В. В. Учайкин

МЕХАНИКА

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

ЗАДАЧИ С УКАЗАНИЯМИ И ОТВЕТАМИ

В. В. УЧАЙКИН

МЕХАНИКА
ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД
ЗАДАЧИ С УКАЗАНИЯМИ И ОТВЕТАМИ

ДОПУЩЕНО
УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки ВО 03.03.02 — «Физика» и 03.03.03 — «Радиофизика»

ЛАНЬ®

• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА •
• КРАСНОДАР •
2021

ББК 22.25я73
У 90

Учайкин В. В.

У 90 Механика. Основы механики сплошных сред. Задачи с указаниями и ответами: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2021. — 320 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-2803-8

Сборник задач содержит более тысячи задач и упражнений по механике материальных точек и сплошной среды. Подбор и распределение задач по главам и разделам соответствует одноименному учебнику (В. В. Учайкин. Механика. Основы механики сплошных сред. СПб.: Лань), для поддержки освоения материала которого задачник и предназначен. Наличие указаний к решению большинства задач и ответов позволяет использовать задачник не только в аудиторной, но и в самостоятельной работе.

Вкупе с упомянутым учебником задачник ориентирован на подготовку специалистов (бакалавров), обучающихся по направлениям подготовки, входящих в УГС: «Физика и астрономия», «Физико-технические науки и технологии», и другим физическим и инженерно-физическим направлениям, где предусмотрен курс механики и сплошных сред.

ББК 22.25я73

Рецензенты:

Р. Т. СИБАТОВ — доктор физико-математических наук, профессор, начальник лаборатории моделирования диффузных процессов Научно-исследовательского института им. С. П. Капицы Ульяновского государственного университета;

П. А. ВЕЛЬМИСОВ — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики Ульяновского государственного технического университета.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

Оглавление

Предисловие

Настоящий сборник является второй частью учебно-методического комплекса «Механика. Основы механики сплошных сред»[1], предназначенного для освоения теоретической физики студентами инженерно-физических специальностей университетов. Он содержит более 1000 задач, распределённых по главам и параграфам в соответствии со структурой учебника.

Все особенности учебника нашли естественное отражение и в задачнике. Главной из них является более широкий охват тем по сравнению с общепринятым. Первые пять глав соответствуют более или менее традиционному порядку изложения механики систем материальных точек, включая векторную механику, аналитическую механику и релятивистскую механику. Последние пять глав относятся к сплошной среде, включая вязкоупругие и неупругие среды. Эти два блока разделены (как и в учебнике) «буферной» главой 6 («Разрежённые газы)», в которой осуществляется непрерывный переход от классической модели упругих столкновений частиц к уравнениям, описывающим поведение непрерывной среды, применяемым к газодинамике и плазме.

Большинство задач снабжены указаниями к решению, и почти все – ответами, вынесенными в отдельные главы. Это позволит использовать задачник не только в аудиторной, но и в самостоятельной работе.

Я глубоко благодарен моим коллегам по кафедре проф. Р.Т. Сибатову, Е.В. Кожемякиной, Д.Н. Безбатько, принявшим активное участие в подготовке рукописи этой книги, и буду признателен всем, кто пожелает высказать свои замечания и поправки (это можно сделать по адресу vvuchaikin@mail.ru).

Автор

Август 2017

[1] Первая часть комплекса – учебник: В.В. Учайкин, Механика. Основы механики сплошных сред. СПб.: Лань, 2016.

Обозначения

A – работа
$\vec{A}$ – ускорение центра масс системы, ускорение начала подвижной системы координат относительно неподвижной, 3-мерный векторный потенциал
a – большая полуось эллипса, радиус круга, сферы, шара, абсолютная величина ускорения точки, масштабный фактор
a_{ij} – элементы матрицы 3-мерного ортогонального преобразования
$\vec{a}$ – ускорение материальной точки
a_n – нормальная составляющая ускорения
a_τ – тангенциальная (касательная) составляющая ускорения

$\vec{B}$ – магнитная индукция
b – малая полуось эллипса, прицельный параметр

$C_{\text{кр}}$ – крутильная жёсткость
$C_{\text{из}}$ – жёсткость балки на изгиб
$\vec{C}$ – один из интегралов движения по кеплеровой орбите
c – скорость звука, света
c_p – удельная теплоёмкость при постоянном давлении
c_V – удельная теплоёмкость при постоянном объёме
$\vec{c}$ – вектор плотности потока тепла

$\vec{D}$ – электрическая индукция.

E – модуль Юнга
$\mathcal{E}_{\text{кин}}$ – кинетическая энергия
$\mathcal{E}$ – полная энергия
$\vec{E}$ – напряженность электрического поля
e – заряд частицы
$\vec{e}_i$, $i = x, y, z$ или $1, 2, 3$ – орты декартовой (вообще – ортогональной) системы координат

$\mathcal{F}$ – производящая функция канонических преобразований
$\vec{F}$ – активная сила
$\vec{F}'$ – сила реакции связи
$\vec{F}_{\text{ин}}$ – сила инерции
$F_{\text{уп}}$ – сила упругости
$\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения

$\vec{F}_{\text{с}}$ – сила сопротивления
$\vec{F}_{\text{гр}}$ – сила тяжести (гравитационная сила)
$\vec{F}_{\text{цб}}$ – центробежная сила
$\vec{F}_{ij}$ – сила, с которой j-я точка действует на i-ю
$\vec{f}_i(q_1, ..., q_n) = 0, \quad i = 1, ..., s$ – уравнения голономных связей
$\vec{f}$ – объёмная плотность силы

G – гравитационная постоянная
g – ускорение силы тяжести
$\vec{g}$ – массовая плотность силы, напряжённость гравитационного поля

$\mathcal{H}$ – функция Гамильтона
$\vec{H}$ – напряжённость магнитного поля
h – высота цилиндра, конуса, постоянная Планка

I – момент инерции
I_i, $i = 1, 2, 3$ – главные моменты инерции
I_{ij} – тензор инерции
$I' = I_1 + ml^2$ – приведённый момент инерции тяжёлого волчка
$i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица

J – якобиан преобразования, адиабатический инвариант, каноническая переменная действия
$\vec{j}$ – вектор плотности тока массы
$\vec{j}_e$ – вектор плотности электрического тока

$\mathcal{K}$ – канонически преобразованная функция Гамильтона
K – система отсчёта
$K = Gm$ – коэффициент в выражении для гравитационного потенциала точечной массы: $\phi(r) = -K/r$, модуль всестороннего сжатия
k – коэффициент жесткости, коэффициент сжимаемости
$k_{\text{Б}}$ – постоянная Больцмана
$\vec{k}$ – волновой вектор
k_{ij} – коэффициенты в разложении потенциальной энергии в окрестности точки устойчивого равновесия: $U = (1/2)k_{ij}q_iq_j$

$\mathcal{L}$ – функция Лагранжа
$\vec{L}$ – момент импульса (кинетический момент)

l – кривая, длина кривой, длина замкнутой орбиты
$\vec{l}$ – вектор, проведенный от неподвижной точки до центра масс симметричного волчка
$d\vec{l}$ – векторный элемент кривой интегрирования

$\vec{M}$ – момент силы (вращающий момент)
m – масса (инертная и гравитационная) точки, системы, твёрдого тела
m_i – масса i-й точки системы
m_{ij} – коэффициенты в выражении для кинетической энергии, коэффициенты в разложении кинетической энергии в окрестности точки устойчивого равновесия: $T = 1/2 m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$
$m_З$ – масса Земли

N – число частиц в системе, нормальная компонента силы реакции
N_A – число Авогадро
n – число степеней свободы
$\vec{n}$ – единичный вектор, нормаль

$\mathcal{P}$ – тепловая функция единицы массы, функция состояния баротропной жидкости
P_i – обобщённые импульсы
$\vec{P}$ – импульс системы
p – давление
$\vec{p}$, $\vec{p}_i$ – импульс частицы, i-й частицы
p_i – обобщённые (канонические) импульсы

Q – потери энергии при столкновении
Q_i – обобщённые силы, канонически преобразованные координаты
q_i – обобщённые координаты
$\vec{q}$ – вектор завихренности

R – функция Рауса, радиус кривизны, радиус шара, цилиндра, универсальная газовая постоянная
$R_З$ – радиус Земли
Re – число Рейнольдса
$\vec{R}$ – радиус-вектор центра масс
r – радиальная координата в сферической, плоской полярной (иногда – цилиндрической) системе координат

$\vec{r}$, $\vec{r}_i$ – радиус-вектор точки, частицы, i-й частицы
$r_{\text{а}}$ – апогейное расстояние
$r_{\text{п}}$ – перигейное расстояние

S, s – энтропия, массовая плотность энтропии
S, dS, – поверхность, площадь элемента поверхности
$d\vec{S} = \vec{n}dS$ – вектор элемента поверхности

T – кинетическая энергия системы, частицы, абсолютная температура
t – время

U – потенциальная энергия системы, частицы
$U_{\text{эф}}$ – эффективная потенциальная энергия
U_{ij} – потенциальная энергия парного взаимодействия i и j частиц
$\vec{u}$ – скорость истечения газов, скорость молекулы

V, dV – область, объём, объём элемента области
$\vec{v}$ – скорость
$v_{\text{кр}}$ – круговая скорость
$v_{\text{пар}}$ – параболическая скорость
$v_{1\text{к}}$ – первая космическая скорость
$v_{2\text{к}}$ – вторая космическая скорость

W – вириал сил
w – каноническая угловая переменная, комплексное поле скоростей
w_{ij} – тензор завихренности

X, Y, Z или X_1, X_2, X_3 – декартовы координаты центра масс
x, y, z или x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты точки

Z – число Циолковского, атомный номер

α – коэффициент в выражении для потенциальной энергии частицы в кулоновом (ньютоновом) поле $U = -\alpha/r$
α_i – постоянный импульс, соответствующий циклической координате

$\vec{\beta} = \vec{v}/c$ – безразмерная скорость в релятивистских задачах
β_i – циклическая координата

$\Gamma_{\rm C}$ – циркуляция вектора скорости по контуру C
γ – отношение теплоёмкостей c_p/c_V, релятивистский множитель $(1-\beta^2)^{-1/2}$

δ – символ вариации при постоянном времени
δ_{ik} – дельта-символ Кронекера
$\delta(\vec{r})$ – дельта-функция Дирака

ε – эксцентриситет орбиты, внутренняя энергия единицы массы, диэлектрическая проницаемость
ε_{ij} – тензор деформаций
ε_{ijk} – тензор Леви-Чивита

Θ – угол рассеяния в системе центра масс, широтный угол (отсчитываемый от экватора)

ϑ – полярный угол в сферической системе координат, угол рассеяния в лабораторной системе координат, один из углов Эйлера

æ – теплопроводность

$\vec{\Lambda}$ – один из интегралов движения по кеплеровой орбите (вектор Лапласа)
λ – неопределённый множитель Лагранжа, коэффициент Ламэ, линейная плотность, длина волны

μ – приведённая масса, коэффициент Ламэ, магнитный момент, молярная масса
$\vec{\mu}$ – магнитный момент

ν – кинематическая вязкость

η – динамическая вязкость

ρ – объёмная плотность массы, радиальная координата в цилиндрической системе координат

ρ_e – объёмная плотность электрического заряда

σ – коэффициент Пуассона, поверхностная плотность
σ, $d\sigma$, $d\sigma/d\Omega$ – сечение рассеяния, дифференциальное сечение рассеяния
$\vec{\sigma}$ – секторная скорость

τ – период колебаний, период обращения планеты

φ – электромагнитный скалярный потенциал, угол в цилиндрической и сферической системе координат, истинная аномалия, один из углов Эйлера
ϕ – гравитационный потенциал, потенциал скоростей

χ – температуропроводность

ψ – один из углов Эйлера

$\vec{\Omega}$ – угловая скорость
$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ – элемент телесного угла
ω – частота колебаний
ω_H – ларморовская (циклотронная) частота
ω_{ij} – тензор поворота

Сокращения

ИСО – инерциальная система отсчёта
НСО – неинерциальная система отсчёта
СЦМ – система центра масс
ЛСК – лабораторная система координат
СПО – система правых осей

Часть I

ЗАДАЧИ

Глава 1

Материальная точка в заданном внешнем поле

- Эффективная потенциальная энергия в центрально-симметричном поле $U_{\text{эф}}(r) = U(r) + L^2/(2mr^2)$, L – момент импульса.
- Траектории точки в центрально-симметричном поле в полярной системе координат:

$$\varphi(r) = \varphi(r_0) + (L/m)\int\limits_{r_0}^{r} \frac{d\xi}{\xi^2 v_r(\xi)},$$

$$v_r(r) = \pm\sqrt{(2/m)[\mathcal{E} - U_{\text{эф}}(r)]}, \quad v_r(r_0) = 0, \quad r \geq r_0.$$

- Потенциальная энергия точки массой m в ньютоновском (кулоновском) поле

$$U(r) = -\alpha/r, \quad \alpha = Gmm_0.$$

- Уравнение кеплеровой орбиты в полярной системе координат с центром в фокусе

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

  Угол φ (*истинная аномалия*) отсчитывается от направления на перицентр (ближайшую к фокусу точку) орбиты.

- Параметры орбиты: $p = \frac{L^2}{m\alpha}$ – фокальный параметр орбиты;

  $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}L^2}{m\alpha^2}}$ – эксцентриситет орбиты;

  $a = \frac{\alpha}{2|\mathcal{E}|}$ – большая полуось эллипса;

  $b = \frac{L}{\sqrt{2m|\mathcal{E}|}}$ – малая полуось эллипса;

  $r_{\text{а}}$ – наибольшее удаление от фокуса (апогей, апоцентр);

  $r_{\text{п}}$ – наименьшее удаление от фокуса (перигей, перицентр).

- Время движения по эллиптической орбите, отсчитываемое от момента прохождения через перицентр,

$$t = \sqrt{\frac{p^3}{K}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}, \qquad K = Gm_0.$$

- Для замкнутой орбиты длиной λ с периодом τ:

  $\langle f\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau f(r(t))dt$ – *средневременное (среднее по периоду τ)* значение функции $f(r)$;

  $\langle f\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(r(\varphi))d\varphi$ – *среднеугловое* значение функции $f(r)$;

  $\langle f\rangle_\lambda = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\lambda} f(r(l))dl$ – *среднедуговое* значение функции $f(r)$.

- Характерные скорости:

  $v_{\text{кр}}(r) = \sqrt{K/r}$ – круговая скорость, то есть скорость движения по круговой орбите радиуса r;

  $v_{\text{пар}}(r) = \sqrt{2K/r}$ – параболическая скорость, то есть скорость, с которой точка движется по параболической траектории;

  $v_{1\text{к}} = \sqrt{K/R}$ – *первая космическая скорость*;

  $v_{2\text{к}} = \sqrt{2K/R}$ – *вторая космическая скорость*.

- Дифференциальное сечение рассеяния частиц центрально-симметричным полем в телесный угол $d\Omega$

$$d\sigma = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| d\Omega.$$

  Здесь b – прицельный параметр, связанный с углом рассеяния θ соотношением

$$\theta = \pi - 2b\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1-(b/r)^2 - U(r)/\mathcal{E}}},$$

  где r_0 – решение уравнения $1-(b/r)^2 - U(r)/\mathcal{E} = 0$.

- В ньютоновском (кулоновском) поле

$$b = \left|\frac{\alpha}{2\mathcal{E}}\right| \operatorname{ctg}(\theta/2).$$

- Для малых углов рассеяния теория возмущений даёт приближённое соотношение

$$\theta \approx (b/\mathcal{E})\int\limits_b^{\infty} \frac{dU(r)}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2-b^2}}.$$

- Связь между скоростью $\vec{v}_{\text{абс}}$ точки относительно инерциальной системы отсчёта (ИСО) и скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ относительно *неинерциальной системы отсчёта* (НСО), имеющей скорость $\vec{V}$ поступательного движения и угловую скорость $\vec{\Omega}$ вращения относительно ИСО, даётся соотношением

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{отн}}] + \vec{v}_{\text{отн}}.$$

- Соответствующая связь для ускорений имеет вид

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{A} + [\dot{\vec{\Omega}}, \vec{r}_{\text{отн}}] + [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{отн}}]] + 2[\vec{\Omega}, \vec{v}_{\text{отн}}] + \vec{a}_{\text{отн}},$$

где $\vec{A} = \dot{\vec{V}}$ – ускорение начала координат НСО относительно ИСО. Сила инерции, возникающая в НСО, $\vec{F_{\text{ин}}} = -m\vec{a}_{\text{абс}}$ включает в себя *переносную* и *Кориолисову компоненты*

$$\vec{F}_{\text{пер}} = -m\left\{\vec{A} + [\dot{\vec{\Omega}}, \vec{r}_{\text{отн}}] + \left[\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{отн}}]\right]\right\}$$

и

$$\vec{F}_{\text{Кор}} = 2m[\vec{v}_{\text{отн}}, \vec{\Omega}].$$

- *Центробежная* часть переносной компоненты $\vec{F}_{\text{цб}} = -m\left[\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{отн}}]\right]$ приводится к виду $\vec{F}_{\text{цб}} = m\Omega^2\vec{\varrho}$, где $\vec{\varrho}$ – радиус-вектор точки, перпендикулярный угловой скорости $\vec{\Omega}$ и проведенный от оси вращения.

1.1. Координаты, скорости, ускорения

1.1.1. Проанализировать движение частицы по закону $x(t) = t^3 - 3t^2 + 2t - 1$, вычислить скорость, ускорение, построить графики всех трёх функций.

1.1.2. Найти закон одномерного движения $x(t)$ по известному ускорению ($a_x = a$) и начальным условиям $x(t_0)$, $v(t_0)$:

a) $a = t;\ x(1) = 1,\ v(1) = 0;$

b) $a = \dfrac{1}{t-1};\ x(2) = 0,\ v(2) = 0;$

c) $a = -x;\ x(\pi/2) = b,\ v(\pi/2) = 0;$

d) $a = -x;\ x(0) = b\cos\beta,\ v(0) = -b\sin\beta;$

e) $a = x;\ x(0) = 0,\ v(0) = 1;$

f) $a = -25x - 6v;\ x(0) = b,\ v(0) = c;$

g) $a = -4x + 2\cos t;\ x(0) = 0,\ v(0) = 0.$

1.1.3. Точка движется со скоростью $v(x) = b\sqrt{x}/(c + \sqrt{x})$. Найти закон движения $x(t)$ и проанализировать предельные случаи больших и малых времен при начальном условии $x(0) = 0$.

1.1.4. Точка массой m выполняет такое движение вдоль оси OX с начальными условиями $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$, что усредненная по интервалу времени $(0, t)$ скорость пропорциональна её кинетической энергии $mv^2(t)/2$. Найти $v(t)$.

1.1.5. Выразить орты цилиндрической системы координат $\vec{e}_\varrho$, $\vec{e}_\varphi$ через орты декартовой $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ и вывести соотношения $\dot{\vec{e}}_\varrho = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$ и $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\varrho$.

1.1.6. Выразить проекции скорости точки v_ϱ, v_φ и v_z через цилиндрические координаты.

1.1.7. Выразить проекции ускорения точки a_ϱ, a_φ и a_z через цилиндрические координаты.

1.1.8. Выразить орты сферической системы координат через орты декартовой и доказать, что $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$.

1.1.9. Выразить проекции скорости точки v_r, v_θ, v_φ через сферические координаты.

1.1.10. Выразить проекции ускорения точки a_r, a_θ и a_φ через сферические координаты.

1.1.11. Тело движется по закону

$$\vec{r}(t) = C_1 t\cos\theta\vec{e}_x + \left[C_2 + C_1 t\sin\theta - C_3 t^2\right]\vec{e}_z,$$

где C_1, C_2, C_3 и θ – постоянные. Найти начальные значения скорости и ускорения тела.

1.1.12. Проанализировать и построить траекторию движения и годограф скорости для материальной точки, выполняющей плоское движение:

а) $x = c\cos\omega t,\ y = c\sin\omega t$;

б) $x = 2\cos t,\ y = \sin(2t)$;

в) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$;

г) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$;

д) $x = t,\ y = 1 + t^3$;

е) $x = t^2,\ y = (1 - t^2)$.

1.1.13. В условиях предыдущей задачи вычислить пройденный частицей путь за время t и построить графики.

1.1.14. Материальная точка движется в плоскости XOY по кривой $xy = c$ так, что $v_y = k$ (const). Найти скорость v_x и ускорение a_x.

1.1.15. Материальная точка движется в плоскости XOY. Найти компоненту ускорения, если известно уравнение траектории и другая компонента скорости:

а) $x + y = 1,\ v_x = \cos(kt)$;

б) $y^2 = 4bx,\ v_y = ct$;

в) $x^2 + y^2 = c^2,\ v_y = (c/2)\sin(2t)$;

г) $x^2 + y^2 = 1,\ v_x = t^2$;

д) $x^2/b^2 + y^2/c^2 = 1,\ v_y = t^2$;

е) $x + by + c = 0,\ v_x = t^2 - t$.

1.1.16. Материальная точка движется в плоскости с постоянной секторной скоростью $\sigma = \varrho^2\varphi/2$. Показать, что её ускорение определяется формулой Бине:

$$\vec{a} = -4\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)^2 \left[\frac{1}{\varrho} + \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]\vec{e}_\varrho.$$

1.1.17. В условиях предыдущей задачи положить $\varrho = p/\varphi,\ p = \mathrm{const}$ и найти ускорение.

1.1.18. Дано $v_x = kx,\ v_y = ky$. Показать, что траектория частицы является прямой, проходящей через начало координат. Найти компоненты ускорения.

1.1.19. Дано $v_x = ky,\ v_y = kx$. Найти компоненты ускорения и уравнение траектории.

1.1.20. Материальная точка движется в плоскости XOY с ускорением, параллельным OY. Показать, что оно равно $c^2 d^2y/dx^2$, где c – постоянная скорость вдоль оси OX.

1.1.21. Предложить методику (последовательность действий) определения нормальной и тангенциальной составляющих ускорения по заданным в декартовых координатах уравнениям плоского движения частицы.

1.1.22. Воспользовавшись решением предыдущей задачи, найти нормальную и тангенциальную составляющие ускорения частицы, выполняющей плоское движение по закону $x = b\cos t, \quad y = \sin t$.

1.1.23. Материальная точка движется по параболе $z = kx^2$ так, что ее ускорение параллельно оси z и по абсолютной величине равно a. Определить нормальную и тангенциальную составляющие ускорения точки как функции времени.

1.2. Силы

1.2.1. Доказать, что силовое поле $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$ потенциально при любой функции $F(x)$.

1.2.2. Доказать, что поле $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ потенциально при любой функции $F(r)$.

1.2.3. Доказать, что поле $\vec{F} = F(\varrho)\vec{e}_\varrho$ потенциально при любой функции $F(\varrho)$.

1.2.4. Потенциально ли поле $\vec{F} = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y$?

1.2.5. Потенциально ли поле $\vec{F} = \dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{e}_x - \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{e}_y$?

1.2.6. Доказать, что гравитационное поле, создаваемое произвольным распределением массы $\rho(\vec{r})$, является потенциальным.

1.2.7. Доказать, что функция $\phi(\vec{r}) = -G\displaystyle\int \frac{\rho(\vec{r}_1)dV_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$ удовлетворяет уравнению Пуассона.

1.2.8. Точка, находящаяся в центрально-симметричном поле $U(r)$, движется по окружности радиусом a. Какому условию должно удовлетворять поле $U(r)$, чтобы движение это было устойчивым, и какова частота радиальных колебаний, возникающих при слабом возмущении устойчивого вращения?

1.2.9. Точка массой m движется по спирали Архимеда, в полярной системе координат, имеющей вид $r = At$, $\varphi = Bt$. Найти действующую на неё силу (её проекции F_r, F_φ и абсолютную величину).

1.2.10. Найти центрально-симметричную силу, в поле которой материальная точка движется по гиперболической спирали $r = c/\varphi$.

1.2.11. Бесконечное пространство равномерно заполнено массой с постоянной плотностью ρ. Найти зависимость напряженности и потенциала гравитационного поля от расстояния до начала координат, полагая $\phi(0) = 0$.

1.2.12. Доказать, что найденный в предыдущей задаче потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона.

1.2.13. Найти гравитационное поле, создаваемое сферически симметричным распределением массы $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, а) используя теорему Гаусса, б) решая уравнение Пуассона.

1.2.14. Используя результат предыдущей задачи, получить частные решения для однородного шара и однородной тонкостенной сферы.

1.2.15. Используя решение для сферы, получить поле, создаваемое шаром.

1.2.16. Используя решение для шара, получить поле, создаваемое сферой.

1.2.17. Записать плотность распределения массы, создающей потенциал

$$\phi(\vec{r}) = -G \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

1.2.18. Найти такое сферически симметричное распределение массы, при котором напряжённость гравитационного поля везде одинакова по абсолютной величине.

1.2.19. Какое из тел, Земля или Солнце, и во сколько раз притягивает Луну сильнее? Отношение масс Луны и Земли $1/81$, среднее расстояние от Луны до Земли $38 \cdot 10^4$ км и от Луны до Солнца – $15 \cdot 10^7$ км (тела эти считать материальными точками).

1.2.20. Методом суперпозиции найти потенциал гравитационного поля внутри и вне однородной бесконечно тонкой сферы заданной массы радиусом a.

1.2.21. В условиях предыдущей задачи найти напряжённость гравитационного поля.

1.2.22. Методом суперпозиции найти потенциал гравитационного поля внутри и вне однородного шара заданной массы радиусом R.

1.2.23. В условиях предыдущей задачи найти напряжённость гравитационного поля.

1.2.24. Найти приближенное (с точностью до членов порядка r^{-2}) выражение для потенциала гравитационного поля на большом расстоянии от неоднородного шара радиусом R ($r >> R$) с центром в начале координат.

1.2.25. В условиях предыдущей задачи найти силу, с которой материальная точка массой m_1, находящаяся в начале координат, притягивает этот неоднородный шар (расстояние от неё до центра шара r много больше радиуса R).

1.2.26. Доказать, что напряженности гравитационных полей, создаваемых однородными с одинаковой плотностью шарами на своих поверхностях, пропорциональны радиусам шаров.

1.2.27. Найти потенциал гравитационного поля, создаваемого однородным тонким материальным кольцом радиуса a с линейной плотностью λ в плоскости его расположения.

1.2.28. Найти асимптотическое (с точностью до членов второго порядка по a/r) разложение решения предыдущей задачи при $r \to \infty$.

1.2.29. Найти потенциал гравитационного поля, создаваемый тонким однородным круговым диском массы m и радиуса a в точках, лежащих на его оси (OZ).

1.2.30. Найти напряжённость гравитационного поля в условиях предыдущей задачи.

1.2.31. Найти гравитационный потенциал, создаваемый в произвольной точке оси OX отрезком плоской материальной кривой $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, с линейной плотностью $\lambda = \lambda(x)$.

1.2.32. Найти гравитационный потенциал, создаваемый на оси OX параллельным ей однородным отрезком длиной $[-a, a]$ с линейной плотностью λ, находящимся на расстоянии d от этой оси.

1.2.33. Показать, что на больших расстояниях потенциал, полученный в предыдущей задаче, приближается к потенциалу точечной массы.

1.2.34. Найти напряжённость гравитационного поля на оси бесконечно тонкого кольца радиуса a с постоянной линейной плотностью λ.

1.2.35. Найти напряжённость гравитационного поля на оси круговой цилиндрической поверхности (тонкостенной трубы) длиной h с поверхностной плотностью массы $\sigma = \mathrm{const}$.

1.2.36. Найти потенциал гравитационного поля, создаваемого однородным телом вращения с плотностью ρ и уравнением граничной поверхности $z = z_1$, $z = z_2 > z_1$, $x^2 + y^2 = f^2(z)$, $z_1 \le z \le z_2$, в произвольной точке его оси.

1.2.37. Найти напряжённость гравитационного поля в условиях предыдущей задачи.

1.2.38. Используя результат задачи 1.2.36, найти потенциальное поле, создаваемое однородным шаром радиусом R и массой m.

1.2.39. Найти потенциал и напряжённость гравитационного поля, создаваемого сферическим однородным слоем (r_1, r_2). Получить решения тремя способами: а) применением теоремы Гаусса, б) решением уравнения Пуассона, в) применением формулы для поля, создаваемого телом вращения.

1.2.40. Пользуясь результатом задачи 1.2.36, найти потенциал гравитационного поля на оси сплошного однородного цилиндра $(z_1 = -h/2,\ z_2 = h/2)$ радиусом a.

1.2.41. Найти потенциал и напряжённость гравитационного поля, создаваемого бесконечной однородной цилиндрической поверхностью с поверхностной плотностью σ, радиусом a и осью, совпадающей с осью OZ.

1.2.42. Найти гравитационный потенциал, создаваемый верхней и нижней половинами однородного шара в верхней его точке P («полюс») и в точке Q («на экваторе»).

1.2.43. От однородного шара радиуса R и плотности ρ отпилен круговой сегмент высотой h, остальная часть шара удалена. Найти потенциал гравитационного поля сегмента в центре его основания.

1.2.44. Используя результат предыдущей задачи, найти гравитационный потенциал в геометрическом центре однородного полушара.

1.2.45. Найти гравитационный потенциал в геометрическом центре бесконечно тонкой однородной полусферы радиусом R и массой m.

1.2.46. Показать, что в условиях предыдущей задачи потенциал остается тем же самым при любом распределении массы m по полусфере (или всей сфере) указанного радиуса.

1.2.47. В условиях задачи 1.2.43 найти потенциал, создаваемый сегментом на его вершине.

1.2.48. Проверить результат предыдущей задачи на соответствие потенциалу на поверхности однородного шара.

1.2.49. Однородный шар радиуса R с центром в начале координат распилили в плоскости XOY и раздвинули оба полушария вдоль оси OZ симметричным образом так, что величина образовавшегося зазора равна $2a$. Найти напряжённость и потенциал гравитационного поля в начале координат.

1.2.50. В условиях предыдущей задачи найти потенциал при $a = 0$ и определить главный асимптотический член при $a \to \infty$.

1.2.51. Отрезок длиной a с постоянной линейной плотностью λ расположен под острым углом φ к оси OX, его левый конец находится в начале координат. Найти создаваемый им на оси OX гравитационный потенциал.

1.2.52. В условиях предыдущей задачи совершить предельные переходы $\varphi \to 0$, $\varphi \to \pi/2$.

1.2.53. Найти потенциал, создаваемый на оси OX тонким неоднородным кольцом радиуса R, лежащим в плоскости XOY с центром в начале координат. Линейная плотность зависит от x-координаты точки кривой по формуле $\lambda(x) = \lambda_0\sqrt{1-(x/R)^2}$, $|x| \le R$. Исследовать полученную зависимость, нарисовать график. Как изменится график в случае однородного кольца?

1.2.54. Разложить в ряд по полиномам Лежандра гравитационный потенциал однородного отрезка массой m и длиной $2l$, расположенного на оси OZ с центром в начале координат.

1.2.55. Для создания стационарной модели Вселенной Эйнштейну пришлось ввести гипотетические силы отталкивания, компенсирующие силы притяжения в однородной Вселенной с плотностью ρ. Сравнить ускорения, сообщаемые Земле силами притяжения и отталкивания Солнцем ($\rho = 10^{-29}$ г/см^3, расстояние между Солнцем и Землёй $R = 1.5 \cdot 10^{13}$ см).

1.2.56. Гантелеобразный спутник с двумя одинаковыми шариками массами $m/2$, соединенными невесомым жестким стержнем длиной $2l$, движется по орбите, оставаясь перпендикулярным к её плоскости. Расстояние от силового центра до центра спутника (середины стержня) r. Найти абсолютную величину силы, действующей на спутник.

1.2.57. Точка совершает одномерное движение по закону $x = \sqrt{(\mu t)^2 + a^2}$. Найти действующую на неё силу.

1.2.58. Точка массой m движется в плоскости XOY по эллипсу с полуосями a и b так, что секторная скорость относительно центра эллипса постоянна. Найти действующую на точку силу.

1.2.59. Точка массой m движется в плоскости по эллипсу с параметром p и постоянной относительно фокуса секторной скоростью σ. Найти действующую на нее силу.

1.2.60. Водородоподобный атом состоит из ядра с зарядом $Ze > 0$ и электронной оболочки («облака») с зарядом $-e$. В невозбужденном состоянии распределение заряда в ней симметрично и описывается плотностью

$$\rho_e(r) = -(e/\pi) r_0^{-3} e^{-2r/r_0}, \quad r_0 = a_0/Z,$$

где $a_0 = \hbar^2/(m_e e^2)$ – первый боровский радиус, m_e – масса электрона, $\hbar$ – постоянная Планка. Найти электростатический потенциал такого атома.

1.2.61. Найти распределение заряда, порождающее потенциал Юкавы $\varphi(r) = (A/r)\exp(-\alpha r); \;\; \alpha > 0$.

1.3. Основные теоремы о движении точки

1.3.1. Оторвавшийся от состава последний вагон движется по горизонтальному участку пути. Скорость вагона в момент отрыва была 20 м/с, тормозящая вагон сила (включённая тормозной системой) равна 0,1 веса вагона. Найти тормозной путь вагона и время до его остановки.

1.3.2. Пуля массой m пробегает канал ствола винтовки длиной L и с площадью поперечного сечения S за время t. Полагая движение пули в стволе равноускоренным, найти давление газов на пулю в момент, когда она покидает канал.

1.3.3. Тело брошено вверх с заданной начальной скоростью. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти максимальную высоту, достигаемую телом.

1.3.4. В условиях предыдущей задачи прямым интегрированием вычислить работу, совершённую силой тяжести за время движения t, сравнить её с изменением кинетической энергии за это время, проверить выполнение закона сохранения энергии.

1.3.5. Показать, что в случае, когда масса тела изменяется с течением времени, уравнение $\frac{dT}{dt} = \vec{F}\vec{v}$ заменяется уравнением

$$\frac{d(mT)}{dt} = \vec{F}\vec{p}.$$

1.3.6. На длинную движущуюся ленту конвейера с момента $t = 0$ начинает с постоянной скоростью (σ кг/с) насыпаться песок. Полагая массу ленты равной m_0 и пренебрегая потерями на трение, найти мощность $W(t)$, необходимую для обеспечения постоянной скорости движения v ленты конвейера, и скорость приращения кинетической энергии. Объяснить результат.

1.3.7. Пробная частица малой массы m, помещена на край горизонтального диска, находящегося на высоте h над полом. Коэффициент статического трения между диском и частицей μ. Диск начинает вращаться с возрастающей скоростью, и в какой-то момент частица слетает с диска и падает на пол. Найти расстояние от проекции точки отрыва на пол до точки падения частицы.

1.3.8. Астероид представляет собой однородный шар радиусом 80 км с той же плотностью, что и Земля. С его поверхности вертикально вверх произведен выстрел, скорость пули равна 150 м/с. Вернется ли пуля обратно на астероид?

1.3.9. С поверхности Солнца ($g_{\text{С}} = 28 g_{\text{З}}$) поднялся протуберанец высотой 100 000 км. Какова начальная скорость частиц, образовавших вершину протуберанца?

1.3.10. Из однородного шара массой m и радиусом R с центром в начале координат удалена часть, ограниченная цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = a^2$ и условием $z > 0$. Из точки с координатами

$x = y = 0$, $z = R$ начинает (с нулевой начальной скоростью) падать тело. Какую скорость оно будет иметь в центре шара?

1.3.11. Выразить кинетическую энергию и момент импульса точки в цилиндрической системе координат.

1.3.12. Выразить кинетическую энергию и квадрат момента импульса точки в сферической системе координат. Показать переход в плоскую полярную систему координат.

1.3.13. Вывести формулы для кинетической энергии и момента импульса точки в полярной системе координат путем непосредственного перехода от декартовых координат.

1.3.14. Показать, что для материальной точки, движущейся в центрально-симметричном поле $U = -\alpha/r$, сохраняется вектор Лапласа $\vec{\Lambda} = \left[\vec{v}, \vec{L}\right] - \alpha\vec{r}/r$. Определить положение $\vec{\Lambda}$ относительно орбиты точки и связь его величины с эксцентриситетом орбиты ε.

1.3.15. Материальная точка движется в ньютоновском поле $\phi(r) = -K/r$ с секторной скоростью σ. Доказать, что вектор

$$\vec{N} = \vec{v} - [K/(2\sigma)]\vec{e}_\varphi$$

является интегралом движения.

1.3.16. Доказать, что векторы $\vec{\sigma}$ (секторная скорость), $\vec{\Lambda}$ и $\vec{N}$ образуют правую тройку ортогональных векторов.

1.4. Одномерное движение

1.4.1. Частица выполняет одномерное движение по закону:

a) $x_1 = A_1 \sin(at + \alpha) + B_1 \cos bt)$,

b) $x_2 = A_2 \sin(at) + B_2 \cos(bt + \beta)$,

c) $x_3 = A_3 \sin(mt - \gamma) + B_3 \cos(mt - \gamma)$.

Найти уравнения движения для каждого из этих случаев. Показать, что все три закона могут быть записаны в виде

$$x = C \cos(\omega t + \delta).$$

Выразить постоянные C, ω и δ через постоянные, входящие в приведённые выше выражения.

1.4.2. Найти $v(t)$ и $x(t)$ точки, совершающей одномерное движение под действием гармонической силы $F = F_0 \sin \Omega t$ с начальными условиями $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$.

1.4.3. Найти $v(t)$ и $x(t)$ точки, совершающей одномерное движение под действием силы трения $F_{\text{тр}} = -bv$ с начальными условиями $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 > 0$.

1.4.4. Найти закон движения тела, падающего в среде с сопротивлением $F = -b|v|v$ с начальными условиями $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ (ось OX направлена вниз).

1.4.5. Точка движется вдоль оси OX под действием силы $F = at/v$ с начальной скоростью $v_0 = \sqrt{a/m}$ при $x_0 = 0$. Найти $x(t)$.

1.4.6. Точка совершает одномерное движение вдоль положительной полуоси OX под действием силы $F = m\alpha^2 x$. Найти $x(t)$ при начальных условиях

а) $x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = -\alpha x_0$;

б) $x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0$.

1.4.7. Точка движется в положительном направлении оси OX, проходя в момент $t = 0$ координату x_0 и приближаясь на бесконечности к состоянию покоя. На неё действует сила притяжения к центру координат $F = -\alpha m x^{-n}$, где $n > 1$ – целое число. Найти закон движения.

1.4.8. Точка начинает движение вдоль оси OX с начальными условиями $x(0) = x_0 > 0$ и $v(0) = 0$ и движется в поле $F = m\{-\alpha^2 x + 3\alpha^2 x^2/(2x_0)\}$. Найти закон её движения.

1.4.9. Рассматривая одномерное движение точки, показать, что нелинейная зависимость силы от ускорения противоречит постулату сложения сил.

1.4.10. Найти скорость точки, на которую действует сила

$$F = at - b \quad (a, b > 0,\ v(0) = 0).$$

1.4.11. Найти скорость точки, на которую действует сила

$$F = at^3 - bvt \quad (a, b > 0,\ v(0) = 0).$$

1.4.12. Частица совершает движение по оси OX из состояния покоя в точке $x(0) = b > 0$ под действием силы $F = -kx^n$. Найти время τ достижения частицей силового центра ($x = 0$) при $n = 1$ (а) и $n = 3$ (б).

1.5. Одномерные колебания

1.5.1. Пользуясь общей формулой для периода одномерных колебаний, найти частоту одномерного гармонического осциллятора – точки массой m в поле квазиупругой силы $F = -kx$, $k > 0$.

1.5.2. Найти закон движения одномерного гармонического осциллятора, используя общую формулу для точки в потенциальном поле. Выразить энергию осциллятора через частоту и амплитуду колебаний.

1.5.3. Определить зависимость от полной энергии $\mathcal{E}$ периода колебаний τ точки массой m в потенциальном поле $U(x) = (Ax)^{2\nu}$, $\nu > 0$.

1.5.4. Определить зависимость периода колебаний плоского математического маятника от амплитуды, не полагая последнюю малой.

1.5.5. Материальная точка совершает одномерные колебания в симметричном потенциальном поле $U(x)$ ($U(0) = 0$ и $U(x)$ монотонно возрастает по мере удаления от начала координат). Известна зависимость периода колебаний от полной энергии частицы $\tau(\mathcal{E})$. Определить $U(x)$, если а) $\tau_1 = \mathrm{const}$ и б) $\tau_2 = \sqrt{\mathcal{E}}$.

1.5.6. Найти закон движения одномерного гармонического осциллятора ($F_{\text{уп}} = -kx$) путем прямого решения дифференциального уравнения с начальными условиями $x\,(0) = x_0$, $\dot{x}\,(0) = v_0$.

1.5.7. Исследовать движение одномерного гармонического осциллятора с трением, $F_{\text{тр}} = -b\dot{x}$, $b > 0$.

1.5.8. Известно, что в установившемся режиме одномерный гармонический осциллятор с трением $F_{\text{тр}} = -b\dot{x}$ под действием вынуждающей силы $F_0 \cos \Omega t$ движется по закону $x\,(t) = A \cos{(\Omega t - \varphi)}$. Найти амплитуду колебаний A и сдвиг фазы φ. При каком значении Ω амплитуда достигнет максимума и каков при этом сдвиг фаз?

1.6. Задачи с разделяющимися переменными

1.6.1. Точка движется в плоскости так, что касательная и нормальная составляющие ускорения её постоянны. Выразить радиус кривизны траектории R через её длину s от начала движения, соответствующего моменту времени $t = 0$.

1.6.2. Точка начинает движение в плоскости XOZ из начала координат в момент $t = 0$ со скоростью $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0z}\vec{e}_z$ (v_{0x} и $v_{0z} > 0$) под действием гравитационной силы $\vec{F}_{\text{гр}} = -mg\vec{e}_z$ при наличии трения $\vec{F}_{\text{тр}} = -b\vec{v}$. Найти и проанализировать $\vec{v}\,(t)$.

1.6.3. В условиях предыдущей задачи найти и проанализировать $\vec{r}\,(t)$.

1.6.4. Исследовать движение заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле $\vec{H}$, направленном вдоль оси OZ.

1.6.5. Покоившийся в начальный момент времени электрон проходит путь x в однородном линейно возрастающем со временем электрическом поле $\vec{E} = \dot{\vec{E}}t$, $\dot{\vec{E}} = \text{const}$. Найти его кинетическую энергию.

1.6.6. Электрон с начальной скоростью $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ проходит через поперечное однородное электрическое поле $\vec{E} = E\vec{e}_y$. Найти угол отклонения θ и величину поперечного смещения y в точке с координатой x.

1.6.7. Написать уравнения для декартовых проекций скорости заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитных полях ($\vec{E} = E\vec{e}_y, \quad \vec{H} = H\vec{e}_z$).

1.6.8. Решить систему дифференциальных уравнений, полученных в предыдущей задаче, при начальном условии $\vec{v}(0) = v_{ox}\vec{e}_x + v_{oy}\vec{e}_y + v_{oz}\vec{e}_z$.

1.6.9. Используя результаты предыдущей задачи, найти закон движения заряда в скрещенных электрическом и магнитном полях $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$ при начальном условии $\vec{r}(0) = 0$. Исследовать форму траектории.

1.6.10. Вывести уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле в цилиндрической системе координат.

1.6.11. Заряженный пространственный осциллятор с собственной частотой ω_0 помещён в постоянное однородное магнитное поле, направленное вдоль оси OZ. Найти частоты колебаний в направлениях, параллельном и перпендикулярном полю.

1.6.12. Точка массой m движется в центрально-симметричном поле с потенциальной энергией $U(r) = kr^3$ $(k > 0)$. Найти кинетическую энергию и момент импульса точки при движении её по круговой орбите радиусом a.

1.6.13. В условиях предыдущей задачи найти частоту малых радиальных колебаний точки, если её движение слегка отклонилось от кругового под действием возмущения.

1.6.14. Точка движется в потенциальном поле $U(r) = -\alpha/r^\gamma$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. При каких значениях γ возможно устойчивое движение по окружности? Найти её радиус a и соответствующее значение $U_{\text{эф}}(a)$.

1.6.15. Найти радиусы окружностей, между которыми заключена траектория точки, движущейся в поле притяжения $U(r) = -\alpha/r^\gamma$, $\gamma = 1, 2, 4$, с энергией $\mathcal{E} < 0$ и моментом импульса L.

1.7. Движение в кулоновском поле

1.7.1. Выразить фокальный параметр, эксцентриситет и большую полуось кеплеровой орбиты через апогейное и перигейное расстояния.

1.7.2. Доказать соотношения

$$r_{\text{а}} = p/(1-\varepsilon), \quad r_{\text{п}} = p/(1+\varepsilon), \quad p = a(1-\varepsilon^2).$$

1.7.3. Выразить полуоси эллиптической орбиты через энергию и момент импульса движущегося по ней тела.

1.7.4. Найти период обращения тела с энергией $\mathcal{E}$ по эллиптической орбите.

1.7.5. Для точки, движущейся в центрально-симметричном поле, вывести *формулы Бине*: $v^2 = (2\sigma)^2\{(du/d\varphi)^2 + u^2\}$ и $a_r = -(2\sigma u)^2 u^2 (d^2u/d\varphi^2 + u)$, где $u = 1/r$, σ – секторная скорость.

1.7.6. Пользуясь формулами Бине, найти ускорение точки, движущейся по эллиптической орбите.

1.7.7. Показать, что вторая производная функции $I(r) = mr^2/2$ по времени отличается от кинетической энергии точки, движущейся в поле $U(r) = -\alpha/r$, на постоянную величину.

1.7.8. Показать, что переменная $J = dI/dt$ удовлетворяет уравнению $d^2J/dt^2 = -kJ/r^3$, где k – постоянная.

1.7.9. На какой высоте h летит «стационарный» (то есть движущийся в плоскости экватора и находящийся над одной и той же точкой вращающейся Земли) искусственный спутник Земли?

1.7.10. Период обращения искусственного спутника Земли 106 мин., наибольшая высота над её поверхностью – 1880 км. Вычислить наименьшую высоту.

1.7.11. Эксцентриситет орбиты малой планеты $\varepsilon = 0.826$ а.е. (астрономических единиц), а большая полуось $a = 1.08$ а.е. Найти малую полуось.

1.7.12. Планета, обращающаяся вокруг Солнца с периодом τ и большой полуосью орбиты a, имеет спутник, обращающийся вокруг неё с периодом τ_1 и большой полуосью орбиты a_1. Найти массу планеты m, если известна масса Солнца m_0.

1.7.13. Доказать, что уравнения движения точки в поле $\phi(r) = -K/r$ можно преобразовать к виду

$$\ddot{x} = -\frac{K}{\sigma}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{r}\right), \quad \ddot{y} = -\frac{K}{\sigma}\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right).$$

1.7.14. Показать, что приведённым в предыдущей задаче уравнениям удовлетворяет траектория вида $r = Ax + By + \sigma^2/K$, где A и B – постоянные.

1.7.15. Найти полуоси эллипса в задаче о трехмерном гармоническом осцилляторе с начальными условиями $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ и $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$.

1.7.16. Найти полуоси эллипса, по которому вокруг Солнца движется планета с энергией E и моментом импульса L.

1.7.17. Найти период обращения планеты в условиях предыдущей задачи.

1.7.18. Материальная точка движется в поле тяготения по эллиптической орбите. Представить время движения $t(\varphi)$ в виде степенного ряда относительно экцентриситета.

1.7.19. Найти траекторию движения и период обращения звезды в однородном шаровом звёздном скоплении с плотностью ρ.

1.7.20. Показать, что если бы всё вещество, под действием гравитации которого Солнце движется по круговой орбите радиуса r со скоростью v, было сосредоточено в центре Галактики, то его массу можно было бы найти из соотношения $m = rv^2/G$.

1.7.21. Точка движется так, что перпендикулярная радиусу-вектору $\vec{r}$ компонента скорости обратно пропорциональна его абсолютной величине. Доказать, что ускорение этой точки направлено вдоль $\vec{r}$.

1.7.22. Найти абсолютную величину скорости точки, движущейся по кеплеровой орбите, как функцию угла φ, параметра p и эксцентриситета орбиты ε.

1.7.23. В условиях предыдущей задачи найти радиальную v_r и *трансверсальную* $v_\perp$ (перпендикулярную к радиусу-вектору) компоненты скорости.

1.7.24. Используя результаты предыдущей задачи, найти круговую скорость $v_{\text{кр}}$, с которой точка в поле $\phi(r) = -K/r$ вращается по круговой орбите радиуса r, и параболическую скорость $v_{\text{пар}}(r)$ – минимальное значение скорости в этой точке для того, чтобы материальная точка могла уйти на бесконечность.

1.7.25. В условиях задачи 1.7.22 найти угол θ между радиусом-вектором и скоростью точки.

1.7.26. Космический корабль в потенциальном поле $\phi = -K/r$ стартует с круговой орбиты радиуса r_0 с постоянным по модулю радиальным ускорением $a = K/(2r_0)^2$. На каком расстоянии r_1 от притягивающего центра корабль выйдет на инфинитную (параболическую) траекторию?

1.7.27. Найти среднеугловое расстояние спутника от центра притяжения.

1.7.28. Найти средневременное расстояние спутника от центра притяжения.

1.7.29. Найти среднедуговое расстояние спутника от центра притяжения.

1.7.30. Доказать, что среднедуговое значение потенциальной энергии спутника выражается через параметр орбиты p соотношением $\langle U\rangle_\lambda = -\alpha/p$.

1.7.31. Найти средневременное значение потенциальной энергии спутника.

1.7.32. Доказать, что средневременное значение кинетической энергии спутника выражается соотношением $\langle T\rangle_\tau = \alpha/(2a)$.

1.7.33. Тело брошено с большой скоростью с поверхности Земли под углом β к горизонту. Какова должна быть его начальная скорость, чтобы оно упало на Землю в диаметрально противоположной точке? Сопротивлением воздуха и несферичностью Земли пренебречь.

1.7.34. С Северного полюса Земли запущена ракета с первой космической скоростью под углом β к горизонту. Ракета приземлилась на экваторе: чему равен угол β?

1.7.35. Космический корабль с солнечным парусом движется в поле притяжения Солнца. Пусть θ – угол между радиус-вектором корабля и нормалью к теневой поверхности паруса. При $\theta = 0$ за счёт светового давления корабль получает ускорение a_0. Какому уравнению должен удовлетворять угол $\theta = \theta(t)$, чтобы обеспечить движение корабля круговой орбите радиусом r_0?

1.7.36. Показать, что уравнение орбиты в центрально-симметричном поле

$$\vec{F} = \left(-\frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r^3}\right)\vec{e}_r$$

может быть представлено в виде

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos(k\varphi)},$$

где a, ε и k – постоянные.

1.7.37. Показать, что в случае произвольной центрально-симметричной силы имеет место соотношение

$$v^2 = \frac{2r_\text{п}^2}{r_\text{а}^2 - r_\text{п}^2}\int\limits_{r_\text{п}}^{r} F_r(r)dr + \frac{2r_\text{а}^2}{r_\text{а}^2 - r_\text{п}^2}\int_r^{r_\text{а}} F_r(r)dr.$$

Проверить справедливость этой формулы в случае кеплеровой орбиты.

1.7.38. Показать, что в случае произвольной центрально-симметричной силы имеет место уравнение

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} = C - \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\left[r^2 \int F_r(r)dr\right],$$

где C – постоянная, определяемая начальными условиями. Проверить справедливость этого уравнения в случае движения по кеплеровой орбите.

1.8. Рассеяние частиц в центрально-симметричном поле

1.8.1. Определить дифференциальные сечения $d\sigma/d\Omega$ и $d\sigma/d\theta$ упругого рассеяния материальных точек неподвижным твёрдым шариком радиусом R.

1.8.2. Определить дифференциальное сечение рассеяния полем $U = \alpha/r^2$ $(\alpha > 0)$.

1.8.3. Доказать, что в случае притягивающего кулоновского поля соотношение угол рассеяния – эксцентриситет имеет тот же вид, что и в случае отталкивающего.

1.8.4. Найти дифференциальные сечения рассеяния $d\sigma/d\Omega$ и $d\sigma/d\theta$ кулоновским полем $U = -\alpha/r$ (рассеяние Резерфорда).

1.8.5. Вычислить сечение резерфордовского рассеяния в заднюю полусферу.

1.8.6. Вычислить дифференциальные сечения резерфордовского рассеяния в малоугловом приближении методом возмущений и сравнить с точными сечениями.

1.8.7. Вычислить дифференциальное сечение рассеяния на малые углы полем $U = -\alpha/r^n$.

1.8.8 Приближённый учёт эффекта экранирования поля ядра атома его электронной оболочкой можно осуществить введением малого «угла экранирования» η в соотношение прицельный параметр – угол рассеяния: $b = \left|\dfrac{\alpha}{2\mathcal{E}}\right| \operatorname{ctg}[(\theta+\eta)/2], \quad \eta = \text{const}$. Найти в этом приближении $d\sigma/d\theta$, объяснить отличие от результата задачи 1.8.4, нарисовать графики в области малых углов.

1.8.9. Точечные частицы с энергией $\mathcal{E}$ рассеиваются на ядре конечного размера R. При каких углах θ рассеяние останется чисто резерфордовским? Найти сечение падения частиц на ядро.

1.8.10. Взаимодействия рассеиваемых шариком радиуса R точечных частиц таково, что с вероятностью $p(\varphi) = 2\sin^2(\varphi/2)$ они прилипают к его поверхности, а с вероятностью $1 - p(\varphi)$ упруго рассеиваются (φ – угол падения частицы относительно нормали к поверхности шара в точке падения). Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния.

1.8.11. В однородный поток частиц помещается круговой цилиндр так, что ось его перпендикулярна потоку. Найти плотность углового распределения рассеянных на нём частиц (рассеяние предполагается упругим).

1.8.12. В условиях предыдущей задачи заменить круговой цилиндр эллиптическим (одна из осей параллельна набегающему потоку) и повторить решение.

1.8.13. Повторить решение предыдущей задачи, дополнив её условие прилипанием частиц к поверхности цилиндра с вероятностью $p(\varphi) = 2\sin^2(\varphi/2)$.

1.9. Движение точки, ограниченное связями

1.9.1. Применив уравнения Лагранжа первого рода к описанию движения машины Атвуда (две массы, соединённые невесомой нитью, переброшенной через невесомый блок, вращающийся без трения), найти ускорения масс.

1.9.2 Найти ускорения грузов в машине Атвуда с неоднородным блоком массы m и радиусом R центр масс которого отстоит от оси вращения на расстояние d, момент инерции относительно этой оси равен I_0. Нить нерастяжима, невесома и не проскальзывает по блоку.

1.9.3. В машине Атвуда обе массы заменены двумя одинаковыми по массе обезьянами: ленивой и резвой. Ленивая висит, вцепившись в верёвку, резвая лезет вверх по ней. Какая из них достигнет блока раньше, если они в начальный момент времени находились на одинаковой высоте в состоянии покоя?

1.9.4. Материальная точка движется в однородном поле тяжести по гладкой неподвижной плоскости $z = x\mathrm{tg}\alpha$. Найти закон движения точки и силу реакции плоскости.

1.9.5. Точка может свободно скользить по кривой, заданной уравнениями $x^2 + 4y + 36(z^2 - 1) = 0$ и $x + 2y + 6(z - 1) = 0$ в однородном поле тяжести, направленном в сторону отрицательных значений z. Найти положение равновесия.

1.9.6. Материальная точка движется по гладкой неподвижной параболе $z = \sqrt{ax}$, $a = \sqrt{8}/3$ в однородном поле тяжести. Начальная скорость равна нулю, начальная высота $z_0 = 15/4$. Найти высоту, на которой точка оторвется от параболы.

1.9.7. Тяжёлая точка движется по гладкой поверхности вращения $z = f(\rho)$, $f'(\rho) > 0$ (ось OZ направлена вертикально вверх). Найти выражение для траектории проекции точки на плоскость XOY в полярных координатах r, φ при заданных $\mathcal{E}$ и $\vec{L}$.

1.9.8. В условиях предыдущей задачи найти величину начальной скорости, при которой точка будет двигаться по параллели.

1.9.9. Материальная точка движется по цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$. Найти траекторию точки и реакцию поверхности, если $\vec{r}(0) = r_0\vec{e}_x$, $\vec{v}(0) = v_{0y}\vec{e}_y + v_{0z}\vec{e}_z$.

1.9.10. Точка движется по сфере с постоянной по модулю скоростью, направление которой образует постоянный угол α с меридианами сферы. Найти время, за которое точка дойдёт от экватора до полюса сферы.

1.9.11. По круговой конической поверхности с осью OZ движется без трения точка массой m. В момент времени $t = 0$ она имеет горизонтально направленную скорость v_0 и находится на высоте z_0 от вершины конуса $z = 0$. Какой должна быть эта скорость, чтобы максимальная высота траектории точки на противоположной образующей была равна $z_{\text{м}}$?

1.9.12. В однородном поле тяжести на поверхности гладкого конуса $z^2 = x^2 + y^2/4$ с вертикальной осью находится точка, отталкивающаяся от вершины с силой, пропорциональной расстоянию до неё (коэффициент пропорциональности k). Найти положения равновесия.

1.9.13. Сферическая оболочка толщиной δ и внутренним радиусом R помещена в однородное поле тяжести. Сверху на неё поставлен однородный шар массой m и радиусом a, а по внутренней поверхности оболочки может скользить без отрыва материальная точка. Найти условие, при котором возникает третье положение равновесия и найти его расстояние от центра шара.

1.9.14. Тяжелая точка движется по горизонтальной шероховатой окружности радиуса a, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}} = -kF'\vec{e}_\varphi$, где F' – нормальная составляющая силы реакции. Найти $\vec{F}'$ как функцию проходимого пути s, если полный путь до остановки равен l.

1.9.15. Математический маятник совершает колебания в вертикальной плоскости XOY (ось OX направлена вниз). Начальные условия: $\varphi(0) = 0$ и $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$. Найти реакцию нити как функцию угла отклонения от вертикали φ. При каких ω_0 связь в виде нити будет удерживающей?

1.9.16. Доказать *теорему Клеро*: материальная точка единичной массы движется по поверхности вращения (вокруг оси OZ) в отсутствие активных сил таким образом, что $r\sin\alpha = \text{const}$, где α – угол орбиты с меридианом.

1.10. Движение в неинерциальной системе отсчёта

1.10.1. Преобразовать центробежную силу к виду $\vec{F}^{*}_{\text{цб}} = m\Omega^2\vec{\varrho}$.

1.10.2. Найти относительное движение материальной точки в горизонтальной плоскости XOY, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$.

1.10.3. Найти относительное движение материальной точки в вертикальной плоскости XOZ, вращающейся вокруг оси OZ с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$. Сила тяжести $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, начальная скорость точки (относительно вращающейся плоскости) равна нулю. Найти реакцию плоскости.

1.10.4. Точка связана с началом координат упругой силой $F = -kx$ и может двигаться вдоль оси OX без трения. Этой системе сообщается постоянное горизонтальное ускорение, направленное в сторону отрицательных значений x. Найти закон движения точки относительно движущейся оси OX.

1.10.5. Точка движется с постоянной угловой скоростью Ω по окружности радиуса R, вращающейся с такой же скоростью относительно своего диаметра, совпадающего с осью OZ. Найти абсолютную скорость точки как функцию угла θ между осью OZ и радиусом-вектором точки (центр окружности совмещен с началом координат).

1.10.6. В условиях предыдущей задачи найти ускорение как функцию угла θ.

1.10.7. Материальная точка M скользит без трения по окружности радиусом R, лежащей в горизонтальной плоскости XOY и вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$ относительно одной из своих точек, закреплённой неподвижно в начале координат. Исследовать движение точки в системе координат, связанной с окружностью.

1.10.8. В условиях предыдущей задачи найти нормальную компоненту реакции N.

1.10.9. В условия задачи 1.10.7 добавить силу отталкивания от начала координат $\vec{F} = \alpha m\overrightarrow{OM}$.

1.10.10. Вследствие быстрого вращения некоторой сферической планеты ускорение свободного падения на экваторе ($g_{\text{экв}}$) в 2 раза меньше, чем на полюсе ($g_{\text{пол}}$). Найти первую космическую скорость.

1.10.11. Начало координат лабораторной системы находится на поверхности Земли на широте Θ, ось OX направлена к югу, OY – к востоку, OZ перпендикулярна поверхности. Вблизи начала координат движется материальная точка. Записать уравнение её движения в проекциях на оси данной системы координат (с учётом вращения Земли).

1.10.12. Найти траекторию маятника Фуко. Рассмотреть два частных случая: маятник на экваторе и маятник на полюсе.

1.10.13. Камень падает в шахту глубиной h на широте Θ. Насколько он отклонится от вертикали в восточном направлении?

1.10.14. Точка подвеса маятника с периодом колебаний τ_0 приведена в состояние движения с постоянным горизонтальным ускорением a. Найти период колебаний в системе покоя точки подвеса.

ЛАНЬ®

Глава 2

Системы материальных точек

- Уравнения движения системы N материальных точек в декартовых координатах имеют вид
$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j\neq i}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i, \quad i = 1, ..., N,$$
где $\vec{F}_i$ – внешняя сила, $\vec{F}_{ij}$ – сила, действующая на i-ю точку со стороны j-й.

- Импульс системы $\vec{P} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$, момент импульса $\vec{L} = \sum\limits_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i]$, энергия $\mathcal{E} = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{m_i v_i^2}{2} + U(\vec{r_1}, ..., \vec{r}_N)$ удовлетворяют уравнениям
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \equiv \vec{F},$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{F}_i] \equiv \vec{M}$$
в случае центральных внутренних сил и
$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\vec{v}_i \equiv N$$
в случае потенциальных внутренних сил соответственно. Здесь $\vec{F}$ – главный вектор внешних сил, $\vec{M}$ – главный момент внешних сил, N – мощность внешних сил.

- **Теорема о вириале сил (Клаузиуса)**: если движение системы происходит в ограниченной области пространства и с ограниченными скоростями, то средняя (по времени) кинетическая энергия системы равна среднему по времени вириалу сил

$$\left\langle \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} \right\rangle = \left\langle -\sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{r}_i \vec{F}_i}{2} \right\rangle.$$

- **Теоремы о переносе начала координат в центр масс системы.**

  Наряду с исходной, лабораторной системой координат (ЛСК) введём систему центра масс (СЦМ), начало которой находится в центре масс, а её оси параллельны соответствующим осям лабораторной системы. Отмечая относящиеся к СЦМ величины звёздочкой, запишем теоремы о переносе начала координат:

$$\vec{P} = m\vec{V}, \quad \vec{P}^* = 0,$$

$$\vec{L} = \vec{L}^* + [\vec{R}, \vec{P}],$$

$$T = T^* + \frac{mV^2}{2},$$

  где $m = \sum_i^N m_i$ – масса системы, $\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i$ – радус-вектор центра масс в ЛСК, $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ – скорость центра масс.

  В отсутствие внешних сил энергии потенциальной системы в ЛСК и СЦМ связаны соотношением

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^* + \frac{mV^2}{2},$$

  где $\mathcal{E}^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^{*\,2}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^{N} U_{ij}(\vec{r}_{ij})$ – внутренняя энергия системы,

  $U_{ij}(\vec{r}_{ij})$ – потенциальная энергия взаимодействия пары частиц.

- Реактивное движение тела переменной массы описывается *уравнением Мещерского*

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} + \dot{m}\vec{u},$$

  где $m = m(t)$ – масса тела (ракеты с топливом), $\vec{F}$ – действующая на тело внешняя сила, $\vec{u}$ – относительная скорость истечения газов.

- В отсутствие внешних сил скорость $v_{\text{К}}$ ракеты к моменту выгорания топлива даётся *формулой Циолковского* $v_{\text{К}} = u \ln(m_0/m_{\text{К}})$, отношение $m_0/m_{\text{К}} = Z$ называют *числом Циолковского*.

- При наличии s голономных связей вида

$$f_1(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_s(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t) = 0$$

  уравнения движения системы N точек могут быть представлены в форме *уравнений Лагранжа 1-го рода*:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_i',$$

$$\vec{F}_i' = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \nabla_i f_j, \qquad i = 1, ..., N.$$

Постоянные λ_j называются *неопределёнными множителями Лагранжа*, векторы $\vec{F}_i'$ – *силами реакции.*

2.1. Теоремы о движении системы материальных точек

2.1.1. Система четырёх попарно взаимодействующих друг с другом частиц (1, 2, 3, 4), распадается на две подсистемы $A = (1, 2)$ и $B = (3, 4)$. Записать энергию взаимодействия подсистем и внутренние энергии каждой из них.

2.1.2. Доказать тождество $\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{N} U_{ij} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} U_{ij}$.

2.1.3. Доказать, что кинетическая энергия системы N точек удовлетворяет уравнениям
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_i} = \vec{F}_i, \quad i = 1, 2, ...N.$$

(выражение $\partial T / \partial \vec{v}$ означает градиент в пространстве скоростей, то есть вектор с проекциями $\partial T / \partial v_x$, $\partial T / \partial v_y$, и $\partial T / \partial v_z$).

2.1.4. Доказать соотношение $\displaystyle\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \vec{v}_i$.

2.1.5. Доказать, что разность кинетической и потенциальной энергий системы как функция декартовых координат и скоростей удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \vec{v}_i} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \vec{r}_i}.$$

2.1.6. Доказать, что сумма кинетической и потенциальной энергии системы как функция координат и импульсов удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial (T + U)}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{d\vec{p}_i}{dt}, \quad \frac{\partial (T + U)}{\partial \vec{p}_i} = \frac{d\vec{r}_i}{dt}.$$

2.1.7. Доказать, что собственный момент импульса $\vec{L}^*$ системы не зависит от выбора точки, относительно которой он определяется, если эта точка неподвижна относительно СЦМ.

2.1.8. Доказать, что главный момент приложенных к системе сил не зависит от выбора точки, относительно которой он вычисляется, если главный вектор внешних сил равен нулю.

2.1.9. Показать, что собственный момент импульса замкнутой системы двух тел можно записать в виде $\vec{L}^* = [\vec{r}, \mu\vec{v}]$, где $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ – приведенная масса, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ – относительная скорость.

2.1.10. Показать, что собственная кинетическая энергия замкнутой системы двух тел может быть записана в виде $T^* = \mu v^2/2$.

2.1.11. Показать, что вариация функционала

$$C[\{\ddot{\vec{r}}_i\}] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i/m_i\right)^2$$

на истинных ускорениях равна нулю (*принцип наименьшего принуждения Гаусса*).

2.1.12. Показать, что центр масс замкнутой системы движется равномерно и прямолинейно.

2.1.13. Показать, что момент импульса замкнутой системы точек с центральным взаимодействием постоянен.

2.1.14. Показать, что полная энергия замкнутой системы точек с центрально-симметричным взаимодействием постоянна.

2.1.15. Найти закон движения системы материальных точек, взаимодействие которых друг с другом определяется силой $\vec{F}_{ij} = -\,k m_i m_j\,(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$.

2.2. Собственные характеристики системы

2.2.1. Выразить величину $N = \sum\limits_{i,j=1}^{N} m_i m_j r_{ij}$ гравитирующей системы через её полярный момент инерции относительно центра масс.

2.2.2. Составить дифференциальное уравнение для N (из предыдущей задачи), включающее в себя массу системы, её кинетическую и потенциальную энергии.

2.2.3. Пусть $\rho(t)$ – наименьшее из расстояний между гравитирующими точками системы. Доказать, что в процессе движения этой системы выполняется неравенство $U(t) \geq -(\gamma/2)m^2/\rho(t)$.

2.2.4. Доказать, что минимальное расстояние ρ между гравитирующими точками системы с отрицательной энергией ($\mathcal{E} < 0$) всё время остаётся ограниченным сверху: $\rho(t) \leq m^2/|2\mathcal{E}|$.

2.2.5. При каком соотношении между плотностью, радиусом и температурой однородное сферическое симметричное газообразное облако начнёт сжиматься, чтобы образовать (по гипотезе Канта-Лапласа) звезду? Оценить время сжатия.

2.2.6. Доказать, что хотя бы одна из гравитирующих точек системы с положительной энергией при $t \to \infty$ удаляется от её центра масс на неограниченно большое расстояние.

2.2.7. Доказать, что полярный момент инерции системы гравитирующих точек $I = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i r_i^2$ относительно центра масс удовлетворяет уравнению Лагранжа-Якоби $\ddot{I} = 2(2T + U)$.

2.2.8. В условиях предыдущей задачи доказать справедливость следующих уравнений $\ddot{I} = 2(T + \mathcal{E})$, $\quad \ddot{I} = 2(2\mathcal{E} - U)$.

2.2.9. Найти собственную гравитационную энергию однородного шара.

2.2.10. В условиях задачи 1.2.60 найти энергию взаимодействия W электронного облака с ядром.

2.2.11. Показать, что найденный в предыдущей задаче результат в точности совпадает с потенциальной энергией точечного заряда $-e$, движущегося вокруг неподвижного заряда Ze по круговой орбите радиуса a_0/Z.

2.2.12. В квантовой теории атома гелия ($Z = 2$ и два электрона) возникает интеграл

$$K = \int\!\!\int A^2 e^{-2r_1/r_0 - 2r_2/r_0} \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dV_1\, dV_2, \qquad A = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3.$$

Дать ему классическую интерпретацию и вычислить его значение.

2.2.13. Вычислить энергию взаимодействия электронного облака (a) одного атома с ядром (B) другого в молекуле водорода. Расстояние между ядрами R, распределение заряда в облаке считать невозмущённым, то есть таким же, как и в изолированном атоме водорода.

2.2.14. Найти потенциальную часть внутренней энергии молекулы водорода.

2.2.15. Сформулировать теорему о вириале потенциальных сил в случае, когда потенциальная энергия является однородной функцией координат $U(\alpha\vec{r}_1, \alpha\vec{r}_2, ..., \alpha\vec{r}_N) = \alpha^k U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N)$. Здесь $\alpha > 0$ – постоянная, k – степень однородности функции.

2.2.16. Обобщить теорему о вириале сил на систему одинаковых заряженных частиц, совершающих движение с ограниченными скоростями в ограниченной области пространства с однородным постоянным магнитным полем $\vec{H}$.

2.2.17. Сформулировать теорему о вириале сил в случае, когда $\vec{F}_i = -\nabla_i U - b\vec{v}_i$ (движение считается установившимся и не прекращается в результате действия сил трения).

2.2.18. Используя теорему о вириале сил, оценить среднюю температуру внутри Солнца.

2.2.19. Доказать, что галактика, кинетическая энергия которой превосходит абсолютную величину потенциальной, должна неограниченно расширяться.

2.2.20. Система двух звёзд характеризуется периодом обращения τ, максимальным расстоянием $2a$ и большими полуосями a_1 и a_2 эллиптической орбиты каждой из звёзд относительно общего центра масс: $a_1 + a_2 = a$. Найти массу каждой из звёзд.

2.2.21. Показать, что если бы всё вещество, под действием гравитации которого Солнце движется по круговой орбите радиуса R со скоростью V, было сосредоточено в центре галактики, то массу этого вещества можно было бы найти из соотношения $m = RV^2/G$.

2.2.22. Две притягивающиеся друг к другу точки – одна на оси OX, другая – на оси OY – начинают движение из состояния покоя. Показать, что независимо от закона притяжения они одновременно окажутся в начале координат.

2.2.23. Вывести уравнение движения ракеты во внешнем поле со скоростью истечения газов u (уравнение Мещерского).

2.2.24. Интегрируя уравнение Мещерского для ракеты с постоянной скоростью течения газов в отсутствие внешних сил, получить формулу Циолковского.

2.2.25. Найти закон вертикального движения ракеты в однородном поле тяжести, если $u = \mathrm{const}$, а масса ракеты убывает: а) по линейному закону $m = m_0\,(1 - \alpha t)$ $(t < 1/\alpha)$; б) по показательному закону $m = m_0 \exp{(-\alpha t)}$ $(\alpha > 0)$.

2.2.26. Ракета совершает прямолинейное движение в свободном от силовых полей пространстве. Начальная скорость ракеты равна нулю, скорость истечения газов постоянна, масса ракеты монотонно убывает. Найти максимальное значение её кинетической энергии.

2.2.27. В условиях предыдущей задачи найти максимальное значение импульса ракеты.

2.2.28. Определить максимальную высоту подъёма ракеты в однородном поле тяжести. Масса ракеты меняется по закону $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, вплоть до значения $m_{\text{к}}$ – конечной массы ракеты после выгорания топлива. Сопротивлением воздуха пренебречь, скорость истечения газов считать постоянной.

2.2.29. Ракета движется прямолинейно в свободном от силовых полей пространстве. Скорость истечения газов 2400 м/с, скорость ракеты к моменту полного выгорания топлива 3800 м/с. Определить число Циолковского для этой ракеты.

2.2.30. Какую массу газов должна ежесекундно выбрасывать ракета с начальной массой m_0, чтобы оставаться неподвижной в поле тяжести?

