

В. В. Учайкин

МЕХАНИКА

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ
СПЛОШНЫХ СРЕД



В. В. УЧАЙКИН

МЕХАНИКА

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Издание второе, стереотипное

ДОПУЩЕНО

*УМО по классическому университетскому образованию РФ
в качестве учебника для студентов вузов,
обучающихся по направлениям подготовки
ВО «Физика» и «Радиофизика»*



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА •
• КРАСНОДАР •
2021

ББК 22.25я73

У 90

Учайкин В. В.

У 90 Механика. Основы механики сплошных сред: Учебник. — 2-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2021. — 860 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-2235-7

Учебник написан в соответствии с действующими стандартами физических специальностей университетов и предназначен как для поддержки освоения лекционного курса, так и для самостоятельной работы. В изложении принципиальных вопросов используется традиционный методологический подход, новизна же учебника определяется прежде всего отбором материала и обновлением внутренней логики курса. Усилены связи механики с другими разделами теоретической физики — от атомной физики и физики плазмы до физики твердого тела и космологии. Увеличена доля механики сплошной среды в курсе, ставшей его органической частью благодаря переходу от механики систем материальных точек к механике систем большого числа частиц (газодинамике с элементами термодинамики) с выходом на феноменологию континуума. На этой основе излагается механика идеальных и вязких газов и жидкостей, упруго и неупруго деформируемых твердых тел. Последняя глава учебника представляет обзор актуальных направлений современной механики сложных систем — наследственной механики, мезомеханики, дробнодифференциальной механики, нелинейной динамики и др. Несмотря на привлечение таких математических средств, как функциональные производные, производные дробных порядков, нелинейные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, книга написана на уровне, доступном для студентов физических и инженерных специальностей университетов, и может быть использована при изучении начального раздела курса теоретической физики.

ББК 22.25я73

Рецензенты:

Г. А. МИХАЙЛОВ — доктор физико-математических наук, профессор Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, советник РАН; *Ю. Г. РУДОЙ* — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики и механики Российского университета дружбы народов.

Обложка

Е. А. ВЛАСОВА

© Издательство «Лань», 2021

© В. В. Учайкин, 2021

© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2021

*Светлой памяти деда моего
Дмитрия Елизаровича Целищева,
линейного механика
Обского пароходства*



1912

Ежели бы Невтон не лежал в саду под яблоней и ежели бы яблоко по случаю не упало ему на голову, может быть, что бы мы и по сие время в равном неведении о движении небесных тел обращались, и о бесчисленном множестве явлений от того зависящих. По сему сия материя достойна особливаго внимания Вашего Величества, и я ласкаю себя впредь говорить об оных.

Леонард Эйлер

На студента наибольшее впечатление производило не столько построение самого аппарата механики и решение сложных задач, сколько достижения механики в областях, на первый взгляд с ней совсем не связанных: механическая теория света, которая рассматривала свет как волновое движение квазитвёрдого упругого эфира, и прежде всего, кинетическая теория газов. Здесь следует упомянуть независимость теплоемкости одноатомных газов от атомного веса, вывод уравнения состояния газа и его связь с теплоемкостью и диффузией газов, которая и давала абсолютные размеры атомов. Эти результаты служили одновременно подтверждением механики как основы физики и подтверждением атомной гипотезы, которая уже твёрдо укрепилась в химии.

Альберт Эйнштейн

Успехи в изучении близлежащих к Земле систем настолько замечательны, что многие поверили в окончательность и неоспоримость законов и понятий классической механики, описывающей нашу физическую Вселенную. Однако, окончательных законов в строгом смысле не существует. Существует лишь приближённое описание некоторых аспектов чрезвычайно сложного физического мира с помощью идеализированных математических конструкций, но полное тождество отсутствует. Никогда не было и не будет никакого кризиса той или иной физической теории; кризис существует лишь в уме тех, кто метафизически переоценивает схему, порождённую наукой. Существует просто открытие новых явлений или более глубокое осмысление уже известных, показывающее, что первоначальные схемы уже непригодны для описания этих новых явлений.

Поль Жермен

Оглавление

Предисловие	19
1 Материальная точка в заданном силовом поле	25
1.1 Координаты, скорости, ускорения	25
1.1.1 Материальная точка	25
1.1.2 Координаты	26
1.1.3 Естественные координаты	30
1.1.4 Пример: качение колеса	32
1.1.5 Дополнение: о пространстве и времени	33
1.1.6 Упражнения	34
1.2 Силы	34
1.2.1 Три закона Ньютона	34
1.2.2 Два примера движения точки по эллипсу	39
1.2.3 Силы в механике	41
1.2.4 Примеры	45
1.2.5 Пуанкаре о массах и силах	49
1.2.6 Упражнения	52
1.3 Основные теоремы о движении точки	52
1.3.1 Уравнение движения	52
1.3.2 Теоремы об импульсе	54
1.3.3 Теоремы о моменте импульса	55
1.3.4 Кинетическая энергия и работа	56
1.3.5 Примеры: определение времени достижения	59
1.3.6 Упражнения	60
1.4 Одномерное движение	60
1.4.1 Прямолинейное движение	60
1.4.2 Интегрирование уравнений прямолинейного движения	62
1.4.3 Классификация движений в потенциальном поле	66

1.4.4	Обратная задача: определение силы по закону движения	67
1.4.5	Примеры	68
1.4.6	Упражнения	69
1.5	Одномерные колебания	70
1.5.1	Гармонические колебания	70
1.5.2	Падение сквозь Землю	71
1.5.3	Затухающие колебания	73
1.5.4	Вынужденные колебания	74
1.5.5	Параметрический резонанс	76
1.5.6	Нелинейные (ангармонические) колебания	78
1.5.7	Слабо нелинейные колебания	80
1.5.8	Обратная задача теории колебаний	82
1.5.9	Упражнения	83
1.6	Задачи с разделяющимися переменными	84
1.6.1	Разделение переменных	84
1.6.2	Сила, параллельная прямой	86
1.6.3	Сила, перпендикулярная прямой	87
1.6.4	Баллистическая задача	89
1.6.5	Центрально-симметричное поле	91
1.6.6	Центральные силы и формулы Бине	94
1.6.7	Примеры	96
1.6.8	Упражнения	98
1.7	Движение в кулоновском поле	98
1.7.1	Эффективный потенциал кулоновского поля	98
1.7.2	Траектории в ньютоновом поле	100
1.7.3	Скорости движения по кеплеровым орбитам	103
1.7.4	Время движения по кеплеровым орбитам	104
1.7.5	Вектор Лапласа	106
1.7.6	Тёмная материя	107
1.7.7	Приливное взаимодействие	109
1.7.8	Упражнения	109
1.8	Рассеяние частиц в центрально-симметричном поле	110
1.8.1	Сечение рассеяния	110
1.8.2	Пример: рассеяние частиц на шаре	112
1.8.3	Формула Резерфорда	112
1.8.4	Рассеяние на малые углы	114
1.8.5	Обратная задача теории рассеяния	116
1.8.6	Упражнения	118
1.9	Движение точки, ограниченное связями	118
1.9.1	Понятие связи	118

1.9.2	Движение точки по кривой	121
1.9.3	Пример: плоский маятник	122
1.9.4	Движение по поверхности вращения. Теорема Клеро	123
1.9.5	Сферический маятник	125
1.9.6	Движение по шероховатой поверхности	126
1.9.7	Упражнения	127
1.10	Движение в неинерциальной системе отсчёта	128
1.10.1	Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта	128
1.10.2	Абсолютная и относительная скорости	131
1.10.3	Абсолютное и относительное ускорения	133
1.10.4	Силы инерции	134
1.10.5	Примеры движения точки в НСО	135
1.10.6	Движение вблизи поверхности Земли	136
1.10.7	Упражнения	140
2	Системы материальных точек	141
2.1	Теоремы о движении системы материальных точек	141
2.1.1	Уравнения движения системы	141
2.1.2	Импульс системы	142
2.1.3	Момент импульса	143
2.1.4	Энергия	144
2.1.5	Теорема о вириале сил	146
2.1.6	Упражнения	147
2.2	Собственные характеристики системы	148
2.2.1	Система центра масс	148
2.2.2	Пример: решение задачи в СЦМ	148
2.2.3	Собственный момент	149
2.2.4	Собственная энергия	151
2.2.5	Система двух подсистем	153
2.2.6	Реактивное движение	154
2.2.7	Упражнения	156
2.3	Система двух тел	157
2.3.1	Движение замкнутой системы двух тел	157
2.3.2	Упругое столкновение	159
2.3.3	Соотношения между углами рассеяния в СЦМ и ЛСК	160
2.3.4	Передача энергии при упругом столкновении	163
2.3.5	Энергетические и угловые распределения частиц	164
2.3.6	Упругие столкновения одинаковых частиц	166
2.3.7	Неупругое столкновение и распад	168

2.3.8	Упражнения	170
2.4	Задача трёх тел	170
2.4.1	Уравнения и интегралы движения	170
2.4.2	Кинетическая энергия системы трёх тел	172
2.4.3	Способы понижения порядка системы уравнений	172
2.4.4	Ограниченные задачи трёх тел	175
2.4.5	Троянские астероиды	178
2.4.6	Упражнения	178
3	Абсолютно твёрдое тело	179
3.1	Скорости и ускорения	179
3.1.1	Определение абсолютно твёрдого тела	179
3.1.2	Поступательное движение твёрдого тела	181
3.1.3	Вращательное движение	182
3.1.4	Плоско-параллельное движение	185
3.1.5	Пример	188
3.1.6	Упражнения	189
3.2	Геометрия масс	189
3.2.1	Моменты инерции	189
3.2.2	Тензор инерции	193
3.2.3	Главные оси	196
3.2.4	Моменты инерции и симметрия	198
3.2.5	Приведение к главным осям	200
3.2.6	Примеры	201
3.2.7	Упражнения	202
3.3	Статика твёрдого тела	202
3.3.1	Условия равновесия	202
3.3.2	Скользящие векторы и эквивалентные системы	203
3.3.3	Определение опорных реакций	205
3.3.4	Расчёты поперечных сил и моментов. Эпюры	207
3.3.5	Графостатика	210
3.3.6	Упражнения	212
3.4	Динамика твёрдого тела	212
3.4.1	Уравнения движения	212
3.4.2	Уравнения движения в проекциях на оси подвижной системы	215
3.4.3	Динамические уравнения Эйлера	218
3.4.4	Пример: движение стержня	219
3.4.5	Упражнения	219
3.5	Вращение тела вокруг неподвижной оси	220
3.5.1	Уравнения движения, содержащие силы	220

3.5.2	Уравнения движения, содержащие моменты сил	221
3.5.3	Статические и динамические реакции	222
3.5.4	Физический маятник. Теорема Гюйгенса	223
3.5.5	Упражнения	225
3.6	Вращение тела вокруг неподвижной точки	225
3.6.1	Вращение с постоянной угловой скоростью	225
3.6.2	Устойчивость вращения вокруг главных осей	226
3.6.3	Вращение симметричного волчка	228
3.6.4	Кинетическая энергия симметричного волчка	230
3.6.5	Вращение асимметричного волчка	231
3.6.6	Упражнения	232
4	Аналитическая динамика	233
4.1	Механическая система в обобщённых координатах	233
4.1.1	От векторной механики к аналитической	233
4.1.2	Принцип Даламбера	234
4.1.3	Уравнения Лагранжа 1-го рода	236
4.1.4	Обобщённые координаты и скорости	238
4.1.5	Уравнения Лагранжа 2-го рода	241
4.1.6	Упражнения	242
4.2	Уравнения Лагранжа для системы материальных точек	242
4.2.1	Уравнения Лагранжа для потенциальных систем	242
4.2.2	Уравнения Лагранжа в векторной форме	243
4.2.3	Составление уравнений Лагранжа для потенциальных систем	245
4.2.4	Обобщённо-потенциальные системы	246
4.2.5	Функция Лагранжа в неинерциальной системе отсчёта	247
4.2.6	Упражнения	249
4.3	Принцип наименьшего действия и уравнения Лагранжа	250
4.3.1	Принцип наименьшего действия	250
4.3.2	Примеры	253
4.3.3	Свойства уравнений Лагранжа	255
4.3.4	Законы сохранения	257
4.3.5	Диссипативные системы	261
4.3.6	О механиках векторной и аналитической	263
4.3.7	Упражнения	264
4.4	Теория малых колебаний	264
4.4.1	Уравнения Лагранжа в теории малых колебаний	264
4.4.2	Собственные частоты и нормальные координаты	266
4.4.3	Колебания системы с вырожденными частотами	269

4.4.4	Колебания связанных систем	271
4.4.5	Одномерные кристаллы	273
4.4.6	Упражнения	275
4.5	Динамика твёрдых тел	276
4.5.1	Кинематические уравнения Эйлера	276
4.5.2	Уравнения Лагранжа для тяжёлого волчка	278
4.5.3	Двойной физический маятник	281
4.5.4	Соприкосновения тел	284
4.5.5	Неголономные связи при качении	286
4.5.6	Упражнения	291
4.6	Канонические уравнения	291
4.6.1	Уравнения Гамильтона	291
4.6.2	Фазовые портреты осциллятора и маятника	293
4.6.3	Скобки Пуассона. Теорема Пуассона	295
4.6.4	Пример применения теоремы Пуассона	298
4.6.5	Упражнения	300
4.7	Теория преобразований	300
4.7.1	Точечные преобразования Лежандра	300
4.7.2	Канонические преобразования	301
4.7.3	Производящие функции	302
4.7.4	Примеры канонических преобразований	304
4.7.5	Упражнения	308
4.8	Переменные «действие-угол» и адиабатические инварианты	308
4.8.1	Одномерный гармонический осциллятор	308
4.8.2	Система с одной степенью свободы	309
4.8.3	Адиабатические инварианты	310
4.8.4	Системы с несколькими степенями свободы	313
4.8.5	Переменные действие-угол и частоты системы	315
4.8.6	Примеры вычисления фазовых интегралов	316
4.8.7	Упражнения	319
4.9	Метод Гамильтона-Якоби	319
4.9.1	Главная функция	319
4.9.2	Нестационарное уравнение Гамильтона-Якоби	321
4.9.3	Теорема Якоби	324
4.9.4	Порядок решения задач методом Гамильтона-Якоби	326
4.9.5	Метод Гамильтона-Якоби для консервативных систем	327
4.9.6	Из истории теории Гамильтона-Якоби	328
4.9.7	Упражнения	332

4.10	Элементы классической теории поля	333
4.10.1	Лагранжиан упругой среды	333
4.10.2	Уравнения для плотности лагранжиана	334
4.10.3	Уравнения Лагранжа в функциональных производных	335
4.10.4	Гамильтониан сплошной среды	336
4.10.5	Канонические уравнения	337
4.10.6	О функциональных производных	338
4.10.7	Упражнения	342
5	Релятивистская механика	343
5.1	Пространство и время	343
5.1.1	Принцип относительности	343
5.1.2	Преобразования Лоренца	345
5.1.3	Релятивистское сокращение длины и замедление времени	349
5.1.4	Относительность одновременности	352
5.1.5	Релятивистская формула сложения скоростей	353
5.1.6	Пространство-время Минковского	354
5.1.7	Упражнения	358
5.2	Движение релятивистской частицы	358
5.2.1	Функция Лагранжа свободной частицы	358
5.2.2	Функция Лагранжа заряда в электромагнитном поле	361
5.2.3	Функция Гамильтона заряда в электромагнитном поле	362
5.2.4	Четырёхмерные векторы скорости, ускорения, импульса, силы	363
5.2.5	Четырёхмерное уравнение движения заряда в электромагнитном поле	365
5.2.6	Упражнения	367
5.3	Столкновения релятивистских частиц	368
5.3.1	Упругое столкновение двух частиц	368
5.3.2	Связь между углами рассеяния в ЛСК и СЦМ	370
5.3.3	Связь передачи энергии с углами рассеяния	371
5.3.4	Электроны и фотоны	372
5.3.5	Неупругие столкновения	374
5.3.6	Законы сохранения и элементарные частицы	376
5.3.7	Упражнения	378

6	Разрежённые среды	379
6.1	Основы физической кинетики	379
6.1.1	Постановка задачи	379
6.1.2	Уравнение Лиувилля	382
6.1.3	Формальное решение уравнения Лиувилля	385
6.1.4	Частичные плотности распределения	388
6.1.5	Цепочка уравнений ББГКИ	391
6.1.6	О влиянии неточности в начальных условиях	394
6.1.7	Упражнения	395
6.2	Газодинамика	395
6.2.1	Уравнение Больцмана	395
6.2.2	Упругие столкновения одинаковых молекул	398
6.2.3	Свойства уравнения Больцмана	400
6.2.4	Стационарное решение уравнения Больцмана	405
6.2.5	Гидродинамическое приближение	407
6.2.6	О применимости больцмановской кинетики	409
6.2.7	Упражнения	411
6.3	Диффузия	412
6.3.1	Коэффициент диффузии, вязкость, граничные условия	412
6.3.2	Броуновское движение	414
6.3.3	Эйнштейновский вывод диффузионного уравнения	417
6.3.4	Диффузия в бесконечной среде	419
6.3.5	Диффузия в полупространстве	422
6.3.6	Релаксация	426
6.3.7	Упражнения	427
6.4	Плазма	428
6.4.1	Уравнения Власова	428
6.4.2	Свойства уравнения Власова	430
6.4.3	Квазинейтральность плазмы	431
6.4.4	Электронные волны в плазме	434
6.4.5	Затухание Ландау	435
6.4.6	О спектре космических лучей	437
6.4.7	Упражнения	438
7	Феноменология континуума	439
7.1	Феноменологическое описание сплошной среды	439
7.1.1	Перемещение элементарного вектора	439
7.1.2	Тензор деформаций	441
7.1.3	Физический смысл элементов тензора деформаций	443
7.1.4	Тензор напряжений	445

7.1.5	Равновесие напряжений	448
7.1.6	Упражнения	450
7.2	Кинематика текучей среды	451
7.2.1	Два способа описания течения	451
7.2.2	Конвективное ускорение	454
7.2.3	Первая теорема Гельмгольца	455
7.2.4	Вторая теорема Гельмгольца и теорема Стокса	456
7.2.5	Первая теорема Кельвина	458
7.2.6	Упражнения	459
7.3	Динамика текучей среды	459
7.3.1	Сохранение массы	459
7.3.2	Уравнения движения	462
7.3.3	Функция давления	466
7.3.4	Равновесие среды в однородном поле тяжести	467
7.3.5	Твёрдое тело в неподвижной жидкости	470
7.3.6	Упражнения	471
7.4	Уравнения баланса	471
7.4.1	Уравнение баланса импульса	471
7.4.2	Уравнение баланса механической энергии	472
7.4.3	Уравнение баланса внутренней энергии	474
7.4.4	Уравнение баланса энтропии	475
7.4.5	Многокомпонентные среды	477
7.4.6	Упражнения	482
8	Идеальная жидкость	483
8.1	Течение идеальной жидкости	483
8.1.1	Идеальная жидкость	483
8.1.2	Уравнение Громеки-Ламба	485
8.1.3	Стационарное течение	486
8.1.4	Условия существования безвихревого течения	488
8.1.5	Примеры: поля скоростей	490
8.1.6	Уравнение Лагранжа-Коши	491
8.1.7	Упражнения	493
8.2	Волновое движение	493
8.2.1	Звуковые волны	493
8.2.2	Плоские волны	495
8.2.3	Сферические волны	497
8.2.4	Волны на поверхности жидкости	498
8.2.5	Ударные волны	500
8.2.6	Упражнения	506
8.3	Движение тел в идеальной жидкости	506

8.3.1	Обтекание шара идеальной жидкостью	506
8.3.2	Парадокс Даламбера	508
8.3.3	Движение шара в идеальной жидкости	509
8.3.4	Присоединённая масса	511
8.3.5	Плоские течения и комплексные потенциалы	512
8.3.6	Обтекание кругового цилиндра	514
8.3.7	Потенциал вихревой нити	515
8.3.8	Упражнения	518
8.4	Магнитогидродинамика	518
8.4.1	Основные уравнения	518
8.4.2	Магнитное поле в неподвижной и движущейся плазме	520
8.4.3	Бессилловые магнитные поля	522
8.4.4	Волны Альфвена	524
8.4.5	Колебания силовых линий	526
8.4.6	Упражнения	528
8.5	Вселенная как сплошная среда	528
8.5.1	Однородная изотропная модель	528
8.5.2	Критическая плотность и возраст Вселенной	531
8.5.3	Функция Лагранжа частицы в расширяющейся системе отсчёта	535
8.5.4	Вселенная как идеальная жидкость	537
8.5.5	Кое-что из истории	538
8.5.6	Упражнения	540
9	Вязкая жидкость	541
9.1	Течение вязкой жидкости	541
9.1.1	Уравнение Навье-Стокса	541
9.1.2	Граничные условия	543
9.1.3	Действие вязкой жидкости на стенку	544
9.1.4	Несжимаемые среды	544
9.1.5	Гидродинамическое подобие. Число Рейнольдса	546
9.1.6	Упражнения	549
9.2	Установившиеся течения	549
9.2.1	Плоское течение Куэтта	549
9.2.2	Течение Пуазейля	550
9.2.3	Круговое течение Куэтта	552
9.2.4	Обтекание шара вязкой жидкостью	553
9.2.5	Немного истории	555
9.2.6	Упражнения	555
9.3	Неустановившиеся течения	556

9.3.1	Одномерное течение	556
9.3.2	Течение вдоль стенок	558
9.3.3	Движение шара в безграничной вязкой среде	561
9.3.4	Течения в цилиндрической трубе	565
9.3.5	Волны в вязкой жидкости	569
9.3.6	Диффузия завихрённости	572
9.3.7	Упражнения	573
9.4	Турбулентность	573
9.4.1	Понятие о турбулентности	573
9.4.2	Условие возникновения турбулентности	576
9.4.3	Примеры гидродинамической неустойчивости	578
9.4.4	Турбулентность в спектральном представлении	580
9.4.5	Спектр Колмогорова-Обухова	583
9.4.6	Из статьи А.С.Монина	585
9.4.7	Упражнения	586
9.5	Турбулентное течение	586
9.5.1	Уравнения Рейнольдса	586
9.5.2	Турбулентная вязкость	588
9.5.3	Профиль средней скорости вблизи стенки	589
9.5.4	Возбуждение звука	591
9.5.5	Заключительные замечания	593
9.5.6	О проблеме турбулентности	596
9.5.7	Упражнения	598
10	Упругая среда	599
10.1	Изотропная упругая среда	599
10.1.1	Выражение деформаций через напряжения	599
10.1.2	Коэффициент сжимаемости и модуль сдвига	600
10.1.3	Выражение напряжений через деформации	601
10.1.4	Модули Ламэ и модуль объёмного сжатия	602
10.1.5	Условия равновесия деформаций	603
10.1.6	Энергия упругой деформации	604
10.1.7	Упражнения	605
10.2	Элементарные статические задачи	605
10.2.1	Плоская деформация	605
10.2.2	Сжатие тел равномерным давлением	606
10.2.3	Сжатие тел объёмной силой	607
10.2.4	Цилиндрическая труба под давлением	608
10.2.5	Деформации стержней	609
10.2.6	Упражнения	614
10.3	Волны в упругой среде	614

10.3.1	Динамические уравнения теории упругости	614
10.3.2	Волны продольные и поперечные	615
10.3.3	Волны на поверхности упругой среды	618
10.3.4	Прохождение волны через плоскую границу	621
10.3.5	Приближение эйконала	622
10.3.6	Упражнения	623
10.4	Стержни и мембраны	623
10.4.1	Волны в бесконечном стержне	623
10.4.2	Отражение от конца стержня	628
10.4.3	Стоячие волны	631
10.4.4	Колебания струны	633
10.4.5	Волны кручения в стержне	634
10.4.6	Колебания мембраны	635
10.4.7	Упражнения	637
10.5	Кристаллы	638
10.5.1	Простая кубическая решётка	638
10.5.2	Энергия деформации кубического кристалла	642
10.5.3	Волны в кубическом кристалле	645
10.5.4	Дислокации Френкеля-Конторовой	649
10.5.5	Упражнения	650
11	Вязкоупругие и неупругие среды	651
11.1	Вязкоупругие среды	651
11.1.1	Ползучесть и релаксация	651
11.1.2	Основные принципы линейной вязкоупругости	654
11.1.3	Модули упругости	657
11.1.4	Вязкоупругие тела и жидкости	659
11.1.5	Многоэлементные модели вязкоупругих сред	661
11.1.6	Упражнения	663
11.2	Упругопластичная среда	664
11.2.1	Пластичность и скрытые переменные	664
11.2.2	Диаграммы деформация-напряжение	666
11.2.3	Трёхмерные модели	669
11.2.4	Упругопластические деформации стержня	677
11.2.5	Дискуссия о формализме в теории пластичности	680
11.3	Вязкопластичные среды	682
11.3.1	Вязкопластичность	682
11.3.2	Тестирование вязкопластических материалов	683
11.3.3	Разрушение	685
11.3.4	Модели	686
11.3.5	Движение	687

11.3.6	Эндохронная модель	691
11.3.7	Упражнения	692
12	Факультативные темы	693
12.1	Наследственная механика	693
12.1.1	Понятие эредитарности	693
12.1.2	Эредитарная теория Вольтерры	695
12.1.3	Эредитарная термодинамика	700
12.1.4	Обобщённое кинетическое уравнение	702
12.1.5	Скрытые переменные	705
12.1.6	Открытые системы	707
12.2	Мезомеханика	714
12.2.1	Понятие структуры. Коллективные переменные	714
12.2.2	Мезоскопическая концепция	718
12.2.3	Мезомеханические уравнения баланса	720
12.2.4	Одномерная мезодиффузия	721
12.2.5	Изотропная мезодиффузия от плоского источника	724
12.2.6	Анизотропная мезодиффузия от плоского источника	726
12.2.7	Фронтовой всплеск	729
12.2.8	Заключительные замечания о мезодиффузии	733
12.3	Нелокальная механика	733
12.3.1	О понятии нелокальности	733
12.3.2	Нелокальная механика Власова	735
12.3.3	Гидродинамическая нелокальность	739
12.3.4	Перидинамика	744
12.3.5	Дополнительные замечания	753
12.4	Нелинейная динамика	756
12.4.1	Нелинейные колебания	756
12.4.2	Регулярные аттракторы	762
12.4.3	Странные аттракторы и бифуркации	771
12.4.4	Эксперимент Бенара и модель Лоренца	775
12.4.5	Неустойчивость Рэлея-Тейлора	777
12.4.6	Нелинейная диффузия	779
12.5	Размерный анализ, подобие, моделирование	785
12.5.1	Размерности	785
12.5.2	П-теорема	788
12.5.3	Примеры применения П-теоремы	790
12.5.4	Подобие, реальный объект и модель	795
12.5.5	Теория чувствительности	798
12.5.6	Пример	803

12.6 Самоподобие	804
12.6.1 Геометрическое самоподобие	804
12.6.2 Стохастическое самоподобие	808
12.6.3 Автомодельность устойчивых распределений . . .	811
12.6.4 Автомодельные решения и динамическое самоподобие	815
12.7 Дробно-дифференциальные модели	818
12.7.1 Производные дробного порядка	818
12.7.2 Дробно-дифференциальная вязкоупругость	821
12.7.3 Динамика вязкоупругой среды в модели Герасимова	824
12.7.4 Дробно-дифференциальная реология	829
12.7.5 Полимеры в растворе	840
12.7.6 Дробная динамика открытых систем	841
Заключение	843
Обозначения	846
Предметный указатель	851

Предисловие

Механика – это наука о простейшей (*механической*) форме движения материи: о перемещении в пространстве физических тел и их частей относительно друг друга. Она ведёт свою историю от Аристотеля и Архимеда и лежит в основе центральной познавательной парадигмы нашей цивилизации. Где бы и когда бы ни жили люди, каким бы богам они ни поклонялись и каким бы обычаям они не следовали, они видели окружающий мир в его непрерывном движении: звёзды и волны, львы и тайфуны, рыбы и птицы – всё вокруг перемещалось, изменяло свои формы, угрожало человеку или спасало его. Великие географические открытия, индустриальная эпоха, атомная энергетика и освоение космоса – все этапы мировой истории неотделимо связаны с развитием механики, по-прежнему составляющей концептуальный базис физики. Так будет и впредь.

В процессе накопления знаний человек всё более убеждался в том, что видимая им часть мира является лишь бесконечно малой его частью, что большая часть явлений и тел, окружающих его, слишком малых или слишком далёких – недоступна его органам чувств. Развитие по образу и подобию механики современных физических теорий обогатило человека невероятными способностями узнавать, что было миллионы и миллиарды лет назад, что происходит на расстояниях в миллионы и миллиарды раз меньших и больших размеров окружающих его тел, более или менее уверенно судить о том, что будет происходить с окружающей средой, Солнечной системой, Вселенной в целом.

Нужны ли эти знания современному человеку, отягчённому совсем иными заботами и желаниями? Следы исчезнувших цивилизаций и глобальных катастроф убеждают нас: это может повторяться. Естественная тревога о своём будущем, будущем своего народа, будущем земной цивилизации не может не волновать *человека разумного*, какими бы примитивными и корыстными не представлялись ему окружающие его сородичи. Человек не всемогущ, но знание – это уже опреде-

лённая защита. Носители знаний – учёные: механики и математики, астрономы и физики, космологи и геофизики... Мудрая природа рождает способных к этой миссии людей даже в те времена, когда занятия наукой представляются чем-то архаичным. И нет большей радости для педагога, чем увидеть неподдельный интерес молодого человека к высочайшим научным истинам.

Не стану утверждать, будто именно эти мысли двигали мной в процессе написания книги. Как и при написании предыдущих книг, основным мотивом было, как это ни парадоксально, желание *прочитать такую книгу*. Книгу, в которой механика предстала бы не просто первичной ступенью к изучению сопромата, теории механизмов и машин, материаловедения, а входом в теоретическую физику с её особым *мировидением*.

Американский физик-теоретик Ричард Фейнман как-то сказал, что если бы потребовалось передать внеземной цивилизации главное знание, которым мы обладаем, в одной короткой фразе, то следовало бы сказать:

МИР СОСТОИТ ИЗ АТОМОВ.

Да, вещество состоит из молекул и атомов, в свою очередь состоящих из электронов и ядер. Ядра состоят из протонов и нейтронов, «состоящих» из кварков и глюонов. Однако весь этот мир – реально существующий мир – недоступен нашим органам чувств. То яркое великолепие природы, которое порой так восхищает нас – всего лишь смутные, смазанные и почти обесцвеченные формы реально существующего мира, какими представлялись бы нам экспонаты Эрмитажа, если бы мы бродили по его залам не снимая запотевших очков... Только развитие науки и создание небывалых устройств вроде известного всем ныне Большого адронного коллайдера открыло человеку глаза на микромир. То же можно сказать и о другом конце всемирной линейки – космическом. Множество мигающих и немигающих точек на небе вызывали у человека ассоциации с формами диких животных, армиями небесных воинов и даже с молочными реками (отсюда *Млечный путь*). Только с изобретением телескопов ему удалось разглядеть планеты и звёзды, галактики и скопления галактик, а создание теории относительности позволило уму увидеть далёкое прошлое мира (миллиарды лет назад!) и заглянуть в будущее.

Обнаруженное на этих масштабах настолько необычно и даже поразительно, что, казалось бы, нет никаких надежд разобраться во всём этом. Однако, это не так. Возьмите почти любую книгу (не обязательно учебник) по атомной физике или ядерной физике, по астрофизике

и космологии и где-то на первых страницах увидите вы знакомые со школьной скамьи слова: скорость, импульс, сила, энергия... Это – основные понятия механики, без которых невозможны были бы ни ядерная физика, ни космофизика. В этой книге мне и хотелось изложить механику так, чтобы читатель не просто усвоил её основные понятия и приёмы, но увидел её фундаментальность и поверил в далеко не раскрытый ещё полностью её потенциал.

Конечно, не стоит ставить телегу впереди лошади, и читателю не следует ожидать здесь особых методических новаций в изложении традиционных разделов механики. Как это принято, при описании макроскопического механического движения мы отвлекаемся от внутренней структуры вещества, используя *модели*, отражающие только макроскопическое распределение массы в системе и действующие на неё и между её частями силы. Примеры моделей: материальная точка, система материальных точек, абсолютно твёрдое тело, абсолютно упругое тело, идеальная жидкость, вязкая жидкость и т.д. В соответствии с этим, механика разделяется на *механику материальных точек* и *механику сплошной среды*. В определённом смысле пограничной является механика абсолютно твёрдого тела: подобно механике точек, предметом её анализа являются системы с конечным числом степеней свободы, но масса уже не сосредоточена в точках, а непрерывно распределена в отдельных областях пространства, и описание её динамики требует уже применения тензорного аппарата, как и собственно механика сплошных – деформируемых и текучих – сред, множество степеней свободы которой является континуальным.

Идея изложения механики сплошных сред как естественной составляющей органической части *всей механики* (исключая, впрочем, газодинамику из-за необходимости привлечения законов термодинамики) была высказана ещё автором, пожалуй, лучшего советского учебника по механике С.Э. Хайкиным¹. Он писал в предисловии:

«Нарушая традиционную границу механики, необходимо наметить новую границу, притом не искусственную, а возможно, более естественную. Естественно включить в механику все те вопросы о движении тел, для решения которых требуется применение только законов механики (конкретно, законов Ньютона и следствий из них вытекающих), и исключить из механики все те вопросы, для решения которых недостаточно законов механики и требуется применение ещё каких-либо других законов, например, законов электродинамики или термодинамики».

¹С.Э. Хайкин, Физические основы механики. – М: Наука, Физматлит, 1971.

Последние ограничения выглядят спорными. Похоже, и сам автор не очень был уверен в их необходимости. Ниже он пишет:

«... целесообразно при изложении физических основ механики рассмотреть вопрос о переходе от микроскопически дискретных тел к сплошным, а затем к макроскопически дискретным. ...Словом, для того, чтобы изложение физических основ механики соответствовало современному уровню развития физики, это изложение должно охватывать гораздо более широкий круг вопросов, чем тот, который обычно излагался в разделе механики общего курса физики». Возможно, в последних словах этой цитаты и кроется объяснение такой позиции: речь идёт о курсе *общей физики*, в котором механика является первым разделом, а студенты лишь начинают знакомиться с производными и интегралами, не говоря уж о тензорах и интегро-дифференциальных уравнениях. Конечно, переход «от микроскопически дискретных тел к макроскопически дискретным» требует уверенного владения математическим аппаратом и по этой причине возможен лишь в курсе *теоретической физики*.

Впервые идея непрерывного изложения механики от материальных точек к сплошной среде как единого раздела теоретической физики была апробирована ещё Я.И. Френкелем (Курс теоретической механики, ГИТТЛ, М.-Л. 1940), подчеркнувшим в предисловии, что его курс следует рассматривать как «часть общей системы теоретической физики». Три десятка лет спустя к этой идее вернулся И.И. Ольховский во втором издании его «Курса теоретической механики для физиков» (Изд. МГУ, 1974). Вот что он писал в качестве её обоснования. «Во второй части излагаются фундаментальные понятия и законы механики сплошных сред, причём полевые величины интерпретируются как усреднённые механические величины. На единой основе этих понятий и законов *кратко* (курсив мой – В.У.) рассматриваются свойства идеальной и вязкой жидкостей (в том числе, проводящих), а также идеально упругое тело. *Такое построение позволяет достичь взаимосвязи этой теории с классической механикой и статистической механикой; кроме того, достигается компактность в изложении материала, который при обычном подходе занимает весьма большой объём и в связи с этим является трудным для студентов* (курсив мой – В.У.)».

Многолетний опыт преподавания механики в такой композиции убедил автора в плодотворности этой идеи. Здесь она получила дальнейшее развитие: существенно увеличена доля материала, относящегося к сплошной среде (теперь она составляет почти половину всего объёма книги) введена «буферная» тема «Разрежённые среды» (с при-

ложением к газодинамике), обеспечивающая непрерывный логический переход к газодинамической модели сплошной среды. Лишь после этого происходит переход к модели сплошной среды, феноменология которой легче ложится на подготовленную газодинамикой почву. Механика деформируемых сред, традиционно представляемая теорией упругости, дополнена здесь рассмотрением механических моделей упруго-пластичных, вязко-упругих и вязко-пластичных сред.

В ещё большей степени представлено разнообразие приложений механических законов. Турбулентность и диффузия, магнитогидродинамика и плазма, квазиклассическое квантование и классические модели расширяющейся Вселенной, кристаллы и полимеры, траектории небесных тел и ускорение космических лучей, солитоны и модели хаотического поведения, проблема обратимости и обсуждение скрытых переменных, обобщённая гидродинамика и среды с памятью – эти и другие нетрадиционные для курса механики вопросы нашли то или иное отражение в данной книге.

Параграфы последней главы написаны в стиле научных обзоров, имеющих целью привлечь внимание студентов и аспирантов к некоторым активно развивающимся в настоящее время направлениям механики² – этой, можно сказать, старинной, но вечно молодой науки.

Не будучи в состоянии привести здесь имена всех, кому обязан я идее написания этой книги и реализации её, перечислю здесь лишь тех, без которых она бы точно не увидела свет. Это – мои учителя Николай Васильевич Кислицын (светлая ему память!) и Анатолий Михайлович Кольчужкин (Томский политехнический институт), мои кураторы на факультете повышения квалификации МГУ Ирина Вячеславовна Ракобольская и Борис Саркисович Ишханов, мои коллеги из РУДН Юрий Петрович Рыбаков и Юрий Григорьевич Рудой, мой ученик и соавтор Ренат Сибатов, моя помощница Елена Кожемякина, моя внучка Настя Сенотрусова. Всем им приношу глубокую благодарность. Я благодарен также Александру Клюеву (из Белгорода) и моим студентам Сергею Виноградову, Михаилу Петрякову, Дмитрию Безбатько, Александру Колодию, Владимиру Фадееву и Илье Тимиркину за помощь в вычитке рукописи.

Книгу эту я писал много лет и делал это с большими перерывами. Когда же накатывало на меня малодушное желание бросить работу над книгой, строгое лицо моего деда, Дмитрия Елизаровича Целищева, обучавшего 10-летнего деревенского внука своего азам механики и прочившего ему тогда, в середине минувшего века, научную карьеру,

²Надеюсь, специалист с пониманием отнесётся к неизбежно поверхностному, а стало быть, и не вполне объективному характеру этих кратких обзоров.

возникало перед утомлённым взором моим и новые силы вливались в меня. Его памяти и посвящаю эту книгу.

Я буду благодарен всем читателям, кто пожелает высказать свои замечания и поправки (это можно сделать по адресу vvuchaikin@mail.ru).

Автор
Август 2015

Глава 1

Материальная точка в заданном силовом поле

1.1 Координаты, скорости, ускорения

1.1.1 Материальная точка

Для характеристики положения тела в пространстве необходима *система координат*, а для определения скорости его перемещения – прибор, измеряющий время (*часы*). Система координат вместе с часами образует *систему отсчёта*. В нерелятивистской (ньютоновой) механике время считается одинаковым (общим) параметром для всех систем отсчёта и рассматриваются только различные системы координат. Ниже мы рассмотрим важнейшие из них. Во многих ситуациях форма и размеры тела не оказывают существенного влияния на движение тела как целого (пример: движение планеты). В этих случаях достаточно следить за одной связанной с телом *геометрической точкой* – *центром массы тела*. Можно представлять себе, что вся масса такого тела сосредоточена в одной этой точке, и называть это тело *материальной точкой*. Во многих случаях полезно и протяженные тела представлять как системы взаимодействующих между собой частиц. Речь в данном случае идёт не об атомах и молекулах (они во многом подчиняются иным – квантовым законам движения), а о *физически малых элементах тела*, содержащих ещё достаточное количество молекул, чтобы применять к ним законы классической механики.

Для разнообразия мы будем часто пользоваться синонимами поня-

тия материальная точка – *точка*, *частица* и даже *тело*.

Материальная точка характеризуется единственным скалярным параметром – массой, а её положение в пространстве характеризуется единственным вектором – радиус-вектором точки \vec{r} . Радиус-вектор движущейся точки является векторной функцией времени $\vec{r}(t)$, называемой *законом движения точки*. Кривая, которую описывает конец вектора $\vec{r}(t)$ в пространстве, называется *траекторией точки*. Движение системы N материальных точек представляется совокупностью N кривых в 3-мерном пространстве или одной кривой в $3N$ -мерном гиперпространстве.

Закон движения точки можно рассматривать как параметрическое задание её траектории, роль параметра в котором исполняет время. По этой причине мы иногда будем называть закон движения частицы её траекторией.

Дифференцирование радиус-вектора по времени даёт скорость¹ точки, $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, а повторное дифференцирование – ускорение $\ddot{\vec{r}} = \vec{v} = \vec{a}$.

1.1.2 Координаты

Координаты материальной точки – это набор чисел, позволяющий однозначно указать место (геометрическую точку), где эта материальная точка находится в данный момент. Опыт показывает, что для этого достаточно трёх чисел (поэтому наше пространство и называется трёхмерным). Изменяя в допустимых пределах одну из координат

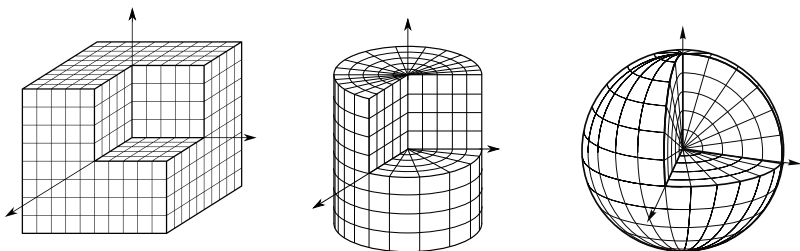


Рис. 1.1. Прямоугольная, цилиндрическая и сферическая системы координат

¹В XVII и XVIII вв. понятие скорости не заключало в себе указание на направление. Это была чисто алгебраическая, а у Декарта даже чисто арифметическая величина. Направление движения было отдельным понятием, не связанным со скоростью, и даже называвшееся (до начала XIX в.) *направлением тела*, а не направлением скорости.

при фиксированных значениях других, получим координатную кривую. Повторяя эту процедуру с другими координатами, получим пространственную сетку, изображающую систему координат и часто дающую ей название. Наиболее популярными являются прямоугольная, цилиндрическая и сферическая системы координат (рис. 1.1). Геометрически положение точки относительно выбранной системы координат характеризуется направленным отрезком (вектором), начинающимся в начале координат, и заканчивающимся в этой точке. Он называется *радиусом-вектором* данной точки и обозначается через \vec{r} . Чтобы выразить его через координаты, надо ввести соответствующие единичные векторы, обозначаемые \vec{e}_α , где индекс α пробегает три значения, соответствующие трём координатам выбранной системы. В указанных выше системах координатные линии пересекаются под прямыми углами, векторы \vec{e}_α ортогональны друг другу и называются *ортами*.

Прямоугольные координаты

В прямоугольной (декартовой) системе точка с координатами x, y, z представляется радиус-вектором

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – параллельные соответствующим осям (и потому постоянные) декартовы орты (рис. 1.2). Если \vec{r} указывает положение в пространстве материальной точки, не связанной жёстко с системой координат, а способной перемещаться относительно неё, то дифференцирование векторной функции $\vec{r}(t)$ по времени даёт *вектор скорости* материальной точки относительно этой системы координат

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z,$$

а повторное дифференцирование – вектор её ускорения:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Заметим, что как при первом дифференцировании, так и при втором орты считались постоянными.

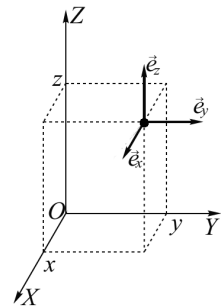


Рис. 1.2. Прямоугольные координаты

Цилиндрические координаты

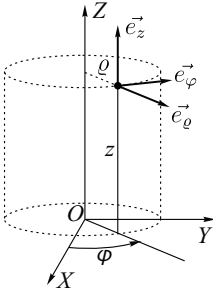


Рис. 1.3. Цилиндрические координаты

В этой системе (рис. 1.3) радиус-вектор точки представляется в виде суммы двух векторных слагаемых

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z,$$

одно из которых содержит орт переменного (зависящего от положения точки) направления

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y,$$

параллельный плоскости XOY . Зависимость направлений ортов от положения точки в пространстве удобнее проследить, перенеся тройку ортов (триаду) из начала координат в саму эту точку. Перемещение точки сопровождается поворотом триады, связанным с изменением координат самой точки, что позволяет выразить вектор скорости материальной точки через координаты и их скорости. В данном случае

$$\dot{\vec{e}}_\rho = -\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_x + \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}_y = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi,$$

где

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$$

третий (азимутальный) орт, производная от которого коллинеарна радиальному орту:

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho.$$

Используя эти соотношения, получим

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$$

и

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z.$$

Проекции радиус-вектора, скорости и ускорения на орты \vec{e}_ρ , \vec{e}_φ и \vec{e}_z соответственно равны:

$$r_\rho = \rho, \quad r_\varphi = 0, \quad r_z = z,$$

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}$$

и

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

Сферические координаты

В этой системе координат все три орта \vec{e}_r , \vec{e}_θ и \vec{e}_φ могут изменяться при движении частицы (рис. 1.4). Радиус-вектор, скорость и ускорение даются выражениями

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\vec{e}_r, \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \\ \ddot{\vec{r}} &= [\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)]\vec{e}_r + \\ &+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\theta + \\ &+ (r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

или, в проекциях,

$$\begin{aligned}r_r &= r, & r_\theta &= 0, & r_\varphi &= 0, \\ v_r &= \dot{r}, & v_\theta &= r\dot{\theta}, & v_\varphi &= r\sin\theta\dot{\varphi}, \\ a_r &= \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2), \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi &= r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}.\end{aligned}$$

При выводе этих формул используются соотношения типа $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, для получения которых удобно выразить декартовы проекции радиус-вектора \vec{r} через сферические координаты, определить единичные орты отношениями вариаций

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= (\delta\vec{r}/|\delta\vec{r}|)_{\theta=\text{const}, \varphi=\text{const}} = \sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z, \\ \vec{e}_\theta &= (\delta\vec{r}/|\delta\vec{r}|)_{r=\text{const}, \varphi=\text{const}} = \cos\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z, \\ \vec{e}_\varphi &= (\delta\vec{r}/|\delta\vec{r}|)_{r=\text{const}, \theta=\text{const}} = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y\end{aligned}$$

и продифференцировать их по времени. Заметим, что последнюю (азимутальную) проекцию ускорения можно представить в более компактном виде:

$$a_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{d(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi})}{dt}.$$

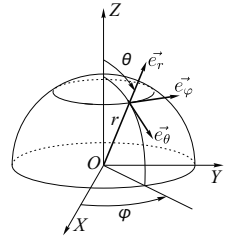


Рис. 1.4. Сферические координаты

Полярные координаты

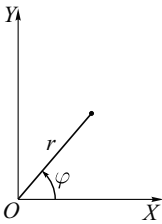


Рис. 1.5. Полярные координаты

Полярные координаты можно рассматривать как частный случай цилиндрических (при $z = 0$) или сферических (при $\theta = \pi/2$) координат, удобный, когда частица движется в координатной плоскости XOY :

$$\vec{r} = r\vec{e}_r = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y,$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt} \vec{e}_\varphi.$$

Таким образом, в полярных координатах

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad \sigma_z = (1/2)r^2\dot{\varphi}, \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt}.$$

1.1.3 Естественные координаты

Пусть s – длина участка траектории частицы от некоторой фиксированной точки A до точки наблюдения \vec{r} (рис. 1.6). Взяв по обе стороны от точки \vec{r} ещё по одной бесконечно близкой к ней точке траектории, проведем через эти три точки *соприкасающуюся плоскость* Π . Скорость в этом случае запишется в виде

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{e}_\tau v,$$

где \vec{e}_τ – тангенциальный (касательный) орт, лежащий в соприкасающейся плоскости. Дифференцируя скорость по времени, получим ускорение:

$$\vec{a} = \dot{\vec{e}}_\tau v + \vec{e}_\tau \dot{v} = \frac{d\vec{e}_\tau}{ds} \frac{ds}{dt} v + \vec{e}_\tau \dot{v}.$$

Вектор \vec{e}_τ – единичный вектор, его изменение связано только с его поворотом, и стало быть, вектор $d\vec{e}_\tau/ds \perp \vec{e}_\tau$ и лежит, как и касательный орт, в соприкасающейся плоскости. Абсолютная его величина определяется формулой

$$\left| \frac{d\vec{e}_\tau}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right| = \frac{1}{R},$$

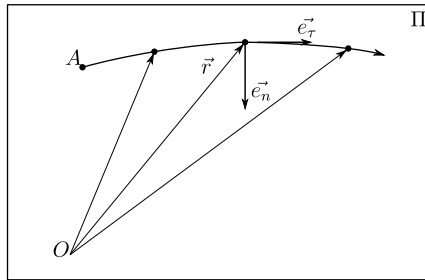


Рис. 1.6. Тангенциальное и нормальное ускорения

где R – радиус кривизны траектории в данной точке (обратная ему величина называется *кривизной траектории*).

Представим сам вектор $d\vec{e}_\tau/ds$ в виде

$$\frac{d\vec{e}_\tau}{ds} = \frac{\vec{e}_n}{R},$$

где \vec{e}_n – новый *нормальный* орт, перпендикулярный \vec{e}_τ и лежащий в той же плоскости, тогда ускорение запишется в виде

$$\vec{a} = a_\tau \vec{e}_\tau + a_n \vec{e}_n,$$

где $a_\tau = \dot{v}$ – тангенциальная (касательная), а $a_n = v^2/R$ – нормальная составляющие ускорения. Добавив к этим двум ортам третий – *би-нормаль*, образующий с ними правую тройку, получим *естественную систему координат*.

Касательное ускорение a_τ характеризует изменение скорости по величине. При *равномерном движении* ($v = \text{const}$) вдоль заданной кривой оно равно нулю. Если отличное от нуля касательное ускорение постоянно в процессе движения, последнее называется *равноускоренным движением*. При равноускоренном движении

$$v = v_0 + a_\tau t, \quad s = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2},$$

где v_0 – начальная скорость.

Нормальное ускорение a_n характеризует изменение скорости по направлению. При прямолинейном движении $R = \infty$ и $a_n = 0$. При вращении по окружности постоянного радиуса $R = \text{const}$ нормальное ускорение пропорционально квадрату скорости.

Абсолютная величина полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + v^4/R^2}.$$

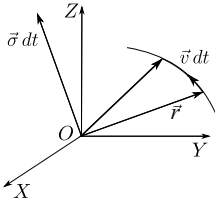


Рис. 1.7. Секториальная скорость

В ряде задач находит применение *секториальная скорость* (рис. 1.7)

$$\vec{\sigma} = (1/2)[\vec{r}, \vec{v}], \quad (1.1.1)$$

абсолютная величина которой σ равна площади, заметаемой радиус-вектором частицы в единицу времени (половине площади параллелограмма, построенного на этих векторах). В декартовых координатах

$$\sigma_x = (1/2)(yv_z - zv_y),$$

$$\sigma_y = (1/2)(zv_x - xv_z),$$

$$\sigma_z = (1/2)(xv_y - yv_x).$$

Чтобы найти проекции $\vec{\sigma}$ на орты цилиндрической системы, подставим в определяющую формулу (1.1.1) соответствующие выражения для \vec{r} и $\dot{\vec{r}}$

$$\vec{\sigma} = (1/2) [\varrho \vec{e}_\varrho + z \vec{e}_z, \dot{\varrho} \vec{e}_\varrho + \varrho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z]$$

и, произведя перемножение, приравняем проекции левой и правой сторон векторного равенства:

$$\sigma_\varrho = -(1/2)z\varrho\dot{\varphi},$$

$$\sigma_\varphi = (1/2)(\dot{\varrho}z - \varrho\dot{z}),$$

$$\sigma_z = (1/2)\varrho^2\dot{\varphi}.$$

Аналогичные выкладки для сферической системы дают:

$$\vec{\sigma} = (1/2) \left[r \vec{e}_r, \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \right] = (1/2) \left(r^2 \dot{\theta} \vec{e}_\varphi - r^2 \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\theta \right),$$

откуда

$$\sigma_r = 0,$$

$$\sigma_\theta = -(1/2)r^2 \sin \theta \dot{\varphi},$$

$$\sigma_\varphi = (1/2)r^2 \dot{\theta}.$$

1.1.4 Пример: качение колеса

Колесо радиусом b катится без скольжения по горизонтальной оси OX с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi} = \Omega$. Найти величину и направление ускорения, а также радиус кривизны траектории точки обода колеса, имевшей в начальный момент времени $t = 0$ координаты $x = 0$ и $y = 0$.

Из геометрических построений видно, что рассматриваемая точка описывает циклоиду с уравнениями

$$x = b(\varphi - \sin \varphi), \quad y = b(1 - \cos \varphi), \quad \varphi = \Omega t.$$

Дифференцированием находим

$$\dot{x} = b\Omega(1 - \cos \Omega t), \quad \dot{y} = b\Omega \sin \Omega t$$

и

$$\ddot{x} = b\Omega^2 \sin \Omega t, \quad \ddot{y} = b\Omega^2 \cos \Omega t.$$

Следовательно, ускорение точки

$$\vec{a} = (b\Omega^2 \sin \Omega t)\vec{e}_x + (b\Omega^2 \cos \Omega t)\vec{e}_y,$$

а его абсолютная величина

$$a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = b\Omega^2 \sqrt{\sin^2 \Omega t + \cos^2 \Omega t} = b\Omega^2.$$

Сравнивая вектор ускорения с вектором \vec{b} , проведённым из центра колеса в рассматриваемую точку,

$$\vec{b} = -(b \sin \Omega t)\vec{e}_x - (b \cos \Omega t)\vec{e}_y,$$

видим, что вектор ускорения все время направлен к центру колеса.

Для нахождения радиуса кривизны траектории

$$R = \frac{v^2}{a_n}$$

вычислим

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2b\Omega \sqrt{(1 - \cos \Omega t)^2 + \sin^2 \Omega t} = 2b\Omega |\sin(\Omega t/2)|$$

и

$$a_n = \sqrt{a^2 - \dot{v}^2} = b\Omega^2 |\sin(\Omega t/2)|.$$

Подставляя эти выражения в формулу для радиуса кривизны, получим:

$$R = 4b |\sin(\Omega t/2)|.$$

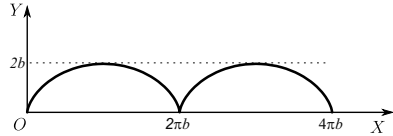


Рис. 1.8. Циклоида, описываемая точкой обода катящегося без проскальзывания колеса

1.1.5 Дополнение: о пространстве и времени

Неискущённый, но любопытствующий читатель возможно будет разочарован тем, что в этом первом разделе книги не нашлось места для объяснения таких фундаментальных понятий, как пространство и время. Рискуя ещё более разочаровать его, я вынужден признать, что не знаю ответа на эти вопросы, настолько краткого, чтобы уместить его на нескольких немногих страницах. И не только я. Вот что писал по этому поводу выдающийся французский математик, механик и философ А. Пуанкаре.

«Трудность решения этих естественно возникающих вопросов происходит главным образом от того, что руководства по механике не вполне ясно различают, где опыт, где математическое суждение, где условное соглашение, где гипотеза.

Это ещё не всё.

1) Абсолютного пространства не существует; мы познаём только относительные движения; между тем механические факты чаще всего излагают так, как если

бы существовало абсолютное пространство, к которому их можно было бы отнести.

2) Не существует абсолютного времени; утверждение, что два промежутка времени равны, само по себе не имеет смысла и можно принять его только *условно*.

3) Мы не способны к непосредственному восприятию не только равенства двух промежутков времени, но даже простого факта одновременности двух событий, происходящих в разных местах...

4) Наконец, наша евклидова геометрия есть лишь род условного языка; мы могли бы изложить факты механики, относя их к неевклидову пространству...

Формулировка этих законов оказалась бы, конечно, гораздо более сложной, потому что все указанные выше соглашения и созданы именно для того, чтобы сократить и упростить эту формулировку.

Здесь я оставляю в стороне все эти трудности ... я допущу *временно абсолютное время и евклидову геометрию*². Последуем же и мы его примеру.

1.1.6 Упражнения

1. Выразить орты цилиндрической системы координат \vec{e}_θ , \vec{e}_φ через орты декартовой \vec{e}_x , \vec{e}_y и вывести соотношения $\dot{\vec{e}}_\theta = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$ и $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_\theta$.
2. Выразить проекции скорости точки v_θ , v_φ и v_z через цилиндрические координаты.
3. Выразить проекции ускорения точки a_θ , a_φ и a_z через цилиндрические координаты.
4. Выразить орты сферической системы координат через орты декартовой и доказать, что $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$.
5. Выразить проекции скорости точки v_r , v_θ , v_φ через сферические координаты.
6. Выразить проекции ускорения точки a_r , a_θ и a_φ через сферические координаты.

1.2 Силы

1.2.1 Три закона Ньютона

В основе классической механики лежат три закона Ньютона, сформулированных им в его знаменитых «Началах»³ (рис. 1.9). Вот как выглядят эти его формулировки в переводе А.Н. Крылова.

Закон I. *Всякое тело продолжает удерживаться в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.*

²А. Пуанкаре, О науке. – М.: Наука, 1990, с. 79-80.

³I. Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1686

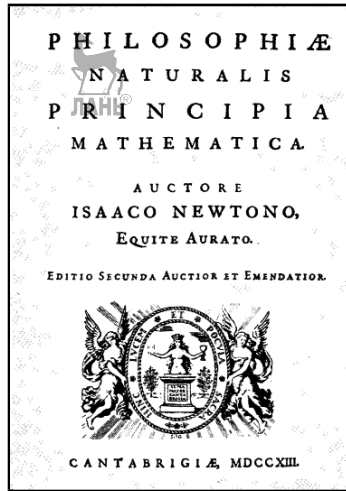


Рис. 1.9. Титульный лист второго издания «Начал»

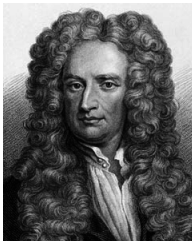
Закон II. *Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

Закон III. *Действие всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе – взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.*

Существует великое множество комментариев к этим законам. Ограничусь здесь лишь самыми, на мой взгляд, необходимыми.

Первый закон Ньютона

$$\vec{v}_{\text{своб}} \equiv \dot{\vec{r}}_{\text{своб}} = \text{const}$$



Сэр Исаак Ньютон (1642–1727) – английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисления, теорию цвета, заложил основы современной физической оптики, создал многие другие математические и физические теории.

определяет *инерциальную систему отсчёта* (ИСО) как систему, в которой скорость *свободного тела* (в смысле материальной точки, на которую не действуют другие тела или поля) постоянна. Закон этот часто называют *законом инерции*. Смысл его в том, что движение тела с постоянной скоростью в ИСО не требует приложения сил: будучи приведено в это состояние, оно будет оставаться в нём бесконечно долго, будет *двигаться по инерции*⁴. В неинерциальной (например, вращающейся) системе отсчёта такое тело может выписывать замысловатую траекторию. Можно подобрать такую систему отсчёта, что и находящееся под действием других тел тело будет двигаться равномерно и прямолинейно или даже покоиться. Но это будет неинерциальная система. В инерциальной системе тело, находящееся под действием силы, должно двигаться с переменной скоростью. Для движения же с постоянной (относительно ИСО) скоростью никакой силы не требуется. Более того, движение с постоянной скоростью является как раз признаком отсутствия силы. Часто встречающийся в учебниках оборот «тело движется под действием силы \vec{F} » следует понимать как «тело движется, находясь под действием силы \vec{F} », а не как «тело движется, потому что на него действует сила \vec{F} ». Неверно также определение ИСО как системы, неподвижно связанной с какими-либо свободно движущимися телами: под это определение подходила бы система координат, жёстко связанная со свободно летящим вращающимся космическим телом.

Теоретически существует бесконечное множество ИСО, движущихся друг относительно друга поступательно с различными, но постоянными по величине и направлению скоростями. Практически же мы не имеем ни одной из них, поскольку не имеем свободного тела: на любое тело действуют силы тяготения со стороны Земли, Солнца, других планет, не говоря уж о силах трения, сопровождающих любое движение в лабораторных условиях. Понятия материальной точки, свободной материальной точки, ИСО, силы и др. являются абстракциями, описывающими не реальный мир, а *механическую модель* мира, которая во многих (но не во всех!) случаях даёт удивительно хорошее совпадение с результатами наблюдений.

Закон инерции утверждает, что *скорость* тела не может измениться без воздействия силы. «Но разве когда-нибудь экспериментировали над телами, на которые не действовала никакая сила? И как можно было бы получить уверенность, что

⁴Это утверждение показалось бы древним грекам противоречащим наблюдаемым явлениям: первоначально движущиеся тела, предоставленные самим себе, в конце концов останавливаются, и лишь движение по кругу (планеты!) вечно и поэтому совершенно.

на эти тела не действует никакая сила?» – вопрошает А.Пуанкаре в своей замечательной книге «Наука и гипотеза». А раз так, пишет он далее, то можно было бы, в принципе, вообразить, что в отсутствие силы неизменным является не скорость тела, а его положение (как и полагал Аристотель) или его ускорение. На математическом языке движение в первом случае выражалось бы дифференциальными уравнениями первого порядка в первом случае, и третьего – во втором. Приведу ещё одну выдержку из цитируемой книги, содержащую «воображаемый пример».

«Представим себе мир, аналогичный нашей Солнечной системе, лишь с тем отличием, что здесь все орбиты планет благодаря чистой случайности не имеют эксцентриситетов и наклонов. Представим себе далее, что массы этих планет слишком ничтожны, чтобы их взаимные возмущения были ощутимы. Астрономы, населяющие одну из этих планет, не преминули бы заключить, что орбита планеты может быть только круговой и параллельной определённой плоскости; тогда положения планеты в данный момент было бы достаточно для определения её скорости и всей её траектории. Закон инерции, который они установили бы, был бы первый из двух гипотетических законов, о которых я только что говорил.

Вообразим теперь, что вдруг через эту систему проходит с огромной скоростью массивное тело, пришедшее из отдалённых созвездий. Все орбиты окажутся сильно возмущёнными. Но это ещё не очень смутило бы наших астрономов: они догадались бы, что это новое тело и является единственным виновником всего зла. Стоит ему удалиться, сказали бы они, – и порядок восстановится сам собой; конечно, расстояния планет от Солнца уже не станут вновь такими же, каким они были до катастрофы, но когда не будет более возмущающего тела, орбиты снова станут круговыми. И только тогда, когда возмущающее тело было бы уже далеко, а орбиты, вместо того, чтобы опять стать круговыми, превратились бы в эллиптические, – только тогда эти астрономы заметили бы свою ошибку и необходимость переделать всю свою механику».

Второй закон Ньютона определяет действующую на материальную точку *силу* как векторную величину, пропорциональную ускорению $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ точки в ИСО,

$$\vec{F} \stackrel{def}{=} m\vec{a}.$$

Сам Ньютон записал этот закон в виде

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt},$$

пригодном для применения к телу переменной массы, хотя оснований для постановки таких задач тогда ещё не было: не существовало ни космических ракет, ни ускорителей элементарных частиц. Произведение $m\vec{v}$, названное Декартом *количеством движения*, сейчас называют *импульсом* (от латинского *impulsus* – толчок). Положительный

коэффициент m представляет собой *массу* точки как меру её инертности (*инертную массу*). Существуют ещё два подхода к определению массы: масса как количество вещества и масса как гравитационный заряд в ньютоновой теории тяготения. Сам Ньютон определял массу как меру количества материи, устанавливаемую пропорционально плотности и объёму её (заметим, что определение это логически небезупречно: оно годится лишь для однородных тел, то есть для тел с постоянной плотностью, но плотность есть масса единицы объёма...). В настоящее время эти характеристики считаются количественно равными (см. замечательную книгу Макса Джеммера⁵).

Может возникнуть вопрос: зачем отдельно писать первый закон, если он уже содержится во втором: подставьте в последний $\vec{F} = 0$, и вы получите $m\vec{v} = \text{const}$? В этом случае, однако, мы лишаемся важного понятия ИСО и работаем в произвольной системе отсчёта. В этом нет ничего неправильного, и такой подход используется при рассмотрении движения в неинерциальных системах отсчёта (каковой является, кстати, наша Земля вследствие её вращения). Следует только иметь в виду, что в этом случае сила $m\vec{a}$ отражает не только влияние на движение данного тела других тел или силовых полей, но и специфику выбранной системы, что ведет к появлению дополнительных *сил инерции*, не связанных с другими телами и их полями. Так, выбрав для описания равномерного движения материальной точки по окружности вращающуюся с той же скоростью систему координат, так чтобы ось OX проходила все время через данную точку, получим $x = \text{const}$, откуда следует $F = 0$, хотя очевидно, что существует центростремительная сила, заставляющая точку постоянно изменять направление её скорости. Разгадка в том, что вследствие неинерциальности системы отсчёта в ней возникла сила инерции – центробежная сила, полностью скомпенсировавшая силу взаимодействия – центростремительную.

Можно также возразить, что второй закон Ньютона – это *закон*, а не определение силы⁶, закон, связывающий три независимо определённые физические величины m , \vec{a} и \vec{F} уравнением $m\vec{a} = \vec{F}$, но попробуйте независимо определить силу, например силу тяжести, действующую на яблоко. Положив его на пружинные весы, Вы должны быть уверены, что сокращение пружины пропорционально силе. Положив его на рычажные весы, Вы должны знать силу тяжести, действующую на уравновешивающую *яблоко* гирьку. В обоих случаях предполагается,

⁵М.Джеммер, Понятие массы в классической и современной физике. Москва, Изд-во «Прогресс», 1967

⁶Из студенческого фольклора: – Ну-с, молодой человек, а что такое сила Архимеда? – Это ... м-м-м ... масса Архимеда, умноженная на ускорение Архимеда.

что уравновешивающая тело сила уже известна. И только проследив за свободным падением яблока известной массы, Вы можете определить силу непосредственно, через измерение ускорения, то есть, измерение расстояния и времени. Но как определить массу (инертную массу) до определения силы?

Эта задача решается (мы говорим здесь не столько о практическом, сколько о принципиальном её решении) применением **третьего закона Ньютона**: сила \vec{F}_{12} , с которой тело 2 действует на тело 1, равна по абсолютной величине и противоположна по направлению силе \vec{F}_{21} , с которой тело 1 действует на тело 2,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Выразив здесь силы через ускорения соответствующих частиц, получим соотношение

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2,$$

позволяющее в принципе определить массу одной из взаимодействующих частиц через массу другой независимо от сил путём измерения только ускорений. Приняв массу эталонного тела за единицу, можно приписать инертные массы другим взаимодействующим частицам. При этом вовсе необязательно, чтобы тела действовали друг на друга на расстоянии. В лабораторных условиях проще осуществить *столкновение тел*, до и после которого тела движутся как свободные с постоянными, удобными для измерения скоростями. Интегрируя последнее соотношение по времени столкновения, получим

$$m_1(\vec{v}'_1 - \vec{v}_1) = -m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2),$$

где штрихом отмечены скорости после столкновения.

1.2.2 Два примера движения точки по эллипсу

1-й пример. Точка массой m движется по эллипсу с полуосями a и b с постоянной относительно центра эллипса секториальной скоростью σ . Найти действующую на неё силу.

Уравнение эллипса в декартовых координатах

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

а секториальная скорость

$$\sigma = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

В новых переменных $\xi = x/a$ и $\eta = y/b$ эти уравнения примут вид

$$\xi^2 + \eta^2 = 1,$$

$$\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = \omega, \quad \omega = \frac{2\sigma}{ab}.$$

Продифференцировав первое из них по времени, приведём эту систему к виду:

$$\begin{aligned} \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} &= 0, \\ -\eta\dot{\xi} + \xi\dot{\eta} &= \omega. \end{aligned}$$

Умножив первое из них на η , второе – на ξ и сложив, получим

$$\dot{\eta} = \omega\xi.$$

Умножив первое на ξ , второе – на η и вычтя из первого второе, находим

$$\dot{\xi} = -\omega\eta.$$

Таким образом,

$$\ddot{\eta} + \omega^2\eta = 0.$$

Решая это уравнение и возвращаясь к исходным переменным, получаем:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad y = B \sin(\omega t + \beta).$$

Отсюда

$$F_x \equiv m\ddot{x} = -m\omega^2 x, \quad F_y \equiv m\ddot{y} = -m\omega^2 y,$$

то есть

$$\vec{F} = -m \left(\frac{2\sigma}{ab} \right)^2 \vec{r}.$$

Таким образом, на точку действует упругая сила, притягивающая её к геометрическому центру эллипса.

2-й пример. Точка массой m движется по эллипсу параметра p с постоянной относительно фокуса эллипса секториальной скоростью σ . Найти действующую на нее силу.

В полярной системе координат уравнение эллипса с параметром p и эксцентриситетом $\varepsilon \in (0, 1)$ имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

а условие постоянства секториальной скорости запишется в виде

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \sigma.$$

Пользуясь формулами для компонент ускорения в полярных координатах (п.1.1.2), находим:

$$F_r \equiv ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2), \quad F_\varphi \equiv ma_\varphi = \frac{m}{r} \frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt} = 0.$$

Искомая сила является центрально-симметричной, силовой центр совпадает с фокусом эллипса..

Дифференцируя радиальную переменную с использованием уравнения эллипса, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{-p\varepsilon \sin \varphi \dot{\varphi}}{[1 + \varepsilon \cos \varphi]^2} = \frac{\varepsilon r^2 \dot{\varphi}}{p} \sin \varphi = \frac{2\sigma\varepsilon}{p} \sin \varphi, \\ \ddot{r} &= \frac{2\sigma\varepsilon \dot{\varphi}}{p} \cos \varphi = \frac{\varepsilon}{p} \left(\frac{2\sigma}{r} \right)^2 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Отсюда

$$F_r = m \left[\frac{(2\sigma)^2}{pr^2} \varepsilon \cos \varphi - r \left(\frac{2\sigma}{r^2} \right)^2 \right] = m \left(\frac{2\sigma}{r} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi - \frac{1}{r} \right) =$$

$$= m \left(\frac{2\sigma}{r} \right)^2 \left[\frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi - \frac{1}{p} (1 + \varepsilon \cos \varphi) \right] = -\frac{m}{p} \left(\frac{2\sigma}{r} \right)^2,$$

или, в векторной форме,

$$\vec{F} = -\frac{m}{p} \left(\frac{2\sigma}{r} \right)^2 \vec{e}_r.$$

Это – *кулоновская (ньютоновская) сила*.

1.2.3 Силы в механике

В природе существует четыре типа взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое. В механике рассматриваются только два первых вида, два последних же проявляются на таких малых расстояниях, что скорость, ускорение и другие понятия классической механики перестают быть применимыми (поэтому-то мы и говорим о *взаимодействиях*, а не о *силах*, определяемых через *ускорения*), и нужно использовать квантовую механику.

Согласно *закону всемирного тяготения (четвёртому закону Ньютона)*, гравитационная сила, с которой точечная масса m_2 действует на точечную массу m_1 , даётся формулой

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (1.2.1)$$

где $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, а \vec{e}_{12} – единичный вектор, направленный из точки 2 в точку 1, $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ – положительная *гравитационная постоянная*. Поскольку \vec{r}_{12}/r_{12} – единичный вектор, абсолютная величина силы (1.2.1)

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}.$$

Аналогичный вид имеет и электростатическая сила, действующая между двумя неподвижными относительно друг друга электрически-нейтральными зарядами e_1 и e_2 ,

$$\vec{F}_{12} = k \frac{e_1 e_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12},$$

коэффициент пропорциональности k , зависящий от выбора системы единиц, в используемой нами системе СГС равен 1.

Сила, действующая на заряд e , движущийся в электромагнитном поле с напряжённостями \vec{E} и \vec{H} , даётся формулой

$$\vec{F}_1 = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}_1, \vec{H}].$$

Электромагнитные поля в свою очередь создаются зарядами-источниками, связь напряжённостей полей с которыми устанавливается посредством *уравнений Максвелла*. Применяя записанное выше уравнение для расчета движения заряда в поле с *заданными* $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{H}(\vec{r}, t)$, мы неявно предполагаем, что рассматриваемый заряд e мал, и в силу этой малости он не возмущает распределение и движение зарядов, создающих поле (такой заряд называют *пробным*).

Напряжённости часто удобно выразить через электромагнитные потенциалы – скалярный φ и векторный \vec{A} :

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot}\vec{A}.$$

Такие силы, как упругая сила (например, пружины)

$$\vec{F} \doteq -k(\vec{r} - \vec{r}_0),$$

или сила трения

$$\vec{F} = -b\vec{v},$$

являются проявлением электромагнитных взаимодействий, определяющих микроскопическую структуру данных тел: формулы эти просты лишь благодаря их приближённому характеру.

В механике постулируется **принцип суперпозиции сил**: если на тело 1 действуют несколько других тел ($j = 2, 3, \dots$), то результирующая сила равна векторной сумме сил, с которой действует на него каждое из этих тел в отсутствие остальных:

$$\vec{F}_1 = \sum_{j \neq 1} \vec{F}_{1j}$$

Эту силу называют *равнодействующей*.

Принцип суперпозиции позволяет распространить законы взаимодействия между двумя материальными точками на системы произвольного числа материальных точек и даже на протяжённые сплошные тела. В последнем случае протяжённое тело разбивается на элементы с центрами в точках \vec{r}'_j , и векторная сумма создаваемых ими сил $d\vec{F}(\vec{r}, \vec{r}'_j)$ в точке \vec{r} заменяется интегралом по занимаемой этим телом области (линии, поверхности, объёму) D :

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = \int_D d\vec{F}(\vec{r}, \vec{r}').$$

Как и для электростатических сил, для сил гравитации удобно ввести *напряжённость гравитационного поля*

$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})/m_1. \quad (1.2.2)$$

Переписав это равенство в виде

$$m\vec{g} = \vec{F}, \quad (1.2.3)$$

видим, что вектор \vec{g} является ускорением материальной точки в заданном гравитационном поле («ускорением свободного падения»). Правда, прийти к этому заключению можно лишь на основе равенства гравитационной (в формуле (1.2.2)) и инертной (в формуле (1.2.3)) масс⁷. В силу принципа эквивалентности гравитационной и инертной масс $\vec{g}(\vec{r})$ одновременно является и *ускорением свободного падения* частицы в точке \vec{r} .

Сила, действующая на материальную точку массой m_1 в поле, создаваемом заданным распределением масс, выражается формулой:

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = m_1\vec{g}(\vec{r}), \quad \vec{g}(\vec{r}) = -G \int_D \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dm(\vec{r}').$$

Здесь $dm(\vec{r}')$ представляется произведением $\lambda(\vec{r}')dl'$ в случае линейного распределения массы с линейной плотностью λ , $\sigma(\vec{r}')dS'$ в случае поверхностного распределения массы с поверхностной плотностью σ , $\rho(\vec{r}')dV'$ в случае объёмного распределения массы с объёмной плотностью ρ .

При наличии симметрии поля напряжённость удобно вычислять, применяя теорему Гаусса:

$$\oint_{S(D)} \vec{g}d\vec{S} = -4\pi Gm(D),$$

где $S(D)$ – замкнутая поверхность, охватывающая область D , а $m(D)$ – заключённая в ней масса.

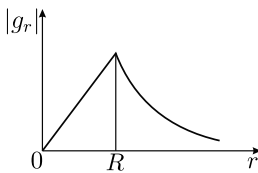
Так, в случае сферически симметричного распределения массы, взяв в качестве D сферу радиуса r с центром в начале координат,

⁷Ни один эксперимент до сих пор не опроверг тождественность гравитационной и инертной масс. А. Эйнштейн положил этот факт в основу общей теории относительности.

совпадающим с центром симметрии, так что вектор напряжённости имеет только радиальный компонент, получим

$$g_r(r) = -G \frac{m(r)}{r^2} = -G \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'.$$

В этом случае напряжённость в точке r зависит лишь от массы $m(r)$ вещества, содержащегося внутри сферы радиуса r , и совершенно не зависит от массы, лежащей за пределами этой сферы. В частности, если эта сфера пуста, $\rho(r') = 0$, $0 \leq r' \leq r$, то $g_r(r') = 0$ – поле в каждой точке внутри такой полости отсутствует, и хотя каждый элемент массы, лежащий за пределами этой полости, создаёт в ней поле (неоднородное поле!), суммарное поле, даваемое интегралом по всей внешней области, равно нулю. Если вся масса заключена в шаре радиуса R и распределена в нём сферически симметрично, то, каково бы ни было это распределение, гравитационное поле, создаваемое этим шаром за его пределами, не зависит от формы этого распределения и в точности совпадает с полем материальной точки той же массы $m = m(R)$, помещённой в центр симметрии:



$$g_r(r) = -G \frac{m}{r^2}, \quad r > R.$$



Внутри же шара поле изменяется по линейному закону:

$$g_r(r) = -G \frac{m}{R^2} \frac{r}{R}, \quad r < R.$$

Рис. 1.10. Гравитационное поле внутри и вне однородного шара радиуса R

Часто удобнее выразить напряжённость гравитационного поля через гравитационный потенциал $\phi(\vec{r})$,

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\text{grad}\phi(\vec{r}),$$

а последний найти интегрированием

$$\phi(\vec{r}) = -G \int_D \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

или решением уравнения Пуассона

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho.$$

Гравитационный потенциал определён с точностью до произвольной постоянной: прибавление к нему любой постоянной не изменяет его градиента, и стало быть не изменяет напряжённости самого поля. Часто выбирают постоянную таким образом, чтобы потенциал на бесконечности обращался в нуль. Такой выбор (калибровка) удобен, в частности, при работе с пространственно ограниченными распределениями масс. Другая калибровка, обращающая в нуль потенциал в начале координат, удобна при изучении полей, создаваемых сферически симметричными распределениями масс, не имеющими особенностей в нуле.

В случае стационарного или медленно меняющегося электромагнитного поля

$$\varphi(\vec{r}) = \int_D \frac{\vec{v}' de(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{A} = \frac{1}{c} \int_D \frac{d\vec{I}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

где $de(\vec{r}')$ – электрический заряд в элементарном объёме $d\vec{r}'$, $d\vec{I}(\vec{r}') = \vec{v}(\vec{r}')de(\vec{r}')$ – создаваемый движением этого заряда ток.

Геометрический характер сложения сил, определяемый принципом суперпозиции, чрезвычайно полезен в методическом отношении: любую силу можно представить как векторную сумму других сил, разложить её на составляющие. Этот прием позволяет легко объяснить, например, *парадокс парусника* – движение парусной яхты *под действием ветра против ветра* (бейдевинд): парус принимает на себя нормальную составляющую силы ветра, который разлагается на продольный и поперечный (по отношению к килю) компоненты \vec{F} и \vec{Q} соответственно, последний из них гасится сопротивлением воды (см. рис. 1.11). Если через равные промежутки времени яхта меняет углы α (парус) и θ (руль) на $-\alpha$ и $-\theta$, её усреднённое по времени движение выглядит прямолинейным, направленным против ветра.

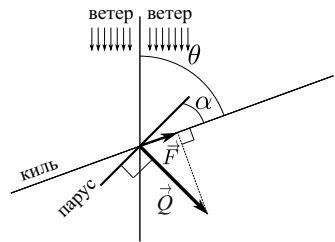


Рис. 1.11. Разложение сил, демонстрирующее причину движения парусной яхты против ветра

1.2.4 Примеры

Гравитационный потенциал однородного шара. Найти гравитационный потенциал и напряжённость, создаваемые однородным шаром массой m радиуса R .

Разбив мысленно шар на тонкие (толщиной dr') сферические оболочки массами

$$dm(r') = \rho dV' = \rho \cdot 4\pi r'^2 dr' = \frac{3m}{R^3} r'^2 dr',$$

и обозначив через $d\phi(r, r')$ создаваемые ими гравитационные потенциалы на расстоянии r от центра, воспользуемся принципом суперпозиции:

$$\phi(r) = \int_0^R d\phi(r, r'). \quad (1.2.4)$$

Известно, что за пределами каждой такой сферы потенциал совпадает с потенциалом материальной точки той же массы $dm(r')$, помещенной в начало координат, внутри же сферы поле равно нулю и потенциал постоянен (совпадает по величине со своим значением на самой сфере):

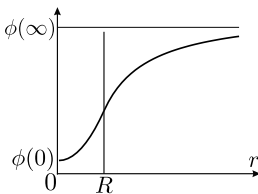
$$d\phi(r, r') = \begin{cases} -G \frac{dm(r')}{r}, & 0 < r' < r; \\ -G \frac{dm(r')}{r'}, & r' > r. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Подставляя (1.2.5) в (1.2.4) и интегрируя по штрихованной переменной, получим потенциал, создаваемый шаром внутри его и за его пределами:

$$\phi(r) = \begin{cases} -G \int_0^r \frac{dm(r')}{r} - G \int_r^R \frac{dm(r')}{r'} = \frac{Gm}{2R} \left[-3 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], & 0 < r < R; \\ -G \frac{m}{r}, & r > R. \end{cases}$$

Соответствующая этому потенциалу напряжённость равна

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\nabla\phi(r) = -\phi'(r)\vec{e}_r = \begin{cases} -Gm \frac{r}{R^3} \vec{e}_r, & 0 < r < R; \\ -G \frac{m}{r^2} \vec{e}_r, & r > R. \end{cases}$$



Обозначив через g_0 ускорение свободного падения на поверхности шара, $g_0 = Gm/R^2$, представим потенциал и напряжённость в виде

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{g_0 R}{2} \left[-3 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], & 0 < r < R; \\ -\frac{g_0 R^2}{r}, & r > R \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Рис. 1.12. Гравитационный потенциал внутри и вне однородного шара (в произвольной нормировке)

$$\vec{g}(\vec{r}) = \begin{cases} -g_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r, & 0 < r < R; \\ -g_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \vec{e}_r, & r > R. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Заметим, что и потенциал (1.2.6), как и напряжённость, «сшит» на границе шара: его левый и правый пределы в этой точке совпадают. Потенциал (1.2.6) нормирован таким образом, что на бесконечности он обращается в нуль, $\phi(r) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$.

Прибавив к нему постоянную $3g_0R/2$, приведём его в другой нормировке, в которой он равен нулю в центре шара:

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{g_0R}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2, & 0 < r < R; \\ \frac{g_0R}{2} \left[3 - 2\frac{R}{r}\right], & r > R. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Представления (1.2.7) и (1.2.8) отличаются друг от друга на постоянное слагаемое и соответствуют одной и той же напряжённости поля

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}), \quad (1.2.9)$$

в чём легко убедиться непосредственно с учётом того, что градиент сферически симметричной функции $\nabla\phi(r) = \phi'(r)\vec{e}_r$.

Плотность Земли. Действительное распределение массы в Земле неоднородно: внутреннюю часть радиусом $R_1 \approx R/2$ занимает плотное ядро, напряжённость гравитационного поля в котором линейно возрастает, в остальной же части, называемой мантией, напряжённость практически постоянна. Найдите гравитационный потенциал, создаваемый таким распределением массы, и её плотность.

Вместо (1.2.7) и (1.2.8) имеем

$$\vec{g}(\vec{r}) = \begin{cases} -g_0 \frac{r}{R_1} \vec{e}_r, & 0 < r < R_1; \\ -g_0 \vec{e}_r, & R_1 < r < R; \\ -g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \vec{e}_r, & r > R \end{cases}$$

и

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{g_0}{2R_1} r^2, & 0 < r < R_1; \\ \frac{g_0R_1}{2} + g_0(r - R_1), & R_1 < r < R; \\ g_0(2R - R_1/2) - g_0 \frac{R^2}{r}, & r > R, \end{cases} \quad (1.2.10)$$

где $R_1 \approx R/2$. Для контроля полезно проверить непрерывность потенциала в точках R_1 и R , а также выполнение соотношения (1.2.9).

Плотность определяется из уравнения Пуассона:

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi G} \Delta\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \begin{cases} \frac{3g_0}{4\pi G} \frac{1}{R_1}, & r < R_1; \\ \frac{g_0}{2\pi G} \frac{1}{r}, & R_1 < r < R; \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Движение яхты против ветра. Яхта идет под углом θ к встречному ветру, установив парус под углом α к своему киллю (рис. 1.11). Каковы должны быть эти углы, чтобы обеспечить максимальную составляющую скорости яхты в наветренном направлении?

Представим ветер как усреднённый поток молекул с массой m и одинаковой по направлению и величине скоростью, равной скорости ветра v . Скорость эта много больше скорости яхты, так что при определении действующей на неё силы её можно считать неподвижной. При упругом отражении от паруса каждая молекула передаёт ему импульс $2mv \sin(\theta - \alpha)$, перпендикулярный поверхности паруса. За время dt на парус площадью S приходит

$$dN = nvdtS \sin(\theta - \alpha),$$

где n – концентрация молекул. Эти молекулы передают парусу импульс

$$dp = 2mv^2 n S \sin^2(\theta - \alpha) dt,$$

создающий перпендикулярную парусу силу давления ветра на него

$$Q = \frac{dp}{dt} = Q_0 \sin^2(\theta - \alpha).$$

Скорость движения яхты V пропорциональна проекции этой силы на направление киля

$$F = Q \sin \alpha = Q_0 \sin^2(\theta - \alpha) \sin \alpha.$$

Нас интересует составляющая этой скорости в наветренном направлении V_{\parallel} . Она пропорциональна соответствующей составляющей силы

$$F_{\parallel} = F \cos \theta = Q_0 \sin^2(\theta - \alpha) \sin \alpha \cos \theta.$$

Положения паруса и руля относительно киля яхты, обеспечивающие максимальное значение этой составляющей, определяются условиями

$$\frac{\partial F_{\parallel}}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial F_{\parallel}}{\partial \theta} = 0,$$

приводящими к уравнениям:

$$2 \cos(\theta - \alpha) \sin \alpha = \sin(\theta - \alpha) \cos \alpha,$$

$$2 \cos(\theta - \alpha) \cos \theta = \sin(\theta - \alpha) \sin \theta.$$

Разделив первое из них на $\cos(\theta - \alpha) \cos \alpha$, а второе – на $\cos(\theta - \alpha) \sin \theta$, получим

$$2 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\theta - \alpha), \quad (1.2.11)$$

$$2 \operatorname{ctg} \theta = \operatorname{tg}(\theta - \alpha). \quad (1.2.12)$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \theta = 1, \quad (1.2.13)$$

и

$$\operatorname{tg}(\theta - \alpha) \equiv \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha} = (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \alpha)/2. \quad (1.2.14)$$

Подставляя (1.2.14) в (1.2.11)-(1.2.12) и используя (1.2.13), получим:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{5}.$$

Таким образом, $\theta \approx 66^\circ$, $\alpha \approx 24^\circ$.

1.2.5 Пуанкаре о массах и силах

Являются ли законы Ньютона математическими аксиомами, место которых могли бы занять другие аксиомы, порождающие другую механику, или это – опытные данные, исключаящие иную механику? Логический анализ этой проблемы выполнил великий французский учёный Анри Пуанкаре в главе 6 своей книги «Наука и гипотеза» сто с лишним лет назад⁸. Вот фрагмент его рассуждений о втором законе Ньютона, точнее, о соединяемых им понятиях массы и силы.

Закон ускорения. Ускорение тела равно действующей на него силе, деленной на его массу.

Можно ли проверить на опыте этот закон? Для этого нужно было бы измерить три величины, входящие в его выражение: ускорение, силу и массу.

Отвлекаясь от трудности, связанной с измерением времени, допустим, что возможно измерить ускорение. Но как измерить силу или массу?

Что такое *масса*? Это, отвечает Ньютон, произведение объёма на плотность. Лучше сказать, возражают Томсон и Тэт, что плотность есть частное от деления массы на объём. Что такое *сила*? Это, отвечает Лагранж, причина, производящая или стремящаяся произвести движение тела. Это, скажет Кирхгоф, произведение массы на *ускорение*. Но тогда почему не сказать, что масса есть частное от деления силы на ускорение?

Чтобы определение было бы к чему-нибудь пригодно, оно должно научить нас измерению силы; к тому же этого условия достаточно; нет никакой необходимости, чтобы определение научило нас тому, что такое сила *сама по себе*, или тому, есть ли она причина или следствие движения.

Итак, прежде всего надо определить равенство двух сил. Когда говорят, что две силы равны? Тогда, отвечают нам, когда, будучи приложены к одной и той же массе, они сообщают ей одно и то же ускорение или когда, будучи противоположно направлены, они взаимно уравниваются. Но это определение совершенно при-

⁸Анри Пуанкаре, О науке, пер. с фр. под ред. Л.С.Понтрягина. Москва, Наука, 1990.



Пуанкаре Жюль Анри (1854 – 1912) – французский математик, механик, физик, астроном и философ. Среди его самых крупных достижений: создание топологии, качественная теория дифференциальных уравнений, теория автоморфных функций, разработка новых методов небесной механики, создание математических основ теории относительности, наглядная модель геометрии Лобачевского.

зрачно. Силу, приложенную к данному телу, нельзя отцепить от него и прицепить затем к другому телу вроде того, как отцепляют локомотив, чтобы сцепить его с другим поездом. Поэтому и нельзя знать, какое ускорение данная сила, приложенная к данному телу, сообщила бы другому телу, *если бы была* к нему приложена. Нельзя также знать, каково было бы действие двух сил, не прямо противоположных, в том случае, *если бы* они были прямо противоположны.

Это именно определение и стараются, так сказать, материализовать, когда измеряют силу динамометром или уравнивают ее грузом. Две силы, F и F' , которые я для простоты предположу вертикальными и направленными снизу вверх, приложены соответственно к двум телам C и C' ; я подвешиваю одно и то же тело веса P сначала к телу C , потом к C' ; если в обоих случаях имеет место равновесие, то я заключаю, что две силы F и F' , будучи обе равны P , равны между собою.

Но уверен ли я, что тело P сохранило тот же вес, когда я перенес его от первого тела ко второму? Совсем нет, *я уверен как раз в противном*; я знаю, что напряжение силы тяжести меняется при переходе от одной точки к другой и что оно, например, больше на полюсе, чем на экваторе. Бесспорно, эта разница ничтожна, и на практике я не стал бы принимать ее в расчет, но правильное определение должно обладать математической точностью, а этой точности здесь нет. Сказанное относительно тяжести, очевидно, применимо и к упругой силе динамометра, которая может меняться в зависимости от температуры и многих других обстоятельств.

Итак, нам приходится вернуться к определению Кирхгофа: *сила равна массе, умноженной на ускорение*. Теперь этот «закон Ньютона» выступает уже не как экспериментальный закон, а только как определение.

Обменное взаимодействие. Впрочем, современная теоретическая физика даёт более глубокое толкование понятию силы в терминах *обменного взаимодействия*. В популярном изложении оно выглядит следующим образом.

«... Кварки и лептоны представляют собой основной строительный материал Вселенной. Чтобы понять оборотную сторону медали – характер сил взаимодействия между кварками и лептонами, — нужно понять, как современные физикитеоретики интерпретируют само понятие силы. В этом нам поможет аналогия. Представьте себе двух лодочников, гребущих на встречных курсах по реке Кэм в Кэмбридже. Один гребец от щедрости душевной решил угостить коллегу шампанским и, когда они проплывали друг мимо друга, кинул ему полную бутылку шампанского. В результате действия закона сохранения импульса, когда первый гребец кинул бутылку, курс его лодки отклонился от прямолинейного в противоположную сторону, а когда второй гребец поймал бутылку, её импульс передался ему, и вторая лодка также отклонилась от прямолинейного курса, но уже в противоположную сторону. Таким образом, в результате обмена шампанским обе лодки изменили направление. Согласно законам механики Ньютона это означает, что между лодками произошло силовое взаимодействие. Но ведь лодки не вступали между собой

в прямое соприкосновение? Здесь мы и видим наглядно, и понимаем интуитивно, что сила взаимодействия между лодками была передана носителем импульса – бутылкой шампанского. Физики назвали бы ее переносчиком взаимодействия. В точности так же и силовые взаимодействия между частицами происходят посредством обмена частицами – переносчиками этих взаимодействий. Фактически, различие между фундаментальными силами взаимодействия между частицами мы и проводим лишь постольку, поскольку в роли переносчиков этих взаимодействий выступают разные частицы. Таких взаимодействий четыре: сильное (именно оно удерживает кварки внутри частиц), электромагнитное, слабое (именно оно приводит к некоторым формам радиоактивного распада) и гравитационное. Переносчиками сильного цветового взаимодействия являются глюоны, не обладающие ни массой, ни электрическим зарядом. Этот тип взаимодействия описывается квантовой хромодинамикой. Электромагнитное взаимодействие происходит посредством обмена квантами электромагнитного излучения, которые называются фотонами и также лишены массы. Слабое взаимодействие, напротив, передаётся массивными векторными или калибровочными бозонами, которые «везут» в 80-90 раз больше протона, – в лабораторных условиях их впервые удалось обнаружить лишь в начале 1980-х годов. Наконец, гравитационное взаимодействие передаётся посредством обмена не обладающими собственной массой гравитонами – этих посредников пока что экспериментально обнаружить не удалось. В рамках Стандартной модели первые три типа фундаментальных взаимодействий удалось объединить, и они более не рассматриваются по отдельности, а считаются тремя различными проявлениями силы единой природы»⁹.

Тяготение и антитяготение. «Сила, что движет мирами, – так говорили о тяготении со времён Ньютоновских *Начал*, и ничто, казалось, не могло поколебать этого общего убеждения. Но в 1998-1999 гг. выяснилось, что динамикой наблюдаемой Вселенной управляет не тяготение, а совсем иная сила – космическое отталкивание, или антитяготение. Антитяготение действует на разбегающиеся галактики и стремится ещё более отдалить их друг от друга; из-за этого расширение Вселенной происходит с ускорением. Ускоренное космологическое расширение было обнаружено в прямых астрономических наблюдениях на расстояниях в несколько миллиардов световых лет, почти у края видимой Вселенной.

Ускорение указывает на силу, которая определяет движение тел. Этой силой не может быть притяжение космических тел друг к другу: взаимное тяготение галактик способно лишь тормозить их разбегание. А ускорять это движение может только сила противоположного знака – она и называется всемирным антитяготением. Физический источник антитяготения – тёмная энергия, которая проявляет себя в мире только благодаря своему свойству создавать антитяготение. В остальном она невидима и неуловима: не излучает и не поглощает света, не рассеивает его. По макроскопическим свойствам тёмная энергия подобна особому рода сплош-

⁹Энциклопедия Джеймса Трефила «Природа науки. 200 законов мироздания» (<http://elementy.ru/trefil>).

ной среде с положительной плотностью и отрицательным давлением. Что касается физической природы и микроскопической структуры тёмной материи, то они остаются полностью неизвестными»¹⁰.

1.2.6 Упражнения

1. Доказать, что силовые поля $\vec{F}_1 = F_1(x)\vec{e}_x$, $\vec{F}_2 = F_2(r)\vec{e}_r$, $\vec{F}_3 = F_3(\varrho)\vec{e}_\varrho$, потенциальны при любых дифференцируемых функциях F_1 , F_2 , F_3 .
2. Доказать, что гравитационное поле, создаваемое массой с произвольным распределением $\rho(\vec{r})$, является потенциальным.
3. Найти такое сферически симметричное распределение массы, при котором напряжённость гравитационного поля везде одинакова по абсолютной величине.
4. Какое из тел, Земля или Солнце, и во сколько раз притягивает Луну сильнее? Отношение масс Луны и Земли 1/81, среднее расстояние от Луны до Земли $38 \cdot 10^4$ км и от Луны до Солнца – $15 \cdot 10^7$ км (тела эти считать материальными точками).

1.3 Основные теоремы о движении точки

1.3.1 Уравнение движения

Выполнив измерение массы и измеряя ускорение материальной точки, помещаемой в разные точки пространства и имеющей разные скорости, мы в состоянии определить силу как функцию координат, скорости и, в общем случае, времени:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (1.3.1)$$

Только после нахождения этой функции формула $m\vec{a} = \vec{F}$ перестанет быть просто определением, а превращается в дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t),$$

решение которого при заданных начальных условиях

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$$

уже *предсказывает* закон движения $\vec{r}(t)$ материальной точки до проведения эксперимента.

Это уравнение имеет место в случае, если движение наблюдаемой точки не влияет на состояние тел, создающих силовое поле (такое поле

¹⁰А.Д.Чернин, Тёмная энергия и всемирное антитяготение, УФН 2008, т.178, №3,267-300.

будем называть *внешним*). Движение двух взаимодействующих тел с конечными массами описывают системой двух дифференциальных уравнений для $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$:

$$m\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2, t),$$

$$m\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}(\vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2, \vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, t).$$

Эта запись предполагает, что сила, действующая на одну из частиц в момент времени t , зависит от положения и скорости другой частицы *в тот же самый момент времени*, иными словами, предполагается, что взаимодействие между частицами распространяется *мгновенно*. Это предположение приемлемо для частиц, движущихся много медленнее света, в противном случае необходимо учитывать запаздывание взаимодействия, скорость которого, согласно теории относительности, не может превышать скорости света.

Движение системы N материальных точек в том же приближении описывается системой дифференциальных уравнений для $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$. Применение этой системы к анализу сплошной среды путём разбиения последней на элементарные объёмы, заменяемые материальными точками с соответствующими массами, даёт уравнения движения сплошной среды: абсолютно твёрдого тела, упругого тела, идеальной и вязкой жидкостей и др.

Таким образом, решая задачу о движении одного тела в силовом поле, создаваемым другими телами, мы должны учитывать, что изменение положения рассматриваемого тела по третьему закону Ньютона влечёт за собой и изменение положения тел, создающих это поле. Так, интересуясь движением одной из планет Солнечной системы, мы должны были бы решать систему уравнений, описывающих движение всех планет с учётом их влияния друг на друга, если бы не одно важное обстоятельство. О нём очень выразительно написал В.В. Белецкий в замечательных «Очерках о движении космических тел»¹¹.

«Судьба распорядилась так, что человечество возникло и развилось на планете, входящей в систему одиночной звезды – Солнца, причём в эту систему входят планеты, находящиеся друг от друга достаточно далеко и имеющие массы, намного меньшие массы центрального светила – Солнца. При этих условиях в исследовании движения каждой планеты можно с большой точностью обойтись уравнениями, учитывающими только притяжение Солнцем данной планеты. Это в свою очередь способствовало тому, что человечеству за сравнительно короткий срок удалось, во-первых, постичь законы движения планет (Кеплер) и, во-вторых, объяснить их (Ньютон)».

¹¹ В.В. Белецкий, Очерки о движении космических тел, М.: Наука, 1972, с. 13.

Следуя установившейся традиции, мы начинаем решение задач механики с рассмотрения движения тела в *заданном, не зависящем от движения этого тела силовом поле*. Положение и динамическое состояние такого тела, рассматриваемого как материальная точка, характеризуется шестью переменными (три координаты и три проекции скорости) – это все ещё слишком много переменных. Мы начнём с *одномерных задач*, когда решение можно получить лишь для одной координаты точки. Примерами могут служить вертикальное падение тела в однородном поле тяжести, движение бусинки, нанизанной на стержень, колебание маятника с нерастяжимой нитью. Ниже мы увидим, что даже в тех случаях, когда тело совершает непрямолинейное движение в пространстве, можно преобразовать задачу о трёхмерном движении в три, или даже две одномерных задачи, решаемых независимо друг от друга.

Но прежде мы сформулируем некоторые теоремы, относящиеся к движению точки в пространстве.

1.3.2 Теоремы об импульсе

Дифференциальную формулировку второго закона Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

гласящую, что

изменение импульса частицы в единицу времени равно действующей на неё силе, интегрированием по времени можно преобразовать в *интегральную*:

$$\vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{F} dt. \quad (1.3.2)$$

Интеграл в правой части часто называют *импульсом силы*, так что закон этот можно сформулировать и так: *изменение импульса частицы равно полученному ей импульсу силы*. В частности, *если суммарный импульс силы, получаемый телом за некоторое время, равен нулю (при этом не обязательно сила должна быть все время равна нулю), импульс самого тела в конце этого интервала времени будет тем же, что и в начале*. Утверждение это можно рассматривать как *закон сохранения импульса*.

Если сила \vec{F} тождественно равна нулю, уравнение (1.3.2) не даёт ничего нового по сравнению с первым законом Ньютона, но *если равна нулю одна из проекций силы, скажем, F_z , то соответствующая ей проекция импульса p_z частицы сохраняется*. Если в начальный момент времени z -составляющая скорости была равна нулю, то она будет оставаться равной нулю и в последующем движении. Траектория такой частицы будет лежать в неподвижной плоскости, перпендикулярной оси OZ и проходящей через точку \vec{r}_0 (*плоское движение*). Если две проекции силы, например, F_y и F_z , равны нулю и начальная скорость направлена вдоль оси OX , то частица будет двигаться по прямой, проходящей через точку \vec{r}_0 параллельно OX (движение будет *прямолинейным*)

1.3.3 Теоремы о моменте импульса

Запишем уравнение движения материальной точки в виде

$$d\vec{p} = \vec{F}dt. \quad (1.3.3)$$

Здесь $d\vec{p} \equiv m d\vec{v}$ – изменение импульса точки, а вектор $\vec{F}dt$ называется *элементарным импульсом силы*. Умножив векторно обе части (1.3.3) на радиус-вектор

$$[\vec{r}, d\vec{p}] = [\vec{r}, \vec{F}]dt$$

и преобразуем левую часть следующим образом:

$$[\vec{r}, d\vec{p}] = d[\vec{r}, \vec{p}] - [d\vec{r}, \vec{p}] = d[\vec{r}, \vec{p}] - [\vec{v}, m\vec{v}]dt = d[\vec{r}, \vec{p}].$$

Вектор

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] \quad (1.3.4)$$

называется *моментом импульса*¹² материальной точки (относительно начала координат), а вектор

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad (1.3.5)$$

– *моментом силы*. Момент импульса связан с секториальной скоростью соотношением

$$\vec{L} = 2m\vec{\sigma}.$$

¹²Вместо этого термина часто используются термины *кинетический момент*, *момент количества движения*.

Таким образом, из закона изменения импульса (1.3.3) следует закон изменения момента импульса

$$d\vec{L} = \vec{M}dt. \quad (1.3.6)$$

Подобно уравнению (1.3.2), устанавливающему равенство между скоростью изменения импульса и силой, уравнение (1.3.6) гласит, что *скорость изменения момента импульса материальной точки равна моменту приложенной к ней силы*. И так же, как в первом случае, *момент импульса сохраняется, если правая часть уравнения (1.3.6) равна нулю*:

$$\vec{L} = \text{const}, \quad \text{если } \vec{M} = 0.$$

Момент силы \vec{M} равен нулю тогда и только тогда, когда вектор силы коллинеарен радиус-вектору, то есть лежит на прямой, проходящей через данную точку и начало координат. Сила, вектор которой в каждой точке пространства лежит на прямой, соединяющей эту точку с фиксированной точкой O , называется *центральной*, а точка O – её центр, который обычно и выбирается в качестве начала координат. В этом случае имеет место следующий закон сохранения: *момент импульса материальной точки в поле центральной силы сохраняется*.

Траектория точки при этом *плоская*, то есть лежит в неподвижной плоскости, определяемой начальными условиями \vec{r}_0 и \vec{v}_0 . Выбрав эту плоскость в качестве координатной плоскости XOY , получим $L_x = 0$, $L_y = 0$ и $L_z = \pm L$, где знак плюс берется при движении против часовой стрелки (если смотреть на эту плоскость со стороны положительной полуоси OZ), а минус – по часовой («правило буравчика»). В полярных координатах

$$L_z = mr^2\dot{\varphi} = 2m\sigma_z = \text{const}.$$

Поскольку σ есть площадь, заметаемая радиус-вектором в единицу времени, выражение

$$r^2\dot{\varphi} = \text{const}$$

называют *законом площадей*, а вектор $\vec{\sigma} = \sigma\vec{e}_z$ *секториальной скоростью*.

1.3.4 Кинетическая энергия и работа

Умножим теперь уравнение (1.3.3) скалярно на равенство

$$\frac{\vec{p}}{m} = \vec{v}$$

(левую часть на левую и правую часть на правую)

$$\frac{\vec{p}d\vec{p}}{m} = \vec{F}\vec{v}dt$$

и слегка преобразуем обе части:

$$d\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \vec{F}d\vec{r}. \quad (1.3.7)$$

Левая часть представляет собой приращение *кинетической энергии* материальной точки

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2} \equiv T, \quad (1.3.8)$$

а правая – *работу силы*

$$\vec{F}d\vec{r} \equiv A(\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r})$$

при элементарном перемещении точки $d\vec{r}$. В результате имеем

$$dT = A(\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}) :$$

изменение кинетической энергии материальной точки равно работе действующей на неё силы. В «обращённом» виде (в предположении о заданном количестве энергии, преобразуемой в работу) оно известно в истории под названием *золотое правило механики*: выигрывая в силе, проигрываешь в пути. Его пытался обосновать ещё Аристотель. Соотношение это может быть распространено на любое конечное перемещение:

$$T - T_0 = A(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}),$$

где

$$A(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}d\vec{r}. \quad (1.3.9)$$

Если сила \vec{F} зависит только от координат, а интеграл (1.3.9) не зависит от формы линии интегрирования, соединяющей заданные точки \vec{r}_0 и \vec{r} , то можно выбрать некоторую фиксированную точку \vec{r}^* в пространстве и представить функцию двух векторных аргументов в виде разности функций одного аргумента (постоянный радиус-вектор \vec{r}^* является параметром):

$$A(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}) = A(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}^*) - A(\vec{r} \rightarrow \vec{r}^*).$$

Функция

$$A(\vec{r} \rightarrow \vec{r}^*) \equiv U(\vec{r})$$

называется *потенциальной энергией*¹³ точки в данном силовом поле, а обладающая таким свойством сила – *потенциальной силой*. Согласно векторному анализу, любое из следующих свойств потенциальной силы может служить определяющим:

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0,$$

$$\text{rot} \vec{F}(\vec{r}) = 0$$

и

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}). \quad (1.3.10)$$

Подставляя последнее в дифференциальное соотношение (1.3.7) и учитывая (1.3.8), получим

$$d(T + U) = 0,$$

откуда следует закон сохранения полной энергии E в стационарном (то есть, не зависящем от времени) потенциальном поле:

$$E \equiv T + U = \text{const.}$$

В стационарном потенциальном поле полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия материальной точки сохраняется. Стационарное потенциальное поле называют *консервативным*.

Из формулы (1.3.10) следует, что потенциальная (а значит, и полная) энергия определена с точностью до произвольной постоянной: прибавление или вычитание таковой на величине и направлении силы никак не сказывается.

Кулоновское и ньютоновское поля потенциальны. Вообще, потенциально всякое *центрально-симметричное поле*, то есть поле центральной силы, величина которой в точке \vec{r} не зависит от направления радиус-вектора этой точки:

$$F_r(\vec{r}) = F_r(r).$$

¹³Введённый в 1.2.3 скалярный потенциал есть потенциальная энергия единичной массы (в случае гравитационного поля) или единичного заряда (в случае электростатического поля).

В этом можно убедиться, вычислив её ротор:

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{rot} F_r(r) \vec{e}_r = [\nabla, f(r) \vec{r}] = [\nabla f(r), \vec{r}] + f(r) [\nabla, \vec{r}] = f'(r) [\vec{e}_r, \vec{r}] = 0,$$

где

$$f(r) \equiv F_r(r)/r.$$

Таким образом, при движении в центрально-симметричном поле сохраняются две величины: момент импульса

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

и полная энергия материальной точки:

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r).$$

Потенциальное поле может быть зависящим от времени. Пример – электрическое поле пролетающего иона, действующее на ядро и электроны атома, или переменное электрическое поле между обкладками конденсатора, в котором находится этот атом. В этом случае $U = U(\vec{r}, t)$,

$$\vec{F} d\vec{r} = -\nabla U d\vec{r} = -dU + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

и

$$d(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

Наконец, если на тело действует кроме потенциальной ещё и непотенциальная сила $\vec{F}_{\text{нп}}$, то правая часть последнего уравнения дополняется совершаемой ей работой.

$$d(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t} dt + \vec{F}_{\text{нп}} d\vec{r}.$$

1.3.5 Примеры: определение времени достижения

Пример 1. Материальная точка массой m движется в потенциальном поле $U(\vec{r}) = \alpha/x^2$, $\alpha > 0$. В момент времени $t = 0$ она находилась в точке с координатой $x_0 = 1$ и имела нулевую x -составляющую скорости. Найти момент времени достижения ею плоскости $x = a > 1$.

Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{\alpha}{x^2} = \frac{mv_{0y}^2}{2} + \frac{mv_{0z}^2}{2} + \alpha$$

и уравнений движения

$$m\dot{v}_y = 0, \quad m\dot{v}_z = 0$$

находим

$$v_y = v_{0y}, \quad v_z = v_{0z}, \quad v_x(x) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}.$$

Разделяя в уравнении

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\alpha}{m} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$$

переменные,

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

и интегрируя последнее уравнение слева по t от нуля до t_a , а справа – по x от 1 до a , получаем:

$$t_a = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \sqrt{a^2 - 1}.$$

1.3.6 Упражнения

1. Выразить кинетическую энергию и момент импульса точки в цилиндрической системе координат.
2. Выразить кинетическую энергию и квадрат момента импульса точки в сферической системе координат. Показать переход в плоскую полярную систему координат.
3. Вывести формулы для кинетической энергии и момента импульса точки в полярной системе координат путем непосредственного перехода от декартовых координат.
4. Показать, что магнитное поле, действующее на движущийся электрический заряд, работы не совершает.



1.4 Одномерное движение

1.4.1 Прямолинейное движение

В этом разделе мы рассмотрим простейшее движение материальной точки – движение по неподвижной прямой. Взяв эту прямую в качестве единственной в данной задаче координатной оси OX , запишем уравнение движения в виде

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t). \quad (1.4.1)$$

Такое движение наблюдается в следующих случаях.

Мононаправленные силы. Пусть на точку действует сила, величина которой может зависеть от положения точки, её скорости и момента времени, но направление силы продолжает оставаться одним и тем же. Если начальная скорость частицы параллельна этому направлению, то создаваемое этой силой ускорение не изменит направления

скорости точки, и точка будет двигаться вдоль начального направления, то есть по прямой.

Это свойство можно установить аналитически. Направив ось OX параллельно силе, запишем уравнение движения в проекциях на оси декартовых координат:

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t), \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = 0. \quad (1.4.2)$$

Из двух последних уравнений следует, что

$$\dot{y} = v_{0y}, \quad \dot{z} = v_{0z}.$$

Поскольку начальная скорость параллельна силе (и, тем самым, параллельна оси OX),

$$\dot{y} = 0, \quad \dot{z} = 0$$

и

$$y = y_0, \quad z = z_0.$$

Последние уравнения и показывают, что точка перемещается по прямой, параллельной силе. На этой прямой

$$F_x = F_x(x, y_0, z_0, v_x, 0, 0, t). \quad (1.4.3)$$

Положив $y_0 = 0, z_0 = 0$ и подставив (1.4.3) в (1.4.2), приходим к (1.4.1).

Центральные силы. Если точка движется в центральном поле, и её начальная скорость направлена вдоль прямой, соединяющей эту точку с силовым центром, то в дальнейшем точка будет оставаться на этой прямой, которую и можно выбрать в качестве оси OX . Этот вывод следует также из закона сохранения момента импульса точки в центральном поле:

$$\vec{L} = m[\vec{r}, \vec{v}] = m[\vec{r}_0, \vec{v}_0] = 0.$$

Отсюда

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = 0, \quad y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = 0, \quad z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = 0,$$

и

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Интегрируя эти уравнения,

$$\ln \frac{x}{x_0} = \ln \frac{y}{y_0} = \ln \frac{z}{z_0},$$

приходим к уравнению прямой в виде:

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0},$$

Силы, коллинеарные скорости. Из соображений, аналогичных приведённым выше, следует, что траектория точки остаётся прямолинейной, если действующая на неё сила направлена вдоль вектора скорости или в противоположном ему направлении (к числу последних относятся силы сопротивления, возникающие при движении тела в жидкости или газе).

Реакции связей. Движение материальной точки может быть прямолинейным в случае, когда оно ограничено наложенными на точку *связями* (условиями, ограничивающими возможные положения точки). Наглядные примеры – движение пули в стволе, бусинки на прямой спице, поршня в цилиндре.

1.4.2 Интегрирование уравнений прямолинейного движения

Уравнение прямолинейного движения¹⁴

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$$

есть в общем случае нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $x = x(t)$. Общий интеграл содержит две произвольные постоянные,

$$x = f(t; c_1, c_2),$$

определяемых из начальных условий

$$f(t_0; c_1, c_2) = x_0, \quad \dot{f}(t_0; c_1, c_2) = v_0.$$

Если сила зависит лишь от одной из входящих в аргументы переменной, интегрирование дифференциального уравнения (1.4.1) приводится к квадратурам. Рассмотрим эти случаи.

