ можно находить по формуле $y=2-x$, т. е. можно заменить действие деления на более простое — вычитание.

Заполнить помещенную ниже таблицу значений функции $y=1/x$, выполнив вычисления по приближенной формуле.

x	0,999983	0,999985	0,999987	1,999989
y				
x	1,000015	1,000017	1,000019	1,00002
y				

4. Начиная с какого номера значения переменной x, принимающей последовательность значений $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{3n+1}, \ldots$, станут меньше 10^{-2}, 10^{-4}? Станут меньше c, где c — произвольное положительное число? Является ли последовательность значений переменной x исчезающей, а переменная — бесконечно малой?

5. Могут ли члены последовательности $y_n=\frac{0,0001n+4}{n+2}$ приблизиться к нулю на расстояние, меньшее чем 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}? Можно ли переменную y, принимающую эту последовательность значений, назвать бесконечно малой?

6. Последовательность $x_n=1/n$ исчезающая. Отметьте точками на координатной прямой возможно большее число членов последовательности x_n, выбрав за единицу масштаба 12 клеточек на тетрадном листе. Обратите внимание на то, что расстояние между соседними членами быстро убывает и они становятся неразличимыми на рисунке. Постарайтесь отметить на той же координатной прямой 24-й, 48-й, 100-й члены этой последовательности.

Обратите внимание на то, что члены последовательности с большими номерами практически сливаются с нулем.

Доказать, что при любом выборе масштаба члены последовательности с достаточно большими номерами на рисунке практически сольются с точкой, изображающей нуль. Показать, что для последовательности из задачи 5 последнее утверждение было бы неверным.

7. Доказать, что данные последовательности исчезающие:

1. $y_n=\frac{100}{n}$. 2. $x_n=-\frac{1000}{n}$. 3. $x_n=-\frac{2}{n^2+4}$.

4. $z_n=\frac{1}{n^2+10}$. 5. $z_n=2^{-n}$. 6. $y_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

7. $a_n=\frac{-n-8}{n^2+n+1}$. 8. $b_n=\frac{-2n+1}{n^2-n+6}$. 9. $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

10. $x_n=\frac{n-10}{n^2+10}$.

8. Доказать, что любой интервал вида $(-\varepsilon;\ \varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, содержит бесконечно много членов исчезающей последовательности, а за его пределами — всегда конечное число членов исчезающей последовательности.

9. Доказать, что любая исчезающая переменная ограничена.

10. Будет ли переменная со значениями $x_n=\frac{n^2+2}{n^2+1}$ ограниченной?

11. Новую последовательность получили, умножив каждый член исчезающей последовательности y_n на 1000. Будет ли новая последовательность исчезающей?

12. Новую последовательность получили, прибавив к каждому члену исчезающей последовательности 0,001. Будет ли новая последовательность исчезающей?

13. Будет ли одна из переменных:

x со значениями $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{2n-1},\ \ldots,$

y со значениями $\frac{3}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{3}{10},\ \ldots,\ \frac{3}{n^2+1},\ \ldots$

стремиться к нулю существенно быстрее, чем другая?

14. Каждый член исчезающей последовательности разделим на 1000. Можно ли сказать, что получившаяся новая последовательность стремится к нулю существенно быстрее, чем исходная?

15. Найти номера членов последовательности x_n, отличающихся от a меньше чем на 0,01; 0,001; меньше чем на ε, где ε — произвольное положительное число:

1. $x_n=\frac{n}{n+10}$, $a=1$. 2. $x_n=\frac{3n-4}{3n+100}$, $a=1$.

3. $x_n=\frac{20-6n}{n+1}$, $a=-6$. 4. $x_n=\frac{-5n}{n+1}$, $a=-5$.

16. Найти предел последовательности x_n из задачи 15 и записать его в соответствующей символике.

17. Доказать, что число 3 не является пределом последовательности $y_n=\frac{50n}{17n+2}$.

Указание: покажите, что ни один член последовательности y_n не приближается к 3 ближе чем на 0,01.

18. Доказать, что число 2 не является пределом последовательности $x_n=\frac{49n}{24n+6}$.

19. Известно, что $\lim x_n=a$. Сколько членов последовательности x_n содержится вне интервала $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, где ε — произвольное положительное число?

20. Доказать, что любая переменная, имеющая предел, ограничена.

21. Изменится ли предел сходящейся последовательности, если к ней приписать конечное число первых членов или отбросить конечное число первых членов?

22. Доказать, что предел постоянной величины (переменной, последовательные значения которой равны одному и тому же числу) равен самой постоянной.

23. Как изменится предел сходящейся последовательности, если к каждому члену последовательности прибавить одно и то же число?

24. Как изменится предел сходящейся последовательности, если каждый ее член умножить на одно и то же число?

25. Доказать, что если $x_n\to a$, то $\frac{1}{x_n-a}\to\infty$.

26. Доказать, что переменная со значениями $x_n=n-\frac{1}{n}$ стремится к бесконечности.

27. Доказать, что если $x_n\to\infty$, то $\frac{x_n-1}{x_n+1}\to 1$.

28. Дано: $x_n\to 1$, $y_n\to -2$, $a_n\to 5$.

Найти, пользуясь теоремами о пределах и теоремой о пределе постоянной величины, следующие пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n+a_n)$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-x_n-y_n)$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{y_n}$. 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{a_n}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n-y_n\cdot a_n)$. 6. $\lim\limits_{n\to\infty}(8a_n-x_n\cdot y_n)$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x_n+y_n}{a_n}$. 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2a_n+5y_n}{x_n}$.

29. Найти пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2}{(n+3)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-4}{n^2+4}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+5n+6}-2n)$. 4. $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-\sqrt{9n^2-6n+2})$.

30. x_n — последовательность значений переменной x. Составим формулу n-го члена для соответствующей последовательности значений функции $y=x^2$. Эта формула имеет вид $y_n=x_n^2$.

Пусть x_n сходится к числу 3.

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Как полученный результат формулируется в терминах предела функции?

31. Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)$. 2. $\lim\limits_{x\to -1}(-3-8x)$. 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x+1}{2x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-4}{x^2-x-2}$. 5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$. 6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x^2}{x+1}$.

32. Доказать, что сумма двух функций, непрерывных в некоторой точке, непрерывна в той же точке.

33. Доказать, что произведение двух или нескольких функций, непрерывных в некоторой точке, непрерывно в той же точке.

34. Доказать, что любая целая рациональная функция непрерывна.

35. Доказать, что любая дробно-рациональная функция непрерывна в каждой точке области определения.

36. Доказать, что если $x\longrightarrow a$ и $a\geqslant 0$, то $\sqrt{x}\longrightarrow\sqrt{a}$. Сформулировать полученный результат в терминах непрерывности функции.

37. Найти пределы, пользуясь теоремами о непрерывности, доказанными в задачах 32—36:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-4-x^2}{x+3}$. 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{9-x}{x^2+x+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$.

4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{x-5}$. 5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-x-1}{x^2-1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+1}+x-3}{x^2-4}$.

38. Назначение многих устройств состоит в том, что они по определенному закону преобразуют одну (входную) величину в другую

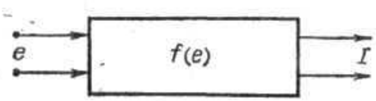

Рис 14

(выходную). Пусть одно из таких устройств (см. рис. 14) преобразует входной сигнал e в выходную величину I по закону $I=f(e)$, где $f(e)=9+25e^2$.

а) Каким должен быть сигнал на входе, чтобы значение выходного сигнала мало отличалось от 10?

б) Какова будет величина сигнала на выходе, если сигнал на входе мало отличается от 2?

в) Какое свойство квадратичной функции $y=ax^2+b$ позволяет дать обоснованный ответ на предыдущие вопросы?

39. Существуют так называемые пороговые устройства, преобразующие плавно меняющийся сигнал в скачкообразно изменяющуюся выходную величину.

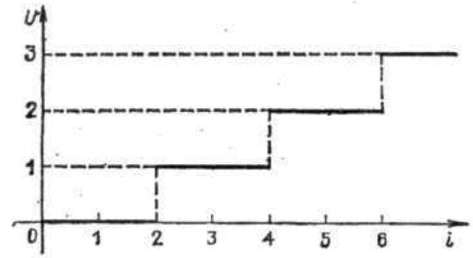

Рис. 15

Дана зависимость между входным сигналом i и выходным сигналом U одного из таких устройств:

$$U(i)=\begin{cases}0 \text{ при } i<2,\\ 1 \text{ при } 2<i<4,\\ 2 \text{ при } 4<i<6,\\ 3 \text{ при } i>6.\end{cases}$$

На рис. 15 приведен график преобразования сигнала i в U.

а) Что можно ожидать на выходе такого устройства, если входной сигнал мало изменяется около значения 2? 4? 6?

б) Что можно ожидать на выходе, если сигнал на входе мало отличается от 1? 3? 5?

в) Как обосновать ответы на предыдущие вопросы свойствами функции $y=U(i)$?

40. Найти производную от функции:

1. $y=x^3$. 2. $y=3-4x$. 3. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

4. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$. 5. $y=\sqrt{x^3}$. 6. $y=\sqrt{5x-3}$.

41. Доказать, что функция $y=|x|$ не имеет производной в точке $x=0$.

42. Доказать, что производная линейной функции $y=kx+b$ равна угловому коэффициенту. Сопоставить доказанное утверждение с основным принципом дифференциального исчисления.

43. Составить уравнение касательной к графику данной функции в точке с заданной абсциссой x_0 или ординатой y_0:

1. $y=x^2$, $x_0=1$. 2. $y=x^2$, $x_0=-1$.

3. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$, $x_0=1$. 4. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$, $x_0=4$.

5. $y=\dfrac{1}{x}$, $y_0=2$. 6. $y=\dfrac{1}{x}$, $y_0=-1$.

7. $y=\sqrt{x}$, $y_0=\dfrac{1}{2}$. 8. $y=\sqrt{x}$, $y_0=1$.

44. Написать уравнение касательной к графику функции $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ в точке с абсциссой $x=3$. Пользуясь уравнением касательной, вычислить приближенное значение данной функции вблизи точки $x=3$:

1. $y(3{,}001)$. 2. $y(3{,}0002)$. 3. $y(2{,}9998)$. 4. $y(2{,}999)$.

45. Найти точку касания и уравнение касательной к параболе $y=x^2$, если известно, что касательная проходит через точку $(2, 3)$, не лежащую на параболе.

46. На рис. 16 изображен график функции $y=f(x)$. Установить физический смысл средней скорости изменения функции на промежутке и производной функции в точке, найти единицы их измерения, если:

1. График изображает зависимость величины пройденного пути от времени. По оси ординат — путь (S) в метрах, по оси абсцисс — время t в минутах.

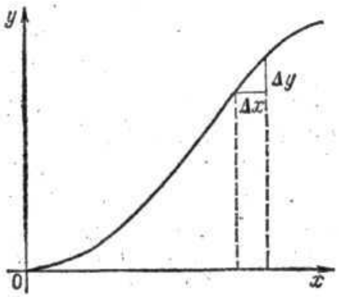

Рис. 16

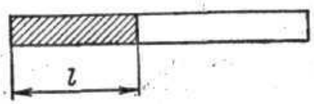

Рис. 17

2. График изображает процесс нагрева некоторого тела. По оси ординат — температура (T) в градусах Цельсия, по оси абсцисс — время (t) в секундах.

3. График изображает зависимость массы израсходованного горючего от величины пройденного пути. По оси ординат — масса (m) топлива в граммах, по оси абсцисс — пройденный путь (S) в километрах.

4. График изображает зависимость массы части неоднородного стержня от длины этой части стержня. По оси ординат — масса m части стержня в граммах, по оси абсцисс — длина l этой части стержня в сантиметрах (рис. 17).

5. График изображает склон холма. По оси ординат — высота (h) над нулевой отметкой в метрах, по оси абсцисс — расстояние (x) по перпендикуляру к нулевой горизонтали в метрах.

6. График изображает зависимость напряжения на выходе усилительного устройства от напряжения на его выходе. По оси ординат — выходное напряжение (U) в вольтах, по оси абсцисс — величина входного напряжения (e) в вольтах.

47. Построить на миллиметровой бумаге график функции по табличным данным, соединив точки плавной линией:

x	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0,2	0,8	2,9	4,5	5	4,3	2,7	2	1,5	0

Масштаб — единица в 10 мм.

Определить, выполнив необходимые построения, измерения и вычисления, скорость изменения функции в заданной точке области определения:

1. $x=1$. 2. $x=3$. 3. $x=6$. 4. $x=8$.

В какой из точек скорость возрастания (убывания) функции больше?

48. Точка движется по координатной прямой по закону $x(t)=t^2-8t-3$, где x — координата точки в метрах, t — время в секундах.

Найти:

1. Начальное положение точки $x(0)$.
2. Скорость точки в произвольный момент времени $v(t)$.
3. Начальную скорость точки $v(0)$.
4. Ускорение.
5. Момент t_0 остановки (мгновенной), решив уравнение $v(t_0)=0$.
7. Положение точки через 10 секунд после начала движения.
8. Путь, пройденный точкой за время от $t=0$ до $t=10$.
9. Путь, пройденный точкой за время от $t=6$ до $t=10$.
10. Построить график движения точки, по оси ординат — путь $x(t)$, по оси абсцисс — время t.
11. Написать формулу пути, пройденного точкой за время от $t=0$ до момента $t\leqslant t_0$.
12. Как вычислить путь, пройденный точкой за время от $t=0$ до $t\geqslant t_0$?

49. Точка A движется по оси абсцисс по закону $x(t)=4t+8$, точка B движется по оси ординат по закону $x(t)=3t+6$. По какому закону изменяется расстояние между точками? С какой скоростью точки удаляются друг от друга?

50. Человек, рост которого 1,8 м, проходит под фонарем с постоянной скоростью 5 км/ч. Составить формулу, описывающую изменение длины тени от человека с момента времени, когда человек находился точно под фонарем (длина тени равнялась нулю), до момента времени t. С какой скоростью изменяется длина тени?

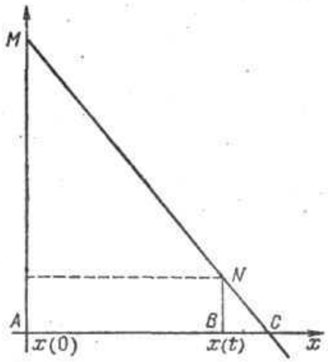

Рис. 18

Фонарь подвешен на высоте 9,8 м. См. рис. 18, где $AB = x(t)$ — расстояние от проекции фонаря на дорогу, $BC = l(t)$ — искомая длина тени, $AM = 9{,}8$ м, $BN = 1{,}8$ м.

51. Найти дифференциал функции $y = x^2 + 1$, рассмотрев его как главную часть приращения, пропорциональную Δx.

52. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{x}$ по определению дифференциала.

53. Найти дифференциал функции $y = x^6 = (x^2)^3 = (x^3)^2$, зная, что $d(x^2) = 2x\,dx$, $d(x^3) = 3x^2\,dx$.

54. Найти дифференциал функции $\sqrt{x^2+1}$, зная, что $d\sqrt{x} = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ и $d(x^2+1) = 2x\,dx$.

Глава 2

ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В главе 1 мы выполняли дифференцирование некоторых функций, исходя из определений производной и дифференциала. Цели настоящей главы — изложение некоторых правил и формул, позволяющих производить дифференцирование, не обращаясь каждый раз к определениям. Эти несложные правила и формулы дают основание для названия этого раздела математического анализа — *дифференциальное исчисление*.

§ 1. Дифференцирование результатов арифметических действий

Теорема 1. *Производная от суммы двух функций равна сумме производных от этих функций. Соответственно дифференциал суммы равен сумме дифференциалов.*

Доказательство. Пусть $u = f_1(x)$ и $v = f_2(x)$ — данные функции от x и пусть $y = y(x) = u + v = f_1(x) + f_2(x)$. Придадим значению переменной x приращение Δx и пусть Δu, Δv и Δy — соответствующие приращения функций u, v, y. Тогда

$$\Delta u = f_1(x+\Delta x) - f_1(x);\quad \Delta v = f_2(x+\Delta x) - f_2(x);$$

$$\Delta y = f_1(x+\Delta x) + f_2(x+\Delta x) - (f_1(x) + f_2(x)) =$$
$$= f_1(x+\Delta x) - f_1(x) + f_2(x+\Delta x) - f_2(x) = \Delta u + \Delta v.$$

Следовательно, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

так что $y' = u' + v'$, что и требовалось доказать. Умножив обе части этого равенства на dx, получим $y'dx = u'dx + v'dx$, т. е. $dy = du + dv$.

Ясно, что теорема 1 фактически доказана в следующей более сильной формулировке:

Если функции $u=f_1(x)$ и $v=f_2(x)$ имеют производные в некоторой точке, то в той же точке имеет производную их сумма и эта производная равна сумме производных слагаемых.

Теорема 2. *Производная от произведения $y=cu$ постоянной c на функцию $u=f(x)$ равна произведению той же постоянной на производную от функции u.*

На языке формул: $(cu)'=c\cdot u'$.

Для дифференциалов: $d(cu)=cdu$.

Доказательство. Положим $y=cu=cf(x)$. Тогда $\Delta y=cf(x+\Delta x)-cf(x)=c[f(x+\Delta x)-f(x)]=c\Delta u$.

Следовательно, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Это и значит, что $y'=cu'$. После умножения на dx получим $dy=cdu$.

Теорема 3. *Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй, сложенному с произведением первого сомножителя на производную второго.*

Данная довольно сложная формулировка есть словесное прочтение достаточно простой формулы:

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Аналогично, для дифференциалов:

$$d(uv)=(du)v+u(dv).$$

Доказательство. Пусть $u=f_1(x)$, $v=f_2(x)$ и $y=uv=f_1(x)f_2(x)$. Пусть Δx — приращение независимой переменной x и Δu, Δv и Δy — соответствующие приращения функций u, v и y. Тогда

$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=uv+(\Delta u)v+u(\Delta v)+$$
$$+(\Delta u)(\Delta v)-uv=(\Delta u)v+u(\Delta v)+\Delta u\cdot\Delta v.$$

Поделив на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v.$$

Предельный переход на $\Delta x\to 0$ дает

$$y'=(uv)'=u'v+uv'+u'\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=u'v+uv'+u'\cdot 0=$$
$$=u'v+uv',$$

что и требовалось доказать.

Умножив на dx, получим соответствующую формулу для дифференциала:

$$d(uv)=(du)v+u(dv).$$

При доказательствах теорем 2 и 3 снова предполагается существование производных функций u и v и в этом предположении доказывается существование (а не только выводится формула) производных функций uv и cu.

Теорема 4. *Производная от постоянной (т. е. от функции, принимающей одно и то же значение при всех значениях независимой переменной) равна нулю.*

Доказательство. Пусть $y=f(x)=c$, где c — постоянная. Тогда

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

и

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.$$

Теорема 5. *Производная от независимой переменной равна 1.*

Доказательство. Пусть $y=x$. Тогда $\Delta y=\Delta x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$ и $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$.

Теорема 6. *Пусть n — натуральное число. Производная от степенной функции $y=x^n$ равна nx^{n-1}.*

Доказательство. Пусть $n=2$ (этот случай уже рассматривался в § 1, исходя из определения производной), т. е. $y=x^2=x\cdot x$. Тогда y', согласно теореме 3, равна

$$x'x+xx'=1\cdot x+x\cdot 1=2x.$$

Пусть теперь $n=3$, т. е. $y=x^3=x^2x$. Тогда

$$y'=(x^2)'x+x^2x'=2xx+x^2\cdot 1=3x^2.$$

Аналогично можно рассуждать при $n=4, 5, \ldots$

Для того чтобы доказать формулу для любого n, естественно обратиться к методу математической индукции (ибо этот метод обычно заменяет цепочку однотипных рассуждений). Пусть для показателя $n-1$ формула уже установлена: $(x^{n-1})'=(n-1)x^{n-2}$. Тогда для $y=x^n$ имеем:

$$y=x^n=x^{n-1}x;$$
$$y'=(x^{n-1})'x+x^{n-1}x'=(n-1)x^{n-2}x+x^{n-1}\cdot 1=$$
$$=(n-1)x^{n-1}+x^{n-1}=nx^{n-1}.$$

Теорема доказана (она верна для $n=2$, следовательно, верна и для $n=3$; верна для $n=3$, следовательно, верна и для $n=4$ и т. д.).

Ясно, что для дифференциала степени с натуральным показателем верна формула

$$d(x^n)=nx^{n-1}dx.$$

Теорема 7. *Производная от дроби в точке, в которой дробь имеет смысл (т. е. знаменатель не обращается в нуль), равна дроби, числитель которой равен разности произведений производной числителя на знаменатель и числителя на производную от знаменателя, а знаменатель равен квадрату знаменателя исходной дроби.*

Данная формулировка есть словесное прочтение формулы

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Доказательство. Пусть $y=u/v$, где $u=f_1(x)$, $v=f_2(x)$ и в рассматриваемой точке $v\neq 0$. Пусть Δx — приращение независимой переменной Δu, Δv и Δy — соответствующие приращения функций u, v и y. Тогда

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{(u+\Delta u)\,v-u\,(v+\Delta v)}{v\,(v+\Delta v)}=$$
$$=\frac{uv+(\Delta u)\,v-uv-u\,(\Delta v)}{v\,(v+\Delta v)}=\frac{(\Delta u)\,v-u\,(\Delta v)}{v\,(v+\Delta v)}.$$

Деление на Δx и предельный переход при $\Delta x\to 0$ дает:

$$y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left(v+\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)}=$$
$$=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left(v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)}=\frac{u'v-uv'}{v\,(v+v'\cdot 0)}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Замечание. В этом рассуждении нет оснований для опасения в связи с помещением $v+\Delta v$ в знаменатель. Конечно, предполагается, что функция v имеет производную в рассматриваемой точке и, следовательно, непрерывна. Поэтому $\Delta v\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Значение v отлично от нуля, и, следовательно, $v+\Delta v$ станет отличным от нуля при достаточно малом Δx.

Теорема 8. *Формула* $(x^n)'=nx^{n-1}$ *остается верной и для целого отрицательного показателя.*

Доказательство. Пусть $y=x^n$, где n — целое отрицательное число. Положим $n=-k$, где k — уже натуральное число. Тогда $y=x^{-k}=\frac{1}{x^k}$. По теореме 7 имеем:

$$y'=\frac{1'\cdot x^k-1\cdot(x^k)'}{(x^k)^2}=\frac{-kx^{k-1}}{x^{2k}}=-k\frac{1}{x^{k+1}}=-kx^{-k-1}=nx^{n-1}.$$

Теоремы 1—6 дают средство для вычисления производной от любой целой рациональной функции. Действительно, целая рациональная функция может быть преобразована к виду многочлена, т. е. суммы степеней независимой переменной с некоторыми коэффициентами. Из этих теорем (в усиленной формулировке) следует также существование производной целой рациональной функции в любой точке. Производная снова оказывается целой рациональной функцией и, следовательно, непрерывна всюду. Поэтому целая рациональная функция является гладкой функцией.

Из теоремы 7 следует правило дифференцирования дробно-рациональной функции. Производная существует во всех точках кроме точек, в которых знаменатель обращается в нуль. Производная снова оказывается дробно-рациональной функцией, знаменатель которой обращается в нуль в тех же точках, где и знаменатель исходной функции. Поэтому дробно-рациональная функция оказывается кусочно гладкой и открытые промежутки гладкости разделены точками, в которых знаменатель обращается в нуль.

Рассмотрим теперь несколько примеров на применение доказанных теорем.

Пример 1. Найти производную и дифференциал функции

$$y=x^5+5x^4-10x^2+3.$$

Решение. Применяем теоремы 1, 2, 4 и 6:

$$y'=5x^4+20x^3-20x;\quad dy=(5x^4+20x^3-20x)\,dx.$$

Пример 2. Найти производную и дифференциал функции

$$y=\frac{x^3}{x^2+1}.$$

Решение.

$$y'=\frac{3x^2\,(x^2+1)-x^3\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2};$$
$$dy=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Пример 3. Найти производную функции

$$y=\frac{x^2+1}{x^3}.$$

Решение 1.

$$y'=\frac{x^3\cdot 2x-(x^2+1)\,3x^2}{x^6}=\frac{-x^4-3x^2}{x^6}=\frac{-x^2(x^2+3)}{x^6}=-\frac{x^2+3}{x^4}.$$

Решение 2 (с применением теоремы 8).

$$y=(x^2+1)\,x^{-3};$$

$$y'=2x\cdot x^{-3}+(x^2+1)(-3x^{-4})=$$

$$=\frac{2}{x^2}-\frac{3x^2+3}{x^4}=\frac{-x^2-3}{x^4}=-\frac{x^2+3}{x^4}.$$

Решение 3.

$$y=\frac{x^2+1}{x^3}=\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}=x^{-1}+x^{-3};$$

$$y'=-x^{-2}-3x^{-4}=-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}=-\frac{x^2+3}{x^4}.$$

Пример 4. Найти производную от функции

$$y=(x^2+x+1)^2.$$

Решение 1.

$$y=x^4+2x^3+3x^2+2x+1;$$

$$y'=4x^3+6x^2+6x+2.$$

Решение 2 (с использованием вычисления производной функции от функции).

$$y=(x^2+x+1)^2;$$

$$y'=2\,(x^2+x+1)\,(x^2+x+1)'=2\,(x^2+x+1)\,(2x+1)=$$

$$=4x^3+6x^2+6x+2.$$

Пример 5. Найти производную функции

$$y=\frac{1}{(x^2+1)^4}.$$

Решение.

$$y'=-4\,(x^2+1)^{-5}\cdot(x^2+1)'=-\frac{4}{(x^2+1)^5}\cdot 2x=-\frac{8x}{(x^2+1)^5}.$$

§ 2. Дифференцирование логарифмической функции

Пусть $y=\log_a x$. Тогда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x},\quad x>0.$$

Положим $\frac{\Delta x}{x}=h$. Тогда $h\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta x=xh$. Поэтому

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\,\frac{\log_a(1+h)}{h}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+h)^{1/h}=$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}\right).$$

Положив $x=1$, получим

$$y'_{x=1}=\log_a\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}\right).$$

Таким образом, для любой точки x, $x>0$,

$$y'=\frac{1}{x}\cdot y'_{x=1}.$$

Значение $y'_{x=1}$ есть угловой коэффициент касательной в точке $x=1$, т. е. в точке, в которой график логарифмической функции пересекает ось абсцисс. Ввиду того что все логарифмические функции пропорциональны (т. е. отличаются постоянными множителями), среди них найдутся такие, графики которых пересекают ось абсцисс под всевозможными углами (кроме прямого угла). В частности, существует логарифмическая функция, имеющая равный 1 угловой коэффициент касательной в точке пересечения графика с осью абсцисс. Такая логарифмическая функция носит название *натуральной*, и соответствующие ей логарифмы называются *натуральными*. Основанием системы натуральных логарифмов является число $e=\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$, имеющее название *неперова числа*. Это число иррациональное и даже трансцендентное, что значит, что оно не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. В настоящее время оно вычислено более чем с 1000 десятичных знаков после запятой, с точностью до 10^{-15} оно равно 2,718281828459045.

Натуральный логарифм числа x обозначается $\ln x$.

Итак, натуральная логарифмическая функция имеет своей производной $\frac{1}{x}$ и ее дифференциал равен $\frac{dx}{x}$. Для логарифмической функции $\log_a x$ производная равна $\frac{1}{x}\log_a e$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти производную функции $y=\ln(x^2+1)$.

Решение. Здесь нужно воспользоваться правилом вычисления производной функции от функции:

$$y'=\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'=\frac{2x}{x^2+1}.$$

Формально проще начинать с дифференциала:

$$dy=\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{2x\,dx}{x^2+1} \text{ и } y'=\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2+1}.$$

Пример 2. Найти производную функции $y=(\ln x)^2$.

Решение.

$$dy=2\ln x\cdot d\ln x=2\ln x\frac{dx}{x},$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{2\ln x}{x}.$$

Пример 3. Найти производную функции $y=\frac{\ln x}{x}$.

Решение.

$$y'=\frac{x(\ln x)'-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{x\cdot\frac{1}{x}-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

§ 3. Доказательство существования предела функции $(1+h)^{1/h}$ при $h\to 0$

В предыдущем параграфе мы приняли без доказательства на основании геометрически очевидного обстоятельства, что график логарифмической функции пересекает ось абсцисс под определенным углом, что предел $(1+h)^{1/h}$ при $h\to 0$ должен существовать.

Сейчас мы проведем более строгое доказательство существования этого предела.

Лемма. *Пусть $\alpha>-1$, $\alpha\neq 0$, n — натуральное число. Тогда $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$.*

Доказательство. Пусть $n=2$. Имеем $(1+\alpha)^2=1+2\alpha+\alpha^2>1+2\alpha$, ибо $\alpha^2>0$. Далее, $(1+\alpha)^3=(1+\alpha)^2(1+\alpha)>(1+2\alpha)(1+\alpha)$, ибо $1+\alpha>0$ и $(1+\alpha)^2>1+2\alpha$. Но $(1+2\alpha)(1+\alpha)=1+3\alpha+2\alpha^2>1+3\alpha$. Итак, $(1+\alpha)^3>1+3\alpha$. Аналогично можно рассуждать для $n=4, 5, \ldots$ Поэтому следует применить метод математической индукции. Пусть уже доказано, что $(1+\alpha)^{n-1}>1+(n-1)\alpha$. Тогда $(1+\alpha)^n=(1+\alpha)^{n-1}\times(1+\alpha)>(1+(n-1)\alpha)(1+\alpha)$, ибо $(1+\alpha)^{n-1}>1+(n-1)\alpha$ и $1+\alpha>0$. Но $(1+(n-1)\alpha)(1+\alpha)=1+(n-1)\alpha+\alpha+(n-1)\alpha^2=1+n\alpha+(n-1)\alpha^2>1+n\alpha$, ибо $\alpha^2>0$. Тем самым лемма доказана полностью.

Теорема 1. *Пусть $n\to\infty$, пробегая натуральный ряд чисел. Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.*

Доказательство. Положим $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=u_n$. Покажем прежде всего, что u_n возрастает с возрастанием n. С этой целью рассмотрим

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.$$

Теперь применим лемму. Получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=1.$$

Итак, $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, т. е. $u_{n+1}>u_n$, и это верно для всех n.

Теперь введем в рассмотрение другую последовательность чисел: $v_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Покажем, что v_n убывает с возрастанием n. С этой целью рассмотрим

$$\frac{v_n}{v_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\frac{n}{n+1}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+2}=$$

$$=\frac{n}{n+1}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2}=\frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2}=$$

$$=\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2}.$$

Теперь применим лемму. Получим

$$\frac{v_n}{v_{n+1}}>\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n+2}{n^2+2n}\right)=\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Итак, $\frac{v_n}{v_{n+1}}>1$ и, следовательно, $v_{n+1}<v_n$.

Мы получили, что последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — возрастающая, а последовательность $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ — убывающая. Далее,

$$v_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n,$$

и, следовательно, $v_n>u_n$.

Интервалы $[u_n, v_n]$ при $n=1, 2, \ldots$ вложены друг в друга в силу возрастания u_n и убывания v_n. Они стягиваются, ибо $v_n-u_n=\frac{1}{n}u_n<\frac{1}{n}v_n<\frac{1}{n}v_1=\frac{4}{n}$, а $\frac{4}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Поэтому $v_n-u_n\to 0$.

Единственное вещественное число, обозначим его e, принадлежащее всем интервалам стягивающейся системы интервалов $[u_n, v_n]$, и есть предел последовательности $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Действительно, $e-u_n>0$ и $|u_n-e|=e-u_n<v_n-u_n<\frac{4}{n}\to 0$. Поэтому $|u_n-e|\to 0$ и $e=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$. К этому же пределу сходится последовательность $v_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Теорема 2. *Пусть h пробегает последовательность положительных значений $h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots$, сходящуюся к нулю. Тогда*

$$(1+h_k)^{1/h_k}\to e.$$

Доказательство. Конечно, нужно считать, что все h_k отличны от нуля, ибо иначе выражение $(1+h_k)^{1/h_k}$ лишено смысла. «Большое» положительное число $1/h_k$ заключено между двумя соседними натуральными числами:

$$n_k\leqslant 1/h_k<n_k+1.$$

Ясно, что при $h_k\to 0$ будет $n_k\to\infty$. Далее, для h_k выполнено неравенство $\frac{1}{n_k+1}<h_k\leqslant\frac{1}{n_k}$. Из неравенств для $1/h_k$ и h_k заключаем, что

$$(1+h_k)^{1/h_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=v_{n_k}$$

и

$$(1+h_k)^{1/h_k}>\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1}=u_{n_k+1}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1}.$$

Итак, $(1+h_k)^{1/h_k}$ заключено между числами v_{n_k} и $u_{n_k+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1}$, имеющими, очевидно, один и тот же предел e. Следовательно, $\left(1+\frac{1}{h_k}\right)^{h_k}$ стремится к этому же пределу.

Теорема 3. *Пусть h пробегает последовательность отрицательных значений $h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots$, сходящуюся к нулю. Тогда $(1+h_k)^{1/h_k}\to e$.*

Доказательство. Положим $h_k=-g_k$, где g_k — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Тогда

$$(1+h_k)^{1/h_k}=(1-g_k)^{-1/g_k}=\left(\frac{1}{1-g_k}\right)^{1/g_k}=\left(1+\frac{g_k}{1-g_k}\right)^{1/g_k}.$$

Положим $\frac{g_k}{1-g_k}=t_k$. Ясно, что $t_k\to 0$ при $g_k\to 0$, и значения t_k станут положительными, как только значения g_k станут меньше 1.

Из равенства $\frac{g_k}{1-g_k}=t_k$ находим, что

$$g_k=\frac{t_k}{1+t_k},\quad \frac{1}{g_k}=\frac{1+t_k}{t_k}=1+\frac{1}{t_k}.$$

Таким образом, $(1+h_k)^{1/h_k}=(1+t_k)^{1/t_k+1}=(1+t_k)^{1/t_k}\times(1+t_k)$. Первый множитель при $t_k\to 0$ сходится к e, второй — к 1. Итак, $\lim(1+h)^{1/h}$ снова равен e при h, стремящемся к нулю со стороны отрицательных значений. Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 следует, что $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$ существует и равен e, ибо если h принимает как положительные, так и отрицательные значения, стремящиеся к нулю, функция $(1+h)^{1/h}$ будет безгранично приближаться к e как для положительных, так и для отрицательных значений h. ►

§ 4. Дифференцирование показательной функции

Пусть $y=a^x$ при $a>0$ и $a\neq 1$. Тогда $\ln y = x\ln a$. Продифференцировав обе части этого равенства, получим $\frac{dy}{y}=\ln a\cdot dx$, откуда $dy=y\ln a\,dx=a^x\ln a\,dx$. Поделив на dx, получим

$$(a^x)'=\frac{dy}{dx}=a^x\ln a.$$

Если $a=e$, т. е. рассматриваемая показательная функция есть натуральная показательная функция, то формула для производной принимает особенно простой вид:

$$(e^x)'=e^x.$$

Формула для дифференциала: $de^x=e^x\,dx$.

Простота этих формул является одним из доводов в пользу выражения показательной функции a^x с любым основанием через натуральную показательную функцию, т. е. через показательную функцию с основанием e. Это делается так. Положим $\ln a=k$. Тогда, согласно определению логарифма, $a=e^k$, откуда $a^x=(e^k)^x=e^{kx}$. Установленная выше формула производной для показательной функции принимает вид $(e^{kx})'=ke^{kx}$. При положительном k функция e^{kx}, очевидно, возрастает с возрастанием x. Формула дифференцирования показывает, что скорость возрастания функции e^{kx} пропорциональна ее значению в рассматриваемой точке. При отрицательном k функция e^{kx} убывает и скорость ее убывания пропорциональна ее значению. Ясно, что такими же свойствами обладают скорости возрастания (и убывания) функции вида ce^{kx} при $c>0$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти производную функции $y=10^x$.

Ответ. $y'=10^x\ln 10$.

Пример 2. Найти производную функции $y=e^{x^2}$.

Решение. $dy=de^{x^2}=e^{x^2}d(x^2)=e^{x^2}2x\,dx$ и $y'=\frac{dy}{dx}=$ $=e^{x^2}\cdot 2x$.

Пример 3. Найти производную функции $y=(x^2+1)e^x$.

Решение.

$$y'=(x^2+1)'\cdot e^x+(x^2+1)(e^x)'=$$
$$=2x\cdot e^x+(x^2+1)e^x=(x^2+2x+1)e^x=(x+1)^2e^x.$$

Пример 4. Найти производную функции $y=x^x$, $x>0$.

Решение. $y=(e^{\ln x})^x=e^{x\ln x}$;

$$dy=e^{x\ln x}d(x\ln x)=x^x((dx)\cdot\ln x+x d\ln x)=$$
$$=x^x\left(\ln x\cdot dx+x\frac{dx}{x}\right)=x^x(\ln x+1)\,dx;$$
$$y'=\frac{dy}{dx}=x^x(\ln x+1).$$

§ 5. Дифференцирование степенной функции

Пусть $y=x^a$. При целых (положительных и отрицательных) значениях a формула дифференцирования была установлена выше: $(x^a)'=ax^{a-1}$. Выведем теперь формулу дифференцирования степенной функции $y=x^a$ при любом вещественном показателе a. При нецелом a мы должны считать $x>0$.

Взяв натуральный логарифм от обеих частей равенства $y=x^a$, получим $\ln y=a\ln x$. Приравнивание дифференциалов дает $\frac{dy}{y}=a\frac{dx}{x}$, откуда $dy=a\frac{y}{x}dx=ax^{a-1}dx$. Поделив на dx, получим

$$y'=\frac{dy}{dx}=ax^{a-1}.$$

Таким образом, формула производной степенной функции с любым вещественным показателем имеет такой же вид, как для целого показателя.

Нетрудно проследить, что при $a>1$ существует производная и при $x=0$ и она равна 0.

Рассмотрим несколько примеров на вычисления производных и дифференциалов.

Пример 1. $y=x^{\sqrt{2}}$.

Ответ. $y'=\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$.

Пример 2. $y=\sqrt{x^2+1}$.

Решение.

$$y=(x^2+1)^{1/2};$$

$$dy=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}d(x^2+1)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\,2x\,dx=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx,$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Пример 3. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. $y=x(x^2+1)^{-1/2}$,

$$dy=(dx)(x^2+1)^{-1/2}+x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+1)^{-3/2}d(x^2+1)=$$

$$=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{2\sqrt{(x^2+1)^3}}\cdot 2x\,dx=$$

$$=\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}(x^2+1-x^2)=\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}};$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

§ 6. Дифференцирование функций, заданных уравнениями

Если график зависимости $F(x, y)=0$, связывающей две переменные x и y, имеет вид гладкой линии и точка $(x_0; y_0)$ лежит на этом графике и не является точкой самопересечения графика, то в достаточно малой окрестности этой точки одну из переменных можно рассматривать как функцию от другой. При этом оказывается, что можно вычислить производную от этой функции. Для этого нужно взять дифференциал от функции $F(x, y)$, приравнять его нулю и из получившегося соотношения найти $\frac{dy}{dx}$ $\left(\text{или } \frac{dx}{dy}\right)$.

Пример 1. Из уравнения окружности $x^2+y^2=r^2$ находим $x\,dx+y\,dy=0$, откуда $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. Уравнение задает здесь две гладкие функции: $y=\sqrt{r^2-x^2}$ и $y=-\sqrt{r^2-x^2}$. Для обеих функций $y'=-x/y$, в чем легко убедиться и путем непосредственного вычисления производной, исходя из явной формулы.

Пример 2. Точка (1.1) лежит на кривой с уравнением $x^3+y^3=2xy$. Найти угловой коэффициент касательной к кривой в этой точке.

Решение. Дифференцирование зависимости дает равенство $3x^2\,dx+3y^2\,dy=2y\,dx+2x\,dy$, откуда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-2y}{2x-3y^2}.$$

Подставляя координаты точки в правую часть последнего равенства, получим ответ:

$$y'_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{3-2}{2-3}=-1.$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 2

1. Найти производную и дифференциал функции:

1. $y=2x^7-3x^5+4x^3-x-10$. 2. $y=3x^6-x^4-3x^2+7$.

3. $u=4t^4+2t^2$. 4. $v=\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3$. 5. $f=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z}$.

6. $g=-\frac{1}{\tau^4}+\frac{1}{\tau^2}-\frac{1}{\tau}$. 7. $h=t^4-\frac{1}{t^4}$. 8. $f=\frac{1}{t^3}-t^3$.

9. $y=\frac{x}{x-3}$. 10. $y=\frac{x-7}{x+5}$. 11. $y=\frac{t^2-1}{t^2+1}$.

12. $y=\frac{t^3+2}{t^3-t}$. 13. $f=\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+4}$. 14. $h=\frac{5x-x^2-3}{4-x-x^2}$.

15. $g=(3u+7)^5$. 16. $f=(7-5u)^4$.

17. $S=2\pi r^2+4\pi lr+k$, где π, l, k — константы, r — аргумент.

18. $V=\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{2}{3}\pi hr^2+k$, где π, h, k — константы, r — аргумент.

19. $F=2\pi(4-l)^2-\pi(H-3l)^2$, где π, H — константы, l — аргумент.

20. $H=(3-ax-x^2)(2+bx)$, где a, b — константы, x — аргумент.

21. $P=\frac{a}{(\alpha-4)^2}-\frac{b}{(\alpha+3)^3}$, где a, b — константы, α — аргумент.

22. $G=\frac{\alpha}{(t^2-1)^3}+\frac{\beta}{(t^3-8)^2}$, где α, β — константы, t — аргумент.

2. $y=(2x-1)(3x-2)(4x-3)$. Найти: $y'(x)$, $y'(1)$, $y'\left(\frac{1}{2}\right)$, $y'\left(\frac{2}{3}\right)$, $y'\left(\frac{3}{4}\right)$.

3. $y=x^3(5x-1)(1-2x)$. Найти: $y'(x)$, $y'(0)$, $y'\left(\frac{1}{2}\right)$.

4. Доказать: $(u\cdot v\cdot w)'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'$.

5. Найти x, при котором касательные к графикам функций

$$y=x^3-x^2-x+4, \qquad y=\frac{2}{3}x^3+2x-3$$

параллельны.

6. Найти точки, в которых касательная к графику функции

$$f=\frac{4}{3}x^3+4x^2-20x-3$$

параллельна оси абсцисс.

7. Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1. $y=\dfrac{x^3+2x^2-x-5}{x^4}$, $x_0=1$.

2. $y=\dfrac{x^2-3x-1}{x^2-3}$, $x_0=-1$.

8. Закон движения точки по прямой описывается кусочно заданной функцией $s(t)$:

$$s(t)=\begin{cases} 4t & \text{при } 0\leqslant t\leqslant 3,\\ -t^2+10t-9 & \text{при } 3\leqslant t\leqslant 5,\\ 16 & \text{при } t\geqslant 5,\end{cases}$$

где s — путь в метрах, t — время в секундах. Найти скорость и ускорение в моменты времени $t=2$; $t=4$; $t=6$. Изобразить закон движения графически.

9. Закон изменения скорости движущейся точки описывается кусочно заданной функцией $v(t)$:

$$v(t)=\begin{cases} 5 & \text{при } 0\leqslant t\leqslant 4,\\ 2t-3 & \text{при } 4\leqslant t\leqslant 6,\\ 21-2t & \text{при } 6\leqslant t\leqslant 10{,}5,\end{cases}$$

где v — скорость в м/с, t — время в секундах. Найти ускорение движения в моменты времени $t=2$; $t=5$; $t=8$. Изобразить закон изменения скорости и ускорения графически.

10. Найти производную функции:

1. $\ln(3x-7)$. 2. $\ln(5+2x)$. 3. $\ln\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)$.

4. $\ln\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)$. 5. $\log_2 x$. 6. $\log_{\frac{1}{3}} x$. 7. $\lg^3 x$. 8. $\dfrac{1}{\lg^2 x}$.

9. $x^2\ln x$. 10. $(x-4)^3\ln x$. 11. $\ln(x+1)(x+2)(x+3)$.

12. $\ln\dfrac{x-2}{(x+3)(x-4)}$. 13. $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-x}{x+7}$. 14. $\log_3(x+x^2)(x-2)$.

15. $\dfrac{\ln x}{x^2}$. 16. $\dfrac{\ln x}{x-2}$. 17. $\ln(-x)$. 18. $\ln(5-2x)$.

11. Сравнить скорость изменения данных функций в одних и тех же точках:

$$f_1(x)=\ln x; \quad f_2(x)=\ln 2x; \quad f_3(x)=\ln\frac{x}{10}.$$

12. Написать уравнение касательной к графику данной функции в точке с абсциссой x_0:

1. $f(x)=\ln x$, $x_0=1$.
2. $f(x)=\ln x^2$, $x_0=e$ (e — неперово число),
3. $f(x)=\lg x$, $x_0=2$.

13. Сравнить скорости изменения данных функций в одних и тех же точках:

$$\varphi_1(x)=\log_2 x; \quad \varphi_2(x)=\log_4 x; \quad \varphi_3(x)=\log_8 x.$$

14. $f(x)=\ln(x-1)(x-3)(x-5)$. Найти $f'(2)$; $f'(6)$; $f'(4)$. Предварительно определить область определения функции.

15. Определить знак производной данной функции:

1. $y=\ln(3-2x)$. 2. $y=\log_{0,5}(2x-5)$.

16. Найти производную функции:

1. 3^x. 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x$. 3. e^{x^2-x}. 4. e^{1-2x}. 5. t^2e^t.

6. te^{t^2}. 7. $\dfrac{z}{e^{z^2}}$. 8. $\dfrac{z^2}{e^z}$. 9. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}\right)^2$. 10. $(3^{x-1})^{-2}$.

11. $4\cdot 2^{3t-2}$. 12. $\frac{1}{9}\cdot 3^{2t+2}$. 13. $(5x+1)^x$. 14. x^{3x-2}.

17. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1. $f(x)=e^x$, $x_0=0$. 2. $f(x)=(1/e)^x$, $x_0=0$.
3. $f(x)=2^{3x-4}$, $x_0=1$. 4. $f(x)=3^{2x+3}$, $x_0=-1$.

18. Начиная с какой точки скорость изменения функции $y=e^x$ становится больше скорости изменения функции $y=2x+1$?

19. Найти производную функции:

1. $x^{-1/3}$. 2. $x^{2/3}$. 3. $\sqrt{7x-1}$. 4. $\sqrt{5-3x}$. 5. $\dfrac{x-2}{\sqrt{4-3x}}$.

6. $\dfrac{2-3x}{\sqrt{2x+1}}$. 7. $\sqrt[3]{-5t+2}$. 8. $\sqrt[3]{1+4x}$. 9. $\sqrt[3]{(u^2-u)^2}$.

10. $\sqrt[3]{(3x+x^2)^4}$.

20. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$. 2. $f(x)=\sqrt{4-x}$, $x_0=0$.

3. $f(x)=x^{3/2}$, $x_0=4$. 4. $f(x)=(-x)^{5/3}$, $x_0=-1/8$.

21. Скорость изменения какой из функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$ больше в точке $x_0=\frac{1}{16}$? $x_0=\frac{1}{2}$? $x_0=1$?

22. В какой момент скорости изменения функций $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$ становятся равными?

23. Найти производную функции $y(x)$, не выражая ее в явном виде через x:

1. $3y-4x=7$. 2. $2x+4y-1=0$. 3. $x\cdot y=2$.

4. $y(x-5)=-4$. 5. $xy-2y+x-7=0$.

6. $2xy-6x+y-11=0$.

24. Найти угловой коэффициент касательной к линии, заданной уравнением $F(x, y)=0$, в точке $(x_0; y_0)$:

1. $y^3-2xy+x^2-1=0$, $(1; 1)$.

2. $-x^3+xy^2-y^2-5=0$, $(-2; 1)$.

Глава 3

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Признаки возрастания и убывания функций

Функция $f(x)$, заданная на интервале, называется *возрастающей*, если бо́льшим значениям аргумента соответствуют бо́льшие значения функций, т. е. если как только $x_2 > x_1$, так и $f(x_2) > f(x_1)$. Соответственно функция называется *убывающей*, если из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) < f(x_1)$. Возрастающие и убывающие функции носят общее название *монотонных функций*. Функция называется *кусочно монотонной*, если любой конечный интервал, содержащийся в ее области определения, состоит из нескольких интервалов, на каждом из которых функция монотонна (рис. 1).

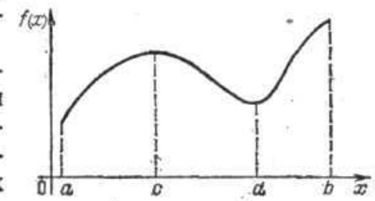

Рис. 1

Основной принцип дифференциального исчисления дает простые признаки возрастания и убывания дифференцируемых (т. е. имеющих производную) функций.

Пусть функция $f(x)$ возрастает на некотором интервале. Тогда ее график представляет собой линию, поднимающуюся при движении слева направо (рис. 2). Поэтому маленький отрезок касательной, почти совпадающий с кусочком графика, примыкающим к точке касания, будет тоже поднимающимся или, в крайнем случае, будет горизонтальным отрезком. Следовательно, угловой коэффициент касательной в любой точке кривой (т. е. значение производной) больше или равен нулю. Таким образом мы установили (на уровне строгости «основного принципа») справедливость следующей теоремы:

Теорема 1. *Если дифференцируемая функция возрастает на некотором интервале, то ее производная имеет неотрицательные значения во всех точках интервала.*

Верна следующая почти обратная к теореме 1

Теорема 2. *Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$, определенной на некотором интервале, принимает положительные значения во всех точках этого интервала, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.*

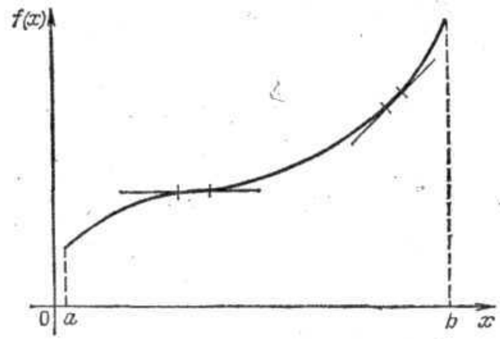

Рис. 2

Доказательство. Действительно, неравенство $f'(x)>0$ во всех точках интервала показывает, что касательная в любой точке графика является поднимающейся прямой и, следовательно, любой достаточно малый участок графика есть поднимающаяся линия. Интуитивно ясно, что график в целом есть поднимающаяся линия и, следовательно, функция $f(x)$ возрастает.

◀ Мы назвали теорему 2 «почти обратной» к теореме 1. Это «почти» вызвано тем, что в заключении теоремы 1 допускается обращение производной в нуль, а в условии теоремы 2 эта возможность исключается.

Легко теорему 2 усилить, допустив обращение производной в нуль в конечном числе точек на интервале. Действительно, исключив эти точки, мы разобьем весь интервал на конечное число (открытых) интервалов, в каждом из которых производная принимает только положительные значения и, следовательно, функция возрастает на каждом из этих интервалов. В силу непрерывности график склеивается из конечного числа восходящих линий, следовательно, и в целом является такой линией, так что функция возрастает на всем интервале. ▶

Обе теоремы можно объединить в следующей формулировке:

Для возрастания дифференцируемой функции на интервале необходимо, чтобы ее производная принимала неотрицательные значения, и достаточно, чтобы все значения этой производной были положительны.

Для убывания функций имеются признаки, совершенно аналогичные признакам возрастания. Именно, верны следующие теоремы:

Теорема 3. *Если дифференцируемая функция убывает на некотором интервале, то ее производная имеет неположительные значения во всех точках интервала.*

Теорема 4. *Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$, определенной на некотором интервале, принимает отрицательные значения во всех точках интервала, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.*

Для доказательства этих теорем можно провести рассуждения, аналогичные тем, которые были применены для доказательств теорем 1 и 2. Но можно поступить еще проще, именно, применить теоремы 1 и 2 к функции $-f(x)$, ибо ясно, что если $f(x)$ убывает, то $-f(x)$ возрастает и $-f'(x)=(-f(x))'$.

Пример 1. Найти промежутки монотонности функции $y=\frac{x}{x^2+1}$ сначала элементарными средствами, затем используя достаточные условия возрастания и убывания функции на интервале.

Решение 1. Пусть $x_2>x_1$, рассмотрим разность *)

$$y(x_2)-y(x_1)=\frac{x_2}{x_2^2+1}-\frac{x_1}{x_1^2+1}=$$
$$=\frac{x_2\cdot x_1^2+x_2-x_1\cdot x_2^2-x_1}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}=\frac{(x_2-x_1)-x_2\cdot x_1(x_2-x_1)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}=$$
$$=\frac{(x_2-x_1)(1-x_1\cdot x_2)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}.$$

Первый сомножитель в числителе (x_2-x_1) положителен, так как $x_2>x_1$, знаменатель дроби, очевидно, тоже больше нуля. Таким образом, знак дроби совпадает со знаком выражения $1-x_1\cdot x_2$. На интервале $[-1;\ 1]$ произведение

*) С решением такой задачи элементарными средствами читатель уже встречался в школьном курсе алгебры. См., например, гл. 5 книги «Алгебра 6—8».

$x_1 \cdot x_2$ либо отрицательно, либо больше нуля, но меньше 1. Таким образом, на интервале $[-1; 1]$ выражение $1 - x_1 \cdot x_2$, а значит, и разность $y(x_2) - y(x_1)$ принимают положительные значения, следовательно, $y(x)$ на интервале $[-1; 1]$ возрастает, так как большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

На интервалах $[1; \infty]$ и $(-\infty; -1]$ произведение $x_1 \cdot x_2 > 1$, следовательно выражение $1 - x_1 \cdot x_2$, а значит, и разность $y(x_2) - y(x_1)$ отрицательны, следовательно, на интервалах $[1; \infty)$ и $(-\infty; -1]$ функция возрастает.

Решение 2. Решим задачу с помощью производной. Имеем

$$y'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Исследуем производную на знак. Так как знаменатель дроби положителен при всех x, то знак дроби совпадает

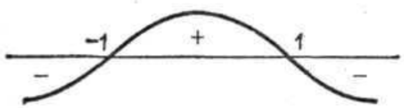

Рис. 3

со знаком квадратичной функции $1 - x^2$. На рис. 3 условно показано распределение знаков производной по числовой оси. Применяя достаточные условия монотонности функции на интервале, делаем вывод о том, что $y(x)$ возрастает на $[-1; 1]$, убывает на $(\infty; -1]$ и на $[1; \infty)$. Обратите внимание на то, что концы интервалов (точки $x = -1$ и $x = 1$) включаются как в интервал, на котором функция убывает, так и в интервал, на котором функция возрастает.

Уже на этом примере видно преимущество метода решения, основанного на примере дифференциального исчисления. Во многих случаях технические сложности вообще не позволяют решить подобную задачу элементарными средствами.

Пример 2. Найти промежутки монотонности функции $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + 3$.

Решение. Находим производную от данной функции:

$$y' = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2,$$

исследуем ее на знак. Знаки производной показаны на рис. 4. На всем интервале $(-\infty; \infty)$, за исключением точек $x = -1$ и $x = 1$, производная больше нуля, в точках $x = -1$ и $x = 1$ производная равна нулю. В силу непрерывности функция $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + 3$ возрастает на всем интервале $(-\infty; \infty)$.

В точках $x = -1$ и $x = 1$ рост функции «на одно мгновение» прекращается, но сразу после этих точек функция продолжает возрастать.

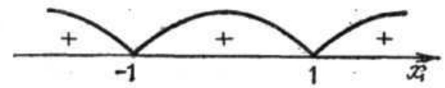

Рис. 4

Пример 3. Построить график функции $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + 3$ из предыдущего примера. На том же чертеже изобразить график производной от этой функции. Написать уравнение касательных к графику данной функции в точках $x = -1$ и $x = 1$.

Обратите внимание, что вблизи точек касания кривая расположена по разные стороны от касательной. Сопоставьте последний факт с характером изменения производной от функции вблизи точек касания и найдите еще одну точку, вблизи которой график данной функции лежит по разные стороны касательной.

§ 2. Уточнение доказательств теорем о возрастании и убывании функций

В § 1 доказательства теорем 1—4 о признаках возрастания и убывания функций были проведены в наглядной геометрической форме без соблюдения обычной для математики строгости рассуждений. В настоящем параграфе мы даем более строгие доказательства.

Лемма 1 (теорема Ролля). *Если функция $f(x)$ дифференцируема во всех точках интервала $[a, b]$ и обращается в нуль на концах этого интервала, т. е. $f(a) = f(b) = 0$, то внутри интервала найдется точка c такая, что $f'(c) = 0$.*

(Другими словами, *между двумя корнями дифференцируемой функции имеется по меньшей мере один корень производной*.)

Доказательство. Если функция $f(x)$ не принимает ни положительных, ни отрицательных значений, т.е. на всем интервале равна нулю, то и ее производная равна нулю во всех точках интервала, так что лемма в этом случае верна. Допустим теперь, что функция $f(x)$ принимает положительные значения. Тогда на интервале найдется точка c, в которой функция принимает наибольшее значение (это мы считаем очевидным). Точка c не совпадает с концами интервала a и b. Покажем, что $f'(c)=0$. С этой целью рассмотрим отношение $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$. Ясно, что $f(c+\Delta x)-f(c)\leqslant 0$ при всех значениях для Δx, как положительных, так и отрицательных, ибо $f(c)$ есть наибольшее значение функции $f(x)$. Поэтому $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leqslant 0$ при $\Delta x>0$ и $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geqslant 0$ при $\Delta x<0$. В силу дифференцируемости функции $f(x)$ существует предел отношения $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю по любой последовательности значений, в частности, предел будет один и тот же как для последовательности положительных значений $\Delta x\to 0$, так и для последовательности отрицательных значений $\Delta x\to 0$. Следовательно,

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leqslant 0$$

и

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geqslant 0,$$

откуда $f'(c)=0$, что и требовалось доказать.

Остается рассмотреть случай, когда $f(x)$ не принимает положительных значений и отлична от функции, всюду равной нулю. В этом случае $f(x)$ принимает отрицательные значения и функция $-f(x)$ принимает положительные значения. Условия леммы для функции $-f(x)$ выполнены. Следовательно, найдется точка c такая, что $(-f(x))'_{x=c}=0$, т. е. $-f'(c)=0$, и потому $f'(c)=0$. Лемма доказана полностью.

Лемма 2 (теорема Лагранжа). *Пусть $f(x)$ дифференцируема на интервале $[a, b]$. Тогда найдется точка c внутри этого интервала такая, что $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Доказательство. Подберем линейную функцию $l(x)=kx+m$ так, чтобы ее значения на концах интервала

совпадали со значениями функции $f(x)$. Это можно сделать, ибо через любые две точки можно провести прямую линию (рис. 5). Тогда для разности $g(x)=f(x)-l(x)$ выполнены условия теоремы Ролля. Поэтому найдется точка c такая, что $g'(c)=0$. Но $g'(c)=f'(c)-l'(c)=f'(c)-k$. Итак, для этой точки имеем $f'(c)=k$. Найдем теперь k. Для этого запишем требования, которым должна удовлетворять функция $l(x)$, в виде уравнений. Именно

$$f(a)=ka+m,\quad f(b)=kb+m.$$

Из этой системы находим, что $k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Следовательно, $f(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, что и требовалось доказать.

Заметим, что $f(b)-f(a)$ есть приращение функции $f(x)$, соответствующее приращению $b-a$ аргумента x при переходе от $x=a$ к $x=b$. Таким образом, теорема Лагранжа утверждает, что отношение приращения дифференцируемой функции к приращению аргумента на некотором интервале равно значению производной в некоторой точке внутри этого интервала. По этой причине формулу теоремы Лагранжа называют *формулой конечных приращений.*

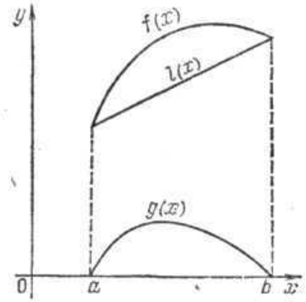

Рис. 5

Теперь мы в состоянии дать более строгие доказательства теорем 1—4.

Теорема 1. *Если дифференцируемая функция возрастает на некотором интервале, то ее производная имеет неотрицательные значения во всех точках интервала.*

Доказательство. Если функция возрастает, то

$$f(x_0+\Delta x)>f(x_0)\quad \text{при}\quad \Delta x>0$$

и

$$f(x_0+\Delta x)<f(x_0)\quad \text{при}\quad \Delta x<0.$$

В обоих случаях $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0$. Следовательно,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

Это верно для всех точек x_0 в интервале. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$, определенной на некотором интервале, принимает положительные значения во всех точках интервала, то функция $f(x)$ возрастает.*

Доказательство. Согласно лемме 2 (теореме Лагранжа) при любых x_1 и x_2 из интервала (пусть $x_1 < x_2$) имеет место равенство

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

при некотором c из интервала (x_1, x_2). Из условия теоремы следует, что $f'(c)>0$, так что $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$, откуда $f(x_2)-f(x_1)>0$, ибо $x_2-x_1>0$. Итак, $f(x_2)>f(x_1)$, а это и значит, что функция $f(x)$ возрастает.

Как мы видели в § 1, теоремы 3 и 4, дающие признаки убывания функций, легко выводятся из теорем 1 и 2.

Наряду с только что рассмотренным способом получения критериев возрастания (убывания) гладких (дифференцируемых) функций, в основе которого лежит теорема Лагранжа, существуют и другие. Мы остановимся на одном из них, считая его весьма важным и поучительным со многих точек зрения.

Скажем, что функция $f(x)$ *возрастает в точке* x_0, если в достаточно малой окрестности этой точки имеют место неравенства $f(x)<f(x_0)$, как только $x<x_0$, и $f(x)>f(x_0)$, как только $x>x_0$. Если x_0 лежит на конце промежутка задания функции, то требуется выполнение одного из этих неравенств, именно, для левого конца

$$f(x)>f(x_0) \quad \text{при} \quad x>x_0$$

и для правого

$$f(x)<f(x_0) \quad \text{при} \quad x<x_0.$$

Из определения следует, что если $[c, d]$ — достаточно малый интервал, содержащий точку x_0, то $f(c)<f(d)$.

Ясно, что *если $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, то она возрастает и во всех его точках.*

Аналогично определяется убывание функции в точке. Ясно, что *если функция убывает на некотором промежутке, то она убывает и во всех его точках.*

Лемма 3. *Если функция возрастает в каждой точке некоторого промежутка, то она возрастает на этом промежутке.*

На первый взгляд содержание этой леммы кажется очевидным. Однако, если вдуматься, оно становится не

столь уж очевидным в силу различия определений возрастания функции на промежутке и ее возрастания в точке — в первом определении сравниваются значения функций в любой паре точек промежутка, во втором — только значения в некоторой точке со значениями в точках ее достаточно малой окрестности.

Доказательство леммы. Пусть функция $f(x)$ возрастает во всех точках некоторого промежутка. Допустим, что функция не возрастает на этом промежутке, т. е. найдутся такие числа a_1 и b_1, что $a_1<b_1$, но $f(a_1)\geqslant f(b_1)$. Приведем это допущение к противоречию. Рассмотрим число $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$. Ясно, что $a_1<c_1<b_1$. Может случиться, что $f(c_1)\geqslant f(b_1)$. В этом случае изменим обозначения, положив $c_1=a_2$ и $b_1=b_2$. Но возможно, что $f(c_1)<f(b_1)$. Тогда подавно $f(c_1)<f(a_1)$. В этом случае положим $a_1=a_2$, $c_1=b_2$. В обоих случаях мы построили промежуток $[a_2, b_2]$, вложенный в промежуток $[a_1, b_1]$, имеющий вдвое меньшую длину и такой, что $f(a_2)\geqslant f(b_2)$. Теперь применим к числам a_2, b_2 и $c_2=\frac{a_2+b_2}{2}$ те же рассуждения. Получим новый промежуток $[a_3, b_3]$, вложенный в $[a_2, b_2]$, имеющий вдвое меньшую длину и такой, что $f(a_3)\geqslant f(b_3)$. Продолжая этот процесс, получим стягивающуюся последовательность вложенных промежутков.

В силу аксиомы непрерывности *), существует точка x_0, принадлежащая всем этим промежуткам. Итак, для этой точки найдутся промежутки $[a_n, b_n]$ сколь угодно малой длины такие, что $f(a_n)\geqslant f(b_n)$ и $a_n\leqslant x_0\leqslant b_n$. Это противоречит определению возрастания функции в точке x_0 (точнее, очевидному следствию из этого определения). Установленное противоречие опровергает предположение о невозрастании функции $f(x)$ на всем промежутке. Тем самым лемма доказана.

Вернемся теперь еще раз к доказательству теорем 1—4 о возрастании и убывании функции. Теорему 1 установим в несколько более сильной формулировке:

Теорема 1'. *Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает в точке x_0 некоторого промежутка, то ее производная имеет в этой точке неотрицательное значение.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ возрастает в точке x_0. Это значит, что при достаточно малом $|\Delta x|$ будет

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>0 \quad \text{при} \quad \Delta x>0$$

*) См., например, гл. 13 «Алгебры 6—8».

и

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<0 \quad \text{при} \quad \Delta x<0.$$

В обоих случаях

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0, \quad f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

Из теоремы 1′ непосредственно следует теорема 1, ибо если функция возрастает на промежутке, то она возрастает во всех его точках.

Теорема 2′. *Если значение производной в некоторой точке положительно, то функция возрастает в этой точке.*

Доказательство. Пусть $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0$. Тогда при достаточно малом по модулю Δx отношение $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ будет больше 0. При $\Delta x>0$ это значит, что $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>0$, т. е. $f(x_0+\Delta x)>f(x_0)$. При отрицательном Δx будет $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<0$, т. е. $f(x_0+\Delta x)<f(x_0)$. Эти неравенства и означают, что $f(x)$ возрастает в точке x_0.

Как и в случае с использованием теоремы Лагранжа, получаем, что из теоремы 2′ и леммы 3 непосредственно следует справедливость теоремы 2. ▶

§ 3. Максимум и минимум функций

Точка x_0 называется *точкой локального минимума* для функции $f(x)$, если ее значение $f(x_0)$ в этой точке меньше всех значений в некоторой ее окрестности. Само значение $f(x_0)$ называется *локальным минимумом* функции $f(x)$. Прилагательное «локальный» (местный) подчеркивает, что значение $f(x_0)$ является наименьшим среди значений лишь в некоторой, быть может небольшой, окрестности точки x_0 и вдали от точки x_0 могут быть значения меньшие, чем $f(x_0)$. Для функции, заданной на интервале, *глобальным* (*всеобщим*) *минимумом* называется значение функции, наименьшее среди значений на всем интервале.

Аналогично определяются *точка локального максимума* как точка x_0, для которой $f(x_0)$ — наибольшее среди всех значений в некоторой окрестности точки x_0, *локальный максимум функции* — как значение $f(x_0)$ в точке локального максимума и *глобальный максимум* — как наибольшее

значение функции, заданной на интервале. На рис. 6 точка x_0 есть точка локального минимума функции $f(x)$, x_1 есть точка локального максимума. Глобальные минимум и максимум достигаются на концах a и b промежутка задания функции.

Максимум и минимум функции носят общее название экстремумов, и точки, в которых они достигаются, называются точками экстремумов.

Теорема. *Если точка x_0 экстремума функции $f(x)$ лежит внутри интервала ее задания и производная $f'(x_0)$ в этой точке существует, то $f'(x_0)=0$.*

Доказательство. Если $f'(x_0)>0$, то касательная поднимается при движении слева направо и вместе с ней поднимается тесно примыкающий к ней участок графика функции. Поэтому точки графика налево от x_0 лежат ниже $f(x_0)$, а точки графика направо от x_0 лежат выше $f(x_0)$. Поэтому x_0 не может быть ни точкой локального максимума, ни точкой локального минимума.

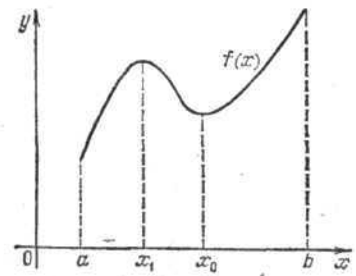

Рис. 6

Если же $f'(x_0)<0$, то касательная, а вместе с ней и участок графика, опускается при движении слева направо. Поэтому $f(x)>f(x_0)$ при x, достаточно близком к x_0 и $x<x_0$, и $f(x)<f(x_0)$ при x, достаточно близком к x_0 и $x>x_0$. Поэтому x_0 снова не может быть ни точкой локального минимума, ни точкой локального максимума. Остается одна возможность: $f'(x_0)=0$, что и доказывает теорему.

◀ Несколько более строгое доказательство теоремы фактически содержится в доказательстве леммы 1 (теоремы Ролля) из § 2. ▶

Для кусочно монотонной функции каждая точка локального максимума отделяет интервал возрастания функции от интервала убывания (мы считаем, что интервалы рассматриваются слева направо). Соответственно точки локального минимума отделяют интервалы убывания функции от интервалов возрастания. Поэтому производная $f'(x)$ кусочно монотонной функции меняет знак с плюса на минус, когда x, возрастая, проходит через точку максимума. Соответственно $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, когда x, возрастая, проходит через точку минимума.

В точке экстремума производная даже «довольно хорошей» — кусочно монотонной функции может не существовать. Типичный пример этого дает функция $y=|x|$. Очевидно, что она имеет минимум при $x=0$, но производная в этой точке не существует (рис. 7). Другой, тоже типичный пример дает функция $y=\sqrt[3]{x^2}$. Точка $x=0$ является для нее точкой минимума. При $x\neq 0$ ее производная равна $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, при $x=0$ производная не существует, при $x\to 0$ y' стремится к ∞ (рис. 8). Легко видеть, что графиком функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ является полу-

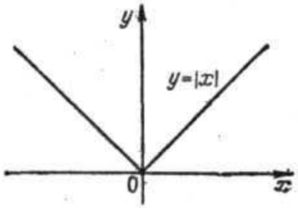

Рис. 7

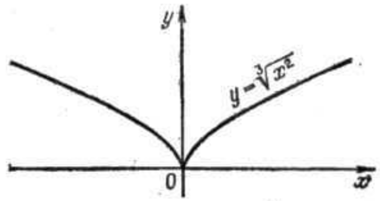

Рис. 8

кубическая парабола с уравнением $y^2=x^3$*), повернутая на 90°.

При исследовании функций на экстремум нужно не забывать исследовать точки, в которых производная не существует, если такие точки имеются.

Для кусочно монотонной функции, заданной на замкнутом интервале, концы интервала всегда являются точками локального экстремума. Именно, если $f(x)$, заданная на $[a, b]$, возрастает, когда x отходит вправо от левого конца a интервала, то a есть точка минимума, если убывает, то a есть точка максимума. Соответственно если $f(x)$ возрастает, когда x подходит слева к правому концу b интервала, то b есть точка максимума, если $f(x)$ убывает, то b есть точка минимума.

Ясно, что глобальный максимум кусочно монотонной функции, заданной на замкнутом интервале, находится среди локальных максимумов, глобальный минимум — среди локальных минимумов. Для функции, заданной на открытом интервале, как глобальный максимум, так и глобальный минимум могут не существовать.

---

*) См., например, гл. 10 «Алгебры 6—8».

Так, функция, равная $y=1/x$, на интервале $(0; +\infty)$ не имеет ни глобального максимума, ни глобального минимума.

Рассмотрим теперь несколько примеров.

Пример 1. Найти для функции $y=x^4-2x^2$ точки максимума, минимума, промежутки возрастания и убывания.

Решение. $y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)=4x(x+1)(x-1)$. В трех точках $x=-1$, $x=0$ и $x=1$ производная обращается в 0. Эти точки разбивают ось абсцисс на 4 части: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0, 1)$ и $(1, \infty)$. На интервале $(-\infty; -1)$ функция y' отрицательна, на интервале $(-1; 0)$ положительна, на интервале $(0; 1)$ отрицательна и на интервале $(1; +\infty)$ положительна. Следовательно, y на $(-\infty; -1)$ убывает, на $(-1; 0)$ возрастает, на $(0; 1)$ убывает и на $(1; +\infty)$ возрастает. Поэтому точки $x=-1$ и $x=+1$ суть точки минимума со значениями функции -1, точка же

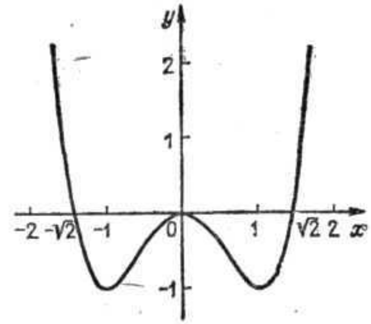

Рис. 9

$x=0$ есть точка максимума со значением 0. График функции представлен на рис. 9. При $x\to\pm\infty$ функция $y=x^4\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$ быстро (приблизительно как x^4) стремится к $+\infty$. График пересекает ось абсцисс в точках $x=\pm\sqrt{2}$.

Пример 2. То же, что в примере 1 для функции $y=\frac{x}{x^2+1}$.

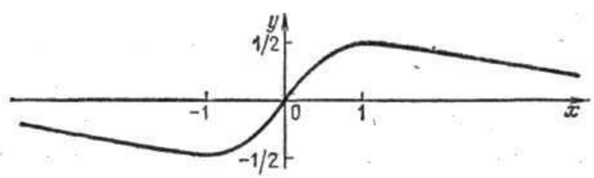

Рис. 10

Решение. $y'=\frac{(x^2+1)-x\,2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. В двух точках $x=\pm 1$ производная обращается в 0. На интервалах

$(-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$ производная отрицательна, на интервале $(-1;\ 1)$ положительна. Поэтому точка -1 есть точка минимума, точка 1 есть точка максимума. При $x \to \infty$ функция стремится к нулю сверху при $x \to +\infty$ и снизу при $x \to -\infty$. График изображен на рис. 10. Промежутки возрастания и убывания были определены в примере 1 § 1.

Пример 3. $y = \frac{1-x}{x^2}$.

Решение. $y = x^{-2} - x^{-1}$, $y' = -2x^{-3} + x^{-2} = \frac{x-2}{x^3}$. Точка разрыва $x=0$ разбивает естественную область существования на два интервала: $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$. На первом из них производная положительна, так что функция возрастает. При $x \to -\infty$ функция $y \to 0$ сверху, т. е. принимая положительные значения. При $x \to 0$ слева $y \to +\infty$. В интервале $(0;\ 2)$ производная отрицательна,

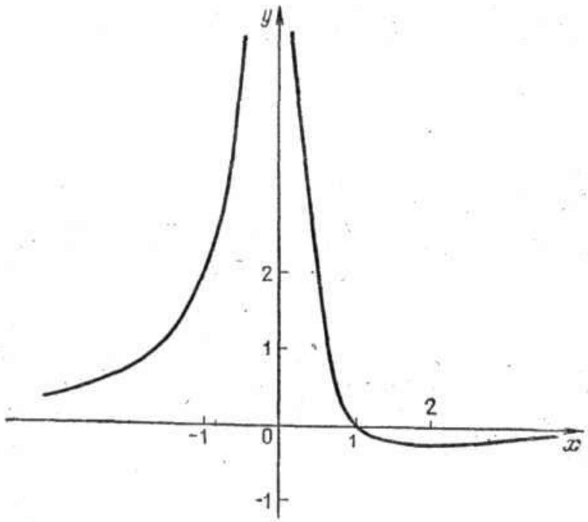

Рис. 11

так что функция убывает. В интервале $(2;\ +\infty)$ производная положительна, так что функция возрастает. Поэтому в точке $x=2$ она имеет минимум при значении $-1/4$. При $x \to +\infty$ будет $y \to 0$ снизу, т. е. принимая отрицательные значения. График один раз пересекает ось абсцисс в точке $x=1$. Таким образом, график имеет вид, изображенный на рис. 11.

Пример 4. $y = x^3 + 3|x|$.

Решение. Здесь следует записать функцию двумя разными формулами для промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $[0;\ +\infty)$. На первом промежутке $y = x^3 - 3x$, на втором $y = x^3 + 3x$. При $-\infty < x < 0$ имеем $y' = 3x^2 - 3$. Производная обращается в нуль при $x=1$ и $x=-1$; однако, первая из этих точек не принадлежит промежутку $(-\infty;\ 0)$. На промежутке $(-\infty;\ -1)$ производная положительна, на промежутке $(-1;\ 0)$ — отрицательна, поэтому -1 есть точка максимума. На промежутке $(0;\ \infty)$ производная $y' = 3x^2 + 3 > 0$, так что на этом промежутке функция возрастает; значит, точка $x=0$, в которой производная от функции $y = x^3 + 3|x|$ не существует, оказывается точкой минимума. График имеет вид, изображенный на рис. 12.