2.2.31. Ракета, направляющаяся к Марсу, стартует вертикально с поверхности Земли. Найти закон изменения массы ракеты на активном начальном участке траектории, где ускорение ее поддерживается постоянным ($\dot{v} = a$) при постоянной скорости истечения газов.

2.2.32. Ракета взлетает в однородном поле тяжести, испытывая аэродинамическое сопротивление F_c, зависящее от скорости ракеты v. Скорость истечения газов постоянна. Найти оптимальную зависимость массы ракеты от её скорости, обеспечивающую достижение ракетой максимальной высоты.

2.2.33. В условиях предыдущей задачи $F_c(v) = kv^2$. Найти зависимость ускорения a от скорости v для траектории с максимальной высотой.

2.3. Система двух тел

2.3.1. Однородная абсолютно твёрдая пластинка массой M укреплена на горизонтальной плоскости четырьмя пружинами с одинаковой жесткостью k. Точка массы m, падая с высоты h в центр пластинки, приводит её в состояние колебаний. Найти амплитуду и частоту колебаний пластины в случаях а) упругого соударения и б) абсолютно неупругого соударения (когда шарик прилипает к пластинке).

2.3.2. Клин массы M скользит по гладкой горизонтальной поверхности стола. По верхней наклонной поверхности клина движется без трения точка массой m. Движение происходит в вертикальной плоскости XOZ, проходящей через линию наибольшего наклона. Найти ускорение клина относительно стола A и ускорение частицы относительно клина a.

2.3.3. Клин массы M с прямоугольным основанием $a \times b$ находится на гладкой горизонтальной поверхности. Угол между наклонной плоскостью и основанием α. Сверху падает однородный поток частиц с плотностью j (см$^{-2}$с$^{-1}$). Массы частиц m и их скорости v одинаковы. Найти ускорение клина A в начальный момент, если падающие частицы упруго отскакивают от наклонной поверхности. Что будет наблюдаться с увеличением его скорости? Как предельная скорость клина будет зависеть от свойств его вертикальной стенки?

2.3.4. Частица массой m с начальной скоростью $\vec{v}_{10}$ налетает на покоившуюся в лабораторной системе частицу массой ξm и упруго рассеивается на угол ϑ. Найти угол рассеяния θ в системе центра масс, переданную энергию и отношение масс ξ, при котором возможна максимальная передача энергии.

2.3.5. Найти дифференциальное сечение рассеяния точечных частиц массой m_1, на первоначально покоящихся в лабораторной системе координат твердых шариках массой m_2.

2.3.6. В условиях предыдущей задачи вычислить дифференциальное сечение для вторичных частиц (шариков). Проверить нормировку.

2.3.7. Найти дифференциальное сечение $d\sigma/dQ$, среднее значение и средний квадрат потерянной энергии Q при рассеянии нейтральных частиц на шариках конечной массы.

2.3.8. Найти дифференциальное сечение потерь энергии $d\sigma/dQ$ для заряженных частиц, рассеиваемых точечными зарядами конечной массы.

2.3.9. Твёрдое тело движется в воздухе со скоростью, очень большой по сравнению со скоростями молекул. Доказать, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости, если столкновения молекул с телом упругие.

2.3.10. Показать, что при лобовом столкновении частиц одинаковой массы они просто обмениваются скоростями: эффект такой, как если бы они свободно проходили друг сквозь друга.

2.4. Система трёх тел

2.4.1. Записать систему уравнений движения трёх тел в декартовых координатах. Насколько можно уменьшить её порядок с помощью интегралов движения? Приведите их.

2.4.2. Понизить порядок системы уравнений для трех тел выбором начала координат в одном из них.

2.4.3. Понижение порядка системы уравнений для трех тел методом Якоби предполагает рассмотрение движения точки 2 относительно точки 1 (как в приведенной выше задаче), а затем – движения точки 3 относительно центра масс системы $1 + 2$. Вывести уравнение движения точки 3.

2.4.4. Выразить кинетическую энергию системы трех тел через разности их скоростей.

2.4.5. Три гравитирующих материальных точки движутся в неподвижной плоскости, оставаясь в покое относительно вращающейся системы координат (такое движение называется *равновесным*). Показать, что при равновесном движении центр масс неподвижен и находится в начале координат.

2.4.6. Показать, что равновесное движение трёх точек возможно лишь в двух случаях: все точки находятся на прямой или в вершинах равностороннего треугольника.

2.4.7. Три одинаковые точки, образующие равносторонний треугольник, находятся в состоянии равновесного движения. Введя в плоскости движения комплексные переменные $Z_j = x_j + iy_j = c_j w(t)$, $c_j = \text{const}$, вывести уравнение для комплексной функции времени $w(t)$, характеризующей размеры вращающегося треугольника.

2.4.8. Записать уравнения движения системы трёх тел в переменных $\vec{s}_1 = \vec{x}_2 - \vec{x}_3$, $\vec{s}_2 = \vec{x}_3 - \vec{x}_1$, $\vec{s}_3 = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, расположенных как показано на рисунке 2.1 (крестиком отмечен центр масс).

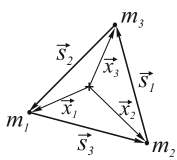

Рис. 2.1. К задаче 2.4.8.

2.4.9. В обозначениях предыдущей задачи рассмотреть случай, когда все три тела расположены на одной прямой. Показать, что если тело 2 занимает промежуточное положение между 1 и 3, то вектор $\vec{s}_3$ удовлетворяет такому же уравнению, что и вектор относительного положения в задаче двух тел.

Глава 3

Абсолютно твёрдое тело

- Скорость центра масс твёрдого тела $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$.

- Ускорение центра масс $\vec{A} = \dot{\vec{V}}$.

- Угловая скорость вращения $\vec{\Omega}$, её проекции на неподвижные оси Ω_x, Ω_y, Ω_z, на связанные с твердым телом (главные) оси Ω_1, Ω_2, Ω_3.

- Радиус-вектор точки твердого тела в связанной с телом ПСК системе координат
$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$
в лабораторной системе координат (НСК)
$$\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

- Единичные векторы (орты) при повороте системы координат преобразуются по формуле
$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \mathsf{R} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_x & \vec{e}_1\vec{e}_y & \vec{e}_1\vec{e}_z \\ \vec{e}_2\vec{e}_x & \vec{e}_2\vec{e}_y & \vec{e}_2\vec{e}_z \\ \vec{e}_3\vec{e}_x & \vec{e}_3\vec{e}_y & \vec{e}_3\vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix},$$
где R – матрица поворота. В частности, при повороте вокруг общей оси $Ox = O1$ на угол φ_x
$$\mathsf{R}_x(\varphi_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_x & \sin\varphi_x \\ 0 & -\sin\varphi_x & \cos\varphi_x \end{pmatrix},$$
при повороте вокруг общей оси $Oy = O2$ на угол φ_y
$$\mathsf{R}_y(\varphi_y) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_y & 0 & -\sin\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{pmatrix},$$

при повороте вокруг общей оси $Oz = O3$ на угол φ_z

$$\mathsf{R}_z(\varphi_z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_z & \sin\varphi_z & 0 \\ -\sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Скорость точки $\vec{x}$ твёрдого тела $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{x}]$ (*формула Эйлера*).

- Ускорение точки $\vec{x}$ твёрдого тела $\vec{a}(\vec{x}) = \vec{A} + [\dot{\vec{\Omega}}, \vec{x}] + [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{x}]]$ (*формула Ривальдса*).

- Тензор инерции $I_{ij} = \int\limits_V (r^2\delta_{ij} - x_i x_j)\rho(\vec{x})dV$.

- *Теорема Штейнера*: $I_{ij} = I'_{ij} + m(a^2\delta_{ij} - a_i a_j)$.

- Момент импульса вращающегося тела $L_i = I_{ij}\Omega_j$ (по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование).

- Кинетическая энергия вращения $T = \dfrac{1}{2} I_{ij}\dot{\Omega}_i\dot{\Omega}_j$.

- Уравнение движения вращающегося тела в СЦИ

$$\frac{d}{dt} I_{ij}\Omega_j = M_i.$$

- Уравнения движения тела в проекциях на оси СГО (*динамические уравнения Эйлера*)

$$I_1\dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 + M_1,$$
$$I_2\dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1 + M_2,$$
$$I_3\dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 + M_3.$$

- *Кинематические уравнения Эйлера*

$$\Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \qquad \Omega_x = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \qquad \Omega_y = -\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi,$$

$$\Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}, \qquad \Omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}.$$

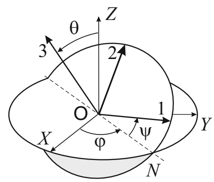

Рис. 3.1. Углы Эйлера.

Здесь φ, ψ и θ – *углы прецессии, собственного вращения и нутации* соответственно (см. рис. 3.1).

- Основная формула гироскопии: момент сил относительно неподвижной точки гироскопа

$$\vec{M} = \left\{ I_3 + (I_3 - I_1)(\dot{\varphi}/\dot{\psi}) \cos\theta \right\} \left[\vec{\Omega}_{\text{св}}, \vec{\Omega}_{\text{пр}} \right].$$

Здесь $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ и θ – постоянные, $\vec{\Omega}_{\text{св}}$ – угловая скорость собственного вращения, $\vec{\Omega}_{\text{пр}}$ – угловая скорость прецессии, $\vec{\Omega}_{\text{св}} + \vec{\Omega}_{\text{пр}} = \vec{\Omega}$.

- Уравнения движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OX_3:

$$\begin{aligned} -mX_2\ddot{\varphi} - mX_1\dot{\varphi}^2 &= F_1 + F'_{01} + F'_{h1}, \\ mX_1\ddot{\varphi} - mX_2\dot{\varphi}^2 &= F_2 + F'_{02} + F'_{h2}, \\ 0 &= F_3 + F'_{03} + F'_{h3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{13}\ddot{\varphi} - I_{23}\dot{\varphi}^2 &= M_1 - hF'_{h2}, \\ I_{23}\ddot{\varphi} + I_{13}\dot{\varphi}^2 &= M_2 + hF'_{h1}, \\ I_{33}\ddot{\varphi} &= M_3. \end{aligned}$$

Здесь X_1 и X_2 – координаты центра масс тела относительно связанной с ним системы координат, нижняя опора находится в начале координат, верхняя – на расстоянии h от неё, $F'_{01}, F'_{02}, F'_{03}$ – проекции реакции со стороны нижней опоры, $F'_{h1}, F'_{h2}, F'_{h3}$ – со стороны верхней.

- Уравнения плоского движения тела

$$m\ddot{X} = F_x, \qquad m\ddot{Y} = F_y, \qquad I_z\ddot{\varphi} = M_z.$$

3.1. Скорости и ускорения

3.1.1. На поверхности твёрдого тела помечена точка с координатами $x_0 = a, y_0 = 0, z_0 = c$. Тело поворачивается вокруг оси Oz на угол φ. Найти координаты помеченной точки после поворота, x', y', z'.

3.1.2. Твёрдое тело повёрнуто вокруг оси Oz на угол φ, а затем – вокруг нового положения оси $O2'$ на угол θ. Найти новые координаты точки, указанной в предыдущей задаче.

3.1.3. Круглый цилиндр радиусом R катится без скольжения по горизонтальной плоскости с постоянной скоростью оси v_0. Найти скорости четырёх точек цилиндра, указанных на рисунке 3.2, относительно неподвижной системы координат.

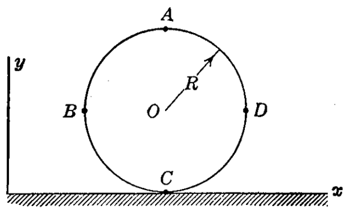

Рис. 3.2. К задаче 3.1.3.

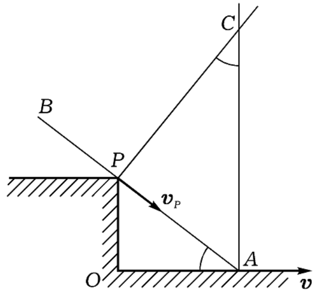

Рис. 3.3. К задаче 3.1.4.

3.1.4. Прямой тонкий стержень AB опирается в точке P на прямоугольный уступ OP высотой h, скользя своим концом A по горизонтальной поверхности (см. рис. 3.3). Скольжение начинается с вертикального положения стержня, скорость движения $\vec{v}_A$ конца A постоянна. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки стержня, находящегося в контакте с ребром уступа P в момент времени t.

3.1.5. Конец A тонкого стержня движется с постоянной тангенциальной скоростью v по полуцилиндрической выемке в плоскости рисунка 3.4. Найти скорость точки касания B как функции угла φ.

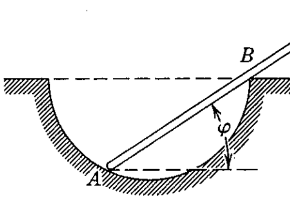

Рис. 3.4. К задаче 3.1.5.

3.1.6. Твёрдое тело выполняет плоское движение параллельно плоскости XOY. В какой-то момент времени известны (неколлинеарные) скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ двух его точек A и B. Найти величину и направление угловой скорости тела.

3.1.7. Круговой цилиндр радиусом R расположен между двумя плоскостями, движущимися с разными скоростями v_1 и v_2 (рис. 3.5). Найти скорость движения оси цилиндра в отсутствие проскальзывания.

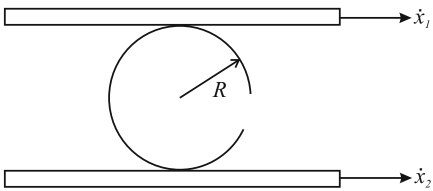

Рис. 3.5. К задаче 3.1.7.

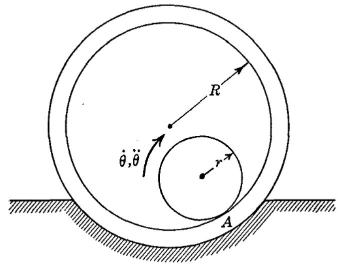

Рис. 3.6. К задаче 3.1.8.

3.1.8. По внутренней стенке неподвижного кругового цилиндра радиусом R катится без проскальзывания малый диск с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ и угловым ускорением $\ddot{\varphi}$ (рис. 3.6). Найти а) ускорение точки A диска, находящейся в контакте с поверхностью цилиндра, и б) скорость и ускорение центра C диска.

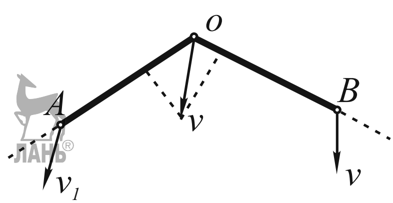

Рис. 3.7. К задаче 3.1.9.

3.1.9. Концы A и B двух шарнирно связанных и расположенных в неподвижной плоскости стержней (рис. 3.7) движутся со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ соответственно. Найти скорость $\vec{v}$ точки соединения O.

3.1.10. Найти угловое ускорение колеса, если вектор ускорения точки его внешнего обода образует угол 30° с направлением её линейной скорости через 1 секунду после начала равноускоренного движения колеса.

3.1.11. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением 3 рад/с^2. Через одну секунду после начала движения ускорение точки внешнего обода колеса $12\sqrt{10}$ см/с^2. Определить радиус колеса.

3.1.12. Центр тяжести железнодорожного вагона находится на h м выше рельсов, расстояние между которыми $2a$. Найти максимальное значение безопасной скорости движения по закруглённому участку пути радиусом R при условии, что рельсы находятся на одном уровне.

3.1.13. Участок скоростной магистрали имеет закругление радиусом r и боковой наклон к горизонту, задаваемый углом θ. Коэффициент статического трения колёс о дорожное покрытие μ. Найти максимальную скорость v безопасного (без опрокидывания) движения.

3.2. Геометрия масс

3.2.1. Показать, что тензор инерции твёрдого тела является аддитивной величиной.

3.2.2. Масса распределена равномерно по верхней $(z > 0)$ половине сферической поверхности радиуса a. Найти координаты центра масс.

3.2.3. Найти главный момент инерции тонкостенной сферы.

3.2.4. Найти главные моменты инерции тонкого твёрдого стержня.

3.2.5. Найти момент инерции однородного шара относительно оси, касательной к его поверхности.

3.2.6. Найти момент инерции кольцевого цилиндра относительно его оси.

3.2.7. Найти главные моменты инерции тонкого кольца.

3.2.8. Найти главные моменты инерции «гантели» – двух соединённых жёстким невесомым стержнем шариков массами $m/2$ и радиусами R, центры которых находятся на расстоянии $2l$ друг от друга.

3.2.9. Доказать, что отличный от нуля главный момент инерции молекулы, состоящей из двух точечных атомов массами m_1 и m_2, равен произведению квадрата расстояния между ними на приведенную массу.

3.2.10. Четыре точки массами $m, 2m$, $m, 2m$ расположены в вершинах квадрата со стороной $2a$. Заданы две системы координат с общим началом в центре квадрата и осями OX, OY в плоскости квадрата. Оси одной системы параллельны сторонам квадрата, а оси другой направлены по диагоналям. Найти тензор инерции в каждой из этих систем.

3.2.11. Пользуясь правилом преобразования тензоров, получить I' из I в условиях предыдущей задачи.

3.2.12. Пользуясь стандартной процедурой приведения тензора к главным осям, найти по известному I направления главных осей и компоненты тензора в них в условиях задачи 3.2.10.

3.2.13. Найти связь между тензором инерции в системе координат с началом в центре инерции и в системе с другим началом $\vec{a}$, но той же ориентацией осей.

3.2.14. Определить главные моменты инерции однородного кругового цилиндра, предельным переходом получить моменты инерции тонкого стержня и тонкого диска.

3.2.15. Определить главные моменты инерции однородного шара и эллипсоида.

3.2.16. Пользуясь свойством аддитивности, определить главные моменты инерции тонкостенной сферы массой m по известным моментам однородного шара.

3.2.17. Пользуясь свойством аддитивности, определить главные моменты инерции тонкостенного кругового цилиндра (без оснований) по известным моментам однородного сплошного цилиндра.

3.2.18. Найти центр масс и главные моменты инерции однородного полушара.

3.2.19. Найти главные моменты инерции однородной тонкой пластинки массой m ($|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $z = 0$).

3.2.20. Две (противоположные) четверти прямоугольной однородной пластины удалены. Показать на примере вычисления момента инерции относительно перпендикулярной пластине главной оси, что метод, основанный на использовании свойства аддитивности тензора инерции, вкупе с теоремой Штейнера приводит к тому же результату, что и непосредственные вычисления.

3.2.21. На примере вычисления момента инерции тонкой пластины относительно перпендикулярной пластине оси показать, что он (момент) минимален, когда эта ось проходит через центр симметрии.

3.2.22. Вычислить главные моменты инерции однородного прямоугольного параллелепипеда со сторонами a_1, a_2 и a_3.

3.2.23. Вычислить главные моменты инерции однородного конуса высотой h с углом раствора 2α.

3.2.24. В тонком однородном диске массой m_0 и радиуса R проделано круглое отверстие радиусом $a < R/2$, центр которого находится на расстоянии $R/2$ от оси диска. Найти моменты инерции полученной фигуры относительно главных осей исходной.

3.2.25. В однородном круговом цилиндре массой m, радиусом R и высотой H просверлено отверстие радиусом $a < R$, ось которого параллельна оси цилиндра и находится на расстоянии r от нее ($r < R - a$). Найти моменты инерции этого тела относительно главных осей исходного.

3.2.26. В однородном круговом цилиндре массой m, радиусом R и высотой H сделаны два цилиндрических отверстия, параллельные его оси. Оси отверстий находятся на расстоянии $R/2$ от оси цилиндра по обе стороны от неё, радиусы отверстий равны $R/4$. Найти главные моменты инерции полученного тела.

3.2.27. В однородном шаре с главным моментом инерции I_0 проделали 7 одинаковых сферических полостей радиусами $R/3$. Центр одной из них совпадает с центром шара, центры остальных шести находятся на трёх ортогональных диаметрах на расстоянии $2/3\ R$ от центра шара по обе стороны от него. Найти главные моменты инерции тела.

3.2.28. Доказать, что главные моменты инерции любого тела удовлетворяют неравенству треугольника

$$I_i \leq I_j + I_k, \qquad i \neq j \neq k.$$

3.3. Статика твёрдого тела

3.3.1. Тело (твёрдый параллелепипед) массой M находится на неподвижной плоскости, наклонённой под углом θ. К нему приложена горизонтальная сила Mg (см. рис. 3.8). Известен коэффициент трения покоя μ. Найти область значений θ, при которых это тело будет оставаться в покое.

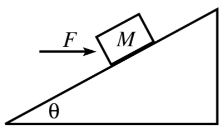

Рис. 3.8. К задаче 3.3.1.

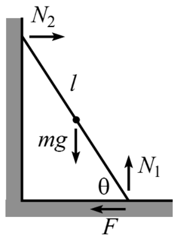

Рис. 3.9. К задаче 3.3.2.

3.3.2. Твёрдый стержень (лестница) массой m и длиной l прислонён к скользкой (без трения) стене и не падает только потому, что на нижний конец со стороны пола действует сила трения покоя с коэффициентом μ (рис. 3.9). Найти наименьшее значение угла θ, при котором стержень ещё удержится у стены.

3.3.3. Полубесконечный стержень переменной линейной плотности $\lambda(x)$ г/см^2 находится в горизонтальном положении равновесия, левый конец в точке x_0, опора в точке $x_0 + b$ (рис. 3.10). Отрежем кусок стержня $[x_0, x_0 + \delta]$ и найдём положение равновесия оставшегося стержня. Каким должно быть начальное распределение массы $\lambda(x)$, чтобы при любом δ точка равновесия оставалась на одном и том же расстоянии b от конца стержня? Примечание: несмотря на бесконечную длину, масса всего стержня предполагается конечной, $\int_{x_0}^{\infty} \lambda(x)dx < \infty$, так что $\lambda(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

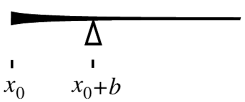

Рис. 3.10. К задаче 3.3.3.

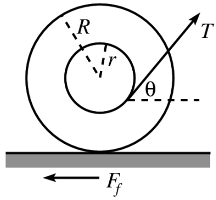

Рис. 3.11. К задаче 3.3.4.

3.3.4. На внутренний обод катушки радиусом r намотана нить, к которой приложена сила T под углом θ к горизонтали. На нижнюю точку внешнего обода радиусом R действует сила трения покоя (рис. 3.11). Найти наибольшее значение силы натяжения T, при котором катушка остаётся в покое.

3.3.5. Однородный канат длиной l с закреплёнными концами висит в однородном поле тяжести (см. рис. 3.13). Найти уравнение, описывающее связь между силой натяжения и вертикальной координатой точки каната.

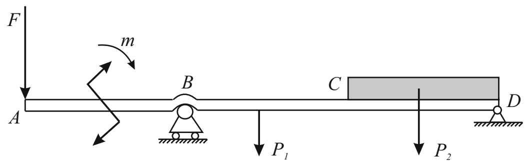

Рис. 3.12. К задаче 3.3.6.

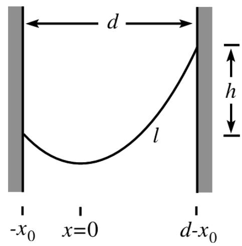

Рис. 3.13. К задаче 3.3.5.

3.3.6. Однородная балка AB весом P покоится на двух опорах B и D. Левый конец A балки не закреплён («висящий» участок AB балки называется *консолью*) и к нему приложена сила F, действующая вертикально вниз. В том же направлении действует и сила Q, равномерно распределённая по участку CD балки, а к AB приложен крутящий момент M(рис. 3.12). Расстояния AB, BC и CD одинаковы и равны d. Найти реакции опор R_D и R_B при условии, что $F = 8$ Т, $d = 2$ м, $Q = 1$ Т и $M = 6$ Тм.

3.3.7. Один конец однородной балки весом 800 Н, находящейся в горизонтальном положении, защемлён в стене, длина свободной части (консоли) $l = 2$ м. К балке приложены вертикальная сосредоточенная сила $F = 1200$ Н и пара сил с моментом $M = 1200$ Дж, как показано на рис. 3.14. Определить реакцию и момент пары в защемлённом сечении D.

3.3.8. На неподвижный цилиндр намотана верёвка, к одному из её концов подвешен груз (рис. 3). Коэффициент трения верёвки о цилиндр μ Н/рад определяется формулой Эйлера $dP = -\mu P d\alpha$. Сколько раз надо намотать верёвку на цилиндр, чтобы удержать груз силой P, приложенной к другому концу верёвки?

3.3.9. Балка AB длиной 12 м закреплена шарнирно концом A и опирается концом B на опору, установленную на катках. К балке приложены сосредоточенные силы, как показано на рис. 3.16. Их абсолютные величины 2, 3 и 1 тонны, расстояния $AC = 4$ м, $CD = 2$ м, $DE = 3$ м. Построить верёвочный многоугольник в масштабе и измерением определить реакции опор A и B.

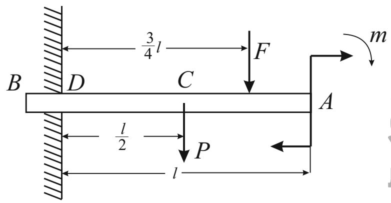

Рис. 3.14. К задаче 3.3.7.

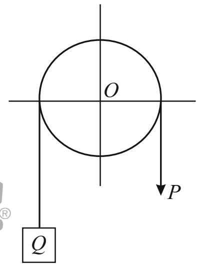

Рис. 3.15. К задаче 3.3.8.

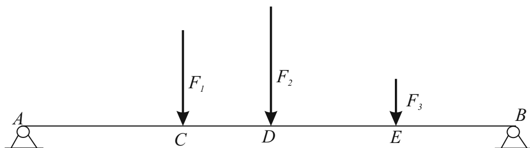

Рис. 3.16. К задаче 3.3.9.

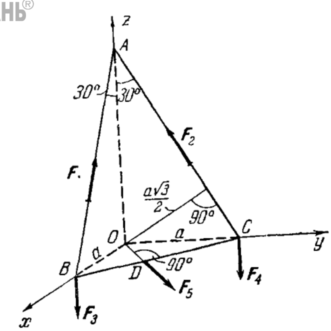

Рис. 3.17. К задаче 3.3.10.

3.3.10. На рис. 3.17 изображена пирамида, три грани которых лежат в координатных плоскостях (*тетраэдр Коши*). Рёбра $OBOC$ равны a, а AB и AC образуют с AO углы $30°$. К пирамиде приложено 5 сил, как показано на рисунке. Полагая $F_1 = F_2 = F$, найти из условий равновесия пирамиды абсолютные величины трёх остальных сил: $F_3,\ F_4,\ F_5$.

3.4. Динамика твёрдого тела

3.4.1. Выразить через компоненты тензора инерции потенциальную энергию неоднородного твёрдого тела в слабо неоднородном гравитационном поле.

3.4.2. Твердое тело равномерно вращается в космосе относительно неподвижной оси. Используя уравнения движения доказать, что эта ось – главная.

3.4.3. Два точечных заряда e_1 и e_2 с массами m_1 и m_2, соединенные невесомым жестким стержнем, движутся в постоянном однородном электрическом поле в плоскости, параллельной полю. Найти уравнение движения системы и силу реакции стержня.

3.4.4. Три заряда e, $-e$ и e с одинаковыми массами m, соединенные невесомым жестким стержнем, образуют линейную симметричную систему, движущуюся в плоскости, параллельной однородному постоянному электрическому полю. Найти уравнение движения и реакции стержня.

3.4.5. Однородный тяжелый стержень длиной L равномерно вращается вокруг шарнирно закреплённого верхнего конца, сохраняя постоянный угол α с вертикалью. Найти угловую скорость и силу реакции в точке опоры.

3.4.6. Однородный сплошной цилиндр скатывается без скольжения по наклонной плоскости. Найти ускорение центра масс и отношение кинетических энергий вращательного и поступательного движений.

3.4.7. Определить ускорение, с которым тонкостенная цилиндрическая бочка, целиком заполненная жидкостью, скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (вязкостью жидкости пренебречь).

3.4.8. Однородный шарик массой m скатывается с треугольной подставки высотой H и массой $M = (5/3)m$, скользящей без трения по горизонтальной плоскости. Найти скорость скатившегося шарика.

3.4.9. Показать, что движение центра масс однородного цилиндра радиусом a, катающегося по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиуса R, такое же, как колебания математического маятника длиной $l = (3/2)(R - a)$.

3.4.10. Неоднородный диск (центр масс его смещён на расстояние b от геометрического центра) катится без скольжения по горизонтальной поверхности, оставаясь в фиксированной вертикальной плоскости XOZ. Вывести уравнение движения для угла поворота φ.

3.4.11. Точечная масса m_0 находится в верхней точке однородного диска массой m и радиусом R, могущим вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси. В начальный момент система находится в равновесии, затем оно слегка нарушается. Найти угловую скорость вращения диска после отрыва от него массы m_0.

3.4.12. В условиях предыдущей задачи вместо точечной массы на диск помещен шарик радиуса a и массой m_0, жестко связанный с диском до момента отрыва. Найти угловую скорость вращения диска после отрыва от него шарика.

3.4.13. Цилиндрическая гайка массой m с внутренним радиусом a и внешним R, свободно (без трения) вращаясь по вертикальному винту, поднимается на некоторую высоту H, если ей сообщить начальную угловую скорость Ω в нужном направлении. Найти H, если шаг винта равен h.

3.4.14. Однородный шарик радиуса a скатывается по сферической поверхности радиуса R под действием силы тяжести из начального положения на вершине сферы без начальной скорости. Найти точку, в которой он оторвется от сферы.

3.4.15. В условиях предыдущей задачи скатывается полый тонкостенный шарик. Найти точку отрыва.

3.4.16. Однородная тонкая пластина в форме равнобедренного треугольника подвешена катетом длины a к вертикальной оси (острым углом вниз). При какой угловой скорости вращения боковое давление на нижнюю опору равно нулю?

3.5. Вращение тела вокруг неподвижной оси

3.5.1. Определить частоту малых колебаний физического маятника с заданными главными моментами инерции.

3.5.2. Неподвижный в начальный момент однородный шар, одна из точек которого заряжена, приводится в движение включением однородного электрического поля $\vec{E} = E\vec{e}_x$. Исследовать его движение (ни гравитации, ни опоры нет).

3.5.3. Найти частоту малых колебаний невесомого стержня, к концу которого жестко прикреплен своим центром однородный диск, находящийся в плоскости колебаний.

3.5.4. Найти частоту малых колебаний описанной выше системы при условии, что диск шарнирно прикреплен к стержню (может свободно вращаться вокруг своей оси).

3.5.5. Найти частоту малых колебаний однородного полушара на шероховатой поверхности в поле тяжести.

3.5.6. Найти частоту малых колебаний однородного полушара на гладкой поверхности в поле тяжести.

3.5.7. По горизонтальной шероховатой плоскости катается неоднородный цилиндр с главной осью, параллельной геометрической и находящейся на расстоянии a от нее. Найти частоту малых колебаний цилиндра и реакцию плоскости, если движение цилиндра плоскопараллельно.

3.5.8. В однородном цилиндре радиусом R сделана цилиндрическая полость радиуса $R/2$, имеющая общую образующую с его поверхностью. Определить период малых колебаний этого цилиндра на горизонтальной плоскости без скольжения.

3.5.9. Найти кинетическую энергию однородного конуса, катящегося по плоскости.

3.5.10. Найти частоту малых колебаний однородного цилиндра массой m и радиусом a, катающегося по неподвижной цилиндрической поверхности радиуса R.

3.5.11. Стержень AB массой m и длиной l подвешен невесомыми нитями к точке O и может качаться в вертикальной плоскости (рис. 3.18). Соотношение длин $AB/AO = 6/5$. Найти максимально возможный угол отклонения α, при котором обе нити остаются натянутыми.

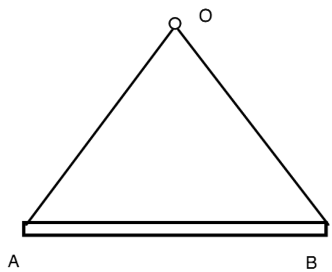

Рис. 3.18. К задаче 3.5.11.

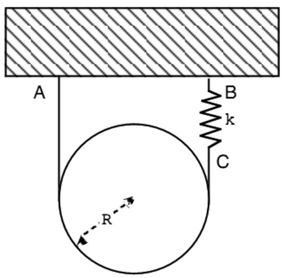

Рис. 3.19. К задаче 3.5.12.

3.5.12. Круглый однородный диск массой m и радиусом R подвешен к потолку в точках A и B нерастяжимой нитью, часть которой BC заменена пружиной жёсткостью k (рис. 3.19). Точки подвеса отстоят друг от друга на расстояние $2R$. Струна окружает диск в полтора оборота и не проскальзывает по нему. Рассчитать период малых вертикальных колебаний центра масс диска.

3.6. Вращение тела вокруг неподвижной точки

3.6.1. Выразить проекции $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ угловой скорости $\vec{\Omega}$ тела на оси подвижной жёстко связанной с телом системы координат через углы Эйлера $\theta,\ \psi,\ \varphi$.

3.6.2. Выразить проекции $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ угловой скорости $\vec{\Omega}$ тела на оси неподвижной системы координат через углы Эйлера $\theta,\ \psi,\ \varphi$.

3.6.3. Выразить связь между ортами обеих систем (НСК и ПСК) через углы Эйлера.

3.6.4. Показать, что $\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2 = \dot\varphi^2 + \dot\theta^2 + \dot\psi^2 + 2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta$.

3.6.5. Показать, что $\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 = \Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2$.

3.6.6. Вращение тела вокруг неподвижного центра задано углами Эйлера $\theta = \pi/3$, $\varphi = \pi/2 + at$, $\psi = bt$. Найти проекции угловой скорости на подвижные и неподвижные оси.

3.6.7. Выразить кинетическую энергию вращающегося вокруг неподвижной точки твердого тела через углы Эйлера φ и ψ при $\theta = 0$.

3.6.8. Из динамических уравнений Эйлера свободного вращения вывести уравнение для отдельной проекции угловой скорости Ω_2.

3.6.9. Записать уравнения Эйлера для уравновешенного свободного симметричного волчка и найти углы Эйлера как функции времени.

3.6.10. Составить уравнения движения для проекций момента импульса свободного симметричного волчка на его главные оси инерции и проинтегрировать их. Определить пределы изменения кинетической энергии при фиксированной абсолютной величине момента импульса тела.

3.6.11. Найти угловую скорость прецессии вращающегося заряженного тела в однородном магнитном поле (отношение плотности заряда к плотности массы по объёму тела постоянно).

3.6.12. Какому условию должен удовлетворять угол θ, чтобы нутации волчка в однородном поле тяжести отсутствовали?

3.6.13. Найти условие, при котором вращение неуравновешенного волчка вокруг вертикальной оси будет устойчивым.

3.6.14. Показать, что силы, обеспечивающие регулярную прецессию гироскопа, являются гироскопическими.

3.6.15. Ось гироскопа, вращающегося в вертикальной плоскости, совершает медленные колебания малой амплитуды около направления на север. Найти их частоту (угловая скорость вращения Земли – Ω_0, географическая широта – Θ).

Глава 4

Аналитическая динамика

- Независимыми *обобщенными координатами* системы с s голономными связями называются любые $n = 3N - s$ величины $q_1, ...q_n$, однозначно определяющие положение системы:

$$x_i = x_i(q_1, ..., q_n, t) \equiv x_i(q_j, t), \quad i = 1, ..., 3N.$$

Здесь x_1, x_2, x_3 обозначают декартовы координаты x, y, z первой точки системы, x_4, x_5, x_6 – декартовы координаты x, y, z второй точки и т.д. Число n называется *числом степеней свободы системы.*

- Кинетическая энергия системы выражается через q_i соотношением

$$T = \sum_{ij} \frac{m_{ij}}{2} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i a_i \dot{q}_i + b,$$

где

$$m_{ij} = \sum_k m_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j},$$

$$a_i = \sum_k m_k \frac{\partial x_k}{\partial t} \frac{\partial x_k}{\partial q_i},$$

$$b = \frac{1}{2} \sum_k m_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial t}\right)^2.$$

- *Уравнения Лагранжа 2-го рода имеют вид*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, ..., n,$$

где $Q_i = \sum_j F_j \partial x_j \,/ \partial q_i$ – *обобщенные силы.* Если F_i – потенциальные силы, $F_i = -\partial U(x_j)/\partial x_i$, то

$$Q_i = -\partial U(x_j(q_k))/\partial q_i \equiv -\frac{dU}{dq_i}.$$

- Уравнения Лагранжа 2-го рода для потенциальной системы имеет вид
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}=0, \quad i=1,...,n\ ,$$
где
$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(q_j,\dot{q}_j;t)=T-U$$
– функция Лагранжа.
- Производная $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$ называется *обобщённым импульсом*, сопряжённым с обобщённой координатой q_i. Если функция Лагранжа не зависит от какой-либо координаты q_j, последняя называется *циклической координатой*, сопряжённый с ней импульс сохраняется $p_j=\mathrm{const}$.
- *Обобщённо-потенциальными силами* называются силы, удовлетворяющие условию
$$Q_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial V}{\partial q_i},$$
где $V=V(q_j;\dot{q}_j;t)$ – *обобщённый потенциал*, линейно зависящий от скоростей. Уравнения Лагранжа при этом сохраняют тот же вид относительно функции Лагранжа
$$\mathcal{L}=T-V.$$
- В НСО функция Лагранжа точки имеет вид
$$\mathcal{L}=(m/2)\left(v^2+2\vec{v}[\vec{\Omega},\vec{r}]+[\vec{\Omega},\vec{r}]^2-2\vec{r}\vec{A}\right)-U,$$
где $\vec{\Omega}$ – угловая скорость вращения, $\vec{A}$ – ускорение начала координат НСО относительно ИСО.
- Полная энергия потенциальной системы выражается через функцию Лагранжа соотношением
$$\mathcal{E}=\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-\mathcal{L}.$$
- Интеграл
$$S=\int_{t_0}^{t}\mathcal{L}dt\equiv\int_{t_0}^{t}\mathcal{L}(q_j(t),\dot{q}_j(t),t)\,dt$$
называется *действием*.
- В случае линейных колебаний системы около положения устойчивого равновесия, выбранного за начало обобщённых координат, функция Лагранжа принимает вид
$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_{ij}[m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j-k_{ij}q_iq_j],$$
где коэффициенты m_{ij} и $k_{ij}=\partial^2U/\partial q_i\partial q_j$ вычислены в точке равновесия $(q_i=0)$.
- Задача о малых нелинейных колебаниях может быть решена асимптотически методом Крылова-Боголюбова. В первом его приближении решение уравнения нелинейных колебаний
$$\ddot{q}+\omega_0^2q=\varepsilon Q(q)$$
при $\varepsilon\to 0$ представляется в виде $q(t)=a\cos\psi(t)$, где $a=\mathrm{const}$, а фаза $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению
$$\dot{\psi}=\omega_0-\varepsilon\beta_1/(2\omega_0a),$$
$\varepsilon\beta_1=(\varepsilon/\pi)\int_0^{2\pi}Q(a\cos\psi)\cos\psi\,d\psi$.

- Функция Лагранжа для уравновешенного волчка

$$\mathcal{L} = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2.$$

- *Функция Гамильтона* системы с n степенями свободы

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t),$$

где обобщённые скорости $\dot{q}_i$ выражены через обобщённые импульсы $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_j$.

- *Канонические уравнения (уравнения Гамильтона)*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}.$$

- *Скобки Пуассона* для $f(q_i, p_i, t)$ и $g(q_i, p_i, t)$

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right).$$

- *Свойства скобок Пуассона*

  1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$
  2) $\{f, f\} = 0$
  3) $\{f, \mathrm{const}\} = 0$
  4) $\{af, bg\} = ab\{f, g\}$
  5) $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$
  6) $\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\}$
  7) $\{f\{gh\}\} = \{g\{fh\}\} - \{h\{fg\}\}$.

- При решении некоторых задач на скобки Пуассона удобно пользоваться тензором Леви-Чивита

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } \{ijk\} = \{123\} \text{ или образуется в результате} \\ & \text{четного числа перестановок этих индексов,} \\ -1, & \text{если } \{ijk\} \text{ образуется в результате} \\ & \text{нечетного числа перестановок этих индексов,} \\ 0, & \text{если хотя бы пара индексов } \{ijk\} \text{ совпадает.} \end{cases}$$

Компоненты векторного произведения выражаются через тензор Леви-Чивита легко проверяемым соотношением

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right]_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k,$$

а произведение двух тензоров выражается через определитель, составленный из δ-символов Кронекера:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}.$$

- *Каноническими* называются преобразования $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$, сохраняющие форму канонических уравнений

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i},$$

где $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Q_j, P_j, t)$ – новая функция Гамильтона.

- Для того чтобы преобразование $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$ было каноническим, необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{Q_i, P_j\} = c\delta_{ij}, \quad c = \text{const}.$$

- *Производящая функция* $\mathcal{F}$ канонического преобразования определяется соотношением

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

- Существует четыре вида производящих функций:

$$\mathcal{F}_1(q_j, Q_j, t), \ \mathcal{F}_2(q_j, P_j, t), \ \mathcal{F}_3(Q_j, P_j, t), \ \mathcal{F}_4(p_j, P_j, t),$$

различающихся между собой выбором независимых переменных в качестве аргументов.

- *Уравнение Гамильтона-Якоби*

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right).$$

- *Полный интеграл* уравнения Гамильтона-Якоби

$$S = S(q_1, ..., q_n, t; \alpha_1, ..., \alpha_n),$$

где α_i – произвольные постоянные.

- Если функция Гамильтона не зависит явно от времени (система консервативна), то

$$S(q_1, ..., q_n, t; \alpha_1, ..., \alpha_n) = S_0(q_1, ..., q_n; \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, \mathcal{E}) - \mathcal{E}t,$$

где *укороченное действие* S_0 удовлетворяет *укороченному уравнению* Гамильтона-Якоби

$$\mathcal{H}(q_1, ..., q_n; \partial S_0/\partial q_1, ..., \partial S_0/\partial q_n) = \mathcal{E}.$$

- Если, далее, функция Гамильтона не зависит от одной из координат, например, от q_n, то

$$S_0(q_1, ..., q_n; \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, \mathcal{E}) = S_1(q_1, ..., q_{n-1}; \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, \mathcal{E}) - \alpha_n q_n$$

и так далее.

- *Метод Гамильтона-Якоби* решения задачи о движении консервативной системы.

  1. Записать уравнение энергии

$$\mathcal{H}(q_1, ..., q_n; p_1, ..., p_n) = \mathcal{E}.$$

2. Заменить в нём обобщённые импульсы p_i частными производными некоторой функции S по обобщенным координатам $\partial S/\partial q_i$, получив тем самым укороченные уравнения Гамильтона-Якоби
$$\mathcal{H}(q_1, ..., q_n; \partial S/\partial q_1, ..., \partial S/\partial q_n) = \mathcal{E}.$$
3. Найти какой-нибудь полный интеграл
$$S = S_0(q_1, ..., q_n; \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, \mathcal{E})$$
с $n-1$ произвольными постоянными α_i.
4. Найти общие выражения для импульсов
$$p_i = \partial S_0/\partial q_i.$$
5. Записать уравнения для координат
$$\partial S_0/\partial \alpha_i = \beta_i, \quad i = 1, ..., n-1, \quad , \partial S_0/\partial \mathcal{E} = t + \beta_n,$$
где β_i – произвольные постоянные.
6. Разрешить полученные уравнения относительно координат
$$q_i = q_i(t; \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, \mathcal{E}, \beta_1, ..., \beta_n).$$
7. Определить постоянные α_i, $\mathcal{E}$, β_i из начальных условий $q_i(t_0) = q_{0i}$, $p_i(t_0) = p_{0i}$.

- Во многих случаях полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби может быть найден путём разделения переменных. К их числу относится случай, когда
$$\mathcal{H}(q_1, ..., q_n; p_1, ..., p_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i(q_i, p_i),$$
или более общий случай, когда
$$\mathcal{H}(q_1, ..., q_n; p_1, ..., p_n) = h(f_1(q_1, p_1), ..., f_n(q_n, p_n)).$$
В случае разделяемых переменных консервативной системы
$$S_0(q_1, ..., q_n; \alpha_1, ..., \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} S_i(q_i, \alpha_i).$$

- Пусть некоторый параметр λ, характеризующий одномерную систему, совершающую финитное движение с периодом τ, медленно ($d\lambda/\lambda << dt/\tau$) меняется. Тогда интеграл
$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq,$$
взятый по полному изменению координаты q за период τ, является *адиабатическим инвариантом* (так называются величины, не изменяющиеся при адиабатическом, то есть, медленном изменении параметра λ).

- Для замкнутой системы I зависит только от её энергии, так что вместо $S_0(q, \mathcal{E})$ можно рассматривать $S_0(q, I)$. Если произвести каноническое преобразование, выбрав в качестве нового импульса *переменную действия* I, то новая координата определяется соотношением
$$w = \partial S_0(q, I)\,/\partial I\ .$$

Она названа *угловой переменной*. При этом уравнения Гамильтона принимают вид

$$\dot{I} = 0, \qquad \dot{w} = d\mathcal{E}(I)\,/dI\ ,$$

откуда

$$w = \omega t + \text{const},$$

где $\omega = d\mathcal{E}\,/dI$ – соответствующая рассматриваемой переменной частота.

- Для сплошной среды лагранжиан $\mathcal{L}$ выражается через плотность лагранжиана $\mathcal{L}'$ интегралом

$$\mathcal{L} = \int\limits_V \mathcal{L}' dV,$$

уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,t}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,j}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi} = 0.$$

Плотность импульса

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,t}},$$

гамильтониан

$$\mathcal{H} = \int\limits_V (\pi\psi_{,t} - \mathcal{L}) dV.$$

4.1. Механическая система в обобщённых координатах

4.1.1. Пусть $q_i = q_i(q_i', t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ – взаимно однозначное преобразование обобщенных координат. Доказать соотношения

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j'} = \frac{\partial q_i}{\partial q_j'}, \qquad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_j'}\right).$$

4.1.2. Доказать инвариантность уравнений Лагранжа относительно выбора системы координат.

4.1.3. Показать, что в случае, когда

$$T = f_1(q_1)\dot{q}_1^2 + ... + f_n(q_n)\dot{q}_n^2$$

и

$$U = U_1(q_1) + ... + U_n(q_n),$$

система уравнений Лагранжа распадается на независимые уравнения.

4.1.4. Квадрат элемента длины в ортогональной криволинейной системе координат q_i, $i = 1, 2, 3$, имеет вид $dl^2 = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i^2(q_i)dq_i^2$. Выразить обобщенные силы через координаты q_i и их производные.

4.1.5. Выразить обобщенные силы через скорости и ускорения в цилиндрической системе координат.

4.1.6. Выразить обобщенные силы через скорости и ускорения в сферической системе координат.

4.1.7. Найти выражения обобщенных импульсов в цилиндрической и сферической системах координат.

4.1.8. Выразить обобщенные силы Q_i через проекции этих сил $\vec{F}$ на орты обобщенных координат в цилиндрической и сферической системах.

4.1.9. Найти силу, описываемую обобщенным потенциалом $V = -\vec{v}\vec{A}(\vec{r})$.

4.1.10. Написать функцию Лагранжа и уравнения движения сферического маятника (точки массой m, движущейся по неподвижной сфере радиусом R в однородном поле тяжести) в сферических координатах.

4.1.11. Записать функцию Лагранжа и уравнения движения в поле $U = mg\vec{r}\vec{e}_z$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

4.1.12. Записать функцию Лагранжа и уравнения движения в поле $U = kr^2/2$ (трёхмерный изотропный гармонический осциллятор) в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

4.1.13. Записать функцию Лагранжа и уравнения движения в поле $U = -\alpha/r$ в полярных координатах.

4.1.14. Частица движется в плоскости XOY, в начале координат которой находится силовой центр, притягивающий её с силой

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2\ddot{r}r}{c^2}\right)\vec{e}_r.$$

Найти функцию Лагранжа в полярных координатах.

4.1.15. Точка массой m движется по поверхности $x^2 + y^2 = z^2 \mathrm{tg}^2\alpha$ в однородном поле тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Найти функцию Лагранжа.

4.1.16. Найти явное выражение для энергии точки в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат, исходя из общей формулы

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{3} (\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i)\dot{q}_i - \mathcal{L}.$$

4.2. Уравнения Лагранжа для системы материальных точек

4.2.1. Записать функцию Лагранжа системы двух точек, соединённых невесомым стержнем и находящихся в однородном поле тяжести, в независимых переменных.

4.2.2. Составить функцию Лагранжа и вывести уравнения движения замкнутой системы двух точек с энергией взаимодействия $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ в переменных $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и

$$\vec{R} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/(m_1 + m_2).$$

4.2.3. Найти явное выражение для энергии замкнутой системы двух точек в переменных $\vec{r}$ и $\vec{R}$ предыдущей задачи.

4.2.4. Составить функцию Лагранжа для точки, подверженной действию потенциального поля, в НСО.

4.2.5. Найти явное выражение для $\mathcal{E}$ в равномерно вращающейся НСО.

4.2.6. Вывести закон преобразования энергии частицы при переходе из ИСО, где она имеет энергию $\mathcal{E}_0$ и момент импульса L_0, в равномерно вращающуюся НСО.

4.2.7. Вывести методом Лагранжа уравнения движения свободной точки в равномерно вращающейся вокруг оси OZ системе координат ξ, η, ζ.

4.2.8. Звезда движется в сфероидальной галактике, вращающейся вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$. С галактикой связана декартова система координат: начало её находится в центре галактики, ось OZ направлена вдоль $\vec{\Omega}$. Потенциал гравитационного поля внутри такой галактики даётся выражением $\phi = A(x^2 + y^2)/2 + Bz^2/2$. Вывести уравнения движения звезды.

4.2.9. Тяжелая точка движется в плоскости XOY, вращающейся вокруг горизонтальной оси OX с постоянной угловой скоростью Ω. Записать функцию Лагранжа в переменных x, y, вывести уравнения движения и решить их.

4.2.10. Бусинка массой m может без трения скользить по стержню, наклоненному под углом θ к вертикальной оси OZ и вращающемуся вокруг неё с угловой скоростью Ω в однородном поле тяжести $\vec{F}_{\text{гр}} = -mg\vec{e}_z$. Записать функцию Лагранжа $\mathcal{L}(q, \dot{q})$, где q – расстояние от бусинки до неподвижной точки стержня.

4.2.11. Написать функцию Лагранжа и уравнения движения точки по вращающейся вокруг оси OZ с угловой скоростью Ω сфере в связанной с этой сферой системе координат θ, φ.

4.2.12. Найти функцию Лагранжа и первые интегралы для заряда, движущегося в однородном магнитном поле, в цилиндрической системе координат ($\vec{H} = H\vec{e}_z$).

4.2.13. Согласно гипотезе Хаббла, однородная и изотропная Вселенная расширяется так, что вектор $\vec{r}$, соединяющий любые две её точки, изменяется по закону $\vec{r}(t) = a(t)\vec{x}$, где $\vec{x}$ постоянный (для выбранной пары точек) вектор, $a(t)$ – масштабный фактор. Вывести дифференциальное уравнение для $a(t)$ (*космологическое уравнение*).

4.2.14. Радиус-вектор движущейся относительно рассмотренного в предыдущей задаче фона частицы имеет вид $\vec{r} = \vec{a}(t)\vec{x}$, где $\vec{x}$ теперь изменяется со временем, так что абсолютная скорость частицы $\vec{u} = \dot{\vec{r}} = \dot{a}\vec{x} + \vec{v}$, а $\vec{v} = a\dot{\vec{x}}$ – её скорость относительно фона (*пекулярная скорость*). Составить функцию Лагранжа этой частицы в переменных $\vec{x}$ и $\dot{\vec{x}}$.

4.2.15. Составить уравнение для пекулярной скорости движения материальной точки в описанной выше среде.

4.3. Принцип наименьшего действия

4.3.1. Траектории свободной частицы – прямые. Прямая является кратчайшей линией, соединяющей заданные точки. В вариационной терминологии это означает, что функционал длины

$\int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}dt$ на реальных траекториях принимает наименьшее значение. Показать, что функционал действия $\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$ в этом случае также минимален.

4.3.2. Потенциальная энергия натянутой вдоль оси OX струны длиной l имеет вид

$$U = \int\limits_0^l \left[\frac{ky'^2}{2} - f(x)y\right] dx,$$

где $y' = dy/dx$, а $f(x)$ – плотность распределённой по струне силы, действующей в перпендикулярном (вдоль оси OY) направлении. Вывести уравнение, описывающее положение равновесия струны в переменных x, y.

4.3.3. В условиях предыдущей задачи найти положение равновесия струны в случае равномерно распределённой силы $f(x) = f_0$.

4.3.4. Траектория частицы пролегает в плоскости XOY через точки $(-a, -a)$ и $(-a, +a)$ в поле

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U_0, & x > 0. \end{cases}$$

Исходя из принципа наименьшего действия, найти траекторию частицы с энергией $\mathcal{E} < U_0$ $(v_{ox} > 0)$.

4.3.5. Решить предыдущую задачу при условии, что $\mathcal{E} > U_0$ и траектория частицы проходит через точки $(-a, -a)$ и (a, a).

4.3.6. В потенциальном поле $U(x) = -kx$ за время τ частица перемещается из точки $x = 0$ в точку $x = a$ по закону $x(t) = At^2 + Bt + C$. Найти постоянные A, B и C из принципа наименьшего действия.

4.3.7. Точка массой m под действием силы тяжести скатывается по кривой $z = z(x)$, лежащей в вертикальной плоскости XOZ (ось OZ направлена вверх) и проходящей через фиксированные точки A $(x = a,\ z = z_A)$ и B $(x = b,\ z = z_B)$. В начальный момент $t = 0$ она покоилась в точке A. Найти (в квадратурах) момент времени t_B прохождения её через точку B.

4.3.8. В условиях предыдущей задачи составить уравнение Эйлера-Лагранжа для такой траектории $z(x)$ точки, для которой время t_B минимально (*задача о брахистохроне*). Найти первый интеграл этого уравнения.

4.3.9. Найти общее решение предыдущей задачи.

4.3.10. Точка единичной массы движется в плоскости XOZ в однородном поле тяжести $\vec{F}_{\text{гр}} = -mg\vec{e}_z$. Вычислить действие в промежутке времени $(0,t)$ на траектории, начинающейся в начале координат и в момент времени t проходящей через точку $\vec{r} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z$.

4.3.11. Записать закон движения одномерного гармонического осциллятора в виде

$$x(t) = x_1 \cos\left[\omega(t-t_1)\right] + (v_0/\omega)\sin\left[\omega(t-t_1)\right],$$

найти действие в промежутке $(0,t)$.

4.3.12. Точка совершает движение по прямой в потенциальном поле $U = -Atx$, $A = \text{const}$. Найти действие S_{12} в промежутке (t_1, t_2).

4.4. Теория малых колебаний

4.4.1. Два одинаковых маятника связаны пружиной с жесткостью k на расстоянии a от точек подвеса, находящихся на одном уровне. В состоянии равновесия маятники висят вертикально, пружина не напряжена. Определить собственные частоты и моды малых колебаний в вертикальной плоскости, проходящей через точки подвеса.

4.4.2. Исследовать характер движения системы, описанной в предыдущей задаче, при условии, что в начальный момент времени один из маятников покоится, а другому сообщена угловая скорость $\dot{\varphi} = \Omega_0$.

4.4.3. Найти собственные частоты малых колебаний системы: шарик массой m подвешен на пружинке с жесткостью k к такому же шарику, подвешенному на такой же пружинке к неподвижной точке.

4.4.4. Шарик массой m зажат между двумя одинаковыми пружинами, прикреплёнными к неподвижным стенкам. Жесткость каждой пружины k, длина свободной пружины l, длина пружины в положении равновесия системы $a > l$ (пружины растянуты). Пренебрегая действием силы тяжести и массами пружин, найти частоты продольных и поперечных колебаний в линейном приближении.

4.4.5. В условиях предыдущей задачи пружины не растянуты, а сжаты. Очевидно, полученное в ней выражение для частоты поперечных колебаний неприменимо. Найти правильное выражение.

4.4.6. Найти собственные частоты и моды одномерных колебаний линейной трехатомной симметричной молекулы (M – масса центрального атома, m – массы крайних атомов).

4.4.7. Найти собственные частоты и моды малых колебаний двойного плоского маятника: нижняя точка массой m_2 подвешена на невесомой нити длиной l к верхней точке массой m_1, подвешенной на невесомой нити длиной l к неподвижной точке.

4.4.8. Имеется одномерная цепочка из $(N+2)$-х атомов с одинаковыми массами, соединённых последовательно одинаковыми упругими связями. Координаты крайних атомов $x_0 = 0$, и $x_{N+1} = (N+1)a$ фиксированы. Найти спектр собственных частот системы.

4.4.9. Решить аналогичную предыдущей задачу для цепочки чередующихся атомов с разными массами ($m_1 = m$, $m_2 = M$, $m_3 = m, ..., m_{2N} = M$).

4.4.10. В условиях задачи 4.4.8 найти спектр собственных частот в случае, когда правая стенка (x_{N+1}) отсутствует: на последний N-й атом действует лишь $(N-1)$-й.

4.4.11. Невесомая струна длиной $4a$ натянута силой P между двумя фиксированными точками A и B на горизонтальной поверхности. На струне закреплены точечные массы m, $(4/3)m$ и m на равных расстояниях друг от друга и от концов струны. Пусть x, y и z – поперечные смещения первой, второй и третьей масс от положения равновесия (прямой AB). Найти собственные частоты и главные моды колебаний системы.

4.4.12. Невесомая струна длиной $4a$ натянута силой P между точками AB. Посредине струны в точке C укреплена точечная масса m, другая точечная масса $2m$ укреплена в точке D, делящей отрезок CB пополам. Система совершает малые поперечные колебания в горизонтальной плоскости, проходящей через неподвижные точки A и B. Найти собственные частоты и моды колебаний.

4.4.13. Точка движется по окружности радиуса a со скоростью v под действием центральной силы $\vec{F} = -(\alpha m/r^n)\vec{e}_r$, $n < 3$. Найти движение, вызванное малой радиальной скоростью $v_r = \lambda v$, $0 < \lambda << 1$, сообщённой в момент $t = 0$, когда $\varphi(0) = 0$.

4.4.14. Подвешенная на невесомом упругом стержне длиной l точка единичной массы совершает малые колебания в плоскости XOZ. Найти собственные частоты.

4.4.15. Найти функцию Лагранжа и интегралы движения для сферического маятника в цилиндрической системе координат.

4.4.16. Прямолинейная трубка с шариком, соединённым пружиной с точкой O внутри трубки, вращается с угловой скоростью Ω в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через точку O. Вывести уравнение Лагранжа и найти частоту колебаний шарика.

4.4.17. Тяжелая точка массой m совершает малые колебания в окрестности положения устойчивого равновесия $x = 0$, $y = 0$ по поверхности $z = f(x, y)$. Найти закон её движения.

4.4.18. Найти малые колебания математического маятника в первом (по нелинейному члену) приближении метода Крылова-Боголюбова.

4.4.19. Найти колебания ангармонического осциллятора с потенциальной энергией

$$U(x) = m\omega_0^2 x^2/2 + m\beta x^4/4,$$

рассматривая второй член как малую добавку к первому.

4.4.20. Найти колебания ангармонического осциллятора с потенциальной энергией

$$U(x) = m\omega_0^2 x^2/2 + m\alpha x^3/3,$$

рассматривая второй член как малую добавку к первому.

4.5. Динамика твёрдых тел

4.5.1. Через однородный диск массой m радиусом a переброшена невесомая нить, с одной стороны связанная через пружину с неподвижной опорой, с другой стороны – со свободно висящем на ней грузом массой m. Диск может свободно вращаться вокруг своей оси. Найти функцию Лагранжа системы в переменных θ (угол поворота диска) и $\dot{\theta}$.

4.5.2. Кинетическая энергия свободно вращающегося тела в Эйлеровых угловых переменных имеет вид:

$$T = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right)^2 +$$

$$+\frac{I_2}{2}\left(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi\right)^2 + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2.$$

Найти сопряжённые этим координатам импульсы.

4.5.3. Выразить L_1, L_2 и L_3 через компоненты в НСК L_x, L_y и L_z.

4.5.4. Предполагая, что $I_1 = I_2$, $L_1 = 0$ и $\Omega_1 = 0$, найти скорости изменения Эйлеровых углов.

4.5.5. Вывести уравнения Лагранжа для Эйлеровых углов тяжёлого симметричного волчка и, исключив переменные φ и ψ, получить уравнение только для одного угла θ.

4.5.6. Цилиндр массой M и радиусом R находится на горизонтальной шероховатой поверхности. На цилиндре имеется шкив радиусом $r < R$, на который намотана нить (рис. 4.1). Нить тянут за конец с силой F. Учитывая, что скольжение возникает при условии преобладания силы трения покоя f над $\mu M g$ (μ – коэффициент трения), найти условие для силы F, обеспечивающее качение без проскальзывания.

4.5.7. Покоящийся на бильярдном столе шар массой M и радиусом R получает удар горизонтальным кием в вертикальной плоскости, проходящей через центр шара (рис. 4.2). На какой высоте r над центром шара должен находиться конец кия в момент удара, чтобы после него шар двигался а) ускоренно, б) замедленно, в) равномерно? Трением качения пренебречь.

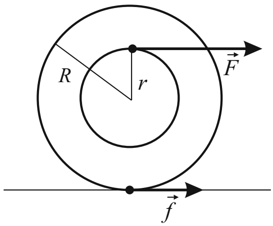

Рис. 4.1. К задаче 4.5.6.

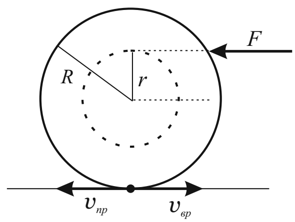

Рис. 4.2. К задаче 4.5.7.

4.5.8. Функция Лагранжа симметричного твердого тела с одной неподвижной точкой записана в виде

$$\mathcal{L} = \frac{A}{2}(\dot\theta^2 + \dot\psi^2 \sin^2\theta) + \frac{C}{2}(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) - mgl\cos\theta.$$

Вывести законы сохранения.

4.5.9. Тонкий однородный диск весом P и радиусом R насажен жёстко на невесомый стержень длиной $l = (\sqrt{2}/2)R$, один конец которого шарнирно закреплен (рис. 4.3). В начальный момент диску сообщают собственное вращение с угловой скоростью $\dot\varphi = 4\sqrt{g/R}$. Найти минимальное и максимальное значения угла нутации θ, если в начальный момент $\theta_0 = 30^\circ$, $\dot\theta_0 = 0$, $\dot\psi_0 = 0$.

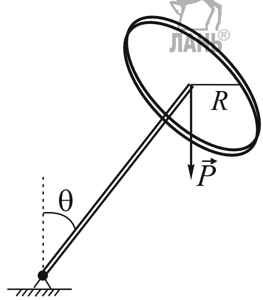

Рис. 4.3. К задаче 4.5.9.

4.5.10. Кинетическая энергия катящегося по горизонтальной поверхности ($u = mgR\sin\theta$) диска задана выражением

$$T = mR^2\left[\frac{5}{8}\dot\theta^2 + \frac{3}{4}\dot\psi^2 + \frac{1}{8}\dot\varphi^2(1 + 5\cos^2\theta) + \frac{3}{2}\dot\varphi\dot\psi\cos\theta\right].$$

Найти уравнения движения.

4.5.11. В условиях предыдущей задачи преобразовать уравнения к случаю малого отклонения от прямолинейного качения $\varphi = 0$, $\theta = \pi/2$, $\dot{\psi} = v/R$, полагая $\theta = \pi/2 + \xi$, $\dot{\psi} = v/R + \omega$.

4.5.12. Используя уравнения, полученные в предыдущей задаче, найти условие устойчивости качения диска.

4.6. Канонические уравнения

4.6.1. Вывести функцию Гамильтона и канонические уравнения для одномерного гармонического осциллятора.

4.6.2. Вывести функцию Гамильтона и канонические уравнения движения сферического маятника (см. 4.1.10).

4.6.3. Вывести функцию Гамильтона и канонические уравнения движения в однородном поле тяжести в различных системах координат (см. 4.1.11).

4.6.4. Вывести функцию Гамильтона и канонические уравнения движения трёхмерного изотропного гармонического осциллятора в различных системах координат (см. 4.1.12).

4.6.5. Вывести функцию Гамильтона и канонические уравнения движения в поле $U = -\alpha/r$ в полярных координатах (см. 4.1.13).

4.6.6. Найти функцию Гамильтона и составить уравнения Гамильтона для математического маятника длиной l, точка подвеса которого движется по вертикальной окружности радиуса R в плоскости колебаний с постоянной угловой скоростью Ω (в качестве обобщенной координаты взять угол отклонения маятника от вертикали).

4.6.7. Материальная точка движется в поле двух силовых центров, расположенных на оси OY по обе стороны от начала координат на одинаковых от него расстояниях a. Они притягивают точку силами упругости с коэффициентами k_1 и k_2 соответственно. Пользуясь уравнениями Гамильтона, найти траекторию этой точки при условии, что в начальный момент времени она находилась в точке $y_0 > a$ оси OY и имела скорость $\vec{v}_0$, параллельную оси OX.

4.6.8. Вывести функцию Гамильтона для заряда в однородном стационарном магнитном поле $\vec{H} = H\vec{e}_z$.

4.6.9. Вывести функцию Гамильтона для заряда в электромагнитном поле с потенциалами φ и $\vec{A}$.

4.6.10. Вывести функцию Гамильтона для точки в поле тяжести $\vec{F}_{\text{гр}} = -mg\vec{e}_z$ в НСО, движущейся относительно ИСО поступательно и с ускорением $\vec{A} = A_z\vec{e}_z$.

4.6.11. Найти функцию Гамильтона частицы в равномерно вращающейся НСО.

4.6.12. Найти фазовую траекторию одномерного гармонического осциллятора.

4.6.13. Доказать, что через каждую точку фазового пространства замкнутой системы проходит только одна фазовая траектория системы. Может ли фазовая траектория состоять из одной точки?

4.6.14. Частица совершает одномерное движение в потенциальном поле

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi; \\ U_0 \sin x, & -\pi < x < 3\pi; \\ U_0, & x > 3\pi. \end{cases}$$

Нарисовать фазовые траектории для энергетических уровней $\mathcal{E} = -U_0$, $-U_0 + \varepsilon$, $-U_0/2$, 0, $U_0/2$, $U_0 - \varepsilon$, U_0, $U_0 + \varepsilon$, $2U_0$ (малая постоянная ε положительна).

4.6.15. Частица единичной массы совершает одномерное движение в потенциальном поле $U(x) = \sin^2 x$. Найти время движения по участкам сепаратрисы (в одном направлении), лежащим в полосах $(-\pi/4, \pi/4)$ и $(-\pi/2, \pi/2)$ фазового пространства.

4.6.16. Пусть $\sigma(\mathcal{E})$ – площадь фигуры, образованной замкнутой фазовой траекторией частицы с энергией $\mathcal{E}$, совершающей одномерное движение. Доказать, что период движения по этой траектории $\tau(\mathcal{E})$ связан с площадью $\sigma(\mathcal{E})$ соотношением $\tau(\mathcal{E}) = d\sigma(\mathcal{E})/d\mathcal{E}$.

4.6.17. Что представляет собой фазовая поверхность уровня $\mathcal{E}$ двумерного изотропного гармонического осциллятора?

4.6.18. В условиях предыдущей задачи нарисовать проекции фазовых траекторий на конфигурационное пространство.

4.6.19. Задан двумерный анизотропный гармонический осциллятор единичной массы, $U(x,y) = (x^2 + \omega^2 y^2)/2$. Найти область конфигурационного пространства, в которой заключена орбита осциллятора с энергией $\mathcal{E}$.

4.6.20. В условиях предыдущей задачи $\omega = 2$, и при некотором сдвиге фаз пространственная траектория (фигура Лиссажу) превращается в дважды пройденную кривую. Доказать, что эта кривая представляет собой отрезок параболы.

4.6.21. Записать скобки Пуассона для материальной точки в 3-мерном евклидовом пространстве в векторной форме.

4.6.22. В условиях предыдущей задачи записать уравнение движения точки с использованием скобок Пуассона.

4.6.23. Доказать, что скобки Пуассона обладают свойствами

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\},$$
$$\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + \{f_1, g\}f_2.$$

4.6.24. Доказать, что $\dfrac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \left\{\dfrac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \dfrac{\partial g}{\partial t}\right\}$.

4.6.25. Проверить тождество Якоби

$$\{f,\{g,h\}\} = \{g,\{f,h\}\} - \{h,\{f,g\}\}$$

для случая одной степени свободы.

4.6.26. Найти скобки Пуассона $\{x_i, x_j\}$, $\{p_i, p_j\}$, $\{x_i, p_j\}$.

4.6.27. Найти скобки Пуассона $\{x_i, g\,(x_j)\}$, $\{p_i, g\,(x_j)\}$.

4.6.28. Найти скобки Пуассона $\{x_i, L_j\}$, $\{p_i, L_j\}$.

4.6.29. Найти скобки Пуассона $\{L_i, L_j\}$, $\left\{L_i, L^2\right\}$.

4.6.30. Найти скобки Пуассона $\{x_i, \mathcal{H}\}$, $\{p_i, \mathcal{H}\}$.

4.6.31. Найти скобки Пуассона $\{L_i, \mathcal{H}\}$, $\left\{L^2, \mathcal{H}\right\}$.

4.6.32. Выбрав в качестве переменных q_i сферические координаты θ и φ, вычислить скобки Пуассона $\{L_x, L_y\}$, $\{L_y, L_z\}$ и $\{L_z, L_x\}$ для сферического маятника.

4.6.33. Для одномерного гармонического осциллятора введем переменные $a = (2m\omega)^{-1/2}(m\omega x + ip)e^{i\omega t}$ и $a^* = (2m\omega)^{-1/2}(m\omega x - ip)e^{i\omega x}$. Найти скобки Пуассона этих величин, выразить через эти переменные функцию Гамильтона.

4.6.34. Доказать, что если $f(q_i, p_i, t)$ и $g(q_i, p_i, t)$ – два интеграла движения, то составленные из них скобки Пуассона дают тоже интеграл движения (*теорема Пуассона*).

4.6.35. Используя теорему Пуассона, показать, что момент импульса частицы в центрально-симметричном поле сохраняется.

4.6.36. Найти функцию Гамильтона для неуравновешенного волчка в однородном поле тяжести в переменных Эйлера.

4.6.37. Найти уравнения Гамильтона для предыдущей задачи.

4.6.38. Найти общее решение задачи о движении неуравновешенного волчка в квадратурах.

4.6.39. Записать функцию Гамильтона для неоднородного цилиндрического катка радиусом R, центр масс которого смещен на расстояние a относительно оси.

4.7. Теория преобразований

4.7.1. Вывести каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией $\mathcal{F}_1(q_i, Q_i, t)$.

4.7.2. Вывести каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$.

4.7.3. Вывести каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией $\mathcal{F}_3(Q_i, p_i, t)$.

4.7.4. Вывести каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией $\mathcal{F}_4(p_i, P_i, t)$.

4.7.5. Показать, что производящая функция $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i P_i$ определяет тождественное преобразование.

4.7.6. Показать, что производящая функция $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i Q_i$ определяет преобразование $(q_i, p_i) \to (p_i, -q_i)$.

4.7.7. Доказать, что производящая функция $\mathcal{F} = (m\omega q^2)\mathrm{ctg}Q$ преобразует гамильтониан гармонического осциллятора
$\mathcal{H} = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2}{2}q^2$ в циклический $\mathcal{K} = \omega P$.

4.7.8. Показать, что производящая функция

$$\mathcal{F} = xP_x + yP_y + \varepsilon(xy + P_xP_y)$$

при $\varepsilon \to 0$ определяет поворот в фазовом пространстве.

4.7.9. Показать, что преобразование

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \to \mathcal{L}'(q_i, \dot{q}_i, t) = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) + df(q_i, t)/dt,$$

не изменяющее уравнений Лагранжа, является каноническим. Найти его производящую функцию.

4.7.10. Пусть $Q(t) = q(t+\tau)$ и $P(t) = p(t+\tau)$, $\tau = \mathrm{const}$, а $S(q(t), Q(t))$ – действие, взятое вдоль истинной траектории, проходящей через точки $q(t)$ и $Q(t)$ в заданные моменты времени t и $t+\tau$ соответственно. Доказать, что $\mathcal{F} = -S(q, Q)$ есть производящая функция преобразования $(q, p) \to (Q, P)$, описывающего движение системы.

4.7.11. В условиях предыдущей задачи найти производящую функцию свободно движущейся частицы.