Сила $F = F(t)$. В случае, когда сила зависит только от времени, одномерное уравнение движения

$$m\ddot{x} = F(t)$$

¹⁴Напомним, что в одномерном движении F обозначает не абсолютную величину силы, а её проекцию на направление движения, которая может быть и отрицательной.

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

решается последовательным интегрированием и применением правила Дирихле для перемены порядка следования интегралов:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t F(t') dt', \\ x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t dt' \int_0^{t'} F(t'') dt'' = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t dt'' F(t'') \int_{t''}^t dt' = \\ &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t (t - t'') F(t'') dt'' = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \tau F(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

В частности, в однородном постоянном поле тяготения $F = mg$:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \tau mg d\tau = x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

Сила $F = F(v)$. Так как сила зависит только от скорости, то в левой части уравнения движения удобно перейти к скорости. Получим уравнение первого порядка

$$m \frac{dv}{dt} = F(v)$$

с разделяющимися переменными v и t :

$$\frac{dv}{F(v)} = \frac{dt}{m}.$$

Выполнение следующей последовательности действий ведёт к ответу:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv'}{F(v')} = \int_0^t \frac{dt}{m} = \frac{t}{m}, \quad (1.4.4)$$

$$t = t(v), \quad v = v(t),$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') dt'.$$

Решение получено при условии, что $F(v) \neq 0$. Случай, когда F может обратиться в нуль, должен рассматриваться отдельно.

Если при вычислении интеграла (1.4.4) возникают трудности, может оказаться удобным перейти в исходном уравнении от времени к координате

$$m \frac{v dv}{dx} = F(v),$$

что приводит к интегралу

$$m \int_{v_0}^v \frac{v' dv'}{F(v')} = x - x_0. \quad (1.4.5)$$

Разрешая это уравнение относительно $v = v(x)$, интегрируя соотношение

$$dt = \frac{dx}{v(x)}$$

и обращая функцию $t = t(x)$, приходим к ответу.

В любом случае система уравнений (1.4.4) и (1.4.5)

$$\int_{v_0}^v \frac{dv'}{F(v')} = \frac{t}{m},$$

$$m \int_{v_0}^v \frac{v' dv'}{F(v')} = x - x_0$$

дает искомый закон движения в *параметрической форме*, где роль параметра исполняет скорость.

Сила $F = F(x)$. В случае одномерного движения сила $F(x)$, зависящая только от координаты, всегда потенциальна: достаточно ввести функцию

$$U(x) = \int_x^{x^*} F(x') dx',$$

чтобы получить определяющее потенциальную силу соотношение

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}. \quad (1.4.6)$$

Как показано в **1.3.4**, потенциальность силы приводит к *закону сохранения полной энергии E* :

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = \text{const} \equiv E,$$

значение которой определяется начальными условиями x_0 и v_0 :

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + U(x_0)$$

В одномерной задаче этого соотношения достаточно, чтобы найти закон движения $x(t)$, по крайней мере в неявной форме. Заметим, что подобно потенциальной полная энергия тоже определена с точностью до аддитивной постоянной, но постоянная эта – та же самая, что и в потенциальной энергии, так что разность $E - U(x)$, равная кинетической энергии $mv^2/2$, не зависит от этой постоянной.

Выразим с помощью этого закона скорость через координату:

$$v(x) = \pm \sqrt{(2/m)[E - U(x)]} \quad (1.4.7)$$

(плюс берётся для движения вправо, минус – влево). Подставляя результат в уравнение

$$\frac{dx}{dt} = v(x)$$

и разделяя переменные, получим:

$$\frac{dx}{v(x)} = dt.$$

Время $t(x) \equiv t(x_0 \rightarrow x|E)$, за которое частица, движущаяся в положительном направлении с массой m и полной энергией E в потенциальном поле $U(x) < E$, переместится из точки x_0 в точку $x > x_0$, определится интегралом

$$t(x) = \int_0^t dt = \int_{x_0}^x \frac{dx}{v(x)} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{(2/m)[E - U(x)]}}. \quad (1.4.8)$$

Обращая найденную функцию, приходим к решению задачи. Одно из начальных условий (x_0) входит в предел интеграла, другое (v_0) «спрятано» в постоянной $E = mv_0^2/2 + U(x_0)$.

Заметим, что время движения в обратном направлении (из точки x в точку x_0) то же самое:

$$\begin{aligned} t(x_0 \leftarrow x|E) &= \int_x^{x_0} \frac{dx}{-\sqrt{(2/m)[E - U(x)]}} = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{(2/m)[E - U(x)]}} = t(x_0 \rightarrow x|E). \end{aligned}$$

1.4.3 Классификация движений в потенциальном поле

Следующие варианты движения изображены на рисунке (производную функции по координате мы отмечаем штрихом: $U'(x) \equiv dU/dx$, вторую производную — двумя штрихами и т.д.).

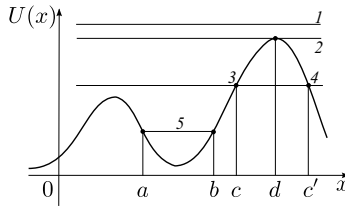


Рис. 1.13. Инфинитные и финитные одномерные движения

1) При $E > U(x)$ везде — движение *инфинитное* (неограниченное) (вправо при $v_0 > 0$ и влево при $v_0 < 0$).

2) При $E = U(d)$, $U'(d) = 0$ и $[E - U(x)] \propto (x - d)^2$ в окрестности d : $v(x) = \sqrt{(2/m)[E - U(x)]} \propto \text{const}|x - d|$,

$$\int_{x_0}^d \frac{dx}{d - x} = -\ln(d - x) \Big|_{x_0}^d = \infty.$$

Время достижения точки d бесконечно, движение *лимитационное* (бесконечное ограниченное).

3) При $E = U(c)$, $U'(c) > 0$: $v(x) \propto \sqrt{c - x}$

$$\int_{x_0}^c \frac{dx}{\sqrt{c - x}} = -\frac{(c - x)^{1/2}}{1/2} \Big|_{x_0}^c = 2(c - x_0)^{1/2} < \infty.$$

Частица за конечное время достигает точки c слева и меняет в ней направление движения.

4) То же происходит в точке c' при подходе к ней частицы справа. Точки c и c' – *точки поворота*. Область (c, c') , где $E < U(x)$ – запрещённая область, называемая *потенциальным барьером*.

5) Область $E > U(x)$, ограниченная двумя точками поворота a и b ($U'(a) < 0$, $U'(b) > 0$), называется *потенциальной ямой*. В ней частица совершает *финитное* (ограниченное) периодическое движение, называемое также *либрационным*. Период колебаний

$$T = t(a \rightarrow b|E) + t(a \leftarrow b|E) = 2 \int_a^b \frac{dx}{v(x)} = 2 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(2/m)[E - U(x)]}}.$$

В случае симметричной потенциальной энергии, $U(-x) = U(x)$,

$$T = 4 \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(2/m)[E - U(x)]}} = 2\sqrt{2m} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (1.4.9)$$

где b , напомним, является корнем уравнения $U(x) = E$.

1.4.4 Обратная задача: определение силы по закону движения

Предположим теперь, что закон движения точки $x(t)$ известен и необходимо найти действующую на неё силу. Можно ли решить эту задачу, зависит от того, дан ли частный закон движения с конкретными начальными условиями или общий закон движения с произвольными постоянными, соответствующими множеству возможных начальных условий. Кроме того, определённость задачи зависит ещё и от дополнительной информации о силе.

Пусть известен частный закон движения

$$x = f(t),$$

не содержащий произвольных постоянных. Действующую на неё силу можно представить бесчисленным множеством функций трех переменных x, v, t . Покажем это на следующем примере.

Пусть $x = \sin t$, тогда $\ddot{f}(t) = -\sin t$. Отсюда можно получить следующие выражения для силы, в зависимости от выбираемых аргументов или их комбинаций:

$$F_1 = -m \sin t,$$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= -m\sqrt{1-v^2}, \\
 F_3 &= -mx, \\
 F_4 &= -(m/2)(x + \sin t), \\
 F_5 &= \alpha F_1 + (1 - \alpha)F_2, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Задача становится определённой, если искомая сила зависит только от одной из указанных в аргументах переменных:

$$F(t) = F_1, \quad F(v) = F_2, \quad F(x) = F_3.$$

Пусть теперь известно множество всех законов движения, отвечающих всем возможным начальным условиям x_0, v_0 :

$$\begin{aligned}
 x &= f(t; x_0, v_0), \\
 v &= \dot{f}(t; x_0, v_0).
 \end{aligned}$$

Разрешив эту систему относительно x_0, v_0 и подставив найденные решения в формулу для силы

$$F(x, v, t) = m\ddot{f}(t; x_0, v_0),$$

получим

$$F(x, v, t) = m\ddot{f}(t; x_0(x, v, t), v_0(x, v, t)).$$

1.4.5 Примеры

Пример 1. Падение тела в пустоте.

Направим ось OX вертикально вниз и, полагая $F = mg$, воспользуемся общей формулой:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \tau F(t - \tau) d\tau = x_0 + v_0 t + g \int_0^t \tau d\tau = x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

Пример 2. Падение тела в воздухе.

Суммарная сила

$$F = mg - bv$$

и уравнение (1.4.4) примет вид

$$\int_0^v \frac{dv'}{mg - bv'} = \frac{t}{m}.$$

Интегрирование даёт:

$$\ln[1 - bv/(mg)] = -b \frac{t}{m}.$$

Отсюда

$$v(t) = \frac{mg}{b} [1 - e^{-(b/m)t}]$$

и

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') dt' = x_0 + \frac{mgt}{b} - \frac{m^2 g}{b^2} (1 - e^{-(b/m)t}).$$

При малых временах ($t \ll m/b$) падение близко к равноускоренному движению:

$$v \approx gt - \frac{bg}{2m} t^2,$$

$$x \approx x_0 + \frac{gt^2}{2} - \frac{bg}{6m} t^3.$$

При больших временах ($t \gg m/b$) падение тела становится равномерным:

$$v(t) \rightarrow \frac{mg}{b}$$

и

$$x(t) \approx x_0 + \frac{mg}{b} t.$$

Пример 3. Прямолинейное движение задано формулой

$$x = \sqrt{(a + bt)^2 + ct^2}.$$

Найти выражение для силы, если известно, что она зависит: а) только от времени, б) только от координаты.

Дифференцируя координату и её производную по времени, получаем:

$$\dot{x} = \frac{(a + bt)b + ct}{\sqrt{(a + bt)^2 + ct^2}},$$

$$\ddot{x} = \frac{(b^2 + c)[(a + bt)^2 + ct^2] - [(a + bt)b + ct]^2}{[(a + bt)^2 + ct^2]^{3/2}} = \frac{a^2 c}{[(a + bt)^2 + ct^2]^{3/2}}.$$

Таким образом, в случае а)

$$F(t) = \frac{ma^2 c}{[(a + bt)^2 + ct^2]^{3/2}},$$

в случае б)

$$F(x) = \frac{ma^2 c}{x^3}.$$

1.4.6 Упражнения

1. Точка совершает одномерное движение по закону $x = \sqrt{(\mu t)^2 + a^2}$. Найти действующую на неё силу.
2. Найти $v(t)$ и $x(t)$ точки, совершающей одномерное движение под действием гармонической силы $F = F_0 \sin \Omega t$ с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.
3. Найти $v(t)$ и $x(t)$ точки, совершающей одномерное движение под действием силы трения $F_{\text{тр}} = -bv$ с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.
4. Найти закон движения тела, падающего в среде с сопротивлением $F = -b|v|v$, с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ (ось OX направлена вниз).

1.5 Одномерные колебания

1.5.1 Гармонические колебания

Пусть в некоторой точке оси Ox потенциальная энергия частицы имеет простой минимум. Взяв её за начало координат, разложим потенциальную энергию в ряд Маклорена:

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + U''(0)x^2/2! + U'''(0)x^3/3! + \dots \quad (1.5.1)$$

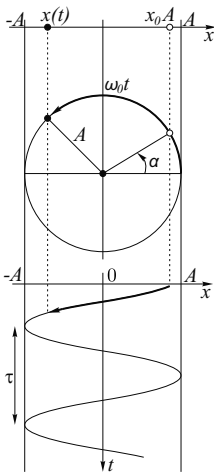


Рис. 1.14. Гармонические колебания

Первый член в этом разложении может быть опущен (потенциальная энергия определена с точностью до постоянного слагаемого), второй равен нулю из-за минимума функции U в точке разложения, третий порождает упругую силу $F_{\text{упр}} = -U'(x) = -kx$, $k > 0$. Пренебрегая высшими членами разложения, получаем линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Его решение легко находится, например, методом характеристического уравнения, и при начальных условиях

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

имеет вид *гармонических колебаний*:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t$$

или

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (1.5.2)$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – собственная частота колебаний, а амплитуда A и начальная фаза α определяются начальными условиями:

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}$$

и

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}.$$

Уравнение (1.5.2) имеет простую геометрическую интерпретацию: оно описывает X -проекцию точки, движущейся по окружности радиуса a с постоянной угловой скоростью ω_0 . Движение проекции периодическое с периодом $\tau = 2\pi/\omega_0$.

Задача эта легко решена нами без обращения к общей теории. Покажем, как она решается в рамках общей теории, изложенной в 1.4. Из (1.4.7) следует, что при выбранной нормировке потенциальной энергии ($U(0) = 0$) полная энергия гармонического осциллятора положительна:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E > 0.$$

При $E = 0$ $x = 0$ и $v = 0$: частица покоится все время в начале координат. Выразив положительное значение полной энергии через амплитуду A ,

$$E = \frac{kA^2}{2},$$

находим, что

$$v(x) = \pm \sqrt{(k/m)(A^2 - x^2)}.$$

Подставляя это выражение в (1.4.8) и интегрируя по отрезку (x_0, x) (в предположении, что $v_0 > 0$), приходим к формуле

$$t(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{(k/m)(A^2 - x^2)}} = \frac{1}{\omega_0} \left[\arccos \frac{x}{A} - \alpha \right],$$

из которой и следует (1.5.2).

1.5.2 Падение сквозь Землю

В Земном шаре прорыт проходящий через его центр узкий сквозной канал, в который уронили спортивную гирию. Пренебрегая сопротивлением воздуха, оцените её скорость в центре Земли и время ее возвращения в исходное положение.

Предположим сначала, что Земля представляет собой однородный шар радиуса $R = 6,37 \cdot 10^6$ м напряженностью гравитационного поля $g_0 = 9,81$ м/с² на его поверхности. В этом случае

$$\vec{g}(\vec{r}) = -g_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r, \quad 0 < r < R.$$

Выберем направленную вдоль канала ось Ox с началом в центре Земли. Согласно (1.2.8), потенциал на отрезке оси, лежащем внутри шара,

$$\phi(x) = \frac{g_0}{2R} x^2, \quad 0 < x < R. \quad (1.5.3)$$

Тело массой m , движущееся в потенциальном поле $U(x) = m\phi(x)$, совершает гармонические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{g_0/R}$. Период колебаний

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}} = 5,06 \cdot 10^3 \text{ с},$$

так что гиря вернется в исходное положение через 1,4 часа. Скорость же в центре Земли, v_C , находится из закона сохранения энергии:

$$m\phi(R) = m\phi(0) + \frac{mv_C^2}{2},$$

$$g_0 R = 0 + v_C^2,$$

$$v_{0C} = \sqrt{g_0 R} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

В действительности распределение массы в Земле неоднородно, и падающее тело движется в поле с потенциалом (1.2.10):

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{g_0}{2R_1} x^2, & 0 < |x| < R_1; \\ \frac{g_0 R_1}{2} + g_0(|x| - R_1), & R_1 < |x| < R. \end{cases}$$

Если теперь амплитуда колебаний превышает R_1 , они перестают быть гармоническими, и период колебаний надо вычислять по общей формуле. Для интересующей нас амплитуды R

$$\tau = \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{\phi(R) - \phi(x)}} = \tau_{\text{я}} + \tau_{\text{м}},$$

где

$$\tau_{\text{я}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^{R_1} \frac{dx}{\sqrt{\phi(R) - \phi(x)}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^{R_1} \frac{dx}{\sqrt{g_0(R - R_1/2) - g_0 x^2 / (2R_1)}}$$

– время движения тела сквозь ядро Земли, а

$$\tau_{\text{м}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{R_1}^R \frac{dx}{\sqrt{\phi(R) - \phi(x)}} = \frac{4}{\sqrt{2g_0}} \int_{R_1}^R \frac{dx}{\sqrt{R - x}}$$

– время движения сквозь мантию за один период колебаний. Выполнив интегрирование, получим:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{R_1}{g_0}} \arcsin \frac{R_1}{\sqrt{R_1(2R - R_1)}} + 4\sqrt{\frac{2(R - R_1)}{g_0}}. \quad (1.5.4)$$

Отметим, что при $R_1 = R$ формула (1.5.4) даёт результат

$$\tau_{\text{я}} = 4\sqrt{\frac{R}{g_0}} \arcsin(1) = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}},$$

совпадающий с периодом колебаний тела в однородной Земле (1.5.3), а при $R_1 = 0$ даёт учетверённое время равноускоренного падения с ускорением g_0 с высоты R . При $R_1 = R/2$ получаем:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{R}{g_0}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right) \approx 0,91T_0$$

и

$$v_C = \sqrt{\frac{3}{2}} v_{0C} \approx 1,22v_{0C}.$$

1.5.3 Затухающие колебания

Рассмотрим теперь задачу о колебаниях *осциллятора с линейным трением* $F_{\text{тр}} = -\beta t \dot{x}$, $\beta > 0$, когда уравнение движения приводится к виду¹⁵

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + \beta \lambda + \omega_0^2 = 0.$$

При $\beta < 2\omega_0$ два комплексно сопряжённых корня его

$$\lambda_{1,2} = -\beta/2 \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\beta/2)^2},$$

определяют *затухающие колебания* (рис. 1.15 а):

$$x(t) = Ae^{-\beta t/2} \cos(\omega t + \alpha).$$

Трение приводит к диссипации (потерям) энергии осциллятора. Скорость этих потерь определяется работой силы трения в единицу времени:

$$\dot{E} = -m\beta \dot{x}^2.$$



При $\beta > 2\omega_0$ имеет место режим *апериодического движения* (релаксации) рис. 1.15 б).

Силы трения трения имеют место всегда, даже если на первый взгляд их влияние незаметно. Но сколь долго ни колебалась бы механическая система, изолированная от источников энергии, она остановится. Поэтому и важен случай, когда действие упругой силы сопровождается пусть слабой по сравнению с ней, но всё-таки отличной от нуля диссипативной (поглощающей энергию) силой трения¹⁶. Если $\beta \ll 2\omega_0$, частота колебаний практически совпадает с собственной частотой, отличаясь от неё на малую величину,

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - (\beta/2\omega_0)^2} \approx \omega_0 - \beta^2/8\omega_0.$$

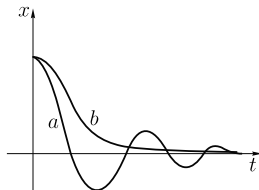


Рис. 1.15. Затухающие колебания (а) и апериодическое движение (релаксация) (б)

¹⁵Линейная зависимость силы от трения является простейшей её моделью и имеет ограниченное применение. Задача с более общей зависимостью трения от скорости рассматривается в 1.6.4.

¹⁶Выдающийся советский физик Л.И.Мандельштам в своих лекциях по теории колебаний на физическом факультете Московского государственного университета в 1930 г. говорил: «... достаточно близко от резонанса мы обязаны при рассмотрении установившегося колебания принимать во внимание затухание, как бы оно ни было мало».

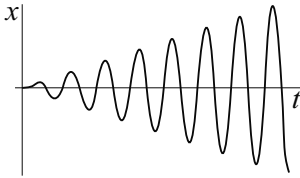
Отношение каждого максимума к последующему даётся величиной e^δ , где

$$\delta \approx \beta\pi/\omega_0 = \beta T/2,$$

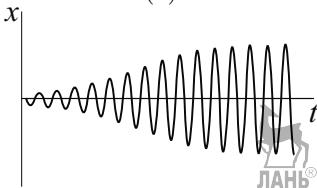
называют *декрементом затухания*.

1.5.4 Вынужденные колебания

Важной задачей, связанной с осциллятором, является задача о вынужденных колебаниях, когда на него помимо силы трения действует гармоническая *вынуждающая сила* $F(t) = mC \cos(\Omega t)$. Решение уравнения движения



(a)



(b)

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = C \cos(\Omega t) \quad (1.5.5)$$

состоит из двух частей – *переходной* ($x_{\text{прх}}$), зависящей от начальных условий (см. предыдущий пункт), и *установившейся* ($x_{\text{уст}}$), которая от начальных условий не зависит. Последнее решение ищем в виде

$$x_{\text{уст}}(t) = A_{\text{уст}} \cos(\Omega t + \alpha).$$

Подставляя эту функцию в уравнение движения, пользуясь тригонометрическим тождеством

$$\cos(\Omega t) = \cos \alpha \cos(\Omega t + \alpha) + \sin \alpha \sin(\Omega t + \alpha)$$

Рис. 1.16. Резонанс при вынужденных колебаниях при $\beta = 0$ (a) и $\beta \neq 0$ (b)

и приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получаем основные формулы установившегося режима вынужденных колебаний:

$$A_{\text{уст}}(\Omega) = \frac{C}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\beta\Omega)^2}}, \quad (1.5.6)$$

$$\alpha(\Omega) = \text{arctg} \left(\frac{\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \right). \quad (1.5.7)$$

Из этих формул видно, что как амплитуда, так и сдвиг фазы между вынуждающей силой и вынужденным колебанием зависят от разности $\Omega^2 - \omega_0^2$. Если частота вынуждающей силы Ω совпадает с собственной

частотой *незатухающих* колебаний, амплитуда принимает наибольшее возможное значение, наступает *резонанс*. В отсутствие сил диссипации $\beta = 0$ и формулы (1.5.6)–(1.5.7) при $\Omega = \omega_0$ даёт бесконечное значение амплитуды и сдвиг фаз, равный $\pi/2$ (*резонансная катастрофа*). Это не значит, конечно, что будут «колебания с бесконечной амплитудой», таких не бывает. Просто установившегося режима, предполагаемого при выводе формул (1.5.6)–(1.5.7), в данном случае не наступает; согласно теории дифференциальных уравнений, амплитуда линейно растёт со временем, не выходя на предельное значение (1.16). При этом, однако, напряжение в материале может превысить допустимое, и произойдёт действительная катастрофа (рис. 1.17).

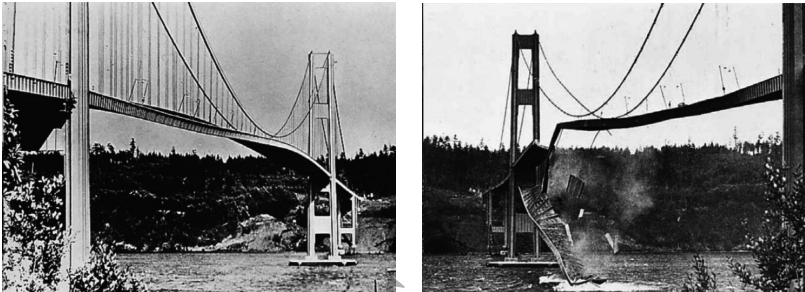


Рис. 1.17. Разрушение моста, вызванное резонансными колебаниями под действием порывов ветра (http://www.txstate.edu/news/news-releases/news_archive/2015/November-2015/TacomaNarrows110315.html)

Вернёмся к процессу установившихся колебаний со слабой диссипацией. При построении графика зависимости амплитуды от частоты Ω возьмём в качестве независимой переменной *рассогласование частот* $\epsilon = \Omega - \omega_0$, а в качестве зависимой – квадрат амплитуды, представив его в виде

$$A_{\text{уст}}^2(\epsilon) = A_{\text{уст}}^2(0)f(\epsilon).$$

Подставив в числитель и знаменатель выраженную через ϵ амплитуду (1.5.6), получим безразмерную функцию

$$f(\epsilon) = \frac{\beta^2 \omega_0^2}{[(\omega_0 + \epsilon)^2 - \omega_0^2]^2 + \beta^2 (\omega_0 + \epsilon)^2}.$$

При слабой диссипации ($\beta \ll \omega_0$) график $f(\epsilon)$ представляет собой узкий пик, вдали от которого функция $f(\epsilon)$ настолько мала, что обычно считают областью её определения всю вещественную ось $-\infty < \epsilon < \infty$. Центральная область аппроксимируется стандартной резонансной кривой (рис. 1.18)

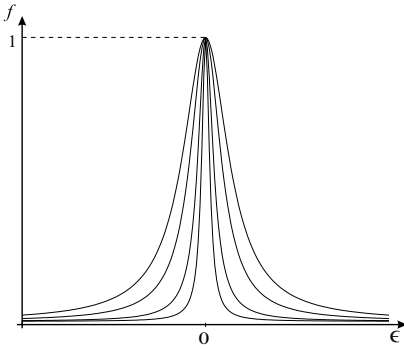


Рис. 1.18. Спектральные функции резонанса (1.5.8) при разных β (0.005, 0.03, 0.02, 0.01)

$$f(\epsilon) = \frac{\beta^2}{4\epsilon^2 + \beta^2}. \quad (1.5.8)$$

Область значений аргумента ϵ ограничена со стороны отрицательных значений величиной $-\omega_0$, но в силу указанного условия на это можно не обращать особого внимания, полагая $-\infty < \epsilon < \infty$. Обозначив через $\epsilon_{1/2}$ корень уравнения

$$f(\epsilon) = \frac{1}{2},$$

получим

$$\epsilon_{1/2} = \beta/2 = \delta/2\pi.$$

Таким образом, *относительная полуширина резонансного пика на половине его высоты приближённо равна логарифмическому декременту, делённому на 2π* . Чем меньше затухание, тем уже резонансный пик.

1.5.5 Параметрический резонанс

С резонансным усилением мы знакомимся в раннем детстве, инстинктивно понимая, что, подталкивая лёгкими толчками качели, их можно хорошо раскачать, если только направления толчков будут согласованы с направлением движения качелей. Вынуждающая сила в (1.5.5) взята гармонической скорее для простоты решения, чем по необходимости. Повзрослев, мы узнаём, что подталкиванием прилагаем к качелям импульсы силы, кратковременная работа которой повышает полную энергию качелей, и уровень их максимального подъёма увеличивается. Если бы не было внешней силы, то амплитуда колебаний бы спадала со временем, и в конце концов они бы остановились. Этот процесс описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (1.5.9)$$

Справа теперь стоит нуль, подталкивающей силы нет, энергия уходит на трение, качели замедляются... Но к этому времени мы уже сами

умеет раскачиваться, без всякой помощи со стороны, и сделав несколько энергичных приседаний – выпрямлений, мы возвращаем колебания на прежний уровень. Что же произошло? Никто извне не снабжал нашу систему (то есть, нас и качели) дополнительной энергией, а выглядит всё так, как будто качели кто-то подтолкнул. Этим «кто-то» являемся мы сами: приседая и выпрямляясь в нужные моменты времени, мы выполняем работу, увеличивающую энергию системы.

Обратимся к уравнению (1.5.9). В нём $\omega_0^2 = g/l$, но l теперь не постоянно, $l = l_0 + \delta l(t)$, где $\delta l = h$ при приседании и 0 – после выпрямления. Мы имеем дело с неконсервативной системой, закон сохранения энергии в ней не обязан выполняться. Увеличение энергии происходит за счёт слабого, но периодического изменения параметра ω_0^2 , и приводит практически к такому же результату, как и подстройка вынуждающей частоты к собственной: амплитуда колебаний со временем растёт. Такое поведение системы называется *параметрическим резонансом* и в одномерном случае описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}(m(t)\dot{x}) + k(t)x = 0,$$

где m и k теперь меняющиеся со временем параметры. Переходом к новой переменной τ , $d\tau = dt/m(t)$ оно преобразуется к виду

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0,$$

где $\omega^2(t) = m(t)k(t)$ – некоторая периодическая функция времени (независимой переменной τ мы вернули прежнее обозначение t). Особенность этого процесса в том, что начальное положение равновесия системы является неустойчивым: достаточно сколь угодно слабого отклонения от этого положения, чтобы появившееся смещение стало быстро возрастать со временем. Но для этого необходимо выполнение определённых условий. В частности, наиболее эффективным параметрическое усиление оказывается тогда, когда частота Ω колебаний функции $\omega^2(t)$ близка к удвоенной собственной частоте ω_0 .

Найдём эти условия в простейшем случае, когда $\omega^2(t)$ мало отличается от единицы и является простой периодической функцией вида

$$\omega^2(t) = 1 + h \cos \Omega t,$$

где постоянная h положительна и мала по сравнению с 1. Следуя Ландау и Лифшицу¹⁷, положим $\Omega = 2\omega_0 + \epsilon$, где $\epsilon \ll \omega_0$. Уравнения движения в этом случае принимает форму уравнения Матъё

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 + h \cos[(2\omega_0 + \epsilon)t]]x = 0. \quad (1.5.10)$$

¹⁷Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука, 1973, с.105

Приближённое частное решение, будем искать в виде

$$x = a \cos[(\omega_0 + \epsilon/2)t] + b \sin[(\omega_0 + \epsilon/2)t]. \quad (1.5.11)$$

Далее: подставив (1.5.11) в (1.5.10) и выполнив преобразования с сохранением лишь членов первого порядка по ϵ , разложив произведения тригонометрических множителей в суммы,

$$\begin{aligned} & \cos[(\omega_0 + \epsilon/2)t] \cos[(2\omega_0 + \epsilon)t] = \\ & = (1/2) \cos[(3\omega_0 + 3\epsilon/2)t] + (1/2) \cos[(\omega_0 + \epsilon)t] \end{aligned}$$

и т.п. и опустив члены с частотами $3(\omega_0 + \epsilon/2)$ (как высшего порядка малости по h), получим:

$$\begin{aligned} & b(\epsilon + h\omega_0/2)\omega_0 \sin[(\omega_0 + \epsilon/2)t] + \\ & + a(\epsilon - h\omega_0/2)\omega_0 \cos[(\omega_0 + \epsilon/2)t] = 0. \end{aligned}$$

Фигурирующие в этих уравнениях косинусы и синусы являются линейно независимыми функциями, равенство их суперпозиции нулю возможно лишь при условии, что в нуль обращается каждый из стоящих перед ними сомножителей. В результате, для граничных значений области неустойчивости получаем:

$$\epsilon_{1,2} = \pm h\omega_0/2.$$

1.5.6 Нелинейные (ангармонические) колебания

Рассмотренные выше дифференциальные уравнения являются линейными. Если колебания описываются нелинейным дифференциальным уравнением, они называются *нелинейным*.

В качестве примера нелинейного колебания рассмотрим движение материальной точки под действием суммы упругой силы и силы сопротивления, когда последняя пропорциональна квадрату скорости:

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma m\dot{x}|\dot{x}| = -kx \pm \gamma m\dot{x}^2.$$

Пусть в момент времени $t = 0$ точка находится в крайнем правом положении: $x(0) = a > 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Последующее движение точки описывается уравнением

$$\ddot{x} - \gamma\dot{x}^2 + \omega_0^2 x = 0.$$

Вводя новую переменную z равенством $z = \dot{x}^2$, дифференцируя её по времени, $\dot{z} = 2\dot{x}\ddot{x}$, разрешая это уравнение относительно \ddot{x} ,

$$\ddot{x} = \frac{\dot{z}}{2\dot{x}} = \frac{1}{2} \frac{dz}{dx},$$

и используя полученные соотношения в уравнении движения, приводим его к виду

$$\frac{dz}{dx} - 2\gamma z = -2\omega_0^2 x.$$

Общее решение однородного уравнения

$$z_0 = Ce^{2\gamma x},$$

а частное решение неоднородного уравнения может быть найдено в виде:

$$z_1 = Ax + B,$$

где

$$A = \frac{\omega_0^2}{2\gamma^2}, \quad B = \frac{\omega_0^2}{2\gamma^2}.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$z(x) = z_0 + z_1 = Ce^{2\gamma x} + \frac{\omega_0^2}{2\gamma^2}(2\gamma x + 1).$$

Согласно начальным условиям,

$$z(a) = Ce^{2\gamma a} + \frac{\omega_0^2}{2\gamma^2}(2\gamma a + 1) = 0,$$

откуда

$$C = -\frac{\omega_0^2}{2\gamma^2}(2\gamma a + 1)e^{-2\gamma a}.$$

Таким образом,

$$z = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{\omega_0^2}{2\gamma^2}[2\gamma x + 1 - (2\gamma a + 1)e^{2\gamma(x-a)}].$$

При движении влево перемещение dx отрицательно, так что

$$-\frac{dx}{\sqrt{2\gamma x + 1 - (2\gamma a + 1)e^{2\gamma(x-a)}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2\gamma}} dt.$$

После интегрирования имеем:

$$\int_x^a \frac{dx}{\sqrt{2\gamma x + 1 - (2\gamma a + 1)e^{2\gamma(x-a)}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2\gamma}} t.$$

Для вычисления интеграла и определения закона движения $x(t)$ необходимо использовать здесь численные методы.

1.5.7 Слабо нелинейные колебания

Для решения задач, в которых нелинейный член уравнения колебаний относительно мал, разработан более общий, хотя и менее точный метод, основанный на разложении по малому параметру. Покажем основную идею метода на примере решения другой, тоже весьма элементарной задачи, возникающей при необходимости учесть следующий член в разложении (1.5.1) несимметричного (так что $U'''(0) \neq 0$) потенциала. Уравнение колебаний запишется в этом случае в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^2 = 0, \quad (1.5.12)$$

где, как и прежде, $\omega_0^2 = U''(0)/m$, а $\varepsilon = U'''(0)/2m$. Будем считать последний член малым (чтобы не заниматься переобозначением входящих в уравнение величин будем полагать, что они изначально выражены в безразмерных переменных).

Разложим решение уравнения (1.5.12) в степенной ряд по ε

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

и, подставим его в (1.5.12):

$$(\ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + \varepsilon^2 \ddot{x}_2 + \dots) + \omega_0^2 (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) + \varepsilon (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^2 = 0.$$

Раскрыв квадрат суммы в последнем члене левой части и приравняв к нулю суммы слагаемых с одинаковыми степенями ε , получим:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0,$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^2,$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -2x_0 x_1,$$

.....

Левые части последовательности полученных уравнений одинаковы и соответствуют гармоническому осциллятору с одной и той же собственной частотой ω_0 . Правые части могут быть интерпретированы как вынуждающие силы, заданные как функции времени и не зависящие от искомых решений. Действительно, если решать эти уравнения последовательно, в том порядке, в каком они записаны, то к моменту решения уравнения для $x_n(t)$ все предыдущие решения x_j , $j = 1, \dots, n-1$, входящие в его правую часть, уже известны.

Рассмотрим подробнее поправку первого порядка. Уравнение для $x_1(t)$ имеет вид

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -A^2 [\cos(\omega_0 t + \alpha)]^2 = -(A^2/2) \{1 + \cos[2(\omega_0 t + \alpha)]\}.$$

Его решение складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$x_1(t) = A' \cos(\omega_0 t + \varphi') + [x_1(t)]_ч.$$

Как мы уже видели в **1.5.3**, в спектре (наборе частот) колебаний под действием гармонической вынуждающей силы появляются соответствующие ей дополнительные гармоники. В данном случае имеем

$$x_1(t) = A' \cos(\omega_0 t + \varphi') - \frac{A^2}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \cos[2(\omega_0 t + \varphi)] \right\}.$$

Решение это содержит четыре независимых постоянных A' , φ' , A и φ , начальных же условий только два. Стало быть, две из этих постоянных могут быть выбраны произвольно. Положив $A' = 0$, мы автоматически избавляемся и от φ' . Таким образом, с точностью до членов первого порядка малости по ε имеем:

$$x(t) \approx A \cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{\varepsilon A^2}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \cos[2(\omega_0 t + \varphi)] \right\}. \quad (1.5.13)$$

Видно отсюда, что слабая нелинейность порождает в спектре колебаний дополнительные (по отношению к собственной частоте ω_0) гармоники: нулевую (постоянная составляющая решения) и вторую (с частотой $2\omega_0$). Амплитуды этих гармоник имеют порядок εA^2 и убывают при $\varepsilon \rightarrow 0$. Взяв начальные условия в виде $x(0) = \xi$, $\dot{x}(0) = \eta$, из (1.5.13) находим

$$A \cos \varphi - \frac{\varepsilon A^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right) = \xi$$

$$A \sin \varphi + \frac{\varepsilon A^2}{3} \sin 2\varphi = \eta.$$

Явное решение этой трансцендентной системы получить не удаётся, но вновь применив разложение по параметру ε

$$A = A_0 + \varepsilon A_1 + \dots,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$$

получим в нулевом порядке

$$A_0 \cos \varphi_0 = \xi,$$

$$A_0 \sin \varphi_0 = -\eta,$$

а в первом –

$$\begin{cases} A_1 \cos \varphi_0 - A_0 \varphi_1 \sin \varphi_0 - \frac{A_0^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\varphi_0\right) = 0 \\ A_1 \sin \varphi_0 + A_0 \varphi_1 \cos \varphi_0 + \frac{A_0^3}{3} \sin 2\varphi_0 = 0. \end{cases} \quad (1.5.14)$$

Таким образом, нулевой порядок нам даёт

$$A_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -\eta/\xi.$$

Немного сложнее и нахождение поправок первого порядка из линейной системы (1.5.14).

Дальнейшее развитие этой идеи на более строгом математическом уровне нашло отражение в асимптотической теории нелинейных колебаний Крылова-Боголюбова.

1.5.8 Обратная задача теории колебаний

Пусть материальная точка массой m совершает одномерные колебания в симметричном потенциальном поле $U(x) = U(-x)$ с монотонно возрастающей функцией $U(x)$, явный вид которой неизвестен, зато известна зависимость периода колебаний T от полной энергии точки:

$$T = f(E).$$

Покажем, что этой информации достаточно для определения $U(x)$. Согласно (1.4.9),

$$T = f(E) = 2\sqrt{2m} \int_0^{b(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

Полагая $U(0) = 0$ и переходя от интегрирования по x к интегрированию по $U = U(x)$ с использованием обратной функции $x = X(U)$, получим:

$$f(E) = 2\sqrt{2m} \int_0^E \frac{1}{\sqrt{E - U}} \frac{dX}{dU} dU.$$

Чтобы разрешить это уравнение относительно $U(x)$, умножим обе его части на $dE/\sqrt{Z-E}$ и проинтегрируем по E от 0 до Z :

$$\int_0^Z \frac{f(E)dE}{\sqrt{Z-E}} = 2\sqrt{2m} \int_0^Z dE \int_0^E dU \frac{1}{\sqrt{(Z-E)(E-U)}} \frac{dX}{dU}.$$

Применяя правило Дирихле для изменения порядка интегрирования, получим:

$$\int_0^Z \frac{f(E)dE}{\sqrt{Z-E}} = 2\sqrt{2m} \int_0^Z dU \frac{dX}{dU} \int_U^Z \frac{dE}{\sqrt{(Z-E)(E-U)}}.$$

Внутренний интеграл в правой части равен π , поэтому

$$\int_0^Z \frac{f(E)dE}{\sqrt{Z-E}} = 2\pi\sqrt{2m} \int_0^Z dU \frac{dX}{dU} = 2\pi\sqrt{2m} \int_0^{X(Z)} dX = 2\pi\sqrt{2m}X(Z).$$

Заменяя теперь Z переменной U , приходим к формуле

$$X(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{f(E)dE}{\sqrt{U-E}},$$

обращение которой и даёт решение поставленной задачи.

В частности, если период колебаний не зависит от энергии, $f(E) = \text{const} = 2\pi\sqrt{m/k}$, то

$$X(U) = \frac{2\pi\sqrt{m/k}}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{dE}{\sqrt{U-E}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[-2\sqrt{U-E} \right]_{E=0}^{E=U} = \sqrt{2U/k},$$

откуда получаем потенциальную энергию гармонического осциллятора

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}.$$

1.5.9 Упражнения

1. Пользуясь общей формулой для периода одномерных колебаний, найти частоту одномерного гармонического осциллятора – точки массой m в поле упругой силы $F_y = -kx$, $k > 0$.

2. Найти закон движения одномерного гармонического осциллятора, используя общую формулу для точки в потенциальном поле. Выразить энергию осциллятора через частоту и амплитуду колебаний.
3. Определить зависимость от полной энергии \mathcal{E} периода колебаний τ точки массой m в потенциальном поле $U(x) = (Ax)^{2\nu}$, $\nu > 0$.
4. Найти поправки первого порядка A_1 и φ_1 из системы уравнений (1.5.14) для слабо нелинейных колебаний.

1.6 Задачи с разделяющимися переменными

1.6.1 Разделение переменных

В общем случае для определения закона движения материальной точки

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

в заданном силовом поле

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = & F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)\vec{e}_x + \\ & + F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)\vec{e}_y + F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)\vec{e}_z, \end{aligned}$$

необходимо решать систему трёх дифференциальных уравнений

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t),$$

$$m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t),$$

$$m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t),$$

связанных между собой через правые части: каждая проекция силы зависит, в общем случае, от всех проекций радиус-вектора и скорости.

Существуют, однако, задачи, в которых одно из уравнений системы может быть решено независимо от других или даже вся система распадается на три независимых уравнения, описывающих прямолинейные движения типа рассмотренных выше. Такие задачи называются *задачами с отделяющимися* или *разделяющимися переменными*.

В частности, если сила представляется в виде

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = F_x(x, \dot{x}, t)\vec{e}_x + F_y(y, \dot{y}, t)\vec{e}_y + F_z(z, \dot{z}, t)\vec{e}_z,$$

то вместо системы трёх связанных между собой уравнений мы имеем три независимых уравнения

$$m\ddot{x} = F_x(x, \dot{x}, t),$$

$$m\ddot{y} = F_y(y, \dot{y}, t),$$

$$m\ddot{z} = F_z(z, \dot{z}, t),$$

каждое из которых может решаться отдельно от других. Другими словами, *трёхмерное движение материальной точки в данном случае разлагается на прямолинейные движения трёх не взаимодействующих между собой частиц той же массы вдоль координатных осей.*

Пример. Трёхмерный гармонический осциллятор. Так называется частица, движущаяся в поле силы $\vec{F} = -k\vec{r}$. Уравнение движения

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}$$

в проекциях на оси декартовой системы координат распадается на три уравнения

$$m\ddot{x} = -kx,$$

$$m\ddot{y} = -ky,$$

$$m\ddot{z} = -kz,$$

описывающих независимые движения частиц одной и той же массы m вдоль координатных осей OX , OY и OZ (трех одномерных гармонических осцилляторов). Общие интегралы их записываются в виде:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + (v_{x0}/\omega_0) \sin \omega_0 t,$$

$$y(t) = y_0 \cos \omega_0 t + (v_{y0}/\omega_0) \sin \omega_0 t,$$

$$z(t) = z_0 \cos \omega_0 t + (v_{z0}/\omega_0) \sin \omega_0 t.$$

В векторном виде

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos \omega_0 t + (\vec{v}_0/\omega_0) \sin \omega_0 t.$$

Отсюда видно, что траектория этой частицы пролегает в плоскости, образованной радиус-вектором начального положения \vec{r}_0 и вектором начальной скорости \vec{v}_0 , перенесённым в начало координат.

Введя в этой плоскости косоугольные координаты ξ, η с осями, направленными вдоль начального радиус-вектора \vec{r}_0 и начальной скорости \vec{v}_0 соответственно, получим

$$\xi(t) = r_0 \cos \omega_0 t, \quad \eta(t) = (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t.$$

В этой косоугольной системе кривая, по которой движется точка, вновь описывается уравнением эллипса

$$\frac{\xi^2}{r_0^2} + \frac{\eta^2}{(v_0/\omega_0)^2} = 1,$$

центр которого совпадает с силовым центром, а полуоси равны r_0 и v_0/ω_0 . Продолжительность обращения по орбите (период)

$$T = 2\pi/\omega_0.$$

Поскольку начальный момент времени выбран произвольно, справедливо следующее утверждение: скорость точки в данный момент времени равна $\omega_0 b$, где b – расстояние от начала координат до траектории в направлении, параллельном скорости.

Часто двумерные колебания описываются с помощью комплексной переменной $u = x + iy$. Уравнение для неё

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0,$$

имеет общее решение в виде

$$u = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}.$$

Эта формула даёт параметрическое представление эллипса с центром в начале координат, комплексные постоянные

$$A = ae^{i\alpha}, \quad B = be^{i\beta}$$

содержат четыре вещественные постоянные a, α, b и β , определяемые из начальных условий.

1.6.2 Сила, параллельная прямой

Пусть сила \vec{F} , действующая на материальную точку, всё время остаётся параллельной некоторой неподвижной прямой. Построим прямоугольную систему координат с осью OY , параллельной данному направлению, и осью OZ , перпендикулярной \vec{v}_0 . Система уравнений запишется в виде

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \quad m\ddot{z} = 0.$$

Поскольку $v_{0z} = 0$, $z(t) = \text{const} = z_0$, и у нас остаются две переменные координаты: точка движется в плоскости, параллельной XOY . Построим в этой плоскости декартову систему координат XOY , направив ось OY параллельно силе, так что $F_x = 0$, $F_y = F(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$. Уравнения движения принимают вид

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = F(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t).$$

Таким образом, в данном случае отделяется одна из координат — x -координата, совершающая равномерное движение, не зависящее от y ,

$$x = x_0 + v_{0x}t.$$

Остаётся решить уравнение для y -координаты,

$$m\ddot{y} = F_y(y, \dot{y}, t), \quad F_y(y, \dot{y}, t) = F(x_0 + v_{0x}t, y, v_{0x}, \dot{y}, t),$$

совпадающее с уравнением прямолинейного движения.

Пример. Движение в однородном поле тяжести. Точка массой m начинает движение из начала координат со скоростью v_0 под углом α к горизонту в однородном поле тяжести g . В системе координат с осью OZ , направленной вертикально вверх, и осью OX , направленной по горизонтали в плоскости траектории, уравнения движения запишутся в виде:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg.$$

Из первого уравнения следует

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha \quad (1.6.1)$$

и

$$x = v_0 t \cos \alpha. \quad (1.6.2)$$

Из второго

$$\dot{z} = -gt + v_0 \sin \alpha,$$

и

$$z = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha. \quad (1.6.3)$$

Из уравнений (1.6.1) и (1.6.3) определяем скорость:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 - 2gz}.$$

Исключая время из равенств (1.6.2) и (1.6.3), получаем уравнение траектории

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Уравнение это описывает параболу с вершиной в точке с координатами

$$x_M = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \quad z_M = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

достигаемой телом спустя время $t_M = (v_0/g) \sin \alpha$ после начала движения (рис. 1.19). Расстояние s по горизонтали между начальной точкой траектории и соответствующей точкой на нисходящей её ветви равно удвоенной абсциссе вершины: $s = (v_0^2/g) \sin 2\alpha$. Максимальное значение $s_M = v_0^2/g$ достигается при $\alpha = \pi/4$. В более близкую точку $s < v_0^2/g$ можно попасть по двум параболом, соответствующим разным наклонам стрельбы.

1.6.3 Сила, перпендикулярная прямой

Теперь рассмотрим движение в поле силы, остающейся всё время перпендикулярной к некоторой неподвижной прямой. Направим ось OZ системы вдоль этой прямой. Тогда $F_z = 0$, и система уравнений движения принимает вид

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t),$$

$$m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t),$$

$$m\ddot{z} = 0.$$

Последнее уравнение отделяется от системы и решается независимо:

$$z = z_0 + v_{0z}t.$$

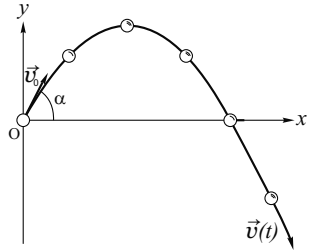


Рис. 1.19. Движение в однородном поле тяжести в отсутствие сопротивления среды

Подставляя это решение в аргументы правых частей уравнений для x - и y -координат, приходим к задаче о плоском движении.

Пример 1. Заряд в магнитном поле. На электрический заряд e с массой m , движущийся в однородном постоянном магнитном поле \vec{H} , действует сила Лоренца

$$\vec{F} = (e/c)[\vec{v}, \vec{H}],$$

перпендикулярная напряжённости магнитного поля. Выбрав ось OZ параллельной полю, запишем уравнения движения в виде

$$m\ddot{x} = (e/c)H\dot{y},$$

$$m\ddot{y} = -(e/c)H\dot{x},$$

$$m\ddot{z} = 0.$$

Таким образом, задача о трёхмерном движении точки распадается на две независимых задачи: о двумерном и одномерном движениях. Первая, впрочем, тоже может быть разложена на две одномерных. Для этого достаточно перейти к переменным $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$,

$$m\dot{v}_x = (e/c)Hv_y,$$

$$m\dot{v}_y = -(e/c)Hv_x,$$

и, продифференцировав их по времени еще раз, привести к виду:

$$\ddot{v}_x = -(eH/mc)^2 v_x,$$

$$\ddot{v}_y = -(eH/mc)^2 v_y.$$

Вновь приходим к двум независимым уравнениям для одномерных гармонических осцилляторов, с одинаковой частотой $\omega_H = eH/mc$, называемой *ларморовской* или *циклотронной*. Проекция вектора скорости на плоскость XOY вращается с угловой скоростью ω_H , так же вращается и соответствующая проекция радиус-вектора заряда, тогда как z -координата его равномерно растёт. В результате, заряд движется по винтовой линии.

Пример 2. Сопротивление, пропорциональное скорости. Исследовать движение тела в однородном поле тяжести при наличии силы сопротивления $-b\vec{v}$.

Решим эту задачу в прямоугольной системе координат при условиях

$$\vec{r}_0 = z_0 \vec{e}_z, \quad \vec{v}_0 = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0z} \vec{e}_z, \quad \vec{g} = -g \vec{e}_z, \quad \vec{F} = m\vec{g} - b\vec{v}.$$

Из уравнения движения

$$\dot{\vec{v}} = \vec{g} - \beta \vec{v}, \quad \beta = b/m,$$

находим

$$v_x = v_{0x} e^{-\beta t}, \quad v_z = (v_{0z} + g/\beta) e^{-\beta t} - g/\beta$$

и далее,

$$x = (v_{0x}/\beta) (1 - e^{-\beta t}), \quad z = z_0 + \frac{v_{0z} + g/\beta}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) - \frac{g}{\beta} t.$$

Если $v_{0z} > 0$, тело достигает максимальной высоты

$$z_M = z_0 - \frac{g}{\beta^2} \ln(1 + v_{0z}\beta/g) + v_{0z}/\beta$$

в момент времени

$$t_M = \frac{1}{\beta} \ln(1 + v_{0z}\beta/g)$$

в точке

$$x_M = \frac{mv_{0x}v_{0z}}{mg + bv_{0z}}.$$

Траектория тела описывается уравнением

$$z = z_0 + \frac{g}{\beta^2} \ln \left(1 - \frac{x\beta}{v_{0x}} \right) + \frac{v_{0z} + g/\beta}{v_{0x}}$$

и имеет вид, изображённый на рис. 1.20.

1.6.4 Баллистическая задача

Как мы убедились ранее, однородное поле тяжести представляет собой пример параллельного поля сил, движение в котором является плоским, и наличие силы сопротивления, коллинеарной скорости, не меняет плоского характера движения: траектория лежит в неподвижной плоскости, проходящей через точку \vec{r}_0 параллельно векторам \vec{g} и \vec{v}_0 .

Рассмотрим здесь решение основной задачи внешней баллистики – задачи о движении центра тяжести снаряда в воздушной среде. Мы уже рассматривали подобную задачу при специальном – линейном – виде зависимости силы сопротивления от скорости. В действительности, линейная аппроксимация годится только в сравнительно узком интервале скоростей. Сейчас мы рассмотрим задачу с произвольной зависимостью силы сопротивления от скорости, представив её в виде

$$\vec{Q}(\vec{v}) = -mgf(v)\vec{e}_v,$$

где $f(v)$ – заданная функция скорости. Суммарная сила, действующая на снаряд, равна (рис. 1.20)

$$\vec{F} = -mg[\vec{e}_z + f(v)\vec{e}_v].$$

Как бы ни был направлен вектор начальной скорости \vec{v}_0 , траектория снаряда будет лежать в неподвижной вертикальной плоскости, проходящей через начальную точку \vec{r}_0 и выходящие из нее векторы \vec{e}_z и \vec{v}_0 ¹⁸. Уравнение движения снаряда в проекциях на тангенциальную и

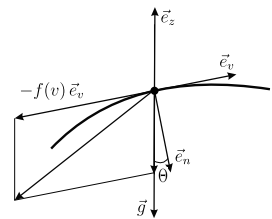


Рис. 1.20. Разложение силы, действующей на летящий снаряд

¹⁸Представляя для простоты снаряд в виде материальной точки, мы теряем важные эффекты, одним из которых является вращение снаряда, выпущенного из нарезного ствола. Такой снаряд при своём движении уже не будет оставаться в неподвижной вертикальной плоскости.

нормальную оси естественной системы координат имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = F_\tau = -mg[\vec{e}_z + f(v)\vec{e}_v]\vec{e}_v,$$

$$m \frac{v^2}{R} = F_n = -mg[\vec{e}_z + f(v)\vec{e}_v]\vec{e}_n.$$

Обозначим через Θ угол между векторами \vec{g} ($= -g\vec{e}_z$) и \vec{e}_v ($= \vec{e}_\tau$). После сокращения масс уравнения движения принимают вид:

$$\frac{dv}{dt} = -g[\sin \Theta + f(v)], \quad \frac{v^2}{R} = g \cos \Theta.$$

Под действием силы тяжести вектор скорости частицы в процессе ее движения поворачивается по часовой стрелке, и угол Θ убывает. Кривизна траектории выражается через угол Θ соотношением

$$\frac{1}{R} = -\frac{d\Theta}{ds} = -\frac{d\Theta}{dt} \frac{dt}{ds} = -\frac{1}{v} \frac{d\Theta}{dt},$$

и второе из уравнений принимает вид

$$v \frac{d\Theta}{dt} = -g \cos \Theta.$$

Разрешая каждое из этих уравнений относительно dt ,

$$dt = -\frac{dv}{g[\sin \Theta + f(v)]}, \quad dt = -\frac{v d\Theta}{g \cos \Theta}, \quad (1.6.4)$$

и приравняв правые части полученных выражений, приходим к уравнению

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\Theta} = \text{tg} \Theta + \frac{f(v)}{\cos \Theta}.$$

Интегрируя это уравнение при заданных начальных условиях v_0 и Θ_0 , найдём зависимость

$$v = v(\Theta).$$

Подставляя найденное выражение во второе из уравнений (1.6.4) и интегрируя, получим:

$$t(\Theta) = -\frac{1}{g} \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{v(\Theta)}{\cos \Theta} d\Theta.$$

Обращая эту функцию, найдём зависимость от времени направления движения снаряда $\Theta(t)$. Чтобы найти зависимость от времени второй естественной координаты – пройденного снарядом пути s , достаточно выразить его через угол Θ :

$$ds = v dt = -\frac{1}{g} \frac{v^2(\Theta)}{\cos \Theta} d\Theta, \quad s = -\frac{1}{g} \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{v^2(\Theta)}{\cos \Theta} d\Theta.$$

Аналогичным образом находятся и координаты центра масс снаряда:

$$dx = v_x dt = v \cos \Theta dt = -\frac{1}{g} v^2(\Theta) d\Theta, \quad x(\Theta) = -\frac{1}{g} \int_{\Theta_0}^{\Theta} v^2(\Theta) d\Theta,$$

$$dz = v_z dt = v \sin \Theta dt = -\frac{v^2(\Theta)}{g} \operatorname{tg} \Theta d\Theta,$$

$$z(\Theta) = -\frac{1}{g} \int_{\Theta_0}^{\Theta} v^2(\Theta) \operatorname{tg} \Theta d\Theta.$$

Мы не конкретизировали здесь вид зависимости сопротивления от скорости, он может быть задан даже таблично (на основе специальных расчётов методами газовой динамики или экспериментов). Приведённые выше формулы будут полезны и в этом случае, только интегрирование надо будет выполнять численными методами. Дальнейшее уточнение расчётов должно быть связано с учётом зависимости силы сопротивления от высоты, влияния движения воздушных потоков, а также от различия снаряда от материальной точки. Последнее порождает дополнительные силы трения, действующие на вращающийся в полете снаряд.

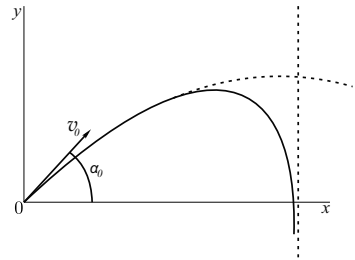


Рис. 1.21. Движение в однородном поле тяжести при наличии сопротивления среды

1.6.5 Центральное-симметричное поле

Как было показано в 1.3.3, траектория частицы, движущейся в центральном силовом поле, всегда лежит в неподвижной плоскости,

проходящей через силовой центр. Если поле к тому же симметрично, переменные могут быть разделены в полярной системе координат аксиально r, φ , построенной в плоскости движения. Разделение переменных удобно произвести на основе законов сохранения момента импульса и энергии:

$$\begin{aligned} mr^2\dot{\varphi} &= L_z = \pm L, \\ \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) &= E, \end{aligned}$$

Исключив $\dot{\varphi}$ из второго уравнения с помощью первого, получим:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \left\{ U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right\} = E.$$

Содержимое фигурных скобок зависит только от r , в этом отношении оно подобно потенциальной энергии. Назвав его *эффективным потенциалом* и обозначив через $U_{\text{эфф}}$,

$$U_{\text{эфф}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2},$$

перепишем уравнение для энергии в виде

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{эфф}}(r) = E, \quad r \geq 0, \quad (1.6.5)$$

формально соответствующем одномерному движению. Разница только в том, что r здесь не может быть отрицательным, а $U_{\text{эфф}}$ может быть отличным от нуля и для свободной частицы (за счёт второго слагаемого, отвечающего центробежной силе).

Разрешая уравнение (1.6.5) относительно радиальной скорости \dot{r} , переходя к дифференциалам, разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{r} = v_r(r) &= \pm \sqrt{(2/m)[E - U_{\text{эфф}}(r)]}, \\ dt &= \frac{dr}{\pm \sqrt{(2/m)[E - U_{\text{эфф}}(r)]}}, \\ t(r) &= \int_0^t dt = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\pm \sqrt{(2/m)[E - U_{\text{эфф}}(r)]}}. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Здесь r_0 обозначает расстояние от начала координат до точки траектории, где находилась частица в момент времени $t = 0$. На участке

траектории, где частица удаляется от центра ($v_r > 0$), берётся плюс перед корнем, на участке, где она приближается к центру ($v_r < 0$) – минус. Если радиус действия силового центра ограничен (например, значением R), а движение частицы таково, что время её непрерывного пребывания в этой сфере (время взаимодействия $\tau_{\text{вз}}$) конечно, то оно определяется формулой

$$\tau_{\text{вз}} = 2t(R),$$

подставляя в которую выражение (1.6.6), получим

$$\tau_{\text{вз}} = 2 \int_{r_0}^R \frac{dr}{\sqrt{(2/m)[E - U_{\text{эфф}}(r)]}}.$$

Выполняя интегрирование в правой части (1.6.6) и разрешая полученное уравнение относительно r , находим радиальную координату

$$r = r(t), \quad (1.6.7)$$

а затем и угловую

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{L_z}{mr^2(t)} dt + \varphi_0 \quad (1.6.8)$$

как функции времени. Будем отсчитывать угол φ от направления на точку траектории, находящуюся на расстоянии r_0 , тогда $\varphi_0 = 0$ (обычно это – ближайшая к силовому центру точка, если таковая существует). Перейдя от интегрирования по времени к интегрированию по радиусу, приходим к уравнению траектории частицы $\varphi = \varphi(r)$ в центрально-симметричном поле:

$$\varphi(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{L_z}{r^2 \sqrt{2m[E - U_{\text{эфф}}(r)]}} dr. \quad (1.6.9)$$

Знак φ определяется знаком z -проекции момента импульса L_z : при $L_z > 0$ радиус-вектор частицы вращается в плоскости XOY против часовой стрелки, при $L_z < 0$ – по часовой стрелке, при $L_z = 0$ частица движется по прямой, проходящей через силовой центр. Траектория симметрична относительно прямой, проходящей через силовой центр и ближайшую к нему точку траектории (если таковая существует). В случае финитного движения, радиальная координата периодически возвращается в исходное положение. Если при этом угловая переменная изменяется на величину $2\pi c$, где c – рациональное число, то движение периодическое.

1.6.6 Центральные силы и формулы Бине

Если центральное поле не обладает сферической симметрией, траектория частицы по-прежнему остаётся плоской, но из сохраняющихся величин остаётся лишь момент импульса, характеризуемый (в полярной системе) одной проекцией

$$L_z = mr^2\dot{\varphi} = 2m\sigma_z = \text{const.}$$

Он позволяет выразить компоненты скорости через функцию $r(\varphi)$ и ее производную,

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = \frac{2\sigma_z}{r}$$

и

$$v_r = \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{2\sigma_z}{r^2} \frac{dr}{d\varphi},$$

что в конечном итоге позволяет исключить из рассмотрения время и вместо системы дифференциальных уравнений для двух переменных r, φ , зависящих от времени, получить одно уравнение, связывающее r с φ и не содержащее времени. Решив это (отделённое от системы) уравнение, можно восстановить затем временную картину движения. Рассмотрим этот процесс более подробно. Как и в случае симметричных полей удобно перейти к обратному радиусу

$$\xi = \frac{1}{r(\varphi)},$$

так что

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{d\xi}{dr} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi},$$

$$v_\varphi = 2\sigma_z \xi \tag{1.6.10}$$

и

$$v_r = -2\sigma_z \frac{d\xi}{d\varphi}.$$

Таким образом, квадрат скорости частицы, движущейся в центральном поле по траектории $r = 1/\xi(\varphi)$, даётся выражением

$$v^2 = 4\sigma_z^2 \left[\left(\frac{d\xi}{d\varphi} \right)^2 + \xi^2 \right],$$

называемым *первой формулой Бине*.

Запишем теперь уравнение движения точки в проекции на радиальное направление:

$$ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r(r, \varphi).$$

Выполняя преобразования

$$\ddot{r} = \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{d\varphi} \dot{\varphi} = -2\sigma_z \frac{d^2\xi}{d\varphi^2} \dot{\varphi} = -\left(\frac{2\sigma_z}{r}\right)^2 \frac{d^2\xi}{d\varphi^2} = -(2\sigma_z)^2 \xi^2 \frac{d\xi^2}{d\varphi^2}$$

и

$$r\dot{\varphi}^2 = \frac{(2\sigma_z)^2}{r^3} = (2\sigma_z)^2 \xi^3,$$

приходим ко второй формуле Бине:

$$(2\sigma_z)^2 m \xi^2 \left(\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} + \xi \right) = -F_r(1/\xi, \varphi).$$

Формулы Бине имеют важное значение при описании движения тела в центральном поле. Если траектория тела $r = 1/\xi(\varphi)$ известна, они позволяют определить скорость и действующую на тело силу в разных точках траектории, не включая в рассмотрение время. Если же скорость или сила известны как функции φ , мы имеем дифференциальные уравнения, интегрируя которые, можно найти уравнение траектории, минуя нахождение закона движения $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Сам же закон движения можно найти, интегрируя уравнение для φ , вытекающее из (1.6.10),

$$\dot{\varphi}(t) = 2\sigma_z \xi^2(\varphi),$$

и подставляя результат в выражение для радиальной координаты

$$r(t) = \frac{1}{\xi(\varphi(t))}.$$

Якоби получил общий интеграл уравнения движения в поле силы $\vec{F} = f(\varphi)r^{-2}\vec{e}_r$ с произвольной угловой зависимостью $f(\varphi)$:

$$\xi = A \sin \varphi + B \cos \varphi + \psi(\varphi),$$

где A и B – произвольные постоянные, а $\psi(\varphi)$ – частный интеграл уравнения, который может быть найден с помощью квадратур. Точно так же приводится к квадратурам и более общий случай, когда радиальный компонент центральной силы имеет вид

$$F_r = f(\varphi)r^{-2} + kr^{-3},$$

где k – постоянная.

1.6.7 Примеры

Пример 1. Свободная частица движется со скоростью v параллельно оси OX на расстоянии b от неё. Пользуясь общим решением задачи о движении точки в центрально-симметричном поле, найти закон её движения и уравнение траектории в полярных координатах.

Силу, равную нулю, формально можно считать центрально-симметричной. Положив $U(r) = 0$, найдем функцию $t = t(r)$ (1.6.6):

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{(2/m)(E - L^2/(2mr^2))}} = \frac{1}{v} \int_b^r \frac{dr}{\sqrt{1 - b^2/r^2}} = \frac{b}{v} \int_{b/r}^1 \frac{d\xi}{\xi^2 \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{v}. \quad (1.6.11)$$

Обращая это соотношение, получим

$$r = \sqrt{b^2 + (vt)^2}.$$

Из (1.6.7) и (1.6.8) далее следуют выражения

$$\varphi(t) = bv \int_0^t \frac{dt}{b^2 + (vt)^2} = \operatorname{arctg} \frac{vt}{b} \quad (1.6.12)$$

и

$$r = \frac{b}{\cos \varphi} \quad (1.6.13)$$

или

$$r \cos \varphi = b.$$

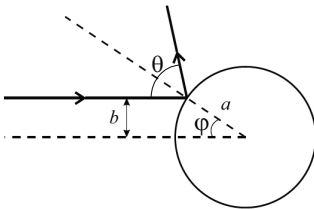


Рис. 1.22. Рассеяние точечной частицы на шарике

Прежде всего, изменится наименьшее расстояние сближения r_0 : теперь оно будет равно радиусу сферы a (рис. 1.22). Формально это можно учесть введением потенциальной энергии вида

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r > a; \\ U_0 > E = mv^2/2, & r < a. \end{cases}$$

В результате выражения (1.6.11)–(1.6.13) примут вид:

$$t = \frac{1}{v} \int_a^r \frac{dr}{\sqrt{1 - b^2/r^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}{v}, \quad (1.6.14)$$

$$r = \sqrt{b^2 + [vt + \sqrt{a^2 - b^2}]^2} \quad (1.6.15)$$

Это уравнение прямой в полярной системе координат. Заметим, что при t , пробегающем значения от $-\infty$ до ∞ , угол φ изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$, радиус-вектор частицы поворачивается на 180° , а скорость \vec{v} остаётся постоянной по величине и направлению.

Пример 2. В условия предыдущей задачи внесём изменение: опишем вокруг начала координат неподвижную сферу радиуса $a \geq b$, упруго отражающую частицу.

и

$$\varphi(t) = \arctg \frac{vt + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} - \arctg \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \quad (1.6.16)$$

При изменении t от $-\infty$ до ∞ радиус-вектор поворачивается теперь на угол $2\varphi(\infty) = \pi - 2\arctg \sqrt{(a/b)^2 - 1}$, а скорость, оставаясь постоянной по величине, изменяет направление при столкновении частицы со сферой на угол

$$\theta = \pi - 2\varphi(\infty) = 2\arctg \sqrt{(a/b)^2 - 1} = 2\arccos(b/a), \quad b \leq a.$$

Отсюда

$$b = a \cos(\theta/2).$$

Пример 3. Найти траекторию движения точки с массой m , энергией $E = \alpha$ и моментом импульса $L = \sqrt{2m\alpha}$ в поле с потенциальной энергией $U(r) = -\alpha/r^2$.

Эффективная потенциальная энергия обращается в этом случае в нуль,

$$U_{\text{эфф}}(r) = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{L^2}{2mr^2} = 0,$$

и интегрирование (1.6.9) (при согласованном выборе знака и пределов) даёт:

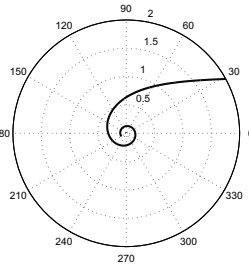


Рис. 1.23. Гиперболическая спираль

$$\varphi(r) = \frac{L_z}{\sqrt{2mE}} \int_r^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}.$$

Кривая

$$r = \frac{1}{\varphi}, \quad \varphi > 0,$$

называется *гиперболической спиралью* (рис. 1.23).

Пример 4. Определить траекторию частицы в поле центральной силы

$$\vec{F} = -f \frac{\cos \varphi}{r^2} \vec{e}_r, \quad f = \text{const} > 0,$$

проходящей через точку $r = r_0$, $\varphi = 0$ со скоростью \vec{v}_0 , перпендикулярной к \vec{r}_0 и направленной в сторону возрастания угла φ .

Заметим, что знак проекции этой силы на радиальное направление зависит от φ : при $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ проекция положительна (сила отталкивающая), при $0 \leq \varphi < \pi/2$, $3\pi/2 < \varphi < 2\pi$ — отрицательна (притягивающая сила). Выразив эту силу через обратный радиус,

$$F_r = -f\xi^2 \cos \varphi,$$

подставим её во вторую формулу Бине:

$$\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} + \xi = 2\alpha \cos \varphi, \quad \alpha = \frac{f}{2m(2\sigma_z)^2}. \quad (1.6.17)$$

Полное решение этого неоднородного дифференциального уравнения складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\xi_0 = A \sin \varphi + B \cos \varphi$$

и частного решения неоднородного уравнения. Последнее ищем в виде

$$\xi = a\varphi \sin \varphi + b\varphi \cos \varphi.$$

Подставляя его в (1.6.17),

$$2a \cos \varphi - a\varphi \sin \varphi - 2b \sin \varphi - b\varphi \cos \varphi + a\varphi \sin \varphi + b\varphi \cos \varphi = 2\alpha \cos \varphi,$$

находим постоянные a, b :

$$a = \alpha, \quad b = 0.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$\xi = A \sin \varphi + B \cos \varphi + \alpha \varphi \sin \varphi.$$

Для определения оставшихся постоянных подставим найденное решение $r(\varphi) = 1/\xi(\varphi)$ в начальные условия:

$$r(0) = r_0, \quad v_r(0) = -2\sigma_z \frac{d\xi}{d\varphi} = 0, \quad v_\varphi(0) = 2\sigma_z r_0^{-2}.$$

В результате получим

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{r_0}$$

и

$$r(\varphi) = \frac{r_0}{\cos \varphi + \alpha r_0 \varphi \sin \varphi}.$$

1.6.8 Упражнения

1. Точка начинает движение в плоскости XOZ из начала координат в момент $t = 0$ со скоростью $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0z}\vec{e}_z$ (v_{0x} и $v_{0z} > 0$) под действием гравитационной силы $\vec{F}_{\text{ГР}} = -mg\vec{e}_z$ при наличии трения $\vec{F}_{\text{ТР}} = -b\vec{v}$. Найти и проанализировать $\vec{v}(t)$.
2. Исследовать движение заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле \vec{H} , направленном вдоль оси OZ .
3. Написать уравнения для декартовых проекций скорости заряженной частицы в скрещённых электрическом и магнитных полях ($\vec{E} = E\vec{e}_y$, $\vec{H} = H\vec{e}_z$).
4. Заряженный пространственный осциллятор с собственной частотой ω_0 помещён в постоянное однородное магнитное поле, направленное вдоль оси OZ . Найти частоты колебаний в направлениях, параллельном и перпендикулярном полю.

1.7 Движение в кулоновском поле

1.7.1 Эффективный потенциал кулоновского поля

Важнейший случай центрально-симметричного поля – гравитационное поле точечной массы или, более общо, сферически симметричного распределения массы – *ньютоновское поле тяготения*

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r, \quad \alpha = m_1 m G, \quad (1.7.1)$$

где m – масса источника поля, m_1 – масса материальной точки, на которую действует сила, G – гравитационная постоянная. Именно это поле определяет орбиты планет Солнечной системы, и вообще, всю динамику небесных тел вплоть до движения галактик и скоплений галактик. Потенциальная энергия материальной точки в ньютоновом поле силового центра

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r},$$

а эффективный потенциал включает ещё и центробежное слагаемое:

$$U_{\text{эфф}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (1.7.2)$$

Формулы (1.7.1) и (1.7.2) остаются справедливыми и для взаимодействия электрических зарядов, неподвижных или движущихся относительно друг друга с не очень высокими скоростями), если под m понимать алгебраическую величину зарядов, а под G – электродинамическую постоянную. Такое силовое поле, в котором α может иметь как положительное, так и соответствующее силам отталкивания отрицательное значение, будем называть *кулоновским*. В настоящем разделе мы будем говорить лишь о гравитационном (ньютоновском) поле, когда $\alpha > 0$.

Обратимся к выражению (1.7.2). При малых r в нём доминирует центробежный член (если только момент импульса L не равен нулю)

$$U_{\text{эфф}}(r) \sim \frac{L^2}{2mr^2}, \quad r \rightarrow 0,$$

при больших – ньютонов

$$U_{\text{эфф}}(r) \sim -\frac{\alpha}{r}, \quad \text{ЛАНУ} \infty.$$

Траектория частицы имеет в этом случае одну точку поворота (r_0) при положительной энергии $E \geq 0$ (инфинитное движение) и две (r_0 и r_π), находящиеся на минимальном и максимальном расстояниях от центра – при отрицательной энергии (финитное периодическое движение). Кроме того, в этом случае имеется точка r_* , в которой $U_{\text{эфф}}$ имеет минимум. При $E \downarrow U_{\text{эфф}}(r_*)$ обе точки r_0 и r_π сливаются в одну r_* : движение происходит по окружности.

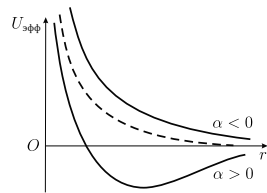


Рис. 1.24. Эффективный потенциал кулоновского поля (1.7.2). Штриховая линия показывает центробежное слагаемое

Точки орбиты, находящиеся на минимальном и максимальном расстоянии от силового центра, называются *перигеем* и *апогеем* соответственно¹⁹. Вычислим соответствующие расстояния, приведя уравнение

$$U_{\text{эфф}}(r) = E$$

к виду

$$r^2 + \frac{\alpha}{E} r \frac{L^2}{2mE} = 0$$

и разрешив его относительно r . Введя *фокальный параметр* p и *эксцентриситет* ε соотношениями

$$p = \frac{L^2}{m\alpha}$$

и

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}},$$

получим для инфинитного ($E > 0$) движения

$$r_0 = \frac{p}{1 + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 1,$$

а для финитного ($E < 0$) движения

$$r_0 = \frac{p}{1 + \varepsilon}, \quad r_\pi = \frac{p}{1 - \varepsilon}, \quad r_* = p, \quad U_{\text{эфф}}(r_*) = -\frac{m\alpha^2}{2L^2}, \quad \varepsilon < 1.$$

1.7.2 Траектории в ньютоновом поле

Подставим эффективный потенциал ньютонова поля в формулу для траектории (1.7.2) и выполним интегрирование:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_{r_0}^r \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2m[E + \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}]} = \int_{1/r}^{1/r_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\alpha}{L^2}\xi - \xi^2}} = \\ &= \int_{1/r}^{1/r_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right) - \left(\xi - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2}} = \end{aligned}$$

¹⁹Термины перигей и апогей используются в случае когда движение происходит около Земли. Для других тел: Солнце – перигелий, апогелий; Луна – периселений, апоселений; Юпитер – перийовий, апойовий и т.д. Если же рассматривать силовой центр с общих позиций, то – перицентр и апоцентр.

$$= \int_{p/r-1}^{p/r_0-1} \frac{dz}{\sqrt{\varepsilon^2 - z^2}} = -\arccos \frac{z}{\varepsilon} \Big|_{p/r-1}^{z=\varepsilon}.$$

Отсюда

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (1.7.3)$$

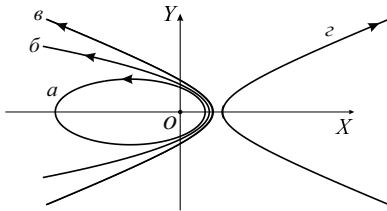


Рис. 1.25. Траектории в кулоновском поле: a – финитная (эллипс) b и c – инфинитные (парабола и гипербола) траектории в поле притяжения $\alpha > 0$; z – инфинитная траектория (гипербола) в поле отталкивания $\alpha < 0$

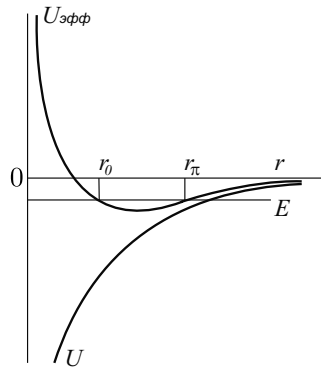


Рис. 1.26. Эффективный потенциал кулоновского поля

Траектории (1.7.3) представляют собой кривые второго порядка в полярных координатах: гиперболу при $E > 0$, $\varepsilon > 1$ и эллипс при $E < 0$, $\varepsilon < 1$. Приводимая во всех курсах параболическая траектория ($E = 0$, $\varepsilon = 1$) имеет исключительно математическое значение: никакими способами нельзя ни приготовить механическую систему с энергией, *строго равной наперед заданному вещественному числу* (в данном случае нулю), ни проверить уже имеющуюся систему на предмет выполнения этого равенства.

Рассмотрим подробнее эллиптические орбиты, приближённо описывающие движение планет Солнечной системы ($\alpha = Gmm_{\odot}$, m – масса планеты, m_{\odot} – масса Солнца) и движение спутников Земли (в этом случае $\alpha = Gm m_{\oplus}$, где m – масса спутника, m_{\oplus} – масса Земли). Фокальный параметр p и эксцентриситет ε выражаются через *апогейное* и *перигейное* расстояния формулами

$$p = \frac{2r_0 r_{\pi}}{r_0 + r_{\pi}}, \quad \varepsilon = \frac{r_{\pi} - r_0}{r_0 + r_{\pi}}.$$

Большая полуось эллипса определяется только полной энергией

$$a = \frac{r_0 + r_\pi}{2} = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|},$$

малая полуось зависит ещё и от момента импульса

$$b = \max\{r(\varphi) \sin \varphi\} = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}} = \sigma \sqrt{\frac{2m}{|E|}},$$

а между p , ε и a существует связь

$$p = a(1 - \varepsilon^2).$$

Поскольку площадь эллипса равна πab , периоды обращения планет вокруг Солнца даются соотношениями

$$\tau = \frac{\pi ab}{\sigma} = \pi a \sqrt{\frac{2m}{|E|}} = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} = \frac{2\pi a^3/2}{\sqrt{Gm_\odot}}.$$

Перечисленные свойства орбит планет в ньютоновом поле тяготения формулируются в виде трёх *законов Кеплера*.

Первый закон Кеплера. *Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце.*

Второй закон Кеплера. *За равные промежутки времени радиус-вектор планеты заметает равные площади, $\sigma = L/(2m) = \text{const}$.*

Третий закон Кеплера. *Квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит, $\tau^2/a^3 = \text{const}$.*

Формулировки эти приближённые, поскольку теоретически они получены в предположении, что 1) Солнце является неподвижным (то



Иоганн Кеплер (1571 – 1630) – немецкий астроном и математик. Открыл три основных движения планет, изобрел оптическую систему, применяемую в частности, в современных рефракторах, подготовил создание дифференциального, интегрального и вариационного исчисления в математике.

есть, инертная масса его бесконечно велика) и 2) влиянием других планет на движение рассматриваемой планеты можно пренебречь. В более серьёзных расчётах эти факторы, конечно, требуют учёта, который производится с помощью специально разработанных математических методов, наиболее известным из которых является метод возмущений. Применение законов Кеплера для описания движения искусственных спутников Земли нуждается в ещё большем числе поправок: на отличие гравитационного поля Земли космических станций и космических кораблей «дальнего плавания» от ньютонова (ввиду ее несферичности), на сопротивление атмосферы, на притяжение Луны, Солнца, других планет, влияние межпланетной среды. Всё это осуществляется методами механики.

Астрономическая единица и парсек. В астрономии применяются специальные единицы длины – *астрономическая единица* (а.е.) и *парсек*, связанные с длиной большой полуоси земной орбиты $a = 1,49578 \cdot 10^{11}$ м. А.е. просто равна этой длине, а парсек – это расстояние, с которого расположенный перпендикулярно лучу зрения отрезок длиной 1 а.е. виден под углом в 1 угловую секунду ($1''$):

$$1 \text{ пс} \approx 3 \cdot 10^{16} \text{ м.}$$

Примерно на таком расстоянии от нас находятся ближайшие звёзды. В радиусе 20 пс от Солнца насчитывается около 100 звёзд. Сфера радиусом в 30 000 пс (30 килопарсек) заключает в себя нашу Галактику, содержащую около триллиона (10^{12}) звёзд, расположенных вблизи плоскости Галактики. Наша Солнечная система находится на расстоянии 10 кпс от этого центра.

1.7.3 Скорости движения по кеплеровым орбитам

Радиальный и азимутальный (трансверсальный) компоненты скорости движения по кеплеровой орбите (против часовой стрелки, $\dot{\varphi} > 0$) вычисляются следующим образом:

$$v_r(\varphi) = \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{\varepsilon p \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} \frac{L_z}{mr^2} = \varepsilon \sqrt{\frac{\alpha}{mp}} \sin \varphi,$$

$$v_\varphi(\varphi) = r\dot{\varphi} = r \frac{L_z}{mr^2} = \frac{\sqrt{m\alpha p}}{mr} = \sqrt{\frac{\alpha}{mp}} (1 + \varepsilon \cos \varphi).$$

Абсолютная величина скорости

$$v(\varphi) = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{mp}} \sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi}$$

максимальна в перигее

$$v(0) = \sqrt{\frac{\alpha}{mp}} \sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon}$$

и минимальна в апогее

$$v(\pi) = \sqrt{\frac{\alpha}{mp}} \sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon}.$$

Полная энергия движущегося по кеплеровой орбите тела, как и должно быть по закону сохранения энергии, постоянна:

$$\begin{aligned} E = T + U &= \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{2p}(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi) - \frac{\alpha}{r} = \\ &= -\frac{\alpha(1 - \varepsilon^2)}{2p} = -\frac{\alpha}{2a}. \end{aligned}$$

В случае круговой орбиты $r = p = a$ и

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\alpha}{ma}}, \quad T_{\text{кр}} = \frac{\alpha}{2a}, \quad U_{\text{кр}} = -\frac{\alpha}{a}, \quad E_{\text{кр}} = -\frac{\alpha}{2a}.$$

Круговая скорость для радиуса орбиты, равного радиусу Земли R_{\oplus} , называется *первой космической скоростью*:

$$v_{1\text{к}} = \sqrt{\frac{Gm_{\oplus}}{R_{\oplus}}} \approx 7,9 \text{ км/с}.$$

Это – наименьшая скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником Земли (в отсутствие сопротивления атмосферы). Минимальная скорость, которую надо сообщить телу для преодоления притяжения Земли, то есть скорость, соответствующая параболической траектории, называется *второй космической скоростью*. Она определяется из уравнения $mv_{2\text{к}}^2/2 + U(R_{\oplus}) = 0$ и имеет вид

$$v_{2\text{к}} = \sqrt{\frac{2Gm_{\oplus}}{R_{\oplus}}} \approx 11,2 \text{ км/с}.$$

Третьей космической скоростью называют минимальную скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли, чтобы оно покинуло Солнечную систему. Эта скорость $v_{3\text{к}} = 16,7 \text{ км/с}$.

1.7.4 Время движения по кеплеровым орбитам

Опишем вокруг центра эллипса C окружность радиусом, равным большой полуоси, и через точку S проведём перпендикулярный оси OX отрезок PQ . Угол ϵ между отрезком CP и осью OX называется *эксцентрисической аномалией*, а угол φ между радиус-вектором OS

и осью OX – истинной аномалией. Из рис. 1.27 видно, что

$$a \cos e - r \cos \varphi = c,$$

где c – половина фокусного расстояния CO . Подставляя сюда $r = r(\varphi)$, получим

$$a \cos e - \frac{p \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = c.$$

Поскольку $\varepsilon = c/a$ и $p = (1 - \varepsilon^2)a$,

$$\cos e = \frac{c}{a} + \frac{p}{a} \frac{\cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{\varepsilon + \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

и, следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{\cos e - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos e}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin e}{1 - \varepsilon \cos e}. \quad (1.7.4)$$

Подставляя первое из этих выражений в уравнение эллиптической траектории, приходим к соотношению:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} (1 - \varepsilon \cos e) = a(1 - \varepsilon \cos e).$$

Воспользуемся теперь полученными формулами для вычисления времени движения по орбите. Согласно закону сохранения момента импульса («теореме площадей»)

$$dt = \frac{r^2}{2\sigma} d\varphi = \frac{a^2(1 - \varepsilon \cos e)^2}{2\sigma} de.$$

Дифференцируя $\cos \varphi$ по e ,

$$\sin \varphi d\varphi = \frac{(1 - \varepsilon^2) \sin e}{(1 - \varepsilon \cos e)^2} de,$$

и воспользовавшись вторым уравнением (1.7.4), получим:

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \cos e} de.$$

Таким образом,

$$dt = \frac{a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} (1 - \varepsilon \cos e)}{2\sigma} de.$$

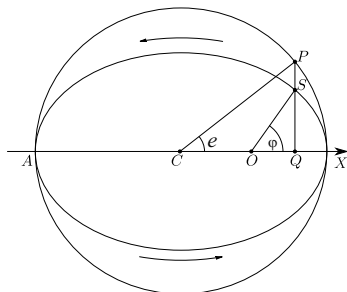


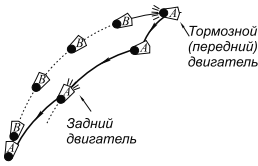
Рис. 1.27. Эксцентрическая и истинная аномалии

Отсчитывая время t от момента прохождения перигея ($e = 0$), после интегрирования получаем *уравнение Кеплера*

$$nt = e - \varepsilon \sin e, \quad n = \frac{2\sigma}{a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{2\sigma(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}{p^2},$$

устанавливающее связь между эксцентрической аномалией e и временем движения тела.

Парадокс спутника. Приведённые выше формулы кругового движения в ньютоновом поле позволяют объяснить *парадокс спутника*: сопротивление верхних слоев атмосферы не замедляет, а *ускоряет* его движение. Действительно, слабое (адиабатическое) действие дополнительной силы \vec{f} изменяет энергию по закону



$$\frac{dE_{\text{кр}}}{dt} = \vec{f} \vec{v}_{\text{кр}}, \quad v_{\text{кр}} = \frac{2|E_{\text{кр}}|}{m},$$

Рис. 1.28. Манёвр космического корабля с переходом на другую орбиту

не изменяя круговой формы орбиты. Выражая скорость через энергию, видим, что при $\vec{f} \vec{v}_{\text{кр}} < 0$ полная энергия $E_{\text{кр}}$ уменьшается, но поскольку она отрицательна, абсолютная величина её при этом увеличивается, что согласно последней формуле влечёт за собой увеличение скорости.

По этой же причине, чтобы обогнать космический корабль A , движущийся по круговой орбите того же самого радиуса, что и корабль B , последнему надо совершить следующий маневр: 1) включить на короткое время двигатель торможения, который переведёт его на орбиту меньшего радиуса с более высокой скоростью, 2) подождать, пока корабль B опередит A , и затем 3) включить двигатель ускорения, который вернёт корабль B на исходную орбиту с прежней скоростью, но уже впереди корабля A (рис. 1.28)²⁰.

1.7.5 Вектор Лапласа

Помимо энергии E и момента импульса \vec{L} , сохраняющихся в любом центрально-симметричном поле, в кулоновском поле тяготения существуют специфические интегралы движения: *вектор Лапласа*

$$\vec{\Lambda} = [\vec{v}, \vec{L}] - \alpha \vec{e}_r$$

и вектор

$$\vec{N} = \vec{v} - \frac{\alpha}{L} \vec{e}_\varphi.$$

²⁰Пример взят из замечательной книги Леона Купера «Физика для всех» [т. I, М.: Мир, 1973, с.166].

Убедиться в этом легко прямым дифференцированием приведенных выражений по времени. Продифференцируем по времени вектор Лапласа:

$$\frac{d\vec{\Lambda}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{v}, \vec{L}] + [\vec{v}, \dot{\vec{L}}] - \alpha \dot{\vec{e}}_r$$

и, воспользовавшись выражениями (1.3.4), (1.3.5) и (1.7.1), получим

$$\frac{d\vec{\Lambda}}{dt} = -\frac{\alpha}{r^3} [\vec{r}, [\vec{r}, \vec{v}]] - \frac{\alpha \dot{r}}{r} + \frac{\alpha \vec{r} \dot{r}}{r^2},$$

несложными алгебраическими манипуляциями с векторами завершим доказательство:

$$\frac{d\vec{\Lambda}}{dt} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r}(\vec{r}, \vec{v}) + \frac{\alpha}{r^3} \vec{v}(\vec{r}, \vec{r}) - \frac{\alpha \dot{r}}{r} + \frac{\alpha}{r^3} \vec{r}(\vec{r}, \vec{v}) = 0.$$

Таким образом,

$$\vec{\Lambda} = [\vec{v}, \vec{L}] - \alpha \vec{e}_r = \text{const.}$$

Умножив его скалярно на момент импульса,

$$\vec{\Lambda} \vec{L} = \vec{L}[\vec{v}, \vec{L}] - \alpha \vec{L} \vec{r} / r = \vec{v}[\vec{L}, \vec{L}] - \alpha \vec{r}[\vec{r}, m \vec{v}] / r = 0,$$

видим, что вектор Лапласа лежит в плоскости орбиты. Умножив скалярно на радиус-вектор, получим

$$\vec{\Lambda} \vec{r} \equiv \Lambda r \cos \varphi = \vec{r}[\vec{v}, \vec{L}] - \alpha r = L^2 / m - \alpha r.$$

Отсюда

$$r = \frac{L^2 / m}{\alpha + \Lambda \cos \varphi}.$$

Из сопоставления этого выражения с уравнением траектории следует, что вектор Лапласа имеет длину $\Lambda = \alpha \varepsilon$ и направлен вдоль большой оси эллипса в сторону перигея (ближайшей к фокусу точки траектории).

1.7.6 Тёмная материя

Спиральные галактики состоят из миллиардов звёзд, вращающихся вокруг галактического центра. Пространственное распределение звёзд имеет обычно вид диска с шарообразным утолщением (выпуклостью) в центре. Если предположить, что звезда массой m вращается

вокруг центра по круговой орбите радиуса r со скоростью $v(r)$ и соответствующим центростремительным ускорением $a_r(r) = v^2(r)/r$, то из уравнения движения следует:

$$m \frac{v^2}{r} = F(r) = G \frac{mM(r)}{r^2}, \quad (1.7.5)$$

где $M(r)$ – масса вещества, заключённая внутри сферы радиуса r (правое равенство справедливо для цилиндрически- и сферически-симметричных распределений вещества, когда действия на данную звезду различных элементов внешней части распределения компенсируют друг друга). Считая распределение вещества выпуклости однородным с плотностью ρ , находим из (1.7.5), что скорость движущейся в этой области звезды

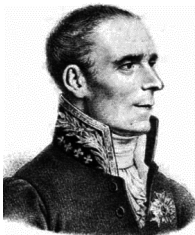
$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = 2\sqrt{\pi G\rho/3} r$$

пропорциональна расстоянию от неё до центра. Если же звезда находится на окраине галактики, то $M(r) \approx M_{\text{гал}}$ соответствует массе галактики в целом, и

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM_{\text{гал}}}{r}} \propto r^{-1/2}.$$

Астрономические же измерения скоростей, проведённые путем изучения доплеровского смещения спектров крайних звёзд и даже звёзд, находящихся на расстояниях, в несколько раз превышающих *видимые* размеры диска, показывают, что в этой области (рис. 1.29)

$$v(r) = \text{const} \equiv u. \quad (1.7.6)$$



Пьер-Симон, маркиз де Лаплас (1749–1827) – французский математик, механик, физик и астроном, один из создателей теории вероятностей. соавтор канто-лапласовской теории происхождения Солнечной системы. Говорят, когда он преподнес Наполеону свою книгу «Изложение системы мира», тот сказал ему: «Ньютон в своей книге говорил о Боге, в Вашей же книге, которую я уже просмотрел, я не встретил имени Бога ни разу» и услышал в ответ: «Гражданин Первый консул, в этой гипотезе я уже не нуждался!»

Подставляя (1.7.6) в (1.7.5), приходим к формуле

$$M(r) = \frac{u^2}{G} r,$$

позволяющей предположить, что за пределами видимой (светящейся) звездной массы существует область (гало), заполненная невидимой или *темной* материей. Необычность ее состоит в том, что она оказывается прозрачной, не закрывает галактику, как, скажем, туманности, и не нагревается излучением галактики и не светится по этой причине сама. Самым интригующим, однако, является то, что количество темной материи во Вселенной, возможно, в десятки раз превышает количество видимой.

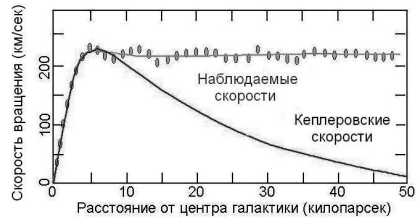


Рис. 1.29. Сопоставление кеплеровских (вычисленных по массе светящейся материи) скоростей с наблюдаемыми скоростями звёзд

1.7.7 Приливное взаимодействие

Протяжённое тело может рассматриваться как точечное только в случае, когда действующая на него сила однородна по объёму (одинакова во всех его точках). В неоднородном поле, каким, например, является гравитационное поле Солнца и, вообще, гравитационные поля звёзд и планет, протяжённое тело испытывает так называемое приливное действие со стороны этого поля, деформирующее его и изменяющее его траекторию. Именно этим объясняются приливы и отливы, вызываемые приливным действием Луны на Землю. Масса Солнца примерно в 320 000 раз больше массы Земли, однако последняя оказывает ощутимое приливное действие на светило: период обращения Солнца вокруг собственной оси уменьшается на три миллисекунды в сто лет. Как установили российские астрономы Григорий Красинский и Виктор Брумберг (2004), Земля по этой же причине удаляется от Солнца на 15 сантиметров в год. Аналогичным образом, Луна удлиняет период собственного вращения Земли на 0,000017 с, удаляясь от Земли со скоростью 4 см в год.

1.7.8 Упражнения

1. Пользуясь формулами Бине, найти ускорение точки, движущейся по эллиптической орбите.
2. Показать, что вторая производная функции $I(r) = mr^2/2$ по времени отличается от кинетической энергии точки, движущейся в поле $U(r) = -\alpha/r$, на постоянную величину.

3. Показать, что переменная $J = dI/dt$ удовлетворяет уравнению $d^2J/dt^2 = -kJ/r^3$, где k – постоянная.
4. Показать, что уравнение орбиты в центрально-симметричном поле $\vec{F} = \left(-\frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r^3}\right)\vec{e}_r$ может быть представлено в виде $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos(k\varphi)}$, где a, ε и k – постоянные.

1.8 Рассеяние частиц в центрально-симметричном поле

1.8.1 Сечение рассеяния

Эксперименты по рассеянию частиц атомами сыграли очень важную роль в понимании структуры вещества. Э. Резерфордом было обнаружено, что атом практически пуст: вся его масса сконцентрирована в ядре, занимающем ничтожнейшую долю его объёма. Чтобы прийти к такому выводу, надо было не только провести эксперимент, но и сравнить его результаты с теоретическими расчётами. Расчёты проводились по следующей схеме.

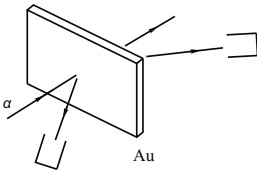


Рис. 1.30. Опыт Резерфорда по рассеянию альфа-частиц в тонкой пластинке золота

Однородный поток невзаимодействующих между собой частиц падает на силовой центр, который влияет на их движение, искривляя траектории и изменяя соответственно направление скорости. Движение инфинитно: частицы приходят из бесконечности и уходят в бесконечность. Но если в начальном состоянии они летели в одном и том же направлении, то в конечном они распределены по всем возможным направлениям. Это распределение характеризуется *дифференциальным сечением рассеяния*, определяемым как отношение числа $N(d\Omega)$ частиц, рассеянных в телесный угол $d\Omega$ под углом θ к начальному направлению, к плотности потока j_0 падающих частиц и имеет размерность площади:

$$d\sigma = \frac{N(d\Omega)}{j_0}.$$

В случае центрально-симметричного поля $d\Omega$ выражается только через *угол рассеяния* $\theta \in [0, \pi]$, который в свою очередь связан с *прицельным параметром* $b \geq 0$ – расстоянием от силового центра до прямой, по которой прошла бы частица в отсутствие взаимодей-

ствия с центром. Если сила монотонно убывает с расстоянием, функция $b = b(\theta)$ тоже убывает: далеко пролетающие частицы рассеиваются на малые углы и каждому значению θ соответствует только одно значение прицельного параметра $b(\theta)$. Частицы, рассеянные на угол больший θ , – это частицы с прицельным параметром меньшим $b(\theta)$, число которых

$$N_{\text{расс}}(> \theta) = N_{\text{пад}}(< b(\theta)) = \pi b^2 j_0. \quad (1.8.1)$$

Увеличивая угол рассеяния на $d\theta$, мы получаем телесный угол $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, в который рассеиваются все частицы, падающие на площадь $dS = 2\pi b |db/d\theta| d\theta$:

$$N(d\Omega) = j_0 dS = j_0 2\pi b |db/d\theta| d\theta.$$

Отсюда дифференциальное сечение рассеяния в единичный телесный угол

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_0 2\pi b |db/d\theta| d\theta}{j_0 2\pi \sin \theta d\theta} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (1.8.2)$$

Это и есть основная формула классической теории рассеяния. Интеграл от неё по всему телесному углу даёт *полное сечение рассеяния*, равное площади поперечного сечения области, занятой потенциалом: $\sigma = \pi b_{\text{макс}}^2$. Формула (1.8.2) выведена в предположении, что $b(\theta)$ – однозначная функция угла. В противном случае она имеет вид суммы по всем ветвям $b_n(\theta)$ многозначной функции:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_n \frac{b_n}{\sin \theta} \left| \frac{db_n}{d\theta} \right|.$$

Если рассеивающий потенциал имеет бесконечный радиус действия, полное сечение рассеяния бесконечно. Бесконечность эта порождается особенностью дифференциального сечения в нуле: именно здесь сосредотачиваются частицы, приходящие со сколь угодно большими прицельными параметрами.

Связь между прицельным параметром и углом рассеяния выражается соотношением

$$\theta = \pi - 2\varphi(\infty) = \pi - 2b \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - (b/r)^2 - U(r)/E}}. \quad (1.8.3)$$

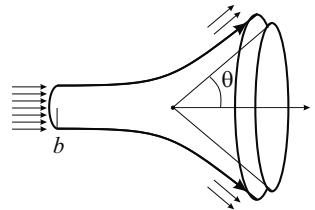


Рис. 1.31. К определению сечения рассеяния

Разрешая (1.8.3) относительно b , находим

$$b = b(\theta).$$

1.8.2 Пример: рассеяние частиц на шаре

Вычислим дифференциальное сечение рассеяния частиц абсолютно упругим шариком радиуса a . В этом случае $r_0 = a$ и $U(r) = 0$ при $r > a$, так что

$$\varphi(\infty) = \int_a^\infty \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - b^2}} = \pi/2 - \operatorname{arcsec}(a/b).$$

Отсюда угол рассеяния равен

$$\theta = 2 \operatorname{arcsec}(a/b),$$

а прицельный параметр

$$b = a \cos(\theta/2).$$

Эти формулы имеют смысл лишь при $b < a$: только в этом случае частица рассеивается на шарике, при $b > a$ она с ним не взаимодействует.

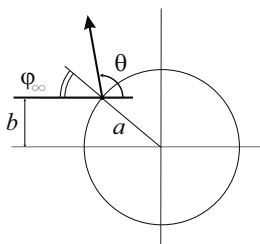


Рис. 1.32. Рассеяние частиц на шаре

равное площади поперечного сечения шарика (чем и объясняется происхождение термина).

Такой же результат мы получим и в случае, когда налетающая частица не материальная точка, а тоже шарик радиусом, скажем, a_1 : полное сечение рассеяния будет равно $\pi(a_1 + a)^2$, а угловое распределение (в системе шарика-мишени) будет изотропным. Такая модель широко применяется как в атомной физике (упругие столкновения нейтральных атомов), так и в ядерной физике (для описания упругого рассеяния нейтронов на ядрах, например, в ядерных реакторах).

1.8.3 Формула Резерфорда

В упоминавшемся выше опыте Резерфорда α -частицы (ядра гелия) рассеивались на атомах золота, по существу, на ядрах атомов золота, поскольку массы электронов пренебрежимо малы по сравнению с массами налетающих α -частиц. Массы же α -частиц малы по сравнению

с массами ядер, что позволяет считать последние неподвижными силовыми центрами, создающими вокруг себя центрально-симметричное поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r},$$

где постоянная $\alpha = -2e \cdot Ze$ по абсолютной величине равна, согласно закону Кулона, произведению зарядов $2e$ и Ze сталкивающихся частиц, а знак выбран так, чтобы потенциальная энергия соответствовала отталкиванию одноименных зарядов:

$$r = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \varepsilon > 1.$$

Из уравнения

$$\infty = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos \varphi_\infty}$$

находим предельное значение отсчитываемого от ближайшей к центру точки траектории азимутального угла

$$\cos \varphi_\infty = \frac{1}{\varepsilon},$$

связанного с углом рассеяния соотношением $\varphi_\infty = (\pi - \theta)/2$. Отсюда

$$\sin(\theta/2) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2(\theta/2)}} = \frac{1}{\varepsilon} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + 2EL^2/(m\alpha^2)}}$$

и, поскольку $L = mv_0 b$ и $E = mv_0^2/2$, искомая связь имеет вид

$$b = \left| \frac{\alpha}{2E} \right| \operatorname{ctg}(\theta/2)$$

Такой же вид она имеет и в случае притяжения, когда сталкиваются заряды разных знаков.

Подставляя найденное выражение в основную формулу теории рассеяния, получаем *формулу Резерфорда*, описывающую рассеяние заряженных микрочастиц (электронов, протонов, альфа-частиц) полем неподвижного точечного заряда (атомного ядра).

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2E} \right)^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2) \cdot 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} = \left(\frac{\alpha}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

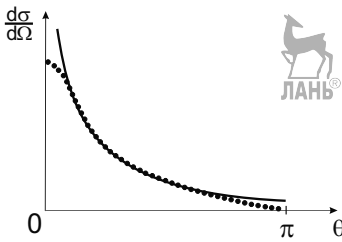


Рис. 1.33. К обсуждению формулы Резерфорда

При $\theta \rightarrow 0$ теоретическое сечение растёт как θ^{-4} , эксперименты же показывают конечное предельное значение (рис. 1.33 даёт качественное представление). Разница эта объясняется экранированием на больших расстояниях поля ядра электронной оболочкой атома. На больших же углах при высоких энергиях также возникает различие: оно объясняется влиянием конечных размеров ядра. Находя из экспериментов соответствующие углы и вычисляя по ним прицельные параметры, можно определять размеры атомов и атомных ядер. Вычисления показали, что размеры ядер порядка 10^{-13} см, тогда как размеры самих атомов порядка 10^{-8} см. Если бы атом имел размер высотного здания МГУ им. Ломоносова, ядро бы уместилось на ладони, остальная часть атома, содержащая практически невесомые электроны, выглядела бы действительно пустой, прозрачной для падающих на атом альфа-частиц в эксперименте Резерфорда. Именно поэтому рассеивается на большие углы лишь очень малая доля частиц — тех, что летят прямо на ядро или его окрестность. Если бы масса атома была размазана по его объёму или (крайний случай) распределена по поверхности атома, падающие на него частицы рассеивались бы изотропно (как на рассмотренном выше шаре).

1.8.4 Рассеяние на малые углы

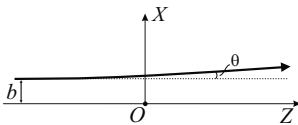


Рис. 1.34. Рассеяние на малые углы

Как показано выше, большинство заряженных частиц, сталкивающихся с атомом, рассеивается на малые углы, но именно такие частицы являются наиболее проникающими: многократно рассеиваясь на малые углы, они в целом сохраняют начальное направление и проникают на значительно большие глубины, чем рассеивающиеся на большие углы, которые быстро теряют первоначальную направленность. Этим и объясняется особый интерес к так называемому *приближению малых углов*, позволяющему получить результат для рассеивающего потенциала произвольной (на больших расстояниях от центра) формы.

Выразив изменение импульса частицы в результате рассеяния че-

рез импульс силы

$$\vec{p}(\infty) - \vec{p}(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}(\vec{r}(t)) dt,$$

пренебрежём при вычислении интеграла искривлением траектории и изменением скорости движения, то есть будем вычислять этот интеграл по невозмущённой траектории. При необходимости, мы можем по найденному в этом приближении $\vec{p}(t)$ поправить траекторию и снова, уже более точно, вычислить искомый интеграл. Такой метод называется *методом возмущений*.

Итак, начальное состояние процесса рассеяния в плоскости XOZ

$$p_z(-\infty) = p, \quad p_x(-\infty) = 0,$$

конечное (в малоугловом приближении)

$$p_z(\infty) \approx p, \quad p_x(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} F_x dt.$$

Полагая силу центрально-симметричной, запишем её x -проекцию в виде

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r} U'(r),$$

а расстояние до силового центра представим уравнением невозмущённого движения

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{b^2 + v^2 t^2},$$

$$dp_x = F_x dt = -\frac{x}{r} U'(r) dt, \quad dt = d \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{v} = \frac{r dr}{v \sqrt{r^2 - b^2}}.$$

В результате получаем приближённое выражение угла рассеяния через прицельный параметр при произвольной форме потенциала

$$\theta \approx p_x(+\infty)/p = -(2/p) \int_0^{\infty} (x/r) U'(r) dt = \left| \frac{b}{E} \int_b^{\infty} U'(r) \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} \right|.$$

Подставляя далее обращённое выражение $b = b(\theta)$ в малоугловую формулу дифференциального сечения

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|,$$

приходим в конкретной задаче к конкретному результату.

1.8.5 Обратная задача теории рассеяния

Определение сечения рассеяния по известному рассеивающему потенциалу называется *прямой задачей* теории рассеяния. Существует обратная постановка задачи (*обратная задача*), дифференциальное сечение предполагается известным (например, из эксперимента), а найти следует потенциал взаимодействия рассеивающихся частиц с силовым центром. Как следует из формулы (1.8.2), в случае монотонной зависимости θ от b

$$b^2(\theta) = 2 \int_{\theta}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Наличие экспериментальных данных о функции $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)$ позволяет установить связь между θ и b , сопоставление которой с теоретическим соотношением (1.8.3), записанном в виде

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{b^{-2}u(r) - r^{-2}}}, \quad u(r) = 1 - \frac{U(r)}{E} \quad (1.8.4)$$

даёт возможность определить потенциальную энергию $U(r) = E(1 - u(r))$.

Сделаем замену переменной интегрирования

$$x = \frac{1}{r^2 u(r)}, \quad (1.8.5)$$

так что

$$r = \frac{1}{\sqrt{xu(r)}}, \quad dr = -x^{-3/2} \frac{1}{2\sqrt{u}} dx - u^{-3/2} \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{du}{dr} dr,$$

откуда

$$dr = - \frac{dx}{2x^{3/2} \sqrt{u} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x}u^{3/2}} \frac{du}{dr} \right]}$$

и

$$\frac{dr}{r^2} = - \frac{ru^2 dx}{2u + r \frac{du}{dr}}.$$

Подставляя это выражение под интеграл в (1.8.4) и вводя обозначения $y = 1/b^2$ и $\Theta(y) = \theta(b)$, приходим к интегральному уравнению абелева

типа (интегральному уравнению дробного порядка 1/2):

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{g(x) dx}{\sqrt{y-x}} = \frac{\pi - \Theta(y)}{2\sqrt{\pi}}, \quad g(x) = \frac{ru^{3/2}(r)}{2u(r) + r \frac{du}{dr}}.$$

Его решение имеет вид

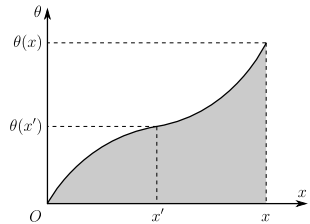
$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\pi} \int_0^x \frac{d\Theta(y)/dy}{\sqrt{x-y}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\theta(x)} \frac{d\theta}{\sqrt{x-y(\theta)}}.$$

Верхний предел $\theta(x)$ здесь определяется условием $x = y(\theta) = b^{-2}(\theta)$. Подставляя сюда явное выражение для $g(x)$ и разрешая полученное уравнение относительно производной от логарифма u по x , получим

$$\frac{d \ln u}{dx} = -\frac{1}{\pi\sqrt{x}} \int_0^{\theta(x)} \frac{d\theta}{\sqrt{x-y(\theta)}}.$$

Так как при $r \rightarrow \infty$ (то есть, при $x \rightarrow 0$) $u \rightarrow 1$, то

$$u = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{x'}} \int_0^{\theta(x')} \frac{d\theta}{\sqrt{x'-y(\theta)}} \right\}.$$



Изменяя порядок интегрирования (рис. 1.35)

Рис. 1.35. К формуле (1.8.6)

$$\int_0^x dx' \int_0^{\theta(x')} d\theta \dots = \int_0^{\theta(x)} d\theta \int_{x'_{\min}=y(\theta)}^x dx' \dots \quad (1.8.6)$$

и вычисляя внутренний интеграл, получим:

$$u(x) = \exp \left\{ -\frac{2}{\pi} \int_0^{\theta(x)} \ln \left[2x/y(\theta) + \sqrt{(2x/y(\theta) - 1)^2 - 1} \right] d\theta \right\},$$

где $\theta(x)$ определяется соотношением

$$xb^2(\theta) = 1.$$

Наконец, по формуле (1.8.5) находим зависимость x от r и приходим к искомому потенциалу:

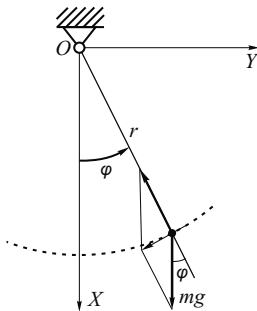
$$U(r) = E[1 - u(x(r))].$$

1.8.6 Упражнения

1. Определить дифференциальное сечение рассеяния полем $U = \alpha / r^2$ ($\alpha > 0$).
2. Вычислить сечение Резерфордского рассеяния в заднюю полусферу.
3. Вычислить дифференциальные сечения Резерфордского рассеяния в маломугловом приближении методом возмущений и сравнить с точными сечениями.
4. Точечные частицы с энергией E рассеиваются на ядре конечного размера R . При каких углах θ рассеяние останется чисто Резерфордским? Найти сечение падения частиц на ядро.

1.9 Движение точки, ограниченное связями

1.9.1 Понятие связи



Рассмотрим движение маятника с упругим в продольном направлении и несгибаемым в поперечном направлении невесомым стержнем жёсткостью k и длиной l в ненапряжённом состоянии. Начало координат поместим в точку подвеса, ось Ox направим вертикально вниз, ось Oy – горизонтально. Маятник движется в плоскости этих осей, $z = 0$. Уравнения движения

Рис. 1.36. Маятник с упругим стержнем

$$m\ddot{x} = F_x + mg,$$

$$m\ddot{y} = F_y,$$

где F_x и F_y – компоненты силы \vec{F} , действующей на массу со стороны упругого стержня. В полярной системе координат движение описывается системой

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = mg \cos \varphi + F_r(r),$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(mr^2\dot{\varphi})}{dt} = -mg \sin \varphi,$$

где $F_r = -k(r - l)$. Предположим, что мы каким-то образом можем управлять жесткостью стержня, непрерывно меняя её, «замораживая стержень» (известно, что большинство материалов при понижении температуры до низких значений теряют свойство упругости, становятся твёрдыми и даже хрупкими). С увеличением жёсткости стержня

($k \rightarrow \infty$) деформация исчезает, $r \rightarrow l$, и система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} -m l \dot{\varphi}^2 &= m g \cos \varphi + F_r'(t), \\ \ddot{\varphi} &= -(g/l) \sin \varphi, \end{aligned}$$

где $F_r'(t)$ – предельное значение силы F_r , называемое *силой реакции стержня*. В отличие от сил тяжести или упругости, называемых *активными силами*, силы реакций считаются *пассивными*, поскольку не задаются заранее, а возникают уже в процессе движения и самим этим движением определяются:

$$\vec{F}' = -m(l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi)\vec{e}_r.$$

Предельное же значение упругой энергии стержня

$$\lim_{r \rightarrow l} k(r-l)^2/2 = -\lim_{r \rightarrow l} (r-l)F_r/2 = -[\lim_{r \rightarrow l} (r-l)]F_r'/2 = 0,$$

так что полная энергия маятника теперь запишется в виде

$$E = \frac{mv^2}{2} - mgl \cos \varphi. \quad (1.9.1)$$

Заметим, что приращение кинетической энергии

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = m\vec{g}d\vec{r}$$

не содержит силу реакции: будучи перпендикулярной перемещению точки сила реакции работы не производит.