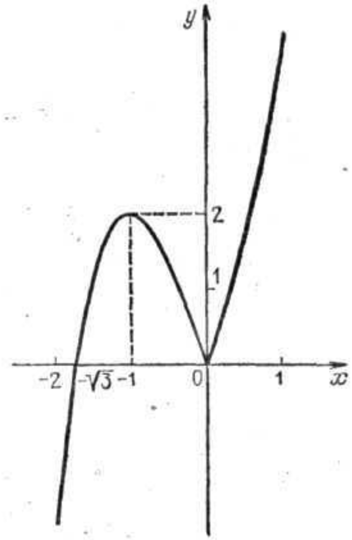

Рис. 12

Пример 5. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Здесь $y' = 2 - 3 \cdot \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2(\sqrt[3]{x} - 1)}{\sqrt[3]{x}}$.

Точками, «подозрительными» на экстремум, являются $x=0$ (точка, где нет производной) и $x=1$ (производная равна 0). Вся естественная область $(-\infty;\ +\infty)$ задания функции разбивается этими точками на три интервала: $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$. На первом интервале, т. е. при $x<0$, производная положительна и стремится к ∞ при $x \to 0$ (слева). На втором, т. е. при $0 < x < 1$, производная отрицательна и стремится к $-\infty$ при $x \to 0$ (справа). Наконец, при $x > 1$ производная положительна. Следовательно, функция возрастает на $(-\infty;\ 0)$, убывает на $(0;\ 1)$ и возрастает на $(1;\ \infty)$. Точка $x=0$ есть точка максимума с «острием» (так как производная стремится к ∞ при $x \to 0$), а точка $x=-1$ есть «обычная» точка минимума. График пересекает ось абсцисс, кроме точки $x=0$, еще в одной точке на промежутке возрастания функции $1 < x < \infty$, именно при $x = 27/8$. Далее, $y = 2x\left(1 - \frac{3}{2\sqrt[3]{x}}\right)$, откуда следует, что при $x \to \infty$

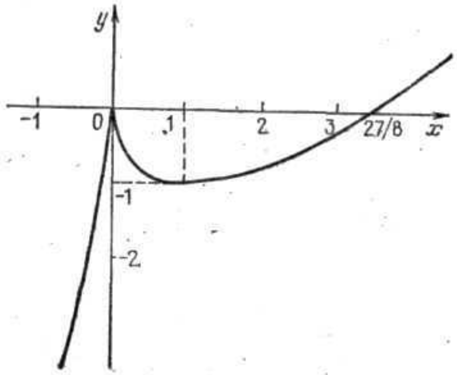

Рис. 13

функция тоже стремится к ∞ приблизительно со скоростью функции $2x$. График имеет вид, представленный на рис. 13. ▶

Пример 6. Из прямоугольного куска картона с длинами сторон 16 см и 10 см изготавливается открытая коробка посредством вырезания равных квадратов на углах (рис. 14) и перегибания по пунктирным линиям. Сделать так, чтобы объем коробки был наибольшим.

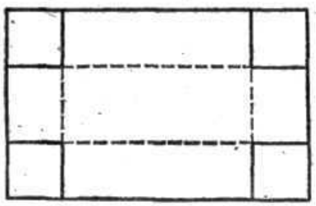
Рис. 14

Решение. Пусть x — длина (в см) стороны вырезаемого квадрата. Тогда длины сторон основания коробки будут $16-2x$ и $10-2x$ (см), а высота равна x (см). Следовательно, объем коробки

$$y = (16-2x)(10-2x)x = 4(x^3 - 13x^2 + 40x) \text{ (см}^3\text{)}.$$

Функция y определена на интервале $(0, 5)$. Нам нужно найти ее глобальный максимум на этом интервале. Найдем производную и приравняем ее к нулю. Получим

$$3x^2 - 26x + 40 = 0, \quad x = \frac{13 \pm \sqrt{169-120}}{3},$$

$$x_1 = \frac{20}{3}, \qquad x_2 = 2.$$

Первый корень $x_1 = 20/3$ не содержится в интервале $(0,5)$. Остается одна «подозрительная» точка $x_2 = 2$ в этом интервале, и она дает искомый максимум $y_{\max} = 72$, ибо на краях интервала функция обращается в 0, а внутри интервала положительна.

◀ § 4. Один несложный пример и некоторые выводы из его рассмотрения

Рассмотрим функцию $z = \frac{\ln x}{x}$. Она определена на интервале $(0; +\infty)$. При $0 < x < 1$ ее значения отрицательны, и $z \to -\infty$ при $x \to 0$. Для дальнейшего исследования вычислим производную

$$z' = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Знаменатель z' положителен. Числитель положителен при $\ln x < 1$, т. е. при $x < e$, и отрицателен при $\ln x > 1$, т. е. при $x > e$. Следовательно, функция z на интервале $(0; e]$ возрастает от $-\infty$ до максимума $1/e$ при $x = e$ и обращается в 0 при $x = 1$. На интервале $[e; +\infty)$ функция z убывает, оставаясь положительной. Поэтому на интервале $[1; +\infty)$ функция $\frac{\ln x}{x}$ ограничена сверху числом $1/e$ и снизу нулем. Для выяснения вопроса о том, как ведет себя рассматриваемая функция при $x \to \infty$, применим некоторый обходной прием, который даст и некоторые другие интересные результаты.

Рассмотрим функцию $w = \frac{\ln x}{x^a}$, где a — некоторое положительное число, которое может быть и весьма малым. Поведение функции w похоже на поведение функции z. Ее значения при $x < 1$ отрицательны, и $w \to -\infty$ при $x \to 0$. При $x > 1$ ее значения положительны. Далее,

$$w' = \frac{x^a \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot a \cdot x^{a-1}}{x^{2a}} = \frac{1 - a\ln x}{x^{a+1}}.$$

Знаменатель w' положителен. Числитель положителен при $1 - a\ln x > 0$, т. е. при $x < e^{1/a}$, и становится отрицательным при $x > e^{1/a}$. При $x = e^{1/a}$ функция w достигает максимума, равного $\frac{\ln e^{1/a}}{(e^{1/a})^a} = \frac{1}{ae}$. Поэтому функция w

ограничена сверху числом $\frac{1}{ae}$ и при $1 \leqslant x < \infty$ ограничена снизу нулем.

Отсюда вытекает справедливость следующей интересной теоремы:

Теорема. *При любом* $a > 0$ *имеет место предельное соотношение* $\frac{\ln x}{x^a} \to 0$ *при* $x \to \infty$.

Доказательство. Действительно, $\frac{\ln x}{x^a} = \frac{\ln x}{x^{a/2}} \cdot \frac{1}{x^{a/2}}$. Первый множитель ограничен в силу сказанного выше. Второй стремится к нулю, ибо $x^{a/2} \to \infty$ при $x \to \infty$.

В частности, $z = \frac{\ln x}{x} \to 0$ при $x \to \infty$, так что график этой функции, понижаясь после точки $x = e$, $z = 1/e$, стремится к оси абсцисс, подходя к ней сколь угодно близко (рис. 15).

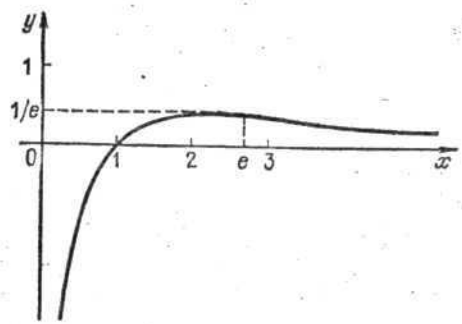

Рис. 15

Сделаем еще одно замечание общего характера. Скажем, что безгранично растущая функция v стремится к бесконечности существенно быстрее стремящейся к бесконечности функции w, если $v/w \to \infty$, или, что то же самое, $w/v \to 0$. При $x \to \infty$ функция x^a, если $a > 0$, стремится к бесконечности. Далее, $x^a \to \infty$ существенно быстрее x^b, как только $a > b > 0$, ибо $x^a/x^b = x^{a-b} \to \infty$ $(x \to \infty)$.

Из теоремы непосредственно следует, что степенная функция x^a с любым, даже очень маленьким, положительным показателем стремится к бесконечности при $x \to \infty$ существенно быстрее логарифмической функции. Действительно, $\frac{\ln x}{x^a} \to 0$ при $x \to \infty$, и, значит, x^a стремится к бесконечности существенно быстрее, чем $\ln x$. Более того, x^a стремится к бесконечности существенно быстрее функции $(\ln x)^n$ при любом, даже большом показателе n, так как

$$\frac{(\ln x)^n}{x^a} = \left(\frac{\ln x}{x^{a/n}}\right)^n \to 0, \quad x \to \infty,$$

ибо

$$\frac{\ln x}{x^{a/n}} \to 0, \quad x \to \infty.$$

Вернемся к графику функции $z = \frac{\ln x}{x}$ и применим результат его исследования к следующей довольно трудной задаче: выяснить форму графика зависимости $x^y = y^x$, считая, конечно, что $x > 0$ и $y > 0$. Ясно, что этому графику принадлежит полупрямая $y = x$, $x > 0$, совпадающая с биссектрисой первого координатного угла с исключенным началом. Однако, кроме точек на этой полупрямой, график имеет и другие точки, например (2; 4), ибо $2^4 = 4^2$.

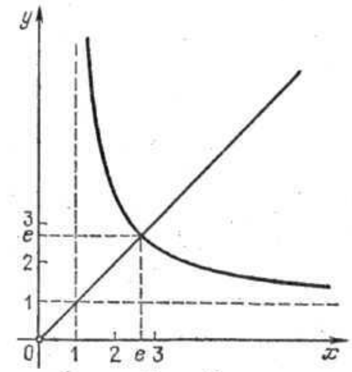

Рис. 16

Прологарифмируем уравнение. Получим $y \ln x = x \ln y$, откуда $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$. Таким образом, x и y должны быть абсциссами точек на графике $z = \frac{\ln x}{x}$, имеющих одинаковые ординаты. Из рис. 15 ясно, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеется лишь одна возможность $y = x$. Когда x понемногу отходит вправо от точки $x = 1$, появляется «из бесконечности» вторая точка с той же ординатой, так что кроме $y = x$ появляется другая возможность. Абсциссу этой второй точки обозначим y_2. Пока x возрастает от 1 до e (точки максимума), y_2 меняется от $+\infty$ до e, все время убывая. После того как x переходит через точку максимума, роли y_2 и x меняются, так что при $x \to \infty$ будет $y_2 \to 1$. Таким образом, график зависимости $x^y = y^x$ имеет вид, изображенный на рис. 16. Точка $x = 0$ исключена. Точка (2; 4) находится на криволинейной части графика. Бесконечные ветви графика безгранично приближаются к прямым $y=1$ и $x=1$. ▶

§ 5. Производные высших порядков

Наряду с производной $f'(x)$ функции $f(x)$ часто возникает потребность в рассмотрении производной $f''(x)$ функции $f'(x)$. Она называется *второй производной* функции $f(x)$. Мы знаем, что производная есть скорость изменения функции. Поэтому вторая производная есть скорость изменения скорости изменения функции или, прибегая к термину из механики, вторая производная есть ускорение изменения функции.

Далее, производная от второй производной называется *третьей производной* или *производной третьего порядка*; производная от третьей производной — *производной четвертого порядка* и т. д. Производная порядка n от функции $f(x)$ обозначается $f^{(n)}(x)$ или $(f(x))^{(n)}$.

Легко видеть, что $(f^{(k)}(x))^{(m)}=f^{(k+m)}(x)$. Действительно, каждое дифференцирование увеличивает порядок производной на одну единицу, при m-кратном дифференцировании порядок производной увеличивается на m единиц, так что производная порядка k превращается в производную порядка $k+m$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти производные всех порядков от функции x^4.

Решение. $(x^4)'=4x^3$; $(x^4)''=12x^2$; $(x^4)'''=24x$; $(x^4)^{(4)}=$ $=24$; $(x^4)^{(n)}=0$ при $n\geqslant 5$.

Пример 2. Найти производную порядка k от функции $f(x)=(x-a)^n$.

Решение. $f^{(k)}(x)=n(n-1)\ldots(n-k+1)(x-a)^{n-k}$ при $k\leqslant n$; $f^{(k)}(x)=0$ при $k>n$.

Пример 3. Найти производную порядка n от функции $f(x)=e^{kx}$.

Решение. $f'(x)=ke^{kx}$; $f''(x)=k^2e^{kx}$; ...; $f^{(n)}(x)=k^ne^{kx}$.

§ 6. Бином Ньютона

Из алгебры хорошо известны формулы:

$$(a+x)^2=a^2+2ax+x^2,$$
$$(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3.$$

Легко видеть, что

$$(a+x)^4=a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4,$$
$$(a+x)^5=a^5+5a^4x+10a^3x^2+10a^2x^3+5ax^4+x^5$$

и т. д. Выведем теперь общую формулу для возведения суммы двух слагаемых в степень с любым натуральным показателем.

Ясно, что $(a+x)^n$ можно представить в виде многочлена от x степени n с коэффициентами, выражающимися через a. Расположим этот многочлен по возрастающим степеням буквы x:

$$(a+x)^n=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+ \\ +A_kx^k+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}+A_nx^n.$$

Вычислим производные до порядка n включительно от обеих частей этого равенства:

$$n(a+x)^{n-1}=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots \\ +kA_kx^{k-1}+\ldots+(n-1)A_{n-1}x^{n-2}+nA_nx^{n-1},$$
$$n(n-1)(a+x)^{n-2}=2A_2+3\cdot 2\cdot A_3x+\ldots \\ +k(k-1)A_kx^{k-2}+\ldots \\ +(n-1)(n-2)A_{n-1}x^{n-3}+n(n-1)A_nx^{n-2},$$

. . . .

$$n(n-1)\ldots(n-k+1)(a+x)^{n-k}= \\ =k(k-1)\ldots 2A_k+\ldots+n(n-1)\ldots(n-k+1)A_nx^{n-k},$$

. . . .

$$n(n-1)\ldots 2(a+x)= \\ =(n-1)(n-2)\ldots 2A_{n-1}+n(n-1)\ldots 2A_nx,$$
$$n(n-1)\ldots 2=n(n-1)\ldots 2A_n.$$

Положим теперь $x=0$ во всех этих равенствах. Получим:

$$a^n=A_0,$$
$$na^{n-1}=A_1,$$
$$n(n-1)a^{n-2}=2A_2,$$

. . . .

$$n(n-1)\ldots(n-k+1)a^{n-k}=k(k-1)\ldots 2A_k,$$

. . . .

$$n(n-1)\ldots 2a=(n-1)(n-2)\ldots 2A_{n-1},$$
$$n(n-1)\ldots 2=n(n-1)2A_n,$$

откуда

$$A_0 = a^n,$$
$$A_1 = na^{n-1},$$
$$A_2 = \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{2.3\ldots k} a^{n-k},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{n-1} = \frac{n(n-1)\ldots 2}{2\ldots(n-1)} a,$$
$$A_n = \frac{n(n-1)\ldots 2}{2.3\ldots n}.$$

Несколько преобразуем формулу для «общего» коэффициента A_k следующим образом. Введем в рассмотрение произведение всех натуральных чисел от 1 до некоторого m:

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m.$$

Такое произведение называется *факториалом* от числа m и обозначается через $m!$ Умножим числитель и знаменатель коэффициента A_k на $(n-k)(n-k-1)\ldots 2 \cdot 1 = (n-k)!$ и запишем в знаменатель сомножитель 1. Получим

$$A_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots 2\cdot 1}{1.2.3\ldots k\cdot(n-k)!} a^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}.$$

Это верно для всех k от 1 до $n-1$ и останется верным также при $k=0$ и $k=n$, если условиться считать $0!=1$. Число $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ называется *биномиальным коэффициентом* и обозначается через C_n^k или $\binom{n}{k}$.

Итак,

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} x^k + \ldots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + x^n.$$

Ясно, что $C_n^k = C_n^{n-k}$, так что выведенная формула (*бином Ньютона*) симметрична относительно букв x и a.

Пример 1. Раскрыть скобки: $(a+2x)^8$.

Решение.

$$(a+2x)^8 = a^8 + 16a^7x + 112a^6x^2 + 448a^5x^3 + 1120a^4x^4 + 1792a^3x^5 + 1792a^2x^6 + 1024ax^7 + 256x^8.$$

Пример 2. Вычислить с точностью до 10^{-5} число $(1,01)^{10}$.

Решение.

$$(1,01)^{10} \approx 1 + 10\cdot 10^{-2} + 45\cdot 10^{-4} + 120\cdot 10^{-6} = 1,10462.$$

Пример 3. Сравнить коэффициенты при x^{2m} в тождестве

$$(1+x)^n(1-x)^n = (1-x^2)^n.$$

Решение.

$$C_n^0 C_n^{2m} - C_n^1 C_n^{2m-1} + C_n^2 C_n^{2m-2} - \ldots + C_n^{2m} C_n^0 = (-1)^m C_n^m.$$

§ 7. Применение производных высших порядков к исследованию функций

Первая производная $f'(x)$ функции $f(x)$ имеет ясный геометрический смысл. Она есть угловой коэффициент касательной, т. е. равна тангенсу угла наклона касательной

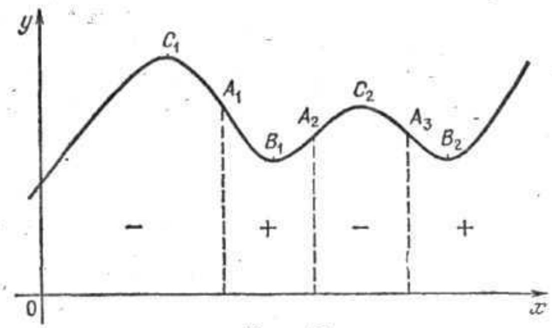

Рис. 17

к оси абсцисс. Вторая производная есть скорость изменения углового коэффициента касательной. Положительность второй производной на некотором интервале означает, что угол, образованный касательной с осью абсцисс, растет с увеличением x. Геометрически это значит, что график направлен выпуклостью вниз. Если же вторая производная отрицательна на некотором интервале, то на нем график расположен выпуклостью вверх. На рис. 17 интервал задания функции разбит на участки, на каждом из которых вторая производная сохраняет знак (этот знак указан на рисунке). Точки, в которых график меняет направление выпуклости, называются *точками перегиба* (точки A_1, A_2, A_3 на рис. 17). При переходе через точку перегиба вторая производная меняет знак.

Наглядно видно, что если в некоторой точке первая производная равна нулю, а вторая положительна (точки B_1 и B_2 на рис. 17), то в этой точке функция имеет минимум, ибо в такой точке касательная к графику горизонтальна и выпуклость направлена вниз. Соответственно если первая производная в точке равна нулю, а вторая отрицательна, то в этой точке имеет место максимум (точки C_1 и C_2 на рис. 17).

◄ Теперь сформулируем и докажем теорему, далеко обобщающую наши наглядные рассуждения.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$, заданная на интервале $[a, b]$, имеет производные $f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x)$*

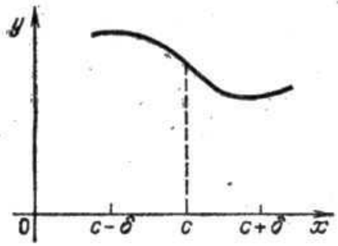

Рис. 18

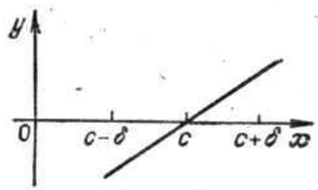

Рис. 19

и в некоторой точке $C \in [a, b]$ имеет место $f'(c) = \ldots$ $\ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$.

Тогда если $f^{(n)}(x) > 0$ при всех $x \in [a, b]$, то при четном n функция $f(x)$ имеет минимум при $x = c$, если же $n \geqslant 3$ нечетно, то функция $f(x)$ возрастает на $[a, b]$ и для нее $x = c$ — точка перегиба. Соответственно если $f^{(n)}(x) < 0$ при всех $x \in [a, b]$, то при четном n функция $f(x)$ имеет максимум в точке $x = c$, а при нечетном $n \geqslant 3$ функция $f(x)$ убывает на $[a, b]$ и для нее $x = c$ — точка перегиба.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены и $f^{(n)}(x) > 0$ (рис. 18). Тогда $f^{(n-1)}(x)$ возрастает в интервале $[a, b]$, так что при $x < c$ будет

$$f^{(n-1)}(x) < f^{(n-1)}(c) = 0$$

и при $x > c$

$$0 = f^{(n-1)}(c) < f^{(n-1)}(x)$$

(рис. 19). Таким образом, $f^{(n-1)}(x)$ отрицательна при $x < c$ и $f^{(n-1)}(x)$ положительна при $x > c$. Следовательно, $f^{(n-2)}(x)$

убывает слева от точки $x = c$ и возрастает справа от точки $x = c$. Она обращается в нуль при $x = c$. Поэтому она принимает положительные значения как слева, так и справа от точки $x = c$ и имеет минимум при $x = c$ (рис. 20). Функция $f^{(n-3)}(x)$ возрастает слева и справа от точки

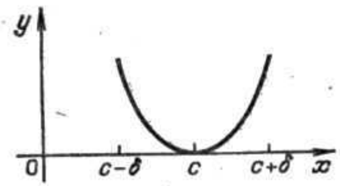

Рис. 20

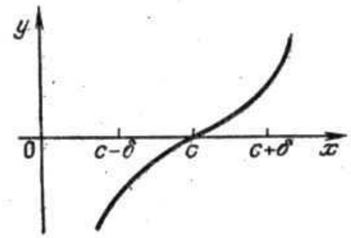

Рис. 21

$x = c$, так что, обращаясь в нуль при $x = c$, переходит от отрицательных значений к положительным (рис. 21). Функция $f^{(n-4)}(x)$ убывает слева от точки $x = c$ и возрастает справа. Следовательно, она имеет минимум и равна нулю при $x = c$ и принимает положительные значения как слева, так и справа от c (рис. 22). Продолжая аналогичные рассуждения, мы получим, что $f^{(n-1)}(x), f^{(n-3)}(x), f^{(n-5)}(x), \ldots$ возрастают, когда x проходит через точку $x = c$, а $f^{n-2}(x)$, $f^{(n-4)}(x)$, $f^{(n-6)}(x), \ldots$ имеют минимум при $x = c$. При четном n мы дойдем до исходной функции $f(x)$ через четное число шагов и сделаем заключение, что $f(x)$ имеет минимум при $x = c$. При нечетном n мы дойдем до $f(x)$ за нечетное число шагов и заключим, что $f(x)$ возрастает слева от точки $x = c$ и продолжает возрастать справа от нее. Далее, $f''(x)$ тоже возрастает, проходя через нулевое значение, и, следовательно, $f''(x)$ меняет знак с минуса на плюс, так что точка c есть точка перегиба для функции $f(x)$.

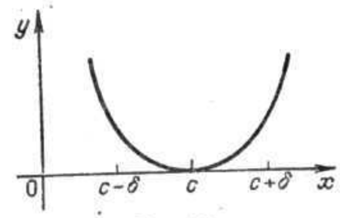

Рис. 22

Случай $f^{(n)}(x) < 0$ рассматривается совершенно аналогично, и мы опускаем его рассмотрение. Теорема доказана.

Замечание. Если в условиях теоремы допустить, что $f^{(n)}(x) > 0$ не во всем интервале $[a, b]$, но только в точке $x=c$, то суждения о возрастании и убывании функции $f(x)$ останутся в силе, но в применении, быть может, к части $[c-\delta,\ c+\delta]$ интервала $[a,\ b]$. Действительно, если $f^{(n)}(c)>0$, то функция $f^{(n-1)}(x)$ возрастает в точке c, так что найдется такое $\delta>0$, что $f^{(n-1)}(x)<f^{(n-1)}(c)=0$ при $c-\delta\leqslant x<c$ и $0=f^{(n-1)}(c)<f^{(n-1)}(x)$ при $c<x\leqslant c+\delta$. Все дальнейшие рассуждения останутся в силе, но в применении к интервалу $[c-\delta,\ c+\delta]$.

Пример 1. При помощи производных высших порядков исследовать функцию $f(x)=x^5-2x^4+x^3+2$ на максимум и минимум.

Решение. $f'(x)=5x^4-8x^3+3x^2=x^2(5x^2-8x+3)$. Корни производной: $x_1=0$; $x_2=3/5$; $x_3=1$. Имеются три «подозрительные» точки. Вторая производная

$$f''(x)=20x^3-24x^2+6x;\quad f''(0)=0;$$
$$f''\left(\frac{3}{5}\right)=-\frac{18}{25}<0;\quad f''(1)=2>0.$$

Заключаем, что $x=3/5$ есть точка максимума, $x=1$ — точка минимума. Далее:

$$f'''(x)=60x^2-48x+6;\quad f'''(0)=6>0.$$

Следовательно, точка $x=0$ есть точка перегиба на возрастании. График имеет вид, представленный на рис. 23.

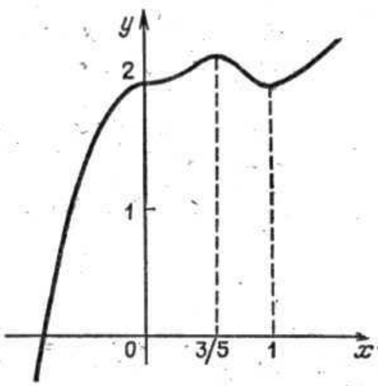

Рис. 23

Замечание. Конечно, этот пример можно было бы решить, используя только исследование знаков $f'(x)$, что совсем просто, если записать ее разложение на множители:

$$f'(x)=x^2(5x-3)(x-1).$$

Пример 2. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную, то между соседними точками локальных максимума и минимума имеется по крайней мере одна точка перегиба.

Решение. В точке максимума выпуклость направлена вверх, в точке минимума вниз, направление выпуклости должно измениться при переходе через некоторую точку по крайней мере один раз.

Пример 3. Найти точки перегиба графика функции $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

Решение. $y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $y''=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

Функция y'' обращается в нуль в точках $x=0$, $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$, и при переходе x через каждую из этих точек y'' меняет знак. Следовательно, точки с абсциссами $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$ являются точками перегиба. ►

◄ § 8. Порядок малости функций в окрестности точки, в которой функция обращается в нуль и порядок близости функций

Рассмотрим функции $x-a$, $(x-a)^2$, $(x-a)^3$, ..., $(x-a)^n$, ... Все они обращаются в нуль при $x=a$ и стремятся к нулю при $x\to a$. При этом каждая из этих функций стремится к нулю существенно быстрее предшествующих. Действительно, $\dfrac{(x-a)^m}{(x-a)^k}=(x-a)^{m-k}\to 0$ при $m>k$ и $x\to a$. Это обстоятельство особенно наглядно видно из следующих численных подсчетов: если $x-a=1/2$, то $(x-a)^2=1/4$, т. е. вдвое меньше, $(x-a)^3=1/8$ — еще вдвое меньше и т. д. А при $x-a=1/10$ каждая последующая степень $(x-a)^{k+1}$ в десять раз меньше непосредственно предшествующей $(x-a)^k$. При еще меньших $x-a$ уменьшение $(x-a)^k$ при возрастании k становится еще более стремительным.

Если непрерывная функция $f(x)$ обращается в нуль при $x=a$, то при $x\to a$ она стремится к нулю. Естественно сравнивать $f(x)$ со степенями $(x-a)^n$ в смысле скорости стремления к нулю. Именно, считается, что *порядок малости* $f(x)$ при $x\to a$ равен n, если существует отличный от нуля предел $f(x)/(x-a)^n$ при $x\to a$. Так, $f(x)=x^3+x^4+x^5$ имеет порядок малости 3 при $x\to 0$, $f(x)/x^3=1+x+x^2\to 1$ при $x\to 0$. Функция $\sqrt{x}-2$ имеет порядок малости 1 при $x\to 4$, ибо $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\to\dfrac{1}{4}$ при $x\to 4$, и т. д.

Можно ввести и дробные порядки малости для некоторых функций, считая функцию $|x-a|^{\alpha}$, при $\alpha>0$ имеющей порядок малости α. Так, функция $x^{3/2}$ имеет порядок малости 3/2 в окрестности $x=0$, функция $\ln(1+\sqrt[3]{x})$ имеет порядок малости 1/3 в окрестности

$x=0$, ибо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}=1\neq 0.$$

Существуют функции, стремящиеся к нулю при $x\to a$, которым нельзя приписать определенный порядок малости. Для таких функций целесообразно для характеристики малости ввести другие определения. Именно, говорят, что порядок малости функции $f(x)$ в окрестности точки $x=a$ не меньше n, если функция $\frac{f(x)}{(x-a)^n}$ ограничена в окрестности точки $x=a$. Почти очевидно, что если порядок малости $f(x)$ равен или больше n в смысле прежнего определения, то он не меньше n и в смысле последнего определения. Действительно, если порядок малости $f(x)$ равен $m\geqslant n$, то $\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\frac{f(x)}{(x-a)^m}(x-a)^{m-n}$ стремится к нулю при $m>n$ или к конечному пределу, если $m=n$, и, следовательно, $\frac{f(x)}{(x-a)^n}$ ограничена в окрестности точки $x=a$.

Порядком близости двух функций в окрестности данной точки называется порядок малости их разности. Так, функции $y=x^2$ и $z=2x-1$ имеют порядок близости 2 в окрестности точки $x=1$, ибо $y-z=x^2-2x+1=(x-1)^2$. Здесь мы взяли в качестве функции z линейную функцию, графиком которой является касательная к параболе $y=x^2$ в точке $x=1$. Можно доказать, и в дальнейшем это будет сделано, что близость функции и линейной функции, задающей ее касательную, имеет порядок 2, если вторая производная в точке касания существует и отлична от нуля.

Естественно считать, что для данной функции можно подбирать не только тесно примыкающую к ней линейную функцию, но и квадратичный трехчлен, и многочлены более высокой степени, обеспечивающие еще более высокий порядок близости. Не рассматривая пока этот вопрос в теоретическом плане, ограничимся разбором нескольких примеров.

Пример 1. Для функции $y=x^4$ подобрать квадратичный трехчлен так, чтобы он имел третий порядок близости в окрестности точки $x=1$.

Решение. $x^4=(1+(x-1))^4=1+4(x-1)+6(x-1)^2+4(x-1)^3+(x-1)^4$. Ясно, что искомый трехчлен является $z=1+4(x-1)+6(x-1)^2=6x^2-8x+3$, ибо $y-z=4(x-1)^3+(x-1)^4=(x-1)^3(4+x-1)$ имеет третий порядок малости.

Пример 2. Для функции $y=\sqrt{1+x}$ подобрать квадратный трехчлен $z=a+bx+cx^2$ так, чтобы он имел близость третьего порядка к функции y в окрестности точки $x=0$.

Решение. Для равенства $y|_{x=0}=z|_{x=0}$ нужно взять $a=1$. Далее,

$$y-z=\sqrt{1+x}-(1+bx+cx^2)=\frac{1+x-(1+bx+cx^2)^2}{\sqrt{1+x}+(1+bx+cx^2)}=$$
$$=\frac{1+x-1-2bx-(b^2+2c)x^2-2bcx^3-c^2x^4}{\sqrt{1+x}+1+bx+cx^2}=$$
$$=\frac{(1-2b)x-(b^2+2c)x^2-2bcx^3-c^2x^4}{\sqrt{1+x}+1+bx+cx^2}.$$

Возьмем $2b=1$, так что $b=1/2$, и пусть $b^2+2c=0$, так что $c=-1/8$. Тогда

$$y-z=\frac{\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{64}x^4}{\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2};$$

$$\frac{y-z}{x^3}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{64}x}{\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2}\to\frac{1}{16}$$

при $x\to 0$. Следовательно, $y-z$ имеет третий порядок малости в окрестности точки $x=0$, что и требовалось. ►

◄ § 9. Связь порядка малости с порядком первой отличной от нуля производной

К вопросу о порядке малости функции в окрестности ее корня можно подойти несколько иначе. Если функция обращается в нуль при $x=a$, но ее производная в нуль не обращается, то график функции пересекает ось абсцисс под углом, отличным от нуля. Если производная тоже равна нулю, то график функции касается оси абсцисс и примыкает к оси абсцисс значительно плотнее, чем в первом случае. Если же, кроме того, равна нулю и вторая производная, то при отходе от точки $x=a$ не только скорость изменения функции равна нулю, но и ускорение, так что график «прилипает» к оси абсцисс еще крепче.

Этот эффект будет усиливаться по мере увеличения числа производных, обращающихся в нуль при $x=a$.

Для функции $(x-a)^n$, имеющей порядок малости n в окрестности $x=a$ имеем, очевидно, что все ее производные от первой до $(n-1)$-й обращаются в нуль при $x=a$, а n-я, равная $n!$, отлична от нуля.

Верна следующая

Теорема. *Если $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$ и в некоторой окрестности $(a-\delta, a+\delta)$ точки a существует $f^{(n)}(x)$ и во всех точках этой окрестности $m<f^{(n)}(x)<M$, то все значения $f(x)$ заключены между $\frac{m(x-a)^n}{n!}$ и $\frac{M(x-a)^n}{n!}$.*

Доказательство. Пусть сначала n четное. Рассмотрим функции

$$g(x)=f(x)-m\frac{(x-a)^n}{n!}, \quad h(x)=f(x)-\frac{M(x-a)^n}{n!}.$$

Легко видеть, что $g(a)=g'(a)=\ldots=g^{(n-1)}(a)=0$ и $h(a)=h'(a)=\ldots=h^{(n-1)}(a)=0$, ибо этим свойством обладают оба слагаемых, из которых составлены функции $g(x)$ и $h(x)$. Далее,

$$g^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-m\frac{n!}{n!}=f^{(n)}(x)-m>0$$

при всех x из рассматриваемой окрестности. Следовательно, в силу теоремы из § 7 функция $g(x)$ имеет минимум в точке $x=a$ при нулевом значении, так что $g(x)>0$ при $x\neq a$ и $x\in[a-\delta, a+\delta]$ и, следовательно, $f(x)>m(x-a)^n/n!$. Аналогично $h^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-M<0$, так что $h(x)$ имеет максимум при нулевом значении в точке $x=a$, так что при $x\neq a$, $x\in[a-\delta, a+\delta]$ будет $h(x)<0$, т. е. $f(x)<M(x-a)^n/n!$.

Итак, при четном n мы доказали, что при $x\neq a$, $x\in[a-\delta, a+\delta]$ имеют место неравенства

$$\frac{m(x-a)^n}{n!}<f(x)<\frac{M(x-a)^n}{n!}.$$

Пусть теперь n нечетное. Для функций $g(x)$ и $h(x)$ по-прежнему имеют место неравенства $g(a)=g'(a)=\ldots=g^{(n-1)}(a)=0$, $h(a)=h'(a)=\ldots=h^{(n-1)}(a)=0$ и неравенства $g^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-m>0$ и $h^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-M<0$. На основании теоремы из § 7 заключаем, что $g(x)$ возрастает, проходя через нуль при $x=a$, и $h(x)$ убывает, так что $g(x)<0$ при $a-\delta\leqslant x<a$, $g(x)>0$ при $a<x\leqslant a+\delta$, $h(x)>0$ при $a-\delta\leqslant x<a$ и $h(x)<0$ при

$a<x\leqslant a+\delta$. Таким образом, при $a<x\leqslant a+\delta$ имеют место неравенства $\frac{m(x-a)^n}{n!}<f(x)<\frac{M(x-a)^n}{n!}$, а при $a-\delta\leqslant x<a$ — неравенства $\frac{M(x-a)^n}{n!}<f(x)<\frac{m(x-a)^n}{n!}$.

Теорема доказана.

Замечание 1. В условии теоремы можно включить знаки равенства в оценки для $f^{(n)}(x)$, т. е. считать $m\leqslant f^{(n)}(x)\leqslant M$ при $x\in[a-\delta, a+\delta]$. Эти неравенства будут выполнены, если взять в качестве m и M наименьшее и наибольшее значения $f^{(n)}(x)$ на $[a-\delta, a+\delta]$. Тогда и в заключении теоремы в неравенства

$$\frac{m(x-a)^n}{n!}<f(x)<\frac{M(x-a)^n}{n!},$$

$$\frac{M(x-a)^n}{n!}<f(x)<\frac{m(x-a)^n}{n!}$$

(последнее при нечетном n и $x<a$) нужно включить знаки равенства. Действительно, если $m\leqslant f^{(n)}(x)\leqslant M$, то $m-\alpha<f^{(n)}(x)<M+\alpha$ при любом $\alpha>0$ и, следовательно (при четном n или при нечетном, но при $x>a$),

$$\frac{(m-\alpha)(x-a)^n}{n!}<f(x)<\frac{(M+\alpha)(x-a)^n}{n!},$$

и, так как α можно взять сколь угодно малым,

$$\frac{m(x-a)^n}{n!}\leqslant f(x)\leqslant\frac{M(x-a)^n}{n!}.$$

Соответственно при нечетном n и $x<a$

$$\frac{M(x-a)^n}{n!}\leqslant f(x)\leqslant\frac{m(x-a)^n}{n!}.$$

Замечание 2. Доказанные неравенства равносильны неравенствам $\frac{m}{n!}\leqslant\frac{f(x)}{(x-a)^n}\leqslant\frac{M}{n!}$, верным как при четном, так и при нечетном n. Чтобы в этом убедиться, достаточно разделить все три части доказанных неравенств на $(x-a)^n$. При четном n и при нечетном, но при $x>a$, число $(x-a)^n$ положительно, и знаки неравенств нужно сохранить. При нечетном n и $x<a$ число $(x-a)^n$ отрицательно, и после деления знаки неравенств нужно заменить на противоположные, что приводит и в этом случае к неравенствам $\frac{m}{n!}\leqslant\frac{f(x)}{(x-a)^n}\leqslant\frac{M}{n!}$. Положив $\frac{f(x)}{(x-a)^n/n!}=T(x)$, получим $m\leqslant T(x)\leqslant M$ и $f(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}T(x)$.

Следствие. *Если* $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$ *и* $f^{(n)}(x)$ *непрерывна в окрестности точки* a, *то существует предел* $\frac{f(x)}{(x-a)^n}$ *при* $x\to a$ *и этот предел равен* $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Доказательство. Действительно, если считать $\delta\to 0$, т. е. брать беспредельно уменьшающуюся окрестность точки a, то наименьшее m и наибольшее M значения $f^{(n)}(x)$ на $[a-\delta,\ a+\delta]$ стремятся к $f^{(n)}(a)$, так что

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{m}{n!}=\lim_{x\to a}\frac{M}{n!}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Поэтому если $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(x)$ существует, непрерывна в окрестности точки $x=a$ и $f^{(n)}(a)\neq 0$, то порядок малости функции $f(x)$ в окрестности точки a точно равен n.

Таким образом, если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в окрестности точки $x=a$ и $f(a)=0$, то порядок малости $f(x)$ в окрестности точки $x=a$ точно равен наименьшему порядку производной, не обращающейся в нуль в точке a.

В этих естественных предположениях порядок малости функции $f(x)$ есть целое число. Следовательно, функции, имеющие дробный порядок малости, не должны иметь непрерывных производных достаточно высокого порядка в окрестности точки $x=a$. Так, функция $x^{3/2}$, имеющая порядок малости 3/2 вблизи $x=0$, имеет вторую производную $\frac{3}{4}x^{-1/2}$, имеющую разрыв непрерывности при $x=0$.

Пример 1. Доказать, что порядок малости функции

$$f(x)=\sqrt{x}-\frac{5}{16}-\frac{15}{16}x+\frac{5}{16}x^2-\frac{1}{16}x^3$$

в окрестности точки $x=1$ равен 4 и найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^4}$.

Решение.

$$f(1)=0;\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{15}{16}+\frac{10}{16}x-\frac{3}{16}x^2;\quad f'(1)=0;$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}+\frac{5}{8}-\frac{3}{8}x,\quad f''(1)=0;$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8\sqrt{x^5}}-\frac{3}{8},\quad f'''(1)=0;$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16\sqrt{x^7}},\quad f^{(4)}(1)=-\frac{15}{16}\neq 0.$$

Таким образом, порядок малости $f(x)$ в окрестности точки $x=1$ действительно равен 4. Далее,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^4}=\frac{f^{(4)}(1)}{4!}=-\frac{5}{128}.$$

Пример 2. Доказать, что линейная функция $l(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$, графиком которой является касательная к графику функции $f(x)$ в точке $x=a$, имеет второй порядок близости к функции $f(x)$, если $f''(a)\neq 0$.

Доказательство. $g(x)=l(x)-f(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$. Поэтому $g(a)=0$. Далее, $g'(x)=f'(x)-f'(a)$ и $g'(a)=0$. Наконец, $g''(x)=f''(x)$ и $g''(a)=f''(a)\neq 0$. Следовательно, порядок малости функции $g(x)$ равен 2 в окрестности точки $x=a$, т. е. порядок близости $l(x)$ и $f(x)$ тоже равен 2.

Пример 3. Найти многочлен $P(x)$ третьей степени такой, чтобы он имел близость порядка 4 к функции e^x в окрестности точки $x=0$.

Решение. Пусть

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3,$$
$$g(x)=e^x-P(x)=e^x-a_0-a_1x-a_2x^2-a_3x^3.$$

Нужно подобрать коэффициенты так, чтобы функция $g(x)$ имела порядок малости 4 в окрестности $x=0$. Для этого нужно потребовать $g(0)=g'(0)=g''(0)=g'''(0)=0$. Но

$$\begin{aligned}
g(0)&=1-a_0;\\
g'(x)&=e^x-a_1-2a_2x-3a_3x^2,\quad g'(0)=1-a_1;\\
g''(x)&=e^x-2a_2-6a_3x,\quad g''(0)=1-2a_2;\\
g'''(x)&=e^x-6a_3,\quad g'''(0)=1-6a_3.
\end{aligned}$$

Наконец, $g^{(4)}(x)=e^x$ и $g^{(4)}(0)=1\neq 0$. Приравнивая к нулю $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$ и $g'''(0)$, получим $a_0=1$; $a_1=1$; $a_2=1/2$; $a_3=1/6$. Таким образом, искомый многочлен $P(x)$ равен $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$. ▶

◀ § 10. Формулы Тейлора и Маклорена

Для функции $f(x)$, имеющей $n+1$ непрерывных производных в окрестности точки $x=a$, всегда можно найти многочлен $P_n(x)$ степени n такой, чтобы он имел порядок близости к $f(x)$ не менее $n+1$ в окрестности точки $x=a$. Докажем это.

Пусть $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$. Запишем $x=(x-a)+a$ и преобразуем степени x по формуле бинома

Ньютона. Каждое слагаемое $a_k x^k$ представится в виде суммы степеней двучлена $(x-a)$ с некоторыми коэффициентами. Соединив подобные члены, представим $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\ldots+b_n(x-a)^n.$$

Именно в этой форме нам удобно искать $P_n(x)$.

Положим $r_n(x)=f(x)-P_n(x)=f(x)-b_0-b_1(x-a)-$ $-b_2(x-a)^2-\ldots-b_k(x-a)^k-\ldots-b_n(x-a)^n$. Для достижения цели нужно потребовать, чтобы $r_n(a)=r_n'(a)=\ldots$ $\ldots=r_n^{(n)}(a)=0$. Вычислим производные от функции $r_n(x)$:

$$r_n'(x)=f'(x)-b_1-2b_2(x-a)-\ldots-$$
$$-kb_k(x-a)^{k-1}-\ldots-nb_n(x-a)^{n-1},$$
$$r_n''(x)=f''(x)-2!\,b_2-3\cdot 2\cdot b_3(x-a)-\ldots-$$
$$-k(k-1)b_k(x-a)^{k-2}-\ldots-n(n-1)b_n(x-a)^{n-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_n^{(k)}(x)=f^{(k)}(x)-k!\,b_k-\ldots-$$
$$-n(n-1)\ldots(n-k+1)b_n(x-a)^{n-k},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_n^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(x)-(n-1)!\,b_{n-1}-$$
$$-n(n-1)\ \ldots\ 2b_n(x-a),$$
$$r_n^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-n!\,b_n.$$

Приравняв $r_n(a)$, $r_n'(a)$, $\ldots$, $r_n^{(n)}(a)$ к нулю, получим:

$$\begin{aligned}
&f(a)-b_0=0,\\
&f'(a)-b_1=0,\\
&f''(a)-2!\,b_2=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f^{(k)}(a)-k!\,b_k=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f^{(n-1)}(a)-(n-1)!\,b_{n-1}=0,\\
&f^{(n)}(a)-n!\,b_n=0,
\end{aligned}$$

откуда $b_0=f(a)$, $b_1=f'(a)$, $b_2=\frac{1}{2!}f''(a), \ldots, b_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a), \ldots$ $\ldots, b_{n-1}=\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$, $b_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$.

При таком выборе коэффициентов функция $r_n(x)$ будет иметь порядок малости не меньше $n+1$ и соответственно $P(x)$ будет иметь порядок близости к $f(x)$ не меньше $n+1$.

Итак,

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+r_n(x),$$

где $r_n(x)$ — функция, имеющая порядок малости не меньше $n+1$ в окрестности точки $x=a$.

Полученная формула называется *формулой Тейлора*. Функция $r_n(x)$ носит название *остаточного члена* в формуле Тейлора. На основании теоремы из § 7 мы в состоянии оценить величину остаточного члена. Ясно, что $r_n^{(n+1)}(x)=$ $=f^{(n+1)}(x)$ и, по построению, $r(a)=r'(a)=\ldots=r^{(n)}(a)=0$. Согласно теореме из § 7 имеем

$$r_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}T_n(x),$$

где $m\leqslant T_n(x)\leqslant M$, числа m и M суть наименьшее и наибольшее значения $f^{(n+1)}(x)$ в рассматриваемой окрестности точки $x=a$. Остаточный член характеризует погрешность при замене значений функции $f(x)$ на значения многочлена $P_n(x)$.

В частном случае, при $a=0$, формула приобретает более простой вид:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+r_n(x).$$

Эта формула называется *формулой Маклорена*.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Разложить многочлен

$$P(x)=x^5-2x^4+3x^3-x^2+x-1$$

по степеням двучлена $(x-1)$.

Сначала найдем все производные от $P(x)$ до 5-го порядка включительно:

$$\begin{aligned}
P'(x)&=5x^4-8x^3+9x^2-2x+1,\\
P''(x)&=20x^3-24x^2+18x-2,\\
P'''(x)&=60x^2-48x+18,\\
P^{(4)}(x)&=120x-48,\\
P^{(5)}(x)&=120.
\end{aligned}$$

Теперь вычислим значения многочлена и его производных в точке $x=1$:

$$P(1)=1,\quad P'(1)=10,\quad P''(1)=12,$$
$$P'''(1)=30,\quad P^{(4)}(1)=72,\quad P^{(5)}(1)=120.$$

По формуле Тейлора получаем

$$P(x)=1+10(x-1)+\frac{12}{2!}(x-1)^2+\frac{30}{3!}(x-1)^3+$$
$$+\frac{72}{4!}(x-1)^4+\frac{120}{5!}(x-1)^5.$$

Окончательный вид:

$$P(x)=1+10(x-1)+6(x-1)^2+5(x-1)^3+$$
$$+3(x-1)^4+(x-1)^5.$$

Тот же результат получим, если применим способ решения, который использовался при решении примера 1 из § 8.

Пользуясь полученным разложением, можно вычислить значение $P(x)$ при любом значении x. Но очевидно, что при x, далеких от 1, такая форма представления многочлена не имеет никаких преимуществ по сравнению с заданной. Однако ситуация существенно изменяется, если ставится задача приближенного вычисления $P(x)$ при x, близких к 1. В этом случае упрощаются вычисления и, кроме того, заранее может быть сделана оценка погрешности. Например, вычислим $P(1,1)$ с точностью до 0,001. Последние два слагаемых вносят поправку, меньшую чем 0,001, поэтому

$$P(1,1)\approx 1+10\cdot 0,1+6\cdot 0,01+5\cdot 0,001=2,065.$$

Пример 2. Разложить функцию $f(x)=e^x$ по формуле Маклорена.

Решение. Так как $f^{(n)}(x)=e^x$ при любом n, то $f^{(n)}(0)=e^0=1$, и по формуле Маклорена получаем

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x).$$

Заметим, что при $x=1$ получаем формулу для приближенного вычисления числа e:

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Погрешность вычислений оценивается так:

$$0<r_n(1)<e\frac{1}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Вычислим значение числа e с точностью до 10^{-3}. Для обеспечения заданной точности достаточно взять $n=6$, тогда

$$0<r_6<\frac{3}{7!}=\frac{3}{5040}<0,0006,$$

$$e\approx 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=$$
$$=2+\frac{360+120+30+6+1}{720}=2\frac{517}{720}\approx 2,718. ►$$

§ 11. Общие понятия теории приближенных вычислений

При применении математики к решению практических задач часто приходится иметь дело с числами, заданными лишь приближенно, причем погрешность в задании неизвестна точно, но для нее имеется оценка по модулю. Если приближенное значение величины x равно x_0, а про погрешность известно, что она по модулю не превосходит α, то принято записывать $x=x_0\pm\alpha$. Эта запись условная и ее нельзя понимать в буквальном смысле (x равно $x_0+\alpha$ или $x_0-\alpha$). Так, запись $x=1,324\pm 5\cdot 10^{-4}$ означает, что x приближенно равно 1,324 и погрешность не превосходит пяти единиц четвертого знака после запятой.

Иногда в силу различных причин бывает нужно отбросить часть десятичных знаков в записи числа. Это действие называется *округлением*. При округлении, если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то предыдущая цифра оставляется без изменения, если больше 5, то предыдущая увеличивается на одну единицу. В случае, если первая отбрасываемая цифра 5, то можно округлять как «вниз» (не меняя предыдущую цифру), так и «вверх» (увеличивая предыдущую цифру на 1). Так, для числа e, для которого округленное значение с семью знаками после запятой есть 2,7182818, более грубыми округленными значениями являются 2,7; 2,72; 2,718; 2,7183; 2,71828; 2,718282 (с одним, с двумя, ..., с шестью знаками после запятой).

Если x_0 есть округленное значение для величины x, взятое с n десятичными знаками после запятой, то можно записать

$$x=x_0\pm 0,5\cdot 10^{-n}.$$

Разность между истинным значением величины и ее приближенным значением называется *абсолютной погрешностью* приближения. Как уже было сказано, при приближенных вычислениях точное значение абсолютной погрешности обычно неизвестно и известна лишь ее *оценка*, т. е. число, ограничивающее сверху ее модуль. При приближенной записи числа в виде конечной десятичной дроби, если известно, что все записанные цифры верны, абсолютная погрешность оценивается пятью единицами первого отброшенного разряда. Так, когда говорят, что число задано с шестью верными знаками после запятой, то это значит, что оценка абсолютной погрешности дается числом $5 \cdot 10^{-7}$.

Относительной погрешностью называется отношение величины абсолютной погрешности к приближенному значению величины. Обычно качество точности приближенного значения величины определяется оценкой относительной погрешности. Эту оценку часто дают в процентах и долях процентов. Так, если известно, что значение величины равно 0,01232 с точностью до 0,1%, то это значит, что относительная погрешность не превосходит $0{,}001 = 10^{-3}$ и абсолютная погрешность не превосходит $10^{-3} \cdot 0{,}01232 = 0{,}00001232 \approx 0{,}00001$, т. е. пятая цифра после запятой не вполне достоверна и, быть может, отличается на одну единицу от истинной.

Относительная погрешность обладает следующим замечательным свойством:

Теорема 1. *Относительная погрешность приближенно заданной величины не изменяется при умножении этой величины на число, известное точно.*

Доказательство. Действительно, пусть x — величина, имеющая приближенное значение x_0, и пусть c — число, известное точно. Тогда для cx приближенным значением является cx_0, относительная погрешность для величины cx есть $\frac{cx - cx_0}{cx_0} = \frac{x - x_0}{x_0}$, т. е. равна относительной погрешности для величины x.

Наиболее важным для практики является случай $c = 10^n$ при целом n, положительном или отрицательном. Умножение на 10^n не меняет *значащих цифр* в записи числа (т. е. цифр, начиная с первой, отличной от нуля, до последней, за которой следуют недостоверные цифры, отброшенные или замененные нулями). Так, числа 12345000 и 0,0012345, имеющие одинаковые цифры, которые считаются верными, могут служить для записи

приближенных значений величин с одинаковой оценкой относительной погрешности:

$$\frac{0{,}5}{12345} \approx 0{,}00004 = 0{,}004\,\%.$$

В современных ЭВМ результаты вычислений обычно выводятся из машины «в режиме плавающей запятой», т. е. даются значащие цифры после нуля и запятой (так называемая *мантисса*) и указывается «десятичный порядок», т. е. показатели степени числа 10, на которую мантисса должна быть умножена, т. е. указывается место постановки запятой или, для больших чисел, сколько нулей нужно приписать к мантиссе; конечно, при некоторой привычке к записи с мантиссой и порядком она становится даже более наглядной, чем обычная. Так, записи $0{,}12345 \cdot 10^6$ и $0{,}12345 \cdot 10^{-3}$ не менее наглядны, чем 123450 и 0,00012345.

Вычислительная задача считается *хорошо поставленной* (или, как говорят, *хорошо обусловленной*), если относительная погрешность результата вычислений не намного превосходит относительные погрешности входных данных. Одной из основных возможных причин плохой обусловленности является «исчезновение значащих цифр». Это неприятное явление возникает, в частности, при вычитании двух близких чисел (в явном или замаскированном виде). Так, например, числа 0,1234 и 0,1222 с верными значащими цифрами заданы приблизительно с одинаковой погрешностью, не превосходящей $\frac{5 \cdot 10^{-5}}{0{,}12} \approx 4 \cdot 10^{-4}$, а их разность 0,0012 имеет даже недостоверную четвертую цифру после запятой, так что относительная погрешность оценивается числом $\frac{10^{-4}}{0{,}0012} = 6 \cdot 10^{-2}$, т. е. результат в смысле оценки относительной погрешности приблизительно в 200 раз хуже входных данных.

При выборе метода вычислений в больших задачах математики стремятся к тому, чтобы по возможности избежать исчезновения значащих цифр.

§ 12. Оценка погрешностей результатов вычислений с приближенно заданными числами

При суждении о качестве приближенных вычислений по оценкам погрешностей достаточно знать эти оценки грубо приближенно. Иногда для такого суждения достаточно знать только порядок оценки (например, оценку абсолютной погрешности дает фраза «первые три знака после запятой верны»; оценку относительной погрешности дает фраза «результат верен с точностью до нескольких десятых долей процента»). Неизвестную нам точную величину абсолютной погрешности можно рассматривать как малые приращения, добавляемые к приближенному значению, и, если речь идет о вычислении функции от приближенно заданного аргумента, приращение может быть заменено дифференциалом.

Теорема 1. *Абсолютная погрешность при вычислении значения функции $y=f(x)$ от приближенно заданного аргумента приближенно равна произведению абсолютной погрешности аргумента на значение производной $f'(x)$ в рассматриваемой точке.*

Доказательство. Действительно, пусть x_0 — приближенное значение аргумента и x — неизвестное точное значение аргумента, заведомо близкое к x_0. Величину $\Delta x = x - x_0$ абсолютной погрешности аргумента можно принять за малые приращения аргумента. Соответствующее приращение $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ функции, т. е. абсолютная погрешность для значения функции, приблизительно равна дифференциалу $dy = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)(x - x_0)$, что и требовалось доказать.

Конечно, теорема верна в предположении, что абсолютная погрешность аргумента действительно достаточно мала для данной функции.

Из теоремы 1 следует, что оценка абсолютной погрешности значения функции не превосходит оценки абсолютной погрешности аргумента, умноженной на модуль значения производной.

Для относительной погрешности получается формула

$$\frac{\Delta y}{y_0} \approx \frac{f'(x_0)\,\Delta x}{f(x_0)} = \frac{x_0 \cdot f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot \frac{\Delta x}{x_0}.$$

Если качество вычисления оценивается по росту относительной погрешности, то приходится считать вычисление функции «плохо обусловленным», если число $\left|\frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}\right|$ слишком велико.

В частности, относительная погрешность сильно увеличивается при вычислении значений многочлена вблизи его корня. Ясно, что при таком вычислении неизбежно «уничтожение значащих цифр».

Теорема 2. *Оценка абсолютной погрешности алгебраической суммы двух функций не превосходит суммы оценок погрешностей слагаемых.*

Доказательство. Действительно, дифференциал суммы двух функций равен сумме дифференциалов слагаемых и, следовательно, модуль абсолютной погрешности суммы не превосходит суммы модулей абсолютных погрешностей слагаемых.

Необходимо заметить, что теорема 2 применима к сумме любых функций, для конкретных же функций даваемая ею оценка может оказаться сильно завышенной. Так, например, для функции $y = x^2 - 2x$ при $x = 1{,}324 \pm 0{,}0005$ оценка погрешностей слагаемых дает: для первого слагаемого $x^2 = 1{,}324^2 \pm \delta_1$

$$\delta_1 = 2 \cdot 1{,}324 \cdot 0{,}0005 \approx 0{,}001,$$

для второго слагаемого $2x = 2 \cdot 1{,}324 \pm \delta_2$

$$\delta_2 = 2 \cdot 0{,}0005 = 0{,}001.$$

Оценка по теореме 2 дает $|\Delta y| \leqslant 0{,}002$. По теореме же 1 имеем $\Delta y \approx (2x_0 - 2)\,\Delta x = 0{,}648\Delta x$ и

$$|\Delta y| \leqslant 0{,}648 \cdot 0{,}0005 \approx 0{,}0003$$

— оценка оказывается более чем в 6 раз лучше.

Теорема 2 верна для суммы двух произвольных функций, поэтому ее можно считать верной для суммы любых приближенно заданных чисел. Именно, верна следующая

Теорема 2'. *Оценка абсолютной погрешности алгебраической суммы двух приближенно заданных чисел не превосходит суммы оценок погрешностей слагаемых.*

Эта теорема легко доказывается и непосредственно, без ссылки на теорему 2.

Доказательство. Пусть u и v — два приближенно заданных числа, u_0 и v_0 — их приближенные значения, Δu и Δv — их абсолютные погрешности. Тогда $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0 + \Delta v$ и $u + v = u_0 + v_0 + \Delta u + \Delta v$, откуда абсолютная погрешность суммы $u + v$ равна $\Delta u + \Delta v$ и ее модуль не превосходит $|\Delta u| + |\Delta v|$, что и дает требуемую оценку.

Однако теорема 2 тоже дает в некотором смысле завышенную оценку. Для того чтобы понять это, рассмотрим пример. Пусть $u = 1{,}116 \pm 0{,}0005$; $v = 2{,}162 \pm 0{,}0005$. Оценка для погрешности суммы равна 10 единицам четвертого знака после запятой. Рассмотрим подробнее, как возникает погрешность суммы. Запись $u = 1{,}116 \pm 0{,}0005$

означает, что погрешность величины u с точностью до четвертого знака может быть равна одному из 11 значений:

$$5\cdot10^{-4},\ 4\cdot10^{-4},\ 3\cdot10^{-4},\ 2\cdot10^{-4},\ 0,$$
$$-2\cdot10^{-4},\ -3\cdot10^{-4},\ -4\cdot10^{-4},\ -5\cdot10^{-4}$$

и нет оснований предпочесть одно из этих значений другим. То же самое имеет место и для величины v. Таким образом, для Δu и Δv с точностью до четвертого знака имеется $11^2=121$ возможностей. Из них только в двух случаях:

$$\Delta u=5\cdot10^{-4},\ \Delta v=5\cdot10^{-4}$$

и

$$\Delta u=-5\cdot10^{-4},\ \Delta v=-5\cdot10^{-4}$$

реализуется максимальная по модулю погрешность $10\cdot10^{-4}$ суммы. Легко подсчитать, что число случаев, в которых реализуется то или другое значение модуля погрешности суммы, дается следующей таблицей:

Модуль погрешности суммы (в единицах четвертого знака)	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Число случаев	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	11

Из этой таблицы видно, что модуль погрешности $u+v$ не превосходит $5\cdot10^{-4}$ в 91 случае из 121; не превосходит $7\cdot10^{-4}$ в 109 случаях из 121, максимальная же погрешность $10\cdot10^{-4}$ реализуется в двух случаях, так что она мало вероятна. При сложении большего количества приближенных чисел реализация максимальной и близкой к максимальной погрешности суммы становится еще менее вероятной.

Теорема 3. *Оценка относительной погрешности произведения и частного двух функций равна сумме оценок относительных погрешностей сомножителей и соответственно делимого и делителя.*

Доказательство. Вычисляя для функций $y=uv$ и $z=u/v$ абсолютные погрешности Δy, Δz как дифференциалы, получим

$$\Delta y=u\,\Delta v+v\,\Delta u,\quad \Delta z=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v^2},$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u}{uv}=\frac{\Delta v}{v}+\frac{\Delta u}{u},$$
$$\frac{\Delta z}{z}=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v^2}\cdot\frac{v}{u}=\frac{\Delta u}{u}-\frac{\Delta v}{v}.$$

Переходя к оценкам модулей, получим требуемое.

Таким образом, при действиях умножения и деления относительные погрешности не очень сильно растут.

Оценка в теореме 3 верна для произвольных функций u и v. Поэтому верна

Теорема 3'. *Оценка относительной погрешности произведения и частного двух приближенно заданных величин равна сумме оценок для относительных погрешностей сомножителей и соответственно делимого и делителя.*

Эту теорему нетрудно доказать непосредственно, без ссылки на теорему 3.

В заключение отметим, что если дана функция от нескольких аргументов $w=F(u, v, \ldots)$ такая, что можно выразить dw через du, dv, ..., рассматривая u, v, ... как функции некоторого параметра, то, зная приближенные значения u_0, v_0, ... и оценки абсолютных погрешностей Δu, Δv, ..., мы в состоянии оценить абсолютную погрешность результата вычислений, заменяя du, dv на Δu, Δv, ... и переходя к оценке модуля.

В самом деле, формулы, дающие выражение для dw через du, dv, ..., не зависят от того, какими функциями от параметра являются переменные u, v, ..., эти функции можно считать произвольными и du, dv, ... никак не связанными.

Пример 1. $y=\frac{u+2v}{u+v+1}$; $u=1,35\pm0,005$, $v=2,21\pm\pm0,005$. Найти приближенные значения для y и оценить погрешность.

Решение. Начнем с оценки погрешности. Имеем

$$dy=\frac{(u+v+1)\,(du+2dv)-(u+2v)\,(du+dv)}{(u+v+1)^2}=\frac{(1-v)\,du+(u+2)dv}{(u+v+1)^2},$$

откуда

$$\Delta y\approx\frac{-1,21\Delta u+3,35\Delta v}{(1,35+2,21+1)^2}\approx\frac{3,35\Delta v-1,21\Delta u}{21}$$

и

$$|\Delta y|\leqslant\frac{3,35}{21}|\Delta v|+\frac{1,21}{21}|\Delta u|\leqslant\frac{4,56}{21}\cdot0,005\approx0,001.$$

Отсюда следует, что результат имеет смысл вычислить с тремя знаками после запятой. Он будет недостоверен не более чем на одну единицу третьего знака после запятой.

Итак,

$$u = \frac{1,35+4,42}{1,35+2,21+1} \pm 0,001 = 1,265 \pm 0,001.$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 3

1. Доказать монотонность данной функции $f(x)$ на указанных интервалах сначала элементарными средствами, показав, что из неравенства $x_2 > x_1$ вытекает неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ или $f(x_2) < f(x_1)$, затем средствами дифференциального исчисления:

1. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$ убывает на $(-\infty; -1)$ и на $(-1; \infty)$.

2. $f(x) = \dfrac{3-2x}{x-2}$ возрастает на $(-\infty; -2)$ и на $(-2; \infty)$.

3. $f(x) = x^2 - 6x + 3$ возрастает на $[3; \infty)$.

4. $f(x) = x^2 + 8x - 7$ убывает на $(-\infty; -4]$.

2. Доказать, что если $g(x)$ возрастает на $(a; b]$ и на $[b; c)$, то $g(x)$ возрастает на $(a; c)$.

3. Зная характер монотонности функций $f(x)$ и $g(x)$, легко определить характер монотонности сложной функции, составленной из функций $f(x)$ и $g(x)$, т. е. функций

$$F(x) = f(g(x)) \text{ и } G(x) = g(f(x))$$

по правилу, напоминающему правило знаков при умножении, где роль минуса играет убывающая функция, а роль плюса — возрастающая функция. Например, если $f(x)$ — убывающая функция, а $g(x)$ — возрастающая, то $F(x)$ и $G(x)$ — убывающие функции; если $f(x)$ и $g(x)$ — убывающие функции, то $F(x)$ и $G(x)$ — возрастающие функции.

Доказать эти правила элементарными средствами и средствами дифференциального исчисления в предположении, что $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$ и $G(x)$ — дифференцируемые функции.

4. Определить характер монотонности данных функций:

1. $y = 2^{3x-4}$. 2. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$. 3. $y = (0,7)^{1-2x}$.

4. $y = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}x+1}$. 5. $y = \sqrt{6 - \frac{1}{3}x}$. 6. $y = \sqrt{2x - 0,5}$.

7. $y = 2 - \dfrac{3}{x}$. 8. $y = \dfrac{6}{x} + 5$.

5. Найти промежутки монотонности функций, используя признаки возрастания и убывания функции:

1. $u(t) = t^3 - t^2 - t + 7$. 2. $v(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 3$.

3. $V(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+4}$. 4. $P(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$. 5. $f(x) = x \cdot \ln x$.

6. $g(x) = x \cdot e^x$. 7. $G(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2-4}$. 8. $F(t) = \dfrac{-\sqrt{5-t}}{t^2}$.

6. Найти промежутки монотонности и экстремумы функций. Изучить поведение функций при $x \to \infty$ и вблизи точек разрыва, если такие имеются. Начертить примерный вид графиков функций:

1. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$. 2. $y = x(x+2)(x-3)$.

3. $y = \dfrac{x^2+1}{1-x^2}$. 4. $y = \dfrac{x^2-2x+2}{2x-x^2}$. 5. $y = e^{x^2}$.

6. $y = (\ln x)^2$. 7. $y = x^2 - 2|x|$. 8. $y = -x^2 + |x-2|$.

9. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. 10. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$. ◀ 11. $y = x^x$, $x > 0$.

12. $y = x^{1/x}$, $x > 0$. ▶

7. Построить график функции

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$$

на интервале $|x| \leqslant 2$.

8. Построить графики кривых:

1. $f(x) = e^{-x^2}$. 2. $f(x) = e^x - x + 1$. 3. $y = \sqrt{9x^2 - 1}$.

4. $y = \sqrt{16 - x^2}$. 5. $y = 0,2x^3 + 0,3x^2 - 1,2x + 0,1$.

6. $y = 0,1x^4 - 0,4x^3 + 0,4x^2 + 0,5$. 7. $y = \dfrac{x^2-x}{x^2+1}$.

8. $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^2-x-2}$. 9. $y = \ln\dfrac{1+x}{2-x}$. 10. $y = \ln\dfrac{x+1}{x-2}$.

11. $y = \sqrt[3]{x^2-16}$. 12. $y = \sqrt[3]{8-x^3}$. 13. $y = x^{\sqrt{x}}$.

14. $y = x^{m/n}$, где m и n — взаимно простые натуральные числа, $x \geqslant 0$.

9. Пользуясь методами дифференциального исчисления, исследовать функцию $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — постоянные.

10. Найти наибольшее значение функции $f(x)$:

1. $f(x) = x^2(1-x)^3$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2. $f(x) = x^p(a-x)^q$, $0 \leqslant x \leqslant a$; p, q — положительные постоянные.

11. Найти наибольшее и наименьшее значение функций на указанных интервалах:

1. $f(x) = x^3 - 12x + 4$, $-3 \leqslant x \leqslant 4$.

2. $g(x) = t^4 - 4t^3 - 8t^2 + 13$, $-2 \leqslant t \leqslant 3$.

3. $V(\alpha)=\alpha^4-9\alpha^2+4,\ 0<\alpha<6.$
4. $P(h)=h^3-5h^2+7h-3,\ 0<h<2.$
5. $f(x)=\ln(x^2-2x-1),\ -3\leqslant x\leqslant -1.$
6. $g(x)=\sqrt{x^2-4x+2},\ 4\leqslant x\leqslant 6.$

12. Доказать, что если сумма двух положительных чисел задана, то их произведение принимает наибольшее значение, когда эти числа равны.

13. Пусть имеется некоторое количество воды, объем которой при температуре $t=0^\circ$ равен 1. Согласно экспериментальным данным объем $v(t)$ этого количества воды изменяется при увеличении температуры t по закону

$$v(t)=1-0{,}61045\cdot 10^{-4}t+0{,}77183\cdot 10^{-5}t^2-0{,}373\cdot 10^{-7}t^3.$$

Определить, при какой температуре объем воды будет наименьшим. Что можно сказать о плотности воды при такой температуре.

14. Согласно закону Ома для замкнутой цепи, сила тока пропорциональна электродвижущей силе E источника и обратно пропорциональна сумме внешнего R и внутреннего r сопротивлений цепи, т. е.

$$I=\frac{E}{R+r}.$$

Следовательно, меняя внешнее сопротивление R, можно менять силу тока I. Показать, что мощность тока, полученного от источника, будет наибольшей, если внешнее сопротивление R будет равно внутреннему сопротивлению r.

15. Доказать, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в заданную окружность, наибольшую площадь имеет правильный треугольник.

16. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник, одна сторона которого лежит на основании треугольника, а две вершины — на его боковых сторонах. Найти наибольшую площадь вписанного прямоугольника.

17. Две точки движутся по координатным осям согласно законам $x(t)=2t-9$ и $y(t)=-3t+7$ $(t\geqslant 0)$. В какой момент времени расстояние между точками будет наименьшим? Изобразить положение точек в момент времени $t=0$ и в момент их наибольшего сближения.

18. Пусть $F(x)=f(g(x))$, где функция $f(x)$ является возрастающей (убывающей), функция $g(x)$ принимает наибольшее значение в точке x_0, принадлежащей области определения функции $F(x)$. Показать, что $F(x)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение в той же самой точке x_0. Что можно сказать о значении функции $F(x)$ в точке x_0, если функция $g(x)$ имеет в этой точке наименьшее значение?

19. Воспользоваться результатами предыдущего упражнения при отыскании наибольшего и наименьшего значений функций на указанных интервалах:

1. $f(x)=\ln(-x^2+10x+1),\qquad 0\leqslant x\leqslant 6.$
2. $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4},\qquad -2\leqslant x\leqslant 1.$
3. $S(t)=\sqrt{t^2+4t+7},\qquad -3\leqslant t\leqslant 0.$
4. $V(h)=3\cdot(h^2-2h+2)^{-1},\qquad 0\leqslant h\leqslant 6.$
5. $P(\alpha)=2^{5-\alpha^2},\qquad -2\leqslant\alpha\leqslant 1.$
6. $H(l)=\log_{0,7}(l^2+6l+11),\qquad -4\leqslant l\leqslant -1.$

20. Точка движется по прямой по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^3-t^2+3t-6$, где x — координата точки на прямой, t — время. Показать, что ускорение точки изменяется линейно.

21. Последовательным дифференцированием вывести формулы Лейбница:

1. $(u\cdot v)''=u''v+2u'v'+uv''.$
2. $(u\cdot v)'''=u'''\cdot v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$
3. $(u\cdot v)^{(4)}=u^{(4)}v+4u'''v'+6u''v''+4u'v'''+uv^{(4)}.$
4. $(u\cdot v)^{(5)}=u^{(5)}\cdot v+5u^{(4)}\cdot v+10u'''\cdot v''+10u''\cdot v'''+$
$+5u'\cdot v^{(4)}+u\cdot v^{(5)}.$

22. По формулам Лейбница найти производные 2-го и 3-го порядка от данных функций:

1. $f(x)=e^x x^3$. 2. $f(x)=e^x/x$.
3. $g(x)=x^3\ln(-x)$. 4. $g(x)=x^2\ln x$.
5. $f(x)=(x-3)^4(x+5)^3$. 6. $f(x)=\ln x^{x^2+4}$.

23. Для данной функции найти наивысший порядок производной, не равной тождественно нулю:

1. $y=3x^4-7x^3+6$. 2. $y=(1-x-x^2)^3$.
3. $y=(2x-1)^2(1-3x)^3$. 4. $y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

24. Найти производные от функции $y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$ до 5-го порядка включительно. Вычислить значение этих производных при $x=0$.

25. Получить формулы сокращенного умножения для квадрата и куба суммы двух чисел, пользуясь формулой бинома Ньютона.

26. Вычислить биномиальные коэффициенты для пятой степени бинома, т. е. вычислить C_5^k для всех k от 0 до 5. Написать формулу возведения суммы двух слагаемых в пятую степень.

27. Доказать тождество $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$.

28. Проследить, как используется доказанное в предыдущей задаче тождество при составлении таблицы биномиальных коэффициентов — *треугольника Паскаля*. Довести самостоятельно таблицу до показателя степени, равного 10.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6											
7											
8											

29. Воспользовавшись треугольником Паскаля, выполнить возведение в степень:

1. $(1+x)^8$. 2. $(1+x)^{10}$. 3. $(1-x)^9$.

4. $(1-x)^7$. 5. $\left(\frac{1}{2}+2x\right)^6$. 6. $\left(\frac{1}{2}x-2\right)^5$.

7. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$. 8. $(a+b)^{10}$. 9. $(a-b)^{10}$.

30. Используя формулу бинома Ньютона для $(1+x)^n$, показать, что

1. $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^k+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$.

2. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

Убедитесь в справедливости этих утверждений на частных примерах по треугольнику Паскаля.

31. Сравнить числа $(1{,}02)^5$ и $(1{,}03)^4$.

32. Установить связь между формой графика функции (выпуклость вверх, выпуклость вниз) и характером монотонности производной от функции, построив касательные к графику функции в нескольких точках и проследив изменение угла наклона касательной с ростом аргумента x (рис. 24 и 25).

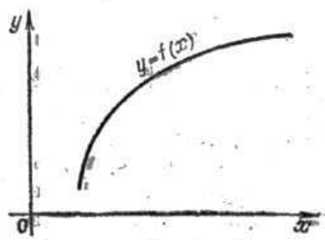

Рис. 24

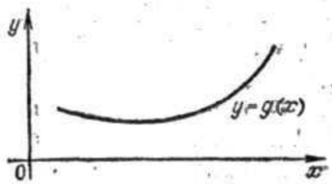

Рис. 25

33. Нарисовать график функции $f(x)=x^3$. По графику $f(x)$ объяснить свойства производной этой функции. Проверить себя, выполнив точные исследования производной функции $f(x)=x^3$.

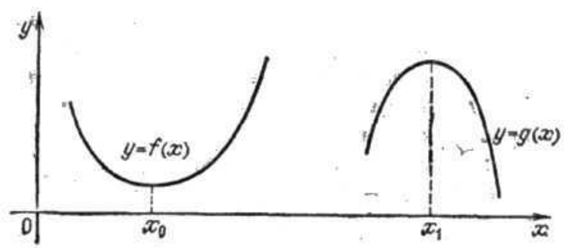

Рис. 26

34. На рис. 26 изображены части графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, которые являются дважды дифференцируемыми. Здесь x_0 — абсцисса самой нижней точки графика $f(x)$, x_1 — абсцисса самой верхней точки графика $g(x)$.

Сделайте похожие рисунки на листе бумаги. Выполнив необходимые построения, проследите за изменением угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ вблизи точки x_0. Убедитесь в том, что $f'(x)$ возрастает вблизи точки x_0, меняя свой знак с «—» на «+» в точке x_0, причем $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$. Аналогично убедитесь в том, что функция $g'(x)$ убывает вблизи точки x_1, меняя свой знак с «+» на «—» в точке x_1, причем $g'(x_1)=0$ и $g''(x_1)<0$.

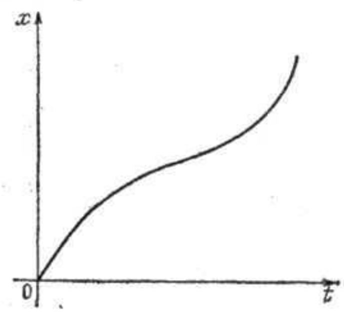

Рис. 27

35. Сначала, используя график функции $y(x)=x^4-2x^2$ (§ 3, рис. 9), попытайтесь найти промежутки монотонности производной от $y(x)$, определить «на глаз» точки перегиба. Затем проверьте себя, решив эту задачу точно.