4.7.12. В условиях задачи 4.7.10 найти производящую функцию свободно падающей в однородном поле тяжести точки.

4.7.13. В условиях задачи 4.7.10 найти производящую функцию одномерного гармонического осциллятора массы m с частотой ω.

4.7.14. Пусть $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ – цилиндрические координаты точки в однородном поле тяжести. Показать, что производящая функция $\mathcal{F} = q_1P_1\cos q_2 + q_1P_2\sin q_2 + q_3P_3$ осуществляет преобразование к декартовой системе координат.

4.7.15. Частица свободно движется вдоль оси OX. Изобразить часть фазового пространства, соответствующую интервалу энергий $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_0 + \Delta\mathcal{E}_0$. Выделить элемент фазовой жидкости, принадлежащий в начальный момент времени промежутку $(x_0, x_0 + \Delta x_0)$, и проследить за его движением.

4.7.16. Решить приведённую выше задачу для случая частицы, запертой в ящике с абсолютно упругими стенками.

4.7.17. Рассмотреть движение элемента фазовой жидкости в случае одномерного гармонического осциллятора.

4.8. Переменные «действие-угол» и адиабатические инварианты

4.8.1. Интегрированием функции Лагранжа вдоль истинной траектории найти действие $S(\vec{r}, t)$ для свободной материальной точки, находившейся в момент времени $t = 0$ в начале координат. Показать, что она удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби.

4.8.2. В условиях предыдущей задачи найти скорость $\vec{u}(\vec{r}, t)$ распространения поверхности постоянного действия.

4.8.3. Найти скорость распространения поверхности постоянного действия в потенциальном поле $U(\vec{r})$.

4.8.4. Интегрированием функции Лагранжа найти действие $S(\vec{r}, t)$ материальной точки в однородном поле тяжести при условии, что в начальный момент $t = 0$ точка находилась в начале координат.

4.8.5. В условиях предыдущей задачи показать, что $\nabla S(\vec{r}, t) = \vec{p}$.

4.8.6. Показать, что найденное в задаче 4.8.1 действие удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби.

4.8.7. Интегрированием функции Лагранжа найти действие $S(\vec{r}, t)$ для изотропного гармонического осциллятора, совершающего колебания по закону $\vec{r}(t) = (\vec{v}_0/\omega) \sin \omega t$.

4.8.8. Показать, что найденное в предыдущей задаче действие удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби.

4.8.9. Интегрированием функции Лагранжа найти действие заряда, движущегося в однородном постоянном магнитном поле и в момент времени $t = 0$ находившегося в начале координат.

4.8.10. Показать, что найденное в предыдущей задаче действие удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби.

4.8.11. Записать укороченное уравнение Гамильтона-Якоби для сферического маятника единичной массы и единичного радиуса.

4.8.12. Показать, что функция

$$S_0(\theta,\varphi) = \alpha\varphi + \int\limits_0^\theta \sqrt{2\mathcal{E} - 2g\cos\theta - \alpha^2/\sin^2\theta}\,d\theta$$

удовлетворяет записанному в предыдущей задаче уравнению Гамильтона-Якоби.

4.8.13. Из уравнения Гамильтона-Якоби вывести уравнения движения точки в потенциальном поле в декартовой системе координат.

4.8.14. Вывести уравнение Гамильтона-Якоби методом канонических преобразований.

4.8.15. Пусть $\mathcal{H}(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n) = h(f_1(q_1,p_1),...,f_n(q_n,p_n))$ и $\partial f_i/\partial p_i \neq 0$, $i = 1,...,n$, так что уравнения $f_i(q_i,p_i) = \alpha_i$ можно разрешить относительно p_i: $p_i = g_i(q_i,\alpha_i)$. Показать, что при этих условиях переменные в уравнении Гамильтона-Якоби разделяются. Найти $S_0(q_1,...,q_n;\alpha_1,...,\alpha_n)$.

4.8.16. Показать, что если кинетическая и потенциальная энергия системы с двумя степенями свободы (q_1 и q_2) имеют вид

$$T = \frac{1}{2(X_1+X_2)}\left(Q_1p_1^2 + Q_2p_2^2\right), \quad V = \frac{P_1+P_2}{X_1+X_2},$$

где переменные X_1, Q_1 и P_1 зависят только от q_1, а переменные X_2, Q_2 и P_2 – только от q_2, то система допускает разделение переменных.

4.8.17. Точка движется в плоскости XOZ под действием двух полей – силы притяжения к началу координат $\vec{F}_1 = -m(K/r^2)\vec{e}_r$ и однородной силы тяжести $\vec{F}_2 = -mg\vec{e}_z$. Показать, что в параболических координатах $u = (r+z)/2$ и $v = (r-z)/2$ система допускает разделение переменных.

4.9. Метод Гамильтона-Якоби

4.9.1. Методом Гамильтона-Якоби найти траекторию и закон движения точки в однородном поле тяжести.

4.9.2. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и закон движения для заряда в поле волны с векторным потенциалом $\vec{A} = \vec{A}_0 \cos \omega t$.

4.9.3. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для математического маятника.

4.9.4. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для трехмерного изотропного гармонического осциллятора единичной массы в декартовых координатах x_1, x_2, x_3.

4.9.5. В условиях предыдущей задачи найти закон движения каждой из координат осциллятора.

4.9.6. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для точки, совершающей движение в центрально-симметричном поле $U(r)$.

4.9.7. В условиях предыдущей задачи найти обобщенные импульсы p_r и p_η.

4.9.8. Выразить переменные действия I_φ и I_r и соответствующие им частоты эллиптического движения в поле $U = -\alpha/r$ в полярных координатах.

4.9.9. Вычислить переменные действия I_x, I_y и I_z и соответствующие им частоты трехмерного изотропного гармонического осциллятора.

4.9.10. Показать, что при малой амплитуде колебаний энергия простого маятника $E = I\nu$.

4.9.11. Нить маятника медленно уменьшается. Найти изменение его энергии и показать, что E/ν при этом остается постоянным.

4.9.12. Между двумя абсолютно упругими стенками, находящимися на расстоянии l друг от друга движется шарик единичной массы. Как изменится его скорость, если расстояние между стенками увеличится в k раз ($l \to l' = kl$)?

4.9.13. Потери энергии Солнцем на излучение уменьшают его массу. Как это сказывается на орбитах планет (эксцентриситетах, больших полуосях, периодах обращения)?

4.9.14. Показать, что для гармонического осциллятора с медленно меняющейся жесткостью k сохраняется адиабатический инвариант $I = \int\limits_{x_1}^{x_2} v dx$ (v – скорость осциллятора в точке, координата которой отсчитывается от положения равновесия, x_1 и x_2 – крайние значения этой координаты).

4.9.15. Частица движется между двумя абсолютно упругими стенками, одна из которых медленно отодвигается от другой. Показать, что сохраняется усредненное по «периоду» произведение модуля скорости частицы на расстоянии между стенками.

4.9.16. На положительной полуоси OX с абсолютно упругой стенкой в начале координат скользят без трения два упругих шарика с массами m_1 (ближайший к началу координат) и $m_2 >> m_1$. В начальный момент скорость легкого шарика много больше скорости тяжелого. Найти закон движения тяжелого шарика, усредненный по «периоду» движения легкого.

4.9.17. Невзаимодействующие между собой «молекулы» движутся внутри куба параллельно его ребрам. Найти изменение давления при медленном увеличении его объема.

4.9.18. Вывести уравнение для функции $S(\vec{r}, t) = \ln \psi(\vec{r}, t)$, удовлетворяющей условию $\mathrm{div}(\psi \nabla \psi) = 0$. Что нужно изменить в условии задачи, чтобы полученное уравнение полностью совпало с уравнением Шредингера?[1].

4.10. Элементы классической теории поля

4.10.1. Найти первую вариацию функционала

$$F(q(\cdot)) = \int \dots \int f(q(x_1, \dots, x_n), \partial q/\partial x_1, \dots, \partial q/\partial x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

4.10.2. Найти функциональную производную приведённого в предыдущей задаче функционала.

[1] Впервые о выводе уравнения Шредингера из уравнения Гамильтона-Якоби без предельного перехода автор узнал от своего преподавателя Николая Васильевича Кислицына (Томск, конец 60-х).

4.10.3. Лагранжиан сплошной системы имеет вид

$$\mathcal{L} = \int\limits_V \frac{1}{2}\left[\psi_{,t}^2 - (\nabla\psi)^2\right] dV.$$

Вывести уравнение движения.

4.10.4. Задана плотность лагранжиана

$$\mathcal{L}' = 2\psi\psi_{,t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2.$$

Вывести уравнение движения.

4.10.5. Задан лагранжиан

$$\mathcal{L} = \int\limits_V \frac{1}{2}[\psi_{,t}^2 - (\nabla\psi)^2 - m^2\psi^2]dV.$$

Вывести уравнение движения и плотность гамильтониана.

4.10.6. Задана плотность лагранжиана

$$\mathcal{L}' = \frac{i\hbar}{2}(\psi * \psi_{,t} - \psi_{,t} * \psi) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi * \nabla\psi - U(\vec{x}, t)\psi * \psi.$$

Вывести уравнения ψ и ψ^*, полагая их взаимно независимыми ($\hbar$ и m – постоянные).

4.10.7. В условиях предыдущей задачи найти плотность импульса поля и гамильтониан.

4.10.8. Действие для струны, погружённой в n-мерную изотропную упругую среду с коэффициентом упругости K, имеет вид

$$S = \frac{1}{2}\underbrace{\int\!\!\ldots\!\!\int}_{n+1}\left[\rho\left(\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t}\right)^2 - T\left(\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial x_j}\right)^2 - Ku^2(\vec{x}, t)\right] d\vec{x}dt.$$

Вывести уравнение движения среды.

4.10.9. Выразить потенциальную часть гамильтониана системы материальных точек

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^{N} U(\vec{x}_j - \vec{x}_i) + \sum_{j=1}^{N} \phi(\vec{x}_j)$$

через микроскопическую плотность числа частиц $n(\vec{x}) = \sum_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j)$.

4.10.10. Вычислить функциональную производную потенциальной части гамильтониана по микроскопической плотности (воспользоваться ответом к предыдущей задаче).

4.10.11. Конфигурационный сомножитель статистической суммы пропорционален интегралу

$$\mathcal{J} = \int \exp\{-\beta\mathcal{U}\} d\Gamma_x.$$

Вычислить функциональную производную от lnJ до $n(\vec{x})$.

4.10.12. Вычислить функциональную производную от lnJ (см. предыдущую задачу) до $\phi(\vec{x})$.

Глава 5

Релятивистская механика

- Четырёхмерный интервал $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2}$.
- Собственное время $d\tau = \sqrt{1 - (v/c)^2}dt$.
- Инерциальные системы координат: лабораторная («неподвижная») K и система K', поступательно движущаяся относительно K с постоянной скоростью $\vec{V} = V\vec{e}_x$. При $t = 0$ координатные оси обеих систем совпадают.
- Преобразование Лоренца связывает четырёхмерные координаты x, y, z, t события в системе K с его координатами x', t', z', t системе K:

$$\begin{gathered}
x = x'\mathrm{ch}\psi + ct'\mathrm{sh}\psi, \\
y = y' \\
z = z' \\
ct = x'\mathrm{sh}\psi - ct'\mathrm{ch}\psi, \\
\psi = \mathrm{arth}(v/c).
\end{gathered}$$

- Функция Лагранжа релятивистской частицы в потенциальном поле $U(\vec{r})$

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - (v/c)^2} - U(\vec{r}).$$

- Функция Лагранжа релятивистского заряда в электромагнитном поле с потенциалами $\varphi(\vec{r}, t)$ и $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t) = -mc^2\sqrt{1 - (v/c)^2} - e\varphi(\vec{r}, t) + (e/c)\vec{v}\vec{A}(\vec{r}, t).$$

- Функция Гамильтона релятивистского заряда в электромагнитном поле

$$\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2} + e\varphi,$$

где $\vec{P}$ – обобщённый импульс, связанный с обычным импульсом $\vec{p} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ соотношением $\vec{P} = \vec{p} + \dfrac{e}{c}\vec{A}$.

- Действие для релятивистского заряда в электромагнитном поле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2\sqrt{1-(v/c)^2} - e\varphi(\vec{r},t) + (e/c)\vec{v}\vec{A} \right) dt.$$

- Уравнения движения заряда в электромагнитном поле

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = e\vec{E} + (e/c)[\vec{v},\vec{H}].$$

- Уравнение для энергии $\mathcal{E} = mc^2 \Big/ \sqrt{1-(v/c)^2}$:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{v}\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{v}\vec{E}.$$

- Кинетическая энергия $T = \mathcal{E} - mc^2$.

- Часто для краткости используются обозначения

$$\vec{\beta} = \vec{v}/c, \quad \gamma = 1 \Big/ \sqrt{1-\beta^2}\ .$$

- Четырёхмерные векторы:

  координат $x^\mu = (ct, \vec{r})$,

  скорости $u^\mu = \gamma(1, \vec{\beta})$,

  импульса $p^\mu = (\mathcal{E}/c, \vec{p})$,

  электромагнитных потенциалов $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$.

  Скалярное произведение 4-векторов a^μ и b^μ $\quad a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu$ (по повторяющимся индексам предполагается суммирование), скалярные координаты

$$x^\mu x_\mu = s^2,$$

$$u^\mu u_\mu = 1,$$

$$p^\mu p_\mu = \mathcal{E}^2/c^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2,$$

  m – масса покоя частицы.

5.1. Пространство и время

5.1.1. Доказать, что преобразования Лоренца могут быть представлены в виде

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma(t' + Vx'/c^2).$$

5.1.2. Показать, что интервал ds инвариантен относительно преобразований Лоренца.

5.1.3. Введём вместо t мнимую координату $x_4 = ict$. Показать, что преобразование Лоренца в новых переменных x, x_4 описывает поворот в этой плоскости. Найти связь между углом поворота θ и скоростью системы V.

5.1.4. Вывести релятивистский закон сложения скоростей и проанализировать его при $V \to c$ и $V \ll c$ (частица движется вдоль оси OX).

5.1.5. В системе K' скорость частицы $\vec{v}'$ лежит в плоскости XOY и составляет угол θ' с осью OX, общей для обеих систем. Найти соответствующий угол θ в системе K.

5.1.6. Движущаяся вдоль оси OX со скоростью v релятивистская частица распадается на две частицы. Энергия одной из распадных частиц $\mathcal{E}_0$ в СЦМ и $\mathcal{E}$ в ЛСК. Найти угол её вылета относительно оси в ЛСК.

5.1.7. Покоящаяся частица с массой m распадается на две частицы массами m_1 и m_2. Найти их энергии.

5.1.8. Покоящаяся частица массой m распадается на три частицы с одинаковыми массами покоя m_1. Найти верхний предел кинетической энергии вторичной частицы.

5.1.9. Рассмотреть упругое столкновение частицы нулевой массы покоя (фотона) с покоящейся частицей массы m. Выразить энергию рассеянной частицы через начальную энергию и угол рассеяния.

5.1.10. Быстрый протон с энергией $\mathcal{E}$ налетает на покоящийся протон. Какая часть этой энергии может быть израсходована на неупругий процесс (например, образование протон-антипротонной пары)?

5.1.11. Система отсчёта K_1 движется относительно K со скоростью $\vec{v}_1$, а система K_2 – относительно той же системы K со скоростью $\vec{v}_2$. Найти квадрат относительной скорости (т.е. скорости $\vec{v}_{21}$ системы K_2 относительно K_1).

5.1.12. Показать, что результат предыдущей задачи можно записать в виде

$$v_{21}^2 = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - [\vec{v}_1, \vec{v}_2]^2}{(1 - \vec{v}_1\vec{v}_2/c^2)^2}.$$

5.1.13. В ядерной физике высоких энергий часто используется параметр быстроты $y = \mathrm{Arth}\beta = \ln\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$. Выразить β через y.

5.1.14. Доказать, что параметр быстроты y аддитивен относительно последовательных преобразований Лоренца в одном направлении.

5.1.15. Вдоль оси OX свободно движутся n частиц: первая – со скоростью v относительно неподвижной системы координат, вторая – с той же скоростью v относительно первой, третья – с той же скоростью v относительно второй и т.д. Найти скорость v_n n-й частицы относительно неподвижной системы координат.

5.2. Движение релятивистской частицы

5.2.1. Вывести уравнение движения релятивистской частицы в потенциальном поле $U(\vec{r})$.

5.2.2. Доказать, что $\dfrac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{v}\dfrac{d\vec{p}}{dt}$.

5.2.3. Найти массу покоя M движущегося как целое идеального релятивистского газа.

5.2.4. Найти связь между силой и ускорением релятивистской частицы. Найти отношение силы к ускорению в случаях, когда ускорение параллельно и перпендикулярно скорости («продольная масса» и «поперечная масса»).

5.2.5. Частица с массой покоя m движется вдоль оси OX со скоростью $v = c^2t/\sqrt{b^2 + c^2t^2}$. Найти действующую на неё силу.

5.2.6. На частицу, движущуюся со скоростью $\vec{v}$, действует (в ЛСК) сила $\vec{F}$. Какая сила действует на неё в сопутствующей системе?

5.2.7. Вывести векторное уравнение движения релятивистского заряда в электромагнитном поле.

5.2.8. Доказать, что в электромагнитном поле $\dfrac{d\mathcal{E}}{dt} = e\vec{v}\vec{E}$.

5.2.9. Вывести уравнение движения релятивистского заряда в электромагнитном поле в цилиндрических координатах.

5.2.10. Вывести обобщенный импульс и функцию Гамильтона релятивистского заряда в электромагнитном поле.

5.2.11. Вывести функцию Гамильтона для релятивистского заряда в кулоновском поле $e\varphi = -\alpha/r$ в полярных координатах.

5.2.12. Найти нерелятивистские пределы релятивистских функций Лагранжа и Гамильтона.

5.2.13. Найти скорость движения поверхности постоянного действия S свободной релятивистской частицы, находившейся в момент $t = 0$ в начале координат.

5.2.14. Для согласования релятивистского результата с нерелятивистским нужно перейти к действию $S' = S + mc^2t$. Найти соответствующие выражения для скорости u' в условиях предыдущей задачи, рассмотреть нерелятивистский предел и найти поправку к нему.

5.2.15. Найти закон движения $x(t)$ релятивистской частицы, движущейся с постоянным (относительно сопутствующей ИСО) ускорением a вдоль оси OX $(x(0) = 0, v(0) = 0)$. Исследовать поведение решения при малых и больших временах. Найти зависимость собственного времени τ от лабораторного t.

5.2.16. Выразить ускорение заряда в электромагнитном поле через его скорость и напряженности поля.

5.2.17. Вывести уравнение Гамильтона-Якоби для релятивистского заряда в электромагнитном поле.

5.2.18. Найти кинетическую энергию и закон движения заряженной частицы в однородном постоянном электрическом поле $\vec{E} = E\vec{e}_x$ с нулевыми начальными условиями.

5.2.19. В условиях предыдущей задачи частица движется в плоскости XOY с начальным импульсом p_0, параллельным OY. Найти уравнение траектории. Рассмотреть нерелятивистский предел.

5.2.20. Заряженная частица массой m движется в однородном постоянном магнитном поле $\vec{H}$ по окружности радиусом R. Найти её кинетическую энергию.

5.2.21. Найти закон движения релятивистского заряда с энергией $\mathcal{E}$ в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H} = H\vec{e}_z$.

5.2.22. При каком условии период обращения заряженной частицы в однородном магнитном поле не зависит от её энергии?

5.2.23. Найти закон движения релятивистского заряда во взаимно перпендикулярных и равных по величине однородных электрическом и магнитном полях.

5.2.24. В условиях предыдущей задачи перейти к нерелятивистскому пределу.

5.2.25. Найти закон движения релятивистского заряда в параллельных однородных электрическом и магнитном полях, направленных вдоль OZ.

5.2.26. В условиях предыдущей задачи перейти к нерелятивистскому пределу.

5.2.27. Вывести релятивистское уравнение движения ракеты.

5.2.28. Найти зависимость массы релятивистской ракеты от её скорости, если известна её начальная масса m_0 и скорость истечения газов $u = \mathrm{const}$.

5.2.29. Определить движение релятивистской ракеты с массой покоя, изменяющейся по закону $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$. Рассмотреть нерелятивистский и ультрарелятивистский (фотонная ракета) пределы.

5.2.30. Найти общую формулу для периода колебаний одномерного релятивистского гармонического осциллятора.

5.2.31. В условиях предыдущей задачи найти поправку первого порядка к нерелятивистскому периоду.

5.2.32. Найти финитные траектории релятивистской частицы в потенциальном поле $U(r) = -\alpha/r$ при $\alpha > 0$ и $\rho \equiv \alpha/(cL) < 1$.

5.2.33. В условиях предыдущей задачи ($\alpha > 0$, $\rho < 1$) исследовать инфинитные траектории. Найти угол между двумя асимптотами.

5.2.34. Проанализировать траектории движения точки в кулоновском поле при $\alpha > 0$, $\rho > 1$.

5.2.35. Проанализировать траектории релятивистской частицы в кулоновском поле отталкивания при $\alpha < 0$ и $\rho \equiv |\alpha|/(cL) < 1$.

5.2.36. В условиях предыдущей задачи выразить угол рассеяния через момент импульса L и его начальную скорость v_0.

5.2.37. Показать, что найденный в предыдущей задаче результат согласуется с его нерелятивистским аналогом $b = \left|\dfrac{\alpha}{mv_0^2}\right| \operatorname{ctg}(\theta/2)$.

5.3. Столкновения и распад релятивистских частиц

5.3.1. Для реакции типа $A + B \to C + D$ переменные Мандельштама определяются формулами $s = (p_A + p_B)^2/c^2$, $t = (p_A - p_C)^2/c^2$, $u = (p_A - p_D)^2/c^2$, где p_A и т.д. – 4-векторы энергии-импульса. Показать, что $s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2$.

5.3.2. Показать, что в случае упругой реакции $A + B \to C + D$ $t = -2p^2(1 - \cos\theta)/c^2$, где $p \equiv |\vec{p}|$ – модуль 3-импульса каждой из сталкивающихся частиц, θ – угол рассеяния (всё это в системе центра инерции).

5.3.3. Пи-мезон, летящий со скоростью $\vec{v}$ в лабораторной системе координат, распадается на мюон и нейтрино ($\pi \to \mu + \nu$). Найти угол θ, под которым вылетает мюон.

5.3.4. Электрон с начальным 3-импульсом $\vec{q}$ упруго рассеивается на первоначально неподвижном протоне. Найти связь квадрата передаваемого 4-импульса Q^2 с импульсом падающего электрона q и углом рассеяния θ (обе переменные в лабораторной системе координат).

5.3.5. При столкновении высокоэнергетического протона с другим, первоначально покоящимся в лабораторной системе протоном, происходит рождение протон-антипротонной пары (реакция $p + p \to p + p + p + \tilde{p}$). Найти пороговую энергию процесса.

5.3.6. Частица A в состоянии покоя распадается на две: $A \to B + C$. Выразить полную энергию частицы B через массы трёх частиц.

5.3.7. Мезон M распадается на два гамма-кванта: $M \to \gamma + \gamma$. Выразить угол между их импульсами в лабораторной системе координат через энергии фотонов и массу мезона M.

5.3.8. При комптоновском рассеянии гамма-кванта на первоначально покоящемся электроне на угол 60° его энергия уменьшается в два раза. Найти его начальную энергию.

5.3.9. В ускорителе на встречных пучках сталкиваются частицы 1 и 2 с разными массами (m_1 и m_2) и кинетическими энергиями (T_1 и T_2). Найти максимальную массу M частицы, которая может быть рождена в таком столкновении.

5.3.10. В эксперименте А.Комптом установил, что изменение длины волны фотона на электроне (который можно считать свободным) связано с углом его рассеяния соотношением

$$\Delta\lambda = \Lambda(1 - \cos\theta),$$

где Λ – постоянная. Вывести из этой формулы зависимость энергии рассеянного фотона от угла рассеяния.

5.3.11. Релятивистская частица с массой m_1 и импульсом p_1 сталкивается с покоящейся частицей 2, имеющей массу m_2. После столкновения частица 2 летит под углом φ к направлению начального импульса частицы 1. Найти зависимость переданной частице 2 энергии от угла φ.

5.3.12. Проанализировать результат решения предыдущей задачи, рассмотреть случаи

а) $m_1 \gg m_2$, $p_1 c \gg m_1 c^2$,

б) $m_1 \ll m_2$, $p_1 c \gg m_1 c^2$.

Глава 6

Разрежённые среды

- В фазовом пространстве (Γ-пространстве)

$$\Gamma = (\vec{r}_1, \vec{p}_1) \times (\vec{r}_2, \vec{p}_2) \times \ldots \times (\vec{r}_N, \vec{p}_N)$$

  динамическое состояние системы N взаимодействующих материальных точек изображается одной *представляющей* точкой. Если положение её неопределенно (например, вследствие неопределённости начальных условий), оно характеризуется плотностью вероятности $f_N(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots \vec{r}_N, \vec{p}_N; t)$, удовлетворяющей нормировке

$$\int\limits_{\Gamma} f_N(\Gamma, t) d\Gamma \equiv \int d\vec{r}_1 \int d\vec{p}_1 \ldots \int d\vec{r}_N \int d\vec{p}_N f_N(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N; t) = 1.$$

  Среднее (в момент времени t) по ансамблю любой функции состояния $A(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N)$ выражается через фазовую плотность соотношением

$$\langle A \rangle(t) = \int d\vec{r}_1 \int d\vec{p}_1 \ldots \int d\vec{r}_N \int d\vec{p}_N A(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N) f_N(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N; t).$$

- Временная эволюция этой плотности подчиняется уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = \mathsf{L} f_N \equiv \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_N}{\partial \vec{r}_k} \frac{\partial f_N}{\partial \vec{p}_k} - \frac{\partial \mathcal{H}_N}{\partial \vec{p}_k} \frac{\partial f_N}{\partial \vec{r}_k} \right).$$

- В состоянии равновесия производная по времени в уравнении Лиувилля обращается в нуль и f_N становится зависящей от фазовых переменных только через гамильтониан:

$$f_N(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N) = F(\mathcal{H}_N(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N)).$$

  Согласно постулату Гиббса, функция F для макроскопических систем имеет вид экспоненты:

$$f_N(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N) = \frac{1}{Z_n} \exp(-\beta \mathcal{H}_N(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N)), \qquad (1)$$

где

$$Z_N = \langle \exp(-\beta \mathcal{H}_N) \rangle = \int d\vec{r}_1 \int d\vec{p}_1 \ldots \times$$
$$\times \int d\vec{r}_N \int d\vec{p}_N \exp(-\beta \mathcal{H}_N(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N)). \quad (2)$$

Формула (1) известна как *каноническое распределение*, описывающая механическую систему с неизменным числом молекул, находящуюся в контакте с термостатом при постоянной абсолютной температуре $T = 1/(\beta k_{\text{Б}})$, а знаменатель (2), называемый *статистической суммой*, играет важную роль в статистической физике.

- Среднее по равновесному ансамблю

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z_N} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{p}_1 \ldots \times$$
$$\times \int d\vec{r}_N \int d\vec{p}_N A(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N) \exp(-\beta \mathcal{H}_N(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N)). \quad (3)$$

- Распределение $f_{1(N)}(\vec{r}_1, \vec{p}_1)$ частицы с номером 1 выражается через совместную плотность f_N интегралом

$$f_{1(N)}(\vec{r}_1, \vec{p}_1) = \int d\vec{r}_2 \int d\vec{p}_2 \ldots \int d\vec{r}_N \int d\vec{p}_N f_N(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \vec{r}_2, \vec{p}_2; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N).$$

- В случае, когда система состоит из тождественных частиц (гамильтониан которой не изменяется при их перестановках), вероятность найти в бесконечно малом элементе $d\vec{r} d\vec{p}$ μ-пространства частицу с любым номером совпадает со средним числом частиц в этом элементе:

$$n(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{r} d\vec{p} = N f_{1(N)}(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{r} d\vec{p}.$$

Очевидно,

$$\int d\vec{r} \int d\vec{p} n(\vec{r}, \vec{p}) = N.$$

- Интеграл от этой функции по одной из векторных переменных представляет собой плотность (концентрацию) частиц в оставшемся пространстве:

$$\int d\vec{p} n(\vec{r}, \vec{p}) = n(\vec{r}), \quad \int d\vec{r} n(\vec{r}, \vec{p}) = n(\vec{p}).$$

- Среднее число пар тождественных частиц, одна из которых находится в $d\vec{r}_1 d\vec{p}_1$, а другая – в $d\vec{r}_2 d\vec{p}_2$, равно $n_2(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \vec{r}_2 \vec{p}_2) d\vec{r}_1 d\vec{p}_1 d\vec{r}_2 d\vec{p}_2$, где

$$n_2(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \vec{r}_2, \vec{p}_2) = N(N-1) \int d\vec{r}_3 \int d\vec{p}_3 \ldots \times$$
$$\times \int d\vec{r}_N \int d\vec{p}_N f_N(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \vec{r}_2, \vec{p}_2; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N)$$

– двухчастичная плотность распределения.

- Движение газа нейтральных молекул в отсутствие внешнего поля описывается *газокинетическим уравнением Больцмана*

$$\frac{dn_1}{dt} \equiv \frac{\partial n_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial n_1}{\partial \vec{r}} = \int d\vec{\Omega} \int d\vec{v}_{20} \sigma_0 w(\vec{\Omega}) |\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}| [n_{10} n_{20} - n_1 n_2], \quad (4)$$

где

$$n_1 \equiv n(\vec{r}, \vec{v}_1; t), n_2 \equiv n(\vec{r}, \vec{v}_2; t), n_{10} \equiv n(\vec{r}, \vec{v}_{10}; t), n_{20} \equiv n(\vec{r}, \vec{v}_{20}; t).$$

Двойные индексы 10,20 относятся к начальным состояниям сталкивающихся молекул, а одинарные 1 и 2 – к состояниям тех же частиц после столкновения.

- Движение молекул лёгкого газа в тяжёлом с хорошим приближением описывается линейным уравнением Больцмана с изотропным рассеянием

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v\vec{\Omega}\nabla + v\sigma\right] n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \frac{v\sigma}{4\pi}\int\limits_{4\pi} n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega} + S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t), \quad (5)$$

где v – абсолютная величина скорости молекул (предполагается неизменной со временем), $\vec{\Omega} = \vec{v}/v$ – единичный вектор в направлении движения частицы, σ – вероятность столкновения на единице пути (обратная среднему пробегу).

- В диффузионном пределе эволюция концентрации частиц в однородной области среды описывается уравнением

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\triangle n(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t).$$

- Уравнения, описывающие диффузию частиц, остаются справедливыми и для «диффузии тепла». Так, эволюция температурного поля $T(\vec{r}, t)$ подчиняется уравнению

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T,$$

где ρ – плотность среды, c_p – удельная теплоёмкость, κ – теплопроводность.

- Движение в магнитном поле электрически нейтральной проводящей среды (плазмы) описывается магнитной гидродинамикой, математическую основу которой составляют следующие уравнения.

- Уравнения Максвелла

$$1)\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$2)\ \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$3)\ \mathrm{div}\vec{D} = 4\pi\rho_e = 0,$$

$$4)\ \mathrm{div}\vec{B} = 0.$$

- Материальные уравнения

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H}, \quad \vec{j}_e = \sigma\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{B}]\right\}.$$

- Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0.$$

- Уравнение движения несжимаемой идеальной плазмы в магнитном поле
$$\rho\,(\partial\vec{v}/\partial t + (\vec{v}\nabla)\vec{v}) = \vec{f}_{\text{м}} - \nabla p,$$
где $\vec{f}_{\text{м}} = c^{-1}[\vec{j}_e, \vec{B}]$ – объемная плотность магнитной силы.

- Уравнение состояния адиабатической баротропной среды
$$p = \text{const}\rho^{\gamma},$$
где $\gamma = c_p/c_V$ – отношение удельных теплоёмкостей.

6.1. Основы физической кинетики

6.1.1. Интегрирование фазовой плотности $f_N(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N)$ по всем импульсам скоростям даёт плотность вероятности в конфигурационном подпространстве системы $f_N(\vec{r}_1; \ldots; \vec{r}_N)$. Написать связь между этой плотностью и соответствующей k-частичной плотностью n_k, $1 \le k < N$.

6.1.2. Выразить через k-частичные плотности усреднённые по ансамблю значения кинетической и потенциальной энергий системы попарно взаимодействующих частиц во внешнем поле.

6.1.3. Записать среднюю энергию взаимодействия пары частиц указанной в предыдущей задаче системы.

6.1.4. Доказать теорему Лиувилля, утверждающую, что фазовая жидкость движется в Г подобно несжимаемой жидкости: любой выделенный её объём сохраняет при движении свою величину.

6.1.5. Показать, что в равновесном состоянии
$$f_N(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N) = f_N^{\text{конф}}(\vec{r}_1; \ldots; \vec{r}_N) f_N^{\text{имп}}(\vec{p}_1; \ldots; \vec{p}_N)$$
и записать явные выражения для сомножителей (молекулы считать тождественными).

6.1.6. Идеальный газ, состоящий из N одинаковых молекул массами m, заключён в кубе объёмом V. Найти гиперобъём $\Omega_N(E)$ фазового пространства этой системы, отвечающий полной энергии, меньшей значения E.

6.1.7. Найти фазовый объём $\Omega(E)$ системы N невзаимодействующих изотропных гармонических осцилляторов с гамильтонианами
$$\mathcal{H}_k = (1/2)(p_k^2 + q_k^2),\ k = 1, \ldots, n.$$

6.1.8. Показать, что средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы механической системы с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{n} p_k^2/(2m_k) + U(q_1, \ldots, q_n),$$

находящейся в контакте с термостатом при температуре T, равна $k_{\text{Б}}T/2$.

6.1.9. Найти дисперсию энергии системы, подчиняющейся каноническому распределению.

6.1.10. При каком условии уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_{\vec{x}}(\vec{v}f) + \operatorname{div}_{\vec{v}}(\dot{\vec{v}}f) = 0$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\,\nabla_{\vec{x}} f + \dot{\vec{v}}\,\nabla_{\vec{v}} f = 0$$

эквивалентны?

6.1.11. Вывести уравнения Ньютона из уравнения Лиувилля, представить решения последнего в виде

$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t))\delta(\vec{v} - \vec{v}_i(t)).$$

6.1.12. В момент времени $t = 0$ задана фазовая плотность распределения ансамбля $t = 0$ $f_N(q_j, p_j, 0) = \rho_N(q_j, p_j)$. Гамильтониан явно от времени не зависит. Выразить решение уравнения Лиувилля при малых t (с точностью до членов порядка t^3) через скобки Пуассона.

6.1.13. Повторить решение предыдущей задачи, убрав из её условия независимость гамильтониана от времени.

6.1.14. Используя уравнения Лиувилля, показать, что для не зависящего явно от времени гамильтониана интеграл от плотности f_N по всему фазовому пространству постоянен (не зависит от времени).

6.1.15. Доказать, что указанное в предыдущей задаче свойство плотности f_N сохраняется и в случае явной зависимости гамильтониана от времени.

6.1.16. Доказать, что движение проекции ансамбля $(\vec{x}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{x}_N, \vec{p}_N)$ на подпространство $(\vec{x}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{x}_n, \vec{p}_n)$, $n < N$, является несжимаемым.

6.2. Газодинамика

6.2.1. Прямой подстановкой убедиться, что *распределение Максвелла*

$$n^{(0)}(\vec{v}) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_{\text{Б}}T}.$$

удовлетворяет уравнению Больцмана.

6.2.2. Из распределения Максвелла найти выражение для наивероятной скорости молекулы.

6.2.3. Из распределения Максвелла найти выражения для средней скорости, средней энергии и дисперсии скорости молекулы.

6.2.4. Вывести стационарное уравнение движения газа невзаимодействующих молекул в отсутствие внешнего поля. Снабдить его граничным условием на поверхности твёрдого тела с внешней нормалью для а) зеркально отражающей поверхности, б) диффузно отражающей поверхности.

6.2.5. В стенке сосуда, заполненного газом, имеется отверстие, диаметр которого мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Найти число молекул, покидающих сосуд в единицу времени а) в случае, когда вне сосуда вакуум, и 2) в случае, когда вне сосуда имеется газ с плотностью n_2, температурой T_2 и массой молекул m_2 (соответствующие характеристики газа в сосуде отметим индексом 1). Для случая, когда сосуд с газом погружён в такой же газ, но с другим давлением и температурой, найти условие равновесия.

6.2.6. Находящийся в равновесном состоянии газ с концентрацией молекул n_0 занимает полупространство $x < 0$. В момент времени $t = 0$ удаляется стенка и газ начинает расширение в пустоту. Найти пространственное распределение $n(x,t)$ и среднюю скорость $v(x,t)$ вылетевших из сосуда молекул.

6.2.7. Плоская пластина движется параллельно другой пластине с относительной скоростью V. Движение это происходит в газе, расстояние между пластинами много меньше пробега молекул, отражение молекул от поверхностей пластин носит диффузный характер. Температуры пластин T_1 и T_2. Найти плотность потока импульса, переносимого газом с одной пластины на другую.

6.2.8. Популярным методом решения линеаризованного уравнения Больцмана является разложение угловой зависимости по сферическим гармоникам, оборванное на каком-то члене. В первом приближении оно имеет вид

$$n(\vec{r},\vec{\Omega},t) = A(\vec{r},t) + \vec{\Omega}\vec{B}(\vec{r},t).$$

Дать физическую интерпретацию функциям A и $\vec{B}$.

6.2.9. Пользуясь результатом решения предыдущей задачи, вывести систему уравнений для концентрации и тока частиц, полагая источник изотропным ($S(\vec{r},\vec{\Omega},t) = \frac{1}{4\pi}S(\vec{r},t)$).

6.2.10. Вывести кинетическое уравнение Больцмана для одномерного газа одинаковых молекул, упруго взаимодействующих при столкновениях друг с другом.

6.3. Диффузия

6.3.1. Вывести уравнение диффузии в среде, способной поглощать частицы (как это имеет место в случае нейтронов).

6.3.2. Записать уравнение стационарной диффузии.

6.3.3. Записать уравнение диффузии в среде, движущейся со скоростью $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r},t)$. Рассмотреть частный случай, когда скорость среды во всех точках её одна и та же.

6.3.4. Вывести уравнение диффузии в неоднородной среде (коэффициент диффузии зависит от координат).

6.3.5. Найти распределение температуры вдоль стержня длины L, на левом конце которого ($x = 0$) поддерживается температура T_0, на правом T_L. Обе эти температуры постоянны, а боковая поверхность теплоизолирована.

6.3.6. Полубесконечный изолированный по боковой поверхности стержень $x \geq 0$ имеет начальный профиль температуры $T(x,0) = f(x)$. Найти эволюцию профиля с течением времени.

6.3.7. Найти общее решение сферически симметричной задачи о распространении тепла в однородном шаре.

6.3.8. Равномерно нагретый до температуры T_0 шар радиусом R мгновенно помещается в среду с температурой $T_c < T_0$. Пользуясь результатом предыдущей задачи, найти эволюцию температурного поля.

6.3.9. В плоскости $x = 0$ равномерно распределён изотропный стационарный источник нейтронов единичной интенсивности. В диффузионном приближении найти стационарное распределение нейтронов с коэффициентом диффузии D и длиной диффузии L.

6.3.10. Поверхность однородного цилиндра радиуса R бесконечной длины удерживается при постоянной температуре, равной нулю. В момент $t = 0$ температурное поле задано азимутально симметричной функцией $\phi(r)$. Найти общее выражение для $T(r,t)$, $0 < r < R$, $t \geqslant 0$.

6.3.11. Решить одномерное уравнение диффузии в бесконечной однородной среде от точечного мгновенного источника единичной мощности $s(x,t) = \delta(x)\delta(t)$.

6.3.12. Частицы совершают броуновское движение в жидкости, заполняющей пространство $x > 0$. Частицы, достигшие поверхности стенки $x = 0$, прилипают к ней. Найти вероятность того, что частица, находившаяся в момент времени $t = 0$ в точке $x_0 > 0$, в момент времени t окажется на стенке.

6.3.13. Найти закон эволюции плотности вещества совершающего одномерную диффузию. Начальное распределение $\rho(x,0) = \alpha \exp(-\beta x^2)$ $\alpha, \beta > 0$, коэффициент диффузии – D.

6.3.14. Показать, что наличие силы F, «подгоняющей» диффундирующую вдоль оси OX частицу в каком-то (например, положительном) направлении, приводит диффузионное уравнение к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - 2\gamma D\frac{\partial (F\rho)}{\partial x}.$$

6.3.15. В условиях предыдущей задачи для случая потенциальной силы $F = -\partial U/\partial x$ найти равновесное (не зависящее от времени) распределение $\rho(x)$.

6.4. Плазма

6.4.1. Доказать теорему Лармора, согласно которой движение заряда в слабом однородном постоянном магнитном поле оказывается таким же, как движение относительно вращающихся осей в отсутствие этого поля.

6.4.2. Частица с зарядом e и массой m движется в однородном постоянном магнитном поле $\vec{H} = H\vec{e}_z$, испытывая действие дополнительной силы $\vec{F} = F(t)\vec{e}_y$. Найти $\vec{v}(t)$ в квадратурах.

6.4.3. В условиях предыдущей задачи сила $F(t)$ является медленно меняющейся функцией времени, удовлетворяющей условию $\dot{F}/(E\omega_H) << 1$. Найти приближенный закон движения частицы при условиях $\vec{r}(0) = 0$, $\dot{\vec{r}}(0) = v_{\perp 0}\vec{e}_y + v_{||0}\vec{e}_z$, $F(t) = 0$ при $t < 0$.

6.4.4. На основе результатов предыдущей задачи показать, что движение рассматриваемой частицы можно представить, как суперпозицию следующих трёх движений: движения по окружности со скоростью $v_\perp \sim \sqrt{H}$, движения центра окружности вдоль силовой линии со скоростью $v_{||}$ (при этом $v_\perp^2 + v_{||}^2 = v_{\perp 0}^2 + v_{||0}^2$) и дрейфового движения центра окружности в направлении вектора $[\vec{F}, \vec{H}]$ со скоростью $F(t)/m\omega$.

6.4.5. Показать, что сохранение магнитного момента заряда $\mu = mv_\perp^2/2H$, вращающегося вокруг силовой линии магнитного поля, есть следствие общего принципа адиабатической инвариантности.

6.4.6. В условиях задачи 6.4.3 вычислить изменение магнитного момента в случае, когда

$$F(t) = (\alpha F_0/\sqrt{\pi}) \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha^2\tau^2} d\tau.$$

6.4.7. Преобразовать входящую в уравнение движения объёмную плотность магнитной силы к виду

$$\vec{f}_{\text{м}} = -\nabla\left(\frac{B^2}{8\pi\mu}\right) + \frac{1}{4\pi\mu}(\vec{B}\nabla)\vec{B}.$$

Какие при этом следует сделать предположения?

6.4.8. В условиях предыдущей задачи вывести волновое уравнение для магнитного поля в несжимаемой плазме с проводимостью σ. Начальное магнитное поле $\vec{B}_0$ однородно и направлено вдоль оси OZ. В этом же направлении распространяется и плоская волна $\vec{b}(z)$, созданная током $\vec{j}_e$, так что $\vec{B}(z) = \vec{B}_0 + \vec{b}(z)$.

6.4.9. Представив решение полученного в предыдущей задаче уравнения в виде $b_y = A\sin(\omega t - kz)$, найти фазовую скорость волны и дисперсионное соотношение (связь между ω и $|k|$) для плазмы с бесконечной проводимостью.

6.4.10. В условиях предыдущих задач выразить давление через A, ω и k.

6.4.11. Сравнить скорость плазмы со скоростью движения магнитных силовых линий в условиях предыдущих задач.

6.4.12. Простой способ получить альвеновскую скорость заключается в рассмотрении магнитных силовых линий как упругих струн с натяжением на единицу площади поперечного сечения $\theta = \dfrac{B^2}{4\pi\mu}$. Провести необходимые вычисления.

6.4.13. Пусть теперь проводимость σ конечна, а векторы $\vec{b}$ и $\vec{v}$, как и прежде, параллельны оси OY и являются функциями только координаты z и времени t. Найти дисперсионное соотношение и расстояние z_0, на котором амплитуда $A(z)$ магнитной волны b спадает в e раз.

6.4.14. Показать, что при малых значениях магнитного числа Рейнольдса $\mathsf{Re}_{\text{м}} = 4\pi\mu\sigma l^* v^*/c^2$, где l^*, v^* – характерные размеры и скорости возмущений несжимаемой плазмы с проводимостью σ, распространение магнитного поля описывается диффузионным уравнением. Найти коэффициент диффузии $D_{\text{м}}$.

6.4.15. В условиях предыдущей задачи доказать, что если $\mathsf{Re}_{\text{м}} >> 1$, то магнитный поток через любой контур, связанный с движущимся веществом, остаётся постоянным.

6.4.16. Все предыдущие результаты получены без учёта вязкости проводящей жидкости. Установить условие, при котором это приближение справедливо.

6.4.17. Доказать, что соотношение $[\vec{B}, \mathrm{rot}\vec{B}] = 0$ выполняется если $\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{r}) = g(\vec{r})B(\vec{r})$, где $g(\vec{r})$ – произвольная скалярная функция координат, удовлетворяющая определённому условию. Что это за условие?

6.4.18. В условиях предыдущей задачи $g = \mathrm{const}$ и имеет место цилиндрическая симметрия. Найти $\vec{B}(\vec{r})$.

6.4.19. Вывести кинетическое уравнение для распределения частиц идеальной плазмы низкой плотности в координатно-скоростном пространстве $f_\alpha(\vec{r}, \vec{u})$.

6.4.20. В стационарной плазме покоится в начале координат точечный заряд e. Записать систему кинетических уравнений в приближении самосогласованного поля с использованием скалярного потенциала φ.

6.4.21. Показать, что полученной в предыдущей задаче системе уравнений удовлетворяет выражение

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{u}) = \Phi_\alpha \left(\frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2} - e_\alpha \varphi(\vec{r}) \right),$$

где Φ_α – произвольная функция, для определения вида которой необходимы граничные условия (по повторяющимся индексам α в аргументе суммирования нет).

6.4.22. Записать явное выражение для решения предыдущей задачи, считая, что на больших расстояниях потенциал φ стремится к нулю, а распределение f_α – к максвеллову:

$$f_\alpha(\infty, \vec{u}) = \frac{n_\alpha}{(2\pi k_\text{Б} T_\alpha)^{3/2}} \exp(-m_\alpha u^2 / 2k_\text{Б} T_\alpha).$$

6.4.23. Вывести уравнение для потенциала φ в случае электрически нейтральной (до внесения в неё заряда) плазмы.

6.4.24. Решить полученное в предыдущей задаче уравнение с нулевыми условиями на бесконечности, $\varphi(r) \to 0$, $r \to \infty$.

6.4.25. Записать кинетическое уравнение для стационарного движения неоднородной плазмы в постоянном неоднородном магнитном поле $\vec{B}$, направленном вдоль оси OZ. Ось OX направим вдоль изменения распределения частиц и магнитного поля (силовые линии последнего остаются прямыми).

6.4.26. Найти функцию распределения частиц плазмы низкого давления, находящейся в скрещенных магнитном (вдоль оси OZ) и гравитационном (вдоль оси OX) полях в пренебрежении зависимостью магнитного поля от координат.

Глава 7

Феноменология континуума

- Перемещение точки x_i в поле смещений $u_i(x_k)$
$$x_i \to x'_i = x_i + u_i(x_k).$$
- Изменение элементарного вектора a_i в поле малых смещений $u_i(x_k)$
$$a_i \to a'_i = a_i - \delta a_i = a_i + \varepsilon_{ij} a_j + \omega_{ij} a_j,$$
где $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ – тензор малых деформаций, $\omega_{ij} = (u_{i,j} - u_{j,i})/2$ – тензор поворота, связанный с вектором поворота φ_i соотношением
$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Здесь $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$ и т.д.
- Условия совместности малых деформаций (*уравнения Сен-Венана*)
$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0.$$
- Вектор напряжений (сила, действующая на единичную площадку с нормалью n_j) $t_i = \sigma_{ij} n_j$, где n_j – внешняя нормаль к поверхности в данной точке.
- Тензор напряжений $\sigma_{ij} = t_i(\vec{e}_j)$.
- Координаты жидкой частицы в момент времени t, находившейся в начальный момент $t = 0$ в точке $\vec{\xi}$:
$$\vec{x} = \vec{X}(t|\vec{\xi}), \quad \vec{X}(0|\vec{\xi}) = \vec{\xi}.$$
- Обратная функция $\vec{\xi} = \vec{\Xi}(\vec{x}, t)$.
- Скорость $\vec{\xi}$ – частицы в момент t
$$\vec{V}(t|\vec{\xi}) = \left(\frac{\partial \vec{X}(t|\vec{\xi})}{\partial t} \right)_{\vec{\xi} = \text{const}}.$$

- Поле скоростей $\vec{v}(\vec{x},t) = \vec{V}(t|\vec{\Xi}(x,t))$.
- Уравнения линий тока
$$\frac{\delta x_1}{v_1} = \frac{\delta x_2}{v_2} = \frac{\delta x_3}{v_3}.$$
- Скорость $\vec{\xi}$-частицы в заданном поле скоростей
$$\vec{V}(t|\vec{\xi}) = \vec{v}(\vec{X}(t|\vec{\xi}),t).$$
- Уравнение траектории жидкой частицы
$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}.$$
- Ускорение $\vec{\xi}$-частицы
$$\vec{A}(t|\vec{\xi}) = \left(\frac{\partial \vec{V}(t|\vec{\xi})}{\partial t}\right)_{\vec{\xi}=\text{const}}.$$
- В плоском (двумерном) потенциальном течении несжимаемой жидкости $v_x = \partial\phi/\partial x$, $v_y = \partial\phi/\partial y$, где $\phi(x,y)$ – потенциал скоростей двумерного течения, являющийся гармонической функцией
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0.$$
- Комплексный потенциал
$$f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y),$$
где $\psi(x,y)$ – функция тока.
- Комплексное поле скоростей
$$w = v_x + iv_y = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\psi}{\partial x} = [f'(z)]^*.$$
- Интеграл от производной комплексного потенциала вдоль плоской кривой C
$$\int_C f'(z)dz = \Gamma_C + iN_C,$$
где $\Gamma_C \equiv \int_C \vec{v}d\vec{l}$ – циркуляция вектора скорости вдоль C.
- Поле ускорений в заданном поле скоростей
$$\vec{a}(\vec{x},t) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}.$$
- Уравнение непрерывности (баланса массы) в форме Лагранжа $\dfrac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\vec{v}=0$.
- Уравнение непрерывности (баланса массы) в форме Эйлера $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$.
- Условие несжимаемости $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$.

7.1. Феноменологическое описание сплошной среды

7.1.1. Даны три вектора малой длины a, направленные вдоль координатных осей. Найти изменения их длин, углов между ними и объёма построенного на них кубика в результате малых деформаций, характеризуемых тензором ε_{ij}.

7.1.2. Тензор преобразования

$$u_{ij} = \begin{pmatrix} 0,860 & -0,496 & 0 \\ 0,259 & 0,467 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

разложить на вращательную и деформированную составляющие. Определить угол поворота α.

7.1.3. Для поля смещений[1]

$$\vec{u} = (x_1 - x_3)^2\,\vec{e}_1 + (x_2 + x_3)^2\,\vec{e}_2 - x_1 x_2 \vec{e}_3$$

определить тензор деформации, тензор поворота и вектор поворота в точке $\vec{x} = 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

7.1.4. Для поля смещений

$$\vec{u} = (4x_1 - x_2 + 3x_3)\vec{e}_1 + (x_1 + 7x_2)\vec{e}_2 + (-3x_1 + 4x_2 + 4x_3)\vec{e}_3$$

найти главные деформации (удлинения).

7.1.5. Показать, что поле смещений

$$\vec{u} = 0,02x_3\vec{e}_1 - 0,03x_3\vec{e}_2 - (0,02x_1 - 0,03x_2)\vec{e}_3$$

описывает поворот абсолютно твёрдого тела. Найти изменение вектора $\vec{a}$, проведенного из точки $3\vec{e}_1+4\vec{e}_3$, в точку $3\vec{e}_1+0,1\vec{e}_2+4\vec{e}_3$.

7.1.6. Выразить компоненты тензора деформации в цилиндрических координатах r, φ, z.

7.1.7. Выразить компоненты тензора деформации в сферических координатах r, θ, φ.

[1] Здесь и далее для удобства вычислений используются условные единицы.

7.1.8. Удовлетворяет ли тензор

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_1x_3 \\ x_2^2 & x_3 & x_3^2 \\ x_1x_3 & x_3^2 & 5 \end{pmatrix}$$

условию совместности деформаций?

7.1.9. Дано поле перемещений $u_1 = 3x_1x_2^2$, $u_2 = 2x_3x_1$, $u_3 = x_3^2 - x_1x_2$. Определить тензор деформации и проверить, удовлетворяются ли условия совместности деформаций.

7.1.10. Тензор напряжений в некоторой точке задан так:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения в этой точке на площадке с нормалью $\vec{n} = (2/3)\vec{e}_1 - (2/3)\vec{e}_2 + (1/3)\vec{e}_3$.

7.1.11. Напряженное состояние упругого тела задано тензором

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & 0 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Показать, что если объёмные силы равны нулю, то условия равновесия выполняются. Вычислить вектор напряжения в точке $P(4;-4;7)$ на плоскости $2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$ и на сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 81$. Определить главные напряжения.

7.1.12. Напряженное состояние среды задано тензором

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения в точке $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \sqrt{3}\vec{e}_3$ на площадке, касательной в этой точке к цилиндрической поверхности $x_2^2 + x_3^2 = 4$.

7.1.13. Напряженное состояние в некоторой точке задано тензором σ_{ij}. Определить тензор напряжений в системе, полученной поворотом осей тензором преобразований a_{ij}.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.1.14. Определить главные напряжения и главные оси тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.1.15. Доказать, что любой симметричный тензор, например, тензор напряжений σ_{ij}, при переходе к любой другой системе координат преобразуется в тензор σ'_{ij}, также являющийся симметричным.

7.1.16. Используя метод неопределённых множителей Лагранжа, показать, что экстремальные (максимальное и минимальное) значения нормального напряжения $\sigma_N \equiv \vec{t}\vec{n} = \sigma_{ij}n_in_j$ совпадают с главными напряжениями.

7.1.17. Какой вид должны иметь компоненты объёмной силы, если при распределении напряжений, указанном в задаче 7.1.12, всюду выполнены условия равновесия?

7.1.18. Задано поле смещений

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 \cos\beta x_3 - x_2 \sin\beta x_3 \\ u_2 &= x_1 \sin\beta x_3 + x_2 \cos\beta x_3 \\ u_1 &= x_3, \end{aligned}$$

представляющее крутильную деформацию вокруг оси $\vec{e}_3$, поворот каждой плоскости $x_3 = \text{const}$ в которой зависит от её координаты x_3. Найти тензор $u_{i,j}$.

7.1.19. Вывести формулу Коши-Гельмгольца, утверждающую, что скорость $\vec{v}$ любой точки сплошной среды складывается из скорости $\vec{v}'$ близкой к ней точки $\vec{x}' = \vec{x} + \delta\vec{x}$ и относительной скорости $\delta\vec{v} = \vec{v} - vecv$, состоящей из вращательной и деформационной компонент.

7.1.20. Полный круговой цилиндр высотой L с внутренним радиусом a и внешним b подвержен деформации

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &\mapsto x'_1 = f(r)[x_1 \cos\phi(x_3) - x_2 \sin\phi(x_3)],\\
\vec{x}_2 &\mapsto x'_2 = f(r)[x_2 \cos\phi(x_3) + x_2 \sin\phi(x_3)],\\
\vec{x}_3 &\mapsto x'_3 = \lambda x_3,
\end{aligned}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, а ось OX_30 совпадает с осью цилиндра. Проанализировать деформационную картину.

7.1.21. Полагая деформации малыми, показать, что поле смещений

а) $u_i = \alpha x_i (x_k x_k)^{3/2}$, $\alpha = \mathrm{const}$, представляет деформацию несжимаемого тела;

б) $\vec{u} = \nabla\phi$, $\quad \phi \equiv \phi(\vec{x})$, представляет деформацию без вращения;

в) $\vec{u} \equiv \vec{u}_0(t) + [\vec{z}(t), \vec{x}]$ – деформации отсутствуют.

7.2. Кинематика текучей среды

7.2.1. Пусть $\vec{v}\,(\vec{x}, t) = \vec{b}t$. Найти $\vec{X}\left(t|\,\vec{\xi}\right)$.

7.2.2. Пусть $\vec{v}\,(\vec{x}, t) = c\vec{x}$. Найти $\vec{X}\left(t|\,\vec{\xi}\right)$.

7.2.3. Пусть $\vec{v}\,(\vec{x}, t) = c\vec{x}t$. Найти $\vec{V}\left(t|\,\vec{\xi}\right)$.

7.2.4. Пусть $\vec{V}\left(t|\,\vec{\xi}\right) = \vec{b}t + c\vec{\xi}$. Найти $\vec{v}\,(\vec{x}, t)$.

7.2.5. Дано[2] поле скоростей $\vec{v}(\vec{x}, t) = (x_1\vec{e}_1 + 2x_2\vec{e}_2 + 3x_3\vec{e}_3)/(1+t)$. Найти поле ускорений $\vec{a}\,(\vec{x}, t)$ и ускорение частицы $\vec{A}\left(t\,|\,\vec{\xi}\right)$.

7.2.6. В условиях предыдущей задачи найти линии тока и траектории.

7.2.7. Дано поле скоростей $\vec{v}(\vec{x}, t) = x_1^2 t\vec{e}_1 + x_2 t^2 \vec{e}_2 + x_1 x_3 t\vec{e}_3$. Определить ускорение частицы в момент $t = 1$ в точке (1, 3, 2).

7.2.8. Доказать соотношение $\dfrac{d}{dt}(\delta\vec{l}) = \delta\vec{V}$, где $\delta\vec{l} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ – вектор расстояния между двумя близкими точками в потоке, а $\delta\vec{V}$ – разность скоростей между ними.

[2] Здесь и ниже используются условные (или безразмерные) единицы.

7.2.9. Доказать, что для поля скоростей $v_1 = x_1^2 x_2 + x_2^3$, $v_2 = -x_1^3 - x_1 x_2^2$, $v_3 = 0$ линии тока будут окружностями.

7.2.10. Показать, что поле скоростей $v_i = Ax_i \,/ (x_j x_j)^{3/2}$ удовлетворяет уравнению непрерывности несжимаемой жидкости $v_{i,i} = 0$.

7.2.11. Рассматривается одномерное (вдоль оси OX) течение идеальной жидкости, заданное полем скоростей $v_x(x,t) = v(t)$, зависящим только от времени. Начальная плотность $\rho(x,0) = \rho_0(x)$. Найти плотность в момент времени $t > 0$.

7.2.12. Пусть поле скоростей совершающей одномерное движение идеальной жидкости стационарно $v(x,t) = v(x)$. Найти плотность $\rho(x)$.

7.2.13. Найти $\rho(x,t)$ в поле скоростей одномерного движения $v(x,t) = v_0 \cos \omega t$ при начальном условии $\rho(x,0) = \dfrac{A}{1 - x^2}$.

7.2.14. На примере одномерного течения показать, что в однородном поле скоростей первоначально однородная среда продолжает оставаться однородной.

7.2.15. Дано поле скоростей несжимаемой жидкости $v_1 = A(x_1^2 - x_2^2) \,/ r^4$, $v_2 = A(2x_1 x_2) \,/ r^4$, $v_3 = 0$, где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Доказать, что оно удовлетворяет уравнению непрерывности.

7.2.16. Доказать, что поле скоростей, заданное в предыдущей задаче, является безвихревым.

7.2.17. Дано поле скоростей $v_1 = 4x_3 - 3x_2$, $v_2 = 3x_1$, $v_3 = -4x_1$. Доказать, что оно соответствует вращению абсолютно твердого тела. Найти вектор угловой скорости.

7.2.18. Проверить, удовлетворяет ли поле скоростей $\vec{v} = A\vec{x}/|\vec{x}|^5$ условию непрерывности несжимаемой жидкости.

7.2.19. Двумерное (в плоскости XOY) нестационарное течение жидкости характеризуется полем скоростей $\vec{v} = (Bt/r)\vec{e}_r$. Определить ускорение частиц жидкости, движущихся по оси OX.

7.2.20. Задано поле скоростей $\vec{v}\,(\varrho, \varphi, z)$ компонентами v_ϱ, v_φ и v_z в цилиндрической системе координат. Записать поле ускорений в этой системе.

7.2.21. Задано поле скоростей $\vec{v}\,(r,\theta,\varphi)$ компонентами v_r, v_θ и v_φ в сферической системе координат. Записать поле ускорений в этой системе.

7.2.22. Ось OZ является равномерным и постоянным источником идеальной несжимаемой жидкости, совершающей стационарное движение в отсутствие внешних сил. Найти поле скоростей и поле ускорений.

7.2.23. В условиях предыдущей задачи источник изменяет количество подаваемой жидкости так, что поле скоростей принимает вид $v_r = At/r$, $v_\varphi = v_z = 0$. Найти поле ускорений.

7.2.24. Доказать, что в стационарном режиме $(\partial v_i/\partial t = 0)$ линии тока и траектории движения частиц совпадают.

7.2.25. Доказать теорему Кельвина $\dfrac{d}{dt}\oint\limits_C \vec{v}\delta\vec{l} = \oint\limits_C \dot{\vec{v}}\delta\vec{l}$.

7.2.26. Найти циркуляцию скорости по контуру квадрата $x_1 = \pm 1$, $x_2 = \pm 1$, $x_3 = 0$ в двумерном течении с полем скоростей $\vec{v} = (x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (x_1^2 - x_2)\vec{e}_2$.

7.2.27. Если все линии тока, образующие трубку тока, нормальны к поверхности некоторого сечения, то такое сечение называют *нормальным сечением трубки*. Доказать, что условие существования нормальных сечений у трубок жидкости имеет вид $\vec{v}\,\mathrm{rot}\vec{v} = 0$.

7.2.28. Доказать, что ускорение жидкости в поле скоростей $\vec{v}(\vec{r},t)$ можно записать в виде $\vec{a}(\vec{r},t) = \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + [\mathrm{rot}\vec{v},\vec{v}] + \dfrac{1}{2}\nabla v^2$.

7.2.29. Стационарное двумерное поле скоростей несжимаемой жидкости задано уравнением

$$\vec{v}(x_1,x_2) = (0,5 + 0,8x_1)\vec{e}_1 + (1,5 - 0,8x_2)\vec{e}_2.$$

Вычислить материальное ускорение.

7.2.30. В условиях предыдущей задачи найти линии тока в форме функций $x_2 = x_2(x_1)$. Сделать набросок этих линий.

7.2.31. В условиях задачи 7.2.29 найти вектор скорости вращения, тензор скорости деформации, скорость объёмного сжатия.

7.2.32. Найти завихренность поля скоростей $\vec{v} = x^2\vec{e}_1 + (-2x_1x_2 - 1)\vec{e}_2$.

7.3. Динамика текучей среды

7.3.1. Доказать, что лагранжева и эйлерова формы уравнения непрерывности эквивалентны.

7.3.2. Пусть $(u_1(t), v_1(t))$ и $(u_2(t), v_2(t))$ – любые два решения системы дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = a(t)u(t) + b(t)v(t)$$

и

$$\dot{v} = c(t)u(t) + g(t)v(t).$$

Доказать теорему Абеля-Лиувилля-Остроградского, утверждающую, что вронскиан (определитель Вронского) этой системы

$$D \equiv \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

даётся выражением

$$D = C \exp\left(\int [a(t) + g(t)] dt \right).$$

7.3.3. Пользуясь теоремой Абеля-Лиувилля-Остроградского, доказать, что для системы

$$\dot{x}_1 = v_1(x_1, x_2, t), \quad \dot{x}_2 = v_2(x_1, x_2, t)$$

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(x_{10}, x_{20})} = \exp\left\{ \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) dt' \right\}.$$

7.3.4. Найти для трёхмерного движения $\vec{r} = \vec{r}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{v}(t'|\vec{r}_0) dt'$ якобиан

$$\frac{D\vec{r}}{D\vec{r}_0} = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{j0}} \right).$$

7.3.5. Записать решение уравнения непрерывности $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \mathrm{div}\vec{\mathrm{v}}$ при известном начальном условии $\rho(\vec{r}, t_0) = \rho_0(\vec{r})$ и вектор-функции $\vec{R}(t_0; t, \vec{r})$, определяемой уравнением $\vec{R}(t_0; t, \vec{r}) = \vec{r}_0$.

7.3.6. Найти $\rho(\vec{r},t)$ среды с однородным полем скоростей $\vec{v} = \vec{v}(t)$ и начальным условием $\rho(\vec{r},0) = f(\vec{r})$.

7.3.7. Масса m в начальный момент времени равномерно распределена по объёму, ограниченному сферой радиуса R. Задано поле скоростей в виде $\vec{v}(\vec{r},t) = H(t)\vec{r}$, где $H(t)$ – некоторая известная функция. Найти зависимость плотности от координат и времени.

7.3.8. В условиях предыдущей задачи найти соотношение между t, ρ и $H(\rho)$.

7.3.9. Самогравитирующая однородная среда в начальный момент времени заполняет шар радиуса $R(0)$. Показать, что если в начальный момент времени распределение массы по шару было однородным, а поле скоростей удовлетворяло соотношению $\vec{v}(\vec{r},0) = H_0\vec{r}$, то и во все последующие моменты времени оба эти свойства будут иметь место.

7.3.10. В условиях предыдущей задачи определить $\rho(t)$ и $H(t)$, пренебрегая гравитацией.

7.3.11. В условиях задачи 7.3.9 доказать соотношение

$$H^2 = (8/3)\pi\gamma\rho + C\rho^{2/3},$$

где C – постоянная, определяемая начальными условиями.

7.3.12. Доказать, что уравнение непрерывности для вектора завихренности $\vec{q} = \operatorname{rot}\vec{v}$ (см. задачу 7.3.10) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V q_i dV = \int\limits_S [\varepsilon_{ijk}a_k + q_j v_i] dS_j.$$

7.3.13. Течение задано полем скоростей $v_1 = 0$, $v_2 = A(x_1x_2 - x_3^2)$, $v_3 = A(x_2^2 - x_1x_3)$. Найти тензор завихренности в точке $P(1,0,3)$.

7.3.14. Показать, что в поле скоростей

$$v_1 = A[-\sin(x_1/a) + \cos(x_1/a)],$$

$$v_2 = A[x_2/a + x_3/a]\sin(x_1/a),$$

$$v_3 = A[x_2/a + x_3/a]\cos(x_1/a)$$

вихревые линии совпадают с линиями тока.

7.3.15. Найти потенциал скоростей стационарного однородного плоскопараллельного потока.

7.3.16. Определить поле скоростей жидкости с потенциалом скоростей а) $\phi(x, y, z) = ax$, б) $\phi(r, \theta, \varphi) = b \ln r$, и в) $\phi(r, \theta, \varphi) = c\varphi$.

7.3.17. Комплексный потенциал двумерного течения имеет вид $f(z) = cz$, где c – комплексная постоянная. Доказать, что ему соответствует плоскопараллельное течение с постоянной скоростью.

7.3.18. Комплексный потенциал двумерного течения имеет вид $f(z) = a \ln z$, где a – действительное число. Найти линии тока.

7.3.19. В условиях предыдущей задачи найти Γ_C и N_C.

7.3.20. Комплексный потенциал двумерного течения имеет вид $f(z) = v_\infty z + m/z$, где v_∞ и m – положительные действительные числа. Найти абсолютную величину скорости на окружности $z = ae^{i\alpha}$.

7.3.21. Круговой цилиндр радиусом R с центром в начале координат обтекается потоком с комплексным потенциалом $f(z) = v_\infty(z + R^2/z)$. Найти критические точки (точки, где скорость обращается в нуль).

7.3.22. Решить предыдущую задачу при условии, что $f(z) = v_\infty(z + R^2/z) + (\Gamma/2\pi i) \ln z$.

7.3.23. Найти линии тока в окрестности критической точки аксиально симметричного тела, обтекаемого потоком с потенциалом скоростей $\phi = ar^2 + bz + cz^2$.

7.3.24. Несжимаемая идеальная жидкость обтекает шар радиусом a. Потенциал скоростей жидкости $\phi(\vec{r}) = -Ax/r^3 - Bx$. Показать, что вне шара он удовлетворяет уравнению Лапласа. Постоянные A и B найти из граничного условия на бесконечности.

7.3.25. В условиях предыдущей задачи найти распределения скоростей по поверхности шара. Найти критические точки и максимальную скорость.

7.3.26. Найти гравитационное давление внутри земного шара в модели однородной несжимаемой жидкости.

7.3.27. Жидкость, уравнение состояния которой имеет вид $p = \lambda\rho^k$, находится в однородном поле тяжести. Найти глубину, на которой давление будет в N раз превышать атмосферное.

7.3.28. Широкий сосуд с несжимаемой жидкостью движется с постоянным ускорением $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_z\vec{e}_z$ в однородном поле тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Найти наклон свободной поверхности жидкости.

7.3.29. Определить форму свободной поверхности несжимаемой жидкости, вращавшейся вместе с содержащим её вертикальным цилиндрическим сосудом вокруг его оси.

7.3.30. В условиях предыдущей задачи найти угловую скорость, при которой поверхность жидкости коснется дна вращающегося сосуда (объём жидкости и радиус цилиндрического сосуда заданы).

7.3.31. Несжимаемая жидкость массой m вращается в невесомости с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси. Найти форму свободной поверхности, если частицы жидкости притягиваются к центру оси вращения с силой, пропорциональной расстоянию до него.

7.3.32. Оценить сплюснутость Земли, обусловленную её осевым вращением, рассматривая Землю как однородный несжимаемый жидкий шар.

7.3.33. Пусть $m(r)$ – масса части сферически симметричной звезды, заключённая в пределах сферы радиуса r, описанной вокруг центра звезды. Показать, что уравнение гидростатического равновесия может быть записано в виде $dp/dm = -\gamma m/(4\pi r^4)$.

7.3.34. Определить скорость на свободной поверхности жидкости, перетекающей через вертикальную стенку в однородном поле тяжести.

7.3.35. Найти функцию давления $\mathcal{P}(p)$ вдоль линии тока совершенного газа с уравнением состояния $p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$. Что можно сказать о поведении давления, плотности и температуры с ростом скорости жидкости вдоль линии тока?

7.3.36. Жидкость, уравнение состояния которой имеет вид $p = \lambda\rho^k$, вытекает из большого закрытого резервуара под давлением в N атмосфер через гладкую тонкую трубку. Определить скорость истечения жидкости.

7.3.37. Найти соотношение между скоростями и давлениями несжимаемой идеальной жидкости, стационарно текущей в горизонтальной трубе переменного сечения, в поперечных сечениях с площадями S_1 и S_2.

7.3.38. Стационарный поток несжимаемой идеальной жидкости характеризуется полем скоростей (в цилиндрической системе) $\vec{r} = (1/r)\vec{e}_\varphi$. Найти давление в данном потоке.

7.3.39. В условиях задачи 7.2.7 найти градиент давления в точке $P(1,3,2)$ в момент времени $t = 1$.

7.3.40. Жидкость равномерно вращается вокруг оси OZ с угловой скоростью Ω как твёрдое тело. Используя уравнения Эйлера, найти поле градиентов давлений.

7.3.41. В начале координат находится сферический источник идеальной несжимаемой жидкости, совершающей стационарное безвихревое течение в отсутствие внешних сил. Найти распределение давления при заданной мощности источника Q, полагая давление на поверхности источника $p(r_0) = 0$.

7.4. Уравнения баланса

7.4.1. Привести уравнение баланса массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$$

в одномерном течении $x = x(t;\xi)$ $(\xi = x|_{t=t_0})$ к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\rho \frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = 0.$$

7.4.2. Среда с пренебрежимо малым давлением и сохраняющейся массой течёт в стационарном силовом поле с удельной (на единицу массы) потенциальной энергией $u(\vec{r})$. Доказать, что полная (кинетическая + потенциальная) энергия каждой малой порции этой среды сохраняется.

7.4.3. Доказать, что в случае сохранения импульса движущейся среды уравнение его баланса в сочетании с уравнением баланса массы преобразуется к виду $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = 0$, означающему, что каждая частица этой среды движется с постоянной скоростью.

7.4.4. Частично ионизованный газ (плазма) состоит из нейтральных атомов N, положительно заряженных ионов I_1 и I_2 с зарядами 1 и 2 соответственно и электронов e с зарядом -1. Обозначим концентрации и скорости этих компонент через $n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_-$ и $\vec{v}_0,\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_-$ соответственно. В этой среде происходят реакции

$$N \rightleftharpoons I_1 + e, \quad I_1 \rightleftharpoons I_2 + e.$$

Написать дифференциальные уравнения в форме Эйлера для концентраций.