Как и в случае прямолинейного одномерного движения под действием силы, зависящей только от координат, закона сохранения энергии (1.9.1) достаточно для решения данной задачи.

Математическим маятником является также бусинка, движущаяся по вертикальной окружности радиуса l без трения. В отсутствие трения сила реакции направлена по нормали к ограничивающей движение кривой или поверхности. В продолжительном опыте с бусинкой, как, впрочем, и с маятником, сила трения становится существенным фактором. Учёт этой силы приводит к дополнительной составляющей силы реакции, направленной по касательной к траектории. Если принять её величину пропорциональной скорости, $\vec{F} = -b\vec{v}$, получим

$$\vec{F}' = -m(l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi)\vec{e}_r - b l \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi.$$

В декартовых координатах предельные уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg + F'_x, \\ m\ddot{y} &= F'_y. \end{aligned}$$

Здесь два уравнения содержат четыре неизвестных x, y, F'_x и F'_y , но известна и дополнительная информация: материальная точка движется в плоскости $z = 0$ по дуге окружности радиуса l :

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

В общем случае движение точки, ограниченное связями, описывается уравнениями

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}'$$

и

$$G_j(x, y, \dots) = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (1.9.2)$$

Выражаемые уравнениями (1.9.2) связи называют *голономными* (термин «голономный» происходит от греческих слов *όλος* – целый, интегрируемый, и *νόμος* – закон). Голономная связь может быть представлена и в дифференциальной форме

$$G_{,x}(x, y)dx + G_{,y}(x, y)dy = 0,$$

где нижними индексами отмечены переменные, по которым берутся частные производные ($G_{,x} \equiv \partial G / \partial x$ и т.д.). Если же связь задана уравнением

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0,$$

левая часть которого не является полным дифференциалом, то есть $A_{,y}(x, y) \neq B_{,x}(x, y)$, то такая связь является *неголономной*. Системы с неголономными связями мы рассмотрим в разделе, посвящённом лагранжевой динамике твёрдого тела.

Уравнения голономных связей могут включать в себя и время (например, маятник, длина которого непрерывно меняется посредством выбора нити), такие связи (и системы) называют *реономными* (нестационарными) в отличие от *склерономных* (стационарных), когда время в уравнениях не участвует. В реономных системах не выполняются законы сохранения, характерные для склерономных систем.

Рассмотрим сначала задачи, в которых силы реакции можно исключить применением теорем о кинетической энергии и моменте импульса.

1.9.2 Движение точки по кривой

Пусть материальная точка массой m движется без трения по кривой

$$\vec{r} = \vec{r}(q),$$

где q – некоторый параметр, скажем, длина участка кривой между начальным и настоящим положениями точки. На точку действует внешняя сила \vec{F} , зависящая только от положения точки на кривой, и сила реакции \vec{F}' , которая в отсутствие трения нормальна по отношению к кривой. Изменение кинетической энергии определяется уравнением

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}d\vec{r} + \vec{F}'d\vec{r} = \vec{F}d\vec{r}.$$

Преобразуем правую часть к виду

$$\begin{aligned} \vec{F}d\vec{r} &= F_x dx + F_y dy + F_z dz = \\ &= \left[F_x \left(\frac{dx}{dq}\right) + F_y \left(\frac{dy}{dq}\right) + F_z \left(\frac{dz}{dq}\right) \right] dq \equiv Qdq, \end{aligned}$$

где $Q = Q(q)$ (в случае неподвижной кривой). Интегрируя дифференциальное соотношение

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Qdq,$$

получим

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{q_0}^q Qdq.$$

Пользуясь соотношением

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left[\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2 \right] \left(\frac{dq}{dt}\right)^2,$$

представим результат в виде $\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = f(q)$,

$$f(q) = \left[\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2 \right]^{-1} \left(v_0^2 + \frac{2}{m} \int_{q_0}^q Qdq \right),$$

откуда

$$\frac{dq}{dt} = \pm \sqrt{f(q)}, \quad t = t_0 \pm \int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{f(q)}}.$$

Знак dq/dt определяется начальным значением скорости. Этот знак нужно сохранять до тех пор, пока dq/dt не обратится в нуль. Если по истечении конечного промежутка времени функция $f(q(t))$ обратится в нуль, то скорость тоже обратится в нуль. При этом направление касательного компонента силы определит направление движения, а следовательно, и знак dq/dt .

1.9.3 Пример: плоский маятник

Применим эти формулы к плоскому маятнику (так для краткости назовём материальную точку на невесомом стержне, совершающую колебания произвольной амплитуды) в фиксированной плоскости, как на рис. 1.37. В качестве параметра q возьмем угол φ , так что

$$x = l \cos \varphi, \quad y = l \sin \varphi, \quad z = 0,$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -l \sin \varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = l \cos \varphi, \quad \frac{dz}{d\varphi} = 0,$$

$$Q = -mgl \sin \varphi, \quad f(\varphi) = l^{-2}[v_0^2 + 2(gl \cos \varphi - gl \cos \varphi_0)].$$

В результате имеем

$$l\dot{\varphi} = \pm \sqrt{v_0^2 + 2(gl \cos \varphi - gl \cos \varphi_0)}.$$

Учитывая, что

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgl \cos \varphi_0 = E,$$

видим, что полученное уравнение есть прямое следствие закона сохранения энергии:

$$\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos \varphi = E.$$

Введя безразмерную энергию

$$h = \frac{E}{mgl},$$

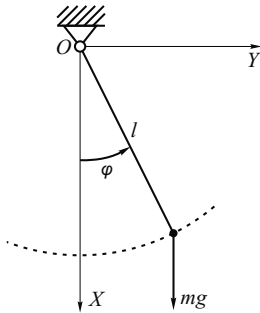


Рис. 1.37. Плоский маятник

представим результат в виде

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2\omega^2} - \cos \varphi = h, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (1.9.3)$$

Уравнение это принадлежит к третьему типу уравнений, рассмотренных в 1.4.2. При этом φ играет роль координаты, ω^{-2} – массы, а $-\cos \varphi$ имеет смысл потенциальной энергии. Нетрудно убедиться в справедливости следующих выводов.

1) При $h < -1$ скорость не является вещественной. Такие состояния не реализуются.

2) При $h = -1$ $\varphi = \pm 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и $\dot{\varphi} = 0$: в указанных точках маятник находится в состоянии устойчивого равновесия.

3) При $-1 < h < 1$ маятник совершает колебания в пределах $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$, $\alpha < \pi$.

4) При $h = 1$ $\varphi = \pm(2n + 1)\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и $\dot{\varphi} = 0$: в указанных точках маятник находится в состоянии неустойчивого равновесия.

5) При $h > 1$ скорость $\dot{\varphi}$ имеет постоянный знак, и маятник вращается против часовой (при $\dot{\varphi} > 0$) или по часовой (при $\dot{\varphi} < 0$) стрелке.

Рассмотрим подробнее случай 2). Продифференцировав уравнение (1.9.3) по времени, получим нелинейное уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0.$$

Если амплитуда достаточно мала, $\sin \varphi \approx \varphi$, оно превращается в линейное уравнение одномерного гармонического осциллятора, рассмотренное в 1.5.1:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0.$$

Его решение имеет вид гармонических колебаний

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t + (\dot{\varphi}_0/\omega) \sin \omega t$$

с периодом

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

независящим от амплитуды. Это свойство, наблюдаемое лишь при малых колебаниях математического маятника, называется *изохронностью*.

Период колебаний произвольной амплитуды представляется эллиптическим интегралом

$$\tau = \frac{4}{\omega} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}},$$

где $k = \sin(\alpha/2)$. Разлагая подынтегральную функцию в ряд по степеням величины $k^2 \sin^2 \theta$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \theta + \dots$$

и удерживая в разложении два члена, получим период колебаний математического маятника с поправкой на зависимость его от амплитуды, справедливой при малых колебаниях:

$$\tau \approx \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right).$$

1.9.4 Движение по поверхности вращения. Теорема Клеро

Если движение происходит по неподвижной гладкой поверхности вращения,

$$G = G(\varrho, z) = 0, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

то силы реакции выпадают не только из уравнения для полной энергии, но и из уравнения для z -проекции момента импульса:

$$[\vec{r}, \vec{R}]_z = \frac{xy}{\varrho} \frac{\partial G}{\partial \varrho} - \frac{yx}{\varrho} \frac{\partial G}{\partial \sigma} = 0$$

и

$$\frac{dL_z}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}]_z.$$

Геодезическими линиями или просто *геодезическими* называют кривые, по которым движется материальная точка в отсутствие активных сил, то есть под действием одних только сил реакции. Рассмотрим движение точки по гладкой неподвижной поверхности вращения $\varrho = \varrho(z)$. Обозначим через α угол между скоростью \vec{v} частицы в некоторой точке и проходящим через эту точку меридианом (рис. 1.38а). Силы реакции работы не производят, поэтому в отсутствие активных сил кинетическая энергия постоянна, $v^2 = \text{const}$ и $\varrho \sin \alpha = \text{const}$.

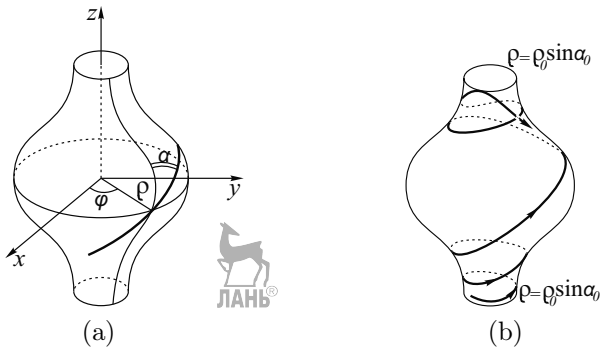


Рис. 1.38. Движение точки по гладкой неподвижной поверхности вращения

Последнее соотношение, известное как *теорема Клеро*, показывает, что допустимая область движения всегда ограничена со стороны малых радиусов. Пусть ϱ_0 и α_0 относятся к начальному положению точки. По теореме Клеро $\varrho \sin \alpha = \varrho_0 \sin \alpha_0$ и, следовательно,

$$\varrho = \frac{\varrho_0 \sin \alpha_0}{\sin \alpha} \geq \varrho_{\text{мин}},$$

где $\varrho_{\text{мин}} = \varrho_0 \sin \alpha_0$. Наклон геодезической к меридиану увеличивается с уменьшением радиуса поверхности. Достигнув параллели минимально допустимого радиуса, геодезическая отражается от неё и уходит в область больших радиусов (рис. 1.38b).

1.9.5 Сферический маятник

Сферическим маятником называется материальная точка, движущаяся без трения по неподвижной сфере постоянного радиуса R в однородном поле тяжести. В цилиндрической системе координат с началом в центре сферы и осью OZ , направленной вертикально вверх, уравнение сферы имеет вид

$$\varrho^2 + z^2 = R^2. \quad (1.9.4)$$

По закону сохранения энергии

$$(m/2)[\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2] + mgz = E = \text{const}. \quad (1.9.5)$$

Обе действующие на точку силы (сила тяжести и сила реакции, нормальная к поверхности) лежат в плоскости, проходящей через ось OZ , так что z -проекция момента сил равна нулю и соответствующая проекция момента импульса точки сохраняется:

$$m\varrho^2\dot{\varphi} = L_z = \text{const}. \quad (1.9.6)$$

Эти три уравнения и определяют зависимость координат ϱ , φ и z от времени t .

Дифференцируя (1.9.4) по времени, найдём

$$\dot{\varrho} = -\frac{z\dot{z}}{\varrho},$$

а подставив скорости $\dot{\varrho}$ и $\dot{\varphi}$ в (1.9.5), получим

$$\frac{z^2\dot{z}^2}{\varrho^2} + \frac{c^2}{\varrho^2} + \dot{z}^2 + 2gz = h,$$

где $c = L_z/m$, а $h = 2E/m$. Пользуясь уравнением (1.9.4), представим этот результат в виде уравнения

$$\frac{R^2}{R^2 - z^2} \dot{z}^2 + \frac{c^2}{R^2 - z^2} + 2gz = h,$$

из которого следует, что вертикальная составляющая скорости имеет вид

$$\dot{z} = \pm R^{-1} \sqrt{(h - 2gz)(R^2 - z^2) - c^2}$$

(знак «+» относится к тем интервалам времени, когда точка поднимается по сфере вверх, а «-» — когда она опускается вниз). Интегрируя

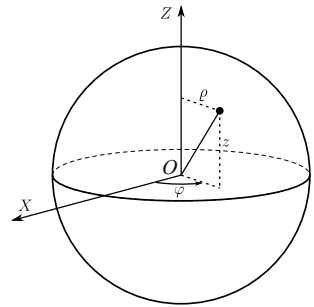


Рис. 1.39. Сферический маятник

это уравнение методом разделения переменных, получим, что изменение вертикальной координаты от значения z_0 до значения z требует времени

$$t = \int_{z_0}^z \frac{Rdz}{\pm \sqrt{(h - 2gz)(R^2 - z^2) - c^2}}.$$

Справа – эллиптический интеграл I рода, обращение таких интегралов (то есть вычисление функции $z = z(t)$) приводит к *эллиптическим функциям*.

Азимутальная координата определяется через соотношения

$$d\varphi = \frac{c}{\rho} dt = \frac{c}{R^2 - z^2} dt$$

и имеет вид

$$\varphi = \int_{z_0}^z \frac{Rcdz}{\pm(R^2 - z^2)\sqrt{(h - 2gz)(R^2 - z^2) - c^2}} + \varphi_0.$$

Подставив сюда $z = z(t)$, найдём закон изменения азимутальной координаты $\varphi = \varphi(t)$. Уравнение (1.9.4) позволит нам определить $\rho(t)$ и тем самым полностью определить закон движения точки.

1.9.6 Движение по шероховатой поверхности

До сих пор кривые и поверхности, по которым двигалась материальная точка, предполагались гладкими (трение отсутствовало). В заключение мы рассмотрим движение точки по шероховатой поверхности.

В общем случае движения точки по *движущейся* поверхности (реомная связь) уравнение связи имеет вид

$$G(x, y, z, t) = 0.$$

Пусть \vec{n} – орт нормали к поверхности, направленный в сторону возрастания функции функции G , тогда нормальная реакция $\vec{N} = N\vec{n}$, где N – алгебраическое значение нормальной реакции, равное проекции полной реакции \vec{F}' на орт \vec{n} . Силу динамического трения возьмём пропорциональной абсолютной величине нормальной составляющей, а направление её противоположно направлению \vec{v} скорости точки относительно поверхности, тогда полная реакция запишется в виде

$$\vec{F}' = N\vec{n} - b|N|\vec{v}.$$

а само уравнение движения

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + N\vec{n} - b|N|\vec{\tau}. \quad (1.9.7)$$

Чтобы избежать некоторых трудностей, связанных с влиянием движения поверхности на определение вектора $\vec{\tau}$, ограничимся рассмотрением неподвижной поверхности

$$G(x, y, z) = 0. \quad (1.9.8)$$

В этом случае

$$\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{v}, \quad \vec{n} = \frac{\text{grad } G}{|\text{grad } G|},$$

и уравнение движения (1.9.7) примет вид

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \text{grad } G - b|\lambda \text{grad } G| \frac{\dot{\vec{r}}}{v},$$

где

$$\lambda = N/|\text{grad } G|, \quad (1.9.9)$$

а $v = |\dot{\vec{r}}|$. В проекциях на оси координат имеем;

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda \frac{\partial G}{\partial x} - b|\lambda \text{grad } G| \frac{\dot{x}}{v}, \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} - b|\lambda \text{grad } G| \frac{\dot{y}}{v}, \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda \frac{\partial G}{\partial z} - b|\lambda \text{grad } G| \frac{\dot{z}}{v}. \end{aligned}$$

Три этих уравнения вместе с уравнением связи (1.9.8) обеспечивают определение четырёх неизвестных x, y, z и λ . Найдя λ , из уравнения (1.9.9) найдём и нормальную реакцию поверхности.

1.9.7 Упражнения

1. Материальная точка движется по гладкой неподвижной параболе $z = \sqrt{ax}$, $a = \sqrt{8}/3$ в однородном поле тяжести. Начальная скорость равна нулю, начальная высота $z_0 = 15/4$. Найти высоту, на которой точка оторвётся от параболы.
2. Материальная точка движется по цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$. Найти траекторию точки и реакцию поверхности, если $\vec{r}(0) = r_0\vec{e}_x$, $\vec{v}(0) = v_{0y}\vec{e}_y + v_{0z}\vec{e}_z$.
3. В однородном поле тяжести на поверхности гладкого конуса $z^2 = x^2 + y^2/4$ с вертикальной осью находится точка, отталкиваемая от вершины с силой, пропорциональной расстоянию до неё (коэффициент пропорционально-сти k). Найти положения равновесия.

1.10 Движение в неинерциальной системе отсчёта

1.10.1 Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта

Точно так же, как не существует абсолютного пространства, не существует и строго инерциальных систем (см. цитаты Пуанкаре в **1.1.5** и **1.2.1**). Земля вращается вокруг оси, разделяя наши сутки на дни и ночи, а её движение по околосолнечной орбите делит год на зиму, весну, лето и осень. Любая система координат, неподвижно связанная с Землёй, неинерциальна. Так же неинерциальны системы координат, связанные с Луной, Солнцем, другими планетами, звёздами и даже галактиками. Зачем же нужно нам представление об инерциальных системах, этих придуманных нами но несуществующих в природе объектов? Ситуацию поможет прояснить встречный вопрос: зачем нам нужны прямые и точки, на которых зиждется евклидова геометрия? Ведь таких объектов в природе нет! Ну, во-первых, один взгляд на ночное небо даёт нам образ множества светящихся точек, а падающие метеориты прочерчивают в ночной атмосфере отрезки прямых. Во-вторых, линия горизонта в открытом море представляется нам прямой, а уходящий за неё корабль превращается в точку. Главное же здесь, однако, в том, что на основе простейших этих элементов мы можем построить логически замкнутую теорию, которая позволит нам не только конструировать более естественные структуры, но и, разбирая наблюдаемые объекты на такие элементы, приблизиться к пониманию устройства мира.

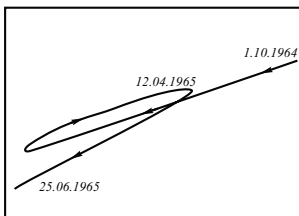


Рис. 1.40. Наблюдаемое с Земли движение Марса относительно удалённых звёзд

Такую же роль играют материальная точка, инерциальная система отсчёта и другие идеализированные, абстрактные элементы механики. На их основе строится теория, результаты которой распространяются и на реальные объекты и процессы. Превосходной иллюстрацией этого служит история птолемеевой модели Солнечной системы. Древние астрономы уже умели исключать эффект вращения Земли, привязываясь к положениям далёких звёзд. На фоне постоянства их взаимного расположения, создававшего впечатление их прикреплённости к вращающейся

твёрдой («хрустальной») небесной сфере, ясно выделялось прихотливое порой движение более ярких немерцающих объектов – планет (рис. 1.40).

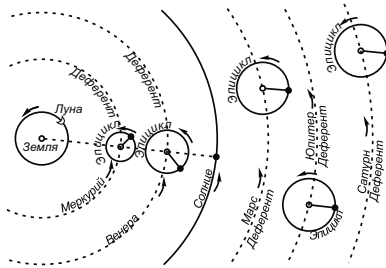


Рис. 1.41. Птолемея система эпициклов

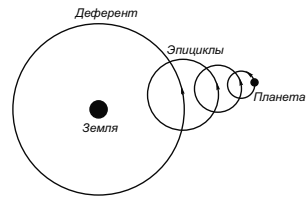


Рис. 1.42. Дополнительные эпициклы

Чтобы объяснить зигзаги и петли, выделяемые планетами, древнегреческий мыслитель Клавдий Птолемей разработал, как бы сейчас сказали, «мнемонические правила», основанные на главенстве окружности как идеальной траектории, из комбинаций которых состоят реальные траектории планет. Каждой планете соответствует своя окружность с центром на Земле (*деферент*), но планета движется не по ней, а по другой окружности (*эпициклу*), центр которой, в свою очередь, движется по деференту (рис. 1.41). Радиусы окружностей и скорости движений по ним определялись по результатам наблюдений, при повышении точности которых возникала необходимость введения дополнительных эпициклов (рис. 1.42). Система, сама по себе несложная, не давала, однако, ответа на вопрос о том, что же является причиной такого движения. Никто не знал ответа, за исключением церкви (рис. 1.43), но спорить с нею в те времена было опасно, и птолемея система мира продержалась почти *пятнадцать веков!*²¹.



Рис. 1.43. Из книги XVI века

Но не может же человечество жить всё время по одной древней книге. И вот Николай Коперник (в книге 1543 года) установил, что все эти петли и зигзаги исчезают, если смотреть на движение планет в системе координат, связанной с Солнцем в системе, хоть и не являющейся строго инерциальной, но всё-таки довольно близкой к таковой. В «правильной» гелиоцентрической системе этих зигзагов просто не существует и ни-

²¹Это к вопросу о роли Церкви в развитии наук. Вспомните Джордано Бруно.



какие демоны больше не нужны. Обработав многочисленные наблюдения датского астронома Тихо Браге (посвятившего этому делу всю свою жизнь на острове Вен), Иоганн Кеплер обнаружил, что в этой системе траектории планет являются почти эллиптическими (рис. 1.44), а Исаак Ньютон нашёл, что сила, заставляющая планеты двигаться подобным образом, направлена к Солнцу и обратно пропорциональна квадрату расстояния от него. Теперь можно было вычислить движение любого тела в Солнечной системе, будь оно кометой или астероидом, вычислить в инерциальной системе, а при необходимости потом перейти в неинерциальную систему Земли или движущегося навстречу астероиду космического корабля. Заметим, что необходимость в подобных переходах возникает не только в астрономии, космонавтике, астрофизике и геофизике, но и в гироскопии, в конструировании механизмов и машин, в других разделах техники, где проявляются центробежные силы в результате вращения с высокими скоростями.

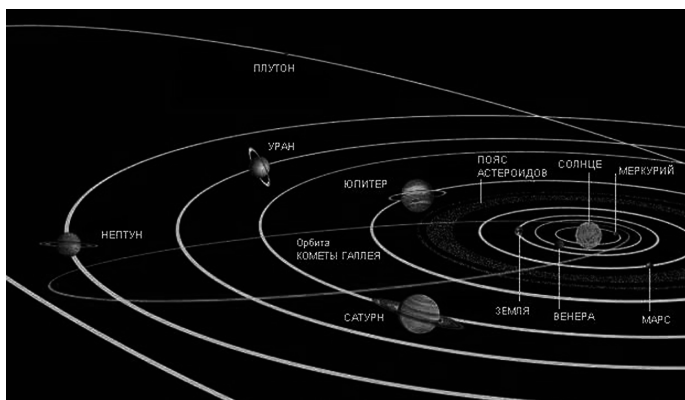


Рис. 1.44. Современное представление о Солнечной системе

Ниже мы рассмотрим правила преобразования динамических переменных, необходимые для осуществления переходов из одной системы в другую.

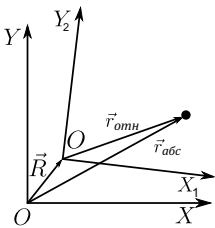
Король Фридрих II в 1575-м году предоставил в распоряжение астронома остров Вен в Зундском проливе, где Браге построил обсерваторию Ураниборг, оснащенную самыми точными на тот период времени приборами. Точность определения положения светил на небе Браге увеличил до $1'$, что значительно выше точности любых наблюдений, производившихся в то время и до этого.

Более 20-ти лет в Ураниборге Браге наблюдал кометы, планеты и звезды. Открыл неравномерности в движении Луны, доказал, что кометы находятся от Земли

дальше, чем Луна, составил таблицы зависимости преломления света в атмосфере Земли от высоты над горизонтом, оставил точные координаты 778 звезд. Провел довольно точное измерение смещения земной оси за год. Системы Коперника не признавал, был сторонником геоцентрической модели мира. Считал, что Солнце движется вокруг Земли, а планеты – вокруг Солнца. После смерти Фридриха II был вынужден покинуть Данию, работал придворным астрономом в Праге, где его помощником стал И. Кеплер, к которому после смерти Браге попал весь архив наблюдений астронома. Основываясь на них, Кеплер совершил свои знаменитые открытия.

1.10.2 Абсолютная и относительная скорости

Рассмотрим две произвольно расположенные друг относительно друга системы координат: *неподвижную* (скажем, относительно лабораторного стола или стен лаборатории) (НСК) с координатами x , y , z и осями \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z и *подвижную* (ПСК) с координатами x_1 , x_2 , x_3 и осями \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 . Радиус-вектор материальной точки в НСК будем называть *абсолютным* и обозначать \vec{r} , а в ПСК – *относительным* и обозначать \vec{x} . Введя соответствующие обозначения для ортов и проекций, представим абсолютный и относительный радиус-векторы в виде



$$\vec{r}_{\text{абс}} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (1.10.1)$$

и

$$\vec{r}_{\text{отн}} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3. \quad (1.10.2)$$

Наблюдатель в НСК может измерить скорости и ускорения координат движущейся точки и представить векторы абсолютной скорости и

Рис. 1.45. К формулам (1.10.1) и (1.10.2)



Тихо Браге (1546-1601) – датский астроном, астролог и алхимик эпохи Возрождения. Первым в Европе начал проводить систематические и высокоточные астрономические наблюдения, на основании которых Кеплер вывел законы движения планет.

абсолютного ускорения в виде:

$$\vec{v}_{abc} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z, \quad \vec{a}_{abc} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Наблюдатель в подвижной системе определит характеристики движения точки относительно своей системы аналогичным образом:

$$\vec{v}_{отн} = \dot{x}_1\vec{e}_1 + \dot{x}_2\vec{e}_2 + \dot{x}_3\vec{e}_3, \quad \vec{a}_{отн} = \ddot{x}_1\vec{e}_1 + \ddot{x}_2\vec{e}_2 + \ddot{x}_3\vec{e}_3$$

Установим связь между этими характеристиками в двух разных ПСК.

Пусть \vec{R} – радиус-вектор ПСК относительно НСК,

$$\vec{r}_{abc} = \vec{R} + \vec{r}_{отн}.$$

Продифференцируем это равенство по времени:

$$\dot{\vec{r}}_{abc} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{x}} = \vec{V} + \dot{\vec{r}}_{отн}$$

и подставим сюда (1.10.1) и (1.10.2). В левой части получим:

$$\dot{\vec{r}}_{abc} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = \vec{v}_{abc}$$

(поскольку орты \vec{e}_i в НСК постоянны). В правой же части наряду с \vec{R} дифференцируется относительный радиус-вектор точки:

$$\dot{\vec{r}}_{отн} = \frac{d}{dt} \sum x_i \vec{e}_i = \sum \dot{x}_i \vec{e}_i + \sum x_i \dot{\vec{e}}_i = \vec{v}_{отн} + \sum x_i \dot{\vec{e}}_i.$$

Вектор \vec{e}_i в процессе движения относительно неподвижной системы координат не изменяет своей величины. Это означает, что он может только вращаться. Пусть он вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ вокруг оси, проходящей через начало координат в направлении \vec{e}_Ω . Линейная скорость конца вектора \vec{e}_i по абсолютной величине равна $1 \cdot \Omega \sin \Theta$ и направлена перпендикулярно векторам $\vec{\Omega}$ и \vec{e}_i , составляя с ними правую тройку. В соответствии с этим можно записать

$$\dot{\vec{e}}_i = [\vec{\Omega}, \vec{e}_i]$$

и далее:

$$\sum x_i \dot{\vec{e}}_i = \sum x_i [\vec{\Omega}, \vec{e}_i] = [\vec{\Omega}, \sum x_i \vec{e}_i] = [\vec{\Omega}, \vec{r}_{отн}],$$

$$\dot{\vec{r}}_{отн} = [\vec{\Omega}, \vec{r}_{отн}] + \vec{v}_{отн},$$

$$\vec{v}_{abc} = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}_{отн}] + \vec{v}_{отн}.$$

Полагая $\vec{v}_{отн} = 0$, получаем скорость $\vec{v}_{пер} = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}_{отн}]$ геометрической точки \vec{x} подвижной системы относительно неподвижной системы, называемую *переносной скоростью*.

1.10.3 Абсолютное и относительное ускорения

Аналогичным образом устанавливается и связь между ускорениями

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\text{абс}} &= \dot{v}_x \vec{e}_x + \dot{v}_y \vec{e}_y + \dot{v}_z \vec{e}_z = \frac{d\vec{v}_{\text{абс}}}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt}(\vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{отн}}] + \vec{v}_{\text{отн}}) = \vec{A} + [\dot{\vec{\Omega}}, \vec{r}_{\text{отн}}] + [\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}_{\text{отн}}] + \dot{\vec{v}}_{\text{отн}}, \end{aligned} \quad (1.10.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{v}}_{\text{отн}} &= \frac{d}{dt} \sum_i v_{i\text{отн}} \vec{e}_i = \sum_i \dot{v}_{i\text{отн}} \vec{e}_i + \sum_i v_{i\text{отн}} \dot{\vec{e}}_i = \\ &= \vec{a}_{\text{отн}} + \sum_i v_{i\text{отн}} [\vec{\Omega}, \vec{e}_i] = \vec{a}_{\text{отн}} + [\vec{\Omega}, \vec{v}_{\text{отн}}]. \end{aligned} \quad (1.10.4)$$

Подставив (1.10.4) в (1.10.3), находим:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{Кор}} + \vec{a}_{\text{отн}}, \quad (1.10.5)$$

где $\vec{a}_{\text{пер}} = \vec{A} + [\dot{\vec{\Omega}}, \vec{r}_{\text{отн}}] + [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{отн}}]]$ – *переносное ускорение* (ускорение той геометрической точки подвижной системы, в которой находится в данный момент материальная точка),

$$\vec{a}_{\text{Кор}} = 2[\vec{\Omega}, \vec{v}_{\text{отн}}]$$

– *кориолисово ускорение*,

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \sum_i \dot{v}_{i\text{отн}} \vec{e}_i$$

– *относительное ускорение*. Последнее слагаемое переносного ускорения – *центростремительное ускорение* – может быть представлено в виде

$$\vec{a}_{\text{цс}} = [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{отн}}]] = \Omega^2 [\vec{e}_\Omega, [\vec{e}_\Omega, \vec{r}_{\text{отн}}]] = \Omega^2 \vec{e}_\Omega (\vec{e}_\Omega, \vec{r}_{\text{отн}}) - \Omega^2 \vec{r}_{\text{отн}} = -\Omega^2 \vec{\varrho},$$

где $\vec{\varrho}$ – перпендикулярный к оси вращения вектор, проведённый от неё к рассматриваемой точке (так что само ускорение направлено к оси вращения, отсюда и название).

Если в качестве НСК взять инерциальную систему, то утверждение (1.10.5) можно сформулировать в виде *теоремы Кориолиса*: **ускорение материальной точки относительно ИСО равно векторной сумме трёх слагаемых: переносного, кориолисова и относительного ускорений.**

1.10.4 Силы инерции

В НСО законы сохранения импульса (свободной частицы), момента импульса, энергии не выполняются. В ИСО уравнение движения имеет вид $m\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{F}$. Чтобы найти закон, который видит наблюдатель в НСО, выразим абсолютное ускорение через относительное

$$m\vec{a}_{\text{отн}} + m\vec{a}_{\text{пер}} + m\vec{a}_{\text{Кор}} = \vec{F},$$

и перенесём все члены, кроме $m\vec{a}_{\text{отн}}$, направо. Получим:

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F} - m\vec{a}_{\text{пер}} - m\vec{a}_{\text{Кор}}.$$

Определяя силу, как произведение массы на наблюдаемое (в данном случае, относительное) ускорение, этот наблюдатель увидит, что она равна сумме

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{пер}} + \vec{F}_{\text{Кор}},$$

где

$$\vec{F}_{\text{пер}} = -m\vec{a}_{\text{пер}}, \quad \vec{F}_{\text{Кор}} = -m\vec{a}_{\text{Кор}} = 2m[\vec{v}_{\text{отн}}, \vec{\Omega}]$$

переносная сила и *кориолисова силы* соответственно. Переносная сила дается суммой

$$\vec{F}_{\text{пер}} = -m\vec{A} - m[\dot{\vec{\Omega}}, \vec{r}_{\text{отн}}] + \vec{F}_{\text{цб}},$$

где

$$\vec{F}_{\text{цб}} = -m[\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{отн}}]] = m\Omega^2 \vec{\rho}$$

– *центробежная сила*, равная по величине центростремительной, но направленная в противоположную сторону. В отличие от первого слагаемого \vec{F} , остальные силы не связаны с действием других тел или полей на данное тело. Такие силы называют *силами инерции*. Обозначим их суммой через $\vec{F}_{\text{ин}}$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{ин}} &= -m\vec{A} - m[\dot{\vec{\Omega}}, \vec{r}_{\text{отн}}] + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{Кор}} = \\ &= -m\vec{A} - m[\dot{\vec{\Omega}}, \vec{r}_{\text{отн}}] - m[\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{отн}}]] + 2m[\vec{v}_{\text{отн}}, \vec{\Omega}]. \end{aligned}$$

Обсудим влияние неинерциальности НСО, каким оно представляется наблюдателю, связанному с НСО и поэтому считающему эту систему неподвижной. Помимо силы \vec{F} , описывающей влияние на точку других тел или полей, наблюдатель установит следующее.

а) В начале координат на точку действует сила $-m\vec{A}$ независимо от её скорости.

б) На покоящуюся в точке $\vec{r}_{\text{отн}} \neq 0$ ПСК частицу действует центробежная сила $-m[\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{отн}}]]$.

в) На движущуюся частицу в этой точке действует дополнительная сила – сила Кориолиса $2m[\vec{v}_{\text{отн}}, \vec{\Omega}]$. Заметим, что эта сила работы не совершает:

$$\vec{F}_{\text{Кор}} \vec{v}_{\text{отн}} = 2m[\vec{v}_{\text{отн}}, \vec{\Omega}] \vec{v}_{\text{отн}} = 0.$$

Такие силы называются *гироскопическими*.

Отметим некоторые частные случаи.

1) Если $\vec{A} = 0$ и $\vec{\Omega} = 0$, движение подвижной системы никак не сказывается на уравнении движения: такая система тоже инерциальна.

2) Если $\vec{\Omega} = 0$, а $\vec{A} \neq 0$, в НСО возникает однородное (не зависящее от координат) силовое поле $-m\vec{A}$.

3) Если $\vec{A} = 0$, а $\vec{\Omega} \neq 0$, в НСО наблюдаются центробежная и кориолисова силы.

1.10.5 Примеры движения точки в НСО

Пример 1. Тело в падающем лифте. Лифт движется вниз с ускорением свободного падения \vec{g} . Найти закон движения находящегося в нём тела массой m , на которое действует сила тяжести $\vec{F}_T = m\vec{g}$.

В системе, связанной с лифтом (индексы опустим),

$$m\vec{\ddot{r}} = \vec{F}_T + \vec{F}_{\text{ин}} = m\vec{g} - m\vec{g} = 0,$$

так что тело движется как совершенно свободное – равномерно и прямолинейно:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t.$$

Вес этого тела (сила, с которой оно действует, например, на пол лифта) равен нулю, в связи с чем такое состояние называется *невесомостью*.

Если же, находясь в том же самом лифте, мы наблюдаем падение отпущенного тела с постоянным ускорением a , то это может означать, что 1) наш лифт движется вверх с постоянным ускорением a , поле гравитации отсутствует, а тело падает под действием силы инерции, или что 2) лифт находится в покое, но существует однородное поле гравитации, под действием которого и падает тело. Можно ли, не покидая лифта и не получая информации извне, установить, какая из двух указанных ситуаций имеет место в действительности? С точки зрения чистой механики ответ очевиден: нет, все механические явления в обоих случаях будут происходить одинаково. Эйнштейн обобщил это положение на *все физические* явления и возвёл эту механическую эквивалентность в общий закон природы – принцип эквивалентности сил гравитации и инерции, использованный им в качестве отправной точки создания общей теории относительности.

Пример 2. Движение по вращающейся горизонтальной плоскости.

Материальная точка может свободно перемещаться по гладкой горизонтальной плоскости, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью. Найти движение точки относительно плоскости.

Выбрав начало координат в точке пересечения оси вращения с плоскостью, запишем уравнение движения

$$\ddot{\vec{r}} = -[\vec{\Omega}[\vec{\Omega}, \vec{r}]] + 2[\vec{v}, \vec{\Omega}]$$

в координатах вращающейся системы:

$$\ddot{x}_1 = \Omega^2 x_1 + 2\Omega \dot{x}_2, \quad \ddot{x}_2 = \Omega^2 x_2 - 2\Omega \dot{x}_1.$$

Введя комплексную переменную $u = x_1 + ix_2$, объединим эти уравнения в одно:

$$\ddot{u} + 2i\Omega \dot{u} - \Omega^2 u = 0.$$

Его решение имеет вид:

$$u = (A + Bt)e^{-i\Omega t},$$

где A и B – комплексные постоянные. Представив их в виде $A = ae^{i\alpha}$ и $B = be^{i\beta}$, окончательно получим:

$$x_1 = a \cos(\Omega t - \alpha) + bt \cos(\Omega t - \beta), \quad x_2 = -a \sin(\Omega t - \alpha) - bt \sin(\Omega t - \beta).$$

Постоянные a, b, α и β определяются начальными условиями.

Пример 3. Движение по вращающейся вертикальной плоскости. Тяжелая материальная точка может свободно перемещаться по гладкой вертикальной плоскости, вращающейся вокруг лежащей в ней вертикальной оси с постоянной угловой скоростью. Найти её движение относительно данной плоскости при $v_0 = 0$ и реакцию плоскости.

Направив по оси вращения координатную ось Oz , запишем уравнения движения

$$\ddot{x}_1 = \Omega^2 x_1, \quad \ddot{x}_3 = -g.$$

Из них следует:

$$x_1 = x_{10} \operatorname{ch}(\Omega t), \quad x_3 = x_{30} - \frac{gt^2}{2}.$$

Сила реакции компенсирует кориолисову силу, направленную перпендикулярно вращающейся плоскости:

$$F_2' = 2m\Omega^2 x_{10} \operatorname{sh}(\Omega t).$$

1.10.6 Движение вблизи поверхности Земли

Все динамические опыты, проводимые в лабораторных условиях на поверхности или вблизи поверхности Земли, проводятся в неинерциальных системах отсчёта: Солнечная система вращается вместе с Галактикой вокруг центра последней, Земля движется по близкой к круговой траектории вокруг Солнца, вместе с Луной она вращается вокруг их общего центра масс, вращается вокруг собственной оси. В

целом, однако, все эти процессы дают небольшой вклад в неинерциальность системы, связанной с Землёй. Самой заметной составляющей является неинерциальность, связанная с вращением Земли вокруг собственной оси.

Будем считать центр масс Земли неподвижным относительно некоторой ИСО, саму Землю – правильным шаром со сферически симметричным распределением массы в нём, вращающимся с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Рассмотрим движение материальной точки в связанной с Землёй системе координат, начало которой выбрано в точке \vec{R} с географической широтой α на поверхности Земли, ось $O3$ направлена вдоль радиуса Земли, ось $O1$ направлена на юг, а ось $O2$ – на восток (рис. 1.46). Сила инерции

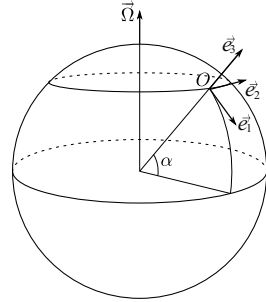


Рис. 1.46. Система координат с началом в точке O на поверхности Земли

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{A} - m[\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{отн}}] - m[\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{отн}}]] + 2m[\vec{v}_{\text{отн}}, \vec{\Omega}].$$

Здесь первый член справа тоже имеет центробежную природу,

$$-m\vec{A} = -m[\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{R}]],$$

второй равен нулю из-за постоянства угловой скорости. Полагая в рассматриваемой (малой) области гравитационное поле однородным, $\vec{F}_T(\vec{r}) = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$, для суммарной силы получим

$$\vec{F} = m\{\vec{g}' - [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{отн}}]] + 2[\vec{v}_{\text{отн}}, \vec{\Omega}]\}, \quad (1.10.6)$$

где

$$\vec{g}' = \vec{g} - [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{R}]] \quad (1.10.7)$$

– ускорение свободного падения с учётом центробежной силы. Если движение тела ограничено связью, в правую часть (1.10.6) следует добавить силу реакции \vec{F}' . В результате уравнение движения тела вблизи поверхности Земли запишется в виде:

$$m\vec{r}_{\text{отн}}'' = m\{\vec{g}' - [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{отн}}]] + 2[\vec{v}_{\text{отн}}, \vec{\Omega}]\} + \vec{F}'.$$

Вторым членом справа в приближённых расчетах обычно пренебрегают и используют уравнение

$$m\vec{r}_{\text{отн}}'' = m\{\vec{g}' + 2[\vec{v}_{\text{отн}}, \vec{\Omega}]\} + \vec{F}'. \quad (1.10.8)$$

Первый член справа в этом уравнении представляет собой *вес тела*: как видно из (1.10.7), вследствие вращения Земли он зависит от географической широты α и направление его (направление *отвеса*) слегка отклоняется от направления на центр Земли. Второй член – сила Кориолиса. Если тело в северном полушарии движется в северном направлении, то действующая на него сила Кориолиса направлена на восток. Учёт этой силы объясняет, почему большие реки Северного полушария (например, Волга в её среднем течении) подмывают, в основном, правый берег. Она имеет важное значение для законов образования и перемещения циклонов и других атмосферных явлений.

Рассмотрим три простых задачи, демонстрирующих влияние вращения Земли на движение тел вблизи её поверхности.

Пример 1. Зависимость веса тела от географической широты.

Положим тело массой m на поверхность Земли. Тело неподвижно, сила реакции \vec{F}' уравнивает действующие на тело силы тяжести и инерции:

$$m\vec{g}' + \vec{F}' = 0.$$

По определению, $\vec{W} = -\vec{F}'$ – вес тела, так что

$$\vec{P} = m\vec{g}' = m\{\vec{g} - [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{R}]]\}.$$

Учитывая, что $\Omega_1 = -\Omega \cos \alpha$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = \Omega \sin \alpha$,

$$[\vec{\Omega}, \vec{R}] = \Omega R \cos \alpha \vec{e}_2, \quad [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{R}]] = -\Omega^2 R \cos \alpha \vec{e}_2,$$

получим

$$\vec{W} = mg\{2\varepsilon \cos \alpha \vec{e}_2 - \vec{e}_3\} = mg\{\varepsilon \sin(2\alpha) \vec{e}_1 - [1 - 2\varepsilon \cos^2 \alpha] \vec{e}_3\},$$

где $\varepsilon = \Omega^2 R / (2g)$.

Видно, что линия отвеса, задаваемая вектором \vec{g}' , не совпадает с осью Ox_3 из-за влияния центробежной силы, отклоняющей отвес на некоторый угол

$$\beta \approx \varepsilon \sin(2\alpha)$$

от истинной вертикали. Наибольшее отклонение (около $10'$) достигается на широте $\alpha = \pi/4$.

Абсолютная величина веса

$$W = mg \sqrt{\varepsilon^2 \sin^2(2\alpha) + [1 - 2\varepsilon \cos^2 \alpha]^2}$$

принимает наибольшее значение на полюсе ($\alpha = \pi/2$),

$$W_{\text{пол}} = mg,$$

наименьшее – на экваторе ($\alpha = 0$):

$$W_{\text{экв}} = mg[1 - 2\varepsilon].$$

Взяв численные значения $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$, $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$ и $g = 9,8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$, оценим относительную разность между этими значениями

$$\frac{W_{\text{пол}} - W_{\text{экв}}}{W_{\text{пол}}} = 2\varepsilon \approx 0,003.$$

Пример 2. Падение тела на поверхность Земли. Тело начинает падение с нулевой начальной скоростью из точки с северной широтой α и координатами $x_{10} = 0$, $x_{20} = 0$, $x_{30} = h = 100$ м над поверхностью Земли. В первом приближении по Ω найти координаты точки падения, пренебрегая сопротивлением воздуха.

Уравнения движения (1.10.8) в указанном приближении имеют вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= 2(\dot{x}_2\Omega_3 - \dot{x}_3\Omega_2) + g'_1 = 2\Omega \sin \alpha \dot{x}_2, \\ \ddot{x}_2 &= 2(\dot{x}_3\Omega_1 - \dot{x}_1\Omega_3) + g'_2 = -2\Omega(\cos \alpha \dot{x}_3 + \sin \alpha \dot{x}_1), \\ \ddot{x}_3 &= 2(\dot{x}_1\Omega_2 - \dot{x}_2\Omega_1) + g'_3 = 2\Omega \cos \alpha \dot{x}_2 - g.\end{aligned}$$

Проинтегрируем первое и третье уравнения,

$$\dot{x}_1 = 2\Omega \sin \alpha x_2, \quad \dot{x}_3 = 2\Omega \cos \alpha x_2 - gt$$

и подставим результаты во второе:

$$\ddot{x}_2 = -(2\Omega)^2 x_2 + (2\Omega \cos \alpha)gt \approx (2\Omega \cos \alpha)gt.$$

Учитывая, что время падения

$$\tau \approx \sqrt{2h/g},$$

получаем, что в процессе падения с высоты 100 м тело сместится к востоку на

$$x_2(\tau) = \frac{2\Omega \cos \alpha}{3} \sqrt{\frac{2h^3}{g}} \approx 0,02 \text{ м}$$

(смещение в меридиональном направлении пропорционально квадрату угловой скорости, которым мы пренебрегаем). Физическая причина такого отклонения проста: тело падает из точки, восточная составляющая скорости которой больше, чем на поверхности Земли.

Пример 3. Маятник Фуко. Найти малые колебания сферического маятника длиной l в пункте с северной широтой α .

Учитывая, что $F'_1 = -mgx_1/l$, $F'_2 = -mgx_2/l$ и $x_3 \approx 0$, получим уравнения движения в виде

$$\ddot{x}_1 = 2\Omega \sin \alpha \dot{x}_2 - gx_1/l, \quad \ddot{x}_2 = -2\Omega \sin \alpha \dot{x}_1 - gx_2/l.$$

Введя комплексную переменную $u = x_1 + ix_2$, запишем для нее дифференциальное уравнение

$$\ddot{u} + 2i\Omega \sin \alpha \dot{u} + gu/l = 0.$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2i\Omega \sin \alpha \lambda + g/l = 0$$

имеет решение

$$\lambda = -i\Omega \sin \alpha \pm \sqrt{-\Omega^2 \sin^2 \alpha - g/l}.$$

Пренебрегая квадратичным по Ω членом,

$$\lambda \approx -i\Omega \sin \alpha \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{g/l},$$

получим решение дифференциального уравнения в виде

$$u = e^{-i(\Omega \sin \alpha)t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}), \quad \omega = \sqrt{g/l}.$$

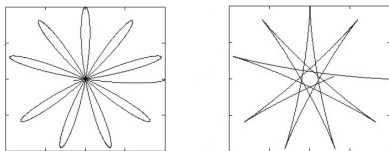


Рис. 1.47. Траектории маятника Фуко на вращающейся плоскости: «ромашка» (начальное отклонение неподвижно относительно ИСО) и «звёздочка» (начальное отклонение неподвижно относительно поверхности Земли)

скоростью $12,5^\circ$ в час. На экваторе плоскость качаний не вращается. В других местах вращение плоскости качания относительно поверхности вместе с гармоническим колебанием в этой плоскости порождает в плоскости X_1OX_2 фигуры типа показанных на рис. 1.47.

Экспериментально вращение плоскости колебаний маятника было продемонстрировано французским учёным Фуко в 1851 г. в парижском Пантеоне.

1.10.7 Упражнения

1. Найти относительное движение материальной точки в горизонтальной плоскости $1O2$, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$.
2. Найти относительное движение материальной точки в вертикальной плоскости $1O3$, вращающейся вокруг оси $O3$ с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Сила тяжести $\vec{F}_T = -mg\vec{e}_3$, начальная скорость точки (относительно вращающейся плоскости) равна нулю. Найти реакцию плоскости.
3. Вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью Ω вращается перпендикулярно к нему одним концом стержень длиной l , по которому без трения скользит бусинка массой m . Находящаяся в начальный момент времени на расстоянии ϱ от оси, она начинает скользить по стержню и в момент времени t_l соскакивает с него. Найти t_l .



Дополним эту систему $(N+1)$ -м *тяжёлым* телом с массой $m_{N+1} \gg \sum_{j=1}^N m_j$ (например, $1, \dots, N$ – планеты, а $(N+1)$ -е тело – Солнце). По третьему закону Ньютона $a_{N+1}/a_j = m_j/m_{N+1} \approx 0$ и $\sum_j \vec{F}_{N+1,j} \approx 0$. В этом случае можно выбрать ИСО неподвижной относительно Солнца, взяв Солнце в качестве начала координат этой системы. Получим систему тел *во внешнем поле*, которое действует на каждое из тел независимо от других. Отмечая внешнюю силу звёздочкой, запишем новую систему уравнений

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \sum_{j=2}^N \vec{F}_{1j} + \vec{F}_1^* \\ \dots \\ m_N \ddot{\vec{r}}_N = \sum_{j=1}^{N-1} \vec{F}_{Nj} + \vec{F}_N^* \end{cases}$$

Простейший случай – одна точка во внешнем поле:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad \vec{r}_0(0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0.$$

2.1.2 Импульс системы

Сложим уравнения движения взаимодействующих между собой и с внешним полем частиц:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{F}_i^*.$$

Для краткости двойную сумму по несовпадающим парам индексов в дальнейшем будем обозначать одним символом:

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \dots \equiv \sum_{i \neq j} \dots$$

По третьему закону Ньютона сумма внутренних сил равна нулю

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \dots = 0.$$

Вводя *импульс системы* $\vec{P} \equiv \sum_i m_i \vec{v}_i$ и *главный вектор внешних сил*

$\vec{F}^* = \sum_i \vec{F}_i^*$, мы приходим к уравнению

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^*,$$

согласно которому *скорость изменения импульса системы равна главному вектору внешних сил*.

Импульс системы складывается из импульсов отдельных частиц $m_i \vec{v}_i$, такие величины называют *аддитивными*. Если главный вектор внешних сил равен нулю (в частности, если система замкнута), то

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

Это – *закон сохранения импульса системы*. Если какая-либо проекция главного вектора внешних сил равна нулю, то сохраняется соответствующая проекция импульса (другие проекции импульса могут меняться).

2.1.3 Момент импульса

Теперь умножим векторно каждое уравнение на свой радиус-вектор и снова сложим:

$$\sum_i [\vec{r}_i, m_i \dot{\vec{v}}_i] = \sum_{i \neq j} [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] + \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i^*].$$

Объединяя слагаемые двойной суммы попарно, пользуясь третьим законом Ньютона, предполагая центральный характер внутренних сил

$$[\vec{r}_1, \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2, \vec{F}_{21}] = [\vec{r}_1, \vec{F}_{12}] - [\vec{r}_2, \vec{F}_{12}] = [\vec{r}_{12}, \vec{F}_{12}] = 0$$

и учитывая, что

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = [\dot{\vec{r}}_i, m_i \vec{v}_i] + [\vec{r}_i, m_i \dot{\vec{v}}_i] = [\vec{r}_i, m_i \dot{\vec{v}}_i],$$

получим

$$\frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i^*],$$

или

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^*,$$

где $\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$ – *момент импульса системы*, $\vec{M}^* = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i^*]$ – *главный момент внешних сил*.

Таким образом, *скорость изменения момента импульса системы равна главному моменту внешних сил*. Если главный момент внешних сил (или какая-нибудь из его проекций) равен (равна) нулю, то момент импульса системы центрально взаимодействующих частиц (или соответствующая его проекция) сохраняется. В этом

заключается закон сохранения момента импульса системы. Как и импульс, момент импульса является аддитивной характеристикой системы.

Мы ввели момент импульса относительно начала системы координат. Это можно сделать относительно любой точки этой системы. При этом имеет место следующая

Теорема. *Главный момент сил, приложенных к системе, не зависит от выбора точки, относительно которой он определяется, если главный вектор внешних сил равен нулю.*

Действительно, пусть $\vec{M} = \sum [\vec{r}_i, \vec{F}_i^*]$ – главный момент сил относительно начала координат, а

$$\vec{M}_A = \sum [\vec{r}_i - \vec{r}_A, \vec{F}_i^*]$$

– аналогичный момент относительно точки A . Очевидно

$$\vec{M}_A = \sum [\vec{r}_i, \vec{F}_i^*] - [\vec{r}_A, \sum \vec{F}_i^*] = \sum [\vec{r}_i, \vec{F}_i^*] = \vec{M},$$

если $\sum \vec{F}_i^* = 0$.

2.1.4 Энергия

Умножим теперь скалярно левую часть каждого уравнения

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^*$$

на вектор $\vec{v}_i dt$, а правую – на равный ему вектор $d\vec{r}_i$, и сложим. Учитывая, что $\vec{v}_i dt = d\vec{v}_i$, получим

$$\sum_i m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} d\vec{r}_i + \sum_i \vec{F}_i^* d\vec{r}_i$$

или

$$dT = \delta A + \delta A^*$$

Формула эта означает: **изменение кинетической энергии системы**

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$$

равно сумме работ, произведённых внутренними

$$\delta A = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} d\vec{r}_i \quad (2.1.1)$$

и внешними

$$\delta A^* = \sum_i \vec{F}_i^* d\vec{r}_i$$

силами.

Если внутренние силы в системе потенциальны и $U = U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ – их потенциальная энергия, то

$$\delta A = -dU, \quad (2.1.2)$$

и мы приходим к закону изменения энергии системы $E \equiv T + U$:

$$dE = d(T + U) = \delta A^*.$$

Если и внешние силы потенциальны ($\delta A^* = -\delta U^*$), то выполняется закон сохранения полной энергии:

$$E = T + U + U^* = \text{const.}$$

Остановимся на структуре потенциальной энергии внутренних сил. Если частиц две,

$$U = U(\vec{r}_{12}) \equiv U_{12},$$

если три,

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{1}{2}(U_{12} + U_{21} + U_{13} + U_{31} + U_{23} + U_{32}).$$

В случае произвольного числа N частиц

$$U = U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}(\vec{r}_{ij}). \quad (2.1.3)$$

Нетрудно проверить, что (2.1.3) согласуется с (2.1.1), (2.1.2):

$$\begin{aligned} dU &= d \left(\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}(\vec{r}_{ij}) \right) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} dU_{ij}(\vec{r}_{ij}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (-\vec{F}_{ij} d\vec{r}_i - \vec{F}_{ji} d\vec{r}_j) = - \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} d\vec{r}_i. \end{aligned}$$

Отметим, что

$$U^* \equiv U^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N U_i^*(\vec{r}_i)$$

– потенциальная энергия внешних сил аддитивна, но потенциальная энергия внутренних сил, а стало быть, и полная энергия системы взаимодействующих между собой частиц неаддитивна.

2.1.5 Теорема о вириале сил

Понятие *вириала сил* $W = -(1/2) \sum \vec{F}_i \vec{r}_i$ было введено Клаузиусом в 1870 году («вириал» происходит от латинских слов «vis», «viris» – «сила» или «энергия»). Тогда же им была доказана следующая теорема.

Теорема: *Если движение замкнутой системы происходит в ограниченной области пространства и с ограниченными по модулю скоростями, то усреднённая по бесконечному интервалу времени кинетическая энергия равна среднему вириалу сил:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{T}_{(0,t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{W}_{(0,t)}.$$

Под усреднённым по интервалу времени $(0, t)$ значением функции $f(t)$ понимается

$$\bar{f}_{(0,t)} \equiv \frac{1}{t} \int_0^t f(t') dt',$$

а доказательство опирается на следующие выкладки:

$$\begin{aligned} \sum \vec{r}_i \frac{dm_i \vec{v}_i}{dt} &= \sum \vec{F}_i \vec{r}_i, \\ \frac{d}{dt} \sum \vec{r}_i m_i \vec{v}_i - \sum m_i v_i^2 &= \sum \vec{F}_i \vec{r}_i, \\ \frac{1}{t} \int_0^t \frac{d}{dt'} \left[\sum m_i \vec{r}_i(t') \vec{v}_i(t') \right] dt' - 2\bar{T}_{(0,t)} &= \\ \frac{1}{t} \left[\sum m_i \vec{r}_i \vec{v}_i \right]_0^t - 2\bar{T}_{(0,t)} &= -2\bar{W}_{(0,t)}. \end{aligned}$$

Устремляя теперь t к бесконечности с учётом сформулированных в теореме условий, убеждаемся в её справедливости.

В случае потенциальных сил, действующих в системе,

$$\sum \vec{F}_i \vec{r}_i = - \sum \vec{r}_i \nabla_i U,$$

где

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} U_{ij}(\vec{r}_{ij}).$$

Нетрудно показать, что если парные взаимодействия зависят только от расстояний между частицами и эта зависимость имеет степенной характер с одинаковым показателем степени, $U_{ij} \vec{r}_{ij} = A_{ij} r_{ij}^n$, то теорема вириала принимает вид

$$\bar{T}_{(0,\infty)} = \frac{n}{2} \bar{U}_{(0,\infty)}.$$

Для гравитационных и электростатических систем $n = -1$, и вириальная теорема сводится к утверждению, что средняя кинетическая энергия системы составляет половину её средней отрицательной потенциальной энергии. Этот весьма полезный для сложных гравитационных систем типа планетарных систем и галактик результат, сохраняет справедливость и при переходе к квантово-механическим объектам, когда уже ни ньютоновы законы, ни понятие скорости уже не применимы.

2.1.6 Упражнения

1. Система четырёх попарно взаимодействующих друг с другом частиц (1, 2, 3, 4) распадается на две подсистемы $A = (1, 2)$ и $B = (3, 4)$. Записать энергию взаимодействия подсистем и внутренние энергии каждой из них.

2. Доказать тождество $\frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N U_{ij} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N U_{ij}$.

3. Доказать, что кинетическая энергия системы N точек удовлетворяет уравнениям

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_i} = \vec{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

(выражение $\partial T / \partial \vec{v}$ означает градиент в пространстве скоростей, то есть вектор с проекциями $\partial T / \partial v_x$, $\partial T / \partial v_y$ и $\partial T / \partial v_z$).

4. Доказать соотношение $\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \vec{v}_i$.

5. Доказать, что разность кинетической и потенциальной энергий системы как функция декартовых координат и скоростей удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - U)}{\partial \vec{v}_i} = \frac{\partial(T - U)}{\partial \vec{r}_i}.$$

6. Доказать, что сумма кинетической и потенциальной энергии системы как функция координат и импульсов удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial\vec{r}_i} = -\frac{d\vec{p}_i}{dt}, \quad \frac{\partial(T+U)}{\partial\vec{p}_i} = \frac{d\vec{r}_i}{dt}.$$

2.2 Собственные характеристики системы

2.2.1 Система центра масс

Наряду с исходной ИСО, называемой *лабораторной системой координат* (ЛСК), часто рассматривают *систему центра масс* (СЦМ), называемую также *барицентрической системой*. Начало её совпадает с центром масс системы

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i},$$

а оси параллельны соответствующим осям ЛСК. Будем отмечать измеряемые в этой системе координаты и скорости материальных точек штрихами, тогда

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i,$$

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}'_i$$

и

$$\frac{\sum m_i \vec{r}'_i}{\sum m_i} = \vec{R}' = 0.$$

Если механическая система замкнута, точнее, если главный вектор внешних сил равен нулю, $d\vec{R}/dt \equiv \vec{V} = \text{const}$ и СЦМ является инерциальной системой.

Поскольку массы здесь меры инертности точек, центр масс системы называют также её *центром инерции*, а систему центра масс – *системой центра инерции*.

2.2.2 Пример: решение задачи в СЦМ

Найти закон движения системы N материальных точек, взаимодействующих по закону $\vec{F}_{ij} = -km_j m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$.

Из лабораторной системы координат, где уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\sum_{j \neq i} km_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad i = 1, \dots, N,$$

с помощью соотношений $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$, $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t$, $\sum_j m_j \vec{r}'_j = 0$,

перейдем в СЦИ: $\ddot{\vec{r}}'_i + km \vec{r}'_i = 0$, $m \equiv \sum m_j$.

Мы получили N независимых уравнений, решения которых имеют вид

$$\vec{r}'_i = \vec{A}_i \cos \omega t + \vec{B}_i \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{km}.$$

Здесь \vec{A}_i и \vec{B}_i – постоянные интегрирования, удовлетворяющие условиям

$$\sum m_i \vec{r}'_i = 0, \quad \sum m_i \vec{r}''_i = 0.$$

Возвращаясь к исходной системе координат, имеем

$$\vec{r}_i = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t + \vec{A}_i \cos \omega t + \vec{B}_i \sin \omega t.$$



2.2.3 Собственный момент

Непосредственно из определения следует, что импульс механической системы в СЦМ равен нулю:

$$\vec{P}' = \sum m_i \vec{v}'_i = m \frac{d}{dt} \frac{\sum m_i \vec{r}'_i}{\sum m_i} = 0,$$

где $m \equiv \sum m_i$ – полная масса системы.

Рассмотрим теперь момент импульса. Запишем его выражение относительно начала ЛСК и перейдём от нештрихованных переменных к штрихованным в соответствии с приведёнными в предыдущем пункте формулами:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum [\vec{r}_i, m \vec{v}_i] = \sum [\vec{r}'_i + \vec{R}, m_i \vec{v}'_i + m_i \vec{V}] = \\ &= \sum [\vec{r}'_i, m_i \vec{v}'_i] + \sum [\vec{R}, m_i \vec{v}'_i] + \sum [\vec{r}'_i, m_i \vec{V}] + \sum m_i [\vec{R}, \vec{V}] = \\ &= \sum [\vec{r}'_i, m_i \vec{v}'_i] + [\vec{R}, \sum m_i \vec{v}'_i] + \left[\sum m_i \vec{r}'_i, \vec{V} \right] + [\vec{R}, m \vec{V}] = \vec{L}' + [\vec{R}, \vec{P}']. \end{aligned}$$

Здесь $\vec{L}' = \sum [\vec{r}'_i, m_i \vec{v}'_i]$ – момент импульса системы относительно её центра масс, называемый *собственным моментом* системы, а $[\vec{R}, m \vec{V}]$ – момент системы как целого, то есть как её массы, сосредоточенной в центре масс, относительно начала ЛСК, называемый *орбитальным моментом*. Если внутренний момент импульса остаётся неизменным в процессе движения системы во внешнем центральном поле, то сохраняется и орбитальный момент.

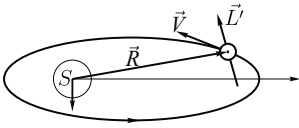


Рис. 2.1. Момент импульса планеты относительно Солнца складывается из орбитального $[\vec{R}, m\vec{v}]$ и собственного \vec{L}' моментов

Яркий пример разделения момента импульса на орбитальный и собственный моменты импульса являет движение Земли (рис. 2.1): она вращается вокруг Солнца (с периодом 1 год) и вокруг собственной оси (с периодом в один день). Периоды обращения, массы и размеры планет, определяющие моменты импульса, являются важными характеристиками планет. Ещё большую

важность приобретает собственный момент в квантовой механике: здесь он называется *спином*², его значение в совокупности со значениями заряда и массы образует специфической набор, необходимый для идентификации элементарных частиц и атомных ядер.

Мы определили собственный момент системы материальных точек как момент относительно её центра масс. Это можно сделать относительно любой другой точки СЦИ. При этом имеет место следующая



Рис. 2.2. Вольфганг Паули и Нильс Бор наблюдают за вращением волчка

Теорема. *Собственный момент импульса механической системы не зависит от выбора точки, относительно которой он определяется, если эта точка неподвижна в СЦМ.*

Пусть $\vec{L} = \sum [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$ – момент импульса относительно центра масс системы, а $\vec{L}_A = \sum [\vec{r}_i - \vec{r}_A, m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_A)]$ – момент импульса относительно другой точки A этой системы (штрихи опущены, чтобы не

²От англ. spin – вертеться.

загромождать формулы). Очевидно,

$$\begin{aligned}\vec{L}_A &= \sum [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] - [\vec{r}_A, \sum m_i \vec{v}_i] - \left[\sum m_i \vec{r}_i, \vec{v}_A \right] + [\vec{r}_A, (\sum m_i) \vec{v}_A] = \\ &= \sum [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \vec{L},\end{aligned}$$

поскольку $\sum m_i \vec{r}_i = 0$, $\sum m_i \vec{v}_i = 0$ и $\vec{v}_A = 0$.

2.2.4 Собственная энергия

Выполним аналогичные выкладки для кинетической энергии системы:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (v_i'^2 + 2\vec{v}_i' \vec{V} + V^2) = T' + \frac{1}{2} m V^2.$$

Это соотношение, связывающее кинетическую энергию системы в ЛСК с *собственной кинетической энергией* $T' = \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2$, известно как *теорема Кёнига*.

Для замкнутой системы

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}(\vec{r}_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}(\vec{r}_{ij}') = U'$$

и полная энергия

$$E = \frac{mV^2}{2} + E',$$

где

$$E' = T' + U' = \sum \frac{m_i v_i'^2}{2} + U(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N)$$

– *собственная энергия* системы.

Если система находится в однородном силовом поле, действие которого на частицу пропорционально её массе, например, в поле тяжести $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$, то соответствующая добавка к полной энергии имеет вид

$$U_g = -\vec{g} \sum m_i \vec{r}_i = -m \vec{g} \vec{R}.$$

В результате имеем

$$E = \frac{m \dot{\vec{R}}^2}{2} + U_g(\vec{R}) + E'. \quad (2.2.1)$$

Если внутренняя энергия E' , представляющая собой, например, сумму кинетической энергии теплового движения молекул и потенциальной энергии их взаимодействия между собой, не меняется в процессе движения системы, то её можно опустить (напомним, что полная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной), и тогда приведённая выше формула становится формулой полной энергии материальной точки, движущейся по закону $\vec{r} = \vec{R}(t)$ в потенциальном поле $U_g(\vec{r})$.

Пример: гравитационная энергия однородного шара

Пример. Найти собственную гравитационную энергию однородного шара массой m и радиуса R .

Разбив шар на элементы δm_i и рассматривая их как материальные точки, запишем

$$U' = -\frac{1}{2}G \sum_{i \neq j} \frac{\delta m_i \delta m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i \phi(\vec{r}_i) \delta m_i,$$

где

$$\phi(\vec{r}_i) = -G \sum_{j \neq i} \frac{\delta m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

В пределе непрерывного распределения массы в сплошном шаре

$$U' = \frac{1}{2} \int_{V_R} \phi(\vec{r}) \delta m(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int_{V_R} \phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV,$$

$$\phi(\vec{r}) = -G \int_{V_R} \frac{\delta m(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -G \int_{V_R} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Используя результаты **1.2.4**, для однородного шара получим:

$$\begin{aligned} U' &= \frac{Gm\rho}{4R} \int_{V_R} \left[-3 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] dV = \frac{3Gm^2}{4R^4} \int_0^R \left(-3r^2 + \frac{r^4}{R^2} \right) dr = \\ &= \frac{3Gm^2}{4R^4} \left(-r^3 + \frac{r^5}{5R^2} \right) \Big|_0^R = -\frac{3Gm^2}{5R}. \end{aligned}$$

Применив к этому выражению теорему о вирiale сил, можно оценить, например, температуру внутри Солнца T , воспользовавшись термодинамическим соотношением

$$\sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{3}{2} N k T,$$

где N – число атомов в Солнце, а $k_B \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Учитывая, что для Солнца $m \approx 2 \cdot 10^{30}$ кг, $R \approx 7 \cdot 10^8$ м и средняя масса атома $m/N \approx 3 \cdot 10^{-27}$ кг, находим:

$$\frac{3}{2} N k T = \frac{3}{10} \frac{Gm^2}{R},$$

откуда

$$T = \frac{Gm}{5kR} \left(\frac{m}{N} \right) \approx 10^7 \text{ K}.$$

2.2.5 Система двух подсистем

Разделим по какому-нибудь признаку (по величине массы, знаку заряда, по пространственному расположению) систему на две подсистемы, состоящие из частиц сортов A и B . Для каждой из подсистем определим положения центров масс \vec{R}_A, \vec{R}_B и представим аддитивные характеристики системы в виде сумм:

$$\begin{aligned}
 m &= \sum m_i = \left(\sum m_i \right)_A + \left(\sum m_i \right)_B = m_A + m_B, \\
 \vec{P} &= \sum \vec{p}_i = \left(\sum \vec{p}_i \right)_A + \left(\sum \vec{p}_i \right)_B = \vec{P}_A + \vec{P}_B, \\
 \vec{L} &= \sum \vec{L}_i = \left(\sum \vec{L}_i \right)_A + \left(\sum \vec{L}_i \right)_B = \\
 &= \vec{L}_A + \vec{L}_B = \vec{L}'_A + \left[\vec{R}_A, \vec{P}_A \right] + \vec{L}'_B + \left[\vec{R}_B, \vec{P}_B \right], \\
 T &= \sum T_i = \left(\sum T_i \right)_A + \left(\sum T_i \right)_B = \\
 &= T_A + T_B = T'_A + \frac{m_A V_A^2}{2} + T'_B + \frac{m_B V_B^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Потенциальная энергия системы неаддитивна:

$$\begin{aligned}
 U &= \left(\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} \right)_{i,j \in A} + \left(\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} \right)_{i,j \in B} + \\
 &+ \left(\frac{1}{2} \sum_{ij} U_{ij} \right)_{i \in A, j \in B} + \left(\frac{1}{2} \sum_{ij} U_{ij} \right)_{i \in B, j \in A}
 \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\left(\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} \right)_{i,j \in A} = U_A, \quad \left(\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} \right)_{i,j \in B} = U_B$$

и

$$\left(\frac{1}{2} \sum_{ij} U_{ij} \right)_{i \in A, j \in B} + \left(\frac{1}{2} \sum_{ij} U_{ij} \right)_{i \in B, j \in A} = U_{AB},$$

запишем полную энергию всей системы в виде

$$E = T_A + E'_A + T_B + E'_B + U_{AB},$$

где $T_A = (1/2)m_A V_A^2$ и $T_B = (1/2)m_B V_B^2$ – кинетические энергии подсистем как материальных точек, $E'_A = T'_A + U_A$ и $E'_B = T'_B + U_B$ – собственные энергии подсистем, а U_{AB} – энергия взаимодействия подсистем. Если собственные энергии не меняются в процессе движения, их можно исключить из уравнения энергетического баланса:

$$E = T_A + T_B + U_{AB}.$$

Энергия взаимодействия подсистем зависит от координат как частиц подсистемы A , так и частиц подсистемы B . Если размеры подсистем настолько малы по сравнению с расстоянием между ними, что каждую энергию взаимодействия каждой пары частиц $U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$, $i \in A$, $j \in B$ можно заменить функцией $U_{ij}(\vec{R}_A, \vec{R}_B)$, полученное выражение превращается в закон сохранения энергии замкнутой системы двух материальных точек A и B :

$$E = \frac{m_A \dot{\vec{R}}_A^2}{2} + \frac{m_B \dot{\vec{R}}_B^2}{2} + U_{AB}(\vec{R}_A, \vec{R}_B).$$

Таким образом, чтобы считать тело материальной точкой, недостаточно сослаться на малость её размеров по сравнению с типичными для данной задачи расстояниями. Необходимо, чтобы собственная энергия и собственный момент тела оставались постоянными в процессе движения. Важно также, чтобы ускорения, сообщаемые внешними силами элементам данного тела, были одинаковы.

2.2.6 Реактивное движение

Рассмотрим движение ракеты, снабжённой реактивным двигателем со скоростью истечения газов \vec{v} , как движение подсистемы полной системы «ракета+газ». В момент времени t ракета имеет массу $m(t)$ и



Константин Эдуардович Циолковский (1857 – 1935) – русский и советский учёный-самоучка и изобретатель, философ, школьный учитель. Основатель теоретической космонавтики.

движется со скоростью $\vec{V}(t)$. За время dt двигатель выбрасывает газ массой δm_r и система распадается на две не взаимодействующих подсистемы. В отсутствие внешних сил имеет место закон сохранения импульса, согласно которому

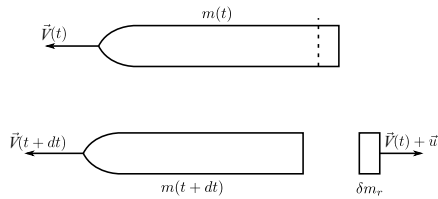


Рис. 2.3. Ускорение ракеты выбросом газа

$$m(t+dt)\vec{V}(t+dt) + \delta m_r(\vec{V}(t) + \vec{u}) = m(t)\vec{V}(t).$$

Подставляя сюда

$$m(t+dt) = m(t) - \delta m_r, \quad \vec{V}(t+dt) = \vec{V}(t) + d\vec{V}$$

и учитывая, что согласно закону сохранения массы $\delta m_r = -dm$, получим

$$(m+dm)(\vec{V} + d\vec{V}) - dm(\vec{V} + \vec{u}) = m\vec{V},$$

где общий аргумент t теперь опущен. Отсюда и следует известное *уравнение Циолковского*:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{u},$$

при наличии внешней силы \vec{F} принимающее вид *уравнения Мещерского*:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{u} + \vec{F}.$$

Оно описывает реактивное движение тела переменной массы, меняющейся по заданному закону $m = m(t)$, в поле внешней силы \vec{F} при заданной скорости истечения газов \vec{u} (заметим, что $\dot{m} < 0$, а скорость истечения \vec{u} направлена в сторону, противоположную скорости движения \vec{V}).

Спроецировав уравнение Циолковского на направление движения ракеты и выполнив интегрирование методом разделения переменных, получим *формулу Циолковского* для скорости ракеты v_k к моменту выгорания топлива при постоянной скорости истечения газов: $v_k = u \ln(m_0/m_k)$. Отношение $Z = m_0/m_k$ называется *числом Циолковского*.



Примеры: движение ракеты

Пример 1. Найти закон вертикального движения ракеты в однородном поле тяжести, если скорость истечения постоянна, а масса убывает по показательному закону $m = m_0 e^{-\alpha t}$.

Направим ось OZ вверх, совместив её начало с точкой старта ракеты. Уравнение Мещерского в проекции на эту ось запишется в виде

$$\dot{v} = -(\dot{m}/m)u - g = \alpha u - g.$$

Отсюда

$$z = \frac{(\alpha u - g)t^2}{2}, \quad \alpha u > g.$$

Пример 2. Ракета, направляющаяся к Марсу, стартует вертикально с поверхности Земли. Найти закон изменения массы ракеты на активном участке траектории, где ускорение её a поддерживается постоянным при постоянной скорости истечения u .

Теперь гравитационное поле следует считать ньютоновым,

$$F_r = -\frac{mgR^2}{r^2}, \quad r \geq R,$$

где r – расстояние от центра Земли до ракеты. Из уравнения Мещерского

$$\frac{\dot{m}}{m} = -\frac{a}{u} - \frac{gR^2}{ur^2}.$$

Интегрируя, получим

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{a}{u}t - \frac{g}{u} \int_0^t \frac{dt}{\left(1 + \frac{at^2}{2R}\right)^2} = -\frac{a}{u} - \frac{gR}{2u} \left[\frac{t}{R + at^2/2} + \sqrt{\frac{2}{Ra}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a}{2R}} t \right) \right],$$

откуда

$$m = m_0 \exp \left\{ -\frac{a}{u} - \frac{gR}{2u} \left[\frac{t}{R + at^2/2} + \sqrt{\frac{2}{Ra}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a}{2R}} t \right) \right] \right\}.$$

2.2.7 Упражнения

1. Доказать, что собственный момент импульса системы не зависит от выбора точки, относительно которой он определяется, если эта точка неподвижна относительно СЦМ.
2. Доказать, что главный момент приложенных к системе сил не зависит от выбора точки, относительно которой он вычисляется, если главный вектор внешних сил равен нулю.
3. Показать, что собственный момент импульса замкнутой системы двух тел можно записать в виде $[\vec{r}, \mu \vec{v}]$, где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – приведённая масса, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ – относительная скорость.
4. Показать, что собственная кинетическая энергия замкнутой системы двух тел может быть записана в виде $\mu v^2 / 2$.

2.3 Система двух тел

2.3.1 Движение замкнутой системы двух тел

Система уравнений для двух взаимодействующих материальных точек имеет вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{12}, \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_{21}, \\ \vec{F}_{12} &= -\vec{F}_{21} \equiv \vec{F}. \end{aligned}$$

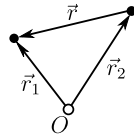


Рис. 2.4. Вектор относительного положения двух тел

Складывая два первых и учитывая третье уравнение, получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = 0,$$

откуда

$$\vec{R}(t) \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \vec{R}_0 + \vec{V}t.$$

$$m \ddot{\vec{R}} = 0, \quad m = m_1 + m_2$$

Вернувшись к исходной системе, разделим обе части первого на m_1 , второго – на m_2 и вычтем второе из первого:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}/m_1,$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}/m_2.$$

В результате получим

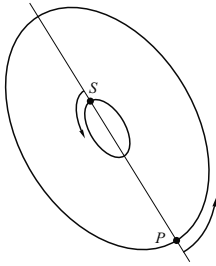
$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}),$$

где $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ – вектор относительного положения частиц, от которого только и зависит сила \vec{F} , а играющая в этом уравнении роль массы постоянная

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

называется *приведённой массой*³.

³Обсуждая в своей книге проблему массы в связи с интерпретацией 2-го закона Ньютона, Пуанкаре заметил, что зная, что центр масс системы двух тел лежит на соединяющем их отрезке прямой и делит его в отношении, обратно пропорциональном массам, можно из наблюдения движения этих тел определить массу одного из них, если массу другого взять за эталон. Правда, в заключение оговорился, что не существует такой изолированной от остального мира системы.



Задача о движении двух тел распадается на две задачи: о движении $\vec{R}(t)$ одного тела с массой $m = m_1 + m_2$ в отсутствие поля и о движении $\vec{r}(t)$ *независимого с ним* другого тела с массой $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ в поле неподвижного силового центра $\vec{F}(\vec{r})$. Начальные условия для этих задач определяются с помощью приведённых выше формул, а обратный переход к движению исходных частиц совершается по формулам

Рис. 2.5. Движение системы «Солнце-планета» (в пренебрежении действием других планет)

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \end{cases}$$

Если $\vec{R} = 0$, то $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$: центр масс делит отрезок между частицами в отношении, обратном пропорциональному массам.

Из 2.2.3 следует, что для двух частиц в системе центра масс (штрихи для удобства опустим: лабораторную систему не рассматриваем и спутать будет не с чем)

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = [\vec{r}_1, m_1 \vec{v}_1] + [\vec{r}_2, m_2 \vec{v}_2].$$

Выразим здесь \vec{r}_i и \vec{v}_i через векторы \vec{r} и $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$ относительного движения:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m} \vec{r}, \quad \vec{v}_1 = \frac{m_2}{m} \vec{v}, \quad \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m} \vec{v}.$$

В результате для собственного момента импульса получим

$$\vec{L} = \frac{m_1 m_2^2}{m^2} [\vec{r}, \vec{v}] + \frac{m_2 m_1^2}{m^2} [\vec{r}, \vec{v}] = [\vec{r}, \mu \vec{v}].$$

Аналогичным образом, для внутренней энергии

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \left(\frac{m_1 m_2^2}{2m^2} + \frac{m_2 m_1^2}{2m^2} \right) v^2 = \frac{\mu v^2}{2}.$$

Период обращения системы «планета-Солнце» ($m_1 = m$, $m_2 = m_\odot$) совпадает с периодом обращения μ -точки

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(m_\odot + m)}},$$

где a – половина максимального расстояния между этими телами. Таким образом, третий закон Кеплера является приближённым: в действительности, отношения τ^2/a^3 для разных планет различны (различие это, однако, невелико).

2.3.2 Упругое столкновение

Столкновением называют такое движение системы двух частиц, когда существуют начальное и конечное состояния системы, в которых частицы не взаимодействуют между собой (по причине удалённости друг от друга). Законы сохранения при этом связывают сохраняющиеся величины в начальном и конечном состояниях, минуя процесс взаимодействия:

$$\vec{p}_{10} + \vec{p}_{20} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2,$$

$$T_{10} + E'_{10} + T_{20} + E'_{20} = T_1 + E'_1 + T_2 + E'_2.$$

Здесь и далее индексы 1 и 2 относятся к участвующим в столкновении частицам, индексом 0 отмечены их начальные (до столкновения) характеристики. Штрихом будем отмечать динамические переменные в СЦМ.

Столкновения называют *упругими*, если внутренние энергии участвующих в них частиц в конечном итоге не изменяются

$$E'_{10} = E'_1, \quad E'_{20} = E'_2.$$

Закон сохранения энергии при этом принимает вид

$$T_{10} + T_{20} = T_1 + T_2,$$

согласно которому суммарная кинетическая энергия частиц в столкновении не изменяется, а лишь перераспределяется между частицами.

Если расстояние, на котором осуществляется взаимодействие между сталкивающимися частицами, ограничено радиусом взаимодействия R , можно вычислить время столкновения по формуле

$$\tau_{ст} = 2 \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 - (2/\mu)U(r)}},$$

вытекающей из закона сохранения энергии в СЦМ:

$$\frac{\mu v_0^2}{2} = \frac{\mu r^2}{2} + U(r), \quad r_0 < r < R.$$

В частности, при столкновении одинаковых упругих шаров радиусом a расстояние r между их центрами вследствие упругой деформации оказывается на некоторое время меньше $2a$. Сближение шаров характеризуется переменной $h = 2a - r$, меняющейся в ходе столкновения от нуля до $h_{\text{макс}}$ и обратно до нуля. Потенциальная энергия выражается через h приближенной формулой

$$U(h) = \frac{kh^{5/2}}{2},$$

где k – постоянная⁴. Найдя из условия $\dot{r} = 0$

$$h_{\text{макс}} = \left(\frac{\mu}{k}\right)^{2/5} v_0^{4/5},$$

получаем

$$\begin{aligned} \tau_{\text{ст}} &= 2 \int_0^{h_{\text{макс}}} \frac{dh}{\sqrt{v_0^2 - (k/\mu)h^{5/2}}} = 2 \left(\frac{\mu^2}{k^2 v_0}\right)^{1/5} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{5/2}}} = \\ &= \frac{4\sqrt{\pi}\Gamma(2/5)}{5\Gamma(9/10)} \left(\frac{\mu^2}{k^2 v_0}\right)^{1/5} = 2,94 \left(\frac{\mu^2}{k^2 v_0}\right)^{1/5}. \end{aligned}$$

2.3.3 Соотношения между углами рассеяния в СЦМ и ЛСК

Из законов сохранения энергии и импульса можно вывести соотношения между углами рассеяния в СЦМ и ЛСК, не зависящие от конкретного закона взаимодействия.

Рассмотрим сначала процесс в СЦМ. Из закона сохранения импульса

$$p'_{10} = p'_{20}, \quad p'_1 = p'_2,$$

а из закона сохранения энергии

$$\begin{aligned} \frac{p'^2_{10}}{2m_1} + \frac{p'^2_{20}}{2m_2} &= \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2}, \\ \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) p'^2_{10} &= \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) p'^2_1, \\ p'_{10} &= p'_{20} = p'_1 = p'_2. \end{aligned}$$

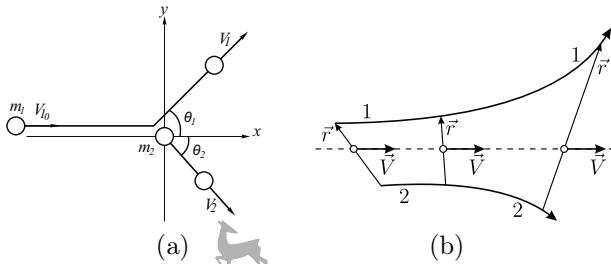


Рис. 2.6. Столкновение налетающей частицы 1 с покоящейся (до столкновения) частицей 2 в ЛСК. (а) – динамическая картина, (б) – кинематическое представление (состояния до и после столкновения)

Таким образом, в СЦМ равные по величине и противоположные по направлению импульсы частиц в процессе столкновения лишь поворачиваются на *угол рассеяния в СЦМ* Θ , $\Theta \in [0, \pi]$, не меняя своих величин. Это – тот самый угол, на который поворачивается в процессе столкновения соединяющий эти частицы вектор $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.



Рис. 2.7. Диаграммы импульсов и скоростей частиц в СЦМ

В ЛСК частица 2 до столкновения покоилась, скорость движения центра масс $\vec{V} = m_1 \vec{v}_{10} / (m_1 + m_2)$, поэтому

$$v'_{20} = V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10}, \quad \vec{v}'_{20} = -\vec{V},$$

$$v'_{10} = v_{10} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{10}.$$

Спроецируем равенство $\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{V}$ на горизонтальную ось

$$v_1 \cos \vartheta_1 = v'_1 \cos \Theta + V,$$

на вертикальную ось

$$v_1 \sin \vartheta_1 = v'_1 \sin \Theta$$

⁴Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория упругости. - М.: Наука, 1965. - С.51.

и разделим второе на первое:

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\sin \Theta}{w + \cos \Theta}.$$

Здесь

$$w = \frac{V}{v'_1} = \frac{V}{v'_{10}} = \frac{V}{v_{10} - V} = \frac{1}{v_{10}/V - 1} = \frac{1}{(m_1 + m_2)/m_1 - 1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Угол ϑ_1 называется *углом рассеяния в ЛСК*, а угол

$$\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}$$

– *углом отдачи* (см. рис. 2.8). Оба этих угла выражаются через угол рассеяния в СЦИ формулами, не зависящими от закона взаимодействия частиц.

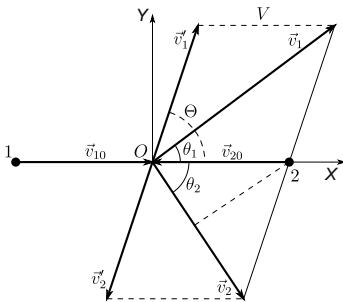


Рис. 2.8. Схема упругого рассеяния в ЛСК и СЦИ

Если налетающая частица легче покоящейся, $m_1 < m_2$, то с увеличением Θ от нуля до $\arccos(-m_1/m_2)$ $\operatorname{tg} \vartheta_1$ монотонно растёт от нуля до бесконечности. При переходе Θ через это значение $\operatorname{tg} \vartheta_1$ скачкообразно меняет знак и продолжает возрастать, теперь уже от $-\infty$ до нуля. Угол рассеяния в ЛСК ϑ_1 при этом непрерывно пробегает все значения от нуля до π . Связь между этими двумя углами взаимно однозначна.

Если налетающая частица тяжелее покоящейся, $m_1 > m_2$, то с увеличением Θ угол ϑ_1 сначала растёт, достигает максимального значения

$$\vartheta_{1\max} = \arcsin(m_2/m_1)$$

при

$$\Theta = \arccos(-m_2/m_1)$$

и затем убывает до нуля. Каждому значению угла рассеяния в ЛСК ϑ_1 при этом соответствуют два разных угла рассеяния в СЦИ Θ .

Найдём теперь обратное соотношение между этими углами рассеяния. Возведя обе части соотношения

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\sin \Theta}{w + \cos \Theta}.$$

в квадрат, преобразуем его следующим образом:

$$(w + \cos \Theta)^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_1 = 1 - \cos^2 \Theta,$$

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta_1) \cos^2 \Theta + 2w \operatorname{tg}^2 \vartheta_1 \cos \Theta + w^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_1 - 1 = 0,$$

$$\cos^2 \Theta + 2w \sin^2 \vartheta_1 \cos \Theta - (1 + w^2) \cos^2 \vartheta_1 + w^2 = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно $\cos \Theta$, получим:

$$\cos \Theta = -w(1 - \cos^2 \vartheta_1) \pm \cos \vartheta_1 \sqrt{1 - w^2 + w^2 \cos^2 \vartheta_1}.$$

При $w < 1$, то есть при $m_1 < m_2$, перед корнем здесь следует брать знак $+$, а при $m_1 > m_2$ два знака перед корнем соответствуют упомянутым выше двум значениям Θ . В случае столкновения частиц равных масс $\vartheta_1 = \Theta/2$.

2.3.4 Передача энергии при упругом столкновении

Внутренние энергии каждой из частиц при упругом столкновении не меняются, а вот кинетическими энергиями частицы обмениваются. Зная угол рассеяния в СЦИ и начальную скорость налетающей частицы, можно найти кинетические энергии частиц после столкновения. Действительно, из диаграммы скоростей видно, что

$$v'_2 = 2V \sin(\Theta/2).$$

Отсюда переданная покоившейся до столкновения частице 2 энергия Q равна

$$Q(\Theta) = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = Q_\pi \sin^2(\Theta/2),$$

где

$$Q_\pi \equiv Q(\pi) = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} T_{10} \quad (2.3.1)$$

– передача энергии при лобовом ($\Theta = \pi$) столкновении. Последняя достигает максимального значения при столкновении частиц с равными массами – на этом основано применение водородосодержащих материалов для замедления нейтронов в ядерных реакторах.

Кинетическая энергия налетающей частицы после столкновения

$$T_1 = T_{10} - Q(\Theta) = \left[1 - \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \sin^2(\Theta/2) \right] T_{10} =$$

$$= \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \cos \Theta}{(m_1 + m_2)^2} T_{10}.$$

Из этой формулы легко выводится выражение косинуса угла рассеяния через переданную в столкновении энергию

$$\cos \Theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} = 1 - 2 \frac{Q}{Q_\pi} = 1 - \frac{(m_1 + m_2)^2}{2m_1m_2} \frac{Q}{T_{10}}.$$

2.3.5 Энергетические и угловые распределения частиц

Выведенные выше формулы используются в расчётах дифференциальных сечений рассеяния, когда необходимо учесть конечную массу рассеивающих атомов (ядер). В этом случае вначале ведётся расчёт дифференциального сечения рассеяния частиц с приведенной массой μ на неподвижном атоме,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma}{d \cos \Theta} = F(\cos \Theta)$$

а затем выполняется переход к дифференциальному (по интересующей нас характеристике) сечению.

Простейшая задача такого типа – вычисление дифференциального по *переданной энергии* сечения рассеяния, одновременно описывающего и энергетическое распределение частиц отдачи:

$$\frac{d\sigma}{dQ} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \left| \frac{d\Omega}{dQ} \right| = 2\pi F(\cos \Theta(Q)) \frac{d \cos \Theta}{dQ} = \frac{4\pi}{Q_\pi} F \left(1 - \frac{2Q}{Q_\pi} \right).$$

Энергетическое распределение рассеянных частиц легко получается, если учесть, что $T_1 = T_{10} - Q$:

$$\frac{d\sigma}{dT_1} = \left(\frac{d\sigma}{dQ} \right)_{Q=T_{10}-T_1}.$$

В случае рассеяния точечных частиц на шариках радиуса a $F(\cos \Theta) = a^2/4$ и

$$\frac{d\sigma}{dQ} = \frac{a^2}{4Q_\pi}, \quad Q \in (0, Q_\pi).$$

Формула эта описывает равномерное на указанном интервале распределение со средним значением переданной энергии

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{\sigma} \int_0^{Q_\pi} Q \frac{d\sigma}{dQ} dQ = \frac{Q_\pi}{2}.$$

В случае Резерфордского рассеяния точечных зарядов $Z_1 e$ с массой m_1 на точечных зарядах $Z_2 e$ с массой m_2

$$\frac{d\sigma}{dQ} = \pi (Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{m_1}{m_2 T_{10}} Q^{-2}.$$

Дифференциальное по углам сечение проще всего находится для углов отдачи $\vartheta_2 = \pi/2 - \Theta/2$.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \left| \frac{d \cos \Theta}{d \cos \vartheta_2} \right| = 4F(-\cos(2\theta_2)) \cos \theta_2.$$

Чтобы найти соответствующее распределение рассеянных частиц, продифференцируем приведенную в предыдущем пункте зависимость $\cos \Theta$ от $\cos \vartheta_1$:

$$\frac{d \cos \Theta_{\pm}}{d \cos \vartheta_1} = 2w \cos \vartheta_1 \pm \frac{1 + w^2 \cos(2\vartheta_1)}{\sqrt{1 - w^2 \sin^2 \vartheta_1}}.$$

Если $m_1 < m_2$, то

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = F(\cos \Theta_+) \left| \frac{d \cos \Theta_+}{d \cos \vartheta_1} \right|,$$

если же $m_1 > m_2$, то каждому ϑ_1 соответствуют два значения Θ , поэтому

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = F(\cos \Theta_+) \left| \frac{d \cos \Theta_+}{d \cos \vartheta_1} \right| + F(\cos \Theta_-) \left| \frac{d \cos \Theta_-}{d \cos \vartheta_1} \right|.$$

В случае рассеяния частиц равных масс ($m_1 = m_2$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = 4F(\cos(2\vartheta_1)) \cos \vartheta_1, \quad \vartheta_1 \in (0, \pi/2).$$

Если же частицы неразличимы, то дифференциальное сечение, как и наблюдаемое число частиц, летящих в определенном направлении, равно сумме вкладов рассеянных частиц и частиц отдачи:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{1+2} = 4[F(\cos(2\vartheta)) + F(-\cos(2\vartheta))] \cos \vartheta, \quad \vartheta \in (0, \pi/2).$$

2.3.6 Упругие столкновения одинаковых частиц

Представления о механизме упругих столкновений *одинаковых молекул* лежат в основе кинетической теории разреженных газов. Законы сохранения импульса и энергии в этом случае имеют вид

$$\vec{v}_{10} + \vec{v}_{20} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

и

$$v_{10}^2 + v_{20}^2 = v_1^2 + v_2^2,$$

а в переменных

$$\vec{V} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{2} \quad (2.3.2)$$

выглядят следующим образом:

$$\vec{V}_0 = \vec{V}, \quad v_0 = v.$$

Отсюда видно, что в результате столкновения вектор \vec{v}_0 поворачивается и занимает положение \vec{v} , не изменяя своей величины. В силу этого столкновение полностью определяется заданием векторов \vec{V}_0 , \vec{v}_0 и совокупностью углов рассеяния $\vec{\Omega} \equiv (\theta, \phi)$, которые вектор \vec{v} образует с начальным вектором \vec{v}_0 . Давая малые приращения векторам \vec{V}_0 и \vec{v}_0 при фиксированном $\vec{\Omega}$, мы получим равенство соответствующих элементов объемов пространства скоростей

$$d\vec{V}_0 d\vec{v}_0 = d\vec{V} d\vec{v}.$$

Из (2.3.2) следует также, что

$$d\vec{V}_0 d\vec{v}_0 = d\vec{v}_{10} d\vec{v}_{20}.$$

Подобное же равенство справедливо и для переменных после рассеяния, в результате чего получаем

$$d\vec{v}_{10} d\vec{v}_{20} = d\vec{v}_1 d\vec{v}_2.$$

Для рассмотрения свойств процесса упругого столкновения тождественных частиц нам удобно будет ввести плотность вероятности перехода w при рассеянии соотношением

$$d\sigma(\vec{\Omega}) = \sigma_0 w(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \leftarrow \vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}) d\vec{\Omega},$$

где $\sigma_0 = \int_{4\pi} d\sigma(\vec{\Omega})$ – полное сечение упругого рассеяния молекулы на молекуле. Детальный вид функции w определяется потенциалом взаимодействия молекул, однако она обладает определенными свойствами

симметрии, которые окажутся нам полезными при рассмотрении статистических основ гидродинамики. Перечислим их.

1) *Инвариантность относительно обращения времени:*

$$w(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \leftarrow \vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}) = w(-\vec{v}_{10}, -\vec{v}_{20} \leftarrow -\vec{v}_1, -\vec{v}_2) : \quad (2.3.3)$$

при изменении знака времени на обратный каждая молекула повторяет свой путь в обратном порядке.

2) *Инвариантность относительно пространственного поворота и отражения:*

$$w(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \leftarrow \vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}) = w(\vec{v}_1^*, \vec{v}_2^* \leftarrow \vec{v}_{10}^*, \vec{v}_{20}^*). \quad (2.3.4)$$

Здесь \vec{v}^* означает вектор, получаемый из \vec{v} путём некоторого поворота или отражения от некоторой плоскости или комбинации этих преобразований.

3) *Равенство сечений прямого и обратного рассеяний (принцип детального равновесия).*

Столкновение $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \rightarrow \{\vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}\}$ назовем *обратным* столкновению $\{\vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}\} \rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Тогда последнее утверждение запишется в виде:

$$w(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \leftarrow \vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}) = w(\vec{v}_{10}, \vec{v}_{20} \leftarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2).$$

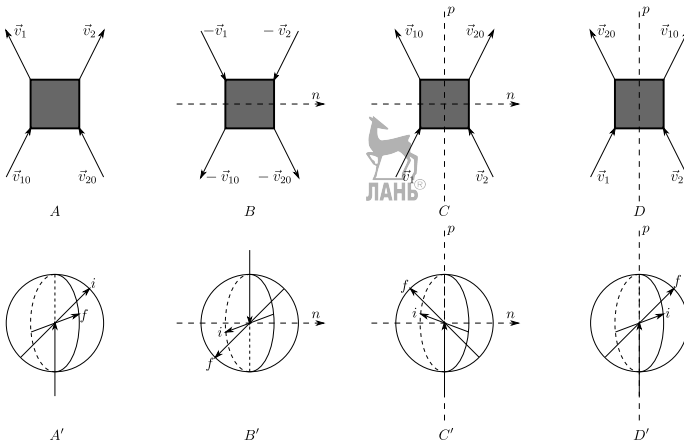


Рис. 2.9. Переход от прямого столкновения к обратному (i и f означают начальное и конечное состояния соответственно)

Чтобы убедиться в его справедливости, изобразим прямое столкновение в виде схемы A (рис. 2.9). Сечение такого процесса имеет ту

же величину, что и для обращенного во времени столкновения, изображенного на схеме B . Повернем теперь систему координат на 180° относительно некоторой оси \vec{n} , перпендикулярной к полному импульсу сталкивающихся молекул, а затем отразим её относительно плоскости pp' , перпендикулярной к \vec{n} . В результате мы и получим обратное столкновение D , имеющее, в силу (2.3.3) и (2.3.4) такое же сечение, что и прямое.

2.3.7 Неупругое столкновение и распад

Рассмотренный выше процесс упругого столкновения не изменял внутреннюю структуру сталкивающихся частиц. Поэтому-то их можно было рассматривать как бесструктурные материальные точки, характеризующиеся только массами. При неупругом столкновении частиц их внутренняя структура изменяется, в результате чего суммарная кинетическая энергия, а иногда даже и число частиц не сохраняются. В этом случае

$$\vec{p}_{10} + \vec{p}_{20} = \sum \vec{p}_i,$$

$$T_{10} + E'_{10} + T_{20} + E'_{20} = \sum (T_i + E'_i).$$

Приращение суммарной кинетической энергии частиц в результате столкновения

$$\sum T_i - (T_{10} + T_{20}) = Q_r$$

называется *энергией реакции*. Неупругое столкновение с выделением энергии ($Q_r > 0$) называют *экзоэнергетической* реакцией, столкновение с поглощением энергии ($Q_r < 0$) – *эндоэнергетической* реакцией. В этом случае часть кинетической энергии сталкивающихся частиц идёт на увеличение внутренних энергий продуктов реакции. Тип реакции можно предсказать, используя данные о внутренних энергиях вступающих в реакцию частиц и её продуктов:

$$Q_r = E'_{01} + E'_{02} - \sum E'_i.$$

В ядерной физике роль внутренних энергий играют релятивистские энергии покоя частиц $E' = mc^2$.

Кинетическая энергия продуктов реакции, очевидно, должна быть положительной, поэтому из закона сохранения энергии следует, что $T_{10} + T_{20} + Q_r > 0$. Для экзоэнергетической реакции это неравенство выполняется при любых начальных кинетических энергиях. Эндоэнергетическая же реакция возможна лишь в том случае, когда начальная энергия превышает некоторое пороговое значение.

Пусть реакция имеет вид $1+2=3+4$, то есть в конечном состоянии всего две частицы – 3 и 4 (частица 2 до столкновения покоится в ЛСК, под частицей 4 мы можем понимать совокупность всех остальных продуктов реакции). Законы сохранения энергии и импульса в СЦМ имеют вид (индексы 0 опускаем за ненадобностью)

$$\frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{p_3'^2}{2m_3} + \frac{p_4'^2}{2m_4} - Q_r,$$

$$p_1' = p_2', \quad p_3' = p_4'.$$

Разрешая эту систему относительно кинетической энергии третьей частицы $T_3' = p_3'^2/(2m_3)$, получим

$$T_3' = [(1+w)T_1' + Q_r] \frac{\text{ЛАНЬ}}{m_3 + m_4},$$

где w по-прежнему обозначает отношение m_1/m_2 . Величина T_3' будет положительной, если

$$(1+w)T_1' \geq -Q_r = |Q_r|.$$

Учитывая, что

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{V} = \vec{v}_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{\vec{v}_1}{1+w},$$

перейдём из СЦМ в ЛСК:

$$\vec{p}_1 = (1+w)\vec{p}_1', \quad T_1 = (1+w)^2 T_1'.$$

Таким образом, пороговое значение кинетической энергии налетающей частицы в ЛСК равно

$$T_{\text{пор}} = (1+\nu)|Q_r|.$$

Отметим, что при $m_1 \ll m_2$ оно совпадает с абсолютной величиной энергии реакции, а в случае равных масс в два раза превышает это значение.

Реакция, в начальном состоянии которой имеется всего одна частица, а в конечном – две или более, называется *распадом*. Распад частицы возможен, если в системе её покоя $E_0' > \sum E_i'$. Если частица, летящая со скоростью V , распадается на две, одна из которых имеет скорость v_1' и вылетает под углом Θ к направлению движения первичной частицы в СЦМ, то в ЛСК угол ϑ_1 между направлением её движения и

скоростью первичной частицы определяется формулой, аналогичной формуле упругого столкновения:

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + V/v'_1}.$$

Если $v'_1 > V$, угол ϑ_1 может принимать любое значение из интервала $(0, \pi)$, в противном случае он ограничен максимальным значением $\vartheta_{\max} = \arcsin(v'_1/V)$.

2.3.8 Упражнения

1. Частица массой m с начальной скоростью \vec{v}_{10} налетает на покоившуюся в лабораторной системе частицу массой ξm и упруго рассеивается на угол ϑ . Найти угол рассеяния θ в системе центра масс, переданную энергию и отношение масс ξ , при котором возможна максимальная передача энергии.
2. Найти дифференциальное сечение рассеяния точечных частиц массой m_1 на первоначально покоящихся в лабораторной системе координат твердых шариках массой m_2 .
3. В условиях предыдущей задачи вычислить дифференциальное сечение для вторичных частиц (шариков). Проверить нормировку.
4. Найти дифференциальное сечение $d\sigma/dQ$, среднее значение и средний квадрат потерянной энергии Q при рассеянии нейтральных частиц на шариках конечной массы.
5. Найти дифференциальное сечение потерь энергии $d\sigma/dQ$ для заряженных частиц, рассеиваемых точечными зарядами конечной массы.

2.4 Задача трёх тел

2.4.1 Уравнения и интегралы движения

Как мы видели в **2.3.1**, задача двух тел приводится к задаче о движении одного тела и в этом смысле *решается точно*. Аналогичная задача о движении трёх тел не может считаться полностью решённой. Однако, для многих частных случаев, представляющих интерес в астрономии, удаётся построить приближённые решения с высокой степенью точности. Здесь широко используются сейчас численные методы, но при определённых ограничениях на движение системы оказываются эффективными и аналитические методы, разработка которых оказала, в свою очередь, огромное влияние на развитие самой динамики в целом. Такие задачи называют *ограниченными*. Мы рассмотрим их ниже, а сейчас остановимся на некоторых общих подходах к задаче трёх тел.

Запишем уравнения движения замкнутой системы трёх тел в виде

$$m_i \ddot{x}_i = -\partial U / \partial x_i$$

$$m_i \ddot{y}_i = -\partial U / \partial y_i$$

и

$$m_i \ddot{z}_i = -\partial U / \partial z_i,$$

где

$$U = -\Gamma(m_2 m_3 / r_{23} + m_3 m_1 / r_{31} + m_1 m_2 / r_{12}),$$

где $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ и т.д.

По закону сохранения импульса центр масс системы движется равномерно и прямолинейно, что даёт три интеграла движения:

$$\sum m_i x_i = m(X_0 + V_{0x}t),$$

$$\sum m_i y_i = m(Y_0 + V_{0y}t),$$

$$\sum m_i z_i = m(Z_0 + V_{0z}t).$$

Три интеграла движения дают соответствующие уравнения для скоростей:

$$\sum m_i \dot{x}_i = mV_{0x},$$

$$\sum m_i \dot{y}_i = mV_{0y},$$

$$\sum m_i \dot{z}_i = mV_{0z}.$$

ещё три интеграла следуют из закона сохранения момента импульса:

$$\sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = L_{0x},$$

$$\sum m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = L_{0y},$$

$$\sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = L_{0z}.$$

Наконец, по закону сохранения энергии

$$\sum (m_i/2)(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + U(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = E.$$

Таким образом, в задаче трёх тел существует десять интегралов движения, перечисленных выше.

2.4.2 Кинетическая энергия системы трёх тел

По теореме Кёнига, кинетическая энергия системы

$$T = (1/2) \sum m_i v_i^2 = (1/2) m V^2 + (1/2) \sum m_i v_i'^2, \quad m = \sum m_i,$$

где штрихованные переменные относятся к СЦМ. Перепишем это выражение в виде

$$2mT = m^2 V^2 + m \sum m_i v_i'^2.$$

Воспользуемся теперь равенством

$$\left(\sum m_i \vec{v}'_i \right)^2 = \sum_{i,j} m_i m_j \vec{v}'_i \vec{v}'_j = 0,$$

чтобы представить последний член в выражении для $2mT$ в виде:

$$\begin{aligned} m \sum_i m_i v_i'^2 &= \sum_{i,j} m_i m_j v_j'^2 - 0 = \sum_{i,j} m_i m_j v_j'^2 - \sum_{i,j} m_i m_j \vec{v}'_i \vec{v}'_j = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} m_i m_j (v_i'^2 + v_j'^2 - 2\vec{v}'_i \vec{v}'_j). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$T = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{m} (\vec{v}'_i - \vec{v}'_j)^2.$$

2.4.3 Способы понижения порядка системы уравнений

Использование законов сохранения. Как и в задаче двух тел, важным методом упрощения задачи является понижение порядка системы уравнений. Девять дифференциальных уравнений второго порядка, описывающие движение трёх тел, образуют систему 18-го (9×2) порядка. В системе центра масс из её определения и закона сохранения импульса следуют равенства

$$\sum m_i x'_i = 0, \quad \sum m_i y'_i = 0, \quad \sum m_i z'_i = 0,$$

$$\sum m_i \dot{x}'_i = 0, \quad \sum m_i \dot{y}'_i = 0, \quad \sum m_i \dot{z}'_i = 0.$$

Использование этих шести уравнений понижает общий порядок системы до 12, а законов сохранения момента импульса (три уравнения) и

энергии (одно уравнение), справедливых в силу инерциальности системы центра масс и центрального характера действующих в системе сил, понижает порядок до 8.

Выбор начала координат. Другой способ понижения порядка основан на переходе в систему координат, начало которой помещается на одну из движущихся точек (пусть это будет точка 1), а оси параллельны осям исходной ИСО. Ввиду неинерциальности новой системы, записываемые в ней уравнения движения двух остальных точек должны содержать в правых частях силы инерции. Поскольку НСО не вращается относительно ИСО ($\vec{\Omega} = 0$, $\dot{\vec{\Omega}} = 0$), силы эти равны $-m_i\vec{A}$, где \vec{A} – ускорение точки 1 относительно ИСО:

$$m_2\dot{\vec{v}}_{2\text{отн}} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} - m_2\vec{A},$$

$$m_3\dot{\vec{v}}_{3\text{отн}} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} - m_3\vec{A}.$$

Подставляя в эти уравнения

$$\vec{A} = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13})/m_1 = -(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31})/m_1,$$

получим

$$m_2\dot{\vec{v}}_{2\text{отн}} = (1 + m_2/m_1)\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + m_2/m_1\vec{F}_{31}$$

и

$$m_3\dot{\vec{v}}_{3\text{отн}} = (1 + m_3/m_1)\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + m_3/m_1\vec{F}_{21}.$$

Разделим первое из них на $1 + m_2/m_1$, а второе – на $1 + m_3/m_1$:

$$\mu_2\dot{\vec{v}}_{2\text{отн}} = \vec{F}_{21} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{F}_{23} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{F}_{31},$$

$$\mu_3\dot{\vec{v}}_{3\text{отн}} = \vec{F}_{31} + \frac{m_1}{m_1 + m_3}\vec{F}_{32} + \frac{m_3}{m_1 + m_3}\vec{F}_{21}.$$

Здесь $\mu_2 = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ и $\mu_3 = m_1m_3/(m_1 + m_3)$ – приведённые массы.

Выписывая силы в явном виде, получим

$$\mu_2\dot{\vec{v}}_{2\text{отн}} = -G\frac{m_1m_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} - G\frac{\mu_2m_3}{r_{23}^3}\vec{r}_{23} + G\frac{\mu_2m_3}{r_{13}}\vec{r}_{13},$$

$$\mu_3\dot{\vec{v}}_{3\text{отн}} = -G\frac{m_1m_3}{r_{31}^3}\vec{r}_{31} - G\frac{\mu_3m_2}{r_{32}^3}\vec{r}_{32} + G\frac{\mu_3m_2}{r_{12}}\vec{r}_{12}.$$

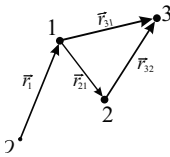


Рис. 2.10. Три вектора относительного положения трёх тел

Вводя обозначения для проекций

$$\vec{r}_{12} = \{\xi_2, \eta_2, \zeta_2\}, \quad \vec{r}_{13} = \{\xi_3, \eta_3, \zeta_3\},$$

находим

$$\vec{r}_{23} = \{\xi_3 - \xi_2, \eta_3 - \eta_2, \zeta_3 - \zeta_2\}.$$

Таким образом, приходим к шести уравнениям с шестью неизвестными.

Метод Якоби. Ещё один способ понижения порядка связан с именем Якоби. В нём движение точки 2 рассматривается относительно точки 1 в координатах ξ, η, ζ , как и раньше, а движение точки 3 рассматривается в системе координат ξ', η', ζ' с началом в центре инерции системы 1 + 2. Обе вспомогательные системы являются неинерциальными и движутся поступательно. Уравнения движения имеют вид:

$$\mu_2 \dot{\vec{v}}_{2\text{отн}} = \vec{F}_{21} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}_{23} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F}_{31},$$

$$m_3 \dot{\vec{v}}_{3'\text{отн}} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} - m_3 \vec{a}_3',$$

где \vec{v}_{3}' – скорость точки 3 относительно новой системы координат, а \vec{a}_3' – абсолютное ускорение начала этой системы (то есть центра масс системы 1+2):

$$\vec{a}_3' = (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}) / (m_1 + m_2) = -(\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}) / (m_1 + m_2).$$

Таким образом, уравнение относительного движения точки 3 запишется в виде

$$\mu' \dot{\vec{v}}_{3'\text{отн}} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32},$$

где

$$\mu' = \frac{(m_1 + m_2)m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

– приведённая масса трёх материальных точек.