36. На рис. 27 приведен график движения точки по прямой, $x(t)$ — координата точки на прямой в момент времени t. Какой из участков графика соответствует движению с положительным ускорением и какой — с отрицательным? Отметьте момент времени, в который ускорение равнялось нулю.

37. Построить график функции $y=y(x)$; определить точки перегиба и направление выпуклости:

1. $y=xe^x$. 2. $y=(x+4)\sqrt[3]{x}$. 3. $y=x^3-4x^2-3x+6$.

4. $y=-x^3+6x^2-9x$. 5. $y=(x^2-1)^3$. 6. $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

38. Дать обоснованные ответы на вопросы. Если возможно, проиллюстрировать ответы графически:

1. Может ли функция, заданная на интервале, график которой на всем интервале выпуклый вверх или выпуклый вниз:

а) не иметь экстремумов?

б) иметь только один экстремум (какой?)?

в) иметь больше одного экстремума?

г) пересекать какую-нибудь прямую более 2-х раз?

д) иметь с какой-либо из своих касательных более одной общей точки?

2. Может ли функция, не имеющая экстремумов, менять направление выпуклости?

3. Как расположена кривая относительно своей касательной вблизи точки касания, если последняя одновременно является точкой перегиба?

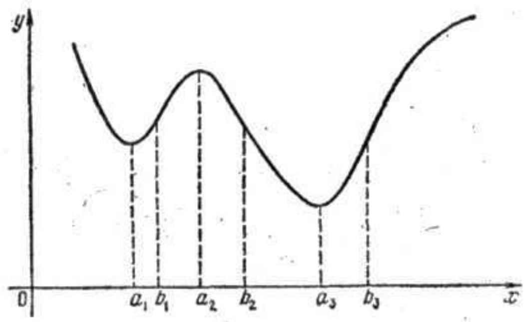

Рис. 28

39. По графику функции (рис. 28), где a_1, a_2, a_3 — точки экстремумов, b_1, b_2, b_3 — точки перегиба, начертить примерный вид графика ее первой и второй производных.

40. Доказать, что близость функции $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{6}x^3+x^2-x$ к ее касательной в точке с абсциссой $x_0=1$ при $x\to 1$ имеет порядок 3.

41. Доказать, что близость функции $y=\sqrt{x}$ к ее касательной в точке с абсциссой $x_0=4$ при $x\to 4$ имеет порядок 2.

42. Для функции $y=x^3$ подобрать квадратный трехчлен так, чтобы он имел третий порядок близости в окрестности точки $x=1/2$.

43. Доказать, что порядок малости функции $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$ в окрестности точки $x=0$ равен 3.

44. Доказать, что если многочлен делится на выражение $(x-\alpha)^n$, то вблизи $x=\alpha$ порядок малости многочлена равен n или больше.

45. Доказать утверждение, обратное сформулированному в предыдущей задаче.

46. На основе утверждения из задачи 44 и обратного ему найти делитель вида $(x-\alpha)^n$ для многочлена

$$P(x)=0{,}1x^5-0{,}25x^4-2x^3-3{,}5x^2-2{,}5x-0{,}65.$$

Разложить многочлен $P(x)$ на множители.

47. Найти многочлен $P(x)$ третьей степени такой, чтобы он имел близость порядка 4 к функции $y=\ln x$ в окрестности точки $x=1$.

48. Разложить многочлен

$$P(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+2$$

по степеням двучлена $(x-2)$. Вычислить $P(2{,}02)$ с точностью до 10^{-4}.

49. Написать уравнение касательной к графику многочлена

$$P(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+2$$

в точке с абсциссой $x_0=2$.

Как можно получить это уравнение из разложения $P(x)$ по степеням $(x-2)$? Какой порядок имеет близость касательной к графику $P(x)$ вблизи $x=2$?

50. Написать разложение функции $f(x)=\sqrt{1+x}$ по формуле Маклорена до слагаемого, содержащего x^3. Вычислить $\sqrt{1{,}02}$ с точностью до 10^{-4}.

51. Округленное значение числа π с семью знаками после запятой равно 3,1415926. Написать округленное значение числа π с двумя, тремя, четырьмя и пятью знаками после запятой. Оценить в каждом случае абсолютную погрешность округления.

52. Масса составной части лекарства (в граммах), измеренная на аптечных весах, равна $m=15\pm 0{,}2$. Масса автомобиля (в килограммах), измеренная на автомобильных весах, равна $M=43200\pm 10$. Сравнить качество измерений по оценке относительной погрешности.

53. Воспользовавшись теоремой о неизменности относительной погрешности при умножении на точное число, найти относительную погрешность приближенных значений следующих величин:

$$a=458;\quad b=45{,}8;\quad c=4{,}58;\quad d=0{,}458,$$

считая, что все приведенные цифры в записи приближенных значений верны, а следующие цифры неизвестны. Выразить погрешность в процентах.

54. Имеется 5 измерений одной и той же величины с увеличивающимся количеством верных значащих цифр:

$$3;\quad 3{,}1;\quad 3{,}14;\quad 3{,}141;\quad 3{,}1415.$$

Проследить, как меняется относительная погрешность с увеличением количества верных значащих цифр.

55. Пусть $x=3{,}14\pm0{,}002$. С помощью микрокалькулятора получили $\sqrt{3{,}14}=1{,}7720045$. Оценить абсолютную погрешность полученного значения квадратного корня. Сколько верных цифр после запятой содержится в полученном ответе?

56. Решить задачу 55 при условии, что $x=2{,}7\pm0{,}02$ и $\sqrt{2{,}7}=1{,}6431676$.

57. Вычислить с помощью микрокалькулятора значение функции при заданном приближенном значении аргумента; оценить абсолютную и относительную погрешности, пользуясь теоремой 1 из § 12:

1. $f(x)=\ln x,\qquad x=5{,}2\pm0{,}05.$
2. $f(x)=e^x,\qquad x=2\pm0{,}2.$
3. $f(x)=\dfrac{x}{x+7},\qquad x=-3{,}4\pm0{,}05.$
4. $f(x)=3x^2+4x,\quad x=-7{,}32\pm0{,}005.$

58. Записать данные приближенные значения величин в форме, использующей мантиссу и порядок числа, сохранив только верные цифры:

1. $x=27{,}5\pm0{,}05.$ 2. $x=48\pm0{,}5.$
3. $x=0{,}0412\pm0{,}00002.$ 4. $x=0{,}57\pm0{,}004.$
5. $x=401200\pm50.$ 6. $x=12084000\pm100.$
7. $x=42{,}0\pm0{,}2.$ 8. $x=27{,}0\pm0{,}01.$

59. Определить абсолютную и относительную ошибки приближенных значений, в записи которых только верные цифры:

1. $x=3{,}4.$ 2. $x=0{,}872.$
3. $x=5{,}65\cdot10^{-3}.$ 4. $x=2{,}5\cdot10^{-5}.$
5. $x=7{,}546\cdot10^{6}.$ 6. $x=8{,}025\cdot10^{8}.$
7. $x=2{,}60\cdot10^{-2}.$ 8. $x=4{,}0\cdot10^{3}.$

60. Измерение длин двух отрезков дало следующие результаты:

$$l_1=14{,}3\pm0{,}05\ (\text{см}),\quad l_2=14\pm0{,}5\ (\text{см}).$$

Определить приближенное значение суммы длин этих отрезков. Можно ли определить, какой из отрезков имеет бо́льшую длину?

61. Найти сумму приближенно заданных чисел. Оценить абсолютную погрешность:

1. $S=x+y+z$, где $x=34{,}1\pm0{,}02$; $y=7{,}13\pm0{,}005$; $z=11{,}5\pm0{,}05$.

2. $M=a+b-c-d$, где $a=3{,}427\pm0{,}0003$; $b=4{,}845\pm0{,}0005$; $c=1{,}453\pm0{,}0005$; $d=2{,}602\pm0{,}0002$.

62. Найти значение выражения; оценить относительную погрешность результата:

1. $P=\dfrac{xy}{z}$, где $x=14{,}2\pm0{,}05$; $y=0{,}25\pm0{,}005$; $z=0{,}000862\pm0{,}0000005$.

2. $Q=\dfrac{a}{b\cdot c}$, где $a=2{,}73\cdot10^5\pm5\cdot10^2$; $b=4{,}7\cdot10^2\pm5$; $c=6{,}07\cdot10^4\pm5\cdot10^1$.

63. С помощью микрокалькулятора вычислить значение выражения при заданных приближенных значениях входящих в него букв. Оценить абсолютную погрешность вычислений, рассматривая исходное выражение как функцию от нескольких переменных:

1. $y=\dfrac{\alpha^2-3\beta}{2\alpha+\beta}$, $\alpha=4{,}15\pm0{,}01$; $\beta=1{,}25\pm0{,}01$.

2. $y=\dfrac{u-v-v^2}{u^2+4v}$, $u=4{,}2\pm0{,}1$; $v=6{,}7\pm0{,}1$.

Дополнительные упражнения

64. В каких точках параболы $y=x^2$ касательные к ней пересекают ось Ox под углом 150°, 135°, 120°, 60°, 30°?

65. В каких точках кубической параболы $y=\dfrac{1}{8}x^3$ касательные пересекают ось абсцисс под углом 135°, 45°?

66. В каких точках кривой $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2+\dfrac{1}{3}$ касательные параллельны оси Ox? Пересекают ось Ox под углом 135°?

67. Определить углы наклона касательных к кривой

$$f(x)=x^3-6x^2+11x-6$$

в точках, где $f(x)=0$.

68. Показать, что касательные к кривой $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ в точках

$$(0;\ 0),\quad \left(\sqrt{3};\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right),\quad \left(-\sqrt{3};\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

параллельны и пересекают ось Ox под углом 45°. Нарисовать график функции $f(x)$.

69. Определить угловой коэффициент касательной к кривой

$$x^3-7x^2y-5y^3+4x^2-10xy+8x-5y+18=0$$

в точке (2; 1).

70. Написать уравнение касательной к графику функции

$$y=\frac{1}{2}x^2-3x+7,$$

составляющей угол 45° с осью абсцисс.

71. Определить точки пересечения кривых

$$x^2+y^2-8=0, \quad y^2-2x=0.$$

Построить касательные к кривым в точках их пересечения. Определить с помощью транспортира *углы пересечения* данных кривых как углы между касательными.

72. Доказать, что $x^a \ln x$, $a>0$, ограничена на интервале $(0;\ 1]$. Доказать, что $x^a \ln x \to 0$ при $x \to 0$.

73. Построить графики парабол $y^2-4x=0$ и $x^2-4y=0$. Написать уравнения касательных к этим кривым в точках их пересечения и изобразить их на рисунке. С помощью таблиц определить углы пересечения кривых (касательных).

74. Построить графики гипербол $x^2-y^2=8$ и $xy=4$. Написать уравнения касательных к этим кривым в точках их пересечения и изобразить их на рисунке. С помощью таблиц определить углы пересечения кривых (касательных).

75. Показать, что функция $f(x)$ имеет только один корень; найти его:

1. $f(x)=(x-2)e^x+x+2$.
2. $f(x)=\dfrac{x^2}{2e}-\ln x$. 3. $f(x)=e^x-\sqrt{2e}\,\sqrt{x}$.

76. Доказать, что функция $f(x)$ является монотонной на указанном интервале:

1. $f(x)=2\ln\dfrac{x}{a+x}+\dfrac{a}{x}+\dfrac{a}{a+x}$, $x\in(0;\ \infty)$, $a>0$.
2. $f(x)=\left(\dfrac{x}{a+x}\right)^{a+2x}$, $x\in[0;\ \infty)$, $a>0$.

77. Построить график функции $f(x)=e^x-5x+1$. Решить графически уравнение $f(x)=0$.

78. Экспериментально установлено, что при свободном погружении тела в воду сила сопротивления воды растет пропорционально скорости погружения, при этом путь, пройденный телом, определяется по формуле

$$S(t)=\frac{g}{k}t+\frac{g}{k^2}(e^{-kt}-1), \quad t\geqslant 0,$$

где k — положительная постоянная, g — ускорение свободного падения. Показать, что скорость $v(t)$ погружения тела и его ускорение $a(t)$ удовлетворяют соотношению $a(t)=g-kv(t)$. Верно ли, что начиная с некоторого времени тело будет погружаться с почти постоянной скоростью?

79. Точка движется по прямой линии так, что в любой момент времени t величины $x(t)$ и $v(t)$ связаны соотношением $v^2(t)=2gx(t)$, где g — постоянная. Показать, что точка движется с постоянным ускорением.

80. Точка движется по прямой линии, причем координата ее положения $x(t)$ в момент времени t определяется по формуле $x(t)=4t^3-21t^2+36t+1$, t измеряется в секундах $(t\geqslant 0)$. Определить скорость $v(t)$ и ускорение $a(t)$ движущейся точки. Определить, когда точка движется влево по оси абсцисс, а когда вправо. Определить моменты остановки точки. Определить отрезки времени, когда точка двигалась с положительным ускорением и когда с отрицательным.

81. Отметить на координатной плоскости точки, координаты которых приведены в таблице. Масштаб: единица равна стороне одной клетки тетрадного листа.

x	0	1	2	4	6	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	22
y	0	2	3,5	6	8	10	9	7	5,5	5	6	8	10	11	12	13

Соединить построенные точки плавной кривой. Пусть эта линия будет графиком функции $y=f(x)$. Отметить на рисунке точки, в которых производная $f'(x)$ обращается в 0. Отметить промежутки, где $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$. Проследив за тем, как меняется наклон касательной к графику функции при движении точки касания по графику, построить примерный вид графика производной $f'(x)$ в той же системе координат.

82. Построить кривые, симметричные графику функции $y=f(x)$ из предыдущего упражнения, относительно:

1) оси ординат, 2) оси абсцисс, 3) начала координат.

Для каждой из полученных кривых выполнить задания из задачи 81.

83. Даны координаты вершин ломаной $ABCD$, которая является графиком производной $f'(x)$ некоторой функции $f(x)$, и значение самой функции $f(x)$ в одной из точек. Восстановить примерный вид графика исходной функции $f(x)$.

1. $A(-8;\ -4)$, $B(-2;\ 6)$, $C(6;\ -2)$, $D(12;\ -2)$, $f(-8)=10$.
2. $A(-10;\ 3)$, $B(-3;\ 3)$, $C(4;\ 4)$, $D(8;\ 1)$, $f(-10)=-6$.

84. Подобрать несколько функций, имеющих заданную производную:

1. $f'(x)=2x$. 2. $f'(x)=5$. 3. $f'(x)=1/x$.
4. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. 5. $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$. 6. $f'(x)=e^x$.

Глава 4

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Обобщение понятия угла

Тригонометрические функции играют большую роль в математике и ее применениях. В связи с этим оказалось необходимым развить довольно мощную технику преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции, и технику решения соответствующих уравнений. Эта техника опирается на алгебру, имеет много общего с алгеброй и носит название *тригонометрия*. Применение элементов тригонометрии к решению геометрических задач рассматривается в курсе геометрии. Но более важные применения тригонометрия имеет в математическом анализе. Дело в том, что при надлежащем обобщении понятия угла тригонометрические функции оказываются периодическими, т. е. их значения повторяются через некоторый интервал. Они оказываются в некотором смысле простейшими периодическими функциями. Периодические функции возникают при описании и изучении колебательных процессов, таких, например, как колебания нагруженной пружины, колебания маятника, колебания напряжения в сети переменного тока. Более того, как известно из физики, такие явления как звук, свет, радиоволны связаны с колебательными процессами, и для их изучения аппарат тригонометрических функций совершенно необходим.

Прежде всего нам нужно уяснить, что тригонометрические функции действительно можно рассматривать как периодические. Для этого необходимо обобщить понятие угла.

Пусть полупрямая OM с началом в точке O может вращаться вокруг своего начала. Тогда величину поворота естественно измерять величиной угла, который обра-

зуют положения прямой в начале и в конце поворота. Так, на рис. 1 полупрямая OM' получена из полупрямой OM посредством поворота на угол 45° в направлении против часовой стрелки.

Однако для того чтобы иметь возможность всегда измерять величину поворота величиной угла, необходимо расширить понятие угла, считая допустимыми и осмысленными углы, превосходящие развернутый угол 180°. Так, поворот на 3/4 полного оборота естественно считать поворотом на 270°, полный оборот считать поворотом на угол 360°, полутораполным оборотам соотнести угол 540° и т. д. Разумеется, если после поворота на угол φ_1 сделать поворот на угол φ_2, то угол, измеряющий величину поворота, равен $\varphi_1 + \varphi_2$. На рис. 2 и 3 изображены соответственно повороты на углы 315° и 1000°.

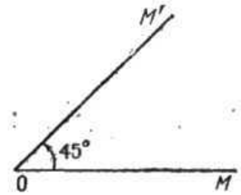

Рис. 1

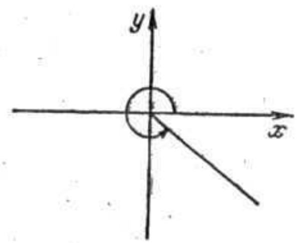

Рис. 2

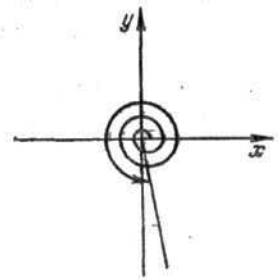

Рис. 3

Принято считать направление против часовой стрелки положительным. Поворот по часовой стрелке считается поворотом в отрицательном направлении и соответствующий угол поворота считается отрицательным. На рис. 4 изображен угол поворота на $-45°$. На рис. 5 изображен поворот сначала на 60° и затем на $-45°$. В результате получился поворот на 15°.

Выбор положительного направления отсчета углов имеет, конечно, условный характер. Например, было бы неудобно считать, что стрелки часов двигаются в отрицательном направлении, что пришлось бы делать, если бы мы безусловно считали положительным направление против часовой стрелки. Если на плоскости выбрана система координат, то положительным направлением отсчета углов считается направление от положительной полуоси абсцисс к положительной полуоси ординат. При

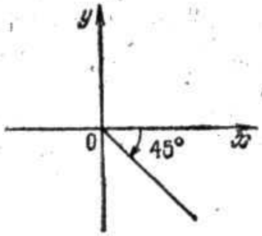

Рис. 4

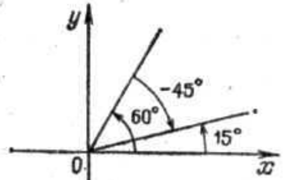

Рис. 5

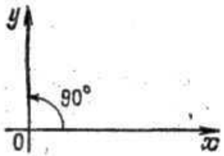

Рис. 6

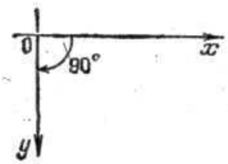

Рис. 7

обычном расположении осей координат (рис. 6) положительным направлением отсчета углов является направление против часовой стрелки, а при таком расположении осей координат, как на рис. 7, положительным направлением является направление по часовой стрелке.

§ 2. Измерение углов в радианах

Для целей математического анализа градусное измерение углов оказывается мало удобным. Для этих целей естественным и удобным является радианное измерение углов, или измерение в радианах. *Радианной мерой* центрального угла называется отношение длины стягивающей его дуги к радиусу окружности. Из теории подобия следует, что все фигуры, ограниченные данным углом и дугой окружности с центром в вершине этого угла, подобны между собой, так что радианная мера угла не зависит от радиуса окружности.

Ясно, что прямой угол с вершиной в центре окружности высекает из нее одну четверть с длиной $\frac{1}{4}\cdot 2\pi r=\frac{\pi}{2}r$.

Следовательно, радианная мера прямого угла равна $\frac{\pi}{2}r:r=\frac{\pi}{2}$. Сопоставление радианной меры и градусной для прямого угла дает $\pi/2=90°$, откуда следует, что угол 1° имеет радианную меру $\pi/180$. Радианная мера равна 1 для угла $\frac{180°}{\pi}\approx 57{,}29578°\approx 57°17'46''$. Этот угол носит название *радиан*. Центральный угол, равный 1, стягивается дугой, длина которой равна радиусу. Радианная мера угла рассматривается как отвлеченное число, что естественно, так как она есть отношение длин двух линий. Мы говорим, что прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{а не } \frac{\pi}{2}\right.$ радиана). Соответственно один радиан записывается просто как число 1.

Радианная мера естественно распространяется на углы, бóльшие 180° и на отрицательные углы. Так, один полный оборот в положительном направлении есть поворот на угол 2π. Угол $-900°$ имеет радианную меру -5π и т. д.

Дадим теперь более подробное истолкование радианной меры для произвольных углов, рассматриваемых как углы поворота. Рассмотрим на плоскости с выбранной системой координат окружность с центром в начале координат и с радиусом 1. За начальное положение полупрямой, которая может вращаться, примем положительное направление оси абсцисс (рис. 8). Положение полупрямой, исходящей из начала, вполне определяется положением точки M пересечения полупрямой с окружностью. При

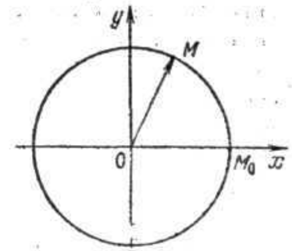

Рис. 8

вращении полупрямой точка M перемещается по окружности. Пусть полупрямая повернулась в положительном направлении на некоторый угол φ. Тогда точка M пройдет, начиная с положения M_0, некоторый путь по окружности. Из определения радианной меры угла (понимаемого в обобщенном смысле) и того, что радиус равен 1, ясно, что эта мера равна длине пути, пройденного точкой M. Так, для $\varphi=5\frac{1}{2}\pi$ точка M сделает пять с половиной полуоборотов, т. е. действительно пройдет путь, длина которого равна $5\frac{1}{2}\pi$. При вращении же в отрицательном направлении длина пути, пройденного точкой M, равна модулю меры угла.

В дальнейшем мы будем пользоваться преимущественно радианной мерой углов.

§ 3. Функции синус и косинус

Напомним, что *синусом* острого угла φ называется отношение длины катета, противолежащего углу φ, к длине гипотенузы прямоугольного треугольника с острым углом φ. Отношение длин прилежащего к углу φ катета и гипотенузы называется *косинусом* угла φ. Синус и косинус угла φ обозначаются соответственно $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Из теории подобия следует, что значения $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ не зависят от выбора прямоугольного треугольника с острым углом φ, ибо все такие треугольники подобны.

Возьмем окружность с центром в начале координат и радиусом 1. Отложим острый угол φ в положительном направлении от положительного направления оси абсцисс. Через M_0 и M обозначим соответственно точки пересечения с окружностью положительного направления оси абсцисс и второй стороны построенного угла (рис. 9). Опустим из точки M перпендикуляр MN к оси абсцисс. Тогда треугольник OMN будет прямоугольным с острым углом φ при вершине O и с гипотенузой OM, длина которой равна 1. Поэтому косинус и синус угла φ равны соответственно длинам отрезков ON и MN, т. е. абсциссе и ординате точки M. Это свойство косинуса и синуса, установленное для острых углов, естественно принять за определение значений этих функций для любых значений углов в обобщенном смысле. По определению косинусом и синусом угла φ называются соответственно абсцисса и ордината точки M пересечения с окружностью полупрямой, полученной поворотом на угол φ, исходя из положительного направления оси абсцисс.

Так, например, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\pi=-1$, $\sin\pi=0$, $\sin 0=0$, $\cos 0=1$, $\cos\frac{7}{2}\pi=0$, $\sin\frac{7}{2}\pi=-1$.

Под значением аргумента функции мы всегда подразумеваем отвлеченные числа. Вполне естественно и тригонометрические функции рассматривать как функции числового аргумента. Таким образом, синусом (косинусом) числа x будем называть синус (косинус) угла в x радиан.

Вычислим значения синуса и косинуса некоторых углов (чисел).

Рассмотрим равносторонний треугольник ABC (рис. 10). Все три угла его равны $60^\circ=\pi/3$. Построим биссектрису AK угла A. Она будет медианой и высотой, так что $BK=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB$ и угол AKB прямой. Следовательно, $\sin 30^\circ=\frac{BK}{AB}=\frac{1}{2}$. Далее,

$$\cos 30^\circ=\frac{AK}{AB}=\frac{\sqrt{AB^2-BK^2}}{AB}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 60^\circ=\frac{AK}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ=\frac{BK}{AB}=\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим теперь равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C (рис. 11).

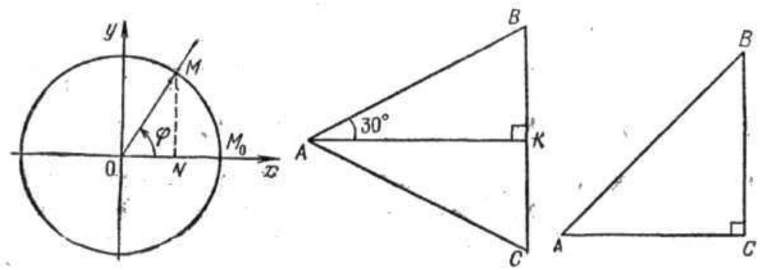

Рис. 9 Рис. 10 Рис. 11

Тогда углы при вершинах A и B равны между собой и равны $45^\circ=\pi/4$. Длина гипотенузы AB по теореме Пифагора равна $\sqrt{AC^2+BC^2}=AC\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{AC}{AB}=\frac{AC}{AC\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

◀ Подсчитаем значение синуса и косинуса для углов $18^\circ=\frac{\pi}{10}$ и $72^\circ=\frac{2}{5}\pi$. С этой целью рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом 36° при вершине A, противолежащей основанию треугольника (рис. 12), пусть боковые стороны AB и AC равны 1. Углы при вершинах B и C, прилежащих к основанию, равны 72°. Проведем биссектрису угла B. Она разобьет треугольник ABC на два треугольника MAB и BCM. Первый из них равнобедренный, так как в нем углы при вершинах A и B

равны 36°. Угол при вершине M равен $180°-2\times 36°=$ $=108°$. Угол при вершине M в $\triangle BCM$ равен $180°-$ $-108°=72°$. Угол при вершине C в этом треугольнике тоже равен 72°, поэтому $\triangle BCM$ равнобедренный. Таким образом, $BC=BM=AM$ и $MC=AC-AM$. Обозначим через x длину BC. Тогда $MC=1-x$. Треугольники ABC

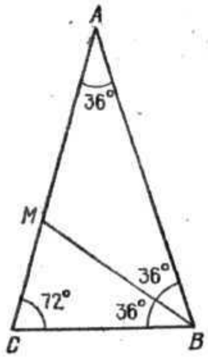

Рис. 12

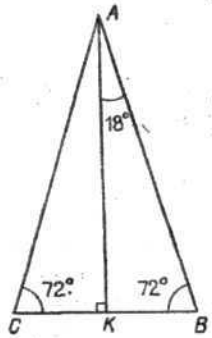

Рис. 13

и BCM подобны, ибо у них равны соответствующие углы. Приравнивая отношения соответствующих сторон, получаем

$$\frac{x}{1}=\frac{1-x}{x},$$

откуда $x^2+x-1=0$; $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Знак минус здесь не подходит по смыслу, поэтому $BC=x=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Проведем высоту AK (рис. 13). Вычислим ее длину $AK=$ $=\sqrt{AB^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

$$\sin 18°=\frac{BK}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\cos 18°=\frac{AK}{AB}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\sin 72°=\frac{AK}{AB}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\cos 72°=\frac{BK}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}. \blacktriangleright$$

§ 4. Простейшие свойства функций синус и косинус

Теорема 1. *Значения функций синус и косинус не превосходят по модулю 1, достигая граничных значений 1 и —1.*

Доказательство. Действительно, координаты точки M на единичной окружности не превосходят 1 по модулю. Абсцисса равна 1 на правом конце горизонтального диаметра и равна -1 на левом конце, так что $1=$ $=\cos 0$ и $-1=\cos\pi$. Соответственно ордината равна 1 на верхнем конце вертикального диаметра и равна -1 на нижнем конце, так что $1=\sin\frac{\pi}{2}$, $-1=\sin\frac{3\pi}{2}$.

Теорема 2. $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$.

Доказательство. Действительно, сумма квадратов координат точки на окружности с центром в начале координат равна квадрату радиуса.

Теорема 3. $\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\varphi$; $\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\varphi$.

Доказательство. Введем в рассмотрение новую систему координат, приняв за положительное направление новой оси абсцисс отрицательное направление исходной оси ординат и за положительное направление новой оси ординат исходное положительное направление оси абсцисс (рис. 14).

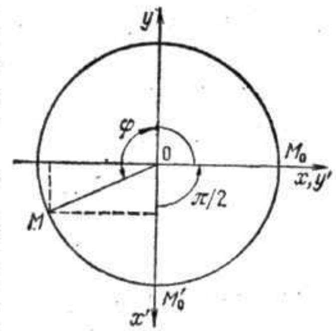

Рис. 14

Пусть радиус OM получен из OM_0 поворотом на угол φ. Тогда OM получается из OM_0' поворотом на угол $\varphi+\frac{\pi}{2}$, так что $\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$ и $\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$ суть абсцисса x' и ордината y' точки M по отношению к новым осям координат. Очевидно, что $x'=-y$ и $y'=x$. Это значит, что $\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\varphi$ и $\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=$ $=\cos\varphi$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. $\sin(\varphi+2\pi)=\sin\varphi$; $\cos(\varphi+2\pi)=\cos\varphi$.

Доказательство. Пусть M — положение точки на единичной окружности, соответствующее углу φ. Прибавление угла 2π соответствует полному обороту точки M вокруг начала, и она вернется в исходное положение.

Поэтому и ее координаты вернутся к исходным значениям, т. е. $\sin(\varphi+2\pi)=\sin\varphi$; $\cos(\varphi+2\pi)=\cos\varphi$.

Функция f называется *периодической*, если существует такое число $T\neq 0$, называемое *периодом*, что $f(t+T)=f(t)$. Ясно, что если $f(t+T)=f(t)$, то

$$f(t+2T)=f(t+T)=f(t);$$
$$f(t+3T)=f(t+2T+T)=f(t+2T)=f(t)$$

и т. д., т. е. при любом целом k имеет место равенство $f(t+kT)=f(t)$, причем k может быть как положительным, так и отрицательным. Как мы доказали, если T есть период, то kT при любом целом k тоже является периодом. Можно доказать, что среди периодов непрерывной (и это существенно) периодической функции существует наименьший положительный. Он носит название *наименьшего периода функции*. Все периоды являются целыми кратными наименьшего периода.

Нетрудно доказать, что *число* 2π *является наименьшим периодом функций косинус и синус*. Докажем это утверждение методом от противного.

Предположим, что у функции косинус существует положительный период $T'<2\pi$. Тогда $\cos(\varphi+T')=\cos\varphi$ для любого угла φ, в частности для $\varphi=0$ имеем $\cos(0+T')=\cos 0=1$. Но это означает, что при повороте на угол T', который меньше 2π, точка M_0 с абсциссой 1 переходит в точку, абсцисса которой тоже равна 1, что невозможно. Следовательно, положительного периода, меньшего 2π, функция косинус не имеет. Аналогично это утверждение доказывается для синуса. Предположим, что функция синус имеет положительный период $T'<2\pi$. Тогда $\sin(\varphi+T')=\sin\varphi$ для любого угла φ, в частности для $\varphi=\frac{\pi}{2}$ имеем $\sin\left(\frac{\pi}{2}+T'\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$. Это означает, что при повороте на угол T', меньший 2π, точка с ординатой 1 переходит в точку, ордината которой тоже равна 1, что невозможно. Следовательно, 2π — наименьший положительный период синуса.

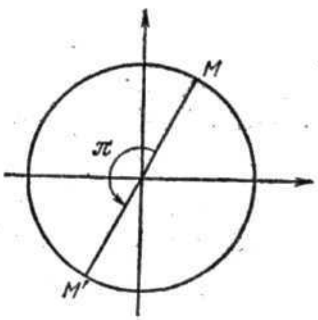

Рис. 15

Теорема 5. $\cos(\varphi+\pi)=-\cos\varphi$; $\sin(\varphi+\pi)=-\sin\varphi$.

Доказательство. Пусть M — точка на единичной окружности, соответствующая углу φ. Тогда точка M', соответствующая углу $\varphi+\pi$, находится на противоположном точке M конце диаметра (рис. 15). Координаты точки M' отличаются знаками от координат точки M. Это и значит, что

$$\cos(\varphi+\pi)=-\cos\varphi,\quad \sin(\varphi+\pi)=-\sin\varphi.$$

Заметим, что теоремы 4 и 5 легко получаются из теоремы 3 посредством формального ее применения два и четыре раза. Действительно, согласно теореме 3,

$$\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\varphi,\quad \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\varphi.$$

Следовательно,

$$\cos(\varphi+\pi)=\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\varphi,$$

$$\sin(\varphi+\pi)=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\varphi.$$

Далее,

$$\cos\left(\varphi+\frac{3}{2}\pi\right)=\cos\left(\varphi+\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(\varphi+\pi)=\sin\varphi;$$

$$\sin\left(\varphi+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\left(\varphi+\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\varphi+\pi)=-\cos\varphi.$$

Наконец,

$$\cos(\varphi+2\pi)=\cos\left(\varphi+\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\varphi+\frac{3}{2}\pi\right)=\cos\varphi,$$

$$\sin(\varphi+2\pi)=\sin\left(\varphi+\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\varphi+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\varphi.$$

Теорема 6. $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$; $\sin(-\varphi)=-\sin\varphi$.

Доказательство. Повороты на углы φ и $-\varphi$ равны по величине, но имеют противоположные направления. Поэтому точки M и M', полученные из M_0 поворотами на углы φ и $-\varphi$, расположены на единичной окружности симметрично относительно оси абсцисс (рис. 16). Следовательно, их абсциссы равны, а ординаты отличаются только знаком. Это и значит, что $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$ и $\sin(-\varphi)=-\sin\varphi$.

Функция $f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля, называется *четной функцией*, если $f(x)=f(-x)$ при всех допустимых значениях x, и называется *нечетной функцией*, если $f(-x)=-f(x)$. Теорема 6 означает, что косинус является четной функцией, а синус — нечетной.

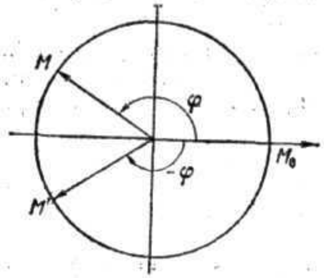

Рис. 16.

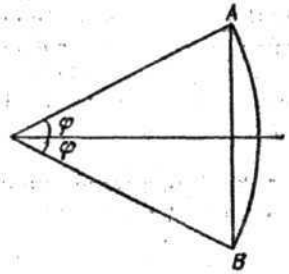

Рис. 17

Теорема 7. $\cos(\pi-\varphi)=-\cos\varphi$; $\sin(\pi-\varphi)=\sin\varphi$.
Доказательство.

$$\cos(\pi-\varphi)=\cos(-\varphi+\pi)=-\cos(-\varphi)=-\cos\varphi,$$

$$\sin(\pi-\varphi)=\sin(-\varphi+\pi)=-\sin(-\varphi)=\sin\varphi.$$

Теорема 8. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi$.

Доказательство.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\left(-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(-\varphi)=\sin\varphi,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\left(-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(-\varphi)=\cos\varphi.$$

Заметим, что для острого угла φ теорема 8 непосредственно следует из определения функций синус и косинус при помощи прямоугольного треугольника с острым углом φ. Действительно, второй острый угол в этом треугольнике равен $\frac{\pi}{2}-\varphi$. Катет, противоположный углу φ, является прилежащим к углу $\frac{\pi}{2}-\varphi$, и катет, прилежащий к углу φ, противолежит углу $\frac{\pi}{2}-\varphi$. Отсюда и из определения функций косинус и синус следует, что

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi \text{ и } \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi.$$

Теорема 9. *Хорда, стягивающая центральный угол в окружности радиуса 1, равна удвоенному синусу половинного угла.*

Доказательство. Рассмотрим в окружности радиуса 1 центральный угол величины 2φ, $0<2\varphi<\pi$. Разделим его пополам. Ясно, что $0<\varphi<\pi/2$, т. е. φ есть острый угол. Стягивающая угол 2φ хорда AB разделится на два равных отрезка (рис. 17), каждый из которых равен, очевидно, $\sin\varphi$. Итак, $AB=2\sin\varphi$, что и требовалось доказать.

§ 5. Приведение значений функций синус и косинус к значениям на интервале $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4$

Значения косинуса и синуса числа φ зависят только от положения на единичной окружности точки M, соответствующей углу φ. Оси координат разбивают окружность на четыре четверти. В зависимости от того, в какой четверти находится точка, соответствующая углу, говорят об углах первой четверти, второй четверти и т. д.

Углы первой четверти с точностью до целого кратного 2π можно представлять значениями $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, углы второй четверти — значениями $\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi$, третьей — значениями $\pi\leqslant\varphi\leqslant3\pi/2$ и четвертой — значениями $3\pi/2\leqslant\varphi\leqslant2\pi$. Иногда углы четвертой и третьей четвертей удобно характеризовать значениями, на 2π меньшими: для четвертой четверти — значениями $0\geqslant\varphi\geqslant-\pi/2$ и для третьей четверти — значениями $-\pi/2\geqslant\varphi\geqslant-\pi$. Пограничные значения причисляются обеим смежным четвертям.

Теорема 5 позволяет привести вычисления значений косинуса и синуса углов третьей четверти к углам первой четверти. Теорема 7 приводит тригонометрические функции на второй четверти к первой, и, наконец, теорема 6 приводит функции на четвертой четверти к первой. Далее, если $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$ и, кроме того, $\pi/4\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, то $0\leqslant\frac{\pi}{2}-\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$. Поэтому теорема 8 позволяет привести вычисление косинуса и синуса углов первой четверти к вычислению этих функций на интервале $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4$.

§ 6. Функции тангенс и котангенс

Тангенсом острого угла φ называется отношение длин катета, противолежащего углу φ, и катета, прилежащего к этому углу, в прямоугольном треугольнике с острым углом φ. Тангенс обозначается $\operatorname{tg}\varphi$. Обратное отношение длин катета, прилежащего к φ, и катета, противолежащего, называется *котангенсом* φ и обозначается $\operatorname{ctg}\varphi$. Ясно, что для острого угла φ имеют место равенства $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ и $\operatorname{ctg}\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$. Для любого значения φ принимается по определению $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ и $\operatorname{ctg}\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Вычислим тангенсы и котангенсы некоторых углов:

$$\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}45^\circ=\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}=1,\qquad \operatorname{tg}60^\circ=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}30^\circ=\frac{1}{\operatorname{tg}30^\circ}=\sqrt{3},\qquad \operatorname{ctg}45^\circ=1,\qquad \operatorname{ctg}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$◄\ \operatorname{tg}18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}};$$

$$\operatorname{ctg}18^\circ=\sqrt{5+2\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{tg}72^\circ=\sqrt{5+2\sqrt{5}},\quad \operatorname{ctg}72^\circ=\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}.\ ►$$

Тангенс и котангенс имеют простое геометрическое изображение, связанное с окружностью радиуса 1 с центром в начале координат. Именно, пусть $T'T$ — касательная к единичной окружности в точке M_0 пересечения окружности с положительным направлением оси абсцисс (рис. 18). Тогда ордината точки пересечения этой касательной с лучом OM_1, соответствующим углу φ, или с продолжением этого луча (если φ относится ко второй или третьей четверти) равна тангенсу этого угла. Для острого угла φ_1 это непосредственно следует из определения тангенса и подобия треугольников OKM_1 и OM_0N_1. Для угла $\varphi_2=-\varphi_1$ четвертой четверти ордината точки N_2 и $\sin\varphi$ только знаками отличаются от ординаты N_1 и $\sin\varphi_1$, а $\cos\varphi_2=\cos\varphi_1$. Поэтому ордината точки N_2 равна $-\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{-\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}=\frac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}=\operatorname{tg}\varphi_2$. Далее,

$$\operatorname{tg}(\varphi+\pi)=\frac{\sin(\varphi+\pi)}{\cos(\varphi+\pi)}=\frac{-\sin\varphi}{-\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi.$$

Из этого равенства следует, что тангенсы углов третьей и второй четвертей равны тангенсам углов первой и четвертой четвертей, соответствующих продолжениям лучей, определяющих эти углы.

Аналогичное изображение для котангенса получается, если ввести в рассмотрение касательную $C'C$ в точке пересечения окружности с положительным направлением оси ординат (рис. 19). Котангенс угла φ равен абсциссе точки K пересечения этой касательной с лучом, соответствующим углу φ, или с его продолжением.

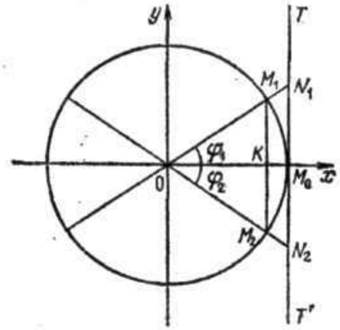

Рис. 18

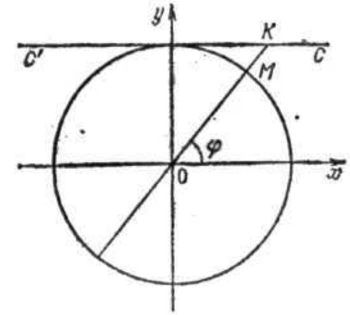

Рис. 19

Функции тангенс и котангенс обладают некоторыми почти очевидными свойствами.

1. При $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$, где k — целое число, функция тангенс не определена, так как $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=0$. При φ, изменяющемся от $-\pi/2$ до $\pi/2$, значения тангенса, возрастая, проходят всю числовую ось, т. е. промежуток $(-\infty,\infty)$. Это непосредственно следует из геометрического изображения тангенса (рис. 18).

2. При $\varphi=\pi k$, где k — целое число, функция котангенс не определена (так как $\sin(k\pi)=0$ при целых k). При φ, меняющемся от 0 до π, $\operatorname{ctg}\varphi$, убывая, проходит по всей числовой оси от $+\infty$ до $-\infty$.

3. $\operatorname{tg}(\varphi+\pi)=\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}(\varphi+\pi)=\operatorname{ctg}\varphi$.

Действительно,

$$\operatorname{tg}(\varphi+\pi)=\frac{\sin(\varphi+\pi)}{\cos(\varphi+\pi)}=\frac{-\sin\varphi}{-\cos\varphi}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi$$

и аналогично для котангенса. Это свойство мы уже отмечали при обсуждении геометрического описания тангенса. Оно означает, что тангенс и котангенс периодичны с периодом π. Легко видеть, что π есть наименьший период для $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$.

4. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\operatorname{ctg}\varphi, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\operatorname{tg}\varphi.$

Действительно,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=\operatorname{ctg}\varphi;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi.$$

5. $\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\varphi, \quad \operatorname{ctg}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}\varphi.$

Действительно,

$$\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\varphi}{-\sin\varphi}=-\operatorname{ctg}\varphi,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi}=-\operatorname{tg}\varphi.$$

6. Тангенс и котангенс — нечетные функции. Действительно,

$$\operatorname{tg}(-\varphi)=\frac{\sin(-\varphi)}{\cos(-\varphi)}=\frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi}=-\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\operatorname{ctg}(-\varphi)=\frac{\cos(-\varphi)}{\sin(-\varphi)}=\frac{\cos\varphi}{-\sin\varphi}=-\operatorname{ctg}\varphi.$$

7. $1+\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi}, \quad 1+\operatorname{ctg}^2\varphi=\frac{1}{\sin^2\varphi}.$

Для установления этих формул достаточно разделить обе части равенства $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ на $\cos^2\varphi$ и $\sin^2\varphi$.

8. Угловой коэффициент наклонной прямой $y=kx+b$ равен тангенсу угла между положительным направлением оси абсцисс и этой прямой с учетом направления отсчета этого угла.

Пусть угловой коэффициент k положителен (рис. 20). В этом случае прямая идет снизу вверх при движении слева направо и угол φ, образованный прямой с Ox, положительный острый при естественном его отсчете. Пусть

$M(x;\ y)$ — некоторая точка на прямой. Из рассмотрения $\triangle BKM$ находим $\operatorname{tg}\varphi=\frac{MK}{BK}=\frac{y-b}{x}=k.$

Если же угловой коэффициент отрицателен, то прямая идет сверху вниз при движении слева направо. Угол φ, образованный прямой с Ox, положительный тупой или, при отсчете в отрицательном направлении, отрицательный острый. Они отличаются на π, и их тангенсы одинаковы.

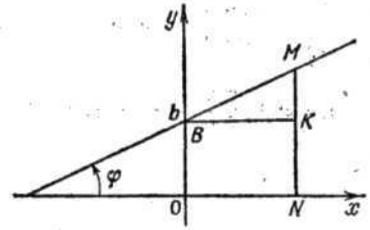

Рис. 20

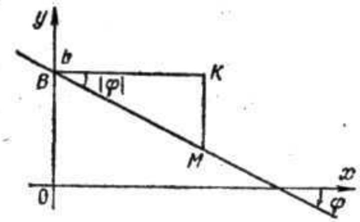

Рис. 21

Остановимся на отрицательном значении φ (рис. 21). Пусть $M(x;\ y)$ — точка на прямой. Из рассмотрения $\triangle BKM$ находим

$$\operatorname{tg}|\varphi|=\frac{KM}{BK}=\frac{b-y}{x}=-k,$$

откуда $k=-\operatorname{tg}|\varphi|=\operatorname{tg}(-|\varphi|)=\operatorname{tg}\varphi.$

Свойство 8 доказано полностью. Оно является очень важным свойством тангенса. Для дифференциального исчисления оно означает, что производная функции в каждой точке равна тангенсу угла, который образует ось Ox с касательной к графику функции в этой точке.

§ 7. Выражения тригонометрических функций друг через друга

Из равенства $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ следует, что $\cos\varphi=\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$. Выбор знака зависит от четверти, которой принадлежит φ: для первой и четвертой четвертей нужно брать знак «+», для второй и третьей — знак «—». Далее,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$$

с тем же выбором знаков.

Из того же равенства находим, что $\sin\varphi = \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$ надо брать со знаком «+» для φ из первой и второй четвертей и со знаком «—»—для φ из третьей и четвертой четвертей. Далее,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$$

с тем же правилом знаков.

Из равенства $1+\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$ следует, что $\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ и $\cos\varphi = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$. Здесь знак «+» для первой и четвертой четвертей, знак «—»—для второй и третьей. Далее, из $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$ находим

$$\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi\cos\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$$

с тем же правилом знаков.

§ 8. Один важный предел

Теорема. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Доказательство 1. Пусть $2x_n > 0$—маленький угол, являющийся одним из значений переменной, стремящейся к нулю. Рассмотрим $2x_n$ как центральный угол в окружности радиуса 1 (рис. 22). Тогда стягивающая этот угол дуга равна по длине $2x_n$ и стягивающая ее хорда равна $2\sin x_n$. По основному принципу дифференциального исчисления эти длины отличаются на бесконечно малую α_n, стремящуюся к нулю существенно быстрее, чем $2x_n$. Таким образом, $2\sin x_n = 2x_n - \alpha_n$ и $\frac{\sin x_n}{x_n} = 1 - \frac{\alpha_n}{2x_n}$. Второе слагаемое $\frac{\alpha_n}{2x_n}$ стремится к нулю, так что $\lim\frac{\sin x_n}{x_n} = 1$. Если $x_n < 0$, $x_n = -y_n$, то $\frac{\sin x_n}{x_n} = \frac{\sin y_n}{y_n}$. При $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$ и в этом случае

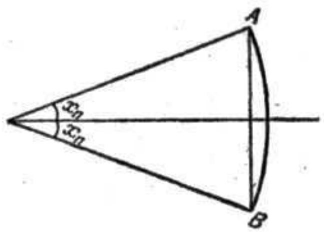

Рис. 22

$$\lim\frac{\sin x_n}{x_n} = \lim\frac{\sin y_n}{y_n} = 1.$$

Тот же предел будет, если x_n принимает положительные и отрицательные значения. Таким образом, $\lim\frac{\sin x_n}{x_n} = 1$ для любой последовательности $x_n \to 0$, так что существует и равен 1 предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$, что и требовалось доказать. ◄

◄ Доказательство 2. Однако проведенное наглядное доказательство не в полной мере удовлетворяет принятому в современной математике уровню строгости. Проведем более строгое доказательство. С этой целью вспомним, что длина окружности равна пределу периметра вписанного в окружность правильного n-угольника при $n\to\infty$. Положим, что радиус окружности равен 1, так что ее длина равна 2π. Центральный угол, опирающийся на сторону правильного n-угольника, равен, очевидно, $2\pi/n$. Сторона правильного n-угольника, т. е. хорда, стягивающая этот угол, имеет длину $2\sin\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n} = 2\sin\frac{\pi}{n}$. Периметр n-угольника поэтому равен $2n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$. Итак, имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\cdot\sin\frac{\pi}{n} = 2\pi$, откуда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = 1.$$

Таким образом, при $x_n = \pi/n$ имеем $\lim\limits_{x_n\to 0}\frac{\sin x_n}{x_n} = 1$.

Пусть теперь $x_n > 0$, $x_n \to 0$. Тогда при каждом n число π/x_n заключено между соседними целыми числами $m \leqslant \frac{\pi}{x_n} < m+1$, причем, очевидно, $m\to\infty$ при $x_n\to 0$. Тогда $\frac{\pi}{m+1} < x_n < \frac{\pi}{m}$, так что

$$\frac{\sin x_n}{x_n} < \frac{\sin(\pi/m)}{\pi/(m+1)}, \quad \frac{\sin x_n}{x_n} > \frac{\sin(\pi/(m+1))}{\pi/m}.$$

Величины $\frac{\sin(\pi/m)}{\pi/(m+1)} = \frac{m+1}{m}\cdot\frac{\sin(\pi/m)}{\pi/m}$ и $\frac{\sin(\pi/(m+1))}{\pi/m} = \frac{m}{m+1}\cdot\frac{\sin(\pi/(m+1))}{\pi/(m+1)}$ обе стремятся к 1 при $m\to\infty$, и, следовательно, $\frac{\sin x_n}{x_n}\to 1$. Далее, $\frac{\sin x_n}{x_n} = \frac{\sin(-x_n)}{-x_n}$ и, следовательно, $\frac{\sin x_n}{x_n} = \frac{\sin|x_n|}{|x_n|}$. Поэтому $\frac{\sin x_n}{x_n}\to 1$, если $x_n\to 0$, и может принимать и отрицательные значения. Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, ибо это предельное соотношение верно для любой последовательности x_n, стремящейся к нулю. ▶

§ 9. Графики функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$

Функция $y=\sin x$ непрерывна при всех значениях x, ибо при непрерывном перемещении точки по окружности ее ордината изменяется непрерывно, т. е. при достаточно малом изменении x ордината $\sin x$ точки на окружности изменяется сколь угодно мало. При x, меняющемся от 0

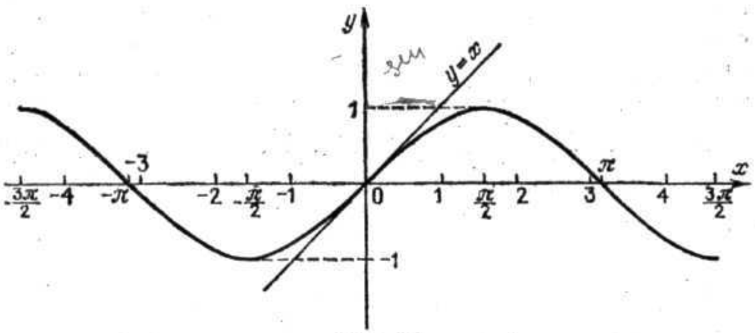

Рис. 23

до $\pi/2$, т. е. при передвижении точки по единичной окружности в положительном направлении в пределах первой четверти, $\sin x$, очевидно, возрастает, а при $x=\pi/2$ достигает максимума, равного 1. Далее, при x, меняющемся от $\pi/2$ до π, функция $\sin x$ убывает от 1 до 0. При $\pi\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$ функция $\sin x$ продолжает убывать от 0 до -1. На промежутке $\left[\frac{3}{2}\pi,\ \pi\right]$ функция $\sin x$ возрастает от -1 до 0. Затем значения функции периодически с периодом 2π повторяются как при движении вправо, так и при движении влево. Таким образом, график функции $y=\sin x$ имеет вид волнообразной линии (рис. 23), которая носит название *синусоиды*.

При $0<x\leqslant\pi/2$ имеет место неравенство $\sin x<x$, ибо $2\sin x$ есть хорда, стягивающая дугу длины $2x$ на единичной окружности. Конечно, неравенство сохраняется и при $x>\pi/2$, ибо $\pi/2>1\geqslant\sin x$. Поэтому правая половина синусоиды расположена ниже прямой $y=x$, но

вблизи начала координат синусоида тесно примыкает к этой прямой, ибо $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ при $x\to 0$. Точнее, прямая $y=x$ есть касательная к синусоиде в точке $x=0$ и ее угловой коэффициент 1 равен значению производной функции $\sin x$ в точке $x=0$. В этом легко убедиться посредством следующего простого вычисления:

$$(\sin x)'_{x=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(0+\Delta x)-\sin 0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Ввиду важности тригонометрических функций для приложений составлены таблицы значений этих функций и, кроме того, значения тригонометрических функций даются микрокалькуляторами. При помощи таблиц или пользуясь калькулятором нетрудно построить достаточно много точек на графике $y=\sin x$. Если это сделать, то станет видно, что синусоида изгибается очень плавно. Мы в состоянии нанести довольно много точек на графике, даже не обращаясь к таблицам или к калькулятору, используя лишь значения $\sin x$ в точках

$$x=0,\quad x=\pi/10\approx 0{,}314,\quad x=\pi/6\approx 0{,}523,$$
$$x=\pi/4\approx 0{,}785;\quad x=\pi/3\approx 1{,}047,$$
$$x=2\pi/5\approx 1{,}257,\quad x=\pi/2\approx 1{,}571,$$

для которых были вычислены значения $\sin x$ в § 3. Дальнейшие точки легко строятся при помощи правил приведения к интервалу $[0,\ \pi/2]$.

Графиком функции $y=\cos x$ является та же синусоида, но только смещенная влево на $\pi/2$. Действительно, $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, так что значение косинуса в точке x равно значению синуса в точке $x+\frac{\pi}{2}$, смещенной вправо на $\pi/2$ от точки x. График функции $y=\cos x$ представлен на рис. 24.

В приложениях часто приходится иметь дело с функциями вида $y=b\sin ax$ при $a>0$. Ясно, что графиком такой функции является несколько видоизмененная синусоида. Умножение функции на число b приводит к растяжению или сжатию ее графика вдоль оси ординат и к симметричному отражению от оси абсцисс при $b<0$. Именно, если $|b|>1$, то происходит растяжение графика в $|b|$ раз, если же $|b|<1$, то происходит сжатие в $1/|b|$ раз.

Умножение аргумента функции на число $a>0$ приводит к сжатию или растяжению ее графика, но уже вдоль оси абсцисс. Именно, если $a>1$, то график функции сжимается в a раз, если же $0<a<1$, то график растягивается в $1/a$ раз. Таким образом, так как график функции $y=\sin x$ колеблется от -1 до 1 с периодом 2π, то

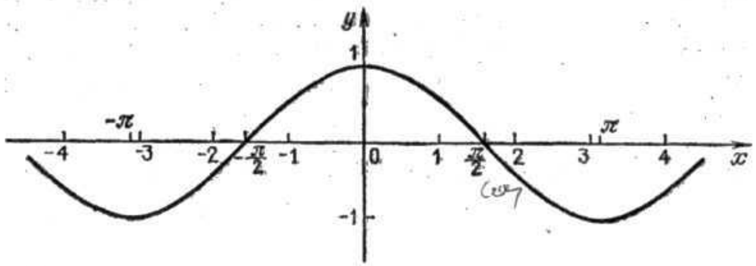

Рис. 24

график функции $y=b\sin ax$ колеблется в пределах от $-|b|$ до $|b|$ с периодом $T=2\pi/a$. На рис. 25 $b=-3$, $a=2$.

Если для такой функции задан наименьший период T, то $a=2\pi/T$. Поэтому часто можно записать функцию такого вида формулой $y=b\sin\frac{2\pi}{T}x$. Число $|b|$ называется *амплитудой* функции $y=b\sin ax$.

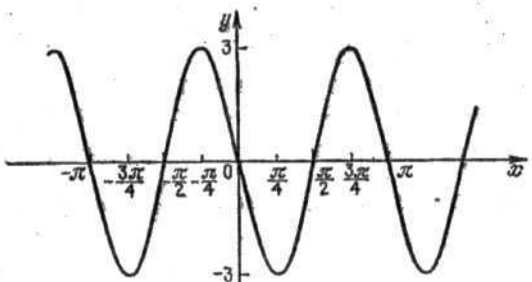

Рис. 25

Часто встречающаяся функция $y=b\sin(ax+c)=b\sin a(x-x_0)$ при $x_0=-c/a$ имеет своим графиком синусоиду таких же размеров, как график $y=b\sin ax$, но сдвинутую на x_0 вдоль оси абсцисс. Заметим, что график $y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ получается как частный случай при $a=b=1$, $x_0=-\pi/2$.

§ 10. Графики функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$

Из геометрического изображения тангенса (рис. 18) непосредственно следует, как мы уже видели выше, что $y=\operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ при изменении x на интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$. При $x=-\pi/2$ и $x=\pi/2$ тангенс не имеет смысла. Иногда пишут, что $\operatorname{tg}\pi/2=\infty$, но это лишь условная запись того, что $\operatorname{tg} x\to\infty$ при $x\to\pi/2$ $\left(\text{подробнее, } \operatorname{tg} x\to+\infty \text{ при } x\to\pi/2 \text{ и } x<\pi/2 \text{ и } \operatorname{tg} x\to-\infty \text{ при } x\to\frac{\pi}{2} \text{ и } x>\frac{\pi}{2}\right)$. График функции $y=\operatorname{tg} x$ на $(-\pi/2,\ \pi/2)$ имеет вид восходящей линии. Число π

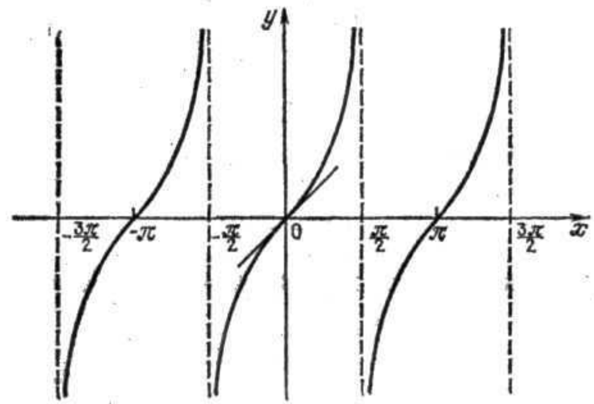

Рис. 26

является периодом для $\operatorname{tg} x$, поэтому линия, изображающая $\operatorname{tg} x$ на $(-\pi/2,\ \pi/2)$, далее периодически с периодом π повторяется бесконечно много раз (рис. 26). График функции $y=\operatorname{tg} x$ иногда называют *тангенсоидой*. Она пересекает ось абсцисс под углом 45°. Действительно, при x, близких к 0, $\cos x$ приближается к 1 и $\sin x\approx x$, так что

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}\approx\frac{x}{1}=x.$$

(Точнее, следует доказать, что значение производной от $\operatorname{tg} x$ при $x=0$ равно 1. Но это почти очевидно:

$$(\operatorname{tg} x)'_{x=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(0+\Delta x)-\operatorname{tg} 0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\Delta x}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos\Delta x}=1.)$$

Функция $y=\operatorname{ctg} x$, как мы видели выше (рис. 19), при изменении x на интервале $(0, \pi)$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$, проходя через 0 при $x=\pi/2$. График $y=\operatorname{ctg} x$ затем периодически повторяется с периодом π (рис. 27). График

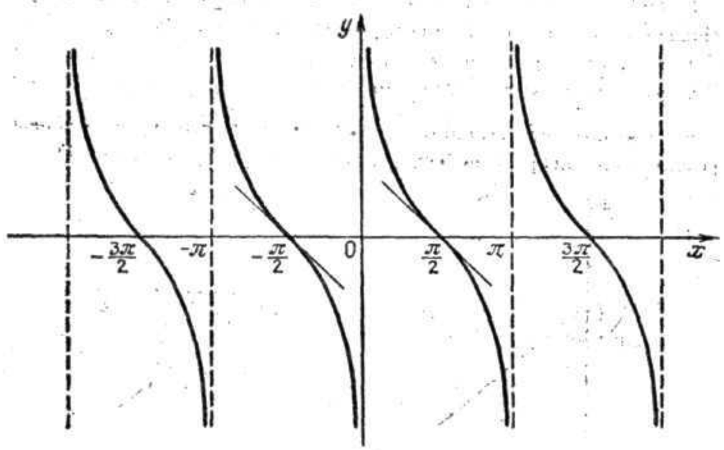

Рис. 27

пересекает ось абсцисс под углом $-45°$. Действительно,

$$(\operatorname{ctg} x)'_{x=\frac{\pi}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\operatorname{tg}\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 4

1. Изобразить на координатной плоскости результат поворота положительной полуоси абсцисс на заданный угол $\alpha=p°$ (если $|p|>360$, то предварительно выделите полные обороты, разделив $|p|$ на 360 с остатком):

1. 800°; —230°; 2000°; —1400°; 3960°.
2. 750°; —200°; 2380°; —1740°; 4680°.

Образец решения задачи. Пусть $\alpha=1400°$, тогда

$$1400° = 360°\cdot 3 + 320°.$$

Для построения угол 320° удобно представить в виде $320° = 180° + 140°$ или $320° = 360° - 40°$. Ответ к задаче приведен на рис. 28.

2. Будем говорить, что *результаты поворотов на углы* α и β *совпадают*, если положительная полуось абсцисс при поворотах на углы α и β занимает одно и то же положение. Из набора различных значений для углов поворота найти те, результаты поворотов на которые совпадают:

1. 450°; 1040°; 1400°; —990°; —2220°; —1720°.
2. 630°; 2430°; 1140°; —2610°; —660°; —2820°.

3. Найти угол $\alpha=p°$, $|p|\leqslant 180$, результат поворота на который совпадает с результатом поворота на заданный угол β:

1. $\beta=400°$; —840°; 1000°; 1410°.
2. $\beta=-510°$; 800°; —920°; 2015°.

4. Показать, что результат поворота на любой угол совпадает с результатом поворота на некоторый угол $\alpha=p°$, где $|p|\leqslant 180$.

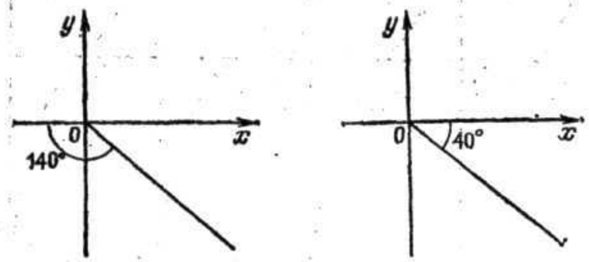

Рис. 28

5. Ясно, что если углы поворотов, измеренные в градусной мере, отличаются на величину, кратную 360, то результаты поворотов совпадают. Доказать обратное утверждение.

6. Записать множество всех углов, при повороте на которые положительная полуось абсцисс занимает положение, отмеченное на рис. 29 лучом OM.

Образец решения задачи. Один из углов, при повороте на который ось Ox займет отмеченное положение, равен 120° (рис. 30). Остальные углы отличаются от 120° на величину, кратную 360, такое множество углов можно записать в виде $120°+360°\cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ — множество целых чисел) *).

7. Изобразить на координатной плоскости результат поворота положительной полуоси абсцисс на углы, принадлежащие данному множеству, назовите несколько конкретных углов каждого множества:

1. $-30°+360°\cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$.
2. $150°+360°\cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. $180°+360°\cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$.
4. $-180°+360°\cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$.
5. $-120°+360°\cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$.
6. $45°+360°\cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Образец решения задачи. Любые два угла из множества $-150°+ +360°\cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$, отличаются на величину, кратную 360°, следовательно, результаты поворотов на эти углы совпадают. Поэтому доста-

*) Знак $\in$ заменяет слово «принадлежит».

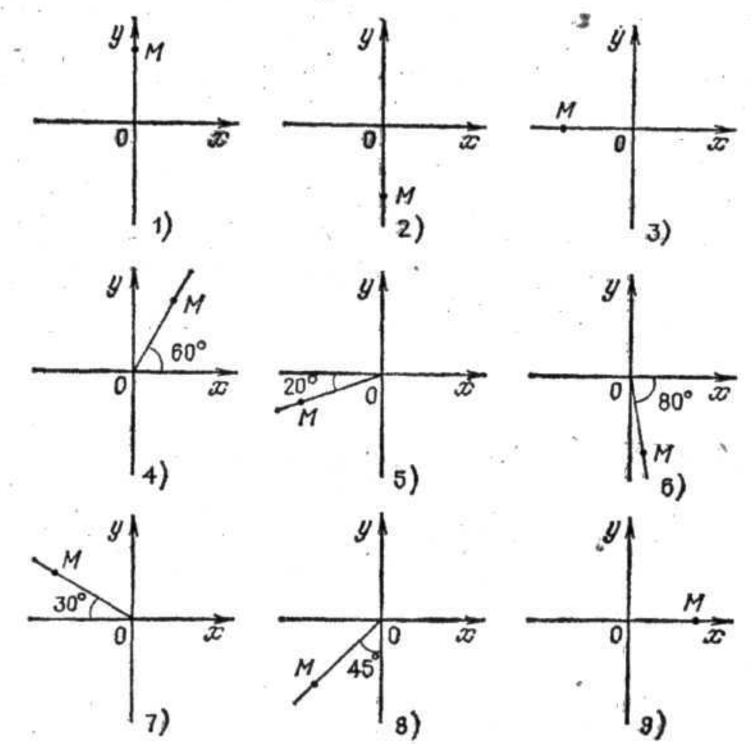

Рис. 29

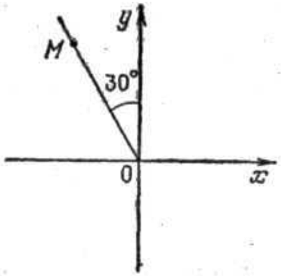

Рис. 30

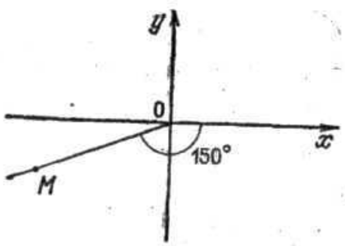

Рис. 31

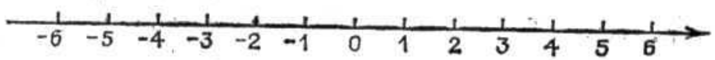

Рис. 32

точно выделить из множества любой конкретный угол и изобразить соответствующий ему поворот. Возьмем $n=0$, получим угол $-150°$. Ответ см. на рис. 31. Чтобы назвать несколько конкретных углов из данного множества, надо параметру n дать какие-либо целочисленные значения. Например, при $n=1$ $\alpha=210°$; при $n=-2$ $\alpha=-870°$ и т. д.

8. Перевести заданную градусную меру угла в радианную:

1. 30°; $-45°$; 150°; 18°; $-1000°$.
2. 60°; $-135°$; 270°; 27°; $-2000°$.

9. Перевести радианную меру угла в градусную:

1. $\frac{\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{7}{6}\pi$; $-\pi$; $\frac{2}{3}\pi$; -26π.
2. $\frac{\pi}{18}$; $-\frac{3}{2}\pi$; π; $-\frac{4}{9}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$; -18π.

10. Каждому числу x поставим в соответствие точку единичной окружности, через которую проходит положительная полуось абсцисс в результате поворота на угол в x радиан. Таким образом, числу $\frac{\pi}{2}$, например, будет соответствовать точка с координатами (0; 1).

Отметить на единичной окружности точки, соответствующие заданным числам (углам поворота):

1. $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{4}\pi$; $-\pi$; $\frac{\pi}{3}$; $-14\frac{5}{6}\pi$.
2. $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{2}{3}\pi$; π; $-8\frac{1}{3}\pi$.

11. Отметить на единичной окружности примерное положение («на глаз») точек, соответствующих числам:

1. 1; 2; 3; 4; 5; 6. 2. -1; -2; -3; -4; -5; -6.

12. На координатную прямую с отмеченными целыми числами (см. рис. 32) нанести примерное положение чисел:

$$\pm\frac{\pi}{6};\ \pm\frac{\pi}{4};\ \pm\frac{\pi}{3};\ \pm\frac{\pi}{2};\ \pm\pi;\ \pm\frac{3}{2}\pi;\ \pm 2\pi.$$

13. Отметить на единичной окружности точки, соответствующие каждому из чисел заданного множества:

1. $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 2. $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
3. $-\frac{2}{3}\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 4. $\frac{5}{6}\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
5. $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 6. $-\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Образец решения задачи. Задано множество чисел $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Любые два числа из этого множества чисел отличаются на величину, кратную 2π. Значит, результаты поворотов на эти углы совпадают, т. е. всем числам соответствует одна и та же точка. Достаточно найти точку, соответствующую одному из чисел; при $k=0$ имеем $-\pi/3$.

14. Для каждой из отмеченных на единичной окружности точек записать множество чисел, которым она соответствует (рис. 33).

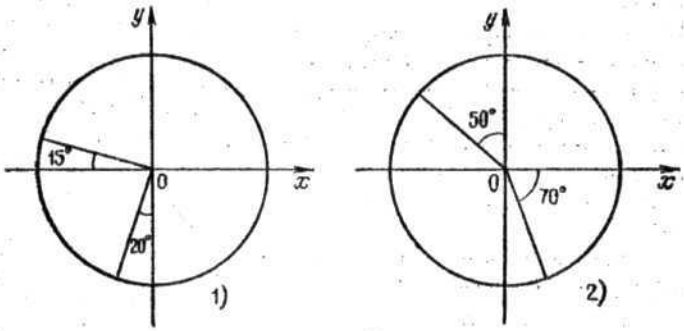

Рис. 33

15. Отметить на единичной окружности точки, соответствующие числам заданного множества:

1. $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. 2. $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
3. $-\pi+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. 4. $\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
5. $-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}n,\ n\in\mathbb{Z}$. 6. $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}n,\ n\in\mathbb{Z}$.

16. На единичной окружности имеется N штук равномерно расположенных точек. Одной из них соответствует число α. Записать множество всех чисел, каждому из которых соответствует одна из точек.

17. Получить формулу, выражающую длину дуги через радиус окружности и величину соответствующего ей центрального угла, выраженную в радианах.

18. Найти угол, на который поворачивается минутная стрелка часов за 10, 15, 30, 45, 60 минут. Выразить величину угла в градусах и радианах.

19. Найти угол (понимая его в обобщенном смысле, т. е. учитывая число полных оборотов), на который повернется:

1) минутная стрелка часов за 600 мин; 1300 мин; за 1,4 часа;

2) часовая стрелка часов за 1, 30, 240 минут, за 12, 24, 2340 часов.

Выразить эти углы в градусах и радианах.

20. Составить функцию, выражающую зависимость угла поворота минутной стрелки часов как функцию времени, понимая угол в обобщенном смысле и приняв за единицу измерения времени 1 минуту. Выразить угол в градусах и в радианах.

21. Какой путь проходит минутная стрелка ручных часов за 1 час, 24 часа, за 1 год, если расстояние от кончика стрелки до оси равно 1 см?

22. На диск с радиусом, равным 1 м, намотана тонкая нерастяжимая нить, конец которой свисает с диска, как показано на рис. 34. Диск вращается вокруг собственной оси. При этом угол поворота изменяется по закону $\varphi(t)=20t-t^2$, где φ — в радианах, а t — в секундах. Считается, что намотанная и свисающая части нити бесконечно длинные. Положительное направление вращения — против часовой стрелки.

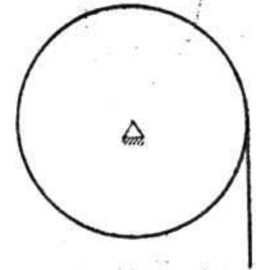

Рис. 34

Определить:

1. Длину нити, намотавшейся или сошедшей с диска, к моменту

$$t=5\text{ с},\ 15\text{ с},\ 20\text{ с},\ 30\text{ с}.$$

2. В течение какого времени нить наматывалась на диск, чему равна максимальная длина намотавшейся на диск части нити?

3. В какой момент времени от начала вращения нить вернулась в исходное положение?

4. Какой путь прошла точка на окружности диска за время

$$t=5\text{ с},\ 15\text{ с},\ 20\text{ с},\ 30\text{ с}?$$

5. Как изменятся ответы на вопросы в предыдущих пунктах, если радиус диска равен r м?

23. В системе координат xOy начертить единичную окружность. С помощью этой окружности составить таблицу синусов и косинусов следующих углов (чисел):

$$0;\ \pm\frac{\pi}{2};\ \pm\pi;\ \pm\frac{3}{2}\pi;\ \pm2\pi;\ \pm\frac{5}{2}\pi;\ \pm3\pi;\ \pm\frac{7}{2}\pi;\ \pm4\pi.$$

Запоминать таблицу не нужно, итогом работы должно быть умение устно находить синус и косинус этих углов (чисел).

24. Выполнить задание, аналогичное предыдущему, для тех же углов, но записанных в градусной мере.

25. Составить таблицу значений синусов и косинусов следующих углов (чисел): 0; $\pi/6$; $\pi/4$; $\pi/3$; $\pi/2$.

Обратить внимание на то, что значения синусов этих углов образуют интересную последовательность: $\sqrt{0}/2$; $\sqrt{1}/2$; $\sqrt{2}/2$; $\sqrt{3}/2$; $\sqrt{4}/2$. Проанализировать изменение синуса и косинуса по мере возрастания угла, сопоставить значения синуса и косинуса различных углов. Эту таблицу полезно запомнить, так как ее данные часто встречаются в школьных задачах по математике и физике.

26. Исходя из определения тригонометрических функций, свойств поворота на произвольный угол и используя таблицу из предыдущей задачи, найдите синусы и косинусы данных углов (чисел):

1. $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. 2. $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.
3. $-\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. 4. $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.
5. $2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. 6. $\frac{3}{2}\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.
7. $\frac{5}{6}\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. 8. $-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

27. Тщательно построить на миллиметровой бумаге единичную окружность, приняв за единицу 5 см. С помощью этой окружности и транспортира найти синусы и косинусы данных ниже углов с возможно большей точностью. Подумайте, как проверить свои ответы по четырехзначным таблицам значений синусов и косинусов острых углов. (При аккуратных построениях ошибка не должна превышать 0,04.)

1. $\frac{\pi}{9}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. 2. $\frac{5}{9}\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
3. $1+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. 4. $2{,}5+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
5. $-\frac{5}{8}\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. 6. $-\frac{\pi}{8}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
7. $-2{,}5+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. 8. $-1+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

28. Найти все числа, удовлетворяющие уравнению:

1. $\sin x=1$. 2. $\sin x=-1$. 3. $\cos x=-1$.
4. $\cos x=1$. 5. $\sin x=0$. 6. $\cos x=0$.
7. $\sin x=1/2$. 8. $\sin x=\sqrt{3}/2$. 9. $\cos x=1/2$.
10. $\cos x=\sqrt{3}/2$. 11. $\sin x=-\sqrt{3}/2$. 12. $\cos x=-1/2$.
13. $\cos x=-\sqrt{3}/2$. 14. $\sin x=-1/2$.
15. $\sin x=1/\sqrt{2}$. 16. $\cos x=1/\sqrt{2}$.

29. С помощью единичной окружности, построенной на миллиметровой бумаге, и транспортира приближенно решить уравнения, ответ записать в радианной мере. Уточнить ответ с помощью четырехзначных таблиц значений синусов и косинусов острых углов и таблицы перевода градусной меры в радианную.

1. $\sin x=0{,}32$. 2. $\sin x=0{,}74$. 3. $\cos x=0{,}26$.
4. $\cos x=0{,}66$. 5. $\sin x=-0{,}20$. 6. $\sin x=-0{,}82$.
7. $\cos x=-0{,}44$. 8. $\cos x=-0{,}80$.

30. Найти числа из промежутка $[0;\ 2\pi]$, удовлетворяющие уравнению:

1. $2\sin^2 x+3\sin x-2=0$. 2. $2\cos^2 x-(2-\sqrt{3})\cos x-\sqrt{3}=0$.
3. $2\cos^2 x+(4+\sqrt{2})\cos x+2\sqrt{2}=0$.
4. $2\sin^2 x-(2+\sqrt{2})\sin x+\sqrt{2}=0$.

31. Решить уравнения:

1. $4\sin x=4-\cos^2 x$. 2. $3+3\sin x=\cos^2 x$.
3. $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$. 4. $1-2\cos x=\sin^2 x-\cos^2 x$.