7.4.5. Показать, что тяжёлая компонента $(n_0 + n_1 + n_2)$ плазмы, о которой шла речь в предыдущей задаче, удовлетворяет уравнению непрерывности.

7.4.6. Для описанной в задаче 7.4.4 плазмы вывести уравнение сохранения заряда.

7.4.7. Пусть $\vec{r}, t$ – радиус-вектор точки и время в неподвижной системе K, а $\vec{r}', t'$ – то же в K', поступательно движущейся с постоянной скоростью $\vec{V}$ относительно неподвижной и совпадавшей с ней в нулевой момент времени. В нерелятивистской механике они связаны преобразованием Галилея:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t,\ t = t'; \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}.$$

Очевидно, скалярные локальные параметры среды (температура, плотности массы, заряда и пр.), не связанные непосредственно с движением, остаются инвариантными по отношению к этим преобразованиям в отличие, например, от скорости (преобразование которой указано выше) и её производных. Однако пространственно-временные производные этих локальных параметров, естественно, меняются. Обозначим через $\;= (\vec{r}, t)$ такой (инвариантный относительно преобразования Галилея) локальный параметр. Найти преобразование его частной производной по времени при переходе из одной системы в другую.

7.4.8. В условиях предыдущей задачи вывести формулу преобразования вектора плотности потока $\vec{j}_A$.

7.4.9. Преобразовать дифференциальную (лагранжеву) форму уравнения баланса

$$\frac{\partial(\rho A)}{dt} + \nabla\vec{j}_A = Q_A$$

в интегральную.

7.4.10. Часто наряду с *локальной* плотностью потока $\vec{j}_A = \rho A\vec{v}_A$ для описания движения величины A используется *субстанциональная* $\vec{J}_A$, определяемая формулой

$$\vec{J}_A = \vec{j}_A - \rho A\vec{v} = \rho A(\vec{v}_A - \vec{v}),$$

где $\vec{v}$ – скорость перемещения массы в данной точке. Вектор $\vec{J}_A$ характеризует относительное (по отношению к движущейся массе) перемещение величины A. Если исследуемая полевая величина *вморожена в массу*, то $\vec{v}_A = \vec{v}$, и тогда $\vec{J}_A = 0$.

Вывести субстанциональное уравнение баланса в дифференциальной и интегральной формах.

7.4.11. Вывести соотношение, связывающее субстанциональное и локальное изменения величины A.

7.4.12. В трубе кругового сечения с осью OZ переменного радиуса $a(z) = be^{-cz} + d$ (b, c и d – положительные постоянные) течёт несжимаемая жидкость. Найти усреднённую по сечению скорость течения как функцию координаты z и времени t при условии, что расход жидкости в сечении $z = 0$ возрастает по линейному закону $\alpha + \beta t$.

Глава 8

Идеальная жидкость

- Уравнения движения (*уравнения Эйлера*)
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p,$$
где $\vec{g} = \vec{f}/\rho$ – массовая плотность сил.
- Уравнение движения баротропной жидкости в потенциальном поле $\vec{g} = -\nabla\phi$
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla(\phi + \mathcal{P}),$$
где
$$\mathcal{P}(\vec{r}, t) = \int\limits_{p^*}^{p(\vec{r},t)} \frac{dp}{\rho(p)}.$$
- Вторая форма уравнения движения (Громеки-Лэмба)
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}, \vec{\omega}] + \nabla(v^2/2 + \phi + \mathcal{P}) = 0,$$
где $\vec{\omega} = \operatorname{rot}\vec{v}$ – вектор *завихренности* (Лэмб, 1879). Отметим физический смысл его: вокруг точки с завихренностью $\vec{\omega}$ выделить мгновенно затвердевший малый сферический объём жидкости, а остальную часть жидкости убрать, то угловая скорость вращения твёрдой сферы $\vec{\Omega}$ будет равна половине вектора $\vec{\omega}$: $\vec{\Omega} = \vec{\omega}/2$ (см. задачу 8.1.4).
- Теорема Бернулли для стационарного течения идеальной баротропной жидкости:
$$\frac{\rho v^2}{2} + \phi + \mathcal{P} = \text{const}$$
вдоль линии тока (слабая форма) или во всём объёме (сильная форма).
- Изменение внутренней энергии с учётом теплопереноса, характеризуемого источником с объёмной плотностью s и вектором плотности потока тепла $\vec{c}$,
$$\frac{d}{dt}\int\limits_V U\ dV = \int\limits_V (v_{ij}\sigma_{ij} - c_{i,i} + s)\, dV.$$

- Движение проводящей (с проводимостью σ и магнитной проницаемостью $\mu = 1$) жидкости в магнитном поле $\vec{H}$ описывается системой уравнений

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\,[\vec{v}, \vec{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\vec{H},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\,(\rho\vec{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho}[\vec{H}, \operatorname{rot}\vec{H}] +$$

$$+\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v} + \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}.$$

Система эта должна быть дополнена уравнением состояния $p = p(\rho, T)$.

- В случае несжимаемой жидкости система принимает вид:

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\rho = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{H} = (\vec{H}, \nabla)\vec{v} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\vec{H},$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi\rho}(\vec{H}, \nabla)\vec{H} + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}.$$

8.1. Течение идеальной жидкости

8.1.1. Доказать, что уравнение движения идеальной жидкости можно записать в форме Громеки-Лэмба.

8.1.2. Предполагая, что движение жидкости потенциально ($\vec{\omega} = 0$ и $\vec{v} = \operatorname{grad}\phi$) и сама жидкость баротропна ($(1/\rho)\operatorname{grad}p = \operatorname{grad}\mathcal{P}$), из уравнения Громеки-Лэмба вывести интеграл Коши-Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + \phi = f(t),$$

где $f(t)$ – произвольная функция времени.

8.1.3. Из уравнения Громеки-Лэмба для идеальной баротропной жидкости в поле внешних потенциальных сил вывести уравнение для векторного поля.

8.1.4. Доказать, что $\frac{\vec{\omega}}{2} = \vec{\Omega}$ ($\vec{\Omega}$ – вектор угловой скорости отвердевшего элемента, содержащего точку с завихренностью $\vec{\omega}$).

8.1.5. Вывести одномерное уравнение для плотности идеальной баротропной жидкости.

8.1.6. В условиях предыдущей задачи вывести уравнение для скорости.

8.1.7. Пусть $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$. Найти мощность напряжений $\dot{\varepsilon}_{ij}\sigma_{ij}$.

8.1.8. Доказать, что для поля скоростей $v_i = \varepsilon_{ijk}\Omega_j x_k$ интегральное уравнение для момента импульса сплошной среды

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \varepsilon_{ijk}x_j\rho v_k dV = \int\limits_V \varepsilon_{ijk}x_j\rho f_k dV + \int\limits_S \varepsilon_{ijk}x_j t_k(\vec{n})dS$$

сводится к соответствующему уравнению для момента абсолютного твёрдого тела $\frac{d}{dt}I_{ij}\Omega_j = M_i$.

8.1.9. Преобразовать уравнение Кортевега-де Вриза

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0,$$

описывающее волны на «мелкой» воде, заменой переменных $v(x,t) = u(\xi), \quad \xi = x - ct$.

8.1.10. Показать, что к решениям найденного выше уравнения принадлежит функция

$$u(\xi) = A\mathrm{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{A}{3\beta}}\frac{\xi}{2}\right), \quad A = 3C,$$

описывающая солитон – уединенную волну с бесконечным периодом.

8.1.11. Вывести уравнение Гамильтона-Якоби для точки в потенциальном поле U из уравнения Эйлера для идеальной жидкости.

8.1.12. Тем же способом вывести уравнение Гамильтона-Якоби для нерелятивистского заряда в электромагнитном поле.

8.1.13. Тем же способом вывести уравнение Гамильтона-Якоби для релятивистского заряда в электромагнитном поле.

8.2. Волновое движение

8.2.1. Вывести волновое уравнение для давления в жидкости с переменной невозмущённой плотностью.

8.2.2. Вывести волновое уравнение для потенциала φ скорости несжимаемой идеальной жидкости, определяемого формулой

$$\vec{v} = \nabla\varphi.$$

8.2.3. Вывести формулу волнового сопротивления (отношения давления к скорости) для плоской волны.

8.2.4. Выразить давление идеальной линейно-упругой жидкости через потенциал смещения ψ, связанный со смещением $\vec{u}$ соотношением $\vec{u} = \nabla\psi$.

8.2.5. Вывести из уравнения

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = Q(\vec{r}, t),$$

описывающего распространение волн от заданного источника Q в безграничной однородной стационарной среде, уравнение Гельмгольца

$$[\nabla^2 + k^2]\psi(\vec{r}) = Q(\vec{r}), \quad \psi(\vec{r}) \equiv \hat{\phi}(\vec{r}, \omega), \quad Q(\vec{r}) \equiv \hat{Q}(\vec{r}, \omega).$$

Установить связь между k и ω (дисперсионное соотношение).

8.2.6. Показать, что функции $A\exp(\pm i\vec{k}\vec{r})$ удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца.

8.2.7. Записать уравнение Гельмгольца в условиях цилиндрической симметрии (например, когда источник распределён равномерно по оси z). Расчёты показывают, что в области, свободной от источника, решения этой задачи выражается через функции Ганкеля $H_0^{(1)}(k\varrho)$ и $H_0^{(2)}(k\varrho)$, поведение которых на больших расстояниях характеризуется асимптотиками

$$H_0^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i(z-\pi/4)}$$

и

$$H_0^{(2}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-i(z-\pi/4)}$$

($z \to \infty$). Прямой подстановкой убедиться, что приведённые асимптотики удовлетворяют (с необходимой точностью) этому уравнению.

8.2.8. Убедиться, что асимптотики решения однородного уравнения Гельмгольца, в условиях сферической симметрии имеющие вид

$$\psi(r) = (A/r)e^{\pm kr},\ r \to \infty,$$

удовлетворяют (с необходимой точностью) этому уравнению.

8.2.9. Сферическая поверхность малого переменного радиуса a с центром в начале координат создаёт в бесконечной однородной стационарной среде изотропное переменное поле радиальных смещений $u_r(r,t)$, удовлетворяющее граничному условию $u_r(a,t) = a(t)$ на поверхности сферы. Найти поле смещений.

8.2.10. В газе, заключённом в сосуд, имеющий форму параллелепипеда размерами $a \times b \times c$ со звуконепроницаемыми стенками, возбуждены колебания. Записать семейство решений трёхмерного однородного волнового уравнения с нулевыми условиями на границах сосуда.

8.3. Движение тел в идеальной жидкости

8.3.1. Найти силу сопротивления идеальной жидкости движению в ней шара с ускорением $\vec{a} = \dot{\vec{u}}$, если распределение давления по его поверхности имеет вид $p = p_0 + (9\cos^2\theta - 5)\rho U^2/8 + a_r R\rho/2$, где a_r – проекция ускорения на радиальное направление, ρ – плотность жидкости, R – радиус шара.

8.3.2. Выразить силу, действующую со стороны двумерного потока на обтекаемое им тело, ограниченное замкнутым контуром C.

8.3.3. В условиях предыдущей задачи положить

$$f'^2(z) = \frac{w_\infty^*}{\pi i}\frac{\Gamma}{z} + w_\infty^{*2} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n/z^n$$

и найти абсолютную величину силы.

8.3.4. В несжимаемую жидкость помещен шар переменного радиуса $R = R_0 e^{-\alpha t}$. Определить закон, по которому изменяется давление жидкости на поверхности шара.

8.3.5. Рассматривая ускоренное движение шара в неподвижной (на бесконечности) жидкости, т.е. полагая его скорость $\vec{v}$ равной $-\vec{v}_\infty$, вывести силу сопротивления идеальной жидкости. Найти присоединённую массу μ.

8.3.6. Бесконечной длины цилиндр радиусом R с осью z обтекается потоком жидкости с начальной скоростью $\vec{v}_\infty$, направленной вдоль оси x, и потенциалом скоростей

$$\phi = v_\infty \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos\theta + b\theta,$$

где θ – угол между осью x и перпендикуляром, опущенным из точки наблюдения на ось цилиндра. Найти поле скоростей и силу, действующую на цилиндр.

8.3.7. Вывести уравнение колебаний сферического пузырька газа в идеальной несжимаемой жидкости (уравнение Рэлея).

8.3.8. В условиях предыдущей задачи вычислить давление на границе пузырька.

8.3.9. Показать, что полученное в задаче 8.3.7 уравнение Рэлея соответствует функции Лагранжа

$$L = \frac{R^3 \dot{R}^2}{2} - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{R_0^3}{3\gamma - 1} \left(p(\infty) + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma-1} - 1 \right] + \right.$$

$$\left. + \sigma(R^2 - R_0^2) + p(\infty) \frac{R^3 - R_0^3}{3} \right\}.$$

8.3.10. В условиях двух предыдущих задач вычислить частоту малых ($|R - R_0| << R_0$) колебаний пузырька газа в идеальной жидкости.

8.3.11. Вывести формулу для силы, действующей на тело, погруженное в несжимаемую жидкость с заданным полем скоростей $\vec{v}(\vec{r})$ ($\vec{v}_\infty = 0$).

8.3.12. Шар радиуса a, движущийся в идеальной несжимаемой жидкости со скоростью $\vec{v}_0$, создает поле скоростей

$$\vec{v}(\vec{r}) = (a^3/2r^5)\left[3(\vec{v}_0\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{v}_0\right].$$

Построить линии тока.

8.3.13. В условиях предыдущей задачи найти суммарный импульс системы шар + вовлекаемая им в движение жидкость.

8.3.14. В условиях задачи 8.3.12 найти кинетическую энергию системы шар + вовлекаемая им в движение жидкость.

8.3.15. Вывести общее уравнение для потенциала скорости при произвольном стационарном потенциальном течении сжимаемого газа.

8.3.16. В условиях предыдущей задачи положить $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$, где $\vec{v}_0 = \text{const}$ и $\vec{v}_1 \ll \vec{v}_0$, $\phi = \phi_0 + \phi_1$ и найти уравнение для ϕ_1 в линейном приближении.

8.3.17. В приближении предыдущей задачи найти давление.

8.3.18. Тело вращения с гладкой выпуклой поверхностью длиной l, обтекается однородным потоком молекул газа, текущим вдоль оси симметрии. Найти уравнение поверхности, обеспечивающей минимальное сопротивление, при заданных l и $R = r(l)$.

8.4. Магнитогидродинамика

8.4.1. Показать, что плотность энергии проводящей жидкости в магнитном поле отличается от таковой для непроводящей жидкости дополнительным слагаемым $H^2/8\pi$.

8.4.2. Показать, что в пределе высокой проводимости уравнение

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\vec{v}, \vec{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\vec{H}$$

превращается в

$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{H}}{\rho} = \frac{1}{\rho}(\vec{H}, \nabla)\vec{v}.$$

8.4.3. Несжимаемая вязкая проводящая жидкость стационарно движется между двумя плоско-параллельными стенками $z = \pm a$ вдоль оси OX. Градиент давления вдоль этой оси постоянен, в направлении OZ перпендикулярном OX приложено однородное магнитное поле H_0. Определить профиль скорости $v(z)$.

8.4.4. В условиях предыдущей задачи найти среднюю (по сечению) скорость жидкости. Прокомментировать зависимость результата от критерия влияния магнитного поля $\alpha = \frac{H_0}{c}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$.

8.4.5. Пренебрегая процессами диссипации записать систему МГД-уравнений для сжимаемой жидкости и, представив $\vec{H}, p, \rho$ в виде сумм стационарных решений их волновых возмущений, содержащих множитель $e^{i(\vec{k}\,\vec{x}-\omega t)}$, вывести систему уравнений для возмущений.

8.4.6. Показать, что в условиях предыдущей задачи система уравнений может быть разбита на две группы, одна из них содержит только h_z и v_z, другая – только h_y, v_x и v_y. Записать эти группы и дать физическую интерпретацию.

8.4.7. Найти закон дисперсии и групповую скорость волнового процесса, описываемого первой группой уравнений, полученной в предыдущей задаче.

8.4.8. Показать, что вторая группа решений в задаче 8.4.6 указывает на существование ещё двух типов волн, векторы $\vec{h}$ и $\vec{v}$ в которых лежат в плоскости векторов $\vec{H}$ и $\vec{k}$. Проанализировать предельный случай $H^2 \ll 4\pi\rho u_0^2$. Обратить внимание на случай несжимаемой жидкости.

8.4.9. Продолжив анализ результатов предыдущей задачи, рассмотреть её решение в обратном предельном случае $H^2 \gg 4\pi\rho u_0^2$.

8.4.10. Как можно увидеть из анализа результатов рассмотренных выше задач, при $\vec{k} \perp \vec{H}$ $(H_x = 0, H_y = H)$ u_1 и u_2 обращаются в нуль и остаются волны лишь одного типа:

$$u_2 = \sqrt{u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho}}.$$

Оставшаяся при этом система уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (v_x H)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v_x \rho)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{8\pi\rho} \frac{\partial H^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

приводит к обычной гидродинамической задаче об одномерном движении плоской волны, не связанной с предположением о малости её амплитуды. Выполнить это преобразование.

8.4.11. Полагая проводящую жидкость баротропной ($p = p(\rho)$), в условиях предыдущей задачи. Найти скорость звука в такой жидкости, помещённой в магнитное поле.

8.4.12. Показать, что уравнение магнитного поля в несжимаемой проводящей жидкости допускает решение $\vec{H} = \mathrm{const} \cdot \vec{\omega}$, где $\vec{\omega} = \mathrm{rot}\, \vec{v}$ – завихренность течения жидкости.

8.5. Вселенная как сплошная среда

8.5.1. Первую (в современном представлении) теорию формирования крупномасштабной структуры Вселенной предложил сэр Джеймс Джинс (выдающийся английский математик, физик, астроном) в самом начале прошлого века. Его первым шагом в решении этой задачи было взять однородную стационарную самогравитирующую идеальную (без вязкости) жидкость ($\rho = \mathrm{const}$, $p = \mathrm{const}$, $\vec{u} = 0$), внести в неё малые изменения ρ_1, p_1 и $\vec{u}_1$ и вывести для них уравнения в первом приближении теории возмущений. Выполнить этот шаг.

8.5.2. Используя результаты предыдущей задачи, найти дисперсионное соотношение.

8.5.3. В двух предыдущих задачах не учитывалось расширение Вселенной. Чтобы учесть это, необходимо перейти от пространственной переменной $\vec{r}$ к переменной $\vec{x} = \vec{r}/a(t)$, где масштабный фактор $a(t)$ вследствие однородности и изотропности пространства является универсальной функцией собственного мирового времени. Преобразовать уравнение непрерывности для плотности массы к расширяющейся системе координат.

8.5.4. Преобразовать к расширяющей системе координат уравнение движения идеальной жидкости

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)_{\vec{r}}+\rho\left(\vec{u}\nabla_{\vec{r}}\right)\vec{u}=-\nabla_{\vec{r}}p-\rho\nabla_{\vec{r}}\phi.$$

8.5.5. Вывести уравнение для относительной вариации плотности $\delta(\vec{x},t)=[\rho(\vec{x},t)-\rho_0(t)]/\rho_0$ в расширяющейся системе координат.

8.5.6. В популярной космологической модели $\dot{a}^2=(8/3)G\rho_0a^2$. Полагая $\rho_0=Aa^{-3}$, найти общее решение уравнения, приведённого в ответе к предыдущей задаче.

8.5.7. Предположим, что идеальная жидкость баротропна, а зависимость $p=p(\rho)$ удовлетворительно описывается двумя членами разложения

$$p(\rho)=p_0+v_{\text{зв}}^2\rho_0\delta,\ p_0=p(\rho_0).$$

Найти *длину волны Джинса*, при которой гравитация и давление уравновешивают друг друга.

8.5.8. Существует и альтернативный (по отношению к модели непрерывной идеальной среды) подход к описанию движения материи во Вселенной, основанный на представлении её в виде множества частиц (в качестве которых могут приниматься, например, галактики), статистически распределённых в пространстве. Частицы эти взаимодействуют друг с другом посредством гравитационных сил, но в этой задаче мы ограничимся приближённым представлением о том, что каждая частица движется независимо от других в некотором общем поле сил. Главная особенность этой модели в наличии дополнительной независимой переменной (скорости $\vec{v}$ или импульса $\vec{p}$), состояние такой среды в момент времени t характеризуется совместным распределением координат и импульсов $n(\vec{r},\vec{p},t)$, изначально подчиняющимся уравнению Власова. Записать уравнение Власова в собственной (пекулярной) системе координат и вывести из него уравнение для $\delta(\vec{x},t)$.

Глава 9

Вязкая жидкость

- В вязкой среде $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$, где τ_{ij} – тензор вязких напряжений. В несжимаемой жидкости $\tau_{ij} = \eta(v_{i,j} + v_{j,i})$, $\eta \equiv \nu\rho$ – динамическая вязкость, ν – кинетическая вязкость.
- Вектор напряжений (сила, с которой жидкость действует на единицу поверхности с нормалью $\vec{n}$, направленной из жидкости в твёрдую стенку)
$$t_i = pn_i - \tau_{ij}n_j.$$
- Уравнения движения для вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье-Стокса)
$$\rho(\partial\vec{v}/\partial t + (\vec{v}\nabla)\vec{v}) = \vec{f} - \nabla p + \eta\nabla^2\vec{v},$$
где $\vec{f} \equiv \rho\vec{g}$ – объемная плотность силы, $\vec{g}$ – её массовая плотность.
- Граничные условия: на неподвижной непроницаемой поверхности $\vec{v} = 0$.
- Уравнение диффузии $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = D\Delta\rho + s(\vec{r}, t)$, где $s(\vec{r}, t)$ – плотность источников диффундирующих частиц, D – коэффициент диффузии.
- Диссипация кинетической энергии[1]
$$\dot{\mathcal{E}}_{\text{кин}} = -(\eta/2)\int(v_{i,k} + v_{k,i})^2 dV.$$
- Уравнение переноса тепла в несжимаемой вязкой жидкости:
$$\partial T/\partial t + \vec{v}\nabla T = \chi\Delta T + (\nu/2c_p)(v_{i,k} + v_{k,i})^2,$$
где T – температура, c_p – удельная теплоёмкость, χ – коэффициент температуропроводности, связанной с коэффициентом теплопроводности æ соотношением $\chi = æ/\rho c_p$.

[1] Кинетическую энергию жидкости обозначаем в этой главе через $\mathcal{E}_{\text{кин}}$, чтобы не путать её с температурой T.

- Скорость жидкой частицы в турбулентном течении $\vec{v}$ разлагается на среднюю скорость $\langle\vec{v}\rangle$ и случайное отклонение (пульсацию) $\delta\vec{v} \equiv \vec{u}$:

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \langle\vec{v}(\vec{x},t)\rangle + \vec{u}(\vec{x},t).$$

Заметим, что здесь и $\vec{v}$ и $\vec{u}$ – случайные поля скоростей, но $\langle\vec{u}\rangle = 0$.

Средний материальный оператор дифференцирования определяется формулой

$$\left\langle \frac{d}{dt} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} + \langle\vec{v}\rangle\nabla,$$

а определяемая с его помощью производная от среднего поля связана со средней материальной производной соотношением

$$\left\langle \frac{d}{dt} \right\rangle \langle v_j\rangle = \left\langle \frac{dv_j}{dt} \right\rangle - \frac{\partial\langle u_i u_j\rangle}{\partial x_i}.$$

С использованием этого оператора уравнение Рейнольдса записывают в виде

$$\rho \left\langle \frac{d}{dt} \right\rangle \langle v_i\rangle = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\eta\left(\frac{\partial\langle v_j\rangle}{\partial v_i} + \frac{\partial\langle v_i\rangle}{\partial x_j}\right) - \langle p\rangle\delta_{ij} - \rho\langle u_i u_j\rangle\right].$$

Квадратные скобки содержат три источника-стока среднего импульса в турбулентной среде: вязкое напряжение, изотропная компонента среднего поля давления и специфическое давление, обусловленное корреляциями турбулентных пульсаций.

Уравнение это содержит тензор напряжений Рейнольдса, представляемый в виде суммы

$$\langle u_i u_j\rangle = (2/3)k\delta_{ij} + a_{ij},$$

изотропного (первое слагаемое) и анизотропного (второе). Здесь

$$k \equiv \frac{1}{2}\langle u_i u_i\rangle$$

– средняя кинетическая энергия турбулентного движения единицы массы. Тензор Рейнольдса подчиняется уравнению

$$\rho\frac{\partial\langle u_i u_j\rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_j} = \rho\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle p\rangle + \frac{2}{3}\rho k\right).$$

Важную роль вязкость играет в приграничном течении. Усреднённая по турбулентным пульсациям скорость $u(y)$ на расстоянии y от стенки даётся выражением

$$u = \frac{v_*}{\kappa}\ln\frac{yv_*}{\nu},$$

где κ – безразмерная постоянная ($\approx 0,4$), $v_* = \sqrt{\sigma/\rho}$ – постоянная с размерностью скорости, σ – сила трения на единицу площади поверхности. В непосредственной близости от стенки эта формула, однако, неприменима из-за логарифмической расходимости. Здесь движение зависит от характера поверхности стенки.

9.1. Течение вязкой жидкости

9.1.1. Вязкая жидкость заключена между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми h. Верхняя плоскость движется относительно нижней со скоростью u вдоль оси x, давление в жидкости постоянно. Найти профиль скорости, среднюю скорость и силу $t_{||}$, действующую на каждую из плоскостей.

9.1.2. Вязкая жидкость движется между двумя неподвижными параллельными плоскостями при наличии постоянного градиента давления. Найти профиль скорости, среднюю скорость и силу, действующую на единицу площади плоскости.

9.1.3. Вязкая жидкость движется между двумя параллельными плоскостями при наличии постоянного градиента давления. Верхняя плоскость движется относительно нижней с постоянной скоростью. Найти и проанализировать профиль скорости.

9.1.4. Слой жидкости толщиной h (по перпендикуляру OZ к свободной поверхности) стекает по наклоненной под углом α к горизонту неподвижной плоскости параллельно лежащей в ней оси OX. Найти поле скоростей, давлений и расход жидкости Q (отнесённое к единице длины поперечной оси OY количество жидкости, протекающее через поперечное сечение слоя в единицу времени).

9.1.5. Две параллельные плоские круглые пластинки радиуса R сближаются с постоянной скоростью u, вытесняя находящуюся между ними жидкость. Найти зависимость давления от расстояния до центра.

9.1.6. Используя уравнения Навье-Стокса, оценить толщину пограничного слоя в плоской задаче.

9.1.7. Вычислить силу, с которой вязкая жидкость действует на обтекаемый ею неподвижный шар радиуса R, если на поверхности шара $p = p_0 - (3\eta v_\infty/2R)\cos\theta$, $\tau_{rr} = 0$, $\tau_{r\theta} = -(3\eta v_\infty/2R)\sin\theta$.

9.1.8. На неподвижный шар радиусом R с центром в начале координат набегает стационарный поток вязкой жидкости. Возмущённая часть потока характеризуется полем скоростей

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{F}{8\pi\eta}\left\{\frac{xz}{r^3}\vec{e}_x + \frac{yz}{r^3}\vec{e}_y + \left(\frac{1}{r} + \frac{z^2}{r^3}\right)\vec{e}_z\right\},$$

где F – действующая на шар сила. Выразить силу через усреднённую по поверхности шара скорость.

9.1.9. Используя метод размерностей, вывести общую формулу для силы сопротивления движению в жидкости с плотностью ρ, вязкостью η и скоростью звука c шара радиуса R, движущегося с постоянной скоростью v.

9.2. Установившиеся течения

9.2.1. Проанализировать стационарное течение вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Найти профиль скоростей и расход жидкости.

9.2.2. Найти профиль скоростей и расход вязкой жидкости в трубе с кольцевым сечением (внутренний радиус R_1, внешний – R_2).

9.2.3. Найти профиль скоростей и расход вязкой жидкости в трубе эллиптического сечения (a и b – полуоси эллипса).

9.2.4. Цилиндр радиуса R_1 поступательно движется со скоростью u внутри коаксиального с ним цилиндра радиуса R_2 параллельно общей оси. Определить поле скоростей вязкой жидкости, заполняющей пространство между цилиндрами.

9.2.5. Вязкая жидкость стационарно вращается вокруг оси z так, что $v_r = v_z = 0$, $v_\varphi = v\,(r)$. Записать уравнение Навье-Стокса в цилиндрических координатах.

9.2.6. Бесконечный цилиндр радиуса R, погружённый в вязкую жидкость, вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. Найти поле скоростей.

9.2.7. Вязкая жидкость находится между двумя бесконечными коаксиальными цилиндрами, внутренний цилиндр неподвижен, внешний вращается с постоянной угловой скоростью. Определить поле скоростей.

9.2.8. Шар радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью Ω в вязкой жидкости. Найти поле скоростей.

9.2.9. В условиях предыдущей задачи вычислить момент сил трения, действующих на шар.

9.2.10. В опыте Милликена по определению элементарного заряда капельки масла распылены в воздухе между двумя горизонтальными пластинами конденсатора. Заряд отдельной капли равен ne, $n = 0, 1, 2$, e – абсолютная величина заряда электрона. Потенциал пластин подобран так, что при $n = 1$ капля неподвижна. Найти скорость $v(t)$ движения капли а) при $n = 0$ и б) при $n = 2$. Поле включается в момент $t = 0$.

9.2.11. В жидкость с заданным постоянным градиентом температуры $\nabla T = \vec{B}$ погружён шар радиусом R. Коэффициенты теплопроводности жидкости и шара равны соответственно $æ_0$ и $æ_1$. Найти поле температур в системе жидкость + шар.

9.2.12. Определить поле температуры в жидкости, текущей по круглой трубе радиусом R, температура стенки которой постоянна и равна T_0.

9.2.13. По трубе кругового сечения с осью OZ течёт жидкость, удовлетворяющая условиям: она подчиняется уравнению состояния идеального газа $\rho = mp/T$ (m – масса молекулы), её температура $T = \mathrm{const}$, и вязкость η не зависит от давления. Найти $p(z)$, при условии, что $p(0) = p_0$ и расход газа равен Q.

9.3. Неустановившиеся течения

9.3.1. Рассмотрим такое движение несжимаемой жидкости, что на бесконечности её скорость равна нулю и кинетическая энергия её $\mathcal{E}_{\text{кин}} = \displaystyle\int \frac{\rho v^2}{2}\, dV$ конечна. Показать, что скорость убывания кинетической энергии (диссипация) пропорциональна вязкости.

9.3.2. Преобразовать результат предыдущей задачи в условиях потенциального течения в интеграл по поверхности, ограничивающей жидкость.

9.3.3. В условиях предыдущей задачи найти диссипативную силу сопротивления, действующую на движущийся в жидкости пузырёк газа радиусом R, если поле скоростей вокруг него задаётся потенциалом $\phi = -(R^3/2r^2)\vec{u}\vec{n}$, где $\vec{u}$ – скорость натекающей на пузырёк жидкости, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности пузырька.

9.3.4. При теоретическом исследовании волновых процессов в вязких жидкостях в качестве простейшей модели используется уравнение Бюргерса: $\partial v/\partial t + v\partial v/\partial x = \nu\partial^2 v/\partial x^2$. Показать, что замена $v = -2\nu\partial \ln u(x,t)/\partial x$ позволяет свести уравнение Бюргерса к уравнению диффузии.

9.3.5. Показать, что стационарное уравнение Навье-Стокса допускает решения диффузионного типа. Получить это решение.

9.3.6. В вязкой среде вихри испытывают диффузию. Найти закон расплывания z-проекции вектора $\vec{q}$ вихря, первоначально находящегося на оси OZ.

9.3.7. В условиях предыдущей задачи найти поле скоростей.

9.3.8. Бесконечная пластина, ограничивающая вязкую жидкость, совершает в своей плоскости YOZ простое гармоническое колебание с частотой ω. Найти возбуждаемое ей движение жидкости $(x > 0)$ и глубину проникновения волны δ – расстояние, на котором её амплитуда падает в e раз.

9.3.9. Между двумя горизонтальными параллельными пластинами ($z = 0$ и $z = h$), нижняя из которых совершает колебания в своей плоскости, заключён слой вязкой жидкости. Найти силу трения, действующую на каждую из пластин.

9.3.10. В условиях предыдущей задачи верхняя поверхность слоя жидкости свободна. Найти силу трения, действующую на нижнюю плоскость.

9.3.11. Между двумя неподвижными пластинами ($z = 0$ и $z = h$) заключена жидкость, приводящая в движение переменным градиентом давления

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -a\rho e^{-i\omega t}.$$

Найти среднее (по сечению) значение скорости.

9.3.12. Полное выражение для силы сопротивления, действующей на шар радиусом R, движущейся поступательно в направлении оси OX в вязкой жидкости со скоростью $u(t)$, имеет вид:

$$F = 2\pi\rho R^3 \left\{ \frac{1}{3}\,\frac{du}{dt} + \frac{3\nu}{R^2}u + \frac{3}{R}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{du}{d\tau}\,\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right\}.$$

Определить силу сопротивления для шара, начинающего в момент времени $t = 0$ равноускоренное движение ($u(t) = \alpha t$, $t > 0$).

9.3.13. В условиях предыдущей задачи заменить $u(t) = \alpha t$ законом

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ u_0, & t > 0 \end{cases}$$

и повторить решение.

9.3.14. В условиях двух предыдущих задач найти импульсы силы трения, получаемые шаром в интервале времени $[0, t]$.

9.3.15. В вязкой среде распространяется плоская монохроматическая звуковая волна с частотой ω. Найти декремент её затухания на единице длины.

9.4. Турбулентность

9.4.1. В эксперименте с однородным турбулентным сдвиговым течением (в котором $\partial\langle u_1\rangle/\partial x_2$ является единственным ненулевым градиентом средней скорости) измерены напряжения Рейнольдса и представлены в виде нормированного тензора

$$\frac{\langle u_i u_j\rangle}{k} = \begin{pmatrix} 1,08 & -0,32 & 0 \\ -0,32 & 0,40 & 0 \\ 0 & 0 & 0,52 \end{pmatrix}.$$

Определить тензоры анизотропии a_{ij}, b_{ij} и коэффициент корреляций ρ_{12} между u_1 и u_2.

9.4.2. Пусть $u(t)$ – дифференцируемая стационарная с нулевым средним случайная функция. Показать, что $u(t)$ и $\dot{u}(t)$ некоррелированы.

9.4.3. В условиях предыдущей задачи показать, что $u(t)$ и $\ddot{u}(t)$ антикоррелированы (имеют отрицательную корреляционную функцию).

9.4.4. В условиях задачи 9.4.2 показать, что

$$\left\langle u^2 \frac{d^3u}{dt^3} \right\rangle = \langle \dot{u}^3 \rangle.$$

9.4.5. Доказать, что автоковариация $B(t)$ процесса $\dot{u}(t)$ связана с автоковариацией $R(t)$ стационарного процесса $u(t)$ соотношением

$$B(t) = -\frac{d^2R(t)}{dt^2}.$$

9.4.6. Пусть $u(t)$ – стационарный гауссов процесс. Показать, что среднее значение его скорости $\dot{u}(t)$ равно нулю независимо от начального состояния процесса.

9.4.7. Показать, что дисперсия усреднённого по интервалу времени T стационарного процесса $U(t)$ с дисперсией σ^2 выражается через автокорреляционную функцию $r(t)$ интегральным соотношением

$$\mathsf{D}\langle U(t)\rangle_T = \frac{\sigma^2}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T r(t-\tau)dtd\tau.$$

9.5. Турбулентное течение

9.5.1. Доказать тождество:

$$\left\langle \frac{d}{dt} \right\rangle \langle v_j \rangle = \left\langle \frac{dv_j}{dt} \right\rangle - \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i}.$$

9.5.2. Преобразовать уравнение Рейнольдса

$$\rho \left[\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial (\langle v_i \rangle \langle v_j \rangle)}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \tau'_{ij} \right] - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i},$$

$\tau'_{ij} = -\rho \langle u_i u_j \rangle$, к виду

$$\left\langle \frac{d}{dt} \right\rangle \langle v_j \rangle = \nu \nabla^2 \langle v_j \rangle - \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_j}.$$

9.5.3. Выше мы рассматривали уравнения для средней скорости турбулентного течения. В этой задаче предлагается вывести уравнение для турбулентной пульсации скорости $\vec{v}(\vec{x}, t)$ как случайной функции, не усреднённой ещё по статистическому ансамблю.

9.5.4. Пользуясь результатом предыдущей задачи, доказать, что для однородной турбулентности в несжимаемой жидкости выполняются соотношения:

$$\left\langle u_i \frac{du_i}{dt} \right\rangle = \frac{dk}{dt} \qquad \text{и} \qquad \left\langle u_i \frac{d(p - \langle p \rangle)}{dt} \right\rangle = 0.$$

9.5.5. Две близко расположенные частицы турбулентной среды с течением времени удаляются друг от друга на расстояние l. Оценить из соображений размерности необходимое для этого время t.

9.5.6. В случае изотропной турбулентности имеет место *закон Лойцянского*

$$\int \langle \vec{v}\vec{v}' \rangle r^2 dV = \text{const}$$

(здесь $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ – скорости частиц, находящихся на расстоянии r друг от друга). Пользуясь принципом размерности, найти скорость затухания турбулентности со временем.

9.5.7. Средняя скорость частиц плоско-параллельного потока $u(y)$ на расстоянии y от стенки убывает с уменьшением y из-за вязкости. Из физических соображений следует, что скорость этого убывания du/dy должна зависеть от плотности жидкости ρ, силы трения (на единицу площади стенки) σ и расстояния y. Пользуясь принципом размерности, оценить профиль скорости турбулентного потока.

9.5.8. Полученная в предыдущей задаче формула неприменима в окрестности $y = 0$, где логарифмическая функция расходится. Учитывая, что в тонком пристеночном слое доминирует ламинарное движение. Найти профиль скорости в этой области, называемой обычно *вязким подслоем.*

9.5.9. В большинстве случаев движением в вязком подслое $y < y_0$ пренебрегают, выбирая постоянную интегрирования из условия $u(y_0) \cong 0$. В то же время y_0 должно быть согласовано с результатом предыдущей задачи, записанном в виде $v^* = \dfrac{v_*^2}{\nu}\, y_0$. Вывести удовлетворяющую этим условиям формулу профиля скорости.

9.5.10. Полагая в ответе к предыдущей задаче $y = R - r$, его можно (приближённо) применить и к радиальному профилю турбулентного течения в трубе радиусом R. Найти в этом приближении усреднённую по поперечному сечению трубы скорости течения.

9.5.11. Пользуясь результатом предыдущей задачи, найти связь средней скорости турбулентного течения в трубе с перепадом давления в ней $\Delta p/\Delta l$ (*закон сопротивления трубы*).

9.5.12. Наряду с логарифмическим представлением профиля скорости турбулентного течения в трубе существуют эмпирические аппроксимации, одна из которых имеет вид

$$u(r) = (1 - r/R)^{1/n} u_0,$$

где u_0 – скорость на оси трубы, R – радиус трубы, параметр n зависит от числа Рейнольдса, изменяясь от $n = 6$ при $\mathrm{Re} = 4 \cdot 10^3$ до $n = 10$ при $\mathrm{Re} = 3 \cdot 10^6$. Найти усреднённую по поперечному сечению трубы скорость.

Глава 10

Упругая среда

- *Обобщенный закон Гука*

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl}\varepsilon_{kl}.$$

Для изотропной среды

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij},$$

где $\mu = \mathrm{E}/[2(1+\nu)]$ и $\lambda = \mathrm{E}\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ – коэффициенты Ламэ, E – модуль упругости (Юнга), ν – модуль поперечного сжатия (Пуассона).

- Уравнение равновесия изотропного упругого тела в поле объемной силы с плотностью $\vec{f}$ (*уравнение Ламэ*)

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\ \mathrm{grad\ div}\ \vec{u} + \vec{f} = 0.$$

Другая форма, удобная в отсутствие объемных сил,

$$2(1-\nu)\mathrm{grad\,div}\vec{u} - (1-2\nu)\mathrm{rot\,rot}\vec{u} = 0.$$

- Объёмная плотность энергии упругой деформации в произвольных ортогональных осях

$$u = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/2 = \frac{\mathrm{E}}{2(1+\nu)}\times$$

$$\times\left\{\frac{1-\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})^2 - 2(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}+\varepsilon_{33}\varepsilon_{11}) + 2(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{23}^2+\varepsilon_{31}^2)\right\}.$$

- Поперечный изгиб балки длиной l с нагрузкой $\vec{F} = F\vec{e}_x$ на свободном конце описывается уравнением для смещения $u_x(z)$ оси балки на расстоянии z от закреплённого конца

$$\frac{d^2u_x}{dz^2} = \frac{F}{\mathrm{E}I}(l-z),$$

с краевыми условиями $u_x(0) = 0, u_x'(0) = 0$. Здесь $I = \int\limits_S x^2dS$ – «момент инерции» геометрического поперечного сечения балки S относительно горизонтальной оси, проходящей через «центр масс».

- Поперечный изгиб балки при продольной нагрузке $\vec{F} = -F\vec{e}_z$ описывается уравнением
$$\frac{d^2u_x}{dz^2} = -\frac{F}{\mathrm{E}I}u_x.$$
- Жесткость балки на изгиб $C_{\text{из}} = \mathrm{E}I$.
- Упругая энергия единицы объёма изогнутой балки
$$U = \frac{\mathrm{E}x^2}{2R^2(z)},$$
где R – радиус кривизны «нейтральной поверхности» балки, от которой отсчитывается поперечная координата x; z – продольная координата рассматриваемого сечения балки.
- Крутильная жёсткость стержня
$$C_{\text{кр}} = 4\mu\int\int(\nabla\chi)^2dxdy,$$
где μ – модуль сдвига, а χ – функция, удовлетворяющая уравнению
$$\frac{\partial^2\chi}{dx^2} + \frac{\partial^2\chi}{dy^2} = -1$$
и условию $\chi = 0$ на границе односвязного контура сечения.
- Упругая энергия закрученного стержня длиной l
$$U_{\text{кр}} = (1/2)\int_0^l C_{\text{кр}}(\varphi'(z))^2dz,$$
где $\varphi'(z) = d\varphi/dz$, а $\varphi(z)$ – угол, на который закручено поперечное сечение балки в точке z относительно ее основания в точке $z = 0$.
- Уравнение для продольных волн
$$\partial^2u_z/\partial t^2 = c_{\parallel}^2\partial^2u_z/\partial z^2, \quad c_{\parallel} = \sqrt{\mathrm{E}(1-\nu)/[\rho(1+\nu)(1-2\nu)]}.$$
- Уравнение для поперечных волн
$$\partial^2u_x/\partial t^2 = c_{\perp}^2\partial^2u_x/\partial z^2, \quad c_{\perp} = \sqrt{\mathrm{E}/[2\rho(1+\nu)]}.$$
- Уравнения для крутильных волн
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c_{\varphi}^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \quad c_{\varphi} = \sqrt{C/(\rho I)}.$$
- В простом кубическом кристалле векторы
$$\vec{P} = N_0\frac{e\vec{r} + \alpha\vec{E}}{1-(4N_0\pi/3)\alpha} = \frac{\epsilon-1}{4\pi}\vec{E}$$
(здесь $\vec{r}$ – вектор смещения),
$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \epsilon\vec{E}$$
зависят от частоты колебаний. При $\omega \to \infty$
$$\alpha = \frac{\epsilon_\infty - 1}{(4\pi N_0/3)(\epsilon_\infty + 2)},$$
$$\vec{P} = N_0\frac{e(\epsilon_\infty+2)}{3}\vec{r} + \frac{\epsilon_\infty - 1}{4\pi}\vec{E}.$$

10.1. Изотропная упругая среда

10.1.1. Модуль всестороннего сжатия K является величиной, обратной коэффициенту сжимаемости $k = -\frac{1}{p}\frac{\delta V}{V}$. Используя это определение, выразить K через E и ν.

10.1.2. Выразить модуль Юнга и коэффициент Пуассона через коэффициенты Ламэ.

10.1.3. Выразить модули E и ν через K и μ.

10.1.4. Упругий стержень массой m, длиной l и площадью поперечного сечения S движется в продольном направлении с одинаковым для всех его точек ускорением a. Найти энергию упругой деформации.

10.1.5. Упругий цилиндр высотой h и весом P поставлен основанием на горизонтальную плоскость. Найти энергию упругой деформации.

10.1.6. Найти вид функции для плотности энергии деформации для плоского напряжённого состояния.

10.1.7. Найти вид функции для плотности энергии деформации для состояния плоской деформации.

10.1.8. Найти полную энергию упругой деформации однородного цилиндрического вала, закрученного вокруг оси на угол α.

10.1.9. Используя выражение для объемной плотности энергии упругих деформаций $U = U(\varepsilon_{ij})$, найти элементы тензора напряжений σ_{11} и σ_{12}.

10.1.10. Найти полную энергию упругой деформации цилиндрической трубы, закрученной вокруг оси на угол α.

10.2. Элементарные статические задачи

10.2.1. Разрешить уравнения $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$ относительно тензора деформаций.

10.2.2. Имеется состояние всестороннего равновесного сжатия с тензором напряжений $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$. Выразить модуль объёмного сжатия K через коэффициент Ламэ.

10.2.3. Однородный упругий шар погружён в однородную жидкость с давлением p. Найти тензор деформации шара и поле смещений (тяготением пренебречь).

10.2.4. К основаниям цилиндра приложена постоянная растягивающая сила с поверхностной плотностью σ. Найти тензор деформаций.

10.2.5. Упругое тело, подчиняющееся закону Гука, находится в равновесии под действием объёмных сил $f_i(x_j)$ и поверхностных сил $t_i(\vec{n}, x_j)$. Доказать, что полная энергия деформации равна половине работы внешних сил на перемещениях u_i.

10.2.6. Показать, что в отсутствие объёмных сил уравнения статических деформаций могут быть представлены в следующих формах:

$2(1-\nu)\ \nabla^2\vec{u} + \mathrm{rot\ rot}\ \vec{u} = 0,$

$2(1-\nu)\ \mathrm{grad\ div}\ \vec{u} - (1-2\nu)\ \mathrm{rot\ rot}\ \vec{u} = 0.$

10.2.7. Записать уравнение Ламэ для статических деформаций изотропного упругого тела в проекциях на оси декартовой системы координат.

10.2.8. Используя функции $\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$, вывести формулы в переменных E, ν и λ, μ для модуля объёмного сжатия K.

10.2.9. Вывести уравнения равновесия для двумерной (плоской) статической задачи теории упругости в полярных координатах.

10.2.10. Показать, что в случае плоского напряженного состояния шесть уравнений совместности деформаций для тонких пластин приближённо сводятся к одному уравнению

$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}.$

10.2.11. Доказать, что для однородной изотропной упругой среды главные оси тензоров напряжений и деформаций совпадают.

10.3. Волны в упругой среде

10.3.1. Выполнить разложение векторного поля смещений $\vec{u}(\vec{x}, t)$, удовлетворяющее уравнению

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu\nabla^2\vec{u} + (\mu+\lambda)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u},$$

на безвихревое (продольное) поле $\phi(\vec{x}, t)$ и соленоидальное (поперечное) поле $\vec{\psi}(\vec{x}, t)$. Вывести соответствующие уравнения.

10.3.2. Из принципа наименьшего действия вывести дифференциальное уравнение свободных колебаний струны длиной l с линейной скоростью λ и жесткостью единицы длины k.

10.3.3. Найти фазовую скорость распространения волны $\vec{u} = \vec{e}_1 A \times \times \sin[k(x_1 - ct)]$ в отсутствие объёмных сил.

10.3.4. Тело с моментом инерции I относительно вертикальной оси висит на тонком упругом стержне радиусом a и плотностью ρ, верхний конец которого закреплён. Найти период τ крутильных колебаний системы.

10.3.5. Шар, подвешенный на проволоке, совершает крутильные колебания с периодом τ. Найти период колебаний τ' в случае, если проволоку заменить цилиндрической трубкой с внешним радиусом R, внутренним a, той же длины и массы, сделанной из того же материала.

10.3.6. Один конец упругого стержня квадратного сечения a^2 заделан в стенку, к другому прикреплена масса m, величина которой много больше массы стержня, а размеры её очень малы. Найти собственную частоту колебаний системы.

10.3.7. Определить собственные частоты колебаний абсолютно упругого шара.

10.3.8. Движение упругого материала описывается полем смещений $\vec{u} = u_2(x_1, x_2, t)\vec{e}_2$. Показать, что это поле удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \beta^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right).$$

10.3.9. По началу ($x = 0$) расположенного на полуоси $x \geqslant 0$ полубесконечного упругого стержня наносится удар, вызывающий смещение

$$u(0, t) = 1_+(t) t e^{-bt}, \qquad b > 0.$$

Найти распространение возмущения по стержню методом преобразования Лапласа.

10.3.10. В условиях предыдущей задачи начальное возмущение определено условием
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = 1_+(t)e^{-bt}.$$
Повторить решение задачи.

10.3.11. В условиях предыдущей задачи «ударное» возмущение заменено гармоническим: $\sigma(0,t) = \sigma_0 e^{-i\omega t}$, где $\sigma_0 = \mathrm{const}$. Определить результирующее поле смещения.

10.3.12. Волна сжатия в упругой среде с коэффициентами Ламэ λ и μ описывается потенциалом $\phi = Ae^{i(kx_1\cos\theta + kx_3\sin\theta - \omega t)}$. Определить компоненту тензора напряжения σ_{33} как функцию координаты и времени.

10.3.13. В условиях предыдущей задачи найти зависимость плотности координаты и времени.

10.3.14. Неограниченная упругая среда подвержена начальному возмущению
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,$$
где $u_0(x)$ – известная функция. Применив преобразование Фурье по координате $u(x,t) \mapsto \tilde{u}(k,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}u(x,t)dx$. Найти трансформанту Фурье $\tilde{u}(k,t)$.

10.4. Шары, стержни, балки

10.4.1. Определить деформацию (поле смещений) длинного стержня, стоящего вертикально в однородном поле тяжести.

10.4.2. Определить деформацию цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси в отсутствие сил тяготения.

10.4.3. Определить деформацию однородного шара радиуса R под влиянием собственного гравитационного поля. Найти давление в центре.

10.4.4. Полый шар внутренним радиусом a и внешним b, изготовленный из изотропного упругого материала, находится под давлением p с внутренней стороны. Давление на внешнюю поверхность равно нулю. Найти распределение напряжений в стенках сферы.

10.4.5. Найти тензор напряжений в стенках длинной цилиндрической трубы, внутри которой создано давление p (давление снаружи отсутствует).

10.4.6. Сравнить жёсткости двух балок одинаковой массы и длины, изготовленных из одного материала, но имеющих разные формы поперечного сечения: круг (C_0) и прямоугольник (C_1).

10.4.7. Найти относительное изменение $\delta C/C$ жесткости однородного цилиндра эллиптического сечения при переходе от изгиба в направлении большой полуоси a к изгибу в направлении малой полуоси b.

10.4.8. Определить крутильную жёсткость однородного стержня кругового сечения радиусом R.

10.4.9. Определить крутильную жёсткость однородного стержня эллиптического сечения с полуосями a и b.

10.4.10. Определить крутильную жёсткость однородной цилиндрической трубы с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2.

10.5. Кристаллы

10.5.1. Доказать, что при простом кубическом размещении находящиеся в контакте жёсткие сферы занимают $\pi/6$ всего объёма.

10.5.2. Одномерная модель простейшего кристалла представляет собой цепочку $2N$ ионов знакопеременных зарядов $\pm q$, взаимодействие каждого из которых с ближайшими соседями представляется суммой кулоновского потенциала $-aq^2/R$ и потенциала отталкивания A/R^n. Пренебрегая концевыми эффектами, найти расстояние R_0 и энергию $U(R_0)$ в состоянии равновесия.

10.5.3. Описанный в предыдущей задаче кристалл сжат так, что расстояние R_0 уменьшилось на величину $R_0\delta$, $\delta << 1$. Вычислить совершённую при этом работу с точностью до второго порядка по δ.

10.5.4. Найти энергию связи одномерного кристалла типа NaCl.

10.5.5. Представив потенциальную энергию $V(R)$ атома цепочки, выполняющего малые колебания в окрестности точки равновесия R_0, разложением в ряд по $R - R_0$ с точностью до третьего порядка включительно, найти действующую на него силу.

10.5.6. Наложив на смещения атомов u_n бесконечной цепочки условие цикличности $u_{n\pm l} = u_n$, вывести формулу плотности состояний $dz/d\omega$.

10.5.7. В условиях предыдущей задачи найти фазовую и групповую скорости распространяющихся по цепочке сигналов.

10.5.8. Модель одномерного двухатомного кристалла представляет собой цепочку атомов чередующихся типов с массами m_1 и m_2 и межатомными связями, характризуемыми постоянными $C_1,\ C_2$. Вывести дисперсионное соотношение.

10.5.9. Ионный кристалл состоит из ионов двух типов с массами $M_+,\ M_-$ и эффективными зарядами $\pm e$. Постоянная связи между ионами κ. Каждый ион находится в электрическом поле, создаваемым другими ионами и внешним источником $E_{\text{эфф}}$ (эффективное поле отличается от среднего поля $\vec{E}$ вкладом поляризации $\vec{P}$). Найти соотношение между частотами продольной и поперечной оптических мод.

10.5.10. Теорема о равномерном распределении энергий по степеням свободы справедлива лишь для непрерывных распределений. Порождаемые колебаниями атомов звуковые волны в кристаллах характеризуются дискретными (квантованными) значениями энергий $E_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$. Относительная вероятность того, что осциллятор имеет энергию E_n при температуре T, определяется больцмановским множителем $\exp(-E_n/k_\text{Б}T)$. Определить среднюю энергию осциллятора с энергетическим спектром $E_n = nh\nu$.

10.5.11. Число упругих стоячих волн с длинами на интервале $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ в единице объёма кристалла даётся формулой Рэлея $n(\lambda)d\lambda = 4\pi d\lambda/\lambda^4$. В частотном интервале $n(\nu)d\nu = 4\pi\nu^2 d\nu/v^3$, где v – скорость волны. Учитывая, что поперечные волны имеют два направления поляризации, а продольные – одно, общее число возможных стоячих волн в этом интервале частот $n(\nu)d\nu = 4\pi(v_\parallel^{-3} + 2v_\perp^{-3})\nu^2 d\nu$. Записать в квадратурах энергию фононного газа в объёме V_0 киломоля твёрдого вещества.

Глава 11

Вязкоупругие и неупругие среды

Вязкоупругость

- Свойство упругого материала помнить свою деформационную историю подобно тому, как помнит её вязкая жидкость, называется *наследственностью*, а материалы, обладающие этим свойством, *вязкоупругими*. Наглядные представления о вязкоупругом отклике на приложенную нагрузку дают механические модели, составленные из двух элементов – упругого (идеальная пружинка), деформация которого определяется приложенной в данный момент силой, и вязкого (поршень в цилиндре с малым зазором), характеризующего зависимость *скорости деформации* от силы. В последнем случае деформация в момент наблюдения определяется интегралом от скорости деформации (то есть от прилагавшейся к образцу нагрузки) по временному интервалу, предшествующему эксперименту.

- Условные обозначения элементов напряжения, деформации, вязкости и упругости соответственно:

- Определяющие уравнения *модели Кельвина (Фойгта)*

$$\sigma(t) = \mathrm{E}\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \equiv (\mathrm{E} + \eta d/dt)\varepsilon.$$

- Определяющие уравнения *модели Максвелла* –

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{\mathrm{E}} \equiv \left(\eta^{-1} + \mathrm{E}^{-1}\frac{d}{dt}\right)\sigma.$$

- Обобщенная модель Кельвина

$$\varepsilon = \left(\mathrm{E}_1 + \eta_1 \frac{d}{dt}\right)^{-1} \sigma + ... + \left(\mathrm{E}_N + \eta_N \frac{d}{dt}\right)^{-1} \sigma.$$

  Здесь и ниже d/dt – оператор дифференцирования по времени, $(a+bd/dt)^{-1}$ – оператор, обратный оператору $a + bd/dt$ (интегральный оператор).

- Обобщенная модель Максвелла

$$\sigma = (\eta_1^{-1} + \mathrm{E}_1^{-1} d/dt)^{-1} \dot{\varepsilon} + ... + (\eta_N^{-1} + \mathrm{E}_N^{-1} d/dt)^{-1} \dot{\varepsilon}.$$

- Уравнение деформации ползучести в модели Кельвина

$$\dot{\varepsilon} + \varepsilon/\tau = \sigma_0 1_+(t)/\eta,$$

  где $\tau = \eta/\mathrm{E}$ – *время запаздывания*,

$$1_+(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

- Уравнение релаксации напряжения в модели Максвелла

$$\dot{\sigma} + \sigma/\tau = \mathrm{E}\varepsilon_0 \delta(t).$$

- *Функция ползучести* $\psi(t)$ определяется через деформацию ползучести $\varepsilon(t)$, вызванную нагрузкой ступенчатого вида $\sigma = \sigma_0 1_+(t)$, соотношением $\varepsilon(t) = \psi(t)\sigma_0, \quad t > 0$.

- *Функция релаксации* $\varphi(t)$ определяется через релаксацию напряжения $\sigma(t)$, вызванную деформацией ступенчатого вида $\varepsilon = \varepsilon_0 1_+(t)$, соотношением $\sigma(t) = \varphi(t)\varepsilon_0, \quad t > 0$.

- *Интегралы наследственности*

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \psi(t - t') d\sigma(t')$$

  и

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(t - t') d\varepsilon(t').$$

Упругопластичность

- Определяющим признаком упругости является обратимость процесса деформации: по мере снятия нагрузки ослабевает и деформация, и представляющая состояние точка на $\sigma - \varepsilon$ диаграмме возвращается в исходное состояние по той же кривой. Однако многие материалы (металлы, в частности), следующие с возрастанием нагрузки закону упругости Гука, при достижении ею некоторого критического значения (*предела упругости* или предела критичности σ_Y) теряют свойство обратимости: форма образца по снятии нагрузки не возвращается. Такое поведение образца называют *пластическим* или, с учётом упругой стадии, – *упругопластическим*. Более того, при неоднородном распределении нагрузки обе зоны – упругая и пластическая, могут существовать одновременно (как это можно наблюдать, например, при кручении стержня).

- В двумерных задачах (типа кручения длинного стержня вокруг его оси OZ)

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0,$$

и только компоненты σ_{13} и σ_{23} отличны от нуля. Они не зависят от $x_3 (= z)$ и подчиняются уравнению

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0.$$

Уравнение это удовлетворяется компонентами градиента

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

дифференцируемой *функции напряжений* $\psi = \psi(x_1, x_2)$, играющей роль потенциала.

Материал находится в упругом состоянии, если

$$\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 < k_0^2,$$

и в пластическом, когда

$$\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k_0^2,$$

где k_0 – постоянная (своя для каждого материала) величина. Последнее уравнение сопадает как с условием пластичности Треска, так и с условием пластичности Мизеса (особенность данной задачи). В пластической области деформации складываются из упругой и пластической составляющих:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\text{упр}} + \varepsilon_{ij}^{\text{пл}}.$$

Если упругие свойства среды не зависят от пластических деформаций, то упругие деформации в пластической области связаны с напряжениями теми же формулами, что и в упругой области, причём

$$\frac{\varepsilon_{13}^{\text{упр}}}{\varepsilon_{23}^{\text{упр}}} = \frac{\sigma_{13}}{\sigma_{23}}.$$

Можно показать, что это соотношение остаётся справедливым и для полных деформаций:

$$\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{23}} = \frac{\sigma_{13}}{\sigma_{23}}.$$

- В случае полой сферы внутренним радиусом a и внешним b, изготовленной из изотропного материала и подверженной давлению с внутренней и внешней сторон, единственной неисчезающей компонентой смещения остаётся радиальное смещение $u_r = u$, порождающее деформации

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}.$$

По условию совместимости

$$\varepsilon_r = \frac{d(r\varepsilon_\theta)}{dr}.$$

Неисчезающие компоненты тензора напряжений связаны уравнением равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0.$$

Пределы текучести в моделях Треска и Мизеса в этом случае совпадают:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_Y.$$

Вязкопластичность

- Ряд материалов, особенно при высоких температурах проявляет зависимость деформации от времени даже в случае не изменяющейся со временем нагрузки. Даже малая по величине нагрузка может вызывать такую деформацию, и она (деформация) не исчезает после снятия нагрузки. Такое поведение известно как *вязкопластичность* или *ползучесть*: как и в случае вязкоупругого поведения, приложение к вязкопластичному образцу постоянного напряжения вызывает переменную во времени деформацию, однако в отличие от первого, эта деформация не затухает со временем, а продолжает развиваться (образец «ползёт»). Если же зафиксировать размер образца (длину стержня, например) в начальный момент приложения напряжения и держать его постоянным, отключив внешнюю нагрузку, то напряжение в образце будет релаксировать к упругому значению. Сменяя друг друга, эти стадии образуют циклический процесс, экспериментальное изучение которого доставляет количественную информацию о свойствах вязкопластичных материалов. Важную роль при этом играет температура. С учётом сказанного, тензор деформации разлагается на четыре слагаемых,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\text{упр}} + \varepsilon_{ij}^{\text{плс}} + \varepsilon_{ij}^{\text{плз}} + \alpha T \delta_{ij},$$

отвечающих эффектам упругости, пластичности, ползучести и температуры соответственно. Три первых выражаются формулами:

$$\varepsilon_{ij}^{\text{упр}} = \frac{\sigma'_{ij}}{2G},$$

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{плс}} = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_{\text{эфф}}^{\text{плс}}}{\sigma'_{ij}},$$

$$d\varepsilon_{\text{эфф}}^{\text{плс}} = \sqrt{(2/3) d\varepsilon_{ij}^{\text{плс}} d\varepsilon_{ij}^{\text{плс}}}.$$

Простейшим, как с экспериментальной стороны, так и со стороны математической формулировки явления ползучести, являются одноосные испытания, результатом которых являются функции, содержащие в числе своих явных аргументов температуру T и время t:

$$\varepsilon^{\text{плз}} = F(\sigma, T, t).$$

В качестве первого приближения функция F представляется в виде произведения функций с разделёнными переменными. К такому типу относится формула Бэйли-Нортона

$$\varepsilon^{\text{плз}} = A\sigma^n t^m,$$

A, m и n в которой – материальные параметры, зависящие от температуры образца. Есть и другие аналитические представления $\varepsilon - \sigma$ связи. Ниже приведены некоторые формулы для двумерной цилиндрической геометрии.

- Условия несжимаемости $\varepsilon_z = 0, \quad \varepsilon_\theta + \varepsilon_r = u_r/r + du_r/dr = 0$. Из них

$$u_r == \frac{A}{r},$$

$$\varepsilon_r = -\frac{A}{r^2},$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{A}{r^2},$$

где A – постоянная интегрирования. Далее

$$\varepsilon_{\text{эфф}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{A}{r^2}$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\, s\left(\frac{2A}{\sqrt{3}r^2}\right), \quad \sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}.$$

- Уравнение равновесия имеет вид

$$d\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\, s\left(\frac{2A}{\sqrt{3}r^2}\right)\frac{dr}{r} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{s(v)}{v}dv,$$

где $v = 2A/(\sqrt{3}r^2)$.

- Вязкопластичная среда в модели Бингама-Максвелла представляется уравнением

$$\sigma = \begin{cases} \mathrm{E}\,\varepsilon, & \text{если } |\sigma| < \sigma_Y \\ \frac{1}{\eta}\left[1 - \frac{\sigma_Y}{|\sigma|}\right]\sigma + \frac{\dot\sigma}{\mathrm{E}} = \dot\varepsilon, & \text{если } |\sigma| > \sigma_Y. \end{cases}$$

11.1. Вязкоупругие среды

11.1.1. Показать, что изображённая на рис. 11.1 система является механическим аналогом вязкоупругости Кельвина.

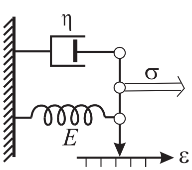

Рис. 11.1. Простой элемент Кельвина.

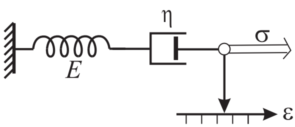

Рис. 11.2. Простой элемент Максвелла.

11.1.2. Построить механический аналог обобщенной вязкоупругости Кельвина.

11.1.3. Показать, что изображённая на рис. 11.2 система является механическим аналогом вязкоупругости Максвелла.

11.1.4. Построить механический аналог обобщённой вязкоупругости Максвелла.

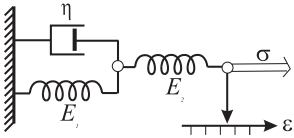

Рис. 11.3. К задаче 11.1.5.

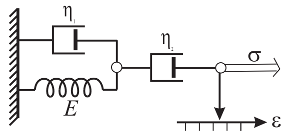

Рис. 11.4. К задаче 11.1.6.

11.1.5. Вывести определяющее уравнение для *стандартного линейного твердого тела*, изображаемого последовательным соединением упругого элемента и элемента Кельвина (рис. 11.3). Проверить предельные случаи.

11.1.6. Вывести определяющее уравнение для *трехпараметрической модели вязкой жидкости*, изображаемой последовательным соединением элемента Кельвина и вязкого элемента (рис. 11.4). Проверить предельные случаи.

11.1.7. Вывести определяющее уравнение для четырёхпараметрической модели вязкоупругой среды, изображаемой последовательным соединением элемента Кельвина с параметрами (E_1, η_1) и элемента Максвелла с параметрами (E_2, η_2).

11.1.8. Вывести определяющее уравнение для четырёхпараметрической модели вязкоупругой среды, изображаемой параллельным соединением элемента Кельвина (E_1, η_1) и элемента Максвелла (E_2, η_2).

11.1.9. Найти решение уравнения деформации ползучести в модели Кельвина.

11.1.10. Найти решение уравнения релаксации напряжения в модели Максвелла.

11.1.11. Найти функцию ползучести для обобщенной модели Кельвина.

11.1.12. Найти функцию релаксации для обобщенной модели Максвелла.

11.1.13. Записать интеграл наследственности для деформации при условии, что приложено напряжение

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sigma_0 e^{-t/\theta}, & t > 0. \end{cases}$$

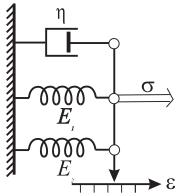

Рис. 11.5. К задаче 11.1.16.

11.1.14. Найти функцию ползучести для стандартного линейного твёрдого тела.

11.1.15. Найти деформацию стандартного твёрдого тела при законе нагружения

$$\sigma = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sigma_0, & 0 < t < 2\tau_1, \\ 0, & t > 2\tau_1. \end{cases}$$

11.1.16. Представленное рис. 11.5 тело в интервале времени $(0, t_1)$ растягивается с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_1 / t_1$. Найти закон изменения напряжения.

11.2. Упругопластичная среда

11.2.1. В условиях больших деформаций, свойственных экспериментам с пластическими материалами, используются понятия *истинных напряжений* и *истинных деформаций*:

$$\sigma^{\text{ист}} = \frac{F}{S},$$

где $S(\neq S_0)$ – площадь поперечного сечения деформированного образца, и

$$\varepsilon^{\text{ист}} = \int\limits_{l_0}^{l} \frac{\delta l}{l} = \ln(l/l_0).$$

Полагая, что точные $\sigma - \varepsilon$ соотношения для изотропной упругой среды получаются при использовании их истинных значений, найти соотношения между обычными переменными в приближении второго порядка.

11.2.2. Образец из мягкой стали, имеющий форму параллелепипеда длиной 100 мм, растягивается вдоль одного из направлений (длины) до 120 мм. Пренебрегая упругими деформациями и полагая материал изотропным, определить истинные деформации длины и двух поперечных размеров образца.

11.2.3. Определить истинные деформации в продольном и поперечных направлениях образца листового металла, растянутого до 130% первоначальной длины. Материал анизотропен: деформации ширины (1) и толщины (2) различны, коэффициент анизотропии $\varepsilon_{\perp 1}/\varepsilon_{\perp 2} = 1,5$.

11.2.4. Одна из аппроксимаций изотропного процесса деформационного упрочнения имеет вид $\sigma = \sigma_0 \varepsilon^n$. Предложить и обосновать метод определения показателя n.

11.2.5. В обозначениях предыдущей задачи процесс максимального упрочнения материала записывается в виде $\sigma_m = \sigma_0 \varepsilon_m^n$. Показать, что

$$n = \frac{d\sigma_m/d\varepsilon_m}{\sigma_m/\varepsilon_m}.$$

11.2.6. Предложить формулу для $\varepsilon(\sigma)$, имеющую линейный вид при $\sigma < \sigma_Y$, степенной вид $\varepsilon \propto \sigma^n$ в асимптотике больших напряжений и гладкую в окрестности аргумента σ_Y.

11.2.7. Стержень площадью поперечного сечения S и длиной l_0 растягивается до длины l. В предположениях задачи N найти произведённую при этом работу.

11.2.8. В процессе испытания сплава изготовленный из него образец с площадью поперечного сечения 60 мм^2 был растянут со 100 мм до 125 мм. Закон упрочнения $\sigma = 572\ \varepsilon^{0,27}$ МПа. Найти выполненную при этом работу.

11.2.9. Пренебрегая упругими деформациями, найти работу, выполненную при растяжении на 22 мм металлического стержня длиной 200 мм и диаметром 10 мм. Закон упрочнения $\sigma = 250\varepsilon^{0,3}$ Н/мм^2.

11.2.10. Показать, что в частной двумерной задаче условия пластичности Треска и Мизеса совпадают.

11.2.11. Показать, что если в упругой области закручиваемого стержня $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0$, то компоненты вектора перемещений

$\vec{u}$ в точке с координатами x_1, x_2, x_3 даются формулами Сен-Венана: $u_1 = -\alpha x_2 x_3$, $u_2 = \alpha x_1 x_3$, $u_3 = f(x_1, x_2)$, где α – угол закрутки (на единицу длины).

11.2.12. Полый шар с внутренним радиусом a и внешним b, изготовленной из изотропного упругопластичного материала, находится под давлением p с внутренней стороны. Внешнее давление равно нулю. Найти распределение напряжений в стенках сферы.

11.2.13. В условиях предыдущей задачи вычислить смещения в упругой зоне ($c < r < b$) и на границах пластической зоны ($r = a$ и $r = c$).

11.2.14. Толстостенный сферический сосуд, выполненный из несжимаемого упругопластического материала, находится под внутренним давлением. Эффективное напряжение и эффективная скорость деформации (ползучести) связаны известной функцией $\sigma = f(\dot{\varepsilon})$. Найти уравнение, связывающее радиальную (ε_r) и касательную (ε_t) деформации, не предполагая их малыми.

11.2.15. В условиях предыдущей задачи $\sigma = \sigma_t - \sigma_r$, $\varepsilon = (2/3)(\varepsilon_t - \varepsilon_r) = 2\varepsilon_t = -\varepsilon_r$. Вывести уравнение равновесия.

11.2.16. В используемом выше приближении имеет место уравнение

$$\frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial r} = -\frac{3}{r}\dot{\varepsilon} e^{-(3/2)\varepsilon}.$$

Обозначив через a внутренний радиус, а через b внешний, найти связь между скоростями ползучести на границах стенок $\dot{\varepsilon}_a$ и $\dot{\varepsilon}_b$.

11.3. Вязкопластичные среды

11.3.1. Свободный однородный диск из вязкопластичного материала с экспоненциальным законом ползучести

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon}_{\text{эфф}} \exp\left(\sigma / \sigma_{\text{эфф}}\right)$$

вращается с постоянной угловой скоростью Ω (эффективные параметры не зависят от времени). Радиус диска b, толщина равна 1. Записать уравнение равновесия в (неинерциальной) системе диска и преобразовать его к безразмерным переменным

$$\bar{\sigma}_r = \sigma_r / \sigma_{\text{эфф}}, \quad \bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta / \sigma_{\text{эфф}}, \quad \bar{r} = r/b.$$

11.3.2. В условиях предыдущей задачи найти напряженности $\bar{\sigma}_r$ и $\bar{\sigma}_\theta$ в предположении, что они равны.

11.3.3. Вязкопластический диск с вырезанным по центру кругом вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси (внутренний радиус a, внешний b). В тех же безразмерных переменных определить распределение по диску напряжений $\bar{\sigma}_r$ и $\bar{\sigma}_\theta$.

11.3.4. Преобразовать представление Бэйли-Нортона в форму дифференциального уравнения.

11.3.5. Толстостенная труба с внутренним радиусом a и внешним b заполнена газом под давлением p (внешнее давление отсутствует). В предположении, что материал трубы несжимаем, а закон ползучести

$$s(\epsilon) = \sigma_n(\epsilon/\epsilon_n)^{1/n},$$

найти напряжения (диагональные элементы тензора напряжений) в её стенках.