Расстояния между материальными точками выражаются через координаты Якоби соотношениями:

$$r_{12}^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2,$$

$$r_{13}^2 = \left(\xi_3' + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi_2 \right)^2 + \left(\eta_3' + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \eta_2 \right)^2 + \left(\zeta_3' + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \zeta_2 \right)^2,$$

$$r_{23}^2 = \left(\xi_3' - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi_2 \right)^2 + \left(\eta_3' - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \eta_2 \right)^2 + \left(\zeta_3' - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \zeta_2 \right)^2.$$

2.4.4 Ограниченные задачи трёх тел

Плоское движение. Поскольку центр масс замкнутой системы трёх тел движется равномерно и прямолинейно со скоростью, задаваемой начальными условиями, достаточно рассмотреть движение относительно СЦМ. Как показано было в 1.3.3, движение замкнутой системы двух тел происходит в плоскости, проходящей через центр масс и имеющей постоянную ориентацию в пространстве. Движение трёх тел так же, как и двух, может происходить в одной неподвижной плоскости, но это уже *специальный* случай, или, как говорят, *ограниченная задача* трёх тел. Покажем, что достаточным для такого движения условием является равенство нулю по крайней мере двух проекций момента импульса системы.

Путь в начальный момент времени $t = 0$ все три точки лежат в плоскости $z = 0$ и $L_{0x} = L_{0y} = 0$. Тогда

$$m_1 y_1 \dot{z}_1 + m_2 y_2 \dot{z}_2 + m_3 y_3 \dot{z}_3 = 0,$$

$$m_1 x_1 \dot{z}_1 + m_2 x_2 \dot{z}_2 + m_3 x_3 \dot{z}_3 = 0,$$

так что в начальный момент Z -проекции скоростей связаны соотношениями

$$\frac{m_1 \dot{z}_1}{x_2 y_3 - x_3 y_2} = \frac{m_2 \dot{z}_2}{x_3 y_1 - x_1 y_3} = \frac{m_3 \dot{z}_3}{x_1 y_2 - x_2 y_1}.$$

Можно показать, что знаменатели этих дробей пропорциональны массам m_1, m_2 и m_3 соответственно, так что $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3$, то есть Z -составляющие скоростей всех точек одинаковы. Обозначим это общее значение через u и запишем выражение для Z -проекции скорости центра масс:

$$V_z = \frac{m_1 u + m_2 u + m_3 u}{m} = u,$$

но в СЦИ эта скорость равна нулю, стало быть и

$$u = \dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = 0.$$

Так как в начальный момент времени все точки лежат в плоскости $z = 0$, то и в дальнейшем они будут оставаться в этой плоскости.

Равновесные решения. Пусть $L_x = L_y = 0$, $L_z \neq 0$ и движение *плоское*. Существуют такие решения, когда частицы остаются в покое относительно вращающейся системы координат. Такие решения называются *равновесными*. В этой вращающейся системе координат

центробежная сила, действующая на каждое из тел, уравновешивается суммарной силой притяжения со стороны двух других тел, и мы имеем:

$$\Omega^2 x_1 + G \left\{ \frac{m_2}{r_{12}^3} x_{12} + \frac{m_3}{r_{13}^3} x_{13} \right\} = 0, \quad (2.4.1)$$

$$\Omega^2 y_1 + G \left\{ \frac{m_2}{r_{12}^3} y_{12} + \frac{m_3}{r_{13}^3} y_{13} \right\} = 0, \quad (2.4.2)$$

$$\Omega^2 x_2 + G \left\{ \frac{m_1}{r_{21}^3} x_{21} + \frac{m_3}{r_{23}^3} x_{23} \right\} = 0, \quad (2.4.3)$$

$$\Omega^2 y_2 + G \left\{ \frac{m_1}{r_{21}^3} y_{21} + \frac{m_3}{r_{23}^3} y_{23} \right\} = 0,$$

$$\Omega^2 x_3 + G \left\{ \frac{m_1}{r_{31}^3} x_{31} + \frac{m_2}{r_{32}^3} x_{32} \right\} = 0, \quad (2.4.4)$$

$$\Omega^2 y_3 + G \left\{ \frac{m_1}{r_{31}^3} y_{31} + \frac{m_2}{r_{32}^3} y_{32} \right\} = 0.$$

Напомним, что $x_{12} = x_1 - x_2$ и т.д.

Складывая уравнения (2.4.1), (2.4.3) и (2.4.4), получим

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0. \quad (2.4.5)$$

Складывая другую тройку уравнений,

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = 0,$$

видим, что центр инерции неподвижен и находится в начале координат.

Повернём систему координат так, чтобы ось OX прошла через точку 3, тогда $x_3 > 0$, $y_3 = 0$ и из последнего уравнения

$$\frac{m_1 y_1}{r_{31}^3} + \frac{m_2 y_2}{r_{32}^3} = 0.$$

Поскольку

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0, \quad (2.4.6)$$

то

$$m_1 y_1 \left(\frac{1}{r_{31}^3} - \frac{1}{r_{12}^3} \right) = 0.$$

Следовательно, либо $y_1 = 0$, либо $r_{12} = r_{13} \equiv l$. В первом случае координата y_2 тоже равна нулю, так что все три точки лежат на прямой, вращающейся относительно исходной ИСО с угловой скоростью Ω .

Материальные точки располагаются в углах равностороннего *треугольника Лагранжа* с сторонами $l = \text{const}$, вращающегося относительно исходной ИСО с угловой скоростью Ω . В обоих случаях динамическая задача о движении трёх тел сведена к статической задаче о равновесии трёх взаимодействующих между собой материальных точек.

Треугольник Лагранжа. Лагранж нашел также частное решение задачи трёх тел в виде равностороннего треугольника *переменных размеров*.

Введем комплексные переменные $w_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}\ddot{w}_1 &= -G \left\{ \frac{m_2}{|w_{12}|^3} w_{12} + \frac{m_3}{|w_{13}|^3} w_{13} \right\}, \\ \ddot{w}_2 &= -G \left\{ \frac{m_1}{|w_{21}|^3} w_{21} + \frac{m_3}{|w_{23}|^3} w_{23} \right\}, \\ \ddot{w}_3 &= -G \left\{ \frac{m_1}{|w_{31}|^3} w_{31} + \frac{m_2}{|w_{32}|^3} w_{32} \right\},\end{aligned}$$

где $w_{ij} = w_i - w_j$.

Будем искать решение в виде $w_i(t) = c_i w(t)$, где c_j , $j = 1, 2, 3$, – постоянные, а $w(t)$ – не зависящая от j функция времени. Подставив это в уравнения, получим:

$$\begin{aligned}c_1 \ddot{w} &= -G \left\{ \frac{m_2}{|c_{12}|^3} c_{12} + \frac{m_3}{|c_{13}|^3} c_{13} \right\} \frac{w}{|w|^3} \\ c_2 \ddot{w} &= -G \left\{ \frac{m_1}{|c_{21}|^3} c_{21} + \frac{m_3}{|c_{23}|^3} c_{23} \right\} \frac{w}{|w|^3} \\ c_3 \ddot{w} &= -G \left\{ \frac{m_1}{|c_{31}|^3} c_{31} + \frac{m_2}{|c_{32}|^3} c_{32} \right\} \frac{w}{|w|^3},\end{aligned}$$

где $c_{ij} = c_i - c_j$. Следовательно, если существуют такие постоянные c_i , что

$$c_i = \mu \sum_{j \neq i} m_j \frac{c_{ij}}{|c_{ij}|}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где μ – вещественное положительное число, то любое решение уравнения

$$\mu \ddot{w}(t) = -G \frac{w}{|w|^3}$$

удовлетворяет уравнению движения. Таким образом, задача трёх тел сведена к задаче о движении одной материальной точки с приведённой массой μ в ньютоновом поле притяжения.

2.4.5 Троянские астероиды

Троянскими называют астероиды, которые обращаются по той же орбите, что и та или иная планета Солнечной системы, однако никогда не сталкиваются с ней⁵. Такая стабильность обеспечивается тем, что «тройяцы» (как иногда именуют троянские астероиды) находятся в *точках Лагранжа*, где гравитационные взаимодействия небесных тел «складываются» так, что находящийся в точке Лагранжа объект может оставаться неподвижным относительно этих тел (в случае объектов Солнечной системы это означает, что астероид будет постоянно двигаться с той же скоростью, что и планета).

В Солнечной системе в окрестности точек Лагранжа располагаются определенные классы астрономических объектов. Так, в точках Лагранжа L4 и L5 Юпитера, Марса и двух сатурнианских лун также находятся троянские астероиды. В окрестностях точки Лагранжа L4 Нептуна астрономы обнаружили шесть «тройяцев», а в окрестностях L5 до сих пор найти астероиды не удавалось. Ученые полагают, что там могут располагаться около 150 троянских астероидов. Их изучение позволит специалистам получить новые данные об эволюции объектов Солнечной системы. Кроме того, исследование троянских астероидов важно для понимания природы короткопериодических комет и кентавров – астероидов, проявляющих также и свойства комет. Так, недавно другой коллектив авторов показал, что именно «тройяцы» могут пополнять пул кентавров, расположенный между Юпитером и Нептуном. <http://lenta.ru/news/2010/08/13/trojan>.

2.4.6 Упражнения

1. Записать систему уравнений движения трёх тел в декартовых координатах. Насколько можно уменьшить её порядок с помощью интегралов движения? Приведите их.
2. Понизить порядок системы уравнений для трёх тел выбором начала координат в одном из них.
3. Понижение порядка системы уравнений для трёх тел методом Якоби предполагает рассмотрение движения точки 2 относительно точки 1 (как в приведённой выше задаче), а затем – движения точки 3 относительно центра масс системы 1 + 2. Вывести уравнение движения точки 3.
4. Выразить кинетическую энергию системы трёх тел через разности их скоростей.

⁵Название это связано с событиями Троянской войны, описанными в «Илиаде» Гомера.



Глава 3

Абсолютно твёрдое тело

3.1 Скорости и ускорения

3.1.1 Определение абсолютно твёрдого тела

Мы переходим от описания движения систем, масса которых сосредоточена в отдельных точках (материальных точках), движущихся в пространстве и взаимодействующих как между собой, так и с внешним полем, к описанию систем с непрерывным распределением массы. Простейшей системой такого типа является *абсолютно твёрдое тело*, расстояние между любой парой точек которого остаётся постоянным в процессе движения. Это – *геометрическое определение*. Строго говоря, таких тел в природе нет, это, как и материальная точка, – *модель*, но есть тела, или правильнее сказать, *задачи*, в которых деформацией тел в процессе движения можно пренебречь. К таким задачам и применима данная модель¹.

Материальные точки в первой модели образуют счётное множество, их можно в принципе пронумеровать и характеризовать тело указанием координат этих точек и их масс (не следует интерпретировать эти точки как молекулы: на молекулярном уровне вступает в силу другая механика – квантовая). Во второй модели тело задаётся плотностью массы (линейной, поверхностной или объёмной), в случае

¹Сплошная среда – это среда, для описания состояния которой в общем случае требуется бесконечное множество (континуум) переменных, скажем, плотность массы во всех точках среды. При «застывании» этой среды, превращающем её в абсолютно твёрдое тело, она становится динамической системой с конечным числом степеней свободы (шестью) и в математическом отношении перестаёт отличаться от системы изолированных материальных точек.

неоднородного тела являющейся функцией координат. Переход от одной модели к другой осуществляется заменой суммы по материальным точкам интегралом по занимаемой телом области. При этом имеются две возможности. Можно разбить *область пространства*, в которой движется тело, на элементарные (неподвижные, не связанные с движущимся телом) ячейки dV_j , тогда масса dm_j каждой ячейки будет функцией времени, отражая свойства элемента тела, занимающего в настоящий момент j -ю ячейку. Индекс j здесь играет роль указателя номера в отеле, в котором один за другим сменяются постояльцы с разными массами dm_j . Второй подход заключается в разбиении *тела* на элементы δm_j , заполняющие теперь перемещающиеся вместе с ними элементарные области δV_j . Можно заметить, что j теперь играет роль имени постояльца, меняющего номера отеля один за другим: масса его (как и прочие свойства) остаётся постоянной, а вот адрес «мистера j » с течением времени изменяется. Для полноты аналогии следует представить себе весь отель в целом. Сделав это, мы тут же увидим существенную разницу между распределением гостей в отеле и точками твёрдого тела в пространстве. Несмотря на то, что точек в твёрдом теле бесконечное (даже несчётное) множество, достаточно знать положения всего трёх не лежащих на одной прямой точек, чтобы полностью определить положения остальных. Ввиду этой особенности модели абсолютно твёрдого тела удобно использовать «вмороженную» в твёрдое тело ПСК К. В остальном мы воспользуемся введёнными в разделе 1.10 обозначениями, произведя лишь замены

$$\vec{r}_{\text{abc}} = \vec{r}, \quad \vec{r}_{\text{отн}} = \vec{x}.$$

В таких обозначениях радиус-вектор \vec{r} произвольной точки твёрдого тела в НСК (с началом в точке O) выражается через её радиус-вектор \vec{x} в ПСК (с началом в точке O') соотношением

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{x} = \vec{R} + \sum x_i \vec{e}_i, \quad (3.1.1)$$

где $\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$. Точку O' , не обязательно совпадающую с центром масс, будем называть *полюсом* твёрдого тела.

По геометрическому определению абсолютно твёрдого тела расстояние между любыми двумя его точками A и B в процессе движения не меняется. Продифференцировав уравнение

$$(\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2 = \text{const}$$

по времени

$$2(\vec{r}_B - \vec{r}_A)(\dot{\vec{r}}_B - \dot{\vec{r}}_A) = 0,$$

получим

$$\vec{e}_{AB}(\vec{v}_B - \vec{v}_A) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\vec{e}_{AB}\vec{v}_A = \vec{e}_{AB}\vec{v}_B,$$

то есть проекции скоростей любых двух точек твёрдого тела на направление соединяющего их отрезка равны друг другу. Это – *кинематическое определение* абсолютно твёрдого тела.

3.1.2 Поступательное движение твёрдого тела

Поступательное движение – это движение, при котором отрезок, соединяющий две любые точки твёрдого тела, остаётся параллелен самому себе.

Теорема 1. При поступательном движении все точки твёрдого тела в каждый момент времени имеют одну и ту же скорость и одно и то же ускорение.

Доказательство. Действительно, (рис. 3.1)

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{AB} = \vec{r}_B + \vec{e}_{AB}r_{AB},$$

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \dot{\vec{e}}_{AB}r_{AB} + \vec{e}_{AB}\dot{r}_{AB},$$

но $\dot{\vec{e}}_{AB} = 0$ по определению поступательного движения, а $\dot{r}_{AB} = 0$ по определению твёрдого тела, откуда $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ и, следовательно, $\vec{a}_A = \vec{a}_B$.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 2. Если ускорения всех точек твёрдого тела в каждый момент времени одинаковы, тело движется поступательно.

Доказательство. Интегрируя равенство ускорений

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B,$$

получим

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{c}, \quad (3.1.2)$$

где \vec{c} – произвольный постоянный вектор. Спроектируем это равенство на орт, направленный от точки A к B :

$$\vec{v}_B\vec{e}_{AB} = \vec{v}_A\vec{e}_{AB} + \vec{c}\vec{e}_{AB}.$$

Согласно кинематическому определению твёрдого тела

$$\vec{c}\vec{e}_{AB} = 0,$$

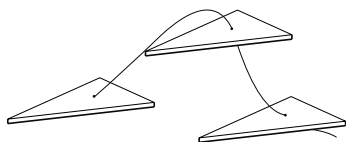


Рис. 3.1. Поступательное движение твёрдого тела (к теореме 1)

то есть или $\vec{c} = 0$, или $\vec{c} \perp \vec{e}_{AB}$. Проинтегрируем по времени (3.1.2). В первом случае приходим к равенству

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{c}_1,$$

из которого следует

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = r_{AB} \vec{e}_{AB} = \vec{c}_1$$

и

$$\vec{e}_{AB} = \text{const.}$$

Во втором случае получим

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{c}t + \vec{c}_1.$$

Из геометрического определения твёрдого тела ($|\vec{r}_A - \vec{r}_B| = \text{const}$) следует, что $\vec{c} = 0$, и мы снова приходим к выводу, что

$$\vec{e}_{AB} = \text{const.}$$

3.1.3 Вращательное движение

В случае произвольного движения твёрдого тела скорости и ускорения разных его точек различны по величине и направлениям, но свойство абсолютной твёрдости тела чрезвычайно ограничивает эти различия. Математически учесть влияние внутренних связей такого тела на его движение довольно легко: достаточно наряду с неподвижной системой координат $\{\vec{r}\}$ ввести подвижную, жестко с ним связанную подвижную систему координат $\{\vec{x}\}$. Поскольку все точки тела теперь неподвижны относительно этой ПСК, скорость и ускорения каждой точки \vec{x} тела относительно НСК определяются лишь переносными составляющими формул (1.10.4) и (1.10.5)

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{x}]. \quad (3.1.3)$$

и

$$\vec{a}(\vec{x}) = \vec{A} + [\dot{\vec{\Omega}}, \vec{x}] - \Omega^2 \vec{g}, \quad (3.1.4)$$

называемыми *формулами Эйлера и Ривальдса* соответственно. При $\vec{\Omega} = 0$ они описывают поступательное движение, при $\vec{V} = 0$, $\vec{A} = 0$ – вращательное движение вокруг фиксированной точки, при $\vec{\Omega}/\Omega = \text{const}$ и $\vec{V}\vec{\Omega} = 0$ – плоско-параллельное движение, частным случаем которого является вращение вокруг постоянной оси.

Пусть скорость некоторой точки \vec{x}_0 тела относительно НСК в данный момент времени равна нулю:

$$\vec{v}(\vec{x}_0) = 0.$$

По формуле Эйлера

$$0 = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{x}_0].$$

Вычтя это выражение из формулы Эйлера, записанной для произвольной точки тела \vec{x} , получим

$$\vec{v}(\vec{x}) = [\vec{\Omega}, \vec{x} - \vec{x}_0].$$

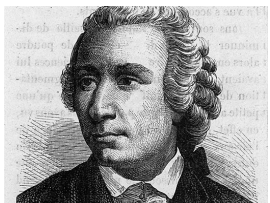
Отсюда следует, что нулевую скорость в данный момент имеют все точки тела, лежащие на прямой, проходящей через \vec{x}_0 и параллельной вектору $\vec{\Omega}$. Прямая эта называется *мгновенной осью вращения тела*. Выберем её в качестве совмещённых координатных осей OZ и Oz , а положение твёрдого тела в пространстве будем характеризовать положением трёх его точек A, B и P . Расстояние ρ точки P от оси Oz постоянно, и единственная переменная, характеризующая положение твёрдого тела относительно данной оси – это угол φ между плоскостью Oxz неподвижной системы и вектором $\vec{\rho} = \rho\vec{e}_\rho$, направленным в точку P по перпендикуляру, опущенному из этой точки на ось вращения. Вектор угловой скорости в этом случае даётся соотношением

$$\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z,$$

а векторное поле скоростей – формулой

$$\vec{v}(\vec{x}) = \Omega[\vec{e}_z, \vec{x}] = \Omega[\vec{e}_z, z\vec{e}_z + \rho\vec{e}_\rho] = \Omega\rho[\vec{e}_z, \vec{e}_\rho] = \Omega\rho\vec{e}_\varphi.$$

Траектории точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси – это окружности с центрами на оси вращения. Скорость точки на расстоянии ρ от оси вращения $v = \Omega\rho$. За время dt все точки твёрдого тела



Леонард Эйлер (1707–1783) – швейцарский, немецкий и российский учёный, внёсший фундаментальный вклад в развитие физики, астрономии и ряда прикладных наук, автор работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, теории музыки.

Следует отметить, что именно Л. Эйлер ввёл в употребление ссылки на достижения предшественников.

поворачиваются вокруг этой оси на один и тот же угол $d\varphi = \Omega dt$, так что угловая скорость $\vec{\Omega}$ одна и та же для всех точек тела: она характеризует вращение твёрдого тела в целом.

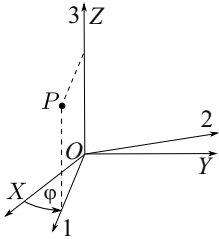


Рис. 3.2. Вращение ПСК относительно НСК с совмещёнными вертикальными осями

В общем случае вращение тела вокруг неподвижной точки может быть гораздо сложнее, но на малом (элементарном) временном интервале оно по-прежнему представляется малым поворотом вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через эту точку, а на конечном отрезке времени – как бесконечная последовательность таких элементарных поворотов вокруг вращающейся в свою очередь мгновенной оси вращения. Непрерывно изменяя своё положение относительно неподвижной системы координат, она описывает коническую поверхность, называемую *неподвижным аксоидом*.

Рассмотрим наряду с одной ПСК другую (ПСК*), началом которой служит другая точка тела, смещённая относительно первой на вектор \vec{c} . Заменяем в формуле (3.1.3) \vec{x} на $\vec{c} + \vec{x}^*$:

$$\vec{v}(\vec{c} + \vec{x}^*) = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{c} + \vec{x}^*] = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{c}] + [\vec{\Omega}, \vec{x}^*].$$

С другой стороны, в системе ПСК* должно выполняться то же равенство (3.1.3), что и в ПСК:

$$\vec{v}(\vec{x}^*) = \vec{V}^* + [\vec{\Omega}^*, \vec{x}^*].$$

Левые части этих выражений представляют скорость одной и той же точки твёрдого тела, правые выражают её через переменные, наблюдаемые в двух разных в замороженных системах координат ПСК и ПСК*, поэтому

$$\vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{c}] + [\vec{\Omega}, \vec{x}^*] = \vec{V}^* + [\vec{\Omega}^*, \vec{x}^*].$$

Переставляя слагаемые,

$$\vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{c}] - \vec{V}^* = [\vec{\Omega}^* - \vec{\Omega}, \vec{x}^*],$$

видим, что левая, а следовательно, и правая часть равенства не зависит от x^* , что возможно лишь при $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}^*$. В результате получаем

$$\vec{\Omega}^* = \vec{\Omega}, \quad \vec{V}^* = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{c}].$$

Таким образом, угловая скорость $\vec{\Omega}$ не зависит от выбора замороженной (подвижной) системы координат: для всех, связанных с телом систем

координат, в данный момент времени она одна и та же, её направление совпадает с направлением мгновенной оси вращения. С течением же времени, она изменяется, при этом мгновенная ось вращения описывает в подвижной системе координат коническую поверхность, называемую *подвижным аксоидом*.

3.1.4 Плоско-параллельное движение

Плоско-параллельное движение твёрдого тела – это движение, при котором скорости всех его точек параллельны некоторой неподвижной относительно ИСО плоскости. Поскольку скорости всех точек любого перпендикулярного этой плоскости отрезка тела одинаковы, можно говорить о движении *плоской фигуры*, представляющей собой проекцию тела на эту плоскость. Пусть такой плоскостью является одна из плоскостей НСК, скажем, XOY . Построим параллельно ей так же оцифрованную во взаимно-перпендикулярных направлениях плоскость, жёстко связанную с твёрдым телом. Обозначим эти плоскости через Π_{xy} и Π_{12} соответственно и воспользуемся введёнными ранее обозначениями для координат и ортов НСК и ПСК. Возьмём точку \vec{x} : её координаты в Π_{12} постоянны, но относительно плоскости Π_{xy} точка движется, вычерчивая на ней некоторую кривую. Скорость проекции этой точки на Π_{xy} определяется формулой Эйлера

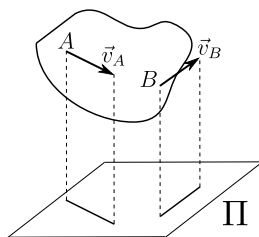


Рис. 3.3. Плоско-параллельное движение твёрдого тела

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{x}],$$

где \vec{V} – линейная скорость начала координат подвижной системы (будем называть эту точку *полюсом*) относительно неподвижной, а $\vec{\Omega}$, напомним, угловая скорость ПСК относительно НСК. Из этой формулы следует, что

$$v_3(x_1, x_2) = V_3 + \Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1.$$

Так как $v_3 = V_3 = 0$, а x_1, x_2 – произвольные координаты, то $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ и вектор угловой скорости $\vec{\Omega} \perp \Pi$. Две другие проекции скорости имеют вид:

$$v_1(x_1, x_2) = V_1 - \Omega x_2, \quad v_2(x_1, x_2) = V_2 + \Omega x_1. \quad (3.1.5)$$

Приравнивая скорости v_1 и v_2 нулю, находим координаты точки плоскости Π_{12} ,

$$v_1(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2) = 0, \quad v_2(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2) = 0$$

имеют решения

$$\overset{\circ}{x}_1 = -\frac{V_2(t)}{\Omega(t)}, \quad \overset{\circ}{x}_2 = -\frac{V_1(t)}{\Omega(t)}, \quad (3.1.6)$$

имеющей в данный момент нулевую скорость относительно Π_{xy} . Иными словами, эта точка является *мгновенным центром вращения плоской фигуры*. (заметим, что сам этот центр не обязательно принадлежит проекции данного тела, а может лежать и за её пределами подобно тому, как центр масс кольца находится в точке, в окрестности которой вообще никакой массы нет).

Умножив формулы (3.1.5) на dt , мы увидим, что перемещение плоской фигуры за элементарный промежуток времени состоит из двух бесконечно малых частей: поступательного перемещения вместе с полюсом при нулевом повороте и поворота вокруг полюса при нулевом поступательном перемещении. Если мгновенный центр скоростей не меняет своего положения в движущейся фигуре, то эта точка фигуры, как имеющая постоянно нулевую скорость, будет неизменно связана с неподвижной плоскостью, и мгновенный центр превратится в постоянный центр вращения: это вращение вокруг неподвижной оси. Если же положение мгновенного центра вращения меняется в процессе движения, то оно меняется непрерывным образом и при этом как в неподвижной плоскости, так и в подвижной, движущейся вместе с фигурой. Образующие при этом кривые называются соответственно *неподвижной* и *подвижной центроидами* или *полодиями*. Другими словами, движение плоской фигуры в её плоскости можно представить качением без скольжения подвижной центроиды по неподвижной.

Знания положения мгновенного центра вращения плоской фигуры достаточно для нахождения всего *поля скоростей* $\vec{v}(\vec{x})$. Действительно, мгновенный центр вращения можно рассматривать как общий центр окружностей, по которым движутся точки фигуры. Радиус вращения каждой точки \vec{x} совпадает с расстоянием

$$\overset{\circ}{R}(\vec{x}) = |\vec{x} - \overset{\circ}{\vec{x}}|$$

от неё до мгновенного центра $\overset{\circ}{\vec{x}}$, поэтому каждая точка \vec{x} вращающейся плоской фигуры имеет линейную скорость относительно неподвижной системы

$$v(\vec{x}) = \overset{\circ}{R}(\vec{x}) \Omega, \quad (3.1.7)$$

направленную по касательной к проходящей через неё окружности, то есть перпендикулярно вектору \vec{R} , в сторону вращения фигуры. Угловые скорости всех точек абсолютно твёрдого тела одинаковы и равны $\dot{\Omega}$.

Рассмотрим теперь ускорение точек плоской фигуры. Согласно (3.1.4), ускорение каждой её точки представляется в виде суммы трёх составляющих,

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{пол}} + \vec{a}_{\text{вр}} + \vec{a}_{\text{цс}}, \quad (3.1.8)$$

представляющих соответственно ускорение полюса

$$\vec{a}_{\text{пол}} = \vec{A},$$

вклад углового ускорения вращения фигуры

$$\vec{a}_{\text{вр}} = [\dot{\Omega} \vec{r}]$$

и центростремительное ускорение

$$\vec{a}_{\text{цс}} = -\Omega^2 \vec{r},$$

остающееся и тогда, когда фигура вращается равномерно. При плоском движении вектор $\vec{\Omega}$ сохраняет постоянное направление, перпендикулярное плоскости, так что его производная коллинеарна ему.

В проекциях на оси подвижной системы координат имеем:

$$a_1 = A_1 - \dot{\Omega}x_2 - \Omega^2x_1, \quad a_2 = A_2 + \dot{\Omega}x_1 - \Omega^2x_2. \quad (3.1.9)$$

Подобно тому, как определён мгновенный центр скоростей \vec{x} , можно определить и *мгновенный центр ускорений*, как точку \vec{x}^* плоской фигуры, ускорение которой в данное мгновение равно нулю. Полагая в формулах (3.1.9) левые части равными нулю,

$$A_1 - \dot{\Omega}^*x_2 - \Omega^2x_1 = 0,$$

$$A_2 + \dot{\Omega}^*x_1 - \Omega^2x_2 = 0$$

и разрешая эту систему относительно x_1^* , x_2^* , находим:

$$x_1^* = \frac{A_1\Omega^2 - A_{x_2}\dot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2 + \Omega^4}, \quad x_2^* = \frac{A_2\Omega^2 + A_{x_1}\dot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2 + \Omega^4}.$$

Из (3.1.8) и выражений для слагаемых видно, что сумма $\vec{a}' = \vec{a}_{\text{вр}} + \vec{a}_{\text{цс}}$ есть составляющая ускорения точки, обусловленная вращением фигуры вокруг полюса. Если провести через эту точку окружность радиусом x_P с центром в полюсе, то ускорение $\vec{a}_{\text{вр}}$, перпендикулярное векторам \vec{x}_P и $\vec{\Omega}$, будет тангенциальным по отношению к этой окружности, иметь абсолютную величину $\dot{\Omega}x_P$ и направление в сторону вращения при $\dot{\Omega} > 0$ и в противоположную сторону в противном случае. Ускорение же $\vec{a}_{\text{цс}}$ будет нормальной составляющей, направленной к центру окружности. Выполнив это геометрическое построение, можно увидеть также, что тангенс угла Θ , образуемого вектором \vec{a}' с обратным направлением радиус-вектора \vec{x}_P определяется равенством

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{a_{\text{вр}}}{a_{\text{цс}}} = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}.$$

Как и при анализе поля скоростей, положение мгновенного центра ускорений однозначно определяет и всё поле ускорений в движущейся фигуре. Именно, если $\vec{\rho}$ – радиус-вектор какой-либо точки относительно этого центра, то согласно (3.1.4) ускорение точки будет

$$\vec{a} = \left[\dot{\vec{\Omega}}, \vec{\rho} \right] - \Omega^2 \vec{\rho}.$$

Так как слагаемые взаимно ортогональны, то

$$a(\vec{\rho}) = \rho \sqrt{\dot{\Omega}^2 + \Omega^4}.$$

Таким образом, абсолютная величина ускорения точки плоской фигуры пропорциональна расстоянию от неё до мгновенного центра ускорений. Векторы ускорений всюду составят один и тот же угол Θ с лучом, проведённым из данной точки в мгновенный центр ускорений.

3.1.5 Пример

Диск диаметром d катится без скольжения по прямой со скоростью центра v_O и ускорением a_O . Найти мгновенные центры скоростей, ускорений и ускорение точки диска, совпадающей с мгновенным центром скоростей.

Эта прямая здесь есть не что иное, как неподвижная центроида, а подвижной центроидой является обод диска. В точке их соприкосновения скорости V_1 и V_2 равны нулю (прямая, по которой катится диск, неподвижна, а качение диска происходит без проскальзывания). Согласно (3.1.6), мгновенный центр скоростей находится в точке P соприкосновения диска с прямой. Ускорение же точки P направлено по общей нормали к обоим центроидам в этой точке, то есть, по радиусу диска к его центру. Приняв точку P в качестве полюса, рассмотрим ускорение \vec{a}_O

центра диска O . Согласно формуле (3.1.8), оно состоит из трёх членов: ускорения полюса абсолютной величиной

$$a_{\text{пол}} = (d/2)\Omega^2,$$

тангенциального ускорения

$$a_{\text{вр}} = (d/2)\dot{\Omega}$$

и центростремительного ускорения

$$a_{\text{цс}} = (d/2)\Omega^2.$$

Последнее равно по величине первому слагаемому, но имеет противоположное направление. В векторной сумме они взаимно уничтожаются, и мы получаем формулу

$$a_O = (d/2)\dot{\Omega},$$

позволяющей выразить угловое ускорение тела через заданное ускорение центра диска

$$\dot{\Omega} = \frac{a_O}{d/2}.$$

Осталось найти саму угловую скорость. С этой целью воспользуемся формулой (3.1.7), из которой следует

$$\Omega = \frac{v_O}{d/2}.$$

В результате получаем: ускорение точки, находящейся в мгновенном центре скоростей,

$$a_P = (d/2)\Omega^2 = \frac{2v_O^2}{d};$$

расстояние от центра диска O до мгновенного центра ускорений Q

$$r_{OQ} = \frac{a_O}{\sqrt{\dot{\Omega}^2 + \Omega^4}} = \frac{a_O d^2}{4\sqrt{a_O^2 (d/2)^2 + v_O^4}};$$

тангенс угла между вращательным ускорением точки и направлением луча, проведённого из неё к полюсу

$$\text{tg}\Theta = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2} = \frac{a_O d}{2v_O}.$$

3.1.6 Упражнения

1. Найти ускорение точки движущейся плоской фигуры, в которой находится в данный момент мгновенный центр скоростей.
2. Найти координаты мгновенного центра ускорений на неподвижной плоскости.
3. Вывести формулу для определения ускорений по известным координатам мгновенного центра ускорений.

3.2 Геометрия масс

3.2.1 Моменты инерции

Важнейшее для динамики материальной точки свойство, её инерция характеризуется единственным положительным числом – её массой. Инерционные свойства твёрдого тела определяются уже не просто

его массой, но и её распределением по объёму тела. В случае деформируемого тела это распределение характеризуется плотностью, заданной как функция координат, которая может меняться в процессе движения. Однако наличие жёстких внутренних связей в абсолютно твёрдом теле существенно упрощает ситуацию: вместо функции трёх непрерывных переменных, характеризующих плотность тела в каждой его точке оказывается достаточным знать всего шесть чисел. Числа эти называются *моментами инерции* твёрдого тела. Два тела с одинаковыми моментами инерции оказываются динамически эквивалентными, хотя структура распределения их масс может быть различной.

Вычисления аддитивных характеристик тела (массы, веса, импульса, моментов инерции и др.) путём разбиения тела на элементы и вычисления вклада в результат каждого из них с последующим суммированием, в непрерывном случае переходящим в интегрирование. Как было сказано в **3.1.1**, сделать это можно двумя способами. Впрочем, если речь идёт о скалярной характеристике твёрдого тела, каковой является, например, масса, в обоих случаях результат получается один и тот же, интегрируем ли мы в неподвижной системе координат (НСК), относительно которой само тело движется,

$$\int_{V(t)} dm(\vec{r}) = m,$$

или в подвижной, жёстко связанной с телом системе (ПСК):

$$\int_V \delta m(\vec{x}) = m.$$

Однако, векторные и тензорные величины в общем случае зависят от положения тела относительно НСК, и при перемещении тела меняются. Рассмотрение движения каждого элемента относительно НСК (которая обычно предполагается инерциальной) позволяет применять законы движения в ИСО, которые выглядят проще, чем их аналоги в НСО, из-за отсутствия сил инерции, однако векторные и тензорные характеристики распределения массы в теле становятся зависящими от времени. Более удобно описывать характеристики распределения масс в ПСК: в этом случае они не зависят от положения тела и остаются в процессе его движения постоянными. При этом, конечно, придётся использовать законы движения в НСО, однако с этим легче смириться, особенно, если иметь в виду не учебные модели (диск, стержень, цилиндр), а объекты «настоящей механики» – космический корабль, боевая ракета, турбина современной гидроэлектростанции.

Рассмотрим несколько примеров вычисления характеристик твёрдого тела в связанной с ним ПСК, заметив предварительно, что распределение массы, которое, в принципе, всегда объёмно, часто можно считать поверхностным (например, в тонкостенной сфере) или даже линейным (как в случае тонкого стержня). Соответствующим образом выражается и элемент массы $\delta m(\vec{x})$: он представляется в виде $\rho(\vec{x})\delta V$ в случае объёмного распределения, в виде $\sigma(\vec{x})\delta S$ в случае поверхностного распределения и в виде $\lambda(\vec{x})\delta l$ – в случае линейного распределения массы тела (ρ , σ , λ – объёмная, поверхностная и линейная плотности массы соответственно).

Приведём простейшие характеристики распределения массы твёрдого тела в ПСК².

Положение центра масс (центра инерции) тела³

$$\vec{R} = \frac{1}{m} \int \vec{r} \delta m.$$

Вектор этот соединяет начало ПСК с центром масс. Если две эти точки совпадают (обычно, но не всегда, ПСК так и выбирается), $\vec{R} = 0$.

Момент инерции тела J_A относительно заданной его точки A определяется интегралом

$$J_A = \int (\vec{x} - \vec{x}_A)^2 \delta m.$$

В частности, момент инерции относительно начала координат O

$$J_O = \int r^2 \delta m, \quad r^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Момент инерции тела относительно заданной оси AB даётся формулой

$$J_{AB} = \int \varrho_{AB}^2 \delta m,$$

где ϱ_{AB} – расстояние от точки \vec{x} тела до оси AB . В частности, моменты инерции относительно осей $O1$, $O2$ и $O3$ (*осевые моменты*) имеют вид:

$$J_1 = \int (x_2^2 + x_3^2) \delta m,$$

²За редким исключением, мы не будем далее пользоваться представлением этих характеристик в НСК, поэтому необходимость в раздельном их обозначении, отпадает и мы возвращаемся к обычному шрифту. Однако, для координат мы всё же оставим прямой шрифт, а для дифференциала δ как напоминание об операциях в ПСК.

³В последующих выражениях интегрирование предполагается по всей занимаемой телом области – объёму, поверхности или линии.

$$J_2 = \int (x_1^2 + x_3^2) \delta m,$$

$$J_3 = \int (x_1^2 + x_2^2) \delta m.$$

Следующие свойства осевых моментов вытекают непосредственно из их определения:

- 1) осевые моменты инерции неотрицательны;
- 2) сумма моментов инерции относительно координатных осей не зависит от их направления и равна удвоенному моменту инерции относительно начала координат:

$$J_1 + J_2 + J_3 = 2J_O;$$

- 3) момент инерции относительно любой из координатных осей не больше суммы моментов относительно двух других осей и не меньше их разности: при $J_1 \geq J_2$

$$J_1 - J_2 \leq J_3 \leq J_1 + J_2.$$

Другими словами, из трёх отрезков, пропорциональных этим моментам, всегда можно построить треугольник (если ни один из них не равен нулю).

Как будет видно из дальнейшего, осевые моменты инерции характеризуют инертность тела по отношению к вращению вокруг соответствующих осей. Наряду с ними используются *центробежные моменты инерции*, задаваемые соотношениями

$$J_{12} = \int x_1 x_2 \delta m, \quad J_{23} = \int x_2 x_3 \delta m, \quad J_{31} = \int x_3 x_1 \delta m.$$

Они характеризуют степень неуравновешенности, несимметричности распределения масс относительно координатных плоскостей. В отличие от осевых моментов, центробежные моменты могут иметь любой знак. Они симметричны относительно индексов,

$$J_{12} = J_{21}, \quad J_{23} = J_{32}, \quad J_{31} = J_{13},$$

и удовлетворяют неравенствам

$$2J_{12} \leq J_3, \quad 2J_{23} \leq J_1, \quad 2J_{31} \leq J_2.$$

Обозначим через m полную массу тела, так что

$$\frac{\delta m}{m} \geq 0,$$

и

$$\int \frac{\delta m}{m} = \frac{1}{m} \int \delta m = \frac{m}{m} = 1.$$

Тогда $\delta m/m$ можно рассматривать как *вероятностную меру* (распределение вероятности) δP в объёме тела, а x_1, x_2, x_3 как значения соответствующих случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 ⁴. Используя угловые скобки для обозначения усреднения по данному распределению,

$$\langle \dots \rangle = \int \dots \delta P,$$

можно увидеть, что моменты инерции пропорциональны соответствующим моментам случайных переменных:

$$J_1 = m\langle \xi_2^2 + \xi_3^2 \rangle, \quad J_2 = m\langle \xi_1^2 + \xi_3^2 \rangle, \quad J_3 = m\langle \xi_1^2 + \xi_2^2 \rangle,$$

$$J_{12} = m\langle \xi_1 \xi_2 \rangle, \quad J_{23} = m\langle \xi_2 \xi_3 \rangle, \quad J_{31} = m\langle \xi_3 \xi_1 \rangle.$$

Заметим, кстати, что первые моменты (*математические ожидания*) самих случайных переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3 являются координатами центра инерции:

$$\langle \xi_1 \rangle = \frac{1}{m} \int x_1 \delta m, \quad \langle \xi_2 \rangle = \frac{1}{m} \int x_2 \delta m, \quad \langle \xi_3 \rangle = \frac{1}{m} \int x_3 \delta m.$$

3.2.2 Тензор инерции

До сих пор мы ничем не ограничивали выбор замороженной системы координат кроме её жёсткой связи с твёрдым телом. Таких систем, сдвинутых и повернутых относительно друг друга, существует бесконечное множество. В связи с этим возникает проблема перехода от описания данного тела в одной замороженной системе, скажем, $(O123)$, к описанию в другой такой системе, скажем, $K'(O'1'2'3')$. Обозначим проекции вектора $\overline{OO'}$ на оси нештрихованной системы координат через X_1, X_2 и X_3 . Координаты одной и той же точки тела в этих системах связаны соотношением

$$\sum_j x_j \vec{e}_j = \sum_j X_j \vec{e}_j + \sum_j x'_j \vec{e}'_j.$$

⁴Приводимая здесь вероятностная интерпретация может оказаться полезной основой для вычисления этих характеристик методом Монте-Карло, использующим алгоритмы генерирования набора случайных величин с заданным совместным распределением.

Умножив скалярно обе части равенства на \vec{e}_i и учитывая свойства произведений ортов, получим

$$x_i = X_i + \sum_j a_{ij} x'_j, \quad (3.2.1)$$

где

$$a_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}'_j$$

– тензор поворота.

Центр масс характеризует положение тела в пространстве, а набор направляющих косинусов a_{ij} – его ориентацию в пространстве. Если a_{ij} – матрица прямого преобразования вектора при переходе от системы K к K' , то $a_{ij}^T = a_{ji}$ – матрица обратного преобразования и

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij}^T a_{jk} = \sum_{j=1}^3 a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik}.$$

Из девяти направляющих косинусов независимы только три, остальные могут быть выражены через них. Добавляя к ним координаты центра масс видим, что число независимых координат (число степеней свободы) абсолютно твёрдого тела $n = 6$. Три точки, не лежащие на прямой, полностью задают положение тела в пространстве.

Ниже мы будем пользоваться *соглашением о суммировании по парам немых индексов, нумерующих координаты*, согласно которому знак суммирования опускается, остаются только индексы, пробегающие значения 1,2,3. Так, приведённое выше выражение принимает вид

$$a_{ij}^T a_{jk} = a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik}.$$

Матрица, составленная из осевых и взятых с обратным знаком центробежных моментов инерции,

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_2 & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \int (x_2^2 + x_3^2) \delta m & -\int x_1 x_2 \delta m & -\int x_1 x_3 \delta m \\ -\int x_2 x_1 \delta m & \int (x_1^2 + x_3^2) \delta m & -\int x_2 x_3 \delta m \\ -\int x_3 x_1 \delta m & -\int x_3 x_2 \delta m & \int (x_1^2 + x_2^2) \delta m \end{pmatrix}$$

образует *тензор инерции*. Обозначив⁵ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_k^2$ представим его в виде

$$I_{ij} = \int (x_k^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \delta m.$$

Отметим следующие свойства тензора инерции.

1. Тензор инерции симметричен: $I_{ij} = I_{ji}$.
2. След тензора инерции

$$\text{Tr} I_{ij} = I_{11} + I_{22} + I_{33} = 2 \int x_k^2 \delta m$$

не зависит от ориентации осей системы координат.

3. Пусть I_{ij} – тензор инерции тела в системе координат K с началом в центре масс. При параллельном переносе системы координат на вектор \vec{c} тензор инерции преобразуется по закону

$$I_{ij} \mapsto I'_{ij} = I_{ij} + m(c^2 \delta_{ij} - c_i c_j), \quad (3.2.2)$$

называемому *теоремой Штейнера*.

Доказательство. При поступательном смещении системы координат на вектор \vec{c} радиус-вектор каждой точки тела преобразуется по формуле

$$x_i \mapsto x'_i = x_i - c_i.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} I_{ij} \mapsto I'_{ij} &= \int (x_k'^2 \delta_{ij} - x'_i x'_j) \delta m = \\ &= \int \{(\vec{x} - \vec{c})^2 \delta_{ij} - (x_i - c_i)(x_j - c_j)\} \delta m = \\ &= \int \{(x_k^2 - 2\vec{x}\vec{c} + c^2) \delta_{ij} - (x_i x_j - c_i x_j - x_i c_j + c_i c_j)\} \delta m = \\ &= I_{ij} + m(c^2 \delta_{ij} - c_i c_j) \end{aligned}$$

(здесь использовано соотношение $\int x_i \delta m = 0$). В частности, для осевых моментов имеем:

$$I'_{11} = I_{11} + m d_1^2,$$

$$I'_{22} = I_{22} + m d_2^2,$$

⁵Поскольку $x_k^2 \equiv x_k x_k$, на это выражение распространяется эйнштейновское правило суммирования по повторяющимся индексам.

$$I'_{33} = I_{33} + md_3^2.$$

где $d_1^2 = c_2^2 + c_3^2$ и т.д. Видно, что наименьшее значение осевой момент имеет, когда он проходит через центр инерции. Момент инерции тела относительно другой оси, параллельной этой, но смещённой относительно неё на расстояние d , увеличивается на величину md^2 , равную моменту относительно этой оси всей массы тела, собранной в одну точку и помещённой в его центр инерции.

Любое перемещение системы координат можно представить в виде последовательности поступательного смещения и поворота вокруг оси, проходящей через её начало, относительно начала координат и использовать соответствующие свойства тензора инерции свойства.

4. При повороте системы координат относительно её начала из положения K в положение K' тензор инерции преобразуется по закону

$$I_{ij} \mapsto I'_{ij} = a_{ip} a_{jq} I_{pq} = (aIa^T)_{ij}. \quad (3.2.3)$$

5. Тензор инерции аддитивен: разбив мысленно твёрдое тело на непересекающиеся части A, B, C, \dots , его тензор инерции можно представить в виде суммы тензоров инерции этих частей:

$$I_{ij} = I_{ij}(A) + I_{ij}(B) + I_{ij}(C) + \dots$$

3.2.3 Главные оси

Геометрический образ вектора – стрелка (направленный отрезок), тогда как геометрический образ симметричного тензора, каковым является тензор инерции, – эллипсоид

$$I_{ij} x_i x_j = 1$$

(напомним, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). При определённой ориентации системы координат это уравнение принимает вид

$$I'_{11} x_1^2 + I'_{22} x_2^2 + I'_{33} x_3^2 = 1.$$

Элементы $I_1 \equiv I'_{11}$, $I_2 \equiv I'_{22}$, $I_3 \equiv I'_{33}$ называют *главными моментами инерции тела*, соответствующие оси – *главными осями инерции тела*, а преобразование

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

– *приведением тензора к главным осям*. Геометрически, главные моменты инерции суть обратные квадраты полуосей a_1 , a_2 , a_3 эллипсоида инерции

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1.$$

Все главные моменты неотрицательны, и каждый из них не превышает сумму двух других:

$$I_1 + I_2 = \int (x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \delta m \geq \int (x_1^2 + x_2^2) \delta m = I_3.$$

Главные оси инерции симметричных фигур совпадают с осями симметрии.

Примеры:

- 1) $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ – асимметричный волчок,
- 2) $I_1 = I_2 \neq I_3$ – симметричный волчок,
- 3) $I_1 = I_2 = I_3$ – шаровой волчок.

Для плоского тела (все $x_3 = 0$):

$$I_1 = \int x_2^2 \delta m, \quad I_2 = \int x_1^2 \delta m, \quad I_3 = \int (x_1^2 + x_2^2) \delta m = I_1 + I_2.$$

Ротатор: все его точки расположены на прямой. Возьмём её в качестве оси OZ , тогда все $x_1 = x_2 = 0$,

$$I_1 = I_2 = \int x_3^2 \delta m, \quad I_3 = 0.$$

Ротатор имеет всего две (а не три, как объёмное твёрдое тело) вращательные степени свободы.

Главную ось инерции можно (эквивалентно) определить как ось i , соответствующую осевому моменту инерции I_i , центробежные «соседи» которого I_{ij} , $j \neq i$, равны нулю. Легко убедиться, что любая ось симметрии (то есть проходящая через тело прямая, на любой пересекающей которую перпендикулярной прямой плотность тела даётся чётной относительно точки пересечения функцией) является главной осью инерции. Действительно, образующую центробежный момент I_{ij} сумму произведений $x_i x_j \delta m$ по элементарным объёмам можно преобразовать в сумму по парам симметрично расположенных элементов $(x_i x_j + x'_i x'_j) \delta m = (x_i x_j - x_i x_j) \delta m = 0$, компенсирующих вклады друг друга.

Очевидно, любая ось, проходящая через центр однородного или неоднородного, но со сферически симметричным распределением массы в нём, шара является главной. Ось однородного или неоднородного,

но с цилиндрически симметричным распределением в нём массы, цилиндра является главной. Кроме неё цилиндр имеет бесконечное множество главных осей, проходящих через его центр перпендикулярно первой.

Пусть распределение массы тела обладает плоской симметрией (зеркальной симметрией относительно некоторой проходящей через неё плоскости). Заменяя суммирование по элементарным объёмам суммированием по парам симметричных элементов, легко убедиться в том, что центр масс лежит в плоскости симметрии, а проходящая через него главная ось инерции перпендикулярна этой плоскости.

Ниже мы убедимся в том, что тензор инерции выполняет преобразование вектора угловой скорости Ω_i вращающегося вокруг фиксированной точки тела в вектор его момента импульса L_i ,

$$\Omega_i \mapsto L_i = I_{ij}\Omega_j.$$

При этом вектор $\{\Omega_1, 0, 0\}$, лежащий на одной (в данном случае, на первой) оси, преобразуется в вектор $\{I_{11}\Omega_1, I_{21}\Omega_1, I_{31}\Omega_1\}$ с ненулевыми в общем случае компонентами. Если же ось, вокруг которой вращается тело, является главной, момент импульса будет направлен вдоль этой же оси: $\{I_1\Omega_1, 0, 0\}$. Это свойство можно использовать для определения главных осей.

3.2.4 Моменты инерции и симметрия

Наивысшей (сферической) степенью симметрии в трёхмерном пространстве обладают сфера (сферическая поверхность) и шар. Любая прямая, проведённая через центр симметрии этих тел является их главной осью. Бесконечно тонкая сфера радиусом r и массой m обладает моментом инерции

$$J = \frac{2}{3}mr^2.$$

Для тонкой сферы, то есть, такой, что имеет смысл говорить об объёмной плотности материала ρ и (конечной, но малой) толщине δr , выражение это может быть представлено в виде

$$\delta J = \frac{8\pi}{3}[r^2\rho\delta r]r^2.$$

Однородный шар можно представить себе как совокупность вложенных друг в друга тонких сфер. Вследствие свойства аддитивности,

момент инерции шара равен сумме моментов инерции сфер. Для однородного шара радиуса a результат представляется в виде

$$J_O = \frac{8\pi}{3} \int_0^a \rho r^4 \delta r = \frac{8\pi}{3} \rho \frac{a^5}{5} = \frac{2}{5} m a^2.$$

В случае неоднородного шара, плотность которого зависит лишь от расстояния до центра (то есть распределение массы в нём сферически симметрично), имеем:

$$J_O = \frac{8\pi}{3} \int_0^a \rho(r) r^4 \delta r.$$

Легко решается задача о моментах инерции эллипсоида

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leq 1 :$$

достаточно сделать замену переменных $x_i \rightarrow a_i x_i$, преобразующую эллипсоид в однородный шар единичного радиуса, и воспользоваться предыдущими результатами. В результате получим:

$$J_1 = \frac{m}{5} (a_2^2 + a_3^2), \quad J_2 = \frac{m}{5} (a_3^2 + a_1^2), \quad J_3 = \frac{m}{5} (a_1^2 + a_2^2).$$

Более широкий класс симметричных фигур в отношении простоты вычислений моментов инерции образуют фигуры вращения. Простейшим примером является круговой цилиндр радиусом a , высотой h и осью OZ . Как и в случае с шаром, сначала запишем осевой момент инерции для цилиндрической поверхности радиуса ρ и толщиной $\delta\rho$,

$$\delta J_z = 2\pi \rho h \rho^2 \rho \delta\rho,$$

а затем проинтегрируем его по ρ от нуля до a :

$$J_z = \int_0^a 2\pi \rho h \rho^2 \rho \delta\rho = \frac{\pi}{2} \rho h a^4 = \frac{m a^2}{2}.$$

В случае тела, ограниченного поверхностью вращения с переменным по высоте радиусом, удобно разрезать тело *горизонтальными* плоскостями на тонкие диски. Момент инерции диска относительно

оси Oz будет зависеть лишь от его толщины dz , радиуса $a(z)$, зависящего теперь от высоты (плотность мы пока примем постоянной):

$$\delta J_z = \frac{\pi \rho a^4(z)}{2} \delta z.$$

Интегрируя это выражение по высоте z , получим для момента инерции тела вращения относительно его оси:

$$J_z = \frac{\pi \rho}{2} \int_0^h a^4(z) \delta z.$$

Видно, впрочем, что формула эта легко обобщается на случай плотности, зависящей от высоты:

$$J_z = \frac{\pi}{2} \int_0^h a^4(z) \rho(z) \delta z.$$

Встречаются (особенно в учебных задачах) тела, которые можно представить как соединение двух симметричных тел или исключение одного симметричного тела из другого, тоже симметричного. В этих случаях особенно удобно свойство аддитивности в сочетании с теоремой Штейнера.

3.2.5 Приведение к главным осям

Пусть единичный вектор n_i является одним из ортов главной системы координат. Это означает, что

$$I_{ij} n_j = \lambda n_i,$$

или, в раскрытом виде,

$$(I_{11} - \lambda) n_1 + I_{12} n_2 + I_{13} n_3 = 0,$$

$$I_{21} n_1 + (I_{22} - \lambda) n_2 + I_{23} n_3 = 0,$$

$$I_{31} n_1 + I_{32} n_2 + (I_{33} - \lambda) n_3 = 0.$$

Чтобы эта система имела нетривиальные решения, определитель из коэффициентов должен обращаться в нуль:

$$|I_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = \begin{vmatrix} I_{11} - \lambda & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - \lambda & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Кубическое уравнение это называют *характеристическим*. Три его корня $\lambda^{(k)} = I_1, I_2, I_3$ являются значениями трёх главных моментов инерции. Каждому из

них соответствует главная ось, направляющие косинусы $n_i^{(k)}$ которой находятся из уравнений

$$(I_{ij} - I_1 \delta_{ij}) n_j^{(1)} = 0, \quad (I_{ij} - I_2 \delta_{ij}) n_j^{(2)} = 0, \quad (I_{ij} - I_3 \delta_{ij}) n_j^{(3)} = 0.$$

Так, для второй главной оси

$$(I_{11} - I_2) n_1^{(2)} + I_{12} n_2^{(2)} + I_{13} n_3^{(2)} = 0,$$

$$I_{21} n_1^{(2)} + (I_{22} - I_2) n_2^{(2)} + I_{23} n_3^{(2)} = 0,$$

$$I_{31} n_1^{(2)} + I_{32} n_2^{(2)} + (I_{33} - I_2) n_3^{(2)} = 0.$$

В главных осях тензор инерции имеет вид:

$$I'_{ij} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

В случае совпадения двух корней характеристического уравнения, например, $I_1 = I_2$, только третья главная ось будет иметь определённое направление. Остальные две могут принимать любые ориентации в перпендикулярной к этой оси плоскости, оставаясь взаимно перпендикулярными. В случае равенства между собой всех трёх главных моментов тензор инерции изотропен: его компоненты не зависят от направления осей координат. Такой тензор называют *шаровым*.

3.2.6 Примеры

Вычислим в качестве примеров осевые (относительно Oz) моменты инерции для нескольких тел. Боковая *поверхность* усечённого конуса с радиусами оснований a_1, a_2 (бесконечно тонкая с массой m):

$$J_z = \frac{m}{2} (a_1^2 + a_2^2).$$

Тело, ограниченное такой поверхностью (теперь масса самой поверхности полагается равной нулю, но учитывается масса тела):

$$J_z = \frac{3m}{10} \cdot \frac{a_1^5 - a_2^5}{a_1^3 - a_2^3}.$$

Из однородного шара плотностью ρ и радиусом R вырезан слой с параллельными основаниями, толщина которого равна H , радиус одного основания a_1 , а другого a_2 . Для него

$$J_z = \frac{\pi \rho H}{120} [20R^2 H^2 + 15(a_1^2 + a_2^2)^2 - 3H^4].$$

Из однородного цилиндра, высота которого больше диаметра, вынута часть, имеющая форму шара того же радиуса и соприкасающаяся с одним из оснований. По-прежнему полагая ось Oz совпадающей с осью цилиндра, запишем свойство аддитивности для z -момента инерции J_z однородного цилиндра, представленного в виде суммы шара и интересующего нас остатка (момент последнего отметим штрихом):

$$J_z^{\text{II}} = J_z' + J_z^{\text{III}}.$$

Подставляя сюда известные моменты однородных цилиндра и шара, получим:

$$J'_z = \frac{1}{2}\pi\rho ha^4 - \frac{8}{15}\pi\rho a^5 = \pi\rho a^4 \left[\frac{h}{2} - \frac{8a}{15} \right].$$

Заметим, что второе слагаемое формулы Штейнера здесь не появилось, поскольку положение оси $O3$ не изменилось при исключении шара. При вычислении оставшихся моментов ситуация иная: главные оси, параллельные координатным осям $O1$ и $O2$, сместятся, и это смещение учитывается вторым слагаемым в формуле Штейнера.

3.2.7 Упражнения

1. Найти центр инерции и главные моменты инерции однородного полушара.
2. Найти тензор инерции бесконечно тонкой квадратной пластины.
3. Найти главные моменты инерции однородного конуса заданных радиуса основания и высоты.
4. Найти главные моменты однородного эллипсоида.

3.3 Статика твёрдого тела

3.3.1 Условия равновесия

Основные теоремы динамики твёрдого тела вытекают из соответствующих теорем динамики системы материальных точек:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F},$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

$$d(T + U) = \delta A,$$

где \vec{F} , \vec{M} , δA относятся к внешним силам (внутренние силы на движение твёрдого тела не влияют). Внешние силы могут включать в себя и силы реакции, если имеются создающие их связи. Частным типом таких связей являются реакции опор.

Для того чтобы это тело, находившееся в начальный момент времени в состоянии равновесия (покоя), оставалось в этом состоянии и далее, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum \vec{F} = 0, \quad (3.3.1)$$

$$\sum [\vec{r}, \vec{F}] = 0. \quad (3.3.2)$$

Напомним, что в механике системы материальных точек суммирование производилось по всем точкам, составляющим систему, тогда как здесь суммирование ведётся по точкам приложения сил к твёрдому телу⁶.

Уравнения (3.3.1) и (3.3.2) образуют основу механики равновесия твёрдых тел – раздел механики, называемый *статикой* и лежащий в основе такой технической науки как *сопротивление материалов*, на которую, в свою очередь, опираются *теория механизмов и машин*, строительная механика и другие технические дисциплины, без развития которых невозможно проектирование и строительство мостов и небоскрёбов, океанских лайнеров и космических кораблей.

Заметим, что уравнение (3.3.2) содержит момент сил относительно начала неподвижной системы координат, вовсе не обязательно совпадающего с центром инерции \vec{R} тела, однако при условии (3.3.1) моменты сил относительно обоих центров совпадают. Действительно,

$$\sum [\vec{r}, \vec{F}] = \sum [\vec{R} + \vec{x}, \vec{F}] = [\vec{R}, \sum \vec{F}] + \sum [\vec{x}, \vec{F}] = \sum [\vec{x}, \vec{F}].$$

Простейшая система сил с равным нулю главным вектором, но отличным от нуля главным моментом состоит из двух, равных по величине и противоположно направленных сил \vec{F}_1 и $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. Совокупность этих сил вместе с точками их приложения \vec{r}_1 и \vec{r}_2 называется *парой сил*, а главный момент

$$\sum [\vec{r}, \vec{F}] = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2] = [\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{F}_1] = [\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{F}_1] \quad (3.3.3)$$

– *моментом пары сил*.

Чтобы момент он был равен нулю, сила \vec{F} должна быть коллинеарна вектору $\vec{x}_{12} \equiv \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, то есть силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 действуют по прямой, проходящей через их точки приложения.

3.3.2 Скользящие векторы и эквивалентные системы



В отличие от системы материальных точек, в которой каждый из векторов внешней силы «привязан» к своей точке, в твёрдом материальном континууме допускается перемещение точек приложения сил

⁶В статических задачах система координат, связанная с телом, неподвижна относительно лабораторной, и надобность в различном обозначении координат отпадает.

вдоль линий их действия с сохранением их направлений и величин, поскольку такие действия не изменяют главных векторов \vec{F} , \vec{M} внешних сил, от которых только и зависит движение твёрдого тела.

Следовательно, при описании действия системы сил на твёрдое тело можно ограничиться указанием линий их действия, не уточняя положения точек приложения на этих линиях. Такие векторы называются *скользящими*.

Если систему сил $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$, обеспечивающую состояние равновесия тела, можно заменить другой системой $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n$, не изменяющей этого состояния, то такие системы называются *эквивалентными*. Применяя перенос сил вдоль линий их действия и правило сложения сил с общей точкой приложения, легко доказать следующие теоремы.

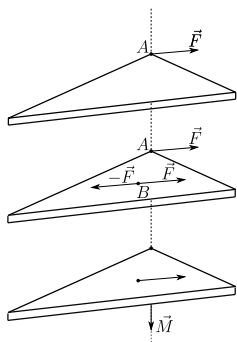


Рис. 3.4. К теореме I

Теорема 1. *Сила, приложенная к точке A твёрдого тела, эквивалентна такой же силе, приложенной к точке B этого тела, и паре сил с моментом $\vec{M}_{BA} = [\vec{x}_{AB}, \vec{F}]$.*

Доказательство. Пусть на тело действует единственная сила $\vec{F}_A = \vec{F}$, приложенная к точке A. Возьмем точку B. Приложенную к ней нулевую силу представим в виде суммы двух равных по величине и противоположных по направлению сил: $0 = \vec{F}_B + \vec{F}'_A$, $\vec{F}_B = \vec{F}$, $\vec{F}'_A = -\vec{F}$. В результате имеем силу $\vec{F}_B = \vec{F}$ и пару сил $\vec{F}_A = \vec{F}$, $\vec{F}'_B = -\vec{F}$, момент которой равен $[\vec{x}_{AB}, \vec{F}]$.

Теорема 2. *Две пары сил, имеющие равные моменты, эквивалентны.*

Теорема 3. *Две пары сил эквивалентны одной паре, имеющей момент, равный векторной сумме моментов данных пар.*

Из этих теорем, в частности, следует, что не изменяя состояния тела, пару сил можно перемещать и поворачивать в плоскости её действия, переносить в параллельную плоскость, в паре можно менять одновременно плечо и силу, сохраняя направление её вращения и абсолютную величину момента.

В заключение приведём теорему, устанавливающую правило эквивалентной замены произвольной системы действующих на твёрдое тело сил простейшей системой, состоящей из одной силы и одной пары сил.

Теорема Пуансо. *Всякую систему приложенных к твёрдому телу сил можно заменить эквивалентной системой,*

состоящей из одной силы $\sum \vec{F}_O$, приложенной к какой-либо точке тела O (центру приведения), и одной пары сил, момент которой равен $\sum [\vec{x}, \vec{F}]$ (если точка O выбрана в качестве начала координат).

Доказательство. Пусть в точках $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ к телу приложены силы $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$. Выберем начало координат в центре приведения O . Перенесём каждую из сил в эту точку. Согласно теореме 1, получим силу

$$\vec{F}_O = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n,$$

приложенную к точке O , и n пар сил

$$(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)$$

с моментами

$$\vec{M}_1 = [\vec{x}_1, \vec{F}_1], \dots, \vec{M}_n = [\vec{x}_n, \vec{F}_n].$$

Согласно теореме 3, эти n пар эквивалентны одной паре с моментом

$$\vec{M}_O = [\vec{x}_1, \vec{F}_1] + \dots + [\vec{x}_n, \vec{F}_n] = \sum [\vec{x}, \vec{F}],$$

что и требовалось доказать.

Совокупность векторов $(\vec{F})_O$ и \vec{M}_O , определяющая в конечном итоге динамику твёрдого тела, называется *динамическим винтом* или просто *динамо*. Равенство их нулю обеспечивает необходимое условие нахождения тела в состоянии равновесия.

3.3.3 Определение опорных реакций

Как уже отмечалось в 3.3.1, учёт наложенных на тело связей (типа опор, шарниров) может быть осуществлён в рамках уравнений равновесия (3.3.1)–(3.3.2) включением в них слагаемых, представляющих силы реакции и их моменты. Проецируя векторные уравнения на оси координат и учитывая часто известные направления реакций, можно определить и сами реакции.

Рассмотрим определение опорных реакций однородной тяжёлой балки массой m и длиной l в случае, когда оба её конца имеют шарнирно-подвижные закрепления, ограничивающие только вертикальные их координаты (рис. 3.5). Сила тяжести создаёт равномерное распределение нагрузки mg с центром в точке $a = l/2$. Но кроме этого, на расстоянии s от конца B к балке приложена сосредоточенная сила \vec{F} (подвешен груз соответствующей массы). Обозначая вертикальные компоненты реакций символами R_A , и R_B , запишем условие равновесия для сил (3.3.1) в проекциях на вертикальную ось OY

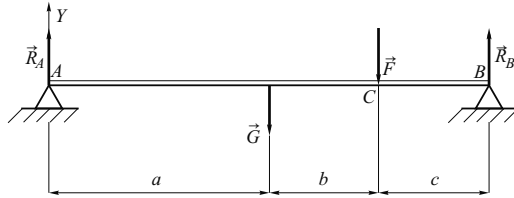


Рис. 3.5. Опорные реакции однородной тяжёлой балки

(горизонтальные составляющие отсутствуют по причине шарнирного характера соединения балки с опорами):

$$R_A - mg - F + R_B = 0. \quad (3.3.4)$$

Первое уравнение содержит две неизвестных. Чтобы найти их, необходимо добавить уравнение для моментов. В качестве точки, относительно которой будем брать моменты сил, выберем A. В проекциях на ось z, перпендикулярную плоскости листа и направленную от читателя, получим:

$$0 - mgl/2 - (b + l/2)F + lR_B = 0. \quad (3.3.5)$$

Поскольку F предполагается заданной, мы можем найти отсюда реакцию в точке B:

$$R_B = \frac{mgl + (2b + l)F}{2l}.$$

Реакцию другой опоры можно найти теперь из первого уравнения;

$$R_A = \frac{mgl + (l - 2b)F}{2l}.$$

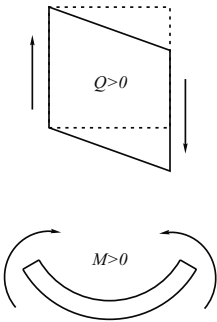


Рис. 3.6. К правилам знаков

повернуть элемент балки по ходу часовой стрелке.

Заметим, что если бы мы направили поперечные оси в противоположном направлении, мы получили бы результаты с противоположными знаками. Это не было бы ошибкой, но чтобы не путаться при сопоставлении расчётов и экспериментов, договорились следовать таким **правилам знаков** (рис. 3.6).

1. Поперечная сила в данной точке

2. Изгибающий момент в данной точке положителен, если он вызывает сжатие верхних слоёв балки и растяжение нижних.

Выбранные нами выше оси удовлетворяют этим правилам.

3.3.4 Расчёты поперечных сил и моментов. Эпюры

Подобно жидкостям и газам, твёрдые тела состоят из атомов и молекул, взаимодействие между которыми значительно более жесткое, не позволяющее существенно менять расстояния даже между далеко отстоящими друг от друга точками таких тел (известно, однако, что верхние этажи небоскрёбов могут выполнять колебательные движения, что может предохранить такие конструкции от разрушений при землетрясениях). По этой причине такие тела в первом приближении считают недеформируемыми (абсолютно твёрдыми), состоящими из частиц, скреплёнными жесткими связями. В ненагруженном состоянии (то есть в отсутствие внешних сил) эти связи себя не проявляют, но приложение внешних сил приводит к возникновению сил реакции, создающих сопротивление деформации и разрушению. С увеличением приложенных сил силы реакции возрастают и по достижении определённого уровня теряют способность сохранять целостность тела, наступает разрушение. Но в разных частях тела его отклик на внешнее воздействие различен: силы реакции тела оказываются распределёнными по его объёму, и разрушение начинается в тех местах, где они превышают допустимое значение. Для определения прочности конструкций и выполняются расчёты распределений внутренних сил в статическом режиме⁷.

В простых случаях, когда силы, действующие на элементы конструкций (стержни, балки, фермы)⁸ коллинеарны, искомые величины (опорные реакции или внутренние усилия) определяются *методом сечений*. В основе его лежат три очевидных утверждения (см. рис. 3.7):

1. Если тело находится в состоянии равновесия, то и любая часть его находится в равновесии.

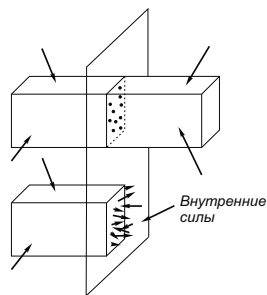


Рис. 3.7. К методу сечений

⁷Вспомните поговорку: «Где тонко, там и рвётся». Но где в сложной конструкции, состоящей из тысяч или миллионов деталей с различными механическими свойствами, «тонко»? На этот вопрос и призваны ответить расчёты на прочность.

⁸Балкой называют брус (стержень), работающий на изгиб, фермой – составленную из стержней конструкцию.

2. Если тело (мысленно) расцезь произвольной плоскостью на две части, заменив взаимодействие между ними эквивалентными распределениями сил по сечениям, каждая из них останется в том же положении равновесия.

3. Согласно теореме Пуансо, система эквивалентных сил, действующих на каждую часть, эквивалентна суммарному действию главного вектора \vec{F} и главного момента \vec{M} этой системы.

Теперь система уравнений равновесия твёрдого тела (3.3.1)–(3.3.2) записывается для каждой из его частей отдельно, но наряду с активными внешними силами и реакциями опор включает в себя и эквивалентные силы, замещающие внутренние усилия со стороны удалённой части. В расчётах же на прочность необходимо знать распределение внутренних усилий в поперечных сечениях балки по её длине, возникающих от приложенной нагрузки, которая и сама может быть распределённой. Распределения характеристик по длине балки изображаются с помощью специальных графиков, называемых *эпюрами*. Часто используются *эпюры изгибающих моментов* (M -эпюры), *эпюры продольных сил* (N -эпюры), *эпюры поперечных сил* (Q -эпюры). Оси абсцисс эпюр направляются параллельно оси балки, положительные значения этих переменных откладываются вдоль осей ординат, отрицательные – в противоположном направлении.

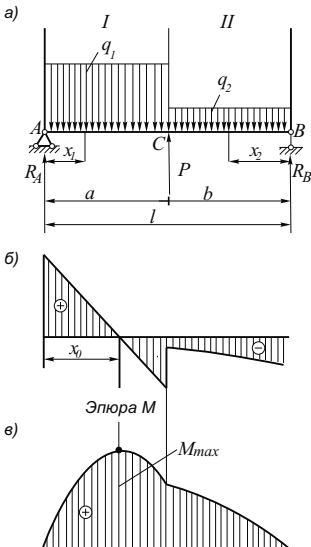


Рис. 3.8. Неоднородно нагруженная балка

Построим в качестве примера эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для неоднородно нагруженной балки с двумя опорами на концах, хотя бы в одной из которых имеется шарнирно-подвижное крепление (в случае перпендикулярных балке внешних нагрузок этого достаточно, чтобы продольные составляющие сил реакции отсутствовали). Длина балки l , левая половина её находится под равномерно распределённой нагрузкой q_1 , правая – под равномерно нагруженной с другой интенсивностью $q_2 < q_1$ (рис. 3.8). Отдельно рассмотрим каждый из двух участков балки.

Первый участок. Проведём сечение в точке $x_1 < l/2$ и обозначим через $Q^I(x_1)$ и $M^I(x_1)$ поперечную силу и момент в этом сечении. Используя (3.3.1) совместно с пра-



ВИДОМ знаков, получим:

$$Q^I(x_1) = R_A - \int_0^{x_1} q_1 dx = R_A - q_1 x_1,$$

$$M^I(x_1) = R_A x_1 - \int_0^{x_1} q_1 x dx = R_A x_1 - q_1 x_1^2/2.$$

На левом конце этого участка $Q^I(0) = R_A$, $M^I(0) = 0$, на правом $Q^I(l/2) = R_A - q_1 l/2$, $M^I(l/2) = R_A l/2 - q_1 l^2/8$.

Второй участок. Возьмем сечение на расстоянии $x_2 < l/2$ от правого конца и выполним аналогичные вычисления:

$$Q^{II}(x_2) = R_B - q_2 x_2,$$

$$M^{II}(x_2) = -(-R_B x_2 + q_2 x_2^2/2).$$

На левом конце этого участка $Q^{II}(l/2) = -(R_B - q_2 l/2)$, $M^{II}(l/2) = R_B l/2 - q_2 l^2/8$, на правом $Q^{II}(0) = -R_B$, $M^{II}(0) = 0$. Реакции опор находятся из системы двух уравнений, одно из которых связывает их сумму с весом неоднородной балки, а другое отражает непрерывность моментов в пограничной точке. В результате получим

$$R_A = (3q_1 + q_2)l/8, \quad R_B = (q_1 + 3q_2)l/8.$$

Наличие квадратичных по x указывает на параболический характер составных частей эпюры M . Подробности обеих эпюр показаны на рис. 3.8.

Разбор примера легко приводит к следующим замечаниям общего характера, полезным при построении эпюр Q и M .

1. На участке, свободном от нагрузки, $Q(x)$ представляется отрезком горизонтальной прямой, а $M(x)$ – отрезком наклонной прямой.

2. На участке с равномерно распределённой нагрузкой эпюрой Q отрезок наклонной прямой, а эпюрой M – отрезок параболы.

3. В точках приложения сосредоточенных сил эпюры Q испытывают соответствующей величины скачки, а эпюры M – изломы, острые которых направлено по действию сил.

4. На участках, где Q положительна, момент M алгебраически возрастает, а где отрицательна – убывает.

5. В точках, где эпюра Q пересекает нулевой уровень, эпюра M принимает экстремальные значения.

6. На концевой шарнирно-подвижной опоре поперечная сила равна силе реакции этой опоры, а изгибающий момент равен нулю.

3.3.5 Графостатика

В рассмотренных выше примерах действующие на тело силы были коллинеарны и их векторы лежали в одной (вертикальной) плоскости. Коснёмся теперь более общего случая, когда силы не являются коллинеарными, но прежде сделаем следующее замечание.

Задача статики, в которой число неизвестных не превышает число уравнений равновесия, называется *статически определимой*. В противном случае задача является *статически неопределимой*, для её решения необходимо прибегнуть к каким-то дополнительным уравнениям (например, к уравнениям теории упругости). Таким образом, для статической определимости задачи на равновесие тела под действием системы сходящихся сил число неизвестных в пространственном случае не должно превышать трёх, а в плоском – двух.

Для решения плоских задач в своё время были разработаны специальные графические методы, имеющие ныне лишь историко-методическое значение, но в середине прошлого века считавшиеся особым направлением механики – *графической статикой* – освящённым, между прочим, именами таких выдающихся механиков, как Вариньон.

Простейшем случаем плоской неколлинеарной системы является, конечно, система сил, линии действия которых сходятся в одной точке твёрдого тела. Такие силы называют *сходящимися*. Переместив вектор каждой из них вдоль своей линии до совпадения его начала с точкой схождения O , мы получим систему сил \vec{F}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, приложенных к одной точке тела O . Такая система полностью эквивалентна их равнодействующей

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i \quad (3.3.6)$$

линия действия которой проходит через точку схождения.

Геометрически процедура сложения векторов (3.3.6) выглядит следующим образом: приложим (не меняя его направления) вектор \vec{F}_1 началом к произвольной точке P , приложим следующий вектор \vec{F}_2 его началом к концу предыдущего вектора \vec{F}_1 и, повторяя эту процедуру, дойдём до последнего вектора \vec{F}_n . Составленная из таких направленных отрезков ломаная называется *многоугольником сил* (рис. 3.9а). Вектор, проведённый из точки P в конец последнего вектора Q , и представляет собой равнодействующую. Чтобы она оказалась равной нулю, нужно, чтобы многоугольник был замкнут, т.е. $\vec{PQ} = 0$. Таким образом, **для равновесия тела, находящегося под действием системы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, необходимо⁹, чтобы многоугольник**

⁹но недостаточно.

сил был замкнут.

Последняя формулировка весьма наглядна и удобна для практических применений. Так, зная, что тело находится в равновесии под действием плоской системы трёх сходящихся сил, две из которых известны, простым геометрическим построением мы можем найти третью силу, как вектор, замыкающий треугольник сил. Нужно только учитывать, что в отличие от равнодействующей эта замыкающая будет идти при обходе контура в том же направлении, что и остальные силы.

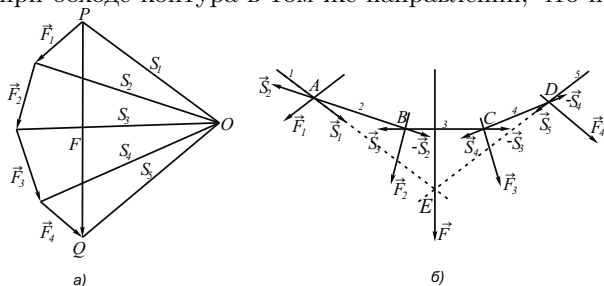


Рис. 3.9. К построению верёвочного многоугольника

Замыкание многоугольника сил даёт нам величину и направление силы \vec{PQ} , необходима для приведения тела в состояние равновесия, но для полного решения задачи нам необходимо знать ещё и линию действия этой силы, определение которой производится следующим образом. Выбирается произвольный полюс O и соединяют его лучами S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 с началом и концом каждой силы (рис. 3.9а). Затем берётся произвольная точка A на линии действия силы \vec{F}_1 (рис. 3.9б) и проводятся через неё линии 1 и 2, параллельные соответственно лучам S_1 и S_2 многоугольника сил (прямая 2 проводится до пересечения с линией действия силы F_2 в точке B). Из точки B проводится параллельно лучу S_3 прямая 3 до пересечения с линией действия силы F_3 (точка C). Из C таким же образом строится прямая 4, параллельная лучу S_4 , и, наконец, из точки D пересечения её с линией действия силы F_4 проводится прямая 5, параллельная лучу S_5 . Ломаные типа 1-2-3-4-5 называются *многоугольниками Вариньона* или *верёвочными многоугольниками*¹⁰. Заметим, что число лучей так же, как и число сторон сторон верёвочного многоугольника, оказывается на единицу больше числа сил.

Каждая из сил в этой системе может быть заменена двумя силами, направленными вдоль тех сторон верёвочного многоугольника, которые пересекаются на линии действия данной силы и которые параллельны и равны по величине лучам *плана сил* (так называют это по-

¹⁰Верёвка под действием заданных сил приняла бы именно такую форму.

строение), идущим в начало и конец каждого вектора. Сила \vec{F}_1 заменится силами \vec{S}_1 и \vec{S}_2 , действующими вдоль сторон 1 и 2 верёвочного многоугольника, сила \vec{F}_2 – силами $-\vec{S}_2$ и \vec{S}_3 , лежащим на сторонах 2 и 3 того же многоугольника и т.д. Последняя сила \vec{F}_4 – заменяется силами $-\vec{S}_4$ и \vec{S}_5 . Из чертежа видно, что вдоль каждой внутренней стороны многоугольника будут действовать две равные и противоположно направленные силы, которые взаимно уничтожатся, и система сил окажется эквивалентной двум силам \vec{S}_1 и \vec{S}_5 , действующими вдоль крайних сторон верёвочного многоугольника. Равнодействующая же двух сил проходит через точку пересечения их линий действия, стало быть, надо просто продолжить крайние стороны верёвочного многоугольника до их пересечения (точка E): тогда линия, параллельная равнодействующей PQ и проходящая через точку E и есть искомая линия.

Если же главный вектор равен нулю, то силовой многоугольник оказывается замкнутым, луч S_5 совпадёт с лучом S_1 , равные по величине силы \vec{S}_1 и \vec{S}_5 окажутся противоположно направленными, и рассматриваемая система приведётся к паре сил.

Таким образом, на языке графостатики можно сформулировать следующие положения.

Если силовой многоугольник не замкнут, то данная плоская система сил приводится к равнодействующей.

Если силовой многоугольник замкнут, а верёвочный не замкнут, плоская система сил приводится к паре сил.

Если и силовой, и верёвочный многоугольники замкнуты, то плоская система сил находится в равновесии.

Справедливы и обратные утверждения.

3.3.6 Упражнения

1. Вычислить и построить эпюры Q и M к задаче, рассмотренной в 3.3.3 при значениях параметров.
2. Вывести формулы для реакций опор в конструкции, приведённой в 3.3.4.
3. В идеально гладкой чаше, имеющей форму полусферы радиуса a , лежит однородный стержень длиной $l > 2a$ и весом P . Найти угол его наклона и силы реакции в точках соприкосновения со сферой.

3.4 Динамика твёрдого тела

3.4.1 Уравнения движения

Приведённые выше в 3.3.1 теоремы даны в формулировке, предполагающей приложенные к телу силы сосредоточенными в отдельных

точках. Поскольку в действительности действующие на тело силы не обязательно должны быть точечными (например, выталкивающая сила Архимеда распределена по части поверхности тела, погружённой в жидкость, а сила тяготения распределена по всему объёму тела), логичнее представить главные векторы \vec{F} и \vec{M} в виде интегралов

$$\vec{F} = \int \vec{F}(\delta m), \quad (3.4.1)$$

и

$$\vec{M} = \int [\vec{x}, \vec{F}(\delta m)],$$

где δm , как и прежде, элемент массы тела, находящийся в окрестности точки \vec{x} , а $\vec{F}(\delta m)$ – действующая на этот элемент внешняя сила.

Поскольку относительное распределение массы в объёме абсолютного твёрдого тела в процессе движения не меняется, при описании этого процесса удобно оперировать с обеими системами координат: неподвижной (НСК) и подвижной (ПСК). Пусть O' – некая точка (полюс) твёрдого тела, взятая в качестве начала ПСК. Скорость точки \vec{x} тела относительно НСК согласно (3.1.4)

$$\vec{v}(\vec{x}) \equiv \vec{v} = \vec{V}_{O'} + [\vec{\Omega}, \vec{x}],$$

так что полный импульс и момент импульса тела запишутся в виде

$$\vec{P} = \int \vec{v} \delta m = m \vec{V}_{O'} + \left[\vec{\Omega}, \int \vec{x} \delta m \right] = m \vec{V}_{O'} + m \left[\vec{\Omega}, \vec{R}_{O'} \right]$$

и

$$\vec{L} = \int [\vec{r}, \vec{v}] \delta m = [\vec{R}_{O'}, \vec{P}] + m [\vec{X}, \vec{V}_{O'}] + \int [\vec{x}, [\vec{\Omega}, \vec{x}]] \delta m.$$

Здесь $\vec{X} = \frac{1}{m} \int \vec{x} \delta m$ – радиус-вектор центра масс в ПСК.

Подходящий выбор ПСК может существенно упростить решение задачи. Так, в случае свободного (без связей) тела начало этой системы O' удобно совместить с центром масс. При этом

$$\vec{X} = 0, \quad \vec{R}_{O'} = \vec{R}, \quad \vec{V}_{O'} \equiv \dot{\vec{R}} = \vec{V},$$

и уравнения движения принимают вид:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F},$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ [\vec{R}, \vec{P}] + \vec{K} \right\} = \vec{M}.$$

Первое слагаемое под знаком производной есть *орбитальный момент* тела, равный моменту импульса материальной точки, имеющей ту же массу, что и тело, и движущейся по той же траектории, что и центр масс этого тела. Второе слагаемое

$$\vec{K} = \int [\vec{x}, [\vec{\Omega}, \vec{x}]] \delta m \quad (3.4.2)$$

представляет собой собственный момент импульса, называемый ещё *кинетическим моментом вращения* (его аналог в системе материальных точек мы обозначали через \vec{L}'). Орбитальный момент зависит от взаимной ориентации радиус-вектора центра масс тела и его импульса: если они коллинеарны, орбитальный момент равен нулю. Орбитальный момент исчезает также, когда прекращается движение центра масс относительно НСК. Собственный же момент не зависит ни от положения, ни от поступательного движения тела относительно НСК: он исчезает лишь тогда, когда тело прекращает вращаться. Примером может служить движение Земли: она выполняет собственное вращение с периодом 1 сутки, и орбитальное (вокруг Солнца) вращение с периодом в 1 год.

Если твёрдое тело находится в *однородном* гравитационном поле¹¹, то

$$\vec{F} = \int \vec{g} \delta m = m\vec{g}, \quad \vec{M} = \int [\vec{x}, \vec{g}] \delta m = [\vec{X}, \vec{F}] = [0, m\vec{g}] = 0$$

и уравнения движения принимают вид

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{g}, \quad \dot{\vec{K}} = 0,$$

означающий, что центр масс тела движется по траектории, по которой двигалась бы материальная точка той же массы в том же поле, а кинетический момент тела остаётся постоянным при любом законе распределения массы внутри этого тела.

Решая задачу о движении тела в отсутствие главного вектора внешних сил, естественно выбрать полюс тела в центре масс, тогда останется лишь проследить за вращательным движением тела, описываемым уравнением

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}.$$

¹¹Заметим, что в этом случае центр тяжести совпадает с центром масс, однако в неоднородном поле это не так. Центр масс шарообразной планеты, падающей в чёрную дыру, до начала её разрушения остаётся в геометрическом центре, центр же силы тяготения всё больше смещается к передней поверхности падающей планеты из-за возрастания градиента поля, который в конечном итоге и разрывает планету.

При решении задачи о движении тела с одной закреплённой точкой, начала обеих систем удобно поместить в эту точку, тогда $\vec{R} = \vec{X}$, $\vec{R}_{O'} = 0$, $\vec{V}_{O'} = 0$, и уравнения движения принимают вид:

$$m \frac{d[\vec{\Omega}, \vec{X}]}{dt} = \vec{F} + \vec{F}', \quad \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}.$$

Здесь \vec{F}' – сила реакции, возникающая в точке закрепления (момент этой силы при данном выборе полюса равен нулю).

Полная энергия твёрдого тела складывается из кинетической и потенциальной энергий (внутреннюю энергию каждого его элемента считаем постоянной, равной нулю). Кинетическая энергия тела, как и системы точек, состоит из двух слагаемых,

$$T = \int \frac{v^2}{2} \delta m = \frac{mV^2}{2} + \int \frac{[\vec{\Omega}, \vec{x}]^2}{2} \delta m,$$

первое из которых есть кинетическая энергия поступательного движения, второе представляет собой кинетическую энергию вращательного движения. Преобразуем последнюю следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{\text{вр}} &= \int \frac{1}{2} \left\{ \Omega^2 x^2 - (\vec{\Omega}, \vec{x})^2 \right\} \delta m = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int (x^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \delta m \right\} \Omega_i \Omega_j = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j. \end{aligned}$$

Здесь, как и выше, x_i , Ω_i – проекции векторов на оси связанной с телом системы.

Если на тело действуют только потенциальные силы, полная его энергия постоянна,

$$E = T + U = \text{const},$$

если же кроме того на него действуют непотенциальные силы, то полная энергия тела может со временем изменяться. Её изменение за время dt равно совершаемой этими силами работе δA :

$$dE = d(T + U) = \delta A.$$

3.4.2 Уравнения движения в проекциях на оси подвижной системы

Выберем полюс тела (то есть начало вмороженной системы координат) в его центре масс, так что \vec{r} будет вектором, проведённым из

центра инерции тела в фиксированную его точку. Он перемещается (поступательно и вращательно) вместе с телом, и его проекции на оси НСК меняются. Изменяются, в общем случае, и проекции угловой скорости $\vec{\Omega}$ на эти оси. Если же мы выберем в качестве базиса орты ПСК, то, по крайней мере, проекции x_i радиус-вектора \vec{x} перестанут зависеть от времени. Это существенно упростит решение задачи о вращении твёрдого тела, даже несмотря на то, что ПСК является неинерциальной системой.

Применим к подынтегральному выражению в (3.4.2) известное правило векторной алгебры

$$\left[\vec{x}, \left[\vec{\Omega}, \vec{x} \right] \right] = \vec{\Omega} (\vec{x}, \vec{x}) - \vec{x} (\vec{x}, \vec{\Omega}),$$

разложим вектор кинетического момента по ортам ПСК:

$$\vec{K} = K_1 \vec{e}_1 + K_2 \vec{e}_2 + K_3 \vec{e}_3,$$

$$K_i = \int \left\{ \Omega_i x_k^2 - x_i (x_1 \Omega_1 + x_2 \Omega_2 + x_3 \Omega_3) \right\} \delta m.$$

Введя дельта-символ Кронекера δ_{ij} и пользуясь соглашением о суммировании по повторяющемуся (немому) индексу, перепишем эту формулу в виде

$$K_i = I_{ij} \Omega_j,$$

где $I_{ij} = \int (x_k^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \delta m$ — уже известный нам тензор инерции твёрдого тела. Вычисленный в системе, связанной с твёрдым телом, он не зависит ни от положения и ориентации тела в пространстве, ни от поступательной и угловой скоростей, а определяется только распределением массы твёрдого тела относительно его ПСК. Заметим, что момент импульса \vec{K} в общем случае не параллелен вектору угловой скорости $\vec{\Omega}$: для параллельности надо, чтобы каждая проекция момента K_i была пропорциональна только «своей» проекции скорости Ω_i , тогда как формула (3.4.2) даёт нам

$$K_i = I_{i1} \Omega_1 + I_{i2} \Omega_2 + I_{i3} \Omega_3.$$

Уравнение вращения тела

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M} \tag{3.4.3}$$

в проекциях на оси неподвижной системы координат имеет вид представляется системой

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x,$$

$$\frac{dK_y}{dt} = M_y,$$

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z.$$

Чтобы записать соответствующее уравнение в проекциях на оси вращенной в тело ПСК, разложим кинетический момент по ортам этой системы и подставим результат в левую часть уравнения (3.4.3):

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{dK_i \vec{e}_i}{dt} = \dot{K}_i \vec{e}_i + K_i \dot{\vec{e}}_i = \dot{K}_i \vec{e}_i + [\vec{\Omega}, \vec{K}].$$

Последнее слагаемое отражает тот факт, что изменение проекций теперь происходит не только благодаря изменению самого вектора \vec{K} , но и вследствие вращения системы координат. В результате производная dK_i/dt заменяется выражением

$$\frac{dK_i}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{K}]_i = \frac{d(I_{ij}\Omega_j)}{dt} + \epsilon_{ijk}\Omega_j I_{kl}\Omega_l = I_{ij}\dot{\Omega}_j + \epsilon_{ijk}\Omega_j I_{kl}\Omega_l.$$

Здесь ϵ_{ijk} – символ Леви-Чивита, равный нулю, если два или более индексов совпадают, единице, если индексы образуют последовательность 1,2,3 или чётное число перестановок в ней, и единице с минусом, если они получаются в результате нечётного числа перестановок. В итоге имеем:

$$\begin{aligned} I_{1j}\dot{\Omega}_j &= I_{2j}\Omega_j\Omega_3 - I_{3j}\Omega_j\Omega_2 + M_1, \\ I_{2j}\dot{\Omega}_j &= I_{3j}\Omega_j\Omega_1 - I_{1j}\Omega_j\Omega_3 + M_2, \\ I_{3j}\dot{\Omega}_j &= I_{1j}\Omega_j\Omega_2 - I_{2j}\Omega_j\Omega_1 + M_3. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Уравнения для проекций вектора скорости центра масс на скреплённые с телом оси выводятся аналогично и имеют вид

$$m\dot{V}_1 + m(\Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2) = F_1,$$

$$m\dot{V}_2 + m(\Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3) = F_2,$$

$$m\dot{V}_3 + m(\Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1) = F_3.$$

3.4.3 Динамические уравнения Эйлера

Так называются уравнения вращения твёрдого тела в проекциях на главные оси. Они легко получаются из уравнений в проекциях на произвольные замороженные оси заменой $I_{ij} = 0$, $i \neq j$, и $I_{11} = I_j \delta_{ji}$ и имеют вид:

$$I_1 \dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3 + M_1,$$

$$I_2 \dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1) \Omega_3 \Omega_1 + M_2,$$

$$I_3 \dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2 + M_3.$$

Система главных осей как и любая скрепленная с произвольно движущимся телом система координат в общем случае не является инерциальной, и традиционные законы сохранения в ней не обязаны выполняться. Тем не менее, и в этой системе существуют сохраняющиеся величины.

Умножим динамические уравнения Эйлера для свободного тела (моменты сил отсутствуют) на Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 соответственно и сложим. В результате получим:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{I_1 \Omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \Omega_2^2}{2} + \frac{I_3 \Omega_3^2}{2} \right) = 0.$$

Следовательно, *кинетическая энергия свободно вращающегося тела в системе главных осей постоянна*:

$$T = \left(\frac{I_1 \Omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \Omega_2^2}{2} + \frac{I_3 \Omega_3^2}{2} \right) = \text{const.}$$

Умножим теперь уравнения Эйлера на $I_1 \Omega_1$, $I_2 \Omega_2$, $I_3 \Omega_3$ соответственно и опять сложим. В результате получим

$$\frac{d}{dt} (I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2) = 0.$$

Следовательно, *абсолютная величина момента импульса свободного тела в системе главных осей постоянна*:

$$K^2 = (I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2) = \text{const.}$$

Эти законы сохранения играют важную роль в динамике твёрдого тела: с их помощью можно найти решения уравнений Эйлера в эллиптических функциях.

Выражения для динамических характеристик тела в главных осях существенно упрощаются:

$$K_1 = I_1\Omega_1, \quad K_2 = I_2\Omega_2, \quad K_3 = I_3\Omega_3,$$

$$K^2 = I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2, \quad T = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2).$$

3.4.4 Пример: движение стержня

Как следует из предыдущего, движение свободного твёрдого тела описывается шестью дифференциальными уравнениями Эйлера (3.4.4), включающими в себя в качестве постоянных коэффициентов массу этого тела m и три главных момента инерции I_1 , I_2 и I_3 , характеризующими её распределение относительно главных осей. Моменты эти, разумеется, не полностью характеризуют неоднородное распределение массы: один и тот же набор моментов может быть получен бесконечным числом распределений. Соответствующие множества тел называют *динамически эквивалентными*. В качестве эквивалентного заменителя сплошного тела можно взять систему подходящим образом расположенных материальных точек, соединённых невесомыми жёсткими стержнями, и тем самым упростить рассмотрение задачи.

Рассмотрим бесконечно тонкий твёрдый прямолинейный стержень, главными осями которого является его собственная ось $O1$ и перпендикулярные к ней $O2$ и $O3$ (O – центр масс). Очевидно, $I_2 = I_3 = I_\perp$. Для эквивалентной замены данной системы, характеризуемой пятью параметрами (масса, центр масс, три момента инерции) воспользуемся системой трёх материальных точек, жёстко связанных невесомым прямолинейным стержнем. Она также характеризуется пятью параметрами (три массы m_0 , m_1 , m_2 и два расстояния между ними l_1 , l_2). Приняв положение массы m_0 в качестве центра масс, то есть, положив $x_0 = 0$, приравняем соответствующие характеристики эквивалентных систем:

$$m = m_0 + m_1 + m_2,$$

$$0 = m_1l_1 - m_2l_2,$$

$$I_\perp = m_1l_1^2 + m_2l_2^2.$$

Отсюда

$$m_1 = \frac{I_\perp}{l_1(l_1 + l_2)}, \quad m_2 = \frac{I_\perp}{l_2(l_1 + l_2)},$$

$$m_0 = m - m_1 - m_2 = \frac{ml_1l_2 - I_\perp}{l_1l_2}.$$

Чтобы учесть влияние приложенных к телу (возможно, тоже распределённых) сил, достаточно вычислить их главный вектор \vec{F} и их главный момент \vec{M} , и приложить первый к центру масс, второй – к стержню как целому. Систему \vec{F} , \vec{M} можно заменить двумя силами, приложенными к крайним точкам m_1 и m_2 .

3.4.5 Упражнения

1. Круглый диск лежит на горизонтальной поверхности, по которой может двигаться без трения. В начальный момент времени к средней точке радиуса перпендикулярно ему приложена постоянная сила, параллельная плоскости. Найти закон движения диска.

2. Найти частоту малых колебаний однородного полушара на гладкой горизонтальной поверхности в поле тяжести.
3. Найти частоту малых колебаний однородного полушара на шероховатой горизонтальной поверхности в поле тяжести.

3.5 Вращение тела вокруг неподвижной оси

3.5.1 Уравнения движения, содержащие силы

Рассмотрим вращение твёрдого тела, шарнирно закреплённого в начале координат O ($z = 0$) и в точке A ($z = h$) на оси OZ . Ось вращения не предполагается главной и начало координат не совпадает с центром масс, оси OZ и $O3$ совпадают. Угловая скорость направлена вдоль этих совпадающих осей:

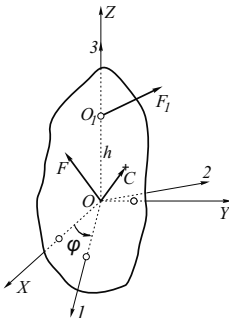


Рис. 3.10. Движение центра масс вращающегося вокруг оси OZ твёрдого тела

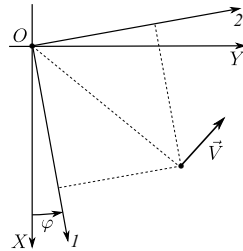


Рис. 3.11. То же в проекциях на плоскость XY

$$\Omega_3 = \dot{\varphi} \equiv \Omega, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = 0.$$

Разложим радиус-вектор центра масс по ортам подвижной системы:

$$\vec{R}(t) = X_1 \vec{e}_1(t) + X_2 \vec{e}_2(t) + X_3 \vec{e}_3,$$

продифференцируем по времени и воспользуемся соотношениями $\dot{\vec{e}}_1 = \Omega \vec{e}_2$, $\dot{\vec{e}}_2 = -\Omega \vec{e}_1$:

$$\vec{V} = X_1 \dot{\vec{e}}_1 + X_2 \dot{\vec{e}}_2 = -\Omega X_2 \vec{e}_1 + \Omega X_1 \vec{e}_2.$$

Таким образом, проекции скорости центра масс на подвижные оси даются соотношениями

$$V_1 = -\Omega X_2, \quad V_2 = \Omega X_1, \quad V_3 = 0, \quad (3.5.1)$$

где X_1 , X_2 , напомним, являются координатами центра масс в связанной с телом системе и поэтому в процессе движения не меняются.

Наличие шарнирных связей в точках O и A приводит к появлению сил реакции, проекции которых на подвижные оси обозначим через F'_{Oi} и F'_{Ai} , $i = 1, 2, 3$ соответственно. Проекции на эти оси главного вектора активных сил обозначим через F_i .

В результате получим первую тройку уравнений движения твёрдого тела:

$$\begin{aligned} -mX_2\dot{\Omega} - mX_1\Omega^2 &= F_1 + X'_{O1} + X'_{A1}, \\ mX_1\dot{\Omega} - mX_2\Omega^2 &= F_2 + X'_{O2} + X'_{A2}, \\ 0 &= F_3 + X'_{O3} + X'_{A3}. \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

3.5.2 Уравнения движения, содержащие моменты сил

Вторая тройка уравнений наряду с проекциями главного момента внешних сил содержит также моменты сил реакций (отмечены штрихами):

$$\begin{aligned} I_{1j}\dot{\Omega}_j &= I_{2j}\Omega_j\Omega_3 - I_{3j}\Omega_j\Omega_2 + M_1 + M'_1, \\ I_{2j}\dot{\Omega}_j &= I_{3j}\Omega_j\Omega_1 - I_{1j}\Omega_j\Omega_3 + M_2 + M'_2, \\ I_{3j}\dot{\Omega}_j &= I_{1j}\Omega_j\Omega_2 - I_{2j}\Omega_j\Omega_1 + M_3 + M'_3. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (3.5.1), выражая моменты сил реакции через сами эти силы и учитывая, что по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, получим

$$\begin{aligned} I_{13}\dot{\Omega} - I_{23}\Omega^2 &= M_1 - hF'_{A2}, \\ I_{23}\dot{\Omega} + I_{13}\Omega^2 &= M_2 + hF'_{A1}, \\ I_{33}\dot{\Omega} &\equiv M_3 \equiv M_z. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Последнее уравнение не содержит сил реакции. Оно решается в первую очередь и даёт закон движения вращающегося тела.

Как и в случае одномерного движения точки под действием переменной силы $F(t)$ (см. 1.4.2), решение этого уравнения находится последовательным интегрированием и применением правила Дирихле для перемены порядка следования интегралов. В результате имеем:

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \frac{1}{I_{zz}} \int_0^t M_z(\tau) d\tau,$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Omega_0 t + \frac{1}{I_{zz}} \int_0^t \tau M_z(t - \tau) d\tau.$$

Остальные уравнения нужны лишь постольку, поскольку нас интересуют силы реакции.

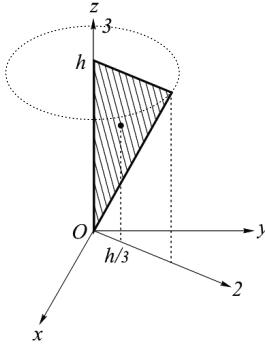


Рис. 3.12. Вращение треугольника

Пример. Рассмотрим вращение однородного тонкого равнобедренного прямоугольного треугольника массой m . Он подвешен к вертикальной оси катетом так, что острый угол находится в начале координат, а прямой в точке $z = h$. Необходимо найти угловую скорость, при которой боковое давление на нижний шарнир равно нулю.

Выберем подвижную систему так, чтобы треугольник находился в плоскости $2O3$, тогда координаты центра масс равны $X_1 = 0$, $X_2 = h/3$, проекции сил $F_1 = F_2 = 0$, $F_3 = -mg$, проекции моментов сил $M_1 = -(h/3)mg$, $M_2 = M_3 = 0$, моменты инерции $I_{13} = 0$, $I_{23} = mh^2/4$. Система уравнений движения имеет вид:

$$\begin{aligned} -(1/3)mh\dot{\Omega} &= F'_{A1}, \\ -(1/3)mh\Omega^2 &= F'_{A2}, \\ 0 &= -mg + F'_{O3} + F'_{A3}, \\ (1/4)mh^2\Omega^2 &= -(1/3)mgh - hF'_{A2}, \\ -(1/4)mh^2\dot{\Omega} &= hF'_{A1}, \\ I_{33}\dot{\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует, что треугольник вращается с постоянной угловой скоростью, задаваемой начальным условием, а из второго и четвертого уравнений определяется искомая скорость $\Omega = 2\sqrt{g/h}$.

3.5.3 Статические и динамические реакции

Пусть тело неподвижно: $\Omega = 0$ и $\dot{\Omega} = 0$. Подставим эти значения в (3.5.2). Тогда при заданных внешних силах и моментах сил мы имеем пять уравнений

$$\begin{aligned} F_1 + F'_{O1} + F'_{A1} &= 0, \\ F_2 + F'_{O2} + F'_{A2} &= 0, \\ F_3 + F'_{O3} + F'_{A3} &= 0, \\ M_1 - hF'_{A2} &= 0, \\ M_2 + hF'_{A1} &= 0 \end{aligned}$$

для определения пяти *статических сил реакции* F'_{O1} , F'_{A1} , F'_{O2} , F'_{A2} и $F'_{O3} + F'_{A3}$ (две последних определяются лишь в сумме).

Если тело вращается, то $\Omega \neq 0$ и, возможно, $\dot{\Omega} \neq 0$. Как видно из (3.5.2), соответствующие этому случаю *динамические силы реакции*, вообще говоря, отличаются от статических. Условия, при которых они совпадают со статическими, находятся из этих же уравнений:

$$X_2 \dot{\Omega} - X_1 \Omega^2 = 0,$$

$$X_1 \dot{\Omega} - X_2 \Omega^2 = 0,$$

и

$$I_{13} \dot{\Omega} - I_{23} \Omega^2 = 0,$$

$$I_{23} \dot{\Omega} + I_{13} \Omega^2 = 0.$$

Эти условия можно рассматривать как однородные системы линейных уравнений относительно X_1, X_2 и I_{13}, I_{23} соответственно. Определители этих систем одинаковы и равны $\Omega^4 + \dot{\Omega}^2$. Если тело вращается, эта величина не может быть тождественно равна нулю. Следовательно, эти условия сводятся к равенствам $X_1 = X_2 = 0, I_{13} = I_{23} = 0$. Они показывают, что динамические реакции равны статическим только тогда, когда *ось вращения является главной осью инерции тела*.

3.5.4 Физический маятник. Теорема Гюйгенса

Пусть теперь ось OX_3 горизонтальна, а ось OX_1 направлена вертикально вниз. Ось OX_3 подвижной системы совпадает с OX_3 , а центр масс лежит в плоскости X_2X_3 на расстоянии $X_2 = \rho$ от оси вращения. В этом случае $M_3 = -mg\rho \sin \varphi$, и последнее уравнение системы (3.5.3) принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{mg\rho}{I_{33}} \sin \varphi = 0.$$

Такое тело называется *физическим маятником*. Оно движется по тому же закону, что и математический маятник длиной

$$l = I_{33}/(m\rho). \quad (3.5.4)$$

Эту величину называют *приведённой длиной* физического маятника.

Выразив по теореме Штейнера момент инерции относительно оси вращения (I_{33}) через момент инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс ($I_{\text{цм}}$),

$$I_{33} = m\rho^2 + I_{\text{цм}},$$

и подставив результат в (3.5.4), получим:

$$l = \rho + \frac{I_{\text{цм}}}{m\rho}. \quad (3.5.5)$$

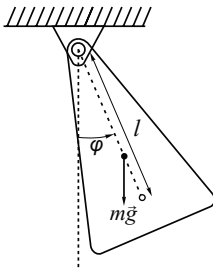


Рис. 3.13. Физический маятник

Отсюда видно, что $l \geq \rho$. Если отрезок OO' длиной l отложить от точки подвеса O в направлении на центр масс, то конечная его точка O' окажется дальше от точки подвеса, чем центр масс ($OC = \rho$). Она называется *центром качания* физического маятника и совпадает с положением материальной точки той же массы на невесомом стержне, выполняющей такое же движение (*круговой маятник*). При малых амплитудах центр качания совершает гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{33}}{mg\rho}}. \quad (3.5.6)$$

Справедливо следующее утверждение, известное как **теорема Гюйгенса**: *точки O и O' обладают свойством переместительности, то есть, если центр качаний физического маятника сделать его точкой подвеса, то новым центром его качаний станет прежняя точка подвеса*. **Доказательство.** Обозначим приведённую длину маятника в его новом положении через l' , а расстояние от центра масс до новой оси вращения через ρ' . Согласно (3.5.5)

$$l' = \rho' + \frac{I}{m\rho'}. \quad (3.5.7)$$

Так как $l = \rho + \rho'$, то сопоставление с (3.5.5) приводит к формуле

$$\rho' = \frac{I}{m\rho},$$

применяя которую в знаменателе второго члена правой части равенства (3.5.7), получаем

$$l' = \rho + \rho' = l,$$

что и требовалось доказать.

Физический маятник лежит в основе ряда измерительных приборов и установок. Наблюдая малые колебания его, определяя их период (3.5.6) и исключая влияние немнерциальности системы координат, можно найти напряжённость гравитационного поля в данном месте Земли. Та же формула (3.5.6) может быть использована для экспериментального определения момента инерции относительно оси колебаний. Физический маятник с наклонной осью, близкой к вертикали и имеющий большой

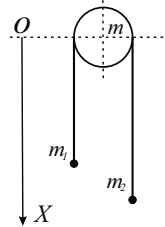


Рис. 3.14. Машина Аттвуда с тяжёлым диском

период колебаний, образует основу сейсмографа – прибора, служащего для регистрации колебаний земной коры.

3.5.5 Упражнения

1. Машина Атвуда (однородный диск массой m с переброшенной через него невесомой нитью с грузами на концах, рис. 3.14) начинает движение в момент времени $t = 0$. Найти зависимость скорости от времени с учётом инерции диска.
2. Маятник состоит из стержня, подвешенного одним концом на шарнир, а к свободному концу его прикреплен своим центром диск заданного радиуса. Положение диска относительно стержня фиксировано, так что в процессе колебаний в плоскости диска стержень и диск вращаются как одно целое. Найти период малых колебаний.
3. Маятник состоит из стержня, подвешенного одним концом на шарнир, а к его свободному концу прикреплен своим центром диск заданного радиуса, могущий свободно вращаться вокруг точки крепления. В процессе колебаний маятника в плоскости диска сам диск не вращается. Найти период малых колебаний.

3.6 Вращение тела вокруг неподвижной точки

3.6.1 Вращение с постоянной угловой скоростью

Пусть такой неподвижной точкой, вокруг которой вращается тело, является начало координат. Динамические уравнения Эйлера для свободного (не подверженного действию моментов внешних сил) твёрдого тела имеют вид

$$I_1 \dot{\Omega}_1 = (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3,$$

$$I_2 \dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1) \Omega_3 \Omega_1,$$

$$I_3 \dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2.$$

Если все три главных момента инерции равны, $I_1 = I_2 = I_3$ (как, например, у шара, хотя такое тело и необязательно должно быть шаром), то все Ω_i постоянны, и следовательно, будучи свободным, такое тело вращается с постоянной угловой скоростью. В динамике точки постоянство скорости свободной частицы – правило (первый закон Ньютона), в динамике твёрдого тела постоянство угловой скорости, как мы увидим далее, скорее исключение, чем правило. Более того, исключение это имеет чисто математический смысл. Нам никогда не удастся

изготовить тело, в том числе и шар, для которого выписанные равенства выполнялись бы абсолютно точно, а любая, *сколь угодно малая неточность* уже нарушит постоянство угловой скорости.

Пусть совпадают только два главных момента инерции $I_1 = I_2 \neq I_3$ (*симметричный волчок*). Тогда

$$I_1 \dot{\Omega}_1 = (I_1 - I_3) \Omega_2 \Omega_3,$$

$$I_1 \dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1) \Omega_3 \Omega_1,$$

$$I_3 \dot{\Omega}_3 = 0,$$

откуда $\Omega_3 = \text{const}$. Пусть $\Omega_3 \neq 0$, тогда чтобы $\dot{\Omega}_1 = 0$ и $\dot{\Omega}_2 = 0$ надо, чтобы правые части были равны нулю, т.е. $\Omega_1 = 0$ и $\Omega_2 = 0$. Таким образом, в случае симметричного волчка свободное вращение с постоянной угловой скоростью может наблюдаться только вокруг оси симметрии или вокруг любой оси, перпендикулярной оси симметрии (так как $\Omega_3 = 0$). В противном случае $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t)$, несмотря на постоянство момента импульса относительно неподвижной системы координат.

Для несимметричного волчка, если $\Omega_1 = \text{const} \neq 0$, то Ω_2 и Ω_3 должны быть равны нулю: свободный несимметричный волчок может вращаться с постоянной угловой скоростью *только вокруг одной из трёх его главных осей*.

3.6.2 Устойчивость вращения вокруг главных осей

Пусть $I_1 < I_2 < I_3$ и тело вращается вокруг главной оси OZ с постоянной угловой скоростью

$$\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}.$$

Поддействуем малым моментом сил в течение короткого времени. Тогда у проекций её появятся малые добавки

$$\vec{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \Omega + \omega_3\} \approx \{\omega_1, \omega_2, \Omega\}.$$

Подставив новые проекции в уравнения Эйлера, получим:

$$I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \Omega,$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \Omega \omega_1,$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0.$$

Дифференцируя первое из них,

$$I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \Omega \dot{\omega}_2 = (I_2 - I_3) \Omega^2 \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_1$$

и исключая ω_2 с помощью второго, приходим к уравнению

$$\ddot{\omega}_1 + \lambda \omega_1 = 0,$$

где $\lambda = \frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} \Omega^2$. При λ положительном его решение имеет вид гармонических колебаний,

$$\omega_1 = A \cos(\sqrt{\lambda} t + \alpha),$$

и соответственно,

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2 - I_3} \frac{\omega_1}{\Omega} = \sqrt{\frac{(I_3 - I_1) I_1}{(I_3 - I_2) I_2}} A \sin(\sqrt{\lambda} t + \alpha).$$

Если $I_1 = I_2$, сумма квадратов этих проекций постоянна,

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = A^2.$$

так что $\vec{\Omega}$, отклонившись на *малый* угол от первоначального направления, начал вращаться вокруг него с постоянной, *не зависящей от величины возмущения* $\vec{\omega}$ угловой скоростью $\sqrt{\lambda}$. Вращение вокруг оси OZ устойчиво.