32. Найти решения уравнения, удовлетворяющие неравенству $0\leqslant x\leqslant\pi$:

1. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 4. $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.
5. $\sin(3x-\pi)=0$. 6. $\cos(3x-\pi)=-1$.

33. Решить уравнения:

1. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos x=-1$. 2. $\sin x-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1$.
3. $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$.
4. $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{2}$.
5. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$.
6. $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$.

34. Точка M движется по единичной окружности с центром в начале координат. Положение точки изменяется по закону $\alpha=\omega t+\alpha_0$, где t — время в секундах, α — угол в радианах между лучом OM и полупрямой Ox, понимаемый в обобщенном смысле.

1. Определить физический смысл и размерность параметров ω и α_0.

2. Каков минимальный промежуток времени, через который точка M проходит одно и то же фиксированное положение? Ответ можно получить, исходя из двух соображений:

а) последовательные значения углов поворота, при которых точка занимает одно и то же положение, отличаются на 2π;

б) минимальный путь, который должна проделать точка, чтобы вернуться в некоторое положение на окружности, равен длине окружности, т. е. 2π; линейная скорость движения по окружности равна угловой скорости, умноженной на радиус окружности.

35. Решить задачу 34 для конкретных законов движения:

1. $\alpha=2t+\frac{\pi}{4}$. 2. $\alpha=\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{3}$. 3. $\alpha=-\frac{2}{5}t$.

4. $\alpha=-\frac{4}{3}t$. 5. $\alpha=\frac{\pi}{2}t$. 6. $\alpha=2\pi t$.

36. Показать, что данная функция периодическая, найти ее наименьший положительный период:

1. $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. 2. $g(x)=\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$.

3. $f(t)=\cos\frac{2}{5}t$. 4. $\varphi(t)=\sin\frac{t}{2}$.

5. $\varphi(t)=\sin(t-1)$. 6. $h(t)=\cos(3-t)$.

37. Значение функции $y=\sin x$ при $x=\pi/3$ равно $\sqrt{3}/2$. Найти ближайшие к $\pi/3$ положительное и отрицательное значения аргумента, при которых функция $\sin x$ равна $\sqrt{3}/2$. Не противоречит ли ответ к задаче тому, что наименьший положительный период $\sin x$ равен 2π?

38. Доказать, что π является периодом функций $y=|\sin x|$ и $y=|\cos x|$.

39. Выяснить, какие из данных функций четные, какие нечетные, а какие не обладают ни одним из этих свойств:

1. $f(x)=x^2$; $g(x)=x^3$; $h(x)=(x-1)^2$.
2. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$; $g(x)=\sqrt{x^2-3}$; $h(x)=\frac{x}{\sqrt{x+7}}$.
3. $f(x)=\sin x+\cos x$; $g(x)=\sin x\cos x$; $h(x)=\cos 2x\cdot\cos x$.
4. $f(x)=\sin x+\sin 2x$; $g(x)=\cos x-\cos 2x$; $h(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

40. Показать, что любая функция вида $y=f(x)+f(-x)$ — четная, а любая функция вида $y=f(x)-f(-x)$ — нечетная.

41. Доказать, что любая функция, определенная на $(-a; a)$, есть сумма четной и нечетной функций.

42. Доказать, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

43. Пусть $f(x)$ — нечетная функция, определенная на интервале $(-a; a)$. Чему равно $f(0)$?

44. Привести данные тригонометрические функции к тригонометрическим функциям острых углов; с помощью таблиц найти их значения с точностью до 0,01:

1. $\sin 142°$; $\cos 165°$; $\sin(-170°)$; $\cos(-115°)$.
2. $\sin 222°$; $\cos 254°$; $\sin(-258°)$; $\cos(-193°)$.
3. $\sin 314°$; $\cos 351°$; $\sin(-348°)$; $\cos(-326°)$.
4. $\sin 854°$; $\cos 1196°$; $\sin(-1247°)$; $\cos(-861°)$.
5. $\sin 0{,}8\pi$; $\cos 0{,}6\pi$; $\sin(-0{,}65\pi)$; $\cos(-0{,}9\pi)$.
6. $\sin\left(1\frac{2}{7}\pi\right)$; $\cos(1{,}3\pi)$; $\sin\left(-1\frac{4}{9}\pi\right)$; $\cos\left(-1\frac{1}{5}\pi\right)$.
7. $\sin(1{,}9\pi)$; $\cos(1{,}6\pi)$; $\sin(-1{,}75\pi)$; $\cos(-1{,}85\pi)$.
8. $\sin 14{,}2\pi$; $\cos 24{,}3\pi$; $\sin(-13{,}7\pi)$; $\cos(-7{,}8\pi)$.

45. Доказать справедливость равенств:

1. $\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\cos(-\alpha)=0$.
2. $\cos(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)-\cos(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=0$.
3. $\cos^2(\pi-\alpha)+\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=2$.
4. $\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin^2(\pi-\alpha)+\cos^2(\pi+\alpha)=2$.
5. $\sin(\alpha-\pi)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=0$.
6. $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos(\alpha-\pi)-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=0$.

46. Привести тригонометрические функции к значениям на интервале $[0; \pi/4]$ ($0°\leqslant\varphi\leqslant 45°$ в соответствующих случаях):

1. $\sin\frac{\pi}{3}$; $\cos\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{2}{3}\pi$; $\cos\frac{2}{3}\pi$.
2. $\sin\frac{3}{7}\pi$; $\cos\frac{4}{9}\pi$; $\sin\frac{7}{8}\pi$; $\cos 0{,}9\pi$.
3. $\sin(-230°)$; $\cos(-200°)$; $\sin 600°$; $\cos 970°$.
4. $\sin(1000°)$; $\cos(-670°)$; $\sin(210°)$; $\cos 250°$.
5. $\sin 1$; $\cos 2$; $\sin(-2)$; $\cos(-1)$.
6. $\sin 3$; $\cos(-3)$; $\sin(-6)$; $\cos 6$.

47. Составить выражение для периметра P_n правильного n-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса. Рассмотреть последовательность P_n ($n\geqslant 3$) периметров правильных вписанных в окружность многоугольников, выписать приближенные значения (с точностью до 0,01) нескольких ее первых членов. Найти член последовательности, отличающийся от длины окружности на величину, меньшую 0,1. Найти погрешность при замене длины окружности периметром 60-угольника.

48. На листе миллиметровой бумаги (размерами не менее 15×20 см) построить первую четверть единичной окружности, выбрав за единицу масштаба 10 см. Используя геометрическое описание тангенса, составить таблицу тангенсов углов от 0° до 60° с шагом в 10°. Перевести значения углов в радианную меру. Сравнить полученные значения тангенса с табличными, оценить относительную ошибку измерений.

49. Используя чертеж к предыдущей задаче, сопоставить значения $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ при изменении x от 0 до $\pi/18$. Сравнить табличные значения $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ для углов из промежутка от 0 до $\pi/18$.

50. На листе миллиметровой бумаги (размером не менее 5×25 см) построить единичную окружность, приняв за единицу масштаба 1 см. Используя геометрическое описание тангенса, составить таблицу тангенсов углов, начиная с 60°, с шагом 3°. Сравнить полученные результаты с табличными, оценить относительную ошибку измерений. Используя таблицу, сопоставить значения функций $y=\operatorname{tg}$ и $y=1/\cos x$ вблизи точки $x=\pi/2$.

51. Дать объяснение характеру изменения $\operatorname{tg} x$ вблизи точек $x=0$ и $x=\pi/2$, исходя из определения $\operatorname{tg} x$ и характера изменения функций $\sin x$ и $\cos x$ около этих точек.

52. Используя геометрическое описание, изучить поведение функции $y=\operatorname{ctg} x$ на промежутке от 0 до π. Сопоставить значения $\operatorname{ctg} x$ и $\cos x$ вблизи точек $x=\pi/2$ и значения $\operatorname{ctg} x$ и $1/\sin x$ вблизи точек $x=0$ и $x=\pi$.

53. На листе миллиметровой бумаги построить единичную окружность и касательные к ней в точках (1; 0) и (0; 1), выбрав за единицу масштаба 5 см. Решить приближенно уравнения. Записать общее решение и отдельно решение, принадлежащее промежутку $(-\pi/2; \pi/2)$ для тангенсов и промежутку $(0; \pi)$ для котангенсов.

1. $\operatorname{tg} x=0{,}7$. 2. $\operatorname{tg} x=-0{,}5$. 3. $\operatorname{ctg} x=-1{,}4$. 4. $\operatorname{ctg} x=1{,}8$.
5. $\operatorname{tg} x=0{,}2$. 6. $\operatorname{ctg} x=0{,}9$. 7. $\operatorname{tg} x=-1{,}2$. 8. $\operatorname{tg} x=1{,}9$.

54. Найти наименьший положительный период функций:

1. $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$. 2. $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$.
3. $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{4}\right)$. 4. $\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

55. Привести данные функции к значениям на промежутке $(0; \pi/4)$ ((0°; 45°) в соответствующих случаях):

1. $\operatorname{tg}\frac{7}{6}\pi$. 2. $\operatorname{ctg} 0{,}9\pi$. 3. $\operatorname{ctg} 600°$. 4. $\operatorname{tg} 980°$.
5. $\operatorname{tg} 3{,}7\pi$. 6. $\operatorname{ctg} 5{,}8\pi$. 7. $\operatorname{ctg} 3$. 8. $\operatorname{tg} 6$.

56. График функции $y=f(x)$ — полуокружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5, расположенная в верхней полуплоскости. Тщательно выполнив на миллиметровой бумаге необходимые построения и измерения, вычислить $f'(-4{,}5)$, $f'(-4)$, $f'(-3)$, $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$. Используя свойства тангенсов, найти значения производной в точках $x=1$; 2; 3; 4; 4,5. Написать уравнение функции $y=f(x)$ и вычислить значение производной $f'(x)$ в тех же точках, продифференцировав $f(x)$. Сравнить ответы (при тщательном построении графика и касательных ошибка не должна

превышать 0,01). Как изменяется производная функции $f(x)$ при $x\to-5$, $x\to5$?

57. Зная значение одной из тригонометрических функций, найти значения остальных функций при том же значении аргумента:

1. $\sin x=0{,}3$, $x\in\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
2. $\cos x=-0{,}4$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
3. $\operatorname{tg} x=1{,}2$, $x\in\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$.
4. $\operatorname{ctg} x=-0{,}8$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

58. Используя таблицы или калькулятор, выяснить, начиная с каких углов значение $\sin x$ можно заменять самим углом, выраженным в радианах, если ошибка в определении синуса не должна превышать: а) 0,01, б) 0,001, в) 0,0001.

59. Показать, что при x, достаточно близких к $\frac{\pi}{2}$, $\cos x\approx\frac{\pi}{2}-x$. Обосновать это приближенное равенство ссылкой на соответствующую формулу, проверить его по таблицам или с помощью калькулятора.

60. На миллиметровой бумаге построить графики функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$, выбрав за единицу масштаба по обеим осям 3 см. Предварительно на оси абсцисс отметить примерное положение точек, соответствующих числам $\pm\frac{\pi}{10}$; $\pm\frac{\pi}{6}$; $\pm\frac{\pi}{4}$; $\pm\frac{\pi}{3}$; $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\pi$. Графики постройте на интервале $[-\pi; \pi]$. При построении использовать то обстоятельство, что на $[\pi/2; \pi]$ график $\sin x$ симметричен графику $\sin x$ на $[0; \pi/2]$ относительно прямой $x=\pi/2$, а на $[-\pi; 0]$ симметричен графику $\sin x$ на $[0; \pi]$ относительно начала координат. (Обосновать эти утверждения свойствами $\sin x$.) Прежде чем строить график $\sin x$ на $[0; \pi/2]$, провести прямую $y=x$. Обратить внимание на то, что в пределах точности чертежа график $\sin x$ на интервале $[0; \pi/6]$ практически сливается с прямой $y=x$.

61. Выполняя задание 60, вы, вероятно, заметили, что при привычном выборе масштаба по оси абсцисс (единица — целое число делений на оси, в данном случае, единица — это 30 маленьких делений) трудно находить точки, соответствующие «хорошим» значениям аргумента $\sin x$ и $\cos x$, таких как $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/2$, π и т. п., поэтому обычно при построении графиков тригонометрических функций целому числу делений на оси абсцисс ставят в соответствие число π, тогда доли числа π легко отмечаются на оси абсцисс (особенно удобно, если выбранное для π число делений делится на 12). По оси ординат выбирают, как правило, другой масштаб, в котором удобно откладывать десятые доли единицы. Графики при этом получаются деформированными, а прямая $y=x$ наклонена к оси абсцисс под углом, не равным 45°.

На миллиметровой бумаге (принять по оси абсцисс за π 12 см, а по оси ординат за единицу 5 см) построить графики функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$.

62. На тетрадном листе в клетку начертить несколько периодов графиков функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$, выбрав за единицу масштаба по оси ординат 2 клеточки, а по оси абсцисс за π принять 6 клеток. Дайте графическую интерпретацию решению уравнений:

$$\sin x=0{,}5;\quad \cos x=0{,}5;\quad \sin x=\sqrt{2}/2;\quad \cos x=\sqrt{2}/2.$$

63. В одной системе координат построить (схематически) графики функций:

1. $y=\sin x,\ y=2\sin x$ 2. $y=\cos x,\ y=3\cos x$.

3. $y=\cos x,\ y=\frac{1}{3}\cos x$. 4. $y=\sin x,\ y=\frac{1}{2}\sin x$.

5. $y=\sin x,\ y=-\frac{1}{2}\sin x$. 6. $y=\cos x,\ y=-2\cos x$.

7. $y=\cos x,\ y=\cos 2x$. 8. $y=\sin x,\ y=\sin\frac{1}{2}x$.

9. $y=\sin x,\ y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

10. $y=\cos x,\ y=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

11. $y=\cos x,\ y=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

12. $y=\sin x,\ y=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

64. Построить один период графиков функций, предварительно найти период и выбрать удобный масштаб по оси Ox:

1. $y=\cos\pi x$. 2. $y=\sin\pi x$. 3. $y=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

4. $y=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$. 5. $y=\frac{1}{2}\cos(2\pi x+\pi)$.

6. $y=2\sin(2\pi x-\pi)$.

65. Построить несколько периодов графиков функций $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$. Сначала выбрать один и тот же масштаб по обеим осям, например пусть единице соответствует 1 см, затем постройте графики в более удобном масштабе, например по оси Ox принять за π 2 см. Построить касательные к графикам функций в точке $x=0$ для функции $\operatorname{tg}x$ и в точке $\pi/2$ для функции $\operatorname{ctg}x$.

66. На построенных графиках функций $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$ дать графическую интерпретацию уравнениям:

$$\operatorname{tg}x=1;\quad \operatorname{ctg}x=1;\quad \operatorname{tg}x=-\sqrt{3};\quad \operatorname{ctg}x=-\sqrt{3}.$$

Глава 5

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Синус и косинус суммы и разности аргументов

Тригонометрические функции обладают замечательным свойством: для них имеют место так называемые *формулы сложения*, позволяющие выражать значения функций от суммы аргументов через значения функций от слагаемых. Именно, верны следующие формулы:

$$\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2, \qquad (1)$$

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2)=\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2. \qquad (2)$$

Докажем справедливость этих формул. Сначала предположим, что оба аргумента φ_1 и φ_2 принадлежат промежутку $(0,\ \pi/2)$, т. е. являются мерами острых углов. Рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом 1 (рис. 1). Пусть $\angle M_0OM_1=\varphi_1$ и $\angle M_1OM_2=\varphi_2$. Опустим перпендикуляр M_2K из точки M_2 на OM_1 и перпендикуляр M_2N из точки M_2 на ось абсцисс. Ясно, что $\angle NM_2K=\angle M_0OM_1=\varphi_1$, ибо эти углы оба острые и имеют взаимно перпендикулярные стороны. Опустим еще перпендикуляры KH и KL из точки K на ось абсцисс и на отрезок M_2N. Из рассмотрения треугольника OM_2K находим, что $OK=\cos\varphi_2$, $M_2K=\sin\varphi_2$, ибо эти отрезки являются катетами прямоугольного треугольника с острым

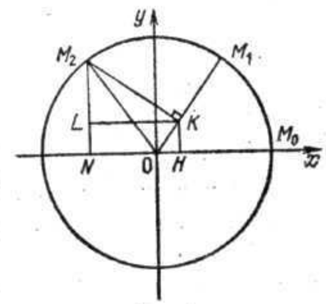

Рис. 1

углом φ_2 и гипотенузой, равной 1. Далее, $LM_2 = M_2K \cos\varphi_1$, $LK = M_2K\sin\varphi_1$, ибо эти отрезки суть катеты прямоугольного треугольника M_2KL с острым углом φ_1 при вершине M_2. Следовательно, $LM_2 = \sin\varphi_2\cos\varphi_1$, $LK = \sin\varphi_2\sin\varphi_1$. Из рассмотрения $\triangle OKH$ находим

$$OH = OK\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2\cos\varphi_1,$$
$$KH = OK\sin\varphi_1 = \cos\varphi_2\sin\varphi_1.$$

Наконец,

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2) = OH - NH = OH - LK = \cos\varphi_2\cdot\cos\varphi_1 - \sin\varphi_2\sin\varphi_1,$$

$$\sin(\varphi_1+\varphi_2) = M_2N = NL + LM_2 = HK + LM_2 = \cos\varphi_2\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1.$$

Итак, для острых углов φ_1 и φ_2 формулы (1) и (2) доказаны.

Очевидно, что если формулы (1) и (2) верны для каких-либо φ_1 и φ_2, то они останутся верными после добавления к φ_1 и φ_2 чисел $2k_1\pi$ и $2k_2\pi$ при любых целых k_1 и k_2, ибо при таком добавлении φ_1, φ_2 и $\varphi_1+\varphi_2$ изменяются на период функций синус и косинус. Поэтому мы можем считать доказанными формулы (1) и (2) для любых φ_1 и φ_2 из первой четверти.

Очевидно, что любой угол второй четверти получается посредством добавления $\pi/2$ к углу первой четверти, дальнейшее добавление $\pi/2$ приводит к любым углам третьей четверти и, добавив $\pi/2$ еще раз, мы получим любой угол четвертой четверти. Поэтому если мы сможем доказать, что если формулы (1) и (2) верны для некоторых φ_1 и φ_2, то они остаются верными после прибавления $\pi/2$ к одному из слагаемых, то формулы (1) и (2) будут доказаны для любых φ_1 и φ_2, ибо любые φ_1 и φ_2 можно получить из углов первой четверти посредством добавления несколько раз $\pi/2$ к каждому из аргументов.

Таким образом, остается доказать следующую лемму:

Лемма. *Если формулы* (1) *и* (2) *верны для некоторых* φ_1 *и* φ_2, *то они остаются верными после прибавления* $\frac{\pi}{2}$ *к одному из аргументов.*

Доказательство. Пусть (1) и (2) верны для φ_1 и φ_2 и положим

$$\varphi_1' = \frac{\pi}{2} + \varphi_1.$$

Имеем

$$\sin(\varphi_1'+\varphi_2) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1+\varphi_2\right) = \cos(\varphi_1+\varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos\left(\varphi_1'-\frac{\pi}{2}\right)\cos\varphi_2 - \sin\left(\varphi_1'-\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi_2 = \sin\varphi_1'\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1'\sin\varphi_2.$$

Аналогично

$$\cos(\varphi_1'+\varphi_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1+\varphi_2\right) = -\sin(\varphi_1+\varphi_2) = -\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = -\sin\left(\varphi_1'-\frac{\pi}{2}\right)\cos\varphi_2 - \cos\left(\varphi_1'-\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi_2 = \cos\varphi_1'\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1'\sin\varphi_2.$$

Лемма доказана.

Из формул (1) и (2) непосредственно следуют формулы:

$$\sin(\varphi_1-\varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2, \qquad (3)$$
$$\cos(\varphi_1-\varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2. \qquad (4)$$

Они получаются из (1) и (2) посредством замены φ_2 на $-\varphi_2$.

Дадим другое доказательство формул (1)—(4), основывающееся на теории векторов. Напомним, что *скалярным произведением* двух векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Через координаты векторов (т. е. через проекции векторов на оси координат) скалярное произведение выражается по формуле $x_1x_2 + y_1y_2$, где x_1, y_1 и x_2, y_2 — координаты этих векторов. Пусть r_1 и r_2 — длины данных векторов, φ_1 и φ_2 — углы (понимаемые в обобщенном смысле), образованные векторами с осью абсцисс. Тогда $x_1 = r_1\cos\varphi_1$, $y_1 = r_1\sin\varphi_1$, $x_2 = r_2\cos\varphi_2$ и $y_2 = r_2\sin\varphi_2$. Угол между векторами равен с точностью до периода $\varphi_1-\varphi_2$ или $\varphi_2-\varphi_1$, так что косинус угла между векторами равен $\cos(\varphi_1-\varphi_2)$. Сравнивая две формы записи скалярного произведения (через косинус угла между векторами и через координаты этих векторов), придем к равенству

$$r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) = r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2 + r_1\sin\varphi_1\, r_2\sin\varphi_2,$$

откуда, поделив на r_1r_2, получим формулу (4):

$$\cos(\varphi_1-\varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2.$$

Она выведена без каких-либо ограничений на φ_1 и φ_2.

Из формулы (4) легко выводятся формулы (2), (1) и (3). Замена φ_2 на $-\varphi_2$ в формуле (4) дает (2):

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2)=\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2.$$

Заменив в (4) аргумент φ_1 на $\frac{\pi}{2}-\varphi_1$, получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1-\varphi_2\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right)\cos\varphi_2+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right)\sin\varphi_2,$$

откуда следует (1):

$$\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2.$$

Наконец, заменив в (1) аргумент φ_2 на $-\varphi_2$, получим (3):

$$\sin(\varphi_1-\varphi_2)=\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2.$$

Пример. Найти $\sin 15^\circ$ и $\cos 15^\circ$.

Решение.

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$
$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot 1}{2\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

§ 2. Тангенс и котангенс суммы и разности

Для тангенса и котангенса имеют место формулы

$$\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1+\operatorname{tg}\varphi_2}{1-\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2},\qquad (5)$$

$$\operatorname{ctg}(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{\operatorname{ctg}\varphi_1\operatorname{ctg}\varphi_2-1}{\operatorname{ctg}\varphi_1+\operatorname{ctg}\varphi_2}.\qquad (6)$$

Действительно,

$$\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{\cos(\varphi_1+\varphi_2)}=\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2}.$$

Поделив числитель и знаменатель на $\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2$, получим

$$\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{\dfrac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}+\dfrac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}}{1-\dfrac{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}}=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1+\operatorname{tg}\varphi_2}{1-\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Заметим, что правая часть в этом равенстве не имеет смысла при $\varphi_1=\pi/2$ или $\varphi_2=\pi/2$ (с точностью до целого кратного π), в то время как левая часть имеет смысл.

До деления на $\cos\varphi_1\cos\varphi_2$ правая часть имела смысл и при этих значениях для φ_1 и φ_2, смысл потеряется после деления на $\cos\varphi_1\cos\varphi_2$ — на выражение, обращающееся в 0 при $\varphi_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $\varphi_2=\frac{\pi}{2}+\pi k$, где k — любое целое число.

Аналогично выводится формула для котангенса суммы:

$$\operatorname{ctg}(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{\cos(\varphi_1+\varphi_2)}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}=\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2}.$$

После деления числителя и знаменателя на $\sin\varphi_1\sin\varphi_2$ получим

$$\operatorname{ctg}(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{\operatorname{ctg}\varphi_1\operatorname{ctg}\varphi_2-1}{\operatorname{ctg}\varphi_2+\operatorname{ctg}\varphi_1}.$$

Замена φ_2 на $-\varphi_2$ приводит к формулам

$$\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1-\operatorname{tg}\varphi_2}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2},\qquad (7)$$

$$\operatorname{ctg}(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{\operatorname{ctg}\varphi_1\operatorname{ctg}\varphi_2+1}{\operatorname{ctg}\varphi_2-\operatorname{ctg}\varphi_1}.\qquad (8)$$

Пример 1. Пусть $\operatorname{tg}\varphi_1=1/2$, $\operatorname{tg}\varphi_2=1/3$. Чему равен $\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2)$?

Решение. $\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2)=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$

Таким образом, если φ_1 и φ_2 — острые углы, то $\varphi_1+\varphi_2=\pi/4$.

§ 3. Тригонометрические функции удвоенного аргумента и некоторых кратных аргументов

Положив в формулах сложения аргументов $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$, получим:

$$\sin 2\varphi=\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi\sin\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$\cos 2\varphi=\cos\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\sin\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi,$$
$$\operatorname{tg}2\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi}=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi},$$
$$\operatorname{ctg}2\varphi=\frac{\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{ctg}\varphi-1}{\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi}=\frac{\operatorname{ctg}^2\varphi-1}{2\operatorname{ctg}\varphi}.$$

Пример 1. Выразить $\cos 3\varphi$ через $\cos\varphi$.

Решение.

$$\cos 3\varphi = \cos(2\varphi + \varphi) = \cos 2\varphi \cos\varphi - \sin 2\varphi \sin\varphi =$$
$$= (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\cos\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\varphi =$$
$$= \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi =$$
$$= \cos^3\varphi - 3(1-\cos^2\varphi)\cos\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.$$

◀ Пример 2. Использовать результат примера 1 для решения уравнения $x^3 - 3x - a = 0$ при $|a| < 2$ с помощью тригонометрических функций.

Решение. Положим $x = 2\cos\varphi$. Тогда уравнение примет вид $8\cos^3\varphi - 6\cos\varphi - a = 0$, т. е. $4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi = a/2$ и, наконец, $\cos 3\varphi = a/2$. По условию $|a| < 2$, так что $|a/2| < 1$. Следовательно, найдется угол α_0, косинус которого равен $a/2$. Он определен с точностью до знака и до целого кратного $2\pi = 360°$. Из нашего уравнения следует, что $3\varphi = \pm(\alpha_0 + k\cdot 360°)$ и $\varphi = \pm\left(\frac{\alpha_0}{3} + k\cdot 120°\right)$, где k — любое целое число. Корни исходного уравнения даются формулой

$$x = 2\cos\pm\left(\frac{\alpha_0}{3} + k\cdot 120°\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha_0}{3} + k\cdot 120°\right).$$

Для целого числа k достаточно взять значения 0, 1, 2, ибо при $k=3$ получится такое же значение для x, как при $k=0$; при $k=4$ — такое же, как при $k=1$; при $k=5$ — такое же, как при $k=2$, и т. д. Итак, мы нашли три корня данного уравнения. Эти корни попарно различны, ибо если

$$\cos\left(\frac{\alpha_0}{3} + k_1\cdot 120°\right) = \cos\left(\frac{\alpha_0}{3} + k_2\cdot 120°\right)$$

при $k_1 \neq k_2$ и принимающих значения 0, 1, 2, то либо

$$\frac{\alpha_0}{3} + k_1\cdot 120° = \frac{\alpha_0}{3} + k_2\cdot 120°,$$

что невозможно, либо

$$\frac{\alpha_0}{3} + k_1\cdot 120° = -\left(\frac{\alpha_0}{3} + k_2\cdot 120°\right) + k_3\cdot 360°,$$

откуда $2\alpha_0$ есть целое кратное $360°$ и α_0, с точностью до периода, есть $0°$ или $180°$, так что $a = 2\cos\alpha = \pm 2$, что противоречит предположению $|a| < 2$. При $a = \pm 2$ действительно имеется кратный корень, ибо

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$$

и

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2).$$

Так как исходное уравнение является кубическим и не может иметь более трех корней, то мы нашли все корни.

Заметим, что к виду $x^3 - 3x - a = 0$ при $|a| < 2$ можно привести более общее уравнение $x^3 - px - q = 0$, где $p > 0$ и $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$. Для этого нужно положить $x = \sqrt{\frac{p}{3}}\cdot y$ и поделить на $(\sqrt{p/3})^3$.

Пример 3. Доказать, что $\cos kx$ и $\frac{\sin kx}{\sin x}$ при любом натуральном k выражаются в виде многочленов от $\cos x$.

Решение. Применим метод математической индукции. Для $k=1$ утверждение очевидно. Пусть установлено, что

$$\cos kx = P_k(\cos x), \qquad \sin kx = \sin x\, Q_{k-1}(\cos x),$$

где P_k и Q_{k-1} — некоторые многочлены. Покажем, что аналогичные формулы верны для $\cos(k+1)x$ и $\sin(k+1)x$. Имеем

$$\cos(k+1)x = \cos(kx + x) = \cos kx\cos x - \sin kx\sin x =$$
$$= P_k(\cos x)\cos x - \sin x\, Q_{k-1}(\cos x)\sin x =$$
$$= P_k(\cos x)\cos x - (1-\cos^2 x)\,Q_{k-1}(\cos x) = P_{k+1}(\cos x),$$

где $P_{k+1}(z) = P_k(z)\cdot z + (z^2-1)\,Q_{k-1}(z)$. Далее,

$$\sin(k+1)x = \sin(kx+x) = \sin kx\cos x + \cos(kx)\sin x =$$
$$= \sin x Q_{k-1}(\cos x)\cos x + P_k(\cos x)\sin x =$$
$$= \sin x\,(Q_{k-1}(\cos x)\cos x + P_k(\cos x)) = \sin x\, Q_k(\cos x),$$

где $Q_k(z) = Q_{k-1}(z)\cdot z - P_k(z)$. Из этих формул легко следует, что k и $k-1$ соответственно равны степеням многочленов P_k и Q_{k-1}.

Наши рассуждения дают не только доказательство существования многочленов $P_k(\cos x)$ и $Q_{k-1}(\cos x)$, но позволяют осуществлять их последовательное вычисление. Очевидно, что $P_1(z) = z$ и $Q_0(z) = 1$. Далее:

$$P_2(z) = P_1(z)\,z + (z^2-1)\,Q_0(z) = 2z^2 - 1,$$
$$Q_1(z) = Q_0(z)\,z + P_1(z) = 2z;$$
$$P_3(z) = P_2(z)\,z + (z^2-1)\,Q_1(z) = 4z^3 - 3z,$$
$$Q_2(z) = Q_1(z)\,z + P_2(z) = 4z^2 - 1.$$

Дальнейшие вычисления дают

$$P_4(z)=8z^4-8z^2+1, \quad Q_3(z)=8z^3-4z,$$
$$P_5(z)=16z^5-20z^3+5z, \quad Q_4(z)=16z^4-12z^2+1$$

и т. д.

Таким образом, например,

$$\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x,$$
$$\sin 5x=\sin x\,(16\cos^4 x-12\cos^2 x+1). \blacktriangleright$$

§ 4. Тригонометрические функции половинного аргумента

Из формул $\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=\cos 2\varphi$ и $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ заключаем посредством сложения и вычитания, что

$$\cos^2\varphi=\frac{1+\cos 2\varphi}{2}; \quad \sin^2\varphi=\frac{1-\cos 2\varphi}{2}.$$

Положив $\varphi=x/2$, получим

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}, \quad \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2},$$

откуда

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad \sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

Знаки выбираются в соответствии с четвертью, которой принадлежит $x/2$.

Для вычисления $\operatorname{tg}(x/2)$ применим несколько более искусственный прием. Именно:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}=\frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{2\cos^2(x/2)}=\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

Аналогично, умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}$ на $2\sin(x/2)$, получим $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{2\sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}=$ $=\frac{1-\cos x}{\sin x}$.

Пример 1. Найти $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1-\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)}=\frac{1-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}=\sqrt{2}-1.$$

Пример 2. Найти $\sin(\pi/8)$ и $\cos(\pi/8)$.

Решение.

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}; \quad \sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}};$$
$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}; \quad \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}.$$

В обоих случаях при извлечении квадратного корня берется знак плюс, ибо $\pi/8$ — угол первой четверти.

◀ § 5. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

Покажем, что $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ выражаются в виде рациональных функций от $\operatorname{tg}(x/2)$. Следовательно, любое рациональное выражение от $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ (а также и от кратных аргументов) выражается в виде рациональной функции от $\operatorname{tg}(x/2)$.

Имеем $\sin x=2\sin(x/2)\cos(x/2)=2\operatorname{tg}(x/2)\cos^2(x/2)$. Но $\cos^2(x/2)=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$. Таким образом, $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$. Далее,

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}, \quad \cos x=\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}.$$

Наконец,

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{2\operatorname{tg}(x/2)}.$$

Заметим, что правые части в этих формулах теряют смысл при $x=\pi+2k\pi$, где k — целое число.

Пример 1. Выразить $3\sin x+4\cos x$ через $\operatorname{tg}(x/2)$.

Решение.

$$3\sin x+4\cos x=\frac{6\operatorname{tg}(x/2)+4-4\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=$$
$$=\frac{2\,(2-\operatorname{tg}(x/2))\,(1+2\operatorname{tg}(x/2))}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}. \blacktriangleright$$

§ 6. Выражение произведений функций синус и косинус в виде сумм и выражение сумм в виде произведений

Имеют место следующие две группы формул:

$$\sin x\cos y=\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2},$$
$$\cos x\cos y=\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}, \qquad (\mathrm{I})$$
$$\sin x\sin y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2};$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (\mathrm{II})$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Вывод всех этих формул очень прост. Складывая и вычитая формулы для синуса суммы и разности, а также для косинуса суммы и разности, придем к формулам:

$$\begin{aligned}\sin(x+y)+\sin(x-y)&=2\sin x\cos y,\\ \sin(x+y)-\sin(x-y)&=2\cos x\sin y,\\ \cos(x-y)+\cos(x+y)&=2\cos x\cos y,\\ \cos(x+y)-\cos(x-y)&=-2\sin x\sin y.\end{aligned} \qquad (\mathrm{III})$$

Формулы группы I получаются из первой, третьей и четвертой формул группы III посредством деления на 2 обеих частей.

Для вывода формул группы II нужно только положить $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$, откуда $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Пример 1. Преобразовать в сумму $\sin x\sin 2x\sin 3x$.

Решение.

$$\sin x\sin 2x=\frac{\cos(-x)-\cos 3x}{2}=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x);$$

$$\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{2}(\sin 3x\cos x-\sin 3x\cos 3x)=$$
$$=\frac{1}{4}(\sin 4x+\sin 2x-\sin 6x).$$

Пример 2. Преобразовать

$$\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x).$$

Решение.

$$\sin\frac{x}{2}\sin x=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3}{2}x\right),$$
$$\sin\frac{x}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{2}x-\cos\frac{5}{2}x\right),$$
$$\sin\frac{x}{2}\sin 3x=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5}{2}x-\cos\frac{7}{2}x\right),$$
$$\sin\frac{x}{2}\sin 4x=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7}{2}x-\cos\frac{9}{2}x\right),$$
$$\sin\frac{x}{2}\sin 5x=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{9}{2}x-\cos\frac{11}{2}x\right),$$

откуда

$$\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2}x-\cos\frac{11}{2}x\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\sin 3x\sin\frac{5}{2}x=\sin 3x\sin\frac{5}{2}x.$$

Итак, мы получили, что

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x=$$
$$=\frac{1}{\sin(x/2)}\sin 3x\sin\frac{5}{2}x.$$

Аналогично мы могли бы «свернуть» сумму значений синусов или косинусов, аргументы которых образуют арифметическую прогрессию.

§ 7. Преобразование линейной комбинации синуса и косинуса

В приложениях математики часто возникает функция вида $a\sin x+b\cos x$ с отличными от нуля коэффициентами a и b. Ясно, что это периодическая функция с периодом 2π. Модули значений слагаемых иногда складываются, когда слагаемые имеют одинаковые знаки, иногда вычитаются, когда знаки противоположные. Для более полного уяснения хода изменения функции ее следует преобразовать. Допустим сначала, что $a=\cos\alpha$ и $b=\sin\alpha$. Тогда

$$a\sin x+b\cos x=\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha=\sin(x+\alpha).$$

После этого преобразования становится ясно, что графиком функции является синусоида, сдвинутая вдоль оси абсцисс на $-\alpha$.

Разумеется, не всегда можно найти такое α, что $a=\cos\alpha$, $b=\sin\alpha$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$a^2+b^2=1$. Действительно, это условие означает, что точка $M(a, b)$ находится на окружности радиуса 1 с центром в начале координат и ее координаты a и b суть косинус и синус угла, образованного вектором OM с положительным направлением оси абсцисс.

Однако всегда можно найти такие r и α, что $a=r\cos\alpha$, $b=r\sin\alpha$. Для этого достаточно взять $r=\sqrt{a^2+b^2}$, ибо при таком выборе r числа $a_1=a/r$ и $b_1=b/r$ удовлетворяют требованию $a_1^2+b_1^2=1$ и, следовательно, найдется такое α, что $a_1=a/r=\cos\alpha$, $b_1=b/r=\sin\alpha$. Подставив вместо a и b числа $r\cos\alpha$ и $r\sin\alpha$, получим

$$a\sin x+b\cos x=r\sin x\cos\alpha+r\cos x\sin\alpha=r\sin(x+\alpha).$$

Из этого представления ясно, что графиком функции $a\cos x+b\sin x$ является синусоида с амплитудой $r=\sqrt{a^2+b^2}$, сдвинутая на $-\alpha$ вдоль оси абсцисс.

Пример 1.

$$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin x+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

§ 8. Гармонические колебания

Движение точки, описываемое уравнением $y=b\sin(at+\alpha)$, $a>0$, $0\leqslant\alpha<2\pi$, носит название *гармонического колебания*. Более общо, про любую величину, которая изменяется с течением времени по закону $y=b\sin(at+\alpha)$, говорят, что она совершает гармонические колебания. Величина, совершающая гармонические колебания, периодически отклоняется в обе стороны от нуля на величину $|b|$, которая называется *амплитудой колебания*. Наименьший период равен, очевидно, $\frac{2\pi}{a}$. Обратная величина $\frac{a}{2\pi}$ называется *частотой колебания*. Это число показывает, сколько полных периодов колебаний происходит в единицу времени.

В физике и технике частота измеряется в герцах — один герц есть частота колебания с 1 периодом в секунду. В радиотехнике приходится иметь дело с очень высокочастотными колебаниями и практически удобными единицами частоты являются килогерцы (1 кгц $=10^3$ герц) и даже

мегагерцы (1 Мгц $=10^6$ герц). Число α называется *начальной фазой гармонического колебания*. В уравнении $y=b\sin(at+\alpha)$ без нарушения общности можно считать $b>0$, ибо изменение знака при b равносильно прибавлению π или $-\pi$ к начальной фазе.

Гармоническое колебание является простейшей, но хорошей математической моделью для описания колебательных процессов в природе и технике. По закону гармонического колебания происходит движение груза, прикрепленного к идеальной пружине, после выведения его из положения равновесия (если пренебречь сопротивлением воздуха). Этот же закон хорошо описывает колебания электродвижущей силы в генераторе переменного тока, электромагнитные колебания в радиотехнике и в описании физической природы света, колебания каждой точки натянутой струны, выведенной из положения равновесия, колебания молекул среды, в которой распространяется звук, и т. д.

Представляет интерес сложение гармонических колебаний. Оно происходит, в частности, при включении в одну сеть генераторов переменного тока, при распространении звука от двух близко расположенных источников звука и т. д. Сумма двух гармонических колебаний $b_1\sin(a_1t+\alpha_1)+b_2\sin(a_2t+\alpha_2)$ описывает, вообще говоря, довольно сложные колебательные движения, даже не обязательно периодические, в случае, если частоты не соизмеримы. Однако имеет место следующая теорема:

Теорема. *Если частоты двух гармонических колебаний совпадают, то сумма этих колебаний есть снова гармоническое колебание той же частоты.*

Доказательство. Пусть $y_1=b_1\sin(at+\alpha_1)$, $y_2=b_2\sin(at+\alpha_2)$, причем $a>0$. Положим $b_1\geqslant b_2>0$. Тогда

$$\begin{aligned}y_1+y_2&=b_1\sin(at+\alpha_1)+b_2\sin(at+\alpha_2)=\\&=b_1\sin at\cos\alpha_1+b_1\cos at\sin\alpha_1+b_2\sin at\cos\alpha_2+\\&+b_2\cos at\sin\alpha_2=(b_1\cos\alpha_1+b_2\cos\alpha_2)\sin at+\\&+(b_1\sin\alpha_1+b_2\sin\alpha_2)\cos at.\end{aligned}$$

В силу вычисления, проведенного в предыдущем параграфе, имеем $y_1+y_2=r\sin(at+\alpha_3)$,

$$\begin{aligned}r^2&=(b_1\cos\alpha_1+b_2\cos\alpha_2)^2+(b_1\sin\alpha_1+b_2\sin\alpha_2)^2=\\&=b_1^2\cos^2\alpha_1+2b_1b_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2+b_2^2\cos^2\alpha_2+\\&+b_1^2\sin^2\alpha_1+2b_1b_2\sin\alpha_1\sin\alpha_2+b_2^2\sin^2\alpha_2=\\&=b_1^2+2b_1b_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)+b_2^2,\end{aligned}$$

а α_3 определяется равенствами

$$\cos\alpha_3=\frac{b_1\cos\alpha_1+b_2\cos\alpha_2}{r},\quad \sin\alpha_3=\frac{b_1\sin\alpha_1+b_2\sin\alpha_2}{r}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что амплитуда колебания y_1+y_2 зависит не только от амплитуд b_1 и b_2 слагаемых колебаний, но и от косинуса сдвига $\alpha_1-\alpha_2$ начальной фазы. Амплитуда будет максимальной, равной b_1+b_2, при $\alpha_1=\alpha_2$ и минимальной b_1-b_2 при $\alpha_1-\alpha_2=\pi$.

§ 9. Колебания с переменной амплитудой

Пусть $f(t)$ — функция от времени t, меняющаяся медленно сравнительно с частотой $\frac{a}{2\pi}$ колебания с уравнением $y=\sin(at+\alpha)$, так что на протяжении одного периода изменения y значения функции $f(t)$ мало изменяются. Тогда координата движущейся точки с уравнением движения $z=f(t)\sin(at+\alpha)$ будет изменяться от $f(t_1)$ до $-f(t_2)$, от $-f(t_2)$ до $f(t_3)$, от $f(t_3)$ до $-f(t_4)$ и т. д., где $t_1, t_3, t_5, \ldots$ — значения t, при которых $at+\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, а $t_2, t_4, t_6, \ldots$ — значения t, при которых $at+\alpha=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$.

Нетрудно видеть, что точки $t_1, t_3, t_5, \ldots$ не являются, вообще говоря, точками максимума для функции $z=f(t)\sin(at+\alpha)$ и соответственно точки $t_2, t_4, t_6, \ldots$ не являются точками минимума. Для того чтобы в этом убедиться, вычислим значение производной от z в точке, например, t_1. Мы это можем сделать, хотя еще не умеем находить производную от синуса. Действительно, t_1 есть точка максимума для $\sin(at+\alpha)$, и производная от $\sin(at+\alpha)$ равна 0. Итак, $z'_{t=t_1}=f'(t_1)\sin(at_1+\alpha)+f(t_1)\times[\sin(at+\alpha)]'_{t=t_1}=f'(t_1)$. Из этого равенства следует, что график функции $z=f(t)\sin(at+\alpha)$ имеет общую касательную с графиком функции $f(t)$. То же самое имеет место для точек $t_3, t_5, \ldots$, а в точках $t_2, t_4, \ldots$ z' будет отличаться только знаком от соответствующих значений f'. Таким образом, если, например, $f(t)$ убывает, то в окрестности $t_1, t_3, t_5, \ldots$ график $z=f(t)\sin(at+\alpha)$ имеет вид как на рис. 2, и максимумы функции z будут немного левее точек $t_1, t_3, t_5, \ldots$ В точках максимума значения z будут все же немного меньше значений $f(t)$ в этих точках. Итак, движение с уравнением $z=f(t)\sin(at+\alpha)$

можно рассматривать как колебательные с переменной амплитудой. К этому типу относятся, в частности, «затухающие» колебания с уравнением $z=e^{-kt}\sin(at+\alpha)$, $k>0$. Именно по этому закону двигается груз на пружине с учетом сопротивления воздуха или точка струны, колеблющейся в воздухе, тормозящем ее движение.

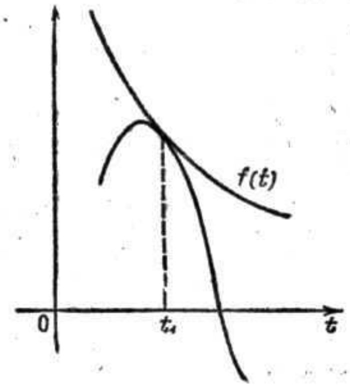

Рис. 2

Интересный и важный случай колебаний с переменной амплитудой возникает при сложении гармонических колебаний с одинаковой амплитудой и с различными, но близкими частотами.

Пусть $y_1=b\sin(a_1t+\alpha_1)$, $y_2=b\sin(a_2t+\alpha_2)$, причем a_1-a_2 — положительное число, много меньшее a_1 и a_2. Тогда

$$z=y_1+y_2=b(\sin(a_1t+\alpha_1)+\sin(a_2t+\alpha_2))=$$
$$=b\sin\left(\frac{a_1+a_2}{2}t+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\cos\left(\frac{a_1-a_2}{2}t+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right).$$

Первый множитель совершает колебания с частотой $\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{a_1+a_2}{2}$, близкой к частотам колебаний y_1 и y_2. Второй

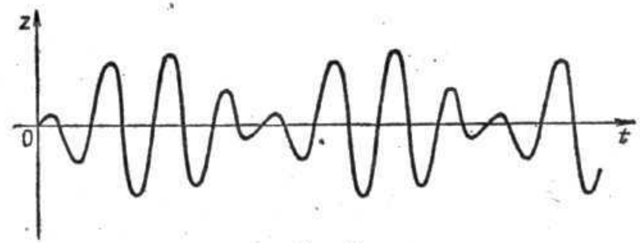

Рис. 3

множитель изменяется значительно медленнее, совершая гармонические колебания с много меньшей частотой $\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{a_1-a_2}{2}$.

Поэтому $z=y_1+y_2$ задает колебательное движение с частотой, близкой к частоте колебаний y_1 и y_2, но с переменной амплитудой, совершающей колебания значительно меньшей частоты. График этого движения имеет приблизительно такой вид, как на рис. 3. Возникает явление, носящее в физике название *биений*.

§ 10. Простейшие тригонометрические уравнения и обратные тригонометрические функции

Рассмотрим уравнение $\sin\varphi = y$ относительно φ. Это уравнение имеет решения при $|y| \leqslant 1$. При изображении функций косинус и синус в виде координат точки на окружности, соответствующей углу φ, мы видим (рис. 4), что при $y \neq \pm 1$ на единичной окружности имеются две точки M и M' с данной ординатой y: M направо от оси Oy и M' — налево.

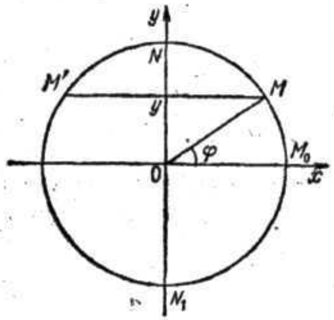

Рис. 4

Сосредоточим сначала внимание на точке M, находящейся справа. При возрастании y от 0 до 1 точка M непрерывно перемещается по окружности от точки M_0 до точки N. Соответствующий угол при простейшем отсчете будет непрерывно возрастать от 0 до $\pi/2$. При изменении y от 0 до -1 точка M непрерывно перемещается в отрицательном направлении (по часовой стрелке) от точки M_0 до точки N_1. Соответствующее значение угла φ следует отсчитывать тоже по часовой стрелке, считая φ меняющимся от 0 до $-\pi/2$. Именно при таком отсчете φ будет изменяться непрерывно, возрастая от $-\pi/2$ до $\pi/2$, когда y непрерывно возрастает от -1 до 1.

Решение уравнения $\sin\varphi = y$, принадлежащее интервалу $[-\pi/2; \pi/2]$, называется аркус-синус, *или*, короче, *арксинус* от y и обозначается $\arcsin y$. Так, например, $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ и т. д. Как мы установили, $\arcsin y$ есть непрерывная функция от y, определенная на интервале $[-1; 1]$ и возрастающая на этом интервале от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

Решение уравнения $\sin\varphi = y$, соответствующее точке M' (рис. 4), при отсчете угла в положительном направлении равно $\pi - \arcsin y$. Это видно на рис. 5 и 6, показывающих углы при $y > 0$ и $y < 0$.

Очевидно, что все решения уравнения $\sin\varphi = y$, соответствующие точке M, суть

$$\arcsin y + 2\pi k \text{ при любом целом } k;$$

решения же, соответствующие точке M', суть
$\pi - \arcsin y + 2\pi k = (2k+1)\pi - \arcsin y$ при любом целом k.

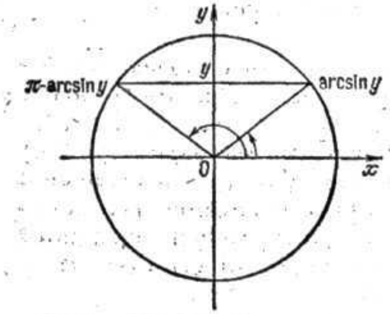

Рис. 5

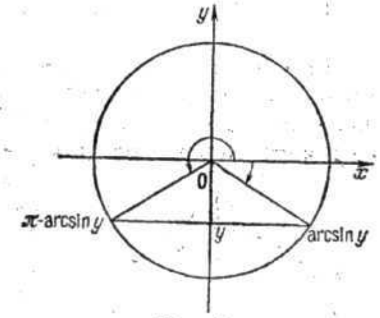

Рис. 6

Все решения уравнения $\sin\varphi = y$ можно увидеть на графике функции $y = \sin\varphi$ (рис. 7). При фиксированном y соответствующая прямая пересекает синусоиду в бесконечном множестве точек: M, M', M_1, M_1', ...; M_{-1}', M_{-1}, M_{-2}', M_{-2}, ... Через M, M_1, ...; M_{-1}, M_{-2}, ... обозначены точки на синусоиде, соответствующие точке M на

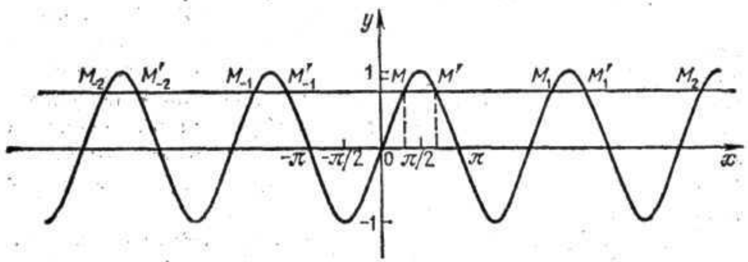

Рис. 7

рис. 4, через M', M_1', ...; M_{-1}', M_{-2}', ... обозначены точки, соответствующие точке M' на единичной окружности. Ясно, что решение уравнения $\sin\varphi = y$, равное абсциссе точки M_k, есть $\arcsin y + 2\pi k$, а абсцисса точки M_k' есть $(2k+1)\pi - \arcsin y$ при любом целом k, положительном или отрицательном.

Решение уравнения $\sin\varphi = y$, обозначенное через $\arcsin y$, есть абсцисса точки M пересечения участка синусоиды на интервале $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ с горизонтальной прямой, соответствующей значению y (рис. 8). Этот участок синусоиды можно рассматривать и как график функции $\varphi = \arcsin y$, но только на рис. 8 значения аргумента y этой функции откладываются по оси ординат, а значения функции $\varphi = \arcsin y$ — по оси абсцисс. Если же, как обычно при построении графика функции, откладывать значения аргумента по горизонтальной оси и значения функции — по вертикальной, мы должны на рис. 8 обменять местами абсциссы и ординаты всех точек, что равносильно симметрии рис. 8 относительно биссектрисы первого координатного угла, ибо точки $(\varphi;\ y)$ и $(y;\ \varphi)$ симметричны относительно этой биссектрисы. Получим рис. 9.

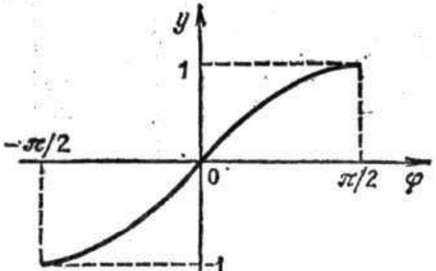

Рис. 8

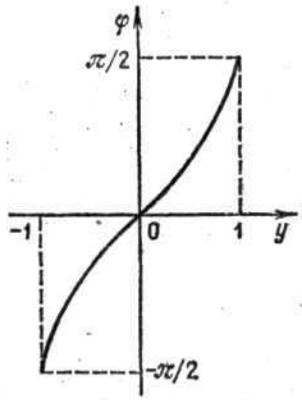

Рис. 9

Функции $y = \sin x$ при $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $y = \arcsin x$ взаимно обратны в том же смысле, в каком взаимно обратны показательная и логарифмическая, функции возведения в квадрат и извлечения квадратного корня. Именно, из равенства $\sin\varphi = y$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, следует $\varphi = \arcsin y$, а из равенства $\varphi = \arcsin y$ следует $\sin\varphi = y$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Эти связи аналогичны таким: из a^x следует $x = \log_a y$ и из $x = \log_a y$ следует $a^x = y$; из $x^2 = y$, $x \geqslant 0$, следует, что $x = \sqrt{y}$, а из $x = \sqrt{y}$ следует $x^2 = y$, $x \geqslant 0$.

Короче, $\sin(\arcsin x) = x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $\arcsin(\sin x) = x$ при $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, подобно тому как $\log_a a^x = x$ при всех x и $a^{\log_a x} = x$ при $x > 0$, а также $(\sqrt{x})^2 = x$ и $x = \sqrt{x^2}$ при $x \geqslant 0$.

Обратимся теперь к рассмотрению уравнения $\cos\varphi = x$. Это уравнение имеет решение при $|x| \leqslant 1$. Изобразим функции косинус и синус в виде координат точки на единичной окружности (рис. 10). Из рисунка ясно, что при $|x| \neq 1$ на единичной окружности имеются две симметричные относительно Ox точки M и M', одна из которых выше Ox, другая — ниже. При изменении x от 1 до -1 угол φ, соответствующий верхней точке, будет непрерывно изменяться от 0 до π (при простейшем отсчете в положительном направлении). Этот угол обозначается $\arccos x$

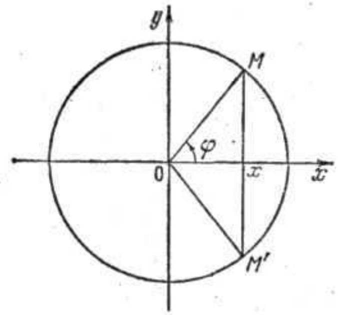

Рис. 10

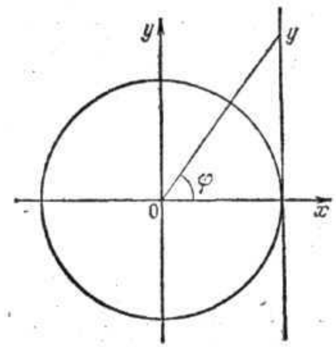

Рис. 11

и называется *арккосинус* x. Итак, $\arccos x$ есть угол из интервала $[0;\ \pi]$, косинус которого равен x. Из определений функций $\cos x$ и $\arccos x$ следует, что $\cos(\arccos x) = x$ при $|x| \leqslant 1$ и $\arccos(\cos x) = x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Все решения уравнения $\cos\varphi = x$ даются, очевидно, формулами

$$\varphi = \arccos x + 2\pi k, \quad \varphi = -\arccos x + 2\pi k,$$
$$k \text{ — целое}.$$

Последний класс решений соответствует нижней точке M' на рис. 10.

Функция $y = \operatorname{tg}\varphi$ (рис. 11) непрерывно возрастает, проходя через все действительные значения, когда φ меняется от $-\pi/2$ до $\pi/2$, исключая концы. Для любого значения y найдется одно и только одно значение φ в интервале $(-\pi/2;\ \pi/2)$, для которого $\operatorname{tg}\varphi = y$. Это значение для φ называется *арктангенс* y и обозначается через $\operatorname{arctg} y$. Все решения уравнения $\operatorname{tg}\varphi = y$ даются формулой

$$\varphi = \operatorname{arctg} y + \pi k, \quad k \text{ — целое}.$$

Построив график функции $y = \operatorname{tg} \varphi$ (рис. 12), мы видим что $\operatorname{arctg} y$ есть значение φ при данном y на той непрерывной части графика тангенса, которая проходит через начало координат. Эта часть графика может рассматри-

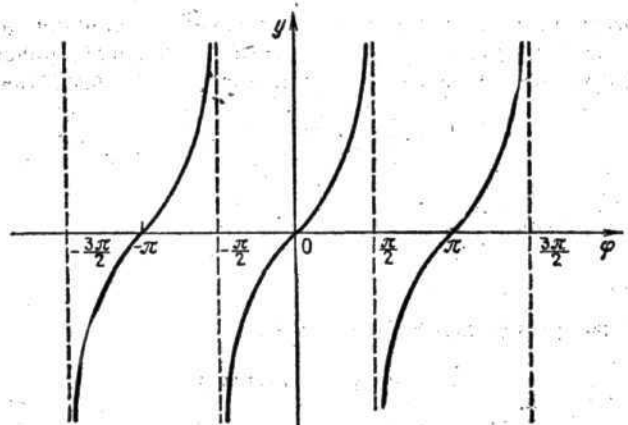

Рис. 12

ваться как график функции $\varphi = \operatorname{arctg} y$ с переменной ролями оси абсцисс и оси ординат. Если откладывать аргумент y функции $\operatorname{arctg} y$ по оси абсцисс и значение функции $\operatorname{arctg} y$ по оси ординат, мы получим график, очертания которого даны на рис. 13.

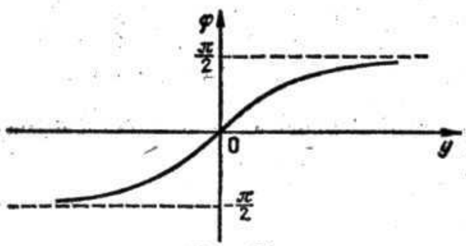

Рис. 13

Через $\operatorname{arc\,ctg} x$ (*арккотангенс* x) обозначается значение φ в интервале $(0;\ \pi)$, при котором $\operatorname{ctg}\varphi = x$. Именно такое ограничение для угла φ обусловлено тем, что при φ, меняющемся от 0 до π, $\operatorname{ctg}\varphi$ непрерывно изменяется, убывая по всей числовой оси от ∞ до $-\infty$.

Функции арккосинус и арккотангенс просто связаны с функциями арксинус и арктангенс, и поэтому потребность в их употреблении возникает редко. Эти зависимости даются посредством формул

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \quad \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x.$$

В самом деле, $\arccos x$ есть единственное значение аргумента из интервала $[0;\ \pi]$, косинус которого равен x. Значения $\arcsin x$ лежат в интервале $[-\pi/2;\ \pi/2]$, так что

$$0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \arcsin x \leqslant \pi,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \sin(\arcsin x) = x.$$

Поэтому $\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x$.

Те же рассуждения дают, что

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} x.$$

Пример 1. Найти $\operatorname{arcctg}(-1)$.

Ответ: $\frac{3}{4}\pi$.

Пример 2. Доказать, что $\arcsin x$ есть нечетная функция.

Решение. $\arcsin(-x)$ есть угол из интервала $[-\pi/2;\ \pi/2]$, синус которого равен $-x$. Он равен $-\arcsin x$, ибо

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant -\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$
$$\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x.$$

Совершенно так же доказывается нечетность функции $\operatorname{arctg} x$.

§ 11. Некоторые действия над прямыми и обратными тригонометрическими функциями

Функции синус, косинус, тангенс и котангенс выражаются друг через друга посредством алгебраических формул. Поэтому можно выразить значения этих функций от каждой из обратных тригонометрических функций в виде алгебраических выражений от аргумента. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Выразить через x алгебраически $\cos(\arcsin x)$.

Решение. Прежде всего заметим, что $\cos(\arcsin x)$ не отрицателен, ибо $-\pi/2 \leqslant \arcsin x \leqslant \pi/2$. Далее,

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

Пример 2. Доказать, что $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Обе части равенства, которое нужно доказать, принадлежат $[-\pi/2; \pi/2]$, так что нужно убедиться только в том, что их синусы равны. Имеем:

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\cos(\operatorname{arctg} x).$$

Далее,

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(знак минус перед корнем отбрасывается в силу $\cos(\operatorname{arctg} x) \geqslant 0$). Итак,

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\sin\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Доказать, что $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Из $0 < 1/2 < 1$ следует, что $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{2} < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ и таким же образом $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$. Отсюда $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$. Далее

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$$

и, следовательно, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Пример 4.

$$\sin(2\operatorname{arctg} x) = 2\sin(\operatorname{arctg} x)\cos(\operatorname{arctg} x) = 2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Пример 5.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{\sin(\arcsin x)}{1+\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

§ 12. Тригонометрические уравнения

Уравнения, связывающие значения тригонометрических функций, называются *тригонометрическими уравнениями*.

Тригонометрические уравнения приводятся к виду $F(x) = 0$, где $F(x)$ — выражающаяся через тригонометрические периодическая функция. Ясно, что если x_0 есть решение уравнения $F(x) = 0$, то оно приводит за собой целый класс решений $x_k = x_0 + kT$, где k — целое, T — период $F(x)$. Поэтому если тригонометрическое уравнение имеет хотя бы одно решение, то оно имеет бесконечно много решений. Однако число классов решений обычно конечно. Так, уравнение $\sin x = a$ при $|a| < 1$ имеет два класса решений:

$$x = \arcsin a + 2k\pi, \quad x = \pi - \arcsin a + 2k\pi.$$

Они сливаются в один класс при $a = \pm 1$. Уравнение $\cos x = a$ при $|a| < 1$ имеет тоже два класса решений:

$$x = \arccos a + 2k\pi, \quad x = -\arccos a + 2k\pi,$$

сливающихся при $a = \pm 1$. Уравнение же $\operatorname{tg} x = a$ (здесь наименьший период равен π, а не 2π) имеет один класс решений

$$x = \operatorname{arctg} a + k\pi.$$

Для того чтобы найти все решения тригонометрического уравнения, достаточно найти по одному из каждого класса. Очевидно, что в каждом классе имеется одно и только одно решение, принадлежащее полуоткрытому интервалу, длина которого равна периоду T, например интервалу $\left[-\frac{1}{2}T; \frac{1}{2}T\right)$ или $[0, T)$, и число решений в таком интервале конечно. Один из концов интервала следует исключить, ибо если один конец дает решение, то другой тоже есть решение из того же класса.

Самый естественный способ решения тригонометрического уравнения $F(x)=0$ состоит в том, что $F(x)$ алгебраически выражается через одну из тригонометрических функций. Затем решается получившееся алгебраическое уравнение и, наконец, находится значение аргумента по данному значению тригонометрической функции. Теоретически удобным является выражение $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ через тангенс половинного угла, однако это часто приводит к завышенной степени алгебраического уравнения. Кроме того, этот способ может привести к потере решения $x = \pi + 2k\pi$, если оно имеется, ибо $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не определен.

Уравнение вида

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_n \cos^n x = 0$$

называется *однородным*. Если $a_0 \neq 0$, то $\cos x = 0$ не может доставить решение. Поэтому, поделив обе части равенства на $\cos^n x$, мы придем к равносильному уравнению

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \ldots + a_n = 0.$$

Если же $a_0 = 0$, нужно предварительно вынести максимально возможную степень $\cos x$ за скобку и отдельно приравнять нулю $\cos x$ и второй сомножитель.

Во многих случаях удается свести уравнение к однородному посредством вставки равного единице множителя $\sin^2 x + \cos^2 x$ в члены, степени которых «не дотягивают» до максимальной. Иногда удобно предварительно перейти к половинному углу:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2},$$

что делает степени всех членов четными и «выравнивание» степени посредством вставки $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$ в нужном месте становится возможным. По существу, метод приведения уравнения к однородному путем перехода к половинному углу равносилен выражению через тангенс половинного угла, но при этом решение $x = \pi$, если оно есть, не теряется.

Пример 1. Решить уравнение $2\cos^2 x = 3\sin x$.

Решение. Здесь удобно выразить левую часть через $\sin x$. Получим

$$2(1-\sin^2 x) = 3\sin x, \quad 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0,$$
$$\sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4}, \quad \sin x = \frac{1}{2}, \quad \sin x = -2.$$

Уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$ дает два класса решений: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ и $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ при любом целом k. Уравнение $\sin x = -2$ не имеет решений.

Пример 2. $\sin 3x + 4\sin x - 3 = 0$.

Решение. Здесь снова следует выразить левую часть через $\sin x$. Имеем

$$\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x \sin x =$$
$$= 2\sin x\cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x =$$
$$= 3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

Уравнение преобразуется в

$$7\sin x - 4\sin^3 x - 3 = 0.$$

Положив $\sin x = z$, получим кубическое уравнение

$$4z^3 - 7z + 3 = 0.$$

Коэффициенты исходного уравнения так «хорошо» подобраны, что это уравнение имеет бросающийся в глаза корень $z_1 = 1$. Следовательно, левая часть делится на $z-1$. Легко видеть, что

$$4z^3 - 7z + 3 = (z-1)(4z^2 + 4z - 3).$$

Приравнивая к нулю второй сомножитель, получим $z_2 = 1/2$, $z_3 = -3/2$. Уравнение $\sin x = 1$ дает один класс решений $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Уравнение $\sin x = 1/2$ дает еще два класса: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ и $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, где k — любое целое число. Уравнение $\sin x = -3/2$ решений не имеет.

Итак, данное уравнение имеет три класса решений:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,$$

где k — любое целое.

Пример 3. $\sin^4 x + 3\sin x\cos^3 x = 1$.

Сделаем уравнение однородным, заменив в правой части равенства 1 на $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$. Получим

$$\sin^4 x + 3\sin x\cos^3 x = \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x.$$

После перенесения в одну часть получим

$$2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 3\sin x\cos^3 x = 0,$$
$$\cos^2 x(2\sin^2 x + \cos^2 x - 3\sin x\cos x) = 0.$$

Уравнение $\cos^2 x=0$ дает

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

при любом целом k. Уравнение

$$2\sin^2 x-3\sin x\cos x+\cos^2 x=0$$

равносильно уравнению

$$2\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+1=0,$$

откуда $\operatorname{tg} x=1$ и $\operatorname{tg} x=1/2$. Это дает еще два класса решений: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi$ при любом целом k. Наименьший период функции $\sin^4 x+3\sin x\cos^3 x-1$ равен, очевидно, π.

Итак, уравнение имеет три класса решений:

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi,$$

где k — любое целое.

Пример 4. $2\sin x+\cos x=1$.

Этот пример решим тремя способами.

Решение 1. $\cos x=1-2\sin x$; возведем обе части равенства в квадрат: $\cos^2 x=(1-2\sin x)^2$. Это уравнение является следствием исходного, но оно не обязано быть равносильным ему. Теперь левую часть выразим через $\sin x$ и получившееся уравнение решим относительно $\sin x$:

$$1-\sin^2 x=1-4\sin x+4\sin^2 x,\quad 5\sin^2 x-4\sin x=0,$$
$$\sin x(5\sin x-4)=0,\quad \sin x_1=0 \text{ и } \sin x_2=4/5.$$

Прежде чем находить угол по синусу, вернемся к исходному уравнению и определим из него косинус x. Получим $\cos x_1=1$ и $\cos x_2=-3/5$. Из $\sin x_1=0$ и $\cos x_1=1$ получим $x_1=2k\pi$. Из $\sin x_2=4/5$, $\cos x_2=-3/5$ находим $x_2=\pi-\arcsin 4/5+2k\pi$ (ибо $\cos x_2$ отрицателен).

Мы нашли два класса решений: $x_1=0+2k\pi$, $x_2=\pi-\arcsin\frac{4}{5}+2k\pi$ при любом целом k. Если бы находили x_1 и x_2 только по синусу, то нашли бы еще два класса решений: $x=\pi+2k\pi$, $x=\arcsin\frac{4}{5}+2k\pi$. Эти решения удовлетворяют преобразованному уравнению, но не удовлетворяют исходному.

Решение 2. Вспомним, что $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$ и $\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$. Относительно $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ мы получим уравнение

$$\frac{4z+1-z^2}{1+z^2}=1,$$

откуда $4z=2z^2$, $z_1=0$, $z_2=2$. Уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$ дает $\frac{x}{2}=0+k\pi$ и $x=0+2k\pi$, где k — целое; уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2$ дает $\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}2+k\pi$ и $x=2\operatorname{arctg}2+2k\pi$, где k — целое.

Нетрудно проверить, что $2\operatorname{arctg}2=\pi-\arcsin\frac{4}{5}$.

Решение 3. Приведем уравнение к однородному, положив

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2},\quad \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

и

$$1=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}.$$

Получим

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2},$$

откуда $2\sin^2\frac{x}{2}-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$; $2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\right)=0$. Приравнивая нулю первый множитель, получим $\sin\frac{x}{2}=0$, $\frac{x}{2}=0+k\pi$, $x=0+2k\pi$ при целом k. Приравнивание нулю второго множителя равносильно решению уравнения $\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2=0$, откуда $x=2\operatorname{arctg}2+2k\pi$ при целом k.

Пример 5. $2\sin x-\cos x=1$.

Решение 1. $\cos x=2\sin x-1$, откуда $\cos^2 x=(2\sin x-1)^2$, $1-\sin^2 x=4\sin^2 x-4\sin x+1$, $5\sin^2 x-4\sin x=0$, $\sin x_1=0$; $\sin x_2=4/5$. Мы решили относительно $\sin x$ преобразованное уравнение, являющееся следствием исходного, но не равносильное ему. Это уравнение оказалось точно таким же, как в примере 4. Из исходного уравнения определяем $\cos x$:

$$\cos x_1 = -1, \quad \cos x_2 = 3/5.$$

Наконец, $x_1 = \pi + 2k\pi$ при целом k, $x_2 = \arcsin\frac{4}{5} + 2k\pi$ при целом k. Мы получили те решения, которые были лишними в примере 4 при определении x по синусу без учета знака косинуса.

Решение 2. Переходим к $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Получим

$$\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 1,$$

$$4z - 1 + z^2 = 1 + z^2, \quad 4z = 2, \quad z = \frac{1}{2};$$

$$x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2k\pi, \quad k \text{ — любое целое.}$$

Второй класс решений $x = \pi + 2k\pi$ оказался потерян. Но он, если он есть, всегда теряется при переходе к тангенсу половинного аргумента.

Решение 3. Заменим $\sin x$ на $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x$ на $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, 1 на $\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$. Получим однородное уравнение

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2};$$

$$2\cos\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Приравнивание нулю первого множителя дает $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pi + 2k\pi$ при целом k. Из второго находим $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2k\pi$, где k — любое целое. На этот раз класс решений $x = \pi + 2k\pi$ оказался не потерянным.

Кроме указанных приемов решения тригонометрических уравнений, сводящихся к выражению через одну функцию, существуют другие приемы, основанные на использовании других свойств тригонометрических функций и преобразований тригонометрических выражений. Разнообразие этих приемов очень велико, и мы ограничимся лишь рассмотрением нескольких примеров.

Пример 6. $\sin 3x = \sin x$.

Решение 1. Имеем $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Подставив в уравнение и положив $\sin x = z$, получим алгебраическое уравнение $3z - 4z^3 = z$, откуда $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$, $z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Из $\sin x = 0$ получим два класса решений: $x = 0 + 2k\pi$ и $x = \pi + 2k\pi$, где k — целое. Из $\sin x = 1/\sqrt{2}$ — еще два класса:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ и } x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \text{ где } k \text{ — любое целое.}$$

Из $\sin x = -1/\sqrt{2}\,\pi$ получим $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, где k — целое. Всего получили шесть классов решений.

Решение 2. Синусы аргументов $3x$ и x равны. Следовательно, эти аргументы связаны одним из соотношений $3x = x + 2k\pi$ и $3x = \pi - x + 2k\pi$, где k — любое целое. Первое дает $x = k\pi$ при целом k, что дает при четных и нечетных значениях для k первые два класса решений: $x = 2k\pi$ и $x = \pi + 2k\pi$. Второе соотношение дает $x = \frac{2k+1}{4}\pi$. При $k = 0, 1, 2, 3$ получим $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi = -\frac{3}{4}\pi + 2\pi$, $x = \frac{7}{4}\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi$. При $k = 4, 5, \ldots, k = -1, -2, \ldots$ будут получаться те же решения с добавлением 2π, затем 4π и т. д.; -2π, -4π и т. д. Таким образом, при $k = 0, 1, 2, 3$ мы получаем решения из остальных четырех классов.

Пример 7. $a\sin x + b\cos x = c$.

Решение 1. Приведем уравнение к однородному, сделав замены $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ и $1 = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$. Получим

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = c\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)$$

и, после перенесения в одну часть,

$$(c+b)\sin^2\frac{x}{2} - 2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + (c-b)\cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

Если $c + b \neq 0$, придем к равносильному уравнению

$$(c+b)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + (c-b) = 0,$$

откуда $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c+b}$, откуда получим два класса решений:

$$x=2\operatorname{arctg}\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c+b}+2k\pi,\quad k\text{ — целое},$$

если только $a^2+b^2>c^2$. Они сливаются в один класс

$$x=2\operatorname{arctg}\frac{a}{c+b}+2k\pi,$$

если $a^2+b^2=c^2$, и решения не существуют, если $a^2+b^2<c^2$.

Если же $b+c=0$ и $a\neq 0$, то преобразованное уравнение есть

$$\cos\frac{x}{2}\left((c-b)\cos\frac{x}{2}-2a\sin\frac{x}{2}\right)=0,$$

откуда, приравнивая к нулю сомножители, получим $x=\pi+2k\pi$, $x=2\operatorname{arctg}\frac{c-b}{2a}+2k\pi$ при целом k.

Если же $b+c=0$ и $a=0$, но $c=-b\neq 0$, получается один класс решений $x=\pi+2k\pi$ при целом k.

Решение 2. Поделим обе части исходного уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$ и найдем угол α такой, что $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Это возможно, так как сумма квадратов правых частей равна 1. Уравнение принимает вид

$$\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

или

$$\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Это уравнение имеет решения при $|c|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ или, что то же самое, $c^2\leqslant a^2+b^2$. При условии $c^2<a^2+b^2$ имеется два класса решений:

$$x=-\alpha+\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+2k\pi$$

и

$$x=-\alpha+\pi-\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+2k\pi,\quad k\text{ — целое}.$$

Они сливаются в один класс при $c=\sqrt{a^2+b^2}$ и при $c=-\sqrt{a^2+b^2}$. В первом случае $x=-\alpha+\arcsin 1+2k\pi=-\alpha+\frac{\pi}{2}+2k\pi$. Во втором случае $x=-\alpha+\arcsin(-1)+2k\pi=-\alpha-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Пример 8. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x=0$.

Решение. Воспользуемся приемом «свертывания» сумм значений тригонометрических функций, описанным в § 6.

Имеем

$$2\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x)=$$
$$=2\sin\frac{x}{2}\sin x+2\sin\frac{x}{2}\sin 2x+2\sin\frac{x}{2}\sin 3x+$$
$$+2\sin\frac{x}{2}\sin 4x+2\sin\frac{x}{2}\sin 5x=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3}{2}x+$$
$$+\cos\frac{3}{2}x-\cos\frac{5}{2}x+\cos\frac{5}{2}x-\cos\frac{7}{2}x+\cos\frac{7}{2}x-\cos\frac{9}{2}x+$$
$$+\cos\frac{9}{2}x-\cos\frac{11}{2}x=\cos\frac{1}{2}x-\cos\frac{11}{2}x=2\sin 3x\cdot\sin\frac{5}{2}x,$$

так что уравнение преобразуется в $\dfrac{\sin 3x\cdot\sin\frac{5}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}=0$.

Приравнивая к нулю числитель, получим $\sin 3x=0$ или $\sin\frac{5}{2}x=0$, откуда $3x=k\pi$ или $\frac{5}{2}x=k\pi$ и $x=\frac{k\pi}{3}$ и $x=\frac{2k\pi}{5}$, где k — целое.

Период левой части исходного уравнения равен 2π. Для того чтобы получить представителей из всех классов решений, нужно положить в первом случае $k=0$, 1, 2, 3, 4, 5 и во втором $k=0$, 1, 2, 3, 4. В обоих случаях при $k=0$ получается один и тот же класс, содержащий $x=0$. Хотя при $x=0$ знаменатель преобразованного уравнения обращается в нуль, так что $x=0$ не является корнем преобразованного уравнения, для исходного уравнения $x=0$ является корнем. Решения же $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$, $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{4}{5}\pi$, $\frac{6}{5}\pi$, $\frac{8}{5}\pi$ принадлежат попарно различным классам, так что исходное уравнение имеет 10 классов решений.