11.3.6. Преобразовать ответ предыдущей задачи к безразмерным переменным $\bar{\sigma}_r = \sigma_r/p,\ \bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta/p,\ \bar{r} = r/b$. Провести вычисления и построить графики полученных напряжений для $n = 1,\ 2,\ 5,\ 8$.

11.3.7. Многие авторы описывают явление памяти в неупругих материалах уравнениями, одноосная (простейшая) версия которых представляется в виде

$$\sigma(t) = \int\limits_0^t R(t-t')\frac{d\varepsilon}{dt'}dt',$$

другие предпочитают уравнение

$$\sigma(t) = \sigma_0\frac{d\varepsilon}{dt} + \int\limits_0^t S(t-t')\frac{d\varepsilon}{dt'}dt'.$$

Полагая, что оба уравнения описывают один и тот же процесс, установить связь между их ядрами R и S.

Часть II

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Глава 1. Материальная точка в заданном внешнем поле

1.1. Координаты, скорости, ускорения

1.1.4. Дифференцируя $\int\limits_0^t v(\tau)d\tau$ по t и решая полученное уравнение, приходим к соотношению $\left(\frac{1}{mc} - \frac{v}{2}\right)^2 = \frac{c_1}{t}$, где c – коэффициент, указанный в условии пропорциональности, а c_1 – произвольная постоянная, которая в силу начальных условий может быть только нулём.

1.1.5. Разложить $\vec{r}$ по декартовым ортам, выразить декартовы проекции через цилиндрические координаты и воспользоваться формулами $\vec{e}_\rho = (\delta\vec{r}/|\delta\vec{r}|)_{\varphi=\mathrm{const}, z=\mathrm{const}}$ и $\vec{e}_\varphi = (\delta\vec{r}/|\delta\vec{r}|)_{\rho=\mathrm{const},\, z=\mathrm{const}}$, пояснив их смысл.

1.1.6. См. указания к задаче 1.1.5.

1.1.10. Воспользоваться результатами предыдущей задачи.

1.1.12. Пример: вариант а).

1. Обе координаты выполняют гармонические колебания с той же самой частотой ω, так что в целом движение периодическое с периодом $2\pi/\omega$.

2. Исключая из системы уравнения время (путём возведения их в квадрат и сложения), получаем: $x^2 + y^2 = c^2$. Значит, кривая, по которой движется точка в плоскости XOY, есть окружность радиусом c с центром в начале координат.

3. В начальный момент ($t = 0$) точка имеет координаты $x_0 = c$, $y_0 = 0$.

4. Дифференцируя исходную систему уравнений по времени, складывая и извлекая квадратный корень, находим

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = c\omega.$$

Скорость движения постоянна и равна произведению радиуса окружности на круговую частоту.

5. Повторяя эту операцию с двукратным начальным дифференцированием, получим аналогичный результат для абсолютной величины ускорения:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = c\omega^2 = v^2/c.$$

6. Годограф скорости представляет собой окружность (длина вектора скорости $\vec{v}$ постоянна), представляющая частицу в этом пространстве скоростей точка в начальный момент имеет координаты $v_x = 0,\ v_y = \omega c$ и движется по часовой стрелке.

7. Вектор ускорения

$$\vec{a} = -\omega^2 x\vec{e}_x - \omega^2 y\vec{e}_y = -\omega^2\vec{r}$$

постоянен по модулю и имеет направление, противоположное направлению радиус-вектора (направлен к центру, поэтому и называется это ускорение центростремительным).

1.1.14. Из уравнения кривой

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

но

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{v_y}{v_x},$$

поэтому

$$v_x = -\frac{x}{y}v_y = --\frac{k}{c}x^2.$$

Дифференцируя по времени, находим x-проекцию ускорения.

1.2. Силы

1.2.10. Воспользоваться формулой $d\varphi = \pm\dfrac{Ldr}{r^2\sqrt{2m(\mathcal{E} - U_{\text{эф}}(r))}}$, пояснив её происхождение.

1.2.11. Воспользоваться теоремой Гаусса.

1.2.15. В этой и следующей задаче используется принцип суперпозиции.

1.2.17. Применить к обеим частям равенства оператор Лапласса.

1.2.20. Вклад элемента сферы массой dm в потенциал $\phi(r)$ на расстоянии r от её центра равен $d\phi = -G\dfrac{dm}{R}$, где R – расстояние от элемента до точки наблюдения. Выберем последнюю на оси OZ, тогда $R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}$. Масса $dm = \dfrac{m}{4\pi a^2}a^2 d\Omega$, где m – полная масса сферической поверхности, а $d\Omega = d\cos\theta d\varphi$ – элемент телесного угла. Осталось выполнить интегрирование.

1.2.21. Градиент функции $\phi(r)$, зависящей только от расстояния до начала координат, равен $\phi'(r)\vec{e}_r$.

1.2.22. Разбить шар на тонкие сферические слои и воспользоваться результатом задачи 1.2.20.

1.1.21. Представить $\phi(\vec{r})$ в виде интеграла по занятому массой объёму и воспользоваться разложением

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}_1)^2}} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}_1}{r^3} + \ldots$$

1.2.27. Результат выражается через полный эллиптический интеграл первого рода

$$\mathrm{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

1.2.28. Воспользоваться разложением эллиптического интеграла $\mathrm{K}(k)$ в ряд Тейлора по k^2:

$$\mathrm{K}(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots\right\}.$$

1.2.32. Учесть, что длина dl элемента кривой связана с его проекцией $d\xi$ на ось OX соотношением $dl = \sqrt{1+[f'(\xi)]^2}d\xi$.

1.2.35. Использовать принцип суперпозиции и результат предыдущей задачи.

1.2.36. Воспользоваться результатом задачи 1.2.32 и принципом суперпозиции.

1.2.49. Удобно вычислить сначала потенциал, создаваемый одним полушарием, сместив начало координат в центр его основания, так что точка наблюдения $z = -a$, а затем удвоить результат.

1.2.54. Воспользоваться разложением $\dfrac{1}{\sqrt{1-2\xi\mu+\xi^2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\xi^n P_n(\mu)$.

1.2.57. Возвести обе части равенства в квадрат, дважды продифференцировать по времени и выразить $\dot{x}^2$ через x.

1.2.58. Перейти к безразмерным переменным $\xi = x/a$ и $\eta = y/b$, записать в них уравнение траектории, продифференцировать по времени и дополнить выражением секторной скорости в этих переменных.

1.2.59. Воспользоваться уравнением эллипса в полярных координатах $r = p/(1+\varepsilon\cos\varphi)$ и вытекающими из решения задачи 1.1.9 формулами для компонент силы в полярных координатах: $F_r = m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)$, $F_\varphi = mr^{-1}d\left(r^2\dot{\varphi}\right)/dt$. При вычислениях $\dot{r}$ и $\ddot{r}$ пользоваться уравнением эллипса и постоянством секторной скорости.

1.2.60. Искомый потенциал $\varphi(r)$ складывается из потенциала $\varphi_{\text{я}}(r)$, создаваемого ядром, которое можно считать точечным, и потенциала $\varphi_{\text{e}}(r)$, создаваемого электронной оболочкой. Записать для последнего уравнение Пуассона, дважды проинтегрировать и определить постоянные так, чтобы в начале координат этот потенциал был конечен, а на бесконечности обращался в нуль.

1.3. Основные теоремы о движении точки

1.3.7. Сила трения выражается через μ соотношением $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Условие отрыва

$$\frac{mv^2}{R}=\mu mg,$$

откуда

$$v=\sqrt{\mu Rg}, \quad t=\sqrt{2h/g},$$

и искомое расстояние $vt=\sqrt{2\mu Rh}$.

1.3.10. Потенциал однородного сплошного шара φ_0 можно представить в виде суммы потенциала шара с полостью φ, потенциала φ_1, создаваемого цилиндром с плоскими основаниями, и потенциала φ_2, создаваемого сегментом, образующим сферическое основание удаляемого цилиндра. Очевидно, разность потенциалов между точками $z = R$ и $z = 0$ линии падения $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 - \Delta\varphi_2$ (почему?). Для определения $\Delta\varphi_2$ воспользоваться решением задач 1.2.22, 1.2.43 и 1.2.47.

1.3.14. Продифференцировать $\vec{\Lambda}(t)$ по времени и учесть, что $\dot{r} = v_r = (\vec{v}\vec{r})/r$ и $\dot{\vec{v}} = -\alpha\vec{r}/mr^3$. Так доказывается, что $d\vec{\Lambda}/dt = 0$. Доказав, что $\vec{\Lambda}\vec{L} = 0$, приходим к выводу, что $\vec{\Lambda}\perp\vec{L}$, то есть $\vec{\Lambda}$ лежит в плоскости орбиты. Вычисляя далее скалярное произведение $\vec{\Lambda}\vec{r} \equiv cr\cos\varphi$, получим $\Lambda r\cos\varphi = \dfrac{L^2}{m} - \alpha r$. Находя отсюда r и сравнивая это выражение с формулой траектории, приходим к ответу.

1.4. Одномерное движение

1.4.9. Пусть a_1 – ускорение точки под действием тела 1, а a_2 – её ускорение под действием тела 2. Опыт показывает, что под влиянием обоих тел точка приобретает ускорение $a_{1+2} = a_1 + a_2$. Пусть сила, действующая на движущуюся с ускорением a точку, определяется функцией $F = f(a)$, так что $F_1 = f(a_1)$, $F_2 = f(a_2)$ и $F_{1+2} = f(a_{1+2})$. Используя в аргументе последней функции формулу сложения ускорений, приходим к требуемому выводу.

1.5. Одномерные колебания

1.5.4. Из закона сохранения энергии

$$ml^2\dot{\varphi}^2/2 - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0$$

найти $\dot{\varphi}$, затем проинтегрировать уравнение в разделённых переменных

$$dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}$$

и период

$$\tau = 4\int\limits_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}$$

с помощью подстановки $\sin\xi = (\sin\varphi/2)/\sin(\varphi_0/2)$ выразить через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$.

Учитывая разложение

$$K\,(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{k^2}{4} + ...\right],$$

найти поправку к элементарной формуле $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$ в случае малых колебаний.

1.5.5. Формула для периода имеет вид

$$\tau(\mathcal{E}) = \sqrt{2m} \int\limits_{-x(\mathcal{E})}^{x(\mathcal{E})} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{E} - U(x)}} = 2\sqrt{2m} \int\limits_{0}^{x(\mathcal{E})} \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{E} - U(x)}}.$$

Чтобы выразить $U(x)$ через $\tau(\mathcal{E})$, применяется искусственный приём: вычисляется интеграл

$$\int\limits_0^z \frac{\tau(\mathcal{E})\, d\mathcal{E}}{\sqrt{z-\mathcal{E}}} = 2\sqrt{2m} \int\limits_0^z d\mathcal{E} \int\limits_0^{\mathcal{E}} \frac{1}{\sqrt{(z-\mathcal{E})(\mathcal{E}-U)}} \frac{dx}{dU} dU.$$

Далее используется правило Дирихле и формула

$$\int\limits_0^y \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{y-x}} = \pi y/2.$$

1.5.7. Привести уравнение движения к виду $\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Использовать метод характеристических уравнений. Рассмотреть три случая: $\beta > 2\omega_0$, $\beta = 2\omega_0$, $\beta < 2\omega_0$. Из соотношения $A(t+\tau) = A(t)\, e^{-\delta}$ найти логарифмический декремент затухания при $\beta < 2\omega_0$. При $\beta << 2\omega_0$ на одном периоде колебание можно считать гармоническим. Найти в этом приближении $E(t)$.

1.5.8. Подставив $x(t)$ в уравнение движения $\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos(\Omega t)$, воспользоваться тригонометрическим тождеством

$$\cos\Omega t = \cos\varphi\cos(\Omega t - \varphi) - \sin\varphi\sin(\Omega t - \varphi).$$

Приравнять коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях времени. Построить графики $A(\Omega)$ и $\varphi(\Omega)$. Найти приближенные выражения для $\Omega \approx \omega_0$ и $\beta << 2\omega_0$.

1.6. Задачи с разделяющимися переменными

1.6.2. В качестве зависимой переменной использовать скорость: две её проекции разделяются. Найти момент максимального подъёма.

Проанализировать поведение решения при $\beta \equiv b/2m \to 0$ (при «выключенном» трении).

1.6.3. Найти $x\,(t)$, $z\,(t)$, уравнения траектории $z\,(x)$, момент наивысшего подъема, координаты этой точки, предельные (при $t \to \infty$) значения проекции скорости и координат, рассмотреть предельные случаи $\beta \to 0$ и $g \to 0$.

1.6.4. Систему дифференциальных уравнений для v_x и v_y можно расцепить дополнительным дифференцированием по времени.

1.6.13. Разложить $U_{\text{эф}}$ в ряд Тейлора около точки $r = a$ до квадратичного члена включительно. Радиальное движение в этой области колебания гармонического осциллятора.

1.6.15. Радиусы окружностей (соответствующие в одномерном случае точкам поворота) определяются уравнением

$$|\mathcal{E}| - \frac{\alpha}{r^\gamma} + \frac{L^2}{2mr^2} = 0.$$

Поясните его происхождение и решите для указанных в условии значений γ.

1.7. Движение в кулоновском (ньютоновом) поле

1.7.5. Уравнение траектории в этих переменных $u = u(\varphi)$, откуда

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}.$$

Сравнивая это выражение с соотношением $\dot{r} = \dfrac{2\sigma}{r^2}\dfrac{dr}{d\varphi}$ и используя формулу $v^2 = \dot{r}^2 + (2\sigma)^2/r^2$, приходим к первой формуле Бинэ. Аналогичные преобразования выражения $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}$ приводят ко второй формуле.

1.7.9. Земля делает полный оборот за время $\tau = 86\,164$ с, скорость стационарного спутника на высоте h

$$v = 2\pi(R + h)/\tau$$

должна удовлетворять соотношению

$$v = \sqrt{K_З/(R+h)}, \quad K_З \approx 0.4 \cdot 10^{15} \text{м}^3/\text{с}^2.$$

1.7.15. Есть два способа: разделить переменные или решать непосредственно в векторном виде.

1.7.16. Вывести из уравнения эллипса в полярных координатах формулы для декартовых полуосей a и b и выразить затем p и ε через E и L.

1.7.26. Дополнительное (по сравнению с центростремительным) радиальное ускорение можно рассматривать как результат дополнительной потенциальной энергии – mar, так что полная энергия

$$\mathcal{E} = m(v_0^2/2 - K/r - ar).$$

В начальный момент

$$\mathcal{E}_0 = m(v_0^2/2 - K/r_0 - ar_0) = -m(K/(2r_0) + ar_0).$$

В момент, когда корабль находится на расстоянии $r_1 = 2K/v_1^2$, $\mathcal{E}_1 = m(v_1^2/2 - K/r_1 - ar_1)$. Приравнивая $\mathcal{E}_0$ к $\mathcal{E}_1$ и исключая v_1, приходим к ответу.

1.7.33. Уравнение траектории (при $r > R$) имеет вид $r = p/(1 + \varepsilon\cos\varphi)$. Пусть точка, где тело покидает поверхность, характеризуется углом $\varphi = \pi/2$. Найти L, β, а затем и v_0.

1.7.35. Касательное ускорение

$$a_\tau = \dot{v} = a_0 \cos^3\theta,$$

нормальное

$$a_n = v^2/r_0 = (a_0/r_0^2)\sin\theta - K/r_0^2.$$

Дифференцируя последнее выражение по времени, исключая $\dot{v}$ с помощью предыдущего, находим $\dot{\theta} = 2v/(3r_0)$. Дифференцируя найденное соотношение по времени и опять исключая $\dot{v}$, приходим к искомому уравнению.

1.8. Рассеяние частиц в центрально-симметричном поле

1.8.30. Главное – найти связь между прицельным параметром b и углом рассеяния θ. Это можно сделать двумя способами: рассмотреть отражение точки от шара («угол падения равен углу отражения») или выполнить интегрирование

$$\varphi_\infty = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{\mathcal{E} - U_{\text{эф}}}}, \quad \varphi_\infty = (\pi - \theta)/2, \quad L = mv_0 b.$$

1.8.31. Интеграл для φ_∞ в этой задаче приводится к виду

$$\varphi_\infty = \int\limits_0^{x_m} \frac{dx}{\sqrt{1 - (1 + 2m\alpha/L^2)\, x^2}}.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\pi}{2},$$

получаем

$$b^2 = \frac{\alpha}{E} \frac{1}{\pi^2 \Big/ (\pi - \theta)^2 - 1},$$

откуда и следует ответ. Сравните полученное сечение с резерфордовским при малых углах.

1.8.36. С использованием формулы

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^\mu + z^\mu)^\rho} = \mu^{-1} a^{1-\mu\rho} B(1/\mu, \rho - 1/\mu)$$

результат выражается через бета-функцию

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

1.9. Движение точки, ограниченное связями

1.9.3. Пусть $\zeta(t)$ – перемещение резвой обезьяны относительно веревки, тогда кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{z}^2 + (\dot{\zeta} - \dot{z})^2\right],$$

а потенциальная

$$U = mgz + mg(\zeta - z).$$

1.9.6. В момент отрыва силы реакции исчезают и остаются уравнения $\ddot{x} = 0$, $\ddot{z} = -g$. Учитывая уравнение связи (справедливое вплоть до момента отрыва), можно получить:

$$\dot{x} = \frac{2}{a} z\,\dot{z}, \quad \ddot{x} = \frac{2}{a}\left(\dot{z}^2 + z\,\ddot{z}\right).$$

Таким образом, $\dot{z}^2 = zg$. Подставляя полученные скорости в закон сохранения энергии, приходим к кубическому уравнению

$$z^3 + (2/3)\,z - 5/3 = 0,$$

единственным вещественным решением которого является $z = 1$.

1.9.7. Воспользоваться законами сохранения энергии и момента импульса.

1.9.8. Рассматривая поверхность как связь, запишем уравнения Лагранжа 1-го рода в декартовой системе координат:

$$m\ddot{x} = -\lambda(x/r)f'(r),$$

$$m\ddot{y} = -\lambda(y/r)f'(r),$$

$$m\ddot{z} = mg + \lambda.$$

Чтобы траектория была параллелью $z = z_0$, необходимо, чтобы эти уравнения выполнялись при условии $z = z_0$, $x = r_0\cos\varphi$, $y = r_0\sin\varphi$. Учитывая, что при таком движении $\varphi = \varphi_0 + v_0 t/r_0$, из первых двух уравнений находим ответ. Простейший способ решения: приравнять равнодействующую веса и нормальной реакции центростремительной силе.

1.9.10. Работаем в сферической системе координат. Угол α связан с проекциями скорости $v_\varphi = R\sin\theta\dot\varphi$ и $v_\theta = R\dot\theta$ соотношением $\mathrm{ctg}\alpha = -v_\theta/v_\varphi$, откуда находим дифференциальное уравнение для $\theta(\varphi)$. Решая его, получим

$$\mathrm{tg}(\theta/2) = \exp(-\varphi\,\mathrm{ctg}\alpha).$$

Элемент длины дуги

$$ds = R\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2} = -\frac{d\theta}{\cos\alpha}.$$

1.9.12. Обратить внимание на то, что $2kx = -mgx/\sqrt{x^2+y^2/4}$ имеет два решения: $x_1 = 0$ и x_2, удовлетворяющие уравнению $2k = -mg/\sqrt{x^2+y^2/4}$.

1.9.14. Построим цилиндрическую систему координат так, чтобы окружность лежала в плоскости XOY, а её центр совпадал с началом координат. Записывая в этой системе уравнения движения вместе с уравнениями связей, приведем уравнение Лагранжа к виду

$$\ddot\varphi = -k\sqrt{\dot\varphi^4 + (g/a)^2}.$$

Представляя $\ddot\varphi$ в виде $d\dot\varphi/dt$, переходя здесь от дифференцирования $\dot\varphi$ по времени к дифференцированию по пути s и интегрируя, получим

$$\ln\frac{\dot\varphi^2 + \sqrt{\dot\varphi^4 + (g/a)^2}}{\dot\varphi_0^2 + \sqrt{\dot\varphi_0^4 + (g/a)^2}} = -\frac{2k}{a}s.$$

Используя конечное условие $\dot\varphi = 0$ при $s = l$, находим реакцию связи.

1.9.15. Из закона сохранения энергии

$$\dot\varphi^2 = \omega_0^2 - 2\,(g/l)\,(1-\cos\varphi)\,.$$

Сила реакции нити (точнее, её проекция на направление нити) $F_l' = -ml\dot\varphi^2 - mg\cos\varphi$. Связь будет удерживающей до тех пор, пока $F_l' \le 0$ в наивысшей точке ($\varphi = \pi$).

1.9.16. Ввиду отсутствия активных сил энергия $\mathcal{E} = \mathcal{L}$ сохраняется, $|v| = \mathrm{const}$ и теорема Клеро следует из закона сохранения момента импульса.

1.10. Движение в неинерциальной системе отсчёта

1.10.2. Систему дифференциальных уравнений для координат x и y удобно привести к одному уравнению для комплексной переменной $u = x + iy$, решить которое можно методом характеристических уравнений.

1.10.3. Реакция плоскости находится из условия $\ddot{y} = 0$.

1.10.5. Проанализировать составляющие этой скорости – переносную и относительную.

1.10.7. Обозначим через C – центр окружности, через A – точку, диаметрально противоположную O. Положение точки M на окружности будем характеризовать углом $ACM(\theta)$, выражая x, y через $\theta, \Omega t$ и R, составим функцию Лагранжа.

1.10.10. Пусть M масса планеты, а R её радиус. На полюсе

$$g_{\text{пол}} = \frac{GM}{R^2},$$

а на экваторе

$$g_{\text{экв}} = \frac{1}{2}\frac{GM}{R^2}.$$

Уменьшение ускорения происходит из-за центробежного эффекта:

$$\frac{1}{2}\frac{GM}{R^2} = \frac{GM}{R^2} - \frac{V^2}{R}.$$

Здесь v – скорость точек на экваторе. Величина $v^2/2$ – это кинетическая энергия единицы массы на поверхности планеты. Эта «пробная частица» единичной массы не покидает планету, потому что её полная энергия отрицательна:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} < 0.$$

Чтобы преодолеть тяготение, частица должна иметь скорость V такую, чтобы полная энергия перестала быть отрицательной:

$$\frac{V^2}{2} - \frac{GM}{R} \geq 0.$$

Её наименьшее значение и есть первая космическая скорость:

$$V_{\text{к}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2g_{\text{пол}}R} = 2v.$$

1.10.12. Система уравнений (в обозначениях предыдущей задачи) имеет вид $\ddot{x} - a\dot{y} + kx = 0$, $\ddot{y} + a\dot{x} + ky = 0$. Появившиеся здесь слагаемые с $k = g/l$ отражают совокупное влияние силы тяжести и натяжения нити (показать это). Вновь воспользоваться комплексной переменной $u = x + iy$. При вычислении характеристического корня пренебречь $a^2/4$ по сравнению с k. Показать, что при подходящем выборе начальных условий мы получаем эллипс: неподвижный на экваторе и медленно (по сравнению с периодом колебаний) вращающийся на других широтах.

1.10.13. Опуская члены с Ω^2, получим уравнение $\ddot{y} = bgt$, которое решается элементарными средствами. Время падения можно вычислить без учета влияния неинерциальности системы.

Глава 2. Системы материальных точек

2.1. Теоремы о движении системы материальных точек

2.1.11. Заменить $\ddot{\vec{r}}_j$ на $\ddot{\vec{r}}_j + \delta\ddot{\vec{r}}_j$ и вычислить δC.

2.1.15. Перейти в СЦМ, решить там уравнения и вернуться в ЛСК.

2.2. Собственные характеристики системы

2.2.1. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{N} m_i r_{ij}^2 = I + m r_j^2.$$

Умножая обе части этого равенства на m_j и суммируя по всем точкам системы, приходим к искомому соотношению.

2.2.2. К результату предыдущей задачи применить уравнение Лагранжа-Якоби.

2.2.3. Сначала доказать, что $\sum\limits_{i\neq j}^{N}\dfrac{m_i m_j}{r_{ij}} \leq \dfrac{1}{\rho}\sum\limits_{i\neq j}^{N} m_i m_j \leq \dfrac{m^2}{\rho}$.

2.2.4. Воспользоваться законом сохранения энергии, из которого следует, что $U = \mathcal{E} - T \leq \mathcal{E} = -|\mathcal{E}|$.

2.2.5. Гравитационная энергия облака $U_g \approx -\gamma\dfrac{m^2}{R}$, тепловая $W \approx$ $\approx mAT$, где A – зависящая от состава облака постоянная, T – абсолютная температура.

2.2.6. Допустим противное: существует число A такое, что все r_i (в СЦМ) не превосходят A при любом t. Отсюда

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \leq mA^2, \qquad m = \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

Осталось дважды проинтегрировать второе из уравнений задачи 2.1.11 в пределах от 0 до t:

$$I(t) > I(0) + \dot{I}(0)t + 2\mathcal{E}t^2.$$

2.2.12. При интегрировании по $\vec{r}_2$ направить ось OZ вдоль вектора $\vec{r}_1$ и воспользоваться соотношением

$$\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2\mu}} = \begin{cases} 2/r_2 & \text{при} \quad r_1 < r_2, \\ 2/r_1 & \text{при} \quad r_1 > r_2. \end{cases}$$

Вычисляя получающийся при этом повторный интеграл

$$K = \frac{32e^2}{r_0^6}\int_0^\infty dr_1 r_1^2 e^{-2r_1/r_0}\int_{r_1}^\infty r_2 e^{-2r_2/r_0} dr_2,$$

приходим к ответу. Другой способ решения сводится к использованию результата задачи 1.1.53.

2.2.13. Вычисление интеграла

$$K_{aB} = -\frac{e^2}{\pi a_0^3}\int\frac{\exp\{-2r_{aA}/a_0\}}{r_{aB}} dV_a$$

легко выполнить путем перехода к эллиптическим координатам

$$\mu = (r_{aA} + r_{aB})/R, \quad \nu = (r_{aA} - r_{aB})/R, \quad \varphi,$$

где φ – угол поворота вокруг прямой, соединяющей оба ядра. Элемент объема в этих координатах

$$dV = \frac{R^3}{8}(\mu^2 - \nu^2)d\mu d\nu d\varphi,$$

а интегрирование производится в пределах

$$1 \le \mu \le \infty, \quad -1 \le \nu \le 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Искомый интеграл приводится к виду

$$K_{aB} = \frac{e^2 R^2}{2a_0^2}\left\{\int_1^\infty d\mu\mu e^{-\rho\mu}\int_{-1}^1 e^{-\rho\nu}d\nu + \int_1^\infty d\mu e^{-\rho\mu}\int_{-1}^1 \nu e^{-\rho\nu}d\nu\right\},$$

где $\rho = R/a_0$.

2.2.16. Потенциальная энергия рассматриваемой системы является однородной функцией координат со степенью однородности $k = 1$.

2.2.18. Масса Солнца $m_C = 2{\cdot}10^{30}$ кг, его радиус - $R_C = 7{\cdot}10^8$ м, средняя масса атома $m_a = 3 \cdot 10^{-27}$ кг, $\gamma = 6,7 \cdot 10^{-11}$ м/(кг с^2), постоянная Больцмана $k_Б = 1,4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Использовать теорему о равнораспределении кинетической энергии по степеням свободы.

2.2.19. Использовать доказательство от противного. Предположить, что галактика остаётся в ограниченной области пространства и применить теорему о вириале с учётом того, что для изолированной галактики $\langle\mathcal{E}\rangle = \mathcal{E}$.

2.2.20. Вывести два уравнения $\dfrac{a^3}{\tau^2(m_1+m_2)} = \dfrac{\gamma}{4\pi}$, $\quad a_1 m_1 = a_2 m_2$, из которых и следует ответ.

2.2.22. Главный вектор внешних сил, в роли которых здесь выступают силы реакции, направлен на начало координат.

2.2.23. Импульс ракеты в момент времени t равен $m\vec{v}$. Импульс системы ракета + выброшенный за время dt газ равен $(m - |dm|)(\vec{v} + d\vec{v}) + |dm|(\vec{v} + \vec{u})$. Суммарное приращение импульса может быть обусловлено только импульсом внешней силы.

2.2.26. Продифференцировать T по v с учётом формулы Циолковского.

2.2.28. Полная высота подъёма складывается из активного участка h_1, проходимого ракетой с работающим двигателем, и пассивного участка h_2, когда ракета с неработающим уже двигателем движется по инерции.

2.2.31. Уравнение движения в проекции на направление к Марсу имеет вид $m\dot{v} = -\dot{m}u - \dfrac{mgR^2}{(R+z)^2}$. При вычислении интеграла $\displaystyle\int \frac{d\tau}{(1+\tau^2)^2}$ воспользоваться тригонометрической заменой $\tau = \operatorname{tg}\theta$.

2.2.32. Воспользоваться уравнением Эйлера-Лагранжа, обеспечивающим максимальную высоту

$$h = \int\limits_0^\tau v dt = \int\limits_{v_0}^0 v \frac{dv}{\dot{v}},$$

и исключить $\dot{v}$ с помощью уравнения Мещерского.

2.2.33. Пользуясь уравнением Мещерского, в котором $\dot{m}$ заменим на adm/dv, получим $a = -(mg + F_{\text{c}})/(1 + udm/dv)$. Как следует из предыдущей задачи, при $F_{\text{c}} = kv^2$

$$m = \frac{kv^2}{gu}(v+u).$$

Подставляя это выражение в уравнение Мещерского, приходим к ответу.

2.3. Система двух тел

2.3.6. Угол рассеяния в ЛСК связан с углом в СЦМ соотношением

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \xi}, \quad \xi = m_1/m_2, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Воспользовавшись решением задачи 1.3.30, рассмотреть три случая.

а) $\xi < 1$. При изменении θ от 0 до π угол ϑ_1 меняется в тех же пределах (показать). Возводя обе части приведённого выше равенства в квадрат и разрешая его относительно $\cos\theta$, получим

$$\cos\theta = -\xi\left(1 - \cos^2\vartheta_1\right) \pm \cos\vartheta_1\sqrt{1 - \xi^2 + \xi^2\cos^2\vartheta_1}.$$

Выбирая перед корнем знак + (почему?), вычисляем

$$d\sigma = \frac{\pi R^2}{2}\left|\frac{d\cos\theta}{d\cos\vartheta_1}\right| d\cos\vartheta_1 = \frac{R^2}{4}\left|\frac{d\cos\theta}{d\cos\vartheta_1}\right| d\Omega_1,$$

откуда и следует ответ.

б) $\xi > 1$. Взяв производную $d\,\mathrm{tg}\,\vartheta_1/d\theta$, находим, что максимальное значение ϑ_1 достигается при $\cos\theta^* = -1/\xi$, причём $\sin\vartheta_{1\ \max} = 1/\xi$. Таким образом, здесь две ветви: когда θ увеличивается от 0 до θ^*, угол ϑ_1 меняется от 0 до $\vartheta_{1\ \max}$ (берём знак + перед корнем, как и выше), когда θ продолжает увеличиваться от θ^* до π, угол ϑ_1 уменьшается от $\vartheta_{1\ \max}$ до 0 (берём знак −). Обозначая первую ветвь $\theta^{(1)}$, а вторую – $\theta^{(2)}$, получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \frac{R^2}{4}\left\{\left|\frac{d\cos\theta^{(1)}}{d\cos\vartheta_1}\right| + \left|\frac{d\cos\theta^{(2)}}{d\cos\vartheta_1}\right|\right\}.$$

Первое слагаемое вычислено в п. а), во втором

$$\left|\frac{d\cos\theta^{(2)}}{d\cos\vartheta_1}\right| = \frac{1+\xi^2\cos 2\vartheta_1}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\vartheta_1}} - 2\xi\cos\vartheta_1.$$

в) $\xi = 1$ (сделайте самостоятельно).

2.3.7. Эта задача гораздо проще: $\vartheta_2 = (\pi-\theta)/2$ (почему?).

2.3.8. Эта задача тоже несложная. Потерянная в столкновении энергия Q – это кинетическая энергия, приобретённая первоначально покоившейся частицей 2:

$$Q = \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Покажите, что $Q = Q_{\max}\sin^2(\theta/2)$, найдите $Q_{\max}$ и вычислите $d\sigma/dQ$, используя $d\sigma/d\Omega$ и связь между θ и Q.

2.3.9. Рассмотреть столкновение молекулы со «стенкой» в системе покоя последней.

2.4. Система трёх тел

2.4.1. Порядком системы дифференциальных уравнений называется сумма порядков старших производных в этих уравнениях, так что порядок исходной системы $3 \times 3 \times 2 = 18$. Использование каждого из интегралов движения соответствующим образом уменьшает порядок системы.

2.4.4. Перейти в СЦМ.

2.4.5. Во вращающейся системе координат

$$m_1 \Omega^2 x_1 = \gamma \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} x_{12} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} x_{13} \right)$$

и т.д. (всего 6 уравнений). Складывая три из них и три оставшихся, приходим к ответу.

2.4.6. Провести ось OX через точку 3, тогда

$$y_3 = 0, \quad x_3 > 0 \quad \text{и} \quad \frac{m_1 y_1}{r_{31}^3} + \frac{m_2 y_2}{r_{32}^3} = 0.$$

Так как $m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$, то $m_1 y_1 \left(\dfrac{1}{r_{31}^3} - \dfrac{1}{r_{12}^3} \right) = 0$, откуда и следует ответ.

2.4.9. В указанном случае можно положить $\vec{s}_1 = \lambda \vec{s}_3$, $\vec{s}_2 = -(1+\lambda)\vec{s}_3$, где λ – положительный скаляр (см. рис. 2.1).

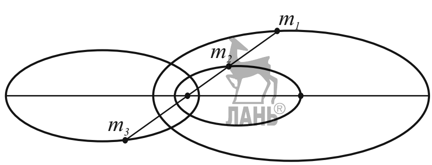

Рис. 2.1. Указания к задаче 2.4.9.

Глава 3. Абсолютно твёрдое тело

3.1. Скорости и ускорения

3.1.1. Воспользоваться матрицей поворота и найти искомые координаты из равенства:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathsf{R}_x^T \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ c \end{pmatrix}.$$

Здесь R_x^T – транспонированная матрица поворота, описывающая обратное преобразование ($\mathsf{R}_x^T = \mathsf{R}_x^{-1}$).

3.1.2. Подействовать на полученный выше результат матрицей второго поворота или найти произведение этих матриц $\mathsf{R} = \mathsf{R}_{2'}(\theta)\mathsf{R}_x$, и применить его к исходному положению точки.

3.1.4. Вначале определить угловую скорость стержня $\Omega = \dfrac{vh}{h^2 + (vt)^2}$ (см. рис. к задаче) и угловое ускорение $|\dot{\vec{\Omega}}| = \dfrac{2v^3ht}{[h^2 + (vt)^2]^2}$, а затем модуль скорости точки P $v_P = CP\Omega$ и модуль её ускорения $a_P = AP\sqrt{|\dot{\vec{\Omega}}|^2 + \Omega^4}$.

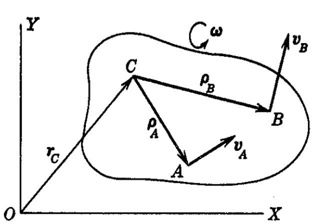

Рис. 3.1. Указания к задаче 3.1.6.

3.1.6. Провести через A и B в данной плоскости прямые, перпендикулярные соответственно векторам $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ и пересекающихся в точке C с радиус-вектором $\vec{r}_C$ (рис. 3.1). Введя обозначения $\vec{r}_{AC} = \vec{r}_A - \vec{r}_C$ и $\vec{r}_{BC} = \vec{r}_B - \vec{r}_C$, сопоставить пару формул

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + [\vec{\Omega}, \vec{r}_{AC}], \quad \vec{v}_B = \vec{v}_C + [\vec{\Omega}, \vec{r}_{BC}].$$

3.1.9. Обозначим углы, как показано на рис. 3.2. Очевидно,

$$v_1 \cos\alpha = v\cos\delta, \quad v_2\cos\beta = v\cos(\varphi - \delta). \tag{1}$$

Несложные тригонометрические преобразования приводят к выражению

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{v_2\cos\beta - v_1\cos\alpha\cos\varphi}{v_1\cos\alpha\sin\varphi},$$

позволяющему найти v из уравнений (1).

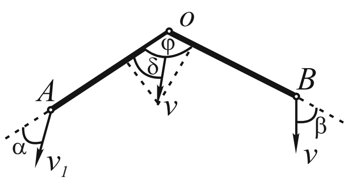

Рис. 3.2. Указания к задаче 3.1.9.

3.1.13. Три внешних силы действуют на автомобиль: сила тяжести, реакция покрытия и сила трения. Записав уравнение баланса сил в системе координат, связанной с автомобилем (добавится центробежная сила), и спроектировав его на горизонтальное и вертикальное направления, можно получить соотношение

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2/r - \mu g\cos^2\theta}{g + \mu g\sin\theta\cos\theta},$$

откуда и находится v.

3.2. Геометрия масс

3.2.11. Преобразование тензора при повороте системы координат дается выражением: $I'_{ij} = a_{ip}a_{jq}I_{pq} = a_{ip}I_{pq}a^{\mathrm{T}}_{qj}$

$$a_{ip} = \vec{e}\,'_i, \vec{e}_p = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Проверить инвариантность следа тензора.

3.2.12. Направляющие косинусы $n_i\,(n_in_i = 1)$ главных осей тензора I_{ij} удовлетворяют уравнениям

$$I_{ij}n_j = \lambda n_i.$$

С помощью тождества

$$n_i = \delta_{ij}n_j$$

этим уравнениям можно придать форму

$$(I_{ij} - \lambda\delta_{ij})\,n_j = 0.$$

Нетривиальное решение полученной системы существует лишь при условии, что

$$\det\,(I_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0.$$

Отсюда находятся допустимые значения λ, а затем – и набор $\{n_i\}$, свой для каждого λ. В рассматриваемом случае z-координаты не меняются, так что достаточно рассмотреть систему двух уравнений. Допустимые значения $\lambda' = 4ma^2$, $\lambda'' = 4Ma^2$, так что имеем

$$\vec{n}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

и

$$\vec{n}'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)\,.$$

3.2.14. Для кругового цилиндра

$$2I_1 = \int\limits_V \left(y^2 + z^2\right)\rho dV + \int\limits_V \left(x^2 + z^2\right)\rho dV = \int\limits_V r_\perp^2\rho dV + 2\int\limits_V z^2\rho dV.$$

Здесь $r_\perp$ – расстояние до оси цилиндра,

$$\int\limits_V r_\perp^2\rho dV = I_{zz} \equiv I_3.$$

3.2.15. Учесть, что для шара

$$3I = \int\limits_V \left(y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + y^2\right)\rho\,dV = \frac{2}{3}\int\limits_V r^2\rho dV.$$

От эллипсоида легко вернуться к шару заменой переменных

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad \zeta = z/c.$$

3.2.16. Взять вариацию моментов сплошного шара по m и R при постоянной плотности ρ, учесть связь между δm и δR и заменить δm на массу сферы.

3.2.21. Вычислить момент инерции относительно оси, проходящей через точку с координатами x_0, y_0, а затем найти положение минимума этой функции.

3.2.23. Сначала вычислить моменты инерции относительно вершины конуса, затем воспользоваться теоремой Штейнера.

3.2.24. Воспользоваться аддитивностью тензора момента инерции, результатом задачи 3.2.15 и теоремой Штейнера.

3.2.26. Удобно воспользоваться результатом предыдущей задачи.

3.3. Статика твёрдого тела

3.3.1. Построить диаграмму сил (рис. 3.3) и записать уравнения проекций на параллельную и перпендикулярную наклонной плоскости оси:

$$F_{\text{тр}} = Mg\sin\theta - Mg\cos\theta,$$

$$N = Mg\cos\theta + Mg\sin\theta.$$

Из первой формулы видно, что сила трения изменяется от $-Mg$ до Mg при изменении угла θ от 0 до $\pi/2$. Сила трения максимальна, когда $\mathrm{tg}\theta = 1$, при этом $N = \sqrt{2}Mg$ и $F_{\text{тр}} = 0$.

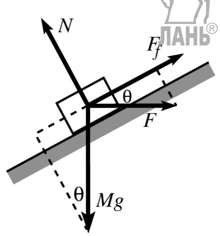

Рис. 3.3. Указания к задаче 3.3.1.

По определению трения покоя тело будет неподвижно, если $|F_{\text{тр}}| \le \mu N$, то есть

$$Mg|\sin\theta - \cos\theta| \le \mu Mg(\cos\theta + \sin\theta).$$

Для получения окончательного ответа надо получить решения этого уравнения при $\operatorname{tg}\theta \leq 1$ и при $\operatorname{tg}\theta \geq 1$ и результаты объединить.

3.3.2. Условия равновесия этой системы включают помимо баланса сил ещё и баланс моментов:

$$N_2 l \sin\theta = mg(l/2)\cos\theta.$$

Из этого уравнения следует, что

$$N_2 = \frac{mg}{2\operatorname{tg}\theta},$$

а из условия $F \leq \mu N_1 = \mu mg$ получается и ответ.

3.3.3. Составить уравнение равновесия моментов относительно точки x_0

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} x\lambda(x)gdx = (x_0 + b)\int\limits_{x_0}^{\infty} \lambda(x)gdx,$$

выполнить в левой части интегрирование по частям, дифференцированием результата получить дифференциальное уравнение для $\lambda(x_0)$, решение которого и приведёт к ответу.

3.3.4. Нормальная проекция силы реакции со стороны плоскости

$$N = mg - T\sin\theta.$$

Поскольку $T\cos\theta = F_{\text{тр}}$ (равновесие горизонтальных компонент сил), неравенство $F_{\text{тр}} \leq 0$ равносильно неравенству

$$T\cos\theta \leq \mu(mg - T\sin\theta).$$

Из условия равновесия моментов $Tr = F_{\text{тр}}R$. Из двух последних формул и следует ответ.

3.3.5. Обозначим через $y(x)$ искомую функцию, $T(x)$ – натяжение в точке каната с горизонтальной координатой x, $\theta_1 = \theta(x)$ и $\theta_2 = \theta(x + dx)$. Условия равновесия горизонтальных и вертикальных проекций сил, действующих на элемент каната $(x, x + dx)$, имеют вид

$$T(x + dx)\cos\theta_2 = T(x)\cos\theta_1, \tag{1}$$

$$T(x + dx)\sin\theta_2 = T(x)\sin\theta_1 + \frac{g\lambda dx}{\cos\theta_1}. \tag{2}$$

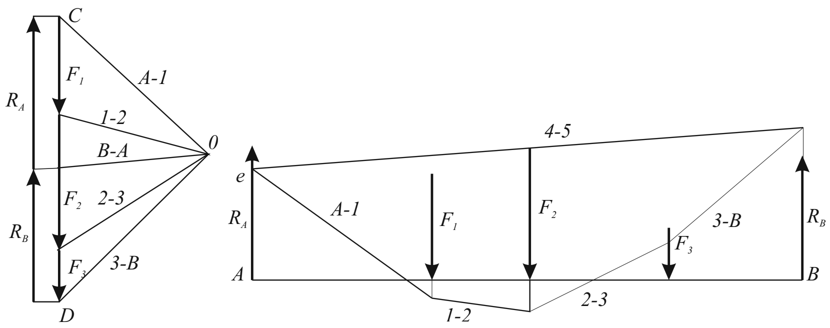

Рис. 3.4. Указания к задаче 3.3.9.

Записав $T(x+dx)$ в форме $T(x+dx) \sim T(x)+T'(x)dx$, $\operatorname{tg}\theta_1 = y'$, возведя в квадрат и сложив уравнения (1) и (2) и решив полученное дифференциальное уравнение, находим ответ.

3.3.9. К построению верёвочного многоугольника (рис. 3.4).

3.3.10. В состоянии равновесия проекции главного вектора приложенных сил

$$-F_1 \cos 60^\circ + F_3 \cos 45^\circ = 0,$$

$$-F_2 \cos 60^\circ + F_5 \cos 45^\circ = 0,$$

$$-F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 30^\circ - F_3 - F_4 = 0,$$

и проекции главного момента

$$-F_4 a + F_2 a\sqrt{3}/2 = 0,$$

$$F_3 a - F_1 a\sqrt{3}/2 = 0, \quad M_z = 0.$$

3.4. Динамика твёрдого тела

3.4.1. В выражении

$$U = \int \varphi\left(\vec{R} + \vec{r}\right) \rho\left(\vec{r}\right) dV$$

разложить потенциал в ряд по $\vec{r}$ до членов второго порядка и учесть, что $\varphi\left(\vec{R}\right)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_i \partial X_j} \delta_{ij} = 0.$$

3.4.5. Во вращающейся со стержнем системе координат применить условия равновесия: равенство нулю главного вектора и главного момента внешних сил (тяжести, центробежной силы и реакции опоры).

3.4.6. Два способа рассуждений возможны: рассматривать качение цилиндра 1) как суперпозицию поступательного движения и вращения вокруг собственной оси и 2) как мгновенное вращение вокруг точки касания с неподвижной плотностью. Решите задачу каждым из них.

3.4.7. Жидкость движется поступательно, как целое, со скоростью центра масс. Момент импульса относительно мгновенной оси вращения A равен $L = I_A\Omega + mvR$ (m – масса жидкости), $v = \Omega R$, $dL/dt = (M+m)Rg\sin\alpha$ (M – масса бочки).

3.4.10. Разложить силу реакции на две составляющие: вертикальную F'_z и горизонтальную F'_x. Тогда из общих уравнений плоского движения твердого тела имеем

$$m\ddot{X} = F'_x,$$

$$m\ddot{Z} = F'_z - mg,$$

$$I\ddot{\varphi} = F'_x(R - b\cos\varphi) - F'_z b\sin\varphi.$$

Скольжение отсутствует, поэтому

$$\dot{X} = -(R - b\cos\varphi)\dot{\varphi}, \quad \dot{Z} = b\sin\varphi\dot{\varphi}.$$

Дифференцируя эти скорости по времени, находим, что первые два из трёх приведённых выше уравнений движения дают компоненты реакций

$$F'_z = m[g + b(\sin\varphi\ddot{\varphi} + \cos\varphi\dot{\varphi}^2)],$$

$$F'_x = -m[(R - b\cos\varphi)\ddot{\varphi} + b\sin\varphi\dot{\varphi}^2].$$

Подставляя эти выражения в третье уравнение, приходим к ответу.

3.4.11. Воспользоваться законом сохранения энергии, определив момент отрыва как момент, когда исчезает сила реакции, то есть когда сумма разных составляющих центробежной силы и силы тяжести, действующих на точку, становится равной нулю.

3.5. Вращение тела вокруг неподвижной оси

3.5.5. Записать функцию Лагранжа в приближении малых углов (до второго порядка включительно).

3.5.6. На гладкой поверхности полушар скользит и горизонтальная координата центра масс остаётся постоянной.

3.5.8. Рассматривать цилиндр с полостью, как «разность» двух цилиндров (1 и 2). Потенциальная энергия

$$U = U_1 - U_2 = \mathrm{const} - m_2 gR\left(1 + \frac{1}{2}\cos\varphi\right) = \mathrm{const}' + m_2 gR\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

кинетическая $T = T_1 - T_2 = (1/2)(I_1 - I_2)\dot{\varphi}^2$. Использовать теорему Штейнера.

3.5.9. Пусть θ – угол между линией соприкосновения конуса с плоскостью и её начальным положением, a – расстояние от центра масс до вершины, а 2α – угол раствора конуса. Тогда скорость центра масс $V = a\dot{\theta}\cos\alpha$, а угловая скорость вращения конуса

$$\Omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \dot{\theta}\,\mathrm{ctg}\alpha.$$

3.5.12. Нить за один период должна осуществить 3 оборота в одну из сторон (неважно, в какую).

3.6. Вращение тела вокруг неподвижной точки

3.6.1. Угол φ описывает поворот вокруг оси OZ, угол θ вокруг ON, а ψ – вокруг $O3$, так что угловую скорость можно представить в виде

$$\vec{\Omega} = \Omega_z\vec{e}_z + \Omega_N\vec{e}_N + \Omega_3\vec{e}_3 = \dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_N + \dot{\psi}\vec{e}_3.$$

Умножая её скалярно на $\vec{e}_1$, получим

$$\Omega_1 = \vec{\Omega}\vec{e}_1 = \dot{\varphi}\vec{e}_z\vec{e}_1 + \dot{\theta}\vec{e}_N\vec{e}_1 + \dot{\psi}\vec{e}_3\vec{e}_1.$$

Чтобы найти первое скалярное произведение, разложим сначала вектор $\vec{e}_z$ на составляющие, одна из которых образуется его проекцией на плоскость $O12$ (появится множитель $\cos(\pi/2 - \theta)$ $=$

$= \ \sin\theta)$), а уж результат умножим скалярно на $\vec{e}_1$ (добавится ещё один сомножитель $\cos(\pi/2-\psi)=\sin\psi$):

$$\vec{e}_z\vec{e}_1 = \sin\theta\sin\psi.$$

Очевидно, $\vec{e}_N\vec{e}_1=\cos\psi$ и $\vec{e}_3\vec{e}_1=0$, так что в итоге

$$\Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi.$$

Аналогично вычисляются и остальные компоненты.

3.6.3. Введём вспомогательный орт $\vec{e}_A$ так, чтобы векторы $\vec{e}_N$, $\vec{e}A$ и $\vec{e}_3$ образовывали правую тройку. Очевидно,

$$\vec{e}_N = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_A = -\cos\theta\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\theta\cos\varphi\vec{e}_y = \sin\theta\vec{e}_z.$$

Проектировать орты подвижной системы координат на орты неподвижной удобно через промежуточные орты $\vec{e}_N$ и $\vec{e}_A$.

3.6.8. Воспользоваться законами сохранения, выразить Ω_1 и Ω_3 через Ω_2 и подставить в уравнение Эйлера, содержащее $\dot{\Omega}_2$.

3.6.10. В системе динамических уравнений Эйлера положить $I_1=I_2$, $M_i=0$, найти её решение $\Omega_i\,(t)$ и использовать его для определения пределов изменения кинетической энергии.

3.6.11. Движение заряженных элементов вращающегося твердого тела порождает замкнутый электрический ток с магнитным моментом

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c}\int\left[\vec{r},\vec{j}_e\right]dV, \quad \vec{j}_e = \rho_e\vec{v},$$

на который в магнитном поле действует момент сил

$$\vec{M} = \left[\vec{\mu},\vec{H}\right].$$

Выразить $\vec{M}$ через $\vec{L}$ и подставить в уравнение движения вращающегося тела.

3.6.12. Продифференцировать эффективную потенциальную энергию по $\cos\theta$, приравнять к нулю и решить полученное уравнение совместно с уравнением полной энергии.

3.6.13. При $\theta = 0$ оси OX и OZ совпадают, $L_3 = I_3\omega_3 = L_z$, ответ следует непосредственно из выражения для $U_{\text{эф}}(\theta)$. С течением времени трение уменьшает скорость вращения и «спящий» волчок «просыпается»: ось OX_3 приходит в движение.

3.6.14. Найти элементарную работу приложенных к гироскопу сил

$$\delta A = \vec{M}\vec{\Omega}dt,$$

выразив сомножители через $\vec{\Omega}_{\text{св}}$ и $\vec{\Omega}_{\text{пр}}$.

3.6.15. Пусть $\vec{\Omega}_0, \vec{\omega}_0$ и $\vec{\theta}$ – векторы угловой скорости Земли, угловой скорости вращения гироскопа и угла отклонения θ относительно направления на север соответственно. Вектор угловой скорости вращения гироскопа относительно инерциальной системы отсчёта $\vec{\Omega}$ равен сумме

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \vec{\omega}_0 + \dot{\vec{\theta}}.$$

Найдя проекции $\vec{\Omega}$ на оси 1 (вертикаль), 2 (горизонтальная ось, перпендикулярная оси вращения) и 3 (ось вращения гироскопа), выразим через них функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[I_1(\dot{\theta}^2 + \Omega_0 \sin\Theta)^2 + I_1\Omega_0^2 \cos^2\Theta \sin^2\theta + \right.$$

$$\left. + I_3(\omega_0 + \Omega_0 \cos\Theta \cos\theta)^2\right].$$

Записать это выражение для малых θ и $\dot{\theta}$ (опустив постоянные и полные производные по времени) и сравнить с функцией Лагранжа одномерного гармонического осциллятора.

Глава 4. Аналитическая динамика

4.1. Механическая система в обобщённых координатах

4.1.2. Пусть старые координаты q_i связаны с новыми q'_j взаимно однозначным преобразованием и $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \mathcal{L}'(q'_j, \dot{q}'_j, t)$. Вычисляя комбинацию $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot q_j'}\right)-\dfrac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q_j'}$ с учетом доказанных выше соотношений приведём её к виду $\sum\limits_{i=1}^{M}\left\{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot q_i'}\right)-\dfrac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q_i'}\right\}\dfrac{\partial q_i}{\partial q_j'}$. Определитель $\|\partial q_i/\partial q_j'\|$ не обращается в нуль, отсюда и следует инвариантность уравнений.

4.1.4. Воспользоваться выражением $Q_i=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial q_i}$, подставив сюда $T=(m/2)\,(dl/dt)^2$.

4.2. Уравнения Лагранжа для системы материальных точек

4.2.1. В качестве независимых переменных выбрать координаты центра масс X, Y, Z и углы θ, φ вектора $\vec r_{12}$ в сферических координатах.

4.2.5. Из исходной (инерциональной) системы координат K_0, где $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0=\frac{mv_0^2}{2}-U_0$, перейти в движущуюся поступательно относительно нее с переменной скоростью $\vec V(t)$ систему K', где $\vec v'=\vec v_0-\vec V$, а затем – в систему K, имеющую общее начало с K' и вращающейся относительно нее со скоростью $\vec\Omega$ $\left(\vec v=\vec v'-[\vec\Omega\vec r]\right)$.

4.2.6. Воспользоваться результатом предыдущей задачи и формулой $\mathcal{E}=\vec p\vec v-\mathcal{L}$.

4.2.7. Решить задачу можно двумя способами. Первый – записать функцию Лагранжа в ЛСК, заменой $x_1=\xi_1\cos\varphi-\xi_2\sin\varphi$, $x_2=\xi_1\sin\varphi+\xi_2\cos\varphi$ выразить её через координаты ξ_i и скорости $\dot\xi_i$ точки во вращающейся системе,

$$\mathcal{L}=\frac{m}{2}\left\{\dot\xi_1^2+\dot\xi_2^2+\dot\xi_3^2+2\Omega\left(\xi_1\dot\xi_2-\xi_2\dot\xi_1\right)+\Omega^2\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)\right\}$$

и вывести уравнения. Второй способ – исходить из готового общего выражения для функции Лагранжа в НСО.

4.2.8. Кинетическая энергия движущейся звезды в связанной с галактикой НСО, имеет вид

$$T=\frac{m}{2}\left[(\dot x-\Omega y)^2+(\dot y+\Omega x)^2+\dot z^2\right].$$

Воспользоваться уравнением Лагранжа.

4.2.9. Функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = (m/2)[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega^2 y^2] + mgy \sin \Omega t.$$

4.2.11. В рассматриваемом случае (вывести)

$$\mathcal{L} = \left(mR^2/2\right)\left[\dot{\theta}^2 + (\dot{\varphi} + \Omega)^2 \sin^2\theta\right] - U(\theta, \varphi)$$

Отсюда и ответ.

4.2.13. Положение одной из двух точек, указанных в предыдущей задаче, выбрать в качестве начала координат и записать уравнение движения $m\ddot{\vec{r}} = -m\nabla\phi$, определив ϕ из уравнения $\nabla^2\phi = 4\pi\gamma\rho_0$.

4.2.14. Воспользоваться преобразованием $\mathcal{L} \to \mathcal{L} - d\psi/dt$, $\psi = ma\dot{a}x^2/2$.

4.3. Принцип наименьшего действия

4.3.2. Воспользоваться уравнением Эйлера-Лагранжа.

4.3.4. В областях с постоянной U частица движется равномерно и прямолинейно, так что единственным параметром, характеризующим виртуальную траекторию, является её координата y в плоскости разрыва потенциальной энергии ($x = 0$).

4.3.7. Из закона сохранения энергии находится абсолютная величина скорости точки на высоте z

$$v(z) = \sqrt{2g(z_A - z)}.$$

Горизонтальная составляющая

$$v_x = v\frac{dx}{dl} = \frac{v}{\sqrt{1 + (dz/dx)^2}},$$

Находя отсюда dt и интегрируя, приходим к ответу.

4.3.9. Введя параметр θ по формуле

$$z_A - z = c_1(1 - \cos\theta), \quad c_1 = (4gc^2)^{-1},$$

и выполняя дальнейшие преобразования, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1+(dz/dx)^2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}},$$

$$(dz/dx)^2 = \frac{\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2},$$

$$dx = \pm c_1(1-\cos\theta)d\theta$$

и т.д.

4.4. Теория малых колебаний

4.4.1. Кинетическая энергия каждого маятника $ml^2\dot{\varphi}^2/2$, потенциальная энергия пружины (при малых φ) $k\left(a\varphi_2 - a\varphi_1\right)^2\Big/2$ (вывести!), к ней следует добавить вклад тяготения. Найденную таким образом функцию Лагранжа сравнить с

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left\{m_{ij}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j - k_{ij}\varphi_i\varphi_j\right\},$$

найти m_{ij}, k_{ij}, записать систему уравнений для амплитуд

$$\begin{cases} \left(k_{11} - m_{11}\omega^2\right)A_1 + \left(k_{12} - m_{12}\omega^2\right)A_2 = 0 \\ \left(k_{21} - m_{21}\omega^2\right)A_1 + \left(k_{22} - m_{22}\omega^2\right)A_2 = 0, \end{cases}$$

найти собственные частоты ω_1, ω_2 и, подставив каждое из них в уравнения для амплитуд, найти моды собственных колебаний.

4.4.2. Положим для простоты $m_1 = m_2$, $g = 1$, $l_1 = l_2 = 1$, $a = 1/2$. Тогда

$$\varphi_1 = \frac{\Omega_0}{2}\left(\sin t + \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right),$$

$$\varphi_1 = \frac{\Omega_0}{2}\left(\sin t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right),$$

$$\omega = \sqrt{1+2k} \approx 1 + k, \qquad k << 1.$$

Пренебрегая слагаемым $\Omega_0(1-\dfrac{1}{\omega})\sin\omega t$, малым вследствие предполагаемой малости k, получим

$$\varphi_1 \approx \frac{\Omega_0}{2}\left(\sin t + \sin\omega t\right) = \Omega_0\cos(\varepsilon t)\sin(\omega' t),$$

$$\varphi_2 \approx \frac{\Omega_0}{2}\left(\sin t - \sin\omega t\right) = -\Omega_0\cos(\omega' t)\sin(\varepsilon t),$$

где $\varepsilon = \dfrac{\omega-1}{2} = \dfrac{k}{2}$, $\omega' = \dfrac{\omega+1}{2} \approx 1$. Величина $\varepsilon \approx k/2$ мала, поэтому φ_1 испытывает колебания с частотой $\omega' \approx 1$ с медленно меняющейся амплитудой $\Omega_0\cos\varepsilon t$. Через промежуток времени π/k будет колебаться лишь φ_2, через $2\pi/k$ – опять только φ_1 и т.д. Такие колебания называются *биениями*.

4.4.3. Потенциальная энергия

$$U = -mgx_1 - mgx_2 + (k/2)\left(x_1 - l\right)^2 + (k/2)\left(x_2 - x_1 - l\right)^2$$

(ось OX направлена вниз). Обратите внимание на то, что в состоянии равновесия пружины напряжены.

4.4.8. Решение полученных уравнений Лагранжа

$$m\ddot{q}_j + k(2q_j - q_{j+1} - q_{j-1}) = 0, \quad j = 1, ..., N, \quad q_0 = q_{N+1} = 0$$

искать в виде суперпозиции бегущих волн

$$q_j(t) = Ae^{i(\omega t - j\varphi)}.$$

4.4.9. Решение искать в виде суперпозиции бегущих волн с разными амплитудами:

$$q_{2j} = Ae^{i[\omega t \pm 2j\varphi]}, \quad q_{2j-1} = ae^{i[\omega t \pm (2j-1)\varphi]},$$

для нечетных атомов (с массой m), для четных атомов (с массой M). Система уравнений для a и A имеет вид

$$(-m\omega^2 + 2k)a - k(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})A = 0,$$

$$-k(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})a + (-M\omega^2 + 2k)A = 0.$$

Гармоничным условиям удовлетворяют лишь комбинации бегущих волн вида

$$q_{2j-1} = a_n \sin\left((2j-1)\varphi_n\right)\cos(\omega_n t + \alpha_n),$$

$$q_{2j-1} = A_n \sin(2j\varphi_n)\cos(\omega_n t + \alpha_n),$$

у которых $\varphi_n = \pi n/(2N+1)$. Так как $\varphi_{2N+1-n} = \pi - \varphi_n$, то для каждого n $(n = 1, 2, ..., N)$ мы получаем два значения частоты

$$\omega_n^2 = \frac{k}{\mu}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM}\sin^2\varphi_n}\right),$$

соответствующее *оптической* (верхний знак) и *акустической* (нижний знак) ветвям спектра.

4.4.11. Удлинение первого участка струны с точностью до величин второго порядка малости $\sqrt{a^2+x^2} - a \approx x^2/2a$. Учитывая аналогичным образом удлинение остальных участков струны, получим квадратичную форму для потенциальной энергии

$$U = 2m\alpha^2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz), \quad \alpha^2 = P/(2ma).$$

Уравнения малых колебаний

$$\ddot{x} + 2\alpha^2(2x - y) = 0,$$
$$(4/3)\ddot{y} + 2\alpha^2(2y - x - z) = 0,$$
$$\ddot{z} + 2\alpha^2(2z - y) = 0.$$

4.4.12. Потенциальная энергия в указанном приближении имеет вид

$$U = m\alpha^2(3x^2/2 - 2xy + 2y^2).$$

4.4.13. Из уравнений $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\alpha/r^n$ и $r^2\dot{\varphi} = \sqrt{a^{3-n}\alpha}$ исключить $\dot{\varphi}$, представить радиальную координату в виде $r = a + q$ и сохранить в разложении лишь члены первого порядка q. Отсюда находится $r(t)$, при нахождении $\varphi(t)$ тоже пренебречь членами порядка λ^2.

4.4.18. Уравнение $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\sin\varphi = 0$ представим в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \omega_0^2(\varphi - \sin\varphi) \approx \omega_0^2\varphi^3/3!.$$

Правая часть есть $\varepsilon Q(\varphi)$. Подставляя в неё $\varphi = a\cos\psi$ и вычисляя интеграл

$$\varepsilon\beta_1 = (\varepsilon/\pi)\int_0^{2\pi} Q(a\cos\psi)\cos\psi\, d\psi$$

при малых отклонениях $(a \ll 1)$, приходим к ответу.

4.5. Динамика твёрдых тел

4.5.3. Исходить из формул

$$L_1 = I_1 \left(\dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi\right),$$

$$L_2 = I_2 \left(\dot\varphi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi\right),$$

$$L_3 = I_3 \left(\dot\varphi \cos\theta + \dot\psi\right).$$

4.5.5. Исходить из функции Лагранжа в виде

$$\mathcal{L} = (I'/2)(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta) + (I_3/2)(\dot\psi + \dot\varphi)\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta.$$

4.5.6. Разобрать задачу по рис. 4.1.

4.5.7. В момент удара шар приобретает как поступательное движение,

$$M\frac{dv_{\text{п}}}{dt} = F,$$

так и вращательное 4.2:

$$J\frac{d\Omega}{dt} = F_r,$$

где $J = 2MR^2/5$ – момент инерции шара. Отсюда

$$dv_{\text{п}} = \frac{F\,dt}{M}, \qquad dv_{\text{вр}} = \frac{Frdt}{2MR/5}$$

(вращательная скорость берётся на поверхности шара). Знак приращения разности $d(v_{\text{п}} - v_{\text{вр}})$ и будет определять вид движения. Движение с ускорением объясняется тем, что при $v_{\text{вр}} > v_{\text{п}}$ шар движется с проскальзыванием и возникает сила трения скольжения, *направленная в сторону движения шара*. Она и ускоряет шар до тех пор, пока эти скорости не сравняются.

4.5.9. Интегралы движения в данном случае

$$mR^2(\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + 2mgl\cos\theta = 2mgl\cos\theta_0,$$

$$mR^2\dot\psi\sin^2\theta + 2mR^2\sqrt{\frac{g}{R}}\cos\theta = \sqrt{3g}mR^{3/2},$$

$$\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = 4\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Значение $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$ получаются из условия $\dot{\theta} = 0$, что приводит к равенствам

$$\sqrt{3} - 2\cos\theta = 0, \qquad \sqrt{3}\cos^2\theta - 4\cos\theta + \sqrt{3} = 0.$$

4.5.12. Интегрируя первое из уравнений

$$\dot{\varphi} = \frac{6v}{R}\xi + C$$

и вставляя результат в последнее, находим

$$5\ddot{\xi} + \left[36\left(\frac{v}{R}\right)^2 - \frac{4g}{R}\right]\xi = -\frac{6vC}{R}.$$

Качение устойчиво, если только содержимое квадратных скобок положительно.

4.6. Канонические уравнения

4.6.7. Начальные условия:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = y_0 > a, \quad z(0) = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

Функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{k_1}{2}\left[x^2 + (y+a)^2 + z^2\right] +$$

$$+\frac{k_2}{2}\left[x^2 + (y-a)^2 + z^2\right].$$

Общее решение системы канонических уравнений

$$x = A_x\cos\omega t + B_x\sin\omega t$$

$$y = A_y\cos\omega t + B_y\sin\omega t + N/\omega^2$$

$$z = A_z\cos\omega t + B_z\sin\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{(k_1+k_2)/m}$, $N = (k_2 - k_1)\,a/m$, а коэффициенты A_i и B_i определяются из начальных условий.

4.6.13. Обратиться к теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

4.6.26. Эта и следующая задачи решаются прямым применением определения скобок Пуассона.

4.6.28. Эта и следующие задачи решаются с использованием свойств скобок Пуассона.

4.6.29. Это – наиболее сложная из приведённых на скобки Пуассона задач. Рекомендуется следующий порядок:

1) Выразить L_i через x_k, p_l.

2) Воспользоваться свойством 6) скобок Пуассона.

3) Во втором слагаемом сделать замену переменных индексов так, чтобы произведение тензоров Леви-Чивита можно было вынести за скобки.

4) Выразить произведение этих тензоров через δ-символы Кронекера и учесть их свойства при суммировании.

4.6.36. Полная энергия волчка

$$\mathcal{E} = T + U = \frac{1}{2} I' \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) + I_3 \left(\dot{\varphi}^2 \cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 + mgl\cos\theta.$$

Записать функцию Лагранжа, найти с её помощью p_θ, p_φ, p_ψ, выразить обобщенные скорости через обобщенные импульсы:

$$\dot{\theta} = p_\theta / I', \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos\theta}{I' \sin^2\theta}, \quad \dot{\psi} = p_\psi / I_3 - \dot{\varphi}\cos\theta.$$

Подставляя эти выражения в формулу для энергии волчка, приходим к ответу.

4.6.38. Как видно из решения предыдущей задачи, $p_\varphi \equiv L_z = \text{const}$ и $p_\varphi \equiv L_3 = \text{const}$. Представить полную энергию волчка в виде

$$E = \frac{I'\dot{\theta}^2}{2} + U_{\text{эф}},$$

где $U_{\text{эф}}(\theta) = \dfrac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2I'\sin^2\theta} + \dfrac{L_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta.$

Тем самым, задача сводится к одномерному движению материальной точки.

4.7. Теория преобразований

4.7.1. Из определения производящей функции

$$\sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_i P_i\dot{Q}_i - \mathcal{K} + d\mathcal{F}_1(q_i, Q_i, t)/dt,$$

а её полная производная по времени

$$d\mathcal{F}_1/dt = \sum_i(\partial\mathcal{F}_1/\partial q_i)\dot{q}_i + \sum_i(\partial\mathcal{F}_1/\partial Q_i)\dot{Q}_i + \partial\mathcal{F}_1/\partial t.$$

Так как q_i и Q_i здесь независимы, то равенство

$$\sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_i P_i\dot{Q}_i - \mathcal{K} + \sum_i(\partial\mathcal{F}_1/\partial q_i)\dot{q}_i +$$

$$+ \sum_i(\partial\mathcal{F}_1/\partial Q_i)\dot{Q}_i + \partial\mathcal{F}_1/\partial t$$

будет иметь место только тогда, когда коэффициенты при $\dot{q}_i$ и $\dot{Q}_i$ в левой части будут такие же, как и в правой. Отсюда и ответ.

4.8. Переменные «действие-угол» и адиабатические инварианты

4.8.1. Используя известный закон движения $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t$, вычислить интеграл $\int\limits_0^t \mathcal{L}dt$ и выразить $\vec{v}_0$ через $\vec{r}$ и t.

4.8.2. Скорость $\vec{u}(\vec{r}, t)$ определяется из соотношения

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u}\nabla S = 0.$$

См. также указание к следующей задаче.

4.8.3. Искомая скорость определяется формулой $u = ds/dt$, где ds – расстояние, которое проходит за время dt точка движущейся поверхности $S = \text{const}$ в направлении $\vec{n}$, перпендикулярном к этой поверхности. Поскольку поле не зависит от времени, $S(\vec{r}, t) = S_0(\vec{r}) - \mathcal{E}t$, отсюда $dS_0 = \mathcal{E}dt$. С другой стороны, $dS_0 = |\nabla S_0|ds$. Сопоставляя эти выражения и обращаясь к уравнению Гамильтона-Якоби для вычисления градиента укороченного действия, приходим к ответу.

4.8.13. Подставить $\nabla S = m\vec{v}$ в уравнение Гамильтона-Якоби и, взяв градиент от обеих частей, воспользоваться определением субстанциональной производной.

4.8.14. Функцию $S(q_i, \alpha_i, t)$ взять в качестве производящей функции (типа $\mathcal{F}_1$) канонического преобразования $(q_i, p_i) \to (\alpha_i, \beta_i)$. При этом $\partial\mathcal{K}/\partial\alpha_i = \partial\mathcal{K}/\partial\beta_i = 0$, так что новая функция Гамильтона $\mathcal{K}$ постоянная и без ограничения общности может быть принята равной нулю.

4.8.15. Положить $f_i\left(q_i, \dfrac{\partial S_0}{\partial q_i}\right) = \alpha_i$.

4.8.16. Записать уравнение Гамильтона-Якоби и выполнить необходимые преобразования.

4.8.17. В параболических координатах функция Гамильтона принимает вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2(u+v)}(up_u^2 + vp_v^2) + \frac{1}{u+v}[gu^2 - gv^2 - K],$$

позволяющий воспользоваться результатом предыдущей задачи.

4.9. Метод Гамильтона-Якоби

4.9.1. Все переменные здесь разделяются:

$$S = -\mathcal{E}t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + S_2(z; \alpha_1, \alpha_2, \mathcal{E}),$$

а S_2 удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_2}{dz}\right)^2 + mgz = \mathcal{E} - \frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{2m},$$

решение которого имеет вид

$$S_2 = -\frac{1}{3m^2 g}\left[2m(\mathcal{E} - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2\right]^{3/2}.$$

Дифференцируем по параметрам:

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial\alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial S}{\partial\mathcal{E}} = \beta_3.$$

Первые два уравнения показывают, что траекторией точки является парабола, третье дает закон движения.

4.9.2. Решение уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\nabla S - \frac{e}{c}\vec{A}_0 \cos\omega t\right)^2 = 0$$

ищем в виде $S = \vec{\alpha}\vec{r} + S_1(t)$. Решение уравнения для $S_1(t)$ с последующим вычислением $\partial S/\partial\vec{\alpha} = \vec{r}_0$ приводит к ответу.

4.9.3. Уравнение Гамильтона-Якоби здесь имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2 - mgl\cos\varphi = 0.$$

4.9.8. Выполнить интегрирование

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = p_\varphi, \quad I_r = \frac{2}{2\pi}\int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(\mathcal{E} + \alpha/r) - L^2/r^2}dr,$$

выразить энергию $\mathcal{E}$ через I_φ и I_r и продифференцировать её по этим переменным.

4.9.16. Из решения предыдущей задачи следует, что $|\dot{x}_1|x_2 = c$. Исключая $\dot{x}_1$ из закона сохранения энергии, находим, что влияние лёгкого шарика на тяжелый равносильно появлению потенциальной энергии $U(x_2) = \dfrac{m_1c^2}{2x_2^2}$.

4.9.18. Выразить S через ψ в уравнении Гамильтона-Якоби и воспользоваться приведённым в задаче условием.