Пусть теперь тело вращается вокруг второй главной оси: $\vec{\Omega} = \{0, \Omega, 0\}$. Повторяя рассуждения, находим, что в этом случае уравнения для ω_1 (и ω_2) удовлетворяют такому же уравнению, но с отрицательным $\lambda = \frac{(I_2 - I_3)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3} \Omega^2 < 0$. Их решения содержат экспоненциально растущие слагаемые: вектор Ω «сваливается» в сторону от малейшего толчка. Вращение вокруг этой оси неустойчиво.

Вращение вокруг третьей главной оси вновь устойчиво.

Мы видим, таким образом, что вращение тела устойчиво вокруг главных осей с наибольшим и наименьшим моментами инерции, вращение же вокруг оси с промежуточным значением момента инерции неустойчиво.

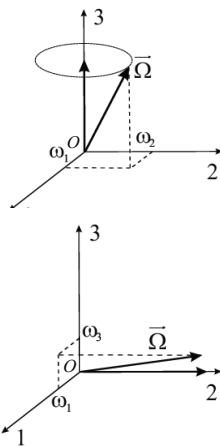


Рис. 3.15. Устойчивое (сверху) и неустойчивое (снизу) вращения вокруг главных осей OZ и OY

3.6.3 Вращение симметричного волчка

Твёрдое тело, у которого $I_1 = I_2$, называют *симметричным волчком*. Учитывая эту симметрию в уравнениях Эйлера, получим

$$I_1 \dot{\Omega}_1 = (I_1 - I_3) \Omega_2 \Omega_3,$$

$$I_1 \dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1) \Omega_3 \Omega_1,$$

$$I_3 \dot{\Omega}_3 = 0.$$

Из последнего следует

$$\Omega_3 = \text{const} \equiv \Omega_{30},$$

а из двух первых (при $I_1 < I_3$)

$$\Omega_1 = A \cos(\omega t - \varphi),$$

$$\Omega_2 = A \sin(\omega t - \varphi),$$

где

$$\omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \Omega_{30}.$$

Представив вектор угловой скорости вращения тела в виде

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_\perp + \Omega_3 \vec{e}_3,$$

где

$$\vec{\Omega}_\perp = \Omega_1 \vec{e}_1 + \Omega_2 \vec{e}_2,$$

видим, что

$$|\vec{\Omega}_\perp| = \text{const} = A.$$

Следовательно, вектор угловой скорости Ω вращающегося тела сам равномерно вращается вокруг оси OZ с угловой скоростью ω . Вращение это называется *прецессией*, A – *амплитудой прецессии*, ω – *угловой скоростью прецессии*. Заметим, что последняя пропорциональна модулю разности моментов инерции: чем ближе друг к другу I_1 и I_3 , тем меньше скорость прецессии. При $I_1 = I_3$ прецессия исчезает.

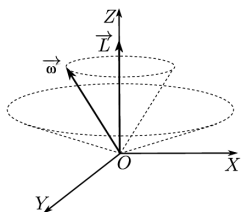
Рассмотрим теперь вектор кинетического момента симметричного волчка \vec{K} . Его проекция на ось OZ

$$K_3 = I_3 \Omega_{30} = \text{const},$$

а перпендикулярная составляющая

$$\vec{K}_\perp = K_1 \vec{e}_1 + K_2 \vec{e}_2 = I_1 \Omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \Omega_2 \vec{e}_2 = I_1 \vec{\Omega}_\perp.$$

Видно, что вектор $\vec{K} = I_3 \Omega_3 \vec{e}_3 + I_1 \vec{\Omega}_\perp$ не совпадает по направлению с вектором $\vec{\Omega} = \Omega_3 \vec{e}_3 + \vec{\Omega}_\perp$, но оба они лежат в одной плоскости, проходящей через ось OZ и вращающейся вокруг неё с угловой скоростью ω . Пусть θ_Ω и θ_K – углы между указанными векторами и осью OZ :



$$\operatorname{tg} \theta_\Omega = \frac{\Omega_\perp}{\Omega_3}, \quad \operatorname{tg} \theta_K = \frac{K_\perp}{K_3} = \frac{I_1}{I_3} \operatorname{tg} \theta_\Omega. \quad (3.6.1)$$

Рис. 3.16. Прецессия относительно оси OZ

Если волчок сплюснен вдоль оси OZ ($I_3 > I_1$ – юла), вектор \vec{K} ближе к оси OZ , чем $\vec{\Omega}$ ($\theta_K < \theta_\Omega$), если он вытянут вдоль этой оси ($I_3 < I_1$ – веретено), векторы \vec{K} и $\vec{\Omega}$ располагаются в обратном порядке.

Отметим, что это – прецессия относительно главных осей тела, которые в свою очередь вращаются вместе с телом с большой угловой скоростью относительно неподвижного пространства. В исходной инерциальной системе, относительно которой и наблюдается вращение тела, постоянным по величине и направлению является интеграл движения кинетического момента $\vec{K} \parallel OZ$, а проходящая через него плоскость с вектором $\vec{\Omega}$ и осью OZ вращается вокруг него с угловой скоростью ω (рис. 3.16). В первом случае оба вектора находятся по разные стороны от неподвижного кинетического момента, во втором – по одну сторону (см. рис. 3.17). Угол θ между OZ и OZ называется *углом нутации*. Если он, как в данном случае, постояен, вращение оси OZ вокруг OZ называется *регулярной прецессией*.

Постоянные A (амплитуда прецессии) и Ω_{30} можно связать с интегралами движения – кинетической энергией и квадратом кинетического момента

$$T = \frac{1}{2} I_1 A^2 + \frac{1}{2} I_3 \Omega_{30}^2, \quad K^2 = I_1^2 A^2 + I_3^2 \Omega_{30}^2.$$

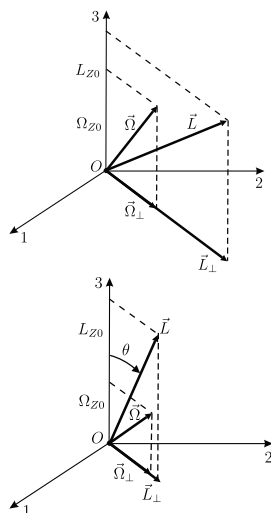


Рис. 3.17. Векторы угловой скорости и кинетического момента симметричного волчка

Прекрасный пример прецессии даёт вращение Земли: вследствие её приплюснутости у полюсов $\frac{I_3 - I_1}{I_1} = 0,0033$, $\omega = \frac{\Omega_{30}}{300}$.

3.6.4 Кинетическая энергия симметричного волчка

Кинетическая энергия и квадрат кинетического момента вращающегося волчка даются соотношениями

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_{\perp}^2 + I_3 \Omega_{30}^2), \quad K^2 = I_1^2 \Omega_{\perp}^2 + I_3^2 \Omega_{30}^2,$$

ограничивающими возможные значения кинетической энергии при заданной величине момента.

Чтобы установить эти ограничения, приведём записанные выше равенства к виду

$$I_1^2 \Omega_{\perp}^2 + I_1 I_3 \Omega_{30}^2 = 2I_1 T, \quad I_1^2 \Omega_{\perp}^2 + I_3^2 \Omega_{30}^2 = K^2$$

и, вычтя из второго первое

$$(I_3 - I_1) I_3 \Omega_{30}^2 = K^2 - 2I_1 T,$$

получим:

$$\Omega_{30} = \sqrt{\frac{K^2 - 2I_1 T}{(I_3 - I_1) I_3}}.$$

Аналогичным образом находим

$$\Omega_{\perp} = \sqrt{\frac{K^2 - 2I_3 T}{(I_1 - I_3) I_1}}.$$

Допустим, что тело сплюснуто вдоль оси 3, $I_3 > I_1$. Чтобы Ω_3 и Ω_{\perp} были вещественными, необходимо чтобы $K^2 \geq 2I_1 T$ и $K^2 \leq 2I_3 T$, откуда следует, что

$$\frac{K^2}{2I_3} \leq T \leq \frac{K^2}{2I_1}.$$

При $T = T_{\min} \equiv K^2/(2I_3)$, как следует из формулы (3.6.1), $\Omega_{\perp} = 0$, $\operatorname{tg} \theta = 0$, оси OZ и $O3$ совпадают, \vec{K} и $\vec{\Omega}$ направлены вдоль них и не изменяются.

При $T = T_{\max} \equiv K^2/(2I_1)$, как следует из формулы (3.6.1), $\Omega_3 = 0$, $\operatorname{tg} \theta = \infty$, $\theta = \pi/2$, оси OZ и $O3$ взаимно перпендикулярны, вращения вокруг $O3$ нет, $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\perp} \parallel \vec{K}$.

3.6.5 Вращение асимметричного волчка

Рассмотрим теперь вращение свободного асимметричного волчка. Все три его главные моменты различны. Упорядочим их следующим образом: $I_1 < I_2 < I_3$ и возвратимся к уравнениям Эйлера, **3.4.3**. Оба известных нам закона сохранения (кинетической энергии и абсолютной величины кинетического момента) при свободном вращении выразим через компоненты кинетического момента в СГО:

$$\frac{K_1^2}{a_1^2} + \frac{K_2^2}{a_2^2} + \frac{K_3^2}{a_3^2} = 1,$$

$$K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = K^2.$$

Первое из этих уравнений описывает эллипсоид с полуосями $a_i = \sqrt{2I_i T}$, $a_1 < a_2 < a_3$, второе – сферу радиуса K . Совместное их решение, описывающее линию пересечения этих двух поверхностей, возможно лишь при условии

$$2I_1 T \equiv K_{\min}^2 < K^2 < K_{\max}^2 \equiv 2I_3 T.$$

Набросав эскиз на бумаге, легко понять, что при значениях K^2 , близких к предельным, представляющая состояние твёрдого тела точка выполняет движение по замкнутой кривой, окружающей полюс эллипсоида. В предельных случае кривая эта вырождается в точку. По мере удаления значения K^2 от границ этого интервала, кривые растягиваются по эллиптической поверхности и при переходе K^2 через значение $2I_2 T$ распадаются на две отдельные кривые.

Чтобы найти зависимость угловой скорости асимметричного волчка от времени, вернёмся в записанных выше уравнениях к компонентам угловой скорости,

$$I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2 = K^2,$$

$$I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2 = 2T,$$

добавив к ним уравнение

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 = \Omega^2.$$

Решение этой системы имеет вид:

$$\Omega_1^2 = \frac{I_2 I_3 (\Omega^2 - \omega_1^2)}{(I_1 - I_2)(I_2 - I_3)}, \quad \omega_1^2 = \frac{2(I_2 + I_3)T - K^2}{I_2 I_3},$$

$$\Omega_2^2 = \frac{I_3 I_1 (\omega_2^2 - \Omega^2)}{(I_2 - I_3)(I_3 - I_1)}, \quad \omega_2^2 = \frac{2(I_3 + I_1)T - K^2}{I_3 I_1}, \quad (3.6.2)$$

и

$$\Omega_3^2 = \frac{I_1 I_2 (\Omega^2 - \omega_3^2)}{(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}, \quad \omega_3^2 = \frac{2(I_1 + I_2)T - K^2}{I_1 I_2}.$$

С помощью уравнений (3.6.2) можно выразить произведение проекций угловой скорости через её абсолютную величину:

$$\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 = \pm \frac{I_1 I_2 I_3}{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)} \sqrt{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - \omega_3^2)}.$$

К такому же произведению мы придём, умножив уравнения Эйлера на Ω_1/I_1 , Ω_2/I_2 и Ω_3/I_3 соответственно и сложив их:

$$\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 = \frac{I_1 I_2 I_3}{2(I_1 - I_2)(I_2 - I_3)(I_3 - I_1)} \{2\Omega_1 \dot{\Omega}_1 + 2\Omega_2 \dot{\Omega}_2 + 2\Omega_3 \dot{\Omega}_3\}.$$

Приравнявая правые части этих уравнений, сокращая общие множители и замечая, что содержимое фигурных скобок есть производная квадрата угловой скорости, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Omega^2}{dt} = \pm 2 \sqrt{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - \omega_3^2)},$$

которое решается методом разделения переменных. Результат представляется в виде эллиптического интеграла

$$t - t_0 = \pm \int \frac{d\Omega^2}{2 \sqrt{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - \omega_3^2)}},$$

откуда зависимость Ω^2 от времени может быть найдена посредством эллиптических функций. Вернуться к компонентам Ω_i , $i = 1, 2, 3$, можно с помощью тех же уравнений (3.6.2).

3.6.6 Упражнения

1. Во многих учебниках по теоретической механике кинетическая энергия вращающегося вокруг неподвижной точки тела записывается в виде

$$T = (1/2)(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq),$$

где p, q и r — проекции угловой скорости на оси ПСК (необязательно главные). Записать выражения для коэффициентов A, B, C, D, E и F в наших обозначениях.

2. Выразить проекции кинетического момента на оси ПСК в «их» (A, p и т.д.) обозначениях.
3. Доказать соотношения $K_i = \partial T / \partial \Omega_i$.
4. Выполнить решение системы уравнений для квадратов проекций угловой скорости и сравнить результат с приведённым в тексте.

Глава 4

Аналитическая динамика



4.1 Механическая система в обобщённых координатах

4.1.1 От векторной механики к аналитической

На примере систем с конечным числом степеней свободы мы ознакомились с Ньютоновым подходом к решению механических задач. Основная задача в этом подходе заключается в выявлении всех сил, действующих на каждую частицу в каждый момент времени, после чего движение однозначно определяется заданием начальных условий. Главными «действующими лицами» при этом являются радиус-векторы материальных точек, их импульсы, моменты импульсов, действующие на них силы, моменты сил. Всё это – векторы, и по этой причине ньютонова механика часто называется *векторной*. Однако, почти одновременно с развитием этого направления возникло и стало развиваться другое. Извечный соперник Ньютона Лейбниц (да-да, тот самый Лейбниц, что помешал Ньютону стать единственным творцом дифференциального исчисления), взял за меру движения тела не векторный импульс а скалярную величину — *vis viva* («живую силу»), сам же импульс (количество движения) он называл «мёртвой силой». С точностью до множителя $1/2$, «живая сила» Лейбница совпадает с тем, что называем мы сегодня кинетической энергией тела. Вместе с этим Лейбниц заменил «силу» Ньютона «работой силы». Эта «работа силы» была впоследствии заменена еще более фундаментальной величиной — потенциальной энергией. Таким образом, Лейбниц явля-

ется основателем второй ветви механики, в которой движение механической системы анализируется с помощью двух основных скалярных величин — кинетической энергии и потенциальной энергии *всей системы в целом*.. Эта вторая ветвь называется *аналитической механикой* или, столь же часто, *аналитической динамикой*. В её развитии приняли участие блестящие математики и механики, имена которых вы встретите на страницах этой главы. Вывод уравнений движения из экстремальных принципов побудил философов к глубоким философским обобщениям (типа «мы живём в лучшем из миров!»). С прагматической стороны, важнейшим достоинством аналитической механики является инвариантность (независимость) формы основных её уравнений от выбора конкретной системы координат, позволяющая писать механические законы в *обобщённых координатах*, перевод которых в любую конкретную систему осуществляется простой заменой символов.

4.1.2 Принцип Даламбера

Мы начнём изложение аналитической динамики с рассмотрения систем со связями. В разделе **1.9** мы уже рассматривали движение одной материальной точки, ограниченное наложенными на её координаты условиями склерономной (не зависящей от времени) связи. В результате действия связи, правая часть уравнения движения дополняется силой реакции, а к самому уравнению движения присоединяется одно или два уравнения связей:

$$m\vec{r} = \vec{F} + \vec{F}',$$

$$G_j(\vec{r}) = 0,$$

где j принимает одно значение (1), если движение частицы ограничивается её перемещением по некоторой поверхности, или два значения



Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский учёный-энциклопедист, философ, математик и механик.

(1,2), если возможно её движение только вдоль заданной линии. Теперь мы рассмотрим движение системы нескольких (N) материальных точек, ограниченное s голономными связями. Оно управляется системой уравнений

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}'_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3N \text{ скалярных уравнений движения})$$

$$G_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (s \text{ уравнений связи, } s < 3N)$$


На $6N$ неизвестных (координаты и силы реакции) здесь приходится $3N + s$ уравнений. Доопределение этой системы осуществляется методом неопределённых множителей Лагранжа. Он предложил вместо вытекающих из уравнений движения *действительных перемещений* $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ рассматривать *виртуальные перемещения* $\delta\vec{r}_i$. Как и реальные, виртуальные перемещения совместимы со связями, но в отличие от реальных они мгновенны и никак не связаны с реальным движением системы. Совместимость виртуальных перемещений со связями означает, что

$$G_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = G_j(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N, t) = 0$$

в любой момент времени. Разлагая функции связи в ряд по $\delta\vec{r}_i$ до членов первого порядка малости, получим

$$\sum_{i=1}^N \nabla_i G_j \cdot \delta\vec{r}_i = 0,$$

или, в проекциях,



$$\sum_{i=1}^{3N} G_{j,i} \cdot \delta x_i = 0,$$

где $G_{j,i} \equiv \partial G_j / \partial x_i$. Если речь идёт, например, о колебаниях математического маятника длиной r_0 в плоскости XOY ,

$$G(x, y) = x^2 + y^2 - r_0^2, \quad \delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \delta y = 2x \delta x + 2y \delta y$$

и условие совместимости со связями имеет вид $x \delta x + y \delta y = 0$.

Умножим обе части этого уравнения на F'_r/r :

$$F'_r(x/r) \delta x + F'_r(y/r) \delta y = F'_x \delta x + F'_y \delta y = 0.$$

Мы видим, что в данном случае виртуальная работа, совершаемая реакциями связей, равна нулю. Удовлетворяющие этому условию связи называют *идеальными*. А утверждение

$$\sum_{i=1}^{3N} F'_i \delta x_i \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}'_i \delta \vec{r}_i = 0$$

– принципом Даламбера.

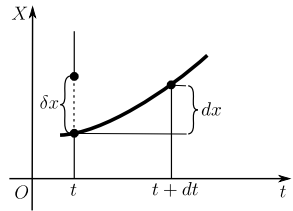


Рис. 4.1. Дифференциал (dx) и вариация (δx) координаты x



4.1.3 Уравнения Лагранжа 1-го рода

Наличие связей приводит к тому, что вариации δx_i не являются независимыми в совокупности: только $3N - s$ из них независимы, остальные выражаются через них. Исключить такое неравноправие координат позволяет метод *неопределённых множителей Лагранжа*. Умножим каждое из уравнений совместимости на свой множитель Лагранжа λ_j ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3N} G_{1,i} \delta x_i &= 0 \quad \times \lambda_1, \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^{3N} G_{s,i} \delta x_i &= 0 \quad \times \lambda_s, \end{aligned}$$

сложим их и вычтем полученную сумму из уравнения принципа Даламбера:

$$\sum_{i=1}^{3N} [F'_i - \lambda_1 G_{1,i} - \dots - \lambda_s G_{s,i}] \delta x_i = 0.$$



Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) – французский математик, астроном и механик итальянского происхождения. Внес выдающийся вклад во многие области чистой математики, включая вариационное исчисление, теорию дифференциальных уравнений, решение задач на нахождение максимумов и минимумов, теорию чисел (теорема Лагранжа), алгебру и теорию вероятностей.

Разложим эту сумму на две части

$$\sum_{i=1}^s [F'_i - \sum_{j=1}^s \lambda_j G_{j,i}] \delta x_i + \sum_{i=s+1}^{3N} [F'_i - \sum_{j=1}^s \lambda_j G_{j,i}] \delta x_i = 0$$

и выберем множители Лагранжа λ_j так, чтобы квадратные скобки в первых s слагаемых обратились в нуль:

$$F'_i - \sum_{j=1}^s \lambda_j G_{j,i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

Оставшиеся $3N - s$ координат можно считать независимыми, и для выполнения равенства нулю оставшейся суммы необходимо, чтобы содержимое каждой квадратной скобки было равно нулю:

$$F'_i - \sum_{j=1}^s \lambda_j G_{j,i} = 0, \quad i = s + 1, \dots, 3N.$$

В результате все силы реакции выражены через множители Лагранжа

$$F'_i = \sum_{j=1}^s \lambda_j G_{j,i}, \quad i = 1, \dots, 3N,$$

и для $3N + s$ неизвестных (декартовы координаты и множители Лагранжа) мы имеем систему $3N + s$ уравнений:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j G_{j,i}(x_1, \dots, x_{3N}, t), & (3N \text{ уравнений}) \\ G_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) &= 0. & (s \text{ уравнений}) \end{aligned}$$

Эта система называется *уравнениями Лагранжа 1-го рода*. В векторной записи она имеет вид

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j \nabla_i G_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$G_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad j = 1, \dots, s.$$

Пример: машина Атвуда

Покажем применение метода Лагранжа к решению простейшей задачи со связью – машины Атвуда. Так называется нехитрое устройство, состоящее из вращающегося без трения диска малой массы (будем считать его невесомым), через который перекинута нерастяжимая (тоже невесомая) нить с грузами на концах. Обозначим радиус блока через a , длину нити через l , массы грузов через m_1 и m_2 . Начало координат выберем на оси диска, ось OX направим вниз.

Имеем систему с двумя координатами x_1 и x_2 , на которые наложено одно условие связи $x_1 + x_2 + \pi a = l$, так что функция связи $G(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \pi a - l$ имеет своими производными $G_{,1} = G_{,2} = 1$, а система уравнений Лагранжа запишется в виде:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= m_1 g + \lambda, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= m_2 g + \lambda. \end{aligned}$$

Единственный здесь неопределённый множитель Лагранжа имеет смысл реакции нити. Из уравнения связи находим $\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$ и, вычитая из первого уравнения второе, исключим λ :

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g.$$

Таким образом находим, что движение грузов в этом устройстве является равноускоренным с ускорением

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (4.1.1)$$

Реакция нити, естественно, направлена вверх и равна

$$\lambda = -2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \equiv -2\mu g,$$

где μ – приведённая масса.

4.1.4 Обобщённые координаты и скорости

Наличие s связей позволяет ограничиться вычислением лишь $n = 3N - s$ любых координат x_1, \dots, x_n , остальные найти из уравнений связи. Число n называется *числом степеней свободы* или *размерностью* системы. Оно не может меняться для данной механической системы и является её характерной константой. Меньшего числа параметров недостаточно для определения положения системы в пространстве, большего же не требуется.

Любые линейно независимые параметры q_1, \dots, q_n , однозначно определяющие конфигурацию системы, называются *обобщёнными координатами*. Число частиц, составляющих механическую систему, и их декартовы координаты несущественны при данном методе описания, важны лишь обобщённые координаты и некоторые функции от них. Твёрдое тело может состоять из бесконечного числа частиц, но с точки зрения механики образует систему с шестью степенями свободы, её положение в пространстве характеризуется шестью координатами.

Функции

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n, t), \quad i = 1, \dots, 3N,$$

осуществляющие переход от обобщённых координат к исходным, должны быть ограничены, однозначны, непрерывны и дифференцируемы, и необходимо, чтобы якобиан по крайней мере одной комбинации из этих функций был отличен от нуля.

Следующие соотношения играют важную роль в дальнейшем:

$$\dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad (4.1.3)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}. \quad (4.1.4)$$

Доказательство (4.1.3) производится простым дифференцированием равенства (4.1.2). Доказательство (4.1.4) основывается на паре следующих соотношений:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_j}$$

и

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d}{dt} x_i = \sum_k \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}.$$

Производную \dot{q}_k называют *обобщённой скоростью*.

Элементарная работа сил, действующих в системе в процессе реальных перемещений составляющих её частиц, выражается через приращения обобщённых координат следующим образом:

$$\sum_i \vec{F}_i d\vec{r}_i = \sum_i F_i dx_i = \sum_i F_i \sum_j \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) dq_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt.$$

Работа же при виртуальных перемещениях имеет вид

$$\delta A = \sum_i F_i \delta x_i = \sum_j Q_j \delta q_j,$$

где

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

– обобщённые силы.

Замечание 1. Здесь и далее суммирование по индексам при векторных величинах ведётся в пределах от 1 до N , по индексам при x – от 1 до $3N$, по индексам при q – от 1 до n .

Замечание 2. На практике необязательно пользоваться общей формулой для вычисления Q_j . Пользуясь взаимной независимостью обобщённых координат, можно придать вариацию каждой из них, полагая остальные неизменными, и вычислить обобщённые силы по формуле $Q_j = \delta A_j / \delta q_j$.

Замечание 3. Каждой обобщённой координате q_j соответствует своя обобщённая скорость \dot{q}_j и обобщённая сила Q_j , но размерности этих обобщённых переменных вовсе не обязаны совпадать с размерностями их физических аналогов. Если силы потенциальны, обобщённые силы тоже потенциальны: сила выражается через потенциальную энергию $U(x_i(q_j)) \equiv U(q_j)$ соотношением

$$Q_j = - \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Чтобы выразить кинетическую энергию

$$T = \sum_i \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}$$

через обобщённые координаты и скорости, воспользуемся формулой (4.1.2):

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 = T_2 + T_1 + T_0,$$

где

$$T_2 = \sum_{jk} \frac{m_{jk}}{2} \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

$$m_{jk} = m_{jk}(q_i) = \sum_i m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right),$$

$$T_1 = \sum_j b_j \dot{q}_j, \quad b_j = \left(\sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right),$$

и

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2.$$

Заметим, что в обобщённом представлении кинетическая энергия зависит не только от скоростей, но и от координат.

4.1.5 Уравнения Лагранжа 2-го рода

Выразим принцип Даламбера в обобщённых координатах:

$$\begin{aligned} \sum_i F'_i \delta x_i &= \sum_i (m_i \ddot{x}_i - F_i) \sum_j \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \\ &= \sum_j \left[\sum_i (m_i \ddot{x}_i - F_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \end{aligned}$$

Вариации обобщённых координат δq_j независимы, поэтому

$$\left[\sum_i (m_i \ddot{x}_i - F_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right] = 0,$$

откуда

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = Q_j.$$

Преобразуя левую часть с применением формул (14.1.3) и (14.1.4),

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\dot{x}_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\dot{x}_i^2}{2}, \end{aligned}$$

приходим к уравнениям Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1.5)$$

Заметим, что в случае стационарной (не зависящей от времени) связи между обобщёнными и исходными (декартовыми) координатами обобщённая кинетическая энергия является однородной квадратичной формой относительно скоростей с коэффициентами m_{jk} , зависящими (в отличие от декартовой формы) от координат:

$$T = T_2 = (1/2) \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

– кинетическая энергия системы, выраженная через обобщённые координаты и скорости.

Далее уравнения Лагранжа 2-го рода будем называть, для краткости, просто *уравнениями Лагранжа*.

4.1.6 Упражнения

1. Применив уравнения Лагранжа первого рода к описанию движения машины Атвуда (две массы, соединённые невесомой нитью, переброшенной через невесомый блок, вращающийся без трения), найти ускорения масс.
2. Найти ускорения грузов в машине Атвуда с неоднородным блоком массы m и радиусом R центр масс которого отстоит от оси вращения на расстоянии d , момент инерции относительно этой оси равен I_0 . Нить нерастяжима, невесома и не проскальзывает по блоку.
3. Показать, что в случае, когда $T = f_1(q_1)\dot{q}_1^2 + \dots + f_n(q_n)\dot{q}_n^2$ и $U = U_1(q_1) + \dots + U_n(q_n)$, система уравнений Лагранжа распадается на независимые уравнения.
4. Найти выражения обобщённых импульсов в цилиндрической и сферической системах координат.

4.2 Уравнения Лагранжа для системы материальных точек

4.2.1 Уравнения Лагранжа для потенциальных систем

Если силы, действующие в системе, потенциальны, то

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} = 0.$$

Поскольку U не зависит от скоростей, можно это уравнение (точнее, систему уравнений) представить так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2.1)$$

где $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = T - U$. Это превышение кинетической энергии над потенциальной, рассматриваемое как функция взаимно независимых обобщённых координат, обобщённых скоростей и, в общем случае,

времени, называется *функцией Лагранжа*. Функция Лагранжа играет центральную роль в аналитической механике и очень важную роль в теоретической физике вообще.

Примечание 1. Мы *определили* обобщённые координаты как независимые, учтя связи при переходе от x_i , $i = 1, 2, \dots, 3N$ к q_j , $j = 1, 2, \dots, n \equiv 3N - s$. Иногда поступают наоборот: вначале выполняют переход от x_i , $i = 1, 2, \dots, 3N$ к обобщённым координатам q_j , $j = 1, 2, \dots, 3N$, а затем учитывают связи. В этом случае уравнения Лагранжа для потенциальных систем записываются в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^s \lambda_k G_{k,j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 3N.$$

Примечание 2. При изначальном введении обобщённых координат мы избегаем уравнений связи, но косвенным путем связи всё равно проникают в функцию Лагранжа. Реономные связи вносят в функцию Лагранжа явную зависимость от времени. Явная зависимость ее от времени может появиться и в результате переменной внешней силы, которая тем не менее может быть потенциальной (пример – возмущение орбиты планеты пролетающим мимо неё тяжелым космическим телом). В обоих случаях в списке аргументов функции Лагранжа появляется время. Потенциальную систему, функция Лагранжа которой не содержит времени явно, называют *консервативной*.

4.2.2 Уравнения Лагранжа в векторной форме

Лагранжева механика может быть полностью изложена без использования векторного аппарата (говорят, Лагранж гордился тем, что в его книге по механике не было ни одного рисунка). Но в физических приложениях наглядность векторной картины очевидна. В связи с этим, нелишним будет привести уравнение Лагранжа в векторном виде.

Представим вариацию функции Лагранжа системы N частиц в виде

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \delta x_n + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} \delta \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_n} \delta \dot{x}_n = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i + \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} \delta \vec{v}_i,$$

где введены обозначения

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \vec{v}} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial v_x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial v_y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial v_z},$$

а знаки \sum означают суммирование по частицам системы, то есть индекс при векторах \vec{r}_i и \vec{v}_i пробегает значения от 1 до N .

Умножая уравнение Лагранжа для каждой из координат

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_i} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i}\end{aligned}$$

на соответствующий орт и складывая, получим уравнение Лагранжа в векторных обозначениях:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь символы частных производных по векторным аргументам \vec{r} и \vec{v} представляют собой градиенты функций в пространстве координат и скоростей соответственно:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \vec{e}_x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i} \vec{e}_y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} \vec{e}_z = \text{grad}_{\vec{r}_i} \mathcal{L}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ix}} \vec{e}_x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{iy}} \vec{e}_y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{iz}} \vec{e}_z = \text{grad}_{\vec{v}_i} \mathcal{L}.\end{aligned}$$

Подставляя в эти выражения

$$\mathcal{L} = \sum \frac{m_i}{2} (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2) - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N),$$

видим, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} = - \frac{\partial U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i} = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

– сила, действующая на i -ю частицу, и

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} &= \frac{m_i}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \vec{v}_i} = \frac{m_i}{2} \frac{\partial (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2)}{\partial \vec{v}_i} = \\ &= \frac{m_i}{2} (2v_{ix} \vec{e}_x + 2v_{iy} \vec{e}_y + 2v_{iz} \vec{e}_z) = m_i \vec{v}_i = \vec{p}_i\end{aligned}$$

– импульс этой частицы. Для одной частицы

$$\mathcal{L} = \frac{m \vec{v}^2}{2} - U(\vec{r}),$$

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}}$$

и уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}},$$

или, в обычных обозначениях

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\text{grad } U.$$

4.2.3 Составление уравнений Лагранжа для потенциальных систем

Можно рекомендовать следующий порядок действий при составлении уравнений Лагранжа:

1. Выбрать систему независимых координат q_1, \dots, q_n .
2. Записать в этих координатах потенциальную энергию $U(q_i) \equiv U(x_j(q_i))$.
3. Записать кинетическую энергию $T(q_i, \dot{q}_i) \equiv T(x_j(q_i), \dot{x}_j(q_i, \dot{q}_i))$.
4. Составить функцию Лагранжа $\mathcal{L} = T - U$.
5. Найти обобщённые силы $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$.
6. Найти обобщённые импульсы $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$.
7. Составить уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пример: машина Атвуда

Вернёмся к машине Атвуда, чтобы продемонстрировать отличие в применении уравнений Лагранжа 2-го рода от уравнений Лагранжа 1-го рода. Из постановки задачи ясно, что найдя зависимость, скажем, $x_1(t) = q(t)$, мы полностью определим движение системы – это система с одной степенью свободы. Её кинетическая энергия

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{q}^2,$$

потенциальная энергия

$$U = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = (m_2 - m_1) g q + \text{const},$$

и функция Лагранжа (аддитивную постоянную опускаем)

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{q}^2 - (m_2 - m_1)gq.$$

Находя её производные

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -(m_2 - m_1)g, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = (m_2 + m_1)\dot{q},$$

составим (одно) уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}(m_2 + m_1)\dot{q} = -(m_2 - m_1)g$$

или

$$\ddot{q} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g.$$

Результат совпадает с (4.1.1).

В качестве обобщённой координаты q мы могли бы здесь взять координату второй массы x_2 , разность координат $x_1 - x_2$, угол поворота диска φ .

4.2.4 Обобщённо-потенциальные системы

Уравнения Лагранжа могут быть записаны в этом же виде и для непотенциальных сил, но только для таких, которые можно представить в виде

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j},$$

где $V(q_j, \dot{q}_j, t)$ – произвольная дифференцируемая функция. Действительно, в этом случае

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j},$$

то есть

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0,$$

где $\mathcal{L} = T - V$. Такие силы (и системы, в которых они имеют место) называют *обобщённо-потенциальными*.

Вычислим работу, совершаемую обобщённо-потенциальными силами в единицу времени:

$$\begin{aligned} \sum_j \dot{q}_j Q_j &= \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial V}{\partial q_j} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_j \ddot{q}_j \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{dV}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_j \ddot{q}_j \frac{\partial V}{\partial q_j} = \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - V \right) + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Для обобщённого потенциала частного вида

$$V = \sum_j \dot{q}_j A_j(q_1, \dots, q_n),$$

откуда следует, что $\sum_j \dot{q}_j Q_j = 0$ – такие силы (называемые *гироскопическими*) работы не совершают. К их числу относятся сила Кориолиса и сила Лоренца. Для электрического заряда в электромагнитном поле

$$V = e\varphi - \frac{e}{c} \sum_i \dot{x}_i A_i \equiv e\varphi - \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \vec{A}$$

и соответственно

$$\mathcal{L} = T - e\varphi + \frac{e}{c} \vec{v} \vec{A}. \tag{4.2.2}$$

4.2.5 Функция Лагранжа в неинерциальной системе отсчёта

Пусть K_0 – ИСО, K' – НСО, поступательно движущаяся относительно K_0 со скоростью $\vec{V}'(t)$ и K – НСО, имеющая общее с K' начало, но вращающаяся относительно неё с угловой скоростью $\vec{\Omega}(t)$. Обозначим скорости частицы в каждой из этих систем координат через \vec{v}_0 , \vec{v}' и \vec{v} соответственно. Аналогичным образом отметим и функции Лагранжа. Очевидно,

$$\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{V}',$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{mv_0^2}{2} - U$$

$$\mathcal{L}' = \frac{m}{2} (\vec{v}' + \vec{V}')^2 - U = \frac{mv'^2}{2} + m\vec{v}' \vec{V}' + \frac{m}{2} V'^2 - U.$$

Скорость $\vec{V}' = \vec{V}'(t)$ может быть представлена как полная производная по времени и опущена. Далее

$$\vec{v}' \vec{V}' = \frac{d}{dt} (\vec{r}' \vec{V}') - \vec{r}' \frac{d\vec{V}'}{dt} \implies -\vec{A}' \vec{r}',$$

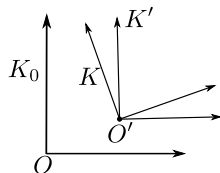


Рис. 4.2. Инерциальная (K_0) и неинерциальные (K и K') системы координат



где $\vec{A}' = \dot{\vec{V}}'$ – ускорение поступательного движения, а полная производная вновь опущена. В результате имеем

$$\mathcal{L} = \frac{mv'^2}{2} - m\vec{A}'\vec{r}' - U.$$

В системе K $\vec{v} = \vec{v}' - [\vec{\Omega}, \vec{r}']$, $\vec{A}'\vec{r}' = \vec{A}\vec{r}$ (скалярное произведение инвариантно относительно вращения) и

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}, \vec{r}]^2 - m\vec{A}\vec{r} - U.$$

Это – общий вид функции Лагранжа частицы в произвольной НСО.

Возьмём вариацию найденной функции Лагранжа по координатам и скоростям,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= m\vec{v}\delta\vec{v} + m\delta\vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] + m\vec{v}[\vec{\Omega}, \delta\vec{r}] + m[\vec{\Omega}, \vec{r}][\vec{\Omega}, \delta\vec{r}] - m\vec{A}\delta\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\delta\vec{r} = \\ &= m\vec{v}\delta\vec{v} + m\delta\vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] + m[\vec{v}, \vec{\Omega}]\delta\vec{r} + m[[\vec{\Omega}, \vec{r}], \vec{\Omega}]\delta\vec{r} - m\vec{A}\delta\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\delta\vec{r}, \end{aligned}$$

и сопоставим её с общим выражением для вариации \mathcal{L} как функции \vec{v} и \vec{r} :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{v}}\delta\vec{v} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}}\delta\vec{r}.$$

В силу произвола $\delta\vec{v}$ и $\delta\vec{r}$ коэффициенты перед этими вариациями в обеих формулах должны совпадать:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{v}} = m\vec{v} + m[\vec{\Omega}, \vec{r}],$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}} = m[\vec{v}, \vec{\Omega}] + m[[\vec{\Omega}, \vec{r}], \vec{\Omega}] - m\vec{A} - \frac{\partial U}{\partial\vec{r}}.$$

Используя эти формулы в векторной форме уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{v}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}} = 0,$$

приходим к тому же выражению для силы, что и в **1.10.3**:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial\vec{r}} - m\vec{A} + m[\vec{r}, \dot{\vec{\Omega}}] + 2m[\vec{v}, \vec{\Omega}] + m[\vec{\Omega}, [\vec{r}, \vec{\Omega}]].$$

Пусть система K вращается относительно инерциальной K_0 с постоянной угловой скоростью, имея общее с ней начало. Тогда $\vec{A} = \vec{0}$, $\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$ и

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}, \vec{r}]^2 - U.$$

Вычислив обобщённый импульс

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m[\vec{\Omega}, \vec{r}],$$

запишем полную энергию частицы в этой вращающейся системе:

$$\begin{aligned} E = \vec{p}\vec{v} - \mathcal{L} &= mv^2 + m\vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] - \frac{mv^2}{2} - m\vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] - \frac{m}{2}[\vec{\Omega}, \vec{r}]^2 + U = \\ &= \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}[\vec{\Omega}, \vec{r}]^2 + U. \end{aligned}$$

Выражая скорость в НСО через скорость в ИСО

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - [\vec{\Omega}, \vec{r}],$$

получим:

$$\begin{aligned} E &= \frac{mv_0^2}{2} - 2\frac{m}{2}[\vec{\Omega}, \vec{r}]\vec{v}_0 + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}, \vec{r}]^2 - \frac{m}{2}[\vec{\Omega}, \vec{r}]^2 + U = \\ &= \frac{mv_0^2}{2} + U - m[\vec{\Omega}, \vec{r}]\vec{v}_0 = \frac{mv_0^2}{2} + U - m[\vec{r}, \vec{v}_0]\vec{\Omega} = E_0 - \vec{L}_0\vec{\Omega}. \end{aligned}$$

Это – закон преобразования энергии при переходе к равномерно вращающейся системе координат.

Если \vec{L}_0 и $\vec{\Omega}$ образуют острый угол θ , то кинетическая энергия частицы во вращающейся системе меньше: $E = E_0 - L_0\Omega \cos \theta < E_0$. Если этот угол тупой, $E > E_0$.

4.2.6 Упражнения

1. Проверить, действительно ли обобщённый потенциал (4.2.2) порождает силу Лоренца.
2. Написать функцию Лагранжа и уравнения движения сферического маятника (точки массой m , движущейся по неподвижной сфере радиуса R в однородном поле тяжести) в сферических координатах.
3. Записать функцию Лагранжа и уравнения движения в поле $U = mg\vec{r}\vec{e}_z$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.
4. Записать функцию Лагранжа и уравнения движения в поле $U = kr^2/2$ (трёхмерный изотропный гармонический осциллятор) в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.
5. Записать функцию Лагранжа и уравнения движения в поле $U = -\alpha/r$ в полярных координатах.

4.3 Принцип наименьшего действия и уравнения Лагранжа

4.3.1 Принцип наименьшего действия

Известно, что система, находящаяся в окрестности точки устойчивого равновесия, совершает гармонические колебания. В реальных системах всегда присутствуют диссипативные силы, под влиянием которых амплитуда колебаний убывает, стремясь к нулю, как экспоненциальная функция (см. 1.5.2.). В результате система «замирает» в положении равновесия, где её потенциальная (а стало быть, и полная) энергия имеет минимум. Этот факт имеет общее значение для всех систем и может быть возведен в принцип, называемый *принципом минимума энергии: в состоянии устойчивого равновесия системы её потенциальная энергия имеет минимум.* Чтобы найти положение устойчивого равновесия системы, надо прежде всего найти возможные положения равновесия из уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.3.1)$$

и проанализировать их на устойчивость, вычислив, например, вторые производные. Умножив условие (4.3.1) на δq_i и просуммировав по i , перепишем его в вариационном виде:

$$\delta U = 0.$$

Найденные из этого условия координаты и будут характеризовать возможное положение равновесия.

Чтобы распространить этот подход на определение закона движения системы $q_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, надо отыскать такую числовую характеристику траекторий системы, чтобы на реальной траектории она принимала наименьшее значение. Аргументом здесь выступают не точки в пространстве, а траектории системы $q_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, отображение которых на числовую ось называется *функционалом*.

Пусть $q_i(t)$ и $q'_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, – две траектории системы в интервале времени $a \leq t \leq b$, одна из которых реальная, а другая – виртуальная (воображаемая). В начальный и конечный моменты рассматриваемого интервала обе траектории совпадают: $q_i(a) = q'_i(a)$ и $q_i(b) = q'_i(b)$. Можно ли установить, которая из них настоящая, не решая уравнений движения? Ответ на этот вопрос даёт **принцип наименьшего действия**, постулирующий *существование особого*

функционала $S = S[q_i(\cdot)]$ от траекторий $q_i(t)$, принимающего на реальной траектории наименьшее (в общем случае, стационарное) значение. Такой функционал называется *действием*. Запись $S = S[q_i(\cdot)]$ с точкой на месте аргумента функции $q_i(\cdot)$ как раз и подчеркивает, что S зависит не от значения функций q_i в какой-то момент времени, а от их вида «в целом».

Пример такого функционала для свободной частицы – интеграл

$$S_0 = \int_a^b \frac{mv^2(t)}{2} dt,$$

принимающий на траектории равномерного прямолинейного движения наименьшее значение, равное $mv^2(a)(b - a)/2$.

Будем и в общем случае искать действие в виде интеграла по времени от некоторой функции координат и скоростей системы и, возможно, времени $f(q_i, \dot{q}_i, t)$:

$$S = \int_a^b f(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt.$$

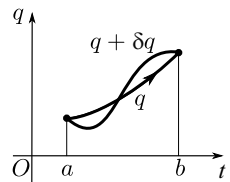


Рис. 4.3. Вариация траектории

Что собой представляет эта функция? Какому уравнению удовлетворяет она на реальной траектории? Чтобы ответить на этот вопрос, возьмем вариацию действия, полагая q_i и \dot{q}_i независимыми переменными:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_a^b \delta f dt = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right] dt = \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i dt + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_a^b. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Учитывая, что $\delta q_i(a) = \delta q_i(b) = 0$, а в промежутке (a, b) вариации $\delta q_i(t)$ произвольны, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

Это – уравнения Лагранжа, и следовательно, $f(q_i, \dot{q}_i, t)$ – функция Лагранжа, так что действие имеет вид интеграла

$$S = \int_a^b \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt,$$

где подынтегральная функция удвояет уравнению и

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}.$$

Физический смысл этого результата таков. Если известно положение системы (то есть, координаты всех составляющих её частиц) в два момента времени a и b , то реальная траектория отличается от всех виртуальных тем, что действие для неё минимально¹.

Заметим, что если обобщённые координаты не предполагаются независимыми, действие выбирается в виде

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) + \sum_{k=1}^s \lambda_k G_k(q_j(t)) \right] dt,$$

где q_j ($j = 1, 2, \dots, 3N$) и λ_k ($k = 1, 2, \dots, s$), варьируются независимо друг от друга.

Принцип наименьшего действия был сформулирован Ферма: «Природа действует наиболее легкими и доступными путями». Само понятие действия сформулировано Лейбницем, на которого в этом отношении ссылается и Мопертюи. Лейбниц называет эту величину «*actio formalis*» и поясняет: «Как *эффект*, так и *действие* я называю здесь формальным потому, что они в данном случае присущи просто движению как таковому. Совсем иными являются те эффекты действия, которые возникают благодаря какому-нибудь препятствию, – например, вследствие силы тяготения, притягивающей тела к центру Земли, вследствие сопротивления среды или связи или вследствие необходимости преодолеть какую-либо пружину, – вообще вследствие каких-либо подобных причин, связанных с конкретной материей.»

¹Это при условии справедливости вышеприведённой гипотезы, которая может выполняться не всегда. Так, если в момент a свободная частица находилась на одном полюсе, а в момент b – на противоположном, то меридиан, по которому она движется, остаётся неопределённым до тех пор, пока не будет указана начальная скорость. Без этой дополнительной информации все меридианы остаются равноправными, подобно положениям безразличного равновесия шара на горизонтальной плоскости.

Приведём ещё две поучительных цитаты. Одна из них принадлежит известному советскому учёному Л.С.Полаку: «Вариационные принципы выражают дифференциальные уравнения физических явлений в виде одной компактной теоремы; в них мы имеем такой тип принципов, который охватывает законы значительной части физики. Законы различных областей физики выражаются несложными дифференциальными уравнениями, свойством которых является то, что они могут быть сформулированы в виде вариационного принципа. Всякий же вариационный принцип эквивалентен некоторой системе дифференциальных уравнений. Таким образом, если законы каких-либо физических явлений выражаются дифференциальными уравнениями, то, исходя из чисто математических соображений, не связанных с сущностью этих явлений, возможно их приведение к вариационной форме. Это важно прежде всего постольку, поскольку позволяет записать эти уравнения в форме, независимой от системы координат, а также и потому, что позволяет использовать вариационные принципы для отыскания таких уравнений.

В электродинамике одна и та же функция Лагранжа служит для вывода уравнений поля и заряженных тел, что математически отнюдь не является очевидным. Это обстоятельство связано с тем, что уравнения системы поле–тело могут быть написаны в гамильтоновой форме, которая далее оказывается необходимой для перехода к квантовой механике»².

Вторая цитата принадлежит американскому физiku Р.Фейнману. Обсуждая принцип наименьшего времени (оптический аналог принципа наименьшего действия), он говорит в своих лекциях: «Легко понять идею причинности, проявляющуюся в том, что свет идет из одной точки в другую, а затем в следующую. Но принцип наименьшего времени есть философский принцип, который совсем иначе объясняет причину явлений в природе. Вместо причинной обусловленности, когда из одного нашего действия вытекает другое и т. д., этот принцип говорит следующее: в данной ситуации свет выбирает путь с наименьшим, или экстремальным временем. Но как удаётся свету выбирать свой путь? Вынохивает он что ли соседние пути и сравнивает их потом друг с другом? В некотором смысле так и происходит. Эту способность света нельзя понять в рамках геометрической оптики, поскольку она связана с понятием длины волны; длина волны, грубо говоря, есть тот отрезок впереди лежащего пути, который свет может «почувствовать» и сравнить с соседними путями. Этот факт трудно продемонстрировать на опыте со светом, так как длина волны света чрезвычайно мала. Но радиоволны с длиной волны, скажем, 3 см, «видят» намного дальше».

4.3.2 Примеры

Пример 1. Свободная частица совершает равномерное и прямолинейное движение в плоскости OXY , переходя за время $t = 1$ из начала координат в точку

²Л.С.Полак. Вариационные принципы механики. М.: ГИФМЛ, 1960 - С.364.

с координатами v, w . Рассматривая семейство проходящих через те же точки траекторий вида $x = vt^\alpha$, $y = wt^\beta$, убедиться, что реальная траектория $x = vt$, $y = wt$ обладает наименьшим действием.

Мы рассматриваем здесь параметризованное множество траекторий: каждая из них определяется парой значений (α, β) . Найдем функцию Лагранжа для α, β -траектории

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2] = \frac{m}{2} [v^2 \alpha^2 t^{2(\alpha-1)} + w^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)}],$$

а затем действие:

$$S = \int_0^1 \mathcal{L} dt = \frac{m}{2} \left[\frac{v^2 \alpha^2}{2\alpha - 1} + \frac{w^2 \beta^2}{2\beta - 1} \right].$$

Для реальной траектории $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Вычислив частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{mv^2 \alpha (\alpha - 1)}{(2\alpha - 1)^2} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = \frac{mw^2 \beta (\beta - 1)}{(2\beta - 1)^2} = 0,$$

видим, что точка $(1, 1)$ плоскости (α, β) является критической точкой функции $S(\alpha, \beta)$. Вторые производные

$$A(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} = mv^2 \frac{(2\alpha - 1)^2 - 4\alpha(\alpha - 1)}{(2\alpha - 1)^3} = \frac{mv^2}{(2\alpha - 1)^3},$$

$$B(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} = mw^2 \frac{(2\beta - 1)^2 - 4\beta(\beta - 1)}{(2\beta - 1)^3} = \frac{mw^2}{(2\beta - 1)^3},$$

$$C(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial \beta} = 0,$$

в данной точке имеют значения

$$A(1, 1) = mv^2, \quad B(1, 1) = mw^2, \quad C(1, 1) = 0.$$

Неравенство $AB - C^2 > 0$ выполняется, стало быть критическая точка $(1, 1)$ является точкой экстремума; числа A и B положительны, следовательно, этот экстремум – минимум.

Пример 2. Частица массой m в однородном поле $F_y = 2mw$ движется по одной из траекторий семейства $x = vt^\alpha$, $y = wt^\beta$, проходящих через точки с координатами $(0, 0)$ и (v, w) в моменты времени $t = 0$ и $t = 1$ соответственно. Найти эту траекторию.

Выбрать реальную траекторию из предлагаемого семейства – значит выбрать траекторию с минимальным значением действия, другими словами, найти положение минимума функции $S(\alpha, \beta)$. Силе $F_y = 2mw$ соответствует потенциальная энергия $U(y) = -2mwy$. В функцию Лагранжа добавляется слагаемое $2mwy = 2mw^2 t^\beta$, а действие принимает вид

$$S = S_0 + \frac{2mw^2}{\beta + 1},$$

где через S_0 обозначено действие из предыдущего примера. Новое действие S имеет минимум в точке $\alpha = 1$, $\beta = 2$, что соответствует параболической траектории с постоянным ускорением вдоль оси OY : $x = vt$, $y = wt^2$.

Пример 3. Частица массой m в однородном поле $F_y = 2mw$ движется по траектории, проходящей через точки с координатами $(0, 0)$ и (v, w) в моменты времени $t = 0$ и $t = 1$ соответственно. Найти эту траекторию.

В отличие от предыдущего примера, множество траекторий, из которых надо выбрать реальную, не параметризовано, и вместо частных производных по параметрам надо использовать вариации, приводящие к выведенным уже уравнениям Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}.$$

Подставляя сюда функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2] + 2mwy,$$

приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \\ m\ddot{y} &= 2mw, \end{aligned}$$

приводящей при указанных начальных и конечных условиях к той же параболической траектории. Результат совпал с предыдущим потому, что предложенное в том примере семейство включало в себя реальную траекторию.

4.3.3 Свойства уравнений Лагранжа

Следующие свойства уравнений Лагранжа вытекают из определения функции Лагранжа и связи с принципом наименьшего действия.

1. Уравнения Лагранжа не изменятся, если функцию Лагранжа умножить или разделить на постоянное число.
2. Уравнения Лагранжа не изменятся, если к функции Лагранжа прибавить постоянное число.
3. Уравнения Лагранжа не изменятся, если к функции Лагранжа прибавить полную производную по времени от произвольной (дифференцируемой) функции координат и времени $h(q_i, t)$:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dh}{dt}. \text{ Действительно, в результате } \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}' =$$

$$\mathcal{S} + \int_a^b \frac{dh}{dt} dt = \mathcal{S} + h(q_i(b), b) - h(q_i(a), a) \text{ и } \delta \mathcal{S}' = \delta \mathcal{S}.$$

4. Функция Лагранжа системы невзаимодействующих подсистем равна сумме функций Лагранжа этих подсистем $\mathcal{L}_{A+B} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B$.
5. Непосредственно из уравнений Лагранжа следует, что если какая-то координата, например q_n , не входит явно в выражение для функции Лагранжа, а входит в неё только через свою производную, то соответствующий ей обобщённый импульс $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n}$ сохраняется. Наличие таких координат (называемых *циклическими*), позволяет уменьшить число уравнений движения.

Остановимся подробнее на последнем свойстве. Пусть функция Лагранжа $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ не зависит от одной из обобщённых координат, скажем от q_n , $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$. Тогда система уравнений Лагранжа представляется в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} = 0.$$



Из последнего уравнения следует интеграл движения

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} = \text{const} \equiv c_n. \quad (4.3.3)$$

Подставив сюда явное выражение для функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{n-1}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n; t),$$

можно разрешить уравнение (4.3.3) относительно производной \dot{q}_n :

$$\dot{q}_n(t) = g(q_1, \dots, q_{n-1}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, c_n; t).$$

Перейдём теперь к видоизменённой с помощью этой подстановки функции Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(q_1, \dots, q_{n-1}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, c_n; t) = \\ = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{n-1}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, g(q_1, \dots, q_{n-1}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, c_n; t); t), \end{aligned}$$

связанной с исходной соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_j} - c_n \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\mathcal{L}^* - c_n \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_j}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_j} - c_n \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial q_j} = \frac{\partial (\mathcal{L}^* - c_n \dot{q}_n)}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Таким образом, убеждаемся в том, что новая модификация функции Лагранжа

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^* - c_n \dot{q}_n,$$

называемая *функцией Рауса*, удовлетворяет уравнениям Лагранжа для нециклических переменных:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Найдя из этой системы функции $q_j(t), \dot{q}_j(t)$, $j = 1, \dots, n-1$, подставим их в равенство (4.3.3), представляющее собой дифференциальное уравнение относительно циклической переменной, решением которого и завершается решение всей задачи.

Сказанное выше остаётся справедливым и для случая нескольких циклических переменных q_k , при этом функция Рауса записывается в виде

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^* - \sum_k c_k \dot{q}_k.$$

Пример 4. Функция Лагранжа материальной точки, движущейся в плоскости под действием центральной силы притяжения, пропорциональной расстоянию от центра, в полярных координатах имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{k}{2} r^2. \quad (4.3.4)$$

Угловая переменная φ не входит в функцию Лагранжа (входит только её производная), поэтому является циклической. Соответствующий интеграл движения (4.3.3) имеет смысл z -проекции момента импульса

$$m r^2 \dot{\varphi} = c_\varphi = L_z. \quad (4.3.5)$$

Находя отсюда производную $\dot{\varphi}$ и подставляя её в (4.3.4), получим видоизменённую функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}^* = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{m^2 r^2} \right) - \frac{k}{2} r^2,$$

вычитая из которой $L_z \dot{\varphi}$ приходим к функции Рауса:

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{kr^2}{2} - L_z \dot{\varphi} = \frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{kr^2}{2} - \frac{L_z^2}{mr^2} = \frac{m \dot{r}^2}{2} - \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{kr^2}{2}.$$

Уравнение движения для нециклической координаты r

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial r} \right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{m \dot{r}^2}{2} - \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{kr^2}{2} \right) = 0$$

принимает вид

$$m \ddot{r} - \frac{L_z^2}{mr^3} + kr = 0.$$

Найдя из этого уравнения $r(t)$, соответствующее заданному начальному условию $r(0) = r_0$, подставив результат в дифференциальное уравнение (4.3.5) и разрешив его относительно $\varphi(t)$,

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{L_z}{mr^2(t)} dt + \varphi_0,$$

завершим решение задачи.

4.3.4 Законы сохранения

Сохранение энергии

Поместим в пустое пространство, где нет ни тел, ни полей, механическую систему, внутренние силы которой потенциальны, и проследим

за её поведением. Спустя некоторое время, вновь приведём её в исходное состояние с теми же самыми начальными условиями, и, используя этот момент как новое начало отсчета времени, вновь проследим за системой. Опыт, конечно, мысленный, но ответ достаточно очевиден: *мы увидим то же самое движение*. Действительно, если бы в пространстве были другие тела, то их движение могло изменить ситуацию в области, где мы помещаем нашу систему. Но в пустом пространстве ничего не происходит и не может произойти: оно остаётся тем же самым, все моменты времени равноправны. В физической терминологии это свойство формулируется как *однородность времени*, в математическом плане однородность времени означает инвариантность функции Лагранжа относительно сдвига во времени (проще, отсутствие явной зависимости её от t). Рассмотрим следствие такого предположения.

Пусть функция Лагранжа не зависит явно от времени: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \\ &= \sum \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{d}{dt} \dot{q}_i = \sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \left(\sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) = 0$$

или

$$\sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \text{const.}$$

Чтобы определить физический смысл этой постоянной, продифференцируем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q_j)$$

по обобщённой скорости \dot{q}_k :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} [\delta_{ik} \dot{q}_j + \dot{q}_i \delta_{jk}] = \frac{1}{2} \left[\sum_j m_{kj} \dot{q}_j + \sum_i m_{ik} \dot{q}_i \right] = \sum_j m_{kj} \dot{q}_j.$$

Далее,

$$\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_{kj} m_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j = 2T,$$

откуда следует, что *обобщённая энергия*

$$\sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \mathcal{L} = E$$

совпадает с полной энергией. Мы нашли, что гипотеза, или, лучше сказать, *принцип однородности времени ведёт к закону сохранения полной энергии замкнутой консервативной системы*. В декартовой системе координат

$$E = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_k} \vec{v}_k - \mathcal{L}. \quad (4.3.6)$$

Сохранение импульса

Взаимодействие же с другими системами и наличие диссипационных сил внутри самой системы нарушают постоянство обобщённое энергии; повторение предыдущих операций для данного случая приводит к выражению

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_k Q_k^{\text{н}} \dot{q}_k,$$

представляющему *закон изменения обобщённой энергии*.

Естественно далее *определить* пустое пространство, как пространство, все точки которого *равноправны*. Это означает, что в какую бы область пустого пространства мы ни поместили бы нашу систему, мы будем наблюдать одну и ту же картину движения. Это свойство *однородности пустого пространства* в математическом плане формулируется как инвариантность функции Лагранжа относительно сдвига в пространстве.

Воспользуемся векторным представлением функции Лагранжа. Смещение всех частиц системы на *один и тот же вектор* $\delta \vec{r}$ в пустом пространстве не должен изменить функцию Лагранжа:

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{r}_i + \delta \vec{r}, \dot{\vec{r}}) - \mathcal{L}(\vec{r}_i) = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r} = 0.$$

Вынося $\delta \vec{r}$ из-под знака суммы и заменяя в последней частные производные по координатам полными производными по времени от импульсов (в соответствии с уравнением Лагранжа), получим

$$\frac{d}{dt} \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} = \frac{d}{dt} \sum \vec{p}_i = 0,$$

откуда следует, что

$$\sum \vec{p}_i = \text{const.}$$

Таким образом, *принцип однородности пустого пространства ведёт к закону сохранения импульса замкнутой системы.*

Заметим, что в общем случае, когда механическая система незамкнута и в ней действуют диссипативные силы, её обобщённый импульс не сохраняется, его изменение описывается уравнением (4.3.8).

Сохранение момента импульса

Рассмотрим, наконец, последнее, приписываемое пустому пространству (в механике) свойство равноправности всех направлений (изотропности пространства). Математическая формулировка этого свойства – инвариантность функции Лагранжа относительно поворота вокруг произвольно направленной оси.

Повернём систему на угол $\delta\varphi$ вокруг оси, проходящей через начало координат и направленной вдоль единичного вектора \vec{n} . При этом повороте $\vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i + [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_i]$, где $\delta\vec{\varphi} = \vec{n}\delta\varphi$. Вследствие постулируемой инвариантности

$$\delta\mathcal{L} = \sum \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}_i} [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_i] = 0.$$

Выполняя циклическую перестановку, используя уравнения Лагранжа и применяя правило дифференцирования произведения, получим

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \delta\vec{\varphi} \sum \left[\vec{r}_i, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}_i} \right] = \delta\vec{\varphi} \sum \left[\vec{r}_i, \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{v}_i} \right] = \\ &= \delta\vec{\varphi} \left\{ \frac{d}{dt} \sum [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] - \sum [\vec{v}_i, m_i \vec{v}_i] \right\} = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\sum [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \vec{L} = \text{const.}$$

Принцип изотропности пустого пространства ведёт к закону сохранения момента импульса замкнутой системы.

Законы сохранения векторных характеристик (импульса и момента импульса) движения системы имеют и более общие аналоги: если система незамкнута, то есть, находится под действием внешней силы, но какая-то декартова проекция её главного вектора (или главного вектора момента сил) тождественно равна нулю, то соответствующая проекция импульса (или момента импульса) системы сохраняется.

Теорема Нётер

Рассматриваемые выше законы сохранения являются частными случаями важной теоремы, установленной в 1918 г. немецким математиком Эмми Нётер.

Теорема Нётер. *Каждому l -параметрическому преобразованию координат и времени, обращаяющему в нуль вариацию действия, соответствует l сохраняющихся динамических величин.*

Доказательство. Запишем бесконечно малое преобразование координат в виде $q_i \rightarrow q'_i = q_i + \sum_j \Lambda_{ij}(q) \delta \lambda_j$, где λ_j ($j = 1, \dots, l$) – независимые параметры преобразования. Если это преобразование не меняет действия, то первая вариация действия

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_a^b \sum \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \\ &= \int_a^b \sum \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \int_a^b \frac{d}{dt} \sum \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt \end{aligned}$$

должна быть равна нулю. Первое слагаемое на реальной траектории обращается в нуль, и мы получаем

$$\delta S = \int_a^b \frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \sum_{ij} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Lambda_{ij} \right) \delta \lambda_j dt = 0.$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при независимых параметрах $\delta \lambda_j$, завершаем доказательство:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Lambda_{ij} = 0, \quad \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Lambda_{ij} = \text{const}, \quad j = 1, \dots, l.$$

4.3.5 Диссипативные системы

До сих пор мы использовали лагранжев подход для описания динамики систем, силы в которых зависели от координат, но не от скоростей. Правда, в разделе 4.2.4 мы остановились на системах с гироскопическими силами, показав, что хоть такие силы и зависят от скорости, но зависимость эта такова, что её учёт обеспечивается лишь

присоединением к функции Лагранжа линейных членов без изменения структуры самого уравнения Лагранжа. Такие силы, однако, не совершают работы, и включение их в систему оставляет её по-прежнему консервативной. Может сложиться впечатление, что лагранжева динамика применима исключительно к консервативным системам, но это не так. Мы рассмотрим здесь другой класс сил – *сил сопротивления* или *диссипативных сил*, действующих на каждую частицу в направлении, противоположном её скорости. Ограничимся простым случаем, когда сила сопротивления пропорциональна скорости.

Пусть силы F_i представляют собой сумму потенциальной и непотенциальной (диссипативной) составляющих $F_i = F_i^{\text{п}} + F_i^{\text{д}}$, $F_i^{\text{д}} = -b_i \dot{x}_i$. Обозначим через

$$R \equiv \sum_j \frac{b_j \dot{x}_j^2}{2}$$

функцию Рэля. Очевидно, $F_i^{\text{д}} = -\partial R / \partial \dot{x}_i$ и

$$Q_i^{\text{д}} = \sum_j F_j^{\text{д}} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = - \sum_j \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}, \quad (4.3.7)$$

где

$$\mathcal{R}(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{jkl} \frac{b_j}{2} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l = \sum_{kt} \frac{b_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l}{2}, \quad b_{kl} = \sum_j b_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_l}.$$

В результате имеем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i}$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.3.8)$$

Таким образом, уравнение Лагранжа, изначально выведенное для консервативных систем, может быть распространено на системы с диссипативными силами (правда, специального типа, определяемого представлением (4.3.7)). Совершаемая диссипативными силами (в единицу времени) работа

$$\sum_j \dot{q}_j Q_j^{\text{д}} = - \frac{dR}{dt}.$$

4.3.6 О механиках векторной и аналитической

Перейдя от законов Ньютона к принципу наименьшего действия, мы получили возможность изложить всю (или почти всю) теоретическую механику на новых принципах. Исторически так и произошло. «Новая» механика стала называться *аналитической* в отличие от прежней, за которой закрепилось название *векторной*.

Перечислим основные различия между ними.

- Векторная механика рассматривает каждую частицу системы отдельно от остальных, аналитическая рассматривает систему как целое. При этом вместо сил, действующих на каждую из частиц системы, вводится одна единственная функция, характеризующая систему, – потенциальная энергия.
- Если на систему наложены кинематические ограничения (связи), выполнение которых обеспечивается действием больших сил реакции, то векторная механика должна рассматривать эти силы, аналитическая же не требует знания сил, обеспечивающих выполнение этих условий.
- Векторная механика формулирует закон движения системы с помощью системы уравнений для радиус-векторов образующих систему частиц, в аналитической механике закон движения формулируется с помощью одного объединённого принципа – принципа наименьшего действия. Так как минимум действия не связан с конкретной системой отсчёта, выводимые из принципа наименьшего действия уравнения справедливы в любой системе отсчёта, что позволяет выбрать координаты в соответствии с особенностями задачи.

Таким образом, два рассматриваемых здесь описания механического движения отличаются только математической формой, физическое же содержание обеих теорий остаётся тем же самым. Вот что писал об этом известный советский физик Л.С.Полак. «Если обратить внимание на первую аксиому механики Ньютона ($\vec{v} = \text{const}$ для изолированного от внешних воздействий тела), то легко убедиться в её связи с принципом наименьшего действия. Во-первых, для случая отсутствия внешних сил требования экстремума для интеграла $\int v dt$ даёт прямую линию или бесконечность. Последнее мы отбрасываем, так как бесконечных траекторий между двумя точками может быть бесконечно много. Таким образом, мы получаем первую аксиому Ньютона из принципа наименьшего действия. Во-вторых, с точки зрения антропоморфно рассуждающего наблюдателя сохранение состояния сопряжено с наименьшей затратой «действия». Существенно здесь отметить, что первая аксиома Ньютона есть формулировка принципа причинности на языке механики. Вместе со второй аксиомой в ней выражается тот факт, что каждое изменение должно иметь обуславлившую его причину, причём во времени последняя предшествует первому. Рассмотрение этой причины как внешней относительно тела, изменяющего своё состояние, есть одна из характерных черт механистического миропонимания. Таким образом, в самой основе механики Ньютона заложен чётко сформулированный на языке механики принцип причинности. В то же время, эта аксиома Ньютона получается из принципа наименьшего действия, которому усиленно придавалось телеологическое истолкование и который действительно долго сохранял некоторый неприятный привкус «конечных причин»³».

³Л.С.Полак. Вариационные принципы механики. - М.: ГИФМЛ, 1960 - С.362.

4.3.7 Упражнения

1. Траектории свободной частицы – прямые. Прямая является кратчайшей линией, соединяющей заданные точки. В вариационной терминологии это означает, что функционал длины $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$ на реальных траекториях принимает наименьшее значение. Показать, что функционал действия $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$ в этом случае также минимален.
2. В потенциальном поле $U(x) = -kx$ за время τ частица перемещается из точки $x = 0$ в точку $x = a$ по закону $x(t) = At^2 + Bt + C$. Найти постоянные A , B и C из принципа наименьшего действия.
3. Точка совершает движение по прямой в потенциальном поле $U = -Atx$, $A = \text{const}$. Найти действие S_{12} в промежутке (t_1, t_2) .
4. Составить функцию Лагранжа и вывести уравнения движения замкнутой системы двух точек с энергией взаимодействия $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ в переменных $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и $\vec{R} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/(m_1 + m_2)$.
5. Вывести методом Лагранжа уравнения движения свободной точки в равномерно вращающейся вокруг оси OZ системе координат ξ, η, ζ .

4.4 Теория малых колебаний

4.4.1 Уравнения Лагранжа в теории малых колебаний

Прежде чем продолжить изучение теории Лагранжа, рассмотрим её применение к простой, но очень важной задаче механики: *малым колебаниям* системы. Малые (точнее, *линейные*) колебания представляют особый интерес по двум причинам: во-первых, это – очень распространённый тип движения в природе, во-вторых – допускает аналитическое решение при произвольном числе степеней свободы. Для простоты выкладок ограничимся рассмотрением системы с двумя степенями свободы, в стационарном потенциальном внешнем поле. Её функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{m_{11}(q_1, q_2)\dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_{22}(q_1, q_2)\dot{q}_2^2}{2} + 2\frac{m_{1,2}(q_1, q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2}{2} - U(q_1, q_2).$$

Пусть эта система имеет положение устойчивого равновесия. Выберем начало координат в этой точке, так что координаты q_1, q_2 будут характеризовать теперь отклонение системы от положения равновесия. Приняв потенциальную энергию системы в положении равновесия равной нулю, получим:

$$U(0, 0) = 0, \quad U'_1(0, 0) = 0, \quad U'_2(0, 0) = 0,$$

$$U''_{11}(0,0) \equiv k_{11} > 0, \quad U''_{22}(0,0) \equiv k_{22} > 0,$$

$$U''_{12}(0,0) \equiv k_{12}, \quad k_{12}^2 < k_{11}k_{22}, \quad k_{ij} = k_{ji}, \quad i, j = 1, 2.$$

В окрестности положения равновесия с точностью до членов второго порядка малости

$$U(q_1, q_2) \approx \frac{1}{2}[k_{11}q_1^2 + k_{22}q_2^2 + 2k_{12}q_1q_2]$$

и, аналогичным образом,

$$T = \frac{1}{2}[m_{11}(q_1, q_2)\dot{q}_1^2 + m_{22}(q_1, q_2)\dot{q}_2^2 + 2m_{12}(q_1, q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2] \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}[m_{11}\dot{q}_1^2 + m_{22}\dot{q}_2^2 + 2m_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2], \quad m_{ij} \equiv m_{ij}(0,0).$$

Заметим, что коэффициенты m_{ij} , как и k_{ij} не зависят от координат и симметричны относительно перестановки индексов $m_{ij} = m_{ji}$.

В результате этих приближений функция Лагранжа системы, со-
вершающей малые колебания, принимает вид *квадратичной формы*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[m_{11}\dot{q}_1^2 + m_{22}\dot{q}_2^2 + 2m_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 - k_{11}q_1^2 - k_{12}q_2^2 - 2k_{12}q_1q_2].$$

Для двумерной системы

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = m_{11}\dot{q}_1 + m_{12}\dot{q}_2, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -k_{11}q_1 - k_{12}q_2,$$

и

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 = 0, \\ m_{12}\ddot{q}_2 + m_{22}\ddot{q}_2 + k_{12}q_1 + k_{22}q_2 = 0. \end{cases}$$

Для системы произвольной размерности n

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{ij} [m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - k_{ij}q_iq_j],$$

и уравнения Лагранжа принимают вид

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij}\ddot{q}_j + k_{ij}q_j] = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Заметим, что они имеют структуру уравнений для гармонических осцилляторов, но эти осцилляторы взаимодействуют между собой: в уравнение j -го осциллятора, содержащее \ddot{q}_j , входят координаты других осцилляторов.

4.4.2 Собственные частоты и нормальные координаты



Решение полученной выше системы однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ищется в виде

$$q_j = a_j \cos(\omega t + \varphi_j).$$

В целях сокращения записи при вычислениях удобно пользоваться комплексным представлением координат

$$q_j = A_j e^{i\omega t}, \quad A_j = a_j e^{i\varphi_j},$$

взяв после вычислений вещественную часть от q_j . Дифференцируя это выражение для координат

$$\dot{q}_j = i\omega A_j e^{i\omega t}, \quad \ddot{q}_j = -\omega^2 A_j e^{i\omega t}$$

и подставляя вторые производные в уравнения, получим для *комплексных амплитуд колебаний* двумерной системы

$$(k_{11} - m_{11}\omega^2)A_1 + (k_{12} - m_{12}\omega^2)A_2 = 0,$$

$$(k_{12} - m_{12}\omega^2)A_1 + (k_{22} - m_{22}\omega^2)A_2 = 0.$$

В общем случае мы имеем однородную систему n алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - m_{ij}\omega^2)A_j = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Система эта имеет нетривиальное решение, если составленный из коэффициентов при амплитудах определитель равен нулю:

$$\det (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) = 0.$$

По основной теореме алгебры это уравнение (называемое *характеристическим* или *вековым*) имеет n корней (некоторые из них могут совпадать), и все они положительны. Последнее можно показать, умножив систему уравнений на A_i^* и просуммировав по i . В результате получим

$$\sum_{i,j} (k_{ij} - m_{ij}\omega^2)A_i^* A_j = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{\sum k_{ij} A_i^* A_j}{\sum m_{ij} A_i^* A_j}.$$

Матрицы k_{ij} и m_{ij} вещественны и симметричны, поэтому

$$\left(\sum_{i,j} k_{ij} A_i^* A_j \right)^* = \sum_{i,j} k_{ij} A_i A_j^* = \sum_{i,j} k_{ji} A_i A_j^* = \sum_{i,j} k_{ji} A_j A_i^*,$$

откуда и следует положительность корней. Обозначим их через $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$, а под $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ будем понимать положительные квадратные корни из них, называемые *собственными частотами* системы. Каждая такая частота определяет частное решение системы дифференциальных уравнений (*моду колебаний*)

$$q_j^{(k)}(t) = A_j^{(k)} e^{i\omega_k t}, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

в котором коэффициенты $A_j^{(k)}$ пропорциональны соответствующим минорам определителя системы. Общее же решение даётся суперпозицией частных решений:

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^n C_{jk} A_j^{(k)} e^{i\omega_k t}.$$

В случае наличия совпадающих корней общий вид решения остаётся тем же и содержит то же число слагаемых с той лишь разницей, что некоторые из них имеют одинаковую частоту, а коэффициенты при таких членах уже не связаны с минорами определителя, которые в этом случае обращаются в нуль.

Вернёмся к двумерной системе, положив $C_{1k} = 1, C_{2k} = c_k$. Вместо исходных координат

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t}, \\ q_2 &= c_1 A_2^{(1)} e^{i\omega_1 t} + c_2 A_2^{(2)} e^{i\omega_2 t} \end{aligned}$$

введем новые координаты: $Q_1 = A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t}$ и $Q_2 = A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t}$, связанные с исходными взаимно однозначным соответствием:

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 + Q_2, & q_2 &= c_1 Q_1 + c_2 Q_2, \\ Q_1 &= \frac{c_2 q_1 - q_2}{c_2 - c_1}, & Q_2 &= \frac{-c_1 q_1 + q_2}{c_2 - c_1}. \end{aligned}$$

Каждая из новых координат удовлетворяет уравнению линейного гармонического осциллятора, не содержащему других координат:

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = 0.$$

Таким образом, задача о малых колебаниях системы линейным преобразованием координат сводится к задаче о движении невзаимодействующих гармонических осцилляторов для каждой из собственных частот. Эти новые координаты называются *нормальными*.

Аналогичным образом, в случае произвольного числа n степеней свободы вместо системы уравнений

$$\sum_j [m_{ij}\ddot{q}_j + k_{ij}q_j] = 0,$$

каждое из которых содержит все координаты, получаем n уравнений

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = 0,$$

каждое из которых содержит лишь одну неизвестную функцию и может решаться независимо от остальных. Вместо исходной функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{ij} [m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - k_{ij}q_iq_j],$$

содержащей слагаемые с произведениями различных координат, получаем сумму функций Лагранжа одномерных гармонических осцилляторов

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_k [\dot{Q}_k^2 - \omega_k^2 Q_k^2].$$

Колебание каждого из них даётся формулой (1.5.2)

$$Q_k(t) = a_k \cos(\omega_k t + \alpha_k),$$

где постоянные a_k и α_k определяются из начальных условий.

Геометрическая интерпретация рассмотренного преобразования – одновременное приведение обоих тензоров (кинетической и потенциальной энергии) к главным осям. В физическом отношении это преобразование даёт основание для введения фиктивных частиц – фононов, играющих важную роль в квантовой теории твёрдого тела⁴. Заметим,

⁴Распространение звука в кристалле – это коллективный эффект. Вот что говорил в своей нобелевской лекции Р.Б.Лафлин (УФН, 2000, т.170, №3): «Помимо всего прочего, новые коллективные явления могут «создавать» новые частицы. Когда большое число атомов конденсируется в кристалл, то фонон – элементарный квант звука – становится совершенно «законной» частицей в области низких энергий. Он свободно распространяется, не распадается, переносит импульс и энергию, известным образом связанные с длиной волны и частотой, взаимодействует

однако, что поскольку Q_k не является координатой какой-то одной степени свободы рассматриваемой механической системы, а входит, как составная часть, в каждую из них, каждый фотон не локализован, а занимает всё пространство системы.

4.4.3 Колебания системы с вырожденными частотами

Выше мы рассматривали случай, когда все корни ω_k^2 различны, однако часто (и в весьма важных случаях) бывает, что некоторые из них совпадают. Частоты, соответствующие таким совпадающим (*кратным*) корням называют *вырожденными*. Не останавливаясь на общей теории колебаний с вырожденными частотами, ограничимся здесь следующим примером.

В учебнике Ольховского⁵ рассмотрен пример системы, обладающей кратными частотами: она состоит из двух материальных точек с одинаковыми массами m , соединенных между собой невесомым стержнем длиной $2l$, центр которого движется по неподвижному стержню длиной $2a$. Каждая из точек 1 и 2 соединена пружинами одинаковой жёсткости k и длины a (в ненапряжённом состоянии) с неподвижными стенками (рис. 4.4). Положение системы описывается горизонтальным отклонением центра стержня от положения равновесия y и углом поворота его относительно вертикальной оси φ . Корни характеристического уравнения этой системы кратны $\omega_{1,2}^2 = 2k/m$, общее решение определяется двумя главными колебаниями с одинаковыми частотами и различными, вообще говоря, амплитудами и фазами:

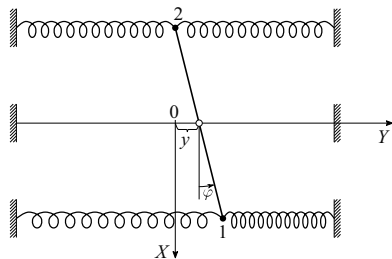


Рис. 4.4. Пример системы с вырожденными частотами

$$y = a_1 \cos(\omega t + \beta_1), \quad \varphi = a_2 \cos(\omega t + \beta_2).$$

по простым правилам, которые можно проверить экспериментально, служит переносчиком притягивающего взаимодействия, ответственного за проводимость, и так далее, и ни одно из этих свойств не зависит существенным образом от исходных уравнений движения. Это всё просто общие свойства кристаллов. Если же кристалл разобрать на части, то никакого фотона не останется, потому что для изолированного атома понятие звука лишено смысла».

⁵И.И.Ольховский. Курс теоретической механики для физиков. - М.: Изд. МГУ, 1974. - С.284.

Эти колебания можно осуществить, задавая симметричным и антисимметричными начальными условиями.

Мы рассмотрим эту же систему, но с различными жёсткостями пружин k_1 и k_2 , чтобы проследить переход к вырожденному случаю в самом решении. Как и прежде, кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = m\dot{y}^2 + ml^2\dot{\varphi}^2,$$

а потенциальная запишется в виде

$$U = 2 [k(y^2 + l^2\varphi^2) - \delta k y l \varphi],$$

где $k = (k_1 + k_2)/2$, $\delta k = k_2 - k_1$ (обе эти формулы записаны в приближении малых колебаний, поле тяготения, не влияющее в этом приближении на результат, игнорируется).

Перейдя, для удобства, к стандартным обозначениям (то есть, положив $q_1 = y$ и $q_2 = l\varphi$) запишем функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = T - U = m\dot{q}_1^2 + m\dot{q}_2^2 - 2kq_1^2 - 2kq_2^2 + 2\delta k \cdot q_1 q_2.$$

Подставив её в уравнение Лагранжа, получаем систему уравнений движения

$$m\ddot{q}_1 + 2kq_1 - \delta k q_2 = 0,$$

$$m\ddot{q}_2 + 2kq_2 - \delta k q_1 = 0.$$

Подстановкой $q_j = A_j e^{i\omega t}$ она приводится к алгебраической системе для амплитуд

$$(2k - m\omega^2)A_1 - \delta k A_2 = 0$$

$$-\delta k A_1 + (2k - m\omega^2)A_2 = 0.$$

Приравнявая определитель этой системы к нулю, приходим к уравнению

$$(2k - m\omega^2)^2 = (\delta k)^2,$$

отсюда следует

$$\omega_{1,2} = \sqrt{2k/m \pm \delta k/m}.$$

Таким образом, общее решение задачи получается в виде суммы колебаний

$$y = A_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1), \quad \varphi = (A_2/l) \cos(\omega_2 t + \beta_2)$$

с различными собственными частотами. При $\delta k = 0$ этот результат соответствует вырожденному случаю.

4.4.4 Колебания связанных систем

Возьмём две материальной точки, массами m , подвешенные на невесомых нитях одинаковой длины l к концам неподвижного стержня AB . Слегка подтолкнув одну из них, мы заставим её колебаться, при этом другая точка будет оставаться неподвижной, и наоборот. Мы имеем два невзаимодействующих маятника, две *несвязанные системы*. Если же мы теперь подвесим на такие же нити сам стержень, то колебания одного из маятников будут через стержень передаваться другому и наоборот. Пара этих маятников вместе со стержнем образует *связанную систему*. Обозначив массу стержня через M , а углы отклонения, показанные на рисунке 4.5, через θ , φ_1 и φ_2 , запишем кинетическую и потенциальную энергии в приближении теории малых колебаний:

$$T = (l^2/2)[M\dot{\theta}^2 + m(\dot{\theta} + \dot{\varphi}_1)^2 + m(\dot{\theta} + \dot{\varphi}_2)^2],$$

$$U = (gl/2)[M\theta^2 + m(\theta^2 + \varphi_1^2) + m(\theta^2 + \varphi_2^2)].$$

Система имеет три степени свободы, представляемые координатами θ , φ_1 и φ_2 . Соответствующие им уравнения движения запишутся в виде

$$2k^2\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + 2k^2n^2\theta = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}_1 + n^2\varphi_1 = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}_2 + n^2\varphi_2 = 0,$$

где $k^2 = M/(2m) + 1$ и $n^2 = g/l$. Вычтя из второго уравнения третье, получим:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 - \varphi_2) + n^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad (4.4.1)$$

Если же второе и третье уравнения сложить, умножить на k и прибавить или вычесть первое уравнение системы, то получим ещё два уравнения:

$$(k + 1)\frac{d^2}{dt^2}(2k^2\theta + \varphi_1 + \varphi_2) + kn^2(2k^2\theta + \varphi_1 + \varphi_2) = 0$$

и

$$(k - 1)\frac{d^2}{dt^2}(2k^2\theta - \varphi_1 - \varphi_2) + kn^2(2k^2\theta - \varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

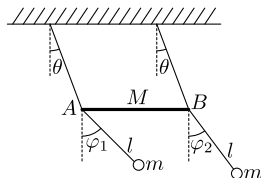


Рис. 4.5. Связанные маятники

Полученные этим преобразованием уравнения в отличие от исходной системы являются независимыми и, следовательно, переменные

$$\xi = 2k^2\theta + \varphi_1 + \varphi_2,$$

$$\eta = \varphi_1 - \varphi_2$$

и

$$\zeta = 2k^2\theta - \varphi_1 - \varphi_2$$

– нормальные координаты. Им соответствуют собственные частоты

$$\omega_1^2 = \frac{k}{k+1}n^2, \quad \omega_2^2 = n^2, \quad \omega_3 = \frac{k}{k-1}n^2.$$

Если масса стержня много больше массы материальных точек, $k \gg 1$ и собственные частоты близки друг к другу.

Разрешив приведённую выше систему уравнений для нормальных координат относительно углов отклонений, получим

$$\theta = (\xi + \zeta)/(4k),$$

$$\varphi_1 = (\xi + 2\eta - \zeta)/4,$$

$$\varphi_2 = (\xi - 2\eta - \zeta)/4.$$

Предположим, что в начальный момент $t = 0$ стержень и первый маятник отклонены от положения равновесия и отпущены, так, что

$$\theta = \alpha/2k, \quad \varphi_1 = \alpha, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dot{\theta} = \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0.$$

При этом

$$\xi = 2\alpha \cos \omega_1 t, \quad \eta = \alpha \cos \omega_2 t, \quad \zeta = 0$$

и, следовательно,

$$\varphi_1 = (\alpha/2)(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t),$$

$$\varphi_2 = (\alpha/2)(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t).$$

Если выполняется условие $k \gg 1$, то ω_1 немного меньше $\omega_2 = n$; запишем эту первую частоту в виде

$$\omega_1 = n - 2\nu,$$

где ν – малая величина. Переменные φ_1 и φ_2 можно представить в виде

$$\varphi_1 = \alpha \cos(\nu t) \cos[(n - \nu)t],$$

$$\varphi_2 = \alpha \sin(\nu t) \sin[(n - \nu)t].$$

Функции $\cos[(n - \nu)t]$ и $\sin[(n - \nu)t]$ описывают гармонические колебания с частотой $n - \nu \approx \sqrt{g/l}$, а множители $\alpha \cos(\nu t)$ и $\alpha \sin(\nu t)$ можно рассматривать как медленно меняющиеся (ν – мало) амплитуды этих колебаний. При этом амплитуда φ_1 максимальна в моменты $t = 0, \pi/\nu, 2\pi/\nu, \dots$, то есть тогда, когда амплитуда колебаний второго маятника минимальна, и наоборот. Колебания медленно передаются от одного маятника к другому и обратно. Этот эффект называют *биением колебаний*.

4.4.5 Одномерные кристаллы

Простейшей моделью кристаллических структур, свойства которых лежат в основе современной физики твёрдого тела, является одномерная цепочка связанных упругими силами частиц («атомов») одинаковой или чередующейся массы.

Бесконечная цепочка одинаковых атомов

Одномерные упругие цепочки представляют собой простейшие механические модели кристаллов.

Рассмотрим бесконечную последовательность материальных точек («атомов») одинаковой массы m , соединённых между собой невесомыми пружинками с одинаковой жёсткостью k . Цепочка расположена горизонтально, атомы могут двигаться только по прямой (оси OX). В ненапряжённом состоянии длины пружин равны a . В качестве координат возьмём отклонения атомов от положений равновесия: $q_j = x_j - ja, j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Уравнения колебаний такой системы

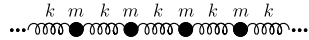


Рис. 4.6. Одномерная модель бесконечного кристалла из одинаковых атомов

$$m_j \ddot{q}_j + k(2q_j - q_{j-1} - q_{j+1}) = 0.$$

Простейший тип движения такой системы – бегущая гармоническая волна:

$$q_j = Ae^{i(\omega t - \kappa \xi_j)},$$

где $\xi_j = ja$ – положение равновесия колеблющегося атома (его «адрес» на оси), а κ – волновое число (не путать с жесткостью пружин k). Подставляя это выражение в уравнения движения, получим

$$-m\omega^2 + k(2 - e^{i\kappa a} - e^{-i\kappa a}) = 0,$$

откуда $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\kappa a}{2}$.

Эта формула относится к классу *дисперсионных соотношений*, определяющих зависимость частоты от волнового числа $\omega = \omega(\kappa)$ и играющих важную роль в современной физике.

Конечная цепочка одинаковых атомов

Теперь рассмотрим конечную цепочку из N одинаковых атомов, крайние из которых соединены с неподвижными стенками такими же пружинками (рис. 4.7). Расстояние между стенками $(N + 1)a$. В этом случае система уравнений движения состоит из N уравнений

$$m\ddot{q}_j + k(2q_j - q_{j-1} - q_{j+1}) = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

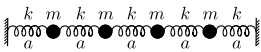


Рис. 4.7. Конечная цепочка одинаковых атомов

с граничными условиями $q_0(t) = q_{N+1}(t) = 0$. Таким условиям бегущая волна удовлетворять не может. Рассмотрим поэтому суперпозицию двух бегущих навстречу друг другу волн:

$$q_j(t) = Ae^{i(\omega t - \kappa \xi_j)} + Be^{i(\omega t + \kappa \xi_j)}.$$

Первое граничное условие определяет *стоячую волну*: $A + B = 0$ и, следовательно,

$$q_j(t) = 2iBe^{i\omega t} \sin(\kappa \xi_j).$$

Второе приводит к выражению

$$2iBe^{i\omega t} \sin((N + 1)\kappa a) = 0,$$

из которого следует дисперсионная формула

$$\omega_n = C \sin \frac{\kappa_n a}{2}, \quad C = 2\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \kappa_n a = \frac{n\pi}{N + 1},$$

устанавливающая связь между частотой колебаний ω_n и соответствующим ей волновым вектором κ_n ($n = 1, 2, \dots, n$).

Конечная цепочка чередующихся атомов

В случае цепочки чередующихся атомов с разными массами ($m_1 = m, m_2 = M, m_3 = m, m_4 = M, \dots, m_{2N-1} = m, m_{2N} = M$ (рис. 4.7))

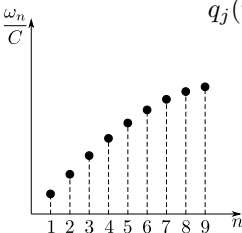


Рис. 4.8. Дисперсионный график для цепочки рис. 4.7 из 9 атомов

решение соответствующей системы ищется в виде суперпозиции бегущих волн с разными (для чётных и нечётных атомов) амплитудами:

$$q_{2j} = Ae^{i[\omega t \pm 2j\varphi]}, \quad q_{2j-1} = ae^{i[\omega t \pm (2j-1)\varphi]}.$$

Система уравнений для a и A имеет вид

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + 2k)a - k(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})A &= 0, \\ -k(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})a + (-M\omega^2 + 2k)A &= 0. \end{aligned}$$

Граничным условиям удовлетворяют лишь комбинации бегущих волн вида

$$q_{2j-1} = a_n \sin((2j-1)\varphi_n) \cos(\omega_n t + \alpha_n),$$

$$q_{2j} = A_n \sin(2j\varphi_n) \cos(\omega_n t + \alpha_n),$$

у которых $\varphi_n = \pi n / (2N + 1)$. Так как $\varphi_{2N+1-n} = \pi - \varphi_n$, то для каждого n ($n = 1, 2, \dots, N$) мы получаем два значения частоты

$$\omega_n^2 = \frac{k}{\mu} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM} \sin^2 \varphi_n} \right),$$

соответствующее *оптической* (верхний знак) и *акустической* (нижний знак) ветвям спектра (рис. 4.9).

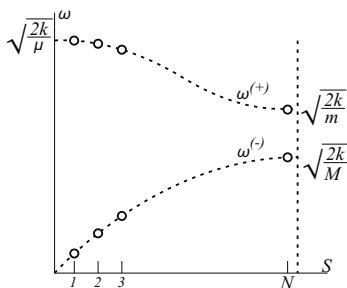


Рис. 4.9. Оптическая и акустическая ветви спектра

4.4.6 Упражнения

1. Два одинаковых маятника связаны пружиной с жёсткостью k на расстоянии a от точек подвеса, находящихся на одном уровне. В состоянии равновесия маятники висят вертикально, пружина не напряжена. Определить собственные частоты и моды малых колебаний в вертикальной плоскости, проходящей через точки подвеса.
2. Исследовать характер движения системы, описанной в предыдущей задаче, при условии, что в начальный момент времени один из маятников покоится, а другому сообщена угловая скорость $\dot{\varphi} = \Omega_0$.
3. Найти собственные частоты малых колебаний системы: шарик массой m подвешен на пружинке с жёсткостью k к такому же шарiku, подвешенному на такой же пружинке к неподвижной точке.
4. Найти собственные частоты и моды одномерных колебаний линейной трёхатомной симметричной молекулы (M – масса центрального атома, m – массы крайних атомов).

4.5 Динамика твёрдых тел

4.5.1 Кинематические уравнения Эйлера

Чтобы применить метод Лагранжа к динамике твёрдого тела, необходимо ввести координаты, определяющие его мгновенное положение в пространстве. Напомним, что абсолютно твёрдое тело имеет шесть степеней свободы: три из них определяют положение центра масс тела, другие три определяют ориентацию тела в пространстве. В качестве последних удобно использовать углы Эйлера.

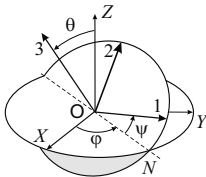


Рис. 4.10. Углы Эйлера

Пусть подвижная система $1'2'3'$, жёстко связанная с твёрдым телом, первоначально совмещена с неподвижной системой XYZ . Выполним следующие действия (см.рис. 4.10).

1) Повернём систему $1'2'3'$ вокруг оси OZ на угол φ (угол прецессии), в результате чего она примет положение $1''2''3''$.

2) Повернём её, далее, вокруг произвольно выбранной в плоскости XOY оси ON (линии узлов) на угол θ (угол нутации). Теперь она примет положение $1'''2'''3'''$

3) Наконец, закончим преобразование последним поворотом системы вокруг оси $O3'''$ на угол ψ (угол собственного вращения) она принимает положение 123 .

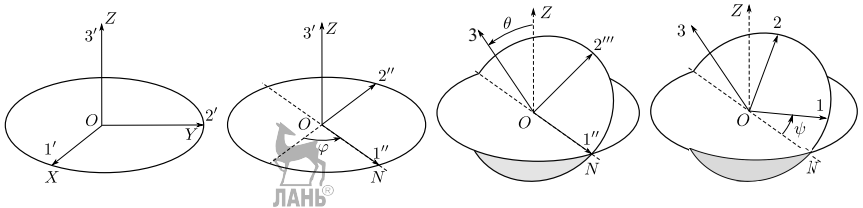


Рис. 4.11. Последовательность поворотов на углы Эйлера ($1'2'3' \rightarrow 1''2''3'' \rightarrow 1'''2'''3''' \rightarrow 123$)

Три угла Эйлера φ , θ , ψ однозначно определяют ориентацию тела в пространстве и могут быть использованы в качестве обобщённых координат q_1 , q_2 , q_3 .

Кинематическими уравнениями Эйлера называются формулы, выражающие проекции вектора угловой скорости $\vec{\Omega}$ на оси 123 или XYZ через углы Эйлера.

Обозначим через \vec{e}_N единичный вектор, направленный вдоль линии узлов ON , а через Ω_N – проекцию угловой скорости на это направле-

ние. Разложим угловую скорость по ортам \vec{e}_z , \vec{e}_N , \vec{e}_3 , соответствующим описанной в предыдущем пункте последовательности поворотов:

$$\vec{\Omega} = \Omega_z \vec{e}_z + \Omega_N \vec{e}_N + \Omega_3 \vec{e}_3 = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_N + \dot{\psi} \vec{e}_3. \quad (4.5.1)$$

С помощью этой формулы и выражений для скалярных произведений ортов через углы Эйлера

$$\Omega_1 = \vec{\Omega} \vec{e}_1, \quad \Omega_2 = \vec{\Omega} \vec{e}_2, \quad \Omega_3 = \vec{\Omega} \vec{e}_3$$

выводятся кинематические уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

и, аналогично, обратные уравнения

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \Omega_y &= -\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \Omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Пример. Представим проекцию Ω_1 в виде скалярного произведения $\vec{\Omega}$ и \vec{e}_1 и подставим сюда разложение (4.5.1)

$$\Omega_1 = \vec{\Omega} \vec{e}_1 = \dot{\varphi} \vec{e}_z \vec{e}_1 + \dot{\theta} \vec{e}_N \vec{e}_1 + \dot{\psi} \vec{e}_3 \vec{e}_1.$$

Чтобы найти первое скалярное произведение $\vec{e}_z \vec{e}_1$, спроектируем \vec{e}_z сначала на плоскость $O12$ (получим $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta$), а полученный отрезок спроектируем затем на ось $O1$ (добавится множитель $\cos(\pi/2 - \psi) = \sin \psi$). Второе скалярное произведение равно $\cos \psi$, третье равно нулю. Аналогичные выкладки сопровождают и вывод остальных уравнений.

Зная угловую скорость в СГО, легко записать соответствующие проекции кинетического момента:

$$K_1 = I_1 \Omega_1 = I_1 (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi),$$

$$K_2 = I_2 \Omega_2 = I_2 (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi),$$

$$K_3 = I_3 \Omega_3 = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}).$$

4.5.2 Уравнения Лагранжа для тяжёлого волчка

Функция Лагранжа *тяжёлого* (то есть, находящегося в однородном поле тяжести) волчка, как и системы материальных точек, есть разность между кинетической и потенциальной энергиями

$$\mathcal{L} = T - U,$$

выраженная через обобщённые координаты и скорости. Волчок вращается вокруг своей точки, лежащей на главной оси OZ . Эта точка принята за начало обеих (подвижной и неподвижной) систем координат. На этой же оси лежит центр масс волчка, его координата $Z_3 = l$. Ось OZ направлена вертикально вверх.

В качестве обобщённых координат примем углы Эйлера. Потенциальная энергия волчка

$$U(\varphi, \theta, \psi) = mgl \cos \theta,$$

кинетическая состоит из двух частей - кинетической энергии центра масс $mV^2/2$ и кинетической энергии вращения тела относительно центра масс, для симметричного волчка ($I_1 = I_2$) равной

$$T_{\text{вр}} = (I_1/2)(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + (I_3/2)\Omega_3^2.$$

Скорость центра масс

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \frac{d}{dt}(l\vec{e}_3) = l[\vec{\Omega}, \vec{e}_3] \perp \vec{e}_3$$

в подвижной системе имеет только две проекции:

$$V_1 = l\Omega_2, \quad V_2 = -l\Omega_1.$$

Стало быть,

$$T = (I'/2)(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + (I_3/2)\Omega_3^2,$$

где $I' = I_1 + ml^2$ - *приведённый момент инерции*. Осталось вычислить сумму квадратов проекций угловой скорости

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 + \Omega_2^2 &= \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \psi + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + \\ &+ \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \psi - 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \psi \sin \psi = \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

и мы получим искомую функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = (I'/2)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + (I_3/2)(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \theta.$$

Зная эту функцию, найдем выражение для полной энергии волчка

$$\begin{aligned} E &= \sum \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \dot{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \mathcal{L} = \\ &= \frac{I'}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta, \end{aligned}$$

и для z -проекции момента:

$$K_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = I' \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta.$$

Составим теперь уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

для вращающегося волчка в переменных $q_1 = \varphi$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \psi$. Подставляя выведенную в предыдущем пункте функцию Лагранжа в правые части этих уравнений (обобщённые силы), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= I' \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 \dot{\varphi} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \sin \theta + mgl \sin \theta, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= 0. \end{aligned}$$

Соответствующие обобщённые импульсы имеют вид

$$p_\varphi = I' \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta,$$

$$p_\theta = I' \dot{\theta},$$

$$p_\psi = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}).$$

Координаты φ и ψ – циклические, так что соответствующие им обобщённые импульсы сохраняются:

$$I' \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = \text{const} = K_z, \quad (4.5.4)$$

$$I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \text{const} = K_3. \quad (4.5.5)$$

Еще одной сохраняющейся величиной является энергия:

$$\frac{I'}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta = E. \quad (4.5.6)$$

Чтобы найти $\theta(t)$, остается решить лишь второе уравнение:

$$I'\ddot{\theta} - I'\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta + I_3(\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}) \sin\theta \dot{\varphi} - mgl \sin\theta = 0.$$

Проще, однако, поступить так, как мы поступали при решении задачи о движении точки в поле, зависящем только от координаты: обратиться к закону сохранения энергии. Найдя из уравнений (4.5.4) и (4.5.5) скорости

$$\dot{\varphi} = \frac{K_z - K_3 \cos\theta}{I' \sin^2\theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{K_3}{I_3} - \frac{K_z - K_3 \cos\theta}{I' \sin^2\theta} \cos\theta \quad (4.5.7)$$

и подставив их в (4.5.6), получим

$$\frac{I'}{2}\dot{\theta}^2 + U_{\text{эфф}}(\theta) + \frac{K_3^2}{2I_3} + mgl = E, \quad (4.5.8)$$

где

$$U_{\text{эфф}}(\theta) = \frac{(K_z - K_3 \cos\theta)^2}{2I' \sin^2\theta} - mgl(1 - \cos\theta).$$

Разрешая (4.5.8) относительно $\dot{\theta}$ и интегрируя методом разделения переменных, получим

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(2/I')(F - U_{\text{эфф}}(\theta))}},$$

где $F = E - K_3^2/(2I_3) - mgl$. После этого углы φ и ψ находятся как функции θ с помощью уравнений (4.5.7).

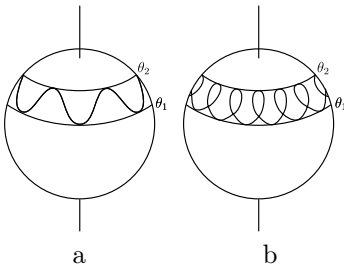


Рис. 4.12. Два типа вращения тяжёлого волчка

Область возможных значений угла θ определяется условием $F \geq U_{\text{эфф}}(\theta)$. При $K_3 \neq K_z$ функция $U_{\text{эфф}}(\theta)$ стремится к $+\infty$, если $\theta \rightarrow 0$ или $\theta \rightarrow \pi$, а в промежутке между ними имеет минимум. Следовательно, уравнение $F = U_{\text{эфф}}(\theta)$ имеет два корня θ_1 и θ_2 , определяющих предельные углы наклона оси волчка к вертикали. Если разность $K_z - K_3 \cos\theta$ не меняет в этом интервале своего знака, ось волчка монотонно прецессирует вокруг вертикали, совершая колебания вверх и вниз – нутацию (рис. 4.12 а). В противном случае между θ_1 и θ_2 есть

некоторое значение, где этот знак меняется, что приводит к возникновению петель на траектории оси (рис. 4.12 б).

Вопрос об устойчивости вращения легче всего решается при вращении вокруг вертикальной оси, то есть, при $\theta = 0$, когда оси OZ и OZ' совпадают, так что $K_z = K_3$ и $F = 0$. Для устойчивости такого вращения необходимо и достаточно, чтобы в точке $\theta = 0$ эффективная потенциальная энергия имела минимум. При малых θ

$$U_{\text{эфф}}(\theta) \approx \left(\frac{K_3^2}{8I'} - \frac{mgl}{2} \right),$$

значит, должно выполняться условие $K_3^2 > 4I'mgl$.

Пример: основная формула гироскопии

Каким условиям должен удовлетворять момент внешних сил \vec{M} , чтобы волчок совершал прецессию с постоянным углом нутации $\theta = \theta_0$, и постоянными скоростями $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ и $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$?

При заданных условиях кинематические уравнения Эйлера имеют вид:

$$\Omega_1 = \dot{\varphi}_0 \sin \theta_0 \sin \psi, \quad \Omega_2 = \dot{\varphi}_0 \sin \theta_0 \cos \psi, \quad \Omega_3 = \dot{\varphi}_0 \cos \theta_0 + \dot{\psi}_0 = \text{const.}$$

Подстановка их в динамические уравнения Эйлера даёт

$$\begin{aligned} M_1 &= \dot{\varphi}_0 \dot{\psi}_0 \sin \theta_0 \cos \psi \left[I_3 + (I_3 - I_1) \frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\psi}_0} \cos \theta_0 \right], \\ M_2 &= -\dot{\varphi}_0 \dot{\psi}_0 \sin \theta_0 \sin \psi \left[I_3 + (I_3 - I_1) \frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\psi}_0} \cos \theta_0 \right], \\ M_3 &= 0. \end{aligned}$$

Используя обозначения

$$\vec{\Omega}_1 = \dot{\psi}_0 \vec{e}_1, \quad \vec{\Omega}_2 = \dot{\varphi}_0 (\sin \theta_0 \sin \psi \vec{e}_1 + \sin \theta_0 \cos \psi \vec{e}_2 + \cos \theta_0 \vec{e}_3),$$

три последних формулы можно представить в виде одной векторной:

$$\vec{M} = \left[I_3 + (I_3 - I_1) \frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\psi}_0} \cos \theta_0 \right] [\vec{\Omega}_2, \vec{\Omega}_1],$$

из которой следует, что для обеспечения регулярной прецессии в указанных условиях приложенный момент сил должен быть постоянен по модулю и параллелен линии узлов. Это – *основная формула гироскопии*.

4.5.3 Двойной физический маятник

Рассмотрим теперь систему двух твёрдых тел массами m_1 и m_2 , первое из которых может вращаться вокруг неподвижной оси O_1 , а второе – вокруг параллельной ей оси O_2 , неизменно связанной с первым телом (*двойной физический маятник*). Центры тяжести обоих тел C_1 и C_2 лежат в одной вертикальной плоскости (проекция всей системы на которую изображена на рис. 4.13) и ось O_2 пересекает продолжение прямой O_1C_1 .

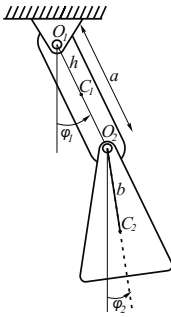


Рис. 4.13. Двойной физический маятник

Введём для удобства следующие обозначения: $O_1O_2 = a$, $O_1C_1 = h$, $O_2C_2 = b$, $l_1 = \sqrt{J_1/m_1}$, $l_2 = \sqrt{J_2/m_2}$. За независимые обобщённые координаты примем углы φ_1 и φ_2 , образуемые прямыми O_1C_1 и O_2C_2 с вертикалью; в положении равновесия эти координаты равны нулю. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_2 (\dot{X}_2^2 + \dot{Y}_2^2)}{2} + \frac{m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2}{2}, \quad (4.5.9)$$

где X_2 и Y_2 координаты центра масс второго тела:

$$X_2 = a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2, \quad Y_2 = a \sin \varphi_1 + b \sin \varphi_2.$$

Вычислив производные

$$\dot{X}_2 = -(a\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + b\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2), \quad \dot{Y}_2 = a\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + b\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2,$$

подставим их в выражение (4.5.9) для кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} \{ (m_1 l_1^2 + m_2 a^2) \dot{\varphi}_1^2 + m_2 (b^2 + l_2^2) \dot{\varphi}_2^2 + 2m_2 ab \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \}.$$

Потенциальная энергия сил тяжести

$$U = -m_1 g X_1 - m_2 g X_2 + B$$

содержит произвольную постоянную B . Определив её из условия равенства нулю потенциальной энергии в положении равновесия и переходя к угловым переменным, получим:

$$U(\varphi_1, \varphi_2) = m_1 gh(1 - \cos \varphi_1) + m_2 ga(1 - \cos \varphi_1) + m_2 gb(1 - \cos \varphi_2).$$

Подставляя приведённые выше выражения в формулу для функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = T(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) - U(\varphi_1, \varphi_2), \quad (4.5.10)$$

получаем возможность перейти к уравнениям движения:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Ограничившись далее рассмотрением малых колебаний, имеем

$$U = (g/2)[(m_1 h + m_2 a)\varphi_1^2 + m b \varphi_2^2],$$

и

$$T = \frac{1}{2} \{ (m_1 l_1^2 + m_2 a^2) \dot{\varphi}_1^2 + m_2 (b^2 + l_2^2) \dot{\varphi}_2^2 + 2m_2 ab \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \}$$

(в последнем выражении множитель $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ заменён единицей, поскольку коэффициенты в разложении берутся в положении равновесия, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$). В результате, приходим к следующей системе уравнений Лагранжа:

$$(m_1 l_1^2 + m_2 a^2) \ddot{\varphi}_1 + m_2 ab \ddot{\varphi}_2 + (m_1 h + m_2 a) g \varphi_1 = 0,$$

$$(b^2 + l_2^2) \ddot{\varphi}_2 + ab \ddot{\varphi}_1 + bg \varphi_2 = 0.$$

Разделив второе уравнение на b и введя обозначения

$$k = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 a^2}{m_1 h + m_2 a}, \quad l = \frac{b^2 + l_2^2}{b},$$

перепишем эту систему в виде

$$(m_1 h + m_2 a)(k \ddot{\varphi}_1 + g \varphi_1) + m_1 ab \ddot{\varphi}_2 = 0,$$

$$a \ddot{\varphi}_1 + l \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение системы

$$(m_1 h + m_2 a)(g - k\omega^2)(g - l\omega^2) - m_2 a^2 b \omega^4 = 0.$$

Решение этого алгебраического уравнения даёт два значения квадратов частот ω_1^2 и ω_2^2 . В результате получаем общее решение для малых колебаний системы двух твёрдых тел в виде

$$\varphi_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$\varphi_2 = A_1 \frac{a\omega_1^2}{g - l\omega_1^2} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \frac{a\omega_2^2}{g - l\omega_2^2} \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

где $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ – произвольные постоянные. Движение этой системы можно представлять как наложение двух гармонических колебаний с указанными частотами, в одном из которых тела движутся в фазе, в другом – в противофазе.

4.5.4 Соприкосновения тел

Голономные и неголономные связи

В п. 1.9.1 мы дали определения голономным и неголономным связям, отложив рассмотрение последних до аналитической динамики твёрдого тела. Занимаясь системами с голономными связями, мы видели, что в рамках лагранжева подхода решение задач при наличии таких связей с формальной стороны ничуть не сложнее решения задачи о движении системы, в которой связи отсутствуют вообще: при ясном представлении системы и подходящем выборе обобщённых координат о связях можно и не вспоминать (если, правда, нас не интересуют силы реакции этих связей, превышение которыми допустимых пределов может разрушить систему).

Иная ситуация возникает в случае неголономной связи между телами. Задачи такого типа возникают при контактном взаимодействии между телами (*соприкосновениях*). Как и при взаимодействии на расстоянии, необходимо иметь некоторую информацию о силах, однако требования к ней в случае абсолютно твёрдых тел значительно скромнее. Из определения абсолютно твёрдых тел вытекает, что их должно считать взаимно непроницаемыми. Математически непроницаемость обеспечивается силами реакции, определяемыми уравнениями связи. Для шаров, такое уравнение записывается в виде $r_{12} \geq d$, где r_{12} – расстояние между центрами шаров 1 и 2, а d – сумма их радиусов. Сила реакции разлагается на нормальную и тангенциальную (касательную к соприкасающимся поверхностям) составляющую, последняя является *силой трения*. Если при этом тела покоятся относительно друг друга, мы имеем дело с *трением покоя*, если же движутся, имеет место *трение качения* или *трение скольжения* в зависимости от типа относительного движения. При качении область поверхности по крайней мере одного из тел должна иметь выпуклый участок, обращённый к непрерывному участку другого, а соприкосновение ограничивается одной точкой (катится шар по плоскости), несколькими точками (гантель с шарами на концах) или прямой линией (качение цилиндра по плоскости или цилиндру). Если при скольжении трением можно пренебречь, соприкасающиеся поверхности называют *абсолютно гладкими*, и у силы реакции остаётся лишь нормальная составляющая. Если же тела свободно могут катиться без скольжения не тратя на это кинетической энергии, их называют *вполне шероховатыми*. В обоих этих случаях конкретные свойства сил трения несущественны и задача сводится к динамике системы со связями.

Так, в случае соприкосновения вполне шероховатых поверхностей

условие качения выражается s уравнениями связи

$$\sum_i C_{ji} \dot{q}_i = 0, \quad j = 1, \dots, s, \quad (4.5.11)$$

где $C_{ji} \equiv G_{j,i}$ – функции только координат (см. 4.1.2). Если левые части не являются полными производными по времени каких-либо функций координат, то эти уравнения не могут быть проинтегрированы. В этом случае можно ввести неопределённые множители Лагранжа λ_j , представив уравнение Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^s \lambda_j C_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.5.12)$$

Уравнения (4.5.11)-(4.5.12) образуют теперь полную систему для $n + s$ неизвестных q_i и λ_j .

Простейший пример неголономной связи – движение шара, катящегося по вполне шероховатой твёрдой горизонтальной плоскости. В отсутствие скольжения скорость точки шара, касающегося в данный момент плоскости, на мгновение становится равной нулю. Выраженное через скорость центра масс шара⁶ $\vec{V} = \dot{X}\vec{e}_x + \dot{Y}\vec{e}_y$, это условие имеет вид

$$\vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}_{\text{кас}}] = 0, \quad (4.5.13)$$

где $\vec{r}_{\text{кас}}$ – положение точки касания относительно системы катящегося шара. Уравнение это не может быть проинтегрировано: хотя \vec{V} и представляет собой полную производную по времени от радиус-вектора центра шара, но $\vec{\Omega}$ не является полной производной от какой-либо функции координат.