§ 13. Решение простейших тригонометрических неравенств

В настоящем параграфе аргумент тригонометрических функций будем обозначать буквой φ ввиду того, что буквы x и y будут заняты как координаты точек на плоскости с изображенной на ней окружностью радиуса 1.

Начнем с неравенства $\sin\varphi \geqslant a$, где $0 \leqslant a < 1$. Точки на единичной окружности, отвечающие аргументам φ, расположены выше прямой $y=a$ и на самой прямой (рис. 14). Аргументы, очевидно, удовлетворяют неравенствам

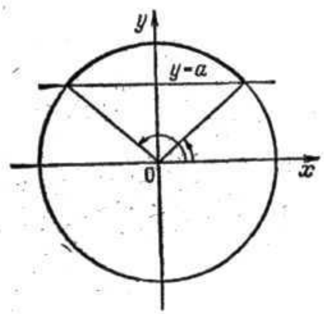

Рис. 14

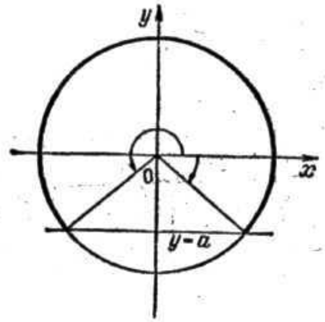

Рис. 15

$\arcsin a \leqslant \varphi \leqslant \pi - \arcsin a$ и, более общо, $\arcsin a + 2k\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi - \arcsin a + 2k\pi$. При решении неравенства $\sin\varphi > a$ в описании решений следует исключить знаки равенства.

При $-1 < a < 0$ аргументы, дающие решения неравенства $\sin\varphi \geqslant a$, заполняют дугу единичной окружности, расположенную выше прямой $y=a$ (рис. 15). Эта дуга по длине больше полуокружности. Она снова характеризуется неравенствами $\arcsin a \leqslant \varphi \leqslant \pi - \arcsin a$ и, более общо, $\arcsin a + 2k\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi - \arcsin a + 2k\pi$.

Неравенство $\sin\varphi \leqslant b$ решается аналогично. Оно описывается неравенствами $-\pi - \arcsin b \leqslant \varphi \leqslant \arcsin b$ и, более общо, $(2k-1)\pi - \arcsin b \leqslant \varphi \leqslant \arcsin b + 2k\pi$ (рис. 16).

Решения двойного неравенства $a \leqslant \sin\varphi \leqslant b$, где $-1 \leqslant a < b \leqslant 1$ соответствуют точкам единичной окружности внутри полосы между прямыми $y=a$ и $y=b$. Эти точки заполняют две дуги (сливающиеся при $a=-1$ или при $b=1$), включая их концы (рис. 17). Соответствующие аргументы характеризуются двумя двойными неравенствами:

$$\arcsin a \leqslant \varphi \leqslant \arcsin b,$$
$$\pi - \arcsin b \leqslant \varphi \leqslant \pi - \arcsin a.$$

К аргументам можно прибавлять $2k\pi$, при целых k, что приводит к неравенствам

$$\arcsin a + 2k\pi \leqslant \varphi \leqslant \arcsin b + 2k\pi,$$
$$(2k+1)\pi - \arcsin b \leqslant \varphi \leqslant (2k+1)\pi - \arcsin a.$$

Если в исходном неравенстве знаки равенства исключены при a или при b, то в описании решений нужно исклю-

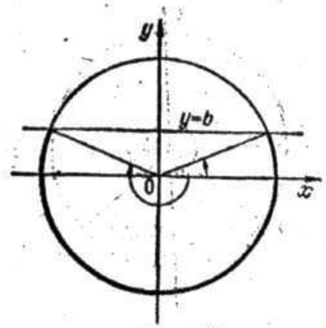

Рис. 16

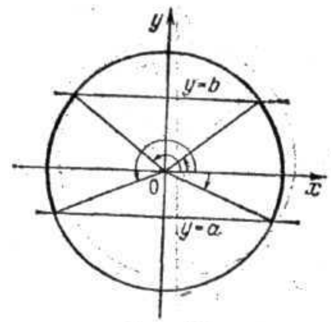

Рис. 17

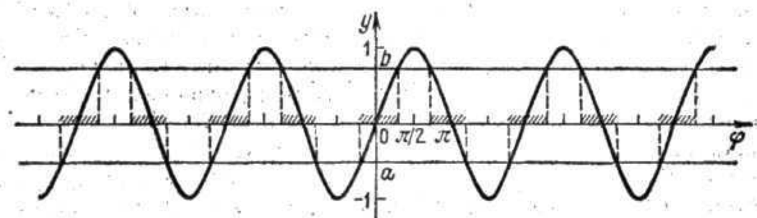

Рис. 18

чить соответствующие знаки равенства. Решения хорошо иллюстрируются при помощи графика функций $y=\sin\varphi$ (рис. 18).

Решения, описываемые неравенствами

$$\arcsin a + 2k\pi \leqslant \varphi \leqslant \arcsin b + 2k\pi,$$

соответствуют дугам синусоиды, вырезаемым полосой между прямыми $y=a$ и $y=b$ на восходящих участках синусоиды, решения же

$$(2k+1)\pi-\arcsin b\leqslant\varphi\leqslant(2k+1)\pi-\arcsin a$$

соответствуют аналогичным дугам на нисходящих участках.

Решения неравенств $\cos\varphi\geqslant a$, $\cos\varphi\leqslant b$ и $a\leqslant\cos\varphi\leqslant b$ аналогичны. Точки на единичной окружности, соответствующие решениям первого неравенства, лежат направо от прямой $x=a$, и сами решения описываются формулой

$$-\arccos a+2k\pi\leqslant\varphi\leqslant\arccos a+2k\pi$$

(рис. 19). Точки, соответствующие решениям второго неравенства, лежат налево от прямой $x=b$, и решения характеризуются неравенствами

$$\arccos b+2k\pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\arccos b+2k\pi.$$

Точки, соответствующие решениям двойного неравенства, расположены на дугах, вырезанных полосой между прямыми $x=a$ и $x=b$. Решения описываются неравенствами

$$\arccos b+2k\pi\leqslant\varphi\leqslant\arccos a+2k\pi,$$
$$-\arccos a+2k\pi\leqslant\varphi\leqslant-\arccos b+2k\pi.$$

Выразив арккосинус через арксинус, мы получим неравенства для решений неравенства $\cos\varphi\geqslant a$:

$$-\frac{\pi}{2}+\arcsin a+2k\pi\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}-\arcsin a+2k\pi;$$

для решений неравенства $\cos\varphi\leqslant b$:

$$\frac{\pi}{2}-\arcsin b+2k\pi\leqslant\varphi\leqslant\frac{3}{2}\pi+\arcsin b+2k\pi;$$

для решений неравенства $a\leqslant\cos\varphi\leqslant b$:

$$-\arcsin b+\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}-\arcsin a+2k\pi$$

и

$$\arcsin a-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\varphi\leqslant\arcsin b-\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

К этим же формулам мы пришли бы, воспользовавшись тем, что $\cos\varphi=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$, и применяя соответствующие неравенства для синуса.

Функция тангенс имеет период π, непрерывна и возрастает на интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$, $\operatorname{tg}\varphi\to+\infty$ при

$\varphi\to\pi/2$ и $\varphi<\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\varphi\to-\infty$ при $\varphi\to-\pi/2$ и $\varphi>-\pi/2$. Поэтому решение неравенства $\operatorname{tg}\varphi\geqslant a$ при $-\pi/2<\varphi<\pi/2$ дается формулой $\operatorname{arctg} a\leqslant\varphi<\pi/2$ (рис. 20). Все же решения этого неравенства содержатся в формуле $\operatorname{arctg} a+k\pi\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}+k\pi$. Соответственно решения неравенства

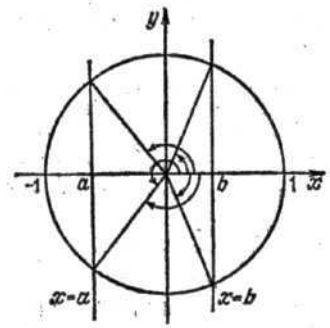

Рис. 19

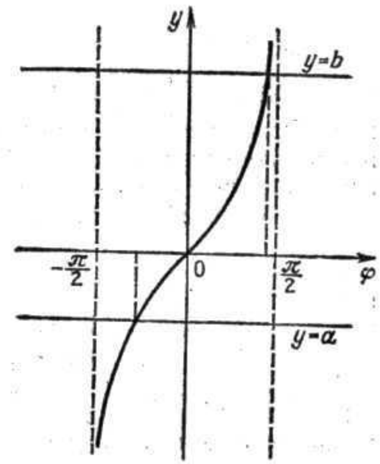

Рис. 20

$\operatorname{tg}\varphi\leqslant b$ при $-\pi/2<\varphi<\pi/2$ даются формулой $-\pi/2<\varphi\leqslant\operatorname{arctg} b$. Наконец, решения двойного неравенства $a\leqslant\operatorname{tg}\varphi\leqslant b$ описываются формулой

$$\operatorname{arctg} a+k\pi\leqslant\varphi\leqslant\operatorname{arctg} b+k\pi.$$

§ 14. Тригонометрические неравенства более общего вида

Рассмотрим неравенства вида $F(x)\geqslant 0$, где $F(x)$ — рациональная функция от тригонометрических функций. Для решения таких неравенств можно применять следующие два приема. Во-первых, можно выразить $F(x)$ через одну из тригонометрических функций, например через тангенс половинного угла. Приняв эту функцию за новую неизвестную, мы получим алгебраическое неравенство относительно этой неизвестной. Для решения этого неравенства можно применить приемы, известные из курса алгебры*).

*) См., например, гл. 12 «Алгебры 6—8».

В результате для новой неизвестной получается один или несколько промежутков. На основании исследования простейших тригонометрических неравенств, данного в предыдущем параграфе, мы сможем описать решения исходного неравенства.

Второй прием основывается на кажущемся очевидным свойстве непрерывных функций: *на промежутке, внутри которого функция непрерывна и не обращается в* 0, *ее значения сохраняют один и тот же знак.* На этом пути при исследовании неравенства $F(x)\geqslant 0$ следует найти все точки разрыва $F(x)$ и все значения x, при которых $F(x)=0$, расположить все эти точки в порядке возрастания их абсцисс и рассмотреть знак $F(x)$ на каждом промежутке между отмеченными точками. Для периодической $F(x)$ достаточно провести эту работу на промежутке, длина которого равна периоду.

Пример 1. Решить неравенство $2\cos^2 x > 3\sin x$.

Решение. Выразив косинус через синус и перенеся все члены в одну часть, придем к равносильному неравенству $2-2\sin^2 x-3\sin x>0$. Положив $\sin x=z$, получим алгебраическое неравенство $-2z^2-3z+2>0$. Как мы знаем, квадратичный трехчлен с отрицательным старшим коэффициентом принимает положительные значения в промежутке между его корнями. Таковыми являются $z_1=-2$ и $z_2=1/2$. Таким образом, решения алгебраического неравенства описываются неравенством $-2<z<1/2$. Остается решить простейшее тригонометрическое неравенство $-2<\sin x<1/2$. Неравенство $-2<\sin x$ выполняется всегда, и его не нужно принимать во внимание. Решения же неравенства $\sin x<\frac{1}{2}$ описываются формулой $\frac{5\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}+2\pi$ и, в целом, формулами $\frac{5\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{6}+2(k+1)\pi$, где k — любое целое.

Пример 2. $\sin 3x\geqslant\sin x$.

Решение 1. Выразим $\sin 3x$ через $\sin x$:

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x.$$

Исходное неравенство принимает вид

$$2\sin x-4\sin^3 x\geqslant 0.$$

Положив $\sin x=z$, получим $2z(1-2z^2)\geqslant 0$; $4z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-z\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+z\right)\geqslant 0$. Корни левой части суть $-1/\sqrt{2}$, 0, $1/\sqrt{2}$.

Левая часть неотрицательна на промежутках $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ и $[0, 1/\sqrt{2}]$. Первый промежуток порождает неравенство для синуса: $\sin x\leqslant-\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $\frac{5}{4}\pi\leqslant x\leqslant\frac{7}{4}\pi$. Второй промежуток порождает неравенство $0\leqslant\sin x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда для x получается два промежутка: $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\pi$. Мы описали решения, содержащиеся в промежутке $[0, 2\pi)$. Остальные решения получаются посредством добавления $2k\pi$ при целом k к границам для x. На единичной окружности множество решений заполнят три дуги, изображенные на рис. 21.

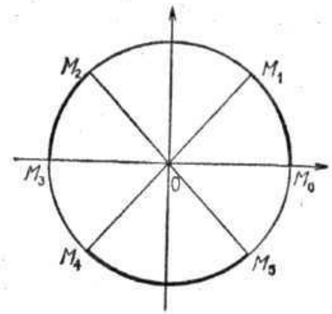

Рис. 21

Решение 2. Уравнение $\sin 3x=\sin x$ решено в примере 6 § 12. Его шесть корней (в пределах одного периода) разбивают единичную окружность на 6 дуг. Достаточно выяснить знак $F(x)=\sin 3x-\sin x$ хотя бы в одной точке внутри дуги, чтобы узнать, определяет эта дуга решения или нет. На дуге M_0M_1 возьмем $x=\frac{\pi}{6}$. Тогда $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$. Следовательно, дуга M_0M_1 входит в геометрическое изображение множества решений. На дуге M_1M_2

$$x=\frac{\pi}{2},\quad F(x)=-1-1=-2<0.$$

Дуга M_1M_2 не входит в геометрическое изображение множества решений. На дуге M_2M_3

$$x=\frac{5\pi}{6},\quad F(x)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0.$$

Дуга M_2M_3 входит в геометрическое изображение множества решений. На дуге M_3M_4

$$x=\frac{7\pi}{6},\quad F(x)=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0.$$

Дуга M_3M_4 не входит в геометрическое изображение множества решений. На дуге M_4M_5 $x = -\pi/2$, $F(-\pi/2) = 1 - (-1) > 0$. Дуга M_4M_5 входит в множество решений. Наконец, на дуге M_5M_0

$$x = -\frac{\pi}{6}, \quad F(x) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Дуга M_5M_0 не входит в геометрическое изображение множества решений.

◀ Пример 3. Решить неравенство $\operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{tg} x > 0$.

Решение. Наименьший период функции $F(x) = \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{tg} x$ равен π, так что неравенство достаточно исследовать на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Концы этого интервала являются точками разрыва для $\operatorname{tg} x$, следовательно, и для $F(x)$. Кроме того, точками разрыва для $F(x)$ являются точки разрыва функции $\operatorname{tg} 2x$, т. е. $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$ (в пределах интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$). Исследуем поведение функции $F(x)$ вблизи точек разрыва. С этой целью рассмотрим таблицу:

x	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} 2x$	$F(x)$
$x \to -\frac{\pi}{2}$ справа	$\to -\infty$	$\to 0$	$\to +\infty$
$x \to -\frac{\pi}{4}$ слева	$\to -1$	$\to +\infty$	$\to +\infty$
$x \to -\frac{\pi}{4}$ справа	$\to -1$	$\to -\infty$	$\to -\infty$
$x \to \frac{\pi}{4}$ слева	$\to 1$	$\to +\infty$	$\to +\infty$
$x \to \frac{\pi}{4}$ справа	$\to 1$	$\to -\infty$	$\to -\infty$
$x \to \frac{\pi}{2}$ слева	$\to +\infty$	$\to 0$	$\to -\infty$

Таким образом, очертания графика вблизи точек разрыва имеют вид, показанный на рис. 22.

Уравнение $\operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{tg} x = 0$ легко решается. Оно равносильно уравнению $3\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0$, откуда $\operatorname{tg} x_1 = -1/\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} x_2 = 0$ и $\operatorname{tg} x_3 = 1/\sqrt{3}$ и, в пределах интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, $x_1 = -\pi/6$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi/6$. Эти точки вместе с точками разрыва разбивают интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ на шесть интервалов, на каждом из которых $F(x)$ сохраняет знак. Из проведенного исследования (рис. 22) поведения $F(x)$ на интервале $(-\pi/2, -\pi/4)$ заключаем, что на нем $F(x)$ положительна. На интервале $(-\pi/4, -\pi/6)$ $F(x)$ отрицательна, ибо она отрицательна немного правее точки $-\pi/4$. По тем же соображениям $F(x)$ положительна на $(\pi/6, \pi/4)$ и отрицательна на $(\pi/4, \pi/2)$. Осталось рассмотреть интервалы $(-\pi/6, 0)$ и $(0, \pi/6)$, примыкающие к точке 0. Имеем

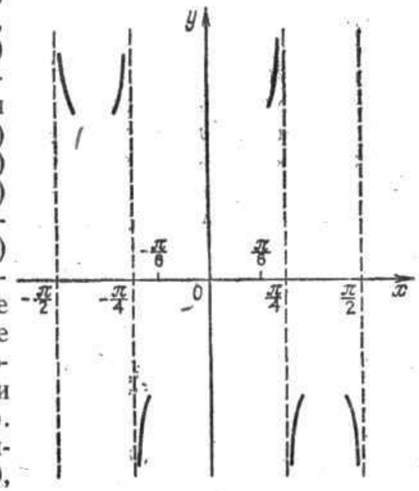

Рис. 22

$$F(x) = \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - 3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x\left(\frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - 3\right).$$

Второй сомножитель стремится к -1 при $x \to 0$. Первый же, $\operatorname{tg} x$, меняет знак с «$-$» на «$+$», когда x, возрастая, проходит через 0. Следовательно, $F(x)$ меняет знак с «$+$» на «$-$», т. е. $F(x)$ слева от точки $x = 0$ и, следовательно, на всем интервале $(-\pi/6, 0)$ положительна и справа на интервале $(0, \pi/6)$ отрицательна.

Итак, на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ решения неравенства даются точками на интервалах $(-\pi/2, -\pi/4)$, $(-\pi/6, 0)$ и $(\pi/6, \pi/4)$. Все решения получаются из этих посредством добавления $k\pi$ к концам интервалов при любом целом k.

Пример 4.

$$F(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x > 0.$$

Левая часть $F(x)$ имеет период 2π. При $x = 0$ и $x = 2\pi$ она обращается в 0. Подобно примеру 7 из § 12, левую часть $F(x)$ приводим к виду $F(x)=\dfrac{\sin 2x \sin \frac{5}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$. На интервале $(0,\ 2\pi)$ знаменатель $\sin\frac{x}{2}$ положителен. Числитель же на интервале $[0,\ 2\pi]$, кроме точек $x=0$ и $x=2\pi$, обращается в нуль в корнях $\pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ сомножителя $\sin 2x$ и в корнях $2\pi/5,\ 4\pi/5,\ 6\pi/5,\ 8\pi/5$ сомножителя $\sin\frac{5}{2}x$. При переходе через каждый из этих корней соответствующий сомножитель числителя, а вместе с ним $F(x)$, меняет знак на обратный. Корни, расположенные в порядке возрастания, разбивают промежуток $(0,\ 2\pi)$ на 8 частей (рис. 23). На смежных промежутках $F(x)$ имеет значения

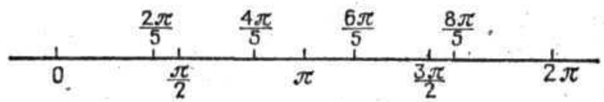

Рис. 23

противоположных знаков. Очевидно, что $F(x)>0$ при достаточно малом положительном x. Поэтому $F(x)$ положительна на первом, третьем, пятом и седьмом интервалах и отрицательна на втором, четвертом, шестом и восьмом. Таким образом, при $0\leqslant x<2\pi$ решения неравенства $F(x)>0$ даются значениями x из интервалов $\left(0,\ \frac{2}{5}\pi\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{4}{5}\pi\right),\ \left(\pi,\ \frac{6}{5}\pi\right)$ и $\left(\frac{3}{2}\pi,\ \frac{8}{5}\pi\right)$. ►

◄ § 15. Примеры на доказательство неравенств с тригонометрическими выражениями

Иногда в применениях теории тригонометрических функций к различным вопросам возникает потребность в доказательствах некоторых неравенств.

При доказательствах тригонометрических неравенств используются известные алгебраические неравенства наряду с неравенствами, специфическими для тригонометрических функций, такими, как, например, $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$, $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$. При проведении доказательств нужно использовать свойства тригонометрических функций, в частности зависимости между значениями тригонометрических функций. Однако указать какие-либо общие правила для доказательства неравенств с тригонометрическими выражениями невозможно, так что мы ограничимся рассмотрением нескольких примеров, на которых продемонстрируем различные идеи доказательств.

Пример 1. Доказать, что $\cos^2\varphi+\operatorname{tg}^2\varphi\geqslant 2\sin\varphi$.

Доказательство. $\cos^2\varphi+\operatorname{tg}^2\varphi-2\sin\varphi=\cos^2\varphi+\operatorname{tg}^2\varphi-2\cos\varphi\operatorname{tg}\varphi=(\cos\varphi-\operatorname{tg}\varphi)^2\geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Доказанное неравенство становится тривиальным, если $\sin\varphi<0$. Легко доказать более сильное неравенство

$$\cos^2\varphi+\operatorname{tg}^2\varphi\geqslant 2|\sin\varphi|.$$

Пример 2. Доказать, что $|a\cos x+b\sin x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

Решение. Положим $a=r\cos\alpha$, $b=r\sin\alpha$. Тогда

$$a^2+b^2=r^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=r^2;\quad \cos\alpha=\frac{a}{r},\quad \sin\alpha=\frac{b}{r}.$$

Аргумент α, удовлетворяющий последним требованиям, существует, ибо

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{b}{r}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{r^2}=1.$$

Далее,

$$a\sin\varphi+b\cos\varphi=r\cos\alpha\sin\varphi+r\sin\alpha\cos\varphi=r\sin(\varphi+\alpha)$$

и

$$|a\sin\varphi+b\cos\varphi|=r|\sin(\varphi+\alpha)|\leqslant r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Пример 3. Доказать, что $4\cos\varphi+3+\cos 2\varphi\geqslant 0$.

Доказательство.

$$4\cos\varphi+3+\cos 2\varphi=4\cos\varphi+3+2\cos^2\varphi-1=$$
$$=2(\cos^2\varphi+2\cos\varphi+1)=2(\cos\varphi+1)^2\geqslant 0.$$

Пример 4. Доказать, что если $\sin^2 x+\sin^2 y<1$, то $|\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y|<1$.

Дадим два доказательства.

Доказательство 1. Рассмотрим

$$(\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y)^2-1=\frac{\sin^2 x\sin^2 y}{\cos^2 x\cos^2 y}-1=$$
$$=\frac{\sin^2 x\sin^2 y-(1-\sin^2 x)(1-\sin^2 y)}{\cos^2 x\cos^2 y}=$$
$$=\frac{\sin^2 x\sin^2 y-1+\sin^2 x+\sin^2 y-\sin^2 x\sin^2 y}{\cos^2 x\cos^2 y}=$$
$$=\frac{\sin^2 x+\sin^2 y-1}{\cos^2 x\cos^2 y}<0,$$

откуда $(\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y)^2<1$, $|\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y|<1$.

Доказательство 2. Из неравенства $\sin^2 x + \sin^2 y < 1$ следует $\sin^2 x < 1 - \sin^2 y = \cos^2 y$ и $\sin^2 y < \cos^2 x$, откуда

$$(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)^2 = \frac{\sin^2 x \sin^2 y}{\cos^2 x \cos^2 y} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 y} \cdot \frac{\sin^2 y}{\cos^2 x} < 1.$$

Пример 5. Доказать, что если $|a| \leqslant 1$ и $|b| \leqslant 1$, то $|a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}| \leqslant 1$.

Доказательство. Положим $a = \cos\alpha$, $\sqrt{1-a^2} = \sin\alpha$. Такое α существует, ибо $a^2 + (\sqrt{1-a^2})^2 = 1$. Аналогично $b = \cos\beta$, $\sqrt{1-b^2} = \sin\beta$. Тогда $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)$ и

$$|a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}| = |\sin(\alpha+\beta)| \leqslant 1.$$

Прямое алгебраическое доказательство предложенного неравенства было бы технически сложнее. ▶

§ 16. Дифференциалы и производные тригонометрических функций

Для наглядного изображения дифференциалов и производных от функций косинус и синус обратимся к их изображению на окружности радиуса 1. Аргумент этих

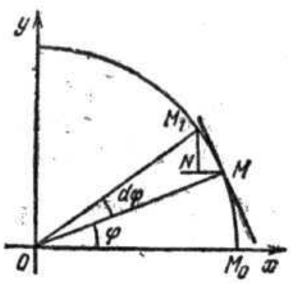

Рис. 24

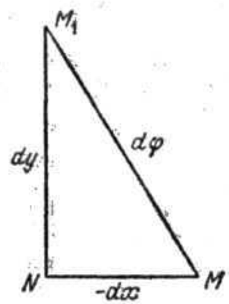

Рис. 25

функций обозначим буквой φ и для простоты будем считать его острым углом (рис. 24). Его величина равна длине дуги M_0M. Проведем касательную к окружности в точке M. Она перпендикулярна к радиусу OM.

Пусть $d\varphi$ — бесконечно малое приращение аргумента. Оно есть длина бесконечно малой дуги M_1M, которая плотно примыкает к отрезку касательной. Через точку M_1 проведем вертикальную прямую, через M — горизонтальную. Пусть N — их точка пересечения. Изобразим треугольник MM_1N в сильном увеличении (рис. 25), отождествив дугу MM_1 с отрезком касательной и приращения координат $x = \cos\varphi$ и $y = \sin\varphi$ — с их дифференциалами. Угол при вершине M_1 (после замены дуги на отрезок касательной) равен углу φ, ибо стороны M_1N и M_1M этого угла перпендикулярны сторонам OM_0 и OM угла φ.

Итак,

$$dx = d\cos\varphi = -MN = -MM_1\sin\varphi = -\sin\varphi\, d\varphi,$$
$$dy = d\sin\varphi = M_1N = MM_1\cos\varphi = \cos\varphi\, d\varphi.$$

Отсюда

$$(\cos\varphi)' = -\sin\varphi, \quad (\sin\varphi)' = \cos\varphi.$$

◀ Это наглядное, но не вполне строгое рассуждение можно заменить более строгим, основанным на предельном соотношении $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$. Из этого соотношения следует, что $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$. Действительно,

$$\frac{1-\cos h}{h} = \frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h(1+\cos h)} = \frac{\sin^2 h}{h} \cdot \frac{1}{1+\cos h} = \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{1+\cos h} \cdot \sin h;$$

первый множитель стремится к 1 при $h \to 0$, второй — к 1/2 и третий — к нулю, так что $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$.

Далее,

$$(\cos\varphi)' = \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\cos(\varphi+\Delta\varphi) - \cos\varphi}{\Delta\varphi} =$$
$$= \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\cos\varphi\cos\Delta\varphi - \sin\varphi\sin\Delta\varphi - \cos\varphi}{\Delta\varphi} =$$
$$= \lim_{\Delta\varphi\to 0} \left(-\sin\varphi \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} - \cos\varphi \frac{1-\cos\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\right) = -\sin\varphi.$$

Итак, $(\cos\varphi)' = -\sin\varphi$. Аналогично

$$(\sin\varphi)' = \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \sin\varphi}{\Delta\varphi} =$$
$$= \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\sin\varphi\cos\Delta\varphi + \cos\varphi\sin\Delta\varphi - \sin\varphi}{\Delta\varphi} =$$
$$= \lim_{\Delta\varphi\to 0} \left(\cos\varphi \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} - \sin\varphi \frac{1-\cos\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\right) = \cos\varphi,$$

так что $(\sin\varphi)' = \cos\varphi$. ▶

Производная от тангенса находится по правилу вычисления производной дроби:

$$(\operatorname{tg}\varphi)'=\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)'=\frac{\cos\varphi(\sin\varphi)'-\sin\varphi(\cos\varphi)'}{\cos^2\varphi}=\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

Итак, $(\operatorname{tg}\varphi)'=\frac{1}{\cos^2\varphi}$ и $d\operatorname{tg}\varphi=\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$.

Для котангенса:

$$(\operatorname{ctg}\varphi)'=\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)'=\frac{\sin\varphi(\cos\varphi)'-\cos\varphi(\sin\varphi)'}{\sin^2\varphi}=$$
$$=\frac{-\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}=\frac{-1}{\sin^2\varphi},$$

так что $(\operatorname{ctg}\varphi)'=-\frac{1}{\sin^2\varphi}$ и $d\operatorname{ctg}\varphi=-\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}$.

Рассмотрим несколько примеров на вычисление производных и дифференциалов выражений, зависящих от тригонометрических функций.

Пример 1. $y=(\sin\varphi+\cos\varphi)^2$; найти dy и y'.

Решение.

$$dy=2(\sin\varphi+\cos\varphi)\,d(\sin\varphi+\cos\varphi)=$$
$$=2(\sin\varphi+\cos\varphi)(\cos\varphi-\sin\varphi)\,d\varphi=$$
$$=2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\,d\varphi=2\cos2\varphi\,d\varphi;$$
$$y'=2\cos2\varphi.$$

Иначе:

$$y=\sin^2\varphi+2\sin\varphi\cos\varphi+\cos^2\varphi=1+\sin2\varphi,$$
$$dy=d\sin2\varphi=\cos2\varphi\,d(2\varphi)=2\cos2\varphi\,d\varphi.$$

Пример 2. $y=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$; найти y'.

Решение.

$$y'=\frac{(1+\operatorname{tg}x)(1-\operatorname{tg}x)'-(1-\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}x)'}{(1+\operatorname{tg}x)^2}=$$
$$=\frac{-(1+\operatorname{tg}x)\cdot\frac{1}{\cos^2x}-(1-\operatorname{tg}x)\cdot\frac{1}{\cos^2x}}{(1+\operatorname{tg}x)^2}=\frac{-2}{\cos^2x(1+\operatorname{tg}x)^2}.$$

Ответ можно еще преобразовать:

$$y'=-\frac{2}{\cos^2x(1+\operatorname{tg}x)^2}=-\frac{2}{(\cos x+\cos x\operatorname{tg}x)^2}=\frac{-2}{(\cos x+\sin x)^2}=$$
$$=-\frac{2}{\cos^2x+2\cos x\sin x+\sin^2x}=-\frac{2}{1+\sin2x}.$$

Пример 3. $y=\sin^4x+\cos^4x$.

Решение.

$$y'=4\sin^3x\cos x+4\cos^3x(-\sin x)=$$
$$=4\sin x\cos x(\sin^2x-\cos^2x)=-2\sin2x\cos2x=-\sin4x.$$

Иначе:

$$y=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^22x,$$
$$y'=-\frac{1}{2}\cdot2\sin2x\cos2x\cdot2=-\sin4x.$$

Рассмотрим теперь примеры применения дифференциала к приближенному вычислению значений тригонометрических функций.

Пример 1. Найти приближенно $\sin31°$.

Решение. Пусть $x=30°=\frac{\pi}{6}$; $dx=1°=\frac{\pi}{180}$; $\sin30°=\frac{1}{2}$;

$$\Delta\sin x\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}\approx d\sin x\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}\cdot dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180};$$

$$\sin31°\approx0{,}515115.$$

В действительности с пятью знаками после запятой $\sin31°\approx0{,}51504$.

Пример 2. Найти приближенно $\operatorname{tg}44°$.

Решение. Пусть $x=45°=\frac{\pi}{4}$, $dx=-1°=-\frac{\pi}{180}$. Так как $\operatorname{tg}45°=1$, то

$$\Delta\operatorname{tg}x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}\approx d\operatorname{tg}x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}dx=-\frac{\pi}{90}\approx-0{,}0349,$$

$$\operatorname{tg}44°\approx1-0{,}0349=0{,}9651.$$

В действительности с четырьмя знаками после запятой $\operatorname{tg}44°=0{,}9657$.

§ 17. Применение производных к исследованию функций, выражающихся через тригонометрические

Периодическую функцию с наименьшим периодом T достаточно исследовать на полуоткрытом интервале длины T, например на $[0,\ T)$ или $\left(-\frac{1}{2}T,\ \frac{1}{2}T\right]$.

Пример 1. Построить график функции $y=\sin x+\cos x$.

Решение. Функция y непрерывна и имеет период 2π. Исследуем ее на интервале $[0;\ 2\pi)$. Значения функции на концах этого интервала равны 1. Производная равна $y' = \cos x - \sin x = \cos x(1-\operatorname{tg} x)$. Она обращается в нуль при $\operatorname{tg} x = 1$ (и не обращается в 0 там, где $\cos x = 0$, что видно из непреобразованного выражения производной), т. е. на интервале $[0, 2\pi)$ в точках $x=\pi/4$ и $x=5\pi/4$. Если x, возрастая, проходит через $\pi/4$ или через $5\pi/4$, $\operatorname{tg} x$ проходит от значений, меньших 1, к значениям, большим 1, так что множитель $1-\operatorname{tg} x$ меняет знак с «+» на «—». Далее, $\cos\frac{\pi}{4} > 0$ и $\cos\frac{5\pi}{4} < 0$. Поэтому при переходе x через $\pi/4$ производная y' меняет знак

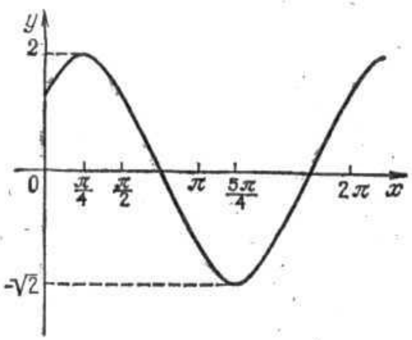

Рис. 26

с «+» на «—», так что функция y переходит от возрастания к убыванию и имеет максимум при $x=\pi/4$. При переходе же x через $5\pi/4$ y' меняет знак с «—» на «+», функция y переходит от убывания к возрастанию и имеет минимум при $x=5\pi/4$. Значение в максимуме равно $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$, значение в минимуме равно $-\sqrt{2}$. График функции $y=\sin x+\cos x$ на интервале $[0, 2\pi]$ изображен на рис. 26. График пересекает ось абсцисс в точках $x=3\pi/4$ и $x=7\pi/4$.

Заметим, что эту функцию можно было исследовать (и даже в более общем виде это было сделано выше) элементарными средствами, не обращаясь к дифференциальному исчислению. Дело в том, что

$$y=\sin x+\cos x=$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

т. е. графиком этой функции является синусоида с периодом 2π, амплитудой $\sqrt{2}$ и со сдвигом влево на $\frac{\pi}{4}$.

Пример 2. Построить график функции $y=\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x$.

Решение. Период функции равен π. Достаточно ее исследовать на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ (концы не включаем, так как в них функция не определена). Точками разрыва являются точки $x=\pi/4$ и $x=-\pi/4$, в этих точках разрывается $\operatorname{tg} 2x$.

Поведение функции $y=\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 2x$ вблизи концов интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ и в окрестности точек разрыва $-\pi/4$, $\pi/4$ выясняется из приведенной ниже таблицы, из которой определяем фрагменты графика (рис. 27).

x	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} 2x$	y
$x\to-\frac{\pi}{2}$ справа	$\to-\infty$	$\to 0$	$\to-\infty$
$x\to-\frac{\pi}{4}$ слева	$\to-1$	$\to+\infty$	$\to-\infty$
$x\to-\frac{\pi}{4}$ справа	$\to-1$	$\to-\infty$	$\to+\infty$
$x\to\frac{\pi}{4}$ слева	$\to 1$	$\to+\infty$	$\to-\infty$
$x\to\frac{\pi}{4}$ справа	$\to 1$	$\to-\infty$	$\to+\infty$
$x\to\frac{\pi}{2}$ слева	$\to+\infty$	$\to 0$	$\to+\infty$

Из проведенного исследования заключаем, что функция y имеет по крайней мере один максимум на интервале $(-\pi/2, -\pi/4)$ и по крайней мере один минимум на интервале $(\pi/4, \pi/2)$.

Введем в рассмотрение производную

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{2}{\cos^2 2x}=\frac{\cos^2 2x-2\cos^2 x}{\cos^2 x\cos^2 2x}.$$

Условие $y'=0$ равносильно уравнению $\cos^2 2x-2\cos^2 x=0$, из которого находим

$$\cos 2x=\pm\sqrt{2}\cos x;\quad 2\cos^2 x-1=\pm\sqrt{2}\cos x,$$
$$\cos x=\frac{\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{2+8}}{4}=\frac{\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{10}}{4}.$$

На интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ $\cos x > 0$, поэтому нужно сохранить только значения $\cos x = \frac{\sqrt{10} \pm \sqrt{2}}{4}$. Знак «+» в этом равенстве тоже отпадает, ибо $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4} > 1$

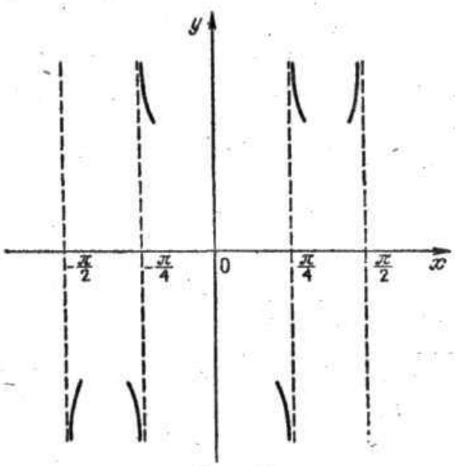

Рис. 27

и равенство $\cos x = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}$ невозможно. Итак, $\cos x = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$ и $x = \arccos \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$, $x = -\arccos \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$. Из предыдущих рассуждений следует, что в точке $x = -\arccos \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$ функция имеет максимум, в точке $x = \arccos \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$ — минимум. Значение в минимуме, как нетрудно выяснить, равно $\frac{1}{4}\sqrt{1+\sqrt{5}}(\sqrt{10}+3\sqrt{2}) \approx 3{,}33$. Значение в максимуме равно $-\frac{1}{4}\sqrt{1+\sqrt{5}} \times (\sqrt{10}+3\sqrt{2}) \approx -3{,}33$.

На интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ очертания графика функции показаны на рис. 28, и далее график периодически повторяется. Средний нисходящий участок пересекает ось абсцисс при $x=0$ под углом $-45°$.

Пример 3. Построить график функции $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$.

Решение. Период функции y равен 2π. Изучим ее поведение на интервале $[-\pi, \pi]$. Функция непрерывна всюду. При $x=0$ и на концах $-\pi$ и π интервала y обращается в 0. Производная от нее равна $y' = \cos x + \cos 3x + \cos 5x$. При $x=0$ значение производной равно 3, так что график функции довольно круто (как прямая $y=3x$) поднимается вверх. При $x=-\pi$ и $x=\pi$ значение производной равно -3, так что при отходе от $-\pi$ и при приближении к π график столь же круто опускается.

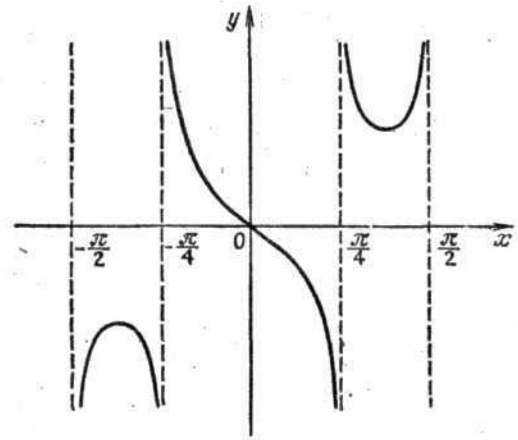

Рис. 28

Преобразуем производную y' так, чтобы было легко найти ее корни. С этой целью умножим ее на $\sin x$. Получим

$$(\sin x)\, y' = \sin x \cos x + \sin x \cos 3x + \sin x \cos 5x =$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x) + \frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 4x) = \sin 6x,$$
$$y' = \frac{\sin 6x}{2 \sin x}.$$

На интервале $(-\pi, \pi)$ ее корнями, очевидно, являются

$$-\frac{5}{6}\pi,\ -\frac{2}{3}\pi,\ -\frac{1}{2}\pi,\ -\frac{1}{3}\pi,\ -\frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{6}\pi.$$

Число 0 не является корнем, что видно из вида производной до преобразования. Когда x, возрастая, проходит через любой корень y', функция $\sin 6x$, а вместе с ней и y' меняет знак на противоположный. Следовательно, y переходит каждый раз от возрастания к убыванию и от убывания к возрастанию. Поэтому все корни y' являются для y точками максимума и минимума. На промежутке $[-\pi/6, \pi/6]$ функция y возрастает (она возрастает в окрестности $x=0$), на соседних интервалах вправо и влево убывает и т. д. Поэтому $\pi/6$ — точка максимума, $\pi/3$ — точка минимума и т. д. и $-\pi/6$ — точка минимума, $-\pi/3$ — точка максимума и т. д. Значения в этих точках приведены ниже в таблице. Для отрицательных значений x соответствующие значения для y будут отличаться знаками от

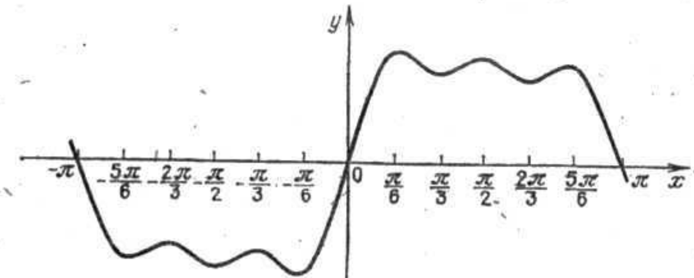

Рис. 29

приведенных в таблице в силу нечетности функции y. Таким образом, график на $[-\pi, \pi]$ имеет такой вид, как показано на рис. 29.

◀ Замечание. Если бы мы рассмотрели функции

$$y=\sin x+\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x,$$

$$y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\frac{1}{9}\sin 9x$$

x	$\frac{\pi}{6}\approx 0,53$	$\frac{\pi}{3}\approx 1,05$	$\frac{\pi}{2}\approx 1,57$	$\frac{2\pi}{3}\approx 2,09$	$\frac{5\pi}{6}\approx 2,62$
y	$\frac{14}{15}\approx 0,93$	$\frac{2\sqrt{3}}{5}\approx 0,69$	$\frac{13}{15}\approx 0,87$	$\frac{2\sqrt{3}}{5}\approx 0,69$	$\frac{14}{15}\approx 0,93$

и т. д., число максимумов и минимумов увеличивалось бы, а значения максимумов и минимумов внутри интервала $(0, \pi)$ все меньше отличались друг от друга и приближались бы к числу $\pi/4$. Это значит, что средняя часть графика на этом участке все более приближалась бы к горизонтальной прямой $y=\pi/4\approx 0,785$.

Таким образом, оказывается верна следующая формула:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\ldots+\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x\right)=\frac{\pi}{4}$$

при всех x **внутри** интервала $(0, \pi)$. Такой же предел при x из интервала $(-\pi, 0)$ равен $-\pi/4$.

Таким образом, удается задать функцию, равную $\pi/4$ при $0<x<\pi$ и равную $-\pi/4$ при $-\pi<x<0$, единой формулой для всего интервала $(-\pi, \pi)$.

Пример 4. Найти число корней уравнения $3\sin 3x+4\sin 4x+5\sin 5x=0$ на промежутке $(-\pi, \pi]$.

Решение. Период левой части равен 2π. Числа 0 и $\pm\pi$ являются корнями, причем последние два отличаются на период. Преобразуем левую часть следующим образом:

$$\sin 3x=\sin(4x-x)=\sin 4x\cos x-\cos 4x\sin x,$$
$$\sin 5x=\sin(4x+x)=\sin 4x\cos x+\cos 4x\sin x,$$
$$3\sin 3x+4\sin 4x+5\sin 5x=(8\cos x+4)\sin 4x+2\sin x\cos 4x,$$
$$4(2\cos x+1)\sin 4x+2\sin x\cos 4x=0.$$

Корни функций $2\cos x+1$ и $\cos 4x$, очевидно, не являются корнями исследуемого уравнения. Поэтому, поделив на $4(2\cos x+1)\cos 4x$, мы придем к равносильному уравнению

$$F(x)=\operatorname{tg} 4x+\frac{\sin x}{2(2\cos x+1)}=0.$$

Функция $F(x)$ имеет разрывы в точках (в порядке возрастания)

$$-\frac{7}{8}\pi,\ -\frac{2}{3}\pi,\ -\frac{5}{8}\pi,\ -\frac{3}{8}\pi,\ -\frac{1}{8}\pi,\ \frac{1}{8}\pi,\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{7}{8}\pi.$$

Они делят интервал $(-\pi, \pi)$ на одиннадцать частей; две «крайних», $\left(-\pi, -\frac{7}{8}\pi\right)$ и $\left(\frac{7}{8}\pi, \pi\right)$, и девять «средних».

Найдем $F'(x)$. Она равна

$$\frac{4}{\cos^2 4x}+\frac{2+\cos x}{2(2\cos x+1)^2}.$$

Оба слагаемых во всех точках, кроме точек разрыва, положительны. Поэтому всюду, кроме точек разрыва, функция $F(x)$ возрастает. При приближении x к любой из точек разрыва функция $F(x)$ стремится к $+\infty$ или $-\infty$ в зависимости от того, приближается x к точке разрыва слева или справа. В каждом из средних интервалов график функции $F(x)$ имеет вид, показанный на рис. 30, и пересекает ось абсцисс в одной и только в одной точке, так что в каждом из средних интервалов имеется ровно по одному корню $F(x)$. В левом крайнем интервале $\left[-\pi, -\frac{7}{8}\pi\right]$ функция $F(x)$ возрастает от 0 до $+\infty$, в правом крайнем интервале $\left(\frac{7}{8}\pi, \pi\right]$ она возрастает от $-\infty$ до 0. Таким образом, корнями являются еще числа $-\pi$ и π. Они отличаются на период.

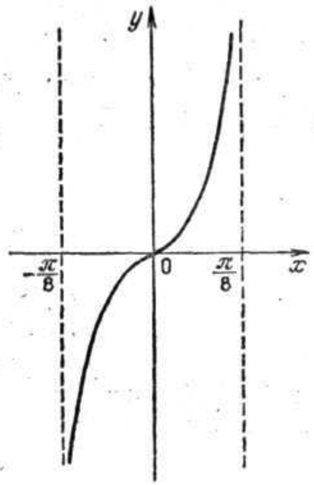

Рис. 30

Итак, исследуемое уравнение имеет на интервале $(-\pi, \pi]$ 10 корней.

Аналогичный результат легко получить для более общего уравнения

$$a \sin(n-1)x + b \sin nx + c \sin(n+1)x = 0$$

при выполнении условий $0 < a < c$ и $|b| < a + c$. ►

§ 18. Производные и дифференциалы обратных тригонометрических функций

Найдем производные от функций арксинус и арктангенс, воспользовавшись правилом дифференцирования функции от функции.

Пусть $y = \arcsin x$. Это значит, что $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$ и $\sin y = x$. Из последнего равенства находим $\cos y\, dy = dx$, откуда $dy = \frac{1}{\cos y}$, $dy = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\, dx$. Берем знак «+» перед квадратным корнем, потому что $\cos y > 0$ при $-\pi/2 < y < \pi/2$. Окончательно $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ и

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Эта формула верна для $-1 < x < 1$, концы -1 и $+1$ интервала нужно исключить, так как для них $y = -\pi/2$ и $\pi/2$ и $\cos y = 0$. Заметим, что при $x \to 1$ или $x \to -1$ значение производной $(\arcsin x)'$ стремится к ∞. Это значит, что касательная к графику функции $\arcsin x$ на краях -1 и $+1$ ее области определения вертикальна.

Аналогично поступим с вычислением производной от арктангенса. Пусть $y = \operatorname{arctg} x$. Тогда $\operatorname{tg} y = x$, $\frac{1}{\cos^2 y}\, dy = dx$. Но $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$, поэтому $dy = d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$ и

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Здесь даже не пришлось воспользоваться тем, что $-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2$. Это связано с тем, что все решения уравнения $\operatorname{tg} y = x$ отличаются от $\operatorname{arctg} x$ лишь на постоянные слагаемые $k\pi$, так что их производные должны совпадать.

Пример 1. Найти дифференциал и производную от функции $y = \arcsin \frac{1}{x}$.

Решение. Эта функция определена при $1 \leqslant x < \infty$ и при $-\infty < x \leqslant -1$. Имеем

$$dy = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\, d\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}\left(-\frac{dx}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{dx}{|x|^2} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\, dx,$$

$$y' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}},$$

т. е. при $x > 1$ $y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, а при $x < -1$ $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Пример 2. Найти дифференциал и производную от функции $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

Решение. Функция определена при $x \geqslant 0$. Имеем

$$dy = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot d\sqrt{x} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx,$$

$$y' = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

Это верно при $x>0$, если же $x \to 0$, то $y' \to \infty$.

Пример 3. Для функции $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ найти $y'(x)$.

Решение. Функция определена всюду, кроме $x=1$. Имеют место предельные соотношения: $y \to \frac{\pi}{2}$ при $x \to 1$ слева и $y \to -\frac{\pi}{2}$ при $x \to 1$ справа;

$$dy=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\,d\frac{1+x}{1-x}=$$

$$=\frac{(1-x)^2}{1-2x+x^2+1+2x+x^2}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}\,dx=\frac{1}{1+x^2}\,dx;$$

$$y'=\frac{1}{1+x^2}.$$

Оказалось, что производная функции $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ равна производной от $z=\operatorname{arctg} x$. Нетрудно разобраться почему так получилось:

$$\operatorname{tg}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg} z+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg} z\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{1+x}{1-x}.$$

Принимая во внимание, что значения арктангенса лежат в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, получим

$$z+\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \quad \text{при} \quad x<1$$

и

$$\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}+\pi \quad \text{при} \quad x>1.$$

В обоих случаях функции $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ и $\operatorname{arctg} x$ отличаются на постоянные слагаемые.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 5

1. Вычислить синус, косинус, тангенс и котангенс углов 15°; 75°; 105°.

2. Вычислить значение выражения:

1. $\sin 12^\circ \cos 33^\circ+\cos 12^\circ \sin 33^\circ$.
2. $\cos 100^\circ \sin 10^\circ-\sin 100^\circ \cos 10^\circ$.
3. $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$.

4. $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{20}+\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{20}$.
5. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.
6. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

3. Доказать, что синус суммы положительных чисел, меньших $\pi/2$, меньше суммы синусов этих чисел. Дать графическую интерпретацию этого факта на единичном круге.

4. Около какой из точек $\alpha=0^\circ$, $\alpha=45^\circ$ приращение $\Delta\alpha=1^\circ$ вызовет большее приращение функции $y=\sin\alpha$? Найти ответ с помощью единичного круга, после этого проверить свои рассуждения, используя результат предыдущей задачи.

5. Дано: $\sin\alpha=a$; $\sin\beta=b$, α и β — углы треугольника. Вычислить синус третьего угла треугольника, если:

а) α и β — острые углы,

б) один из углов тупой.

6. Дано: $\cos\alpha=m$; $\cos\beta=n$, α и β — углы треугольника. Вычислить косинус третьего угла треугольника.

7. Преобразовать выражения к виду $A\sin(at+\varphi)$ или $A\cos(at+\varphi)$, где $A>0$ и $0\leqslant\varphi<2\pi$. Найти наибольшее значение выражения:

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t$. 2. $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t$.

3. $\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{t}{2}$. 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t$.

5. $-3\sin t-4\cos t$. 6. $-4\sin t-3\cos t$.

7. $\sin\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)$.

8. $\cos\left(\frac{1}{3}t+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{1}{3}t+\frac{\pi}{3}\right)$.

8. Найти значения переменной t, при которых выражения, данные в задаче 7, принимают:

а) наибольшее значение,

б) наименьшее значение,

в) значение, равное нулю.

9. Упростите выражения:

1. $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}$. 2. $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

3. $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. 4. $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

10. Доказать тождество:

1. $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$.
2. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$.
3. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha}$. 4. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

11. Вычислить, используя формулу тангенса суммы или разности,

$\operatorname{tg}15^\circ$; $\operatorname{tg}75^\circ$; $\operatorname{tg}105^\circ$; $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{12}$; $\operatorname{ctg}\dfrac{5}{12}\pi$; $\operatorname{ctg}\dfrac{7}{12}\pi$.

12. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

13. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$, если $\cos\alpha=-0{,}8$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$.

14. Вычислить:

1. $\dfrac{\operatorname{tg}17^\circ+\operatorname{tg}28^\circ}{1-\operatorname{tg}17^\circ\operatorname{tg}28^\circ}$. 2. $\dfrac{\operatorname{tg}70^\circ-\operatorname{tg}10^\circ}{1+\operatorname{tg}70^\circ\operatorname{tg}10^\circ}$.
3. $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{42}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{\pi}{42}}$. 4. $\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}$.

15. Доказать тождества:

1. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.
2. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=2$.

16. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{1}{7}$, α, β, γ — острые углы. Доказать, что $\alpha=\beta+\gamma$.

17. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=1/12$, $\operatorname{tg}\beta=2/5$, $\operatorname{tg}\gamma=1/3$, α, β, γ — острые углы. Доказать, что $\alpha+\beta+\gamma=45^\circ$.

18. Вычислить $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$, если:

1. $\sin\dfrac{x}{2}=-0{,}6$, $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}<0$.
2. $\cos\dfrac{x}{2}=-0{,}8$, $-\pi<\dfrac{x}{2}<-\pi/2$.
3. $\cos\dfrac{x}{2}=-\dfrac{12}{13}$, $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}<\pi$.
4. $\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{5}{13}$, $0<\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{2}$.

19. Решить уравнения:

1. $\sin x-\sin\dfrac{x}{2}=0$. 2. $\cos\dfrac{z}{2}+\sin z=0$.

3. $1-\cos 2t+\sin t=0$. 4. $\cos x+1+\cos 2x=0$.
5. $\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}2\varphi=0$. 6. $\operatorname{ctg}\psi-\operatorname{ctg}2\psi=0$.
7. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.
8. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.
9. $\cos^2\left(\dfrac{2}{3}\pi+\varphi\right)-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$.
10. $\cos^2\left(\dfrac{5}{6}\pi-\alpha\right)-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=-1$.

20. Вычислить $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$, если:

1. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{3}{4}$, $0<\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{2}$. 2. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}<0$.
3. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=-7$, $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}<\pi$. 4. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=2$, $\pi<\dfrac{x}{2}<\dfrac{3}{2}\pi$.

21. Найти наибольшее значение выражения и значение переменной, при котором оно достигается:

1. $\sin x\cdot\cos x$. 2. $(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$.
3. $(\sin x+\cos x)^2$. 4. $(\sin x-\cos x)^2$.

22. Исходя из графиков функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ и формулы для синуса удвоенного аргумента, построить график функции $y=\sin 2x$.

23. Доказать тождества:

1. $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$.
2. $\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{2}\cos x\cos 2x=\dfrac{1}{16}\sin 4x$.
3. $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$. 4. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.
5. $\cos^3\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$.
6. $\dfrac{1-\cos z+\cos 2z}{\sin 2z-\sin z}=\operatorname{ctg}z$.

24. Вычислить $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$, если:

1. $\sin 2x=0{,}6$, $\dfrac{\pi}{2}<2x<\pi$. 2. $\cos 2x=-0{,}8$, $\pi<2x<2\pi$.
3. $\operatorname{tg}2x=-4$, $-\dfrac{\pi}{2}<2x<0$. 4. $\operatorname{ctg}2x=\dfrac{1}{2}$, $-\pi<2x<-\dfrac{\pi}{2}$.

25. Построить график зависимости:

1. $\sin(x+y)=\sin x+\sin y$. 2. $\sin(x-y)=\sin x-\sin y$.

26. Записать данное выражение через тригонометрические функции кратных аргументов линейно:

1. $\cos^4\alpha$. 2. $\sin^4\alpha$. 3. $(\sin x+\cos x)^4$. 4. $(\sin x-\cos x)^4$.

27. Доказать равенства:

1. $\sin 35^\circ+\sin 25^\circ=\cos 5^\circ$. 2. $\cos 10^\circ-\cos 50^\circ=\sin 20^\circ$.
3. $\cos 40^\circ+\cos 80^\circ=\cos 20^\circ$. 4. $\sin 50^\circ-\sin 70^\circ=-\sin 10^\circ$.
5. $\cos 45^\circ-\sin 75^\circ=-\sin 15^\circ$. 6. $\cos 20^\circ-\sin 10^\circ=\sin 50^\circ$.

28. Построить графики зависимости:

1. $\cos(x+y)=\cos x+\cos y-1$.
2. $\cos(x-y)=\cos x-\cos y+1$.

29. Решить уравнение:

1. $\sin x+\sin 3x=0$. 2. $\cos x+\cos 3x=0$.
3. $\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3}{2}x=0$. 4. $\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{3}{2}x=0$.
5. $\sin 2x+\cos 4x=0$. 6. $\cos 4x-\sin 2x=0$.

30. Доказать тождества:

1. $\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\sin 2\alpha\sin 2\beta$.
2. $\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha\sin 2\beta$.
3. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}=\operatorname{tg} 4\alpha$.
4. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}\frac{5}{2}\alpha$.

31. Доказать тождества, если α, β и γ — углы треугольника:

1. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.
2. $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.
3. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.
4. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

32. Решить уравнения:

1. $\sin x\sin 7x=\sin 3x\sin 5x$.
2. $\cos x\sin 7x=\cos 3x\sin 5x$.

33. Построить графики функций:

1. $y=\sin x+\cos x$. 2. $y=\cos x-\sin x$.
3. $y=-\sqrt{3}\sin t-\cos t$. 4. $y=\sin z+\sqrt{3}\cos z$.
5. $y=2\cos x-3\sin x$. 6. $y=3\sin t-4\cos t$.

34. Найти приближенное значение ближайшего к нулю корня уравнения:

1. $5\sin x+12\cos x=13$. 2. $7\sin x+24\cos x=-25$.
3. $\cos 2x-3\sin 2x=-\sqrt{10}$. 4. $3\cos 2x-\sin 2x=\sqrt{10}$.

35. Точка M движется по окружности с центром в начале координат в положительном направлении с постоянной линейной скоростью 4 м/с. Радиус окружности $R=2$ м. Запишите закон изменения координат точки M как функции времени, если известно, что при $t=\frac{1}{2}$ с ее ордината равнялась 2 м. Найти период, частоту гармонических колебаний, которые совершают координаты точки, их начальную фазу. Объяснить физический смысл коэффициента при t в записи закона изменения координат.

36. Найти суммы гармонических колебаний; определить их период, частоту, начальную фазу и амплитуду:

1. $\sin(2t+1{,}25\pi)+\cos(2t+1{,}75\pi)$.
2. $\cos\left(\frac{1}{2}t+0{,}25\pi\right)-\sin\left(\frac{1}{2}t+0{,}75\pi\right)$.
3. $2\cos(100\pi t)-4\sin\left(100\pi t+\frac{2}{3}\pi\right)$.
4. $10\sin(120\pi t)+8\cos\left(120\pi t+\frac{4}{3}t\right)$.

37. Преобразовать уравнение гармонического колебания к виду $A\cos(\omega t+\varphi)$, где $A>0$, $\omega>0$, $0\leqslant\varphi<2\pi$:

1. $y=-3\sin(2t-1{,}7\pi)$. 2. $y=-4\cos(3{,}2\pi-0{,}5t)$.
3. $y=-6\cos(3t+1{,}8\pi)$. 4. $y=-2\sin(5{,}5\pi-4t)$.
5. $y=\cos(1{,}5\pi-0{,}3t)\sin(1{,}5\pi-0{,}3t)$.
6. $y=\sin^2(1{,}5\pi-1{,}5t)-\cos^2(1{,}5\pi-1{,}5t)$.

38. Обосновать равенства:

1. $\arcsin 1=\pi/2$. 2. $\arcsin(-1)=\pi/2$.

39. Обосновать равенства:

1. $\arcsin(-1/2)=-\pi/6$. 3. $\arcsin(\sqrt{3}/2)=\pi/3$.
2. $\arcsin(\sqrt{2}/2)=\pi/4$. 4. $\arcsin 0=0$.

40. На миллиметровой бумаге построить единичную окружность, приняв за единицу масштаба 4 см. С помощью транспортира найти приближенное значение $\arcsin a$; ответ записать в радианной и градусной мерах:

1. $\arcsin 0{,}3$. 2. $\arcsin(-0{,}8)$. 3. $\arcsin(-0{,}45)$.
4. $\arcsin 0{,}25$. 5. $\arcsin 0{,}75$. 6. $\arcsin(-0{,}65)$.

41. Построить в одной системе координат графики функций $y=\sin x$ и $y=\arcsin x$, приняв за единицу 4 см. Найти $\arcsin a$ для значения a предыдущей задачи с помощью каждого графика. Сравнить ответы с табличными.

42. Запишите ответы с помощью символа $\arcsin a$ в градусной и радианной мерах. Найдите приближенные значения корней на промежутке $[0; T)$, где T — период функции, стоящей в левой части уравнения:

1. $\sin x = 0{,}4$. 2. $\sin x = -0{,}6$. 3. $\sin 2x = -0{,}5$.

4. $\sin \frac{1}{2} x = 0{,}5$. 5. $\sin (x-1) = 0{,}7$. 6. $\sin (x+2) = -0{,}3$.

7. $\sin \left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = -0{,}25$. 8. $\sin \left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}45$.

43. Заполнить таблицы:

a	0	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\arccos a$									

a	0	-1	1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{arctg} a$							
$\operatorname{arcctg} a$							

44. Выполните задание, аналогичное задаче 40, но для $\arccos a$

45. Построить графики функций:

1. $y = \arccos x$. 2. $y = \operatorname{arctg} x$. 3. $y = \operatorname{arcctg} x$.

46. Выполнить задание задачи 42, предварительно преобразовав левые части уравнений к виду $\cos (kx+b)$. Для записи точных ответов использовать символ $\arccos a$.

47. Записать ответы к уравнению с помощью символа $\operatorname{arctg} a$ в градусной и радианной мерах. Найти приближенные значения корней на промежутке $[0; T)$, где T — период левой части уравнения:

1. $\operatorname{tg} x = 2{,}5$. 2. $\operatorname{tg} x = -4$. 3. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -0{,}5$.

4. $\operatorname{tg} 2x = 2$. 5. $\operatorname{tg} (2+x) = \frac{2}{3}$. 6. $\operatorname{tg} (x-1) = -\frac{3}{2}$.

7. $\operatorname{tg} \left(3x-\frac{\pi}{3}\right) = -1\frac{1}{3}$. 8. $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}75$.

48. Выполнить задание задачи 47, предварительно преобразовав левые части уравнений к виду $\operatorname{ctg} (kx+b)$. Для записи ответов использовать функцию $\operatorname{arcctg} x$.

49. Доказать, что:

1. $\arccos (-x) = \pi - \arccos x$. 2. $\operatorname{arcctg} (-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

50. Найти x из уравнения:

1. $\arcsin (x+2) = \pi/3$. 2. $\arcsin (1-2x) = -\pi/6$.

3. $\arccos \frac{x+1}{2} = \frac{\pi}{2}$. 4. $\arccos \frac{3-x}{3} = 0$.

5. $\operatorname{arctg} (x^2-1) = 0$. 6. $\operatorname{arctg} (x^2+1) = \pi/4$.

51. Доказать:

1. $\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$.

2. $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

3. $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$.

4. $\operatorname{arcctg} \frac{1}{9} + \operatorname{arcctg} \frac{4}{5} = \frac{3\pi}{4}$.

52. Решить уравнения на каком-либо промежутке, равном периоду, найти представителей всех классов решений:

1. $\cos 2x + \cos x = 0$. 2. $\sqrt{2} \sin^2 x + \cos x = 0$.
3. $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.
4. $\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$.
5. $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 0$.
6. $8 \sin^2 \frac{x}{2} + 3 \sin x - 4 = 0$. 7. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.
8. $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$. 9. $\sin 2x + \cos 2x = -1$.
10. $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 1$. 11. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin 3x$.
12. $3 \cos x + 4 \sin x = 5 \cos 7x$.
13. $\sin \left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \sin x = \sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. 14. $1 - \operatorname{tg} x = \cos 2x$.
15. $\frac{1}{\operatorname{tg} x} - 1 = \frac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg} x}$. 16. $1 + \cos 4x = \frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 2x}$.

53. Дать графическую иллюстрацию неравенствам и записать ответ:

1. $\sin x < \frac{1}{2}$. 2. $\cos x > -\frac{1}{2}$. 3. $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. 5. $\operatorname{tg} x \leqslant 1$. 6. $\operatorname{tg} x \geqslant -1$.

7. $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. 8. $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

54. Решите неравенства:

1. $\sin x \cos 2x < 0$. 2. $\cos x \sin 2x > 0$.
3. $3 \sin^2 x - 10 \sin x + 3 \geqslant 0$.
4. $4 \cos^2 x + 17 \cos x + 4 \leqslant 0$.

55. Найти промежутки монотонности функции:

1. $y = x + \sin x$. 2. $y = x - \cos x$.
3. $y = \sin x \operatorname{tg} x$. 4. $y = \cos x \operatorname{ctg} x$.

56. Построить графики функций (e — неперово число):

1. $y = \cos x - \cos^2 x$. 2. $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$.
3. $y = \ln \sin x$. 4. $y = \ln \cos x$. 5. $y = \sqrt{\sin x}$.
6. $y = \sqrt{\cos x}$. 7. $y = e^{\sin x}$. 8. $y = e^{\cos x}$.

57. Точка $M(x; y)$ движется по плоскости, причем в любой момент времени t, $t \geqslant 0$, ее координаты x и y определяются по формулам, приведенным ниже. Нарисовать траекторию движения точки в каждом случае:

1. $x = \cos t$, $y = \sin t$.
2. $x = 0{,}5 \cos t$, $y = 0{,}5 \sin t$.
3. $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$.
4. $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$.
5. $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$.

58. Найти наибольшее значение функции

$$y = \sin^2 x - \sin x + 1$$

на промежутке $(\pi; 2\pi)$.

59. Найти наименьшее значение функции

$$y = \cos^2 x - \cos x + 1$$

на промежутке $(\pi; 2\pi)$.

Глава 6

ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Определение интегрирования

Интегрированием называется действие, обратное дифференцированию, т. е. восстановление функции по данной производной или по данному дифференциалу.

Пусть $f(x)$ — производная от функции $F(x)$ во всех точках некоторого интервала или, что то же самое, $f(x)\,dx$ есть дифференциал функции $F(x)$ в том же интервале. Тогда функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ или для дифференциала $f(x)\,dx$. Отыскание первообразной функции и есть интегрирование.

Так, для функции $2x$ (или, что то же самое, для дифференциала $2x\,dx$) первообразной функцией на всей вещественной оси является функция x^2. Но она не единственная первообразная. Другими являются x^2+2, x^2-3 и т. д., вообще x^2+C, где C — любая постоянная.

Ясно, что если $F_0(x)$ есть первообразная функция для $f(x)$, то первообразными для $f(x)$ будут и все функции $F_0(x)+C$ при любой постоянной C. Действительно,

$$(F_0(x)+C)' = F_0'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Оказывается, что все первообразные функции для $f(x)$ имеют вид $F_0(x)+C$, т. е. верна следующая теорема:

Теорема. *Если $F(x)$ и $F_0(x)$ — две первообразные функции для одной и той же функции $f(x)$ на некотором интервале, то они отличаются на постоянное слагаемое, т. е. $F(x) = F_0(x) + C$, где C — постоянная.*

Предварительно сформулируем и поясним следующую лемму:

Лемма. *Если функция $\varphi(x)$ имеет во всех точках некоторого интервала $[a, b]$ производную и эта производ-*

ная равна нулю на всем интервале, то функция $\varphi(x)$ *есть постоянная.*

Строгое доказательство этой леммы не очень просто, и мы покажем его в следующем параграфе. Сейчас ограничимся следующим пояснением. Производная есть скорость роста функции. По условию леммы она равна нулю во всех точках интервала, поэтому почти очевидно, что значения функции не изменяются при переходе от точки к точке, иначе скорость роста функции была бы где-нибудь отлична от нуля.

Теперь справедливость теоремы следует непосредственно из леммы. Функция $\varphi(x)=F(x)-F_0(x)$ имеет производную $\varphi'(x)=F'(x)-F_0'(x)=f(x)-f(x)=0$, и это верно на всем интервале. В силу леммы, $\varphi(x)=C$ и $F(x)=F_0(x)+C$, что и требовалось доказать.

Первообразная функция для дифференциала $f(x)\,dx$, записанная в общем виде, называется *неопределенным интегралом* от $f(x)\,dx$ и обозначается $\int f(x)\,dx$. Итак,

$$\int f(x)\,dx=F_0(x)+C,$$

где $F_0(x)$ — одна из первообразных функций.

Символ $\int$ называется *знаком интеграла*. Это вытянутая и стилизованная буква S, начальная буква слова «сумма». Выражение $f(x)\,dx$, стоящее под знаком интеграла, называется *подынтегральным выражением*, а функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*.

Из определения ясно, что

$$d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx,\quad \int dF(x)=F(x)+C.$$

◀ § 2. Более строгое доказательство леммы

Докажем лемму из § 1, пользуясь формулой Лагранжа для конечных приращений (лемма 2 § 2 гл. 3). Напомним формулу Лагранжа: если $\varphi(x)$ дифференцируема во всех точках интервала $[a, b]$, то найдется точка c внутри этого интервала такая, что $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\varphi'(c)$.

Ясно, что если $\varphi(x)$ дифференцируема во всех точках интервала $[a, b]$, то это условие выполнено и для любого интервала $[x_1, x_2]$, содержащегося в $[a, b]$. Следовательно, для любых x_1 и x_2 из $[a, b]$, $x_1<x_2$, найдется

точка x_3 из интервала $[x_1, x_2]$, и подавно содержащаяся в $[a, b]$, для которой $\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}=\varphi'(x_3)$. По условию леммы во всех точках интервала $[a, b]$ функция $\varphi'(x)$ равна нулю, в частности $\varphi'(x_3)=0$. Следовательно, для любых x_1, x_2 из $[a, b]$, $x_1<x_2$, будет $\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}=0$, откуда $\varphi(x_2)=\varphi(x_1)$ для любых x_1, x_2 из $[a, b]$.

Таким образом, значения функции $\varphi(x)$ во всех точках интервала $[a, b]$ совпадают и, следовательно, функция $\varphi(x)$ есть постоянная. ▶

§ 3. Простейшие формулы интегрирования

В гл. 2 были установлены правила и формулы дифференцирования, позволяющие находить производные и дифференциалы функций, заданных алгебраическими выражениями, затем в гл. 5 были выведены формулы дифференцирования для тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Из этих правил и формул следуют правила и формулы интегрирования.

1. *Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов слагаемых.*

Действительно, пусть $dF_1(x)=f_1(x)\,dx$ и $dF_2(x)=f_2(x)\,dx$. Тогда

$$d(F_1(x)+F_2(x))=dF_1(x)+dF_2(x)=f_1(x)\,dx+f_2(x)\,dx,$$

так что $F_1(x)+F_2(x)$ есть одна из первообразных функций для $(f_1(x)+f_2(x))\,dx$. Это значит, что

$$\int[f_1(x)+f_2(x)]\,dx=F_1(x)+F_2(x)+C.$$

Но $\int f_1(x)\,dx=F_1(x)+C_1$, $\int f_2(x)\,dx=F_2(x)+C_2$ и

$$\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx=F_1(x)+F_2(x)+(C_1+C_2)=\int(f_1(x)\,dx+f_2(x))\,dx.$$

Сумма $C=C_1+C_2$ двух произвольных постоянных есть снова произвольная постоянная.

Итак,

$$\int(f_1(x)+f_2(x))\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx. \tag{1}$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*, т. е.

$$\int mf(x)\,dx = m\int f(x)\,dx, \tag{2}$$

где m — постоянная величина.

Действительно, если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $dmF(x) = mdF(x) = mf(x)\,dx$, так что $mF(x)$ есть одна из первообразных функций для $mf(x)\,dx$, т. е. $\int mf(x)\,dx = mF(x) + C = m\left(F(x) + \frac{C}{m}\right) = m\int f(x)\,dx$, ибо $\frac{C}{m}$ есть произвольная постоянная.

Теперь обратимся к рассмотрению дальнейших формул дифференцирования с целью получения из них соответствующих формул интегрирования.

Имеем $dx^a = ax^{a-1}\,dx$. Отсюда заключаем, что $\int x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a}x^a + C$ и, заменив $a-1$ на a, имеем

$$\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, \tag{3}$$

где $a \neq -1$.

Далее, $d\ln x = \frac{1}{x}\,dx$. Отсюда

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C. \tag{4}$$

Интересно отметить, что формула (3) теряет смысл при $a = -1$, а формула (4) восполняет этот пробел.

Из $de^x = e^x\,dx$ заключаем

$$\int e^x\,dx = e^x + C. \tag{5}$$

Из $d\sin x = \cos x\,dx$:

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C. \tag{6}$$

Из $d\cos x = -\sin x\,dx$:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C. \tag{7}$$

Из $d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}$:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C. \tag{8}$$

Из $d\,\mathrm{ctg}\,x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C. \tag{9}$$

Из $d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C. \tag{10}$$

Из $d\,\mathrm{arctg}\,x = \frac{dx}{1+x^2}$:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\,x + C. \tag{11}$$

Полученные формулы (1)—(11) позволяют вычислять довольно многие несложные интегралы.

Пример 1. $\int (x^2+1)^2\,dx$.

Решение.

$$\int (x^2+1)^2\,dx = \int (x^4+2x^2+1)\,dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C.$$

Пример 2. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$
$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C.$$

Пример 3. $\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx$.

Решение.

$$\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx = \int \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln x + C.$$

Пример 4. $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$
$$= x - \mathrm{arctg}\,x + C.$$

Пример 5. $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$.

Решение.

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

§ 4. Интегрирование, основанное на использовании инвариантности формулы дифференциала функции от функции

В основе этого приема лежит инвариантность формулы дифференциала при замене аргумента на функцию от другого аргумента: если $dF(x) = f(x)\,dx$, то $dF(\varphi(x)) = f(\varphi(x))\,d\varphi(x)$.

Поэтому если $F(x)$ есть первообразная функция для дифференциала $f(x)\,dx$, то $F(\varphi(x))$ есть первообразная функция для дифференциала $f(\varphi(x))\,d\varphi(x)$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.

$$\int (3x+1)^3\,dx = \frac{1}{3}\int (3x+1)^3\,d(3x+1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+1)^4}{4} + C = \frac{1}{12}(3x+1)^4 + C.$$

Пример 2.

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\,d\sin x = -\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-2}\,d(x^2+1) = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C.$$

Пример 4. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln(\ln x) + C.$

Пример 5.

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x\,d2x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Пример 6.

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x\,\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x\,\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx =$$
$$= \int \operatorname{tg}^2 x\,d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

Иногда оказывается полезным заменить исходный аргумент на функцию от нового аргумента.

Пример 7. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$.

Решение. Положим $x = ay$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{a\,dy}{a^2y^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} y + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Пример 8. $\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx$.

Решение. Положим $x = r\sin\varphi$. Тогда $dx = r\cos\varphi\,d\varphi$,

$$\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx =$$
$$= \int \sqrt{r^2 - r^2\cdot\sin^2\varphi}\;r\cos\varphi\,d\varphi = r^2\int \cos^2\varphi\,d\varphi =$$
$$= \frac{r^2}{2}\int (1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{r^2\varphi}{2} + \frac{r^2}{4}\int \cos 2\varphi\,d2\varphi =$$
$$= \frac{r^2\varphi}{2} + \frac{r^2}{4}\sin 2\varphi + C = \frac{r^2\varphi}{2} + \frac{r^2}{2}\sin\varphi\cos\varphi + C =$$
$$= \frac{r^2\varphi}{2} + \frac{r^2}{2}\sin\varphi\sqrt{1-\sin^2\varphi} + C =$$
$$= \frac{r^2\varphi}{2} + \frac{1}{2}r\sin\varphi\sqrt{r^2 - r^2\cdot\sin^2\varphi} + C =$$
$$= \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r} + \frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2} + C.$$

§ 5. Интегрирование по частям

Прием, указанный в заглавии, основан на формуле дифференцирования произведения: $d(uv) = u\,dv + v\,du$, или $u\,dv = d(uv) - v\,du$. Из последнего равенства следует

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Таким образом, этот прием позволяет свести вычисление одного интеграла к вычислению другого. Выбор в подынтегральном выражении множителей u, dv следует производить так, чтобы новый интеграл оказался проще исходного.