4.10. Элементы классической теории поля

4.10.2. Перед вычислением функциональной производной по $q(x_1, x_2, \ldots)$ отметить переменные интегрирования в правой части штрихом $(x_1', x_2', \ldots,\ dx_1', dx_2', dots)$.

4.10.3. В общую формулу уравнения движения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\psi_{,t}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\psi_{,j}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\psi} = 0$$

подставить производные:

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,t}} = \frac{1}{2}\;\frac{\partial \psi_{,t}^2}{\partial \psi_{,t}} = \psi_{,t},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,j}} = -\frac{1}{2}\;\frac{\partial}{\partial \psi_{,j}}\psi_{,k}^2 \equiv -\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial \psi_{,j}}(\psi_{,1}^2+\psi_{,2}^2+\psi_{,3}^2) = -\psi_{,j},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\;\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,j}} = -\psi_{,jj} = -\nabla^2\psi,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi} = 0.$$

4.10.9. Представить двойную сумму в виде

$$\sum_{i\neq j}^{N} U(\vec{x}_j - \vec{x}_i) = \sum_{i,j} U(\vec{x}_j - \vec{x}_i) - \sum_i U(0)$$

(предполагается, что $U(0) \neq \infty$).

Глава 5. Релятивистская механика

5.1. Пространство и время

5.1.1. Рассмотреть движение начала координат системы K' относительно K.

5.1.5. Компоненты скорости в системе K $\quad v_x = v\cos\theta,\ v_y = v\sin\theta$, в системе K' $\quad v'_x = v'\cos\theta,\ v'_y = v'\sin\theta$. Остаётся применить формулу сложения скоростей.

5.1.11. В системе K_1 4-мерные скорости u_1^μ и u_2^μ систем K_1 и K_2 равны $(1,0)$ и $\gamma_{21}(1,\vec{v}_{21}/c)$, в системе K – $\gamma_1(1,\vec{v}_1/c)$ и $\gamma_2(1,\vec{v}_2/c)$ соответственно. Вычисляя скалярные произведения $u_1^\mu u_{2\mu}$ в каждой из этих систем и приравнивая полученные величины, приходим к ответу.

5.1.14. Воспользоваться результатом предыдущей задачи и правилом сложения скоростей.

5.1.15. Воспользоваться аддитивностью параметра быстроты (см. задачу 5.1.14).

5.2. Движение релятивистской частицы

5.2.3. Пусть K' – система отсчёта, относительно которой газ как целое покоится ($\vec{P}' = \sum_i m_i \vec{v}_i' \Big/ \sqrt{1-(v_i'/c)^2} \Big/ = 0$). Скорость этой системы $\vec{V}$ относительно исходной системы K и есть скорость движения газа как целого. Перейдя по формулам преобразования энергии-импульса из K' в K и составив результат с соответствующими формулами для одной «большой» частицы, переходим к ответу.

5.2.7. Тензор 4-силы $F^{\mu\nu} = \partial A^\nu / \partial x_\mu - \partial A^\mu / \partial x_\nu$.

5.2.13. См. указания к задачам 4.8.2-4.8.3.

5.2.19. Кинетическая энергия $T = \dfrac{\sqrt{(ceEt)^2}}{T_0^2}$.

5.2.21. В уравнение движения подставить $\vec{p} = \mathcal{E}\vec{v}/c^2$, спроецировать на оси и решить уравнения для проекций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

5.2.23. Выбрать оси OZ вдоль $\vec{B}$. OY – вдоль $\vec{E}$. Исходными уравнениями тогда будут

$$\dot{p}_x = (e/c)Ev_y, \quad \dot{p}_y = eE(1 - v_x/c) \quad \dot{p}_z = 0.$$

Из них следует $\dot{T} = eEv_y$. Используя равенство

$$T^2 - c^2p_x^2 = (T + cp_x)(T - cp_x) = c^2p_y^2 + \tau^2,$$

где $\tau^2 = m^2c^4 + c^2p_z^2 = \text{const}$, после некоторых преобразований приходим к равенству

$$2eEt = \left(1 + \frac{\tau^2}{\alpha^2}\right)p_y + \frac{c^2}{3\alpha^2}p_y^3,$$

где $\alpha = T - cp_x = \text{const}$. Это равенство позволяет использовать p_y как параметр.

Подставляя в уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 p_x}{T}$$

$dt = T dp_y / e\alpha E$, приходим к ответу.

5.2.25. Ответ удобно представить в параметрическом виде, введя параметр φ соотношением $d\varphi = ecBdt/T$.

5.2.27. Использовать законы сохранения импульса и энергии, из которых следует

$$\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{(m+dm)(v+dv)}{\sqrt{1-[(v+dv)/c]^2}} + \frac{dm_{\text{г}} v'}{\sqrt{1-(v'/c)^2}},$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{(m+dm)c^2}{\sqrt{1-[(v+dv)/c]^2}} + \frac{dm_{\text{г}} c^2}{\sqrt{1-(v'/c)^2}},$$

где $v' = (v-u) \Big/ \sqrt{1-uv/c^2}$, а $dm_{\text{г}} > 0$ – масса выброшенного за время dt газа (не смешивать с $dm < 0$ – изменением массы ракеты за время dt).

Используя разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-[(v+dv)/c]^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}\sqrt{1-2vdv/(c^2-v^2)+\ldots}} \approx$$

$$\approx \frac{1+vdv/(c^2-v^2)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

и исключая из уравнений $dm_{\text{г}}$, приходим к выражению

$$mv - (m+dm)(v+dv)\left(1+\frac{vdv}{c^2-v^2}\right) =$$

$$= v'\left[m-(m+dm)\left(1+\frac{vdv}{c^2+v^2}\right)\right].$$

После несложных преобразований, подстановки v' и приведения слагаемых получаем ответ.

5.2.30. Исходить из релятивистского уравнения движения

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-(\dot{x}/c)^2}}+\frac{kx^2}{2}=E.$$

Пусть $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=v_0$ и $\dot{x}(a)=0$. Постоянные a и v_0 связаны соотношениями

$$E=mc^2+\frac{ka^2}{2}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}$$

$$\frac{ka^2}{2}=mc^2(\gamma_0-1),\quad \gamma_0=\frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}.$$

Из этих формул находим

$$\frac{v}{c}=\sqrt{1-\frac{m^2c^4}{E-kx^2/2}}$$

и далее, через соотношение

$$\tau=4\int\limits_0^a\frac{dx}{v}$$

приходим к ответу.

5.2.32. Задачу эту можно решать разными способами. *1-й способ.* Воспользоваться результатом задачи 5.2.9 для случая

$$e\vec{E}=-\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r,\quad \vec{H}=0.$$

Интегралы движения

$$m\gamma r^2\dot{\varphi}=L=\mathrm{const}$$

и

$$m\gamma c^2-\alpha/r=\mathcal{E}=\mathrm{const}.$$

Из последнего видно, что финитное движение имеет место при $\mathcal{E}<mc^2$. Из первого интеграла следует, что

$$\frac{d}{dt}=\frac{L}{m\gamma r^2}\frac{d}{d\varphi}.$$

Использование двух последних уравнений в радиальном уравнении движения

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{r}) = m\gamma r\dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r^2}$$

приводит к дифференциальному уравнению траектории

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + (1-\rho^2)\frac{1}{r} = \frac{\alpha\mathcal{E}}{(cL)^2}, \quad \rho = \alpha/(cL),$$

интегрируя которое, приходим к ответу.

2-й способ. Воспользоваться результатом задачи 5.2.11 и продифференцировать уравнение $\mathcal{H}(r,\varphi,P_r,P_\varphi) = \mathcal{E}$ с учетом соотношения $P_r = (P_\varphi/r^2)dr/d\varphi$. Получим уравнение

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{cP_\varphi}\sqrt{(\mathcal{E}+\alpha/r)^2 - m^2c^4 - c^2P_\varphi^2/r^2},$$

решая которое, приходим к ответу.

3-й способ. Воспользоваться результатом задачи 5.2.17 в виде

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\alpha}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2 + m^2c^2 = 0.$$

Уравнение траектории находится дифференцированием решения приведенного выше уравнения

$$S = -\mathcal{E}t + L\varphi + \int\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(\mathcal{E}+\frac{\alpha}{r}\right)^2 - \frac{L^2}{r^2} - m^2c^2}dr$$

по моменту импульса L:

$$\partial S/\partial L = \text{const}.$$

5.2.33. Как и в нерелятивистском случае, при $\varepsilon > 1$ траектория имеет две ветви, уходящие на бесконечность при $\varphi \to \varphi_\infty$. В отличие от нерелятивистского случая, частица может совершить вокруг кулоновского центра несколько оборотов прежде, чем уйти на бесконечность.

5.3. Столкновения и распад релятивистских частиц

5.3.1. Из определения переменных s, t и u следует

$$(s+t+u)c^2 = (p_A^2 + 2p_Ap_B + p_B^2) + (p_A^2 - 2p_Ap_C + p_C^2) +$$
$$+ (p_A^2 - 2p_Ap_D + p_D^2).$$

С учётом соотношений $p_A^2 = m_A^2c^2, \ldots$ и сохранения 4-импульса ($p_A + p_B = p_C + p_D$) эта формула перепишется в виде

$$(s+t+u)c^2 = 3m_A^2c^2 + m_B^2c^2 + m_C^2c^2 + m_D^2c^2 - 2p_A^2,$$

из которого и следует требуемый результат.

5.3.2. Из определения t можно убедиться, что

$$c^2t = p_A^2 + P_C^2 - 2p_Ap_C = m_A^2c^2 + m_C^2c^2 - 2\left(\frac{E_AE_C}{c^2} - \vec{p}_A\vec{p}_C\right).$$

При упругом рассеянии $A = C$, $E_A = E_C$ и $|\vec{p}_A| = |\vec{p}_C| = p$, так что $\vec{p}_A\vec{p}_C = p^2\cos\theta$. В результате имеем

$$c^2t = 2m_A^2c^2 - 2(E_A^2/c^2 - p^2\cos\theta),$$

а с учётом $E_A^2p^2p^2c^2 + m_A^2c^4$ получаем $t = -2p^2(1-\cos\theta)/c^2$.

5.3.3. Согласно закону сохранения энергии

$$E_\pi \equiv \gamma m_\pi c^2 = c\sqrt{m_\mu^2c^2 + p_\mu^2} + cp_\nu,$$

и, следовательно,

$$(\gamma m_\pi c^2 - cp_\nu)^2 = c^2(m_\mu^2c^2 + p_\mu^2). \qquad (1)$$

В то же время

$$p_\mu\cos\theta = p_\pi = \gamma m_\pi v, \quad p_\mu\sin\theta = p_\nu = E_\nu/c. \qquad (2)$$

Исключение p_μ и p_ν в уравнениях (1) и (2) и приводит к ответу.

5.3.4. Обозначим 4-импульсы электрона до и после рассеяния через $p = (E/c, \vec{q})$ и $p' = (E'/c, \vec{q}\,')$ соответственно. Тогда

$$Q^2 = -(p'-p)^2 = -2m^2c^2 + 2EE'/c^2 - 2\vec{q}\vec{q}\,'.$$

Учитывая, что при упругом рассеянии $E = E'$ и $\vec{q} = \vec{q}\,' \equiv q$, и пренебрегая массой электрона, получим ответ.

5.3.5. Полный 4-импульс начального состояния системы[1]

$$p_{\text{полн}} = (E/c + m_p c, \vec{p}_L),$$

а квадрат инварианта массы

$$W^2 = (E_L/c^2 + m_p)^2 - p_L^2/c^2$$

имеет минимальное значение $4m_p)^2$. Отсюда

$$(E_{\text{мин}} + m_p c^2)^2 - p_L^2 c^2 = (4m_p c^2)^2.$$

Раскрывая скобки и учитывая равенство $E_{\text{мин}} - p_L^2 c^2 = (4m_p c^2)^2$, приходим к ответу.

5.3.9. Законы сохранения энергии и импульса:

$$T_1 + T_2 = Mc^2 + T_M,$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_M.$$

Учитывая связь между энергией и импульсом рождённой частицы

$$Mc^2 + T_M = \sqrt{p_M^2 c^2 + M^2 c^4}$$

и используя ультрарелятивистское приближение, в котором

$$c|\vec{p}_1 + \vec{p}_2| = |T_1 - T_2| = cp_M,$$

приходим к формуле

$$(T_1 + T_2)^2 = (p_M c)^2 + M^2 c^4,$$

из которой и следует ответ.

[1] Нижний индекс L указывает на то, что данная величина берётся в лабораторной системе координат.

Глава 6. Разрежённые среды

6.1. Основы физической кинетики

6.1.4. Выделить элемент $\delta\Gamma = \delta q_1 \delta p_1 \ldots \delta q_n \delta p_n$ и проследить за его перемещением в единицу времени. Отметив граничные точки движущегося элемента одним и двумя штрихами, продифференцируем их разность и воспользуемся затем уравнениями Гамильтона:

$$\frac{d\delta q_j}{dt} = \dot{q}_j'' - \dot{q}_j' = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}\right)_{q_j = q_j''} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}\right)_{q_j = q_j'} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_j} \delta q_j,$$

$$\frac{d\delta p_j}{dt} = \dot{p}_j'' - \dot{p}_j' = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}\right)_{p_j = p_j''} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}\right)_{p_j = p_j'} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial q_j} \delta p_j.$$

В результате имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\delta q_j} \frac{d\delta q_j}{dt} + \frac{1}{\delta p_j} \frac{d\delta p_j}{dt} \right) \equiv \frac{1}{\delta\Gamma} \frac{d\delta\Gamma}{dt} = 0,$$

что и требовалось доказать.

6.1.6. Искомая величина определяется интегралом

$$\Omega_N(E) = \int\limits_{\mathcal{H}(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \ldots; \vec{r}_N, \vec{p}_N) < E} d\vec{r}_1 d\vec{p}_1 \ldots \int d\vec{r}_N d\vec{p}_N =$$

$$= \int\limits_V d\vec{r}_1 \ldots \int\limits_V d\vec{r}_N \int\limits_{p_1^2 + \ldots + p_N^2 < 2mE} d\vec{p}_1 \ldots \int d\vec{p}_N.$$

Интеграл по скоростям есть объём $6N$-мерного шара радиусом $R = \sqrt{2mE}$. Очевидно (по соображениям размерности), объём n-мерного шара радиусом R

$$V_n = C_n R^n.$$

Остаётся лишь вычислить C_n. Обнаружив (дифференцированием), что площадь поверхности такого шара равна nC_nR^{n-1}, запишем очевидное тождество:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-a(x_1^2+\ldots+x_n^2)} = \int_0^{\infty} dRnC_nR^{n-1}e^{-aR^2}dR.$$

Выполняя интегрирование в обеих частях равенства

$$(\pi/a)^{n/2} = C_n\Gamma(n/2+1)a^{-n/2},$$

получаем

$$C_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

6.1.8. Кинетическая энергия, приходящаяся на j-ю степень свободы,

$$T_j = \frac{p_j^2}{2m_j} = \frac{p_j}{2}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j}.$$

Её среднее значение

$$\langle T_j\rangle = Z_n^{-1}\int \frac{p_j}{2}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j}e^{-\beta\mathcal{H}}d\Gamma.$$

Дифференциал $d\Gamma$ на самом деле произведение n дифференциалов

$$d\Gamma = d\Gamma_1 \ldots d\Gamma_n,$$

каждый из которых «обслуживает» свой интеграл. Экспонента и статсумма распадутся на сомножители, из которых уцелеет лишь один:

$$\langle T_j\rangle = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\mathcal{H}}dp_j\right)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p_j}{2}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j}e^{-\beta\mathcal{H}}dp_j =$$

$$= -\frac{1}{\beta}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\mathcal{H}}dp_j\right)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p_j}{2}\frac{\partial}{\partial p_j}e^{-\beta\mathcal{H}}dp_j.$$

Интегрирование последнего сомножителя по частям с соблюдением предполагаемых при $p_j = \pm\infty$ условий приводит к требуемому результату.

6.1.9. Если интересующая нас величина (как в данном случае) зависит только от полной энергии системы, $A = A(E)$, её среднее выражается однократным интегралом, содержащим плотность состояний $\Omega'_N(E) = d\Omega_N/dE$:

$$\langle A\rangle = \frac{1}{Z_N}\int\limits_0^\infty e^{-\beta E}A(E)\Omega'(E)dE.$$

Очевидно,

$$Z_N(\beta) = \int\limits_0^\infty e^{-\beta E}\Omega'_N(E)dE,$$

и, следовательно,

$$\langle E\rangle = -\frac{\partial \ln Z_N}{\partial\beta}. \qquad (1)$$

Наша задача – вычислить

$$\langle (E - \langle E\rangle)^2\rangle = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2.$$

Чтобы решить её, надо продифференцировать (1) по β и учесть, что $\partial\langle E\rangle/\partial T$ есть теплоёмкость системы C_V.

6.1.11. Аккуратно выполнить действия, предписываемые уравнением Лиувилля, над указанным в условии представлением решения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_i(-1)\delta'_\alpha(\vec{x} - \vec{x}_i(t))\,\dot{x}_{\alpha i}\,\delta(\vec{v} - \vec{v}_i(t)) +$$

$$+\sum_i(-1)\delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t))\,\delta'_\alpha(\vec{v} - \vec{v}_i(t))\dot{v}_{\alpha i},$$

$$\vec{v}\nabla_{\vec{x}}f \equiv v_\alpha\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \sum_i v_\alpha\delta'_\alpha(\vec{x} - \vec{x}_i(t))\,\delta(\vec{v} - \vec{v}_i(t)),$$

$$\frac{\vec{F}}{m}\nabla_{\vec{v}}f \equiv \frac{F_\alpha}{m}\,\frac{\partial f}{\partial v_\alpha} = \sum_i\frac{F_\alpha}{m_i}\delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t))\,\delta'_\alpha(\vec{v} - \vec{v}_i(t)),$$

$\alpha = 1, 2, 3$. Используется правило суммирования по повторяющемуся индексу α

$$\delta'_\alpha\dot{x}_{\alpha i} = \delta'_1\dot{x}_{1\,i} + \delta'_2\dot{x}_{2\,i} + \delta'_3\dot{x}_{3\,i}.$$

В результате имеем

$$0 = \sum_i (-\dot{x}^i_\alpha + v^i_\alpha)\delta'_\alpha(\vec{x} - \vec{x}_i(t))\delta(\vec{v} - \vec{v}_i(t)) +$$

$$+ \sum_i \left(-\dot{\vec{v}}^i_\alpha + \frac{F_\alpha}{m_i}\right) \delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t))\delta'_\alpha(\vec{v} - \vec{v}_i(t)).$$

Такое равенство может иметь место только тогда, когда коэффициент (скобки) перед дельта-функциями обращаются в нуль. Это и приводит к уравнениям Ньютона.

6.1.13. Воспользоваться свойством скобок Пуассона

$$\frac{\partial}{\partial t}[g, h] = \left[\frac{\partial g}{\partial t}, h\right] + \left[g, \frac{\partial h}{\partial t}\right].$$

6.1.16. Движение будет несжимаемым, если дивергенция вектора скорости $(\dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{p}}_1; \ldots; \dot{\vec{x}}_n, \dot{\vec{p}}_n)$ в фазовом подпространстве будет равна нулю.

6.2. Газодинамика

6.2.3. Получающиеся в процессе вычислений интегралы выразить через гамма-функции $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ и воспользоваться её значениями $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n)!}{n! 2^{2n}}\sqrt{\pi}$.

6.2.5. Молекулы выходят независимо друг от друга. В случае а) число частиц, покидающих в единицу времени сосуд с отверстием площадью S, равно числу столкновений молекул газа с такой же по величине площадью стенки сосуда. В случае б) это число уменьшается на количество входящих внутрь молекул.

6.2.6. Фазовая плотность $f(x, v_x, t)$ удовлетворяет уравнению свободномолекулярного движения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

с начальным условием

$$f(x, \vec{v}, 0) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_\text{Б} T}\right) e^{-\frac{mv^2}{2k_\text{Б}T}} 1_-(x).$$

Из уравнения характеристики

$$dt = \frac{dx}{v_x}$$

следует, что решение этого уравнения имеет вид

$$f(x, \vec{v}, t) = F(x - v_x t; \vec{v}).$$

Начальное условие позволяет найти функцию F, а стало быть, и само решение.

6.2.7. Распределение молекул по импульсам устанавливается на поверхностях пластин. Обозначим их скорости через $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$. Для частиц, отражаемых единичной поверхностью первой пластины,

$$f_1(\vec{p}) = \frac{n_1}{(2\pi m k_{\text{Б}} T_1)^{3/2}} e^{-(\vec{p}-m\vec{V}_1)/2mk_{\text{Б}}T_1},$$

для второй

$$f_2(\vec{p}) = \frac{n_2}{(2\pi m k_{\text{Б}} T_2)^{3/2}} e^{-(\vec{p}-m\vec{V}_2)/2mk_{\text{Б}}T_2}.$$

В стационарном режиме число частиц отражённых равно числу частиц падающих (в единицу времени).

6.2.8. Связать это представление с концентрацией $n(\vec{r}, t)$ и вектором плотности тока частиц $\vec{J}$. По ходу дела придётся доказать тождества

$$\int 4\pi \vec{(}\Omega) d\Omega = 0$$

и

$$\int\limits_{4\pi} \vec{\Omega}(\vec{B}\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{3}\vec{B}.$$

6.2.9. Подставить решение, выраженное через n и $\vec{J}$, в уравнение (5) и проинтегрировать уравнение по всем направлениям. Потом вернуться к нему, умножить обе части на Ω и вновь проинтегрировать по направлениям. При этом придётся доказать тождества

$$\int\limits_{4\pi} (\vec{A}\vec{\Omega})(\vec{B}\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{3}\vec{A}\vec{B}$$

и

$$\int\limits_{4\pi} (\vec{A}\vec{\Omega})(\vec{B}\vec{\Omega})\vec{\Omega} d\vec{\Omega} = 0.$$

6.2.10. Воспользоваться результатом решения задачи 2.3.10.

6.3. Диффузия

6.3.6. Процесс описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\partial\partial^2 T(x,t)\partial x^2, \quad t > 0,\ 0 < x < \infty,$$

при краевых условиях

$$T(x,0) = f(x),\ \frac{\partial T(+\infty,t)}{\partial t} = 0.$$

Решение можно построить путём подходящей суперпозиции функций Грина для бесконечного стержня.

6.3.7. Уравнение

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right), \quad t > 0,\ 0 < r < R,$$

решается методом разделения переменных.

6.3.10. Частное решение уравнения

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{a}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right)$$

ищем методом разделения переменных. Получаем

$$T_\lambda(r,t) = Ae^{-ak^2t}J_0(\lambda r),$$

где k^2 – постоянная разделения, а J_0 – функция Бесселя нулевого порядка. Условие на границе будет выполняться только когда kR является корнем функции Бесселя: $J_0(kR) = 0$. Таких корней бесконечное множество; обозначим из через ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, тогда $k_n = \xi_n/R$ и общее решение запишется в виде

$$T(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-ak_n^2 t} J_0(k_n r).$$

Последовательность коэффициентов A_n находится из соответствующего разложения $T(r,0)$:

$$A_n = \frac{2}{[J_0'(\xi_n)]^2}\int\limits_0^1 \phi(Rx)J_0(\xi_n x)x dx.$$

6.4. Плазма

6.4.1. Сравнить соответствующие функции Лагранжа.

6.4.5. В общее выражение для адиабатического инварианта подставить $p = mv_\perp$ и $dq = Rd\varphi$, где R – ларморовский радиус орбиты, φ – фаза вращения.

6.4.6. Вычисляя интегралы, находим, что при $t \to \infty$,

$$v_x = v_{\perp 0}\sin\omega_H t - \xi\cos\omega_H t, \qquad v_y = v_{\perp 0}\cos\omega_H t + \xi\sin\omega_H t,$$

где $\xi = (1/2)(F_0/m\omega_H)\exp(-\omega_H^2\alpha^2)$. Отсюда и следует ответ.

6.4.7. Использовать систему уравнений Максвелла и уравнение

$$\vec{B} = \mu\vec{H}.$$

6.4.8. Из уравнений Максвелла следует, что $j_{ez} = 0$, а $B_z = \text{const} = B_0$. Из условия несжимаемости $v_z = 0$. Повернём систему координат так, чтобы $j_{ey} = 0$, тогда получим

$$j_{ex} = -\frac{c}{4\pi\mu}\frac{\partial b_y}{\partial z}, \quad j_{ey} = j_{ez} = 0, \quad b_x = \text{const} = 0, \quad B_z = B_0.$$

Подставляя эти выражения в уравнение движения плазмы, учтём, что ∇p не имеет составляющих, перпендикулярных оси OZ. В результате получим

$$v_x = \text{const} = 0, \qquad \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_0}{4\pi\rho\mu}\frac{\partial b_y}{\partial z}$$

и далее,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{8\pi\mu}\frac{\partial b_y^2}{\partial z}, \quad E_x = \frac{j_{ex}}{\sigma} - \frac{v_y B_0}{c}, \qquad E_y = E_z = 0.$$

Из первого уравнения Максвелла следует, что

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = -c\frac{\partial E_x}{\partial z},$$

и мы близки к ответу.

6.4.11. В предыдущей задаче $v_y = -(4\pi\mu\rho)^{-1/2} A \sin(\omega t - kx)$. Магнитные силовые линии поля $\vec{B}_0$ представляют собой прямые $x = x_0$, $y = y_0$. Наложение поля $\vec{b}$ искривляет силовые линии. Тангенс угла искривления в произвольной точке определяется уравнением

$$\frac{dy}{dz} = \frac{b_y}{B_z} = \frac{b_y}{B_0}.$$

Подставляя сюда $b_y = a\sin(\omega t - kx)$ и производя интегрирование, приходим к формулам

$$x = x_0,$$

$$y = y_0 + \frac{A}{\omega\sqrt{4\pi\mu\rho}} \cos(\omega t - kz),$$

из которых и следует ответ.

6.4.12. Поперечные колебания обычной струны в направлении OY описываются уравнением $\lambda \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \theta \dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2}$, где λ – масса единицы длины струны.

6.4.13. Представить b и v в комплексном виде, $b = b_0 e^{j(\omega t - kz)}$, $v = v_0 e^{j(\omega t - kz)}$ и подставить эти выражения в уравнение для b_y.

6.4.14. Как и прежде, пренебрегаем током смещения и изменением магнитной проницаемости μ. Вследствие четвёртого уравнения Максвелла имеет место соотношение $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{B} = -\Delta\vec{B}$. Исключая из первого уравнения Максвелла и из выражения для плотности электрического тока $\vec{j}_e$ напряжённость $\vec{E}$, подставляя результат во второе уравнение Максвелла и используя приведённое выше соотношение, приходим к уравнению

$$\mathrm{rot}[\vec{v}, \vec{B}] + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\Delta\vec{B} - \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0.$$

6.4.15. В этом случае уравнение для магнитной индукции принимает вид $\mathrm{rot}[\vec{v}, \vec{B}] - \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$, скорость же изменения магнитного потока через движущийся контур записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{B}d\vec{S} = \int\limits_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} d\vec{S} + \oint\limits_L \vec{B}[\vec{v}, d\vec{l}].$$

Интеграл по контуру L преобразуется в поверхностный.

6.4.16. Добавляя в уравнение движения вязкий член $\eta\nabla^2\vec{v}$, заменяя, как и выше, дифференцирование по координатам делением на l^*, дифференцирование по времени – делением на $t^* = l^*/v^*$, приходим к ответу.

6.4.18. Уравнение $\mathrm{rot}\vec{B} = g\vec{B}$ распадается на два:

$$-\frac{\partial B_z}{\partial r} = gB_\varphi$$

и

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi) = gB_z.$$

Исключая B_φ, приходим к уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B_z}{\partial r}\right) + g^2 B_z = 0.$$

6.4.19. Записать уравнение непрерывности в шестимерном пространстве $(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3)$. В идеальной плазме низкой плотности взаимодействием частиц между собой можно пренебречь.

6.4.23. Используя условие задачи, подставить найденное в предыдущей задаче распределение в уравнение для φ (см. ответ к задаче 6.4.20) и учесть, что $|e_a\varphi| << k_{\text{Б}}T_\alpha$.

6.4.24. Воспользоваться методом преобразования Фурье.

Глава 7. Феноменология континуума

7.1. Феноменологическое описание сплошной среды

7.1.6. Общее выражение для компонент тензора деформаций в криволинейных координатах имеет вид

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{H_1 \partial q_1} + \frac{u_2}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{u_3}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3},$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_1}{\partial q_2} - \frac{u_2}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{u_1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2},$$

и т.д. (остальные компоненты ε_{ij} можно получить соответствующей заменой индексов). Для цилиндрической системы r, φ, z

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r, \quad H_z = 1,$$

для сферической r, θ, φ

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r\sin\theta.$$

7.1.16. Нормальное к элементу поверхности $d\vec{S} = \vec{n}dS$ напряжение σ_N определяется формулой $\sigma_N = \sigma_{ij}n_i n_j$. Процедура состоит в построении функции $H(n_i, \lambda) = \sigma_{ij}n_i n_j - \lambda n_i n_j$, удовлетворяющей условия $\partial H/\partial n_i = 0$, из которого и следует ответ.

7.1.19. Выполнить тождественное преобразование

$$\delta v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta x_j = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\delta x_j =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\delta x_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\delta x_j =$$

$$= \varepsilon_{ij}\delta x_j + \omega_{ij}\delta x_j.$$

Первая сумма даёт i-ю проекцию деформационной составляющей, а вторая – i-ю проекцию вращательной.

7.1.20. Цилиндр растянут вдоль OX_3 в λ раз. Перейдя от декартовых аргументов x_1, x_2 к цилиндрическим r, φ, получим

$$x_1' = rf(r)\cos(\varphi + \phi(z)), \quad x_2' = rf(r)\sin(\varphi + \phi(z)), \quad x_3' = \lambda z,$$

откуда

$$x_1'^2 + x_2'^2 = [rf(r)]^2.$$

Стало быть, частицы (материальные точки) цилиндра, лежавшие первоначально на окружности радиуса r, переместить на окружность радиусом $rf(r)$. Наконец, формула

$$\frac{x_2'}{x_1'} = \operatorname{tg}(\varphi + \phi(z))$$

указывает на то, что точки, лежавшие прежде на радиальном отрезке под углом φ к оси OX_1, окажутся теперь на отрезке под углом $\varphi + \phi(z)$, причём величина изменения угла зависит от осевой координаты плоскости z.

7.2. Кинематика текучей среды

7.2.20. Воспользоваться Приложением.

7.2.24. Уравнения траектории $dx_i/dt = v_i(\vec{x}, t)$ в случае $\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x})$ могут быть представлены в виде $dt = dx_i/v_i$.

7.2.25. Пользуясь результатом предыдущей задачи, можно записать

$$\frac{d}{dt}\int\limits_A^B \vec{v}\delta\vec{r} = \int\limits_A^B \dot{\vec{v}}\delta\vec{r} + \int\limits_A^B \vec{v}\frac{d}{dt}\delta\vec{r} = \int\limits_A^B \dot{\vec{v}}\delta\vec{r} + \int\limits_A^B \vec{v}\delta\vec{v},$$

выполняя интегрирование и приводя точки A и B к совпадению, приходим к результату.

7.2.27. Для того, чтобы нормаль к поверхности $\varphi(\vec{k}) = 0$ в каждой её точки совпадала по направлению со скоростью, необходимо выполнение условия $\vec{v} = \lambda \mathrm{grad}\varphi$. Взяв от обеих частей этого равенства ротор, приходим к ответу.

7.2.28. В проекциях

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j}v_j = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk}q_j v_k + \frac{1}{2}(v_k v_k), i\ ,$$

где q_i – проекции вектора завихренности $\vec{q} = \mathrm{rot}\ \vec{v}$.

7.2.31.

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)\vec{e}_3,$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \qquad \varepsilon_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3},$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right), \qquad i \neq j,$$

$$\frac{1}{\delta V} \cdot \frac{d\delta V}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

7.2.32. $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}$.

7.3. Динамика текучей среды

7.3.2. Продифференцировав D по времени,

$$\dot{D} = \frac{d}{dt}(u_1 v_2 - u_2 v_1) = \dot{u}_1 v_2 + u_1 \dot{v}_2 - \dot{u}_2 v_1 - u_2 \dot{v}_1,$$

заменить производные правыми частями соответствующих исходных уравнений и привести подобные. Интегрирование полученного в результате уравнения $\dot{D} = (a+g)D$ завершает доказательство.

7.3.4.

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{j0}} = \frac{\partial x_{i0}}{\partial x_{j0}} + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial v_i}{\partial x_{j0}} dt' = \delta_{ij} + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial v_i}{\partial x_{j0}} dt'.$$

7.3.9. Уравнение движения единичной массы

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{4}{3}\pi\Gamma\rho\vec{r},$$

а уравнение непрерывности (см. предыдущую задачу)

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H\rho.$$

Подстановкой $\vec{v}(\vec{r},t) = H(t)\vec{r}$ и $\rho(\vec{r},t) = \rho(t)$ и доказывается утверждение задачи.

7.3.18. Перейти в полярную систему координат.

7.3.23. Из условия $v_z = \partial\phi/\partial z|_0 = 0$ следует $b = 0$, а из $\nabla^2\phi = 0$ $c = -2a$. Компоненты скорости $v_x = 2ax$, $v_z = -4a\,z$.

7.3.32. При вычислении объемной силы приближённо считать Землю шаром. Во вращающейся с Землёй системе координат

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho g x/R_0 + \rho\Omega^2 x,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\rho g y/R_0 + \rho\Omega^2 y,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho g z/R_0.$$

Проинтегрировать эти уравнения, выбрать точки на экваторе ($R_{\text{Э}}$) и полюсе ($R_{\text{П}}$) и прийти к уравнению

$$(\Omega^2 - g/R_0)R_{\text{Э}}^2 = -(g/R_0)R_{\text{П}}^2.$$

7.3.39. Действующая на элемент dl дуги контура C сила пропорциональна давлению p в данной точке и направлена по внутренней нормали к контуру. Из интеграла Бернулли $p = A - \rho v^2/2$, $A = \text{const}$. Результат записать для комплексной силы $F = F_y + iF_x$ (интеграл от A по замкнутому контуру C равен нулю).

7.3.41. Исходные уравнения:

$$\vec{v} = \operatorname{grad}\phi, \quad \nabla^2\phi = 0, \quad v^2/2 + u + p/\rho = \text{const}.$$

Сферически симметричный потенциал ищется в виде $\phi = \dfrac{a}{r} + b$.

7.4. Уравнения баланса

7.4.1. В уравнении

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

вытекающем из начального уравнения задачи, сумма двух первых членов равна $d\rho/dt$:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Дифференцирование

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t)$$

по начальной координате $\xi = x(t_0)$ даёт

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)$$

и мы приходим к уравнению

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = 0.$$

Дальнейшее очевидно.

7.4.2. В отсутствие давления уравнение баланса энергии превращается в уравнение непрерывности, отвечающего закону сохранения энергии. Ответ получается в результате комбинации этого уравнения и аналогичного уравнения для плотности массы, записанных в лагранжевой форме.

7.4.3. Баланс сохраняющегося импульса текущей среды выражается уравнением непрерывности

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}\vec{v}) = 0. \tag{2}$$

Учитывая, что

$$\operatorname{div}(\vec{v}\vec{v}) = \operatorname{div}\left(\sum_{i,j} v_i v_j \vec{e}_i\vec{e}_j\right) = \sum_j \frac{\partial(\rho v_j \vec{v})}{\partial x_j}.$$

Подставляя это выражение в (2) и раскрывая производную произведения, получим

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j}\vec{v} + \sum_j \rho v_j \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_j} = 0.$$

Первый член с третьим взаимно уничтожаются (в силу уравнения баланса массы), оставшаяся часть уравнения преобразуется к виду

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}\right]\equiv\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=0,$$

что и требовалось доказать.

7.4.4. Число распадающихся нейтральных атомов и однократно заряженных ионов пропорционально их концентрациям, скорости протекания обратных реакций пропорциональны произведениям соответствующих концентраций.

7.4.5. Сложить левые части и правые части полученных в предыдущей задаче уравнений для тяжёлых частиц.

7.4.7. Частная производная слева вычисляется при постоянных координатах $\vec{r'}=\{x',\ y',\ z'\}$, а аналогичная производная справа – при постоянных $\vec{r}=\{x,\ y,\ z\}$. Из-за этого и разница, несмотря на то, что $t=t'$.

7.4.8. Вначале показать, что потоки величины A через элемент поверхности $d\vec{S}$ в K'- и K-системах связаны соотношением

$$\vec{j}'_A d\vec{S}=\vec{j}_A d\vec{S}-\rho_A\vec{V}d\vec{S}=(\vec{j}_A-\rho_A\vec{V})d\vec{S}.$$

7.4.11. Следующая последовательность операций (снабдите их комментариями!) указывает ход решения задачи:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{v}\nabla\rho,$$

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}=0, \tag{3}$$

$$\frac{d\rho}{dt}A+\rho\frac{dA}{dt}=\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}+\vec{v}\nabla(\rho A).$$

Исключая из последнего уравнения $d\rho/dt$ с помощью (3) и выполняя несложные преобразования, приходим к ответу.

Глава 8. Идеальная жидкость

8.1. Течение идеальной жидкости

8.1.4. Выполнить построение, указанное на рис. 8.5. По формуле Стокса

$$\oint\limits_C \vec{v}\delta\vec{l} = \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{v}\delta\vec{S}.$$

Возьмём в качестве контура C окружность радиуса ϱ, ограничивающую площадку с нормалью $\vec{n}$:

$$\int\limits_0^{2\pi} \rho^2 \frac{d\varphi}{dt}\,\delta\varphi = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{v})_n\delta\vec{S}.$$

Отсюда

$$2\pi\rho^2\frac{d\varphi}{dt} = \pi\rho^2(\operatorname{rot}\vec{v})_n$$

и, следовательно, $2\Omega_n = \omega_n$, что в силу произвольного направления $\vec{n}$ и означает, что $\vec{\Omega} = \frac{\vec{\omega}}{2}$.

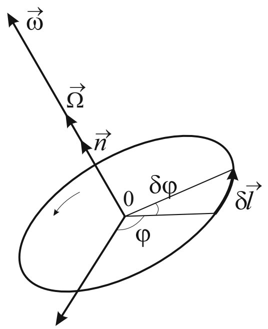

Рис. 8.5. Указания к задаче 8.1.4.

8.1.5. Воспользоваться уравнением непрерывности, уравнением Эйлера и уравнением состояния, рассматривая скорость и давление как функции плотности $\rho(x, t)$. Найденное соотношение

$$v = \pm\int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho)}{\rho}d\rho,$$

где ρ_0 – равновесная плотность среды, а $c(\rho) = \sqrt{dp/d\rho}$ – скорость звука в среде, подставить одно из полученных на предыдущем этапе соотношений.

8.1.7. Учесть, что $\dot{\varepsilon}_{ij} = (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})/2 = \dot{u}_{i,j} - w_{ij}$, где $w_{ij} = (\dot{u}_{i,j} + + \dot{u}_{j,i})$ – тензор завихренности, не производящий работы: $w_{ij}\sigma_{ij} = 0$. Далее воспользоваться уравнением непрерывности.

8.1.11. Привести уравнение Эйлера к виду

$$m\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - [\vec{v}[\nabla\vec{v}]]\right) = -\nabla U$$

и сделать подстановку $\vec{v} = \frac{1}{m}\nabla S$.

8.1.12. Теперь

$$\vec{F} = -e\nabla\varphi - \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}\left[\vec{v}[\vec{v}\vec{A}]\right].$$

Объединяя векторные произведения в уравнении Эйлера в один член $\left[\vec{v}, \mathrm{rot}\left(m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\right]$, избавиться от которого можно подстановкой

$$m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A} = \nabla S.$$

8.1.13. Для релятивистского уравнения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{B}], \quad \vec{p} = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

составить гидродинамический аналог

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + (\vec{v}\,\nabla)\vec{p} = -e\nabla\varphi - \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \mathrm{rot}\vec{A}].$$

Выполнить преобразования

$$(\vec{v}\,\nabla)\vec{p} = \nabla(\vec{v}\vec{p}) - (\vec{p}\,\nabla)\vec{v} - [\vec{v}\,[\nabla, \vec{p}]] - [\vec{p}\,[\nabla, \vec{v}]],$$

$$(\vec{p}\,\nabla)\vec{v} + [\vec{p}\,[\nabla, \vec{v}]] = \frac{m}{2\sqrt{1-(v/c)^2}}\nabla v^2 = -\nabla\left(mc^2\sqrt{1-(v/c)^2}\right).$$

В результате

$$\nabla(\vec{v}\vec{p}) - (\vec{p}\,\nabla)\vec{v} - [\vec{p}\,[\nabla, \vec{v}]] = \nabla\sqrt{m^2c^4 + c^2p^2},$$

и после замены

$$\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) = \nabla S$$

приходим к релятивистскому уравнению Гамильтона-Якоби.

8.2. Волновое движение

8.2.2. Вывести уравнение для поля скоростей, подставить в него уравнение из задачи и вынести оператор ∇ за скобки.

8.2.3. Дифференцируя потенциал плоской волны $\varphi(x,t) = f(x-ct)$, найдём

$$v_x = f'(x-ct), \tag{1}$$

а из линеаризованного уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p'(\rho),$$

получавшегося при выводе волновых уравнений, получим

$$p = -\rho\partial\varphi/\partial t = \rho_0 c f'(x-ct). \tag{2}$$

Сопоставляя уравнение из условия задачи 8.2.2 и (2), приходим к ответу.

8.2.4. Из кинематических соотношений между смещениями и скоростями вытекает связь между давлением p и потенциалом смещения ψ

$$p = -K\nabla^2\psi, \tag{3}$$

где

$$K = \rho c^2 \tag{4}$$

– коэффициент объёмного сжатия. Комбинируя (3)-(4) с волновым уравнением для ψ, находим альтернативное выражение.

8.2.5. Выполнить преобразование Фурье по времени:

$$\psi(\vec{r}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\phi(\vec{r},t)dt.$$

8.2.9. Поле смещений даётся градиентом ψ, который представляется асимптотикой

$$\psi(r) = A\frac{e^{ikr}}{r},$$

описывающей расходящуюся волну (сходящейся к центру волне неоткуда взяться).

8.2.10. Воспользоваться методом разделения переменных.

8.3. Движение тел в идеальной жидкости

8.3.4. Движение жидкости происходит в радиальном направлении, из уравнения непрерывности следует, что $v_r = f(t)r^{-2}$, где $f(t)$ – произвольная функция времени. Подстановка v_r в уравнение Эйлера преобразует его к виду

$$\frac{p_0 - p(t)}{\rho} = -\frac{3V^2}{2} - RV\frac{dV}{dR}, \quad V = \dot{R}.$$

Разделяя переменные, находим ответ.

8.3.6. Применить теорему Бернулли в форме $p = c - \rho v^2/2$, найти давление на поверхности цилиндра и вычислить компоненты силы по формулам $F_x = -R\int\limits_0^{2\pi} p_{r=a}(\theta)\cos\theta\, d\theta$ и т.д.

8.3.7. В сферической системе координат для радиальной скорости v жидкости записать уравнение Эйлера и уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}, \quad \frac{\partial(r^2 v)}{\partial r} = 0.$$

Ввести потенциал скорости ϕ так, что $U = -\frac{\partial\phi}{\partial r}$ и проинтегрировать уравнение Эйлера по r от r до бесконечности:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho}[\rho(\infty) - \rho(r)] = 0. \tag{5}$$

Из уравнения непрерывности

$$v(r) = C/r^2,$$

из граничного условия $v(R) = \dot{R}$ находим $C = R^2\dot{R}$ (R – радиус пузырька). Подставляя $v(r) = \frac{R^2}{r^2}\dot{R}$ и $\phi = \frac{R^2}{r}\dot{R}$ в уравнение (5) и полагая $r = R$, приходим к ответу.

8.3.8. Воспользоваться условием равенства давлений снаружи и внутри пузырька. Давление снаружи равно сумме давления жидкости $p(R)$ и давления, создаваемого силой поверхностного натяжения $2\sigma/R$. Считая процессы в газе политропическими с показателем γ, находим

$$p_{\Gamma}(R) = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma},$$

где R_0 – радиус пузырька при $p(R_0) = p(\infty)$.

8.3.11. Исходную формулу $\vec{F} = -\int p\,d\vec{S}$ преобразовать с использованием теоремы Бернулли, поверхностный интеграл преобразовать в объемный и воспользоваться векторным тождеством $\mathrm{grad}(v^2/2) = [\vec{v}, \mathrm{rot}\,\vec{v}] - (\vec{v}\,\nabla)\vec{v}$.

8.3.13. Суммарный импульс $\vec{P} = m\vec{v}_0 + \rho\int \vec{v}dV$.

8.3.14. Вычисление интеграла $\int v^2 dV$ удобно выполнить в сферической системе координат с осью OZ, направленной вдоль $\vec{v}_0$.

8.3.15. Из стационарного уравнения непрерывности исключить ρ с помощью уравнения Эйлера. Вводя в полученное уравнение

$$c^2\mathrm{div}\ \vec{v} - (\vec{v}\nabla)\vec{v} = 0$$

потенциал ϕ соотношением $\vec{v}\nabla\phi$ и раскрывая векторные выражения, приходим к искомому уравнению.

8.3.17. Рассматривая p как функцию w и учитывая, что $(\partial w/\partial p)_s = 1/\rho$, найдём

$$p - p_0 \approx \left(\frac{\partial p}{\partial w}\right)_s (w - w_0) = \rho_1(w - w_0).$$

Согласно же уравнению Бернулли $w - w_0 \approx -\frac{1}{2}(v_y^2 + v_z^2) - v_0 v_x$.

8.3.18. При упругом отражении молекул от поверхности давление $p = 2\rho v^2 \sin^2\theta$ (ρ – плотность газа, v – скорость и θ угол между начальным направлением скорости и касательной к поверхности в точке отражения). Отсюда z-составляющая силы, действующая на кольцо радиусом $r(z)$ и шириной $\sqrt{1 + [r'(z)]^2}dz$, равна $4\pi\rho v^2 \sin^2\theta\cdot r\sqrt{1 + [r'(z)]^2}dz$. Вывести приведённые здесь формулы и воспользоваться уравнением Эйлера-Лагранжа.

8.4. Магнитогидродинамика

8.4.2. Очевидно, последнее слагаемое стремится к нулю. Раскрывая ротор с учётом того, что $\mathrm{div}\,\vec{H} = 0$, получим

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = (\vec{H}, \nabla)\vec{v} - (\vec{v}, \nabla)\vec{H} - \vec{H}\mathrm{div}\,\vec{v}.$$

Пользуясь теперь уравнением непрерывности, приходим к ответу. Согласно « Электродинамике сплошных сред» Ландау и Лифшица это означает, что «если две бесконечно близкие частицы жидкости находятся на одной и той же силовой линии, то они всегда будут находиться на ней, а величина H/ρ будет меняться пропорционально расстоянию между ними». Объясните, почему.

8.4.3. Соответствующие рассматриваемому случаю уравнения имеют вид

$$H_0\frac{dv}{dz} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\,\frac{d^2H_x}{dz^2} = 0,$$

$$\eta\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{H_0}{4\pi}\,\frac{dH_x}{dz} = C,$$

где постоянная $C = \dfrac{dp}{dx}$. Уравнения решаются при граничных условиях $v = 0$ и $H_x = 0$ при $z = \pm a$.

8.4.4. Исследовать поведение $\langle v\rangle$ при $\Delta \gg a$ и $\Delta \ll a$. Сравнить с результатом обычной гидродинамики.

8.4.5. Исходные уравнения взять в виде

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0,$$

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\,[\vec{v},\vec{H}],$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{4\pi\rho}[\operatorname{rot}\vec{H},\vec{H}].$$

8.4.6. Исключить с помощью второго уравнения в ответе к предыдущей задаче ρ_1 и переписать остальные в компонентах.

8.4.7. Из условия совместимости двух уравнений (1) из ответа к задаче 8.4.6.

$$u_1 = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

8.4.8. Составить определитель системы (2) из ответа к задаче 8.4.6 и приравнять его нулю:

$$\left(u^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho}\right)(u^2 - u_0^2) = \frac{u^2H_y^2}{4\pi\rho}.$$

Биквадратное уравнение $x^4 + px^2 + q = 0$ имеет корни

$$x = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{-p + 2\sqrt{q}} \pm \sqrt{-p - 2\sqrt{q}}\right).$$

8.4.10. Из двух первых уравнений системы следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{H}{\rho}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H}{\rho}\right) + v_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H}{\rho}\right) = 0,$$

то есть $H/\rho = \mathrm{const}$ (жидкость однородна). Обозначив эту постоянную через b и подставив $H = \rho b$ в третье уравнение, выполняем задание.

8.4.12. Речь идёт об уравнении

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,[\vec{v}, \vec{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\vec{H}.$$

Если в обычном уравнении Навье-Стокса

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v}$$

преобразовать конвективный член к виду

$$(\vec{v}, \nabla)\vec{v} = \mathrm{grad}\,\frac{v^2}{2} - [\vec{v}, \mathrm{rot}\,\vec{v}]$$

и взять от обеих частей его ротор, получим

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,[\vec{v}, \vec{\omega}] + \nu\Delta\vec{\omega}.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением для $\vec{H}$, видим, что при $\nu = \dfrac{c^2}{4\pi\sigma}$ они в точности совпадают.

8.5. Вселенная как сплошная среда

8.5.1. В исходных уравнениях

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g},$$

$$[\nabla, \vec{g}] = 0,$$

$$\nabla\, \vec{g} = -4\pi G\rho.$$

произвести замены

$$\rho \mapsto \rho + \rho_1,\ p \mapsto p + p_1,\ \vec{u} = \vec{u}_1,\ \vec{g} \mapsto \vec{g}_1.$$

8.5.2. Скомбинировав полученные в предыдущей задаче уравнения в одно,

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = v_{\text{зв}}^2 \nabla^2 \rho_1 + 4\pi G\rho\rho_1,$$

подставить в него

$$\rho_1 = Ae^{i[\vec{k}\vec{r} - \omega t]}.$$

8.5.3. Принять во внимание, что собственная скорость $\vec{u}$ связана с пекулярной $\vec{v}$ соотношением

$$\vec{u} = \dot{a}\vec{x} + \vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r} + \vec{v}\left(\frac{\vec{r}}{a}, t\right),$$

а слагаемые уравнения непрерывности преобразуются следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{r}} \rho\left(\frac{\vec{r}}{a}, t\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\vec{x}\nabla\rho,$$

$$\nabla_{\vec{r}}(\rho\vec{u}) = \frac{1}{a}\nabla(\rho\vec{v}) + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\rho + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\vec{x}\nabla\rho.$$

8.5.4. Потенциал $\phi = (2/3)\pi G\rho(t)r^2$ заменяется его выражением через Φ ($\Phi = \phi + \frac{a\ddot{a}x^2}{2}$).

8.5.5. Вначале выразить δ через $\vec{v}$,

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla((1+\delta)\vec{v}) = 0,$$

затем умножить его на $\vec{v}$, а полученное в предыдущей задаче – на ρ и оба уравнения почленно сложить, предварительно упростив до линейного (по δ) приближения (давлением пренебречь).

8.5.6. При указанных условиях рассматриваемое уравнение приводится к однородному по t виду и по этой причине его решениями являются степенные функции.

8.5.7. Подставить двучлен в уравнение линейных возмущений

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial\delta}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 a^2}\nabla^2 p + 4\pi G\rho_0\delta,$$

и в качестве решения этого уравнения взять плоскую волну

$$\delta(\vec{x},t) = A(t)e^{i\vec{k}\vec{x}}.$$

Произведя в правой части замену $k = a(t)2\pi/\lambda$, найти значение $\lambda = \lambda_{\text{Дж}}$, при котором правая часть обращается в нуль.

8.5.8. Уравнение Власова (одночастичное уравнение Лиувилля) в собственных координатах для собственной плотности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{ma^2}\vec{p}\nabla n - m(\nabla\Phi)\frac{\partial n}{\partial\vec{p}} = 0. \qquad (1)$$

Отметим, что

$$\frac{m}{a^3(t)}\int n(\vec{x},\vec{p},t)d\vec{p} = \rho(\vec{x},t) = \rho_0(t)[1+\delta(\vec{x},t)],$$

$$\frac{1}{ma}\int \vec{p}n(\vec{x},\vec{p},t)d\vec{p}\Big/\int n(\vec{x},\vec{p},t)d\vec{p} = \vec{v}$$

и $\rho_0 \propto a^{-3}(t)$, где m – масса отдельной частицы, ρ_0 – средняя плотность среды, $v(\vec{x},t)$ – средняя скорость её в точке $\vec{x}$, а коэффициент a^3 возникает из-за изменения масштаба при переходе в собственную систему координат.

Интегрирование уравнения (1) по импульсному пространству даёт

$$a^3\rho_0\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{1}{a^2}\nabla\int\vec{p}nd\vec{p} = 0. \qquad (2)$$

Умножив (1) на $\vec{p}d\vec{p}$ и проинтегрировав по импульсам, получим уравнение для первого момента, комбинируя которое с (2), приходим к ответу.

Глава 9. Вязкая жидкость

9.1. Течение вязкой жидкости

9.1.4. Найти решение $v_x = v(z)$ уравнений Навье-Стокса

$$\eta d^2v/dz^2 + \rho g \sin\alpha = 0, \qquad dp/dz + \rho g \cos\alpha = 0.$$

На свободной поверхности

$$\sigma_{zz} = -p_0, \quad \sigma_{xz} = \eta dv/dz = 0, \quad v(0) = 0.$$

9.1.5. Движение жидкости осесимметрично и направлено по радиусу, причем $v_z << v_r$ и $\dfrac{\partial v_r}{\partial r} << \dfrac{\partial v_r}{\partial z}$.

Граничные условия:

$v_r = v_z = 0$ при $z = 0$,

$v_r = 0, \quad v_z = -u$ при $z = h$,

$p = p_0$ при $r = R$.

Здесь h – расстояние между пластинками, p_0 – внешнее давление. Из уравнения Навье-Стокса

$$v_r = \frac{1}{2\eta}\,\frac{\partial p}{\partial r} z\,(z-h)\,,$$

а интегрирование уравнения непрерывности по z даёт

$$u = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\int\limits_0^h r v_r dz = -\frac{h^3}{12\eta r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right),$$

откуда и следует ответ.

9.1.6. Пусть вязкая жидкость течёт по горизонтальной поверхности $x_2 = 0$ вдоль оси $0X_1$. Толщина ε пограничного слоя определяется из условий, что скорость v_1 должна возрастать до нормальных значений при изменении x_2 от 0 до ε:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \sim \frac{v_1}{\varepsilon}, \qquad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \sim \frac{v_1}{\varepsilon^2}.$$

Записать уравнение Навье-Стокса для v_1 и учитывая, что $v_2 \propto \varepsilon$, найти такую зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$, чтобы в пределе $\varepsilon \to 0$ сохранялся вязкий член.

9.1.7. $F_z = \oint\limits_S (-\rho\cos\theta + \tau_{rr}\cos\theta - \tau_{r\theta}\sin\theta)\, dS$, где интегрирование проводится по всей поверхности шара.

9.1.9. Сила сопротивления F зависит от радиуса шара R, скорости v, плотности ρ и коэффициента вязкости η и скорости звука u. Представив силу сопротивления F в виде

$$F = \sum_j C_j R^{\alpha_j} v^{\beta_j} \rho^{\gamma_j} \eta^{\delta_j} c^{\varepsilon_j}$$

и учитывая размерности входящих сюда величин

$$[F] = M^1 L^1 T^{-2}, \quad [R] = L^1,$$

$$[c] = [v] = L^1 T^{-1}, \quad [\rho] = M^1 L^{-3}, \quad [\eta] = M^1 L^{-1} T^{-1},$$

для общего члена ряда получим

$$R^{2-\delta_j} v^{2-\delta_j-\varepsilon_j} \rho^{1-\delta_j} \eta^{\delta_j} c^{\varepsilon_j}.$$

Его размерность должна совпадать с размерностью силы, так что

$$F(R, v, \rho, \eta) = \rho v^2 R^2 \left[C_1 \left(\frac{\eta}{\rho v R} \right)^{\delta_1} \left(\frac{c}{v} \right)^{\varepsilon_1} + \ldots \right].$$

Безразмерные переменные $\rho v R/\eta$ и v/c называются *числами Рейнольдса* и *Маха* соответственно.

9.2. Установившиеся течения

9.2.5. Воспользоваться Приложением.

9.2.7. Воспользоваться результатом предыдущей задачи, решение искать в виде $v = ar + b/r$, постоянные найти из граничных условий.

9.2.8. Очевидно, скорость имеет направление, касательное к окружности вращения, проходящей через данную точку. Ищем решение в виде $\vec{v} = [\mathrm{grad}\ f, \vec{\Omega}]$. Уравнение движения даёт

$$[\mathrm{grad}\ \nabla^2 f, \vec{\Omega}] = 0.$$

Поскольку grad $\nabla^2 f$ направлен вдоль $\vec{r}$, а произведение $[\vec{r}, \vec{\Omega}]$ не может быть равно при произвольном $\vec{r}$, то grad $\nabla^2 f$ должен быть равен нулю, так что

$$\nabla^2 f = \mathrm{const}.$$

Решение последнего уравнения ищем в виде

$$f(r) = ar^2 + b/r.$$

9.2.9. Выберем сферические координаты с полярной осью, направленной вдоль $\vec{\Omega}$. В этом случае $v_r = 0$, $v_\theta = 0$ и $v_\varphi = \dfrac{R^3\Omega}{r^2}\sin\theta$. Поверхностная плотность действующей на шар силы трения равна

$$t = \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)_{r=Q} = -3\eta\Omega\sin\theta.$$

Полный момент сил вычисляется интегрированием по поверхности

$$M_z = \oint\limits_S tR\sin\theta dS.$$

9.2.10. Направив ось OZ вертикально вверх и обозначив через v проекцию скорости капли на эту ось, запишем уравнение движения капли массой m радиуса a

$$m\dot{v} = F_{\text{с}} + F_{\text{гр}} + F_{\text{Ар}} + F_{\text{эл}},$$

где $F_{\text{с}} = -6\pi\eta av$ – сила сопротивления среды с вязкостью η (сила Стокса), $F_{\text{гр}}$ – сила тяжести (гравитации), $F_{\text{Ар}}$ – выталкивающая сила (сила Архимеда), $F_{\text{эл}} = neE$ – сила, действующая на заряд ne в поле напряжённостью E. Учитывая, что при $n = 1$

$$F_{\text{гр}} + F_{\text{Ар}} + F_{\text{эл}} = 0,$$

придём к неоднородному дифференциальному уравнению.

$$\dot{v} = \frac{9}{2} + \frac{\eta}{a^2\rho}v = (n-1)\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)g,$$

где ρ_0 и ρ – плотности воздуха и капли соответственно. Общее решение этого уравнения находится как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. В качестве последнего можно взять постоянную

$$\frac{2}{9}\frac{\rho a^2 g}{\eta}(n-1)\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right).$$

9.2.11. Из уравнения переноса тепла $\Delta T = 0$, условия на границе $r = R$, $T_0 = T_1$ и $æ_0\dfrac{\partial T_0}{\partial r} = æ_1\dfrac{\partial T_1}{\partial r}$. $\vec{B}$ – единственный вектор в задаче, нарушающий сферическую симметрию. Решениями уравнения Лапласа в этом случае являются функции, пропорциональные $\vec{B}\vec{r}$ и $\vec{B}\left(\nabla\dfrac{1}{r}\right)$.

9.2.12. Поле скоростей вычислено в задаче 9.2.1. Подстановка его в стационарное ($\partial T/\partial t = 0$) уравнение температуропроводности в условиях медленного ($\vec{v}\nabla T \approx 0$) течения приводит к уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{16 < v >^2}{R^4}\frac{\nu}{\chi c_p}r^2,$$

где $< v >$ – усредненная по поперечному сечению скорость течения. Найти решение этого уравнения, конечное при $r = 0$ и равное T_0 при $r = R$.

9.2.13. При малых z (см. 9.2.1)

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{8\eta Q}{\pi\rho_0 R^4}.$$

При больших z плотность ρ будет меняться в соответствии с уравнением состояния.

9.3. Неустановившиеся течения

9.3.1. Продифференцировать $\mathcal{E}_{\text{кин}}$ по времени, воспользоваться под интегралом уравнением Навье-Стокса

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k},$$

условием несжимаемости, теоремой Остроградского-Гаусса, условием на бесконечности, симметрией тензора вязких напряжений. В полученное соотношение

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = -\frac{1}{2}\int (v_{i,k} + v_{k,i})\tau_{ik} dV$$

подставить выражение для τ_{ik}.

9.3.2. Положить $v_{i,k} = v_{k,i}$ и выполнить интегрирование по частям.

9.3.3. Найти $\vec{v} = (R^3/2r^3)(3\vec{n}(\vec{u}\vec{n}) - \vec{u})$, распределение давления – из формулы Бернулли

$$p = p_0 - \rho\frac{v^2}{2} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = p_0 + \frac{\rho u^2}{8}(9\cos^2\theta - 5) + \frac{\rho}{2}R\vec{n}d\vec{u}/dt,$$

где θ – угол между $\vec{n}$ и $\vec{u}$. Далее,

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = -2\pi R^2\eta\int\limits_0^\pi \left(\frac{\partial v^2}{\partial r}\right)_{r=R}\sin\theta d\theta.$$

9.3.5. Рассматриваемый случай соответствует полю скоростей в ламинарном случае, создаваемом движущимся в вязкой жидкости телом вдали от него. Представив $\vec{v}$ в виде суммы большой ($\vec{V}$) и малой ($\vec{u}$) компонент в стационарном уравнении Навье-Стокса, получим для z-проекции малой компоненты уравнения:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = D\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}\right), \qquad D = \eta/V\rho.$$

9.3.8. Из соображений симметрии, непрерывности и несжимаемости жидкости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \qquad v_x = \text{const} = 0,$$

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = v_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} = 0.$$

Уравнение Навье-Стокса принимает вид

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\,p + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v}.$$

Отсюда для v_y получаем уравнение

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\,\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2},$$

решение которого с учётом заданных граничных условий удобно искать в виде $v_y = v_0 e^{i(kx-\omega t)}$.

9.3.9. Решение ищется в виде $v(z,t) = (A\sin kz + B\cos kz)e^{-i\omega t}$.

Граничные условия: $v(0,t) = v_0 e^{-i\omega t}$, $v(h,t) = 0$.

Сила трения на единицу площади поверхности

$$\sigma_0 = \eta\,\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0}, \qquad \sigma_h = -\eta\,\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=h}.$$

9.3.11. Скорость везде направлена вдоль оси OX и даётся решением уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = ae^{-i\omega t} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

с граничными условиями $v = 0$ при $z = \pm h/2$.

9.3.14. Выполнить интегрирование $\int\limits_0^t F(t)dt$ (проследить, чтобы во второй из задач слагаемое с δ-функцией не выпало из интеграла).

9.3.15. Уравнения для звуковых возмущений

$$\rho_0\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -c^2\nabla p_1 + \eta\Delta\vec{v} + (\zeta + \eta/3)\nabla\,\mathrm{div}\,\vec{v},$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0\,\mathrm{div}\,\vec{v}.$$

Декремент даётся мнимой частью волнового числа k.

9.4. Турбулентность

9.4.2. Вследствие стационарности процесса средняя кинетическая энергия постоянна,

$$\frac{d}{dt}\left\langle\frac{u^2}{2}\right\rangle = 0,$$

откуда следует

$$\left\langle \frac{d}{dt}\frac{u^2}{2} \right\rangle = \langle u\dot{u} \rangle = 0,$$

что и требовалось показать.

9.4.3. Первый шаг:

$$u(t)\ddot{u}(t) = \frac{d}{dt}(u(t)\dot{u}(t)) - [\dot{u}(t)]^2.$$

Второй – усреднение по ансамблю с учётом результата решения предыдущей задачи.

9.4.4. Следовать порядку решения предыдущей задачи:

$$u^2\frac{d^3u}{dt^3} = \frac{d}{dt}\left(u^2\frac{d^2u}{dt^2}\right) - 2u\frac{du}{dt}\frac{d^2u}{dt^2}$$

и т.д.

9.4.5. Согласно определению

$$B(\tau) = \left\langle \frac{du(t)}{dt}\frac{du(t+\tau)}{d(t+\tau)} \right\rangle.$$

Преобразуя содержимое угловых скобок к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u(t)\frac{\partial u(t+\tau)}{\partial t}\right) - u(t)\frac{\partial^2 u(t+\tau)}{\partial t^2},$$

выполняя усреднение и учитывая, что вследствие стационарности $u(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle u(t)\frac{\partial u(t+\tau)}{\partial t} \right\rangle = 0,$$

приходим к выражению

$$B(\tau) = -\left\langle u(t)\frac{\partial^2 u(t+\tau)}{\partial t^2} \right\rangle,$$

после несложных преобразований принимающему вид

$$B(\tau) = -\frac{d^2}{dt^2}\langle u(t)u(t+\tau) \rangle.$$

9.4.6. Написать совместную плотность $f(u_1, u_2)$ гауссовых случайных величин $U_1 = U(t)$ и $U_2 = U(t + \Delta t)$, вычислить распределение разности $U_2 - U_1$ и найти предел отношения среднего значения этой разности к Δt $\Delta t \to 0$ при условии, что $u_1 = v$:

$$\langle \dot{u}(t) | u(t) = v \rangle = \langle \dot{u} \rangle + \frac{\langle \dot{u} u \rangle}{\langle u^2 \rangle}(v - \langle u \rangle).$$

Учёт результата решения задачи N оставляет в правой части лишь первое слагаемое, которое по условию стационарности и обращается в нуль.

9.5. Турбулентное течение

9.5.3. Записать уравнение Навье-Стокса для $\vec{v}(\vec{x}, t)$ и уравнение Рейнольдса для средней скорости $\langle \vec{v}(\vec{x}, t) \rangle$ в одинаковом представлении, а затем вычесть из первого второе.

9.5.4.

$$\left\langle u_j \frac{du_j}{dt} \right\rangle = \left\langle u_j \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \langle v_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \rangle \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial (u_j u_j)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\langle v_i \rangle u_j u_j)}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Отсюда и следует ответ.

9.5.5. Длина и время связаны со средней удельной (на единицу массы) скоростью диссипации ε соотношением

$$\varepsilon \sim \frac{(\Delta u)^3}{l},$$

так что $[\varepsilon l] = \text{м}^3/\text{с}^3$, тогда как $\left[\dfrac{dl}{dt} = \dfrac{\text{м}}{\text{с}}\right]$. Таким образом, с точностью до некоторого безразмерного коэффициента можно положить

$$\frac{dl}{dt} \sim \varepsilon^{1/3} l^{1/3}.$$

Интегрирование по t от 0 до наблюдаемого значения и приводит (при $l \gg l_0$) к ответу.

9.5.6. Размерность левой части закона Лойцянского совпадает с размерностью произведения v^2l^5. Скорость изменения кинетической энергии единицы объёма жидкости $\rho v^2/t$ должна быть равна скорости диссипации $\varepsilon \sim \rho v^3/l$. Приравнивая два последних выражения и подставляя полученный отсюда результат $l \sim vt$ в равенство $v^2l^2 = \text{const}$, приходим к ответу.

9.5.7. Комбинация $\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}\,\frac{1}{y}$ имеет ту же размерность, что и $\frac{u}{y}$, размерность же последней совпадает с размерностью $\frac{du}{dy}$. Взяв в качестве коэффициента пропорциональности безразмерную величину $\frac{1}{\kappa}$, получим уравнение

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa y}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}},$$

решение которого и приводит к ответу.

9.5.8. В ламинарном течении $\sigma = \rho\nu\dfrac{du}{dy}$.

9.5.10. При вычислении усреднённой по сечению трубы скорости

$$\bar{u} = \frac{1}{\pi R^2}\,2\pi\int\limits_0^R urdr$$

представить функцию профиля в виде

$$u(r) = \frac{v_*}{\kappa}\ln\xi, \qquad \xi = \frac{(R-r)v_*}{\nu}$$

и перейти к интегрированию по переменной ξ. Проинтегрировав логарифм по частям, ограничиться ведущим членом.

9.5.11. Действующая на всё сечение потока жидкости в трубе движущая сила равна $\pi R^2\Delta p$. Полная сила трения равна

$$2\pi R\Delta l\sigma = 2\pi Rl\rho v_*^2.$$

Приравнивая эти выражения, находим

$$\frac{\Delta p}{\Delta l} = \rho v_*^2\frac{2}{R}.$$

Выражая с помощью этой формулы v_* через $\Delta p/\Delta l$ и подставляя результат в формулу усреднённой скорости, приходим к ответу.

Глава 10. Упругая среда

10.2. Элементарные статические задачи

10.2.2. Тензор деформаций рассматриваемой среды

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{\mathrm{E}}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

принимает вид

$$\varepsilon_{ij} = \left[(1+\nu)(-p\delta_{ij}) + \nu\delta_{ij}(3p)\right]/\mathrm{E}\ .$$

Модуль объёмного сжатия (отношение давления к изменению объёма) $K = -p/\varepsilon_{ii}$. Отсюда следует первая формула. Вторая получается с использованием закона Гука для изотропного тела.

10.2.3. На поверхности шара $\vec{t} = -\vec{n}p$ и, следовательно, $\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p$. Из соображений симметрии

$$\vec{u}(\vec{r}) = u(r)\vec{e}_r, \quad \varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\partial u_1/\partial x_1 = (1/3)\delta_{ij}\ \mathrm{div}\ \vec{u},$$

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) = \mathrm{const}, \qquad \mathrm{rot}\ \vec{u} = 0.$$

Используя связь между ε_{ij} и σ_{ij} на границе, приходим к ответу.

10.2.4. $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{33} = \sigma, \quad \sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

10.2.5. Требуется доказать, что

$$\int\limits_V f_i u_i dV + \oint\limits_S t_i(\vec{n})u_i dS = 2\int\limits_V \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,/2\right)dV.$$

Чтобы это сделать, нужно в интеграле по поверхности произвести замену $t_i(\vec{n}) = \sigma_{ij}n_j$ и преобразовать его по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int\limits_S \sigma_{ij}u_i u_j dS = \int\limits_V \left(\sigma_{ij}u_i\right),j dV = \int\limits_V \left(\sigma_{ij,j}u_i + \sigma_{ij}u_{i,j}\right)dV.$$

Используя уравнение равновесия $\sigma_{ij,j} = -f_i$ и учитывая, что $\sigma_{ij}u_{i,j} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$, завершаем доказательство.

10.2.6. Воспользоваться тождеством

$$\mathrm{grad\ div}\ \vec{A} = \nabla^2\vec{A} + \mathrm{rot\ rot}\ \vec{A}.$$

10.3. Волны в упругой среде

10.3.1. Требуемое разложение (разложение Гельмгольца) заключается в представлении поля $\vec{u}(\vec{x}, t)$ в виде $\vec{u} = \nabla\phi + [\nabla, \vec{\psi}]$.

10.3.2. Пусть $u(x, t)$ – малое отклонение струны в точке x $(0 < x < l)$ в момент времени t от положения равновесия. Кинетическая энергия элемента dx струны равна $(\rho\dot{u}^2/2)dx$, потенциальная – $(ku'^2/2)dx$ (вывести эти формулы).

10.3.3. Воспользоваться нестационарным уравнением для перемещений однородной среды.

10.3.4. Момент инерции элементарного цилиндрического слоя радиусом r, толщиной dr и высотой dz равен $dI' = 2\pi\rho r^3 dr\, dz$, его кинетическая энергия – $\dfrac{dI'\dot{\varphi}^2(z)}{2}$, полная кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} I\dot{\alpha}_0^2 + \frac{1}{2}\int \dot{\varphi}^2(z)\, dI'.$$

Потенциальная энергия системы совпадает с потенциальной энергией закрученной нити $U = k\alpha^2/2$, где $k = C_{\text{кр}} l$, $\alpha = \varphi(l)$ – угол поворота нижнего сечения стержня относительно верхнего. Составить и решить уравнения Лагранжа.

10.3.6. Сила, с которой свободный конец стержня действует на массу m, равна

$$F_z = -\frac{3\mathrm{E}I}{L^3} z.$$

10.3.7. В сферических координатах с началом в центре шара смещение $\vec{u}$ направлено по радиусу, $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$. Отсюда $\vec{u} = \nabla\phi$,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -k^2\phi, \qquad k = \frac{\omega}{c_l},$$

$\phi = A\dfrac{\sin kr}{r}$ (временной множитель не пишем).