Если речь идёт о движении твёрдого тела по горизонтальной поверхности, естественно выбрать её в качестве одной из координатных плоскостей НСК, скажем плоскости XOY . В случае, например, того же шара, точка касания $\vec{r}_{\text{кас}}$ совпадёт с проекцией на плоскость центра масс \vec{R} , координаты которой мы обозначаем X , Y , Z . Условие связи, отражающее свойство недеформируемости абсолютно твёрдых тел – поверхности и шара, выражается через третью (вертикальную) координату центра масс

$$Z = a. \quad (4.5.14)$$

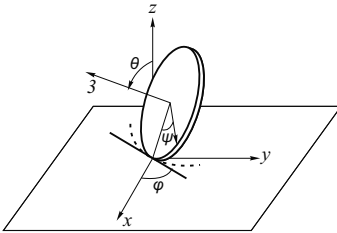
Для абсолютно гладкой поверхности условие это (голономное, к слову) является единственным. Если же поверхность является вполне шероховатой, условие (4.5.14) дополняется проекциями уравнения связи

⁶Шар полагаем однородным, так что его центр масс совпадает с геометрическим центром.

(4.5.13) на подходящие оси. Заметим, что определение ориентации шара ввиду его симметрии представляется довольно искусственным. Существенно дела станет более прозрачным, если мы возьмём вместо шара, скажем, колесо.

4.5.5 Неголономные связи при качении

Колесо мы будем представлять себе как бесконечно тонкий диск радиусом a с аксиально симметричным распределением массы m . Положение центра масс его будем задавать в связанной с плоскостью НСК с осью OZ , направленной вертикально вверх, а начало координат поместим на самой плоскости. Ориентацию же колеса будем определять эйлеровыми углами θ , ϕ , ψ , а ось OZ связанной с колесом системы направим вдоль оси колеса. На колесо действует сила тяжести, под влиянием которой (при $\theta \neq 0, \pi$) оно касается нижней своей точкой этой плоскости в точке X, Y , вертикальная координата центра масс



$$Z = a \sin \theta, \quad (4.5.15)$$

а его радиус-вектор даётся выражением

$$\vec{R} = X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y + a \sin \theta \vec{e}_z.$$

Рис. 4.14. Качение диска по плоскости

В отсутствие опоры колесо имело бы шесть независимых переменных, наличие же опоры (горизонтальная поверхность) сокращает это число на единицу. В результате мы имеем следующий набор пяти независимых переменных:

1. координаты x, y точки касания колеса с плоскостью основания,
2. угол θ между осью колеса и осью OZ (при $\theta = \pi/2$ колесо расположено перпендикулярно поверхности, при $\theta \rightarrow 0$ или π оно ложится плашмя на поверхность,
3. угол φ между касательной (линией пересечения плоскости колеса с плоскостью основания) и осью OX ,
4. угол ψ между радиусом колеса, проведённым в мгновенную точку касания, и произвольным, но фиксированным (на колесе) радиусом; угол отсчитывается в одном заданном направлении (например, в направлении вращения).


Будучи в общем случае неголономной, при плоско-параллельном качении, то есть, при выполнении условий

$$\theta = \pi/2, \quad \varphi = \text{const}, \quad (4.5.16)$$

эта связь становится голономной:

$$\delta X = a \cos \varphi \delta \psi, \quad \delta Y = a \sin \varphi \delta \psi. \quad (4.5.17)$$

Возводя эти равенства в квадрат и почленно складывая, приходим к элементарному геометрическому соотношению между длиной дуги и опирающимся на неё центральным углом.

$$\delta s = a \delta \psi.$$


Снимем теперь второе ограничение в (4.5.17), запрещавшее колесу выполнять верчение, оставим лишь первое, обеспечивающее постоянную вертикальность колеса. В результате имеем четыре независимых переменных, характеризующих положение колеса: X, Y, φ, ψ (координаты точки касания по-прежнему совпадают с координатами проекции центра масс из-за вертикального положения колеса). Если бы существовала такая функция четырёх переменных f , что

$$f(X, Y, \varphi, \psi) = 0, \quad (4.5.18)$$

то из этого уравнения можно было бы выразить одну из них через три других, то мы имели бы опять голономную систему. Однако, это не так, и сейчас мы убедимся в этом.

Предположим, что такая функция f , связывающая четыре переменные X, Y, φ, ψ и позволяющая, тем самым, выразить любую из них через оставшихся три, существует. Используя условия (4.5.11), преобразуем выражение

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial X} \delta X + \frac{\partial f}{\partial Y} \delta Y + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi} \delta \psi$$

к виду

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X} a \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial Y} a \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi} \right) \delta \psi + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \delta \varphi = 0. \quad (4.5.19)$$

Вариации $\delta \psi$ и $\delta \varphi$ независимы. Приравняв в уравнении (4.5.19) к нулю первую из них при условии $\delta \varphi \neq 0$, получим

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0, \quad (4.5.20)$$

а приравняв к нулю другую при условии, что первая отлична от нуля, находим, что

$$\frac{\partial f}{\partial X} a \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial Y} a \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0. \quad (4.5.21)$$

Дифференцируя (4.5.21) по φ и учитывая (4.5.20), находим

$$-a \frac{\partial f}{\partial X} \sin \varphi + a \frac{\partial f}{\partial Y} \cos \varphi = 0. \quad (4.5.22)$$

Повторное дифференцирование (4.5.22) по φ даёт

$$a \frac{\partial f}{\partial X} \cos \varphi + a \frac{\partial f}{\partial Y} \sin \varphi = 0. \quad (4.5.23)$$

Из уравнений (4.5.20)-(4.5.23) следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0.$$

Таким образом, мы видим, что функция f не зависит ни от одной из четырёх переменных X, Y, φ, ψ , то есть она не является той функцией, что мы ищем. А поскольку мы не накладывали никаких ограничительных условий на искомую функцию кроме естественной дифференцируемости, следует признать, что такой функции не существует. Это и означает неголономность связи. Нечего и говорить, что «освобождение» последней переменной (θ) никак не может изменить ситуацию, а вот противоположное действие, как мы уже видели, может: зафиксировав значение ещё одной переменной (φ), мы превращаем уравнение (4.5.19) в уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial X} a \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial Y} a \sin \varphi = -\frac{\partial f}{\partial \psi},$$

интегрируемое вдоль прямой, идущей по плоскости XOY под углом φ_0 к оси OX , по которой и катится колесо.

Движение по гладкой плоскости

Рассмотрим подробнее движение колеса, начав с абсолютно гладкой поверхности, ограничивающий его положение лишь снизу, и не оказывающей никакого иного влияния на его движение. Это ограничение обеспечивается голономной связью (4.5.15). В отсутствие сил трения вращение колеса (изменение со временем угла ψ) никак не связано с движением его как целого (с изменением координат X, Y и с

равным успехом может происходить как в прямом (по отношению к перемещению всего колеса), так и в обратном направлениях *кручение*. Возможно также *верчение* колеса (изменение со временем угла ϕ) и независимое от него, связанное лишь с высотой центра тяжести изменение наклона к плоскости (угол θ).

Функция Лагранжа колеса состоит из двух слагаемых, относящихся к поступательному и вращательному⁷ его движениям:

$$\mathcal{L} = (m/2)(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + a^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta) + (1/2)\{I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2\} - mga \sin \theta. \quad (4.5.24)$$

Интегралами движения являются обобщённые импульсы

$$\begin{aligned} m\dot{X} &= P_x, & m\dot{Y} &= P_y, \\ I_1\dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) &= K_z, \\ I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) &= K_3 \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

и энергия

$$(m/2)(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + a^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta) + (1/2)\{I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2\} + mga \sin \theta = E.$$

Воспользовавшись тем, что горизонтальные составляющие скорости центра масс постоянны, перенесём начало НСК в точку с координатами X , Y плоскости, сохранив за осями прежние направления. При этом она останется инерциальной, а координата z сохранит свои значения. Находя из уравнения (4.5.25) скорости угловых переменных

$$\dot{\varphi} = \frac{K_z - K_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{K_3}{I_3} - \frac{K_z - K_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta \quad (4.5.26)$$

и подставляя их в интеграл энергии, получаем

$$E = \frac{I_1 + ma^2 \cos^2 \theta}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{K_3^2}{2I_3} + \frac{(K_z - K_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mga \sin \theta. \quad (4.5.27)$$

Определив отсюда зависимость $\theta(t)$ (в квадратурах), с помощью (4.5.26) можно найти $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Расчёт показывает, что угол наклона колеса θ совершает колебания и вместе с этим изменяются скорости прецессии $\dot{\varphi}$ и вращения вокруг оси $\dot{\psi}$. Ситуация аналогична вращению тяжёлого волчка (п. 4.5.2).

⁷Заметим, что вследствие возможного наклона колеса вертикальная координата центра масс не обязана оставаться постоянной. И ещё: в отличие от ситуации с тяжёлым волчком, увеличение угла наклона θ от 0 до $\pi/2$ колеса не опускает его центр масс, а поднимает, отсюда и замена косинуса на синус в потенциальном члене.

Качение по шероховатой поверхности

Обусловленная силами трения при *плоско-параллельном* качении колеса по шероховатой поверхности связь выражается уравнениями (4.5.17). Умножив первое из них на $\cos \varphi$, второе на $\sin \varphi$ и сложив, а затем умножив первое на $\sin \varphi$, второе на $\cos \varphi$ и вычтя одно из другого, получим новую систему:

$$\delta X \cos \varphi + \delta Y \sin \varphi = a \delta \psi,$$

$$\delta X \sin \varphi - \delta Y \cos \varphi = 0.$$

Заменив здесь вариации дифференциалами (то есть виртуальные мгновенные смещения реальными приращениями за время dt) и перейдя к скоростям, получим:

$$\dot{X} \cos \varphi + \dot{Y} \sin \varphi = a \dot{\psi},$$

$$\dot{X} \sin \varphi - \dot{Y} \cos \varphi = 0.$$

Если освободить колесо от оставшегося в (4.5.16) ограничения ($\theta = \pi/2$), то есть, позволить ему наклоняться, условия качения, как показано в книге Парса⁸, примут вид

$$\dot{X} \cos \varphi + \dot{Y} \sin \varphi = a \dot{\psi} \sin \theta, \quad (4.5.28)$$

$$\dot{X} \sin \varphi - \dot{Y} \cos \varphi = a \Omega_3, \quad (4.5.29)$$

где $\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta$.

Составим на основе этих связей лагранжеву систему (4.5.12):

$$m\ddot{X} = \lambda_1 \cos \varphi - \lambda_2 \sin \varphi, \quad (4.5.30)$$

$$m\ddot{Y} = \lambda_1 \sin \varphi + \lambda_2 \cos \varphi, \quad (4.5.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(ma^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta + I_1 \dot{\theta} \right) = & - \left(ma^2 \dot{\theta}^2 - I_1 \dot{\varphi}^2 \right) \cos \theta \sin \theta - \\ & - I_3 \Omega_3 \dot{\varphi} \sin \theta - mga \cos \theta - \lambda_1 a \sin \theta, \end{aligned} \quad (4.5.32)$$

$$\frac{d}{dt} \left(I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \Omega_3 \cos \theta \right) = \lambda_2 a \cos \theta, \quad (4.5.33)$$

$$\frac{d}{dt} \left(I_3 \Omega_3 \right) = \lambda_2 a. \quad (4.5.34)$$

⁸Л.А.Парс, Аналитическая динамика. - М.: Наука, 1971. - С. 138.

Таким образом, мы имеем семь уравнений (4.5.28)-(4.5.34) для семи неизвестных $X, Y, \theta, \varphi, \psi, \lambda_1, \lambda_2$. Две последних представляют собой ON - и OZ -составляющие реакции поверхности. Из (4.5.30), (4.5.31) следует, в частности, что

$$F'_N \equiv \lambda_1 = m \left(\ddot{X} \cos \varphi + \ddot{Y} \sin \varphi \right), \quad (4.5.35)$$

и

$$F'_3 \equiv \lambda_2 = m \left(-\ddot{X} \sin \varphi + \ddot{Y} \cos \varphi \right). \quad (4.5.36)$$

4.5.6 Упражнения

1. Диск скатывается по наклонной плоскости без скольжения. Написать функцию Лагранжа и уравнение Лагранжа.
2. Вывести формулы сил реакции (4.5.33)-(4.5.34) и, воспользовавшись формулами (4.5.28), (4.5.29) и (4.5.34), выразить их через угловые переменные и их производные.
3. Подставив

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= ma \left(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta + \Omega_3 \dot{\varphi} \right), \\ \lambda_2 &= ma \left(\dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\Omega}_3 \right) \end{aligned}$$

в уравнения (4.5.32), (4.5.34) и исключая λ_2 из (4.5.35), (4.5.36), вывести соотношение

$$(I_1 + ma^2)\ddot{\theta} = I_1 \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta - (I_3 + ma^2)\Omega_3 \dot{\varphi} \sin \theta - mga \cos \theta.$$

4.6 Канонические уравнения

4.6.1 Уравнения Гамильтона

Уравнения Лагранжа представляют собой систему n дифференциальных уравнений *второго порядка*. Для решения ряда задач и в первую очередь – для теоретических исследований её удобно преобразовать в систему удвоенного числа дифференциальных уравнений *первого порядка*.

Как было показано в 4.3.4, для замкнутой консервативной системы существует интеграл движения

$$E = \sum_{i=1}^n p_i(q_j, \dot{q}_j) \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j), \quad (4.6.1)$$

представляющий её полную энергию. Мы подчеркнули в этой записи, что обобщённые импульсы $p_i \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$, как и сама функция Лагранжа, зависят от обобщённых координат и скоростей, образующих набор *независимых переменных* $\{q_j, \dot{q}_j\}$.

Вместо переменных Лагранжа (q_j, \dot{q}_j) для описания системы можно использовать переменные Гамильтона (q_j, p_j) . Множество значений этих переменных образует $2n$ -мерное фазовое пространство. Важную роль при этом играет функция Гамильтона \mathcal{H} . В случае консервативной замкнутой системы она может быть отождествлена с полной энергией, выраженной через обобщённые координаты и импульсы

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i(p_j, q_j) - \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j(q_k, p_k), t). \quad (4.6.2)$$

Чтобы перейти к уравнениям движения в этих новых переменных, запишем полный дифференциал функции Лагранжа

$$d\mathcal{L} = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i$$

и выразим частные производные в правой части через обобщённые импульсы и их производные в соответствии с уравнениями Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i.$$

Представив последнее слагаемое в виде

$$\sum p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right) - \sum \dot{q}_i dp_i,$$

перепишем предыдущее равенство в виде

$$d\left(\sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}\right) = -\sum \dot{p}_i dq_i - \mathcal{L} + \sum \dot{q}_i dp_i.$$

Подставив в левую часть (4.6.2) и выполнив дифференцирование,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i,$$



Сэр Уильям Роуэн Гамильтон (1805 – 1865) – ирландский математик, механик-теоретик, физик-теоретик. Известен фундаментальными открытиями в математике (кватернионы, основы векторного анализа, вариационное исчисление, обоснование комплексных чисел), аналитической механике (гамильтонова механика) и оптике. Автор предельно общего вариационного принципа наименьшего действия, применяемого во многих разделах физики.

получаем *канонические уравнения* (*уравнения Гамильтона*)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i},$$



$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.$$

Здесь, как и прежде, $i = 1, 2, \dots, n$, так что мы имеем дело теперь с $2n$ дифференциальными уравнениями первого порядка.

Важнейшим преимуществом их является то, что определяемые ими траектории $\{q_j(t), p_j(t)\}$ в фазовом пространстве не пересекаются. Действительно, если предположить, что это не так, что в какой-то точке A с координатами $\{q_j^A, p_j^A\}$ две различных траектории пересеклись, то взяв точку A в качестве начального условия, видим, что оно не обеспечивает единственности решения. Это противоречит теории дифференциальных уравнений первого порядка, каковыми, в отличие от лагранжевых уравнений, являются уравнения Гамильтона.

Следует иметь в виду, что не все механические системы описываются уравнениями Гамильтона. Подчиняющиеся этим уравнениям систем системы образуют класс гамильтоновых систем. В него не входят неголономные системы и системы с трением (диссипативные системы).

4.6.2 Фазовые портреты осциллятора и маятника

Семейство фазовых траекторий системы, отвечающих различным значениям её энергии, называется *фазовым портретом* системы.

Функция Лагранжа одномерного гармонического осциллятора $m = 1$ и с собственной частотой ω_0 записывается в виде:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = (1/2)[\dot{q}^2 - \omega_0^2 q^2].$$

Обобщённый импульс при этом совпадает со скоростью,

$$p = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q} = \dot{q}$$

и функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H}(q, p) = \dot{q}(p)p - \mathcal{L}(q, \dot{q}(p)) = (1/2)[p^2 + \omega_0^2 q^2].$$

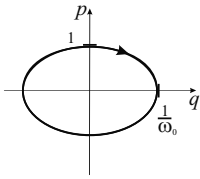


Рис. 4.15. Фазовая траектория гармонического осциллятора

Фазовая траектория осциллятора в плоскости (q, p) , определяемая уравнением $\mathcal{H}(q, p) = 1/2$, представляет собой эллипс с полуосями ω_0^{-1} и 1 (рис. 4.15). Движение фазовой точки по эллипсу происходит по часовой стрелке.

Более интересным представляется фазовый портрет математического маятника, совершающего колебания произвольной амплитуды (рис. 4.16). Его функция Гамильтона представляется в виде

$$\mathcal{H}(q, p) = p^2/2 - \omega_0^2 \cos q,$$

где $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ – собственная частота *малых* колебаний маятника массой $m = 1$ и длиной l (под обобщённой координатой q , как и выше, подразумевается угол отклонения маятника φ). Канонические уравнения движения имеют вид:

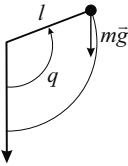


Рис. 4.16. Колебания маятника с произвольной амплитудой

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega_0^2 \sin q.$$

Но нас интересует сейчас не закон движения, а *траектория в декартовых переменных* (q, p) , которая определяется не дифференциальным, а алгебраическим уравнением

$$p^2/2 - \omega_0^2 \cos q = E.$$

На рис. 4.17 представлен график потенциальной энергии маятника и изображены возможные режимы движения, определяемые уравнением $\mathcal{H}(q, p) = E$ при разных значениях E . Значения $E < -\omega_0^2$ очевидно невозможны, при $E = -\omega_0^2$ маятник неподвижно висит (положение устойчивого равновесия), при $-\omega_0^2 < E < \omega_0^2$ он совершает колебания с амплитудой $\arccos(E/\omega_0^2)$, при $E = \omega_0^2$ замирает в вертикальном положении неустойчивого равновесия), при $E > \omega_0^2$ имеет место

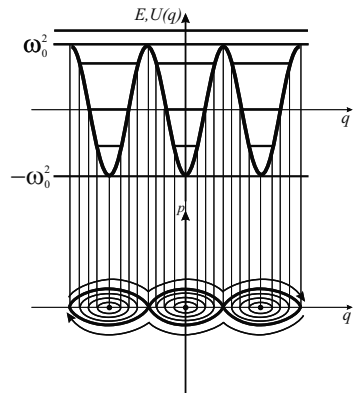


Рис. 4.17. Фазовые траектории маятника при разных значениях полной энергии E .

инфинитное (по отношению к угловой переменной q) движение в одну сторону (вращение). Определяемое уравнением $E = \omega_0^2$ или вытекающей из него парой уравнений

$$p = \pm \omega_0 \sqrt{2(1 + \cos q)} = \pm 2\omega_0 \cos(q/2)$$

множество фазовых точек составляет *сепаратрису* – кривую, отделяющую область колебаний от области вращений. Заметим, кстати, что в фазовом пространстве колебания выглядят как вращения фазовой точки по замкнутой траектории, тогда как вращение маятника по (против) часовой стрелки представляется в фазовой плоскости волнообразной кривой, проходящей ниже (выше) сепаратрисы.

Стоит отметить ещё один интересный режим, возникающий при движении маятника с полной энергией, чуть отличающейся от критического значения ω_0^2 . При этом маятник тоже замедляет ход по мере приближения к вертикальному положению, но в отличие от случая $E = \omega_0^2$, процесс приближения к этой точке не продолжается бесконечно, хотя может длиться сколь угодно долго (при достаточно близком к ω_0^2 значении E). Всё это время $p = \dot{q}$ находится вблизи нуля и лишь в конце этого интервала, когда маятник сваливается в ту или иную сторону (в зависимости от направления неравенства $E > \omega_0^2$ или $E < \omega_0^2$), затем процесс продолжается. Графически он представляется в виде последовательности всплесков (импульсов), разделённых интервалами времени (рис. 4.18). Эти интервалы могут быть сделаны сколь угодно большими, а сами импульсы, называемые *солитонами*, могут рассматриваться как отдельные образования. Решения солитонного типа играют важную роль в задачах нелинейной механики (см. 12.4.1).

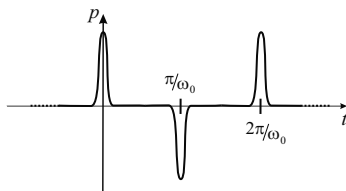


Рис. 4.18. Солитоны

4.6.3 Скобки Пуассона. Теорема Пуассона

Пусть $f(q, p, t)$ некоторая дифференцируемая по своим аргументам функция динамических переменных системы. Её полная производная по времени запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \{ \mathcal{H}, f \}. \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Введённые здесь фигурные скобки обозначают специальную математическую операцию

$$\{g, f\} \equiv \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} \right),$$

называемую *скобками Пуассона*. Операция эта ставит в соответствие паре функций фазовых переменных системы третью функцию и обладает следующими легко проверяемыми свойствами (ниже $f \equiv f(q_j, p_j)$, $g \equiv g(q_j, p_j)$, $h \equiv h(q_j, p_j)$ – дифференцируемые функции фазовых переменных, a и b – постоянные):

- 1) $\{f, a\} = 0$,
- 2) $\{f, g\} = -\{g, f\}$,
- 3) $\{f, f\} = 0$,
- 4) $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$,
- 5) $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$,
- 6) $\{af, bg\} = ab\{f, g\}$,
- 7) $\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$,
- 8) $\{f, \{g, h\}\} = \{g, \{f, h\}\} - \{h, \{f, g\}\}$ – *тождество Якоби*.

Скобки Пуассона играют важную роль в механике (особенно, в квантовой). Заметим, что канонические уравнения движения (см. 4.6.1) представляют собой просто частные случаи формулы (4.6.3). Действительно, выбирая в качестве $f(q_i, p_i, t)$ функцию $q_i(t)$, получим

$$\frac{dq_i}{dt} = \{\mathcal{H}, q_i\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i},$$

а выбирая $p_i(t)$, приходим ко второму уравнению Гамильтона:

$$\frac{dp_i}{dt} = \{\mathcal{H}, p_i\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.$$



Симеон Дени Пуассон (1781 – 1840) – знаменитый французский математик, механик и физик.

Если функция $f = f(q_j, p_j, t)$ является интегралом движения ($df/dt = 0$) и не зависит от времени явно ($\partial f/\partial t = 0$), то $\{\mathcal{H}, f\} = 0$.

При вычислении скобок Пуассона динамических переменных удобнее сначала найти скобки Пуассона координат и импульсов прямым дифференцированием:

$$\{x_i, x_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij},$$

а для других комбинаций воспользоваться свойствами скобок:

$$\begin{aligned} \{p_i, L_j\} &= \{p_i, \epsilon_{jlm} x_l p_m\} = \epsilon_{jlm} (x_l \{p_i, p_m\} + p_m \{p_i, x_l\}) = \\ &= \epsilon_{jlm} (-p_m \delta_{il}) = -\epsilon_{jim} p_m = \epsilon_{ijm} p_m, \\ \{x_i, L_j\} &= \{x_i, \epsilon_{jlm} x_l p_m\} = \epsilon_{jlm} (\{x_i, x_l\} p_m + \{x_i, p_m\} x_l) = \\ &= \epsilon_{jlm} (x_l \delta_{im}) = \epsilon_{jli} x_l = \epsilon_{ijl} x_l. \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} \{p_1, L_1\} &= 0, & \{p_1, L_2\} &= p_3, \\ \{x_1, L_1\} &= 0, & \{x_1, L_2\} &= x_3. \end{aligned}$$

Имеет место следующая теорема, называемая *теоремой Пуассона*: **если f и g – два интеграла движения, то $\{f, g\}$ – третий интеграл движения.**

Доказательство производится с помощью тождества Якоби. Положив в нём $h = \mathcal{H}$, получим

$$0 = 0 - \{\mathcal{H}, \{g, f\}\},$$

следовательно, $\{f, g\} = \text{const}$.

С помощью теоремы Пуассона можно находить новые интегралы движения⁹. Пусть частица движется в стационарном центрально-симметричном поле $U(r)$, так что её гамильтониан в декартовых координатах

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + U \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right).$$

⁹Впрочем, отмечает Парс в Аналитической динамике, «теорема Пуассона не столь плодотворна, как это может показаться на первый взгляд. По двум известным интегралам можно определить третий интеграл, затем четвёртый и т.д. Однако в ряде случаев, вновь получаемый интеграл оказывается тождественным нулём или зависит от уже найденных интегралов. Очевидно, что процесс составления новых интегралов не может продолжаться до бесконечности, поскольку существует не более $2n$ интегралов» [с. 434].

Очевидно,

$$L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2$$

и

$$L_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3$$

интегралы движения:

$$\{L_1, \mathcal{H}\} = \{L_2, \mathcal{H}\} = 0.$$

Если бы мы не знали, что третья проекция момента импульса в центральном поле тоже интеграл движения, мы могли бы найти его с помощью данной теоремы:

$$\{L_1, L_2\} = \epsilon_{1kl} \{x_k p_l, L_2\} = \epsilon_{1kl} (x_k \{p_l, L_2\} + p_l \{x_k, L_2\}) = x_1 p_2 - x_2 p_1 = L_3.$$

Ниже рассмотрим более сложный пример.

4.6.4 Пример применения теоремы Пуассона

Рассмотрим систему двух материальных точек 1 и 2, притягивающихся друг к другу с силой, пропорциональной расстоянию между ними, $\vec{F}_{12} = k(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. Отмечая декартовы координаты и импульсы первой частицы (массой m_1) индексами 1, 2, 3, а второй (массой m_2) — 4, 5, 6, запишем гамильтониан системы в виде

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_1} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2m_2} (p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) + \frac{k}{2} [(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2].$$

Движение этой системы описывается набором уравнений:

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m_1}, \quad \dot{x}_j = \frac{p_j}{m_2}, \quad (4.6.4)$$

$$\dot{p}_i = k(x_{i+3} - x_i), \quad \dot{p}_j = k(x_{j-3} - x_j), \quad (4.6.5)$$

где $i = 1, 2, 3$, а $j = 4, 5, 6$. Последние шесть уравнений дают интегралы движения, характеризующие постоянство скорости движения центра масс замкнутой системы:

$$p_1 + p_4 = P_1 \equiv C_1, \quad p_2 + p_5 = P_2 \equiv C_2, \quad p_3 + p_6 = P_3 \equiv C_3.$$

Относительное движение частиц, взаимодействующих посредством центральной силы, характеризуется сохранением секториальной скорости, определяющей ещё три интеграла движения:

$$(x_2 - x_5) \left(\frac{p_3}{m_1} - \frac{p_6}{m_2} \right) - (x_3 - x_6) \left(\frac{p_2}{m_1} - \frac{p_5}{m_2} \right) = \sigma_1 \equiv C_4,$$

$$(x_3 - x_6) \left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2} \right) - (x_1 - x_4) \left(\frac{p_3}{m_1} - \frac{p_6}{m_2} \right) = \sigma_2 \equiv C_5,$$

$$(x_1 - x_4) \left(\frac{p_2}{m_1} - \frac{p_5}{m_2} \right) - (x_2 - x_5) \left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2} \right) = \sigma_3 \equiv C_6,$$

Из первого и четвёртого уравнений системы (4.6.4) находим

$$\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2} = \frac{d}{dt} (x_1 - x_4), \quad (4.6.6)$$

а из соответствующих уравнений системы (4.6.5)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2} \right) = -\lambda^2(x_1 - x_4), \quad (4.6.7)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{k}{\mu},$$

где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – приведённая масса. Перемножая уравнения (4.6.6) и (4.6.7) и интегрируя, получим следующий интеграл движения

$$\left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2} \right)^2 + \lambda^2(x_1 - x_4)^2 = C_7.$$

Если умножить (4.6.6) на $\lambda \cos(\lambda t)$, а (4.6.7) – на $\sin \lambda t$ и сложить, то получается уравнение

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2} \right) \sin(\lambda t) \right] = \lambda \frac{d}{dt} [(x_1 - x_4) \cos(\lambda t)],$$

приводящее к восьмому интегралу движения:

$$\left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2} \right) \sin(\lambda t) - \lambda(x_1 - x_4) \cos(\lambda t) = C_8.$$

Ещё три интеграла можно получить, если первые три уравнения системы (4.6.4) умножить на m_1 , следующие три – на m_2 и сложить первое уравнение с четвёртым, второе – с пятым, а третье – с шестым. Интегрируя полученные уравнения типа

$$\frac{d}{dt}(m_1 x_1 + m_2 x_4) = p_1 + p_4$$

с учётом найденных ранее интегралов движения, находим:

$$m_1 x_1 + m_2 x_4 - (p_1 + p_4)t = C_9,$$

$$m_1 x_2 + m_2 x_5 - (p_2 + p_5)t = C_{10},$$

$$m_1 x_3 + m_2 x_6 - (p_3 + p_6)t = C_{11}.$$

Последний, двенадцатый интеграл, найдём по теореме Пуассона:

$$\begin{aligned} C_{12} = \{C_7, C_6\} &= \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial C_7}{\partial p_k} \frac{\partial C_6}{\partial q_k} - \frac{\partial C_7}{\partial q_k} \frac{\partial C_6}{\partial p_k} \right) = \\ &= \left(\frac{p_2}{m_1} - \frac{p_5}{m_2} \right) \frac{2}{m_1} \left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2} \right) + \frac{1}{m_1} (x_2 - x_5) 2\lambda^2 (x_1 - x_4) + \\ &\left(\frac{p_2}{m_1} - \frac{p_5}{m_2} \right) \frac{2}{m_2} \left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2} \right) + \frac{1}{m_2} (x_2 - x_5) 2\lambda^2 (x_1 - x_4) = \\ &= \frac{2}{\mu} \left[\left(\frac{p_2}{m_1} - \frac{p_5}{m_2} \right) \left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_4}{m_2} \right) + \lambda^2 (x_1 - x_4) (x_2 - x_5) \right]. \end{aligned}$$

Всякие другие комбинации, составленные из найденных по методу Пуассона, будут тождественно равны нулю.

4.6.5 Упражнения

1. Вычислить скобки Пуассона:

$$\{x_i, L_j\}, \{L_i, L_j\}, \{L_i, L^2\}, \{x_i, \mathcal{H}\}, \{p_i, \mathcal{H}\}, \{L_i, \mathcal{H}\}, \{L^2, \mathcal{H}\}.$$

2. Найти функцию Гамильтона и вывести канонические уравнения для частицы в потенциальном поле $U(\rho, \varphi, z)$.
3. Найти функцию Гамильтона и вывести канонические уравнения для частицы в потенциальном поле $U(r, \theta, \varphi)$.
4. Найти функцию Гамильтона и вывести канонические уравнения для тяжёлого волчка.

4.7 Теория преобразований

4.7.1 Точечные преобразования Лежандра

Важную роль в теоретических исследованиях динамических систем играют преобразования переменных. Мы начнём с преобразования координат

$$q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

называемого *точечным преобразованием Лежандра*. Очевидно, функция Лагранжа $\mathcal{L} = T - U$ есть инвариант этого преобразования. Действительно, выбирая произвольную систему обобщённых координат, мы могли сразу в качестве таковых выбрать координаты Q_i . Но обобщённые импульсы при таком преобразовании меняются: $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i \mapsto P_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{Q}_i$. Как связаны между собой новые и старые импульсы?

Рассмотрим вариацию \mathcal{L} , считая q_i постоянными,

$$\delta\mathcal{L} = \sum \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \delta\dot{q}_i = \sum \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Q}_i} \delta\dot{Q}_i,$$

отсюда

$$\sum p_i \delta\dot{q}_i = \sum P_i \delta\dot{Q}_i. \quad (4.7.1)$$

В то же время

$$\dot{q}_i = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j$$

и

$$\delta\dot{q}_i = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \delta\dot{Q}_j.$$

Следовательно, вариации обобщённых скоростей преобразуются по тем же формулам, что и вариации самих координат,

$$\delta q_i = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \delta Q_j,$$

поэтому вариации $\delta \dot{q}_i$, $\delta \dot{Q}_j$ в формуле (4.7.1) можно заменить вариациями δq_j , δQ_j :

$$\sum p_i \delta q_i = \sum P_i \delta Q_i.$$

С помощью двух последних соотношений и может быть установлена искомая связь

$$P_i(q_j, p_j) = \sum p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}.$$

Таким образом, точечные преобразования Лежандра представляются в виде

$$q_i \mapsto Q_i = Q_i(q_j), \quad p_i \mapsto P_i = P_i(q_j, p_j),$$

который обобщается и на случай, когда преобразование зависит от времени.

4.7.2 Канонические преобразования

Уравнения Лагранжа инвариантны относительно точечных преобразований. Конечно, при этом сохраняют свою форму и уравнения Гамильтона, но последние допускают более широкий класс преобразований, называемых *каноническими преобразованиями*:

$$\{q_i, p_i\} \mapsto \{Q_i = Q_i(q_j, p_j, t), P_i = P_i(q_j, p_j, t)\}. \quad (4.7.2)$$

Чтобы новые переменные также удовлетворяли уравнениям Гамильтона с новой, вообще говоря, функцией Гамильтона $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Q_i, P_i, t)$,

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i},$$

необходимо, чтобы наряду с условием

$$\delta \int_a^b \left[\sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right] dt = 0$$

выполнялось условие

$$\delta \int_a^b \left[\sum P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K} \right] dt = 0.$$

Для этого достаточно, чтобы подынтегральные функции отличались не более чем на полную производную произвольной (дифференцируемой) функции $F(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$:

$$\left[\sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right] - \left[\sum P_i \dot{Q}_i - \mathcal{K} \right] = dF/dt. \quad (4.7.3)$$

Функция F , определяющая переход от старых канонических переменных к новым и называемая *производящей функцией канонического преобразования*, зависит от всех этих переменных общим числом $4n+1$ (включая время), но так как переменные эти связаны между собой $2n$ уравнениями преобразований (4.7.2), остаются свободными лишь $2n+1$ переменных. Хотя в принципе в качестве независимых переменных можно взять любые $2n+1$ переменные, обычно используется один из следующих четырёх наборов:

$$q_i, Q_i, t; \quad q_i, P_i, t; \quad p_i, Q_i, t; \quad p_i, P_i, t.$$

Вопрос о том, каким из них воспользоваться, связан с конкретными особенностями задачи.

4.7.3 Производящие функции

Производящая функция *первого типа* является функцией *старых и новых координат*: $F = F_1(q_i, Q_i, t)$. Подставляя её дифференциал

$$dF_1 = \sum \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \sum \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

в вытекающее из (4.7.3) дифференциальное выражение

$$\left[\sum p_i dq_i - \mathcal{H} dt \right] - \left[\sum P_i dQ_i - \mathcal{K} dt \right] = dF_1,$$

получаем

$$\sum \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) dq_i - \sum \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \right) dQ_i + \left(\mathcal{K} - \mathcal{H} - \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) dt = 0.$$

В силу независимости аргументов производящей функции имеем:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad (4.7.4)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad (4.7.5)$$

$$\mathcal{K} - \mathcal{H} = \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Пусть нам известен конкретный вид F_1 . Уравнения (4.7.4) можно, в принципе, решить относительно Q_i , выразив последние через остальные переменные:

$$Q_i = Q_i(q_i, p_i, t). \quad (4.7.6)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (4.7.5), получим

$$P_i = P_i(q_i, p_i, t). \quad (4.7.7)$$

Набор $2n$ уравнений (4.7.6) и (4.7.7) как раз и осуществляет каноническое преобразование

$$\{q_i, p_i\} \mapsto \{Q_i = Q_i(q_j, p_j, t), P_i = P_i(q_j, p_j, t)\},$$

порождаемое (производимое) производящей функцией F_1 .

Второй тип преобразований порождается производящей функцией

$$F_2 = F_2(q_i, P_i, t)$$

и приводит к уравнениям:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad \mathcal{K} - \mathcal{H} = \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (4.7.8)$$

Аналогичным образом выводятся уравнения преобразований третьего типа $F_3 = F_3(p_i, Q_i, t)$:

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad \mathcal{K} - \mathcal{H} = \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

и четвертого типа $F_4 = F_4(p_i, P_i, t)$:

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad \mathcal{K} - \mathcal{H} = \frac{\partial F_4}{\partial t}.$$

Из последних уравнений приведённых выше типов следует, что если производящая функция не зависит от времени явно, преобразованная функция Гамильтона совпадает с первоначальной:

$$\mathcal{K} = \mathcal{H}.$$

4.7.4 Примеры канонических преобразований

Рассмотрим несколько частных преобразований, играющих важную роль в теории.

Возьмём преобразование первого типа в виде $F_1 = \sum q_j Q_j$. Тогда

$$p_i = \frac{\partial \sum q_j Q_j}{\partial q_i} = Q_i, \quad P_i = -\frac{\partial \sum q_j Q_j}{\partial Q_i} = -q_i.$$

Поскольку зависимости от времени нет, функция Гамильтона численно остаётся той же самой, меняется лишь её функциональный вид в связи с переходом к новым координатам:

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) \mapsto \mathcal{K}(Q_i, P_i, t) = \mathcal{H}(-P_i, Q_i, t).$$

Уравнения Гамильтона в новых координатах принимают вид

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} = \frac{\partial \mathcal{H}(-P_i, Q_i, t)}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i} = -\frac{\partial \mathcal{H}(-P_i, Q_i, t)}{\partial Q_i}.$$

На месте координат в аргументах функции \mathcal{H} теперь оказались новые импульсы $-P_i$, а на месте импульсов – новые координаты Q_i : координаты и импульсы поменялись местами. Таким образом, не имеет смысла придерживаться терминов «импульсы» и «координаты» для переменных P_i и Q_i , лучше называть их просто канонически сопряжёнными переменными.

Производящая функция второго типа, взятая в виде $F_2 = \sum q_j P_j$, приводит к тождественному преобразованию

$$p_i = P_i, \quad Q_i = q_i, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H},$$

представляющему старые импульсы как новые импульсы и старые координаты как новые координаты. Более общий вид преобразований этого же типа, $F_2 = \sum f_j(q_1, \dots, q_n) P_j$, приводит к точечному преобразованию Лежандра $Q_i = f_i(q_1, \dots, q_n)$.

Рассмотрим бесконечно малое каноническое преобразование – преобразование второго типа, отличающееся от тождественного на бесконечно малую величину: $F_2 = \sum q_j P_j + \varepsilon G_\varepsilon(q_j, P_j)$. Введя обозначения $P_j = p_j(\varepsilon)$, $p_j = p_j(0)$, $Q_j = q_j(\varepsilon)$, $q_j = q_j(0)$, получим

$$q_i(\varepsilon) = q_i(0) + \varepsilon \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial P_i}, \quad p_i(0) = p_i(\varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial q_i},$$

откуда сразу следуют дифференциальные уравнения Гамильтона:

$$\left. \frac{dq_i}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial G_0}{\partial p_i}, \quad \left. \frac{dp_i}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -\frac{\partial G_0}{\partial q_i}.$$

Если взять в качестве исходных переменные, характеризующие динамическое состояние системы в момент времени t , а в качестве параметра ε взять dt , выведенные выше уравнения превратятся в канонические уравнения движения: **само движение есть непрерывный процесс канонического преобразования**, инфинитезимальной (то есть относящейся к бесконечно малому интервалу времени dt) производящей функцией которого является функция Гамильтона.

Рассмотрим ещё один, очень важный для дальнейшего, пример канонического преобразования конкретной задачи. Напомним сначала, что для свободной частицы массы m , совершающей одномерное движение, функция Гамильтона записывается в виде

$$\mathcal{H}(q, p) = p^2 / (2m).$$

Единственная координата q здесь оказывается циклической (не входит в функцию Гамильтона), а уравнения Гамильтона

$$\dot{q} = p/m, \quad \dot{p} = 0$$

имеют простое решение

$$p = \alpha, \quad q = \alpha t + \beta, \quad (4.7.9)$$

где α и β – постоянные, определяемые начальными условиями.

Более сложное движение совершает гармонический осциллятор с функцией Гамильтона

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}. \quad (4.7.10)$$

Применим к нему каноническое преобразование типа 2 с не зависящей от времени производящей функцией

$$F_2(q, P) = \int_0^q \sqrt{2m(P - kq^2/2)} dq. \quad (4.7.11)$$

Интеграл этот несложно вычислить и представить производящую функцию в явном виде, но проще оказывается работать с интегралом. Согласно формулам (4.7.8)

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \sqrt{2m(P - kq^2/2)}, \quad (4.7.12)$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^q \frac{dq}{\sqrt{P - kq^2/2}} \quad (4.7.13)$$

и

$$\mathcal{K}(Q, P) = \mathcal{H}(q(Q, P), p(Q, P)). \quad (4.7.14)$$

Подставив (4.7.12) в (4.7.10) и воспользовавшись (4.7.14), находим новую функцию Гамильтона

$$\mathcal{K}(Q, P) = P.$$

В новых переменных задача о гармоническом осцилляторе описывается уравнениями

$$\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} = 1, \quad \dot{P} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q} = 0.$$

Таким образом, используя производящую функцию (4.7.12) мы преобразовали задачу о движении гармонического осциллятора в простейшую задачу механики – задачу об одномерном движении свободной частицы, решение которой имеет вид (4.7.9). Импульсом этой частицы стала энергия осциллятора, $P = E$, а её координата связана с координатой осциллятора соотношением (4.7.13). Такое преобразование называется *преобразованием Якоби*.

Наглядную интерпретацию этого преобразования можно дать, изобразив возможные мировые линии гармонического осциллятора в пространстве исходных переменных p, q, t . При фиксированной энергии они навиваются на поверхность эллиптического цилиндра, осью которого является ось времени. Преобразование Якоби выпрямляет эти линии, превращая их в множество параллельных прямых, лежащих в плоскости $P = E$ и наклонённых к оси времени под углом 45° .

Рассмотрим это преобразование для системы с несколькими степенями свободы.

Рассмотрим консервативную систему с произвольным числом степеней свободы n :

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = E.$$

Предположим, мы нашли такое каноническое преобразование $(q_i, p_i) \mapsto (Q_i, P_i)$ с производящей функцией $F_2 = W(q_i, P_i)$, что один из новых импульсов точно совпадает с энергией системы:

$$P_1 = \mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = E. \quad (4.7.15)$$

Каноническое преобразование сохраняет гамильтонову форму уравнений движения, так что в новых переменных они имеют тот же вид:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} \end{aligned}$$

Подставляя сюда (4.7.15) и учитывая взаимную независимость переменных, получим

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial P_1}{\partial P_i} = \delta_{i1}, \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial P_1}{\partial Q_i} = 0, \end{aligned}$$

откуда сразу следует, что

$$Q_i = \begin{cases} \alpha_1 + t, & i = 1, \\ \alpha_i, & i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (4.7.16)$$

и

$$P_i = \beta_i, \quad (4.7.17)$$



Карл Густав Якоб Якоби (1804 – 1851) – немецкий математик и механик. Внёс огромный вклад в комплексный анализ, линейную алгебру, динамику и другие разделы математики и механики.

где α_i и β_i – постоянные. Единственной изменяющейся координатой теперь является Q_1 . Остальные координаты и все новые импульсы постоянны.

Сама производящая функция $W = W(q_i, P_i)$ удовлетворяет уравнениям

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad (4.7.18)$$

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i},$$

а

$$\mathcal{H}(q_i, p_i) = E. \quad (4.7.19)$$

Подставляя (4.7.18) в (4.7.19), получаем *стационарное уравнение Гамильтона-Якоби*

$$\mathcal{H}\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = E, \quad (4.7.20)$$

полным интегралом которого и является искомая производящая функция $W(q_1, \dots, q_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_1) = E$. Напомним, что решение дифференциального уравнения в частных производных, содержащее столько независимых произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных, называется *полным интегралом* этого уравнения. Такими постоянными в данном случае являются β_2, \dots, β_n и несущественная (поскольку W входит в уравнение только через производные) аддитивная постоянная.

В заключение этого раздела приведу цитату из блестящей книги венгерского, американского и ирландского физика и математика Корнелия Ланцоша (Вариационные принципы механики. - М.: Мир, 1965) по поводу формул (4.7.16)-(4.7.17):

«Геометрически это решение канонических уравнений можно интерпретировать следующим образом. Первоначально мировые линии движущейся фазовой жидкости образуют бесконечное семейство кривых и заполняют всё фазовое пространство. Интересующее нас каноническое преобразование производит такое отображение пространства самого на себя, которое *выпрямляет эти мировые линии*,

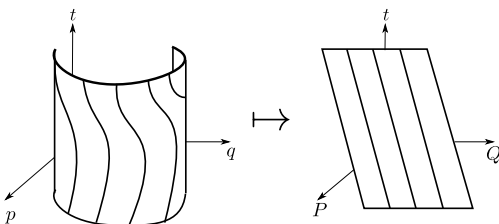


Рис. 4.19. Графическое представление преобразования Якоби

превращая их в бесконечное множество параллельных прямых линий, наклонённых под углом 45° к оси времени (рис. 4.19). Замечательным свойством этого преобразования является тот факт, что выпрямление искривлённых мировых линий фазовой жидкости и превращение их в прямые параллельные линии происходит автоматически при переходе цилиндрических поверхностей $\mathcal{H} = E$ в параллельные плоскости $P_i = E$.» (с. 267).

4.7.5 Упражнения

1. Показать, что преобразование

$$X = x \cos \omega t - y \sin \omega t,$$

$$Y = y \sin \omega t + x \cos \omega t,$$

$$Z = z$$

приводит к появлению во вращающейся системе отсчёта сил инерции.

2. Найти каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией

$$F(q, Q, t) = \frac{1}{2} m \omega(t) q^2 \operatorname{ctg} Q,$$

и записать уравнения движения гармонического осциллятора с частотой $\omega(t)$.

3. Показать, что для системы с одной степенью свободы поворот в фазовом пространстве (q, p) является каноническим преобразованием.
4. Найти производящую функцию канонического преобразования $Q(t) = q(t + a)$, $P(t) = p(t + a)$ ($a = \text{const}$) для свободного движения, свободного падения, свободных гармонических колебаний.
5. Записать стационарное уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в цилиндрической и сферической системах координат.

4.8 Переменные «действие-угол» и адиабатические инварианты

4.8.1 Одномерный гармонический осциллятор

Вернёмся к исследованию одномерного гармонического осциллятора в новых переменных. Вычисление интеграла в выражении (4.7.13) при $P = E$ дает

$$Q = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^q \frac{dq}{\sqrt{P - kq^2/2}} = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{q\sqrt{k/2}} \frac{dz}{\sqrt{E - z^2}} = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{k}{2E}} \right),$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Выразим отсюда старую координату:



$$q = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \phi, \quad \phi = \omega_0 Q.$$

Используя это выражение вместе с формулой (4.7.11), вычислим интеграл

$$J_q(E) = \oint p dq = \frac{2E}{\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \frac{2\pi}{\omega_0} E.$$

Интеграл этот, называемый *фазовым интегралом*, дает площадь эллипса, описываемого в плоскости координата-импульс фазовой точкой гармонического осциллятора с энергией $E = P$.

Переменные $I = J/2\pi$ и $\phi \in (0, 2\pi)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \omega_0,$$

имеют специальное название – *переменные действие-угол* (переменную действия не следует путать с самим действием – интегралом по времени от функции Лагранжа, хотя связь определённо есть: переменная I названа переменной действия потому, что она имеет размерность действия). Отметим, что в случае гармонического осциллятора переменная действия есть отношение энергии к частоте колебаний, а переменная угол равна фазе колебания.

4.8.2 Система с одной степенью свободы

Чтобы построить переменные действие-угол для произвольной одномерной системы, надо найти подходящее каноническое преобразование $(q, p) \mapsto (\phi, I)$, производящая функция которого должна удовлетворять уравнениям:

$$p = \frac{\partial F(q, I)}{\partial q}, \quad \phi = \frac{\partial F(q, I)}{\partial I}, \quad \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial F(q, I)}{\partial q}\right) = E(I).$$

Поскольку величина I сохраняется, приращение ϕ при изменении координаты на dq равно:

$$d\phi = \frac{\partial^2 F(q, I)}{\partial q \partial I} dq. \quad (4.8.1)$$

Требование, чтобы переменная ϕ была угловой переменной, означает, что когда система в следующий раз вернётся в данное состояние, переменная ϕ должна возрасти на 2π :

$$\oint d\phi = 2\pi. \quad (4.8.2)$$

Подставив (4.8.1) в (4.8.2) и воспользовавшись *обращённым* правилом дифференцирования по параметру, вынесем оператор дифференцирования по параметру из-под знака интеграла:

$$\oint \frac{\partial^2 F(q, I)}{\partial q \partial I} dq = \frac{\partial}{\partial I} \oint \frac{\partial F(q, I)}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial I} \oint p dq = \frac{\partial J}{\partial I} = 2\pi.$$

Таким образом, переход от переменных p, q консервативной системы с заданной функцией Гамильтона $\mathcal{H}(q, p)$ к переменным действие-угол заключается в следующем.

1. Записывается уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}\right) = E.$$

2. Это уравнение разрешается относительно $\partial F/\partial q$ и составляется уравнение

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial F}{\partial q} dq.$$

3. Разрешая полученное уравнение относительно $dE/dI = \partial \mathcal{H}/\partial I$, получаем частоту:

$$\omega \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I}.$$

4. Подставляя I в интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, совершаем переход к угловой переменной ϕ .

4.8.3 Адиабатические инварианты

Фазовый интеграл J и связанная с ним переменная действия I обладают чрезвычайно важным свойством: *адиабатической инвариантностью*. Термин этот заимствован из термодинамики, где «адиабатический процесс» рассматривается как последовательность термодинамически равновесных состояний. Чтобы осуществить его, необходимо очень медленное изменение условий. Величины, которые при этом остаются постоянными, называются *адиабатическими инвариантами*.

К числу таких величин и относятся переменные действия в механических системах. Речь, правда, идёт не столько о строгом постоянстве, сколько о медленном изменении этих переменных с изменением параметров системы. «Медленность изменения» при этом означает его малость за время, сравнимое с периодом системы.

Рассмотрим поведение математического маятника массой m , совершающего малые колебания на невесомой нити, длину которой можно изменять, выбирая нить через блок (рис. 4.20). Полная энергия маятника равна

$$E = \frac{m}{2} [l^2 \dot{\varphi}^2 + gl\varphi^2], \quad (4.8.3)$$

а закон движения (при подходящем выборе начальных условий) представляется простым гармоническим колебанием

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{g/l}.$$

Усредняя за период колебаний $T = 2\pi/\omega_0$ квадраты угла и угловой скорости, мы предположим, что в силу медленности изменения длины нити в течение одного периода изменением этим можно пренебречь и записать результат, как если бы относился к чисто гармоническим колебаниям:

$$\overline{\varphi^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_0^2 \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \varphi_0^2 [\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t] dt = \frac{\varphi_0^2}{2}, \quad (4.8.4)$$

$$\begin{aligned} \overline{\dot{\varphi}^2} &= \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t dt = \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T \varphi_0^2 \omega_0^2 [\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t] dt = \frac{\varphi_0^2 \omega_0^2}{2} = \frac{\varphi_0^2 g}{2l}. \end{aligned} \quad (4.8.5)$$

Однако на временах, много больших периода колебаний, входящие в эти выражения амплитуда колебаний и её частота будут считаться зависящими от времени (в этом – вся суть популярного в теоретической физике *адиабатического приближения*).

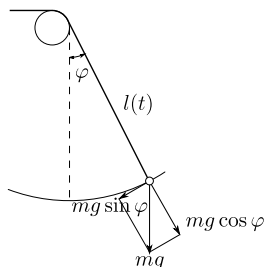


Рис. 4.20. Математический маятник переменной длины

Усредняя (4.8.3) по периоду с использованием выражений (4.8.4) и (4.8.5), запишем дифференциал полной энергии колебаний маятника:

$$\begin{aligned} d\bar{E} &= \frac{mg}{2} [\varphi_0^2 dl + \varphi_0 l d\varphi_0 + l\varphi_0 d\varphi_0] = \\ &= \frac{mg}{2} \varphi_0^2 dl + mgl\varphi_0 d\varphi_0. \end{aligned} \quad (4.8.6)$$

При изменении длины нити маятника на величину dl ($dl < 0$) против силы натяжения была произведена работа

$$\begin{aligned} \delta A &= -mg\overline{\cos \varphi} dl - ml\overline{\dot{\varphi}^2} dl \approx \\ &\approx -mg \left(1 - \frac{\varphi_0^2}{4}\right) dl - mg\frac{\varphi_0^2}{2} dl = -mgdl - \frac{mg\varphi_0^2}{4} dl. \end{aligned}$$

Первое слагаемое здесь ($-mgdl = mg|dl|$) даёт работу, идущую на изменение конфигурации маятника (повышение среднего положения массы m) и поэтому нас не интересует, тогда как второе представляет часть работы, идущую на увеличение энергии колебаний (4.8.6):

$$-\frac{mg\varphi_0^2}{4} dl = \frac{mg}{2} \varphi_0^2 dl + mgl\varphi_0 d\varphi_0.$$

Интегрируя получающееся уравнение методом разделения переменных,

$$-\frac{3}{4}\varphi_0 dl = l d\varphi_0,$$

получим

$$\frac{3}{4} \ln l = -\ln \varphi_0 + \ln C, \quad C = \text{const},$$

или

$$l^{3/4}\varphi_0 = C,$$

где l и φ_0 зависят от времени. Отсюда, в частности, следует, что медленное («адиабатическое») укорочение длины l нити маятника ведёт к увеличению амплитуды его колебаний по закону $\varphi_0 = Cl^{-3/4}$. Увеличение же усреднённой по периоду энергии колебаний маятника определяется интегралом от совершаемой работы:

$$\bar{E}(l) - \bar{E}_0(l) = \int_l^{l_0} \frac{mg\varphi_0^2}{4} dl = \frac{mgC^2}{4} \int_l^{l_0} l^{-3/2} dl = \frac{mgC^2}{2} (l^{-1/2} - l_0^{-1/2}).$$

Записав приращения энергии и частоты колебаний в относительном виде,

$$\frac{d\bar{E}}{\bar{E}} = -\frac{mg\varphi_0^2}{4E} dl = -\frac{dl}{2l}$$

и

$$\frac{d\omega_0}{\omega_0} = \frac{dl^{-1/2}}{l^{-1/2}} = -\frac{dl}{2l},$$

находим, что

$$\frac{d\bar{E}}{\bar{E}} = \frac{d\omega_0}{\omega_0}.$$

Решая это уравнение относительно \bar{E} как функции ω_0 , получим:

$$\bar{E}(l) = J\omega_0(l),$$

где $J = \text{const}$ и $J = \bar{E}/\omega_0$ в отличие от входящих в эту же формулу \bar{E} и ω_0 не зависит от длины нити l и по этой причине является адиабатическим инвариантом.

В 1911 г. П. Эренфест выдвинул *адиабатическую гипотезу*, согласно которой квантованию должны подвергаться в первую очередь адиабатические инварианты. На этой основе и был сформулирован первый постулат боровской квантовой теории: фазовый интеграл должен быть кратным постоянной Планка h :

$$J_q = \oint pdq = nh, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует квантование энергии гармонического осциллятора

$$E_n = n\hbar\omega_0, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Зоммерфельд, заменив в этих выражениях n на $n + 1/2$, получил точную формулу энергетических уровней квантового осциллятора:

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

4.8.4 Системы с несколькими степенями свободы

Пусть канонические переменные механической системы с n степенями свободы разделяются и уравнение Гамильтона-Якоби (4.7.17) имеет вид

$$\mathcal{H}\left(f_1\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right), \dots, f_n\left(q_n, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right)\right) = E. \quad (4.8.7)$$

Подстановка

$$W(q_1, \dots, q_n; \beta_1, \dots, \beta_n) = \sum_{i=1}^n W_i(q_i; \beta_1, \dots, \beta_n) \quad (4.8.8)$$

в уравнение (4.8.7) сводит решение задачи к решению системы обыкновенных уравнений

$$f_i \left(q_i, \frac{dW_i}{dq_i} \right) = \beta_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.8.9)$$

где постоянные β_i связаны соотношением

$$H(\beta_1, \dots, \beta_n) = E.$$

Разрешая систему (4.8.8) относительно производных dW_i/dq_i , найдём импульсы p_i как функции координат q_i :

$$p_i = \frac{\partial W_i(q_i, \beta_1, \dots, \beta_n)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Выбирая теперь в качестве обобщённых импульсов p_i переменные действия

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

и разрешая систему

$$I_i = I_i(\beta_1, \dots, \beta_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

относительно β_i , получим:

$$\beta_i = \beta_i(I_1, \dots, I_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Подставляя эти функции в (4.8.8)-(4.8.9), находим W как функцию старых координат и новых импульсов:

$$W = W(q_1, \dots, q_n; I_1, \dots, I_n).$$

Используя это укороченное действие в качестве производящей функции, получим

$$p_i = \frac{\partial W(q, I)}{\partial q_i}, \quad \phi_i = \frac{\partial W(q, I)}{\partial I_i},$$

где ϕ_i – угловые переменные рассматриваемой системы с n степенями свободы.

4.8.5 Переменные действие-угол и частоты системы

Выше мы видели, что функция Гамильтона в переменных действие-угол зависит лишь от импульсов, поэтому канонические уравнения принимают вид

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial \mathcal{H}(I)}{\partial I_i}, \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}(I)}{\partial \phi_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из этих уравнений вытекают следующие свойства новых переменных.

1. Угловые переменные являются линейными функциями времени:

$$\phi_i = \omega_i t + \phi_0. \quad (4.8.10)$$

2. Производные функции Гамильтона по переменным действия определяют частоты ω_i колебаний импульсов:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i} = \omega_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.8.11)$$

3. Переменные действия сохраняют постоянные значения при достаточно медленном изменении параметров системы.

Первое свойство очевидно. В справедливости второго убеждает следующая цепочка равенств для приращений $\Delta\phi_i$ за полный период изменения функции $p_j(q_j)$ при условии постоянства всех координат, кроме q_j :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_i &= \oint \frac{\partial \phi_i}{\partial q_i} dq_j = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial q_i} dq_j = \\ &= \frac{\partial}{\partial I_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_j = 2\pi \frac{\partial I_j}{\partial I_i} = 2\pi \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Последнее равенство цепочки показывает, что при $j = i$ угловая переменная ϕ_i равна единице, а при $j \neq i$ нулю, так что если τ_i будет означать период одного цикла изменения q_i , то согласно (4.8.10) будем иметь

$$\Delta\phi_i = \omega_i \tau_i,$$

что и доказывает второе свойство.

Таким образом, переменные действие-угол весьма удобны для получения частот периодических движений: не требуется полного решения задачи о движении системы. Если априори известно, что система

является периодической, то достаточно найти переменные действия по формуле

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i,$$

выразить через них \mathcal{H} , затем продифференцировать результат по I_i и получить частоты по формуле (4.8.11).

Третье свойство обобщает сформулированный в предыдущем пункте результат на случай системы с n степенями свободы. Приведём набросок его доказательства. При наличии медленно меняющегося параметра $\lambda = \lambda(t)$ (для краткости полагаем, что такой параметр один) $W = W(q_1, \dots, q_n; I_1, \dots, I_n; \lambda(t))$ и преобразование Якоби даёт

$$\mathcal{H}' = E(I) - \frac{\partial W}{\partial t} = E(I) - \Lambda \dot{\lambda},$$

где $\Lambda = \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)_I$. Уравнения Гамильтона в новых переменных принимают вид

$$\dot{i} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \phi} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} \dot{\lambda}.$$

По условию, параметр λ медленно меняющийся, то есть за большой промежуток времени τ он изменяется на малую величину $\delta\lambda$, чем в свою очередь порождает малое изменение

$$\delta I = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} \delta\lambda.$$

Можно показать, что $\Lambda(\phi(t))$ периодическая функция времени, следовательно, и $\partial\Lambda/\partial\phi$ периодическая и к тому же не содержащая аддитивных постоянных (они исчезли при дифференцировании по ϕ). Среднее же значение такой периодической функции равно нулю, откуда и следует вывод о существовании свойства 3:

$$\frac{dI}{d\lambda} = 0.$$

4.8.6 Примеры вычисления фазовых интегралов

Приведём два примера вычисления фазовых интегралов.

Пример 1. Фазовые интегралы для плоской эллиптической кеплеровой орбиты. Первый (азимутальный) интеграл

$$J_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi$$

в силу второго закона Кеплера вычисляется элементарно:

$$J_\varphi = 2\pi p_\varphi = 2\pi L,$$

где

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const.}$$

Рассмотрим вычисление второго (радиального) интеграла:

$$J_r = \oint p_r dr = m \oint \frac{dr}{dt} dr.$$

От интегрирования по радиальной переменной перейдём к интегрированию по угловой:

$$J_r = m \oint \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dr = m \int_0^{2\pi} \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{d\varphi} d\varphi = m \int_0^{2\pi} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{L}{mr^2} d\varphi = L \int_0^{2\pi} \left(\frac{dr}{r d\varphi} \right)^2 d\varphi.$$

Записав уравнение эллипса в виде

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

получим

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)\varepsilon \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2},$$

$$\frac{dr}{r d\varphi} = \frac{\varepsilon \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

и

$$J_r = L \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}.$$

Введя обозначения

$$u = \varepsilon \sin \varphi, \quad v = \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

представим фазовый интеграл в виде

$$J_r = L \int_0^{2\pi} u(\varphi) dv(\varphi)$$

и выполним интегрирование по частям:

$$J_r = L \left\{ uv \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} v du \right\} = L \left\{ \left[\frac{\varepsilon \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} d\varphi \right\}.$$

Первое слагаемое после подстановки пределов обращается в нуль, и мы приходим к выражению

$$J_r = -L \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} d\varphi \equiv L \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - 1 \right) d\varphi.$$

Выполняя интегрирование, окончательно получим:

$$J_r = 2\pi L \left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 1 \right).$$

Пример 2. Фазовый интеграл для заряда в магнитном поле. Проекция импульса и радиус-вектора заряда на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, совершают периодические движения. То же относится и к каноническому импульсу

$$\vec{P} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A},$$

где \vec{A} – векторный потенциал. Фазовый интеграл по замкнутому контуру C , в отсутствие продольного движения заряда совпадающему с его траекторией, имеет вид:

$$J = \oint_C P d\vec{l} = \oint_C m\vec{v} d\vec{l} + \frac{e}{c} \oint_C \vec{A} d\vec{l}.$$

Учитывая, что

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A},$$

а по теореме Стокса

$$\frac{e}{c} \oint_C \vec{A} d\vec{l} = \frac{e}{c} \int_S \text{rot}\vec{A} d\vec{S}$$

(S – поверхность, натянутая на замкнутый контур C). В результате имеем:

$$J = \oint_C m\vec{v} d\vec{l} + \frac{e}{c} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Если поле в рассматриваемой области однородно, а скорость заряда перпендикулярна этому полю, то C представляет собой окружность, по которой вращается заряд с угловой скоростью $\Omega = eB/mc$, называемой *циклотронной частотой* или *гирочастотой*. Заметим, что направление вектора $d\vec{S}$ противоположно направлению \vec{B} , так что второе слагаемое в приведенной выше формуле отрицательно, поэтому

$$J = 2\pi r^2 m\Omega - \pi r^2 \frac{e}{c} B = \frac{e}{c} \pi r^2 B = \frac{e}{c} \Phi.$$

Величина J является адиабатическим инвариантом; это означает, что если изменение B за период движения заряда по орбите мало, то изменение J будет пренебрежимо мало. Пропорциональную ей величину магнитного потока через замкнутую орбиту

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \pi r^2 B$$

называют *первым адиабатическим инвариантом* движения заряда в магнитном поле. Из его постоянства следует, что когда быстро вращающийся вокруг магнитной силовой линии заряд перемещается вдоль неё по винтовой траектории, то возмущение магнитного поля сопровождается уменьшением радиуса вращения заряда, магнитный поток при этом сохраняется. Другим адиабатическим инвариантом является орбитальный магнитный момент заряда

$$\mu = \frac{mv^2}{2B}.$$

Согласно этой формуле, при сужении магнитных силовых линий движущийся в сторону сужения (то есть в сторону возрастания магнитного поля B) заряд должен увеличивать кинетическую энергию поперечного движения. Увеличение это происходит за счёт уменьшения кинетической энергии продольного движения. В конце концов, запас продольной составляющей кинетической энергии иссякает, и заряд, прекратив своё движение в сторону возрастания магнитного поля, начинает движение в обратном направлении вдоль той же силовой линии. Это явление называется *магнитным отражением*. Именно это происходит, когда захваченные радиационным поясом Земли заряженные частицы, идущие от Солнца и из Космоса, приближаются к магнитосфере Земли, где поле сильнее. Отразившись, частицы движутся к противоположному магнитному полюсу и т.д. Магнитное поле Земли (вместе с атмосферой) предохраняет её поверхность от действия космических лучей и тем самым делает возможной жизнь на Земле (по крайней мере, в её настоящей форме).

4.8.7 Упражнения

1. Материальная точка свободно движется по отрезку, упруго отражаясь от его концов. Найти закон изменения её энергии при медленном уменьшении длины отрезка.
2. Математический маятник совершает малые колебания, нить медленно сокращается. Найти закон изменения амплитуды колебаний маятника со временем.
3. Металлический шарик упруго подскакивает над медленно поднимающейся горизонтальной стальной плитой, падая и отражаясь от её поверхности. Найти закон изменения максимальной высоты подъёма шарика над её поверхностью.

4.9 Метод Гамильтона-Якоби

4.9.1 Главная функция

В этом пункте мы представим приведённые выше преобразования в несколько иной форме, позволяющей вскрыть физический смысл производящей функции преобразования.

Раньше мы рассматривали функционал действия \mathcal{S} на множестве виртуальных траекторий. Сейчас рассмотрим его на множестве реальных траекторий, начинающихся из одной точки конфигурационного пространства $q_{i0} \equiv q_i(0)$, $i = 1, \dots, n$, в начальный момент времени t_0 :

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^t \mathcal{L}(q_i(t'), \dot{q}_i(t')) dt'.$$

В момент времени $t > t_0$ система может находиться в различных точках конфигурационного пространства ($q_i \equiv q_i(t)$) в зависимости от значений начальных скоростей (рис. 4.21). Эти координаты тоже входят в список аргументов S , тогда как скорости $\dot{q}_i(t)$ на реальных траекториях перестают быть независимыми от координат $q_i(t)$ и могут быть опущены. Действие, представленное как функция $2n + 2$ переменных,

$$S = S(q_i, t; q_{i0}, t_0), \quad (4.9.1)$$

называют *главной функцией*.

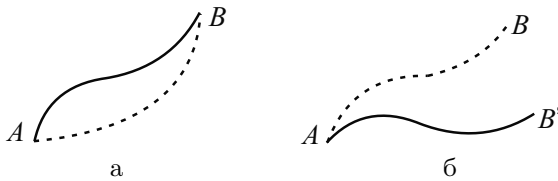


Рис. 4.21. Действие – это функционал на множестве виртуальных траекторий с общим началом и концом (а), главная функция – это функция начальной и конечной точек реальной траектории на заданном отрезке времени (б)

Построить главную функцию для конкретной системы можно следующим образом. Допустим, нам удалось решить уравнения движения и найти координаты системы в произвольный момент времени t' при заданных начальных условиях:

$$q_i = q_i(t'; q_{i0}, \dot{q}_{i0}, t_0). \quad (4.9.2)$$

Теперь можно выразить функцию Лагранжа через $2n + 1$ параметров $q_{i0}, \dot{q}_{i0}, t_0$ и время t . Взяв интеграл от этой функции по $t' \in (t_0, t)$, представим его как функцию этих же переменных:

$$\int_{t_0}^t \mathcal{L} dt' = J(t; q_{i0}, \dot{q}_{i0}, t_0). \quad (4.9.3)$$

Разрешая систему (4.9.2) относительно начальных скоростей \dot{q}_{i0} и подставляя найденные значения в (4.9.3), приходим к функции (4.9.1).

Приведём три примера вычисления главных функций для отдельной частицы единичной массы во внешнем поле.

Пример 1. Частица в однородном постоянном поле. Пусть частица движется в плоскости XOY в однородном поле тяжести $\vec{F} = \{0, -g\}$:

$$x = x_0 + \dot{x}_0(t - t_0), \quad y = y_0 + \dot{y}_0(t - t_0) - g(t - t_0)^2/2.$$

Выполняя интегрирование

$$S = \int_{t_0}^t [(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 - gy] dt'$$

и выражая результат через x_0, y_0, x, y, t_0 и t , получим:

$$S = \frac{1}{2(t-t_0)} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] - \frac{g}{2}(t-t_0)(y+y_0) - \frac{g^2}{24}(t-t_0)^3.$$

Пример 2. Одномерный гармонический осциллятор. Представим его движение в виде

$$x = x_0 \cos[\omega(t-t_0)] + (v_0/\omega) \sin[\omega(t-t_0)].$$

Подставляя эту функцию в формулу действия

$$S = (1/2) \int_{t_0}^t [\dot{x}^2 - \omega^2 x^2] dt'$$

и выражая скорость через координату и время, после элементарного интегрирования получаем:

$$S = (\omega/2)(x^2 + x_0^2) \operatorname{ctg}[\omega(t-t_0)] - \frac{\omega x_0 x}{\sin[\omega(t-t_0)]}.$$

Пример 3. Неконсервативное движение. Частица совершает движение по прямой в однородном силовом поле, линейно возрастающем со временем: $F = At$. В этом случае

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 + (A/2)(t^2 - t_0^2), \\ x &= x_0 + v_0(t-t_0) + (A/6)(t-t_0)^2(t+2t_0). \end{aligned}$$

Выражая теперь функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = (1/2)[\dot{x}^2 + 2Atx]$$

через время t , вычисляя интеграл по t и выражая затем v_0 через x_0 , находим следующее выражение для главной функции:

$$S = \frac{(x-x_0)^2}{2(t-t_0)} + (A/6)(t-t_0)[x(2t+t_0) + x_0(t+2t_0)] - (A^2/360)(t-t_0)^3(4t^2 + 7t_0t + 4t_0^2).$$

4.9.2 Нестационарное уравнение Гамильтона-Якоби

Продолжим рассмотрение главной функции – действия *на реальных траекториях* как функции начальных (в момент $t_0 = 0$) и конечных (в момент t) координат q_i и времени t . Её вариация вычисляется как и прежде (4.3.2),

$$\delta S = \int_0^t \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i dt' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_0^t,$$

но теперь интеграл обращается в нуль, потому что реальное движение удовлетворяет уравнениям Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

а от последнего слагаемого остаётся вариация в момент t :

$$\delta S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t).$$

Отсюда

$$\frac{\delta S}{\delta q_i(t)} \equiv \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$$

но правая часть этого равенства есть обобщённый импульс, следовательно

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (4.9.4)$$

С другой стороны, полная производная по времени от действия

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum p_i \dot{q}_i,$$

равна функции Лагранжа,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^t \mathcal{L} dt' = \mathcal{L}.$$

Правые части двух последних выражений равны, откуда следует

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{L} - \sum p_i \dot{q}_i \equiv -\mathcal{H}(q_i, p_i, t). \quad (4.9.5)$$

Подставляя (4.9.4) в (4.9.5), приходим к нестационарному уравнению Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}(q_i, \partial S / \partial q_i, t).$$

В случае консервативной системы функция Гамильтона не зависит явно от времени и пространственно-временные переменные можно разделить:

$$S(q_i, t) = S_0(q_i) + S_1(t), \quad \frac{\partial S_1}{\partial t} = -E, \quad \mathcal{H}(q_i, \partial S_0(q_i) / \partial q_i) = E,$$

где E – постоянная разделения, равная энергии консервативной системы. Второе слагаемое легко находится из приведенного выше уравнения, $\mathcal{S}_1(t) = -Et$, а первое, $\mathcal{S}_0(q_i) = \mathcal{S}(q_i, t) + Et$, называемое *укороченным действием*, удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{H}(q_i, \partial\mathcal{S}_0(q_i)/\partial q_i) = E.$$

Оно совпадает с уравнением для производящей функции преобразования Якоби W , так что

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial\mathcal{S}_0(q_i)}{\partial q_i}, \\ Q_i &= \frac{\partial\mathcal{S}_0(q_i)}{\partial\beta_i} = \alpha_i + t\delta_{i1}, \\ P_i &= \beta_i, \quad \beta_1 = E. \end{aligned}$$

Если функция Гамильтона не зависит ещё от какой-нибудь из координат, например, от координаты q_1 , то

$$\mathcal{S} = -Et + \alpha_1 q_1 + \mathcal{S}_2(q_2, \dots, q_n, t) \quad (4.9.6)$$

и т.д.

В журнале Американской ассоциации преподавателей физики¹⁰ Яном из Рюнде-Жанейро опубликован короткий вывод уравнения Гамильтона-Якоби, полезный для первоначального ознакомления. Метод этот предполагает знание всего-навсего одной формулы векторного анализа:

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - [\vec{v}[\nabla\vec{v}]].$$

В уравнении движения отдельной частицы

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla U$$

скорость \vec{v} интерпретируется в качестве полевой переменной,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v},$$

применяется приведённое выше векторное тождество

$$m \left\{ \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - [\vec{v}[\nabla\vec{v}]] \right\} = -\nabla U,$$

и совершается подстановка $\vec{v} = (1/m)\nabla\mathcal{S}(\vec{x}, t)$:

$$\nabla \left\{ \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla\mathcal{S})^2 + U \right\} = 0.$$

Содержимое фигурных скобок может зависеть только от времени, но добавление такой функции в потенциальную энергию не изменяет силы, и мы приходим к *нелинейному* уравнению Гамильтона-Якоби относительно действия \mathcal{S} :

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} = - \left\{ \frac{1}{2m}(\nabla\mathcal{S})^2 + U \right\} = -\mathcal{H}(\vec{x}, \nabla\mathcal{S}, t).$$

¹⁰Amer. J. Phys. V.52, no. 6, 555

4.9.3 Теорема Якоби

Полным интегралом дифференциального уравнения в частных производных первого порядка называется такое его решение, которое содержит столько независимых произвольных постоянных, сколько имеется в уравнении независимых переменных. В уравнении Гамильтона-Якоби независимыми переменными являются координаты q_1, \dots, q_n и время t . Поскольку функция \mathcal{S} входит в это уравнение только через свои производные, одна из постоянных содержится в ней аддитивным образом и никак не влияет на описываемую динамику. Остается, таким образом, столько произвольных постоянных (обозначим их β_i), сколько независимых координат системы, то есть n :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(q_1, \dots, q_n, t; \beta_1, \dots, \beta_n). \quad (4.9.7)$$

Общее же решение уравнений движения должно содержать $2n$ произвольных постоянных. Взяв в качестве n этих постоянных введённые выше β_i и дополнив этот набор таким же числом других независимых постоянных α_i , запишем это решение в виде

$$q_i = q_i(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n). \quad (4.9.8)$$

Связь между решениями (4.9.7) и (4.9.8) устанавливает следующая теорема.

Теорема Якоби. *Если некоторая функция*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(q_1, \dots, q_n, t; \beta_1, \dots, \beta_n)$$

является полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -\mathcal{H}(q_i, \partial \mathcal{S} / \partial q_i, t), \quad (4.9.9)$$

то решение канонических уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad (4.9.10)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad (4.9.11)$$

даётся соотношениями

$$p_i(t) = \frac{\partial \mathcal{S}(q_1, \dots, q_n, t; \beta_1, \dots, \beta_n)}{\partial q_i}, \quad (4.9.12)$$

u

$$-\alpha_i = \frac{\partial \mathcal{S}(q_1, \dots, q_n, t; \beta_1, \dots, \beta_n)}{\partial \beta_i}. \quad (4.9.13)$$

Возьмем частную производную по β_i от обеих частей уравнения (4.9.9)

$$\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \beta_i \partial t} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \beta_i \partial q_j},$$

и частную производную по времени от обеих частей уравнения (4.9.13):

$$0 = \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial t \partial \beta_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial q_j \partial \beta_i} \dot{q}_j.$$

Сопоставление этих выражений приводит к уравнениям (4.9.10). Дифференцируя аналогичным образом уравнения (4.9.9) по q_i и (4.9.12) по t , приходим к уравнениям (4.9.11).

Покажем процедуру нахождения полных интегралов в трёх рассмотренных выше примерах, положив, для простоты, $t_0 = 0$.

Пример 1. Функция Гамильтона здесь

$$\mathcal{H} = (1/2)(p_x^2 + p_y^2) + gy$$

не зависит явно ни от времени, ни от x -координаты, так что полный интеграл ищем в виде (4.9.6):

$$S = -Et + \beta x + \mathcal{S}_2(y).$$

Подставляя это выражение в уравнение Гамильтона-Якоби, приходим к уравнению для \mathcal{S}_2

$$(\mathcal{S}'_2)^2 = 2g(h - y),$$

где $h = (E - \beta^2/2)/g$ — наибольшая высота, достигаемая частицей. Решение этого уравнения имеет вид:

$$\mathcal{S}_2 = \sqrt{2g} \int_0^{h-y} \sqrt{u} du.$$

Таким образом, полный интеграл, то есть решение, содержащее два произвольных параметра β и h , имеет вид

$$S = -[(1/2)\beta^2 + gh]t + \beta x + \frac{\sqrt{8g}}{3}(h - y)^{3/2}.$$

Пример 2. В этом случае уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\omega^2 x^2}{2} = 0.$$

Легко убедиться, что найденная выше главная функция

$$S = \frac{\omega}{2}(x^2 + a^2) \operatorname{ctg} \omega t - \frac{\omega x a}{\sin \omega t}, \quad a = x_0,$$

удовлетворяет этому уравнению при всех $a > 0$. Чтобы найти полный интеграл, положим

$$S = -\frac{\omega^2 \beta^2}{2} t + S_1(x),$$

откуда

$$(S_1')^2 = \omega^2(\beta^2 - x^2)$$

и

$$S = -\frac{\omega^2 \beta^2}{2} t + \omega \int_0^x \sqrt{\beta^2 - x^2} dx.$$

Пример 3. Полный интеграл имеет вид:

$$S = \frac{1}{2} A x t^2 + \beta x - \left(\frac{1}{40} A^2 t^5 + \frac{1}{6} A \beta t^3 + \frac{1}{2} \beta^2 t \right).$$

4.9.4 Порядок решения задач методом Гамильтона-Якоби

Сформулируем порядок действий в виде следующего рецепта.

1. Выбирается система обобщённых координат q_1, \dots, q_n и находится явное выражение для функции Гамильтона $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
2. Составляется уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}(q_i, \partial S / \partial q_i, t).$$

3. Находится полный интеграл, содержащий n произвольных постоянных β_1, \dots, β_n :

$$S = S(q_1, \dots, q_n, t; \beta_1, \dots, \beta_n).$$

4. Вычисляются частные производные от него по этим параметрам и приравниваются к новым постоянным $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ соответственно:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_i} = -\alpha_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

5. Полученные уравнения разрешаются относительно координат:

$$q_i = q_i(t; \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n).$$

6. Найденные выражения дифференцируются и вместе с этими производными используются для определения постоянных:

$$q_i(0; \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) = q_{i0},$$

$$\dot{q}_i(0; \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) = \dot{q}_{i0}.$$

Применим этот алгоритм к решению неконсервативной задачи, сформулированной в примере 3. Полный интеграл её уже известен, нам осталось вычислить производную

$$-\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta} = x - \beta t - \frac{1}{6} A t^3,$$

откуда и следует уже известное нам решение задачи:

$$x = x_0 + v_0 t + (A/6)t^3.$$

4.9.5 Метод Гамильтона-Якоби для консервативных систем

В случае консервативных систем функция Гамильтона не зависит от времени и процедура решения несколько упрощается.

1. Записывается уравнение сохранения энергии

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = E.$$

2. Импульсы p_i заменяются частными производными $\partial \mathcal{S} / \partial q_i$:

$$\mathcal{H}\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_n}\right) = E.$$

3. Находится полный интеграл с $n-1$ произвольными постоянными (n -я постоянная – полная энергия):

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(q_1, \dots, q_n; \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, E).$$

4. Записываются уравнения

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta_i} = -\alpha_i, \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial E} = t - \tau.$$

5. Полученные уравнения разрешаются относительно координат:

$$q_i = q_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, t - \tau, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, E).$$

Переход от действия к укороченному действию есть частный случай разделения переменных. Этот метод применим и к координатам. Рассмотрим в качестве примера точку в поле $U(x, y, z)$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

Пусть $U(x, y, z) = U_1(x) + U_2(y) + U_3(z)$, тогда $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$ и

$$\mathcal{H} \left(q_i, \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q_i} \right) = \mathcal{H}_1 \left(q_1, \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q_1} \right) + \mathcal{H}_2 \left(q_2, \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q_2} \right) + \mathcal{H}_3 \left(q_3, \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q_3} \right).$$

Ищем решение в виде $\mathcal{S}_0(q_1, q_2, q_3) = \mathcal{S}_1(q_1) + \mathcal{S}_2(q_2) + \mathcal{S}_3(q_3)$, тогда

$$\begin{aligned} H \left(q_i, \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q_i} \right) &= E, \\ \underbrace{\mathcal{H}_1 \left(q_1, \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial q_1} \right)}_{E_1} + \underbrace{\mathcal{H}_2 \left(q_2, \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial q_2} \right)}_{E_2} + \underbrace{\mathcal{H}_3 \left(q_3, \frac{\partial \mathcal{S}_3}{\partial q_3} \right)}_{E_3} &= E. \end{aligned}$$

Трёхмерная задача сведена к трем одномерным:

$$\mathcal{H}_i \left(q_i, \frac{\partial \mathcal{S}_i}{\partial q_i} \right) = E_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad E_1 + E_2 + E_3 = E.$$

В более общем случае, если q_1 и $\partial \mathcal{S} / \partial q_1$, входят в уравнение Гамильтона-Якоби в виде некоторой комбинации $\Phi(q_1, \partial \mathcal{S} / \partial q_1)$, не содержащей других переменных q_j , $\partial \mathcal{S} / \partial q_j$, $j \neq 1$, то уравнение Гамильтона-Якоби приводится к виду

$$\mathcal{F} \left(\Phi \left(q_1, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_1} \right), q_j, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right) = 0,$$

допускающему разделение переменных

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1(q_1) + \mathcal{S}'(q_j, t).$$

4.9.6 Из истории теории Гамильтона-Якоби

Гамильтон был астрономом и изучал ход лучей в оптических инструментах. Ему пришлось иметь дело с теорией *геометрической оптики* (эмиссионной оптики Ньютона), в которой путь частиц света в однородной или в более общем случае неоднородной среде описывался при помощи *обыкновенного дифференциального уравнения* (в полных производных). Гамильтон попытался распространить этот метод на *волновую оптику*, как раз в то время зарождавшуюся, в которой оптические явления описываются *дифференциальным уравнением в частных производных*.

Связывающее звено между этими двумя точками зрения он нашёл в понятии волновой поверхности. В волновой оптике последняя

определяется как поверхность равных фаз световых колебаний; в лучевой оптике она определяется как поверхность, ортогональная к траектории частиц света. В каждой оптической задаче получается семейство волновых поверхностей. Аналитическое представление этого семейства даётся формулой $\mathcal{S} = \text{const}$, где постоянная является параметром семейства, а \mathcal{S} есть функция координат q_1, \dots, q_f . Для механики частицы света $f = 3$ и пространство является евклидовым. В наиболее общем случае задач механики пространство будет f -мерным и неевклидовым.

Как известно, направляющие косинусы нормали к поверхности $\mathcal{S} = \text{const}$ определяются отношениями между производными $\partial\mathcal{S}/\partial q_k$. Направление импульса частицы света совпадает с направлением этой нормали, так что величина p_k пропорциональна $\partial\mathcal{S}/\partial q_k$. Тем самым, мы полностью выяснили геометрический смысл формул $p_k = \partial\mathcal{S}/\partial q_k$ и вместе с тем убедились, что уравнение волновой поверхности $\mathcal{S} = \text{const}$ аналогично требованию, чтобы гамильтоновская функция действия была постоянной.

Якоби систематизировал и развил аналитическую (механическую) сторону теории Гамильтона; оптическая сторона этой теории была забыта, а затем снова возрождена Брунсом в его теории эйконала. Эйконалом является световое время, которое требуется лучу, чтобы из данной начальной точки достигнуть переменной конечной точки. Таким образом, эйконал тождествен фазе в волновой оптике, т.е. функции действия \mathcal{S} . Одновременно с этим принцип Гамильтона, переходит в принцип Ферма о наикратчайшем времени.

Эта взаимосвязь между лучевой оптикой и обычной механикой, которую мы здесь кратко обрисовали, была решающей для открытия волновой механики; как лучевая оптика является лишь предельным случаем (длина волны мала по сравнению с объектом, вызывающим изменение направления излучения) и в общем случае должна быть заменена волновой оптикой, так и обычная механика, согласно Шрёдингеру, в атомных явлениях должна быть заменена волновой механикой¹¹.

Уравнение Гамильтона-Якоби сыграло важную роль в становлении *квантовой механики*, описывающей процессы, происходящие в атомных масштабах, где обычная (классическая) механика неприменима. В 1926 г. в «Annalen der Physik» появилась статья австрийского физика Э.Шрёдингера под названием «Quantizierung als Eigenwertproblem», где автор вводит в теоретическую физику новое уравнение,

¹¹Из книги А. Зоммерфельда «Строение атома и спектры», т. I. - М.: ГИТТЛ, 1956. - С.101.

носящее ныне его имя. Вот фрагмент этой статьи в переводе с немецкого на русский.

«В этом сообщении я собираюсь показать на простейшем примере нерелятивистского свободного атома водорода, что обычные правила квантования могут быть заменены другими положениями, в которых уже не вводится каких-либо «целых чисел». Целочисленность получается при этом единственным образом сама по себе подобно тому, как сама по себе получается целочисленность числа узлов при рассмотрении колеблющейся струны. Это новое представление может быть обобщено, и я думаю, что оно тесно связано с истинной природой квантования.

Обычная форма квантовых правил связана с уравнением в частных производных Гамильтона

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q}\right) = E.$$

Ищется решение этого уравнения, представляющее собой сумму функций, каждая из которых зависит только от одной из независимых переменных q .

Введём теперь вместо \mathcal{S} новую неизвестную функцию ψ так, чтобы эта функция ψ имела вид произведения функций, зависящих только от одной координаты. Для этого положим

$$S = K \ln \psi.$$

Постоянную K приходится ввести из соображений размерности, согласно которым она должна обладать размерностью действия. Таким образом, получаем соотношение

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{K}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = E. \quad (4.9.14)$$

Мы не будем искать решение уравнения (4.9.14), а поставим следующую задачу. При пренебрежении изменениями массы уравнение (4.9.14) всегда можно свести, по крайней мере, в случае одноэлектронной проблемы, к следующему виду: квадратичная форма от функции ψ и её первых производных равна нулю.

Ищем такую действительную во всём конфигурационном пространстве однозначную, ограниченную и всюду дважды дифференцируемую функцию, которая даёт экстремальное значение интегралу от упомянутой квадратичной формы, распространённому по всему конфигурационному пространству. Эта вариационная проблема и заменяет у нас квантовые условия.

Возьмём сначала H в виде функции Гамильтона Кеплеровой проблемы $\langle \dots \rangle$. Поскольку выбор системы координат является несущественным при установлении вариационных уравнений, воспользуемся прямоугольными декартовыми координатами. Тогда уравнение (4.9.14) будет записываться в нашем случае (e, m – заряд и



Эрвин Рудольф Йозеф Александр Шрёдингер (1887 – 1961) – австрийский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1933).

масса электрона) следующим образом:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{K^2} \left(E + \frac{e^2}{r}\right) \psi^2 = 0,$$

и наша вариационная проблема примет вид:

$$\delta J = \delta \int \int \int dx dy dz \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{K^2} \left(E + \frac{e^2}{r}\right) \psi^2 \right] = 0.$$

Интеграл берётся здесь по всему пространству. Обычным способом отсюда получаем

$$\frac{1}{2} \delta J = \int df \delta\psi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \int \int \int dx dy dz \left[\Delta\psi + \frac{2m}{K^2} \left(E + \frac{e^2}{r^2}\right) \psi \right] = 0.$$

Следовательно, должно быть, во-первых, справедливо уравнение

$$\Delta\psi + \frac{2m}{K^2} \left(E + \frac{e^2}{r^2}\right) \psi = 0, \quad (4.9.15)$$

и, во-вторых, должен равняться нулю распространённый по всей бесконечно удалённой замкнутой поверхности интеграл $\int df \delta\psi \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$ ¹².

При $K = \hbar$ уравнение (4.9.15) и становится *стационарным уравнением Шрёдингера*. Вывод нестационарного уравнения Шрёдингера из полного уравнения Гамильтона-Якоби не более сложен, по крайней мере, для той же одночастичной задачи

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} = - \left[\frac{(\nabla\mathcal{S})^2}{2m} + U \right].$$

При этом можно заменить физически малоочевидное условие экстремальности условием

$$\operatorname{div}(\Psi\nabla\Psi) = 0, \quad (4.9.16)$$

которое на основании тождества

$$\operatorname{div}(A\vec{B}) = (\nabla A)\vec{B} + A\operatorname{div}\vec{B}$$

преобразуется к виду

$$(\nabla\Psi)^2 + \Psi\nabla^2\Psi = 0.$$

Результатом такого преобразования является уравнение

$$-K \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{K^2}{2m} \nabla^2\Psi + U\Psi.$$

¹²Эрвин Шрёдингер. Избранные труды по квантовой механике. - М.: Наука, 1976. - С. 10.

Это ещё прообраз искомого уравнения. «Настоящее» нестационарное уравнение Шрёдингера получается, если предусмотреть возможность комплексного характера решения. При этом следует положить $K = -i\hbar$, а условие (4.9.16) заменить его комплексным обобщением

$$\operatorname{div}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = 0. \quad (4.9.17)$$

Тогда мы и приходим к искомой форме уравнения Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi.$$

Волновая функция в квантовой механике подобно потенциалам в механике и электродинамике играет служебную роль. Квадрат её модуля $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ выражает плотность распределения вероятности пребывания частицы в точке \vec{r} в момент t , а

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)$$

– вектор плотности тока вероятности, умножение которого на алгебраический заряд электрона даёт вектор плотности электрического тока в одноэлектронном атоме. В стационарном состоянии атома (имеющем место в природе) дивергенция этого вектора должна быть равна нулю, что и отражает теперь модифицированное условие (4.9.17), тогда как классическая физика не в состоянии объяснить стационарное (то есть, безызлучательное) движение заряженных частиц в ограниченном объёме. В этом и состоит конфликт между классической и квантовой механиками, заставляющий нас при переходе к атомным размерам прибегать к квантовой механике.

4.9.7 Упражнения

1. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и закон движения свободной частицы.
2. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для тела, движущегося по гладкой наклонной плоскости.
3. Движение заряженной частицы в поле электрического диполя характеризуется функцией Лагранжа $\mathcal{L} = (m/2)(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - (ep/r^2) \cos \theta$. Вывести для этой задачи уравнение Гамильтона-Якоби и найти его полный интеграл.
4. Произвести разделение переменных в задаче о трёхмерном анизотропном осцилляторе.

4.10 Элементы классической теории поля

4.10.1 Лагранжиан упругой среды

В этом разделе мы покажем, как трансформируются основные понятия аналитической механики при переходе от систем с конечным числом степеней свободы к системам с бесконечным числом степеней свободы.

Начнём с простейшего объекта механики сплошной среды – одномерного однородного упругого тела (стержня) длиной L . Пусть вначале он находится в ненапряжённом равновесном состоянии и на него не действуют никакие силы. Разобьём его мысленно на отрезки равной длины $\Delta x = a$, обозначим через x_i координаты центров этих элементов, полагая, что в этих точках сосредоточены массы элементов $m = \rho a$, а между этими точками действуют упругие силы (пружины) с жёсткостью $k = E/a$, где E – модуль Юнга. Обозначив далее через $q_i(t)$ отклонения этих центров от положения равновесия, а через $\dot{q}_i(t)$ – скорости отклонений, составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i [m\dot{q}_i^2 - k(q_{i+1} - q_i)^2] = \frac{1}{2} \sum_i \left[\frac{m}{a} \dot{q}_i^2 - ka \frac{(q_{i+1} - q_i)^2}{a^2} \right] a.$$

Вернёмся теперь к описанию стержня как сплошной среды, ведь поле смещений $q_i(t) \equiv \psi(x_i, t)$, $\dot{q}_i(t) \equiv \partial\psi(x_i, t)/\partial t$ и т.д. Функция Лагранжа при этом перейдёт в *функционал Лагранжа (лагранжиан)*

$$\mathcal{L} = \sum_i \left[\frac{m}{2a} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{ka}{2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta x_i \rightarrow \int_0^L \mathcal{L}' dx,$$

где

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}' \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{E}{2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2$$

– *плотность лагранжиана* одномерной упругой среды.

Обобщение на трёхмерную однородную упругую среду с постоянными во времени свойствами имеет вид:

$$\mathcal{L} = \int_V \mathcal{L}' dV, \quad \mathcal{L}' = \mathcal{L}' \left(\nabla\psi, \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{E}{2} (\nabla\psi)^2,$$

где $\psi = \psi(\vec{x}, t)$, а \mathcal{L}' – объёмная плотность лагранжиана.

В общем случае, когда свойства среды являются функциями координат и времени,

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(\psi(x_i, t), \psi_{,j}(x_i, t), \psi_{,t}(x_i, t), x_i, t),$$

где, как и ранее, x_i – компоненты вектора \vec{x} , $\psi_{,i} \equiv \partial\psi/\partial x_i$, $\psi_{,t} \equiv \partial\psi/\partial t$ и т.д.

4.10.2 Уравнения для плотности лагранжиана

Действие для сплошной среды принимает вид четырёхкратного интеграла от плотности лагранжиана

$$S = \int_a^b \mathcal{L} dt \int_a^b \int_V \mathcal{L}' dV dt,$$

а принцип наименьшего действия формулируется в виде

$$\delta S = \delta \int_a^b \mathcal{L} dt = \int_a^b \delta \mathcal{L} dt = 0 \quad (4.10.1)$$

с условиями $\delta\psi(x_i, a) = \delta\psi(x_i, b) = 0$ в начальный и конечный моменты времени и $\delta\psi(x'_i, t) = 0$, $x'_i \in \Gamma$ на границе среды Γ ¹³.

Вариация лагранжиана вычисляется обычным образом

$$\delta \mathcal{L} = \int_V \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi} \delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,j}} \delta\psi_{,j} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,t}} \delta\psi_{,t} \right\} dV.$$

Во втором слагаемом изменим порядок операций вариации и дифференцирования *по координатам* и выполним интегрирование по частям:

$$\delta \mathcal{L} = \int_V \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,j}} \right) \right] \delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,t}} \delta\psi_{,t} \right\} dV. \quad (4.10.2)$$

Подставим (4.10.2) в (4.10.1), изменим порядок интегрирования по времени и координатам в последнем слагаемом и выполним над ним ту же операцию по временной переменной. В результате получим:

$$\delta S = \int_a^b \int_V \left[\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,j}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,t}} \right) \right] \delta\psi dV dt = 0.$$

¹³Здесь и ниже символ δ обозначает вариацию следующей за ним физической величины.

Чтобы это равенство выполнялось при произвольной вариации $\delta\psi$, содержимое квадратных скобок должно быть равно нулю:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,t}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,j}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi} = 0.$$

Это и есть искомые уравнения движения упругой среды, обобщающие уравнения Лагранжа для системы с конечным числом степеней свободы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

на случай бесконечномерных систем.

4.10.3 Уравнения Лагранжа в функциональных производных

Уравнения движения сплошной среды можно представить в виде, более похожем на уравнение для системы частиц, если воспользоваться аппаратом функционального дифференцирования. Рассматривая лагранжиан как функционал независимых переменных – «координат» ψ и «скоростей» $\dot{\psi} \equiv \psi_{,t}$ среды,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi(\cdot), \dot{\psi}(\cdot)),$$

запишем его вариацию через функциональные производные:

$$\delta \mathcal{L} = \int_V \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \delta \psi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}} \delta \dot{\psi} \right\} dV.$$

Сопоставляя это выражение с формулой (4.10.2), видим, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,j}} \right) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi}$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,t}} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}}.$$

В этих обозначениях уравнения Лагранжа для сплошной среды примут вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} = 0, \quad (4.10.3)$$

почти не отличающийся от (4.2.1). Отметим, что уравнения эти записаны для *самого лагранжиана*, а не для его плотности.

4.10.4 Гамильтониан сплошной среды

Чтобы продолжить дальше распространение аналитического метода на динамику сплошных сред, вернёмся к дискретному представлению среды, разбив её на конечное число малых областей ΔV_k :

$$\mathcal{L} = \int_V \mathcal{L}' dV = \sum \Delta \mathcal{L}_k.$$

Обобщённый импульс, канонически сопряженный значению поля в n -м элементе,

$$p_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial \Delta \mathcal{L}_n}{\partial \dot{q}_n} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,t}} \right)_n \Delta V_n,$$

пропорционален его объёму, что позволяет ввести *плотность импульса*

$$\lim_{\Delta V_n \rightarrow 0} \frac{p_n}{\Delta V_n} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi_{,t}} = \frac{\bar{\delta} \mathcal{L}}{\bar{\delta} \psi} \equiv \pi(x_i, t).$$

Согласно (4.10.3),

$$\dot{\pi} \equiv \frac{\partial \pi}{\partial t} = \frac{\bar{\delta} \mathcal{L}}{\bar{\delta} \psi}.$$

Гамильтониан сплошной среды представляется в виде

$$\mathcal{H} = \sum p_k \dot{q}_k - \mathcal{L} = \sum \pi_k \dot{\psi} \Delta V_k - \mathcal{L} \mapsto \int_V \pi \dot{\psi} dV - \mathcal{L} = \int_V (\pi \dot{\psi} - \mathcal{L}') dV.$$

Отсюда плотность гамильтониана

$$\mathcal{H}' = \pi \dot{\psi} - \mathcal{L}'.$$

В частности, для упругого стержня с модулем упругости E

$$\mathcal{H}' = \frac{\pi^2}{\rho} - \frac{\rho}{2} \frac{\pi^2}{\rho^2} + \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 = \frac{\pi^2}{2\rho} + \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2.$$

Первое слагаемое здесь представляет плотность кинетической энергии, второе – плотность потенциальной (упругой) энергии

$$\frac{E}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 = \frac{E \varepsilon_{xx}^2}{2}.$$

4.10.5 Канонические уравнения

Вновь вернёмся к вариации лагранжиана, представив её теперь в виде:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \int_V \left(\frac{\bar{\delta}\mathcal{L}}{\bar{\delta}\psi} \delta\psi + \frac{\bar{\delta}\mathcal{L}}{\bar{\delta}\dot{\psi}} \delta\dot{\psi} \right) dV = \\ &= \int_V (\dot{\pi}\delta\psi + \pi\delta\dot{\psi}) dV = \int_V [\delta(\pi\dot{\psi}) + \dot{\pi}\delta\psi - \dot{\psi}\delta\pi] dV = \\ &= \int_V [\delta(\pi\dot{\psi} - \mathcal{L}') + \delta\mathcal{L}' + \dot{\pi}\delta\psi - \dot{\psi}\delta\pi] dV = \delta\mathcal{H} + \delta\mathcal{L} + \int_V (\dot{\pi}\delta\psi - \dot{\psi}\delta\pi) dV. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\delta\mathcal{H} = - \int_V (\dot{\pi}\delta\psi - \dot{\psi}\delta\pi) dV.$$

Сравнивая это выражение с вариацией, записанной через функциональные производные,

$$\delta\mathcal{H} = \int_V \left\{ \frac{\bar{\delta}\mathcal{H}}{\bar{\delta}\psi} \delta\psi + \frac{\bar{\delta}\mathcal{H}}{\bar{\delta}\dot{\psi}} \delta\dot{\psi} \right\} dV,$$

получим канонические уравнения в функциональных производных:

$$\dot{\psi} = \frac{\bar{\delta}\mathcal{H}}{\bar{\delta}\pi}, \quad \dot{\pi} = - \frac{\bar{\delta}\mathcal{H}}{\bar{\delta}\psi}.$$

Заметим, что точками обозначены здесь *частные производные* по времени.

Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\psi(\cdot, t), \pi(\cdot, t))$ – некоторый функционал от ψ и π как функций координат, не зависящий явно от времени. Его производная по времени запишется в виде:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \int_V \left(\frac{\bar{\delta}\mathcal{F}}{\bar{\delta}\psi} \dot{\psi} + \frac{\bar{\delta}\mathcal{F}}{\bar{\delta}\pi} \dot{\pi} \right) dV.$$

Используя канонические уравнения, представим производную функционала \mathcal{F} в виде

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \int_V \left(\frac{\bar{\delta}\mathcal{F}}{\bar{\delta}\psi} \frac{\bar{\delta}\mathcal{H}}{\bar{\delta}\pi} - \frac{\bar{\delta}\mathcal{F}}{\bar{\delta}\pi} \frac{\bar{\delta}\mathcal{H}}{\bar{\delta}\psi} \right) dV = \{\mathcal{F}, \mathcal{H}\},$$

где введены *функциональные скобки Пуассона*:

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int_V \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \pi} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \pi} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \psi} \right) dV.$$

В частности,

$$\begin{aligned} \{\psi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)\} &= \int \frac{\delta \psi(\vec{x}, t)}{\delta \psi(\vec{x}'', t)} \frac{\delta \pi(\vec{x}', t)}{\delta \pi(\vec{x}'', t)} dV'' = \\ &= \int \delta(\vec{x} - \vec{x}'') \delta(\vec{x}' - \vec{x}'') dV'' = \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ \{\psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{x}', t)\} &= \{\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)\} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотренная в этой лекции математическая модель, называемая *классическим полем*, служит основой для построения *квантовой теории поля*, играющей важнейшую роль в современной теоретической физике.

4.10.6 О функциональных производных

В соответствии с определением функционала выражение «на множестве функций $\{f(x)\}$, $x \in X$, задан функционал $J(f(\cdot))$ » означает, что каждой функции $f(x)$ из этого множества поставлено в соответствие вещественное (в общем случае – комплексное) число, которое мы будем обозначать тем же символом J . Функция $f(x)$ является аргументом функционала, запись

$$J = J(f(\cdot))$$

означает, что функционал в общем случае зависит от функции f «в целом», а не от ее значения в одной точке (в последнем случае это была бы просто композиция функций или сложная функция $J(f(x))$). Замена аргумента $f(x) \rightarrow f(x) + \delta f(x)$ вызывает соответствующее изменение (вариацию) функционала $J(f(\cdot)) \rightarrow J(f(\cdot) + \delta f(\cdot))$. Для анализа и вычислений таких вариаций развит аппарат функционального (синоним – вариационного) дифференцирования.

Вывод основных формул функционального дифференцирования удобно осуществить в пространстве простых (т.е. кусочно-постоянных) функций. Каждая из них задается разбиением $\{\Delta_i\}$ области определения X и постоянным значением функции f_i на каждом из элементов

разбиения. С помощью единичной (индикаторной или характеристической) функции

$$1(x; \Delta x_i) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta x_i; \\ 0, & x \notin \Delta x_i, \end{cases}$$

простую функцию можно представить в виде¹⁴

$$f(x) = \sum_i f_i 1(x; \Delta x_i).$$

Множество «реальных» функций, описывающих физические процессы, можно получить из простых путем предельного перехода, связанного с измельчением разбиения. Мы, физики, постоянно пользуемся моделью простой функции (правда, не называя самого термина), она присутствует в любой фразе типа: «пусть $\rho(\mathbf{r})$ – плотность вещества, тогда $\rho(\mathbf{r})dV$ – масса вещества в объеме dV ».

Две простые функции, заданные на разных разбиениях $\{\Delta x_i\}$, могут очевидным образом приведены к одному и тому же общему разбиению. Считая, что это сделано, запишем вариацию функционала в виде

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(f(\cdot) - \delta f(\cdot)) - J(f(\cdot)) = \\ &= J(f_1 + \delta f_1, f_2 + \delta f_2, \dots) - J(f_1, f_2, \dots). \end{aligned} \quad (4.10.4)$$

Таким образом, взяв за основу простые функции, мы перешли к функциям нескольких переменных. Разлагая (4.10.4) в ряд Тейлора около значений f_1, f_2, \dots , получим

$$\Delta J = \sum_i \left[\frac{\partial J}{\partial f_i} \right] \delta f_i + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \dots i_k} [\partial^k J / (\partial f_{i_1} \partial f_{i_2} \dots \partial f_{i_k})] \delta f_{i_1} \dots \delta f_{i_k}. \quad (4.10.5)$$

По определению интеграла от простой функции, первый член этого разложения (вариация первого порядка) представляется в виде

$$\delta^{(1)} J = \sum_i \left[\frac{\partial J}{\partial f_i} \right] \delta f_i = \int \left[\frac{\partial J}{\partial f_i \Delta x_i} \right] \delta f(x) dx.$$

Для произвольной функции переход к пределу дает

$$\delta^{(1)} J = \int \frac{\delta J}{\delta f(x)} \delta f(x) dx,$$

¹⁴Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 436 с.

где

$$\frac{\delta J}{\delta f(x)dx} \equiv \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\partial J}{\partial f_i \Delta x_i} \quad (4.10.6)$$

– первая функциональная (вариационная) производная от функционала $J(f(\cdot))$ по функции $f(\cdot)$ в точке x . Аналогично определяются высшие функциональные производные, в результате чего вместо (4.10.5) имеем функциональный ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \Delta J = & \int [\delta J / \delta f(x) dx] f(x) dx + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \int \dots \int [\delta^k J / \delta f(x_1) dx_1 \dots \delta f(x_k) dx_k] \times \\ & \times \delta f(x_1) \dots \delta f(x_k) dx_1 \dots dx_k. \end{aligned} \quad (4.10.7)$$

Иногда это разложение удобно представить в виде

$$J(f(\cdot) + \delta f(\cdot)) = \exp \left\{ \int dx \delta f(x) \frac{\delta}{\delta f(x) dx} \right\} J(f(\cdot)),$$

где действие операторной экспоненты понимается в смысле разложения

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \int dx \delta f(x) \frac{\delta}{\delta f(x) dx} \right\} &= 1 + \int dx \delta f(x) \frac{\delta}{\delta f(x) dx} + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\int dx \delta f(x) \frac{\delta}{\delta f(x) dx} \right]^2 + \dots = 1 + \int dx \delta f(x) \frac{\delta}{\delta f(x) dx} + \\ &+ \frac{1}{2!} \iint dx_1 dx_2 \delta f(x_1) \delta f(x_2) \frac{\delta^2}{\delta f(x_1) \delta f(x_2) dx_1 dx_2} + \dots \end{aligned}$$

Обычно вместо (4.10.6) пользуются обозначением $\delta J / \delta f(x)$, жертвуя наглядностью и даже размерностью ради сокращения записи, подобно обозначению Н. Бурбаки для интеграла: $\int f(x)$ вместо обычного $\int f(x) dx$. Нам же представляется важным сохранить в обозначении функциональной производной символ dx – хотя бы из тех же соображений, из которых сохраняется он в обозначении обычной производной df/dx и интеграла от функции. Там же, где это станет действительно причинять неудобства, мы прибегнем к более компактным обозначениям

$$\frac{\delta^n J(f(\cdot))}{\delta f(x_1) dx_1 \dots \delta f(x_n) dx_n} = D_f^n(x_1, \dots, x_n) J(f(\cdot)) \equiv J^{(n)}(x_1, \dots, x_n; f(\cdot)).$$

Рассмотрим простейший – линейный – функционал вида

$$J(f(\cdot)) = \int h(x') f(x') dx'. \quad (4.10.8)$$

Взяв в качестве $f(x)$ и $h(x)$ простые функции, получим

$$J(f(\cdot)) = \sum_i f_i h_i \Delta x_i,$$

$$\frac{\partial J}{\partial f_i \Delta x_i} = h_i,$$

откуда

$$\frac{\partial J}{\partial f(x) dx} = \frac{\delta}{\delta f(x) dx} \int h(x') f(x') dx' = h(x). \quad (4.10.9)$$

следовательно, функциональное дифференцирование интеграла (4.10.8) по $f(x)$ в точке x в некоторой заданной точке x_0 может рассматриваться также как функционал от f , для этого достаточно выбрать $h(x)$ в виде δ -функции:

$$f(x_0) = \int \delta(x' - x_0) f(x') dx'.$$

Согласно (4.10.9) при этом получим удобную для практических применений формулу

$$\frac{\delta f(x_0)}{\delta f(x) dx} = \delta(x - x_0).$$

Пусть $y = J(f(\cdot))$ – функционал, а $z = \varphi(y)$ – некоторая (дифференцируемая) функция. Пользуясь приведенной выше схемой легко показать, что функциональная производная функции от функционала строится по тому же правилу, что и обычная производная сложной функции («функции от функции»):

$$\frac{\delta \varphi(J(f(\cdot)))}{\delta f(x) dx} = \frac{d\varphi(J(f))}{dJ} \frac{\delta J(f(\cdot))}{f(x) dx}.$$

Пусть функционал J зависит еще и от аргумента x как параметра:

$$J = J(x; f(\cdot)).$$

При заданной $f(x)$ это функция x , от которой в свою очередь может быть взят функционал:

$$K(J(; f(\cdot))) = I(f(\cdot)).$$

Пользуясь для f и J простыми функциями, приходим к формуле

$$\frac{\delta K(J(; f(\cdot)))}{\delta f(x) dx} = \int \frac{\delta K(J(; f(\cdot)))}{\delta J(x'; f(\cdot)) dx'} \frac{\delta J(x'; f(\cdot))}{\delta f(x) dx} dx'$$

для функциональной производной «функционала от функционала». Пусть

$$J(f(\cdot)) = J_1(f(\cdot))J_2(f(\cdot)).$$

В этом случае

$$\frac{\delta J}{\delta f(x)dx} = J_1 \frac{\delta J_2}{\delta f(x)dx} + J_2 \frac{\delta J_1}{\delta f(x)dx}$$

в полной аналогии с обычным дифференцированием.



4.10.7 Упражнения

1. Задан функционал $\Phi_0(\psi(\cdot)) = \psi(x_0)$. Найти функциональную производную $\delta\Phi_0(\psi(\cdot))/\delta x$.
2. Найти функциональную производную функционала $\Phi_1(\psi(\cdot)) = \int_a^b \psi(x)dx$.
3. Вычислить функциональную производную

$$\frac{\delta}{\delta\psi(x)} e^{-\int_a^b \psi(x)dx}.$$

4. Найти вторую функциональную производную $\delta^2\Phi(\psi(\cdot))/\delta x_1 \delta x_2$ билинейного функционала $\Phi(\psi(\cdot)) = \int_a^b \int_a^b e^{-c(x-x')} \psi(x)\psi(x')dx dx'$.



Глава 5

Релятивистская механика



5.1 Пространство и время

5.1.1 Принцип относительности

Всё, что рассматривалось выше, относится к движению частиц со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света c . Если это условие не выполняется (в ускорителях, космических лучах), необходимо применять *релятивистскую динамику*, основанную на *теории относительности*, созданной трудами блестящей плеяды физиков и математиков начала 20-го века – Лоренца, Пуанкаре, Минковского и, конечно, Альберта Эйнштейна, главного её творца, с именем которого и ассоциируется ныне теория относительности.

Связанная с пересмотром фундаментальных физических понятий *пространства и времени*, теория относительности длительное время была предметом научных и околонучных дискуссий, отголоски которых можно услышать и в настоящее время. Дискуссии эти сыграли важную роль: написано много хороших книг с популярным изложением теории относительности, содержащих объяснение основных релятивистских эффектов – сокращение длины, замедление времени, возрастание массы с увеличением скорости частицы – с использованием элементарных математических средств. Экспериментальные и логические основания теории относительности излагаются в стандартных университетских курсах общей физики. Сама же теория давно уже стала технологическим инструментом, используемым при проектировании ядерных реакторов, ускорителей заряженных частиц, космических кораблей, на поверхность которых обрушиваются потоки частиц

высоких энергий, и т.д.