Пример 1.

$$\int x\cos x\,dx=\int x\,d\sin x=x\sin x-\int \sin x\,dx=$$
$$=x\sin x+\cos x+C.$$

Пример 2.

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int x\,d\ln x=x\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C.$$

Пример 3.

$$\int x^3e^x\,dx=\int x^3\,de^x=x^3e^x-\int e^x\,3x^2\,dx=$$
$$=x^3e^x-3\int x^2\,de^x=x^3e^x-3x^2e^x+3\int e^x\,2x\,dx=$$
$$=x^3e^x-3x^2e^x+6\int x\,de^x=x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6\int e^x\,dx=$$
$$=x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x+C=(x^3-3x^2+6x-6)\,e^x+C.$$ ►

§ 6. Площадь криволинейной трапеции

Пусть дана непрерывная на интервале $[a, b]$ функция $y=f(x)$. Допустим сначала, что все значения функции неотрицательны. Тогда график функции $f(x)$ будет расположен в верхней полуплоскости (рис. 1). Поставим задачу о вычислении площади части плоскости, ограниченной осью Ox, прямыми $x=a$ и $x=b$ и графиком функции $y=f(x)$. Такая фигура называется *криволинейной трапецией*. Рассмотрим искомую площадь как значение при $x=b$ функции $F(x)$, выражающей площадь криволинейной трапеции с переменной правой стенкой, имеющей абсциссу x. Если правая стенка немного сдвинется, так что x получит приращение dx, площадь получит приращение $\Delta F(x)$, равное площади узкой полоски. Эта площадь отличается от площади $y\,dx$ прямоугольной полоски на малую величину, стремящуюся к нулю существенно быстрее, чем dx. Действительно, как $\Delta F(x)$, так и $y\,dx$ содержатся в полоске с высотой M и содержат полоску с высотой m, где M и m — наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на интервале $[x, x+dx]$ (рис. 2). Поэтому $\Delta F(x)-y\,dx$ не превосходит по модулю $(M-m)\,dx$. Но $M-m\to 0$ при $dx\to 0$ в силу непрерывности $f(x)$, т. е. $\Delta F(x)-y\,dx$ стремится к нулю существенно быстрее, чем dx. Таким образом, $y\,dx$

есть главная часть $\Delta F(x)$ и произведение $y\,dx$ линейно относительно dx. По основному свойству дифференциала это значит, что $y\,dx=dF(x)$. Тем самым $F(x)$ есть первообразная функция для дифференциала $y\,dx$. Пусть $F_0(x)$ — какая-либо первообразная функция. Тогда $F(x)=F_0(x)+C$. Значение постоянной C мы можем определить из того, что

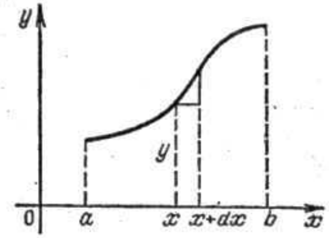

Рис. 1

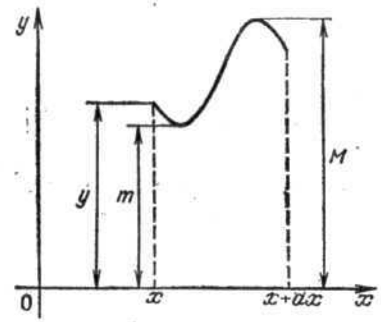

Рис. 2

при $x=a$ площадь $F(x)$ исчезает. Поэтому $0=F(a)=F_0(a)+C$, откуда $C=-F_0(a)$, $F(x)=F_0(x)-F_0(a)$ и искомая площадь

$$F(b)=F_0(b)-F_0(a).$$

Разность $F_0(b)-F_0(a)$, где F_0 — первообразная функция для непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, называется ***определенным интегралом*** от $f(x)\,dx$ и обозначается через

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Этот же термин и обозначение принимаются по определению и при $a>b$. Нужно только требовать непрерывность функции $f(x)$ на интервале $[b, a]$.

От выбора первообразной функции $F_0(x)$ значение определенного интеграла не зависит, ибо всякая первообразная функция $F_1(x)$ отличается от $F_0(x)$ только постоянным слагаемым, так что

$$F_1(b)-F_1(a)=(F_0(b)+C)-(F_0(a)+C)=F_0(b)-F_0(a).$$

Итак, если $a<b$, функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и не принимает отрицательных значений, то интеграл

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=a$ и $x=b$ и графиком функции $f(x)$.

Дадим теперь геометрическое истолкование интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $a<b$ от непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения. График функции $f(x)$ может переходить из верхней полуплоскости в нижнюю и обратно.

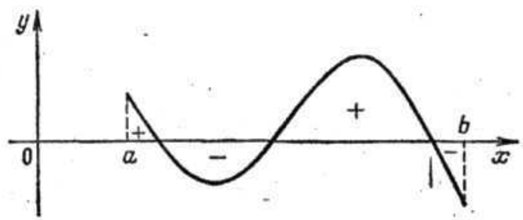

Рис. 3

Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком функции $f(x)$, осью Ox, прямыми $x=a$ и $x=b$. Ось Ox разрезает эту фигуру на части, из которых некоторые, соответствующие положительным значениям $f(x)$, расположены в верхней полуплоскости, а другие, соответствующие отрицательным значениям $f(x)$, — в нижней (рис. 3).

Введем в рассмотрение алгебраическую сумму площадей этих частей, взяв площади частей из нижней полуплоскости со знаком минус. Как и в случае криволинейной трапеции, рассмотрим величину $F(x)$ для фигуры с переменной правой стенкой и найдем ее дифференциал, т. е. главную линейную относительно dx часть приращения. Если при некотором x будет $y=f(x)>0$, то $dF(x)=y\,dx$, так же как в случае криволинейной трапеции. Если же $y=f(x)<0$, то при $dx>0$ рассматриваемая величина получит отрицательное приращение, главная часть которого равна по модулю $|y|\,dx$, и алгебраически она снова равна $y\,dx$. Таким образом, и в рассматриваемом случае величина $F(x)$ оказывается первообразной функцией для $f(x)$. Отсюда заключаем, как и в случае $f(x)\geqslant 0$, что $F(x)=F_0(x)-F_0(a)$, где $F_0(x)$ — любая первообразная функция для $f(x)$, и

окончательно

$$F(b)=F_0(b)-F_0(a)=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Итак, мы пришли к следующему геометрическому истолкованию определенного интеграла от непрерывной функции. При $a<b$ интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен алгебраической сумме площадей частей фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, причем площади частей, лежащих выше Ox, берутся со знаком плюс, а площади частей, лежащих ниже Ox, берутся со знаком минус.

Попутно мы получили принципиально важный результат о существовании первообразной функции для любой непрерывной функции $y=f(x)$, именно таковой является аналогичная алгебраическая сумма площадей описанной выше фигуры с переменной правой стенкой с абсциссой x, т. е. определенный интеграл с переменным верхним пределом x. Запись его в виде $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ нехороша тем, что одной и той же буквой x обозначен верхний предел в интеграле и переменная, по которой производится интегрирование. Но очевидно, что значение интеграла не зависит от обозначения для переменной интегрирования, т. е., например,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^b f(z)\,dz.$$

Поэтому при записи определенного интеграла с переменным верхним пределом x целесообразно изменить обозначение для переменной интегрирования, т. е. записывать его, например, в форме

$$\int\limits_a^x f(z)\,dz.$$

Итак, приняв на веру существование площадей, о которых выше шла речь, мы пришли к доказательству существования первообразной функции $F(x)$ для любой непрерывной функции $f(x)$ в виде алгебраической суммы площадей указанной выше фигуры с переменной правой границей. Такая первообразная функция может быть записана в виде

$$\int_a^x f(z)\,dz.$$

Этот результат совсем не очевиден с точки зрения техники интегрирования. Дело в том, что существуют «неберущиеся» интегралы, т. е. такие, для подынтегральных выражений которых не существуют первообразные, выражающиеся через знакомые нам элементарные функции.

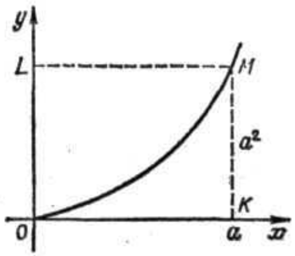

Рис. 4

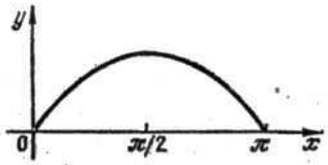

Рис. 5

Эти первообразные являются новыми функциями. Среди них имеются и важные для приложений. Таковыми являются «интеграл вероятностей» $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, «интегральный логарифм» $\int_2^x \frac{dz}{\ln z}$, «интегральный синус» $\int \frac{\sin z}{z}\,dz$ и многие другие.

Рассмотрим примеры на вычисление площадей.

Пример 1. Найти площадь S криволинейного треугольника, ограниченного осью абсцисс, параболой $y=x^2$ и прямой $x=a$ (рис. 4).

Решение.

$$S=\int_0^a x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{x=a}-\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}=\frac{a^3}{3}=\frac{1}{3}\,a\cdot a^2.$$

Искомая площадь равна одной трети площади прямоугольника $OKML$.

Пример 2. Найти площадь, ограниченную осью Ox и одной полуволной синусоиды $y=\sin x$ (рис. 5).

Решение.

$$S=\int_0^\pi \sin x\,dx=-\cos x\,|_{x=\pi}-(-\cos x)\,|_{x=0}=1-(-1)=2.$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$ и истолковать полученный результат.

Решение.

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx=-\cos x\,|_{x=2\pi}-(-\cos x)\,|_{x=0}=-1-(-1)=0.$$

На промежутке $[0,\ 2\pi]$ синусоида делает две полуволны, первая из которых лежит выше Ox, вторая ниже (рис. 6).

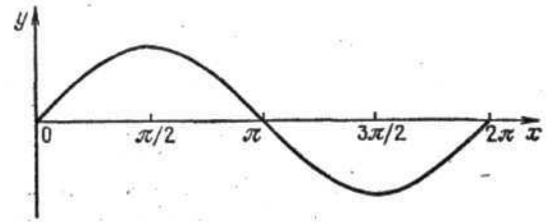

Рис. 6

Ограниченные ими площади равны, и соответствующие им слагаемые при геометрическом изображении определенного интеграла взаимно уничтожаются.

Пример 4. Найти площадь, ограниченную осью Ox, гиперболой $y=1/x$ и прямыми $x=b$ и $x=ab$, $a>1$, $b>0$.

Решение.

$$S=\int_b^{ab} \frac{1}{x}\,dx=\ln x\,|_{x=ab}-\ln x\,|_{x=b}=\ln ab-\ln b=\ln a.$$

При $b=1$ получим $S=\int_1^a \frac{1}{x}\,dx=\ln a$.

Мы пришли к интересному геометрическому изображению натурального логарифма в виде площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, графиком $y=1/x$ и прямыми $x=1$ и $x=a$.

Отсюда легко получается наглядное истолкование того свойства логарифма, что логарифм произведения равен сумме логарифмов (рис. 7). Именно: пл. $M_0N_0N_3M_3 =$ $=$ пл. $M_0N_0N_2M_2 +$ пл. $M_2N_2N_3M_3$. Но пл. $M_0N_0N_3M_3 =$ $= \ln ab$, пл. $M_0N_0N_2M_2 = \ln b$, а пл. $M_2N_2N_3M_3$ равна, как мы вычислили, $\ln a$.

◀ Можно убедиться из геометрических соображений в том, что пл. $M_2N_2N_3M_3 =$ пл. $M_0N_0N_1M_1$. Преобразуем плоскость на рис. 7, вытянув ее в b раз по оси Ox и сжав тоже в b раз по оси Oy. При этом преобразовании гипербола $y = \frac{1}{x}$ «проскользит» по самой себе, ибо если $y = 1/x$, то $\frac{y}{b} = \frac{1}{xb}$, т. е. $y_1 = 1/x_1$, где $y_1 = y/b$, $x_1 = xb$. Поэтому фигура $M_0N_0N_1M_1$ превратится при сделанном преобразовании в фигуру $M_2N_2N_3M_3$. Но при этом преобразовании

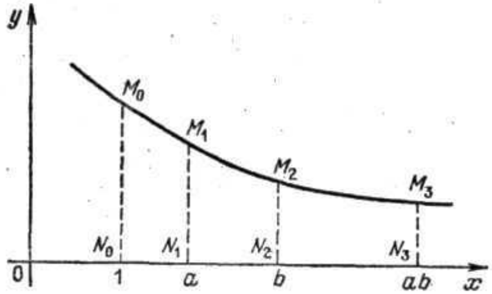

Рис. 7

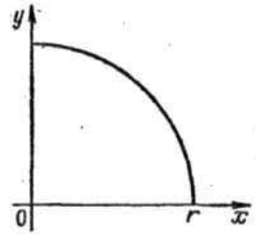

Рис. 8

площади фигур не изменяются — при растяжении по Ox они увеличиваются в b раз, при сжатии по Oy они уменьшаются в b раз, т. е. вернутся к исходным значениям.

Не зная интегралов и логарифмов, мы, положив по определению $\ln a =$ пл. $M_0N_0N_1M_1$, пришли бы к основному свойству логарифма:

$$\ln ab = \ln a + \ln b. \ ▶$$

Пример 5. Найти посредством интегрирования площадь круга радиуса r.

Решение. Одна четверть площади равна $\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ (рис. 8). Это «довольно трудный» интеграл. Мы его рассмотрели в примере 8 § 4. Мы тогда получили

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{r^2}{2} \operatorname{arssin} \frac{x}{r} + \frac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2} + C,$$

откуда

$$\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left(\frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2}\right)_{x=r} - \left(\frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2}\right)_{x=0} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{4},$$

так что площадь всего круга равна πr^2.

Мы видим, что в этом элементарном случае задача определения площади была решена с помощью «трудного» интеграла. Это обстоятельство как бы принижает метод

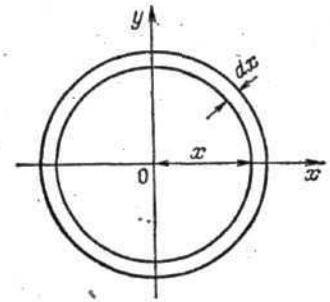

Рис. 9

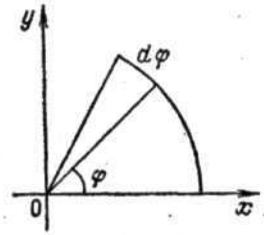

Рис. 10

вычисления площадей с помощью интегралов по сравнению с элементарными методами.

Можно и другими способами представлять площадь круга как одно из значений переменной площади. Сделаем это еще двумя способами.

Рассмотрим круг переменного радиуса x (рис. 9), пусть его площадь равна $S(x)$. Бесконечно малое приращение $\Delta S(x)$ при приращении x на dx равно площади узкой полоски между окружностями радиуса x и радиуса $x + dx$. Ширина этой полоски равна dx, а за длину при подсчете главной части приращения площади можно принять $2\pi x$. Итак, $dS(x) = 2\pi x\, dx$, откуда

$$S = \int\limits_0^r 2\pi x\, dx = 2\pi \frac{x^2}{2}\Big|_{x=r} - 2\pi \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0} = \pi r^2.$$

Еще один прием: рассмотрим сектор с переменным углом φ (рис. 10). Приращение площади $S(\varphi)$ сектора имеет главной частью площадь треугольника с основанием $r\, d\varphi$

и высотой r. Она равна $\frac{1}{2}r^2\,d\varphi$. Итак, $dS(\varphi)=\frac{1}{2}r^2\,d\varphi$ и площадь круга равна

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} r^2\,d\varphi=\frac{1}{2}r^2(\varphi|_{\varphi=2\pi}-\varphi|_{\varphi=0})=\pi r^2.$$

§ 7. Простейшие свойства определенных интегралов

Рассмотрим простейшие свойства определенных интегралов.

1. $\int\limits_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx=\int\limits_a^b f_1(x)\,dx+\int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$

2. $\int\limits_a^b mf(x)\,dx=m\int\limits_a^b f(x)\,dx$

(здесь m — постоянная).

Эти свойства непосредственно следуют из аналогичных свойств неопределенных интегралов.

3. *Пусть a, b, c принадлежат интервалу, на котором функция $f(x)$ непрерывна. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Действительно, пусть $F_0(x)$ — первообразная функция для $f(x)\,dx$. Тогда

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx=$$

$$=F_0(c)-F_0(a)+F_0(b)-F_0(c)=F_0(b)-F_0(a)=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

4. $\int\limits_a^b f(x)\,dx=-\int\limits_b^a f(x)\,dx$ — очевидно.

Следующие свойства 5, 6, 7 геометрически почти очевидны, мы все же их докажем, исходя из определения.

5. *Пусть $a<b$ и $f(x)>0$ во всех точках $[a, b]$. Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx>0.$

Доказательство. Действительно, пусть $F_0(x)$ — первообразная функция. Она возрастает в силу положительности ее производной $F_0'(x)=f(x)$. Поэтому $F_0(a)<F_0(b)$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx=F_0(b)-F_0(a)>0.$

6. *Пусть $a<b$ и $f(x)\geqslant 0$ во всех точках $[a, b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\geqslant 0.$$

Доказательство. Пусть ε — положительное число. Тогда $f(x)+\varepsilon>0$ и, в силу свойства 5,

$$\int\limits_a^b (f(x)+\varepsilon)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx+\varepsilon(b-a)>0,$$

откуда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx>-\varepsilon(b-a).$$

Но ε можно взять сколь угодно малым. Поэтому

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\geqslant 0.$$

7. *Пусть $a<b$, $f(x)$ непрерывна и неотрицательна во всех точках интервала $[a, b]$ и $f(x_0)>0$ хотя бы в одной точке x_0 внутри интервала. Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx>0.$

Доказательство. В силу непрерывности $f(x)$ найдется интервал $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$, содержащийся в $[a, b]$, в котором $f(x)$ положительна во всех точках. Разобьем промежуток интегрирования на три части:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx+\int\limits_{x_0+\delta}^b f(x)\,dx.$$

Первое и третье слагаемые неотрицательны в силу свойства 6. Второе слагаемое строго положительно в силу свойства 5. Следовательно,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx>0.$$

8. ***Теорема о среднем значении.*** *Пусть $a < b$ и $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда найдется точка c внутри $[a, b]$, для которой*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c).$$

Доказательство. Пусть M и m — наибольшее и наименьшее значение $f(x)$ на $[a, b]$ и пусть $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. Тогда $\int_a^b (M - f(x))\,dx \geqslant 0$, откуда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx = M(b-a).$$

Далее, $\int_a^b (f(x) - m)\,dx \geqslant 0$, откуда

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b m\,dx = m(b-a).$$

Из этих неравенств следует, что $m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$.

Итак, величина $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ заключена между наименьшим и наибольшим значениями $f(x)$. В силу непрерывности функции $f(x)$ эта величина равна $f(c)$, где c — некоторая точка, расположенная между x_1 и x_2, так что $x_1 < c < x_2$, если $x_1 < x_2$, или $x_2 < c < x_1$, если $x_2 < x_1$. Точки x_1 и x_2 лежат в промежутке $[a, b]$. Следовательно, точка c лежит внутри этого промежутка, т. е. $a < c < b$. Итак, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$, при $a < c < b$ и $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Теорема о среднем равносильна теореме Лагранжа о конечных приращениях (гл. 3, § 2, лемма 2) в применении к первообразной функции для $f(x)\,dx$. Действительно, если $F_0(x)$ — первообразная функция, то теорема о среднем значении равносильна равенству $F_0(b) - F_0(a) = (b-a)\,F'(c)$, т. е. теореме Лагранжа для функции $F_0(x)$.

В определении $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ определенного интеграла существенно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна на интервале $[a, b]$. Если не принимать это во внимание, можно получить абсурдные результаты. Так, например, функция $1/x^2$ положительна при всех значениях x. Однако если формально вычислить $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}\,dx$, то получится отрицательное число

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{x=1} - \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=-1} = -1 - 1 = -2,$$

что, кажется, противоречит свойству 5. Дело в том, что функция $1/x^2$ имеет разрыв непрерывности при $x = 0$ и $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$ просто не имеет смысла.

§ 8. Представление интеграла в виде суммы

Пусть $a < b$ и функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей:

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1}, x_n],$$

где

$$x_0 = a,\ x_n = b,\ x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx.$$

Применим к каждому слагаемому теорему о среднем значении. Получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = (x_1 - x_0)\,f(c_1) + (x_2 - x_1)\,f(c_2) + \ldots$$
$$\ldots + (x_n - x_{n-1})\,f(c_n).$$

Здесь $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — некоторые определенные точки, взятые из интервалов соответственно $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. Разности $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $x_n - x_{n-1}$

можно рассматривать как приращения переменной x при переходе от x_0 к x_1, от x_1 к x_2, ..., от x_{n-1} к x_n. Обозначив эти приращения через d_1x, d_2x, ..., d_nx, придем к равенству

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c_1)\,d_1x + f(c_2)\,d_2x + \ldots + f(c_n)\,d_nx.$$

Эта формула имеет ясный геометрический смысл. Для наглядности положим $f(x) > 0$ (рис. 11). На рисунке выбрано $n=7$. Каждое слагаемое $f(c_k)\,d_kx$ равно площади прямоугольника с основанием d_kx и с такой высотой, что

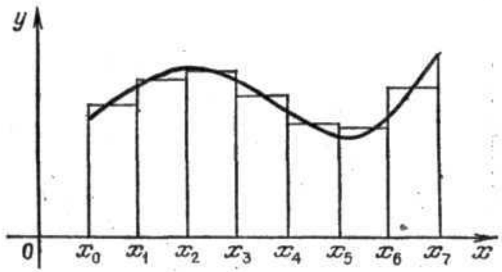

Рис. 11

площадь прямоугольника равна площади соответствующей криволинейной трапеции.

Выведенная формула в известной мере объясняет происхождение обозначения для интеграла. Как уже было сказано выше, знак $\int$ есть вытянутая буква S («эс» латинское), первая буква слова «сумма» (summa). Суммируемые слагаемые имеют вид произведений значений $f(c_i)$ подынтегральной функции на дифференциалы независимой переменной. Пределы a и b в интеграле показывают, какой интервал разбивается на мелкие части и, тем самым, из какого интервала берутся все значения $f(c_i)$ функции $f(x)$.

§ 9. Интеграл как предел суммы

Формула из предыдущего параграфа

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c_1)\,d_1x + f(c_2)\,d_2x + \ldots + f(c_n)\,d_nx$$

точная, но в ней есть существенная неопределенность — мы не знаем точных значений $c_1, c_2, \ldots, c_n$, знаем только,

каким интервалам они принадлежат. Если мы вместо значений $f(x)$ в точках $c_1, c_2, \ldots, c_n$ возьмем значения в каких-либо других точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$ из тех же интервалов, мы получим сумму

$$f(z_1)\,d_1x + f(z_2)\,d_2x + \ldots + f(z_n)\,d_nx,$$

которая уже не будет точно равна $\int_a^b f(x)\,dx$, но, что геометрически очевидно (рис. 12), будет мало отличаться

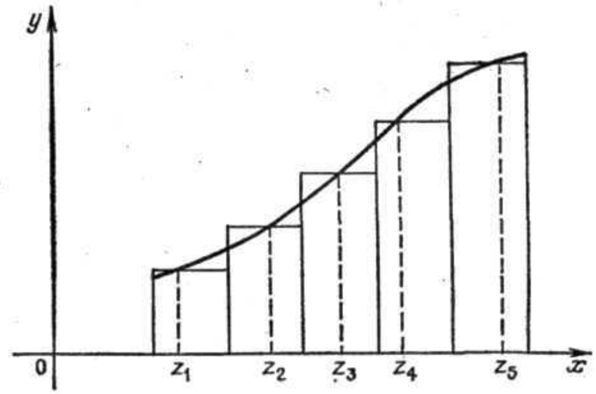

Рис. 12

от интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, и тем меньше, чем мельче части, на которые разбит интервал интегрирования. Так построенная сумма называется *интегральной суммой* или *суммой Римана*.

Среди интегральных сумм выделим *верхнюю интегральную сумму*, в которой в качестве z_i берутся точки максимума $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$, и *нижнюю интегральную сумму*, в которой в качестве z_i берутся точки минимума $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$. Таким образом, верхняя интегральная сумма равна

$$S_{\max} = M_1d_1x + M_2d_2x + \ldots + M_nd_nx,$$

где $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — наибольшие значения $f(x)$ на интервалах $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, а нижняя равна

$$S_{\min} = m_1d_1x + m_2d_2x + \ldots + m_nd_nx,$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — наименьшие значения $f(x)$ на соответствующих интервалах. Геометрическое изображение верхней и нижней интегральных сумм дано на рис. 13 и 14.

Ясно, что любая верхняя интегральная сумма больше интеграла (если $f(x)$ — не постоянная), а любая нижняя — меньше. Далее, при данном разбиении любая интегральная сумма не больше верхней и не меньше нижней.

Оценим разность между верхней и нижней интегральными суммами при одном и том же разбиении промежутка интегрирования. С этой целью обозначим через δ наибольшую из разностей $M_1-m_1,\ M_2-m_2,\ \ldots,\ M_n-m_n$.

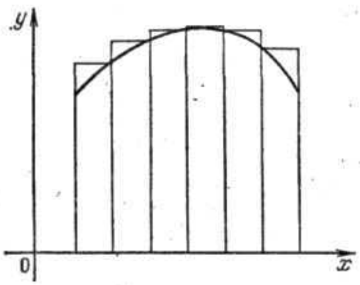

Рис. 13

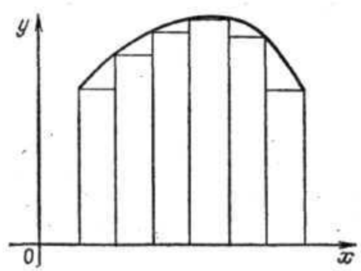

Рис. 14

Можно (но не очень просто) доказать, что δ может стать сколь угодно малым, если взять разбиение достаточно мелким.

Имеем

$$S_{\max}-S_{\min}=$$
$$=(M_1-m_1)\,d_1x+(M_2-m_2)\,d_2x+\ldots+(M_n-m_n)\,d_nx\leqslant$$
$$\leqslant \delta d_1x+\delta d_2x+\ldots+\delta d_nx=\delta\,(d_1x+d_2x+\ldots+d_nx)=$$
$$=\delta\,(x_1-x_0+x_2-x_1+\ldots+x_n-x_{n-1})=\delta\,(x_n-x_0)=\delta\,(b-a).$$

Таким образом, $S_{\max}$ и $S_{\min}$ безгранично сближаются при измельчении разбиений интервала $[a,\ b]$ и, сближаясь друг с другом, приближаются к интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$, который заключен между $S_{\max}$ и $S_{\min}$ при любом разбиении. Тем самым $S_{\max}$ и $S_{\min}$ имеют предел $\int_a^b f(x)\,dx$ в предположении, что рассматривается последовательность все более мелких разбиений. Так как любая интегральная сумма заключена между $S_{\max}$ и $S_{\min}$, любая интегральная сумма тоже имеет предел $\int_a^b f(x)\,dx$ при безграничном измельчении разбиений интервала $[a,\ b]$.

Пример 1. Вычислить верхнюю и нижнюю интегральные суммы для $\int_0^1 x^3dx$, исходя из разбиения интервала $[0,\ 1]$ на n равных частей.

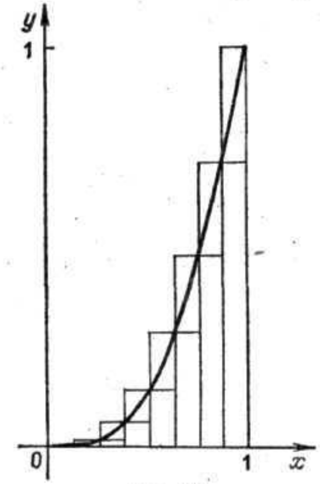

Рис. 15

Решение. Функция $y=x^3$ возрастает, поэтому на каждом интервале $[x_{i-1},\ x_i]$ наибольшее значение достигается на правом конце интервала, наименьшее — на левом (рис. 15). Здесь $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{n}$, $x_2=\frac{2}{n}$, $\ldots$, $x_{n-1}=\frac{n-1}{n}$, $x_n=\frac{n}{n}=1$; $d_1x=d_2x=\ldots=d_nx=\frac{1}{n}$. Нижняя сумма:

$$S_{\min}=0+\left(\frac{1}{n}\right)^3\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^3\frac{1}{n}+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\frac{1}{n}=$$
$$=\frac{1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3}{n^4}.$$

Верхняя сумма:

$$S_{\max}=\left(\frac{1}{n}\right)^3\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^3\frac{1}{n}+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\frac{1}{n}=\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}.$$

Ясно, что $S_{\max}-S_{\min}=\frac{n^3}{n^4}=\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$.

Для подсчета сумм вспомним *), что $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, так что

$$1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3=\frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

Следовательно,

$$S_{\max}=\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{n^2+2n+1}{4n^2}=$$
$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\to\frac{1}{4}\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

*) См., например, «Алгебру 6—8», гл. 16, § 3.

Соответственно

$$S_{\min}=\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2(n-1)^2}{4}=\frac{n^2-2n+1}{4n^2}=$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\to\frac{1}{4}\qquad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Эти суммы должны иметь предел

$$\int_0^1 x^3\,dx=\frac{x^4}{4}\bigg|_{x=1}-\frac{x^4}{4}\bigg|_{x=0}=\frac{1}{4},$$

что действительно имеет место.

◀ В заключение рассмотрим еще одно геометрическое истолкование интегральной суммы

$$S=f(z_1)(x_1-x_0)+f(z_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(z_n)(x_n-x_{n-1}),$$

где $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ и $x_{i-1}\leqslant z_i\leqslant x_i$.

Пусть $F(x)=F_0(x)-F_0(a)$ — первообразная функция для $f(x)$, принимающая значение 0 при $x=a$. Рассмотрим

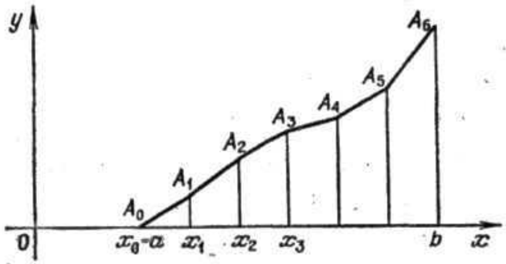

Рис. 16

следующее приближенное представление графика $F(x)$ при помощи ломаной линии. Построим семейство вертикальных прямых $x=x_0$, $x=x_1$, $x=x_2$, ..., $x=x_{n-1}$, $x=x_n$ (рис. 16) и построим ломаную с вершинами на этих прямых следующим образом. Исходя из точки $A_0(a,\ 0)$, через которую проходит график $F(x)$, построим отрезок прямой A_0A_1 с угловым коэффициентом $f(z_1)=F'(z_1)$ до встречи с прямой $x=x_1$. Это есть угловой коэффициент касательной к графику $F(z)$ в точке z, лежащей между x_0 и x. Поэтому отрезок A_0A_1 довольно плотно примыкает к соответствующему участку графика. Ордината точки A_1 равна, очевидно, $f(z_1)(x_1-x_0)$. Затем из точки A_1 проводим отрезок A_1A_2 с угловым коэффициентом $f(z_2)=$

$=F'(z_2)$ до прямой $x=x_2$. Этот отрезок параллелен касательной к графику $F(x)$ в точке $x=z_2$. Ордината точки A_2 получается из ординаты точки x_1 прибавлением числа $f(z_2)(x_2-x_1)$, так что она равна $f(z_1)(x_1-x_0)+f(z_2)\times$ $\times(x_2-x_1)$. Далее проводим отрезок A_2A_3 с угловым коэффициентом $f(z_3)=F'(z_3)$ до прямой $x=x_3$ и т. д. Ордината точки A_k будет получаться из ординаты A_{k-1} прибавлением числа $f(z_k)(x_k-x_{k-1})$, так что она равна

$$f(z_1)(x_1-x_0)+f(z_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(z_k)(x_k-x_{k-1}).$$

Ордината последней точки A_n равна

$$f(z_1)(x_1-x_0)+f(z_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(z_n)(x_n-x_{n-1}),$$

т. е. равна интегральной сумме S. Если брать все более мелкие разбиения, то $\lim S=\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)$, т. е. крайняя правая точка построенной ломаной с абсциссой b сходится к числу $F(b)$, т. е. к точке графика $F(x)$ с абсциссой b. Нетрудно проследить, что не только крайняя правая точка ломаной сходится к крайней правой точке графика $F(x)$, но и все точки ломаной с фиксированной абсциссой будут стремиться к точкам графика $F(x)$ с теми же абсциссами, так что построенная ломаная есть действительно приближение к графику $F(x)$, становящееся все более точным при безграничном разбиении промежутка $[a,\ b]$.

Ломаная, соответствующая верхней интегральной сумме, целиком расположится выше графика $F(x)$, ломаная, соответствующая нижней интегральной сумме, — ниже.

Если в качестве z_i взять c_i из теоремы о среднем:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx=f(c_i)(x_i-x_{i-1}),$$

то ломаная будет вписана в график $F(x)$, т. е. ее вершины будут лежать на этом графике. ▶

§ 10. Приближенное вычисление интегралов

Представление интеграла в виде предела интегральной суммы дает средство для приближенного вычисления интеграла. Мы знаем, что, взяв достаточно мелкие разбиения промежутка интегрирования, мы получим интегральную сумму, сколь угодно близкую к интегралу.

Если вычислять одновременно нижнюю и верхнюю интегральные суммы, мы получим приближения к интегралу с недостатком и с избытком. Однако можно указать существенно более «экономные» способы вычислений, чем вычисление нижних и верхних интегральных сумм. Опишем некоторые из них.

1. Способ средних прямоугольников. В качестве приближения к интегралу берется интегральная сумма, в которой значения подынтегральной функции берутся в серединах промежутков, на которые разделен промежуток интегрирования. Предполагается, что

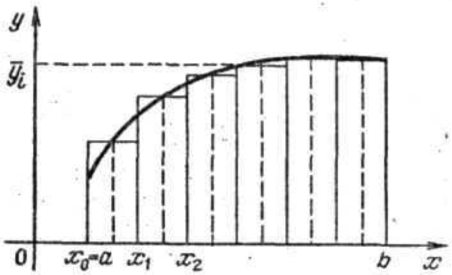

Рис. 17

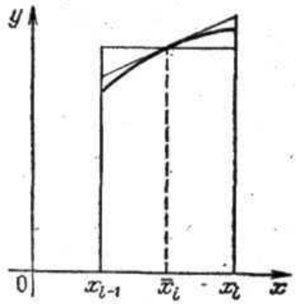

Рис. 18

все эти промежутки имеют одинаковую длину, равную $\frac{b-a}{n}$, где a и b — пределы интегрирования, n — число частей. Таким образом, интегральная сумма имеет вид

$$S_{\text{пр}} = \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right] = \frac{b-a}{n}(\bar{y}_1+\bar{y}_2+\ldots+\bar{y}_n),$$

где через $\bar{y}_i$ обозначено $f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$ (рис. 17). Ввиду того что $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ находится посредине между прямыми $x=x_{i-1}$ и $x=x_i$, проходящими через концы интервала $[x_{i-1}, x_i]$, площадь прямоугольника равна площади трапеции (рис. 18), ограниченной промежутком $[x_{i-1}, x_i]$, прямыми $x=x_{i-1}$ и $x=x_i$ и касательной к графику $f(x)$ в точке с абсциссой $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}=\bar{x}_i$.

2. Способ трапеций. Промежуток интегрирования $[a, b]$ разбивается на n равных частей точками $a=$

$= x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=b$. Площадь каждой криволинейной трапеции между прямыми $x=x_{i-1}$ и $x=x_i$ заменяется площадью прямолинейной трапеции, ограниченной сверху хордой, соединяющей точки графика с абсциссами

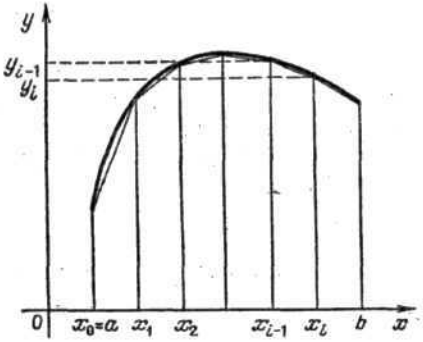

Рис. 19

x_{i-1} и x_i. Основаниями таких трапеций являются $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ и $y_i=f(x_i)$ (рис. 19). Сумма площадей таких трапеций равна, очевидно,

$$S_{\text{тр}} = \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right] = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right).$$

3. Способ парабол (способ Симпсона). В основе этого способа лежит формула

$$S_{\text{пар}} = \frac{1}{3}(S_{\text{тр}}+2S_{\text{пр}}).$$

◄ Дадим его обоснование. Пусть дана парабола $y=\varphi(x)= ax^2+bx+c$. Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=ax^2+bx+c$, прямыми $x= -h/2$ и $x=h/2$ (расстояние между которыми равно h) и отрезком оси Ox. Эта площадь равна

$$\int_{-h/2}^{h/2}(ax^2+bx+c)\,dx = \frac{ah^3}{12}+ch = \frac{h}{3}\left(\frac{ah^2}{4}+3c\right).$$

Выразим ее через $y_0=\varphi\left(-\frac{h}{2}\right)=\frac{ah^2}{4}-\frac{bh}{2}+c$, $y_1=\varphi\left(\frac{h}{2}\right)= \frac{ah^2}{4}+\frac{bh}{2}+c$ и $\bar{y}_1=\varphi(0)=c$. Имеем $y_0+y_1=\frac{ah^2}{2}+2c$,

$\frac{y_0+y_1}{2}=\frac{ah^2}{4}+c$, так что

$$\int_{-h/2}^{h/2}(ax^2+bx+c)\,dx=\frac{h}{3}\left(\frac{y_0+y_1}{2}+2\bar{y}_1\right).$$

Эта формула останется верной для любой параболической трапеции высотой h, ибо при сдвиге вдоль оси Ox вид уравнения параболы $y=ax^2+bx+c$ сохраняются, изменяются только коэффициенты.

Покажем теперь, что через любые три точки $(x_0,\ y_0)$, $(\bar{x}_1,\ \bar{y}_1)$ и $(x_1,\ y_1)$ с попарно различными абсциссами можно провести параболу с уравнением вида $y=ax^2+bx+c$. Требование того, чтобы парабола проходила через данные точки, записывается в виде равенств

$$y_0=ax_0^2+bx_0+c,\quad \bar{y}_1=a\bar{x}_1^2+b\bar{x}_1+c,$$
$$y_1=ax_1^2+bx_1+c.$$

Эти равенства составляют систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов a, b, c, которую легко решить. Вычитая из второго и третьего уравнений первое, получим

$$\bar{y}_1-y_0=a\bar{x}_1^2+b\bar{x}_1-ax_0^2-bx_0=(\bar{x}_1-x_0)\,(a\,(\bar{x}_1+x_0)+b),$$
$$y_1-y_0=ax_1^2+bx_1-ax_0^2-bx_0=(x_1-x_0)\,(a\,(x_1+x_0)+b).$$

Разделив на $\bar{x}_1-x_0$ и соответственно на x_1-x_0 эти равенства, получим

$$\frac{\bar{y}_1-y_0}{\bar{x}_1-x_0}=a\,(\bar{x}_1+x_0)+b,\quad \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=a\,(x_1+x_0)+b.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$\frac{\bar{y}_1-y_0}{\bar{x}_1-x_0}-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=a\,(\bar{x}_1-x_1).$$

Итак, система преобразовалась к виду

$$y_0=ax_0^2+bx_0+c,\quad \frac{\bar{y}_1-y_0}{\bar{x}_1-x_0}=a\,(\bar{x}_1+x_0)+b,$$
$$\frac{\bar{y}_1-y_0}{\bar{x}_1-x_0}-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=a\,(\bar{x}_1-x_1).$$

Из последнего уравнения найдем a, из второго найдем b и из первого c. Все необходимые деления выполнимы,

ибо x_0, $\bar{x}_1$, x попарно различны по условию. Итак, через точки $(x_0,\ y_0)$, $(\bar{x}_1,\ \bar{y}_1)$ и $(x_1,\ y_1)$ с попарно различными абсциссами действительно можно провести параболу $y=ax^2+bx+c$.

Вернемся к задаче приближенного вычисления $\int_a^b f(x)\,dx$. Разобьем промежуток интегрирования на n равных частей и на каждой части $[x_{i-1},\ x_i]$ заменим график подынтегральной функции на отрезок параболы, проходящей через точки графика с абсциссами x_{i-1}, $\bar{x}_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ и x_i. Ясно, что такой отрезок параболы будет, вообще говоря, очень мало отличаться от соответствующего участка графика функции. Заменим $\int_a^b f(x)\,dx$ на сумму площадей параболических трапеций. Получим

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}\cdot\frac{1}{3}\left[\frac{y_0+y_1}{2}+2\bar{y}_1+\frac{y_1+y_2}{2}+\right.$$
$$\left.+2\bar{y}_2+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}+2\bar{y}_n\right]=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}+2\,(\bar{y}_1+\bar{y}_2+\ldots+\bar{y}_n)\right]=$$
$$=\frac{1}{3}\,(S_{\text{тр}}+2S_{\text{пр}}).$$

Есть другие методы приближенного вычисления интегралов. ▶

Пример 1. Вычислить приближенно $\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. При $n=1$:

$$y_0=1,\quad \bar{y}_1=\frac{4}{5}=0{,}8,\quad y_1=\frac{1}{2},\quad S_{\text{пр}}=0{,}8;$$
$$S_{\text{тр}}=\frac{3}{4}=0{,}75;\quad S_{\text{пар}}=\frac{8}{5}+\frac{3}{4}=\frac{47}{60}\approx 0{,}7833.$$

В действительности $\pi/4$ с четырьмя знаками после запятой приближенно равно 0,7854.

При $n=3$:

$$y_0=1,\quad y_1=\frac{9}{10}=0{,}9000000,$$

$$y_2=\frac{9}{13}=0{,}69230769,\quad y_3=\frac{1}{2},$$

$$S_{\text{тр}}=0{,}78076923,$$

$$y_1=\frac{36}{37}=0{,}97297297,\quad \bar{y}_1=\frac{4}{5}=0{,}8000000,$$

$$\bar{y}_2=\frac{36}{61}=0{,}59016393,\quad S_{\text{пр}}=0{,}78771230,$$

$$S_{\text{пар}}=\frac{S_{\text{тр}}+2S_{\text{пр}}}{3}=0{,}78539794.$$

Мы провели вычисления с 8 знаками после запятой. В действительности значение $\pi/4$ с 8 знаками после запятой есть 0,78539816. При $n=5$ при вычислении с 8 знаками получатся верными все восемь знаков.

§ 11. Объем тела вращения

Пусть $y=f(x)$ — непрерывная неотрицательная функция, заданная на интервале $[a, b]$. Представим себе тело, получающееся при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 20). Для вычисления объема этого тела рассмотрим аналогичное тело с переменной правой стенкой, пересекающей ось Ox в точке x. Объем этого тела $V(x)$ есть функция от x. При бесконечно малом (т. е. безгранично уменьшающемся) приращении dx объем возрастает на объем бесконечно тонкого (т. е. безгранично утончающегося) слоя ширины dx и с площадью основания $\pi f^2(x)$. Таким образом,

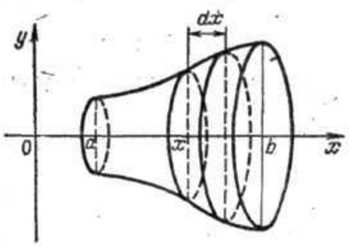

Рис. 20

$$dV(x)=\pi f^2(x)\,dx \quad \text{и} \quad V(x)=\int \pi f^2(x)\,dx=F_0(x)+C,$$

где $F_0(x)$ — какая-либо первообразная функция для $\pi f^2(x)\,dx$. При $x=a$ получим $0=F(a)=F_0(a)+C$, откуда $C=-F_0(a)$, объем $V(x)$ равен $F_0(x)-F_0(a)$ и искомый объем

$$V=V(b)=$$

$$=F_0(b)-F_0(a)=\int_a^b \pi y^2\,dx.$$

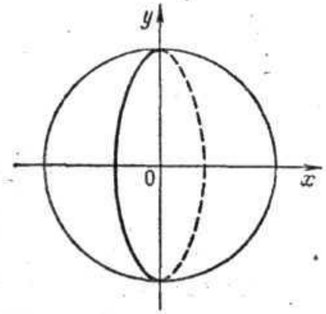

Рис. 21

Пример 1. Вычислить объем шара радиуса r.

Решение. Шар получается посредством вращения полукруга радиуса r вокруг диаметра (рис. 21). Приняв диаметр за ось Ox, получим, что полукруг ограничен полуокружностью с уравнением $y=\sqrt{r^2-x^2}$. Интегрировать нужно от абсциссы левого края полукруга до абсциссы правого края, т. е.

$$V=\int_{-r}^{r}\pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=\int_{-r}^{r}\pi\left(r^2-x^2\right)dx.$$

Выполнив вычисления, получим

$$V=\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)_{x=r}-\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)_{x=-r}=$$

$$=\pi r^3-\frac{\pi r^3}{3}+\pi r^3-\frac{\pi r^3}{3}=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Пример 2. Вычислить объем параболоида вращения, т. е. тела, полученного вращением вокруг оси Ox «параболического треугольника», ограниченного верхней половиной параболы $y^2=cx$, осью Ox и прямой $x=a$ (рис. 22).

Решение.

$$V=\int_0^a \pi y^2\,dx=\int_0^a \pi cx\,dx=\pi c\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=a}-\pi c\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}=$$

$$=\frac{\pi ca^2}{2}=\pi ca\cdot\frac{a}{2}=\pi\left(\sqrt{ca}\right)^2\cdot\frac{a}{2}=\frac{Sa}{2}.$$

Здесь $S=\pi\left(\sqrt{ca}\right)^2$ — площадь круга, ограничивающего справа параболоид. Таким образом, объем параболоида вращения равен половине объема описанного вокруг него цилиндра, с площадью основания S и высотой a.

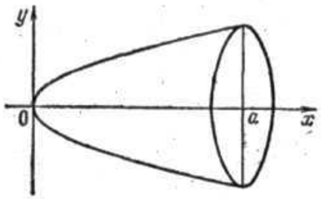

Рис. 22

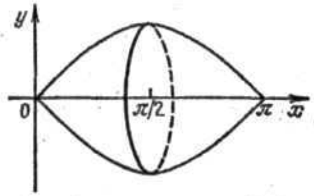

Рис. 23

Пример 3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной осью Ox и одной полуволной синусоиды $y=\sin x$ (рис. 23).

Решение.

$$V=\int_0^{\pi}\pi\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\pi\,\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=$$

$$=\pi\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)_{x=\pi}-\pi\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)_{x=0}=\frac{\pi^2}{2}.$$

§ 12. Длина дуги кривой

Пусть $y=f(x)$ — непрерывная и дифференцируемая функция на промежутке $[a, b]$. Рассмотрим задачу вычисления длины l графика $f(x)$ от точки с абсциссой a до точки с абсциссой b. Обозначим через $l(x)$ длину кривой от точки с абсциссой a до точки с абсциссой x (рис. 24). Пусть абсцисса x получила бесконечно малое приращение dx. Тогда y получит бесконечно малое приращение Δy, которое отличается от приращения dy вдоль касательной на бесконечно малую, стремящуюся к нулю существенно быстрее, чем dx. Приращение Δl длины кривой отличается от длины соответствующего отрезка касательной

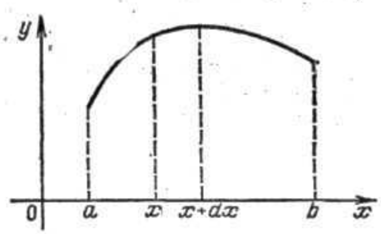

Рис. 24

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

(рис. 25) на бесконечно малую, существенно меньшую, чем dx. Последняя линейна относительно dx и является главной частью Δl. Следовательно,

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx \quad \text{и} \quad l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Пример 1. Найти с помощью интегрирования длину четверти окружности радиуса r (рис. 26).

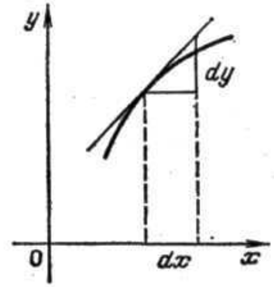

Рис. 25

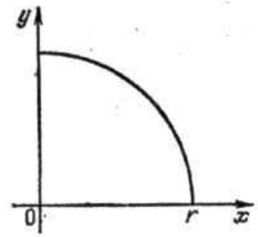

Рис. 26

Решение. Здесь $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $a=0$, $b=r$,

$$y'=-\frac{2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}};$$

$$1+(y')^2=1+\frac{x^2}{r^2-x^2}=\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}=\frac{r^2}{r^2-x^2}.$$

$$l=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=\int_0^r\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}}\,dx=r\int_0^r\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}}\,d\left(\frac{x}{r}\right)=$$

$$=r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_{x=r}-r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_{x=0}=\frac{r\pi}{2},$$

что и следовало ожидать.

Заметим, что вычисление длины эллипса сводится к вычислению «неберущегося» интеграла, т. е. интеграла, не выражающегося через элементарные функции. То же относится к вычислению длины дуги гиперболы $y=1/x$, длины дуги синусоиды. Длина дуги параболы приводится к интегралу, хотя и выражающемуся через элементарные функции, но довольно сложному.

Пример 2. Найти длину дуги полукубической параболы $y=x^{3/2}$ от точки с абсциссой 0 до точки с абсциссой a.

Решение.

$$l=\int_0^a \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int_0^a\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{1/2}d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{x=a}-\frac{4}{9}\cdot\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{x=0}=$$

$$=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}a\right)^{3/2}-\frac{8}{27}.$$

§ 13. Площадь боковой поверхности тела вращения

Пусть тело получено посредством вращения криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=a$ и $x=b$ и графиком дифференцируемой функции $y=f(x)\geqslant 0$. Требуется определить площадь боковой поверхности этого тела. Введем в рассмотрение площадь $P(x)$ такого же тела, но ограниченного переменной правой стенкой, пересекающей Ox в точке с абсциссой x (рис. 27).

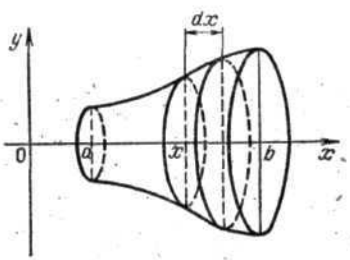

Рис. 27

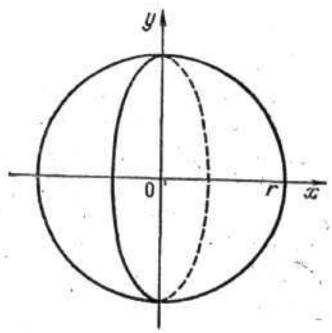

Рис. 28

При бесконечно малом приращении dx главной частью приращения $\Delta P(x)$ будет площадь ленты длиной $2\pi y$ и шириной dl, так что $dP(x)=2\pi y\,dl$ и

$$P=\int_a^b 2\pi y\,dl=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Пример 1. Найти площадь поверхности сферы радиуса r.

Решение. Здесь $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $a=-r$, $b=r$ (рис. 28),

$$P=\int_{-r}^{r}2\pi\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx=$$

$$=\int_{-r}^{r}2\pi\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=\int_{-r}^{r}2\pi r\,dx=$$

$$=2\pi rx\,|_{x=r}-2\pi rx\,|_{x=-r}=4\pi r^2.$$

Пример 2. Найти площадь боковой поверхности параболоида из примера 2 § 11.

Решение. Здесь $y=\sqrt{cx}$, пределы интегрирования 0 и a,

$$P=\int_0^a 2\pi\sqrt{cx}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=$$

$$=\int_0^a 2\pi\sqrt{cx+\frac{c^2}{4}}\,dx=\int_0^a\frac{2\pi}{c}\left(cx+\frac{c^2}{4}\right)^{1/2}d\left(cx+\frac{c^2}{4}\right)=$$

$$=\frac{2\pi}{c}\cdot\frac{\left(cx+\frac{c^2}{4}\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{x=a}-\frac{2\pi}{c}\cdot\frac{\left(cx+\frac{c^2}{4}\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{x=0}=$$

$$=\frac{4\pi}{3c}\left(ca+\frac{c^2}{4}\right)^{3/2}-\frac{4\pi}{3c}\cdot\left(\frac{c^2}{4}\right)^{3/2}=\frac{1}{6}\pi c^2\left(\left(1+\frac{4a}{c}\right)^{3/2}-1\right).$$

§ 14. Понятие дифференциального уравнения

Дифференциальным уравнением называется зависимость, связывающая значения функции, ее производных и аргумента. Роль неизвестного в дифференциальном уравнении играет функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению.

Задачу об интегрировании данной функции $f(x)$ можно рассматривать как задачу о решении дифференциального уравнения $y'=f(x)$, где y — искомая функция.

В простейших случаях решение дифференциального уравнения сводится к интегрированию. Однако это не всегда возможно, так что задача решения дифференциального уравнения оказывается по существу более сложной задачей, чем интегрирование.

Дифференциальное уравнение вида $y'=F(x, y)$ довольно ясно изображается геометрически. Уравнение обозначает, что угловой коэффициент графика искомой функции («интегральной кривой»), проходящего через точку

$M_0(x_0, y_0)$, известен заранее — он равен $F(x_0, y_0)$. Таким образом, уравнение $y' = F(x, y)$ определяет так называемое *поле направлений* — известно направление интегральных кривых (т. е. касательных к ним) во всех точках области определения функции $F(x, y)$.

Например, уравнение $y' = y/x$ означает, что угловой коэффициент графика решения, проходящего через точку $(x_0; y_0)$, равен y_0/x_0, т. е. угловому коэффициенту прямой $y = \frac{y_0}{x_0}x$, проходящей через начало координат и точку (x_0, y_0). Это значит, в свою очередь, что касательная к графику в любой точке проходит через начало координат (рис. 29). Этим свойством обладает любая прямая $y = cx$, проходящая через начало координат, ибо касательная в любой точке совпадает с самой прямой. Действительно, функция $y = cx$ при любом c удовлетворяет уравнению $y' = y/x$.

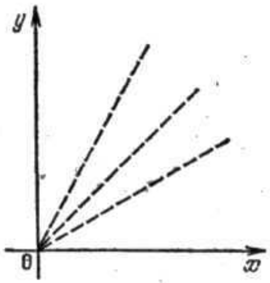

Рис. 29

Наши рассуждения показывают, что задача о решении уравнения $y' = F(x, y)$ есть задача о построении кривых (графиков решений) по данному полю направлений. Дальнейшее развитие этой идеи приводит, в частности, к построению эффективных методов приближенного решения дифференциальных уравнений независимо от того, сводится решение к интегрированию или нет.

Рассмотрим несколько примеров дифференциальных уравнений, решение которых сводится к интегрированию.

Пример 1. $y' = \frac{y}{x}$.

Решение. $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$. Умножив на dx, получим $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим $\ln y = \ln x + C$, откуда $y = xe^C = C_1x$.

При этом рассуждении можно подумать, что постоянная $C_1 = e^C$ может быть только положительной. Но это не так. Для функции $1/x$ существует первообразная и при $x < 0$, именно $\ln(-x)$, ибо ее производная равна $\frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}$. Итак, при любом $x \neq 0$ первообразной функцией для $1/x$ является $\ln|x|$. Из уравнения $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

заключаем, что $\ln|y| = \ln|x| + C$; $|y| = |x|C_1$, где $C_1 = e^C > 0$; $y = \pm C_1x$, так что в решении $y = C_1x$ постоянная C_1 может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Значение $C_1 = 0$ тоже допустимо, функция $y = 0$ удовлетворяет уравнению $y' = \frac{y}{x}$. Это решение было потеряно, когда мы поделили обе части уравнения на y.

Пример 2. $y' = ky$. Найти решение, которое равно $y_0 > 0$ при $x = 0$.

Решение. $\frac{y'}{y} = k$; $\frac{dy}{y} = kdx$; $\ln y = kx + C$; $y = e^{kx}C_1$, где $C_1 = e^C$. При $x = 0$ $y_0 = e^0 \cdot C_1$, откуда $C_1 = y_0$. Итак, искомое решение есть $y = y_0e^{kx}$.

Этот результат имеет ясное истолкование. Будем считать, что x есть время, а y — масса некоторого вещества. Пусть $k > 0$. В этом случае уравнение обозначает, что скорость возрастания массы в каждый момент времени пропорциональна массе. По этому закону изменяется, например, масса бактерий или дрожжей, развивающихся в некоторой питательной среде до тех пор, пока свойства этой среды не изменятся. Если же $k = -k_1 < 0$, то уравнение $y' = -k_1y$ показывает, что скорость изменения y отрицательна и пропорциональна y, т. е. масса вещества убывает со скоростью, пропорциональной массе. По этому закону $y = y_0e^{-k_1x}$ изменяется масса вещества при радиоактивном распаде, удобной характеристикой распадающегося вещества является так называемый *период полураспада*. Это время, за которое масса вещества уменьшается вдвое. Период полураспада T связан с коэффициентом k_1 посредством равенства $e^{-k_1T} = \frac{1}{2}$, откуда $T = \frac{1}{k_1}\ln 2$ и $k_1 = \frac{1}{T}\ln 2$. Подставив вместо k_1 его выражение через T, получим

$$y = y_0e^{-\frac{x}{T}\ln 2} = y_0 2^{-x/T}.$$

§ 15. Некоторые дифференциальные уравнения, играющие важную роль в механике

В механике при исследовании движения материальной точки под действием сил фундаментальную роль играет *второй закон Ньютона*. Этот закон утверждает в применении к движению по прямой, что *ускорение материальной* *точки пропорционально силе, действующей на нее, и обратно пропорционально ее массе.* При надлежащем выборе единиц измерения ускорение j равно частному от деления силы F на массу m точки:

$$j=\frac{F}{m}$$

или, что то же самое,

$$F=mj.$$

Напомним, что *ускорение есть скорость изменения скорости*, т. е. равно производной от скорости по времени. В свою очередь, при прямолинейном движении скорость равна производной от координаты точки по времени. Производная от производной функции $y=f(t)$ называется *второй производной* и обозначается y'' и $f''(t)$ (иногда для производной от y по времени применяется обозначение $\dot{y}$, для второй производной $\ddot{y}$). Итак, ускорение при прямолинейном движении равно второй производной от координаты y движущейся точки по времени. Принимая это во внимание, можно записать второй закон Ньютона в форме

$$F=my''.$$

Таким образом, для построения уравнения движения под влиянием данной силы F (которая может зависеть от времени, координаты точки и ее скорости) нужно исследовать уравнение

$$y''=\frac{1}{m}F.$$

Пример 1. **Движение под действием постоянной силы** (таким является, например, движение под действием силы тяжести у поверхности Земли).

В этом случае ускорение $y''=\frac{1}{m}F=j$ постоянно. Уравнение $y''=j$ легко решается. Именно $y'=jt+c_1=v$, $y=\frac{jt^2}{2}+c_1t+c_2$. Если дано, что в начальный момент координата равна y_0 и скорость равна v_0, мы получим, подставляя $t=0$ в выражения для скорости v и координаты y, что $c_1=v_0$, $c_2=y_0$. Итак, уравнение движения есть

$$y=\frac{jt^2}{2}+v_0t+y_0.$$

Это — равноускоренное движение, оно рассматривалось в гл. 1, § 10.

Пример 2. **Движение под действием силы, пропорциональной отклонению точки от положения равновесия и направленной в сторону, противоположную отклонению.**

Пусть материальная точка с массой m прикреплена к пружине, массой которой мы пренебрегаем. Допустим, что пружина под действием растягивающей силы F удлиняется на $y=cF$, под действием сжимающей силы F укорачивается на cF с тем же коэффициентом c. Величина $\alpha=1/c$ есть коэффициент жесткости пружины — чем он больше, тем меньше деформируется пружина под влиянием силы. Точка, отклонившаяся от положения равновесия на y, подвергается действию силы $F=-\alpha y$. Мы берем знак минус, так как сила действует в сторону, противоположную отклонению от положения равновесия. Согласно второму закону Ньютона получим

$$my''=-\alpha y \quad \text{или} \quad y''=-\frac{\alpha}{m}y.$$

Положим $\alpha/m=k^2$. Уравнение принимает вид $y''=-k^2y$. Легко указать некоторые решения уравнения. Решением будет $y=\cos kt$, ибо $(\cos kt)'=-k\sin kt$; $(\cos kt)''=-k^2\cos kt$. Также решением является $y=\sin kt$, ибо $(\sin kt)'=k\cos kt$; $(\sin kt)''=-k^2\sin kt$. Более общо, решением будет

$$C_1\cos kt+C_2\sin kt$$

при любых постоянных C_1 и C_2.

Все решения уравнения $y''=-k^2y$ даются формулой

$$y=C_1\cos kt+C_2\sin kt.$$

Доказательство. Положим $y=z\cos kt$, где z — новая неизвестная функция. Тогда $y'=z'\cos kt-kz\sin kt$; $y''=z''\cos kt-z'k\sin kt-kz'\sin kt-k^2z\cos kt$, откуда после подстановки в $y''=-k^2y$ получим

$$z''\cos kt-2kz'\sin kt-k^2z\cos kt=-k^2z\cos kt,$$
$$z''\cos kt=2kz'\sin kt.$$

Далее,

$$\frac{z''}{z'}=\frac{2k\sin kt}{\cos kt};\quad \frac{dz'}{z'}=-\frac{2d(\cos kt)}{\cos kt}.$$

Интегрирование дает $\ln z' = -2\ln\cos kt + C$; $z' = \frac{c_1}{\cos^2 kt}$.
Интегрируем еще раз и получаем

$$z = \int \frac{C_1}{\cos^2 kt}\,dt = \frac{C_1}{k}\int \frac{d(kt)}{\cos^2 kt} = \frac{C_1}{k}\,\mathrm{tg}\,kt + C_2,$$

$$y = z\cos kt = \frac{C_1}{k}\,\mathrm{tg}\,kt\cos kt + C_2\cos kt = \frac{C_1}{k}\sin kt + C_2\cos kt.$$

Это и требовалось доказать, ибо C_1/k есть произвольная постоянная.

Постоянные C_1 и C_2 в формуле $y = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ легко определить, если известна координата y_0 и скорость v_0 точки в момент времени $t = 0$. Подставив $t = 0$ в выражения для $y = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ и для скорости $v = y' = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt$, получим $y_0 = C_1$, $v_0 = C_2 k$, так что $C_1 = y_0$, $C_2 = \frac{v_0}{k}$.

Решение можно преобразовать. Полагая

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin\varphi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}},$$

получим

$$y = a(\sin\varphi\cos kt + \cos\varphi\sin kt) = a\sin(kt + \varphi).$$

Это — *уравнение гармонических колебаний с амплитудой* $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}$ *и с периодом* $\frac{2\pi}{k}$, т. е. *с частотой* $\frac{k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$.

Интересно отметить, что частота оказывается пропорциональной квадратному корню из коэффициента жесткости α и обратно пропорциональной квадратному корню из массы. Интуитивно ясно, что с увеличением жесткости частота должна увеличиваться, а с увеличением массы — уменьшаться. Но мы получили точный закон изменения частоты при изменении жесткости и массы.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 6

1. Найти три первообразные для заданной функции; записать общий вид первообразной для заданной функции $f(x)$:

1. $f(x) = 3x^2$. 2. $f(x) = 4x^3 - 2x$.
3. $f(x) = -\sin x$. 4. $f(x) = \cos x$.

2. Найти неопределенный интеграл:

1. $\int x^3\,dx$. 2. $\int x^{-2}\,dx$. 3. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$.
4. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$. 5. $\int 2\,dx$. 6. $\int dx$.

3. Найти интеграл; из множества найденных первообразных выбрать ту, график которой проходит через заданную точку $M(x;\ y)$:

1. $\int 4x\,dx$; $M(1;\ -2)$. 2. $\int \frac{1}{2}x\,dx$; $M(4;\ -5)$.
3. $\int \sin x\,dx$; $M\left(\frac{\pi}{2};\ 3\right)$. 4. $\int \cos x\,dx$; $M\left(\frac{\pi}{6};\ 1{,}5\right)$.

4. Точка движется по координатной прямой. По данному графику скорости движения (рис. 30) построить график изменения координаты точки при различных начальных условиях.

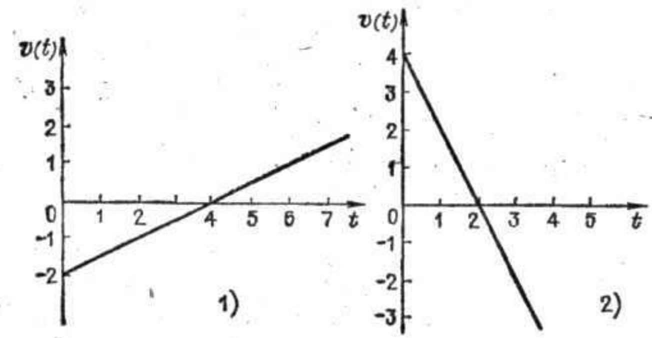

Рис. 30

5. Найти интегралы:

1. $\int (x-1)^3\,dx$. 2. $\int (x^2+4)(4-x^2)\,dx$.
3. $\int (2+x)(4-2x+x^2)\,dx$. 4. $\int (2+0{,}5x)^3\,dx$.
5. $\int \frac{3x^4 - 2x^2 + 6}{x^2}\,dx$. 6. $\int \frac{-x^4 + 2x - 3}{x^3}\,dx$.
7. $\int \frac{3x^2 - x + 2}{2x\sqrt{x}}\,dx$. 8. $\int \frac{2x^2\sqrt{x} - 4x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{3x}\,dx$.
9. $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}\right)dx$. 10. $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[7]{x^5}\right)dx$.

6. Найти интегралы; при необходимости воспользоваться тем, что $da^x = a^x \ln a \, dx$, а значит, $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$:

1. $\int (e^{x+1} + 2^x) \, dx$. 2. $\int (3^{1+x} - e^x) \, dx$. 3. $\int (3^{2x} - 3^x) \, dx$.

4. $\int \frac{2^x - 3^x}{6^x} \, dx$. 5. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \, dx$. 6. $\int \left(3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right) 3^x \, dx$.

7. Найти интегралы:

1. $\int \frac{x-3}{x} \, dx$. 2. $\int \frac{x^2 - 2x}{x^2} \, dx$.

8. Найти интегралы:

1. $\int \frac{4}{\sin^2 2x} \, dx$. 2. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} \, dx$.

3. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} \, dx$. 4. $\int \frac{\sin^2 x \cos x - \cos^2 x \sin x}{\sin 2x} \, dx$.

5. $\int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} \, dx$. 6. $\int (2 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) \, dx$.

7. $\int \frac{x^4 - x^2 - 1}{x^2 + 1} \, dx$. 8. $\int \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + 1} \, dx$.

9. Найти интегралы, приведя подынтегральное выражение к виду $f(\varphi(x)) \, d\varphi(x)$:

1. $\int (1 - 3x)^2 \, dx$. 2. $\int \frac{dx}{(0{,}5x - 3)^2}$. 3. $\int \sqrt{\left(4 + \frac{1}{3}x\right)^3} \, dx$.

4. $\int \sqrt[3]{(2 + 5x)^2} \, dx$. 5. $\int \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx$.

6. $\int \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) dx$. 7. $\int \frac{dx}{1 + 2x}$. 8. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$.

9. $\int e^{1-3x} \, dx$. 10. $\int (e^{3+2x})^{-1} \, dx$. 11. $\int 2^{-0{,}5x+2} \, dx$.

12. $\int 3^x \left(\frac{1}{9}\right)^{1+x} dx$. 13. $\int \frac{dx}{\sin^2 (2x - 1)}$. 14. $\int \frac{dx}{\cos^2\left(3 - \frac{1}{2}x\right)}$.

15. $\int \sin 2x \, dx$. 16. $\int \operatorname{tg} x \, dx$. 17. $\int \operatorname{ctg} x \, dx$.

18. $\int \sin^3 x \, dx$. 19. $\int \frac{x \, dx}{x^2 + 1}$. 20. $\int \frac{x^2 \, dx}{x^3 + 2}$.

◄ **10.** Найти интегралы способом интегрирования по частям:

1. $\int x e^{-x} \, dx$. 2. $\int x \cdot 3^x \, dx$. 3. $\int \ln^2 x \, dx$. 4. $\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx$.

5. $\int x \sin 2x \, dx$. 6. $\int x \cos 3x \, dx$. 7. $\int e^x \sin x \, dx$.

8. $\int e^x \cos x \, dx$. 9. $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$. 10. $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx$. ►

11. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$:

1. $f(x) = 4 - x^2$, $a = -2$, $b = 2$.
2. $f(x) = x^2 + 2$, $a = -2$, $b = 2$.
3. $f(x) = \frac{-1}{x+2}$, $a = -1$, $b = 4$.
4. $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $a = -2$, $b = 2$.
5. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$, $a = 0$, $b = 2$.
6. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$, $a = 0$, $b = \sqrt{3}$.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2x - 1$.
2. $y = -x^2 - 3x + 4$, $y = -2x + 2$.
3. $y = x^2 - x - 2$, $y = -x^2 - x$.
4. $y = x - 5$, $y = -4/x$.
5. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sin x$, $x = \pi/3$.
6. $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = 0$.

13. Решить задачи, не прибегая к вычислениям определенных интегралов:

1. Сравнить $\int\limits_0^1 x^2 \, dx$ и $\int\limits_0^1 \sqrt{x} \, dx$ и найти их сумму, пользуясь геометрической интерпретацией.

2. Сравнить $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ и $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \, dx$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \sin x$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 2\pi$;
2) $y = \cos x$, $y = -1$, $x = 0$.

4. Доказать равенства и дать им геометрическое истолкование

1) $\int\limits_{-\alpha}^{0} \cos x \, dx = \int\limits_0^{\alpha} \cos x \, dx$, $\alpha > 0$;

2) $\int\limits_{-\alpha}^{0} \sin x \, dx = -\int\limits_0^{\alpha} \sin x \, dx$, $\alpha > 0$;

3) $\int\limits_{-3}^{5} (x^2 - 2x + 11) \, dx = 2 \int\limits_{-3}^{1} (x^2 - 2x + 11) \, dx$;

4) $\int\limits_{-3}^{5} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \, dx = 0$.

14. Вычислить определенные интегралы:

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi/2} \sin\frac{x}{2}\,dx$. 2. $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x\,dx$. 3. $\int\limits_{-1}^{1} (3-2x)^3\,dx$.

4. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(1+2x)^2}$. 5. $\int\limits_{-2}^{1} \frac{dx}{x}$. 6. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x-3}$. 7. $\int\limits_{-5}^{2} |x|\,dx$.

8. $\int\limits_{0}^{4} |1-x|\,dx$. 9. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$. 10. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x\,dx$.

11. $\int\limits_{0}^{1} xe^x\,dx$. 12. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$.

13. $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx$. 14. $\int\limits_{1}^{e} \ln^3 x\,dx$.

15. Оценить интегралы, воспользовавшись соотношением

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

где m — наименьшее, а M — наибольшее значение $f(x)$ на $[a; b]$ (см. доказательство теоремы о среднем):

1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{x^3+16}\,dx$. 2. $\int\limits_{1}^{2} \frac{x}{x^3+16}\,dx$. 3. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x}{x^3+16}\,dx$.

4. $\int\limits_{3}^{4} \frac{x}{x^3+16}\,dx$. 5. $\int\limits_{4}^{5} \frac{x}{x^3+16}\,dx$. 6. $\int\limits_{5}^{6} \frac{x}{x^3+16}\,dx$.

16. Сначала оценить интеграл $\int\limits_0^6 \frac{x}{x^3+16}\,dx$, воспользовавшись неравенством из задачи 15, а затем получить более точную оценку, использовав результаты, полученные в задаче 15.

17. Построить график функции $y=\frac{x}{x^3+16}$, выбрав за единицу масштаба по оси абсцисс 1 клеточку, а по оси ординат — 100 клеточек тетрадочного листа. Определить по графику приближенное значение $\int\limits_0^6 \frac{x}{x^3+16}\,dx$ по следующей формуле:

$$S \approx 0{,}01\left(N+\frac{n}{2}\right),$$

где N — число клеточек, целиком входящих в соответствующую криволинейную трапецию, n — число клеточек, через которые проходит

график функции $\frac{x}{x^3+16}$ на интервале $[0; 6]$. Сопоставьте ответы в задачах 16 и 17.

18. Оценить интеграл $\int\limits_0^2 \sqrt{x(x-2)(x-4)}\,dx$, используя неравенство из задачи 15.

19. Получить более точную, чем в задаче 18, оценку $\int\limits_0^2 \sqrt{x(x-2)(x-4)}\,dx$, разбив интервал $[0; 2)$ на 5 (на 10) более мелких промежутков и применив неравенство к каждому из промежутков.

20. Пусть $f(x)=C$ — const, $C>0$. График такой функции имеет вид, изображенный на рис. 31. Фигура, ограниченная линиями

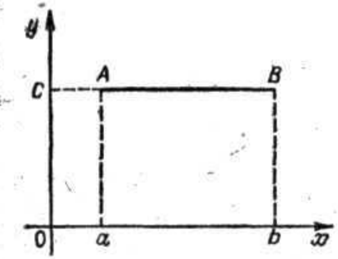

Рис. 31

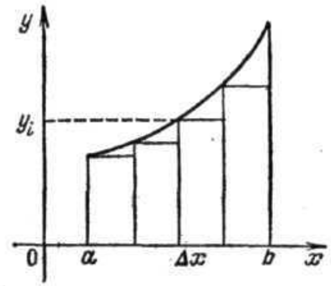

Рис. 32

$y=C$, $y=0$, $x=a$ и $x=b$, — прямоугольник, его площадь равна $S=C(b-a)$. Определить физический смысл площади прямоугольника, если:

1) по оси абсцисс отложено время движения в секундах, по оси ординат — скорость движения, точнее, скорость изменения пути в м/с;

2) по оси абсцисс отложен путь в метрах, пройденный точкой, движущейся по прямой, по оси ординат — сила в ньютонах, под действием которой происходит движение;

3) по оси абсцисс — длина стержня в метрах, по оси ординат — линейная плотность стержня в кг/м;

4) по оси абсцисс — путь в километрах, пройденный автомобилем, по оси ординат — расход горючего в литрах на километр пути, т. е. скорость сжигания горючего в л/км;

5) по оси абсцисс — температура тела в градусах (С), по оси ординат — теплоемкость этого тела, т. е. количество тепла в джоулях, необходимого для нагрева тела на 1 °С.

21. На рис. 32 изображен график зависимости между двумя физическими величинами x и y. Чтобы уяснить физический смысл площади под графиком, разобьем интервал $[a;\ b]$ на маленькие промежутки и на каждом из них будем считать величину y постоянной. Получится ступенчатая фигура, площадь которой примерно равна площади криволинейной трапеции. Заменив таким образом криволинейную трапецию ступенчатой фигурой, мы допускаем некоторую численную ошибку в определении площади, но физический смысл площади, очевидно, сохраняется. Площадь каждого прямоугольника равна $y_i\,\Delta x$, физический смысл этого произведения определяется по размерностям входящих в произведение величин, например, если данная кривая есть зависимость величины напряжения электрического поля y от времени x, то $y\,\Delta x$ — заряд, перенесенный за это время Δx. Точное значение площади, а значит, некоторой физической величины, можно найти, вычислив соответствующий интеграл.

Выяснить физический смысл интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$; найти численное значение этой физической величины, вычислив интеграл; сделать рисунок:

1. $\int\limits_0^{10} (2t+t^2)\,dt$, где t — время в секундах, $f(t)=2t+t^2$ — скорость движения в м/с.

2. $\int\limits_0^4 3x\,dx$, где x — деформация пружины в сантиметрах, $f(x)=3x$ — сила в ньютонах, необходимая для сжатия пружины на x см.

3. $\int\limits_0^{60} R\,(0{,}5-0{,}003t)^2\,dt$, где t — время в секундах, R — сопротивление проводника в омах, $0{,}5-0{,}003t$ — закон изменения тока в амперах.

4. $\int\limits_0^{100} (2+0{,}001x^2)\,dx$, где x — длина стержня в сантиметрах, $f(x)=2+0{,}001x^2$ — линейная плотность стержня в г/см.