Радиальные напряжения

$$\sigma_{rr} = \rho(-\omega^2\phi - 4c_t^2\frac{1}{r}\phi')$$

с граничным условием $\sigma_{rr}(R) = 0$ приводят к уравнению

$$\frac{\operatorname{tg} kR}{kR} = \frac{1}{1 - (kRc_l/2c_t)^2}.$$

Его корни и определяют частоты колебаний (c_l и c_t – фазовые скорости продольных и поперечных волн).

10.3.9. Преобразование Лапласа по времени

$$u(x,t) \to \hat{u}(x,s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} u(x,t)dt$$

уравнение

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial x^2} - \frac{s^2}{\alpha^2}\hat{u} = 0$$

с граничным условием $\hat{u}(0,s) = \dfrac{1}{(b+s)^2}$. Решение этого уравнения представляется в виде

$$\hat{u}(x,s) = Ae^{sx/\alpha} + Be^{-sx/\alpha}.$$

Выполняя обратное преобразование методом вычетов (при $t > x/\alpha$) и с помощью леммы Жордана (при $t < x/\alpha$), приходим к ответу.

10.4. Шары, стержни, балки

10.4.1. Направив ось OZ по оси стержня, а OX и OY расположив в плоскости нижнего основания, записать уравнения равновесия для σ_{ij}. На боковой поверхности все компоненты σ_{ij}, кроме σ_{zz}, равны нулю, а на верхнем основании $(z = l)$ $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$. С учетом этих условий находится σ_{zz} (остальные $\sigma_{ik} = 0$), затем $u_{i,k}$ $(u_{i,k} = 0, \; i \neq k)$, и, наконец, интегрированием находим $u_x, \; u_y, \; u_z$.

10.4.2. Необходимо найти конечное при $\varrho = 0$ и удовлетворяющее условию $\sigma_{\varrho\varrho}(R) = 0$ решение уравнения

$$\frac{\mathrm{E}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{d}{d\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}(ru_\varrho)\right) = -\rho\Omega^2\varrho,$$

вытекающего из общего уравнения деформации изотропного упругого тела

$$\frac{\mathrm{E}}{2\,(1+\nu)}\left[\Delta\vec{u}+\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}\right]=-\vec{f}$$

или

$$2\,(1-\nu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}-(1-2\nu)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}=-2(1+\nu)(1-2\nu)\vec{f}/\mathrm{E},$$

так как $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}=\Delta\vec{u}+\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}$.

10.4.3. Сила тяготения, действующая на единицу массы шара равна $-g\vec{r}/R$. Уравнение равновесия

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}-\frac{1-2\nu}{2\,(1-\nu)}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}=-\vec{f}\frac{(1+\nu)\,(1-2\nu)}{\mathrm{E}\,(1-\nu)}$$

принимает в этом случае вид

$$\frac{\mathrm{E}\,(1-\nu)}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\,\frac{d\left(r^2u_r\right)}{dr}\right)=\rho g\frac{r}{R}.$$

Ищем конечное внутри шара и удовлетворяющее условию $\sigma_{rr}\,(R)=0$ решение. Сравнить характер деформаций при

$$r<R\sqrt{\frac{3-\nu}{3\,(1+\nu)}}\qquad\text{и}\qquad r>R\sqrt{\frac{3-\nu}{3\,(1+\nu)}}.$$

10.4.4. Для изотропной линейно упругой среды

$$\varepsilon_r=\frac{1}{\mathrm{E}}(\sigma_r-2\nu\sigma_\theta),\quad \varepsilon_\theta=\frac{1}{\mathrm{E}}[(1-\nu)\sigma_\theta-\nu\sigma_r].$$

Выразив уравнение совместимости через напряжения

$$\frac{d}{dr}[(1-\nu)\sigma_\theta-\nu\sigma_r]+\frac{1+\nu}{r}(\sigma_\theta-\sigma_r)=0$$

и используя уравнение равновесия, получим

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r+2\sigma_\theta)=0.$$

Стало быть, $\sigma_r+2\sigma_\theta$ – постоянная, обозначим её $3A$. Далее,

$$\frac{d\sigma_\theta}{dr}=-\frac{1}{2}\frac{d\sigma_r}{dr},$$

так что

$$\frac{2}{3}\frac{d(\sigma_\theta - \sigma_r)}{dr} = \frac{d\sigma_r}{dr},$$

и уравнение равновесие принимает вид

$$\frac{d(\sigma_\theta - \sigma_r)}{dr} + \frac{3}{r}(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0.$$

Его решение

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{3B}{r^3},$$

где B – ещё одна константа. С учётом граничных условий

$$\sigma_r|_{r=a} = -p, \quad \sigma_r|_{r=b} = 0,$$

для напряжений в упругих стенках получим:

$$\sigma_r = -p\frac{(b/r)^3 - 1}{(b/a)^3 - 1},$$

$$\sigma_\theta = p\frac{(b/r)^3/2 + 1}{(b/a)^3 - 1}.$$

10.4.5. Здесь $\vec{u} = u_\varrho(\varrho)\vec{e}_\varrho$ ($\vec{e}_\varrho$ – вектор, перпендикулярный оси трубы). Из второй формы уравнения Ламэ следует, что $\mathrm{div}\vec{u} = \mathrm{const}$. Решение последнего ищется в виде $u_\varrho = a\varrho + b/\varrho$. Отличные от нуля компоненты тензора деформации

$$\varepsilon_{\varrho\varrho} = du_\varrho/d\varrho = a - b/\varrho^2, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = u_\varrho/\varrho = a + b/\varrho^2.$$

Постоянные a и b находятся из условий $\sigma_{\varrho\varrho}(R_1) = -p$, $\sigma_{\varrho\varrho}(R_2) = 0$:

$$a = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\mathrm{E}}, \quad b = \frac{pR_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{1+\nu}{\mathrm{E}}.$$

10.5. Кристаллы

10.5.2. В состоянии равновесия

$$\left.\frac{dU(R)}{dR}\right|_{R_0} = N\frac{d}{dR}\left(\frac{A}{R^n} - \frac{aq^2}{R}\right) = 0.$$

10.5.3. При сжатии кристалла $R_0 \to R$ выполняется работа

$$U(R) - U(R_0) = -\frac{Naq^2}{R_0}\left[\frac{R_0}{R} - 1 - \frac{1}{n}\left(\frac{R_0^n}{R^n} - 1\right)\right].$$

При этом

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^n - 1 \approx n\delta + \frac{n(n+1)}{2}\delta^2.$$

Продолжение расчёта приводит к результату.

10.5.6. Решение представляется набором волн с частотами

$$\omega = \omega_m|\sin(qa/2)|, \quad \omega_m = 2\sqrt{C/m}.$$

Из условия цикличности следует, что волновые числа удовлетворяют условию

$$\exp(\pm iqal) = 1.$$

Определяя число состояний dz в интервале частот $d\omega$ количеством соответствующих волновых чисел, приходим к ответу.

10.5.9. Исходные уравнения для смещений $\vec{u}_\pm$

$$M_+\frac{d^2\vec{u}_+}{dt^2} = -\kappa(\vec{u}_+ - \vec{u}_-) + e\vec{E}$$

и

$$M_-\frac{d^2\vec{u}_-}{dt^2} = -\kappa(\vec{u}_- - \vec{u}_+) - e\vec{E}$$

соединить в уравнение для относительных смещений $\vec{s} = \vec{u}_+ - \vec{u}_-$:

$$M\frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = -\kappa\vec{s} + e\vec{E}$$

(здесь M – приведённая масса). Явный учёт поляризации и переход к нормированному смещению $\vec{w} = \sqrt{N_0 M}\vec{s}$ дают систему уравнений

$$\frac{d^2\vec{w}}{dt^2} + \gamma_{11}\vec{w} - \gamma_{12}\vec{E} = 0,$$

$$\gamma_{12}\vec{w} + \gamma_{22}\vec{E} - \vec{P} = 0,$$
$$\nabla(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 0.$$

Пользуясь предварительными сведениями к главе, можно определить и коэффициенты γ:

$$\gamma_{11} = \omega_0^2 = \frac{\kappa}{M} - \frac{4\pi N_0 e^2(\epsilon_\infty + 2)}{9M},$$

$$\gamma_{12} = \omega_0\sqrt{\frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{4\pi}},\ \gamma_{22} = \frac{\epsilon_\infty - 1}{4\pi}.$$

В результате имеем

$$\frac{d^2\vec{w}}{dt^2} = -\omega_0^2\vec{w} + \omega_0\sqrt{\frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{4\pi}}\vec{E},$$

$$\vec{P} = \omega_0\sqrt{\frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{4\pi}}\vec{w} + \frac{\epsilon_\infty - 1}{4\pi}\vec{E}.$$

Осталось разделить решения на потенциальную и соленоидальную составляющие:

$$\frac{d^2\vec{w}_\parallel}{dt^2} = -\omega_0^2\frac{\epsilon_0}{\epsilon_\infty}\vec{w}_\parallel,$$

$$\frac{d^2\vec{w}_\perp}{dt^2} = -\omega_0^2\vec{w}_\perp.$$

10.5.10. По определению,

$$\langle E\rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp\left(-E_n/k_{\text{Б}}T\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-E_n/k_{\text{Б}}T\right)}.$$

Введя обозначение $q = \exp\left(-h\nu/k_{\text{Б}}T\right)$, преобразовать это выражение к виду

$$\langle E\rangle = h\nu q\frac{d(1-q)^{-1}/dq}{(1-q)^{-1}}.$$

Выполняя дифференцирование и возвращаясь к прежней переменной, получим

$$\langle E\rangle = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_{\text{Б}}T) - 1}.$$

Глава 11. Вязкоупругие и неупругие среды

11.1. Вязкоупругие среды

11.1.1. Механические аналоги вязкоупругих моделей строятся путём разных соединений двух элементов: упругого, для которого $\sigma = \mathrm{E}\varepsilon$, и вязкого, для которого $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$ (условные изображения их приведены выше).

11.1.15. Пока приложена нагрузка (то есть в интервале $(0, 2\tau_1)$), справедливо решение предыдущей задачи. При $t > 2\tau_1$ изменение деформации описывается уравнением $\dot{\varepsilon} + \varepsilon/\tau_1 = 0$.

11.1.16. Определяющее уравнение в данном случае имеет вид

$$\dot{\sigma} + \sigma/\tau = \eta\ddot{\varepsilon} + 3\mathrm{E}\dot{\varepsilon} + (\mathrm{E}/\tau)\varepsilon = 3\mathrm{E}\varepsilon_1/t_1 + \mathrm{E}\varepsilon_1 t/\tau t_1.$$

11.2. Упругопластичная среда

11.2.2. Учесть, что при пластической деформации объём сохраняется.

11.2.4. Рассмотрим образец прямоугольной формы объёмом $V = S_0 l$. При бесконечно малой деформации $dV = Sdl + ldS$. Из несжимаемости пластического материала при деформации следует

$$Sdl + ldS = 0 \tag{1}$$

и

$$\varepsilon = \ln(S_0/S).$$

Характерным для $F - \varepsilon$-диаграмм для мягкой стали является наличие максимума, после которого кривая начинает спадать. В точке максимума (ε_m)

$$\sigma\frac{dS}{d\varepsilon} + S\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует $\sigma_0\varepsilon_m^n = \sigma_0 n\varepsilon_m^{n-1}$.

11.2.11. Выразив (согласно определениям) ε_{ij} через компоненты вектора $\vec{u}$, убедиться, что

$$u_1 = u_1(x_2, x_3), \quad u_2 = u_2(x_1, x_3), \quad u_3 = u_3(x_1, x_2).$$

Из $\varepsilon_{12} = 0$ следует, что

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = f_1(x_3).$$

Отсюда

$$u_1 = -f_1(x_3)x_2 + f_2(x_3), \quad u_2 = f_1(x_3)x_1 + f_3(x_3),$$

где f_2 и f_3 – произвольные функции третьей (вдоль оси) координаты. Продифференцировав ε_{13} и ε_{23} по этой переменной, видим, что вторые производные всех трёх функций f равны нулю. Отсюда следует, что

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3 - C_1 x_2 + C_2 x_3 + C_3,$$

$$u_1 = \alpha x_1 x_3 + C_1 x_1 + C_4 x_3 + C_5,$$

$$u_1 = f(x_1, x_2) - C_4 x_2 - C_2 x_1 + C_6.$$

Исключив отсюда слагаемые, относящиеся к вращению стержня как абсолютно твёрдого тела, приходим к ответу.

11.2.14. В натуральном (логарифмическом) представлении

$$\varepsilon_r = \ln\left(1 + \frac{du}{dr}\right) \quad \text{и} \quad \varepsilon_t = \ln\left(1 + \frac{u}{r}\right),$$

где u – смещение точки в радиальном направлении ($r \to r' = r + u$). Исключая из приведённых уравнений u, приходим к ответу.

11.2.16. Поскольку $\sigma = f(\dot\varepsilon)$ и $\dot\varepsilon = g(r, t)$,

$$\frac{d\sigma_r}{d\dot\varepsilon} = \frac{\partial\sigma_r/\partial r}{\partial\dot\varepsilon/\partial r} = -\frac{2}{3}\,\frac{\sigma}{\dot\varepsilon}.$$

Интегрируя последнее уравнение с учётом граничных условий

$$\sigma_r = -p \quad \text{при} \quad r = a \qquad \text{и} \qquad \sigma_r = 0 \quad \text{при} \quad r = b,$$

получим

$$p = \frac{2}{3}\int\limits_{\dot{\varepsilon}_b}^{\dot{\varepsilon}_a} \frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}} d\dot{\varepsilon},$$

где

$$\dot{\varepsilon}_b = \frac{(a/b)^3 e^{(3/2)\varepsilon_a}}{1 + (a/b)^3 (e^{(3/2)\varepsilon_a} - 1)} \dot{\varepsilon}_a.$$

11.3. Вязкопластичные среды

11.3.1. Исходное уравнение имеет вид

$$\frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_\theta + \rho\Omega^2 r^2 = 0.$$

11.3.4. Разрешить уравнение Бэйли-Нортона относительно времени и подставить полученное выражение $t = t(\varepsilon^{\text{плз}})$ в правую часть исходного уравнения.

11.3.5. Интегрированием дифференциальных уравнений равновесия привести их к виду

$$\sigma_r = -p - \frac{1}{\sqrt{3}} \int\limits_{v_0}^{v} s(v) v^{-1} dv,$$

$$\sigma_\theta = -p - \frac{1}{\sqrt{3}} \int\limits_{v_0}^{v} s(v) v^{-1} dv + \frac{2}{\sqrt{3}} s(v),$$

$$\sigma_z = -p - \frac{1}{\sqrt{3}} \int\limits_{v_0}^{v} s(v) v^{-1} dv + \frac{1}{\sqrt{3}} s(v).$$

Подстановка явного выражения для $s(v)$ с учётом граничных условий приводит к ответу.

Часть III

ОТВЕТЫ

Глава 1. Материальная точка в заданном внешнем поле

1.1. Координаты, скорости, ускорения

1.1.2. a) $x = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t + \frac{4}{3}$;

b)$x = (t-1)[\ln(t-1) - 1] + 1$;

c) $x = b\sin t$;

d) $x = b\cos(t+\beta)$;

e) $x = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$;

f) $x = (b/4)e^{-3t}(4\cos(4t) + 3\sin(4t))$;

g) $x = (2/3)(\cos t - \cos(2t))$.

1.1.3. $x = 2c^2 + bt - 2c\sqrt{c^2 + bt}$.

1.1.4. $v(t) = v_0$, движение равномерное.

1.1.5. $\vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y$.

1.1.6. $v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}$.

1.1.7. $a_\rho = \ddot{\rho} + \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + (1/\rho)d(\rho^2\dot{\varphi})/dt, \quad a_z = \ddot{z}$.

1.1.8. $\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z$,

$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z$,

$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y, \dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

1.1.9. $v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi}$.

1.1.10. $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$,

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = (1/r)d(r^2\dot{\theta})/dt - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2$,

$a_\varphi = r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\sin\theta\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} = (1/r\sin\theta)d(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi})/dt$.

1.1.14. $v_x = -\frac{k}{c}x^2, \quad a_x = \frac{2k^2}{c^2}x^3$.

1.1.15. а) $a_y = k\sin(kt)$;

б) $a_x = \dfrac{c}{2b}(ct^2 + y)$;

в) $a_x = -\dfrac{c}{2}\left[\dfrac{2y\cos(2t)}{x} + \dfrac{c^3\sin^2(2t)}{2x^3}\right]$;

г) $a_y = -\dfrac{2tx}{y} - \dfrac{t^4}{y^3}$;

д) $a_x = -\dfrac{b^2}{c^2}\left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{b^2t^2}{x^3}\right)$;

е) $v_y = (1-2t)/b$.

1.1.17. $\vec{a} = -4\sigma^2\varrho^{-3}\vec{e}_\varrho$.

1.1.21. 1. Дифференцированием $x(t)$ и $y(t)$ по времени найти v_x, v_y, a_x и a_y.

2. Найти $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

3. Дифференцированием абсолютной величины скорости по времени найти тангенциальную составляющую: $a_\tau = dv/dt$.

4. Определить нормальную составляющую по формуле

$a_n = \dfrac{v_x a_y - v_y a_x}{v}$.

1.1.22. $a_\tau = \dfrac{(b^2 - c^2)\sin t\cos t}{\sqrt{b^2\sin^2 t + c^2\cos^2 t}}$,

$a_n = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2\sin^2 t + c^2\cos^2 t}}$.

1.2. Силы

1.2.4. Нет.

1.2.5. Да.

1.2.8. $\omega = \sqrt{[U''(a) + 3L^2/ma^4]/m}$, где a – корень уравнения

$U'(a) = \dfrac{L^2}{ma^3}$.

1.2.9. $F_r = -mAB^2t, \quad F_\varphi = 2mAB, \quad F = mAB\sqrt{4 + B^2t^2}$.

1.2.10. $\vec{F} = -\dfrac{L}{mr^3}\vec{e}_r.$

1.2.11. $\phi = (2\pi/3)G\rho r^2, \quad \vec{g} = -(4/3)\pi G\rho\vec{r}.$

1.2.13. а) $\vec{g}(\vec{r}) = -\left[\dfrac{4\pi G}{r^2}\int\limits_0^r \rho(r)r^2 dr\right]\vec{e}_r;$

$$g_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{4\pi G}{r^2}\int\limits_0^r \rho(r_1)r_1^2 dr_1.$$

1.2.17. $\rho(\vec{r}) = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\delta(\vec{r} - \vec{r}_i).$

1.2.18. $\rho = \mathrm{const}/r.$

1.2.19. $\dfrac{F_{\text{СЛ}}}{F_{\text{ЗЛ}}} = \dfrac{m_{\text{С}}}{m_{\text{З}}}\left(\dfrac{F_{\text{ЗЛ}}}{F_{\text{СЛ}}}\right)^2 = 2.16.$

1.2.20. $\phi\,(r) = -\dfrac{Gm}{a}, \quad r < a; \qquad \phi\,(r) = -\dfrac{Gm}{r}, \quad r > a.$

1.2.22. $\phi\,(r) = \dfrac{Gm}{2R}\left[3 - \left(\dfrac{r}{R}\right)^2\right], \quad r < R;$

$$\phi\,(r) = -\frac{Gm}{r}, \quad r > R.$$

1.2.24. $\phi(\vec{r}) \sim G\left(\dfrac{m}{r} + \dfrac{\vec{\mu}\vec{r}}{r^3}\right), \quad m = \int\limits_A \rho(\vec{r})dV, \quad \vec{\mu} = \int\limits_A \vec{r}\rho(\vec{r})dV,$

$$\vec{G}(\vec{r}) \sim -\frac{G(m\vec{r} + 3(\vec{\mu}\vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{\mu})}{r^3}.$$

1.2.27. $\phi(r) = -\dfrac{4G\lambda a}{r+a}\mathrm{K}\left(\dfrac{2\sqrt{ra}}{r+a}\right).$

1.2.28. $\phi(r) \sim -G\dfrac{m}{r}\left[1 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{r}\right)^2\right], \quad r \to \infty, \quad m = 2\pi\lambda a.$

1.2.29. $\phi(z) = 2\pi G\sigma(|z| - \sqrt{a^2 + z^2}), \quad \sigma = m/\pi a^2.$

1.2.30. $g_z(z) = 2\pi G\sigma\left(\dfrac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \dfrac{z}{|z|}\right).$

1.2.31. $\phi(x) = -G\int_a^b \sqrt{\dfrac{1+[f'(\xi)]^2}{(x-\xi)^2+f^2(\xi)}}\lambda(\xi)d\xi.$

1.2.32. $\phi(x) = -G\lambda \ln\left|\dfrac{x-a+\sqrt{d^2+(x-a)^2}}{x+a+\sqrt{d^2+(x+a)^2}}\right|.$

1.2.34. $g_z(z) = -2\pi G\lambda z a(z^2+a^2)^{-3/2}.$

1.2.35. $g_z(z) = 2\pi G\sigma a\left[\dfrac{1}{\sqrt{(z+h/2)^2+a^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{(z-h/2)^2+a^2}}\right].$

1.2.36. $\phi(z) = 2\pi G\rho\int_{z_1}^{z_2}\left[|z-\zeta| - \sqrt{(z-\zeta)^2+f^2(\zeta)}\right]d\zeta.$

1.2.37. $g_z(z) = 2\pi G\rho\int_{z_1}^{z_2}\left[\dfrac{z-\zeta}{|z-\zeta|} + \dfrac{z-\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)^2+f^2(\zeta)}}\right]d\zeta.$

1.2.39. $$\vec{g} = \begin{cases} 0 & r < r_1; \\ -\dfrac{4\pi\rho G}{3r^2}(r^3-r_1^3)\vec{e}_r, & r_1 < r < r_2; \\ -\dfrac{4\pi\rho G}{3r^2}(r_2^3-r_1^3)\vec{e}_r, & r > r_2. \end{cases}$$

1.2.40. $$\phi(z) = \pi G\rho\Bigg[2hz - (z+h/2)\sqrt{(z+h/2)+a^2} \;+$$
$$+\,(z-h/2)\sqrt{(z-h/2)+a^2} + a^2\ln\left|\dfrac{z-h/2+\sqrt{(z-h/2)^2+a^2}}{z+h/2+\sqrt{(z+h/2)^2+a^2}}\right|\Bigg],$$
$|z| > h/2.$

1.2.41. $$\phi(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ 4\pi G\sigma a\ln(r/a), & r > a. \end{cases}$$

$$g(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ 4\pi G\sigma(r/a)\vec{e}_r, & r > a, \end{cases} \quad \vec{e}_r \perp OZ.$$

1.2.42. $$\phi_{\text{верх}}(P) = 2\pi G\rho\left(\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)R^2,$$

$$\phi_{\text{нижн}}(P) = 2\pi G\rho\left(\frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{2}-8}{3}\right)R^2,$$

$$\phi_{\text{верх}}(Q) = \phi_{\text{нижн}}(Q) = -(2/3)\pi G\rho R^2.$$

1.2.43. $\phi = 2\pi G\rho \left\{ \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{1}{3(R-h)} \left[h^3 - (2Rh - h^2)^{3/2} \right] \right\}.$

1.2.44. $\phi = -\pi G\rho R^2.$

1.2.45. $\phi = -Gm/R.$

1.2.47. $\phi = \pi G\rho h \left[h - (4/3)\sqrt{2Rh} \right].$

1.2.48. $\vec{g} = 0, \quad \phi = 2\pi G\rho \left[\dfrac{(2a+R)R}{2} - \dfrac{(R+a)^3 - (R^2+a^2)^{3/2}}{3a} \right].$

1.2.51. $\phi(x) = -G\lambda \ln \dfrac{a - x\cos\varphi + \sqrt{x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi}}{|x| - x\cos\varphi}.$

1.2.52. $\phi(x) = -G\lambda \ln[x/(x-a)], \quad |x| > a, \quad \varphi = 0.$

$\phi(x) = -G\lambda \ln \left[\left(a + \sqrt{a^2 + x^2} \right) / |x| \right], \quad x \neq 0, \quad \varphi = \pi/2.$

1.2.53. $\phi(x) = \dfrac{2G\lambda_0}{|x|} \left[|R - x| - |R + x| \right].$

1.2.54. $\phi(r,\theta) = -Gm \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{l^{2k}}{2k+1} \dfrac{P_{2k}(\cos\theta)}{r^{2k+1}}.$

1.2.55. $\dfrac{a_{\text{от}}}{a_{\text{пр}}} = 7{,}1 \cdot 10^{-23} \sim 10^{-22}.$

1.2.56. $F = \dfrac{Km}{r^2} \dfrac{1}{[1 + (l/r)^2]^{3/2}}.$

1.2.57. $F = -m(\mu a)^2/x^3.$

1.2.58. $\vec{F} = -m \left(\dfrac{2\sigma}{ab} \right)^2 \vec{r}.$

1.2.59. $\vec{F} = -\dfrac{m\,(2\sigma)^2}{p} \dfrac{1}{r^2} \vec{e}_r.$

1.2.60. $\varphi(r) = (Z-1)e/r + (e/r_0 + e/r)\exp\{-2r/r_0\}.$

1.2.61. $\rho(r) = A \left[\delta(\vec{r}) - \dfrac{\alpha^2}{4\pi r} e^{-\alpha r} \right].$

1.3. Основные теоремы о движении точки

1.3.1. 204 м, 20,1 с.

1.3.2. $p = \dfrac{2mL}{St^2}$.

1.3.6. $W(t) = \sigma v^2,\ \dot{T} = \sigma v^2/2$.

1.3.8. Нет.

1.3.9. $v_0 = 2,2 \cdot 10^5$ м/с.

1.3.10. $v^2 = \dfrac{\gamma}{R}\left\{1 + \dfrac{2\sqrt{2Rh^3}}{R^2} + \dfrac{1}{(R-h)R^2}\left[(2Rh - h^2)^{3/2} - h^3\right]\right\}$,

$h = R - \sqrt{R^2 - a^2}$.

1.3.11. $T = (m/2)\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)$, $\vec{L} = m[-\rho z\dot{\varphi}\vec{e}_\rho + (z\dot{\rho} - \rho\dot{z})\vec{e}_\varphi + \rho^2\dot{\varphi}\vec{e}_z]$.

1.3.12. $T = (m/2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2), \qquad L^2 = m^2r^4\dot{\varphi}^2$.

1.3.13. $T = (m/2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$, $L_z = mr^2\dot{\varphi}$.

1.3.14. Вектор $\vec{\Lambda}$ направлен вдоль большой полуоси эллипса в точку перигея (ближайшую точку эллипса), его модуль $\Lambda = \alpha\varepsilon$.

1.4. Одномерное движение

1.4.2. $x\,(t) = \dfrac{F_0}{m\Omega^2}\,(\Omega t - \sin\Omega t)$.

1.4.3. $x\,(t) = \dfrac{mv_0}{b}\left(1 - e^{-(b/m)t}\right)$.

1.4.4. $v\,(t) = \sqrt{mg/b}\ \mathrm{th}\left(\sqrt{bg/m}\,t\right)$,

$x\,(t) = (m/b)\ln\mathrm{ch}\left(\sqrt{bg/m}\,t\right)$.

1.4.5. $x(t) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{m}}\left\{t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\right\}$.

1.4.6. а) $x(t) = x_0e^{\alpha t}$;

б) $x(t) = x_0\mathrm{ch}\alpha t + (v_0/\alpha)\mathrm{sh}\alpha t$.

1.4.7. $x(t) = \left[(\beta+1)\left\{\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}t + \dfrac{x_0^{\beta+1}}{\beta+1}\right\}\right]^{\frac{1}{\beta+1}}, \qquad \beta = \dfrac{n-1}{2}.$

1.4.8. $x = \dfrac{x_0}{\cos^2(\alpha t/2)}.$

1.4.10. $v(t) = (a/b)t - (ma/b^2)[1 - e^{-bt/m}].$

1.4.11. $v(t) = A\left(e^{-Bt^2} + Bt^2 - 1\right), \quad A = 2ma/b^2, \quad B = b/(2m).$

1.4.12. а) $\tau = \dfrac{\pi}{2\sqrt{k}}$; б) $\tau = \dfrac{b^2}{\sqrt{k}}.$

1.5. Одномерные колебания

1.5.2. $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad A = \sqrt{2\mathcal{E}/k}.$

1.5.3. $\tau(\mathcal{E}) = \dfrac{2\sqrt{m\pi/2}\Gamma(1/2\nu)}{\nu A\Gamma\left(1/2\nu + 1/2\right)}\mathcal{E}^{(1/\nu-1)/2}.$

1.5.4. $\tau = 4\sqrt{l/g}\mathrm{K}\left(\sin\varphi_0/2\right) \approx 2\pi\sqrt{l/g}\left(1 + \varphi_0^2/16 + ...\right).$

1.5.5. $U_1(x) = \dfrac{2\pi^2 m}{\tau_1^2}x^2; \qquad U_2\left(x\right) = 4\sqrt{2m}\left|x\right|.$

1.5.6. $x(t) = x_0\cos\left(\omega_0 t\right) + \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}.$

1.5.7. $x(t) = ce^{-(\beta/2)t}\cos\left(\omega t - \varphi\right), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\beta/2)^2},$
$\beta = b/m < 2\omega_0.$

1.5.8. $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(\beta\Omega\right)^2}}, \quad \varphi = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right).$

1.6. Задачи с разделяющимися переменными

1.6.1. $R = 2(a_\tau/a_n)s.$

1.6.2. $v_x = v_{0x}e^{-\beta t}, \quad v_z = (v_{0z} + g/\beta)\, e^{-\beta t} - g/\beta,$
$\beta t_m = \ln(1 + v_{z0}\beta/g), \quad \beta = b/m.$

1.6.3. $x = (v_{0x}/\beta)\left(1 - e^{-\beta t}\right), \quad z = (v_{0z} + g/\beta)\left(1 - e^{-\beta t}\right)/\beta - (g/\beta)\ t.$

1.6.4. $x = A\cos(\omega t - \alpha) + \xi, \quad y = A\sin(\omega t - \alpha) + \eta, \quad z = v_{0z}t + z_0,$
$\alpha = \operatorname{arctg}(v_{0x}/v_{0y}), \quad A = v_\perp/\omega, \quad \omega_H = \dfrac{|e|H}{mc}.$

1.6.5. $T = (m/8)(36x^2\dot{E}e/m)^{2/3}.$

1.6.6. $\theta = \operatorname{arctg}(eEx/mv_0^2), \quad y = eEx^2/2mv_0^2.$

1.6.7. $\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = eE/m - \omega v_x,\ \dot{v}_z = 0,\ \omega = \omega_H = eH/mc.$

1.6.8. $v_x = (cE/H)(1 - \cos\omega t) + v_{0x}\cos\omega t + v_{0y}\sin\omega t,$
$v_y = (cE/H - v_{0x})\sin\omega t + v_{0y}\cos\omega t,$
$v_z = v_{0z}.$

1.6.9. $x = c(E/H)t + (1/\omega)(v_{0x} - cE/H)\sin\omega t + (v_{0y}/\omega)(1 - \cos\omega t),$
$y = (1/\omega)(cE/H - v_{0x})(1 - \cos\omega t) + (v_{0y}/\omega)\sin\omega t,$
$z = v_{0z}t.$

1.6.10. $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = eE_r + \dfrac{e}{c}(v_\varphi H_z - v_z H_\varphi),$
$m\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = eE_\varphi + \dfrac{e}{c}(v_z H_r - v_r H_z),$
$m\ddot{z} = eE_z + \dfrac{e}{c}(v_r H_\varphi - v_\varphi H_r).$

1.6.11. $\omega_{||} = \omega_0, \quad \omega_\perp = \sqrt{\omega_0^2 + (\omega_H/2)^2} - \omega_H/2.$

1.6.12. $T = 3ka^3/2, \quad L = \sqrt{3mka^5}.$

1.6.13. $\omega = \sqrt{15ka/m}.$

1.6.14. $a = \left(\dfrac{L^2}{m\alpha\gamma}\right)^{1/(2-\gamma)}, \quad U_{\text{эф}}(a) = -\alpha(1 - \gamma/2)\left(\dfrac{m\gamma\alpha}{L^2}\right)^{\gamma/(2-\gamma)}.$

1.6.15. $\gamma = 1: \quad r_{1,2} = L^2\left[m\alpha\left(1 \pm \sqrt{1 - 2\,|\mathcal{E}|\,L^2/(m\alpha^2)}\right)\right]^{-1},$

$\gamma = 2: \quad r_1 = 0, \quad r_2 = \sqrt{(\alpha - L^2/2m)/|\mathcal{E}|}\ ,$

$\gamma = 4: \quad r_1 = 0, \quad r_2 = \left[L^2/(4m\alpha) + \sqrt{|\mathcal{E}|/\alpha + L^4\big/(4m\alpha)^2}\right]^{-1/2}.$

1.7. Движение в кулоновском (ньютоновом) поле

1.7.1. $p = \dfrac{2r_а r_п}{r_а + r_п}, \quad \varepsilon = \dfrac{r_а - r_п}{r_а + r_п}, \quad a = \dfrac{r_а + r_п}{2}.$

1.7.3. $a = \dfrac{\alpha}{2|\mathcal{E}|}, \quad b = \dfrac{L}{\sqrt{2m|\mathcal{E}|}}.$

1.7.4. $\tau = \pi\alpha\sqrt{\dfrac{m}{2|\mathcal{E}|^3}}.$

1.7.6. $\vec{a} = -\dfrac{L^2}{p\, m^2 r^2}\ \vec{e}_r.$

1.7.7. $d^2 I/dt^2 = T + \mathcal{E}_0.$

1.7.9. $h = 35\ 800$ км.

1.7.10. $h = 180$ км.

1.7.11. $b \approx 0.609$ а.е.

1.7.12. $m = (\tau/\tau_1)^2 (a_1/a)^3 m_0.$

1.7.15. $a = r_0, \quad b = v_0/\omega_0.$

1.7.16. $a = \dfrac{\alpha}{2\,|\mathcal{E}|}, \quad b = \dfrac{L}{\sqrt{2m\,|\mathcal{E}|}}.$

1.7.17. $\tau = \dfrac{\pi\alpha\sqrt{m/2}}{|\mathcal{E}|^{3/2}}.$

1.7.18. $t(\varphi) = (\tau/2\pi)\left[\varphi - 2\varepsilon\sin\varphi + (3/4)\varepsilon^2\sin 2\varphi + ...\right].$

1.7.19. $\tau = \sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho}}.$

1.7.22. $v = \sqrt{(K/p)(1 + 2\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2)}.$

1.7.23. $v_r = \varepsilon\sqrt{K/p}\sin\varphi, \quad v_\perp = \sqrt{K/p}(1 + \varepsilon\cos\varphi).$

1.7.24. $v_{кр}(r) = \sqrt{K/r}, \quad v_{пар} = \sqrt{2K/r}.$

1.7.25. $\cos\theta = \dfrac{\varepsilon\sin\varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\varphi}}.$

1.7.26. $r_1 = 3r_0$.

1.7.27. $\langle r\rangle_{2\pi} = b$.

1.7.28. $\langle r\rangle_{\tau} = a(1+\varepsilon^2/2)$.

1.7.29. $\langle r\rangle_{\lambda} = a$.

1.7.31. $\langle U\rangle_{\tau} = -\alpha/a$.

1.7.33. $v_0 = \sqrt{gR}/\cos\beta$.

1.7.34. $\beta = 45^\circ$.

1.7.35. $\ddot{\theta} = \dfrac{2\dot{v}}{3r_0} = \dfrac{2a_0}{3r_0}\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta_0}\sin\theta$.

1.8. Рассеяние частиц в центрально-симметричном поле

1.8.1. $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = R^2/4$, $\dfrac{d\sigma}{d\theta} = (\pi R^2/2)\sin\theta$.

1.8.2. $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = \dfrac{2}{mv_0^2}\dfrac{\pi^2\alpha\,(\pi-\theta)}{\left[\theta\,(2\pi-\theta)\right]^2\sin\theta}$.

1.8.4. $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\dfrac{\alpha}{4\mathcal{E}}\right)^2\dfrac{1}{\sin^4(\theta/2)}$, $\quad \dfrac{d\sigma}{d\theta} = \pi\left(\dfrac{\alpha}{2\mathcal{E}}\right)^2\dfrac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)}$.

1.8.5. $\sigma(\theta>\pi/2) = \pi\left(\dfrac{\alpha}{2\mathcal{E}}\right)^2$.

1.8.7. $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{\alpha n}{mv_0^2}B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{n+1}{2}\right)\right]^{2/n}\theta^{-2(1+1/n)}$.

1.8.8. $\dfrac{d\sigma}{d\theta} = \pi\left(\dfrac{\alpha}{2\mathcal{E}}\right)^2\dfrac{\cos[(\theta+\eta)/2]}{\sin^3[(\theta+\eta)/2]}$.

1.8.9. $\theta < 2\arctan\left[\dfrac{2\mathcal{E}R}{|\alpha|}\sqrt{1+\dfrac{\alpha}{R\mathcal{E}}}\right]$, $\sigma_{\text{пад}} = \pi R^2\left(1+\dfrac{\alpha}{R\mathcal{E}}\right)$.

1.9. Движение точки, ограниченное связями

1.9.2. $a = \dfrac{m_1 - m_2 + \frac{d}{R} m\cos\varphi}{m_1 + m_2 + \frac{I_0}{R^2}}$.

1.9.4. $F'_x = -(mg/2)\sin 2\alpha, \quad F'_z = mg\cos^2\alpha$.

1.9.5. $\vec{r}_1 = 4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - (1/3)\vec{e}_z, \quad \vec{r}_2 = \vec{e}_z$.

1.9.6. $z = 1$.

1.9.7. $\varphi(r) = \varphi_0 + \displaystyle\int \frac{L_0 d\rho}{\rho\sqrt{2m[\varepsilon_0 - mgf(\rho)]r^2 - L_0^2}}$.

1.9.8. $v_0 = \sqrt{gr_0 f'(r_0)}$.

1.9.9. $F'_x = -mv_{0y}\omega\cos(\omega t), \quad F'_y = -mv_{0y}\omega\sin(\omega t), \quad \omega = v_{oy}/r_0$.

1.9.10. $\tau = \pi R/(2v\cos\alpha)$.

1.9.11. $v_0 = z_0\sqrt{\dfrac{2g}{z_{\text{м}} + z_0}}$.

1.9.12. $x = 0, \quad y = \pm mg/(2k), \quad z = mg/(2k)$;

$x = \pm 2mg/(5k), \quad y = 0, \quad z = mg/(5k)$.

1.9.13. $a + \delta < r_3 = \sqrt[3]{\gamma m(R + a + \delta)/g} < a + \delta + 2R$.

1.9.14. $F'_\rho = -mg\,\mathrm{sh}\left[2k(l - s)/a\right], \quad F'_z = mg$.

1.9.15. $\omega_0^2 \geq 5g/l$.

1.10. Движение в неинерциальной системе отсчёта

1.10.2. $x = a\cos(\Omega t - \alpha) + bt\cos(\Omega t - \beta)$,

$y = -a\sin(\Omega t - \alpha) - bt\sin(\Omega t - \beta)$.

1.10.3. $x = x_0\ \mathrm{ch}(\Omega t), \quad N_y = 2m\Omega^2 x_0\ \mathrm{h}(\Omega t)$.

1.10.4. $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + \dfrac{ma}{k}$.

1.10.5. $\vec{v} = \Omega R(-\sin\theta, \cos\theta, -\sin\theta), \quad v = \Omega R\sqrt{1+\sin^2\theta}$.

1.10.6. $\vec{a} = -\Omega^2 R(2\,\sin 2\theta,\, 2\cos 2\theta,\, \cos\theta)$.

1.10.7. $d^2\theta/dt^2 = -\Omega^2\sin\theta$ – колебания математического маятника.

1.10.8. $N = mR\left[\Omega^2\cos\theta + (\dot\theta+\Omega)^2\right]$.

1.10.9. $d^2\theta/dt^2 = -(\Omega^2+\alpha)\sin\theta$.

1.10.12. $u = x + iy = \left(Ae^{-i\omega_0 t} + Be^{i\omega_0 t}\right)e^{-it\Omega}, \quad \omega_0 = \sqrt{g/l}$.

1.10.13. $y = \dfrac{\Omega\cos\psi}{3\sqrt{g}}\,(2h)^{3/2}$.

1.10.14. $\tau = \sqrt{g/\sqrt{g^2+a^2}}\tau_0$.

Глава 2. Системы материальных точек

2.1. Теоремы о движении системы материальных точек

2.1.1. $U_{AB} = U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24}$,

$$\mathcal{E}_A^* = \left[\frac{m_1 v_1^{*2}}{2} + \frac{m_2 v_2^{*2}}{2}\right]_A + U_{12},$$

$$\mathcal{E}_B^* = \left[\frac{m_3 v_3^{*2}}{2} + \frac{m_4 v_4^{*2}}{2}\right]_B + U_{34}.$$

Нижний индекс у кинетической энергии показывает, относительно центра масс какой системы она вычисляется.

2.1.15. $\vec{r}_i = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t + \vec{A}_i\cos\omega t + \vec{B}_i\sin\omega t, \quad \omega = \sqrt{k\sum\limits_i m_i}$.

2.2. Собственные характеристики системы

2.2.1. $N = mI.$

2.2.2. $\ddot{N} = 2m(2T + U).$

2.2.5. $R < \sqrt{\dfrac{3AT}{4\pi\gamma\vec{\rho}}},$

$$t \sim \frac{1}{\sqrt{(2\pi/3)\gamma\vec{\rho}}}.$$

2.2.9. $U = -\dfrac{3\gamma m^2}{5R}.$

2.2.10. $W = -Z^2 e^2/a_0.$

2.2.12. $K = (5/8)e^2/r_0.$

2.2.13. $K_{aB} = \dfrac{-e^2}{R}\left\{1 - (1 + R/a_0)e^{-2R/a_0}\right\}.$

2.2.14. $U = K_{aA} + K_{bB} + K_{aB} + K_{bA} + K_{ab} + K_{AB} =$

$$= -\frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{R}\left[1 + \frac{5}{8}\frac{R}{a_0} - \frac{3}{4}\left(\frac{R}{a_0}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{R}{a_0}\right)^3\right]e^{-2R/a_0}.$$

2.2.15. $\langle T\rangle(k/2)\left\langle U\right\rangle.$

2.2.16. $\langle T\rangle = (-1/2)\langle U\rangle - (e/(2mc))\vec{H}\langle T\vec{L}\rangle.$

2.2.17. $\langle T\rangle = (1/2)\left\langle \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r}_i \nabla_i U\right\rangle.$

2.2.18. $\dfrac{2\gamma m_{\mathrm{C}} m_a}{5k_{\mathrm{Б}} R_{\mathrm{C}}} \sim 10^7$ K.

2.2.20. $m_i = \dfrac{4\pi a^2 a_j}{\gamma\tau^2}, \quad j \neq i.$

2.2.23. $m\dot{\vec{v}} = \dot{m}\vec{u} + \vec{F}$ (здесь $\dot{m} < 0$).

2.2.25. а) $z = (u/\alpha)\left[(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) + \alpha t\right] - gt^2/2,$

б) $z = (\alpha u - g)\,t^2/2.$

2.2.26. $T_{\max} = 2mu^2$.

2.2.27. $p_{\max} = mu$.

2.2.28. $h = \dfrac{u(\alpha u - g)}{2\alpha g} Z^2$, Z – число Циолковского.

2.2.29. $Z = 1,5$.

2.2.30. $\left|\dfrac{dm}{dt}\right| = \dfrac{m_0 g}{u} e^{-gt/u}$.

2.2.31. $u \ln(m_0/m) = at + (gR/2)\left[\dfrac{t}{R + at^2/2} + \sqrt{\dfrac{2}{Ra}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a}{2R}}\right) t\right]$.

2.2.32. $m(t) = \dfrac{[vudF_c/dv + (v-u)F_c(v)]}{ug}$.

2.2.33. $a = -\dfrac{v(v+2u)g}{v^2 + vu + 3v + u}$.

2.3. Система двух тел

2.3.1. а) $A = \dfrac{2m}{m+M}\sqrt{\dfrac{Mgh}{2k}}, \qquad \omega = \sqrt{4k/m}$;

б) $A = \sqrt{\dfrac{m^2}{m+M}\dfrac{gh}{2k} + \dfrac{m^2 g^2}{(4k)^2}}, \quad \omega = \sqrt{\dfrac{4k}{m+M}}$.

2.3.2. $A = \dfrac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}, \qquad a = \dfrac{(M+m)g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$.

2.3.3. $A = jab(m/M)v_0 \sin 2\alpha$.

2.3.4. $\triangle E = \dfrac{mv_{10}^2}{2}\left[1 - \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right]$.

2.3.4. $\dfrac{d\sigma}{d\Omega_1} = \dfrac{R^2}{4}\left(2\xi\cos\theta_1 + \dfrac{1\xi^2\cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \xi^2\sin^2\theta_1}}\right)$.

2.3.6. $\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = R^2\cos\theta_2$.

2.3.7. $\dfrac{d\sigma}{dQ} = \dfrac{\pi R^2}{Q_{\max}}, \quad Q_{\max} = \dfrac{2m_2 v_{10}^2}{(1 + m_2/m_1)^2}$.

2.3.8. $\dfrac{d\sigma}{dQ} = \pi \left(\dfrac{\alpha}{\mu v_{10}^2}\right)^2 Q_{\max} \Big/ Q^2.$

2.4. Система трёх тел

2.4.1. $\sum\limits_{i=1}^{3} m_i \vec{r}_i = 0, \quad \sum\limits_{i=1}^{3} m_i \vec{v}_i = 0, \quad \sum\limits_{i=1}^{3} [\vec{r}_i,\, m_i \vec{v}_i] = \vec{L},$

$$(1/2)\left(\sum_{i=1}^{3} m_i v_i^2 - \gamma \sum_{i\neq j}^{3} m_i m_j / r_{ij}\right) = \mathcal{E}.$$

2.4.2. $\mu_2 \ddot{\vec{r}}_{21} = -\gamma \left(m_2 m_1 \vec{r}_{21}/r_{21}^3 - m_3 \mu_2 \vec{r}_{32}/r_{32}^3 + m_3 \mu_2 \vec{r}_{31}/r_{31}^3\right),$

$\mu_3 \ddot{\vec{r}}_{31} = -\gamma \left(m_3 m_1 \vec{r}_{31}/r_{31}^3 - \mu_3 m_2 \vec{r}_{23}/r_{23}^3 + m_3 \mu_2 \vec{r}_{21}/r_{21}^3\right),$

$\mu_2 = m_1 m_2/(m_1 + m_2), \quad \mu_3 = m_1 m_3/(m_1 + m_3),$

$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j.$

2.4.3. $\mu' \dot{\vec{v}}_{3\text{отн.}} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32},$
$\mu' = (m_1 + m_2) m_3/(m_1 + m_2 + m_3)$ – приведенная масса.

2.4.4. $T = (1/2) m \left[V^2 + (1/2) \sum\limits_{i=1}^{2} \sum\limits_{j>i}^{3} (m_i m_j/m)\, (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2\right],$
$m = m_1 + m_2 + m_3.$

2.4.7. $\mu'' c_1 \ddot{w} = \gamma w/|w|^3,$
$\mu'' = m_1/(m_1 m_2 c_{12}/|c_{12}|^3 + m_1 m_3 c_{13}/|c_{13}|^3)$ – приведенная масса.

2.4.8. $\ddot{\vec{s}}_i = -GM \dfrac{\vec{s}_i}{s_i^3} + m_i \vec{G},$

где $M = m_1 + m_2 + m_3$ и $G = \dfrac{\vec{s}_1}{s_1^3} + \dfrac{\vec{s}_2}{s_2^3} + \dfrac{\vec{s}_3}{s_3^3}.$

2.4.9. $\ddot{\vec{s}}_3 = -\dfrac{m_2 + m_3(1+\lambda)^{-2}}{m_2 + m_3(1+\lambda)} \quad \dfrac{GM\vec{s}_3}{s_3^3}$ (коллинеарное решение Эйлера).

Глава 3. Абсолютно твёрдое тело

3.1. Скорости и ускорения

3.1.2. $x = a\cos\theta\cos\varphi + c\sin\theta\cos\varphi,$

$y = a\cos\theta\sin\varphi + c\sin\theta\sin\varphi,$

$z = -a\sin\theta + c\cos\theta.$

3.1.3. $\vec{v}_A = 2v_0\vec{e}_x,\ \vec{v}_B = v_0\vec{e}_y,\ \vec{v}_C = 0,\ \vec{v}_D = -v_0\vec{e}_y.$

3.1.4. $v_P = \dfrac{v^2 t}{\sqrt{h^2 + (vt)^2}},$

$a_P = \dfrac{hv^2\sqrt{h^2 + 4v^2t^2}}{[h^2 + (vt)^2]^{3/2}}.$

3.1.5. $v_B = v\sin\varphi.$

3.1.6. $\Omega = \dfrac{v_A}{r_{AC}} = \dfrac{v_B}{r_{BC}}.$

3.1.7. $v_0 = \dfrac{v_1}{2}\left(1 + \dfrac{v_2}{v_1}\right).$

3.1.8. а) $\vec{v}_A = 0, \quad \dot{\vec{v}}_A = -\dfrac{Rr}{R-r}\dot{\varphi}^2\vec{e}_r;$

б) $\vec{v}_C = r\dot{\varphi}\vec{e}_t, \quad \dot{\vec{v}}_C = -\dfrac{r^2}{R-r}\dot{\varphi}^2\vec{e} + r\ddot{\varphi}\vec{e}_t.$

3.1.10. $\dot{\Omega} = 1/\sqrt{3}$ рад/с^2.

3.1.11. 4 см.

3.1.12. $v_{\text{макс}} = \sqrt{gRa/h}.$

3.1.13. $v = \sqrt{(\mu + \mathrm{tg}\theta)gr}.$

3.2. Геометрия масс

3.2.2. $\vec{R} = (a/2)\vec{e}_z$.

3.2.3. $I = \dfrac{2}{3} m R^2$.

3.2.4. $I_1 = I_2 = ml^2/12, \quad I_3 = 0$.

3.2.5. $I = (7/5)mR^2$.

3.2.6. $I = (1/2)m(R_1^2 + R_2^2)$.

3.2.7. $I_1 = I_2 = (1/2)mR^2, \quad I_3 = mR^2$.

3.2.8. $I_1 = I_2 = ml^2 + (2/5)mR^2, \quad I_3 = (2/5)mR^2$.

3.2.10. $$I = 2ma^2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$I' = 4ma^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.2.13. $I'_{ij} = I_{ij} + m\left(a^2\delta_{ij} - a_i a_j\right)$.

3.2.14. $I_x = mR^2/4 + mH^2/12, \quad I_z = mR^2/2$.

3.2.16. $I_x = m\left(b^2 + c^2\right)/5$.

3.2.18. $Z = (3/8)\,R, \quad I_1 = I_2 = (83/320)\,mR^2, \quad I_3 = (2/5)\,mR^2$.

3.2.19. $I_1 = ma^2/3, \quad I_2 = mb^2/3$.

3.2.22. $I_1 = (m/12)(a_2^2 + a_3^2)$.

3.2.23. $$I_1 = I_2 = \frac{3mh^2}{20}\left(\frac{1}{4} + \operatorname{tg}^2\alpha\right),$$

$$I_3 = \frac{3mh^2}{10}\operatorname{tg}^2\alpha.$$

3.2.24. $$I_x = \frac{mR^2}{4}[1 - (a/R)^4],$$

$$I_y = \frac{mR^2}{4}[1 - (a/R)^2 - (a/R)^4],$$

$$I_z = \frac{mR^2}{2}[1 - \frac{1}{2}(a/R)^2 - (a/R)^4].$$

Ось OX проходит через центры диска и отверстия, перпендикулярная ей ось OY также лежит в плоскости диска, ось OZ перпендикулярна плоскости диска, m_0 – начальная масса диска.

3.2.25. $$I_x = \frac{mR^2}{4}\left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^4\right] + \frac{mH^2}{12}\left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2\right],$$

$$I_y = \frac{mR^2}{4}\left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^4 - 4\left(\frac{ar}{R^2}\right)^2\right] + \frac{mH^2}{12}\left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2\right],$$

$$I_z = \frac{mR^2}{2}\left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^4 - 2\left(\frac{ar}{R^2}\right)^2\right].$$

3.2.26. $$I_x = \frac{127}{128}\frac{mR^2}{4} + \frac{7}{8}\frac{mH^2}{12},$$

$$I_y = \frac{111}{128}\frac{mR^2}{4} + \frac{7}{8}\frac{mH^2}{12},$$

$$I_z = \frac{119}{128}\frac{mR^2}{2}.$$

3.2.27. $I = \dfrac{196}{243}I_0.$

3.3. Статика твёрдого тела

3.3.1. $\dfrac{1-\mu}{1+\mu} \le \operatorname{tg}\theta \le \dfrac{1+\mu}{1-\mu}.$

3.3.2. $\operatorname{tg}\theta \ge \dfrac{1}{2\mu}.$

3.3.3. $\lambda(x) = Ae^{-x/b}.$

3.3.4. $T_{\text{макс}} \le \dfrac{\mu mg}{r/R + \mu\sqrt{1-(r/R)^2}}.$

3.3.5. $T = \lambda gy + \text{const}.$

3.3.6. Вертикальные проекции $R_B = 13,75$ Т, $R_D = -0,75$.

3.3.7. $R_D = 2000$ Н, $M_D = 3800$ Дж.

3.3.8. $n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln(Q/P)}{\mu\pi} - 1\right).$

3.3.9. $R_a = 3,1$ Т, $R_B = 2.9$ Т.

3.3.10. $F_3 = F_4 = F\sqrt{3}/2;\ F_5 = F/\sqrt{2}.$

3.4. Динамика твёрдого тела

3.4.1. $U = m\varphi\left(\vec{R}\right) - \dfrac{1}{2}I_{ij}\dfrac{\partial^2\varphi\left(\vec{R}\right)}{\partial X_i \partial X_j}.$

3.4.3. $\vec{R} = \left[\dfrac{m_1 e_2 - m_2 e_1}{(m_1 + m_2)\, l} E\cos\varphi + \mu\dot{\varphi}\right]\vec{r}.$

3.4.4. $\vec{R}_{1,3} = -\,(2/3)\, e\vec{E} \pm (m/2)\,\dot{\varphi}_0 \vec{r}, \quad \vec{R}_2 = (4/3)\, e\vec{E}.$

3.4.5. $\Omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2L\cos\alpha}}, \quad R_x = (3/4)\, mg\mathrm{tg}\alpha, \quad R_z = mg.$

3.4.6. $a = (2/3)\, g\sin\alpha, \quad T_{\text{в}}/T_{\text{п}} = 1/2.$

3.4.7. $a = \dfrac{m + M}{m + 2M} g\sin\alpha.$

3.4.8. $v = \sqrt{gh}.$

3.4.10. $[I + m(R^2 + b^2 - 2Rb\cos\varphi)]\ddot{\varphi} + mRb\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + mgb\sin\varphi = 0.$

Здесь I – момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр масс.

3.4.11. $\Omega = 2\sqrt{m_0 g/(mR + 6m_0 R)}.$

3.4.12. $\Omega = 2\sqrt{5m_0 g(R + a)/\left[5mR^2 + 4m_0 a^2 + 30m_0(R + a)^2\right]}.$

3.4.13. $H = \dfrac{\Omega^2}{4g}\left(R^2 + a^2 + \dfrac{h^2}{2\pi^2}\right).$

3.4.14. $\cos\theta = 10/17.$

3.4.15. $\cos\theta = 6/11.$

3.4.16. $\dot{\varphi} = 2\sqrt{g/a}.$

3.5. Вращение тела вокруг неподвижной оси

3.5.1. $a = -\frac{5}{7} g \sin\alpha, \quad t = \frac{14v_0}{5g\sin\alpha}.$

3.5.2. $X(t) = X_0 + V_0 t + \frac{eE}{2m} t^2, \quad I\ddot{\varphi} + eER\sin\varphi = 0.$

3.5.3. $\omega = \sqrt{\frac{2gl}{2l^2 + R^2}}.$

3.5.5. $\omega = \sqrt{15g/(26R)}.$

3.5.6. $\omega = \sqrt{120g/(83R)}.$

3.5.7. $\omega = \sqrt{mga \Big/ \left[m\,(R-a)^2 + I\right]},$

$R_x = m^2 ga\,(R-a)\,\varphi \Big/ \left[m\,(r-a)^2 + I\right],$

$R_z = mg.$

3.5.8. $T = \pi\sqrt{29R/g}.$

3.5.9. $T = \frac{3mh^2}{40}\dot{\theta}^2(1 + 5\cos^2\alpha).$

3.5.10. $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-a)}}.$

3.5.11. $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{19}{4}.$

3.5.12. $T = \pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}.$

3.6. Вращение тела вокруг неподвижной точки

3.6.1. $\Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi,$

$\Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi,$

$\Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}.$

3.6.2. $\Omega_x = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi,$
$\Omega_y = -\dot\psi \sin\theta \cos\varphi + \dot\theta \sin\varphi,$
$\Omega_z = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi.$

3.6.3. $\vec{e}_1 = (\cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi)\vec{e}_x +$
$+(\sin\varphi\cos\psi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi)\vec{e}_y + \sin\theta\sin\psi\vec{e}_z,$
$\vec{e}_2 = (-\cos\varphi\sin\psi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi)\vec{e}_x +$
$+(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi)\vec{e}_y + \sin\theta\cos\psi\vec{e}_z,$
$\vec{e}_3 = \sin\theta\varphi\vec{e}_x - \sin\theta\cos\varphi\vec{e}\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z.$

3.6.6. $\Omega_1' = \left(\sqrt{2}/2\right) a \sin bt, \quad \Omega_2' = \left(\sqrt{3}/2\right) a \cos bt, \quad \Omega_3' = a/2 + b;$
$\Omega_1 = \left(\sqrt{3}/2\right) b \cos at, \quad \Omega_2 = \left(\sqrt{3}/2\right) b \sin at, \quad \Omega_3 = a + b/2.$

3.6.7. $T = \dfrac{1}{2}\left[(I_1\cos^2\psi + I_2\sin^2\psi)\dot\theta^2 + I_3(\dot\varphi + \dot\psi)^2\right].$

3.6.8. $\dot\Omega_2 = \dfrac{1}{I_3\sqrt{I_1 I_3}}\sqrt{(2\mathcal{E}I_3 - L^2) - I_2\,(I_3 - I_2)\,\Omega_2^2}\times$
$\times\sqrt{(L^2 - 2\mathcal{E}I_1) - I_2\,(I_2 - I_1)\,\Omega_2^2}.$

3.6.9. $\theta = \theta_0, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0, \quad \psi = (\omega_0 - \omega\cos\theta)\,t + \psi_0,$
$\omega = \omega_0(I_3 - I)/I,\ I = I_1 = I_2.$

3.6.10. $L^2/2I_3 \le T \le L^2/2I_1,\ I_1 < I_3.$

3.6.11. $\vec\Omega_{\text{пр}} = -\,(e/2mc)\,\vec{B}.$

3.6.12. $3mgl\cos^2\theta - \left(2E - L_3^2/I_3 + L_3^2/I'\right)\cos\theta - mgl + L_z L_3/I_1 = 0.$

3.6.13. $\omega_3 > 2\sqrt{I'mgl}/I_3.$

3.6.15. $\omega \approx \sqrt{(I_3/I_1)\omega_0\Omega_0\cos\Theta}.$

Глава 4. Аналитическая динамика

4.1. Механическая система в обобщённых координатах

4.1.4. $Q_i = m\left[\sigma_i^2\ddot{q}_i + 2\sigma_i\dot{q}_i\sum_{j=1}^{3}(\partial\sigma_i/\partial q_j)\dot{q}_j - \sum_{j=1}^{3}\sigma_j(\partial\sigma_j/\partial q_i)\dot{q}_j^2\right]$.

4.1.5. $Q_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2), \quad Q_\varphi = m\rho(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}), \quad Q_z = m\ddot{z}.$

4.1.6. $Q_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2),$

$Q_\theta = mr(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2),$

$Q_\varphi = mr\sin\theta(r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2\cos\theta\dot{\theta}\dot{r}).$

4.1.7. $p_\rho = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}, \quad p_z = m\dot{z};$

$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}.$

4.1.8. $Q_p = F_\rho, \quad Q_\varphi = \rho F_\varphi, \quad Q_z = F_z;$

$Q_r = F_r, \quad Q_\theta = rF_\theta, \quad Q_\varphi = r\sin\theta F_\varphi.$

4.1.9. $\vec{F} = [\vec{v}, \mathrm{rot}\vec{A}]$.

4.1.11. В цилиндрических координатах

$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = 0, \quad d(\rho^2\dot{\varphi})/dt = 0, \quad \ddot{z} = -g;$

в сферических координатах

$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 = -g\cos\theta,$

$d(r^2\dot{\theta})/dt - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = gr\sin\theta,$

$d(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi})/dt = 0.$

4.1.14. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r^2}\left(1 + \frac{2r\ddot{r} - \dot{r}^2}{c^2}\right).$

4.1.15. $\mathcal{L} = (m/2)(\dot{z}^2/\cos^2\alpha + z^2\dot{\varphi}^2\mathrm{tg}^2\alpha) - mgz.$

4.2. Уравнения Лагранжа для системы материальных точек

4.2.1. $L = \frac{m}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) + \mu\frac{l^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - mgZ.$

4.2.3. $\mathcal{E} = \mu\frac{v^2}{2} + \frac{mV^2}{2} + U(r),$

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m},$

$m = m_1 + m_2.$

4.2.6. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \vec{L}_0\vec{\Omega}.$

4.2.7. $\ddot{\xi} = 2\Omega\dot{\eta} + \Omega^2\xi, \quad \ddot{\eta} = -2\Omega\dot{\xi} + \Omega^2\eta, \quad \ddot{\zeta} = 0.$

4.2.8. $\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} - \Omega^2 x = Ax,$

$\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} - \Omega^2 y = Ay,$

$\ddot{z} = Bz.$

4.2.9. $y = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{v_{0y}}{\Omega} - \frac{g}{2\Omega^2}\right)e^{\Omega t} + \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{v_{0y}}{\Omega} + \frac{g}{2\Omega^2}\right)e^{-\Omega t} +$

$+\frac{g}{2\Omega^2}\sin\Omega t = y_0\operatorname{ch}\Omega t + \left(\frac{v_{0y}}{\Omega} - \frac{g}{2\Omega^2}\right)\operatorname{sh}\Omega t + \frac{g}{2\Omega^2}\sin\Omega t.$

4.2.10. $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left[\dot{q}^2 + \Omega^2 q^2\sin^2\theta - 2gq\operatorname{ctg}\theta\right].$

4.2.11. $mR^2\ddot{\theta} - \left(mR^2/2\right)\left(\dot{\varphi} + \Omega\right)^2\sin 2\theta = -\partial U/\partial\theta,$

$mR^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta + mR^2\left(\dot{\varphi} + \Omega\right)\dot{\theta}\sin 2\theta = -\partial U/\partial\varphi.$

4.2.12. $p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{e}{2c}\rho^2 H,$

$p_z = m\dot{z}, \qquad \mathcal{E} = \frac{mv^2}{2}.$

4.2.13. $m\ddot{a} = -(4/3)\pi\gamma\rho_0 a.$

4.2.14. $\mathcal{L} = \frac{ma^2\dot{\vec{x}}^2}{2} - m\left(\phi + a\ddot{a}\frac{\vec{x}^2}{2}\right).$

4.2.15. $\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}}{a}\vec{r} = -\nabla\Phi.$

4.3. Принцип наименьшего действия

4.3.2. $ky'' + f(x) = 0.$

4.3.3. $y = \dfrac{f_0 x(l-x)}{2k}.$

4.3.6. $A = \dfrac{k}{2m}, \quad B = \dfrac{a}{\tau} - \dfrac{k\tau}{2m}, \quad C = 0.$

4.3.7. $t_B = \displaystyle\int\limits_a^b \frac{\sqrt{1+(dz/dx)^2}}{\sqrt{2g[z_A - z(x)]}} dx.$

4.3.8. $\dfrac{1}{\sqrt{1+(dz/dx)^2}} = c\sqrt{2g[z_A - z(x)]}, \quad c = \text{const}.$

4.3.9. $x = \pm c_1(\theta - \sin\theta) + c_2,$
$z = z_A - c_1(1 - \cos\theta).$

4.3.10. $S = \dfrac{x^2+z^2}{2t} - \dfrac{1}{2}gzt - \dfrac{1}{24}g^2t^3.$

4.3.11. $S_{12} = \dfrac{1}{2}\omega(x_1^2 + x_2^2)\mathrm{ctg}(\omega t) - \dfrac{\omega x_1 x_2}{\sin(\omega t)}.$

4.3.12. $S = \dfrac{(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)} + \dfrac{1}{6}A(t_2 - t_1)\{x_2(2t_2 + t_1) + x_1(t_2 + 2t_1)\} -$
$-\dfrac{1}{360}A^2(t_2 - t_1)^3(4t_2^2 + 7t_2t_2 + 4t_1^2).$

4.4. Теория малых колебаний

4.4.1. $\omega_1 = \sqrt{g/l}, \quad \omega_2 = \sqrt{g/l + 2ka^2/(ml^2)}.$

4.4.3. $\omega_{1,2} = \sqrt{\left(3 \pm \sqrt{5}\right) k/(2m)}, \quad A_2/A_1 = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)/2.$

4.4.4. $\omega_{||} = \sqrt{2k/m}, \quad \omega_\perp = \sqrt{2k(1 - l/a)/m}.$

4.4.5. $\omega_\perp = \sqrt{2k(1 - a^2/l^2)/m}.$

4.4.6. $\omega_1 = 0$ (колебаний нет), $\quad \omega_2 = \sqrt{k/m},$
$\omega_3 = \sqrt{k\,(1 + 2m/M)/m}.$

4.4.7. $\omega_{1,2} = \sqrt{g/l}\left[1 \pm \sqrt{m_2/(m_1+m_2)}\right]^{-1/2}$.

4.4.8. $\omega_n = 2\sqrt{k/m}\sin(\pi n/(2N+2)), \quad n = 1, ..., N$.

4.4.9. $\omega_n^2 = \dfrac{k}{\mu}\left[1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{4\mu^2}{mM}\sin^2\left(\dfrac{\pi n}{2N+1}\right)}\right]$,

$\mu = mM/(m+M)$ – приведённая масса.

4.4.10. $\omega_n = 2\sqrt{k/m}\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2(2N+1)}$.

4.4.11. $\omega_1 = \alpha$, $\omega_2 = 2\alpha$, $\omega_3 = \sqrt{6}\alpha$, $\alpha = \sqrt{P/(2ma)}$. Для первой моды $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2}$, для второй $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{-1}$, для третьей $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$.

4.4.12. $\omega_1 = \alpha, \quad x = y,$

$\omega_2 = 2\alpha, \quad x = -2y.$

4.4.13. $r(t) = a\left[1 + \dfrac{\lambda}{\sqrt{3-n}}\sin\omega t\right]$,

$\varphi(t) = \omega t - \dfrac{2\lambda}{3-n}(1-\cos\omega t)$,

$\omega = \sqrt{(3-n)\alpha/a^{n+1}}$,

$r(\varphi) = a\left[1 + \dfrac{\lambda}{\sqrt{3-n}}\sin(\sqrt{3-n}\varphi)\right]$.

4.4.14. $\omega_1 = \sqrt{g/c}, \quad \omega_2 = \sqrt{g/(l+c)}$, c – удлинение стержня за счёт силы тяжести в положении равновесия.

4.4.15. $\mathcal{E} = (m/2)\left[\left(R^2 - z^2\right)\dot\varphi^2 + R^2\dot z^2/\left(R^2 - z^2\right)\right] + mgz$,

$L_z = m\left(R^2 - z^2\right)\dot\varphi$.

4.4.16. $\omega = \sqrt{k/m - \Omega^2}$.

4.4.17. $x = A\cos(\omega_x t + \alpha), \quad y = B\sin(\omega_y t + \beta), \quad \omega_x = \sqrt{gf''_{xx}(0)}$,

$\omega_y = \sqrt{gf''_{yy}(0)}$.

4.4.18. $\varphi = a_0\cos[\omega_0(1 - a_0^2/16)t + \psi_0]$.

4.4.19. $x = a\cos(\omega t + \varphi) + [\beta a^3/(32\omega^2)]\cos(3\omega t + 3\varphi)$,
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 3\beta a^2/4}$.

4.4.20. $x = a\cos(\omega_0 t + \varphi) - \dfrac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \dfrac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$.

4.5. Динамика твёрдых тел

4.5.1. $\mathcal{L} = \dfrac{3}{4}ma^2\dot\theta^2 - \dfrac{1}{2}ka^2\theta^2 + mga\theta$.

4.5.3. $L_1 = (\cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi)L_x +$
$+(\sin\varphi\cos\psi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi)L_y + \sin\theta\sin\psi L_z$,
$L_2 = (-\cos\varphi\sin\psi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi)L_x +$
$+(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi)L_y + \sin\theta\cos\psi L_z$,
$L_3 = \sin\theta\sin\varphi L_x - \sin\theta\cos\varphi L_y + \cos\theta L_z$.

4.5.3. $\dot\varphi = \dfrac{\Omega_2}{\sin\theta}, \quad \dot\psi = \left(1 - \dfrac{I_3}{I_1}\right)\Omega_3, \quad \dot\theta = 0.$

4.5.5. $I'\ddot\theta = -\dfrac{dU_{\text{эфф}}(\theta)}{d\theta}, \quad U_{\text{эфф}} = \dfrac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2I'\sin^2\theta} + mgl\cos\theta.$

4.5.6. $F \leqslant \mu Mg\dfrac{2r+R}{2r-R}$.

4.5.7. а) $(2/5)R < r < R$;
б) $r < (2/5)R$;
в) $r = (2/5)R$.

4.5.9. $\cos\theta_{\min} = \sqrt{3}/2, \qquad \cos\theta_{\max} = 1/\sqrt{3}$.

4.5.10. $\ddot\varphi(1 + 5\cos^2\theta) - 10\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\sin\theta + 6\ddot\psi\cos\theta = 6\dot\theta\dot\psi\sin\theta = 0$,
$\ddot\psi + \ddot\varphi\cos\theta - \dot\varphi\dot\theta\sin\theta = 0$,
$5\ddot\theta + 5\dot\varphi^2\cos\theta\sin\theta + 6\dot\varphi\dot\psi\sin\theta + 4\dfrac{g}{R}\cos\theta = 0$.

4.5.11. $\ddot\varphi - \dfrac{5v}{R}\dot\xi = 0$,
$\dot\omega = 0$,
$5\dot\xi + \dfrac{6v}{R}\dot\varphi - \dfrac{4g}{R} = 0$.

4.5.12. $v > \dfrac{1}{3}\sqrt{gR}$. Для монеты радиусом 14 мм скорость $v > 0,37$ м/с.

4.6. Канонические уравнения

4.6.6. $\mathcal{H} = \dfrac{1}{2ml^2}\left[p_\varphi - m\Omega Rl\cos(\Omega t - \varphi)\right]^2 - mgl\cos\varphi$.

4.6.7. Эллипс с полуосями v_0/ω и $y_0 - N/\omega^2$.

4.6.8. $\mathcal{H} = \dfrac{1}{2m}\left[p_x^2 + \left(P_y - \dfrac{e}{c}Hx\right)^2 + p_z^2\right]$.

4.6.9. $\mathcal{H} = \dfrac{1}{2m}\left(\vec{P} - \dfrac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi$.

4.6.11. $\mathcal{H} = \dfrac{p^2}{2m} - \vec{\Omega}[\vec{r}, \vec{p}] + U$.

4.6.15. $t(-\pi/4, \pi/4) = \sqrt{2}\ln\operatorname{tg}(3\pi/8); \quad t(-\pi/2, \pi/2) = \infty$.

4.6.17. Четырехмерный эллипсоид.

4.6.19. Прямоугольник, вписанный в эллипс $U(x, y) = \mathcal{E}$.

4.6.26. $\{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$.

4.6.27. $\{x_i, g(x_j)\} = 0, \quad \{p_i, g(x_j)\} = -\partial g(x_j)/\partial x_i$.

4.6.28. $\{x_i, L_j\} = \sum\limits_k \varepsilon_{ijk} x_k$.

4.6.29. $\{L_i, L_j\} = x_i p_j - x_j p_i$.

4.6.30. $\{x_i, \mathcal{H}\} = p_i/m, \quad \{p_i, \mathcal{H}\} = -\partial U/\partial x_i$.

4.6.31. $\{L_i, \mathcal{H}\} = -\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} x_j \partial U/\partial x_k = M_i, \quad \left\{L^2, \mathcal{H}\right\} = 2\sum_i L_i M_i$.

4.6.33. $\{a^*, a\} = i, \quad \mathcal{H} = \omega a^* a$.

4.6.36. $H = \dfrac{p_\theta^2}{2I'^2} + \dfrac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I'\sin^2\theta} + \dfrac{p_\psi^2}{2I_3} + mgl\cos\theta,\ I' = I_1 + ml^2$.