Мы ограничимся здесь изложением лишь самого необходимого для понимания релятивистских уравнений движения и их лагранжевой и гамильтоновой модификаций.

Введя понятие инерциальной системы отсчета (ИСО) мы сразу же отметили, что таких систем – бесконечное множество. Формулируя далее законы движения и выводя многочисленные следствия из них, мы не конкретизировали ИСО, подразумевая, что все они равноправны, и в любой из них закон движения

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

имеет один и тот же вид. В этом, впрочем, легко убедиться. Пусть K' – система координат, в момент времени $t = 0$ совпадавшая с ИСО K и поступательно движущаяся относительно неё с постоянной скоростью \vec{V} . Координаты одной и той же материальной точки в этих системах связаны соотношением

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t,$$

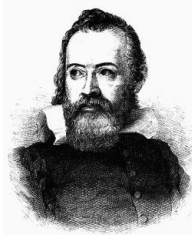
где время t считается одним и тем же в обеих системах. Это преобразование называют сейчас *преобразованием Галилея*. Дифференцируя его по времени,

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V},$$

получим *закон сложения скоростей Галилея*. Поскольку $\vec{V} = \text{const}$, дифференцирование его по времени дает

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt}.$$

Отсюда следует, что, в отличие от скорости частицы, её *ускорение*, а стало быть, и действующая на неё *сила*, *одни и те же во всех ИСО*.



Галилео Галилей (1564 – 1642) – итальянский механик, астроном, философ и математик, основоположник экспериментальной физики, мужественно защищавший перед церковниками гелиоцентрическую систему Коперника и, в более широком смысле, право здравого смысла перед господствующим в те времена религиозным суеверием.

Этот факт формулируется как *принцип относительности Галилея*: **законы механики имеют один и тот же вид во всех ИСО.**

Представляется вполне естественным распространить этот принцип на все физические законы: **законы физики (механики, электродинамики и т.д.) имеют один и тот же вид во всех ИСО.** Это утверждение называется *принципом относительности Эйнштейна* и образует *первый постулат теории относительности.*

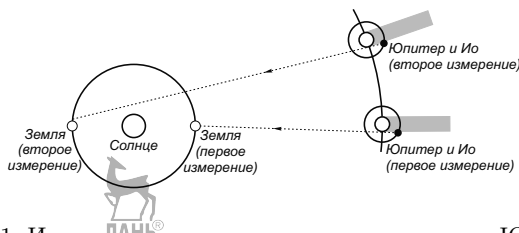


Рис. 5.1. Измерение скорости света по положению Юпитера

Прецизионные оптические эксперименты (схема одного из них показана на рис. 5.1)¹ показали однако, что скорость света c не подчиняется Галилееву закону сложения скоростей, а остается практически одной и той же в разных системах ИСО (здесь и ниже имеется в виду скорость света в вакууме, по современным данным она равна $2,997925 \cdot 10^8$ м/с). Этот факт послужил основой *второго постулата теории относительности*: **скорость света одна и та же во всех ИСО**, иначе говоря, она не зависит от скорости движения источника. Мы называем это утверждение *постулатом*, а не экспериментальным фактом, потому что физическая величина, выражаемая вещественным числом, не может быть измерена *абсолютно точно*, и если мы видим, что значения двух физических величин совпадают в пределах точности, и это наблюдается при различных уровнях точности, мы можем только предположить, *постулировать*, что совпадают и сами сравниваемые физические величины. Это относится, впрочем, ко всем физическим законам, выражаемым уравнениями для *вещественных* (в смысле не целых) величин.

5.1.2 Преобразования Лоренца

Примирить оба постулата теории относительности удаётся путем обобщения преобразований Галилея на случай больших скоростей.

¹Составьте пояснение к этому эксперименту, обратив особое внимание на роль спутника Юпитера Ио.

Пусть K – неподвижная (относительно наблюдателя) инерциальная система отсчёта, любое мгновенное *событие* в которой (вспышка света, взрыв петарды) характеризуется четвёркой переменных x, y, z, t , а K' – другая инерциальная система, в момент $t = 0$ совпадавшая с первой и поступательно движущаяся относительно неё с постоянной скоростью V , направленной вдоль совпадающих осей OX и $O'X'$. То же событие в системе K' представляется переменными x', y', z', t' . Предполагается, что часы в обеих системах синхронизованы и *одинаковы* в том смысле, что если K' неподвижна относительно K , то $t' = t$. Взаимно-однозначное соответствие между пространственно-временными координатами одного и того же события в разных ИСО,

$$(x, y, z, t) \Leftrightarrow (x', y', z', t'),$$

обеспечивается линейным преобразованием.

Будем считать, что координаты эти относятся к частице, движущейся по совпадающим осям OX и $O'X'$, так что $y = y'$ и $z = z'$. Оставшиеся переменные связаны соотношениями

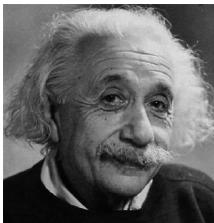
$$x = Ax' + Bt', \quad t = Cx' + Dt', \quad (5.1.1)$$

где $A = A(V)$, $B = B(V)$, $C = C(V)$ и $D = D(V)$ – постоянные, зависящие только от скорости V относительного движения рассматриваемых систем отсчёта. Преобразование взято однородным, поскольку в нулевой (по часам обеих систем) момент времени ИСО совпадали. По этой же причине

$$A(0) = 1, \quad B(0) = 0, \quad C(0) = 0, \quad D(0) = 1.$$

Возьмём дифференциалы координат и времени, соответствующие элементарному перемещению частицы,

$$dx = Adx' + Bdt', \quad dt = Cdx' + Ddt',$$



Альберт Эйнштейн (1879 – 1955) – великий физик-теоретик, создатель специальной и общей теории относительности, квантовой теории фотоэффекта, квантовой теории теплоёмкости, квантовой статистики Бозе-Эйнштейна, теории броуновского движения, теории индуцированного излучения, теории рассеяния света на термодинамических флуктуациях в среде. Лауреат Нобелевской премии по физике.

и разделим первый из них на второй. Учтывая, что

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

и

$$\frac{dx'}{dt'} = v'_x,$$

получим:

$$v_x = \frac{Av'_x + B}{Cv'_x + D}. \quad (5.1.2)$$

Если частица неподвижна в K' и находится в начале координат этой системы, то $v'_1 = 0$ и

$$v_x \equiv V = \frac{B}{D}.$$

Если же она неподвижна в системе K и находится в начале её координат, то $v_x = 0$ и

$$v'_x \equiv -V = -\frac{B}{A}.$$

Таким образом, $A = D$ и уравнение (5.1.2) принимает вид

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x C/A}. \quad (5.1.3)$$

Если принять, что время в обеих системах отсчёта «течёт одинаково» (в том смысле, что $t = t'$), то $A = 1$, $C = 0$ и формула (5.1.3) превращается в закон сложения скоростей Галилея, а (5.1.1) – в преобразования Галилея. Вместо этого мы потребуем теперь выполнение второго постулата теории относительности – если квант света (фотон) движется вдоль оси OX , то его скорость в *обеих системах* равна одному и тому же числу c :

$$c = \frac{c + V}{1 + cC/A}.$$



Хендрик Антон Лоренц (1853–1928) – нидерландский физик-теоретик, Работал в области электродинамики, термодинамики, статистической механики, оптики, теории излучения, теории металлов, атомной физики. лауреат Нобелевской премии по физике.

В результате получаем

$$C/A = V/c^2, \quad (5.1.4)$$

и

$$x = A(x' + Vt'), \quad t = A(t' + (V/c^2)x'). \quad (5.1.5)$$

Осталось определить коэффициент A . Учитывая равноправие обеих систем, можно записать

$$x' = A(x - Vt), \quad t' = A(t - (V/c^2)x).$$

Разрешая эту систему относительно нештрихованной координаты,

$$x = \frac{x' + Vt'}{A(1 - V^2/c^2)}$$

и сравнивая результат с первым уравнением системы (5.1.5), находим последний коэффициент A . В итоге имеем:

$$A(V) = D(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad B(V) = \frac{V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$C(V) = \frac{V}{c^2 \sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Подставляя эти выражения в (5.1.1) и вводя стандартные обозначения

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

представим их в виде

$$x = \gamma[x' + \beta ct'], \quad t = \gamma[t' + (\beta/c)x'].$$

Несложные рассуждения приводят к тому, что и для частицы, находящейся не на оси OX , выполняются соотношения $y = y'$, $z = z'$, так что полная система уравнений для данного частного случая (относительного движения ИСО вдоль одной из координатных осей) имеет вид

$$x = \gamma[x' + \beta ct'], \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma[t' + (\beta/c)x']. \quad (5.1.6)$$

Эти формулы определяют *преобразования Лоренца*, оставляющие скорость света одной и той же во всех ИСО. В силу равноправия обеих систем формулы *обратных преобразований Лоренца* отличаются от

(5.1.5) только знаком перед скоростью относительного движения V (то есть, перед β):

$$x' = \gamma[x - \beta ct], \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma[t - (\beta/c)x]. \quad (5.1.7)$$

Отметим, что при $V \ll c$ формулы (5.1.6) и (5.1.7) переходят в соответствующие формулы преобразования Галилея. А при $V \geq c$ они теряют смысл: скорость относительного движения инерциальных систем не может быть равной или большей скорости света в вакууме.

5.1.3 Релятивистское сокращение длины и замедление времени

Положим на ось $O'X'$ школьную линейку, концы которой обозначим буквами a и b . Пусть левый конец находится в начале координат, $x'_a = 0$, а правый – в точке $x'_b = l_0$. Линейка неподвижна в K' , координаты её концов не меняются. В системе K линейка движется, координаты её концов являются функциями времени t , определяемыми преобразованиями Лоренца:

$$0 = \gamma[x_a - \beta ct], \quad l_0 = \gamma[x_b - \beta ct].$$

Отметим, что мы взяли формулу (5.1.7), а не (5.1.6), чтобы оперировать с часами системы K , в которой производится измерение длины линейки. В формулы для обоих концов входит одно и то же t : координаты обоих концов линейки в неподвижной системе измеряются одновременно (по её часам). Вычитая из второго уравнения первое, видим, что длина той же самой линейки в системе K $l \equiv x_b - x_a$ не равна её длине l_0 в системе K' , а связана с ней соотношением

$$l = l_0/\gamma = l_0\sqrt{1 - \beta^2}.$$

Длина одной и той же линейки оказалась *относительной величиной*: её значение зависит от того, в какой системе мы производим измерение. Наибольшее значение она имеет в системе, где линейка покоится, это значение l_0 называют *собственной длиной*. В любой другой системе, движущейся в положительном или отрицательном направлении оси $O'X'$, линейка выглядит короче (имеется в виду, что измерение её длины даёт меньшее число). С самой же линейкой при этом ничего не происходит. Эффект этот, чисто кинематический, называют *релятивистским сокращением длины (сокращением Лоренца-Фитцджеральда)*.

То, что длина линейки в K' максимальна, не связано с какими-то особыми свойствами этой системы, а лишь с тем, что в ней линейка неподвижна. Перенесём эту линейку из системы K' в систему K и расположим её в ней точно так же:

$$x_a = 0, \quad x_b = l_0.$$

Наблюдатель в системе K' в момент времени t' увидит координаты концов линейки в точках x'_a и x'_b , определяемых уравнениями

$$0 = \gamma[x'_a + \beta ct'], \quad l_0 = \gamma[x'_b + \beta ct'].$$

Вычитая из второго уравнения первое, он найдет, что

$$l_0 = \gamma l = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

и придёт к выводу, что длина той же самой линейки теперь меньше, чем l_0 :

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

И это правильно: линейка теперь движется относительно наблюдателя, находящегося в системе K' .

Важно также обратить внимание на то, что длина линейки, ориентированной перпендикулярно направлению движения системы K' , *одна и та же в обеих системах*, поскольку из преобразований Лоренца следует, что

$$\Delta y = \Delta y', \quad \Delta z = \Delta z'.$$

Представим теперь мысленный опыт: возьмём большое число N линеек собственной длины l_0 и скрепим их друг с другом так, чтобы образовалась окружность длиной Nl_0 и радиусом $R = Nl_0/2\pi$. К каждой точке соединения прикрепим стержень, направленный по радиусу окружности и другим концом прикрепленный к валу, на котором всё это устройство – колесо – будет вращаться. При вращении с линейной скоростью, близкой к скорости света (эксперимент-то мысленный) длина окружности должна уменьшиться, а радиальные стержни сохранить свою длину. Колесо должно сломаться. Однако, для наблюдателя в системе, связанной с любой из линеек, ничего не происходит, нет никаких причин для аварии. Это – простейший пример из множества парадоксов, придуманных, чтобы поставить в тупик приверженцев теории относительности. В данном случае разгадка тривиальна: преобразования Лоренца относятся к инерциальным системам отсчёта, вращающаяся же по кругу линейка не принадлежит такой системе.

Пусть теперь в начальный момент времени, когда обе координатные системы совмещены и часы синхронизованы, $t = t' = 0$, в начале координат происходит какое-то событие (взрыв петарды, вспышка света) нулевой длительности. Назовём его событием a и пометим этим индексом его пространственно-временные координаты в обеих ИСО:

$$x_a = 0, \quad t_a = 0, \quad x'_a = 0, \quad t'_a = 0.$$

Спустя некоторое время $t' = \tau_0$ по часам движущейся системы K' в её начале O' происходит второе событие b . Его координаты в системе K'

$$x'_b = 0, \quad t'_b = \tau_0,$$

а в системе K , согласно (5.1.5),

$$x_b = \gamma\beta c\tau_0, \quad t_b = \gamma\tau_0.$$

Подставляя $\gamma\tau_0$, определяемое вторым уравнением в первое, получаем очевидный закон движения точки O' относительно K : $x_b = Vt_b$. Однако само по себе второе соотношение менее очевидно. Величина $t_b = t_b - 0$ есть длительность промежутка времени τ между рассматриваемыми событиями в неподвижной системе отсчёта K , и длительность эта не совпадает с длительностью τ_0 этого же самого промежутка в движущейся системе K' , а связана с ней соотношением

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Сопоставляя показания предварительно синхронизованных часов (в процессе синхронизации они должны быть неподвижны относительно друг друга), неподвижный наблюдатель констатирует, что $\tau_0 = \tau\sqrt{1 - \beta^2}$ — *движущиеся часы отстают*. Этот эффект называется *релятивистским замедлением времени*. Так же, как и в случае длин, эффект этот симметричен: для наблюдателя в системе K' отстают часы системы K .

Эффект замедления времени в результате движения со скоростью, близкой к скорости света, многократно обыгран в научно-фантастической литературе. Хорошо известен также так называемый *парадокс близнецов*: один из двух близнецов, скажем A , улетает от другого, скажем B , на космическом корабле с постоянной околосветовой скоростью, соответствующей, например, $\gamma = 10$, на большое расстояние, затем с такой же скоростью возвращается обратно. Если за это время B постарел на 50 лет, то A — всего на 5. Один из близнецов (A)

окажется моложе другого B на 45 лет! Парадокс однако в том, что в системе отсчёта близнеца A совершает космическое путешествие его брат B , и поэтому он должен оказаться моложе при встрече. Как и в предыдущем случае, решение парадокса базируется на неравноправности систем отсчёта: одна из них, та, которая изменяет направления своего движения, то есть движется с ускорением относительно инерциальной системы, уже не может считаться инерциальной. Преобразования Лоренца в этом случае просто неприменимы.

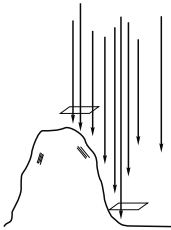


Рис. 5.2. Эффект замедления времени при измерении потоков мюонов, порождаемых космическими лучами в атмосфере

Яркой физической демонстрацией проявления рассматриваемых релятивистских эффектов является процесс прохождения мюонов (нестабильных заряженных частиц, рождаемых в верхних слоях атмосферы космическими лучами) через атмосферу Земли. Если их собственное среднее время жизни τ_0 умножить на их скорость, мы получим длину пути, много меньшую толщины атмосферы: мюоны не должны достичь поверхности Земли. Измерения же показывают, что поток мюонов на поверхности Земли существует. Разгадка в том, что в системе отсчёта, связанной с Землёй, среднее время жизни $\tau = \tau_0 \gamma$ больше собственного, и этого времени оказывается достаточно, чтобы достичь земной поверхности. К тому же результату придёт и «пилот», летящий на одном из мюонов: для него время жизни мюона будет τ_0 , но толщина атмосферы будет в γ раз меньше, и «пилот» успеет достичь поверхности Земли прежде, чем мюон распадётся. Следует, правда, оговориться, что процесс распада – случайный процесс, и говоря о времени жизни мюонов мы имеем в виду *среднее время*, так что путешествие на отдельном мюоне небезопасно даже в случае, если Вы собираетесь совершить на нём короткий полёт.

5.1.4 Относительность одновременности

Если в начале координат (или другой фиксированной точке движущейся системы K') происходит некоторое событие A , а спустя некоторое время в той же точке – другое событие B , то в неподвижной системе отсчёта эти события имеют, разумеется, разные координаты. Связанный с ней наблюдатель скажет, что события A и B происходят в разных точках, хотя наблюдатель в K' видит их происходящими в одной точке. Этот эффект тривиален, он имеет место и в нереляти-

вистской механике.

Пусть теперь в начальный момент времени $t = t' = 0$ в движущейся системе происходят одновременно два события, разделённые пространственным промежутком длиной l_0 :

$$x'_A = 0, \quad t'_A = 0, \quad x'_B = l_0, \quad t'_B = 0.$$

В неподвижной системе отсчёта пространственно-временные координаты этого события имеют вид

$$x_A = 0, \quad t_A = 0, \quad x_B = \gamma l_0, \quad t_B = \gamma(\beta/c)l_0.$$

Следовательно, два события, одновременные в одной ИСО ($t'_A = t'_B$), перестают быть одновременными в другой ИСО $t_A \neq t_B$, *одновременность относительна*. Заметим, что временной порядок следования рассматриваемых событий зависит от знака $\beta = V/c$: при движении K' в положительном направлении оси OX A происходит раньше, чем B , при обратном движении порядок следования этих событий меняется. Стало быть, если существует ИСО, в которой события A и B происходят *в разных точках одновременно*, ни в какой другой ИСО между этими событиями не может быть причинно-следственной связи: ни одно из них не может оказать влияния на другое.

Другое дело, если существует ИСО, в которой события A и B происходят *в одной и той же точке в разное время*. В этом случае причинно-следственная связь, если таковая существует, будет наблюдаться во всех ИСО.

5.1.5 Релятивистская формула сложения скоростей

Вернёмся к формуле (5.1.3). Подставив в неё (5.1.4), получим формулу преобразования продольной составляющей скорости

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2} = \frac{v'_x + V}{1 + (\beta/c)v'_x}, \quad \beta = \frac{V}{c}. \quad (5.1.8)$$

Две другие компоненты скорости, в нерелятивистском случае имеющие одни и те же значения в K и K' , в релятивистском случае изменяются:

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + (\beta/c)v'_x}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + (\beta/c)v'_x}. \quad (5.1.9)$$

Эти три формулы называются *формулами сложения скоростей Эйнштейна*. Обратные преобразования даются формулами:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - (\beta/c)v_x}, \quad (5.1.10)$$

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - (\beta/c)v_x}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - (\beta/c)v_x}. \quad (5.1.11)$$

В 5.1.2 отмечалось, что абсолютная величина относительной скорости V инерциальных систем не может превышать скорости света. Легко убедиться, что и скорость частицы, движущейся в одной из ИСО со скоростью, меньшей скорости света, будет иметь скорость меньше скорости света и в любой другой ИСО. Пусть $0 < v'_x \leq c$, $V > 0$. Нетрудно показать, что $v_x(V)$ является возрастающей функцией, поэтому

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2} \leq \frac{v'_x + c}{1 + v'_x/c} = c,$$

где равенство достигается при $v'_x = c$. Закон сложения скоростей (5.1.8), (5.1.9) относится к скоростям любых физических объектов, так что можно сформулировать следствие преобразований Лоренца: **ничто в природе, ни частицы, ни волны, ни взаимодействия не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме.** Это, впрочем, не мешает физикам искать в космических лучах *тахионы* – гипотетические частицы, движущиеся со скоростью, большей скорости света в вакууме.

В заключение рассмотрим изменение направления скорости частицы при переходе из одной системы в другую. Пусть в движущейся системе вектор скорости лежит в плоскости $X'OY'$, так что $v_z = 0$. Тангенс угла наклона θ вектора скорости к оси OX

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x}.$$

Подставляя сюда компоненты скорости из (5.1.10) и (5.1.11), находим

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{v'_x + V} = \frac{v' \sin \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{v' \cos \theta' + V}.$$

5.1.6 Пространство-время Минковского

Выведем важнейшее свойство преобразований Лоренца. Возведем в квадрат обе части формул (5.1.7),

$$x'^2 = \gamma^2[x - \beta ct]^2, \quad y'^2 = y^2, \quad z'^2 = z^2, \quad t'^2 = \gamma^2[t - (\beta/c)x]^2,$$

умножим последнее на c^2 и вычтем его (почленно) из суммы первых трёх:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \gamma^2(1 - \beta^2)(x^2 - c^2 t^2) + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (5.1.12)$$



Если вместо времени t ввести координату $x^4 = ict$, то равенство (5.1.12) имеет вид сохранения квадрата длины четырехмерного вектора (x, y, z, ict) при линейном преобразовании – повороте системы координат. В некоторых отношениях удобнее не вводить мнимую координату, а просто *определить* «квадрат длины» формулой $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$. В современной литературе эта величина, взятая с обратным знаком, $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ называется квадратом *интервала* s^2 между точками четырехмерного пространства с координатами $(0, 0, 0, 0)$ и (ct, x, y, z) и записывается в виде

$$s^2 = x^\mu x_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (5.1.13)$$

где

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z),$$

а

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z).$$

По повторяющимся (верхним и нижним) индексам в (5.1.13) подразумевается суммирование. Три последних (пространственных) компонента образуют трёхмерный радиус-вектор \vec{r} , и формула (5.1.13) и две последующие часто записываются в виде

$$s^2 = c^2 t^2 - r^2, \quad x^\mu = (ct, \vec{r}), \quad x_\mu = (ct, -\vec{r}).$$

Четвёрка величин $a^\mu = \{a^0, a^1, a^2, a^3\}$, которая, подобно x^μ , при переходе от одной ИСО к другой преобразуется по формулам Лоренца,

$$a^\mu \mapsto a'^\mu = \alpha_\nu^\mu a^\nu, \quad (5.1.14a)$$

где

$$\alpha_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.1.14b)$$

называется *четырёхмерным вектором*, или просто *4-вектором*. Как и в случае радиус-вектора, три последние компонента часто объединяются в пространственную составляющую \vec{a} :

$$a^\mu = (a^0, \vec{a}).$$

Наряду с указанными выше компонентами, называемыми *контравариантными* и отмечаемыми верхним индексом, этому вектору при-

писываются ещё и *ковариантные* компоненты a_μ , снабжаемые нижними индексами и связанные с контравариантными компонентами соотношениями:

$$a_0 = a^0, \quad a_1 = -a^1, \quad a_2 = -a^2, \quad a_3 = -a^3.$$

Его квадрат

$$a^\mu a_\mu = a^0 a_0 + a^1 a_1 + a^2 a_2 + a^3 a_3 = a^{02} - \vec{a}^2,$$

является скаляром, или *релятивистским инвариантом* (имеет одно и то же значение во всех ИСО, не изменяется при преобразованиях Лоренца). Релятивистскими инвариантами являются и скалярные произведения 4-векторов

$$a^\mu b_\mu = a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = a^0 b^0 - \vec{a}\vec{b}.$$

Четырёхмерное пространство с такими свойствами (с такой метрикой) называется *пространством Минковского*.

Вернёмся к 4-радиус-вектору x^μ . Разность 4-радиус-векторов двух точек (двух событий) Δx^μ – тоже 4-вектор, и квадрат интервала между двумя точками x^μ и $x^\mu + \Delta x^\mu$ 4-пространства тоже релятивистский инвариант:

$$\Delta s^2 = \Delta x^\mu \Delta x_\mu = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta r'^2, \quad (5.1.15)$$

$$\Delta t^2 \equiv (\Delta t)^2, \quad \Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

Будем считать, для определённости, Δx^μ положительными.

Допустим, что $\Delta r < c\Delta t$, то есть интервал

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2} \quad (5.1.16)$$

вещественный. Тогда не существует такой ИСО, в которой эти события одновременны (то есть, в которой $\Delta t = 0$), но можно найти такую ИСО K' , что $\Delta r'^2 = 0$. В эту ИСО можно поместить неподвижную относительно неё частицу, разделённые интервалом

$$\Delta s = c\sqrt{1 - (v/c)^2} \Delta t$$

события с этой частицей произойдут с интервалом времени (по часам системы K')

$$\Delta \tau \equiv \Delta t' = \Delta s/c = \sqrt{1 - (v/c)^2} \Delta t, \quad (5.1.17)$$

называемым *собственным временем* частицы. Такие интервалы называются *временеподобными*. События, происходящие с одной и той же частицей, могут быть разделены только временеподобными интервалами, поскольку пройденное ей за время Δt расстояние $\Delta r < c\Delta t$, откуда, согласно (5.1.15) $\Delta s^2 > 0$.

Если $\Delta r > c\Delta t$, то интервал $\Delta s = i\sqrt{\Delta r^2 - c^2\Delta t^2}$ мнимый. Мнимые интервалы называются *пространственноподобными*, они разделяют причинно не связанные события. Поскольку $\Delta r > c\Delta t$, ни одно тело, ни один сигнал, вышедшие из одной из этих точек, не могут за время Δt достигнуть другой. При этом всегда можно выбрать систему отсчёта, в которой $\Delta t = 0$, то есть рассматриваемые события одновременны.

Уравнение $\Delta r = c\Delta t$ описывает 4-мерную траекторию (или, как говорят, *мировую линию*) светового луча. Соответствующий интервал равен нулю, $s = 0$, его инвариантность относительно преобразований Лоренца как раз и означает инвариантность скорости света. Совокупность мировых линий светового луча образует в пространстве Минковского *световой конус*, разделяющий временеподобную и пространственноподобную области (рис. 5.3).

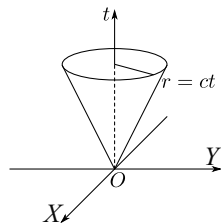


Рис. 5.3. Световой конус в пространстве-времени

Из принципа относительности, утверждающего равноправие всех ИСО вытекает, что все физические законы должны иметь одну и ту же форму во всех ИСО (быть *релятивистски ковариантными*). Другими словами, если уравнение содержит несколько слагаемых, они должны преобразовываться по одному и тому же закону при переходе от одной ИСО к другой, то есть, все быть 4-скалярами или 4-векторами, вообще – 4-тензорами.

В классической механике мы употребляли термины *время* и *пространство*, как абстракции времён Ньютона. И хотя вывод из их свойств законов сохранения в механике весьма поучителен, *физические свойства реальных времени и пространства*, вскрываемых современной теоретической физикой и космологией, гораздо богаче. Специальная теория относительности связывает пространство и время в единый пространственно-временной континуум. Общая теория относительности вводит в четырёхмерный мир кривизну, следствием которой является закон тяготения. Квантовая теория поля представляет вакуум в микроскопических масштабах как кипящий бульон из частиц и античастиц, обладающий собственной энергией. Космологическая теория Большого взрыва вводит понятие о начальном моменте развития *всего* – время перестаёт быть однородным. Наблюдаемое распределение видимого нешества во Вселенной крайне неоднородно. Существует гипотеза о том, что эта неоднородность является характерным свойством Вселенной во всех масштабах (такие структуры называют сейчас *фракталами*). Расстояния между любыми двумя галактиками во Вселенной растут со скоростью, пропорциональ-

ной расстоянию между ними (закон Хаббла), при этом все галактики оказываются равноправными: картина, наблюдаемая из любой галактики Вселенной, одна и та же. Наконец, твёрдо установлено, что видимое вещество (звёзды, галактики, туманности, скопления галактик – всё, что видно) составляет лишь малую толику материи Вселенной.

5.1.7 Упражнения

1. Формулы (5.1.13) получены в предположении, что система K' , совпадавшая в начальный момент времени с системой K , движется поступательно вдоль оси OX . Обобщить эти формулы на случай поступательного движения K' с произвольно направленной скоростью \vec{V} .
2. Насколько укорачивается диаметр Земли в направлении её движения вокруг Солнца для наблюдателя в ИСО, связанной с Солнцем? Радиус Земли $6,4 \cdot 10^3$ км, скорость 30 км/с.
3. Найти длину пути, проходимого мюоном с собственным временем жизни $2 \cdot 10^{-6}$ с, если его скорость составляет 0,99 скорости света.
4. Ультрарелятивистская частица распадается на две одинаковые дочерние частицы. Найти угол их разлёта в лабораторной системе координат.
5. Пи-мезон в состоянии покоя распадается на мюон с массой покоя m_μ и нейтрино с массой покоя, близкой к нулю. Найти кинетическую энергию мюона.

5.2 Движение релятивистской частицы

5.2.1 Функция Лагранжа свободной частицы

В соответствии с принципом относительности Эйнштейна, действие S не должно зависеть от выбора конкретной ИСО, или, как говорят, должно быть инвариантом относительно преобразований Лоренца, 4-скаляром. Классическая формула действия свободной частицы

$$S_{\text{кл}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{mv^2}{2} dt$$

этому условию не удовлетворяет.

Простейший релятивистский инвариант – элемент интервала ds , так что действие (для свободной частицы) можно попытаться представить в виде

$$S = \text{const} \int_a^b ds$$

Здесь ds относится к одной и той же частице, движущейся с постоянной скоростью \vec{v} относительно неподвижной ИСО. Воспользовавшись

формулой (5.1.16), получим

$$\mathcal{S} = \text{const} \int_a^b \sqrt{1 - (v/c)^2} dt,$$

откуда для функции Лагранжа имеем выражение

$$\mathcal{L} = \text{const} \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

При нерелятивистских скоростях принимает вид

$$\mathcal{L} \approx \text{const} \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right).$$

Постоянная составляющая функции Лагранжа может быть опущена, а оставшееся выражение

$$\mathcal{L} \approx -\text{const} \frac{v^2}{2c^2}$$

должно согласовываться с классической функцией $\frac{mv^2}{2}$, поэтому $\text{const} = -mc^2$ и

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}. \quad (5.2.1)$$

Из функции (5.2.1) вытекают следующие выражения для импульса и энергии свободной релятивистской частицы:

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (5.2.2)$$

и

$$\mathcal{E} = \vec{p}\vec{v} - \mathcal{L} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Возводя их в квадрат и сравнивая, получим

$$\mathcal{E}^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2, \quad (5.2.3)$$

следовательно, релятивистская функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H} = c\sqrt{m^2 c^2 + p^2}.$$

При малых скоростях

$$\vec{p} \approx m\vec{v}, \quad \mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}, \quad \mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}.$$

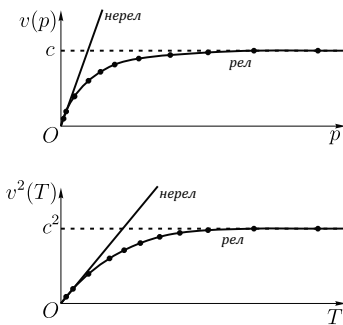


Рис. 5.4. Связь скорости с импульсом и кинетической энергией в нерелятивистской механике и её релятивистском обобщении

Приведём следующее важное соотношение между энергией, импульсом и скоростью свободной частицы

$$\vec{p} = \frac{\mathcal{E}\vec{v}}{c^2}.$$

Заметим, что релятивистская энергия свободной частицы не является кинетической: она остаётся отличной от нуля и в случае покоящейся частицы. Величина

$$\mathcal{E} = mc^2$$

называется *энергией покоя* частицы. Естественно определить кинетическую энергию релятивистской частицы как разность между \mathcal{E} и mc^2

$$T = \mathcal{E} - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - mc^2.$$

При малых скоростях $v \ll c$ она переходит в нерелятивистскую кинетическую энергию:

$$T \sim \frac{mv^2}{2}$$

Раньше многие авторы представляли импульс (5.2.2) в ньютоновом виде

$$\vec{p} = m(v)\vec{v},$$

интерпретируя множитель

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

как *полную (релятивистскую) массу*, которая оказывается зависящей от скорости. В настоящее время введение $m(v)$ считается излишним, поскольку приводит к необходимости говорить о двух законах сохранения – энергии и полной массы, хотя второй из них представляется тем же уравнением сохранения энергии, поделённым на c .

5.2.2 Функция Лагранжа заряда в электромагнитном поле

Влияние электромагнитного поля на движение заряда описывается добавлением к элементу действия – скалярного произведения 4-вектора $A^\mu = (A^0, \vec{A})$, характеризующего поле, на 4-вектор перемещения:

$$S = \int_a^b \left(-mcds - \frac{e}{c} A^\mu dx_\mu \right). \quad (5.2.4)$$

Перейдя к интегрированию по времени, придём к выражению для функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} + (e/c) \vec{A} \vec{v} - eA^0$$

с неизвестными пока параметрами A^0 и \vec{A} . Чтобы установить их смысл, выведем уравнение движения заряда, для чего вычислим производные

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5.2.5)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = \frac{e}{c} \text{grad}(\vec{A}, \vec{v}) - e \text{grad}A^0 = \frac{e}{c} (\vec{v}, \nabla) \vec{A} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \text{rot} \vec{A}] - e \text{grad}A^0$$

и составим из них уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) = \frac{e}{c} (\vec{v} \nabla) \vec{A} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \text{rot} \vec{A}] - e \text{grad}A^0.$$

Пользуясь формулой

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{A},$$

преобразуем его к виду

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e \text{grad}A^0 + \frac{e}{c} [\vec{v}, \text{rot} \vec{A}]. \quad (5.2.6)$$

Сравнив правую часть с выражением силы, действующей на заряд в переменном электромагнитном поле

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}],$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A},$$

видим, что уравнение движения заряда в электромагнитном поле может быть представлено в виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]. \quad (5.2.7)$$

5.2.3 Функция Гамильтона заряда в электромагнитном поле

Из (5.2.5) следует, что обобщённый импульс заряда \vec{P} не равен его динамическому импульсу \vec{p} , а связан с ним соотношением

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}. \quad (5.2.8)$$

Функция Гамильтона – это энергия

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \vec{v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} - \mathcal{L} &= \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c} \vec{v} \vec{A} + mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} - \frac{e}{c} \vec{v} \vec{A} + e\varphi = \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + e\varphi, \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

которую надо выразить через обобщённый импульс \vec{P} . Для этого перенесем $e\varphi$ из правой части в левую, возведём полученное равенство в квадрат,

$$(\mathcal{E} - e\varphi)^2 = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right)^2$$

воспользуемся (5.2.3),

$$(\mathcal{E} - e\varphi)^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2,$$

выразим \vec{p} через \vec{P} с помощью (5.2.8) и заменим в результате \mathcal{E} на \mathcal{H} :

$$\left(\frac{\mathcal{H} - e\varphi}{c} \right)^2 = m^2 c^2 + \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2.$$

Полученное соотношение задаёт функцию Гамильтона неявным образом.

При малых скоростях

$$\vec{p} = \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} = m \vec{v} \text{ ЛАНЬ®}$$

и

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\varphi.$$

В заключение заметим, что полную релятивистскую энергию (5.2.9) можно записать в виде

$$\mathcal{E} = mc^2 + T + e\varphi,$$

где

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - mc^2$$

– кинетическая энергия релятивистской частицы. Скорость её изменения равна совершаемой в единицу времени работе,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v/c^2}} = \vec{v} \vec{F} = \vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (5.2.10)$$

Используя уравнение (5.2.7) и замечая, что $[\vec{v}, \vec{H}] \vec{v} = 0$ (магнитное поле над электрическим зарядом работы не производит), получаем

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = e \vec{E} \vec{v}. \quad (5.2.11)$$

Скорость изменения полной релятивистской энергии выражается через электромагнитные потенциалы соотношением

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\vec{v}}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right).$$

5.2.4 Четырёхмерные векторы скорости, ускорения, импульса, силы

Начав с ковариантной формы представления действия, мы записали результаты в обычной, трёхмерной векторной форме. В этом пункте мы представим их в более элегантном 4-мерном виде.

Перемещение частицы $\Delta x^\mu = \{c\Delta t, \Delta \vec{r}\}$ – пространственноподобный 4-вектор. Чтобы получить из него 4-вектор скорости, надо разделить на соответствующее время и перейти к пределу, но время это

должно быть скаляром. Таким образом, мы должны делить не на Δt , являющееся одной из компонент 4-вектора, а на собственное время (5.1.17), пропорциональное интервалу и потому являющееся скаляром. Полученный вектор

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{\sqrt{1 - (v/c)^2} dt} = \left\{ \frac{c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right\}$$

называется *4-скоростью*, его длина равна скорости света:

$$v^\mu v_\mu = \frac{c^2 - v^2}{1 - (v/c)^2} = c^2.$$

Дифференцированием этого равенства по τ получаем, что

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} v_\mu = 0. \quad (5.2.12)$$

Производная $dv^\mu/d\tau = d^2x^\mu/d\tau^2$ представляет собой *4-ускорение* w^μ . Из формулы (5.2.12) видно, что 4-скорость и 4-ускорение всегда взаимно ортогональны.

Произведение массы на 4-скорость естественно называть *4-импульсом*:

$$p^\mu = mv^\mu = \left\{ \frac{mc}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right\} = \{E/c, \vec{p}\}.$$

Квадрат 4-импульса определяется выражением

$$p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - p^2 = m^2 c^2,$$

совпадающим с формулой (5.2.3), а преобразование его компонент при переходе от одной ИСО к другой осуществляется формулами (см. (5.1.14))

$$p'_x = \frac{p_x - (V/c^2)E}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \frac{E - Vp_x}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Ковариантная форма уравнений движения частицы во внешнем поле имеет вид

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu, \quad (5.2.13)$$

где 4-вектор f^μ называется *силой Минковского*. Переходя к лабораторному времени, $d\tau = \sqrt{1 - (v/c)^2} dt$, получим:

$$\frac{dp^\mu}{dt} = F^\mu, \quad F^\mu = \sqrt{1 - (v/c)^2} f^\mu.$$

Совокупность трёх пространственных компонент силы Минковского $\vec{f} = \{f^1, f^2, f^3\}$ связана с обычной трёхмерной ньютоновой силой \vec{F} соотношением

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Чтобы установить смысл временной составляющей силы Минковского, умножим обе части уравнения (5.2.13) на v_μ и просуммируем по μ :

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} v_\mu = f^\mu v_\mu.$$

Левая часть, ввиду ортогональности (5.2.12), обращается в нуль,

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} v_\mu = m \frac{dv^\mu}{d\tau} v_\mu = 0,$$

поэтому

$$f^\mu v_\mu = f^0 \frac{c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - \frac{\vec{F}\vec{v}}{1 - (v/c)^2} = 0.$$

Отсюда

$$f^0 = \frac{\vec{F}\vec{v}}{c\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (5.2.14)$$

и, следовательно,

$$\vec{f} = \left\{ \frac{\vec{F}\vec{v}}{c\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right\}.$$

Произведение $\vec{F}\vec{v}$ есть работа, совершаемая силой \vec{F} в единицу времени.

5.2.5 Четырёхмерное уравнение движения заряда в электромагнитном поле

Правая часть уравнения движения (5.2.13) – сила Минковского – является произвольным 4-вектором f^μ . В случае движения заряда в электромагнитном поле этот вектор пропорционален свёртке 4-скорости заряда с 4-тензором электромагнитного поля $F^{\mu\nu} =$

$$\partial A^\nu / \partial x^\mu - \partial A^\mu / \partial x^\nu:$$

$$f^\mu = \frac{e}{c} F_\nu^\mu v^\nu.$$

В этом можно убедиться, представив (5.2.11) в виде

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{e}{c} \vec{E} \vec{v}, \quad (5.2.15)$$

и приведя уравнения (5.2.7) и (5.2.15) к четырёхмерному виду.

Более поучительно, однако, вывести 4-мерное уравнение движения непосредственно из принципа наименьшего действия, как это было сделано в 3-мерном нерелятивистском случае (см. 4.3.1).

Возьмём вариацию действия, записанного в четырёхмерном виде (5.2.4), полагая, как и в трёхмерном случае, пределы постоянными:

$$\delta \mathcal{S} = \delta \int_a^b \left(-mcds - \frac{e}{c} A^\mu dx_\mu \right) = \int_a^b \left(-mcd\delta s - \frac{e}{c} \delta A^\mu dx_\mu - \frac{e}{c} A^\mu \delta dx_\mu \right). \quad (5.2.16)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \delta ds &= \delta \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \frac{1}{2} \frac{\delta(dx^\mu dx_\mu)}{\sqrt{dx^\mu dx_\mu}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\delta dx^\mu dx_\mu + dx^\mu \delta dx_\mu)}{ds} = \frac{dx^\mu \delta dx_\mu}{cd\tau} = \frac{v^\mu \delta dx_\mu}{c}, \end{aligned}$$

и переписывая вариацию (5.2.16) в виде

$$\delta \mathcal{S} = - \int_a^b \left(mv^\mu + \frac{e}{c} A^\mu \right) d\delta x_\mu - \frac{e}{c} \int_a^b \delta A^\mu dx_\mu,$$

выполним в первом слагаемом интегрирование по частям:

$$\delta \mathcal{S} = - \left(mv^\mu + \frac{e}{c} A^\mu \right) \delta x_\mu \Big|_a^b + \int_a^b \left(mdv^\mu + \frac{e}{c} dA^\mu \right) \delta x_\mu - \frac{e}{c} \int_a^b \delta A^\mu dx_\mu.$$

Первое слагаемое обращается в нуль в силу граничных условий $\delta x_\mu(a) = \delta x_\mu(b) = 0$. Выражая дифференциал и вариацию A^μ через дифференциал и вариацию 4-радиус-вектора

$$dA^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad \delta A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu$$

и вводя дифференциал $dx_\nu = v_\nu d\tau$, приведём вариацию действия к виду:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \left(m \frac{dv^\mu}{d\tau} + \frac{e}{c} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \right) \delta x_\mu d\tau - \frac{e}{c} \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} v^\mu \delta x_\nu d\tau.$$

Меняя местами индексы $\mu \leftrightarrow \nu$ в последнем слагаемом и объединяя его с предыдущим, получим:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \left[m \frac{dv^\mu}{d\tau} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} \right) v^\nu \right] \delta x_\mu d\tau.$$

Таким образом, из принципа наименьшего действия

$$\delta\mathcal{S} = 0$$

ввиду произвольных и независимых вариаций $\delta x_\mu(\tau)$ следует уравнение движения заряда в ковариантной форме:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \right) v_\nu. \quad (5.2.17)$$

Физический смысл компонентов тензора $F^{\mu\nu}$ раскрывается следующей таблицей:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2.6 Упражнения

1. Выразить импульс релятивистской частицы через её кинетическую энергию.
2. Найти кинетическую энергию относительного движения двух одинаковых релятивистских частиц во встречных пучках.
3. Решить задачу о движении первоначально покоившегося заряда в однородном постоянном электрическом поле. Проследить переход к нерелятивистскому пределу.
4. Решить задачу о движении заряда в том же поле с начальным импульсом, направленным перпендикулярно напряжённости. Проследить переход к нерелятивистскому пределу.
5. Решить задачу о движении электрического заряда в постоянном однородном магнитном поле. Проследить переход к нерелятивистскому пределу.

5.3 Столкновения релятивистских частиц

5.3.1 Упругое столкновение двух частиц

Наибольшее применение релятивистская теория находит при изучении процессов, происходящих с элементарными частицами высоких энергий (плазма, ускорители, космические лучи). Поскольку именно здесь проявляется *необходимость* описания взаимодействий с помощью представления об обменах квантами соответствующего поля, в любой момент времени система может рассматриваться как совокупность частиц и квантов (тоже частиц!) полей, которые в макроскопических (лабораторных) масштабах являются по существу свободными, взаимодействующими друг с другом лишь путём столкновений. По этой причине функция Лагранжа и функция Гамильтона становятся аддитивными характеристиками системы, и выполняется закон сохранения 4-импульса системы, который мы запишем в виде привычной пары законов – для энергии и 3-импульса системы:

$$\sum \mathcal{E}_i = \text{const}, \quad \sum \vec{p}_i = \text{const},$$

где

$$\mathcal{E}_i = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - (\vec{v}_i/c)^2}} = \sqrt{c^2 p_i^2 + m_i^2 c^4} = m_i c^2 + T_i \quad (5.3.1)$$

и

$$\vec{p}_i = \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - (\vec{v}_i/c)^2}}. \quad (5.3.2)$$

Очевидно также, что $\{\sum \mathcal{E}_i, \sum c\vec{p}_i\}$ есть 4-импульс системы, следовательно, величина

$$m^2 c^4 \equiv \left(\sum \mathcal{E}_i\right)^2 - \left(c \sum \vec{p}_i\right)^2 \quad (5.3.3)$$

является релятивистским инвариантом (то есть её численное значение не зависит от выбора инерциальной системы координат).

Для двух частиц, испытывающих *упругое* (то есть без изменения их масс, $m_1 = m_{10}$ и $m_2 = m_{20}$) столкновение, эти законы приводят к уравнениям, связывающим характеристики системы до и после столкновения:

$$\mathcal{E}_{10} + \mathcal{E}_{20} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2, \quad (5.3.4)$$

$$\vec{p}_{10} + \vec{p}_{20} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad (5.3.5)$$

В ЛСК, где частица 2 до столкновения покоилась,

$$\mathcal{E}_{20} = m_2 c^2,$$

$$\vec{p}_{20} = 0. \quad (5.3.6)$$

Как и в нерелятивистском случае, уравнения (5.3.4)–(5.3.5) связывают между собой углы рассеяния ϑ_1, ϑ_2 с импульсами частиц p_1, p_2 после столкновения. Найдём сначала максимальную потерю энергии первичной частицей, происходящую при лобовом столкновении. Из (5.3.4)–(5.3.6) имеем

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{10} + m_2 c^2 - \mathcal{E}_2,$$

и

$$p_1^2 = p_{10}^2 + p_2^2 - 2\vec{p}_{10}\vec{p}_2. \quad (5.3.7)$$

В случае лобового столкновения

$$\mathcal{E}_2 = m_2 c^2 + Q_{\max},$$

$$\vec{p}_{10}\vec{p}_2 = p_{10}p_2.$$

Выражая в (5.3.7) импульсы через энергии с помощью (5.3.1) и исключая p_1, \mathcal{E}_1 , получим

$$Q_{\max} = \frac{2m_2 c^2 (\mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 c^4)}{2m_2 c^2 \mathcal{E}_{10} + (m_1^2 + m_2^2) c^4}. \quad (5.3.8)$$

Легко проверить, что в нерелятивистском пределе, когда

$$\mathcal{E}_{10} \approx m_1 v_{10}^2 / 2 + m_1 c^2,$$

формула (5.3.8) переходит в её нерелятивистский аналог (2.3.1). При столкновении частиц равных масс ($m_1 = m_2 = m$)

$$Q_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{10}^2 - m^2 c^4}{\mathcal{E}_{10} + m c^2} = \mathcal{E}_{10} - m c^2 = T_{10},$$

то есть, как и в нерелятивистском случае, передаётся вся кинетическая энергия. Однако, в отличие от нерелятивистского случая, Q_{\max} здесь может быть большой и тогда, когда массы частиц сильно отличаются друг от друга. Из формулы (5.3.8) видно, что при любом соотношении масс налетающая частица теряет почти всю энергию, $Q_{\max} \sim \mathcal{E}_{10}$, если \mathcal{E}_{10} много больше энергии покоя тяжёлой частицы.

5.3.2 Связь между углами рассеяния в ЛСК и СЦМ

Как и в нерелятивистском случае столкновение релятивистских частиц удобно рассматривать в системе центра масс, в которой суммарный импульс системы равен нулю.

Из (5.3.1)–(5.3.2) следует, что для свободной частицы

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{\mathcal{E}}.$$

Подставляя сюда $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ и $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, найдем скорость перемещения системы двух частиц как целого (скорость центра инерции):

$$\vec{V} = \frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)c^2}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}.$$

Если вторая частица до столкновения покоилась,

$$\vec{V} = \frac{\vec{p}_{10}c^2}{\mathcal{E}_{10} + m_2c^2}. \quad (5.3.9)$$

Угол рассеяния в ЛСК, определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{p_{x1}}{p_{z1}}, \quad (5.3.10)$$

легко выразить через угол рассеяния Θ в СЦИ, если воспользоваться преобразованием Лоренца для энергии-импульса, согласно которому

$$p_{x1} = p'_{x1}, \quad p_{z1} = \frac{p'_{z1} + V\mathcal{E}'_1/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (5.3.11)$$

Подставляя (5.3.11) в (5.3.10) и учитывая, что

$$\frac{p'_{z1}}{p'_1} = \cos \Theta, \quad \frac{p'_{x1}}{p'_1} = \sin \Theta, \quad \frac{E'_1}{p'_1 c^2} = \frac{1}{v'_1}, \quad v'_1 = v'_{10},$$

получим

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + V/v'_{10}} \sqrt{1 - (V/c)^2}. \quad (5.3.12)$$

Отличие этой формулы от своего нерелятивистского аналога состоит в том, что при больших энергиях первичной частицы, когда $V \sim c$, интервалу изменения угла $\Theta \in (0, \pi)$ соответствует малая область значений ϑ_1 вблизи нуля. Это означает, что импульсы рассеянных частиц,

соответствующие различным Θ , лежат в узком конусе вокруг первичного направления. Поэтому часто в задачах прохождения ультрарелятивистских частиц через вещество отклонением налетающей частицы от начального направления пренебрегают и учитывают лишь размен энергии.

5.3.3 Связь передачи энергии с углами рассеяния

Получим сначала формулу, связывающую величину энергии, передаваемой при упругом столкновении, с углом рассеяния в СЦИ. В ней вторая частица до столкновения имела скорость $-\vec{V}$, поэтому энергия и импульс этой частицы соответственно равны

$$\mathcal{E}'_{20} = \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \vec{p}'_{20} = -\frac{m_2 \vec{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (5.3.13)$$

В СЦИ энергия и величина импульса каждой частицы при упругом столкновении не меняются:

$$\mathcal{E}'_{20} = \mathcal{E}'_2, \quad p'_{20} = p'_2. \quad (5.3.14)$$

Энергию второй частицы в ЛСК можно найти из преобразования Лоренца для энергии-импульса

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}'_2 + V p'_{z2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

подставив в него $p'_{z2} = -p'_2 \cos \Theta$ и воспользовавшись формулами (5.3.9), (5.3.13), (5.3.14). В результате получим

$$\mathcal{E}_2 = m_2 c^2 \frac{(\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2)^2 - (\mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 c^4) \cos \Theta}{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2\mathcal{E}_{10} m_2 c^2}. \quad (5.3.15)$$

Представив \mathcal{E}_2 в виде

$$\mathcal{E}_2 = Q + m_2 c^2,$$

найдем зависимость переданной энергии Q от угла рассеяния:

$$Q = Q_{\max} \sin^2(\Theta/2),$$

где Q_{\max} определяется формулой (5.3.8).

Чтобы найти аналогичные выражения, связывающие углы рассеяния ϑ_1, ϑ_2 в ЛСК с величиной переданной энергии, перепишем законы сохранения энергии и импульса в виде

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{10} - Q, \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_{10} - \vec{p}_2$$

и подставим эти выражения в формулу $\mathcal{E}_1^2 - c^2 p_1^2 = m_1^2 c^4$:

$$(\mathcal{E}_{10} - Q)^2 - c^2 (\vec{p}_{10} - \vec{p}_2)^2 = m_1^2 c^4.$$

Раскрыв квадраты разностей, слегка поменяем расстановку членов этого равенства:

$$2c^2 p_{10} p_2 \cos \vartheta_2 = (c^2 p_{10}^2 + m_1^2 c^4) + c^2 p_2^2 - \mathcal{E}_{10}^2 + 2\mathcal{E}_{10} Q - Q^2.$$

Заменяя содержимое круглых скобок равной ему величиной \mathcal{E}_{10}^2 , производя элементарные сокращения и группировки, приведём равенство к виду

$$2c^2 p_{10} p_2 \cos \vartheta_2 = 2(\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2) Q.$$

Наконец, выразив импульсы через начальную и переданную энергии, разрешим это уравнение относительно косинуса угла отдачи:

$$\cos \vartheta_2 = \frac{Q(\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2)}{\sqrt{(\mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 c^4)[(m_2 c^2 + Q)^2 - m_2^2 c^4]}}. \quad (5.3.16)$$

Аналогичным образом исключая E_2 и p_2 , получим косинус другого угла:

$$\cos \vartheta_1 = \frac{\mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 c^4 - Q(\mathcal{E}_{10} + m_2 c^2)}{\sqrt{(\mathcal{E}_{10}^2 - m_1^2 c^4)[(\mathcal{E}_{10} - Q)^2 - m_1^2 c^4]}}. \quad (5.3.17)$$

5.3.4 Электроны и фотоны

В 1923 г. американский физик Артур Комптон, ставший позднее лауреатом Нобелевской премии, обнаружил, что рассеяние рентгеновских лучей сопровождается увеличением их длины волны, возрастающим с увеличением угла рассеяния:

$$\Delta \lambda \equiv \lambda - \lambda_0 = 2\Lambda \sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right), \quad (5.3.18)$$

где Λ – положительный коэффициент, не зависящий ни от угла рассеяния, ни от длины волны рентгеновского излучения, ни от свойств рассеивающих атомов, и названный позднее *комптоновской длиной волны* электрона.

Этот факт противоречил классической волновой теории электромагнитного излучения, каковым являются рентгеновские лучи. Объяснить наблюдаемое явление, получившее название *эффекта Комптона*, удалось, представив рентгеновские лучи частотой ω в виде потока частиц с энергией *фотонов*² $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\omega/c$ (так связаны энергия и импульс единицы объёма электромагнитного поля: $\mathcal{E} = cp$), упругие столкновения которых с первоначально неподвижными электронами (рис. 5.5) и порождают наблюдаемый сдвиг. Из формулы (5.2.3) следует, что масса покоя таких частиц равна нулю.

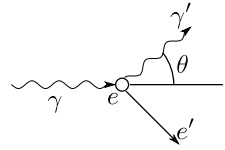


Рис. 5.5. Комptonовское рассеяние фотона на электроне

Чтобы найти связь длины волны рассеянного фотона на свободном электроне (в действительности, электрон не свободен, он связан с атомом, но по сравнению с действием рентгеновского кванта связь эта слабая, и ею обычно, хотя и не всегда, пренебрегают), обратимся к формуле (5.3.17), положив в ней $m_1 = 0$, $m_2 = m_e$, $\mathcal{E}_{10} = \mathcal{E}_0$, $Q = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_\gamma$, $\vartheta_1 = \vartheta$. В результате получим:

$$\cos \vartheta = \frac{\mathcal{E}_0^2 - (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_\gamma)(\mathcal{E}_0 + m_e c^2)}{\mathcal{E}_0 \mathcal{E}_\gamma}.$$

Выполнив следующие преобразования

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_\gamma \cos \vartheta &= \mathcal{E}_0^2 - \mathcal{E}_0(\mathcal{E}_0 + m_e c^2) + \mathcal{E}_\gamma(\mathcal{E}_0 + m_e c^2), \\ [(\mathcal{E}_0 + m_e c^2) - \mathcal{E}_0 \cos \vartheta] \mathcal{E}_\gamma &= m_e c^2 \mathcal{E}_0, \end{aligned}$$

разрешим уравнение относительно энергии рассеянного кванта:

$$\mathcal{E}_\gamma = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \frac{\mathcal{E}_0}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta)}. \quad (5.3.19)$$

Перейдя от энергии к длине волны по формуле

$$\mathcal{E} = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

преобразуем уравнение (5.3.19) к виду

$$\lambda_\gamma = \lambda_0 + 2 \frac{h}{mc} \sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right),$$

²Сейчас более распространено название *гамма-кванты*, хотя первоначально термин *квант* обозначал не частицу, а дискретную порцию передаваемой энергии. Именно присоединение к этой энергии импульса $p = \hbar\omega/c$ легализовало эту порцию как элементарную частицу, играющую в современной теоретической физике чрезвычайно важную роль.

совпадающему с (5.3.18) при

$$\Lambda = \frac{h}{mc}.$$

Открытие Комптона, казалось бы, завершило вековую дискуссию о том, что же такое свет – волны или частицы – в пользу последних, однако интрига на этом не кончилась: явления интерференции и дифракции никто не отменил, они по-прежнему наблюдались и продолжали свидетельствовать о том, что свет – это волны. Физика стояла на пороге квантовой эры...

5.3.5 Неупругие столкновения

Перейдём к рассмотрению неупругого столкновения типа

$$1 + 2 = 3 + 4.$$

Мы полагаем здесь, что в конечном состоянии имеется по-прежнему две частицы, но массы их (отмечаемые далее, как и другие параметры, индексами 3 и 4) уже другие. Закон сохранения энергии в этом случае имеет вид

$$T_1 + m_1c^2 + T_2 + m_2c^2 = T_3 + m_3c^2 + T_4 + m_4c^2,$$

причем $m_1 + m_2 \neq m_3 + m_4$. Поэтому в процессе реакции кинетическая энергия рассматриваемой системы изменяется на величину

$$Q_r \equiv (T_3 + T_4) - (T_1 + T_2) = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)]c^2,$$

называемую *энергией реакции*. Если $Q_r > 0$, то кинетическая энергия системы увеличивается и реакция называется *экзоэнергетической*; если $Q_r < 0$, то кинетическая энергия уменьшается и реакция называется *эндоэнергетической*. В последнем случае часть энергии исходных частиц идёт на увеличение внутренней энергии продуктов реакции.

Кинетическая энергия продуктов реакции, очевидно, должна быть положительна: $T_3 + T_4 > 0$. Поэтому из закона сохранения энергии следует, что $T_1 + T_2 + Q_r > 0$. Если реакция *экзоэнергетическая*, то это неравенство выполняется при любых значениях начальной кинетической энергии. Эндоэнергетическая реакция возможна лишь в том случае, когда начальная энергия превышает некоторое пороговое значение.

Переходя к вычислению пороговой энергии, рассмотрим сначала нерелятивистский случай. Закон сохранения энергии в СЦИ имеет вид

$$\frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{p_3'^2}{2m_3} + \frac{p_4'^2}{2m_4} - Q_r, \quad (5.3.20)$$

а из закона сохранения импульса следует, что

$$p_1' = p_2', \quad p_3' = p_4'. \quad (5.3.21)$$

Подставляя (5.3.21) в (5.3.20) и разрешая полученное уравнение относительно кинетической энергии $T_3' = p_3'^2/2m_3$, получим

$$T_3' = \frac{m_4}{m_3 + m_4} \left[\left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) T_1' + Q_r \right].$$

Величина T_3' будет положительной, если

$$\left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) T_1' \geq -Q_r = |Q_r|.$$

Учитывая, что

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{V} = \vec{v}_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1,$$

перейдем от СЦМ к ЛСК:

$$\vec{p}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{p}_1'; \quad T_1 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right)^2 T_1'.$$

Таким образом, пороговое значение кинетической энергии налетающей частицы в ЛСК равно

$$T_{1r} = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) |Q_r|. \quad (5.3.22)$$

Отметим, что при $m_1 \ll m_2$, оно совпадает с энергией реакции $|Q_r|$, а при $m_1 = m_2$ в два раза превосходит это значение.

Величину пороговой энергии для релятивистских столкновений тоже можно получить из формулы $T_1' + T_2' \geq |Q_r|$, переписав ее в виде $\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2' \geq |Q_r| + (m_1 + m_2)c^2$ и выразив \mathcal{E}_1' и \mathcal{E}_2' через энергию налетающей частицы в ЛСК с помощью преобразований Лоренца для энергии-импульса

$$\mathcal{E}_1' = \frac{\mathcal{E}_1 - V p_1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}; \quad \mathcal{E}_2' = \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Из этих формул следует, что

$$\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 = \frac{\mathcal{E}_1 + m_2 c^2 - V p_1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (5.3.23)$$

Доказывая с помощью формулы (5.3.9) равенства

$$V p_1 = \frac{\mathcal{E}_1^2 - m_1^2 c^4}{\mathcal{E}_1 + m_1 c^2};$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{\mathcal{E}_1 + m_2 c^2}{\sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2m_2 c^2 \mathcal{E}_1}}$$

и используя их в (5.3.23), получим

$$\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 = (m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2m_2 c^2 \mathcal{E}_1)^{1/2}.$$

Поэтому

$$T_1 \geq |Q_r|(1 + m_1/m_2) + |Q_r|^2/2m_2 c^2,$$

что отличается от нерелятивистского выражения (5.3.22) слагаемым $|Q_r|^2/2m_2 c^2$, играющим существенную роль, когда энергия реакции сравнима с энергией покоя частицы 2.

5.3.6 Законы сохранения и элементарные частицы

Нобелевская премия по физике за 2013 год присуждена Франсуа Англери и Питеру Хиггсу за работу по объяснению того, почему элементарные частицы обретают массу. Эти учёные предсказали существование элементарной частицы бозон Хиггса, что было подтверждено в прошлом году в ходе экспериментов на Большом адронном коллайдере в ЦЕРНе (Европейский центр ядерных исследований)³.

Коллайдер (*collider* – *англ.*) – установка для ускорения заряженных частиц и наблюдения за результатами их столкновений, адроны – элементарные частицы, участвующие в сильном (и всех остальных) взаимодействиях (наиболее известная из них – протон, являющийся ядром

³Автору посчастливилось «оказаться в нужное время в нужном месте»: 3 июля 2013 г. пленарное заседание Международного конгресса по физике космических лучей, проходившее в одном из новых залов Московского государственного университета, было прервано каким-то выкриком, кто-то вскочил, и, подняв над головой свой ноутбук, что-то кричал, тут же переключили на Интернет центральный экран, на котором заканчивалось сообщение об открытии частицы, «похожей на бозон Хиггса» и возникло изображение самого Питера Хиггса, на глазах которого блеснули слёзы. Зал тонул в овации...

атома водорода). «Большой» – это и в прямом смысле, больших размеров, и в смысле энергетическом: ещё ни один ускоритель на Земле не ускорял адроны до таких энергий. Он расположен в Европейских Альпах на территории двух стран – Франции и Швейцарии. Глубоко под землёй скрыт круговой туннель протяжённостью 27 км. В нём проложены две вакуумные трубы, по которым в противоположных направлениях летят ускоренные до гигантских энергий протоны с тем, чтобы по сигналу, переданному электрическим импульсом, броситься друг на друга...

Столкновения эти длятся мгновения, и никакие приборы не позволяют *проследить*, как они происходят: мы имеем информацию лишь о начальном состоянии (до столкновения) и конечном состоянии, когда они (нет, вовсе не они, другие частицы, с другими характеристиками, их много, десятки, сотни могут родиться в месте исчезновения столкнувшихся частиц!), уже разлетевшись друг от друга, попадают в детекторы, измеряющие их характеристики. Остаются только законы сохранения, которые позволят нам определить массы, заряды и другие характеристики открываемых элементарных частиц. Важнейшим фактором является то, что законы сохранения не связаны с законами движения, и мы вправе использовать их даже тогда, когда мы не уверены в своих знаниях о взаимодействии сталкивающихся объектов. В этом отношении математический аппарат, развитый на основе релятивистских законов сохранения механических величин, дополненных специфическими законами сохранения других параметров элементарных частиц, сыграл (достаточно сказать, что большинство элементарных частиц были открыты с применением этих законов!) и продолжает играть важную роль в прогрессе физики высоких энергий.

Поучительный пример приведён в популярной книге⁴. Речь идёт в нём об открытии двух частиц (Λ^0 и K^0) на рубеже 40-50-х годов. При изучении следов космических лучей, оставляемых ими в камерах Вильсона (позднее стали использоваться более совершенные детекторы), находящихся в однородном магнитном поле, были обнаружены пары следов, исходящих из общей точки и как бы парящих в пустоте. Физики назвали это явление «вилкой». Картина выглядела так, как если бы две заряженных частицы возникли прямо из пустоты. Физики, однако, понимали, что эти вилки, скорее всего, являлись продуктами распада нейтральных частиц, поскольку они замечались вблизи так называемых «звёзд» – точек столкновения быстрых протонов с ядрами эмульсии, в которых рождалось несколько вторичных заряженных частиц, на что указывали расходящиеся лучики ионизационных следов в эмульсии (отсюда и термин «звезда»). Похоже, что среди них рождались и нейтральные частицы, не дающие следов до тех пор, пока не распадутся на две заряженные. Продукты этих распадов и порождали вилки. По длине, кривизне, толщине видимых треков удалось установить массы, заряды и энергии (импульсы) продуктов распада и тем самым идентифицировать их. Оказалось, что

⁴Г. И. Копылов. Всего лишь кинематика. – М.: Атомиздат, 1969.

нейтральная частица (назовём её пока V^0) распадалась либо по схеме

$$V^0 \rightarrow p + \pi^-,$$

либо по схеме

$$V^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

(здесь буквой p обозначен протон, а символами π^+ и π^- – положительный и отрицательный пи-мезоны). Однако, чтобы идентифицировать саму V^0 -частицу, необходимо, как минимум, установить её массу. Сделать это проще всего, работая релятивистским инвариантом (5.3.3):

$$m_V c^2 = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - c^2(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}.$$

Когда накопилось достаточно статистики, оказалось, что все полученные значения m_V группируются вокруг двух значений, 1,11 ГэВ и 0,49 ГэВ.⁵ Так было доказано существование сразу двух нейтральных частиц, Λ^0 (тяжёлая) и K^0 (полегче), распадающихся по схемам

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-,$$

и

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

соответственно.

5.3.7 Упражнения

1. Выполнить вычисления, приводящие к формуле (5.3.15).
2. Фотон с энергией $\mathcal{E}_{\gamma 0}$ рассеялся на первоначально неподвижном свободном электроне на угол θ_γ . Найти кинетическую энергию электрона после рассеяния.
3. Вывести аналоги формул (5.3.16)-(5.3.17) для рассеяния электронов на электронах. Найти их нерелятивистские пределы.
4. Летящая относительно ЛСК частица распадается на две одинаковых. Найти угол разлёта распадных частиц.



⁵1 ГэВ (гигаэлектронвольт)=10⁹ эВ.



Глава 6

Разрежённые среды

6.1 Основы физической кинетики

6.1.1 Постановка задачи

В стандартной динамической задаче начальные условия

$$\mathbf{X}(0) = \{q_1(0), p_1(0); \dots; q_n(0), p_n(0)\} \quad (6.1.1)$$

обычно полагаются заданными. Это значит, что в $2n$ -мерном фазовом пространстве $\{q_1, p_1, \dots, q_n, p_n\}$ системы (обозначим его Γ) задана точка, соответствующая её начальному (в момент времени $t = 0$) состоянию. Дальнейшее её движение представляется единственной кривой в этом пространстве,

$$\mathbf{X}(t) = \{q_1(t), p_1(t); \dots; q_n(t), p_n(t)\} \quad (6.1.2)$$

проходящей через эту начальную точку и параметризованной временем t , указывающим для каждой точки время прибытия в неё системы. Движение этой *одной в фазовом пространстве* точки, представляющей движение системы, возможно, состоящей из огромного числа материальных точек в физическом трёхмерном пространстве, описывается с помощью канонических уравнений

$$\dot{q}_i(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i},$$

но может быть также представлено посредством *фазовой плотности распределения*¹:

$$f_n(q_1, p_1; \dots; q_n, p_n; t) = \delta(q_1 - q_1(t))\delta(p_1 - p_1(t)) \dots \\ \dots \delta(q_n - q_n(t))\delta(p_n - p_n(t)).$$

Следует чётко понимать, что q_i здесь вовсе не является сокращённым обозначением функции $q_i(t)$, как это часто подразумевается в подобных случаях: q_i здесь координата произвольной точки фазового пространства, тогда как $q_i(t)$ обозначает соответствующую координату представляющей точки системы в момент измерения t , однозначно определяемую гамильтонианом системы и заданными начальными условиями. Очевидно, фазовая плотность неотрицательна и удовлетворяет нормировке

$$\int_{\Gamma} dq_1 dp_1 \dots dq_n dp_n f_n(q_1, p_1; \dots; q_n, p_n; t) = 1.$$

Существуют, однако, ситуации, когда начальное состояние системы точно не определено. Строго говоря, *оно всегда точно не определено*: мы не можем указать значение вещественной переменной с абсолютной точностью, всегда останется какая-то неопределённость, обусловленная неизбежной погрешностью измерений и вычислений. В большинстве случаев с этим легко примириться, но не всегда. Например, в астрономических задачах: обнаружив космическое тело, летящее в сторону Земли с ожидаемым временем полёта в несколько десятков лет, мы не можем точно предсказать, упадёт оно на Землю или нет, из-за некоторой неопределённости вычисляемой траектории, одной из причин которой является неопределённость начальных условий. В подобных случаях естественно рассматривать множество возможных вариантов, чтобы оценить вероятность катастрофического события. Представление о множестве взаимно-независимых траекторий системы², отвечающих множеству допустимых начальных условий, было введено Дж.У.Гиббсом и называется *статистическим*

¹Физики часто используют для таких функций термин «функции распределения», но мы находимся на границе с теорией вероятностей и, уважая её законы, будем называть эту функцию плотностью распределения.

²Наглядности ради многие авторы говорят о множестве несвязанных друг с другом, например, бесконечно удалённых или полностью изолированных друг от друга *тождественных механических систем* (копий исходной системы), но такой образ представляется мне чересчур громоздким.

ансамблем Гиббса. Концепция статистического ансамбля сыграла решающую роль в обосновании термодинамики. Анализируя поведение термодинамической системы, мы имеем дело с механической системой с огромным числом степеней свободы, начальные значения которых (значения координат, импульсов и моментов импульсов всех составляющих её молекул) мы знать не можем. Опираясь на физический смысл температуры и других термодинамических характеристик, мы можем только указать допустимую область фазового пространства, отвечающую данному макросостоянию системы, распределение же представляющих ансамбль точек внутри этой области остаётся на наше усмотрение. Задача несколько упрощается в случае рассмотрения систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия. Так, если известно, что полная энергия системы³ заключена между значениями E_1 и E_2 , распределение представляющих точек равновесной системы берётся равномерным в фазовом слое

$$E_1 < \mathcal{H}(q_i, p_i) < E_2,$$

как отвечающее минимальной информации о действительном распределении. Такой ансамбль называется *микрочаноническим* и, наряду с двумя другими популярными равновесными ансамблями – каноническим и большим каноническим, составляет классическую основу термодинамики.

Весь этот ансамбль есть не более чем продукт нашего воображения, ничто не мешает нам представить число его членов N очень большим и даже перейти к непрерывному пределу – вместо *газа невзаимодействующих представляющих точек в фазовом пространстве* говорить о *фазовой жидкости*. Мы можем также вернуться к единственной копии системы, положив $N = 1$, тогда фазовая плотность f_n может быть интерпретирована как плотность распределения вероятности одной случайной точки в фазовом пространстве, а

$$dW \equiv f_n(q_1, p_1; \dots; q_n, p_n; t) dq_1 dp_1 \dots dq_n, dp_n$$

– как вероятность того, что в момент времени t представляющая систему точка окажется в $2n$ -мерном элементарном параллелепипеде $(q_1, q_1 + dq_1) \times \dots \times (p_n, p_n + dp_n)$. Такая постановка задачи может быть обусловлена спецификой эксперимента (например, эксперимента по рассеянию, где рассматривается совокупность невзаимодействующих друг с другом частиц с самыми разными прицельными пара-

³Здесь мы возвращаемся к обычному обозначению энергии.

метрами, см. 1.8.1), необходимостью учёта погрешности в задании начальных условий⁴ (астрономические задачи), особенностью теоретической задачи (динамические системы в состоянии теплового равновесия с окружающей средой), удобством аналитического описания совокупности решений рассматриваемой системы уравнений (теоретические построения в аналитической динамике).

6.1.2 Уравнение Лиувилля

Рассмотрим основные свойства фазовой жидкости консервативной системы, то есть системы, гамильтониан которой не зависит явно от времени.

Движение фазовой жидкости обратимо во времени.

Это значит, что если мы «заснимем» движение этой жидкости в интервале времени (t_0, t_f) на видеокамеру, а затем «прокрутим» фильм в обратном направлении – от t_f к t_0 , все динамические законы будут соблюдены и ни один эксперт не сможет отличить прямой процесс от обратного – оба могут быть осуществлены в природе (при подходящих начальных условиях, разумеется). Это легко усмотреть непосредственно из уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_i(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i},$$

заменив t на $t' = -t$ и учтя, что знаки импульсов при этом меняются на противоположные, а знаки координат остаются прежними. Это свойство уравнений называется *инвариантностью относительно обращения времени*.

Траектория любой точки фазовой жидкости есть либо простая замкнутая кривая, либо кривая, никогда не пересекающая себя. Траектории двух различных точек никогда не пересекаются.

Это свойство также следует из структуры гамильтоновых уравнений: первый порядок по времени указывает на то, что начальная

⁴Строго говоря, мы никогда не можем задать начальные условия системы с абсолютной точностью. В большинстве практических случаев неточность эта не оказывает существенного влияния на результат, если мы не интересуемся большими временами. В случае больших времен, однако, например, в астрономических или термодинамических задачах, влияние это может стать весьма существенным или даже определяющим.

точка траектории полностью и единственным образом определяет всю дальнейшую (а как показано выше, и предыдущую) судьбу системы. Пересечение двух траекторий в точке $\{q_i^*, p_i^*\}$ означало бы, что взятая в качестве начального условия, эта точка не определяет однозначно траекторию системы, что противоречит теории дифференциальных уравнений.



Фазовая жидкость течёт непрерывно: нет ни источников, ни стоков.

Поскольку копии системы в ансамбле не исчезают и не возникают, то изменение числа точек в любой области Γ' фазового пространства Γ должно быть равно разности между числом входящих в неё и числом выходящих из неё точек за то же самое время. Отнеся это изменение к единице времени, получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma'} f_n d\Gamma = - \int_{S'} \mathbf{n} \mathbf{v} f_n dS,$$

где $d\Gamma = dq_1 dp_1 \dots dq_n dp_n$ – элемент объёма фазового пространства, dS – элемент поверхности S' , ограничивающей объём Γ' , $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_{2n})$ – вектор внешней нормали к этому элементу,

$$\mathbf{v} = (\dot{q}_1, \dot{p}_1; \dots; \dot{q}_n, \dot{p}_n)$$



– $2n$ -мерный вектор скорости фазовой жидкости в точке интегрирования. С помощью теоремы Остроградского-Гаусса, обобщённой на $2n$ -мерное пространство, правая часть уравнения преобразуется к виду

$$- \int_{S'} \mathbf{n} \mathbf{v} f_n dS = - \int_{\Gamma'} \text{div}_{2n}(\mathbf{v} f_n) d\Gamma.$$

В результате получим уравнение

$$\int_{\Gamma'} d\Gamma \left[\frac{\partial f_n}{\partial t} + \text{div}_{2n}(\mathbf{v} f_n) \right] = 0,$$

где

$$\text{div}_{2n}(\mathbf{v} f_n) \equiv \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial(\dot{q}_i f_n)}{\partial q_i} + \frac{\partial(\dot{p}_i f_n)}{\partial p_i} \right]$$

– дивергенция $2n$ -мерного вектора плотности тока $\mathbf{v}f_n$. Поскольку область Γ' произвольна, должно быть равно нулю и само подынтегральное выражение:

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \operatorname{div}_{2n}(\mathbf{v}f_n) = 0,$$

или, в проекциях

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial(\dot{q}_i f_n)}{\partial q_i} - \frac{\partial(\dot{p}_i f_n)}{\partial p_i} \right] = 0. \quad (6.1.3)$$

Отметим очень важный момент: уравнение (6.1.3) не включает в себя никакой информации о законе движения систем, образующих ансамбль, констатируя лишь факт, что число этих воображаемых копий исходной системы и, стало быть, число точек, представляющих их в фазовом пространстве, не изменяется.

Фазовая жидкость несжимаема.

Выполним следующие преобразования отдельного слагаемого суммы, входящей в уравнение непрерывности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\dot{q}_i f_n)}{\partial q_i} + \frac{\partial(\dot{p}_i f_n)}{\partial p_i} &= \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} f_n + \dot{q}_i \frac{\partial f_n}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} f_n + \dot{p}_i \frac{\partial f_n}{\partial p_i} = \\ &= \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) f_n + \left(\frac{\partial f_n}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f_n}{\partial p_i} \dot{p}_i \right). \end{aligned}$$

Согласно каноническим уравнениям

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_i} = 0,$$

и в уравнении непрерывности остаётся только вторая скобка. Полученное в результате выражение называется *теоремой Лиувилля*⁵:

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_n}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f_n}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0. \quad (6.1.4)$$

⁵ Впрочем, чтобы прийти к нему, достаточно просто положить, что \dot{q}_i не зависит от q_i , а \dot{p}_i от p_i . Приводимый вывод показывает, что это предположение автоматически следует из канонических уравнений, но не исключает из области применимости уравнения (6.1.4) неканонические ансамбли. Более общим является, конечно, уравнение (6.1.3).

Левая часть представляет собой полную производную по времени от функции $f_n = f_n(q_1(t), p_1(t); \dots; q_n(t), p_n(t))$, так что (6.1.4) эквивалентно уравнению

$$\frac{df_n}{dt} = 0,$$

утверждающему, что плотность представляющих точек в окрестности любой из них остаётся в процессе движения постоянной. Следовательно, элементарный объём, занимаемый «помеченными» точками этой окрестности, может изменять свою форму, но не изменяет своей величины: *фазовая жидкость несжимаема*.

Выразив \dot{q}_i и \dot{p}_i через производные от функции Гамильтона по p_i и q_i , придем к третьей форме теоремы (уравнения) Лиувилля

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = \mathcal{L}f_n$$

с оператором Лиувилля

$$\mathcal{L} = -\{\mathcal{H}, f_n\},$$

содержащим скобки Пуассона.

6.1.3 Формальное решение уравнения Лиувилля

Если система консервативна (замкнута), гамильтониан не зависит явно от времени и формальное решение задачи Коши

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \mathcal{L}f(t), \quad f(t_0) = u, \quad (6.1.5)$$

(нижний индекс n здесь и ниже для краткости опущен) можно представить в виде, аналогичном решению обыкновенного дифференциального уравнения с постоянным коэффициентом:

$$f(t) = \exp\{(t - t_0)\mathcal{L}\}u. \quad (6.1.6)$$



Жозеф Лиувиль (1809 – 1882) – французский математик. Известен исследованием краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка и доказательством фундаментального теорема механики (теорема Лиувилля, теорема об интегрировании канонических уравнений динамики др.).

Здесь f и u , как и выше, функции фазовых переменных системы, а операторная экспонента понимается в смысле разложения в степенной ряд

$$\exp \{(t - t_0)L\} = 1 + (t - t_0)L + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 L^2 + \dots + \frac{1}{n!}(t - t_0)^n L^n + \dots \quad (6.1.7)$$

Если же система неконсервативна, то оператор Лиувилля зависит от времени, $L = L(t)$, и соответствующее решение задачи Коши

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = L(t)f(t), \quad f(t_0) = u, \quad (6.1.8)$$

получаемое методом последовательных приближений, даётся формулой

$$f(t) = E(t, t_0; L(\cdot))u,$$

где

$$\begin{aligned} E(t, t_0; L(\cdot)) = & 1 + \int_{t_0}^t dt_1 L(t_1) + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 L(t_2)L(t_1) + \dots \\ & \dots + \int_{t_0}^t dt_n \dots \int_{t_0}^{t_3} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 L(t_n) \dots L(t_2)L(t_1) + \dots \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Очевидно, что в отсутствие временной зависимости оператора L ряд (6.1.9) превращается в (6.1.7) за счёт перестановок этого оператора с самим собой, однако наличие такой зависимости, например, в результате взаимодействия с другой системой, препятствует этой операции: «значения» оператора L в разные моменты времени не коммутируют теперь друг с другом. Однако следующий искусственный приём, придуманный американским физиком-теоретиком Дайсоном, позволяет вернуть решению (6.1.9) привычную экспоненциальную форму, правда, ценой введения специального *хронологического оператора*. Покажем идею этого пробразования на третьем члене разложения (6.1.9). Элементарная замена переменных по правилу Дирихде даёт

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 L(t_2)L(t_1) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 L(t_2)L(t_1) = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 L(t_1)L(t_2).$$

Отсюда легко получается формула

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 L(t_2)L(t_1) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_2 \left\{ \int_{t_0}^{t_2} dt_1 L(t_2)L(t_1) + \int_{t_2}^t dt_1 L(t_1)L(t_2) \right\}.$$

Введение хронологического оператора \mathcal{T} формулой

$$\mathcal{T} \{L(t_1)L(t_2)\} = \begin{cases} L(t_2)L(t_1), & t_2 > t_1; \\ L(t_1)L(t_2), & t_2 < t_1, \end{cases}$$

позволяет нам представить рассматриваемое слагаемое в виде

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 L(t_2)L(t_1) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{T} \{L(t_1)L(t_2)\}.$$

Действуя аналогичным образом, можно доказать соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t dt_n \dots \int_{t_0}^{t_3} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 L(t_n) \dots L(t_2)L(t_1) = \\ & = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_n \dots \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{T} \{L(t_n) \dots \mathcal{L}(t_2)L(t_1)\}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \end{aligned}$$

применение которого к разложению (6.1.9) позволяет записать решение задачи Коши с явно зависящим от времени оператором Лиувилля (6.1.8) в элегантном виде:

$$f(t) = \mathcal{T} \exp \left\{ \int_{t_0}^t d\tau L(\tau) \right\} u. \quad (6.1.10)$$

Отметим, что описанное усложнение процедуры решения дифференциального уравнения с переменным коэффициентом вызвано операторным характером последнего: будь этот коэффициент обычной (числовой) функцией, введения хронологического оператора не потребовалось бы (хотя и наличие его не портит результата – выражение (6.1.10) остаётся справедливым и в этом случае).

6.1.4 Частичные плотности распределения

Мы будем рассматривать системы тождественных частиц: их массы m_i и потенциалы парных взаимодействий φ_{ij} одинаковы. Удобно перейти от обобщённых переменных к координатам и скоростям отдельных частиц (молекул) в векторных обозначениях: $(q_1, q_2, q_3) \Rightarrow \vec{r}_1$, $(p_1, p_2, p_3) \Rightarrow \vec{p}_1 = m\vec{v}_1$ и т.д. Соответственно, $n \Rightarrow 3N$ и вероятность

$$dW = f_n(q_1, p_1; \dots; q_n, p_n; t) dq_1 dp_1 \dots dq_n dp_n$$

будет записываться в виде

$$dW = f_N(\vec{r}_1, \vec{v}_1; \dots; \vec{r}_N, \vec{v}_N) d\vec{r}_1 d\vec{v}_1 \dots d\vec{r}_N d\vec{v}_N,$$

где f_N симметрична относительно перестановок пар своих аргументов, разделённых точкой с запятой.

В действительности, эта функция даёт избыточную для описания процесса информацию: в эксперименте никогда не измеряются координаты и скорости всех молекул в сосуде в данный момент времени (напомним, что это и невозможно: обычно число молекул в макроскопическом лабораторном объёме порядка числа Авогадро, $N = 10^{23} \div 10^{24}$). Самое большее, что может интересовать, – это распределения молекул по скоростям и координатам, но чаще ограничиваются изучением средних значений и флуктуаций. Чтобы вычислять эти величины, достаточно знать функции распределения с небольшим числом l переменных, называемые *l-частичными распределениями*. Зная связь этих функций с f_n , можно вывести и уравнения для них, пригодные уже для решения реальных задач.

Обозначим пары векторных переменных (\vec{r}_i, \vec{v}_i) , относящиеся к отдельной частице, одной буквой x_i , так что $d\vec{r}_i d\vec{v}_i = dx_i$. Пусть нас интересует среднее по ансамблю значение некоторой аддитивной функции состояния

$$Y^{(1)} = \sum_{i=1}^N y(x_i).$$

Очевидно, в силу перестановочной симметрии тождественных частиц

$$\begin{aligned} \langle Y^{(1)} \rangle &= \int dx_1 \dots \int dx_n \sum_{i=1}^N y(x_i) f_N(x_1, \dots, x_N) = \\ &= N \int dx_1 y(x_1) \bar{f}_1(x_1), \end{aligned}$$

где

$$\bar{f}_1(x_1) \equiv \int dx_2 \dots \int dx_N f_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

– *одночастичная функция распределения*. Назовём функцию

$$n_1(x) = N\bar{f}_1(x)$$

одночастичной плотностью, представляющей собой концентрацию частиц в x -пространстве: произведение $n_1(x)dx$ даёт среднее число частиц в dx . Укажем на различие в их нормировках:

$$\int \bar{f}_1(x) dx = 1,$$

но

$$\int n_1(x) dx = N.$$

Аналогичным образом, при вычислении среднего значения двойной суммы

$$Y^{(2)} = \sum_{i \neq j} y(x_i, x_j)$$

получаем:

$$\begin{aligned} \langle Y^{(2)} \rangle &= \int dx_1 \dots \int dx_N \sum_{i \neq j} y(x_i, x_j) f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) = \\ &= \int dx_1 \int dx_2 y(x_1, x_2) n_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} n_2(x_1, x_2) &= N(N-1)\bar{f}_2(x_1, x_2) = \\ &= N(N-1) \int dx_3 \dots \int dx_N f_N(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N). \end{aligned}$$

– *двухчастичная плотность*. Произведение $n_2(x_1, x_2)dx_1dx_2$ даёт среднее число пар частиц, одна из которых находится в dx_1 , а другая – в dx_2 . Заметим, что

$$N(N-1) = \frac{N!}{(N-2)!},$$

так что

$$\int \int n_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = N(N-1).$$

Интеграл этот даёт *удвоенное* число пар, но так и должно быть: выделив два непересекающихся элемента dx' и dx'' , мы видим, что в процессе интегрирования пары частиц, принадлежащих этим элементам, будут учтены дважды: когда $dx_1 = dx'$, $dx_2 = dx''$ и когда $dx_1 = dx''$, $dx_2 = dx'$. Поэтому, например, среднее значение потенциальной части внутренней энергии системы попарно взаимодействующих частиц запишется в виде

$$\left\langle \sum_{j>i=1}^N U(x_i, x_j) \right\rangle = \frac{1}{2} \int \int U(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Частичная плотность l -го порядка определяется соотношением

$$\begin{aligned} n_l(x_1, \dots, x_l) &= \frac{N!}{(N-l)!} \bar{f}_l(x_1, \dots, x_l) = \\ &= \frac{N!}{(N-l)!} \int dx_{l+1} \dots \int dx_N f_N(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) \end{aligned}$$

и удовлетворяет нормировке

$$\int \dots \int n_l(x_1, \dots, x_l) dx_1 \dots dx_l = \frac{N!}{(N-l)!}.$$

В частности, при максимальном значении $l = N$

$$n_N(x_1, \dots, x_N) = N! f_N(x_1, \dots, x_N)$$

и

$$\int \dots \int n_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N = N!$$

Пример: пуассоновский ансамбль частиц

Рассмотрим важный с теоретической точки зрения пуассоновский ансамбль случайных точек в некотором пространстве X . Разобьём всё это пространство на малые (впрочем, малость тут не принципиальна: она нужна лишь для того, чтобы мы смогли пользоваться дифференциалами) непересекающиеся элементы dx_1, dx_2, \dots, dx_k и обозначим через $N(dx_1), N(dx_2), \dots, N(dx_k)$ – случайные числа частиц в них. По определению, множество этих частиц образует пуассоновский ансамбль, если при любом разбиении случайные числа $N(dx_i)$ независимы и распределены по закону Пуассона:

$$P(N(dx_i) = k) = \frac{\langle N(dx_i) \rangle^n}{n!} e^{-\langle N(dx_i) \rangle}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Характерным свойством пуассоновского распределения является равенство среднего и дисперсии:

$$\langle N(dx) \rangle = \langle N^2(dx) \rangle - \langle N(dx) \rangle^2.$$

Найдём двухчастичную плотность пуассоновского ансамбля. Пусть элементы dx_1 и dx_2 не пересекаются. Тогда среднее число пар частиц, одна из которых в dx_1 , а другая – в dx_2 , равно

$$n_2(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \langle N(dx_1)N(dx_2) \rangle = \langle N(dx_1) \rangle \langle N(dx_2) \rangle = n_1(x_1)n_1(x_2)dx_1dx_2.$$

Пусть теперь dx_1 и dx_2 совпадают, $dx_1 = dx_2 = dx$. Среднее число пар в этом элементе

$$\begin{aligned} n_2(x, x)dx dx &= \langle N(dx)[N(dx) - 1] \rangle = \langle N^2(dx) \rangle - \langle N(dx) \rangle = \\ &= \langle N(dx) \rangle^2 = n_1(x)n_1(x)dx dx. \end{aligned}$$

Таким образом, для двухчастичной плотности пуассоновского ансамбля

$$n_2(x_1, x_2) = n_1(x_1)n_1(x_2),$$

и, вообще, для плотности произвольного порядка

$$n_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = n_1(x_1)n_1(x_2) \dots n_1(x_k).$$



6.1.5 Цепочка уравнений ББГКИ

Уравнение Лиувилля является важнейшим инструментом теории систем многих частиц, однако само по себе оно слишком абстрактно для решения конкретных задач. Путь к получению уравнений, более полезных для практических применений, лежит через сокращение числа независимых переменных. Одним из таких методов является построение так называемой цепочки ББГКИ (Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда-Ивона) – последовательности кинетических уравнений для частичных плотностей n_1, n_2, \dots, n_N .

Подставим гамильтониан

$$\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_N^0 + \mathcal{H}'_N, \quad \mathcal{H}_N^0 = \sum_{i=1}^N \frac{mv_i^2}{2}, \quad \mathcal{H}'_N = \sum_{j>i}^N U_{ij}, \quad U_{ij} \equiv U(r_{ij}),$$

в уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{v}_j} \frac{\partial f_N}{\partial \vec{r}_j} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}_j} \frac{\partial f_N}{\partial \vec{v}_j} \right) = 0.$$

В результате получим:

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = - \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \frac{\partial f_N}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{j>i=1}^N \Theta_{ij} f_N, \quad (6.1.11)$$

где

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{m} \frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_i} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} - \frac{\partial}{\partial \vec{v}_j} \right),$$

– оператор парных взаимодействий частиц системы между собой.

Обозначим через $\mathbf{x}_{i \rightarrow j}$ последовательность пар $(\vec{r}_i, \vec{v}_i), \dots, (\vec{r}_j, \vec{v}_j)$, а через $d\mathbf{x}_{i \rightarrow j}$ – произведение их дифференциалов $d\vec{r}_i d\vec{v}_i \dots d\vec{r}_j d\vec{v}_j$. Умножим обе части уравнения (6.1.11) на $d\mathbf{x}_{i+1 \rightarrow N}$ и проинтегрируем по этим переменным:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int f_N(\mathbf{x}_{1 \rightarrow N}) d\mathbf{x}_{1+1 \rightarrow N} = \\ & = - \sum_{i=1}^N \int \vec{v}_i \frac{\partial f_N(\mathbf{x}_{1 \rightarrow N})}{\partial \vec{r}_i} d\mathbf{x}_{1+1 \rightarrow N} + \sum_{j>i=1}^N \int \Theta_{ij} f_N(\mathbf{x}_{1 \rightarrow N}) d\mathbf{x}_{1+1 \rightarrow N}. \end{aligned}$$

В левой части

$$\int f_N(\mathbf{x}_{1 \rightarrow N}) d\mathbf{x}_{1+1 \rightarrow N} = \bar{f}_l(\mathbf{x}_{1 \rightarrow l}).$$

Рассмотрим первую сумму справа, разложив её на две части: с $i \leq l$ и $i > l$. Пусть x_i – одна из проекций вектора \vec{r}_i второй части суммы. Выделим в $d\mathbf{x}_{1+1 \rightarrow N}$ соответствующий дифференциал и выпишем интеграл:

$$\int_a^b \frac{\partial f_N(\dots, x_i, \dots)}{\partial x_i} dx_i = f_N(\dots, x_i, \dots) \Big|_{x_i=a}^{x_i=b}.$$

Точки a и b лежат на границах системы, где f_N обычно полагается равной нулю или, при периодических условиях, принимает равные значения. В обоих случаях этот интеграл, а значит, и все слагаемые с $i > l$ обращаются в нуль. В результате остаётся лишь первая часть:

$$\sum_{i=1}^N \int \vec{v}_i \frac{\partial f_N(\mathbf{x}_{1 \rightarrow N})}{\partial \vec{r}_i} d\mathbf{x}_{1+1 \rightarrow N} = \sum_{i=1}^l \vec{v}_i \frac{\partial \bar{f}_l(\mathbf{x}_{1 \rightarrow l})}{\partial \vec{r}_i}$$

Теперь – последняя, двойная сумма. Разобьём её на три части:

$$\sum_{j>i=1}^N = \sum_{l \geq j > i=1}^N + \sum_{j>l, i \leq l}^N + \sum_{j>l, i > l}^N.$$

В первой части оператор Θ выносится из-под интеграла и слагаемые принимают вид:

$$\Theta_{ij} \bar{f}_l(\mathbf{x}_{1 \rightarrow l}; t).$$

Для слагаемых второй части в силу неразличимости частиц с номерами $l + 1, l + 2, \dots, N$ получаем

$$(N - l) \int \Theta_{i,l+1} \bar{f}_{l+1}(\mathbf{x}_{1 \rightarrow l+1}) dx_{l+1}.$$

Наконец, интегрирование по скоростям \vec{v}_i и \vec{v}_j в слагаемых третьей части даёт нуль (так как $f_n \rightarrow \infty$ при $v_i \rightarrow \infty$).

Объединяя эти результаты, умножая на $N!/(N - l)!$ и учитывая соотношения между частичными функциями распределения и частичными плотностями, получим для последних систему уравнений

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^l \left(\vec{v}_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{j>i=1}^l \Theta_{ij} \right) \right] n_l(\mathbf{x}_{1 \rightarrow l}, t) = \\ & = \sum_{i=1}^l \int \Theta_{i,l+1} n_{l+1}(\mathbf{x}_{1 \rightarrow l+1}, t) dx_{l+1}, \quad 1 \leq l \leq N, \end{aligned}$$

которые и представляют собой цепочку ББГКИ:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} \right) n_1(\vec{r}_1, \vec{v}_1, t) = \frac{1}{m} \int \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} n_2(\vec{r}_1, \vec{v}_1; \vec{r}_2, \vec{v}_2; t) d\vec{r}_2 d\vec{v}_2, \quad (6.1.12)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{v}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} + \vec{v}_2 \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} \right) - \frac{1}{m} \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \vec{v}_2} \right) \right] n_2(\vec{r}_1, \vec{v}_1; \vec{r}_2, \vec{v}_2; t) =$$

$$= \frac{1}{m} \int \int \left(\frac{\partial U_{13}}{\partial \vec{r}_1} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} + \frac{\partial U_{23}}{\partial \vec{r}_2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_2} \right) n_3(\vec{r}_1, \vec{v}_1; \vec{r}_2, \vec{v}_2; \vec{r}_3, \vec{v}_3; t) d\vec{r}_3 d\vec{v}_3,$$

.....

$$\frac{\partial}{\partial t} n_N(\vec{r}_1, \vec{v}_2; \dots; \vec{r}_N, \vec{v}_N; t) + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{v}_j} \frac{\partial n_N}{\partial \vec{r}_j} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}_j} \frac{\partial n_N}{\partial \vec{v}_j} \right) = 0.$$

При выводе этой цепочки сделаны предположения о том, что f_N стремится к нулю, когда один из импульсов стремится к бесконечности или одна из координат выходит за пределы сосуда. В остальном система является точной, но это несколько не помогает её решению: соседние уравнения последовательно зацепляются друг за друга, и начать можно только с последнего и затем «подниматься вверх по лесенке», но ниже-то как раз и есть уравнение Лиувилля, ради решения которого мы и построили эту лесенку.

Бросим взгляд на эту лесенку ещё раз. Уравнение Лиувилля – в самом низу, так сказать, фундамент всей лесенки, нас же обычно интересует самая верхняя её «перекладинка» с n_1 и n_2 , от силы – две верхних, содержащих ещё и n_3 . Можно, однако, предположить (и численное моделирование в целом подтверждает это предположение), что по мере удаления от верхнего уровня функции n_l оказывают всё меньшее влияние на одночастичную плотность n_1 . Это наводит на мысль о возможности остановить «процесс спуска», не доходя до самого основания, путём, например, простого отбрасывания очередной функции n_{l+1} . Но отбрасывание это означает, что полагаем её равной нулю. Если l – мало, это может оказаться слишком грубым приближением. Более мягкий способ преждевременного замыкания системы состоит в замене n_{l+1} не нулём, а какой-нибудь более правдоподобной и известной к этому времени функцией.

6.1.6 О влиянии неточности в начальных условиях

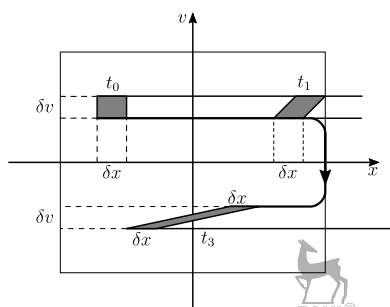


Рис. 6.1. Статистический ансамбль для частицы на отрезке с отражающими стенками

случайно совпадёт с истинным значением этой величины определяется отношением меры истинного значения («длины точки») к мере (длине) всего интервала, и поэтому равна нулю. По этой же причине и начальные условия движения материальной точки не могут быть абсолютно точно заданы, а всегда будут содержать некоторую неопределённость.

Рассмотрим в качестве простейшего примера одномерное движение частицы на отрезке с упруго отражающими концевыми точками. Её траектория в плоскости (x, v) имеет вид прямоугольного контура, по которому в направлении движения часовой стрелки движется представляющая точка. Движение периодическое, динамическое состояние системы (координата и скорость) хорошо предсказуемо. Примем теперь во внимание, что нет приборов, могущих абсолютно точно определить координату и скорость. Обозначим через δx и δv погрешности измерений и изобразим область неопределённости начальных значений. Она будет иметь вид

Мы уже говорили ранее, при обсуждении параболических траекторий в кулоновском поле, что такие решения уравнения движения физического смысла не имеют, поскольку ни приготовить систему с энергией, строго равной нулю, а ни меньшей и ни большей его, ни убедиться в этом, даже если бы такая система существовала, мы не в состоянии. Если измеряемая величина является вещественной, а не целой, её измерение укажет лишь интервал, пусть и узкий, но всё-таки конечной длины интервал, внутри которого и будет находиться истинное значение этой величины. Вероятность же того, что измеренное значение (которое всегда выражается ограниченной десятичной

прямоугольничка указанных размеров. Истинное состояние представляется какой-то его точкой, но какой именно – неизвестно, ею может оказаться любая из его точек. Заполним мысленно эту начальную область неопределённости множеством несовпадающих равномерно распределённых точек (рис. 6.1). Они и представляют собой отдельные члены статистического ансамбля. Пусть часы, точки придут в движение, такое же, каким было движение первичной точки. Однако, точки, лежащие на верхнем основании прямоугольничка, будут двигаться чуть быстрее его центральной точки, а на нижнем – чуть медленнее. Прямоугольник превратится в параллелограмм, длина которого (расстояние между крайней левой и крайней правой точек разных оснований) будет увеличиваться с течением времени. Через несколько оборотов параллелограмм превратится в ленту, наматывающуюся на разрешённую область. Подождав ещё немного, мы увидим равномерную штриховку, всё более тонкие линии которой всё гуще заполняют разрешённую область. Фазовый объём ленты при этом не изменился, он по-прежнему равен $\delta x \cdot \delta v$, но если мы выполним измерения тем же прибором, он не уловит тонкой структуры полученного распределения, а покажет равномерное распределение фазовой жидкости в разрешённом пространстве, которое никогда больше не соберётся в начальный прямоугольничек; движение непериодическое. Таким образом, если в качестве энтропии принять величину, пропорциональную логарифму заглублённого измерительным прибором фазового объёма, мы увидим возрастание энтропии.

Простой этот пример даёт механическую интерпретацию того, каким образом согласуется свойство несжимаемости фазовой жидкости с представлением о растекании её по всей допустимой фазовой области при необратимом стремлении к равновесию. Гипотеза о равномерном распределении представляющих равновесный ансамбль точек в допустимой области лежит в основе современной термодинамики, сам такой ансамбль называется *микростатистическим*.

6.1.7 Упражнения

1. Найдите среднее значение и дисперсию распределения Пуассона.
2. Покажите, что однородному уравнению (6.1.8) с ненулевым начальным условием эквивалентно неоднородное уравнение $\partial f^0(t)/\partial t - L^0 f^0(t) = f(0)\delta(t)$ с нулевым условием $f(t) = 0$, $t < 0$.
3. Докажите соотношение (6.1.9).

6.2 Газодинамика

6.2.1 Уравнение Больцмана

В этом разделе мы рассмотрим кинетику разрежённых газов, состоящих из нейтральных молекул. Радиус взаимодействия таких молекул

очень мал, поэтому и время взаимодействия молекул мало по сравнению с временами, разделяющими последовательные взаимодействия летящей молекулы с другими молекулами газа. Этот факт является основанием для использования концепции столкновений и, как следствие, Больцмановской динамики газа.

Обратимся к уравнению (6.1.12) предыдущего раздела. Согласно каноническим уравнениям

$$\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} = \frac{\partial \mathcal{H}_{12}}{\partial \vec{r}_1} \frac{d\vec{p}_1}{dt},$$

и подынтегральная функция может быть записана в виде:

$$\frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} \frac{\partial n_2}{\partial \vec{v}_1} = - \frac{d\vec{p}_1}{dt} \frac{\partial n_2}{\partial \vec{v}_1}.$$

Выполним усреднение уравнения (6.1.12) по малому интервалу времени τ : умножим обе части его

$$\frac{\partial n_1(\vec{r}_1, \vec{v}_1, t)}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial n_1(\vec{r}_1, \vec{v}_1, t)}{\partial \vec{r}_1} = - \int \int \frac{d\vec{v}_1}{dt} \frac{\partial n_2}{\partial \vec{v}_1} d\vec{r}_2 d\vec{v}_2$$

на dt/τ и проинтегрируем от $t - \tau$ до t . Результат этой операции отметим чертой над усредняемой величиной:

$$\frac{\overline{\partial n_1(\vec{r}_1, \vec{v}_1, t)}}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\overline{\partial n_1(\vec{r}_1, \vec{v}_1, t)}}{\partial \vec{r}_1} = - \int \int \frac{d\vec{v}_1}{dt} \frac{\overline{\partial n_2}}{\partial \vec{v}_1} d\vec{r}_2 d\vec{v}_2.$$

С оговоркой, касающейся малости интервала τ , достаточной, чтобы пренебречь изменением координат рассматриваемой пары за это время, интегральный член преобразуется к виду

$$- \int \int \frac{d\vec{v}_1}{dt} \frac{\overline{\partial n_2}}{\partial \vec{v}_1} d\vec{r}_2 d\vec{v}_2 = - \int \int \left[\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \frac{dn_2(\dots, \vec{v}_1(t'), \dots)}{dt'} dt' \right] d\vec{r}_2 d\vec{v}_2 =$$



Людвиг Больцман (1844 – 1906) – австрийский физик-теоретик, основатель статистической механики и молекулярно-кинетической теории.

$$= \frac{1}{\tau} \int \int [n_2(\dots, \vec{v}_1(t - \tau), \dots) - n_2(\dots, \vec{v}_1(t), \dots)] d\vec{r}_2 d\vec{v}_2. \quad (6.2.1)$$

Если продолжать считать траектории частиц гладким (непрерывными и дифференцируемыми в координатно-скоростном пространстве), то при $t \rightarrow 0$ это выражение вернётся к своему исходному виду – правой части уравнения (6.1.12) (чем меньше интервал τ , тем меньше изменения скоростей и координат за это время). Но уравнение (6.2.1) допускает и иную интерпретацию – скачкообразное изменение скоростей. Если радиус взаимодействия молекул и соответствующее ему время $\tau_{вз}$ достаточно малы по сравнению с расстоянием и временем, на которых уже стоит учитывать изменение концентрации сталкивающихся частиц (эти величины порядка длины и времени свободного пробега молекул), вместо $\tau \rightarrow 0$ можно взять $\tau \rightarrow \tau_{вз}$. В этом же пределе сохраняется и интегральный оператор (правда, с меньшим числом переменных: учёт законов сохранения при столкновениях уменьшает их число). Мы приходим, таким образом, к модели столкновений, рассмотренных в разделе 2.3.

Обозначая предельные значения $\vec{v}_i(t - 0)$ через \vec{v}_{i0} и опуская чисто технические (впрочем, легко воспроизводимые путём несложных построений) детали, запишем уравнение (6.1.12) в модели столкновений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial n_1(\vec{r}_1, \vec{v}_1, t)}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial n_1(\vec{r}_1, \vec{v}_1, t)}{\partial \vec{r}_1} = \\ & = \int d\vec{\Omega} \int d\vec{v}_{20} \sigma_0 w(\vec{\Omega}) |\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}| [n_2(\vec{r}, \vec{v}_{10}; \vec{r}, \vec{v}_{20}; t) - n_2(\vec{r}, \vec{v}_1; \vec{r}, \vec{v}_2; t)]. \end{aligned}$$

Здесь \vec{r} – точка столкновения $\{\vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}\} \rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $\vec{\Omega}$ – единичный вектор рассеяния, описывающий поворот вектора относительной скорости из начального положения $v_{10} - v_{20}$ в конечное положение $v_1 - v_2$, а $\sigma_0 w(\vec{\Omega})$ – дифференциальное сечение рассеяния в системе центра масс.

Мы уже сделали один шаг на пути к широко известному кинетическому уравнению: оставили в уравнении только двухчастичные (бинарные) столкновения и пренебрегли тройными и более высокого порядка столкновениями. Это приближение справедливо, когда газ достаточно разрежён. Справедливость второго приближения, составляющего вместе с первым основу кинетической теории Л. Больцмана,

$$n_2(\vec{r}, \vec{v}_1; \vec{r}, \vec{v}_2; t) = n_1(\vec{r}, \vec{v}_1; t) n_1(\vec{r}, \vec{v}_2; t), \quad (6.2.2)$$

менее очевидна. Предположение это называется *гипотезой о молекулярном хаосе*. Физически оно означает, что скорости сталкивающихся

частиц независимы, то есть, что эти частицы не взаимодействовали друг с другом ранее, или по крайней мере, взаимодействовали так давно, что уже успели совершенно «позабывать» друг о друге. В результате получаем *газокинетическое уравнение Больцмана*:

$$\frac{dn_1}{dt} \equiv \frac{\partial n_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial n_1}{\partial \vec{r}} = \int d\vec{\Omega} \int d\vec{v}_{20} \sigma_0 w(\vec{\Omega}) |\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}| [n_{10} n_{20} - n_1 n_2], \quad (6.2.3)$$

где

$$n_1 \equiv n(\vec{r}, \vec{v}_1; t),$$

$$n_2 \equiv n(\vec{r}, \vec{v}_2; t),$$

$$n_{10} \equiv n(\vec{r}, \vec{v}_{10}; t),$$

$$n_{20} \equiv n(\vec{r}, \vec{v}_{20}; t)$$

(обратите внимание: смысл нижних индексов изменён, теперь все плотности одночастичные, и их нижние индексы – это индексы их аргументов).

Уравнение это было получено Больцманом из соображений баланса: в единицу времени из элемента $d\vec{v}_1$ пространства скоростей выводится

$$\int d\vec{\Omega} \int d\vec{v}_{20} \sigma_0 w(\vec{\Omega}) |\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}| n_1 n_2$$

частиц и поступает в него

$$\int d\vec{\Omega} \int d\vec{v}_{20} \sigma_0 (\vec{\Omega}) |\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}| n_{10} n_{20}$$

частиц из других элементов пространства скоростей. Более подробное изложение вопросов, связанных с выводом уравнения Больцмана, включая количественные оценки пределов применимости модели можно найти в книге К. Черчиньяни⁶ и др.

6.2.2 Упругие столкновения одинаковых молекул

Обсудим некоторые особенности упругих столкновений *одинаковых молекул*, существенные в кинетической теории разреженных газов. Законы сохранения импульса и энергии в этом случае имеют вид

$$\vec{v}_{10} + \vec{v}_{20} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

⁶К. Черчиньяни. Теория и приложения уравнения Больцмана. – М.: Мир, 1978.

и

$$v_{10}^2 + v_{20}^2 = v_1^2 + v_2^2,$$

а в переменных

$$\vec{V} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}, \quad \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad (6.2.4)$$

выглядят следующим образом:

$$\vec{V}_0 = \vec{V}, \quad v_0 = v.$$

Отсюда видно, что в результате столкновения вектор \vec{v}_0 поворачивается и занимает положение \vec{v} , не изменяя своей величины. В силу этого столкновение полностью определяется заданием векторов \vec{V}_0 , \vec{v}_0 и совокупностью углов рассеяния $\vec{\Omega} \equiv (\theta, \phi)$, которые вектор \vec{v} образует с начальным вектором \vec{v}_0 . Давая малые приращения векторам \vec{V}_0 и \vec{v}_0 при фиксированном $\vec{\Omega}$, мы получим равенство соответствующих элементов объёмов пространства скоростей

$$d\vec{V}_0 d\vec{v}_0 = d\vec{V} d\vec{v}.$$

Из (6.2.4) сразу следует, что

$$d\vec{V}_0 d\vec{v}_0 = d\vec{v}_{10} d\vec{v}_{20}.$$

Подобное же равенство справедливо и для переменных после рассеяния, в результате чего получаем

$$d\vec{v}_{10} d\vec{v}_{20} = d\vec{v}_1 d\vec{v}_2.$$

Для рассмотрения свойств процесса упругого столкновения тождественных частиц нам удобно будет ввести плотность вероятности перехода w при рассеянии соотношением

$$d\sigma(\vec{\Omega}) = \frac{1}{\sigma_0} w(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \leftarrow \vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}) d\vec{\Omega},$$

где $\sigma_0 = \int_{4\pi} d\sigma(\vec{\Omega})$ – полное сечение упругого рассеяния молекулы на молекуле. Детальный вид функции w определяется потенциалом взаимодействия молекул, однако она обладает определёнными свойствами симметрии, которые окажутся нам полезными при рассмотрении статистических основ гидродинамики. Перечислим их.

1) *Инвариантность относительно обращения времени:*

$$w(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \leftarrow \vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}) = w(-\vec{v}_{10}, -\vec{v}_{20} \leftarrow -\vec{v}_1, -\vec{v}_2) : \quad (6.2.5)$$

при изменении знака времени на обратный каждая молекула повторяет свой путь в обратном порядке.

2) *Инвариантность относительно пространственного поворота и отражения:*

$$w(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \leftarrow \vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}) = w(\vec{v}_1^*, \vec{v}_2^* \leftarrow \vec{v}_{10}^*, \vec{v}_{20}^*). \quad (6.2.6)$$

Здесь \vec{v}^* означает вектор, получаемый из \vec{v} путем некоторого поворота или отражения от некоторой плоскости или комбинации этих преобразований.

3) *Равенство сечений прямого и обратного рассеяний (принцип детального равновесия).*

Столкновение $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \rightarrow \{\vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}\}$ назовём *обратным* столкновению $\{\vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}\} \rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Тогда последнее утверждение запишется в виде:

$$w(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \leftarrow \vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}) = w(\vec{v}_{10}, \vec{v}_{20} \leftarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2).$$

Чтобы убедиться в его справедливости, изобразим прямое столкновение в виде схемы *A* (рис. 2.9). Сечение такого процесса имеет ту же величину, что и для обращённого во времени столкновения, изображенного на схеме *B*. Повернём теперь систему координат на 180° относительно некоторой оси \vec{n} , перпендикулярной к полному импульсу сталкивающихся молекул, а затем отразим её относительно плоскости pp' , перпендикулярной к \vec{n} . В результате мы и получим обратное столкновение *D*, имеющее в силу (6.2.5) и (6.2.6) такое же сечение, что и прямое.