5. $\rho\int\limits_0^1 \frac{dl}{4\cdot10^{-6}+10^{-4}l^2}$, где l — длина проводника в метрах, ρ — удельное сопротивление проводника в $\frac{\text{ом}\cdot\text{м}^2}{\text{м}}$, $\frac{1}{4\cdot10^{-6}+10^{-4}l^2}$ — площадь поперечного сечения проводника в м² в зависимости от расстояния сечения от конца проводника.

6. $\frac{1}{S}\int\limits_0^1 (2\cdot10^{-8}+10^{-9}l)\,dl$, где l — длина проводника в метрах, S — площадь поперечного сечения в м², $\rho(l)=2\cdot10^{-8}+10^{-9}l$ — удельное сопротивление проводника в ом·м² на расстоянии l от конца проводника.

7. $\int\limits_0^{10} \pi\,(2+0{,}3l)^2\,dl$, где l — длина стержня в сантиметрах, $R(l)=2+0{,}03l$ — радиус сечения стержня на расстоянии l от одного из его концов, форма сечения — круг.

22. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[a;\ b]$ функция и точка $x=c$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx=f(c)\,(b-a)$, тогда $f(c)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называют *средним значением функции на интервале* $[a;\ b]$. В задачах с реальными данными среднее значение функции имеет ясный физический смысл. В следующих примерах надо найти среднее значение функции на заданном промежутке и выяснить его физический смысл, исходя из условия задачи:

1. $v(t)=2+3t$ — скорость движения в м/с; t — время в секундах, $t\in[2;\ 8]$.

2. $v(t)=t^2$ — скорость движения в м/с; t — время в секундах, $t\in[0;\ 10]$.

3. $F(s)=40+4s$ — сила в ньютонах, s — путь в метрах, пройденный под действием этой силы, $s\in[0;\ 20]$.

4. $a(t)=\sqrt{t}$ — ускорение движения в $\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$, t — время в секундах, $t\in[0;\ 100]$.

5. $S(x)=0{,}01\pi x^2$ — площадь поперечного сечения стержня в см² на расстоянии x от одного из его концов, $x\in[0;\ 10]$, x — в сантиметрах, сечение — круг.

23. На клетчатой бумаге построить ломаную $ABCD$: $A(2;\ 4)$, $B(6;\ 10)$, $C(8;\ 6)$, $D(13;\ 8)$. Считая ломаную графиком функции $y=f(x)$, найти среднее значение $f(x)$ на интервале $[2;\ 13]$.

24. Вычислить верхнюю и нижнюю интегральные суммы для $\int\limits_0^1 x^2\,dx$, считая, что интервал $[0;\ 1]$ разбит на n равных частей. Найти пределы этих сумм, сравнить эти пределы со значением интеграла.

25. Вычислить верхнюю и нижнюю интегральные суммы для $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx$, разбив интервал $[0;\ \pi]$ на 12 равных частей. Сравнить суммы с точным значением интеграла. Выполнить задание повторно, разбив интервал $[0;\ \pi]$ на 24 равные части. При решении использовать симметричность участка синусоиды относительно прямой $x=\pi/2$.

26. Построить график функции $F(x)$:

1. $F(x)=1+\int\limits_0^x 2t\,dt,\quad x\in[0;\ 4].$

2. $F(x)=\int\limits_0^x \cos t\,dt-1,\ x\in[0;\ 2\pi].$

27. На заданном интервале построить ломаную, приближенно заменяющую график функции $F(x)$, заданной в виде интеграла с переменным верхним пределом; предварительно составить интегральную сумму, выражающую приближенное значение интеграла:

1. $F(x)=\int\limits_0^x \frac{-t^2-4t+20}{(t+2)^2}\,dt,\quad x\in[0;\ 10]$. Интервал $[0;\ 10]$ разбить на 10 равных частей: $[0;\ 1]$, $[1;\ 2]$ и т. д. При составлении интегральной суммы брать значение подынтегральной функции в серединах участков разбиения, т. е. в точках $z_1=0{,}5$, $z_2=1{,}5$ и т. д.

2. $F(x)=-1{,}6+\int\limits_5^x \frac{t^2-10t+9}{(t-5)^2}\,dt,\ x\in[-5;\ 3]$. Интервал $[-5;\ 3]$ разбить на 10 равных частей, значения подынтегральной функции считать в средних точках участков разбиения.

28. Вычислить приближенно интеграл способом прямоугольников. Погрешность вычислений можно оценить, исходя из того, что с увеличением n (числа делений интервала интегрирования) погрешность уменьшается примерно как $1/n^2$, т. е. при увеличении n в 2 раза погрешность уменьшится примерно в 4 раза. Пусть S_n и S_{2n} — приближенные значения интеграла, соответствующие делению интервала интегрирования на n и $2n$ частей, тогда величина $|S_n-S_{2n}|$ примерно равна утроенной погрешности приближения S_{2n}. Окончательно при делении интервала интегрирования на $2n$ частей погрешность α оценивается по формуле $\alpha\approx\frac{1}{3}|S_{2n}-S_n|$.

1. $\int\limits_0^1 \sqrt{2-4x+4x^2}\,dx$, а) $n=5$, б) $n=10$.

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}=\ln 2$, а) $n=5$, б) $n=10$.

3. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, а) $n=5$, б) $n=10$.

29. Вычислить приближенно интегралы из задачи 23 способом трапеций. Погрешность вычислений по способу трапеций оценивается так же, как и по способу прямоугольников.

30. Вычислить приближенно интегралы из задачи 28 способом Симпсона. Погрешность вычисления способом Симпсона с ростом n убывает примерно как $1/n^4$, т. е. при увеличении n в 2 раза погрешность вычислений убывает примерно в 16 раз, поэтому оценить погрешность можно по формуле

$$\alpha\approx\frac{1}{15}|S_{2n}-S_n|.$$

31. Вычислить объем тела вращения, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, заданной графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox:

1. $f(x)=2+2x,\qquad a=0,\quad b=4.$
2. $f(x)=x^2+1,\qquad a=0,\quad b=3.$
3. $f(x)=xe^x,\qquad a=0,\quad b=1.$
4. $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\quad a=-1,\ b=1.$

32. Вычислить объем тела, которое получается при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y^2=x$.

33. Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси ординат фигуры, ограниченной параболой $y=2x-x^2$ и осью абсцисс.

34. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4$, $y=0$, $x=0$, $x=3$.

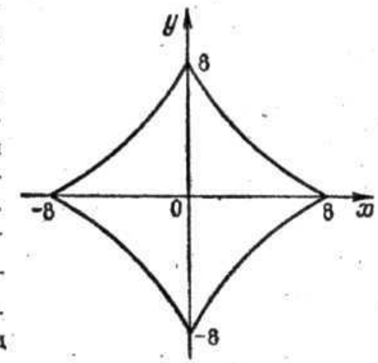

Рис. 33

35. Вычислить длину кривой, заданной уравнением $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=4$; такая кривая называется *астроидой*, ее примерный вид изображен на рис. 33.

Указание. Полезно вспомнить, как находится производная функции, заданной уравнением неявно.

36. Вычислить приближенно длину эллипса $x^2+\frac{1}{4}y^2=1$.

37. Вычислить приближенно длину участка гиперболы $y=1/x$, заключенного между точками с абсциссами $x=0{,}5$ и $x=2$.

38. Вычислить приближенно длину дуги синусоиды $y=\sin x$ при $x\in[0;\ \pi]$.

39. Вычислить приближенно длину дуги параболы $y=x^2$ при $x\in[-2;\ 2]$.

40. Найти площадь боковой поверхности конуса с высотой h и радиусом основания R, представив его поверхность как результат вращения отрезка прямой, проходящей через начало координат, вокруг оси абсцисс.

41. Найти площадь поверхности шарового пояса высотой h, если радиус соответствующей сферы равен r.

42. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением участка кубической параболы $y=\frac{1}{3}x^3$, заключенного между точками с абсциссами $x_1=0$, $x_2=a$, вокруг оси абсцисс.

43. Вычислить приближенно площадь поверхности, образованной вращением одной арки синусоиды $y=\sin x$, $x\in[0;\ \pi]$, вокруг оси абсцисс.

44. Найти площадь поверхности, образованной вращением петли полукубической параболы $y^2=\frac{1}{9}x(3-x)^2$ вокруг оси абсцисс.

45. Решить графически дифференциальное уравнение $y'=xy^2+1$ на интервале $[0;\ 1]$ при начальных условиях $y(0)=0$.

Решение. Разобьем интервал $[0;\ 1]$ на 4 равных части: $[0;\ 0{,}25]$, $[0{,}25;\ 0{,}5]$, $[0{,}5;\ 0{,}75]$, $[0{,}75;\ 1]$ и на каждом из участков заменим интегральную (искомую) кривую отрезком касательной к этой кривой в левом конце частичного интервала. Итак, кривая проходит через точку $(0;\ 0)$ (по условию), вычислим производную $y'_{x=0}=y'(0)=0\cdot0+1=1$ — угловой коэффициент касательной к искомой кривой в точке $(0;\ 0)$; касательная имеет вид $y=1\cdot x$. Считаем, что на участке $[0;\ 0{,}25]$ касательная $\bar{y}=x$ достаточно хорошо заменяет кривую, следовательно, $y(0{,}25)=0{,}25$. Ищем $y'_{x=0{,}25}=0{,}25\cdot0{,}25^2+1=1{,}016$ — угловой коэффициент касательной в точке $(0{,}25;\ 0{,}25)$, уравнение этой касательной $y=0{,}25+1{,}016(x-0{,}25)$. Отрезком этой касательной заменим кривую на участке $[0{,}25;\ 0{,}5]$. $y(0{,}5)=0{,}25+1{,}016\cdot0{,}25=0{,}504$. Действуя аналогично, на участке $[0{,}5;\ 0{,}75]$ получим $y'(0{,}5)=0{,}5\cdot0{,}504^2+1=1{,}127$, $y=0{,}504+1{,}127(x-0{,}5)$, $y(0{,}75)=0{,}504+1{,}127\cdot0{,}25=0{,}786$. На участке $[0{,}75;\ 1]$ получим $y'(0{,}75)=0{,}75\cdot0{,}786^2+1=1{,}463$, $y=0{,}786+1{,}463(x-0{,}75)$, $y(1)=0{,}786+1{,}463\cdot0{,}25=1{,}152$. Сведем результаты вычислений в таблицу:

x	0	0,25	0,5	0,75	1
y	0	0,25	0,504	0,786	1,152

Ломаная, проходящая через табличные точки, есть приближенный график искомой функции. Ясно, что, увеличивая число делений интервала $[0;1]$, мы будем получать все более точное представление о графике функции, являющейся решением данного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях.

46. Решить графически уравнение $y'=\frac{y}{x}+0{,}5x$ на интервале $[4;\ 6]$, если $y(4)=-4$. Интервал $[4;\ 6]$ разбить на 10 частей.

47. Решить графически уравнение $y'=0{,}1(x^2+y^2)$ на интервале $[1;\ 5]$, если $y(1)=1$.

48. Решить графически уравнение $y'=\frac{1}{x^2+y^2}$ на интервале $[0{,}5;\ 3{,}5]$, если $y(0{,}5)=0{,}5$.

49. Проверить подстановкой, что функция $y=Cx^3$ является решением дифференциального уравнения $3y-xy'=0$. Построить графики решений, проходящие через точки:

1) $(1;\ 1/3)$, 2) $(1;\ 1)$, 3) $(1;\ -1/3)$.

50. Проверить подстановкой, что функция $y=C\cdot e^{2x}$ является решением дифференциального уравнения $y'=2y$. Построить графики решений, проходящие через точки:

1) $(0;\ 1)$, 2) $(0;\ 1/5)$.

51. Проверить подстановкой, что каждая из функций:

1) $y=\sin 2x$, 2) $y=\cos 2x$, 3) $y=\sin 2x+\cos 2x$, 4) $y=2\sin 2x+3\cos 2x$ является решением уравнения $y''=-4y$. Показать, что любая функция вида $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$, где C_1 и C_2 — константы, является решением данного дифференциального уравнения.

52. На материальную точку массы m действует сила, изменяющаяся по закону $F(t)=\cos t$. Написать закон движения точки (закон изменения координаты точки) в дифференциальной форме, решить это уравнение в общем виде и найти частное решение, удовлетворяющее условиям $x(0)=0$ и $v(0)=0$, где x — координата точки, v — скорость точки. Построить график движения, считая $m=1$.

52. Решить задачу, аналогичную задаче 52, но для силы, изменяющейся по закону $F(t)=\sin t$.

54. Написать общее решение дифференциального уравнения движения точки массой 1 кг по прямой под действием постоянной силы 10 Н. Найти частные решения этого уравнения, удовлетворяющие данным начальным условиям, построить графики движений:

1. $x(0)=0$, $v(0)=0$. 2. $x(0)=-5$, $v(0)=-4$.
3. $x(0)=10$, $v(0)=-20$. 4. $x(0)=-4$, $v(0)=2$.

55. Написать общее решение дифференциального уравнения гармонических колебаний. Найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, записать его в виде

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi),\quad \text{где}\quad A>0,\quad \varphi\in[0;\ 2\pi);$$

1. $x''=-25x$, $x(0)=1$, $x'(0)=5$.

2. $x''=-4x$, $x(0)=1$, $x'(0)=-2$.

3. $x''=x$, $x(0)=0$, $x'(0)=\sqrt{3}$.

56. Написать общее решение дифференциального уравнения. Найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1. $y'=3y$, $y(0)=2$. 2. $y'=-2y$, $y(1)=e$.

57. Вычислить, какая доля радия останется через 1000 лет, если период его полураспада равен 1550 лет.

58. Период полураспада радиоактивного вещества равен одному часу. Через сколько часов его количество уменьшится в 10 раз?

59. Точка движется по координатной прямой по закону $x=f(t)$, где x — координата точки на прямой в метрах, t — время в секундах. Показать, что путь, пройденный точкой за промежуток времени от t_1 до t_2, равен

$$S=\int_{t_1}^{t_2}|v(t)|\,dt,$$

где $v(t)=\frac{dx}{dt}$. Найти путь, пройденный точкой, движущейся по заданному закону, за указанный промежуток времени:

1. $x(t)=t^2-4t+2$, $t\in[0;\ 6]$.

2. $x(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t-4$, $t\in[0;\ 10]$.

60. Найти объем шарового слоя (часть шара, заключенная между параллельными плоскостями), если расстояния ограничивающих его сечений от центра шара равны a и b соответственно, а радиус шара равен R. Получить частный вид формулы, если одно из расстояний равно радиусу шара.

61. Шар радиуса R плавает на поверхности воды, погруженный в нее на $\frac{1}{3}R$. Найти работу, которую нужно совершить, чтобы погрузить шар под воду целиком.

62. Цилиндр радиуса R и высоты H плавает в воде в вертикальном положении, погрузившись в нее на $\frac{2}{3}H$. Какую работу надо совершить, чтобы вытащить цилиндр из воды?

63. Найти силу давления на стенку аквариума, полностью заполненного водой, если стенка имеет форму прямоугольника с высотой h и шириной d.

64. Найти силу гравитационного взаимодействия между расположенными на одной прямой материальной точкой массы m и однородным стержнем длины l и массы M. Расстояние от точки до ближайшего конца стержня равно c.

65. Найти кинетическую энергию однородного стержня длины l и массы m, вращающегося в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через один из концов стержня.

Дополнительные задачи

66. Найти производную функции $F(x)$:

1. $F(x)=\int_1^x \sin t\,dt$. 2. $F(x)=\int_x^1 \ln t\,dt$, $x>0$.

3. $F(x)=\int_0^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$. 4. $F(x)=\int_x^{x^2}\sqrt{(1-t)^3}\,dt$.

67. Найти наибольшее значение функции $F(x)$ на заданном промежутке:

1. $F(x)=\int_0^x(2t-t^2)\,dt$, $x\in[0;\ 4]$.

2. $F(x)=\int_x^5(t^2+3t)\,dt$, $x\in[-3;\ 5]$.

3. $F(x)=\int_4^x(t^2-8t+16)\,dt$, $x\in[0;\ 5]$.

4. $F(x)=\int_x^\pi \cos t\,dt$, $x\in\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3}{2}\pi\right]$.

68. Найти наименьшее значение функции $F(x)$ на заданном промежутке:

1. $F(x)=\int_0^x\frac{2t+1}{t^2-2t+2}\,dt$, $x\in[-1;\ 1]$.

2. $F(x)=\int_x^2\log_{1/3}t\,dt$, $x\in\left[\frac{1}{10};\ 4\right]$.

69. Найти точки экстремума и промежутки монотонности данной функции:

1. $F(x)=\int_0^x(t-1)(t-2)^2\,dt$.

2. $F(x)=\int_0^x\frac{(t^2-3t+4)(t^2-9)}{t^2+t+1}\,dt$.

70. Найти предел функции, дать геометрическое истолкование предела:

$$1.\ \lim_{x\to 0}\int\limits_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}},\quad 2.\ \lim_{x\to 0}\int\limits_x^1 \frac{dt}{t}.$$

$$3.\ \lim_{x\to\infty}\int\limits_0^\infty e^{-at}\,dt,\quad a>0.$$

71. Доказать: если $f(x)$ — нечетная интегрируемая на интервале $[-a;\ a]$ функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

72. Доказать: если $f(x)$ — четная интегрируемая на интервале $[-a;\ a]$ функция, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

73. Пусть m и n — натуральные числа. Доказать, что

1) $\int\limits_0^{2\pi}\cos mx\cdot\sin nx\,dx=0;$

2) $\int\limits_0^{2\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx=\begin{cases}0, & \text{если}\quad m\neq n;\\ \pi, & \text{если}\quad m=n;\end{cases}$

3) $\int\limits_0^{2\pi}\cos mx\cdot\cos nx=\begin{cases}0, & \text{если}\quad m\neq n,\\ \pi, & \text{если}\quad m=n.\end{cases}$

74. Показать, что решение дифференциального уравнения $y'=f(x)$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$ можно записать в виде

$$y=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

и наоборот.

75. Рассмотреть образец приближенного решения дифференциального уравнения $y'=f(x,\ y)$ методом последовательных приближений, предложенным французским математиком Э. Пикаром.

Сначала рассмотрим метод в общем виде. Дано дифференциальное уравнение $y'=f(x,\ y)$, y — неизвестная функция от x, приближенное значение которой в точке x надо найти при условии, что

$y=y_0$ при $x=x_0$. В качестве *нулевого* (исходного), очень грубого приближения полагаем $y(x)=y_0$. *Первое* приближение получаем, заменив y в $f(x,\ y)$ на y_0. Получим

$$y_1'=f(x;\ y_0),$$

после интегрирования с учетом начальных условий имеем:

$$y_1=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(t,\ y_0)\,dt.$$

Второе приближение получаем, заменив y в $f(x,\ y)$ на y_1, тогда

$$y_2'=f(x,\ y_1)$$

и после интегрирования

$$y_2=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(t,\ y_1)\,dt.$$

Заменяя y в $f(x,\ y)$ вторым приближением и интегрируя, получаем *третье* приближение и т. д.

Таким образом, методом Пикара последовательные приближения к решению дифференциального уравнения $y'=f(x,\ y)$ с начальным условием $y=y_0$ при $x=x_0$ получаются по следующим рекуррентным формулам:

$$y_0(x)=y_0,$$

$$y_i(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(t,\ y_{i-1}(t))\,dt,\qquad i=1,\ 2,\ \dots$$

Для получения численных результатов при решении дифференциальных уравнений указанным методом необходимо использовать микрокалькулятор.

П р и м е р. $y'=x+y^2$, $y=0$ при $x=0$. Здесь $f(x,\ y)=x+y^2$.

Нулевое (исходное) приближение: $y_0(x)=0$

Первое приближение: в выражении $x+y^2$ полагаем $y=0$, что дает $y_1'=x$ и

$$y_1=\int\limits_0^x t\,dt=\frac{1}{2}x^2.$$

Второе приближение: в выражении $x+y^2$ полагаем $y=\frac{1}{2}x^2$, что дает $y_2'=x+(0,5x^2)^2$ и

$$y_2=\int_0^x (t+0,25t^4)\,dt=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5.$$

Третье приближение: в выражении $x+y^2$ полагаем $y=\frac{1}{2}x^2+$ $+\frac{1}{20}x^5$, что дает

$$y_3'=x+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5\right)^2,$$

$$y_3=\int_0^x\left(t+\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{20}t^7+\frac{1}{400}t^{10}\right)dt=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{160}x^8+\frac{1}{4400}x^{11}.$$

Продолжая описанный процесс, можно получить 4-е, 5-е и т. д. приближения к значению функции в точке x. При выполнении определенных условий каждое новое приближение дает все более точное значение функции в точке x, с другой стороны, для x, достаточно близких к x_0, и при не слишком высоких требованиях к точности уже 2-е, 3-е приближения дают удовлетворительные результаты. Ориентировочное представление о точности i-го приближения дает разность между $(i+1)$-м и i-м приближениями. Так, в рассмотренном примере при $x=0,3$ первое приближение дает $y_1=\frac{1}{2}(0,3)^2=0,045$, второе приближение равно $y_2=0,045+0,0001215=0,0451215$, третье равно $y_3=0,0451215+0,00000041=0,045121191$. Третье приближение добавляет ко второму 0,00000041, следующие приближения вносят еще меньшую поправку, поэтому можно считать, что второе приближение дает значение функции в точке $x=0,3$ с точностью до 0,000001, т. е. $y(0,3)\approx 0,45122$.

76. Получить три первых приближения к решению дифференциального уравнения по методу Пикара:

1. $y'=2y-2x^2-3$, $y=2$ при $x=0$.
2. $y'=2-\frac{y}{x}$, $y=2$ при $x=1$.
3. $y'=xy^3-1$, $y=0$ при $x=0$; вычислить приближенное значение, функции в точке $x=1$. Ограничиться точностью до 0,01.

77. Построить графики последовательных приближений y_0, y_1, y_2, y_3 к решению дифференциального уравнения $y'=2-\frac{y}{x}$ на интервале [0,8; 1,2], если $y(1)=2$. Для построения графиков заполнить таблицу:

y_i	x				
	0,8	0,9	1	1,1	1,2
y_0					
y_1					
y_2					
y_3					

78. 1. Построить график 4-го приближения к решению уравнения $y'=x-y$, полученного методом Пикара, на интервале [0,7; 1,3], если $y(0)=1$.

2. Проверить, что функция $y(x)=2e^{-x}+x-1$ является решением уравнения $y'=x-y$. Сравнить значения точного решения и 4-го приближения к решению в точках 0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,1; 1,2; 1,3.

79. 1. Построить график третьего приближения к решению уравнения $y'=2x-\frac{y}{x}$, полученного методом Пикара, на интервале [0,7; 1,3], если $y(1)=2$.

2. Сравнить приближенное решение с точным, которое дается формулой $y(x)=\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3x}$. ▶

Глава 7
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Вводные соображения

Учащиеся твердо усвоили, что квадратный корень из отрицательного числа среди действительных чисел не существует. Однако потребности самой алгебры и ее приложений требуют такого расширения понятия числа, при котором действие извлечение квадратного корня из отрицательного числа стало бы осуществимым.

С расширением понятия числа мы уже неоднократно встречались.

Для того чтобы сделать возможным деление одного целого числа на другое, пришлось ввести дробные числа, для возможности вычитания из меньшего числа большего вводятся отрицательные числа, для того чтобы иметь возможность описать результат измерения длины в случае, когда отрезок несоизмерим с выбранной единицей длины, понадобились иррациональные числа. Присоединение каждого последующего класса чисел к предыдущему расширяет понятие числа и вместе с тем расширяет сферу применений этого понятия.

Число корень квадратный из -1 принято обозначать буквой i, и числа вида $a+bi$, где a и b — обычные действительные числа, носят название *комплексных чисел*.

Впервые настоятельная необходимость рассмотрения комплексных чисел встретилась в XVI веке, когда несколько итальянских математиков открыли возможность алгебраического решения уравнений 3-й степени.

Рассмотрим на примере, как это произошло.

Пусть нужно решить уравнение

$$x^3-6x+4=0.$$

Положим $x=y+\frac{2}{y}$, где y — новое неизвестное *). В результате подстановки получим уравнение

$$y^3+6y+\frac{12}{y}+\frac{8}{y^3}-6y-\frac{12}{y}+4=0.$$

После приведения подобных членов получим

$$y^3+\frac{8}{y^3}+4=0.$$

Положив $y^3=z$, получим новое уравнение $z+\frac{8}{z}+4=0$, которое равносильно квадратному

$$z^2+4z+8=0,$$

откуда

$$z=-2\pm\sqrt{4-8}=-2\pm\sqrt{-4}=-2\pm 2\sqrt{-1}=-2\pm 2i.$$

Мы пришли к результату, не имеющему смысла, если оставаться в области действительных чисел. Напрашивается вывод: это исходное уравнение не имеет действительных корней. Но это неверно. Корень $x=2$ буквально бросается в глаза.

Продолжим дальше наши рассуждения. Остановимся на корне $z=-2+2i$. Запишем его в следующем виде:

$$-2+2i=1+3i-3-i=1+3i+3i^2+i^2\cdot i=$$
$$=1+3i+3i^2+i^3=(1+i)^3.$$

Итак, в этом случае

$$y^3=(1+i)^3.$$

Естественно считать, что $y=1+i$, тогда

$$x=1+i+\frac{2}{1+i}=1+i+\frac{1-i^2}{1+i}=1+i+1-i=2.$$

Заметим, что, взяв другое значение z, а именно $z=-2-2i$, мы ничего нового не получим. Именно,

$$-2-2i=(1-i)^3,$$

откуда $y=1-i$, а $x=1-i+\frac{2}{1-i}=1-i+1+i=2.$

Однако мы получили не все корни уравнения. Мы знаем из школьного курса алгебры, что левая часть x^3-6x+4

*) Аналогичная замена применялась, например, в «Алгебре 6—8» при решении возвратных уравнений на с. 150.

исходного уравнения делится на $x-2$, ибо она обращается в нуль при $x=2$. Выполнив деление, получим

$$(x^3-6x+4)=(x-2)(x^2+2x-2).$$

Приравнивая к нулю первый множитель, получим первый корень $x=2$. Приравнивания к нулю второй множитель, получим

$$x=-1\pm\sqrt{3}.$$

Естественно поставить вопрос: куда же делись эти два корня? Ответ может показаться неожиданным. Оказывается, что при извлечении кубического корня мы учли не все возможные значения. Извлечение кубического корня из $(1+i)^3$ равносильно решению уравнения $y^3-(1+i)^3=0$. Раскладывая левую часть на множители, получим

$$(y-1-i)(y^2+(1+i)y+(1+i)^2)=0.$$

Приравнивание к нулю первого множителя дает $y=1+i$. Приравнивание к нулю второго множителя дает

$$y=\frac{-1-i\pm\sqrt{(1+i)^2-4(1+i)^2}}{2}=(1+i)\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Эти два значения y, будучи подставлены в $x=y+\frac{2}{y}$, как раз и дадут неучтенные корни. Соответствующие вычисления опускаем.

Приведенный способ носит общий характер, он применим к любому уравнению вида $x^3+px+q=0$ $\left(\text{нужная подстановка } x=y-\frac{p}{3y}\right)$, независимо от того, имеет оно бросающийся в глаза корень или нет. Но при этом оказывается, что если уравнение с действительными коэффициентами имеет три различных действительных корня, т. е. если график левой части пересекает ось абсцисс в трех точках, то в процессе решения этим методом неизбежно возникают комплексные числа и из них нужно извлекать кубические корни. В конце концов слагаемые, содержащие символ i, взаимно уничтожаются и получаются действительные ответы. Доказано, что если решать кубическое уравнение с действительными коэффициентами, имеющее три действительных корня, каким-либо другим алгебраическим методом, то все равно избежать действия извлечения кубического корня из комплексного числа невозможно. (Под алгебраическим решением понимается представление корней уравнения через его коэффициенты в виде результатов арифметических действий и действия извлечения корня.)

Отметим еще, что при извлечении кубического корня в области комплексных чисел получается три значения, а не одно, как при том же действии в области действительных чисел. Для построения всех корней уравнения $x^3+px+q=0$ нужно учитывать все три значения кубического корня.

При переходе в область комплексных чисел многие предложения алгебры становятся более простыми и симметричными. Так, квадратное уравнение с действительными или комплексными коэффициентами всегда имеет два корня, различных или совпадающих. Корень n-й степени из отличного от нуля действительного или комплексного числа всегда имеет n различных значений и т. д.

Вместе с тем теоретическое и прикладное значение комплексных чисел выходит далеко за пределы алгебры. Сильно продвинутая в течение XIX столетия теория функций комплексной переменной оказалась исключительно ценным аппаратом для исследования почти всех разделов теоретической физики, таких как теория колебаний, гидродинамика, теория элементарных частиц и т. д.

§ 2. Основные определения

Комплекными числами называются выражения (если угодно, картинки) вида $a+bi$, где a и b — действительные числа, i — формальный символ (буква). При этом предполагается:

1. $a+bi=c+di$ в том и только в том случае, если $a=c$ и $b=d$.
2. Сложение определяется правилом

$$(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i.$$

3. Умножение определяется правилом

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i.$$

4. $a+0i=a$.

Правило 1 показывает, что два комплексных числа считаются равными, если они неразличимы по записи.

Правило 2 означает, что сложение производится по обычному правилу сложения многочленов с приведением подобных членов.

Правило 3 означает, что умножение комплексных чисел осуществляется по обычному правилу умножения многочленов, только произведение $i \cdot i$ заменяется на -1.

Правило 4 позволяет считать действительные числа частным случаем комплексных, когда коэффициент при i равен нулю.

Действительные числа a и b, из которых составляется комплексное число $a+bi$, называются *компонентами* этого числа. Первая компонента a называется *действительной частью* числа $a+bi$, вторая компонента b — *мнимой частью* (заметим, что мнимая часть комплексного числа есть число действительное). Правило 4 показывает, что комплексное число с равной нулю мнимой частью есть число действительное. Комплексное число с равной нулю действительной частью носит название *чисто мнимого числа*. Квадрат чисто мнимого числа, т. е. произведение его на себя, равен действительному отрицательному числу: $(bi)^2 = bi \cdot bi = -b^2$.

Правила 1—4, входящие в содержание *определения* комплексных чисел, фактически связаны с действительными числами — компонентами комплексного числа. Их можно изложить, не пользуясь символом i. Для этого достаточно писать вместо $a+bi$ просто пару действительных чисел (a, b), и в этой записи правила 1—4 имеют следующий вид:

1. $(a, b) = (c, d)$ в том и только в том случае, если $a = c$ и $b = d$.
2. $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$.
3. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
4. $(a, 0) = a$.

В такой форме записи комплексных чисел и правил действий над ними не может возникнуть сомнений в непротиворечивости этого понятия — речь идет просто о парах действительных чисел, над которыми совершаются действия по правилам 1—4.

От записи комплексного числа в виде пары легко перейти к обычной записи. Именно, согласно правилам 1—4

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + b(0, 1).$$

Обозначим пару $(0, 1)$ буквой i. Получим $(a, b) = a + bi$, причем $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Действия над комплексными числами обладают известными свойствами, которыми обладают одноименные действия над действительными числами. Именно, сложение и умножение обладают свойствами перестановочности и сочетательности, сложение с умножением связаны свойством

распределительности. Все это легко выводится из правил 1—4. Мы опустим проверку этих свойств.

Произведение любого комплексного числа $a+bi$ на нуль $0 = 0 + 0i$ равно, очевидно, нулю. Умножение комплексного числа $a+bi$ на действительное число $m = m + 0i$ равно, согласно правилу 3, $ma + mbi$, т. е. умножение комплексного числа на действительное производится покомпонентно. Отсюда немедленно следует, что деление на действительное число m, отличное от нуля, осуществляется тоже покомпонентно, ибо деление на m равносильно умножению на $1/m$.

Комплексные числа $a+bi$ и $a-bi$, отличающиеся знаком мнимой части, называются *сопряженными*. Если $a+bi \neq 0$, то

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

есть положительное действительное число.

Покажем, что для любого комплексного числа α существует ему противоположное число $-\alpha$, т. е. такое число, что $\alpha + (-\alpha) = 0$. Пусть $\alpha = a + bi$, сложим его с числом $-a - bi$. По правилам 2 и 4 имеем

$$(a+bi) + (-a-bi) = (a-a) + (b-b)\,i = 0 + 0i = 0,$$

так что $-a-bi = (-\alpha)$. Заметим, что $-\alpha$ можно воспринимать как $(-1) \cdot \alpha$. Действительно, по правилу умножения имеем $(-1) \cdot (a+bi) = -a - bi$.

Проверим, что уравнение $\alpha + x = \beta$ имеет единственное решение. Сначала покажем, что $x = (-\alpha) + \beta$ является решением. Имеем

$$\alpha + ((-\alpha) + \beta) = \alpha + (-\alpha) + \beta = \beta,$$

следовательно, $(-\alpha) + \beta$ удовлетворяет уравнению. Убедимся, что других решений нет. Пусть x — некоторое решение уравнения $\alpha + x = \beta$, тогда $(-\alpha) + \alpha + x = \beta + (-\alpha)$, откуда $x = \beta + (-\alpha)$, что и требовалось доказать.

Число $\beta + (-\alpha)$, являющееся решением уравнения $\alpha + x = \beta$, называется *разностью* чисел β и α и обозначается $\beta - \alpha$. Таким образом, по определению

$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha).$$

Покажем, что вычитание комплексных чисел, как и сложение, проводится покомпонентно. Пусть

$$\beta = (c + di), \quad \alpha = a + bi,$$

тогда $\beta - \alpha = (c + di) + (-a - bi) = (c - a) + (d - b)\,i$.

Легко видеть, что для любого отличного от нуля комплексного числа $\alpha=a+bi$ существует обратное α^{-1}, т. е. такое, что $\alpha\cdot\alpha^{-1}=1$. Легко видеть, что для $\alpha=a+bi$ обратным является $(a-bi)\frac{1}{a^2+b^2}$. Действительно,

$$(a+bi)(a-bi)\frac{1}{a^2+b^2}=(a^2+b^2)\frac{1}{a^2+b^2}=1.$$

Теперь легко проверить, что при $\alpha\neq 0$ уравнение $\alpha x=\beta$ имеет единственное решение. Действительно, $\alpha(\alpha^{-1}\beta)=\alpha\alpha^{-1}\beta=\beta$, так что $x=\alpha^{-1}\beta$ есть решение уравнения $\alpha x=\beta$. В свою очередь, если $\alpha x=\beta$, то $\alpha^{-1}\alpha x=\alpha^{-1}\beta$ и $x=\alpha^{-1}\beta$. Таким образом, всякое решение уравнения $\alpha x=\beta$ совпадает с $x=\alpha^{-1}\beta$, так что решение единственно. Решение уравнения $\alpha x=\beta$, естественно, называется *частным* от деления β на α и обозначается через $\frac{\beta}{\alpha}$. Пусть $\beta=c+di$, $\alpha=a+bi$. Тогда $\alpha^{-1}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$ и $\frac{\beta}{\alpha}=\alpha^{-1}\beta=$ $=\frac{(a-bi)(c+di)}{a^2+b^2}$. Вместо того, чтобы запоминать эту формулу, следует запомнить, что результат для частного $\frac{c+di}{a+bi}$ получается посредством умножения числителя и знаменателя на число $a-bi$, сопряженное со знаменателем.

Например,

$$\frac{5+i}{1+i}=\frac{(5+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{6-4i}{2}=3-2i.$$

§ 3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Комплексное число $\alpha=a+bi$ естественно изобразить точкой на плоскости, приняв числа a и b за ее координаты. При этом каждому комплексному числу соответствует точка и каждой точке плоскости соответствует некоторое комплексное число. Действительные числа изображаются точками с равными нулю ординатами, т. е. точками, лежащими на оси абсцисс. На оси ординат располагаются изображения чисто мнимых чисел bi. Началу координат соответствует число 0.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *плоскостью комплексной переменной*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, ось ординат — *мнимой осью* в соответствии с наименованиями чисел, изображения которых лежат на этих осях.

Наряду с изображением комплексных чисел точками на плоскости удобно с каждым комплексным числом связывать вектор, исходящий из начала координат в точку, изображающую это число (т. е. радиус-вектор этой точки). Компоненты a и b комплексного числа $a+bi$ являются, очевидно, проекциями (алгебраическими, с учетом знаков) этого вектора на оси координат. Как известно, проекция суммы векторов (в смысле векторного сложения) на любую ось равна сумме проекций слагаемых. Поэтому сумма векторов, изображающих комплексные числа α и β, есть вектор, изображающий сумму $\alpha+\beta$ этих чисел, так как компоненты числа $\alpha+\beta$ равны суммам соответствующих компонент слагаемых.

Длина радиуса-вектора точки, изображающей комплексное число α, равная расстоянию от этой точки до начала координат, называется *модулем* этого числа и обозначается $|\alpha|$. Ясно, что $|\alpha|\geqslant 0$ и $|\alpha|=0$, только если $\alpha=0$. Величина угла, образованного направлением радиуса вектора, изображающего число α, с действительной осью называется *аргументом* числа α и обозначается $\arg\alpha$. Заметим, что $\arg\alpha$ имеет смысл только при $\alpha\neq 0$, для числа 0 аргумент смысла не имеет.

Положительным направлением отсчета аргумента комплексного числа считается направление от положительной полуоси действительной оси к положительной полуоси мнимой оси, т. е. против часовой стрелки при обычном расположении осей.

Аргумент комплексного числа, так же как вообще угол между двумя направлениями, определен не однозначно, но лишь с точностью до кратного 2π. Иногда оказывается удобно накладывать какие-либо ограничения на выбор аргумента, но чаще это неудобно. Говоря об аргументе комплексного числа, мы будем подразумевать какое-либо его значение, безразлично какое. Если же возникает необходимость выбрать определенное значение, приходится это делать при помощи надлежащего описания (например, «возьмем наименьшее неотрицательное значение аргумента»).

Модуль $r=|\alpha|$ и аргумент $\varphi=\arg\alpha$ комплексного числа $\alpha=a+bi$ связаны с его компонентами при помощи формул

$$a=r\cos\varphi,\quad b=r\sin\varphi.$$

Эти формулы непосредственно следуют из определения функций cos и sin любого угла. Ясно, что $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=a/r$, $\sin\varphi=b/r$. Эти формулы определяют модуль и аргумент по данным a и b. Для определения аргумента можно пользоваться формулой $\operatorname{tg}\varphi = b/a$ при $a \neq 0$. Однако эта формула задает φ лишь с точностью до кратного π (т. е. полуоборота), а не до кратного 2π. Это заставляет дополнительно выбирать из двух значений φ в противоположных четвертях одно, по знаку $\cos\varphi$ (или $\sin\varphi$), совпадающему со знаком a (соответственно b).

Подставляя вместо компонент комплексного числа $\alpha = a + bi$ их выражения через модуль и аргумент, получаем

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая форма записи комплексного числа называется *тригонометрической*.

Примеры:

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0);$$
$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi);$$
$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$
$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right);$$

$3 + 4i = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где φ — угол первой четверти, косинус которого равен $3/5$.

§ 4. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

Пусть $\alpha_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $\alpha_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$\alpha_1\alpha_2 = r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Таким образом, $\alpha_1\alpha_2$ в тригонометрической форме записи имеет модуль r_1r_2 и аргумент $\varphi_1 + \varphi_2$, т. е. модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей и аргумент произведения (точнее, одно из значений аргумента) равен сумме аргументов сомножителей. В буквенной записи

$$|\alpha_1\alpha_2| = |\alpha_1|\cdot|\alpha_2|, \quad \arg(\alpha_1\alpha_2) = \arg\alpha_1 + \arg\alpha_2.$$

Эти правила распространяются на произведение любого числа сомножителей. Именно,

$$|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k| = |\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdot\ldots\cdot|\alpha_k|,$$
$$\arg(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k) = \arg\alpha_1 + \arg\alpha_2 + \ldots + \arg\alpha_k.$$

Действительно, эти формулы верны для $k = 2$. Допустив, что они верны для произведения из $k-1$ сомножителей, мы получим

$$|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k| = |\alpha_1|\cdot|\alpha_2\ldots\alpha_k| = |\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\ldots|\alpha_k|,$$
$$\arg(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k) = \arg\alpha_1 + \arg(\alpha_2\ldots\alpha_k) = \arg\alpha_1 + \arg\alpha_2 + \ldots + \arg\alpha_k.$$

В обеих цепочках равенств последний переход обеспечивается индуктивным предположением.

Положим в формуле

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\ldots r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k) = r_1r_2\ldots r_k(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_k) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_k)),$$

что все сомножители равны, так что $r_1 = r_2 = \ldots = r_k = r$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_k = \varphi$. Получим

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi).$$

При $r = 1$ получается знаменитая *формула Муавра*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi.$$

Мы вывели эту формулу в предположении, что k — целое положительное число. Покажем, что она остается верной и при $k = 0$ и при целом отрицательном k, считая для комплексных чисел, так же как для вещественных, $\alpha^0 = 1$ и $\alpha^{-m} = 1/\alpha^m$.

При $k = 0$ формула превращается в верное равенство:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1.$$

Положим теперь $k = -m$, считая m целым положительным. Тогда

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-m} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m} = \frac{1}{\cos m\varphi + i\sin m\varphi} = \frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi} = \cos(-m)\varphi + i\sin(-m)\varphi = \cos k\varphi + i\sin k\varphi.$$

Таким образом, формула Муавра верна при всех целых значениях k.

Формула Муавра оказывается удобным средством для преобразования некоторых выражений, содержащих тригонометрические функции. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Выразить $\operatorname{tg} 5\varphi$ через $\operatorname{tg}\varphi$.

Решение. Имеем соотношение $\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5$. Применив бином Ньютона, получим

$$\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi = \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - \\ - 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi$$

(пользуемся тем, что $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$). Приравнивая компоненты, получим

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$
$$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi}{\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi} = \\ = \frac{5\operatorname{tg}\varphi - 10\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{tg}^5\varphi}{1 - 10\operatorname{tg}^2\varphi + 5\operatorname{tg}^4\varphi}.$$

(Мы разделили числитель и знаменатель на $\cos^5\varphi$.)

Ясно, что подобным образом можно выражать тригонометрические функции кратного аргумента через тригонометрические функции исходного.

Пример 2. Выразить $\sin^5\varphi$ линейно через тригонометрические функции кратных аргументов.

Решение. Положим $\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$, тогда $\alpha^{-1} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, $\alpha^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi$, $\alpha^{-k} = \cos k\varphi - i\sin k\varphi$, откуда

$$\cos\varphi = \frac{\alpha+\alpha^{-1}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\alpha-\alpha^{-1}}{2i},$$
$$\cos k\varphi = \frac{\alpha^k+\alpha^{-k}}{2}, \quad \sin k\varphi = \frac{\alpha^k-\alpha^{-k}}{2i}.$$

Воспользуемся этими формулами:

$$\sin^5\varphi = \left(\frac{\alpha-\alpha^{-1}}{2i}\right)^5 = \frac{\alpha^5 - 5\alpha^3 + 10\alpha - 10\alpha^{-1} + 5\alpha^{-3} - \alpha^{-5}}{32i} = \\ = \frac{(\alpha^5-\alpha^{-5}) - 5(\alpha^3-\alpha^{-3}) + 10(\alpha-\alpha^{-1})}{32i} = \\ = \frac{2i\sin 5\varphi - 10i\sin 3\varphi + 20i\sin\varphi}{32i} = \frac{\sin 5\varphi - 5\sin 3\varphi + 10\sin\varphi}{16}.$$

Аналогично любое выражение вида $\cos^k\varphi\sin^m\varphi$ можно представить линейно через тригонометрические функции кратных аргументов.

§ 5. Извлечение корня из комплексного числа

Пусть n — натуральное число. Извлечь корень с показателем n из комплексного числа α — это значит найти комплексное число (или числа) β так, что $\beta^n = \alpha$. Каждое число β такое, что $\beta^n = \alpha$, называется *корнем n-й степени из* α и обозначается $\sqrt[n]{\alpha}$.

Ясно, что если $\alpha = 0$, то единственным значением $\sqrt[n]{\alpha}$ является число 0, поэтому сосредоточим внимание на случае $\alpha \neq 0$. Запишем α в тригонометрической форме $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и будем искать β тоже в тригонометрической записи:

$$\beta = R(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Равенство $\beta^n = \alpha$ запишется в виде

$$R^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Приравнивая модули и аргументы (с учетом многозначности), получим, что последнее равенство равносильно равенствам

$$R^n = r,$$
$$n\theta = \varphi + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Данное число r положительно (ибо $\alpha \neq 0$), и искомое число R должно быть тоже положительным. Известно, что для любого положительного числа существует единственное положительное значение корня n-й степени, называемое *арифметическим значением корня*, и это значение принято записывать в виде степени с дробным показателем. Итак, $R = r^{1/n}$. Аргумент же θ находится просто делением:

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Таким образом, корни n-й степени из комплексного числа существуют и все они даются формулой

$$\beta_k = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \qquad (1)$$

при любом $k = 0, \pm 1, \dots$ (мы ставим индекс k при β для того, чтобы подчеркнуть многозначность $\sqrt[n]{\alpha}$ и зависимость его значений от параметра k, могущего принимать все целые значения).

Докажем следующую важную теорему:

Теорема. *Существует ровно n значений корня n-й степени из комплексного числа $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Их дает формула*

$$\sqrt[n]{\alpha} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

в предположении, что k пробегает целые значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Доказательство. Покажем вначале, что формула дает различные корни при $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Допустим, что

$$r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi+2k_1\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}\right) = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi+2k_2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k_2\pi}{n}\right),$$

где k_1 и k_2 — целые числа, $0 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n-1$. Последнее равенство возможно, если аргументы левой и правой частей равны или отличаются на кратное 2π. Это дает

$$\frac{\varphi+2k_2\pi}{n} = \frac{\varphi+2k_1\pi}{n} + 2t\pi$$

при целом t, откуда $\frac{k_2-k_1}{n} = t$. Последнее равенство невозможно, ибо t — целое число, а $0 < \frac{k_2-k_1}{n} \leqslant \frac{n-1}{n} < 1$.

Остается доказать, что значения k, выходящие за пределы промежутка $0 \leqslant k \leqslant n-1$, не дают новых значений в формуле для $\sqrt[n]{\alpha}$. Пусть k — любое целое число. Тогда k/n заключено между двумя соседними целыми числами q и $q+1$ и может равняться одному из них. Итак, $q \leqslant k/n < q+1$. Тогда $nq \leqslant k < nq+n$ и для $k' = k - nq$ выполнены неравенства $0 \leqslant k' < n$ и, так как k' — целое число, $0 \leqslant k' \leqslant n-1$. Далее, $k = nq + k'$ и

$$r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k'\pi}{n} + 2q\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k'\pi}{n} + 2q\pi\right)\right) = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi+2k'\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k'\pi}{n}\right),$$

так что значение $\sqrt[n]{\alpha}$ при k совпадает со значением при $k=k'$, принадлежащим интервалу $0 \leqslant k' \leqslant n-1$. Теорема доказана полностью.

Пример 1. Найти $\sqrt[3]{2+2i}$ (один из немногих «хорошо подтасованных» численных примеров).

Решение. Имеем $2+2i = \sqrt{8}(\cos 45° + i\sin 45°)$. Согласно формуле,

$$\sqrt[3]{2+2i} = (\sqrt{8})^{1/3}\left(\cos\frac{45°+k\cdot 360°}{3} + i\sin\frac{45°+k\cdot 360°}{3}\right) = \sqrt{2}\,(\cos(15°+k\cdot 120°) + i\sin(15°+k\cdot 120°)).$$

Для k достаточно взять значения 0, 1, 2. Получим три значения:

$$\beta_0 = \sqrt{2}(\cos 15° + i\sin 15°),$$
$$\beta_1 = \sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°),$$
$$\beta_2 = \sqrt{2}(\cos 255° + i\sin 255°).$$

Учитывая, что $\cos 45° = \sin 45° = 1/\sqrt{2}$, получим $\beta_1 = -1+i$. Для вычисления β_0 и β_2 заметим, что $15° = 45° - 30°$, так что

$$\cos 15° = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30° = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

$$\sin 15° = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30° = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

Поэтому

$$\beta_0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad \beta_2 = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

В заключение отметим, что среди n значений корня n-й степени из комплексного числа нет оснований, вообще говоря, предпочитать какое-либо одно значение остальным. Понятие «арифметического значения» при извлечении корня из комплексного числа не вводится, и его невозможно ввести каким-либо естественным способом.

§ 6. Извлечение квадратного корня из комплексного числа

Извлечение квадратного корня из комплексного числа можно осуществить, не обращаясь к тригонометрической форме. Выведем алгебраическую форму для выполнения этого действия.

Пусть $x+yi = \sqrt{a+bi}$ и положим $b \neq 0$, так как только этот случай представляет интерес. Тогда $a+bi = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, что равносильно системе уравнений

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b,$$

причем нас интересуют только действительные решения этой системы. Мы уже знаем, что задача имеет решения. Это дает право предположить, что под буквами x и y подразумевается решение задачи. Тогда $(x^2-y^2)^2=a^2$, $4x^2y^2=b^2$. Складывая эти равенства, получим $(x^2+y^2)^2=a^2+b^2$, откуда $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$, причем здесь следует брать арифметическое значение корня, ибо $x^2+y^2>0$. Сопоставляя последнее равенство с первым уравнением системы, получим

$$2x^2=\sqrt{a^2+b^2}+a, \quad 2y^2=\sqrt{a^2+b^2}-a.$$

По смыслу задачи правые части обоих равенств должны быть неотрицательны, и это действительно имеет место, ибо

$$\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt{a^2}=|a|.$$

Из последних равенств находим

$$x=\sigma_1\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, \quad y=\sigma_2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Здесь снова берутся арифметические значения для корней, а σ_1 и σ_2 принимают значения ±1. Ясно, что найденные так числа x и y удовлетворяют первому уравнению системы $x^2-y^2=a$. Но они должны удовлетворять и второму: $2xy=b$. Это дает

$$2\sigma_1\sigma_2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}=b,$$

или, после очевидных преобразований,

$$\sigma_1\sigma_2\sqrt{b^2}=b,$$

откуда $\sigma_1\sigma_2=1$, если $b>0$, и $\sigma_1\sigma_2=-1$, если $b<0$, так что $\sigma_2=\sigma_1\operatorname{sign} b$, где $\operatorname{sign} b$ обозначает знак b, т. е. $+1$, если $b>0$, и -1, если $b<0$.

Это дает формулу

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\operatorname{sign} b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right).$$

Пример 1.

$$\sqrt{i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+0}+0}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{1+0}-0}{2}}\right)=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Пример 2.

$$\sqrt{3-4i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{25}+3}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{25}-3}{2}}\right)=\pm(2-i).$$

§ 7. Показательная и логарифмическая функции комплексной переменной

Показательная функция a^x действительной переменной x (при положительном основании) определяется в несколько приемов. Вначале для натуральных значений x — как произведение равных сомножителей. Затем определение распространяется на целые отрицательные и нулевое значения для x по правилам $a^{-n}=1/a^n$ и $a^0=1$. Далее рассматриваются дробные показатели, при которых значение показательной функции определяется при помощи корней: $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$. Для иррациональных значений определение связано уже с основным понятием математического анализа — с предельным переходом — из соображений непрерывности. Все эти приемы никак не применимы к попыткам распространить показательную функцию на комплексные значения показателя, и что такое, например, 2^{1+i} — совершенно непонятно.

Впервые степень с комплексным показателем при натуральном основании $e=2,71828\ldots$ была введена Эйлером на основе анализа ряда построений интегрального исчисления. Иногда очень похожие алгебраические выражения при интегрировании дают совершенно разные ответы:

$$\int\frac{1}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}+C,$$
$$\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\operatorname{arctg} x+C.$$

В то же время здесь второй интеграл формально получается из первого при замене x на xi. Отсюда можно сделать заключение, что при надлежащем определении показательной функции с комплексным показателем обратные тригонометрические функции родственны логарифмам и тем самым показательная функция связана с тригонометрическими.

У Эйлера хватило смелости и фантазии дать разумное определение для показательной функции с основанием e, именно,

$$e^{a+bi}=e^a(\cos b+i\sin b).$$

Эта формула есть **определение** показательной функции от комплексной переменной и не может быть доказана. Однако имеется очень много оснований для того, чтобы считать ее разумной и целесообразной. Приведем одно из них.

Мы знаем, что если k — действительное число, то функция $y=e^{kx}$ удовлетворяет очень простому дифференциальному уравнению $y'=ky$ с начальным условием $y=1$ при $x=0$. Естественно желать, чтобы такому же уравнению удовлетворяла функция e^{kx} при комплексном k, т. е. функция $e^{(a+bi)x}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$.

Легко убедиться (считая, что производная от суммы равна сумме производных и для функций с комплексными значениями), что функция $y=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$ действительно удовлетворяет уравнению $y'=(a+bi)y$. В самом деле,

$$y'=ae^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+e^{ax}(-b\sin bx+bi\cos bx)=$$
$$=ay+e^{ax}\cdot bi(\cos bx+i\sin bx)=ay+biy=(a+bi)y.$$

Кроме того, эта функция имеет значение $y=1$ при $x=0$.

Проведенное рассуждение является одним из доводов в пользу целесообразности данного определения показательной функции.

Легко доказать, что при умножении значений показательной функции показатели складываются. Действительно,

$$e^{a_1+b_1i}\cdot e^{a_2+b_2i}=e^{a_1}(\cos b_1+i\sin b_1)e^{a_2}(\cos b_2+i\sin b_2)=$$
$$=e^{a_1+a_2}(\cos(b_1+b_2)+i\sin(b_1+b_2))=e^{(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)}.$$

Нетрудно выразить тригонометрические функции через показательные с мнимыми показателями. Положив в определении $a=0$, получим

$$\cos b+i\sin b=e^{bi}.$$

Заменив b на $-b$, получим

$$\cos b-i\sin b=e^{-bi}.$$

Складывая и вычитая почленно эти равенства, найдем

$$\cos b=\frac{e^{bi}+e^{-bi}}{2},\quad \sin b=\frac{e^{bi}-e^{-bi}}{2i}.$$

Эти формулы носят название *формул Эйлера*.

Нетрудно дать и определение натурального логарифма комплексного числа.

Комплексное число, заданное в тригонометрической форме $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, можно записать в форме $re^{\varphi i}$. Эта форма записи комплексного числа называется *показательной*. Она сохраняет все хорошие свойства тригонометрической формы, но еще более краткая. Далее, $\alpha=re^{i\varphi}=e^{\ln r}e^{\varphi i}=e^{\ln r+\varphi i}$. Поэтому естественно считать, что $\ln\alpha=\ln r+\varphi i$, так что вещественной частью логарифма комплексного числа оказывается логарифм его модуля, мнимой частью — его аргумент. Это в некоторой степени объясняет «логарифмическое» свойство аргумента — аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.

Введенная таким образом логарифмическая функция определена для всех комплексных чисел, за исключением нуля. Необходимо только помнить, что логарифмическая функция многозначна в силу многозначности аргумента. Однозначность можно было бы установить, например, выбирая *ветвь* логарифма, для которой $-\pi<\varphi\leqslant\pi$, но это приводит к ряду неудобств. В частности, то свойство логарифма, что логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей, верно лишь с учетом многозначности. Так, например, одним из значений $\ln 1$ является 0, одним из значений $\ln(-1)$ является πi, ибо $-1=\cos\pi+i\sin\pi=e^{\pi i}$. Однако $\ln[(-1)\cdot(-1)]=\pi i+\pi i=2\pi i$. Это одно из значений логарифма 1 (ибо $1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$), но отличное от 0.

Наконец, мы можем дать определение показательной функции с произвольным основанием, отличным от нуля.

Пусть α — комплексное число, отличное от нуля. Тогда $\alpha=e^{\ln\alpha}$ при любом значении $\ln\alpha$. Поэтому естественно считать по определению $\alpha^\beta=e^{\beta\ln\alpha}$. Это снова многозначная функция от α и β в силу многозначности $\ln\alpha$, который определен с точностью до слагаемого $2k\pi i$. Посмотрим, например, чему равно i^i. Так как $\ln i=i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, то $i^i=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$. Результат кажется несколько парадоксальным — все значения «очень мнимого» выражения i^i действительны.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 7

1. Выполнить сложение комплексных чисел:

1. $(3-7i)+(6+5i)$. 2. $(-2+6i)+(-4-8i)$.
3. $(-5+4i)+(5+10i)$. 4. $(1-i)+(3+i)$.
5. $3i+(7-2i)$. 6. $5i+8i$.

2. Выполнить вычитание комплексных чисел:

1. $(2-4i)-(-7-i)$. 2. $(-8+i)-(9+i)$.
3. $(10+2i)-(10-i)$. 4. $6-(5+2i)$.

3. Выполнить умножение комплексных чисел (n — натуральное число):

1. $(3+2i)(2+3i)$. 2. $(-1-i)(-2+2i)$.
3. $(7-i)(7+i)$. 4. $(-4-i)(4-i)$.
5. $(3+i)\cdot i$. 6. $i(2-4i)$. 7. i^3. 8. i^4. 9. i^{4n+1}.
10. i^{4n+2}. 11. i^{4n+3}. 12. i^{4n}. 13. $(1+i)^3$. 14. $(1+i)^4$.

4. Выполнить деление комплексных чисел:

1. $\frac{4+6i}{1-i}$. 2. $\frac{10-i}{1+i}$. 3. $\frac{1-2i}{3+i}$. 4. $\frac{-2-3i}{1-2i}$.

5. В соответствии с правилом 4 всякое действительное число a можно рассматривать как комплексное число $a+0i$. Показать, что результаты арифметических действий над действительными числами совпадают с результатами соответствующих арифметических операций над теми же числами, но записанными как комплексные.

6. Доказать, что если $\bar{z}_1$ и $\bar{z}_2$ — комплексные числа, сопряженные числам z_1 и z_2 соответственно, и $m=z_1+z_2$, а $n=\bar{z}_1+\bar{z}_2$, то m и n — сопряженные числа.

7. Пусть $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$. Показать, что если $z_1\cdot z_2$ — действительное число, то $z_2=m\bar{z}_1$, где m — действительное число, $\bar{z}_1$ — комплексное число, сопряженное с z_1.

8. Показать, что числа $-1+3i$ и $-1-3i$ удовлетворяют уравнению $x^2+2x+10=0$.

9. Выполнить сложение комплексных чисел и дать геометрическое изображение слагаемых и их суммы:

1. $(-7-2i)+(-3+5i)$. 2. $(6+4i)+(-6+5i)$.
3. $(2-4i)+(-10+4i)$. 4. $-8i+2i$.

10. Записать данные комплексные числа в тригонометрической форме:

1. $\sqrt{3}+i$. 2. $-1-\sqrt{3}i$. 3. $-i$. 4. -2.
5. $5+2i$. 6. $4-3i$.

11. Выполнить умножение:

1. $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
2. $(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)\cdot 6(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)$.
3. $(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$.
4. $(\cos(-120^\circ)+i\sin(-120^\circ)(\cos(-150^\circ)+i\sin(-150^\circ))$.

12. Найти аргументы данных комплексных чисел сначала с точностью до кратного 2π, затем указать наименьшее положительное значение аргумента:

1. $\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$. 2. $\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$.
3. $-\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$. 4. $-\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi$.

13. Вычислить по формуле Муавра:

1. $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^6$. 2. $(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)^{10}$.
3. $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)\right)^7$. 4. $\left(3\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\right)^3$.
5. $(1+i)^{16}$. 6. $(-1+i)^8$.

14. Выразить $\cos 3\alpha$ и $\sin 3\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ с помощью формулы Муавра.

15. Выполнить действие извлечения корня; изобразить геометрически все значения корня:

1. $\sqrt[5]{\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ}$. 2. $\sqrt[3]{\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ}$.
3. $\sqrt[4]{\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ}$. 4. $\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}$.
5. $\sqrt[3]{-1}$. 6. $\sqrt[4]{1}$. 7. $\sqrt[4]{i}$. 8. $\sqrt[3]{-i}$.

16. Разложить выражение на множители в области комплексных чисел:

1. x^2+4. 2. x^4-16. 3. x^2+3-4i. 4. x^2+i.

17. Показать, что в области комплексных чисел квадратное уравнение с действительными коэффициентами и с отрицательным дискриминантом имеет два решения и эти решения — комплексные сопряженные числа.

18. Решить квадратные уравнения:

1. $x^2-4x+5=0$. 2. $x^2-8x+7=0$.
3. $3x^2+10x+9=0$. 4. $4x^2-14x+13=0$.

19. Записать в показательной форме комплексные числа:

1. $e\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. 2. $-e\cdot i$. 3. $e(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$.
4. $-e$. 5. $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. 6. $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.
7. $2(\cos 3+i\sin 3)$. 8. $3+4i$.

20. Найти логарифмы чисел, приведенных в предыдущем примере. Назвать по два-три конкретных значения логарифмов этих чисел.

Глава 8

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Простейшие комбинаторные задачи

Пусть дана одна или несколько совокупностей каких-либо предметов (объектов) и требуется составить комбинации из этих предметов, удовлетворяющие некоторым поставленным условиям. Задачи о подсчете числа возможных комбинаций называются *комбинаторными*. Например, сколькими способами можно расположить в ряд три различных предмета? Здесь ответ ясен — шестью способами, так как легко перебрать возможные расположения: 1 2 3, 1 3 2, 2 1 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1 (роль «различных предметов» играли цифры 1, 2 и 3). Но уже значительную трудность представляет собой решение такой довольно широко известной комбинаторной задачи: сколько существует «счастливых» номеров среди 1 000 000 шестизначных номеров трамвайных билетов (номер считается «счастливым», если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр)? Здесь ответ 55 252 совсем не очевиден, а получить его прямым перебором можно лишь на самой мощной ЭВМ.

Приведем решения нескольких простейших комбинаторных задач.

Задача 1. О числе выборок из нескольких множеств. Даны два множества предметов, в первом m элементов, второе множество содержит n элементов. Сколько можно составить пар элементов, выбирая по одному из каждого множества? Например, из двух множеств

$$\{I, II, III\}, \quad \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

можно составить 15 пар:

$$\{I, 1\}, \{I, 2\} \{I, 3\}, \{I, 4\}, \{I, 5\}, \{II, 1\},$$
$$\{II, 2\}, \{II, 3\}, \{II, 4\}, \{II, 5\}, \{III, 1\}, \{III, 2\}, \{III, 3\},$$
$$\{III, 4\}, \{III, 5\}.$$

Решить задачу в общем виде совсем просто. Из первого множества один элемент можно выбрать m способами. При каждом выборе этого элемента из второго множества один элемент выбирается n способами. Всего получается $m \cdot n$ комбинаций, составляющих пары.

Задача естественно обобщается на выборки из нескольких множеств. Пусть даны k множеств, содержащие по $m_1, m_2, \ldots, m_k$ элементов, соответственно. Сколькими способами можно составить комбинации, содержащие по одному элементу из каждого множества? Из первых двух множеств можно составить $m_1 \cdot m_2$ пар. Присоединение к каждой такой паре элемента из третьего множества можно сделать m_3 способами, так что число выборок троек равно $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$. К каждой тройке можно присоединить элемент из четвертого множества m_4 способами, так что число выборок четверок равно $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4$. Продолжая аналогичные рассуждения, мы придем к тому, что число выборок по одному элементу из всех k множеств равно $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_k$.

Задача 2. Перестановки. Сколькими способами можно расположить в ряд n элементов?

Без нарушения общности можно считать, что переставляемыми элементами являются числа натурального ряда $1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим сначала «маленькие» частные случаи. При $n=2$ имеются две перестановки: (1, 2) и (2, 1). При $n=3$, как мы видели выше, имеется шесть перестановок. При $n=4$, не перебирая все перестановки, проведем следующее несложное рассуждение. На первом месте может находиться один из четырех элементов. При каждом выборе первого элемента остальные три во всевозможных порядках занимают остальные три места, так что существует шесть различных перестановок при фиксированном первом элементе. Следовательно, общее число перестановок равно $6 \cdot 4 = 24$. Это рассуждение имеет общий характер. Обозначим через P_{n-1} число перестановок $(n-1)$ элементов и через P_n число перестановок n элементов. В каждой перестановке n элементов на первом месте может оказаться один из элементов $1, 2, \ldots, n$, так что имеется n возможностей выбора первого элемента. При каждом из них для оставшихся $n-1$ элементов имеется P_{n-1} возможностей расположений на остальных $n-1$ местах, ибо эти расположения отличаются только порядком элементов. Итак, пришли к соотношению $P_n = n \cdot P_{n-1}$, откуда последовательно получаем, исходя из $P_2 = 2$, что $P_3 = 3 \cdot 2 = 3!$, $P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4!$; $P_5 = 5 \cdot P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5!$ и т. д. Допустив, что $P_{n-1} = (n-1)!$, получим, что $P_n = n \cdot P_{n-1} = n!$

Это рассуждение является фактически доказательством посредством метода математической индукции формулы $P_n = n!$, которая и решает задачу.

Задача 3. Размещения. Сколькими способами можно выбрать и расположить в ряд m элементов из данного множества, содержащего n элементов? Такие расположения, состоящие из m элементов, выбранных из данных n элементов, и отличающиеся либо самими элементами, либо их порядком, либо и тем и другим, называются *размещениями*, а их число принято обозначать символом A_n^m (читается «A из n по m»). Например, из четырех элементов 1, 2, 3, 4 ($n=4$) можно составить 12 размещений по 2 элемента ($m=2$):

$$(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (1,\ 4),\ (4,\ 1)$$
$$(2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2).\ (3,\ 4),\ (4,\ 3).$$

Таким образом, $A_4^2 = 12$. Как же вычислить A_n^m? Поступим следующим образом. Возьмем все перестановки из n элементов и «вырежем» в каждой из них первые m элементов, отбросив остальные $n-m$ элементов. Останутся размещения из n элементов по m, но каждое размещение встретится столько раз, сколько перестановок можно составить из отброшенных $n-m$ элементов, т. е. P_{n-m} раз. Таким образом, число размещений из n элементов по m в P_{n-m} раз меньше числа перестановок n элементов, т. е.

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Можно рассуждать иначе. Все перестановки n элементов можно построить, используя размещения из этих n элементов по m. Присоединим к каждому из размещений элементы, не вошедшие в размещение. При этом каждое размещение дает P_{n-m} перестановок n элементов по числу способов, которыми можно расположить в ряд оставшиеся $n-m$ элементов. Таким образом, число перестановок n элементов в P_{n-m} раз больше, чем число размещений из n элементов по m, т. е.

$$P_n = A_n^m \cdot P_{n-m},$$

откуда следует уже выведенная формула числа размещений из n по m.

Задача 4. Сочетания. Сколькими способами из множества, содержащего n элементов, можно выбрать подмножество, составленное из m элементов? Такие подмножества, которые различаются только набором элементов без учета их взаимного расположения, называются *сочетаниями*. Так, например, из четырех элементов 1, 2, 3, 4 можно составить шесть сочетаний по два: $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3,\ 4\}$. (Фигурные скобки подчеркивают отличие сочетаний от размещений; размещения $(1,\ 2)$ и $(2,\ 1)$ считаются различными, хотя и составлены из одних и тех же элементов, а $\{1,\ 2\}$ и $\{2,\ 1\}$ считаются одним и тем же сочетанием.) Число сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m или $\binom{n}{m}$, например $C_4^2 = 6$. Очевидно, что сочетания тесно связаны с размещениями. Именно, если в каждом размещении отвлечься от порядка составляющих его элементов, т. е. не различать размещения, отличающиеся только порядком элементов, то мы получим все сочетания. Обратно, если в каждом сочетании выполнить всевозможные перестановки, то получатся все размещения. Поэтому верна формула

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m$$

или, если подставить вместо A_n^m и P_m их значения, $\frac{n!}{(n-m)!} = C_n^m \cdot m!$, откуда

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}.$$

Мы получили, что число сочетаний равно биномиальному коэффициенту, т. е. коэффициенту при $a^{n-m} \cdot x^m$ в многочлене, равном $(a+x)^n$. Это совпадение не случайно. *Бином Ньютона*, т. е. формула для записи $(a+x)^n$ по степеням x, легко может быть установлена на основании комбинаторных соображений. Именно,

$$(a+x)^n = (a+x)\,(a+x) \cdot \ldots \cdot (a+x) \ \ (n \text{ сомножителей}).$$

Для того чтобы умножить несколько многочленов, достаточно перемножить их члены по одному из каждого во всех возможных комбинациях и сложить результаты. Здесь в каждом сомножителе два слагаемых. Из каждого сомножителя можно брать либо первое слагаемое a, либо второе x. Если взять $n-m$ раз первое слагаемое и m раз второе, то произведение равно $a^{n-m}\cdot x^m$. Но выбрать m раз второе слагаемое из n биномов можно как раз C_n^m способами, так что одночлен $a^{n-m}\cdot x^m$ входит в $(a+x)^n$ с коэффициентом C_n^m.

Приведем несколько примеров, связанных с рассматриваемыми вопросами.

Пример 1. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 черных и 5 белых шашек?

Решение. Всего в рассматриваемом ряду 10 мест. Зная номера мест, в которые устанавливаются 5 черных шашек, мы знаем и все расположения. Следовательно, искомое число равно

$$C_{10}^5=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=252.$$

Пример 2. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 черных, 4 белых и 3 красных фишки?

Решение. В отличие от предыдущего примера, непосредственно применить выведенные формулы нельзя, но для решения нетрудно применить рассуждения, подобные выводу формулы для числа сочетаний. Именно, занумеруем черные фишки числами 1, 2, 3, 4, 5; белые — числами 6, 7, 8, 9; красные — числами 10, 11, 12. Мы знаем, что 12 предметов можно расположить в ряд 12! способами. Но все расположения фишек не меняются при всех перестановках фишек с номерами 1—5, с номерами 6—9 и с номерами 10—12. Поэтому число различных расположений равно $\frac{12!}{5!\cdot 4!\cdot 3!}=27\,720$.

Пример 3. Чему равен коэффициент при $x^5y^4z^3$ в $(x+y+z)^{12}$, развернутом в виде многочлена?

Решение. Для вычисления коэффициента нужно посчитать, сколькими способами можно выбрать пять раз первое слагаемое, четыре раза второе слагаемое и три раза третье в произведении двенадцати сомножителей, равных $(x+y+z)$.

Считая x черным, y белым и z красным, мы видим, что задача равносильна предыдущей, так что искомый коэффициент равен 27 720.

Пример 4. Найти число одночленов с коэффициентом 1 степени n от m букв.

Решение. Пусть одночлен равен $x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_m^{k_m}$. Тогда $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$. Поставим в соответствие этому одночлену картинку: берем k_1 точек, затем запятую, затем k_2 точек, затем снова запятую и т. д., наконец, после $(m-1)$-й запятой k_m точек. Среди показателей могут быть нули, так что картинка может начинаться с одной или нескольких запятых, кончаться запятыми и внутри запятые могут оказаться рядом. Так, одночлену $x_2^3\cdot x_4\cdot x_5^2$ от букв x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 соответствует картинка

$$\boxed{,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,\ ,\ \cdot\ ,\ \cdot\ \cdot\ ,\ ,}$$

Ясно, что каждой картинке из n точек и $m-1$ запятых в любом их расположении соответствует одночлен степени n из m букв. Поэтому искомое число одночленов равно числу таких картинок. Для каждой картинки занумеруем все места, занятые точками и запятыми, числами от 1 до $n+m-1$. Тогда картинка вполне определяется указанием номеров мест, занимаемых запятыми. Этих мест $m-1$. Следовательно, число картинок и равное ему число одночленов равно $C_{n+m-1}^{m-1}=C_{n+m-1}^{n}$. Например, число одночленов второй степени от m букв равно $C_{2+m-1}^{m-1}=C_{m+1}^2=\frac{(m+1)\cdot m}{2}$, число одночленов третьей степени от трех букв равно $C_{3+3-1}^2=C_5^2=10$.

Пример 5. Доказать, что число способов появления 10 очков при трехкратном бросании игральных костей равно коэффициенту при x^{10} в многочлене $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$.

Решение. Нужно найти, сколькими способами можно разбить число 10 на три слагаемых, порядок которых не безразличен, причем каждое слагаемое принимает только значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Точно та же задача возникает при трехкратном умножении многочлена $x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$ на себя по правилу умножения каждого слагаемого первого сомножителя на каждое слагаемое второго и третьего. Это и решает задачу. Искомый коэффициент можно вычислить, например, так. Многочлен

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$$

равен

$$\frac{x^3(x^6-1)^3}{(x-1)^3}=\frac{x^{21}-3x^{15}+3x^9-x^3}{x^3-3x^2+3x-1}.$$

Выполнив деление по правилу деления многочленов, получим

$$x^{18}+3x^{17}+6x^{16}+10x^{15}+15x^{14}+21x^{13}+25x^{12}+27x^{11}+$$
$$+27x^{10}+25x^9+21x^8+15x^7+10x^6+6x^5+3x^4+x^3.$$

Коэффициент при x^k дает число случаев, при которых число очков при трехкратном бросании кости равно k. Искомое число равно 27.

◀ Пример 6. Доказать, что число «счастливых» трамвайных билетов (с номерами от 000001 до 999999 и 000000) равно коэффициенту при x^{27} в многочлене

$$(1+x+x^2+\ldots+x^9)^6=\frac{(1-x^{10})^6}{(1-x)^6}.$$

Решение. Подобно примеру 5 легко убедимся в том, что коэффициент при x^m в выражении $(1+x+x^2+\ldots+x^9)^3$ равен числу появлений числа m в качестве суммы первых трех цифр. Коэффициент при x^{-m} в выражении $(1+x^{-1}+x^{-2}+\ldots+x^{-9})^3$ можно принять за число появлений числа $-m$ в качестве взятой со знаком минус суммы второй группы трех цифр. Следовательно, коэффициент при x^0 (т. е. свободный член) в выражении

$$(1+x+\ldots+x^9)^3\cdot(1+x^{-1}+x^{-2}+\ldots+x^{-9})^3$$

есть искомое число. Но

$$1+x^{-1}+\ldots+x^{-9}=x^{-9}(1+x+\ldots+x^9),$$

так что

$$(1+x+\ldots+x^9)^3\cdot(1+x^{-1}+\ldots+x^{-9})^3=$$
$$=x^{-27}(1+x+\ldots+x^9)^6$$

и коэффициент при x^0 в левой части равен коэффициенту при x^{27} в

$$(1+x+\ldots+x^9)^6=\frac{(x^{10}-1)^6}{(x-1)^6}=\frac{(1-x^{10})^6}{(1-x)^6}.$$

Этот коэффициент можно найти, выполнив деление многочленов, раскрыв числитель и знаменатель по формуле бинома Ньютона. Однако еще проще обратиться к средствам математического анализа. Именно, сначала разложить

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^6}=(1-x)^{-6}$$

по формуле Маклорена. Легко подсчитать, что

$$f'(x)=6(1-x)^{-7},$$
$$f''(x)=6\cdot 7\cdot(1-x)^{-8},\ \ldots,$$
$$f^{(k)}(x)=6\cdot 7\cdot\ldots\cdot(6+k-1)(1-x)^{-6-k},$$

так что $f^{(k)}(0)=6\cdot 7\cdot\ldots\cdot(k+5)$ и

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{6\cdot 7\cdot\ldots\cdot(k+5)}{k!}=\frac{(k+5)!}{5!\,k!}=C_{k+5}^5.$$

Следовательно, по формуле Маклорена, оборванной после члена с x^{27}, получим

$$(1-x)^{-6}=1+C_6^5x+C_7^5x^2+C_8^5x^3+\ldots+C_{k+5}^5x^k+\ldots$$
$$\ldots+C_{32}^5x^{27}+x^{28}\cdot F(x),$$

где $F(x)$ — ограниченная в окрестности $x=0$ функция.

Далее,

$$(1-x^{10})^6(1-x)^{-6}=$$
$$=(1-C_6^1x^{10}+C_6^2x^{20}-C_6^3x^{30}+C_6^4x^{40}-C_6^5x^{50}+$$
$$+C_6^6x^{60})\cdot(1+C_6^5x+C_7^5x^2+\ldots+C_{32}^5x^{27})+(1-x^{10})^6x^{28}F(x).$$

В левой части равенства находится многочлен $(1+x+\ldots+x^9)^6$, первое слагаемое правой части — тоже многочлен от x, следовательно, и второе слагаемое есть многочлен. Так как $(1-x^{10})^6\cdot F(x)$ есть функция, ограниченная в окрестности $x=0$, все члены многочлена $(1-x^{10})^6\cdot x^{28}\cdot F(x)$ содержат x не ниже, чем в 28-й степени. Теперь легко найти искомый коэффициент при x^{27}. Он равен $C_{32}^5-C_6^1\cdot C_{22}^5+C_6^2\cdot C_{12}^5=55\,252$. ▶

Пример 7. Опыт состоит в подбрасывании монеты n раз, при этом записывается последовательность появлений герба и цифры. Каково число возможных комбинаций появлений герба и цифры? В скольких комбинациях герб встретится ровно k раз?