4.6.37. $\dot{\theta} = p_\theta / I'$,

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos\theta}{I' \sin^2\theta}, \qquad \dot{\psi} = -\frac{p_\varphi - p_\psi \cos\theta}{I' \sin^2\theta} \cos\theta + \frac{p_\psi}{I_3},$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{(p_\varphi - p_\psi \cos\theta)(p_\psi - p_\varphi \cos\theta)}{I' \sin^3\theta} + mgl \sin\theta,$$

$$\dot{p}_\varphi = 0, \qquad p_\psi = 0.$$

4.6.38. $$t = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(2/I')\left[E - U_{\text{эф}}(\theta)\right]}},$$

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t \frac{L_z - L_3 \cos\theta}{I' \sin^2\theta} dt + \varphi_0,$$

$$\psi(t) = \frac{L_3}{I_3} t - \int\limits_0^t \frac{L_z - L_3 \cos\theta}{I' \sin^2\theta} \cos\theta \, dt + \psi_0 \; .$$

4.6.39. $$H = \frac{p_\varphi^2}{2(I - 2aR\cos\varphi)} - mga\cos\varphi,$$

$$p_\varphi = (1 - 2aR\cos\varphi)\dot{\varphi}.$$

4.7. Теория преобразований

4.7.1. $p_i = \partial\mathcal{F}_1/\partial q_i, \quad P_i = -\partial\mathcal{F}_1/\partial Q_i, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \partial\mathcal{F}_1/\partial t.$

4.7.2. $p_i = \partial\mathcal{F}_2/\partial q_i, \quad Q_i = \partial\mathcal{F}_2/\partial P_i, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \partial\mathcal{F}_2/\partial t.$

4.7.3. $q_i = -\partial\mathcal{F}_3/\partial p_i, \quad P_i = -\partial\mathcal{F}_3/\partial Q_i, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \partial\mathcal{F}_3/\partial t.$

4.7.4. $q_i = -\partial\mathcal{F}_4/\partial q_i, \quad Q_i = \partial\mathcal{F}_4/\partial P_i, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \partial\mathcal{F}_4/\partial t.$

4.7.9. $\mathcal{F} = qP - f(q,t).$

4.7.12. $\mathcal{F} = \dfrac{F\tau}{2}(q+Q) + \dfrac{m}{2\tau}(q-Q)^2.$

4.7.13. $\mathcal{F} = \dfrac{m\omega}{2\sin\omega\tau}\left[2qQ - (q^2+Q^2)\cos\omega\tau\right].$

4.8. Переменные «действие-угол» и адиабатические инварианты

4.8.1. $S(\vec{r},t)=\dfrac{mr^2}{2t}$.

4.8.2. $\vec{u}=\vec{v}/2$.

4.8.3. $\vec{u}(\vec{r})=\left(\mathcal{E}/\sqrt{2m[\mathcal{E}-U(\vec{r})]}\right)\vec{n}$.

4.8.4. $S(\vec{r},t)=(m/2)[r^2/t-\vec{g}\vec{r}t-g^2t^3/12]$.

4.8.7. $S=\dfrac{mr^2\omega}{2}\mathrm{ctg}(\omega t)$.

4.8.9. $S(\vec{r},t)=\dfrac{m}{2}\left[\dfrac{z^2}{t}+(x^2+y^2)\dfrac{\omega_H}{2}\mathrm{ctg}\dfrac{\omega_H t}{2}\right]$.

4.8.11. $(\partial S_0/\partial\theta)^2+\sin^{-2}\theta\,(\partial S_0/\partial\varphi)^2=2(\mathcal{E}-g\cos\theta)$.

4.8.15. $S_0(q_1,...,q_n;\alpha_1,...,\alpha_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\displaystyle\int g_i(q_i,\alpha_i)dq_i$.

4.9. Метод Гамильтона-Якоби

4.9.2. $\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\dfrac{1}{m}\left(\vec{\alpha}t-\left(e\vec{A}_0\,/\omega c\right)\sin\omega t\right)$.

4.9.3. $S=-\mathcal{E}t+\int\sqrt{2ml^2(\mathcal{E}+mgl\cos\varphi)}d\varphi$.

4.9.4. $S(x_1,x_2,x_3,t)=-\mathcal{E}t+\sum\limits_{i=1}^{3}S_i(x_i)$,

$$S_i(x_i)=\frac{x_i}{2}\sqrt{2\mathcal{E}_i-\omega^2x_i^2}+(\mathcal{E}_i\,/\omega\,)\arcsin\left(\omega x_i\Big/\sqrt{2\mathcal{E}_i}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{3}\mathcal{E}_i=\mathcal{E}.$$

4.9.6. $S=-\mathcal{E}t+p_\varphi\varphi+\displaystyle\int\sqrt{L^2-p_\varphi^2/\sin^2\theta}d\theta+$

$$+\int\sqrt{2m[\mathcal{E}-U(r)]-L^2/r^2}dr.$$

4.9.7. $p_r = \sqrt{2m[\mathcal{E} - U(r)] - L^2/r^2}, \quad p_\theta = \sqrt{L^2 - p_\varphi^2/\sin^2\theta}.$

4.9.8. $I_\varphi = p_\varphi, \quad I_r = -p_\varphi + \alpha\sqrt{\dfrac{m}{2|\mathcal{E}|}},$

$$\omega_\varphi = \omega_r = \frac{(2|\mathcal{E}|)^{3/2}}{\sqrt{m}\alpha}.$$

4.9.12. Уменьшится в k раз.

4.9.16. $x_2 = \sqrt{\dfrac{m_1 c^2}{2\mathcal{E}} + \dfrac{2\mathcal{E}}{m}(t-\tau)^2}$; $\mathcal{E}, c$ и τ – постоянные, определяемые по начальным значениям $x_2(0), \dot{x}_2(0)$ и $\dot{x}_1(0)$.

4.9.17. $p = CV^{-2/3}, \quad C = \text{const}.$

4.9.18. $\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = \dfrac{1}{2m}\nabla^2\psi + U\psi.$

4.10. Элементы классической теории поля

4.10.1. $\delta F = \int\ldots\int\left[\dfrac{\partial f}{\partial q}\delta q(x_1,\ldots,x_n) + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial(\partial q/\partial x_k)}\delta\left(\dfrac{\partial q}{\partial x_k}\right)\right]dx_1\ldots dx_n.$

4.10.2. $\dfrac{\delta F}{\delta q(x_1,\ldots,x_n)} = \dfrac{\partial f}{\partial q} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left[\dfrac{\partial f}{\partial(\partial q/\partial x_k)}\right].$

4.10.3. $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \nabla^2\psi = 0$ (волновое уравнение).

4.10.4. $\dfrac{\partial\psi}{\partial t} - \nabla^2\psi = 0$ (уравнение диффузии).

4.10.5. $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\psi = 0$ (уравнение Клейна-Гордона).

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2}\left[\psi_{,t}^2 + [\nabla\psi]^2 + m^2\psi^2\right].$$

4.10.6. $i\hbar\psi_{,t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi,$

$i\hbar\psi_{,t}^* = \dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + U\psi^*$ (уравнения Шредингера).

4.10.7. $\pi = i\hbar\psi^*, \qquad \mathcal{H} = \int \left[\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\psi^*)(\nabla\psi) + U\psi^*\psi\right] dV.$

4.10.8. $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu^2 u = 0$, $\mu^2 = K/T$. При $n = 3$ это уравнение известно как уравнение Клейна-Гордона.

4.10.9. $\mathcal{U} = \frac{1}{2}\iint n(\vec{x})U(\vec{x} - \vec{x}')n(\vec{x}')d\vec{x}d\vec{x}' + \int \phi(\vec{x})n(\vec{x})d\vec{x} - \frac{N}{2}U(0).$

4.10.10. $\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta n(\vec{x})} = \int U(\vec{x} - \vec{x}')n(\vec{x}')d\vec{x}' + \phi(\vec{x}).$

4.10.11. $\frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta n(\vec{x})} = -\beta \frac{\int e^{-\beta\mathcal{U}}[\int U(\vec{x} - \vec{x}')n(\vec{x}')d\vec{x}' + \phi(\vec{x})]d\Gamma_x}{\int e^{-\beta\mathcal{U}} d\Gamma_x} \equiv$
$\equiv -\beta\langle \int U(\vec{x} - \vec{x}')n(\vec{x}')d\vec{x}' + \phi(\vec{x})\rangle.$

4.10.12. $\frac{\delta \ln \mathcal{J}}{\delta \phi(\vec{x})} = -\beta\langle n(\vec{x})\rangle.$

Глава 5. Релятивистская механика

5.1. Пространство и время

5.1.3. $\vartheta = \arcsin(i\gamma V/c) = \mathrm{arctg}(iV/c).$

5.1.4. $v = (v' + V)/(1 + v'V/c^2) \sim v' + V - v'(V/c)^2 - V(v'/c)^2,$
$V \ll c, \quad v' \ll c.$

5.1.5. $\mathrm{tg}\theta = \frac{v'\sqrt{1 - (V/c)^2}\sin\theta'}{V + v'\cos\theta'}.$

5.1.6. $\theta = \arccos\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0\sqrt{1 - (v/c)^2}}{(v/c)\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2c^4}}.$

5.1.7. $\mathcal{E}_1 = \left(m_1^2 - m_2^2 + m^2\right)/(2m).$

5.1.8. $T_{\max} = (m - 3m_1)\, c^2.$

5.1.9. $\mathcal{E}' = \mathcal{E}/\left[1 + \left(\mathcal{E}/mc^2\right)(1 - \cos\theta)\right].$

5.1.10. $Q = \sqrt{2mc^2\,(\mathcal{E} + mc^2)}$.

5.1.11. $(v_{21}/c)^2 = 1 - \left[\gamma_1\gamma_2(1 - \vec{v}_1\vec{v}_2/c^2)\right]^{-2}$.

5.1.13. $\beta = (e^{2y} - 1)/(e^{2y} + 1)$.

5.1.15. $v_n = \dfrac{1 - [(1-\beta)/(1+\beta)]^n}{1 + [(1-\beta)/(1+\beta)]^n}$.

5.2. Движение релятивистской частицы

5.2.3. $M = \sum\limits_i m_i \Big/ \sqrt{1 - (v_i'/c)^2}$.

5.2.4. $m_{||} = m/(1 - v^2/c^2)^{3/2}, \quad m_\perp = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

5.2.5. $F = mc^2/b$.

5.2.6. $\vec{F}' = \gamma\vec{E} - (\gamma - 1)(\vec{v}\vec{F})\vec{V}/v^2$.

5.2.7. $\dfrac{d}{dt}\dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = e\vec{E} + \dfrac{e}{c}\left[\vec{v}, \vec{H}\right]$.

5.2.9. $$\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{r}) = m\gamma r\dot{\varphi}^2 + eE_r + e/c(-H_\varphi\dot{z} + H_z r\dot{\varphi}),$$
$$\frac{d}{dt}(m\gamma r^2\dot{\varphi}) = eE_\varphi + (e/c)(H_r\dot{z} - H_z\dot{r})r,$$
$$\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{z}) = eE_z + e/c(H_\varphi\dot{r} - H_r r\dot{\varphi}).$$

5.2.10. $$\vec{P} = m\gamma\vec{v} + (e/c)\vec{A} = \vec{p} + (e/c)\vec{A},$$
$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2} + e\varphi.$$

5.2.11. $\mathcal{H} = c\sqrt{m^2c^2 + P_r^2 + P_\varphi^2/r^2} - \alpha/r$.

5.2.13. $\vec{u} = (c^2/v)\vec{e}_v$.

5.2.14. $u = \{[1 - (v/c)^2]^{3/2} + 2(v/c)^2 - 1\}c^2/v$.

5.2.15. $x = \dfrac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\dfrac{a^2t^2}{c^2}}-1\right),$

$$\tau = \frac{c}{a}\mathrm{Arsh}(at/c).$$

5.2.16. $\dot{\vec{v}} = \dfrac{e}{m\gamma}\left\{\vec{E}+\dfrac{1}{c}[\vec{v},\vec{H}]-\dfrac{1}{c^2}\vec{v}(\vec{v}\vec{E})\right\}.$

5.2.17. $\left(\nabla S - \dfrac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{\partial S}{\partial t}+e\varphi\right)^2 + m^2c^4 = 0.$

5.2.18. $T = mc^2\left(\sqrt{1+(eEt/mc)^2}-1\right),$

$$x = (mc^2/eE)\left(\sqrt{1+(eEt/mc)^2}-1\right).$$

5.2.19. $x = \dfrac{\mathcal{E}}{eE}\mathrm{ch}\left(\dfrac{eEy}{cp_0}\right)$ – цепная линия.

5.2.20. $T = mc^2\left(\sqrt{1+(eRH/mc^2)}-1\right).$

5.2.21. $x = a + R\cos(\omega t-\alpha), \quad y = b + R\sin(\omega t - \alpha), \quad z = z_0 + v_{oz}t,$

$$\omega = ecH/\mathcal{E}, \quad R = v_\perp \mathcal{E}/(ecH).$$

5.2.22. $T << mc^2.$

5.2.23. $x = \dfrac{c}{2eE}\left(\dfrac{\tau^2}{\alpha^2}-1\right)p_y + \dfrac{c^3}{6\alpha^2 eE}p_y^3,$

$$y = \frac{c^2}{2\alpha eE}p_y^2,$$

$$z = \frac{c^2 p_z}{\alpha eE}p_y.$$

5.2.25. $x = (cp_\perp/eB)\sin\varphi, \quad y = (cp_\perp/eB)\cos\varphi,$

$$z = (T_0/eE)\mathrm{ch}(E\varphi/H).$$

5.2.27. $m\dfrac{dv}{dt} + \left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)u\dfrac{dm}{dt} = 0, \quad u > 0, \quad \dfrac{dm}{dt} < 0.$

5.2.28. $m = m_0\left[(1-v/c)/(1+v/c)\right]^{c/2u}.$

5.2.29. $x(t) = ct + (c^2/4\alpha)\ln\left\{\left[1+\exp(-2\alpha ut/c)\right]/2\right\}.$

5.2.30. $\tau = \dfrac{2q}{c\sqrt{q}} \displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{(1+2q\cos^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{1+q\cos^2\varphi}}, \qquad q = \dfrac{ka^2}{4mc^2}.$

5.2.31. $\delta\tau = \dfrac{3}{16}\dfrac{ka^2}{mc^2}\tau_{\text{нерел}}.$

5.2.32. $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\left(\sqrt{1-\rho^2}\varphi\right)}, \quad \rho = \alpha/(cL) < 1, \quad p = \dfrac{1-\rho^2}{\rho^2\mathcal{E}/\alpha},$

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho\sqrt{1-(1-\rho^2)m^2c^4/\mathcal{E}^2}}.$$

Перигей орбиты за один период изменения r поворачивается на угол $2\pi(1/\sqrt{1-\rho^2}-1)$. В случае иррационального $\sqrt{1-\rho^2}$ траектория не замкнута.

5.2.33. $2\varphi_\infty = \dfrac{\arccos(-1/\varepsilon)}{\sqrt{1-\rho^2}}.$

5.2.34. $r = \dfrac{p_1}{-1+\varepsilon_1\mathrm{ch}\left(\sqrt{\rho^2-1}\varphi\right)}, \quad p_1 = \dfrac{\alpha^2-(cL)^2}{\alpha\mathcal{E}},$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\tfrac{1}{\rho^2} + \left(\tfrac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)\left(1-\tfrac{1}{\rho^2}\right)}.$$

Траектории имеют вид спиралей, закручивающихся вокруг силового центра (частица падает на центр). При $\mathcal{E} > mc^2$ траектория имеет две асимптотики при $\varphi_\infty = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\rho^2-1}}\mathrm{arch}\dfrac{1}{\varepsilon_1}$.

5.2.35. $r = \dfrac{p}{-1+\varepsilon\cos\left(\sqrt{1-\rho^2}\varphi\right)}, \quad p = \dfrac{\rho^2-1}{\mathcal{E}/|\alpha|},$

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho}\sqrt{1-(1-\rho^2)m^2c^4/\mathcal{E}^2} > 1.$$

Обе ветви уходят на бесконечность при $\varphi = \pm\varphi_\infty$, $\varphi_\infty = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\arccos\frac{1}{\varepsilon}$.

5.2.36. $\theta = \pi - \dfrac{2cL}{\sqrt{c^2L^2-\alpha^2}}\mathrm{arctg}\dfrac{v_0\sqrt{c^2L^2-\alpha^2}}{c|\alpha|}.$

5.3. Столкновения и распад релятивистских частиц

5.3.3. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2\beta\gamma^2 m_\pi^2}$.

5.3.4. $Q^2 \approx 2q^2(1-\cos\theta)$.

5.3.5. $E_{\text{мин}} = 7m_p c^2$.

5.3.6. $E_B = (m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)c^2/2m_A^2$.

5.3.7. $\cos\theta = 1 - M^2c^4/2E_1E_2$.

5.3.8. $E_\gamma = 2m_e c^2$.

5.3.9. $Mc^2 = 2\sqrt{T_1T_2}$.

5.3.10. $E_\gamma = \dfrac{m_e c^2 E_0}{m_e c^2 + E_0(1-\cos\theta)}$, E_0 – начальная энергия фотона.

5.3.11. $Q = \dfrac{2m_2 p_1^2 c^4 \cos^2\varphi}{\left(\sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4} + m_2c^2\right)^2 - p_1^2c^2\cos^2\varphi}$.

5.3.12. $Q_{\text{мах}} \approx E_1$ в обоих случаях.

Глава 6. Разрежённые среды

6.1. Основы физической кинетики

6.1.1. $n_k(\vec r_1;\ldots;\vec r_k) = \dfrac{N!}{(N-k)!}\displaystyle\int d\vec r_{k+1}\ldots\times$

$\times\displaystyle\int d\vec r_N f_N(\vec r_1;\ldots;\vec r_k;\vec r_{k+1};\ldots;\vec r_N)$.

6.1.2. $\langle T\rangle = \displaystyle\int d\vec p\frac{p^2}{2m}n_1(\vec p)$,

$\langle U\rangle = \displaystyle\int d\vec r U_1(\vec r)n_1(\vec r) + \frac12\int d\vec r_1\int d\vec r_2 U_2(\vec r_1,\vec r_2)n_2(\vec r_1,\vec r_2)$,

где U_1 – внешнее поле, U_2 – энергия взаимодействия пары частиц.

6.1.3. $\langle U_2 \rangle = \dfrac{1}{2N(N-1)} \displaystyle\int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 U_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) n_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$

6.1.5. $f_N^{\text{конф}}(\vec{r}_1; \vec{r}_2; \ldots; \vec{r}_N) = \dfrac{\exp(-\beta U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N))}{\int d\vec{r}_1 \ldots \int d\vec{r}_N \exp(-\beta U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N))},$

$$f_N^{\text{имп}}(\vec{p}_1; \ldots; \vec{p}_N) = \frac{\exp(-\beta(p_1^2 + \ldots + p_N^2)/2m)}{\int d\vec{p}_1 \ldots \int d\vec{p}_N \exp(-\beta(p_1^2 + \ldots + p_N^2)/2m)}.$$

6.1.6. $\Omega_N(E) = V^N \dfrac{(2\pi m E)^{3N/2}}{\Gamma(3N/2+1)}.$

6.1.9. $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = k_\text{Б} T^2 C_V.$

6.1.12. $f_N(t) = \rho_N + [\mathcal{H}, \rho_N]t + [\mathcal{H}, [\mathcal{H}, \rho_N]]t^2/2 + [\mathcal{H}, [\mathcal{H}, [\mathcal{H}, \rho]]]t^3/6 + \ldots$

6.2. Газодинамика

6.2.5. Условие равновесия $\dfrac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \dfrac{p_2}{\sqrt{T_2}}.$

6.2.6. $n(x,t) = n_0 \sqrt{\dfrac{m}{2\pi k_\text{Б} T}} \displaystyle\int\limits_{x/t}^{\infty} e^{-\frac{m v_x^2}{2k_\text{Б} T}} dv_x.$

6.2.7. $\overrightarrow{\delta p}_\perp / \delta S = \vec{V} n \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{m k_\text{Б} T_1 T_2}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}}$, где $n = n_1 + n_2$ и $\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$.

6.2.8. $A = \dfrac{1}{4\pi} n(\vec{r}, t), \quad \vec{B} = \dfrac{3}{4\pi v} \vec{J}(\vec{r}, t).$

6.3. Диффузия

6.3.1. $\dfrac{\partial n}{\partial t} = D \triangle n - \mu n + S(\vec{r}, t),$
где μ – вероятность поглощения частицы в единицу времени.

6.3.2. $\triangle n - \dfrac{n}{L^2} + \dfrac{S}{D} = 0$, где $L = \sqrt{D/\mu}$ – *диффузионная длина.*

6.3.3. $\dfrac{\partial n}{\partial t} = D \triangle n - \operatorname{div}(n\vec{u}).$

6.3.4. $\dfrac{\partial n}{\partial t} = \nabla\left(D(\vec{r})\nabla n(\vec{r},t)\right) + +S(\vec{r},t).$

6.3.5. $T(x) = T_0 - (T_L - T_0)x/L.$

6.3.6. $T(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \int\limits_0^\infty \left[\exp\left(-\dfrac{(x-\xi)^2}{4at}\right) - \exp\left(-\dfrac{(x+\xi)^2}{4at}\right)\right] f(\xi)d\xi.$

6.3.7. $T(r,t) = \dfrac{1}{r} \sum\limits_{n=1\infty} C_n \sin(k_n r)\exp(-ak_n^2 t).$

6.3.8. $T(r,t) = T_0 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2R}{n\pi r} \sin\left(\dfrac{n\pi r}{R}\right) \exp\left(-\dfrac{(n\pi)^2 at}{R^2}\right).$

6.3.9. $n(x) = \dfrac{L}{2D} e^{-|x|/L},\ -\infty < x < \infty.$

6.3.10. $T(r,t) = \dfrac{2}{R^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_0(k_n r)}{J_1^2(\xi_n)} e^{-ak_n^2 t} \int\limits_0^R \phi(r') J_o(k_n r') r' dr'.$

6.3.11. $u(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi \nu t}} \exp(-x^2/4\nu t).$

6.3.12. $W(t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{x_0}{2\sqrt{Dt}}\right).$

6.3.13. $\rho(x,t) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+4\beta D t}} \exp[-\dfrac{\beta x^2}{1+4\beta D t}].$

6.3.15. $\rho(x) = \rho_0 \exp(-U(x)/\theta), \quad \theta = 1/2\gamma.$

6.4. Плазма

6.4.2. $v_x A \sin\omega t - \dfrac{1}{m\omega_H} \int\limits_{-\infty}^{t} \dot{F}(\tau)\cos[\omega_H(t-\tau)]d\tau,$

$v_x A \cos\omega t - \dfrac{1}{m\omega_H} \int\limits_{-\infty}^{t} \dot{F}(\tau)\sin[\omega_H(t-\tau)]d\tau,$

$v_z = \mathrm{const}, \quad \omega_H = eH/mc$ – циклотронная (ларморова) частота.

6.4.3. $x(t) = (v_{\perp 0}/\omega_H)(1 - \cos\omega_H t) - (F(0)/m\omega_H^2)\sin\omega_H t +$
$+(1/m\omega_H)\int\limits_0^t F(t')dt'$,
$y(t) = (v_{\perp 0}/\omega_H)\sin\omega_H t - (F(0)/m\omega_H^2)\cos\omega_H t + F(t)/m\omega_H$,
$z(t) = v_{||0}t$.

6.4.6. $\delta\mu/\mu = \xi^2/v_{\perp 0}^2 = (1/4)[F/(m\omega_H v_{\perp 0})]^2 \exp(-2\omega_H^2\alpha^2)$. Изменение адиабатического инварианта в данном случае оказывается экспоненциально малым.

6.4.7. Предположить, что μ – постоянно, а ток смещения $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости $\vec{j}_e$.

6.4.8. $\dfrac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} = \dfrac{B_0^2}{4\pi\mu\rho}\dfrac{\partial^2 b_y}{dz^2} + \dfrac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\dfrac{\partial^3 b_y}{\partial z^2\partial t}$.

6.4.9. $V = B_0/\sqrt{4\pi\mu\rho}$ – гидромагнитная (альвеновская) скорость,
$\omega = V|k|$.

6.4.10. $p = p_0 - \dfrac{1}{8\pi\mu}A^2\sin^2(\omega t - kz)$.

6.4.11. $\partial y/\partial t = v_y$: силовые линии «вморожены» в движущуюся плазму.

6.4.13. $|k| = \dfrac{\omega}{V}\left(1 + \dfrac{i\omega c^2}{4\pi\mu\sigma V^2}\right)^{-1/2}$, $z_0 = \dfrac{2\mu\sigma V}{\pi c^2}\lambda^2$, $\lambda = \dfrac{2\pi V}{\omega}$ – длина волны.

6.4.14. $D_{\text{м}} = c^2/(4\pi\mu\sigma)$.

6.4.16. $v^* l^*/\nu >> 1$.

6.4.17. $\vec{B}(\nabla g) = 0$.

6.4.18. $B_z = AJ_0(gr)$, $B_\varphi = AJ_1(gr)$, где J_0 и J_1 – функции Бесселя нулевого и первого порядков.

6.4.19. $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial\vec{r}}(\vec{u}f_\alpha) + \dfrac{\partial}{\partial\vec{u}}\left(\dfrac{\vec{F}_\alpha}{m_\alpha}f_\alpha\right) = 0$.

6.4.20. $\vec{u}\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial\vec{r}} - \dfrac{e_\alpha}{m_\alpha}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}}\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial\vec{u}} = 0$,
$\Delta\varphi = -4\pi\sum\limits_\alpha e_\alpha\int f_\alpha(\vec{r},\vec{u})d\vec{u} - 4\pi e\delta(\vec{r})$.

6.4.22. $f_\alpha(\vec{r},\vec{u}) = \dfrac{n_\alpha}{(2\pi k_{\text{Б}} T_\alpha)^{3/2}} \exp\left\{\dfrac{1}{k_{\text{Б}} T_\alpha}\left[\dfrac{m_\alpha u^2}{2} - e_\alpha \varphi(\vec{r})\right]\right\}$.

6.4.23. $\Delta\varphi - r_D^{-2}\varphi = -4\pi e\delta(\vec{r})$,
где $r_D = \left(\sum\limits_\alpha r_{D\alpha}^{-2}\right)^{-1/2} \equiv \left(\sum\limits_\alpha \dfrac{4\pi e_\alpha^2 n_\alpha}{k_{\text{Б}} T_\alpha}\right)^{-1/2}$,
n_α – концентрация частиц типа α, а $r_{D\alpha}$ – дебаевский радиус (радиус экранирования).

6.4.24. $\varphi(\vec{r}) = (e/r)\exp\{-r/r_D\}$.

6.4.25. $u_x \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x} + \Omega_\alpha(x)\left(u_y \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial u_x} - u_x \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial u_y}\right) = 0$, где $\Omega_\alpha(x) = e_\alpha B/m_\alpha c$ – частота гироскопического вращения частицы сорта α в магнитном поле.

6.4.26. $f = \Phi(x + u_y/\Omega, u_x^2 + (u_y + g/\Omega)^2, u_z)$, где Φ – произвольная функция трех аргументов, определяемая граничными условиями.

Глава 7. Феноменология континуума

7.1. Феноменологическое описание сплошной среды

7.1.1. $a^{(1)}(a,0,0) \to (1+\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31})a$, $\quad a_i^{(1)} a_i^{(2)} = 0 \to 2\varepsilon_{12}$,
$a^{(3)} \to (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})a^{(3)}$.

7.1.2. $\alpha = 30^\circ$.

7.1.3. $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \dot{\varphi}_i = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7.1.4. $\varepsilon'_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7.1.5. $\delta\vec{a} = 0{,}003\vec{e}_3$.

7.1.6. $\varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z},$

$$2\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r},$$

$$2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}.$$

7.1.7. $\varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r},$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r}\mathrm{ctg}\theta + \frac{u_r}{r},$$

$$2\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \mathrm{ctg}\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi},$$

$$2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta},$$

$$2\varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}.$$

7.1.8. Да.

7.1.9. $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 3x_2^2 & 3x_1x_2 + x_3 & -x_2/2 \\ 3x_1x_2 + x_3 & 0 & x_1/2 \\ -x_2/2 & x_1/2 & 2x_3 \end{pmatrix}.$

7.1.10. $4\vec{e}_1 - 10/3\vec{e}_2$.

7.1.11. $\vec{t} = (14\vec{e}_1 + 18\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3)/3; \quad \vec{t}' = (-28\vec{e}_1 + 16\vec{e}_3)/9;$

$$\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{65} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{65} \end{pmatrix}.$$

7.1.12. $5/2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \sqrt{3}\vec{e}_3$.

7.1.13. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

7.1.14. $\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

7.1.17. $-13x, \ -2, \ 0.$

7.1.18. $\begin{pmatrix} \cos\beta x_3 & -\sin\beta x_3 & -\beta x_1\sin\beta x_3 - \beta x_2\cos\beta x_3 \\ \sin\beta x_3 & \cos\beta x_3 & \beta x_1\cos\beta x_3 - \beta x_2\sin\beta x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

7.1.19. $\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega}, \delta\vec{x}] + \delta\vec{u}$,

$\vec{\omega} = \dfrac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}$,

$\delta\vec{u}$ – скорость чистой деформации.

7.2. Кинематика текучей среды

7.2.1. $\vec{X}(t|\vec{\xi}) = \vec{\xi} + \vec{b}t^2/2$.

7.2.2. $\vec{X}(t|\vec{\xi}) = \vec{\xi}e^{ct}$.

7.2.3. $\vec{V}(t|\vec{\xi}) = \vec{\xi}cte^{ct^2/2}$.

7.2.4. $\vec{v}(\vec{x}, t) = [\vec{b}(t + ct^2/2) + c\vec{x}]/(1 + ct)$.

7.2.5. $\vec{a}(\vec{x}, t) = (2x_2\vec{e}_2 + 6x_3\vec{e}_3)\,/(1 + t)^2$,

$\vec{A}(x|\vec{\xi}) = 2\xi_2\vec{e}_2 + 6(1 + t)\xi_3\vec{e}_3$.

7.2.6. $(x_1/\xi_1)^6 = (x_2/\xi_2)^3 = (x_3/\xi_3)^2$.

7.2.7. $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$.

7.2.11. $\rho(x, t) = \rho_0(x - \int\limits_0^t v(\tau)d\tau)$.

7.2.12. $\rho(x) = C/v(x)$, где C – постоянная.

7.2.13. $\rho(x, t) = \dfrac{A}{1 - [x - (v_0/\omega)\sin\omega t]^2}$.

7.2.17. $\vec{\Omega} = 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.

7.2.19. $a_x = B/x - B^2t^2/x^3$.

7.2.20. $a_\varrho = \dfrac{\partial v_\varrho}{\partial t} + v_\varrho\dfrac{\partial v_\varrho}{\partial\varrho} + \dfrac{v_\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial v_\varrho}{\partial\varphi} + v_z\dfrac{\partial v_\varrho}{\partial z} - \dfrac{v_\varphi^2}{\varrho}$,

$a_\varphi = \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_\varrho\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\varrho} + \dfrac{v_\varphi}{\varrho}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + v_z\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \dfrac{v_\varrho v_\varphi}{\varrho}$,

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_\varrho \frac{\partial v_z}{\partial \varrho} + \frac{v_\varphi}{\varrho}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

7.2.21. $$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r},$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta - v_\varphi^2 \mathrm{ctg}\theta}{r},$$

$$a_\varphi = \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi + v_\theta v_\varphi \mathrm{ctg}\theta}{r}.$$

7.2.22. $\vec{v} = (A/r)\vec{e}_r, \quad \vec{a} = -(A^2/r^3)\vec{e}_r.$

7.2.23. $\vec{a}_r = (A/r - A^2t^2/r^3)\vec{e}_r.$

7.2.26. $\oint \vec{v}\, d\vec{l} = -4.$

7.2.29. $\vec{a}(x_1, x_2) = (0,4 + 0,64x_1)\vec{e}_1 + (-1,2 + 0,64x_2)\vec{e}_2.$

7.2.30. $$x_2 = \frac{C}{0,8(0,5 + 0,8x_1)} + 1,875.$$

7.2.31. $\vec{\omega} = 0, \qquad \varepsilon_{11} = 0,8, \qquad \varepsilon_{22} = -0,8, \qquad \varepsilon_{33} = 0,$

$$\varepsilon_{12} = 0, \qquad \frac{1}{\delta V}\cdot\frac{d\,\delta V}{dt} = 0.$$

7.2.32. $\vec{\omega} = -x_2\vec{e}_3.$

7.3. Динамика текучей среды

7.3.5. $$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) \exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} (\mathrm{div}\,\vec{v}(\vec{r}', t'))|_{\vec{r}' = \vec{R}(t'; t_0, \vec{r}_0)} dt'\right\}.$$

7.3.6. $$\rho(\vec{r}, t) = f\left(\vec{r} - \int\limits_0^t \vec{v}(\tau) d\tau\right).$$

7.3.7. $$\rho(\vec{r}, t) = \rho(t) = \rho_0 \exp\left[-3\int\limits_0^t H(\tau) d\tau\right].$$

7.3.8. $$t = \frac{1}{3}\int\limits_{\rho}^{\rho_0} \frac{d\rho'}{\rho' H(\rho')}.$$

7.3.10. $H(t) = H_0/(1 + H_0 t)$, $\rho(t) = \rho_0/(1 + H_0 t)^3$.

7.3.13. $w_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3A/2 \\ 0 & 0 & -3A \\ -3A/2 & 3A & 0 \end{pmatrix}$.

7.3.15. $\phi = \vec{v}\,\vec{r} + \text{const}$.

7.3.16. а) $\vec{v} = a\vec{e}_x$, б) $\vec{v} = (b/r)\vec{e}_r$, в) $\vec{v} = \dfrac{c\vec{e}_\varphi}{r\sin\theta}$.

7.3.18. Лучи, выходящие из начала координат.

7.3.19. $\Gamma_C = 0$, $N_C = 2\pi a$.

7.3.20. $v_{|z|=a} = 2v_\infty|\sin\alpha|$.

7.3.21. $z_{1,2} = \pm R$.

7.3.22. $z_{1,2} = i\Gamma/(4\pi v_\infty) \pm \sqrt{R^2 - (\Gamma/4\pi v_\infty)^2}$.

7.3.23. $z = c/x^2 = c/y^2$.

7.3.24. $A = a^3 v_\infty/2$, $B = v_\infty$.

7.3.25. $v = (3/2)v_\infty \sin\theta$.

7.3.26. $p\,(r) = (2/3)\ \pi\gamma\rho^2\left(R^2 - r^2\right)$.

7.3.27. $z = \left[\dfrac{kp_0}{(k-1)\rho_0 g}\right]\left(N^{1-1/k} - 1\right)$.

7.3.28. $dz/dx = -a_2/(a_3 + g)$.

7.3.29. $z = z_0 + \Omega^2 r^2/(2g)$.

7.3.30. $\Omega = 2\sqrt{Vg/\pi}\Big/R^2$.

7.3.31. $r = \dfrac{R}{\sqrt{1 - \left(\Omega^2/k\right)\sin^2\theta}}$.

7.3.32. $\varepsilon \equiv (R_{\text{э}} - R_{\text{п}})/R_0 = \Omega^2 R_0/(2g) \approx \dfrac{1}{580}$.

7.3.34. $v = \dfrac{S_2}{S_1}\sqrt{2gh}$, где h – разность между уровнем поверхности жидкости в сосуде и уровнем измерения скорости в струе.

7.3.35. $\mathcal{P} = [\gamma/(\gamma-1)]p/\rho = c_pT$. Давление, плотность и температура с ростом скорости жидкости вдоль линии тока падают.

7.3.37. $p_2 = p_1 + \left(\rho v_1^2/2\right)\left[1 - S_1^2/S_2^2\right]$.

7.3.39. $\nabla p = -3(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)\rho$.

7.3.40. $\nabla p = \rho\Omega^2\vec{r}$.

7.3.41. $p = \dfrac{\rho}{2}\left(\dfrac{Q}{4\pi}\right)^2\left(\dfrac{1}{r_0^4} - \dfrac{1}{r^4}\right)$.

7.4. Уравнения баланса

7.4.2. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v^2}{2} + u\right) = 0$.

7.4.4.
$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \mathrm{div}(n_0\vec{v}_0) = -An_0 + Bn_1n_{-1},$$
$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \mathrm{div}(n_1\vec{v}_1) = A_n0 - Bn_1n_{-1} - Cn_1 + Dn_2n_-,$$
$$\frac{\partial n_2}{\partial t} + \mathrm{div}(n_2\vec{v}_2) = Cn_1 - Dn_2n_-,$$
$$\frac{\partial n_-}{\partial t} + \mathrm{div}(n_-\vec{v}_-) = An_0 - Bn_1n_- + Cn_1 - Dn_2n_-.$$

7.4.5. $\dfrac{\partial(n_0 + n_2 + n_3)}{\partial t} + \mathrm{div}(n_0\vec{v}_0 + n_1\vec{v}_1 + n_2\vec{v}_2) = 0$.

7.4.6. $\dfrac{\partial(n_1 + 2n_2 - n_-)}{\partial t} + \mathrm{div}(n_1\vec{v}_1 + 2n_2\vec{v}_2 - n_-\vec{v}_-) = 0$.

7.4.7. $\dfrac{\partial\theta}{\partial t'} = \dfrac{\partial\theta}{\partial t} + \vec{V}\mathrm{grad}\theta$.

7.4.8. $\vec{j}'_A = \vec{j}_A - \rho_A\vec{V}$.

7.4.9. $\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_V \rho A dV = -\oint_S \vec{j}_A d\vec{S} + \int_V Q_A dV$.

7.4.10.
$$\rho\frac{\partial A}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{J}_A = Q_A,$$
$$\int_V \rho\vec{A}dV = -\oint_S \vec{J}_A d\vec{S} + \int_V Q_A dV.$$

7.4.11. $\rho\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho A\vec{v}).$

Глава 8. Идеальная жидкость

8.1. Течение идеальной жидкости

8.1.3. $\dfrac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\vec{\omega}, \vec{v}] = 0.$

8.1.5. $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + [v(\rho) \pm c(\rho)]\dfrac{\partial\rho}{\partial x}.$

8.1.6. $\dfrac{\partial v}{\partial t} + [v \pm c(v)]\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0.$

8.1.7. $\dot{\varepsilon}_{ij}\sigma_{ij} = \dfrac{p}{\rho}\dfrac{d\rho}{dt}.$

8.1.9. $(u - c)\dfrac{dU}{d\xi} + \beta\dfrac{d^3U}{d\xi^3} = 0.$

8.1.13. $\dfrac{\partial S}{\partial t} = -\left\{\sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\nabla S - \dfrac{e}{c}\vec{A}\right)^2} + e\varphi\right\}.$

8.2. Волновое движение

8.2.1. $\rho\nabla\left(\dfrac{1}{\rho}\nabla p\right) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$

8.2.2. $\Delta\varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$

8.2.3. $p/v_x = \rho_0 c.$

8.2.4. $p = -K\nabla^2\psi = -\rho\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$

8.2.5. $k = \dfrac{\omega}{c}.$

8.2.9. $u_r(r) = Ae^{ikr}\left(\dfrac{ik}{r} - \dfrac{1}{r^2}\right).$

8.2.10. $\psi(x,y,z,t) = Ae^{i\omega t}\sin\left(\frac{l\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{2}\right)$.
Здесь $\omega^2 = \pi^2 c_0^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)$, c_0 – скорость звука, а l, m и n – натуральные числа $(1,2,3,\ldots)$.

8.3. Движение тел в идеальной жидкости

8.3.1. $\vec{F} = -\frac{1}{2}m'\vec{a}$, где m' – масса жидкости, вытесненная шаром.

8.3.2. $F = -(\rho/2)\int_C f'^2(z)dz$ – формула Чаплыгина.

8.3.3. $|\vec{F}| = \rho|\vec{v}_\infty|\Gamma$ – теорема Жуковского о подъемной силе.

8.3.4. $p(t) = p_0 + (5/2)\rho\alpha^2 R_0^2 e^{-2\alpha t}$.

8.3.5. $\vec{F} = -(2/3)\pi a^3\rho\dot{\vec{v}}, \quad \mu = (2/3)\pi a^3\rho$, ρ – плотность жидкости.

8.3.6. $v_r = v_\infty\left(1 - a^2/r^2\right)\cos\theta, \quad v_\theta = -v_\infty\left(1 + a^2/r^2\right)\sin\theta + b/r$,
$F_x = 0, \quad F_y = -2\pi\rho b v_\infty$ (подъёмная сила Жуковского).

8.3.7. $R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho}[p(R) - p(\infty)]$.

8.3.8. $p(R) = \left(p(\infty) + \frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R}$.

8.3.10. $\omega_0 = \frac{1}{R_0}\left[\frac{3\gamma}{\rho}\left(p_\infty + \frac{3\gamma-1}{3\gamma}\frac{2\sigma}{R_0}\right)\right]^{1/2}$.

8.3.11. $\vec{F} = \rho\int\vec{v}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,dV - \rho\int[\vec{v}, \mathrm{rot}\,\vec{v}]\,dV$, где интегрирование распространяется по всей области, занятой жидкостью.

8.3.13. $\vec{P} = m\vec{v}_0$.

8.3.14. $\mathcal{E} = (1/2)(m + M/2)v_0^2$, где M – «присоединенная» масс, равная массе жидкости в объеме шара.

8.3.15. $(c^2 - \phi_x^2)\phi_{xx} + (c^2 - \phi_y^2)\phi_{yy} + (c^2 - \phi_z^2)\phi_{zz} =$
$= 2(\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_x\phi_z\phi_{zx} + \phi_y\phi_z\phi_{yz})$,
$\phi_x \equiv \partial\phi/\partial x, \quad \phi_{xy} \equiv \partial^2\phi/\partial x\partial y$ и т.д.

8.3.16. $\left[1-(v_0/c)^2\right]\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}=0.$

8.3.17. $p=p_0-\rho_0 v_0 v_x-(\rho_0/2)(v_y^2+v_z^2).$

8.4. Магнитогидродинамика

8.4.3. $\dfrac{v}{v_0}=\dfrac{\cos(\alpha a)-\cos(\alpha z)}{\cos(\alpha a)-1}$, v_0 – скорость в середине течения

$$v_x=-\frac{a}{\alpha\eta}\,\mathrm{cth}\,(a\alpha)\,\left[1-\frac{\mathrm{ch}(\alpha z)}{\mathrm{ch}(\alpha a)}\right]\,\frac{\partial p}{\partial x},$$

где $\alpha=\dfrac{H_0}{c}\sqrt{\dfrac{\sigma}{\eta}}$.

С возрастанием магнитного поля профиль скоростей становится более плоским на большей части сечения, средняя скорость движения (при фиксированном градиенте давления) уменьшается.

8.4.5. $-\omega\vec{h}=[\vec{k},[\vec{v},\vec{H}]]$,

$\omega\rho_1=\rho\vec{k}\vec{v}$,

$-\omega\vec{v}+\dfrac{u_0^2}{\rho}\,\rho_1\vec{k}=-\dfrac{1}{4\pi\rho}[\vec{H},[\vec{k},\vec{h}]]$,

где $u=\omega/k$ – фазовая скорость волны.

8.4.6. $$uh_x=-v_zH_x,\qquad uv_x=-\frac{H_x}{4\pi\rho}\,h_z \tag{1}$$

$$uh_y=v_xH_y-v_yH_x,\ uv_y=-\frac{H_x}{4\pi\rho}\,h_y,\ \left(u-\frac{u_0^2}{u}\right)v_x=\frac{H_y}{4\pi\rho}\,h_y. \tag{2}$$

Возмущения (h_z,v_z) и (h_y,v_x,v_y) распространяются независимо друг от друга. Возмущения плотности и давления распространяются вместе с возмущениями второй группы и связаны с ними соотношением $\rho_1=(\rho/u)v_x$.

8.4.7. $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}\vec{H}\vec{k},\qquad \dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}=\dfrac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}.$

Групповая скорость $\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}$, характеризующая направление распространения волнового возмущения, не зависит от направления волнового вектора $\vec{k}$ и совпадает по направлению с магнитным полем $\vec{H}$.

8.4.8. $u_{2,3} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{u_0^2 + \dfrac{H^2}{4\pi\rho} + \dfrac{H_x u_0}{\sqrt{\pi\rho}}} \pm \sqrt{u_0^2 + \dfrac{H^2}{4\pi\rho} - \dfrac{H_x u_0}{\sqrt{\pi\rho}}}\right)$.

В пределе $H^2 \ll 4\pi\rho u_0^2$ имеем $u_2 \approx u_0$, $v_y \ll v_x$. Этот тип волн переходит в обычные звуковые волны, распространяющимся со скоростью u_0. Слабое поперечное поле связано с продольной скоростью соотношением $h_y \approx \dfrac{v_x H_y}{u_0}$.

Предельное поведение u_3 в первом приближении совпадает с u_1, причём $v_x \approx 0$, $v_y \approx -h_y/\sqrt{4\pi\rho}$, как и в волне первого типа, но с векторами $\vec{v}$ и $\vec{h}$, лежащими в плоскости $\vec{k}, \vec{H}$.

При $u_0 \to \infty$ (несжимаемая жидкость) остаётся всего один тип волн (волны Альфвена) с законом дисперсии $u_1 = \dfrac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}$.

Векторы $\vec{v}$ и $\vec{h}$ перпендикулярны волновому вектору и связаны равенством $\vec{v} = -\dfrac{\vec{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}$.

8.4.9. В указанном приближении $u_2 = \dfrac{H}{4\pi\rho}$, групповая скорость совпадает с u_2 и направлена вдоль $\vec{k}$, вектор $\vec{v} \perp \vec{H}$, $v = \dfrac{h}{\sqrt{4\pi\rho}}$.

Для u_3 имеем $u_3 = u_0 \dfrac{H_x}{H}$.

Групповая скорость этой волны $\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} = u_0 \dfrac{\vec{H}}{H}$.

Вектор $\vec{v}$ в этой волне антипараллелен $\vec{H}$, $v = h\dfrac{H^2}{4\pi\rho u_0 H_y}$.

8.4.10. $\dfrac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(p + \dfrac{b^2}{8\pi}\rho^2\right)$.

Отличие от обычной гидродинамики только в замене p на $p^* = p + \dfrac{b^2}{8\pi}\rho^2$.

8.4.11. $u^* = \sqrt{u_0^2 + \dfrac{H^2}{4\pi\rho}}$.

8.5. Вселенная как сплошная среда

8.5.1. $\dfrac{\partial\rho_1}{\partial t}+\nabla(\rho\vec{u}_1)=0, \qquad \dfrac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}=-\dfrac{u_{\text{зв}}^2}{\rho}\nabla\rho_1+\vec{g}_1,$

$[\nabla,\vec{g}_1]=0, \qquad \nabla\,\vec{g}_1=-4\pi G\rho_1.$

8.5.2. $\omega^2=k^2v_{\text{з}}^2-4\pi G\rho.$

8.5.3. $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+3\dfrac{\dot a}{a}\rho+\dfrac{1}{a}\nabla(\rho\vec{v})=0.$

8.5.4. $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\dfrac{1}{a}(\vec{v}\nabla)\vec{v}+\dfrac{\dot a}{a}\vec{v}=-\dfrac{1}{\rho a}\nabla p-\dfrac{1}{a}\nabla\Phi.$

8.5.5. $\dfrac{\partial^2\delta}{\partial t^2}+2\dfrac{\dot a}{a}\dfrac{\partial\delta}{\partial t}=4\pi G\rho_0\delta.$

8.5.6. $\delta(\vec{x},t)=A(\vec{x})t^{2/3}+B(\vec{x})t^{-1}.$

8.5.7. $\lambda_{\text{Дж}}=v_{\text{зв}}\sqrt{\dfrac{\pi}{G\rho_0}}.$

8.5.8. $\dfrac{\partial^2\delta}{\partial t^2}+2\dfrac{\dot a}{a}\dfrac{\partial\delta}{\partial t}=\dfrac{1}{a^2}\nabla[(1+\delta)\nabla\rho_0\Phi]+\dfrac{1}{ma^7\rho_0}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\displaystyle\int p_ip_jn(\vec{x},\vec{p},t)d\vec{p}.$

Глава 9. Вязкая жидкость

9.1. Течение вязкой жидкости

9.1.1. $v_x\,(y)=uy/h.$

9.1.2. $v_x\,(y)=\dfrac{1}{2\eta}\left|\dfrac{dp}{dx}\right|\left[\left(y-\dfrac{l}{2}\right)^2-\left(\dfrac{l}{2}\right)^2\right].$

9.1.4. $v=\dfrac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}z(2h-z),$

$p=p_0+\rho g\cos\alpha\cdot(h-z),$

$Q=\dfrac{\rho gh^3\sin\alpha}{3\nu}.$

9.1.5. $p=p_0+\dfrac{3\eta u}{h^3}\left(R^2-r^2\right).$

9.1.6. $\varepsilon \propto \sqrt{\eta}$.

9.1.7. $\vec{F} = 6\pi\eta R\vec{v}_\infty$ (формула Стокса).

9.1.8. $\vec{F} = 6\pi\eta R < \vec{v} >_{r=a}$.

9.1.9. $F = \rho v^2 R^2 f(\rho v R/\eta, v/c)$, явный вид функции f не может быть определён методом размерностей.

9.2. Установившиеся течения

9.2.1. $Q = \dfrac{\pi}{8\nu}\left|\dfrac{dp}{dx}\right| R^4$.

9.2.2. $Q = \dfrac{\pi}{8\nu}\left|\dfrac{dp}{dx}\right| \left[R_2^4 - R_1^4 - \left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 \Big/ \ln\left(R_2/R_1\right)\right]$.

9.2.3. $Q = \dfrac{\pi}{4\nu}\left|\dfrac{dp}{dx}\right| \dfrac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$.

9.2.4. $v\left(r\right) = \dfrac{\ln\left(r/R_2\right)}{\ln\left(R_1/R_2\right)} u$.

9.2.5. $\dfrac{dp}{dr} = \rho\dfrac{v^2}{r}, \quad \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{dr}\right) - \dfrac{v}{r^2} = 0$.

9.2.6. $\vec{v} = (\Omega R^2/r)\vec{e}_\varphi$.

9.2.7. $\vec{v} = \dfrac{\Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(r - \dfrac{R_1^2}{r}\right)\vec{e}_\varphi$.

9.2.8. $\vec{v} = [\vec{\Omega}\vec{r}]R^3/r^3, \quad r > R$.

9.2.9. $M_z = -8\pi\eta R^3\Omega$.

9.2.10. $v(t) = \left[2a^2(\rho - \rho_0)/9\eta\right]\left\{(n-1) - n\exp(-(9/2)(\eta/\rho a^2)t)\right\}$.

9.2.11. $T_0 = \left[1 + \dfrac{æ_0 - æ_1}{2æ_0 + æ_1}\left(\dfrac{R}{r}\right)^3\right]\vec{B}\vec{r}$,

$$T_1 = \frac{3æ_0}{æ_1 + 2æ_0}\vec{B}\vec{r}.$$

9.2.12. $T = T_0 + < v >^2 (\nu/\chi c_p)[1 - (r/R)^4]$.

9.2.13. $p(z) = \sqrt{p_0^2 + \dfrac{16\eta QT}{\pi m R^4} z}$.

9.3. Неустановившиеся течения

9.3.1. $\dfrac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = -\dfrac{\eta}{2} \displaystyle\int (v_{i,k} + v_{k,i})^2 dV$.

9.3.2. $\dfrac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = -\eta \displaystyle\int_S \nabla v^2 d\vec{S}$.

9.3.3. $F = 12\pi\eta R^2 u$.

9.3.5. $v_z = \dfrac{\text{const}}{4\pi D z} \exp\left\{-(x^2+y^2)/4Dz\right\}$.

9.3.6. $q_z(r,t) = \Gamma/(8\pi\nu t) \exp\left(-r^2/4\nu t\right)$, ν – коэффициент диффузии, Γ – постоянная.

9.3.7. $v_\varphi(r,t) = (\Gamma/2\pi r)\left[1 - \exp(-r^2/4\nu t)\right]$.

9.3.8. $v_y(x,t) = v_0 \exp(-\sqrt{\omega\rho/2\eta}\,x) \cos\left(\sqrt{\omega\rho/2\eta}\,x - \omega t\right)$,

$\delta = \sqrt{2\eta/\omega\rho}$.

9.3.9. $\sigma_0 = -k v_0 \eta \operatorname{ctg} kh, \qquad \sigma_h = \dfrac{\eta k v_0}{\sin kh}$.

9.3.10. На единичную площадь поверхности действует сила

$\sigma_{0...} = \eta v_0 k \operatorname{tg} kh$.

9.3.11. Средняя (по сечению) скорость даётся вещественной частью функции $U = \dfrac{ia}{\omega} e^{-i\omega t} \left(1 - \dfrac{2}{kh} \operatorname{tg} \dfrac{kh}{2}\right)$.

9.3.12. $F = 2\pi\rho R^3 \alpha \left\{\dfrac{1}{3} + \dfrac{3\nu}{R^2} t + \dfrac{6}{R}\sqrt{\dfrac{\nu t}{\pi}}\right\}, \qquad t \geqslant 0$.

9.3.13. $F = 6\pi\rho\nu R u_0 \left(1 + \dfrac{R}{\sqrt{\pi\nu t}}\right) + \dfrac{6\pi\rho R^3}{3} u_0 \delta(t)$.

9.3.15. $\operatorname{Im} k = -\left(\zeta + \dfrac{4}{3}\eta\right) \dfrac{\omega^2}{2\rho_0 c^3}$.

9.4. Турбулентность

9.4.1. $$\frac{a_{ij}}{k} = \begin{pmatrix} 0,41 & -0,32 & 0 \\ -0,32 & -0,27 & 0 \\ 0 & 0 & -0,15 \end{pmatrix},$$

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} 0,21 & -0,16 & 0 \\ -0,16 & -0,13 & 0 \\ 0 & 0 & -0,07 \end{pmatrix},$$

$$\rho_{12} = \frac{\langle u_1 u_2 \rangle}{\sqrt{\langle u_1^2 \rangle \langle u_2^2 \rangle}} = -0,49.$$

9.5. Турбулентное течение

9.5.3. $$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (v_i v_j - \langle v_i v_j \rangle)}{\partial x_i} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p - \langle p \rangle)}{\partial x_j}.$$

9.5.5. $$t \sim \frac{2}{3} \left(\frac{l^2}{\varepsilon} \right)^{1/3}.$$

Заметим, что рассматриваемой *турбулентной* диффузии $l^2 \propto t^3$, тогда как в случае молекулярной диффузии (броуновского движения) средний квадрат этого расстояния пропорционален t.

9.5.6. $v = \mathrm{const} \cdot t^{-5/7}$.

9.5.7. $u = \dfrac{v_*}{\kappa}(\ln y + C)$, где $v_* = \sqrt{\sigma/\rho}$ – характерная скорость, C – постоянная интегрирования, а κ – безразмерная постоянная (экспериментальное значение $\kappa = 0,417$).

9.5.8. $$u = \frac{\sigma}{\rho\nu}\, y = \frac{v_*^2}{\nu}\, y.$$

9.5.9. $$u(y) = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\nu}.$$

9.5.10. $$\bar{u} \approx \frac{2v_*}{\text{æ}} \ln \left(\frac{R v_*}{\nu} \right).$$

Из-за неэквивалентности плоской и круглой стенок результат этот оказывается завышенным. Более близкой к реальности оказывается формула

$$\bar{u} \approx \frac{v_*}{\text{æ}} \ln \left(\frac{R v_*}{\nu} \right).$$

9.5.11. $\bar{u} = \sqrt{\dfrac{R\Delta p}{2\kappa^2 \rho \Delta l}} \ln \left(\dfrac{R}{\nu} \sqrt{\dfrac{R\Delta p}{2\rho \Delta l}} \right)$.

9.5.12. $\bar{u} = \dfrac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} u_0$.

Глава 10. Упругая среда

10.1. Изотропная упругая среда

10.1.1. $K = \dfrac{\mathrm{E}}{3(1-2\nu)}$.

10.1.2. $\mathrm{E} = (2\mu + 3\lambda)\,\mu/(\mu+\lambda)$; $\nu = \lambda/[2\,(\mu+\lambda)]$; $K = \lambda + (2/3)\,\mu$.

10.1.3. $\mathrm{E} = \dfrac{9K\mu}{3K+\mu}$, $\nu = \dfrac{1}{2}\dfrac{3K-2\mu}{3K+\mu}$.

10.1.12. $U = \dfrac{m^2 a^2 l}{6\mathrm{E}S}$.

10.1.13. $U = \dfrac{P^2 h}{6\mathrm{E}S}$.

10.1.14. $U = \left[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\nu\sigma_{11}\sigma_{22} + 2(1+\nu)\sigma_{12}^2\right]/2\mathrm{E}$.

10.1.15. $U = (\mu + \lambda/2)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + \lambda\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2\mu\varepsilon_{12}^2$.

10.1.16. $U = \dfrac{\mu\pi R^4}{4l}\alpha^2$.

10.1.17. $\sigma_{11} = \dfrac{\mathrm{E}}{1+\mu}\left[\varepsilon_{11} + \dfrac{\mu}{1-2\mu}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right)\right]$,

$$\sigma_{12} = \frac{\mathrm{E}}{1+\mu}\varepsilon_{12}.$$

10.1.18. $U = \dfrac{\mu\pi}{4l}\left(R_2^4 - R_1^4\right)\alpha^2$.

10.2. Элементарные статические задачи

10.2.1. $\varepsilon_{ij} = \dfrac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \dfrac{\lambda\sigma_{kk}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\delta_{ij}.$

10.2.2. $K = (3\lambda + 2\mu)/3.$

10.2.3. $\varepsilon_{ij} = -\dfrac{p}{\mathrm{E}(1-2\nu)}\delta_{ij}, \quad \vec{u} = -\dfrac{p}{\mathrm{E}(1-2\nu)}\vec{r}.$

10.2.4. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\dfrac{\sigma\nu}{\mathrm{E}}, \quad \varepsilon_3 = \dfrac{\sigma}{\mathrm{E}}.$

10.2.9. $\sigma_{rr,r} + \sigma_{r\varphi,\varphi}/r + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})r + f_r = 0,$

$\sigma_{\varphi\varphi,\varphi} + 2\sigma_{r\varphi}/r + 2\sigma_{r\varphi}/r + f_r = 0.$

10.3. Волны в упругой среде

10.3.1.
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \alpha^2\nabla^2\phi,$$
$$\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} = \beta^2\nabla^2\vec{\psi},$$
$$\alpha^2 = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}\right), \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\rho_0}.$$

10.3.2. $\rho(\partial^2 u/\partial t^2) - k(\partial^2 u/\partial x^2) = 0.$

10.3.3. $c = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}.$

10.3.4. $\tau = 2\pi\sqrt{\big(I + \pi\rho a^4 L/6\big)/k}.$

10.3.5. $\tau' = \tau\sqrt{(R^2 - a^2)/(R^2 + a^2)}.$

10.3.6. $\omega = \dfrac{a^2}{2}\sqrt{\dfrac{\mathrm{E}}{mL^3}}.$

10.3.9. $u(x,t) = \begin{cases} 0, & x > \alpha t, \\ (t - x/\alpha)e^{-b(t-x/\alpha)}, & x < \alpha t. \end{cases}$

10.3.10. $u(x,t) = \begin{cases} 0, & x > \alpha t, \\ \dfrac{1}{b}[1 - e^{-b(t-x/\alpha)}], & x < \alpha t. \end{cases}$

10.3.11. $u(x,t) = \dfrac{\sigma_0}{ik(s+2\mu)} e^{i(kx-\omega t)}$.

10.3.12. $\sigma_{33} = -k^2(\lambda + 2\mu \sin^2\theta)\phi$.

10.3.13. $\rho = \rho_0(1 + k^2\phi)$.

10.3.14. $\tilde{u}(k,t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-i\alpha kt} + e^{i\alpha kt}\right)\tilde{u}_0(k)$.

10.4. Шары, стержни, балки

10.4.1. $u_x = (\nu/\mathrm{E})\,\rho g\,(l-z)\,x, \quad u_y = (\nu/\mathrm{E})\,\rho g\,(l-z)\,y,$
$u_z = -(\rho g/2\mathrm{E})\left[l^2 - (l-z)^2 - \nu(x^2+y^2)\right].$

10.4.2. $u_\varrho = \rho\Omega^2 \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{8E\,(1-\nu)}\varrho\left[(3-2\nu)\,R^2 - \varrho^2\right].$

10.4.3. $u_r = -\dfrac{g\rho R\,(1-2\nu)(1+\nu)}{10E\,(1-\nu)}\; r\left[\dfrac{3-\nu}{1+\nu} - \dfrac{r^2}{R^2}\right],$

$$p = \frac{3-\nu}{10\,(1-\nu)}\; g\rho R.$$

10.4.4. $\sigma_{rr} = \dfrac{pa^3}{b^3-a^3}\left(1 - \dfrac{b^3}{r^3}\right), \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \dfrac{pa^3}{b^3-a^3}\left(1 + \dfrac{b^3}{2r^3}\right),$

10.4.5. $\sigma_{\varrho\varrho} = \dfrac{pa^2}{b^2-a^2}\left(1 - \dfrac{b^2}{\varrho^2}\right), \qquad \sigma_{\varphi\varphi} = \dfrac{pa^2}{b^2-a^2}\left(1 + \dfrac{b^2}{\varrho^2}\right),$

$$\sigma_{zz} = 2\nu\frac{pa^2}{b^2-a^2}.$$

10.4.6. $C_1/C_0 = \pi b/3a$.

10.4.7. $\delta C_a/C_b = (b/a)^2$.

10.4.8. $C_{\text{кр}} = \mu\pi R^4/2$.

10.4.9. $C_{\text{кр}} = \pi\mu\dfrac{a^3b^3}{a^2+b^2}$.

10.4.10. $C_{\text{кр}} = \mu\pi(R_2^4 - R_1^4)/2$.

10.5. Кристаллы

10.5.1. $\dfrac{\pi}{6}$.

10.5.2. $R_0 = \left(\dfrac{nA}{aq^2}\right)^{1/(n-1)}, \quad U(R_0) = -\dfrac{2Naq^2}{R_0}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

10.5.3. $A \approx \dfrac{Naq^2}{R_0}(n-a)\delta^2$.

10.5.5. $F = -C(R-R_0) + D(R-R_0)^2, \quad C = \left.\dfrac{d^2V}{dR^2}\right|_{R_0} > 0,$

$D = -\dfrac{1}{2}\left.\dfrac{d^3V}{dR^3}\right|_{R_0}$.

10.5.6. $\dfrac{dN}{d\omega} = \dfrac{2L}{\pi a}\,\dfrac{1}{\sqrt{\omega_m^2 - \omega^2}}$.

10.5.7. $v_{\text{фаз}} = \left|\dfrac{\omega}{q}\right| = v_0\left|\dfrac{\sin(aq/2)}{aq/2}\right|,$

$v_{\text{гр}} = \left|\dfrac{d\omega}{dq}\right| = v_0|\cos(aq/2)|,$

где $v_0 = a\sqrt{C/m}$ – скорость звука в однородной упругой среде.

10.5.8. $\omega_{1,2}^2 = \dfrac{\omega_0^2}{2}\left[1 \mp \sqrt{1 - \gamma^2\sin^2(aq/2)}\right],$

где $\omega_0^2 = \dfrac{(C_1+C_2)(m_1+m_2)}{m_1m_2}, \quad \gamma^2 = 16\dfrac{C_1C_2}{(C_1+C_2)^2}\dfrac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$.

Верхняя кривая представляет оптическую ветвь, нижняя – акустическую.

10.5.9. $\dfrac{\omega_\parallel}{\omega_\perp} = \sqrt{\dfrac{\epsilon_0}{\epsilon_\infty}}$.

10.5.10. $\langle E\rangle = \dfrac{h\nu}{\exp(h\nu/k_{\text{Б}}T) - 1}$.

10.5.11. $U = 4\pi V_0(v_\parallel^{-3} + 2v_\perp^{-3})\displaystyle\int_0^{\nu_m}\dfrac{h\nu^3 d\nu}{\exp(h\nu/k_{\text{Б}}T) - 1}$.

Глава 11. Вязкоупругие и неупругие среды

11.1. Вязкоупругие среды

11.1.2. Последовательное соединение простых элементов Кельвина.

11.1.4. Параллельное соединение простых элементов Максвелла.

11.1.5. $(\eta_1/\mathrm{E}_2)\dot{\sigma} + (1 + \mathrm{E}_1/\mathrm{E}_2)\sigma = \eta_1\dot{\varepsilon} + \mathrm{E}_1\varepsilon$.

11.1.6. $(1 + \eta_1/\eta_2)\dot{\sigma} + (\mathrm{E}_1/\eta_2)\sigma = \eta_1\ddot{\varepsilon} + \mathrm{E}_1\dot{\varepsilon}$.

11.1.7. $\ddot{\sigma} + \left(\dfrac{\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2}{\eta_1} + \dfrac{\mathrm{E}_2}{\eta_2}\right)\dot{\sigma} + \left(\dfrac{\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2}{\eta_1\eta_2}\right)\sigma = \mathrm{E}_2\ddot{\varepsilon} + \left(\dfrac{\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2}{\eta_1}\right)\dot{\varepsilon}$.

11.1.8. $\dot{\sigma} + \left(\dfrac{\mathrm{E}_2}{\eta_2}\right)\sigma = \eta_1\ddot{\varepsilon} + \left[\mathrm{E}_1 + \left(1 + \dfrac{\eta_1}{\eta_2}\right)\mathrm{E}_2\right]\dot{\varepsilon} + \dfrac{\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2}{\eta_2}\varepsilon$.

11.1.9. $\varepsilon(t) = C_1 e^{-t/\tau} + \dfrac{\sigma_0}{E} 1_+(t)\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$.

11.1.10. $\sigma(t) = e^{-t/\tau}[C_1 + \mathrm{E}\varepsilon_0 1_+(t)]$.

11.1.11. $\psi(t) = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{E}_i^{-1}\left(1 - e^{-t/\tau_i}\right), \quad t > 0$.

11.1.12. $\varphi(t) = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{E}_i e^{-t/\tau_i}, \quad t > 0$.

11.1.13. $\varepsilon(t) = \sigma_0\psi(t) - \dfrac{\sigma_0}{\theta}\displaystyle\int\limits_0^t \psi(t - t')e^{-t'/\theta}dt', \quad t > 0$.

11.1.14. $\psi(t) = \left[\mathrm{E}_2^{-1} + \mathrm{E}_1^{-1}\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right)\right]$.

11.1.15. $\varepsilon(t) = \sigma_0(e^2 - 1)e^{-t/\tau_1}/\mathrm{E}_1$.

11.1.16. $\sigma = \varepsilon_0(2\eta + \mathrm{E}t - \eta e^{-t/\tau})/t_1, \quad 0 < t < t_1$.

11.2. Упругопластичная среда

11.2.1. $\sigma = \mathrm{E}\left[\varepsilon - (2\nu + 1/2)\varepsilon^2\right]$.

11.2.2. $\varepsilon_{\|}^{\text{ист}} = 0,182, \qquad \varepsilon_{\perp 1}^{\text{ист}} = \varepsilon_{\perp 2}^{\text{ист}} = -0,091$.

11.2.3. $\varepsilon_{\|}^{\text{ист}} = 0,262, \qquad \varepsilon_{\perp 1}^{\text{ист}} = -0,157, \quad \varepsilon_{\perp 2}^{\text{ист}} = -0,105$.

11.2.4. $n = \varepsilon_m$, где ε_m – абсцисса точки максимума на графике $F(\varepsilon)$.

11.2.7. $A = V\left[\frac{\sigma_0(\varepsilon^{n+1} - \varepsilon_0^{n+1})}{n+1}\right]$.

11.2.8. $A = 2221$ Н · м.

11.2.9. $A = 158,4$ Н · м.

11.2.13. $u(r) = \dfrac{r}{\mathrm{E}}[(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r], \quad c \le r \le b$.

11.2.14. $r\dfrac{\partial \varepsilon_t}{\partial r} = e^{\varepsilon_r - \varepsilon_t} - 1$ (условие совместимости деформаций).

11.2.15. $r\dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 2e^{-(3/2)\varepsilon}\sigma$.

11.2.16. $\dot{\varepsilon}_b = \dfrac{(a/b)^3 e^{(3/2)\varepsilon_a}}{1 + (a/b)^3(e^{(3/2)\varepsilon_a} - 1)}\dot{\varepsilon}_a$.

11.3. Вязкопластичные среды

11.3.1. $\dfrac{d(\bar{r}\bar{\sigma}_r)}{d\bar{r}} - \bar{\sigma}_\theta + m\bar{r}^2 = 0$, где $m = \rho\Omega^2 b^2/\sigma_{\text{эфф}}$.

11.3.2. $\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_\theta = -m\dfrac{1-\bar{r}^2}{2}$.

11.3.3. $\bar{\sigma}_r = C_1 + \ln(\alpha/\bar{r}) + 1 - m\bar{r}^2/3 - C_2/\bar{r}, \quad \bar{\sigma}_\theta = C_1 + \ln(\alpha/\bar{r})$,
где $C_1 = \dfrac{m(1+\alpha+\alpha^2)}{3(1-\alpha)} - 1 - \dfrac{\ln\alpha}{1-\alpha}$,
$C_2 = \dfrac{m\alpha(1+\alpha)}{3} = \dfrac{\alpha\ln\alpha}{1-\alpha}, \quad \alpha = a/b$.

11.3.4. $\dfrac{d\varepsilon^{\text{плз}}}{dt} = mA^{1/m}\sigma^{n/m}(\varepsilon^{\text{плз}})^{1-1/m}$.

11.3.5. $$\sigma_r = -p\frac{(b/r)^{2/n} - 1}{(b/a)^{2/n} - 1},$$
$$\sigma_\theta = -p\frac{(1 - 2/n)(b/n)^{2/n} - 1}{(b/a)^{2/n} - 1},$$
$$\sigma_z = -p\frac{(1 + 1/n)(b/n)^{2/n} - 1}{(b/a)^{2/n} - 1}.$$

Приложения

П1. Дифференциальные операции в декартовых, цилиндрических и сферических координатах

Градиент скалярной функции:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi +$$

$$+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi.$$

Дивергенция векторной функции:

$$\nabla\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Ротор векторной функции:

$$\left[\nabla,\vec{A}\right] = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z =$$

$$= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z =$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, A_\varphi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r +$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi.$$

Лапласиан скалярной функции:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}.$$

Лапласиан векторной функции:

$$\Delta\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e}_y +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e}_z =$$

$$= \left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\rho + \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + \Delta A_z\vec{e}_z =$$

$$= \left(\Delta A_r - \frac{2}{r^2}A_r - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta\sin\theta\right) - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r +$$

$$+ \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\theta +$$

$$+ \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\varphi.$$

Оператор конвективной производной:

$$(\vec{v}\nabla)\,\vec{v} = v_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} =$$

$$= \left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r}\right)\vec{e}_r +$$

$$+ \left(v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \frac{v_r v_\varphi}{r}\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+ \left(v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\vec{e}_z =$$

$$= \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) \vec{e}_r +$$

$$+ \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi - v_\varphi^2 \mathrm{ctg}\theta}{r} \right) \vec{e}_\theta +$$

$$+ \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi + v_\theta v_\varphi \mathrm{ctg}\theta}{r} \right) \vec{e}_\varphi .$$

П2. Компоненты тензора деформации в прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах

В прямоугольных координатах:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad 2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad 2\varepsilon_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}.$$

В цилиндрических координатах:

$$\varepsilon_{\varrho\varrho} = \frac{\partial u_\varrho}{\partial \varrho}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varrho}{\varrho}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$2\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}, \quad 2\varepsilon_{\varrho z} = \frac{\partial u_\varrho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \varrho},$$

$$2\varepsilon_{\varrho\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varrho} - \frac{u_\varphi}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_\varrho}{\partial \varphi}.$$

В сферических координатах:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \mathrm{ctg}\theta + \frac{u_r}{r},$$

$$2\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \mathrm{ctg}\theta \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}, \quad 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta},$$

$$2\varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}.$$

Владимир Васильевич УЧАЙКИН

МЕХАНИКА
ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД
ЗАДАЧИ С УКАЗАНИЯМИ И ОТВЕТАМИ

Учебное пособие

Зав. редакцией
естественнонаучной литературы *М. В. Рудкевич*
Ответственный редактор *Т. С. Спирина*
Выпускающие *Н. А. Крылова, Е. А. Христенко*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com;
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел.: (812) 412-92-72, 336-25-09.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 12.10.17.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 60×90 $^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 20,00. Тираж 100 экз.

Заказ № 420-17.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.