Решение. Каждое бросание монеты имеет два возможных исхода: герб или цифра. Всего монета подбрасывается n раз. Каждая возможная комбинация гербов и цифр — выборка из n двухэлементных множеств, следовательно, общее число комбинаций равно 2^n (см. задачу 1). Второй вопрос аналогичен задаче о числе сочетаний из n элементов по k, т. е. число комбинаций, в которых герб встречается ровно k раз, равно C_n^k.

Упражнения

1. Сколько существует перестановок элементов 1, 2, ..., n, в которых элемент 1 находится не на первом месте?

Ответ. $P_n-P_{n-1}=(n-1)\,(n-1)!$

2. Сколько существует перестановок элементов 1, 2, ..., n, в которых элементы 1 и 2 находятся не на своих местах?

Ответ. $P_n-P_{n-1}-P_{n-1}+P_{n-2}=(n^2-3n+3)\,(n-2)!$

3. Сколько существует сочетаний из элементов 1, 2, ..., n по m $(2<m<n)$, которые не содержат вместе элементы 1 и 2?

Ответ. $C_n^m-C_{n-2}^{m-2}=\dfrac{(n-2)!\,(n-1+m)}{m!\,(n-m-1)!}$.

4. Сколько существует размещений шести элементов 1, 2, ..., 6, у которых на втором месте находится 4, на четвертом 3?

Ответ. $A_6^3 = 120$.

5. Сколько существует трамвайных билетов, номера которых записываются четырьмя цифрами?

6. Сколько существует шестизначных чисел, в запись которых входят четыре цифры?

7. Возможно ли равенство $P_n = 36A_{n-1}^2$ и если да, то при каком n?

Ответ. При $n = 6$.

8. Решить уравнение $C_n^5 = 2C_{n-1}^5$.

Ответ. При $n = 10$.

§ 2. О вероятности

В природе, да и в обыденной жизни часто приходится иметь дело с явлениями случайными, т. е. с ситуациями, исход которых нельзя точно предвидеть. Так, подбрасывая наудачу монету, нельзя предсказать, упадет она вверх гербом или цифрой. Аналогично, подбрасывая кубик, одна из сторон которого окрашена, нельзя предсказать, какой стороной вверх он упадет — окрашенной или неокрашенной.

В применении к случайным явлениям в нашем сознании возникает представление о вероятности явления. Мы часто пользуемся этими словами. Так, каждый хорошо понимает смысл высказывания: «Это событие вероятно, а такое-то явление маловероятно». Употребляются и выражения вроде: «стопроцентная вероятность» и «вероятность равна нулю», когда хотят подчеркнуть свою уверенность в том, что то или иное событие обязательно произойдет или, наоборот, не произойдет. Использование термина «вероятность» и оборотов, аналогичных приведенным выше, базируется на жизненном опыте и интуитивном представлении о вероятности (возможности) появления того или иного события. Незнание точного смысла слова «вероятность» не мешает нам даже сравнивать вероятности различных событий, явлений.

Например, если у кубика окрашена только одна грань, то каждому ясно, что в результате бросания кубика более вероятно выпадание неокрашенной грани, чем окрашенной. Ясно также, что двукратное появление герба при двух бросаниях монеты менее вероятно, чем появление герба при одном бросании.

Стократное появление герба при ста бросаниях монеты

представляется очень маловероятным событием, но все же возможным.

Целью теории вероятностей является разумное количественное измерение вероятностей случайных явлений и построения на этой основе математической теории, которая позволяет предсказывать течение процессов, связанных со случайными явлениями.

Прежде всего заметим, что количественное измерение вероятности единичного случайного события не имеет смысла.

Не можем мы и ответить на вопрос, что более вероятно: что во время следующей грозы молния ударит в данное дерево, или что при бросании монеты 50 раз все 50 раз выпадет герб? Ясно, что оба эти события почти невозможны, но нет никаких оснований считать одно из них более вероятным, чем другое. Таким образом, говорить о величине вероятности случайного явления имеет смысл лишь для событий, появляющихся в результате опытов, допускающих многократные повторения в одних и тех же условиях (например, при бросании монеты) или о явлениях, происходящих одновременно со многими объектами, находящимися в одинаковых условиях (например, радиоактивный распад атомов радия).

Как мы увидим далее, при разумном определении вероятности события имеет место так называемый *закон больших чисел*. Он заключается в том, что при n-кратном повторении опыта, результатом которого с вероятностью p появляется некоторое событие, частота события, т. е. отношение числа k появления события к числу n испытаний, в некотором смысле близка к вероятности, точнее — вероятность большого отклонения частоты события от его вероятности мала при большом числе испытаний и безгранично убывает при возрастании числа испытаний. Как говорят, в этой ситуации имеет место *статистическая устойчивость* события.

Рассмотрим простой пример. Естественно, что достоверному событию приписывается вероятность 1 (стопроцентная вероятность), невозможному — вероятность 0. В опыте с бросанием монеты, если она совершенно симметрична, следует считать, что вероятности появления герба и цифры одинаковы, так что им следует приписать вероятность 1/2. Пусть при экспериментальной проверке закона больших чисел мы 20 раз бросили гривенник и герб выпал 11 раз, тогда частота его появления равна $11/20 = 0{,}55$. Из литературы известны результаты аналогичных экспериментов, осуществленных в значительно более крупных масштабах. Так, известный французский естествоиспытатель Бюффон (XVIII век) при 4040 бросаниях получил герб 2048 раз, т. е. с частотой $\frac{2048}{4040} \approx 0{,}5069$. Английский статистик К. Пирсон описал серии бросаний в 12 000 и 24 000 раз. В первом случае герб выпал 6019 раз, так что частота при этом эксперименте получилась $\frac{6019}{12\,000} \approx$ $\approx 0{,}5016$; во втором — 12 012 раз, с частотой $\frac{12\,012}{24\,000} =$ $= 0{,}5005$. Таким образом, частоты появления герба оказались близкими к вероятности 0,5 и тем ближе, чем больше серия испытаний.

Рассмотрим еще один пример. Пусть имеется кубик, грани которого раскрашены следующим образом: три грани красные, две синие и одна желтая. Кубик наудачу бросается на стол. Какой естественно считать вероятность того, что наверху окажется красная, синия, желтая грань? Здесь имеется шесть возможностей для верхней грани, которые естественно считать одинаково вероятными (кубик брошен наудачу), так что для каждой грани вероятность оказаться наверху следует считать равной 1/6. Красная грань появляется в трех случаях из этих шести, так что вероятность появления наверху красной грани следует считать равной $3/6 = 1/2$; синих граней две, вероятность появления наверху синей грани равна $2/6 = 1/3$, а желтая грань одна, для нее вероятность равна 1/6.

Следующий пример будет несколько более сложным. Если монету бросить шесть раз, то какова вероятность того, что герб выпадет два, три или четыре раза? В этой ситуации возможно 64 исхода — при первом бросании имеются две возможности, для каждой из которых при втором бросании снова имеются две возможности, так что число возможностей удваивается. При переходе к трем бросаниям число возможностей снова удваивается и т. д., так что за 6 бросаний действительно возможны 64 исхода, которые естественно считать одинаково вероятными. Герб появляется k раз, если он выпадает при некоторых k бросаниях и при остальных $6-k$ бросаниях выпадает цифра. Номера этих бросаний образуют всевозможные сочетания из 6 элементов по k, и их число равно C_6^k. Таким образом, два, три или четыре раза герб выпадает в $C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 = 15 + 20 + 15 = 50$ случаях и вероятность двухкратного, трехкратного или четырехкратного появления герба равна $\frac{50}{64} \approx 0{,}781$. На долю остальных возможностей, т. е. для бо́льшего отклонения частоты $k/6$ от половины, приходится небольшая вероятность $\frac{14}{64} \approx 0{,}219$.

Представление о вероятности, о котором мы говорили, естественно с интуитивной точки зрения. Обобщить примененные рассуждения не представляет труда. Во всех примерах мы связывали появление или непоявление данного события A с некоторым набором равновероятных «элементарных событий» $a_1, a_2, \ldots, a_n$, так что событие A появлялось при осуществлении некоторых элементарных событий, называемых благоприятствующими для события A, и не появлялось при осуществлении остальных (не благоприятствующих для A). За вероятность события A принимается отношение числа благоприятствующих событию A элементарных событий к их полному числу.

Первоначально, в работах классиков теории вероятностей Ферма (1601—1665), Паскаля (1623—1662) и других, понятие вероятности истолковывалось именно так — на основании подсчета числа благоприятствующих равновероятных элементарных событий. Работы классиков были в значительной степени направлены на исследование азартных игр, так что сначала теория вероятностей имела не очень значительную область приложений. Однако классическая теория довольно проста и является хорошей моделью для понимания вероятностных законов.

Как было сказано выше, если в результате опыта появляется случайное событие, которому можно разумным образом приписать некоторую вероятность, то при многократном проведении опыта имеет место статистическая устойчивость, т. е. при увеличении числа опытов частота появления события имеет тенденцию стабилизироваться, приближаясь к вероятности. Таким образом, статистическая устойчивость появления события является необходимым условием для возможности приписать событию определенную вероятность. Основным направлением приложений теории вероятностей является исследование средствами математики процессов, связанных со статистически устойчивыми случайными явлениями. Статистически устойчивым явлениям приписывается в качестве вероятности частота их появления при достаточно большом числе опытов (как говорят статистики, при достаточно большом объеме выборки). Сама теория математической статистики (основанной на теории вероятностей), будучи достаточно далеко продвинутой, подсказывает, насколько велик должен быть объем выборки для получения достаточно достоверных результатов. Такой статистический подход к понятию вероятности расширяет область применения теории по сравнению с классическим подходом, так как далеко не всегда удается связать статистически устойчивые явления с классической схемой равновероятных элементарных событий.

Между классическим и статистическим подходами к понятию вероятности нет непроходимой пропасти. Их можно сблизить посредством следующего нестрогого рассуждения. Пусть мы подсчитываем частоты появления события A исходя из серии из n испытаний. Условимся считать испытания *элементарными равновероятными событиями*, причем те и только те из них, при которых A появляется, будем считать *благоприятствующими для* A. При таком соглашении «классическая вероятность» события A совпадает с частотой его появления. Сделанное соглашение довольно произвольно и для разных серий испытаний будет давать несколько различающиеся результаты (вспомним результаты экспериментов с бросанием монеты). Лишь для достаточно больших серий будут получаться достаточно правдоподобные результаты. Повторяем, что это рассуждение не устанавливает тождества между двумя подходами к понятию вероятности, но только сближает их.

Необходимость применения теории вероятностей ко все более общим вопросам естествознания заставила пересмотреть основы теории. Это был постепенный процесс, более или менее завершенный в работе (1933 г.) современного советского ученого — академика А. Н. Колмогорова. Его обоснование основных понятий теории вероятностей построено на некоторой системе аксиом. Классическое обоснование укладывается в теорию А. Н. Колмогорова как частный случай. Теория охватывает, в частности, ситуации, когда может произойти бесконечно много исходов. Некоторые задачи этого рода рассматривались и значительно раньше и решались на основе частных соображений (с одной из таких задач мы познакомимся, не вдаваясь в теорию, в § 13).

§ 3. Сложение вероятностей

Пусть A_1 и A_2 — два события, связанные с одним и тем же множеством элементарных событий. Скажем, что они *несовместимы*, если появление одного из них делает

невозможным появление второго. Это значит, что не существует элементарного события, благоприятствующего обоим событиям A_1 и A_2. Назовем суммой событий A_1 и A_2 (несовместимых или нет) событие A_1+A_2, заключающееся в осуществлении A_1 или A_2.

Теорема. *Вероятность суммы несовместимых событий A_1 и A_2 равна сумме их вероятностей.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — система равновероятных элементарных событий, связанных с событиями A_1 и A_2. Пусть событию A_1 благоприятствует k_1 элементарных событий, событию A_2 — k_2 элементарных событий. Ни одно из них не благоприятствует обоим событиям A_1 и A_2 одновременно. Следовательно, событию A_1+A_2 благоприятствует k_1+k_2 элементарных событий и, следовательно,

$$\mathsf{P}(A_1+A_2)=\frac{k_1+k_2}{n}=\frac{k_1}{n}+\frac{k_2}{n}=\mathsf{P}(A_1)+\mathsf{P}(A_2).$$

Здесь через $\mathsf{P}(A)$, где A — некоторое событие, обозначена его вероятность. Мы и в дальнейшем будем придерживаться такого обозначения.

Мы доказали теорему о сложении вероятностей исходя из классического определения вероятности. При аксиоматическом обосновании теории вероятностей теорема о сложении входит в число аксиом.

Теорема о сложении вероятностей легко обобщается на случай, когда события A_1 и A_2 совместимы. Обозначим через $A_1 \cap A_2$ событие, заключающееся в одновременном осуществлении событий A_1 и A_2. Оно называется пересечением событий A_1 и A_2. Верна следующая теорема:

Теорема. $\mathsf{P}(A_1+A_2)=\mathsf{P}(A_1)+\mathsf{P}(A_2)-\mathsf{P}(A_1\cap A_2)$.

Доказательство. Обозначив через k_1, k_2 и l числа элементарных событий, благоприятствующих событиям A_1, A_2 и $A_1 \cap A_2$, мы видим, что число элементарных событий, благоприятствующих событию A_1+A_2, равно $k_1+(k_2-l)$, ибо при учете событий, благоприятствующих событию A_2, мы должны исключить уже учтенные ранее события, благоприятствующие не только A_2, но и A_1. Из сделанного подсчета следует утверждение теоремы.

§ 4. Умножение вероятностей

Случайные события A и B называются *независимыми*, если вероятность события B не зависит от того, появилось ли событие A или нет. Независимость выступает особенно ярко, если события A и B появляются в различных, независимых один от другого экспериментах, связанных, быть может, с различными системами равновероятных элементарных событий. Важной является задача о вероятности одновременного осуществления независимых событий A и B, если их вероятности известны.

Предпошлем исследованию этой задачи простой пример. Пусть одновременно бросаются игральная кость и монета. Найти вероятность появления четного числа на кости и герба на монете. Здесь естественно рассмотреть пары элементарных событий:

(1, г), (1, ц), (2, г), (2, ц), (3, г), (3, ц),
(4, г), (4, ц), (5, г), (5, ц), (6, г), (6, ц),

где цифры обозначают число на верхней грани кости, буквы г и ц — герб или цифру на монете. Множество этих пар, очевидно, нужно принять за множество равновероятных элементарных событий. Их имеется 12, из них благоприятных для излучаемого события три: (2, г), (4, г) и (6, г). Таким образом, искомая вероятность равна $3/12=1/4$.

Теперь докажем при помощи аналогичных рассуждений следующую теорему:

Теорема. *Вероятность события $A\cap B$, заключающегося в одновременном появлении независимых событий A и B, равна произведению вероятностей этих событий.*

Доказательство. Пусть событие A связано с равновероятными элементарными событиями $a_1, a_2, \ldots, a_n$, из которых k благоприятствует событию A, так что вероятность события A $\mathrm{P}(A)=k/n$ и соответственно событие B связано с равновероятными элементарными событиями $b_1, b_2, \ldots, b_m$, среди которых имеется l благоприятствующих для B, так что $\mathrm{P}(B)=l/m$. За элементарное событие для $A\cap B$ естественно принять пары (a_i, b_j), считая их, в силу независимости событий A и B, равновероятными и благоприятствующими для $A\cap B$ в том и только в том случае, когда a_i благоприятствует A и b_j благоприятствует B. В силу решения комбинаторной задачи 1 о числе выборок из двух множеств, число всех пар (a_i, b_j) равно mn и среди них тех, которые благоприятствуют $A\cap B$, имеется kl. Поэтому

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{kl}{mn}=\frac{k}{n}\cdot\frac{l}{m}=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B),$$

что и требовалось доказать.

Мы доказали теорему умножения вероятностей для независимых событий в рамках классической теории. В современной теории равенство $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$ принимается за определение *независимости событий* A и B.

Теорема легко обобщается. Допустим, что имеется совокупность случайных событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$, независимых в том смысле, что вероятность каждого из них не зависит от выполнения или невыполнения всех остальных. Тогда вероятность одновременного выполнения событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ равна произведению вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$. В этом легко убедиться обычными рассуждениями по индукции:

$$\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)=\mathrm{P}((A_1\cap A_2)\cap A_3)=$$
$$=\mathrm{P}(A_1\cap A_2)\cdot\mathrm{P}(A_3)=\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(A_2)\cdot\mathrm{P}(A_3)\text{ и т. д.},$$
$$\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1}\cap A_k)=$$
$$=\mathrm{P}((A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1})\cap A_k)=$$
$$=\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1})\cdot\mathrm{P}(A_k)=\mathrm{P}(A_1)\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(A_{k-1})\cdot\mathrm{P}(A_k).$$

Важный случай появления независимых случайных событий возникает при повторении эксперимента, протекающего при неизменных условиях, ибо появление или непоявление исследуемого события при некотором эксперименте не зависит от исхода предшествующих. (Здесь уместно упомянуть об одном иногда высказываемом предрассудке. Именно, иногда считают, что если при бросании монеты шесть раз подряд выпал герб, то при следующем бросании появление герба менее вероятно, чем появление цифры. Это, разумеется, неверно, ибо условия бросания монеты никак не изменяются от исхода предшествующих опытов. Ощущение малой вероятности появления герба после его шестикратного появления вызвано тем, что недостаточно развитая в вероятностных вопросах интуиция подсказывает вместо равной 1/2 вероятности появления герба сравнительно ничтожную, равную 1/128, вероятность семикратного появления герба, но эта вероятность относится к началу эксперимента, а не к тому моменту, когда шесть бросаний уже сделано.) Пусть при эксперименте возможно два исхода A и $\overline{A}$ с вероятностями p и $q=1-p$. Вычислим, чему равна вероятность k-кратного появления события A при n экспериментах. В результате n экспериментов могут возникать серии исходов — всевозможных последовательностей длины n из событий A и $\overline{A}$.

Если в некоторой серии A появляется k раз и соответственно $\overline{A}$ появляется $n-k$ раз, то, в силу теоремы умножения вероятностей, вероятность серии равна $p^k q^{n-k}$. Номера экспериментов с появлением A в таких сериях образуют сочетания из n элементов по k. Так как все различные серии исходов несовместимы, можно применить теорему о сложении вероятностей, что сводится к умножению вероятности одной из рассматриваемых серий на C_n^k. Итак, искомая вероятность равна $C_n^k p^k q^{n-k}$. Этот результат имеет большую принципиальную важность и будет использован в дальнейшем.

§ 5. Применения к генетике

Известный естествоиспытатель Г. Мендель (1822—1884) обнаружил экспериментально ряд характерных закономерностей при скрещивании различных сортов гороха. Эти закономерности легко объясняются посредством применения простейших теорем теории вероятностей. Важность их заключается в том, что они лежат в основе теории наследственности в целом, так называемой *генетики*.

Схема применения теории вероятностей к генетике основывается на следующем. Наследование признаков зависит от специальных носителей, называемых генами. Все клетки тела живого организма, кроме половых клеток, несут один и тот же набор генов. Гены представляют собой участки хромосом, которые входят в обычные клетки попарно, и соответственно гены входят попарно, располагаясь в соответствующих хромосомах. В простейших случаях каждый ген отдельной пары может находиться в одной из двух форм (*аллелей*), обозначим их A и a. Соответственно организм может иметь (по отношению к данному гену) три так называемых генотипа: AA, Aa и aa. Первый и третий называются *гомозиготными*, второй — *гетерозиготным*.

Имеются признаки, определяемые одной парой генов. Это самый простой случай. Однако имеются признаки, определяемые несколькими парами генов. Мы рассмотрим лишь первый, простейший случай. Заметим, что более сложные случаи тоже допускают исследование средствами теории вероятностей.

Половые клетки (*гаметы*) содержат только по одному гену каждой пары. Гомозиготные особи производят гаметы только одного вида, а гетерозиготные особи генотипа Aa производят в равном количестве гаметы с генами A и a.

Новый организм развивается из двух родительских гамет, от которых он и получает гены.

Окраска цветов гороха определяется одним геном, имеющим две формы A и a. Горох генотипа AA имеет красную окраску цветов, генотип aa определяет белую окраску и генотип Aa — розовую. Пусть поле засеяно смесью красного, розового и белого гороха, встречающихся с частотами u, $2v$ и w, $u+2v+w=1$ (частоты мы будем отождествлять с вероятностями ввиду большого числа засеваемых горошин). Тогда вероятности скрещиваний можно свести в таблицу:

	AA	Aa	aa
AA	u^2	$2uv$	uw
Aa	$2uv$	$4v^2$	$2vw$
aa	uw	$2vw$	w^2

Теорему об умножении вероятностей можно было применить, ибо пары, участвующие в скрещивании, независимы. Каждая клетка таблицы в свою очередь разбивается на четыре клетки с одинаковыми вероятностями, в зависимости от возможных комбинаций гамет. Сведем эти возможные случаи в одну таблицу:

AA	AA	AA	Aa	Aa	Aa
AA	AA	AA	Aa	Aa	Aa
AA	AA	AA	Aa	Aa	Aa
Aa	Aa	Aa	aa	aa	aa
Aa	a	Aa	aa	aa	aa
Aa	Aa	Aa	aa	aa	aa

Вероятности каждой из 36 возможностей известны.

Теперь, пользуясь теоремой о сложении вероятностей, находим вероятность комбинаций AA, Aa и aa. Вероятность комбинации AA:

$$u^2+2uv+v^2=(u+v)^2.$$

Вероятность комбинации Aa:

$$2uw+2uv+2v^2+2vw=2(u+v)(v+w).$$

Вероятность комбинации aa:

$$w^2+2vw+v^2=(w+v)^2.$$

В частности, если засеять поровну горох с красными и белыми цветами, т. е. взять $u=w=1/2$, $v=0$, то красного гороха получится $\approx 1/4$, розового $\approx 1/2$ и белого $\approx 1/4$.

Интересно отметить, что если взять посев с частотами

$$u_1=(u+v)^2, \quad 2v_1=2(u+v)(w+v), \quad w_1=(w+v)^2$$

для генотипов AA, Aa и aa, то в следующем поколении частоты останутся без изменения. Действительно,

$$u_2=(u_1+v_2)^2=(u+v)^2(u+v+w+v)^2=(u+v)^2=u_1,$$

ибо $u+2v+w=1$. Далее,

$$\begin{aligned} v_2=(u_1+v_1)(v_1+w_1)&= \\ =(u+v)(u+v+w+v)(w+v)(u+v+w+v)&= \\ &=(u+v)(w+v)=v_1, \end{aligned}$$

$$w_2=(v_1+w_1)^2=(w+v)^2(w+v+u+v)^2=(w+v)^2=w_1.$$

Как говорят, уже в первом поколении возникает устойчивая популяция.

Иногда один вид A гена доминирует над другим a. Это значит, что организм с генотипом Aa не отличается от организма с генотипом AA (конечно, по отношению к признаку, определяемому рассматриваемым геном). Так, зеленый цвет семян гороха доминирует над желтым. Если посеять горох генотипов AA и aa поровну, то три четверти гороха следующего поколения будет иметь зеленые семена и лишь одна четверть (генотип aa) — желтые.

Рассмотрим случай, когда поле засеяно только зелеными семенами гороха генотипов AA и Aa, т. е. в нашей общей схеме $w=0$, $u+2v=1$. Тогда в следующем поколении частота генотипа AA будет равна $u_1=(u+v)^2$, частота генотипа Aa равна $2v_1=2v(u+v)$ и частота генотипа aa (гороха с желтыми семенами) равна $w_1=v^2$, так

что в этом поколении окажется некоторое количество гороха с желтыми семенами, хотя такие и не были посеяны. Доля гороха генотипа AA несколько увеличится сравнительно с исходной:

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u+v}{v}=1+\frac{u}{v}.$$

Исключив при последующем посеве горох с желтыми семенами, мы еще увеличим преобладание гомозиготных особей над гетерозиготными:

$$\frac{u_2}{v_2}=1+\frac{u_1}{v_1}=2+\frac{u}{v}$$

и т. д. Таким образом, исключая из процесса размножения особи, обладающие *рецессивным* признаком, мы будем получать от поколения к поколению возрастание преобладания гомозиготных особей AA над гетерозиготными.

Мы разобрали лишь простейшие применения теории вероятностей к вопросам генетики. Однако по той же схеме, но со значительными техническими усложнениями можно разбираться в более сложных случаях — когда ген имеет больше двух аллелей, когда признак связан с несколькими генами и т. д.

§ 6. Случайные величины

Изучая процессы, связанные со случайными явлениями, приходится встречаться с так называемыми случайными величинами. *Случайной величиной* называется величина, которой мы не можем приписать определенное значение, но можем приписать несколько значений с некоторыми определенными вероятностями. Естественно, считается, что величина всегда имеет какое-то значение, так что сумма вероятностей, приписанных всем значениям, равна 1. Будем рассматривать «обычную» *детерминированную* (имеющую определенное значение) величину как случайную, принимающую единственное значение с вероятностью 1.

Например, пусть производится измерение длины некоторого отрезка при помощи линейки, на которой нанесены миллиметровые деления, но мы в погоне за точностью стремимся на глаз определить десятые доли миллиметра. Пусть при десяти измерениях получилось один раз 21,3 мм, три раза 21,4 мм, четыре раза 21,5 мм и два раза 21,6 мм. (Разные результаты получились за счет неточной подстановки начала линейки и неточности при отсчете на глаз.)

Результаты измерений мы можем считать значениями случайной величины, с вероятностями соответственно 0,1; 0,3; 0,4 и 0,2 (принимаем частоты за вероятность).

Однако и в самой теории вероятностей бывает целесообразно вводить случайные величины в качестве средства исследования. Так, бросанию монеты можно поставить в соответствие величину, принимающую значение 1 при появлении герба и 0 при появлении цифры. Получается случайная величина, принимающая значения 1 и 0 с вероятностями, равными 1/2.

Более общо, испытанию, исходом которого является появление или непоявление события A, с вероятностями p и $q=1-p$ естественно поставить в соответствие случайную величину, принимающую значения 1 и 0 с вероятностями p и q. При n-кратном проведении такого испытания возникает случайная величина со значениями $0, 1, \ldots, k, \ldots, n$, причем значению k приписывается вероятность появления события A k раз. Эта вероятность, как мы видели выше, равна $C_n^k p^k q^{n-k}$. Такая совокупность испытаний носит название *схемы Бернулли*.

Со случайной величиной связаны две важные характеристики — среднее значение или математическое ожидание величины и ее дисперсия. Если значения случайной величины x равны $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то *средним значением* x или *математическим ожиданием* называется число $\mathsf{E}x = p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n$. Ясно, что если $p_1=p_2=\ldots=p_n=1/n$, то среднее значение величины x равно среднему арифметическому ее значений.

Если x — случайная величина со значениями $x_1, \ldots, x_n$ при вероятностях $p_1, \ldots, p_n$, то под $f(x)$, где f — некоторая функция, понимается случайная величина со значениями $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ при тех же вероятностях $p_1, \ldots, p_n$. Ясно, что

$$\mathsf{E}(ax+b) = a\mathsf{E}x + b$$

и

$$\mathsf{E}(f_1(x)+f_2(x)) = \mathsf{E}f_1(x) + \mathsf{E}f_2(x).$$

Отметим еще, что $\mathsf{E}(x-c)=0$ в том и только в том случае, когда $c=\mathsf{E}x$, ибо $\mathsf{E}(x-c)=\mathsf{E}x-c$.

Дисперсией $\Delta(x)$ случайной величины x называется математическое ожидание $\mathsf{E}(x-c)^2$ квадрата отклонения $x-c$ величины x от ее среднего значения c. Можно сказать, что дисперсия характеризует, насколько широко разбросаны значения случайной величины вокруг своего среднего значения. Чем дисперсия меньше, тем теснее (в среднем) примыкают значения величины к среднему значению.

Явная формула для дисперсии:

$$p_1(x_1-c)^2 + p_2(x_2-c)^2 + \ldots + p_n(x_n-c)^2,$$

где $c=\mathsf{E}x$.

Математическое ожидание и дисперсия характеризуются следующим экстремальным свойством. Пусть b — некоторое число и $F(b)=\mathsf{E}(x-b)^2$ — среднее значение квадрата отклонения значений величины x от числа b. Тогда $F(b)$ имеет минимум при $b=\mathsf{E}x$, и этот минимум равен дисперсии. Действительно, пусть $c=\mathsf{E}x$. Тогда $F(b)=\mathsf{E}(x-c+c-b)^2 = (c-b)^2+2(c-b)\mathsf{E}(x-c)+\mathsf{E}(x-c)^2=(c-b)^2+\Delta(x)$, т. к. $\mathsf{E}(x-c)=0$.

Из этой формулы ясно, что $F(b)$ достигает минимума при $b=c=\mathsf{E}x$, и этот минимум равен $\Delta(x)$.

Для дисперсии можно указать другую формулу. Именно,

$$\Delta(x)=\mathsf{E}(x-c)^2=\mathsf{E}(x^2-2cx+c^2)= \\ =\mathsf{E}(x^2)-2c\mathsf{E}(x)+c^2=\mathsf{E}(x^2)-2c^2+c^2=\mathsf{E}(x^2)-c^2= \\ =\mathsf{E}(x^2)-(\mathsf{E}x)^2.$$

§ 7. Сумма независимых случайных величин

Пусть имеются две случайные величины: x со значениями $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с их вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$ и y со значениями $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с вероятностями $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Эти случайные величины считаем независимыми, т. е. считаем, что реализация одной из них не влияет на вероятности значений другой. По теореме умножения вероятностей

$$p((x=x_i)\cap(y=y_j)) = p_it_j.$$

Суммой случайных величин x и y называется случайная величина со значениями x_i+y_j с вероятностями p_it_j, причем если несколько сумм значений равны, то соответствующие им вероятности складываются. Так, если x принимает значения 0, 1, 2 с вероятностями 1/4, 1/2, 1/4, а y принимает значения 0, 1, 2, 3 с вероятностями 1/6, 1/3, 1/3, 1/6, то их сумма $x+y$ принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, 5 с вероятностями соответственно

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24};\quad \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6};$$
$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{24};$$
$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{24};$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6};\quad \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}.$$

Теорема. *Математическое ожидание суммы двух независимых случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.*

Доказательство. Пусть x принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, а y принимает значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с вероятностями $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(x+y) &= (x_1+y_1)p_1t_1+(x_1+y_2)p_1t_2+\ldots+(x_1+y_n)p_1t_n+\\ &+(x_2+y_1)p_2t_1+(x_2+y_2)p_2t_2+\ldots+(x_2+y_n)p_2t_n+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+(x_m+y_1)p_mt_1+(x_m+y_2)p_mt_2+\ldots+(x_m+y_n)p_mt_n=\\ &=x_1p_1t_1+x_1p_1t_2+\ldots+x_1p_1t_n+\\ &+y_1p_1t_1+y_2p_1t_2+\ldots+y_np_1t_n+\\ &+x_2p_2t_1+x_2p_2t_2+\ldots+x_2p_2t_n+\\ &+y_1p_2t_1+y_2p_2t_2+\ldots+y_np_2t_n+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+x_mp_mt_1+x_mp_mt_2+\ldots+x_mp_mt_n+\\ &+y_1p_mt_1+y_2p_mt_2+\ldots+y_np_mt_n=\\ &=(x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_mp_m)(t_1+t_2+\ldots+t_n)+\\ &+(p_1+p_2+\ldots+p_n)(y_1t_1+y_2t_2+\ldots+y_nt_n)=Ex+Ey,\end{aligned}$$

ибо $t_1+t_2+\ldots+t_n=p_1+p_2+\ldots+p_m=1$.

Доказательство становится короче и обозримее, если пользоваться знаком $\sum$ для суммы однотипных слагаемых. Именно,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(x+y) &= \sum_{\substack{i=1,2,\ldots,m\\ j=1,2,\ldots,n}}(x_i+y_j)p_it_j=\sum_{i,j}x_ip_it_j+\sum_{i,j}y_jp_it_j=\\ &=\sum_i x_ip_i\sum_j t_j+\sum_i p_i\sum_j y_jt_j=\\ &=Ex+Ey,\quad\text{ибо}\quad \sum_i p_i=\sum_j t_j=1.\end{aligned}$$

Теорема. *Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.*

Доказательство. Используем прежние обозначения и введем еще обозначения $c=\mathsf{E}x$, $d=\mathsf{E}y$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta(x+y) &= \sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}(x_i+y_j-(c+d))^2p_it_j=\\ &=\sum_{i,j}(x_i-c)^2p_it_j-2\sum_{i,j}(x_i-c)(y_j-d)p_it_j+\\ &+\sum_{i,j}(y_j-d)^2p_it_j=\sum_i(x_i-c)^2p_i\cdot\sum_j t_j-\\ &-2\sum_i(x_i-c)p_i\sum_j(y_j-d)t_j+\sum_i p_i\sum_j(y_j-d)^2t_j=\\ &=\Delta(x)+\Delta(y),\quad\text{ибо}\quad \sum_i p_i=\sum_j t_j=1,\end{aligned}$$

и каждая из сумм $\sum_i(x_i-c)p_i$ и $\sum_j(y_j-d)t_j$ равна нулю.

Теоремы о математическом ожидании и дисперсии суммы независимых случайных величин естественно обобщаются на любое число слагаемых.

§ 8. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, связанной со схемой Бернулли

Рассмотрим схему Бернулли. Это значит, что рассматривается серия из n независимых испытаний, при каждом из которых появляется событие A с вероятностью p и не появляется с вероятностью $q=1-p$. Каждое отдельное испытание связано со случайной величиной, принимающей значение 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью q. Сумма n таких случайных величин принимает значение k, когда среди слагаемых значений число 1 встречается k раз, т. е. когда в серии испытаний k раз появляется событие A. Таким образом, вероятность значения k для изучаемой суммы случайных величин равна вероятности k-кратного появления события A при n испытаниях. Мы получим тем самым, что случайная величина, возникающая в схеме Бернулли, есть сумма n независимых случайных величин, каждая из которых принимает значения 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $q=1-p$. Обозначим эту величину через z. Ясно, что $\mathsf{E}z=1\cdot p+0\cdot q=p$ и $\Delta(z)=\mathsf{E}(z^2)-(\mathsf{E}z)^2=\mathsf{E}(z)-(\mathsf{E}z)^2=p-p^2=pq$.

Следовательно, для суммы n независимых случайных величин, каждая из которых равна z, т. е. для схемы Бернулли, математическое ожидание равно np и дисперсия равна npq.

◀ Обратим внимание на то, что при помощи теорем о математическом ожидании и дисперсии мы фактически упростили довольно сложные суммы. Действительно, пусть x — случайная величина, связанная со схемой Бернулли. Согласно определению ее математическое ожидание $\mathsf{E}x$ равно $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}$, а дисперсия равна $\mathsf{E}(x^2)-(\mathsf{E}x)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - \left(\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}\right)^2$. Конечно, вычислить суммы $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}$ и $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k}$ можно непосредственно при помощи алгебраических преобразований. Для вычисления $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}$ можно применить тождество $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, а для вычисления

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k p^k q^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}$$

применить тождество $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$. Рекомендуем читателю довести вычисление до конца. ▶

§ 9. Неравенство Чебышева

Неравенство, которое мы сейчас докажем, дает оценку вероятности отклонений значений случайной величины от ее математического ожидания. Это неравенство было установлено великим русским математиком П. Л. Чебышевым (1821—1894).

Теорема. *Сумма вероятностей значений случайной величины x, уклоняющихся от среднего значения не больше чем на $t\sqrt{\Delta(x)}$, больше чем $1-\frac{1}{t^2}$. Здесь t — произвольное число, большее* 1.

Иными словами, *вероятность отклонения значений случайной величины от среднего значения больше чем на $t\sqrt{\Delta(x)}$ меньше $1/t^2$.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — значения случайной величины x и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — их вероятности.

Тогда

$$\Delta(x) = p_1(x_1-c)^2 + p_2(x_2-c)^2 + \ldots + p_n(x_n-c)^2,$$

где $c = Ex$. Оставим в этой сумме только те слагаемые, которые отвечают значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удаленным от c больше чем на $t\sqrt{\Delta(x)}$. Без нарушения общности можно считать, что такими значениями являются $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Тогда

$$\Delta(x) \geqslant p_1(x_1-c)^2 + p_2(x_2-c)^2 + \ldots + p_m(x_m-c)^2.$$

Но $|x_i - c| > t\sqrt{\Delta(x)}$ при $i = 1, 2, \ldots, m$. Следовательно,

$$\Delta(x) > p_1 t^2 \Delta(x) + p_2 t^2 \Delta(x) + \ldots + p_m t^2 \Delta(x) = t^2 \Delta x (p_1 + p_2 + \ldots + p_m),$$

откуда следует, что $p_1 + p_2 + \ldots + p_m < 1/t^2$.

Но $p_1 + p_2 + \ldots + p_m$ и есть вероятность отклонения значений случайной величины от среднего значения больше чем на $t\sqrt{\Delta(x)}$. Теорема доказана.

§ 10. Закон больших чисел для схемы Бернулли

Рассмотрим случайную величину x, связанную со схемой Бернулли. Ее значениями являются $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots, n$ с вероятностями $C_n^0 q^n, C_n^1 pq^{n-1}, \ldots, C_n^k p^k q^{n-k}, \ldots, C_n^n p^n$. Ее математическое ожидание равно np, дисперсия npq.

Согласно неравенству Чебышева имеем

$$P(|k-np| \leqslant t\sqrt{npq}) > 1 - \frac{1}{t^2}$$

или, что то же самое,

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant t\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) > 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Положим $t\sqrt{pq/n} = \varepsilon$. Тогда $t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}$ и неравенство запишется в виде

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 n}.$$

Правая часть при фиксированном ε стремится к 1 при $n \to \infty$. Таким образом, при растущем числе n испытаний вероятность того, что частота k/n появления события отклоняется от его вероятности не больше наперед заданного малого числа ε, стремится к 1 при $n \to \infty$.

В этом и состоит закон больших чисел для схемы Бернулли, состоящий в том, что частота появления события в большой серии испытаний, вообще говоря, близка к вероятности. Отклонения возможны, но мало вероятны.

§ 11. Случайные блуждания на прямой

Пусть через равные промежутки времени некоторая частица, находящаяся на прямой линии, перескакивает на одну единицу масштаба направо или налево с равными вероятностями $p=q=1/2$. Движение, которое совершает частица, носит название *случайного блуждания на прямой*.

Оценим, где может оказаться частица после n скачков. Возможно, что она переместится направо или налево на n единиц, но, конечно, это очень мало вероятно.

Для исследования задачи сопоставим ее со схемой Бернулли при вероятности $p=q=1/2$. Каждому появлению события A в схеме Бернулли поставим в соответствие скачок частицы направо, каждому непоявлению — скачок налево. Тогда абсцисса x частицы после n скачков равна $k-(n-k)=2k-n$, так что случайная величина x связана со случайной величиной y, равной числу появлений A при n испытаниях, соотношением $x=2y-n$. Следовательно,

$$\mathsf{E}x=2\mathsf{E}y-n=2\cdot\frac{1}{2}n-n=0.$$

Результат совершенно естественный — среднее положение частицы совпадает с ее положением в начале блуждания. Подсчет дисперсии дает

$$\Delta(x)=\mathsf{E}(x^2)=\mathsf{E}(4y^2-4ny+n^2)=4\mathsf{E}\left(\left(y-\frac{n}{2}\right)^2\right)=$$
$$=4\Delta(y)=4n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=n.$$

Неравенство Чебышева дает

$$P(|z|<t\sqrt{n})>1-\frac{1}{t^2},$$

так что уклонение блуждающей частицы от среднего положения на величину, существенно большую чем $\sqrt{n}$, маловероятно.

Рассмотренная задача может рассматриваться как очень грубое приближение к описанию физического явления,

носящего название *броуновского движения*. Оно заключается в том, что маленькие частицы, взвешенные в жидкости, совершают случайные движения, подвергаясь толчкам молекул жидкости, находящихся в хаотическом тепловом движении. Движение по прямой (а не в пространстве) может быть истолковано как движение в тонком капилляре.

В рассмотренной задаче абсциссу блуждающей частицы можно рассматривать как случайную величину, получающуюся при сложении независимых случайных величин, каждая из которых принимает значения $+1$ и -1 с равными вероятностями. Менее грубое описание блужданий частицы получится, если абсциссу каждого скачка рассматривать как более общую случайную величину со средним значением, равным нулю. Тогда случайную величину дающую абсциссу частицы после n скачков, можно рассматривать как сумму n одинаковых независимых случайных величин, каждая из которых определяет величину скачка. Однако такое обобщение мало меняет качественную картину явления. Если δ — дисперсия величины скачка, то дисперсия абсциссы после n скачков, согласно теореме о сложении дисперсий независимых случайных величин, равна $n\delta$ и неравенство Чебышева дает $P(|z|<t\sqrt{\delta n})>1-\frac{1}{t^2}$, так что уклонение частицы на величину, существенно большую $\sqrt{n}$, мало вероятно.

Рассмотренная обобщенная задача имеет другие интересные приложения. Рассмотрим одно из них. Пусть производится сложение n чисел, известных приближенно с точностью до δ. Что можно сказать о погрешности суммы? Обычная теория погрешностей утверждает, что погрешность суммы не превосходит $n\delta$. Однако ясно, что эта граница достигается лишь в исключительном случае — если все погрешности слагаемых максимальны и имеют одинаковые знаки. С точки зрения теории вероятностей оценка $n\delta$ очень завышена. Дело в том, что погрешности слагаемых являются одинаковыми независимыми случайными величинами с нулевым средним значением, если построение приближений было разумным (например, при помощи округления в нужную сторону). В следующем параграфе мы увидим, что дисперсию следует считать равной $\frac{1}{3}\delta^2$. *Погрешность суммы есть случайная величина, являющаяся суммой n одинаковых случайных величин.* Ее среднее значение равно 0, ибо таковы средние значения слагаемых, а дисперсия равна $\frac{1}{3}\delta^2 n$. Согласно неравенству Чебышева

$$P\left(|z| < \frac{t}{\sqrt{3}}\delta\sqrt{n}\right) > 1 - \frac{1}{t^2},$$

так что погрешность суммы, превышающая, например, $5\delta\sqrt{n}$, меньше 1/75. Таким образом, оценка для погрешности $5\delta\sqrt{n}$, существенно лучшая при больших n, чем оценка δn по максимуму, практически почти достоверна.

§ 12. Случайные величины, значения которых сосредоточены в промежутке или на всей вещественной оси

Случайные величины, указанные в заглавии параграфа, с необходимостью возникают в теории вероятностей и в ее приложениях. Для таких случайных величин отдельным значениям, вообще говоря, приходится приписывать нулевую вероятность и приписывать ненулевые вероятности событиям, заключающимся в принадлежности значений случайной величины промежуткам на вещественной оси. В этой ситуации удобным способом вероятностной характеристики случайной величины является задание ее функции распределения. Функцией распределения для случайной величины ξ называется функция $\mathsf{F}(x)$, равная вероятности того, что значения ξ не превосходят x. Для всякой случайной величины функция распределения должна существовать. Пусть теперь $x_1 < x_2$. Тогда событие $\xi \leqslant x_2$ есть сумма двух несовместимых событий $\xi \leqslant x_1$ и $x_1 < \xi \leqslant x_2$. Поэтому вероятность $\mathsf{F}(x_2)$ события $\xi \leqslant x_2$ есть сумма вероятности $\mathsf{F}(x_1)$ события $\xi \leqslant x_1$ и вероятности события $x_1 < \xi \leqslant x_2$. Таким образом, эта последняя вероятность равна $\mathsf{F}(x_2) - \mathsf{F}(x_1)$. Следовательно, $\mathsf{F}(x_2) - \mathsf{F}(x_1) \geqslant 0$, так что $\mathsf{F}(x)$ — неубывающая функция. Далее, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathsf{F}(x)$ есть предел вероятности того, что значения величины ξ становятся меньше любого отрицательного числа, сколь угодно большого по модулю. Ясно, что этот предел равен нулю. При $x \to +\infty$ $\lim \mathsf{F}(x)$ есть вероятность того, что ξ принимает любые значения, ничем не ограниченные сверху, т. е. этот предел равен 1.

Итак, функция распределения случайной величины — неубывающая функция, определенная на всей вещественной оси, «начинающаяся» с нуля $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} \mathsf{F}(x) = 0\right)$ и «кончающаяся» единицей $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} \mathsf{F}(x) = 1\right)$. Ее график имеет, вообще говоря, следующие очертания (рис. 1). Если все значения случайной величины сосредоточены на конечном интервале $[a, b]$, то

$$\mathsf{F}(x) = 0 \text{ при } x < a$$

и

$$\mathsf{F}(x) = 1 \text{ при } x > b.$$

Для случайной величины, принимающей конечное число значений, понятие функции распределения очевидно тоже

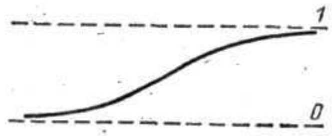

Рис. 1

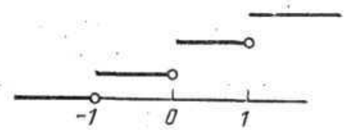

Рис. 2

имеет смысл. Так, для случайной величины, равной -1 с вероятностью 1/4, 0 с вероятностью 1/2 и 1 с вероятностью 1/4, функция распределения $\mathsf{F}(x)$ равна 0 при $x < -1$, равна 1/4 при $-1 \leqslant x < 0$, равна 3/4 при $0 \leqslant x < 1$ и равна 1 при $x \geqslant 1$. Ее график имеет вид, показанный на рис. 2. Она разрывна, и ее точки разрыва — это те значения x, которые являются значениями рассматриваемой случайной величины, имеющими ненулевые вероятности.

Вообще, функция распределения случайной величины имеет точками разрыва числа, являющиеся значениями случайной величины с предписанными ненулевыми вероятностями.

Особую важность представляют случайные величины, имеющие не только непрерывную, но дифференцируемую функцию распределения. Дифференцируемость означает, что при любом x существует предел $\mathsf{F}'(x)$ отношения $\frac{\mathsf{F}(x+\Delta x) - \mathsf{F}(x)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$. Разность $\mathsf{F}(x+\Delta x) - \mathsf{F}(x)$ есть вероятность принимать значения в интервале $(x, x+\Delta x]$, и существование $\mathsf{F}'(x)$ означает, что эта вероятность почти пропорциональна величине интервала, т. е. функция распределения $\mathsf{F}(x)$ почти линейна в окрестности точки x. Функция $\varphi(x) = \mathsf{F}'(x)$ называется *плотностью вероятно-*

сти. Плотность вероятности $\varphi(x)$ есть неотрицательная функция, для которой существует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \lim_{\substack{M\to\infty\\ N\to\infty}} \int_{-N}^{M} \varphi(x)\,dx$$

и этот интеграл равен 1. Функция распределения восстанавливается по плотности вероятности по формуле

$$\mathsf{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt.$$

Вероятность того, что значения случайной величины ξ находятся в интервале $(a;\ b]$ (или, что здесь то же самое, в интервале $[a,\ b]$, ибо в рассматриваемой ситуации $\mathsf{F}(x)$ непрерывна и вероятность того, что значение ξ равно a, равна нулю) равна

$$\mathsf{F}(b) - \mathsf{F}(a) = \int_{a}^{b} \varphi(x)\,dx.$$

Для случайной величины, имеющей плотность вероятности, естественным образом определяется математическое ожидание и дисперсия. Эти определения аналогичны соответствующим определениям для случайных величин с конечным числом значений, но суммы заменяются интегралами: математическое ожидание

$$\mathsf{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,dx$$

и дисперсия

$$\Delta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^2 \varphi(x)\,dx,$$

где $c = \mathsf{E}\xi$. В этой ситуации математическое ожидание и, тем более, дисперсия могут не существовать. Однако в наиболее важных для приложений случаях они существуют.

Рассмотрим два важных примера. Случайная величина называется *равномерно распределенной на интервале* $[a,\ b]$, если ее плотность вероятности постоянна на этом интервале и равна нулю вне интервала. Значение плотности на интервале должно равняться $\frac{1}{b-a}$, ибо интеграл по

всей оси от плотности должен равняться 1. Графики плотности и функции распределения приведены на рис. 3, 4. Математическое ожидание равномерно распределенной на $[a,\ b]$ величины равно

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x\,dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a+b}{2},$$

так что оно совпадает, как и следовало ожидать, с серединой промежутка сосредоточения плотности вероятности.

Дисперсия равна

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{3}\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3\right) = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

Если плотность сосредоточена на интервале $[-\delta,\ +\delta]$, что естественно считать для погрешности числа, заданного

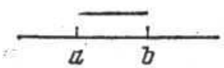

Рис. 3

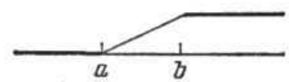

Рис. 4

приближенно с точностью до δ, то математическое ожидание равно 0, а дисперсия равна $\frac{1}{3}\delta^2$.

Очень важным для приложений является так называемый *нормальный закон распределения*. Его плотность задается формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Соответствующая функция распределения выражается в виде «неберущегося» интеграла, т. е. не может быть выражена через элементарные функции. В частности, мы не можем дать элементарное доказательство того, что $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1.$

Для нормального закона существуют математическое ожидание и дисперсия. Именно, математическое ожидание равно a, а дисперсия равна σ^2. График плотности приведен на рис. 5. Главная «масса вероятности» сосредоточена в окрестности точки a. При удалении от a плотность быстро падает и бесконечные ветви графика очень тесно примыкают к оси абсцисс.

Вычисление значений функции распределения $\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$ посредством подстановки $\frac{t-a}{\sigma\sqrt{2}}=y$ сводится к вычислению значений интеграла $\int\limits_{-\infty}^{y_0} e^{-y^2}\,dy$. Этот интеграл протабулирован с высокой точностью.

Значение нормального закона заключается, во-первых, в том, что он имеет место для многих случайных величин, возникающих при изучении явлений природы. Но, во-вторых, его роль исключительно велика при исследовании повторений эксперимента в одинаковых условиях. Именно, если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием a и с дисперсией σ^2, то математическое ожидание среднего арифметического $\bar{\xi}=(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)/n$ равно a и дисперсия равна σ^2/n. По определению, дисперсия есть среднее значение квадратов отклонений значений случайной величины от среднего, так что квадратный корень дисперсии есть в некотором смысле среднее (как говорят, *среднее квадратическое*) отклонение значений от среднего. Поэтому естественно сравнивать отклонение с корнем из дисперсии. В применении к величине $\bar{\xi}$ это приводит к рассмотрению случайной величины $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{\xi}-a)$. Оказывается, что имеет место замечательная теорема:

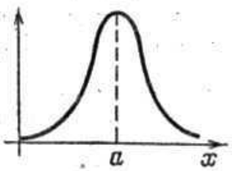

Рис. 5

Предельная теорема теории вероятностей. *Функция распределения величины* $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{\xi}-a)$ *сходится при* $n\to\infty$ *к функции распределения нормального закона с плотностью* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

Мы не будем доказывать эту теорему. Ее важность состоит в том, что при сложении независимых одинаково распределенных случайных величин или, что почти то же самое, при переходе к среднему арифметическому, индивидуальные особенности исходной величины сглаживаются и распределение становится все более похожим на нормальное распределение. Предельная теорема имеет широкие обобщения.

§ 13. Задача Бюффона

В заключении главы рассмотрим задачу, связанную с экспериментом с бесконечным множеством всевозможных исходов. Эта задача представляет исторический интерес, и ее несколько неожиданный ответ демонстрирует, насколько тесно переплетаются различные разделы математики.

Задача заключается в следующем. На плоскости проведены равноотстоящие параллельные прямые с расстоянием $2a$ между соседними прямыми. На плоскость случайным образом бросается игла длины $2a$. Какова вероятность того, что игла пересечет хотя бы одну из прямых?

Расположение иглы относительно системы прямых определяется значениями двух случайных величин. Во-первых, расстоянием y от середины иглы до ближайшей прямой. Эта величина может изменяться от 0 до a. Во-вторых, углом φ, который составляет направление прямых с направлением иглы от середины к ближайшей прямой. Этот угол может принимать значения от 0 до π. «Благоприятствующими» для интересующего нас события являются значения, удовлетворяющие условию $y\leqslant a\sin\varphi$ (рис. 6).

Всем возможным расположениям иглы относительно прямых соответствуют точки на плоскости с координатами

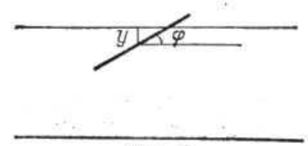

Рис. 6

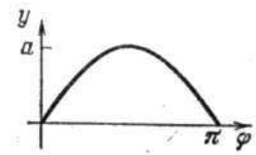

Рис. 7

(φ, y). Они заполняют прямоугольник длины π по оси φ и высоты a по оси y. Точки же, соответствующие «благоприятствующим» расположениям, лежат между осью 0φ абсцисс и аркой синусоиды $y=a\sin\varphi$ (рис. 7).

В силу случайности бросания иглы, случайные величины y и φ следует считать независимыми и равномерно распределенными на промежутках $[0, a]$ и $[0, \pi]$ их возможных значений. В силу равномерной распределенности, вероятность нахождения y в интервале $[c_1, c_2]$, $0 \leqslant c_1 < c_2 \leqslant a$, равна $\frac{1}{a}(c_2 - c_1)$. Соответственно вероятность нахождения φ в интервале $[\alpha_1, \alpha_2]$, $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \pi$, равна $\frac{1}{\pi}(\alpha_2 - \alpha_1)$. В силу независимости y и φ, вероятность нахождения точки (φ, y), определяющей расположение иглы в прямоугольнике $c_1 \leqslant y \leqslant c_2$, $\alpha_1 \leqslant \varphi \leqslant \alpha_2$, равна произведению $\frac{(c_2 - c_1)(\alpha_2 - \alpha_1)}{a\pi}$ вероятностей для φ и y находиться в своих интервалах, т. е. пропорциональна с коэффициентом $\frac{1}{a\pi}$ площади этого прямоугольника. Так как ограниченная гладкими линиями плоская фигура содержит внутри себя фигуру, составленную из прямоугольников, и содержится в другой аналогичной фигуре, площади которых сколь угодно мало отличаются от площади рассматриваемой фигуры, вероятность нахождения точки (φ, y) в плоской фигуре пропорциональна площади этой фигуры с тем же коэффициентом пропорциональности $\frac{1}{a\pi}$. Таким образом, вероятность того, что игла пересечет хотя бы одну прямую, равна площади фигуры, ограниченной осью 0φ и аркой синусоиды $y = a \sin \varphi$, умноженной на $\frac{1}{2\pi}$. Эта площадь равна $\int\limits_0^\pi a \sin \varphi \, d\varphi = -a \cos \pi + a \cos 0 = 2a$, и, следовательно, искомая вероятность равна $2/\pi$.

Бюффон, исследовавший рассмотренную задачу, предпринял большую серию экспериментов с бросанием иглы, подсчитал частоту случаев пересечения иглы с одной из прямых и нашел приближенно число π, считая, что частота близка к вероятности. Получился результат, довольно близкий к истинному значению числа π. Таким образом, число π, происхождение которого связано с геометрией, удалось вычислить приближенно при помощи статистического эксперимента, не имеющего ничего общего с измерением длины окружности.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава 1.

4. x — бесконечно малая. **5.** y не является бесконечно малой. **11.** Да. **12.** Нет. **13.** y стремится к нулю существенно быстрее, чем x. **14.** Нет. **19.** Конечное число. **21.** Нет. **29.** 1) 2. 2) 0. 3) 1,25. 4) 1. **37.** 3) 6. 5) $-0{,}375$. **40.** 1) $3x^2$. 3) $\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$. 5) $1{,}5\sqrt{x}$. **43.** 1) $y = 2x - 1$. 3) $y = 0{,}5$. 5) $y = -4x + 4$. 7) $y = x + 0{,}25$. **45.** $y = 2x - 1$ и $y = 6x - 9$. **49.** Расстояние меняется по закону $5t + 10$, скорость равна 5. **50.** $l = \frac{9}{8} t$. **51.** $2x\,dx$. **52.** $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$. **53.** $6x^5\,dx$. **54.** $\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Глава 2.

1. 1) $y' = 14x^6 - 15x^4 + 12x^2 - 1$. 3) $u' - 16t^3 + 4t$. 5) $f' = -\frac{3}{z^4} + \frac{1}{z^2}$. 7) $h' = 4t^3 + \frac{4}{t^5}$. 9) $y' = \frac{-3}{(x-3)^2}$. 11) $y' = \frac{4t}{(t^2+1)^2}$. 13) $f' = \frac{4x^2+10x-11}{(x^2+x+4)^2}$. 15) $g' = 15(3u+7)^4$. 17) $S' = 4\pi r + 4\pi l$. 19) $F' = -14\pi l + 6\pi H - 16\pi$. 21) $P' = -\frac{2a}{(\alpha-4)^3} + \frac{3b}{(\alpha+3)^4}$. **3.** $y'(x) = x^2(-50x^2 + 28x - 3)$ **5.** $x = 3$ и $x = -1$. **7.** 1) $y = 18x - 21$. **10.** 1) $\frac{3}{3x-7}$. 3) $\frac{2x+2}{x^2+2x}$. 5) $\frac{1}{x \ln 2}$. 7) $\frac{3 \lg^2 x}{x \ln 10}$. 9) $2x \ln x + x$. 11) $\frac{(x+2)(x+3)+(x+1)(x+2)+(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. 13) $-\frac{x^2+14x-7}{(x^2-x)(x+7)\ln 2}$. 15) $\frac{1-2\ln x}{x^3}$. 17) $\frac{1}{x}$. **12.** 1) $y = x - 1$. 3) $y = \frac{1}{2\ln 10} x - \frac{1}{\ln 10} + \lg 2$. **15.** 1) $y' < 0$ при $x < 1{,}5$. 2) $y' < 0$ при $x > 2{,}5$. **16.** 1) $3^x \ln 3$. 3) $(2x-1)e^{x^2-x}$. 5) $2te^t + t^2e^t$. 7) $\frac{1-2z^2}{e^{z^2}}$. 9) $2^{2x-1}\ln 2$. 11) $3 \cdot 2^{3t} \ln 2$. 13) $(5x+1)^x\left(\ln(5x+1) + \frac{5x}{5x+1}\right)$. **17.** 1) $y = x + 1$. 3) $y = x \ln\sqrt{8} + \frac{1}{2} - \ln\sqrt{8}$. **18.** $x = \ln 2$. **19.** 1) $-1{,}3x^{-2{,}3}$. 3) $\frac{3{,}5}{\sqrt{7x-1}}$. 5) $\frac{-3x+2}{2\sqrt{(4-3x)^3}}$. 7) $\frac{-5}{3\sqrt[3]{(-5t+2)^2}}$. 9) $\frac{4u-2}{3\sqrt[3]{u^2-u}}$. **20.** 1) $y = \frac{1}{4}x + 1$. 3) $y = 3x - 4$. **22.** $x = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$. **23.** 1) $y' = \frac{4}{3}$. 3) $y' = -\frac{y}{x}$. 5) $y' = \frac{y+1}{2-x}$. **24.** 1) 0.

Глава 3.

4. 1) Возрастающая. 3) Возрастающая. 5) Убывающая. **5.** 1) Возрастает на $(-\infty; -1/3]$ и на $[1; \infty)$, убывает на $[-1/3; 1]$. 3) Возрастает на $[-2; 2]$, убывает на $(-\infty; -2]$ и на $[2; \infty)$. 5) Возрастает на $[1/e; \infty)$, убывает на $(0; 1/e]$. 7) Возрастает на $\left[3; (6+\sqrt{24})/3\right]$, убывает на $\left[(6+\sqrt{24})/3; \infty\right)$. **6.** 7) Возрастает на $[-1; 0]$ и на $[1; \infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[0; 1]$, $x=0$ — точка максимума, $x=\pm 1$ — точки минимума. 11) Возрастает на $[1/e; \infty)$, убывает на $(0; 1/e]$, $x=1/e$ — точка минимума, $y\to 1$ при $x\to 0$. **8.** 3) Область определения функции $(-\infty; -1/3]$ и $[1/3; \infty)$. График состоит из двух ветвей, симметричных относительно OY. С ростом x ветви прижимаются снизу к прямым $y=3x$ и $y=-3x$ соответственно. 5) $x=-2$ — точка максимума, $x=1$ — точка минимума. 7) $x=-1-\sqrt{2}$ — точка максимума, $x=-1+\sqrt{2}$ — точка минимума. При $x\to-\infty$ график прижимается к $y=1$ сверху, при $x\to\infty$ график прижимается к $y=1$ снизу. 9) Область определения функции $(-1; 2)$. Функция возрастает от $-\infty$ до ∞, $y\to-\infty$ при $x\to-1$ и $y\to\infty$ при $x\to 2$, $y=0$ при $x=1/2$. 11) График симметричен относительно OY, $x=0$ — точка минимума. При больших по модулю x график мало отличается от графика функции $y=\sqrt[3]{x^2}$. 13) $x=1/e^2$ — точка минимума, $y\to 1$ при $x\to 0$. **10.** 2) Наибольшее значение функции при $x=pa/(p+q)$. **11.** 5) $\max f=f(-3)$, $\min f=f(-1)$. **14.** Рассмотреть мощность на сопротивлении R как функцию параметра R, найти наибольшее значение этой функции на интервале $[0; \infty)$. **16.** Наибольшая площадь равна $ha/4$. **17.** $t=3$. **19.** 1) $\max f(x)=f(5)$, $\min f(x)=f(0)$. 2) $\max g(x)=g(0)$, $\min g(x)=g(2)$. 3) $\max S(t)=S(0)$, $\min S(t)=S(-2)$. 4) $\max V(h)=V(1)$, $\min V(h)=V(6)$. **24.** $y'(0)=0$; $y''(0)=2$; $y'''(0)=0$; $y^{(4)}(0)=24$; $y^{(5)}(0)=0$. **30.** 1) В разложении бинома $(1+x)^n$ положить $x=1$. 2) В разложении бинома $(1+x)^n$ положить $x=-1$. **31.** $(1{,}02)^5<(1{,}03)^4$. **35.** Точки перегиба $\pm\sqrt{3}/3$. **37.** 1) Точка перегиба $x=-2$. 2) $x=-1$ — точка минимума, $x=0$ и $x=2$ — точки перегиба, прямая $x=0$ — вертикальная касательная к графику функции. 6) $x=5$ — точка максимума, $x=1$ — точка минимума, $x=5\pm 2\sqrt{3}$ — точки перегиба. **38.** 1) а) Да, б) да, в) нет, г) нет, д) нет. 2) Да. 3) Пересекает касательную в точке касания. **46.** $P(x)$ делится на $(x+1)^4$. **55.** Рассматриваем $\sqrt{3{,}14}$ как значение функции $f(x)=\sqrt{x}$, считаем погрешность измерения аргумента (0,002) достаточно малой. Тогда абсолютную погрешность при вычислении значения функции (см. теорему 1 с. 106) можно оценить выражением $0{,}002/(2\sqrt{3{,}14})\approx 0{,}0006$. Таким образом, в результате 1,7720045 первые три цифры после запятой можно считать верными. **75.** 1) Корень $x=0$ легко угадывается. Покажем, что $f(x)$ — возрастающая функция, следовательно, имеет только один корень. $f'(x)=e^x(x-1)+1$, $f'(0)=0$, $f''(x)=xe^x$, $f''(x)<0$ при $x<0$ и $f''(x)>0$ при $x>0$. Следовательно, $f'(x)$ убывает слева от $x=0$, а справа возрастает, так что $f'(x)\geqslant 0$ при всех x, значит, $f(x)$ — возрастающая функция.

Глава 4.

16. $\alpha+\frac{2\pi}{N}k$, $k\in\mathbb{Z}$. **20.** $\varphi=\frac{\pi}{30}t+\varphi_0$ рад или $\varphi=6t+\varphi_0$ градусов. **22.** 1) Через 5 с намоталось 75 м, через 15 с намоталось 75 м, через

20 с — 0 м, через 30 с сошло с диска 300 м. 2) 10 с, 100 м. 3) 20 с. 4) За 5 с 75 м, за 15 с 125 м, за 20 с 200 м, за 30 с 500 м. **26.** 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=0$. 2) $\sin(\pi+2\pi k)=0$, $\cos(\pi+2\pi k)=-1$. 7) $\sin\left(\frac{5}{6}\pi+2\pi k\right)=\frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{5}{6}\pi+2\pi k\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 8) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)=\frac{1}{2}$. **28.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 2) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 3) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 5) πk, $k\in\mathbb{Z}$. 6) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 7) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$ и $\frac{5}{6}\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 9) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 11) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$ и $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 13) $\pm\frac{5}{6}\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **30.** 1) $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5}{6}\pi$. 2) 0, $\frac{5}{6}\pi$ и $\frac{7}{6}\pi$. 3) $\frac{3}{4}\pi$ и $\frac{5}{4}\pi$. 4) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$ и $\frac{\pi}{2}$. **31.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 2) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 3) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{5}{6}\pi+2\pi k$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **32.** 1) $\frac{2}{3}\pi$ и $\frac{\pi}{2}$. 3) 0 и $\frac{2}{3}\pi$. 5) 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$ и π. **33.** 3) $\frac{7}{12}\pi+2\pi k$, $\frac{13}{12}\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Решение упрощается, если заметить, что $\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$, отсюда $\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ и $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$. 4) $-\frac{7}{12}\pi+2\pi k$, $-\frac{13}{12}\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, заметим, что $\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{2}$, так что $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. **34.** 1) ω — угловая скорость в радианах в секунду, α_0 — начальное положение точки (при $t=0$). 2) $\frac{2\pi}{\omega}$. **36.** 1) $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\sin\left(2(x+\pi)+\frac{\pi}{3}\right)=f(x+\pi)$. Равенство $f(x)=f(x+\pi)$ верно для любого x, следовательно, π — период функции $f(x)$. 2) $T=\frac{\pi}{2}$. 3) $T=5\pi$. 4) $T=4\pi$. 5) $T=2\pi$. 6) $T=2\pi$. **37.** $\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{4}{3}\pi$. **39.** 1) $f(x)$ — четная, $g(x)$ — нечетная. 2) $f(x)$ — нечетная, $g(x)$ — четная. 3) $g(x)$ — нечетная, $h(x)$ — четная. 4) $f(x)$ — нечетная, $g(x)$ — четная. **43.** $f(0)=0$. **44.** 1) $\sin 38^\circ$ или $\cos 52^\circ$, $-\cos 15^\circ$ или $-\sin 75^\circ$, $-\sin 10^\circ$ или $-\cos 80^\circ$, $-\cos 65^\circ$ или $-\sin 25^\circ$. 4) $\cos 44^\circ$ или $\sin 46^\circ$, $-\sin 26^\circ$ или $-\cos 64^\circ$, $-\sin 13^\circ$ или $-\cos 77^\circ$, $-\sin 51^\circ$ или $-\cos 39^\circ$. 7) $-\sin 0{,}1\pi$, $\cos 0{,}4\pi$, $\sin 0{,}25\pi$, $\cos 0{,}15\pi$. **46.** 5) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$, $-\sin\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$, $-\cos\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **54.** 1) $T=\pi/2$. 2) $T=2\pi$. 3) $T=3\pi$. 4) $T=\pi/3$. **55.** 1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$. 2) $-\operatorname{ctg}0{,}1\pi$. 3) $\operatorname{tg}30^\circ$. 4) $\operatorname{ctg}10^\circ$. 5) $-\operatorname{ctg}0{,}2\pi$. 6) $-\operatorname{ctg}0{,}2\pi$. 7) $-\operatorname{ctg}(\pi-3)$.

8) $-\operatorname{tg}(2\pi-6)$. **57.** 1) $\cos x=-\sqrt{0,91}$, $\operatorname{tg} x=-3/\sqrt{91}$, $\operatorname{ctg} x=-\sqrt{91}/3$. 2) x — угол II четверти, $\sin x=\sqrt{0,84}$, $\operatorname{tg} x=-\sqrt{21}/2$, $\operatorname{ctg} x=-2/\sqrt{21}$.

Глава 5.

1. $\sin 15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **2.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2) -1. **5.** а) $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}$; б) $|a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}|$. **7.** 1) $\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$. 2) $\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$. 3) $\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{5}{3}\pi\right)$. 4) $\sin\left(t+\frac{11}{6}\pi\right)$. 5) $5\sin(t+\varphi+\pi)$, где $0<\varphi<\pi/2$ и $\sin\varphi=0,8$. 7) $\sqrt{2}\sin 3t$. 8) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{3}t+\frac{7}{12}\pi\right)$. **8.** 1) а) $t=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $t=-\frac{3}{4}\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; в) $t=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 8) а) $t=-1\frac{3}{4}\pi+6\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $t=\frac{5}{4}\pi+6\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; в) $t=-\frac{\pi}{4}+3\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **9.** 1) 1. 3) $\sqrt{3}\cos\alpha$. **11.** $\operatorname{tg}15^\circ=2-\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}75^\circ=2+\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}75^\circ$. **18.** 1) $\cos x=0,28$; $\sin x=-0,96$; $\operatorname{tg} x=-3\frac{3}{7}$; $\operatorname{ctg} x=-7/24$. **19.** 1) $2\pi k$, $\pm\frac{2}{3}\pi+4\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 2) $\pi+2\pi k$, $-\frac{\pi}{3}+4\pi k$, $-\frac{5}{3}\pi+4\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 3) πk, $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $-\frac{5}{6}\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 5) πk, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 7) $-\frac{7}{6}\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 9) $-\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **20.** 1) $\sin x=24/25$, $\cos x=7/25$. **21.** 1) $\frac{1}{2}$ при $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 3) 2 при $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **24.** 1) $\sin x=\sqrt{10}/10$, $\cos x=3\sqrt{10}/10$, $\operatorname{tg} x=\frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg} x=3$. 3) $\sin x=-\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{34}}$, $\cos x=\sqrt{\frac{17+\sqrt{17}}{34}}$, $\operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{18-2\sqrt{17}}}{4}$, $\operatorname{ctg} x=-\frac{\sqrt{18+2\sqrt{17}}}{4}$. **26.** 1) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{8}\cos 4\alpha$. 3) $\frac{3}{2}-2\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 4\alpha$. **29.** 1) $\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbb{Z}$. 3) πk, $k\in\mathbb{Z}$. 5) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}k$, $k\in\mathbb{Z}$. **32.** 1) $\frac{\pi}{4}k$, $k\in\mathbb{Z}$. 2) $\frac{\pi}{2}k$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$, $k\in\mathbb{Z}$. **34.** 1) 0,3948. 2) $-2,8577$. **35.** $x=2\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}-1\right)$, $y=2\cos(2t-1)$. **36.** 1) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\pi\right)$. **37.** 1) $3\cos(2t+0,8\pi)$. 2) $4\cos(0,5t+1,8\pi)$. 3) $6\cos(3t+0,8\pi)$. 4) $2\cos 4t$. 5) $\frac{1}{2}\cos(0,6t+1,5\pi)$. 6) $\cos 3t$. **42.** 1) $\arcsin 0,4+360^\circ k$, $180^\circ-\arcsin 0,4+360^\circ k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\arcsin 0,4+$

$+2\pi k$, $\pi-\arcsin 0,4+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x\approx 23^\circ 35'$, $x\approx 156^\circ 25'$; $x\approx 0,4115$, $x\approx 2,730$. **47.** 1) $\operatorname{arctg} 2,5+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x\approx 1,2$ на $[0;\ \pi)$. 2) $-\operatorname{arctg} 4+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x\approx 1,8$ на $[0;\ \pi)$. 3) $-2\operatorname{arctg} 0,5+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x\approx 5,4$ на $[0;\ 2\pi)$. 4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2+\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x\approx 0,55$ на $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. 5) $x=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-2+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x\approx 1,7$ на $[0;\ \pi)$. 6) $-\operatorname{arctg} 1,5+1+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x\approx 0,017$ на $[0;\ \pi)$. 7) $\frac{\pi}{9}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{\pi}{3}k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x\approx 0,04$ на $\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right)$. 8) $\frac{\pi}{2}+3\operatorname{arctg} 0,75+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x\approx 3,5$ на $[0;\ 3\pi)$. **52.** 1) На $[0;\ 2\pi)$ $x_1=\pi/3$, $x_2=\pi$, $x_3=5\pi/3$. 3) На $(-\pi/2;\ \pi/2)$ $x_1=-\pi/4$, $x_2=-\operatorname{arctg} 0,5$. 8) На $[0;\ \pi)$ $x_1=\frac{\pi}{8}$, $x_2=\frac{3}{8}\pi$, $x_3=\frac{5}{8}\pi$, $x_4=\frac{7}{8}\pi$, $x_5=0$. $x_6=\frac{\pi}{3}$, $x_7=\frac{2}{3}\pi$. 10) На $[0;\ 4\pi)$ $x_1=\pi$, $x_2=2\pi$. 12) На $[0;\ 2\pi)$ $x=\frac{1}{8}\varphi+\frac{\pi}{4}k$, $k=0, 1, \ldots, 7$, $x=\frac{1}{6}\varphi+\frac{\pi}{3}k$, $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$, где $\varphi=\arccos 0,6$. 15) На $(0;\ \pi)$ $x=\frac{\pi}{4}$. **54.** 1) $\frac{\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{3}{4}\pi+2\pi k$, $\pi+2\pi k<x<\frac{5}{4}\pi+2\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+2\pi k<x<2\pi k$. **55.** 3) Возрастает на $\left(2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ и на $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right)$, убывает на $\left(-\pi+2\pi k;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ и на $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ 2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **58.** $y_{\max}$ при $x=\frac{3}{2}\pi$.

Глава 6.

В упражнениях 1, 2, 3 ответ проверить дифференцированием.

4. 1) $x(t)=\frac{1}{4}t^2-2t+x_0$. 2) $x(t)=-t^2+4t+x_0$.

В упражнениях 5, 6, 7, 8, 9, 10 ответ проверить дифференцированием.

11. 1) $10\frac{2}{3}$. 2) $13\frac{1}{3}$. 3) $\ln 6$. 4) $\ln 5$. 5) $2\frac{2}{3}$. 6) 1.

12. 5) $\ln 2-\frac{1}{2}$. 6) $\sqrt{2}-1$. **14.** 8) 5. 9) π. 11) 1.

12) $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+0,5\ln 1,5$. 13) $\frac{1}{5}e^{\pi}-\frac{2}{5}$. **31.** 2) $69,6\pi$. 3) $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$. **33.** $\frac{8}{3}\pi$. **35.** 48. **41.** $2\pi rh$. **42.** $\frac{\pi}{9}((1-a^4)^{3/2}-1)$. **44.** 3π. 52. $x''(t)=\frac{1}{m}\cos t$; $x(t)=-\frac{1}{m}\cos t+c_1t+c_2$, c_1 и c_2 — const. **59.** 1) 20. 2) 116. **60.** $\pi\left(r^2(b-a)-\frac{1}{3}(b^3-a^3)\right)$ при $b>a$. **61.** $\pi\rho g\frac{125}{108}R^4$, ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения. **63.** $\frac{1}{2}\rho g d h^2$, ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения.

64. $\dfrac{\gamma m M}{c\,(c+l)}$, γ—гравитационная постоянная. **65.** $M\omega^2 l^2/6$. **66.** 3) $F'(x) = 2x/\sqrt{1+x^8}$.

Глава 7.

10. 1) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. 2) $2\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$. 5) $\sqrt{29}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi = \arccos\frac{5}{\sqrt{29}}$. **12.** 1) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $1\frac{3}{4}\pi$. 2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}$. **13.** 1) $-i$. 3) $128i$. 5) 256. **15.** 1) $\cos(45° + 72°\cdot k) + i\sin(45° + 72°\cdot k)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. **16.** 1) $(x-2i)(x+2i)$. 2) $(x+2i)(x-2i)(x-2)(x+2)$. 3) $(x-2i-1)(x+2i+1)$. **18.** 1) $x_1 = 2-i$, $x_2 = 2+i$.

Дмитрий Константинович ФАДДЕЕВ
Михаил Степанович НИКУЛИН
Игорь Фомич СОКОЛОВСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Редактор *М. М. Горячая*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*. Корректор *Н. Д. Дорохова*

ИБ № 32404

Сдано в набор 03.10.86. Подписано в печать 02.03.87. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 17,64. Усл.-кр. отт. 17,85. Уч.-изд. л. 19,03. Тираж 288 000 экз. (2-й завод 150001—288000 экз.). Заказ № 3126. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» им. А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28.