6.2.3 Свойства уравнения Больцмана

Важнейшим обстоятельством, определяющим структуру всего математического аппарата физической кинетики, является *нелинейность* уравнения Больцмана и его *интегро-дифференциальная форма*. Решение такого уравнения, в более или менее реальных постановках задач, представляет серьёзные математические трудности. В этих условиях решающую роль играют предварительные исследования свойств уравнений. Исследования показали, в частности, что любое решение уравнения Больцмана должно удовлетворять некоторым соотношениям, вытекающим из законов сохранения таких величин как, масса, импульс, энергия в элементарных актах столкновений.

Пусть Y – некоторая сохраняющаяся при столкновении аддитивная характеристика пары сталкивающихся частиц; то есть при каждом

столкновении $\{\vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}\} \rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ выполняется соотношение

$$Y_{10} + Y_{20} = Y_1 + Y_2, \quad (6.2.7)$$

где $Y_1 = Y(\vec{r}_1, \vec{v}_1)$ и т.д. Умножим уравнение Больцмана на $Y_1 \equiv Y(\vec{r}, \vec{v}_1)$ и проинтегрируем по всем компонентам скорости \vec{v}_1 :

$$\int d\vec{v}_1 Y(\vec{r}, \vec{v}_1) \frac{dn_1}{dt} = \int d\vec{v}_1 \int d\vec{\Omega} \int d\vec{v}_{20} \sigma_0 w(\vec{\Omega}) |\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}| Y(\vec{r}, \vec{v}_1) [n_{10} n_{20} - n_1 n_2].$$

Произведя в правой части замены переменных в последовательности

1. $\vec{v}_1 \leftrightarrow \vec{v}_2$,
2. $\vec{v}_1 \leftrightarrow \vec{v}_{10}$, $\vec{v}_2 \leftrightarrow \vec{v}_{20}$,
3. $\vec{v}_1 \leftrightarrow \vec{v}_{20}$, $\vec{v}_2 \leftrightarrow \vec{v}_{10}$

с учётом свойств симметрии, рассмотренных в **6.2.3**, и сложив полученные результаты, находим, что

$$4 \int d\vec{v}_1 Y(\vec{r}, \vec{v}_1) \frac{dn_1}{dt} = \int d\vec{v}_1 \int d\vec{\Omega} \int d\vec{v}_{20} \sigma_0 w(\vec{\Omega}) |\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}| \{Y_{10} + Y_{20} - Y_1 - Y_2\} [n_{10} n_{20} - n_1 n_2].$$

Согласно (6.2.7), интеграл в правой части равен нулю, и мы получаем:

$$\int d\vec{v}_1 Y(\vec{r}, \vec{v}_1) \frac{dn_1}{dt} = \int d\vec{v} Y(\vec{r}, \vec{v}) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) n_1(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0. \quad (6.2.8)$$

До сих пор мы полагали, что внешние силы, действующие на молекулы в промежутках между столкновениями, отсутствуют. Включение их в рассмотрение сейчас не составит труда: в формуле для полной производной появится дополнительный член $\vec{v}(\partial n_1 / \partial \vec{v})$, и выражение (6.2.8) примет вид

$$\int d\vec{v} Y(\vec{r}, \vec{v}) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{g} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right) n_1(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0,$$

которым мы и будем пользоваться в дальнейшем, полагая силу не зависящей от скорости (заметим, что \vec{g} здесь и далее – сила, действующая на единицу массы). Введя обозначение

$$\langle Y \rangle = \frac{\int Y(\vec{r}, \vec{v}) n_1(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}}{n(\vec{r}, t)}, \quad n(\vec{r}, t) = \int n_1(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v},$$

преобразуем слагаемые левой части по формулам

$$\int d\vec{v} Y(\vec{r}, \vec{v}) \frac{\partial}{\partial t} n_1(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{\partial \langle nY \rangle}{\partial t},$$

$$\int d\vec{v} Y(\vec{r}, \vec{v}) \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} n_1(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \int n_1(\vec{r}, \vec{v}, t) (\vec{v} Y(\vec{r}, \vec{v})) d\vec{v} -$$

$$- \int n_1(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} Y(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{\partial \langle n\vec{v}Y \rangle}{\partial \vec{r}} - \left\langle n\vec{v} \frac{\partial Y}{\partial \vec{r}} \right\rangle$$

и

$$\int d\vec{v} Y \vec{g} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} n_1(\vec{r}, \vec{v}, t) \int d\vec{v} \vec{g} n_1(\vec{r}, \vec{v}, t) \frac{\partial}{\partial \vec{v}} Y(\vec{r}, \vec{v}) = - \left\langle n\vec{g} \frac{\partial Y}{\partial \vec{v}} \right\rangle.$$

Собирая их вместе, приходим к следующей формулировке *теоремы сохранения*:

Для аддитивной сохраняющейся в бинарном столкновении (то есть удовлетворяющей условию (6.2.7)) величины $Y(\vec{r}, \vec{v})$ имеет место соотношение:

$$\frac{\partial \langle nY \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle n\vec{v}Y \rangle}{\partial \vec{r}} - \left\langle n \frac{\vec{v} \partial Y}{\partial \vec{r}} \right\rangle - \left\langle n \vec{g} \frac{\partial Y}{\partial \vec{v}} \right\rangle = 0. \quad (6.2.9)$$

Усреднение здесь производится по скорости, концентрация n от скорости не зависит и оказывается под знаком среднего просто из соображений удобства записи, так что $\langle nA \rangle = n\langle A \rangle$.

Сохранение массы

Одной из таких сохраняющихся в бинарном столкновении величин является масса: поскольку масса каждой из упруго сталкивающихся частиц не меняется, остаётся постоянной и их суммарная масса:

$$m_1 + m_2 = m_{10} + m_{20}.$$

Полагая в уравнении сохранения (6.2.9) $Y = m$ и вводя плотность массы и среднюю скорость молекул соотношениями

$$\rho(\vec{r}, t) = mn(\vec{r}, t)$$

и

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \langle \vec{v}(\vec{r}, t) \rangle,$$

приходим к уравнению непрерывности для плотности массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\vec{u}\rho)}{\partial \vec{r}} = 0,$$

или, в более привычной форме,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u}\rho) = 0. \quad (6.2.10)$$

Сохранение импульса

Положим теперь Y равным одной из проекций другой сохраняющейся в бинарном столкновении величины – импульса $Y = mv_i$:

$$\frac{\partial \langle \rho v_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho v_i \vec{v} \rangle}{\partial \vec{r}} = f_i,$$

где $f_i \equiv \rho g_i$ – объёмная плотность внешней силы (в проекциях). Для дальнейшего удобно выделить из случайной скорости молекулы ее среднее значение $\vec{u} = \langle \vec{v} \rangle$:

$$\vec{v} = \vec{u} + (\vec{v} - \vec{u}),$$

в результате чего второй член в записанном выше уравнении преобразуется следующим образом

$$\frac{\partial \langle \rho v_i \vec{v} \rangle}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \langle \rho v_i v_j \rangle}{\partial x_j} = \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \rho (v_i - u_i)(v_j - u_j) \rangle.$$

Введя обозначение

$$p_{ij} = \langle \rho (v_i - u_i)(v_j - u_j) \rangle, \quad (6.2.11)$$

получим

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u_i = f_i - \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} \quad (6.2.12)$$

Здесь (и ниже) по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Уравнение это часто записывается в векторном виде

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \nabla \right) \vec{u} = \vec{f} + \nabla \overset{\leftrightarrow}{p}, \quad (6.2.13)$$

где $\overset{\leftrightarrow}{p}$ – симметричный тензор давлений с компонентами (6.2.11), так что $\nabla \overset{\leftrightarrow}{p}$ – вектор $\{\partial p_{1j}/\partial x_j, \partial p_{2j}/\partial x_j, \partial p_{3j}/\partial x_j\}$.

Сохранение энергии

Положив теперь



$$Y = \frac{m(\vec{v} - \vec{u})^2}{2},$$

придём к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\langle \rho(\vec{v} - \vec{u})^2 \rangle}{2} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{\langle \rho \vec{v}(\vec{v} - \vec{u})^2 \rangle}{2} - \rho \left\langle \vec{v} \frac{\partial (\vec{v} - \vec{u})^2}{\partial \vec{r}} \right\rangle = 0. \quad (6.2.14)$$

Определим *температуру* T и вектор *плотности потока тепла* \vec{q} соотношениями

$$kT \equiv \theta \equiv \frac{m \langle (\vec{v} - \vec{u})^2 \rangle}{3}$$

и

$$\vec{q} \equiv \frac{m \rho \langle (\vec{v} - \vec{u})(\vec{v} - \vec{u})^2 \rangle}{2}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\langle m \rho (\vec{v} - \vec{u})^2 \rangle}{2} = \frac{\langle m \rho (\vec{v} - \vec{u})(\vec{v} - \vec{u})^2 \rangle}{2} + \frac{\langle m \rho \vec{u}(\vec{v} - \vec{u})^2 \rangle}{2} = \vec{q} + \frac{3}{2} \rho \theta \vec{u}.$$

В то же время

$$\rho \langle v_i(v_j - u_j) \rangle = \rho \langle (v_i - u_i)(v_j - u_j) \rangle + \rho u_i \langle v_j - u_j \rangle = p_{ij}. \quad (6.2.15)$$

Таким образом, (6.2.14) можно представить в виде

$$\frac{3}{2} \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{3}{2} \frac{\partial(\rho\theta u_i)}{\partial x_i} + m p_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0.$$

В силу симметрии p_{ij}

$$m p_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = p_{ij} \frac{m}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \equiv p_{ij} \Lambda_{ij} = \overset{\leftrightarrow}{P} \Lambda,$$

где

$$\Lambda_{ij} = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

После нескольких простых преобразований получаем *уравнение сохранения энергии*

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \nabla \right) \theta = -\frac{2}{3} \nabla \vec{q} - \frac{2}{3} \overset{\leftrightarrow}{P} \Lambda. \quad (6.2.16)$$

6.2.4 Стационарное решение уравнения Больцмана

Рассмотрим идеальный газ, занимающий некоторый ограниченный постоянный объём, стенки которого поддерживаются при постоянной одинаковой температуре, спустя долгое время после наполнения им этого объёма, так что все переходные процессы уже завершились, и газ пришёл в состояние равновесия. Обозначим равновесную плотность распределения через $n^{(0)}(\vec{v})$. Если таковая существует, то (в отсутствие внешних сил) она должна не зависеть от времени и координат и удовлетворять уравнению

$$\int d\vec{\Omega} \int d\vec{v}_{20} \sigma_0 w(\vec{\Omega}) |\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}| [n^{(0)}(\vec{v}_{10})n^{(0)}(\vec{v}_{20}) - n^{(0)}(\vec{v}_1)n^{(0)}(\vec{v}_2)] = 0.$$

Чтобы $n^{(0)}(\vec{v})$ удовлетворяла этому уравнению, достаточно равенства нулю подынтегральной функции, то есть равенства

$$n^{(0)}(\vec{v}_{10})n^{(0)}(\vec{v}_{20}) = n^{(0)}(\vec{v}_1)n^{(0)}(\vec{v}_2).$$

Логарифмирование придаёт ему вид закона сохранения некоторой аддитивной величины при бинарном столкновении:

$$\ln n^{(0)}(\vec{v}_{10}) + \ln n^{(0)}(\vec{v}_{20}) = \ln n^{(0)}(\vec{v}_1) + \ln n^{(0)}(\vec{v}_2).$$

Отвечающее этим условиям решение может быть записано в виде линейной комбинации независимо сохраняющихся величин, каковыми в случае бесспиновых точечных молекул являются масса (просто, как постоянный скаляр), импульс и энергия:

$$\ln n^{(0)}(\vec{v}) = \ln C - A(\vec{v} - \vec{u})^2,$$

где C , A и три компонента \vec{u} составляют необходимое число произвольных постоянных. Таким образом, для плотности распределения скоростей молекул в равновесном состоянии идеального газа получаем:

$$n^{(0)}(\vec{v}) = Ce^{-A(\vec{v}-\vec{u})^2}.$$

Теперь необходимо выразить эти постоянные через наблюдаемые характеристики системы.

Напомним, что $n^{(0)}(\vec{v})d\vec{v}$ – среднее число частиц в единице объёма, скорости которых принадлежат элементу $d\vec{v}$ пространства скоростей. Очевидно, интеграл от этого выражения даёт концентрацию молекул

$$\int n^{(0)}(\vec{v})d\vec{v} = \frac{N}{V} \equiv n.$$

Подставляя в левую часть плотность (5.2.12) и выполняя интегрирование, получим

$$C(\pi/A)^{3/2} = n.$$

Далее,

$$\frac{1}{n} \int \vec{v} n^{(0)}(\vec{v}) d\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle$$

– средняя скорость молекулы. Выполняя интегрирование в левой части, получим:

$$\vec{u} = \langle \vec{v} \rangle.$$

Если газ в целом неподвижен, $\vec{u} = 0$. Вычислим для этого случая среднюю энергию молекулы

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \int \frac{mv^2}{2} n^{(0)}(\vec{v}) d\vec{v} = \frac{3}{4} \frac{m}{A}.$$

Экспериментально удобнее наблюдать не среднюю энергию или среднюю скорость молекул, а совокупный результат, проявляющийся в давлении

$$p = \int_{v_x > 0} (2mv_x)v_x n^{(0)} d\vec{v} = \frac{2}{3} n\varepsilon.$$

Это и есть уравнение состояния разрежённого газа, в свою очередь связывающее давление с температурой

$$p = nk_B T.$$

Выражая теперь постоянные через температуру и плотность молекул, получим

$$n^{(0)}(\vec{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_B T}$$

для неподвижного газа и

$$n^{(0)}(\vec{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-m(\vec{v}-\vec{u})^2/2k_B T} \quad (6.2.17)$$

– для газа, движущегося с макроскопической скоростью \vec{u} . Эта функция называется *распределением Максвелла-Больцмана* интеграл от неё по пространству скоростей даёт концентрацию молекул (среднее число их в единице объёма).

6.2.5 Гидродинамическое приближение

Пусть теперь состояние рассматриваемого газа отличается от равновесного, но отличие это мало; плотность и температура не остаются постоянными в пространстве и времени, но меняются медленно. Такие условия дают основание предположить, что в окрестности каждой точки, не лежащей вблизи границы системы, эти величины можно считать постоянными. С точки зрения молекулярной динамики эта окрестность может быть и «большой»: её размеры могут на многие порядки превосходить длину свободного пробега молекулы. В этом случае резонно предположить, что молекула, находящаяся в центре этой области, после десятков и сотен тысяч соударений с другими молекулами уже «забыла» о том, что она пришла из области с несколько иными плотностью и температурой. Таким образом, в нулевом приближении можно положить

$$n(\vec{r}, \vec{v}, t) \approx n^{(0)}(\vec{r}, \vec{v}, t) = C(\vec{r}, t)e^{-A(\vec{r}, t)(\vec{v} - \vec{u})^2}, \quad (6.2.18)$$

где $C(\vec{r}, t) = n(m/2\pi\theta)^{3/2}$, $A(\vec{r}, t) = m/2\theta$, а n , θ и \vec{u} – не зависящие от \vec{v} и медленно меняющиеся с изменением координат и времени функции. Подставляя распределение (6.2.18) в формулы (6.2.14), (6.2.15) и переходя от интегрирования по абсолютной скорости \vec{v} к интегрированию по относительной $\vec{V} = \vec{v} - \vec{u}$, в нулевом приближении получаем

$$\vec{q}^{(0)} = \frac{m\rho\langle(\vec{v} - \vec{u})(\vec{v} - \vec{u})^2\rangle}{2} = \frac{m^2}{2}C(\vec{r}, t) \int \vec{V}V^2 e^{-A(\vec{r}, t)V^2} d\vec{V} = 0, \quad (6.2.19)$$

и

$$p_{ij}^{(0)} = mC(\vec{r}, t) \int V_i V_j e^{-A(\vec{r}, t)V^2} d\vec{V} = \delta_{ij}p,$$

где

$$p = p(\vec{r}, t) = \frac{\rho}{3} \left(\frac{m}{2\pi\theta} \right)^{3/2} \int V^2 e^{-A(\vec{r}, t)V^2} d\vec{V} = n\theta = \frac{\rho\theta}{m} \quad (6.2.20)$$

– локальное гидростатическое давление (по этой причине p_{ij} и называют тензором давления). Подставляя эти выражения в формулы (6.2.10), (6.2.13), (6.2.17) и учитывая, что

$$\nabla \overset{\leftrightarrow}{p}^{(0)} \equiv \frac{\partial p_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = \nabla p$$

и

$$\overset{\leftrightarrow}{p}^{(0)\leftrightarrow} \Lambda = \rho\theta \operatorname{div} \vec{u},$$

приходим к следующей системе уравнений для идеальной (без вязкости) среды:

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0;$$

уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \vec{f},$$

и уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \theta + \frac{1}{c_V} \operatorname{div}(\vec{u} \theta) = 0,$$

где $c_V = 3/2$ – удельная теплоёмкость идеального газа при постоянном объёме (в единицах R).

Уравнения эти выведены для идеального (разрежённого) газа, но опыт показывает, что они пригодны и для описания течения жидкости, когда расстояния между молекулами становятся соизмеримыми с радиусом действия межмолекулярных сил. Переход к приближению следующего (первого) порядка вносит определённые поправки в эту систему, отражающие влияние вязкости жидкости на её течение:

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0;$$

уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \left(p - \frac{\eta}{3} \operatorname{div} \vec{u} \right) = \vec{g} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u}$$

и уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \theta + \frac{1}{c_V} (\operatorname{div} \vec{u}) \theta = \frac{\kappa}{\rho c_V} \Delta \theta.$$

В этих уравнениях появилось два новых коэффициента: вязкости η и теплопроводности κ ,

$$\eta \approx \frac{\sqrt{mkT}}{a^2}, \quad \kappa = \frac{5}{3} c_V \eta, \quad (6.2.21)$$

где a – радиус молекулы. Влияние вязкости сводится к тому, что движение элемента жидкости зависит не только от действующей на него внешней силы, но и от действия внутренних сил – со стороны окружающей его жидкости. Силы эти могут как ускорять, так и замедлять его движение. В частности – элемент жидкости, находящийся в контакте с твёрдой поверхностью, должен быть неподвижен относительно неё. Это – новый тип граничных условий. В невязкой среде элемент может скользить вдоль такой поверхности с какой угодно скоростью, но перпендикулярная компонента скорости в обоих случаях должна быть равна нулю.

Мы не приводим здесь вывода этих уравнений путём последовательных приближений ввиду трудоёмкости этого процесса. Вместо этого позднее мы дадим феноменологический вывод, который нагляднее прояснит нам макроскопическую картину и роль различных коэффициентов, но не даст, в отличие от излагаемого здесь микроскопического подхода, рецептов для их теоретического вычисления. Впрочем, пользуясь распределением Максвелла-Больцмана (6.2.17), можно получить приближённые оценки для важных параметров разрежённого газа. Так, для газа из молекул H_2 (диаметром в 1 \AA) в критической точке средняя длина свободного пробега $\lambda \approx 10^{-7}$ см, а среднее время свободного пробега $\tau \approx 10^{-11}$ с. В межгалактическом пространстве, где плотность составляет около 1 молекулы в 1 см^3 , $\lambda = (\sigma_0 n_0)^{-1} = 10^{15}$ см. Из качественных оценок также следует, что при нормальных условиях всякая неоднородность плотности или температуры в этом газе, существующая на расстояниях, например, порядка 10^{-7} см должна рассасываться за время порядка 10^{-11} с.

6.2.6 О применимости больцмановской кинетики

Долгое время считалось, что гидрогазодинамика применима на временах, на много порядков больших «кинетических» времён: времени столкновения ($\sim 10^{-15}$ с) и времени между последовательными столкновениями (для типичных жидкостей, например, воды $\sim 10^{-14}$). Численное моделирование показало, однако, что в ряде случаев обычная гидродинамика применима и на гораздо меньших временных масштабах – примерно до 30 столкновений, то есть до времен порядка 10^{-13} с. Заметим, что в приложениях математической статистики число 30 также играет приметную роль: считается, что для типичных выборок такого объёма уже применима центральная предельная теорема, эквивалентная диффузионному приближению в гидродинамике. Однако, теорема эта требует выполнения ещё одного условия: слагаемые должны быть взаимно независимы. На выполнение этого условия и настроен интеграл столкновений Больцмана благодаря замене двухчастичной плотности произведением одночастичных (6.2.2). Совпадение радиус-векторов является следствием пренебрежения размерами сталкивающихся частиц. Если считать их не точечными образованиями, а например, твёрдыми шариками радиусом

a с центрами масс \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , подстановка эта примет вид

$$n_2(\vec{r}_1, \vec{v}_1; \vec{r}_2, \vec{v}_2; t) = n_1(\vec{r}_1, \vec{v}_1; t)n_1(\vec{r}_2, \vec{v}_2; t) \quad (6.2.22)$$

потребуемый дополнительный интегрирования по координатам сталкивающихся частиц с учётом условия соприкосновения $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = 2a$. Последнее уже означает наличие корреляций из-за того, что шарики не могут проникать друг в друга (в действительности реализуется более мягкий вариант такой корреляции, основанный, например, на потенциале Ван-дер-Ваальса). Дополнительный вклад в корреляции этого типа вносят «третьи» частицы, попадающие между частицами 1 и 2 и мешающие им находиться в положениях \vec{r}_1 и \vec{r}_2 . Этот вклад пропорционален плотности «третьих» частиц и объёму, включающему все положения \vec{r}_3 , в которых частица 3 перекрывает пространство, занимаемое частицами с центрами в точках \vec{r}_1 и \vec{r}_2 . Учёт этого объёма даёт вклад в корреляции пропорциональный концентрации n . С увеличением плотности газа всё большее число частиц включается в игру, математически этот процесс отражается *виртуальным разложением* корреляционной функции по степеням концентрации.

В процессе численного моделирования выяснилась также необходимость учёта корреляций с партнёрами по предшествующим столкновениям. Ранее распад корреляций предполагался экспоненциальным и в гидродинамических масштабах корреляции представлялись несущественными по времени. Численное моделирование, выполненное Олдером и Алли⁷, показало наличие долговременного хвоста автокорреляционной функции для скорости жидкости при промежуточных плотностях: скорость частицы даже после нескольких сотен столкновений обнаруживает корреляцию со своим начальным значением, спадающую по степенному закону. В макроскопической гидродинамике этот факт известен со времен Стокса, установившего его при рассмотрении движения шарика в сплошной среде. Никто, однако, не предполагал, что этот вывод останется справедливым и для шариков атомных размеров.

Стремление преодолеть эти трудности привело к построению *обобщённой гидродинамики* путём определённого компромисса между микроскопическим (молекулярная динамика с учётом корреляционных эффектов) и макроскопическим (эредитарно-нелокальная вязкость и другие параметры) описаниями процесса. Уравнения Навье-Стокса сохранили при этом свою форму, но коэффициенты переноса стали зависеть от радиуса действия градиентов и от длительности их приложения. Тем самым включились масштабные факторы длины и времени, что позволило выйти за пределы модели непрерывной среды и учесть её молекулярную структуру. Жидкость, характеризуемая обобщённой вязкостью $\eta(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$, обладает двумя свойствами – *нелокальностью* и *памятью*: сигнал, рождённый в момент времени t' в точке \vec{r}' , придёт в точку \vec{r} в более поздний момент t . Это запаздывание обусловлено не столько инерционными свойствами жидкости, сколько диффузионным характером распространения флуктуаций. В любом случае, для перестройки расположения молекул требуется некоторое время.

Важную роль в интерпретации эффекта памяти играет и тот факт, что в определённых условиях мы уже не можем считать столкновения мгновенными и должны учитывать их продолжительность. При низких плотностях газа время взаимодействия оценивается отношением радиуса взаимодействий r_0 к средней скорости движения молекул \bar{v} :

$$\tau_{\text{вз}} \approx r_0 / \bar{v}.$$

⁷Олдер Б. Дж., Алли У.Е., В сб. Физика за рубежом 86. – М.: Мир, 1986. – С.29.

Время же релаксации $\tau_{\text{рел}}$ оценивается сведением кинетического уравнения к релаксационному типу

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} \approx -nr_0^2 \bar{v} \delta n.$$

Сопоставляя его решение

$$\delta n(t) = \delta n(0) e^{-(nr_0^2 \bar{v})t}$$

с традиционной формулой экспоненциальной релаксации, находим

$$\tau_{\text{рел}} \approx 1/(nr_0^2 \bar{v}).$$

Таким образом, условие

$$\tau_{\text{вз}}/\tau_{\text{рел}} \approx nr_0^3 \ll 1,$$

обеспечивающее применимость модели мгновенных столкновений, выполняется лишь для разреженных газов, пренебрежимо мало по сравнению со временем релаксации.

Аналогичный вывод и в книге Л. Резибуа и М. Де Ленера⁸ на основе известного разложения обратного времени релаксации по степеням плотности молекул газа (концентрации) n :

$$\tau_{\text{рел}}^{-1} = r_0^2 n \bar{v} [1 + r_0^3 n + (r_0^3 n)^2 + \dots].$$

Отношение рассматриваемых времен

$$\tau_{\text{вз}}/\tau_{\text{рел}} = r_0^3 n + (r_0^3 n)^2 + \dots,$$

так что если мы хотим сохранить поправку $(r_0^3 n)^2$, мы не имеем права считать столкновения мгновенными.

Пожалуй, наиболее яркое отличие от стандартной гидродинамики («ньютоновской жидкости») проявляют полимерные жидкости. Они состоят из огромных, с молекулярным весом $10^5 - 10^8$ полимерных молекул – длинных запутанных цепочек большого числа повторяющихся звеньев (мономеров). Так, вблизи вращающегося в полимерной жидкости вертикального стержня её поверхность поднимается, а поверхность ньютоновской жидкости опускается, вращение диска на дне цилиндрического сосуда заставляет полимерную жидкость двигаться к центру, тогда как ньютоновская жидкость движется от центра, вытекающая из трубы струя полимерной жидкости расширяется, тогда как струя ньютоновской сжимается. Чтобы выкачать ньютоновскую жидкость из сосуда с помощью засасывающей трубки, надо погрузить трубку в жидкость, а полимерная жидкость выкачивается и в случае, когда конец трубки не погружён в неё, а выше поверхности на несколько сантиметров. Надо ли говорить, что такие особенности не могут быть предсказаны стандартной гидродинамикой?

6.2.7 Упражнения

1. Воспроизвести выкладки, предшествующие уравнению (6.2.15), но пропущенные в тексте.
2. Из распределения Максвелла-Больцмана (6.2.16) найти среднее значение абсолютной величины скорости, её наиболее вероятное значение и дисперсию.
3. Проверить формулу (6.2.20).
4. Вывести формулу (6.2.21).

⁸Л. Резибуа, М. Де Ленер. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. – М.: Мир, 1980.

6.3 Диффузия

6.3.1 Коэффициент диффузии, вязкость, граничные условия

В теории диффузии речь идёт о распространении примесей в газе или вязкой жидкости при условии, что концентрация её (примеси) достаточно мала, чтобы можно было пренебречь её влиянием на среду и влиянием её элементов друг на друга. Главным образом, в целях удобства и наглядности, будем представлять себе примесь как совокупность большого числа материальных точек малой массы, и от плотности массы ρ перейдём к числу частиц примеси в единице объёма n , тоже называемому концентрацией⁹. Массы частиц примеси не меняются со временем, так что концентрация n подчиняется тому же уравнению баланса, что и массовая плотность примеси ρ . В частности, в бесконечной однородной покоящейся среде имеем:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n. \quad (6.3.1)$$

Его неоднородный (с членом-источником) аналог

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n(\vec{r}, t) + Q(\vec{r}, t), \quad (6.3.2)$$

получается из кинетического уравнения (6.3.1) предельным переходом

$$l \equiv 1/\sigma \rightarrow 0, \quad v \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \frac{vl}{3} \rightarrow D,$$

где $D < \infty$ – положительная величина (коэффициент диффузии).

Заметим, что диффузионное уравнение (6.3.2) совпадает с уравнением теплопроводности в *покоящейся среде* (см. 6.2.5) и выведено оно может быть аналогичным образом из комбинации уравнения баланса и закона Фика. Более того, получаемое при этом уравнение охватывает и процесс диффузии в неоднородной среде,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla(D(\vec{r})\nabla n(\vec{r}, t)) + Q(\vec{r}, t),$$

правда, применение его вблизи границ разрыва функции $D(\vec{r})$ требует осторожности.

⁹Заметим, что поведение именно частиц примеси и наблюдал шотландский ботаник Браун, чьё имя носит сейчас это явление.

Коэффициент D связан с вязкостью основной среды (будем называть её для удобства *жидкостью*). Представим себе примесь состоящей из большого числа взвешенных в жидкости шариков радиуса a , находящихся к тому же в однородном постоянном поле (например, пылинки в атмосфере). С учётом движения частиц под действием этой силы уравнение (6.3.1) принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{v}\nabla n = D\Delta n. \quad (6.3.3)$$

Скорость движения (точнее, регулярная составляющая этой скорости) частиц определяется равновесием силы Стокса $\vec{F} = -\vec{v}/b$, $b = (6\pi\eta a)^{-1}$ и силы тяжести $m\vec{g}$. Направив ось OZ вертикально вверх, для стационарного распределения $n = n(z)$ имеем уравнение

$$-v \frac{\partial n}{\partial z} = D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

где

$$v = bmg.$$

В равновесном состоянии распределение частиц по высоте должно удовлетворять закону Больцмана,

$$n(z) = n_0 \exp(-mgz/k_B T),$$

подставляя которое в уравнение (6.3.3), находим:

$$D = \frac{k_B T}{mg} v = bk_B T.$$

Это равенство, связывающее коэффициент диффузии D с *подвижностью частиц* b , называется *соотношением Эйнштейна* представляющим собой простейшую версию *флуктуационно-диссипационной теоремы*. Оно сыграло свою роль в становлении молекулярно-кинетической теории, когда Эйнштейн применил его к диффузии больших молекул – молекул сахара, растворённого в воде.

В заключение этого пункта остановимся на граничных условиях к уравнению (6.3.3). В разных случаях они ставятся по-разному. Если граничная поверхность поглощает все частицы попадающей на неё примеси, следует приравнять к нулю концентрацию n на этой границе, в случае же отражающей границы к нулю приравниваются нормальная компонента вектора диффузионного тока. В иных случаях, граница сама оказывается источником диффундирующей субстанции



(например, если это – поверхность тела, постепенно растворяющегося в основной среде), граничным условием тогда становится концентрация диффундирующего вещества на растворяющейся поверхности. В случае пористых и полупроницаемых перегородок используются более сложные граничные условия (суперпозиции концентрации и нормальной составляющей тока). Иногда полезно ввести искусственное граничное условие. Например, если диффузия происходит в однородном плоском слое от плоских источников, симметрично распределённых относительно центральной плоскости, естественно принять нулевой диффузионный поток в центре, как граничное условие.

6.3.2 Броуновское движение

Диффузия частицы как случайный процесс

С вероятностной точки зрения движение частицы примеси представляет собой случайный процесс, называемый *броуновским движением*. Координата совершающей такое движение частицы в момент времени t может быть представлена как сумма большого числа N случайных смещений $\Delta\vec{r}$ за малые времена $\Delta t = t/N$ и, в соответствии с центральной предельной теоремой, является случайной величиной, распределённой по гауссову закону с плотностью $G_3(\vec{r}, t)$ с нулевым средним и дисперсией

$$\langle r^2(t) \rangle = \int G_3(\vec{r}, t) r^2 d\vec{r} = 2Dt. \quad (6.3.4)$$

В трёхмерном пространстве оно имеет вид произведения трёх одномерных распределений, отвечающих трём разным координатам:

$$G_3(\vec{r}, t) = G_1(x, t)G_1(y, t)G_1(z, t).$$

С вероятностной точки зрения этот факт означает взаимную независимость трёх координат выполняющей броуновское движение частицы.

Траектория броуновской частицы $\vec{r}(t)$ представляет собой случайную кривую – непрерывную, нигде не дифференцируемую *случайную функцию*. Если в начальный момент времени частица находилась в начале координат, а дальнейшее её движение характеризуется скоростью \vec{v} как *случайной функцией* времени $\vec{v}(t)$, то её *случайное* положение в момент наблюдения t определится интегралом

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(\tau) d\tau.$$

При фиксированном t случайный вектор $\vec{r}(t)$ подчиняется гауссову закону, содержащему всего два параметра: среднее значение и дисперсию. Среднее (по ансамблю)

$$\langle \vec{r}(t) \rangle = \left\langle \int_0^t \vec{v}(\tau) d\tau \right\rangle = \int_0^t \langle \vec{v}(\tau) \rangle d\tau.$$

Случайная скорость \vec{v} обусловлена передачей частице импульсов сталкивающимися с ней молекулами. Если в макроскопических масштабах среда покоится, распределение скорости изотропно и её среднее значение равно нулю:

$$\langle \vec{v}(t) \rangle = 0,$$

и, следовательно,

$$\langle \vec{r}(t) \rangle = 0.$$

В этом случае дисперсия совпадает со средним квадратом, который может быть представлен в виде

$$\langle r^2(t) \rangle = \left\langle \left(\int_0^t \vec{v}(\tau) d\tau \right)^2 \right\rangle = \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 \langle \vec{v}(\tau_1) \vec{v}(\tau_2) \rangle.$$

В стационарной (в вероятностном смысле) среде ковариация скорости выражается через корреляционную функцию $R(t)$ соотношением

$$\langle \vec{v}(\tau_1) \vec{v}(\tau_2) \rangle = \langle v^2 \rangle R(|\tau_1 - \tau_2|), \quad (6.3.5)$$

подставляя которое в интеграл для дисперсии смещения, после несложных преобразований получим:

$$\langle r^2(t) \rangle = \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 R(|\tau_1 - \tau_2|) = 2\langle v^2 \rangle \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\theta R(\theta).$$

Обозначив временно внутренний интеграл через $F(\tau)$ и выполнив интегрирование по частям,

$$\int_0^t F(\tau) d\tau = \tau F(\tau) \Big|_0^t - \int_0^t \tau F'(\tau) d\tau = \int_0^t (t - \tau) R(\tau) d\tau,$$

получим дисперсию смещения в виде однократного интеграла (*формула Кампе де Ферье*)

$$\langle r^2(t) \rangle = 2\langle v^2 \rangle \int_0^t (t - \tau) R(\tau) d\tau.$$

Предположим, что функция $R(t)$, $t \in [0, \infty)$ ограничена, не равна нулю в нуле и имеет конечный первый момент. Введя обозначения $R_0 = \int_0^\infty R(\tau) d\tau$ и $R_1 = \int_0^\infty \tau R(\tau) d\tau$, получим

$$\langle r^2(t) \rangle = 2\langle v^2 \rangle \int_0^t (t - \tau) [R(0) + \dot{R}(0)\tau + o(\tau)] \sim R(0)\langle (vt)^2 \rangle, \quad t \rightarrow 0, \quad (6.3.6)$$

и

$$\langle r^2(t) \rangle = 2\langle v^2 \rangle \left\{ t \int_0^t R(\tau) d\tau - \int_0^t \tau R(\tau) d\tau \right\} \sim 2\langle v^2 \rangle (R_0 t - R_1) \sim 2R_0 \langle v^2 \rangle t, \quad (6.3.7)$$

$$t \rightarrow \infty.$$

Если считать, что взаимодействие блуждающей частицы со средой реализуется посредством мгновенных столкновений, разделённых случайными промежутками времени, то, как видно из (6.3.6), следует положить $R(0) = 1$ (тогда мы получим свободное движение до первого столкновения). В математической же теории броуновского движения, развитой Винером, постулируется линейная зависимость среднего квадрата смещения частицы *при всех временах*:

$$\langle r^2(t) \rangle = Dt, \quad 0 \leq t < \infty.$$

В этой модели

$$2\langle v^2 \rangle R(\tau) = D\delta(\tau),$$

что, как следует из формулы (6.3.5), записанной в дифференциалах,

$$\langle d\vec{r}(\tau_1) d\vec{r}(\tau_2) \rangle = \langle (d\vec{r}(\tau_1))^2 \rangle \delta(\tau_1 - \tau_2),$$

означает некоррелированность приращений в непересекающихся интервалах. Чтобы некоррелированный процесс $\vec{r}(t) = \sqrt{D}\vec{\xi}$ был ещё и процессом с независимыми приращениями, достаточно постулировать нормальное распределение случайного вектора $\vec{r}(t)$ при любом

t . Из независимости элементарных приращений следует и невозможность определения скорости частицы (траектории броуновских частиц *недифференцируемы*). Эту модель и примем в качестве математической модели броуновского движения¹⁰.

Представленная картина броуновского движения не вполне соответствует реальному физическому процессу. Она даёт ненулевую вероятность оказаться частице сколь угодно далеко от места её нахождения спустя сколь угодно малый промежуток времени и приводит к нефизическому результату для среднеквадратичной скорости (на что обращал внимание и сам Эйнштейн):

$$\lim \langle |\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)|^2 \rangle^{1/2} / \Delta t = \infty, \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

В этом отношении телеграфная модель диффузии является более корректной.

Подытожим свойства броуновского движения.

1. Траектория броуновской частицы представляет собой непрерывную, но нигде не дифференцируемую кривую.
2. Среднеквадратичная скорость броуновской частицы бесконечна.
3. Если в некоторый момент времени t броуновская частица находится в точке \vec{r} , то в сколь угодно близкий к нему момент $t + \varepsilon$ она имеет конечную вероятность быть обнаруженной сколь угодно далеко от этой точки.
4. Коэффициент диффузии равен половине среднего квадрата смещения броуновской частицы в единицу времени
5. Декартовы координаты броуновской частицы взаимно независимы.

6.3.3 Эйнштейновский вывод диффузионного уравнения

Чтобы яснее представить себе вероятностную природу диффузионного процесса, обратимся к статье Эйнштейна¹¹ в которой впервые (если не считать диссертации ученика Пуанкаре Башелье, названной «К теории спекуляций») уравнение диффузии выводится на основе вероятностных рассуждений относительно броуновского движения.

«Очевидно, необходимо допустить, что каждая отдельная частица движется независимо от остальных частиц; кроме того, движения одной и той же частицы

¹⁰Математики называют этот процесс *винеровским* по имени выдающегося математика минувшего столетия Норберта Винера.

¹¹А.Эйнштейн. Собрание научных трудов, т. 3. – М.: Наука, 1966. – С.108.

в разные промежутки времени должны рассматриваться как независимые друг от друга, пока эти промежутки не остаются слишком малыми.»

Обозначив через $f(x, t)$ плотность распределения вероятностей координаты частицы, совершающей случайные блуждания вдоль оси x , и определив $\varphi(\Delta)$ как симметричную плотность распределения случайного смещения её за время τ , Эйнштейн записывает уравнение

$$f(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \Delta, t) \varphi(\Delta) d\Delta.$$

Далее по тексту русского перевода в 3-м томе его собрания научных трудов (с.115): «Так как τ очень мало, мы можем написать

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Разложим далее $f(x + \Delta, t)$ в ряд по степеням Δ :

$$f(x + \Delta, t) = f(x, t) + \Delta \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \dots \text{ до бесконечности.}$$

Это разложение мы можем внести под интеграл, так как для него существенны только очень малые значения Δ . Получаем:

$$f + \frac{\partial f}{\partial t} \tau = f \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\Delta) d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \varphi(\Delta) d\Delta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} \varphi(\Delta) d\Delta + \dots$$

В правой части благодаря равенству $\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta)$ второй, четвертый и т.д. члены обращаются в нуль, в то время как из первого, третьего, пятого и т.д. членов каждый следующий очень мал по сравнению с предыдущим. Принимая во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\Delta) d\Delta = 1,$$

и полагая

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} \varphi(\Delta) d\Delta = D,$$

получим из этого уравнения, ограничиваясь только первым и третьим слагаемыми в правой части,

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}.$$

Это – известное дифференциальное уравнение диффузии, и D здесь коэффициент диффузии»¹².

¹²Р. Фейнман и А. Мигдал обращали серьёзное внимание на тот факт, что квантово-механическое уравнение Шрёдингера для свободной частицы

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi$$

есть не что иное, как уравнение диффузии с мнимым временем, решением которого является «гауссово распределение» с мнимой дисперсией.

6.3.4 Диффузия в бесконечной среде

Рассмотрим сначала одномерную задачу диффузии, когда в бесконечной однородной среде плотность диффундирующего вещества при подходящем выборе декартовых координат зависит только от одной из них, например, от x :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0. \quad (6.3.8)$$

Начальное и граничные условия для данной задачи запишутся в виде

$$n(x, 0) = n_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad n(\pm\infty, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Выполнив преобразование Фурье по координате,

$$n(x, t) \mapsto \tilde{n}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} n(x, t) dx,$$

преобразуем уравнение в частных производных (6.3.8) к виду обыкновенного (заметим, $k = \text{const}$)

$$\frac{d\tilde{n}(k, t)}{dt} = -Dk^2 \tilde{n}(k, t).$$

с начальным условием

$$\tilde{n}(k, 0) = \tilde{n}_0(k).$$

Его решение имеет вид

$$\tilde{n}(k, t) = \tilde{n}_0(k) e^{-k^2 Dt}, \quad t \geq 0.$$

Второй сомножитель в этом произведении является собой характеристическую функцию гауссова распределения с дисперсией $2Dt$:

$$e^{-k^2 Dt} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx.$$

Само же произведение трансформант Фурье есть трансформанта свертки оригиналов:

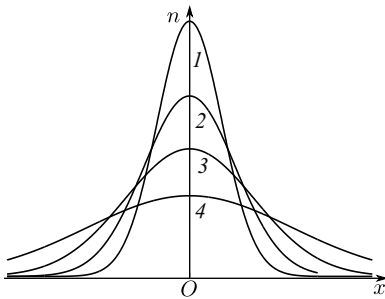


Рис. 6.2. Расплывание диффузионного пакета со временем ($t_1 < t_2 < t_3 < t_4$)

$$n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}} n_0(x') dx'. \quad (6.3.9)$$

Если в начальный момент диффузионный пакет сосредоточен в одной точке – в начале координат, $n_0(x) = N_0\delta(x)$, то в любой последующий момент он имеет гауссову форму с шириной, возрастающей пропорционально \sqrt{t} (рис. 6.2):

$$n(x, t) = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Отсюда можно найти и диффузионный ток в случае такого начального распределения:

$$j(x, t) = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{N_0}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right) = \frac{N_0 x}{4\sqrt{\pi Dt^3}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad x > 0.$$

Обратим внимание на то, что в центре (в точке $x = 0$) имеет максимальное значение,

$$n(0, t) = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi Dt}},$$

а ток равен нулю. Это – результат симметрии задачи.

Возьмём теперь начальное распределение несимметричным:

$$n_0(x) = \begin{cases} C, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, в этом случае концентрация диффундирующей субстанции выразится интегралом

$$n_+(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{C}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}} dx' = \frac{C}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}} d\xi,$$

а плотность тока (в проекции на ось OX)

$$j_+(x, t) = -\frac{C\sqrt{D}}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

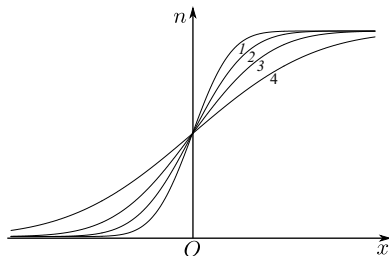


Рис. 6.3. Тенденция к выравниванию концентрации за счёт диффузии ($t_1 < t_2 < t_3$)

Приведённые на рис. 6.3 графики этой концентрации показывают процесс диффузии из правого полупространства в левое, сопровождаемый понижением концентрации справа от плоскости $x = 0$ и увеличением её слева от этой плоскости. Обозначив через $N_-(\tau)$ количество частиц, оказавшихся к моменту τ в левой части полупространства¹³, получим:

$$N_-(\tau) = \int_0^{\tau} dt \int_{-\infty}^0 n(x, t) dx = \int_0^{\tau} |j(0, t)| dt = C \sqrt{\frac{D\tau}{\pi}}.$$

Проведённые вычисления практически без изменений распространяются на трёхмерную диффузию в однородной среде: достаточно x и k заменить на \vec{r} и \vec{k} , интегрирование по оси – интегрированием по пространству и одномерное гауссово распределение его трёхмерным аналогом:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}} \mapsto \frac{1}{[2\sqrt{\pi Dt}]^3} e^{-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{4Dt}}.$$

В результате получаем, что решение уравнения

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n(\vec{r}, t), \quad t \geq 0,$$

с начальным условием

$$n(\vec{r}, 0) = n_0(\vec{r})$$

имеет вид¹⁴

$$n(\vec{r}, t) = \int \frac{1}{[2\sqrt{\pi Dt}]^3} e^{-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{4Dt}} n_0(\vec{r}') d\vec{r}'. \quad (6.3.10)$$

Физический смысл этого интеграла довольно ясен: $n_0(\vec{r}') d\vec{r}'$ – число (среднее число) частиц, начинающих диффузию в начальный момент

¹³Напомним, что до начала процесса, то есть до момента $\tau = 0$, там вообще не было частиц.

¹⁴Здесь, как обычно, отсутствие указания области предполагает интегрирование по всему доступному частице пространству.

времени из элемента $d\vec{r}'$, а функция

$$G_3(\vec{r} - \vec{r}', t) = \frac{1}{[2\sqrt{\pi Dt}]^3} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{4Dt}}$$

– вероятность того, что такая частица спустя t секунд окажется в единичной окрестности точки \vec{r} , и интеграл осуществляет суммирование произведения этих величин по всем элементам пространства. Стоит отметить, что используя одну и ту же функцию G_3 для всех частиц, принимающих участие в диффузии, мы молчаливо предполагаем, что движение каждой из них не зависит от движения остальных: диффундирующие частицы не взаимодействуют друг с другом. В этом их существенное отличие от «частиц» вязкой жидкости, каждая из которых способна изменять скорость и форму соседних «жидких» частиц.

6.3.5 Диффузия в полупространстве

Рассмотрим теперь решение $n^+(x, t)$ уравнения одномерной диффузии в полупространстве $x > 0$ при условиях

$$n^+(x, 0) = C, \quad x > 0; \quad n^+(0, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Физически задача эта может быть интерпретирована так: среда, в которой происходит диффузия, ограничена со стороны отрицательных x стенкой $x = 0$, а в сторону положительных x простирается в бесконечность. Изначально концентрация диффундирующего вещества всюду справа от стенки одинакова и равна C . Сама же стенка является «липкой»: попадающие на неё частицы прилипают к ней и выпадают из процесса диффузии. Со временем всё больше частиц налипают на стенку, концентрация в области, близкой к стенке, понижается, а размеры этой области увеличиваются, и задача состоит в вычислении изменения профиля $n^+(x, t)$ этой концентрации с течением времени.

Решение этой, как, впрочем, и ряда других диффузионных задач, достигается следующим искусственным приёмом, основанном на комбинации правил симметрии и свойства линейности диффузионного уравнения. Чтобы продемонстрировать этот приём в процессе решения поставленной задачи, вернёмся к однородной бесконечной среде, заполнив теперь равномерным начальным распределением не правое, а левое полупространство. Соответствующее решение $n_-(x, t)$ будет зеркально симметричным по отношению к полученному в предыдущем пункте:

$$n_-(x, t) = n_+(-x, t).$$

Сложив оба эти решения, получаем поле постоянной (в пространстве и времени) концентрации, равной C . Если же мы вычтем из одного решения другое,

$$\Delta n(x, t) = n_+(x, t) - n_-(x, t),$$

то получим функцию, которая, во-первых, равна нулю в начале координат, а во-вторых, удовлетворяет диффузионному уравнению (как суперпозиция его частных решений). Но эта функция (точнее, её часть, расположенная на положительной полуоси OX) и даёт решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} n^+(x, t) &= n_+(x, t) - n_-(x, t) = \\ &= \frac{C}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4Dt}} \right\} dx' = C\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right), \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

– интеграл Лапласа.

Пользуясь формулой плотности направленного на стенку диффузионного тока $j_x = -D(\partial n/\partial x)_{x=0}$ и профилем концентрации (6.3.11), мы можем определить массу вещества M , прилипшего за время τ к единице площади стенки¹⁵.

$$M(\tau) = \int_0^{\tau} D \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{x=0} dt = 2\rho_0 \sqrt{\frac{D\tau}{\pi}}, \quad \rho = mn, \quad \rho_0 = mC. \quad (6.3.12)$$

¹⁵ «Путём измерения количества прилипшего вещества можно таким образом определить коэффициент диффузии. Этот метод применялся Бриллюэном к эмульсиям гуммигута и мастики, причём стеклянная стенка была слабо подкислена, благодаря чему она получала свойство удерживать ударяющие в неё частицы. Число прилипших частиц подсчитывалось под микроскопом». Вот такие технические пассажи можно было встретить в книгах по уравнениям математической физики всего лишь 8 десятков лет назад! Вот ещё интересный абзац из цитируемой книги Ф. Франка и Р. Мизеса (Ф. Франк, Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, Гл. ред. общетехн. литературы. – М.-Л., 1937. – С. 643). «Можно было бы предположить, как это ошибочно сделал Бриллюэн, что приставшее количество вещества равно тому количеству, которое при отсутствии стенки диффундировало бы наружу, следовательно, равно, согласно формуле (6.3.12), $C\sqrt{D\tau}/\pi$. В действительности, мы получили удвоенное значение; это будет понятно, если вспомнить, что при отсутствии стенки частицы могут проходить в противоположном направлении, чего в нашем случае нет».

Более наглядно этот приём, называемый *методом изображений*, выглядит в следующей задаче. Пусть справа от липкой границы вся диффундирующая субстанция (N_0 частиц) в начальный момент времени $t_0 = 0$ собрана в одну точку с координатами $x = a$, $y = z = 0$. В однородной среде в момент времени $t > 0$ она была бы распределена с плотностью

$$n(x, y, z, t) = \frac{N_0}{[4\pi Dt]^{3/2}} e^{-\frac{(x-a)^2 + y^2 + z^2}{4Dt}},$$

симметричной относительно начальной точки. В частности, в плоскости $x = 0$ мы имели бы

$$n(0, \vec{\rho}, t) = \frac{N_0}{[4\pi Dt]^{3/2}} e^{-\frac{a^2 + \rho^2}{4Dt}},$$

где $\vec{\rho} = \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$ – поперечный радиус-вектор. Поместим в точку $x = -a$, $y = z = 0$ *изображение* – такой же источник, создающий *отрицательную концентрацию*. Предел совокупной концентрации при $x \rightarrow 0$ будет равен нулю, что и определяет липкую стенку. Если же источник-изображение будет создавать положительную концентрацию, то x -составляющая совокупного тока j_x будет равна нулю, что соответствует зеркально отражающей стенке. В результате, для полупространства $x > 0$ имеем распределения

$$n(x, \vec{\rho}, t) = \frac{N_0}{[4\pi Dt]^{3/2}} e^{-\frac{\rho^2}{4Dt}} \left\{ e^{-\frac{(x-a)^2}{4Dt}} \mp e^{-\frac{(x+a)^2}{4Dt}} \right\},$$

и

$$j_x(x, \vec{\rho}, t) = \frac{N_0}{2t[4\pi Dt]^{3/2}} e^{-\frac{\rho^2}{4Dt}} \left\{ (x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{4Dt}} \mp (x+a)e^{-\frac{(x+a)^2}{4Dt}} \right\},$$

где минус перед второй экспонентой соответствует липкой стенке, а плюс – отражающей. Таким образом, предельный переход $x \rightarrow 0$ в случае липкой стенки даёт

$$n(0, \vec{\rho}, t) = 0,$$

$$j_x(0, \vec{\rho}, t) = -\frac{N_0}{2t[4\pi Dt]^{3/2}} e^{-\frac{\rho^2}{4Dt}} \left\{ 2ae^{-\frac{a^2}{4Dt}} \right\},$$

а в случае отражающей

$$n(0, x) = \frac{N_0}{[4\pi Dt]^{3/2}} e^{-\frac{a^2}{4Dt}} \left\{ 2e^{-\frac{a^2}{4Dt}} \right\},$$

$$j_x(x, \vec{q}, t) = 0.$$

С задачей о липкой стенке в теории вероятностей связана проблема нахождения распределения *времени первого достижения*, являющегося важной характеристикой случайного процесса, в данном случае, броуновского движения. Пусть частица (или её проекция) начинает блуждание вдоль оси OX из точки $x = a$ в момент времени $t = 0$. Обозначим через T момент времени, когда она впервые достигнет плоскости $x = 0$. Эта случайная величина и называется временем первого достижения точки $x = 0$. Поскольку речь идёт об одной из частиц, удобнее говорить о *диффузии вероятности*, плотность которой $p(x, t)$ заменит теперь концентрацию. Из вышеприведённых соображений можно установить, что распределение времени T первого достижения нуля запишется, подобно формулам (6.3.11)-(6.3.12), в виде

$$P(T < t) = \int_0^t D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \left(e^{-\frac{(x-a)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+a)^2}{4Dt}} \right) \right] \right\}_{x=0} dt.$$

Выполняя записанное выше дифференцирование по координате, а затем и по времени, приходим к следующей формуле для плотности распределения вероятности времени первого достижения:

$$p_T(t) = \frac{dP(T < t)}{dt} = \frac{a}{2\sqrt{\pi Dt^3}} e^{-\frac{a^2}{4Dt}}.$$

Распределение это, называемое *распределением Леви-Смирнова*, отличается тем, что интеграл, определяющий среднее значение времени первого достижения,

$$\langle T \rangle = \int_0^{\infty} t p_T(t) dt$$

расходится из-за слишком медленного спада плотности со временем, $p_T(t) \propto t^{-3/2}$, $t \rightarrow \infty$. Зато существует среднее значение обратной величины,

$$\left\langle \frac{1}{T} \right\rangle = \frac{a}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^{\infty} t^{-5/2} e^{-\frac{a^2}{4Dt}} dt = \frac{2D}{a^2}.$$

Эта формула позволяет оценить величину коэффициента диффузии по наблюдениям обратных времён первого достижения отдельными броуновскими частицами:

$$D \approx \frac{a^2}{2} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N T_n^{-1}.$$

6.3.6 Релаксация

Рассуждая о броуновском движении, мы в первую очередь представляем себе некую примесь, за частицей которой можно проследить. В то же время сами молекулы газа также представляют собой подобные частицы, за исключением не очень существенных для разреженных газов деталей, подчиняющиеся тем же классическим законам. Правда, если газ находится в равновесном состоянии, молекулы распределены в объёме сосуда равномерно и никаких признаков диффузии мы здесь можем и не увидеть, но если по каким-то причинам (например, в результате теплового движения) возникнет некоторая локальная неоднородность (флуктуация), например, заметное превышение концентрации в малой области, то вследствие диффузии неоднородность эта быстро «рассосётся» и распределение молекул вернётся к равновесному. Такой процесс называется *релаксацией*. Релаксация в разреженных газах может быть описан и в рамках Больцмановской кинетики, однако наличие нелинейного интегрального члена усложняет задачу. Правда, в случае строго равновесного распределения этот интеграл обращается в нуль, так что можно предположить, что небольшое возмущение равновесного распределения $n_1^{(0)} \rightarrow n_1^{(0)} + (n_1 - n_1^{(0)})$ приведёт к линейному представлению интеграла столкновений, грубо аппроксимируемому формулой $n_0 r_0^2 \langle v \rangle (n_1 - n_1^{(0)})$ (коэффициент получен на основе подсчёта размерности в соответствии с явным выражением столкновительного интеграла, n_0 означает равновесную концентрацию). В этом *релаксационном приближении* уравнение Больцмана имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v_i \frac{\partial n}{\partial x_i} \approx -n_0 r_0^2 \langle v \rangle (n - n^{(0)})$$

(нижние индексы опущены, поскольку в них отпала необходимость). Равновесное распределение $n^{(0)}$ газа в отсутствие внешнего поля не зависит от времени и координат и уравнение Больцмана можно написать для самой разности $\delta n \equiv n - n^{(0)}$

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + v_i \frac{\partial \delta n}{\partial x_i} = -n_0 r_0^2 \langle v \rangle \delta n.$$

В отсутствие градиентного члена (то есть в случае, когда $\partial n / \partial x_i = 0$) решение его имело бы экспоненциально спадающий вид:

$$\delta n(\vec{r}, \vec{v}; t) = \delta n(\vec{r}, \vec{v}; 0) e^{-t/\tau_{\text{рел}}},$$

где $\tau_{\text{рел}}$ — *время релаксации*, необходимое для того, чтобы начальные возмущения передались путём диффузии всему распределению по ско-

ростам, имеющему в пространстве скоростей протяжённость порядка $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \equiv V$. Обозначив через K коэффициент диффузии в пространстве скоростей, получим

$$\tau_{\text{рел}} = \frac{V^2}{2K}.$$

Наличие градиента распределения $\partial n / \partial x \approx n/l$ дополняет процесс простой экспоненциальной (дебаевской) релаксации более медленной зависимостью от времени, характеризующейся масштабом

$$\tau = \frac{l}{\langle v \rangle}.$$

Выражая t, x_i, v_i в единицах $\tau_{\text{гр}}, l_{\text{гр}}$ и $\langle v_i \rangle$, получим уравнение в безразмерных переменных

$$\frac{\partial \delta n}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_i \frac{\partial \delta n}{\partial \bar{x}_i} = \frac{1}{\text{Kn}} \delta n,$$

где

$$\text{Kn} = \frac{\tau_{\text{рел}}}{\tau_{\text{гр}}} \ll 1$$

– параметр, известный как *число Кнудсена*.

Процессу релаксации подвержены не только число частиц примеси и число молекул в наблюдаемом объёме, но и суммарный импульс и внутренняя («тепловая») энергия газа. Избыток последней так же распространяется посредством передачи его от одной молекулы к другой, процесс случайных блужданий здесь налицо, и диффузионная модель имеет право на применение. Отметим в заключение, что в теории теплопереноса диффузионная модель появилась раньше (Фурье, 1822), чем собственно в теории диффузии (Фик, 1855), но и появилась она для описания диффузии гипотетической жидкости «теплорода», ведущей себя в жидких и твёрдых телах подобно примеси в газах и жидкостях.

6.3.7 Упражнения

1. Найти пространственное распределение диффундирующих в однородной среде частиц от стационарного изотропного точечного источника.
2. Прямой подстановкой в диффузионное уравнение убедиться в том, что функция (6.3.9) является его решением, удовлетворяющим указанному начальному условию.
3. Частица выполняет броуновское движение по поверхности сферы радиуса R , начиная с точки $x = y = 0, z = R$. Найти закон изменения со временем среднего значения её z -координаты.

6.4 Плазма

6.4.1 Уравнения Власова

Чтобы яснее увидеть отличие плазмы от газа нейтральных молекул, обратимся снова к первому уравнению цепочки ББГКИ:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} \right) n_1(\vec{r}_1, \vec{v}_1, t) = \frac{1}{m} \int \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} n_2(\vec{r}_1, \vec{v}_1; \vec{r}_2, \vec{v}_2; t) d\vec{r}_2 d\vec{v}_2. \quad (6.4.1)$$

Левая часть этого уравнения описывает свободное движение молекул в промежутке между столкновениями. Она является материальной производной от концентрации частиц вдоль траектории их движения. Поскольку речь шла о фазовом пространстве, содержащем в себе и импульсное (скоростное) подпространство, общее выражение для полной производной имело бы вид

$$\frac{dn_1}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\vec{F}}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \right) n_1(\vec{r}_1, \vec{v}_1, t), \quad (6.4.2)$$

если бы мы не пренебрегли действием внешних (например, гравитационных) сил на молекулы, оставив только действующие на расстояниях порядка корреляционного радиуса межмолекулярные силы (типа сил Ван-дер-Ваальса). Эти-то силы, возникающие лишь при очень тесных сближениях молекул, и «превратились» потом в больцмановский интеграл столкновений, занявший правую часть кинетического уравнения. Ни в сами моменты столкновений, ни в промежутках между ними частица не испытывает влияния других частиц (кроме партнёров по столкновениям).

Существенно иная ситуация в плазме. Главную роль играют здесь кулоновские силы, действующие между ионами и электронами плазмы. В отличие, скажем, от ван-дер-ваальсовых сил, кулоновские силы – дальнедействующие. Фактически каждый ион или электрон находится в электромагнитном поле, создаваемом *многими зарядами*, а не одним ближайшим атомом, как это имело место в случае газа нейтральных частиц. Столкновения же ионов в плазме могут оказаться менее важным фактором и во многих случаях ими просто пренебрегают. Эти качественные, но физически сообразные рассуждения приводят нас к мысли о том, что для перехода от газокинетики к кинетике плазмы в первом приближении следует выделить из правой части уравнения (6.4.1) компонент, связанный с действием усреднённого коллективного поля на рассматриваемый заряд, и, представив его в гра-

диентной по скорости форме, перенести в левую часть, которая примет теперь вид левой части уравнения (6.4.2). Оставшийся в правой части член обозначим $(\partial n_a / \partial t)_{\text{ст}}$: он по-прежнему учитывает столкновения (теперь уже только с ближними частицами). В результате получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right) n_a(\vec{r}, \vec{v}, t) = \left(\frac{\partial n_a}{\partial t} \right)_{\text{ст}}.$$

Здесь мы убрали нижний индекс 1 (мы не будем рассматривать многочастичные функции) и поставили вместо него индекс типа частицы a (ион или электрон в простейшем случае). Однако, сила теперь – это сила Лоренца

$$\vec{F}_a = e_a \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \right),$$

порождаемая электромагнитным полем, создаваемым зарядами этой же плазмы. Поле это описывается уравнениями Максвелла,

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\text{div} \vec{H} = 0,$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j},$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi \rho,$$

а в источниках его снова фигурируют искомые распределения:

$$\rho = \sum_a \int e_a n_a d\vec{v}, \quad \vec{j} = \sum_a \int e_a n_a \vec{v} d\vec{v}.$$

Приведённые уравнения представляют собой систему, охватывающую кинетику заряженных частиц, создание ими электромагнитного поля и влияние этого поля на движение собственных источников. Введённые таким образом поля называют *самосогласованными*, а записанную выше систему уравнений – *уравнениями А.А.Власова*. В конкретных задачах эта система может быть существенно укороченной.

Построенная на основе этих уравнений теория является важным инструментом исследования волновых процессов в плазме, взаимодействий волн с частицами, плазменных неустойчивостей, резонансных явлений.

6.4.2 Свойства уравнения Власова

Следующие свойства легко выводятся из кинетического уравнения Власова.



Сохранение числа частиц каждого типа:

$$\frac{d}{dt} \int \int n_a d\vec{r} d\vec{v} = 0.$$

Положительное в какой-то момент решение остаётся положительным и далее:

если $n_a(\vec{r}, \vec{v}, 0) > 0$ для всех \vec{r}, \vec{v} , то $n_a(\vec{r}, \vec{v}, t) > 0$ для всех \vec{r}, \vec{v} и $t > 0$.

Кинетическое уравнение Власова имеет множество стационарных решений.

В отличие от уравнения Больцмана, имеющего всего одно стационарное решение, описывающее равновесное состояние – распределение Максвелла, уравнение Власова имеет множество таких решений. Пусть, например, $f_a^0(\vec{r}, \vec{v})$ – одно из них,

$$\left\{ \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{e_a}{m_a} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \right) \right\} f_a^0(\vec{r}, \vec{v}) = 0, \quad (6.4.3)$$

а $\{\vec{r}'(t'), \vec{v}'(t')\}$ – траектория одной из частиц типа a , проходящей в момент t через точку \vec{r}' этой траектории со скоростью \vec{v}' . Если функции $\varphi_1(\vec{r}', \vec{v}'), \varphi_2(\vec{r}', \vec{v}'), \dots$ являются интегралами движения частиц типа a , тогда любая (дифференцируемая) функция $\Phi(\varphi_1(\vec{r}', \vec{v}'), \varphi_2(\vec{r}', \vec{v}'), \dots)$ удовлетворяет уравнению (6.5.3) в момент $t' = t$ и стало быть, любая функция интегралов движения является стационарным решением уравнения Власова.

Вот несколько примеров таких решений.

- При $\vec{E}_0 = 0$ и $\vec{H}_0 = 0$ интегралами движения являются $E_{\text{кин}} = (m_a/2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ и $\vec{p} = m_a \vec{v}$. Равновесные решения:

$$f_a^0 \equiv f_M(\vec{v}) = \left(\frac{m_a}{2\pi k_B T_a} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_a}{2k_B T_a} v^2 \right)$$

$$f_a^0 = \frac{v_0}{2} \frac{1}{v^4 + v_0^4}$$

$$f_a^0 = v_0 \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z^2 - v_0^2)$$

$$f_a^0 = \sqrt{\frac{m_a}{2\pi k_B T_a}} \delta(v_x) \delta(v_y) \exp \left(-\frac{m_a \delta(v_z^2 - v_{a0}^2)}{2k_B T_a} \right),$$

- Пусть $\vec{E}_0 = 0$, $\vec{H}_0 = H_0(\vec{r})\vec{e}_z$. В качестве подходящих интегралов движения можно взять

$$E_{\text{кин}} = \frac{m_a}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2),$$

$$p_{\parallel} = m_a v_z$$

и

$$\vec{L} = m_a(xv_y - yv_x)\vec{e}_z - e_a r A_\phi(r)\vec{e}_\varphi.$$

Другой возможный выбор постоянных:

$$\xi_x = v_x - \frac{e_a}{m_a} \int H_0(r) dy$$

$$\xi_y = v_y - \frac{e_a}{m_a} \int H_0(r) dx.$$

Равновесное решение уравнения Власова может быть записано в виде

$$f_a^0 = \Phi \left(v^2, v_y + \frac{e_a H_0}{m_a} x, v_x - \frac{e_a H_0}{m_a} y \right).$$

Уравнение Власова сохраняет энтропию

Записав энтропию обычным образом,

$$S = - \sum_a \int \int n_a \ln n_a d\vec{r} d\vec{v},$$

и продифференцировав её по времени,

$$\frac{dS}{dt} = - \sum_a \int \int \left(\frac{dn_a}{dt} \ln n_a + \frac{dn_a}{dt} \right) d\vec{r} d\vec{v},$$

можно убедиться, что энтропия не меняется. и стало быть, диссипации энергии не происходит.

6.4.3 Квазинейтральность плазмы

Квазинейтральность (приближённая электрическая нейтральность усреднённой по макроскопическим областям плазмы) обусловлена дебаевским экранированием: если внести в плазму пробный, скажем, отрицательный заряд $e = -|e|$, то вокруг него повысится концентрация положительных ионов, в результате чего потенциал пробного заряда, спадающий в вакууме обратно пропорционально расстоянию,

$$\varphi(r) = \frac{e}{r},$$

станет убывать гораздо быстрее:

$$\varphi(r) = \frac{e}{r} e^{-r/\lambda_D}.$$

Наличие экспоненциального множителя даёт основание говорить о конечном радиусе взаимодействия частиц в плазме, соизмеримом с дебаевской длиной λ_D . Рассмотрим кинетику экранирования подробнее.

Скалярный потенциал электрического поля, создаваемого распределением заряда с плотностью $\rho(\vec{r})$, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0,$$

где правая часть связана с решением уравнения Власова соотношением

$$\rho = \sum_a e_a \int n_a(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} = \sum_a e_a n_a \int f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}.$$

На временах порядка обратных характерным плазменным частотам, ионы (i) можно считать неподвижными и положить $\rho_i = e_i n_i = e_i n_0$, где $n_0 = \text{const}$, тогда как электронная плотность определяется решением стационарного уравнения Власова:

$$\left(\vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{e_e}{m_e} \vec{E} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right) f_e^0(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0. \quad (6.4.4)$$

Прямой подстановкой можно убедиться в том, что этим решением является распределение Максвелла-Больцмана

$$f_e^0(\vec{r}, \vec{v}) = f_M(\vec{v}) \exp\left(-\frac{e_e \varphi(\vec{r})}{k_B T}\right). \quad (6.4.5)$$

Таким образом, внося в какую-то точку плазмы (например, в начало координат) положительный пробный заряд q , мы получаем распределение

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \rho_i(\vec{r}) + \rho_e(\vec{r}) + \rho_q(\vec{r}) = \\ &= e_i n_0 + e_e n_0 \exp\left(-\frac{e_e \varphi(\vec{r})}{k_B T}\right) + \frac{q}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r}). \end{aligned}$$

Подставляя эту сумму в правую часть уравнения Пуассона, для плазмы с однозарядными ионами ($e_i = e$, $e_e = -e$) получаем:

$$\Delta\varphi = -\frac{en_0}{\varepsilon_0} \left[1 - \exp\left(\frac{e\varphi(\vec{r})}{k_B T}\right) \right] - \frac{q}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r}).$$

Для достаточно разреженной плазмы, $|e\varphi| \ll k_B T$,

$$1 - \exp\left(\frac{e\varphi(\vec{r})}{k_B T}\right) \approx -\frac{e\varphi(\vec{r})}{k_B T}$$

и

$$\Delta\varphi(\vec{r}) - \frac{1}{\lambda_D^2}\varphi(\vec{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}).$$

В отсутствие факторов, нарушающих сферическую симметрию, в списке аргументов остаётся лишь радиальная переменная и мы имеем дело с обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi(r)}{dr} \right) - \frac{\varphi(r)}{\lambda_D^2} = -\frac{q\delta(r)}{4\pi r^2}.$$

Сделав подстановку

$$\varphi(r) = \chi(r) \exp(-r/\lambda_D),$$

можно убедиться, что новая зависимая переменная удовлетворяет уравнению для скалярного потенциала точечного заряда

$$\Delta\chi(\vec{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}), \quad (6.4.4)$$

и, стало быть, имеет вид кулоновского потенциала

$$\chi(r) = \varphi_K(r) \equiv \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

откуда и следует формула для дебаевского:

$$\varphi_D(r) = \varphi_K(r) \exp(-r/\lambda_D).$$

Заметим, что этот дебаевский потенциал можно интерпретировать как кулоновский, создаваемый *эффективным распределением заряда*, включающим в себя и пробный заряд

$$\rho_D(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}) - \frac{q}{4\pi r\lambda_D^2} \exp(-r/\lambda_D).$$

При этом суммарная величина его заряда оказывается равной нулю:

$$\int_{R^3} \rho_D(\vec{r}) d\vec{r} = q \int \delta(\vec{r}) d\vec{r} - (q/\lambda_D^2) \int_0^\infty \exp(-r/\lambda_D) r dr = 0.$$

В этом и кроется смысл термина «квазинейтральность».

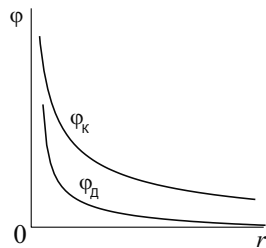


Рис. 6.4. Кулоновский и дебаевский потенциалы

6.4.4 Электронные волны в плазме

Многие (хотя и не все – из-за исключения столкновительного члена) особенности в поведении плазмы описываются в рамках теории Власова. Рассмотрим один из таких процессов – колебания (волны) электронной плотности в тёплой плазме. Чтобы избежать сложных математических выкладок, ограничимся задачей об одномерном движении электронной компоненты в отсутствие магнитного поля в предположении о равномерном распределении неподвижных ионов. Единственной возбуждающей плазму силой будет слабое электростатическое поле E , действующее в выбранном направлении:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Представив решение этого уравнения в виде суммы невозмущённого (равновесного) решения f^0 и возмущения $f' \ll f^0$, в первом (по E) порядке получим

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + v \frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f^0}{\partial v} = 0. \quad (6.4.7)$$

Равновесная функция описывает стационарное пространственно-однородное изотропное по направлениям распределение. Рассматривается режим, в котором возмущающая напряжённость E и результирующее возмущение f' пропорциональны гармонической волне $\exp[i(kx - \omega t)]$ с амплитудами \hat{E} и \hat{f}' соответственно. Из уравнения (6.5.7) вытекает соотношение для амплитуд

$$i[-\omega + kv]\hat{f}' = -\frac{e\hat{E}}{m} \frac{\partial f^0}{\partial v},$$

из которого и находится амплитуда волны возмущения

$$\hat{f}' = -\frac{e\hat{E}}{im} \frac{\partial f^0 / \partial v}{[kv - \omega]}.$$

Амплитуда возмущения концентрации \hat{n}' , определяемая интегрированием этого выражения по скоростям,

$$\hat{n}' = -\frac{e\hat{E}}{im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f^0 / \partial v}{kv - \omega} dv,$$

в свою очередь ведёт к осцилляциям потенциала и плотности заряда в уравнении Пуассона. В результате, для плазмы с произвольной стационарной функцией распределения f^0 получаем *дисперсионное соотношение* (соотношение, связывающее фазовую скорость волны $v_{\phi} = \omega/k$

с её частотой и волновым числом)

$$1 + \frac{\Omega_e^2}{n_e^0 k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f^0 / \partial v}{v - v_{ph}} dv = 0, \quad (6.4.8)$$

где $\Omega_e = \sqrt{n_e^0 e^2 / (m_e \varepsilon_0)}$ – плазменная (ленгмюровская) частота для электронов (ε – диэлектрическая проницаемость плазмы).

6.4.5 Затухание Ландау

Обратим внимание на одну деталь, оказавшуюся в конце сороковых годов поводом для научной дискуссии «академических физиков» с «университетским» физиком А.А.Власовым (МГУ). При

$$v_{\Phi} \gg v_{te} \equiv \sqrt{2k_B/m_e}$$

область интегрирования удобно разбить на регулярную центральную часть, определяемую гладкой плотностью углового распределения $f^0(v)$, и крайнюю, вблизи v_{Φ} , где доминирует сингулярная часть. Если проигнорировать второе слагаемое, а один из подынтегральных множителей в первом представить в виде суммы членов геометрической прогрессии, оборвав её на третьем порядке,

$$\frac{1}{1 - v/v_{\Phi}} = 1 + \frac{v}{v_{\Phi}} + \left(\frac{v}{v_{\Phi}}\right)^2 + \left(\frac{v}{v_{\Phi}}\right)^3 + \dots,$$

получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f^0 / \partial v}{1 - v/v_{\Phi}} dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f^0}{\partial v} \left[1 + \frac{v}{v_{\Phi}} + \left(\frac{v}{v_{\Phi}}\right)^2 + \left(\frac{v}{v_{\Phi}}\right)^3 + \dots \right] dv.$$

Поскольку $\partial f^0 / \partial v$ – нечётная функция скорости, после интегрирования остаются лишь второе и четвёртое слагаемые, которые интегрированием по частям преобразуются в нулевой и второй моменты:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f^0 / \partial v}{1 - v/v_{\Phi}} dv = \frac{n_e^0}{v_{\Phi}} \left[1 + 3 \frac{\overline{v^2}}{v_{\Phi}^2} \right].$$

С учётом соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^0(v) dv = n_e^0$$

формула (6.4.8) преобразуется в

$$1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2}{\omega^2} v^2 \right) = 0. \quad (6.4.9)$$

Для максвелловского распределения

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{k_B T}{2}$$

из уравнения (6.4.9) получается *дисперсионное соотношение Бома-Гросса*:

$$\omega^2 \approx \Omega_e^2 + \frac{3k_B T}{m_e} k^2.$$

Посмотрим теперь, что изменит учёт отброшенного члена. В узкой области интегрирования вокруг точки сингулярности ω/k все множители кроме сингулярного можно считать не изменяющимися, и тогда останется лишь интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z}.$$

Рассматривая его как предел последовательности интегралов от $-a$ до a ,

$$\int_{-a}^a \frac{dz}{z} = \ln a - \ln[a \exp(i\pi + i2\pi n)] = -i\pi - i2\pi n,$$

при $n = 0$ получаем вместо (6.4.9) соотношение:

$$1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2}{\omega^2} v^2 \right) + i\pi \frac{\Omega_e^2}{n_e^0 k^2} \left(\frac{\partial f^0}{\partial v} \right)_{\omega/k} = 0.$$

Полагая найденную поправку достаточно малой, можно приближённо разрешить это уравнение относительно ω :

$$\omega = \Omega_e \left[1 + i \frac{\pi}{2n_e^0} \left(\frac{\Omega_e}{k} \right)^2 \left(\frac{\partial f^0}{\partial v} \right)_{\omega/k} \right]. \quad (6.4.10)$$

Временной множитель в волновой функции имеет вид $e^{-i\omega t}$, так что если параметр ω имеет отрицательную мнимую составляющую, то амплитуда волны затухает. В плазме процесс затухания, не связанный со столкновениями частиц, называют *затуханием Ландау*.

6.4.6 О спектре космических лучей

Звёзды, планеты, туманности и облака погружены в космическую среду, заполненную магнитным полем и плазмой, находящихся в состоянии турбулентного взаимодействия. Высокоэнергетическая часть плазмы, состоящая преимущественно из лёгких ядер, относится к *космическим лучам*. Открыты космические лучи были в 1912 году, но вопрос об их происхождении долгое время оставался открытым.

В конце 40-х годов прошлого века, когда выдающийся американский физик Э. Теллер вместе с Альфвенем и Ричмайером отстаивал гипотезу о солнечном происхождении космических лучей, удерживаемых вблизи Солнца его магнитным полем. Ферми предложил альтернативную гипотезу: ускорение обусловлено взаимодействием космических частиц с блуждающими магнитными полями, заполняющими межзвёздное пространство. Эти магнитные поля тесно связаны с межзвёздным веществом («вморожены» в него), плотность которого в отдельных местах в 10-100 раз выше средней. Эти тяжёлые облака, составляющие по астрономическим данным около 5% межзвёздного пространства (а это – много: пересчитайте-ка на линейные размеры!) сами находятся в хаотическом движении со скоростями порядка 30 км/с. Полагая, что и магнитные поля возрастают в этих облаках, Ферми перевёл задачу движения заряженных частиц в таких магнитных полях на язык теории столкновений. Вот фрагмент из его статьи 1949 года «О происхождении космического излучения»¹⁶.

«Количество энергии, приобретённое или потерянное при соударении, может быть оценено с помощью простых соображений, основанных на специальной теории относительности, причём не потребуется знать детальный механизм соударения. В системе отсчёта, перемещающейся вместе с возмущением поля (с которым происходит соударение), изменения энергии не происходит. Поэтому для того, чтобы найти изменение энергии в покоящейся системе отсчёта, прежде всего необходимо перейти от первоначальной энергии и импульса в покоящейся системе отсчёта к значениям в движущейся вместе с неоднородностью системы отсчёта. В этой системе происходит упругое соударение, при котором изменяется направление импульса, а энергия остаётся без изменений. Переходя обратно к покоящейся системе отсчёта, получаем конечные значения энергии и импульса. Эта процедура, проделанная для встречных столкновений, приводит к следующему результату:

$$\frac{w'}{w} = \frac{1 + 2B\beta \cos \theta + B^2}{1 - B^2}.$$

¹⁶Энрико Ферми. Научные труды, т.1. – М.:Наука, 1972. – С.448-449.

Здесь βc – скорость частицы, ϑ – угол склонения спирали, Bc – скорость перемещения неоднородности. $\langle \dots \rangle$ Усредним теперь результаты для встречных и угонных столкновений, учитывая, что вероятности этих типов событий пропорциональны относительным скоростям и равны поэтому $(\beta \cos \vartheta + B)/2\beta \cos \vartheta$ для встречных столкновений и $(\beta \cos \vartheta - B)/2\beta \cos \vartheta$ для столкновений вдогонку. Отсюда для среднего значения $\ln(w'/w)$ с точностью до членов порядка B^2 получаем

$$\langle \ln(w'/w) \rangle = 4B^2 - 2B^2\beta^2 \cos^2 \vartheta.$$

Этот результат подтверждает принятое в разделе III значение для порядка величины среднего выигрыша энергии» (при одном столкновении $\delta w = B^2 w - B \cdot Y$).

И вот, введя среднее время τ между последовательными столкновениями, решив элементарное дифференциальное уравнение для энергии частицы, ускорявшейся t лет, приняв само это время (возраст частицы) случайным экспоненциально распределённым со средним значением T и усреднив по нему δ -спектр ускоренной частицы $\delta(E - w(t))$, великий Ферми как бы шутя получает энергетический спектр космических лучей в виде степенной функции

$$\begin{aligned} n(\mathcal{E})d\mathcal{E} &= \frac{1}{T} \int_0^{\infty} e^{-t/T} \delta(\mathcal{E} - Mc^2 e^{-B^2 t/\tau}) dt d\mathcal{E} = \\ &= \frac{\tau}{B^2 T} (Mc^2)^{\tau/B^2 T} \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}^{1+\tau/B^2 T}}, \end{aligned}$$

до сих пор остающийся краеугольным камнем физики космических лучей.

6.4.7 Упражнения

1. Убедиться, что распределение (6.4.5) является решением уравнения (6.4.4).
2. Вывести уравнение (6.4.6).
3. Вывести формулу (6.4.10).
4. Показать, что в случае максвелловского распределения f^0 затухание Ландау характеризуется отношением

$$Im \left(\frac{\omega}{\Omega_e} \right) = -0,22\sqrt{\pi} \left(\frac{\Omega_e}{kv_{те}} \right)^2 \exp \left(-\frac{1}{2k^2 \lambda_D^2} \right).$$



Глава 7

Феноменология КОНТИНУУМА

7.1 Феноменологическое описание сплошной среды

7.1.1 Перемещение элементарного вектора

В абсолютно твёрдом теле расстояния между любой парой его точек не меняются. Но, как отмечалось в **3.1**, абсолютно твёрдых тел в природе нет, это – модель, приближение. В действительности, под влиянием внешних воздействий расстояния между точками тела меняются: тело *деформируется* (изменяет форму, размеры). Многие тела после прекращения воздействия сами восстанавливают свою форму. В этом случае говорят об *упругой деформации* или об *упругом теле*. Если приложенные силы (точнее, напряжения) малы, деформации тоже малы и пропорциональны приложенным силам. В нашем курсе мы ограничиваемся рассмотрением *малых (линейных) деформаций упругих тел*.

Чтобы описать кинематическую реакцию сплошного тела на приложенное воздействие, достаточно указать для каждой точки этого тела её новое положение. Пусть \vec{r} характеризует положение такой точки в пространстве до воздействия, а \vec{r}' – её положение после воздействия. В целом процесс может быть описан заданием векторного *поля смещений* $\vec{u}(\vec{r})$:

$$\vec{r} \mapsto \vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}(\vec{r}).$$

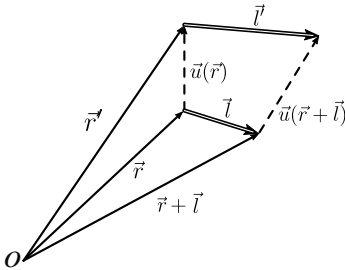


Рис. 7.1. Перемещение вектора \vec{l} в деформируемой среде

Понятно, что если $\vec{u} = \text{const}$ (смещение всех точек тела одинаково), то тело просто поступательно перемещается и никакой деформации не происходит. Однако и зависимость \vec{u} от \vec{r} не обязательно означает деформацию. Проследим за перемещением двух близких точек, до воздействия на тело занимавших положения \vec{r} и $\vec{r} + \vec{l}$. После воздействия, характеризуемого полем смещений $\vec{u}(\vec{r})$, они займут новые положения

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}(\vec{r})$$

и

$$\vec{r}' + \vec{l}' = \vec{r} + \vec{l} + \vec{u}(\vec{r} + \vec{l})$$

соответственно. Вычитая из второго равенства первое, получим

$$\vec{l}' = \vec{l} + \vec{u}(\vec{r} + \vec{l}) - \vec{u}(\vec{r}).$$

Перенеся первое слагаемое правой части в левую и введя обозначение $d\vec{l}' = \vec{l}' - \vec{l}$, перепишем это векторное равенство в проекциях на оси неподвижной системы координат:

$$\begin{aligned} dl_x &= u_x(x + l_x, y + l_y, z + l_z) - u_x(x, y, z) \sim \\ &\sim l_x \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial x} + l_y \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial y} + l_z \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial z}, \\ dl_y &= u_y(x + l_x, y + l_y, z + l_z) - u_y(x, y, z) \sim \\ &\sim l_x \frac{\partial u_y(x, y, z)}{\partial x} + l_y \frac{\partial u_y(x, y, z)}{\partial y} + l_z \frac{\partial u_y(x, y, z)}{\partial z}, \\ dl_z &= u_z(x + l_x, y + l_y, z + l_z) - u_z(x, y, z) \sim \\ &\sim l_x \frac{\partial u_z(x, y, z)}{\partial x} + l_y \frac{\partial u_z(x, y, z)}{\partial y} + l_z \frac{\partial u_z(x, y, z)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

В векторных обозначениях результат (7.1.1) имеет вид

$$d\vec{l}' = (\vec{l} \nabla) \vec{u}(\vec{r}).$$

Нам удобнее будет использовать тензорную форму этого соотношения¹

¹Мы используем цифровые обозначения для неподвижных координат, поскольку не планируем одновременного применения системы подвижных координат.

$$dl_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} l_j.$$

Если бы мы рассматривали абсолютно твёрдое тело, единственным возможным изменением вектора \vec{l} был бы его поворот (вместе со всем телом) на *вектор поворота* $d\vec{\varphi}$. В этом случае

$$d\vec{l} = [d\vec{\varphi}, \vec{l}],$$

или, в координатах,

$$\begin{aligned} dl_1 &= d\varphi_2 l_3 - d\varphi_3 l_2, \\ dl_2 &= d\varphi_3 l_1 - d\varphi_1 l_3, \\ dl_3 &= d\varphi_1 l_2 - d\varphi_2 l_1. \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Представим преобразование (7.1.2) в виде

$$dl_i = \omega_{ij} l_j,$$

где

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -d\varphi_3 & d\varphi_2 \\ d\varphi_3 & 0 & -d\varphi_1 \\ -d\varphi_2 & d\varphi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

– бесконечно малый *тензор поворота*. Он антисимметричен: $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, $\omega_{ii} = 0$. Физический смысл его элементов вскрывается соотношениями $\omega_{12} = -d\varphi_3$, $\omega_{13} = d\varphi_2$, $\omega_{23} = -d\varphi_1$.

7.1.2 Тензор деформаций

Если тело не является абсолютно твёрдым, то тензор преобразования $u_{i,j}$ не сводится только к тензору поворота ω_{ij} , но может быть (как и любой тензор) разложен на антисимметричную и симметричную части:

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i} + u_{j,i} + u_{i,j}) = \\ &= \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}) = \omega_{ij} + \varepsilon_{ij}. \end{aligned}$$

Соответственно,

$$dl_i = u_{i,j} l_j = \omega_{ij} l_j + \varepsilon_{ij} l_j.$$

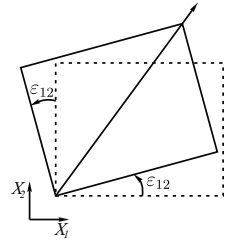


Рис. 7.2. Элементарный поворот

В силу единственности такого разложения первый член

$$\omega_{ij}l_j = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})l_j$$

описывает элементарный поворот окрестности, содержащей рассматриваемый вектор, как элемента абсолютно твёрдого тела. Заметим, что теперь его элементы могут зависеть от координат: разные элементы упругого тела могут быть по-разному повернуты относительно своих исходных положений. Симметричный же тензор

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}), \quad (7.1.3)$$

отражающий изменение формы этой окрестности, называется *тензором деформаций* (точнее, *тензором малых деформаций*). Его элементы не могут быть совсем произвольными числами: помимо условия симметричности

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

они должны ещё удовлетворять и *условиям совместности*:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{jl,ik} + \varepsilon_{ik,jl}.$$

Условия эти, называемые *условиями Сен-Венана*, вытекают из определения тензора деформаций и проверяются прямым дифференцированием соотношения (7.1.3). Каждый из индексов пробегает три значения: 1, 2 и 3, но в силу симметрии относительно перестановки индексов внутри пар из 81 условия различными являются только 6:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12},$$

$$\varepsilon_{11,33} + \varepsilon_{33,11} = 2\varepsilon_{13,13},$$

$$\varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} = 2\varepsilon_{23,23},$$

$$\varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11} = \varepsilon_{13,12} + \varepsilon_{12,13}.$$

$$\varepsilon_{22,13} + \varepsilon_{13,22} = \varepsilon_{23,21} + \varepsilon_{21,23}.$$

$$\varepsilon_{33,12} + \varepsilon_{12,33} = \varepsilon_{32,31} + \varepsilon_{31,32}.$$

Отметим, что в разных точках тела (а в динамических задачах – и в разные моменты времени в одной и той же точке) элементы тензора деформации могут принимать различные значения.

Во многих задачах теории упругости (например, в исследованиях скольжения, вращения) оказывается достаточным ограничиться плоскими деформациями, скажем, в плоскости 12. В этом случае деформации описываются тензором

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

с единственным нетривиальным условием совместимости

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0.$$

В случаях, когда материалы допускают без разрушения большие деформации (каучук и пр.), элементы тензора малых деформаций ε_{ij} (7.1.3) дополняются квадратичными членами, образуя *тензор больших деформаций* γ_{ij} :

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} \mapsto \gamma_{11} = u_{1,1} + \frac{1}{2}[(u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2],$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) \mapsto \gamma_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) + \frac{1}{2}[u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2}]$$

и т.д.

При больших деформациях начинает сказываться эффект перемещения элемента из одного места в другое, что потребует некоторой коррекции приведённых выше соотношений, но мы ограничимся здесь и далее малыми деформациями.

7.1.3 Физический смысл элементов тензора деформаций

Сначала выясним физический смысл диагональных элементов. Пусть вектор \vec{l} направлен вдоль оси 1, $\vec{l} = (l_1, 0, 0)$, тогда

$$dl_1 = \varepsilon_{11}l_1, \quad dl_2 = \varepsilon_{21}l_1, \quad dl_3 = \varepsilon_{31}l_1.$$

Следовательно, диагональный элемент $\varepsilon_{11} = dl_1/l_1$ даёт относительное удлинение (сжатие) окрестности вдоль оси 1.

Чтобы найти смысл недиагональных элементов, рассмотрим преобразование двух единичных векторов:

$$(1, 0, 0) \mapsto (1 + \varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31})$$

и

$$(0, 1, 0) \mapsto (\varepsilon_{12}, 1 + \varepsilon_{22}, \varepsilon_{32}).$$

Скалярное произведение их преобразуется следующим образом:

$$0 = \cos(\pi/2) \mapsto \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = \cos(\pi/2 - \beta_{12}) = \sin(\beta_{12}) \approx \beta_{12}.$$

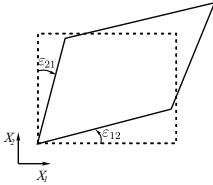


Рис. 7.3. Элементарная деформация

Отсюда $\varepsilon_{12} = \frac{\beta_{12}}{2}$ – смешанный элемент тензора деформации равен половине изменения угла между соответствующими осями (рис. 7.3).

Рассмотрим теперь преобразование тройки ортов:



$$(1, 0, 0) \mapsto (1 + \varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}),$$

$$(0, 1, 0) \mapsto (\varepsilon_{12}, 1 + \varepsilon_{22}, \varepsilon_{32}),$$

$$(0, 0, 1) \mapsto (\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, 1 + \varepsilon_{33}).$$

Объем построенного на этих векторах куба преобразуется следующим образом:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \mapsto \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & 1 + \varepsilon_{22} & \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & 1 + \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = 1 + \text{Tr } \varepsilon_{ij} = V + dV.$$

Таким образом, след тензора деформации даёт относительное изменение объёма деформируемой окрестности:

$$\text{Tr } \varepsilon = \frac{dV}{V}.$$

Выразим теперь изменение расстояния между двумя близкими точками деформируемого тела. Квадрат расстояния между точками начала и конца малого вектора \vec{l} в процессе деформации преобразуется по закону

$$l_i^2 \mapsto |l_i + u_{i,j} l_j|^2 \simeq l_i^2 + 2u_{i,j} l_i l_j.$$

Пользуясь формулой (7.1.3) и учитывая малость деформаций ($|\varepsilon_{ij}| \ll 1$), получим:

$$|\vec{l}| \mapsto \sqrt{l_i^2 + 2u_{i,j} l_i l_j} = \sqrt{l_i^2 + (u_{i,j} + u_{j,i}) l_i l_j} \approx \left(1 + \varepsilon_{ij} \frac{l_i l_j}{|\vec{l}| |\vec{l}|} \right) |\vec{l}|.$$

7.1.4 Тензор напряжений

Рассмотрим объём сплошной среды V , ограниченный поверхностью S . На каждый его элемент δV действует сила тяжести $\vec{F}(\delta V) = \vec{g}\delta m = \rho\vec{g}\delta V$, где δm – масса области δV , а \vec{g} – напряжённость гравитационного поля. Существуют и другие силы (силы инерции, электрические, магнитные), пропорциональные объёму δV , то есть представимые в виде

$$\vec{F}(\delta V) = \vec{f}\delta V.$$

Они называются *объёмными силами*, а вектор \vec{f} , зависящей в общем случае от координат и времени – *объёмной плотностью силы*. Чтобы вычислить суммарную объёмную силу, надо проинтегрировать её плотность по объёму тела

$$\vec{F}(V) = \int_V \vec{f}(\vec{r})\delta V. \quad (7.1.4)$$

Кроме объёмной, на выделенный объём сплошной среды действует *поверхностная сила* со стороны окружающей области (давление, трение). Действующая на элемент его поверхности $\delta\vec{S} = \vec{n}\delta S$ с внешней нормалью \vec{n} , эта сила пропорциональна площади этого элемента δS и зависит от его ориентации в пространстве:

$$\vec{P}(\delta\vec{S}) = \vec{P}(\vec{n}\delta S) \approx \vec{t}(\vec{n})\delta S.$$

Вектор $\vec{t}(\vec{n})$ называется *вектором напряжения*. Как и плотность объёмной силы, в общем случае он зависит от координат и времени. $\vec{t}(\vec{n})\delta S$ даёт силу, приложенную к элементу δS поверхности со стороны тонкого слоя, прилегающего к этому элементу с *внутренней* (противоположной направлению \vec{n}) стороны. Заменяя \vec{n} на противоположный, мы автоматически переходим к силе, действующей на этот элемент с противоположной, внешней стороны, и, по третьему закону Ньютона, равной ей по величине и противоположной по направлению силе

$$\vec{t}(-\vec{n}) = -\vec{t}(\vec{n}). \quad (7.1.5)$$

Суммарная поверхностная сила, действующая на тело (или часть тела) с поверхностью S , даётся поверхностным интегралом

$$\vec{P}(S) = \oint_S \vec{t}(\vec{n}, \vec{r})\delta S. \quad (7.1.6)$$

Следует понимать, что V и S в формулах (7.1.4) и (7.1.6) обозначают не числовые переменные (объём и площадь), а *область и её поверхность*. Действующие на тело силы зависят не просто от величины объёма или площади поверхности тела. Деформирование области при постоянных значениях этих величин изменяет действующую на него силу. Исключение составляют случаи, когда поле сил в области тела или его элемента однородно.

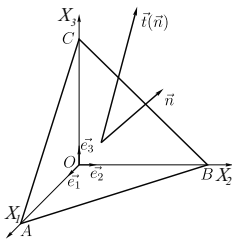


Рис. 7.4. Элементарный тетраэдр Коши

Для того, чтобы найти действующую на $\vec{n}\delta S$ силу, нет необходимости каждый раз находить $\vec{t}(\vec{n})$ для заданного \vec{n} , достаточно знать его всего лишь для трёх координатных направлений $\vec{t} = \vec{t}(\vec{e}_i)$. Чтобы установить связь между ними, выделим мысленно в среде элементарный тетраэдр $OABC$ (рис. 7.4). Пусть $\vec{t}(\vec{n})$ – постоянный в пределах элементарного тетраэдра вектор напряжений. Вычислим силы, действующие на четыре грани тетраэдра, используя свойство (7.1.5):

$$\vec{t}(\vec{n})S_{ABC} = \vec{t}(\vec{n})S,$$

$$\vec{t}(-\vec{e}_2)S_{AOC} = -\vec{t}(\vec{e}_2)Sn_2,$$

$$\vec{t}(-\vec{e}_3)S_{AOB} = -\vec{t}(\vec{e}_3)Sn_3,$$

$$\vec{t}(-\vec{e}_1)S_{BOC} = -\vec{t}(\vec{e}_1)Sn_1,$$

где $n_i = \vec{n}\vec{e}_i$ – направляющие косинусы вектора \vec{n} . Суммарная сила, действующая на неподвижный тетраэдр со стороны окружающей среды, равна нулю,

$$\vec{P}(S) = \{\vec{t}(\vec{n}) - \vec{t}(\vec{e}_1)n_1 - \vec{t}(\vec{e}_2)n_2 - \vec{t}(\vec{e}_3)n_3\} S = 0. \quad (7.1.7)$$

Если тетраэдр находится в движении, то связанная с ним система координат является неинерциальной и в правую часть этого равенства следует добавить силу инерции, пропорциональную объёму тетраэдра δV . С уменьшением размеров тетраэдра $\delta V \sim S^{3/2}$ и в асимптотике $S \rightarrow 0$ мы вновь имеем соотношение (7.1.7), откуда следует:

$$\vec{t}(\vec{n}) = \sum_j \vec{t}(\vec{e}_j)n_j,$$

или, в координатах,

$$t_i(\vec{n}) = \sigma_{ij}n_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (7.1.8)$$

где

$$\sigma_{ij} = t_i(\vec{e}_j)$$

– тензор напряжений. Его диагональные элементы $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ называются *нормальными напряжениями*, недиагональные ($\sigma_{12}, \sigma_{13}, \dots$) – *касательными напряжениями* или *напряжениями сдвига* (напряжения сдвига часто обозначаются другой буквой – τ)

Известно, что симметричный тензор геометрически представляет эллипсоидом. Как будет показано ниже, тензор напряжений также является симметричным. Если направить орты \vec{e}_i вдоль главных осей эллипсоида напряжений в данной точке среды, то смешанные компоненты тензора напряжений обратятся в нуль и останутся лишь диагональные элементы (обозначаемые $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), называемые *главными напряжениями*. В этой системе координат соотношения (7.1.8) принимают особенно простой вид:

$$t_1(\vec{n}) = \sigma_1 n_1, \quad t_2(\vec{n}) = \sigma_2 n_2, \quad t_3(\vec{n}) = \sigma_3 n_3.$$

В тензорной форме

$$\sigma_{ij} n_j - \sigma n_i = (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0.$$

Как и в случае тензора деформаций, главные оси тензора напряжений взаимно перпендикулярны, а *главные инварианты* выражаются формулами

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad I_2 = -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1), \quad I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

Среднее или *гидростатическое* напряжение определяется формулой $\bar{\sigma} = I_1/3$.

Тензор напряжений удобно разложить на *шаровой тензор* и *девиатор*

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma} \delta_{ij} + \sigma'_{ij}.$$

Шаровой тензор

$$\bar{\sigma} \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix}$$

выделяет из напряжённого состояния равномерное всестороннее растяжение (сжатие), если $\bar{\sigma} < 0$, при котором изменяется лишь объём данного элемента тела без изменения формы. Девиатор напряжений характеризует напряжения, изменяющие форму элемента без изменения его объёма. На такие составляющие можно разложить любой тензор, в том числе, конечно, и тензор деформаций. Шаровая часть тензора деформаций будет отражать деформацию растяжения или сжатия (без изменения формы: куб преобразуется в куб, шар в шар и т.д.), а девиатор – отклонение (*девиацию*) формы находящегося под нагрузкой элемента от начальной (куб стал параллелепипедом, шар – эллипсоидом того же объёма и т.д.).

Главные инварианты девиатора напряжений

$$J_1 = \sigma'_{kk} = 0,$$

$$J_2 = (1/2) \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = (1/6) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

и

$$J_3 = (1/27) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2(\sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_2 - \sigma_3)^2(\sigma_2 - \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_1) + (\sigma_3 - \sigma_1)^2(\sigma_3 - \sigma_2 + \sigma_1 - \sigma_2)].$$

По аналогии с инвариантами тензора напряжений вводятся инварианты девиатора тензора напряжений, для краткости также называемые инвариантами тензора напряжений. Первый из них, естественно, равен нулю,

$$J'_1 = (\sigma_1 - \bar{\sigma}) + (\sigma_2 - \bar{\sigma}) + (\sigma_3 - \bar{\sigma}) = 3\bar{\sigma} - 3\bar{\sigma} = 0.$$

Второй инвариант приводится к виду

$$J'_2 = (1/6) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2. \quad (7.1.9)$$

В теории упругопластичности используется тесно связанная с ним величина

$$\tau_{\text{инт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)},$$

называемая *интенсивностью касательных напряжений*. Она представляет собой касательное напряжение на октаэдрических площадках (площадках, равнонаклонённых ко всем трём главным напряжениям). Пропорциональная ей величина

$$\sigma_{\text{инт}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}$$

называется *интенсивностью напряжений*. Числовой коэффициент здесь выбран так, чтобы при простом растяжении интенсивность напряжений была равна нормальному напряжению. Действительно, при осевом (вдоль оси 1) растяжении

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0,$$

$$\sigma_{\text{инт}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2} = \sigma.$$

Наконец, приведём ещё одно определение, также связанное с описанием упругопластичности: *направляющий тензор напряжений*

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} (\sigma_1 - \bar{\sigma})/\tau_{\text{инт}} & \sigma_{12}/\tau_{\text{инт}} & \sigma_{13}/\tau_{\text{инт}} \\ \sigma_{21}/\tau_{\text{инт}} & (\sigma_2 - \bar{\sigma})/\tau_{\text{инт}} & \sigma_{23}/\tau_{\text{инт}} \\ \sigma_{31}/\tau_{\text{инт}} & \sigma_{32}/\tau_{\text{инт}} & (\sigma_3 - \bar{\sigma})/\tau_{\text{инт}} \end{pmatrix}.$$

Он определяет лишь главные направления напряжений и отношения компонент тензора напряжений, но не их абсолютные величины (компоненты направляющего тензора безразмерны).

7.1.5 Равновесие напряжений

Как отмечалось выше, в силу малых размеров элементарного тетраэдра сила инерции пропорциональна его объёму и при малых размерах является величиной высшего порядка малости по сравнению с поверхностной. То же самое справедливо и для любой объёмной силы. Однако при рассмотрении условий равновесия области произвольных

размеров следует учитывать обе силы – объёмную \vec{F} , так и поверхностную \vec{P} . Суммарная сила, действующая на область V сплошной среды, ограниченной поверхностью S , равна

$$\vec{F}(V) + \vec{P}(S) = \int_V \vec{f}(\vec{r})\delta V + \oint_S \vec{t}(\vec{n}, \vec{r})\delta S,$$

или, в проекциях,

$$F_i(V) + P_i(S) = \int_V f_i(\vec{r})\delta V + \oint_S \sigma_{ij}n_j\delta S.$$

Чтобы и второй интеграл преобразовать в объёмный, зафиксируем индекс i и три элемента тензора напряжений $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}$ примем в качестве трёх проекций вектора $\vec{\sigma}_i$. Применяя теперь теорему Остроградского-Гаусса, получим:

$$\oint_S \sigma_{ij}n_j\delta S = \oint_S \vec{\sigma}_i\delta\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{\sigma}_i\delta V = \int_V \sigma_{ij,j}\delta V.$$

Таким образом, суммарная сила, действующая на элементарный объём δV тела, запишется в виде

$$F_i(\delta V) + P_i(\delta S) = \{f_i + \sigma_{ij,j}\}\delta V.$$

В состоянии равновесия действующая на произвольный объём δV сила должна быть равна нулю, из чего следует *дифференциальная форма условия равновесия сил в сплошной среде*:

$$f_i + \sigma_{ij,j} = 0.$$

Как и в случае твёрдого тела, равновесия внешних сил недостаточно для равновесия тела, необходимо ещё и равновесие моментов этих сил. Действующий на объём V момент сил $\vec{M}(V)$ также распадается на объёмную и поверхностную составляющие:

$$\vec{M}(V) = \int_V [\vec{r}, \vec{f}(\vec{r})]\delta V + \oint_S [\vec{r}, \vec{t}(\vec{n}, \vec{r})]\delta S.$$

Последнее слагаемое преобразуем с использованием свойств тензора Леви-Чивита:

$$\oint_S [\vec{r}, \vec{t}(\vec{n}, \vec{r})]_i \delta S = \oint_S \epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl}n_l\delta S =$$

$$= \int_V (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl})_{,l} \delta V = \int_V \epsilon_{ijk} \{ \delta_{jl} \sigma_{kl} + x_j \sigma_{kl,l} \} \delta V.$$

Объединяя поверхностный момент с объёмным, получим

$$M_i = \int_V \epsilon_{ijk} \{ \delta_{jl} \sigma_{kl} + x_j [f_k + \sigma_{kl,l}] \} \delta V. \quad (7.1.10)$$

В состоянии равновесия $M_i = 0$. При этом содержимое квадратных скобок в (7.1.10) обращается в нуль, а ввиду произвольности объёма V

$$\epsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{kl} = \epsilon_{ilk} \sigma_{kl} = 0.$$

В компонентах это условие имеет вид:

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = 0,$$

$$\sigma_{31} - \sigma_{13} = 0,$$

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0.$$

Отсюда следует важный вывод: *тензор напряжений является симметричным*:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

7.1.6 Упражнения

1. Задано поле смещений $\vec{u} = (x_1 - x_3)^2 \vec{e}_1 + (x_2 + x_3)^2 \vec{e}_2 - x_1 x_2 \vec{e}_3$. Найти тензор деформации, тензор поворота и вектор поворота в точке с координатами $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.
2. Задано поле смещений в виде: $u_1 = 4x_1 - x_2 + 3x_3$, $u_2 = x_1 + 7x_2$, $u_3 = -3x_1 + 4x_2 + 4x_3$. Найти главные деформации.
3. В некоторой точке задан тензор напряжений в виде

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & -0,2 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ -0,2 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Определить вектор напряжений на площадке с нормалью $\vec{n} = 2/3\vec{e}_1 - 2/3\vec{e}_2 + 1/3\vec{e}_3$.

4. Напряжённое состояние упругой среды задано тензор-функцией

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3x_1 x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ \dots & 0 & 2x_3 \\ \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Заполнить пропущенные позиции и определить вектор напряжения в точке с координатами $(2, 1, \sqrt{3})$ на площадке, касательной в этой точке к цилиндрической поверхности $x_2^2 + x_3^2 = 4$.

5. Какой вид должны иметь компоненты объёмной силы, если при распределении напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

тело находится в состоянии равновесия?

6. Вывести формулу (7.1.9).



7.2 Кинематика текучей среды

7.2.1 Два способа описания течения

Материальная точка (частица) упругого тела, сместившись под действием приложенной к телу силы на некоторое (обычно небольшое) расстояние, по прекращении её действия возвращается в исходное положение. Процессы такого типа мы рассматривали выше. Теперь мы перейдем к рассмотрению *текучих сред* – жидкостей, газов, частицы которых не привязаны к определённым местам и могут перемещаться на сколь угодно большие расстояния даже в отсутствие внешних сил.

Возьмём физически малый объём *движущейся среды* δV и будем считать его материальной точкой, то есть припишем ему радиус-вектор \vec{r} , проведённый, скажем, в его центр масс. Если разобьём среду на элементы δV_i , получим совокупность «частиц» среды (не следует отождествлять их с молекулами, это – классические частицы, называемые, для краткости, *жидкими частицами*), согласованно перемещающихся в пространстве. Номер i – это своего рода *имя* частицы. Вместо цифры в качестве имени удобнее использовать радиус-вектор частицы, который она имела в начальный момент: $\vec{\xi} = \vec{r}(0)$ (в далёкие времена так и поступали, вспомните: «Тартарен из Тараскона»). Наблюдая за движением этой частицы, мы можем регистрировать её координаты $\vec{r}(t|\vec{\xi})$ в последовательные моменты времени, находить соответствующие скорости

$$\vec{V}(t|\vec{\xi}) = \left. \frac{d\vec{r}(t|\vec{\xi})}{dt} \right|_{\vec{\xi}=\text{const}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt},$$

и ускорения

$$\vec{A}(t|\vec{\xi}) = \left. \frac{d\vec{V}(t|\vec{\xi})}{dt} \right|_{\vec{\xi}=\text{const}} \equiv \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

Каждая кривая $\vec{r}(t|\vec{\xi})$ указывает нам положения *одной и той же частицы* в разные моменты времени. Такой способ описания движения

среды называют *лагранжевым*.

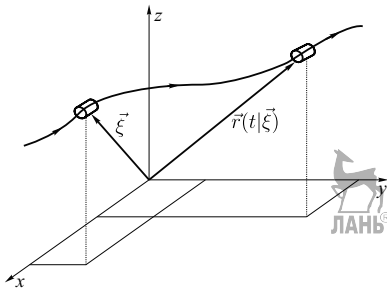


Рис. 7.5. Лагранжев способ описания движения жидкости

Существует другой способ описания движения среды, называемый *эйлеровым*. Зафиксируем в пространстве точку наблюдения \vec{r} и будем наблюдать скорость $\vec{v}(\vec{r}, t)$ проходящих в её окрестности частиц. Изменение *этой* скорости со временем объясняется теперь не действием силы на выделенную частицу, как в лагранжевом подходе, а тем, что в разные моменты времени мимо точки \vec{r} проходят разные частицы (с разными именами $\vec{\xi}$). Обозревая все точки движущейся среды, мы видим поле скоростей $\vec{v}(\vec{r}, t)$ в *данный момент времени*. Скорости эти взяты в разных точках среды и потому принадлежат *разным частицам в один и тот же момент времени* в отличие от лагранжева описания, в котором скорость характеризует одну и ту же частицу среды в разные моменты времени.

Чтобы лучше уяснить смысл обоих подходов, рассмотрим движение точки среды, поле скоростей которой известно. Из определения скоростей видно, что

$$\vec{V}(t|\vec{\xi}) = \vec{v}(\vec{r}(t|\vec{\xi}), t).$$

Чтобы записать обратное соотношение, введем функцию $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{r}, t)$, дающую начальное положение частицы, которая в момент времени t находится в точке \vec{r} . Тогда

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{V}(t|\vec{\xi}(\vec{r}, t)).$$

Из этих формул следуют два важных кинематических соотношения. Одно из них выражает закон движения частицы в заданном поле скоростей,

$$\vec{r}(t|\vec{\xi}) = \vec{\xi} + \int_0^t \vec{V}(t'|\vec{\xi}) dt' = \vec{\xi} + \int_0^t \vec{v}(\vec{r}(t', \vec{\xi}), t') dt', \quad (7.2.1)$$

другое даёт ускорение этой частицы

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}. \quad (7.2.2a)$$

Слагаемое $\partial \vec{v} / \partial t$ называется *локальной производной*, $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$ – *конвективной производной*, а левая часть – *материальной* или *полной про-*

изводной. В покомпонентной записи эта формула имеет вид

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \equiv \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j. \quad (7.2.2b)$$

Формулы типа (7.2.2) справедливы для любой распределённой в потоке среды величины $A(x_i, t)$:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + A_{,j} v_j.$$

Чтобы представить себе движение жидкой среды в целом, мы можем, мысленно пометив в начальный момент различные точки среды их начальными координатами $\vec{\xi}$, представить себе совокупность кривых – *траекторий* этих частиц, определяемых соотношениями (7.2.1) (вспомним школьную демонстрацию опыта со струйками чернил в потоке воды). В каждый момент времени дифференциал радиус-вектора движущейся $\vec{\xi}$ -частицы будет направлен вдоль её скорости, $d\vec{R}(t|\vec{\xi}) = \vec{V}dt$, так что его проекции на координатные оси связаны соотношениями

$$\frac{dX_1}{V_1(t|\vec{\xi})} = \frac{dX_2}{V_2(t|\vec{\xi})} = \frac{dX_3}{V_3(t|\vec{\xi})} = dt.$$

Это – лагранжев подход. Найдя соответствующую этому уравнению кривую и нарисовав её, мы получим *траекторию частицы* – линию, по которой двигалась выбранная нами для наблюдения $\vec{\xi}$ -частица. Чтобы полностью охарактеризовать это движение, нужно *оцифровать* эту кривую, расставив на ней последовательность точек и указать моменты времени их посещения частицей. Тогда будет видно, где частица двигалась быстро, где медленно. В эйлеровом подходе мы «видим» скорости всех частиц среды в данный момент. Построенное по заданному полю касательных семейство гладких кривых тоже характеризует движение среды, но для полноты характеристики надо тоже оцифровать их, точнее, указать имена частиц, находящихся (в данный момент времени) в отмеченных на кривых точках. Подчеркнём ещё раз, что разные точки каждой из этих кривых соответствуют положениям разных частиц в данный фиксированный момент времени. Кривые эти называются *линиями тока* и описываются уравнениями

$$\frac{\delta x_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{\delta x_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{\delta x_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)}.$$

Использование здесь символа δ вместо d должно подчеркнуть, что соответствующие приращения не связаны с реальным движением, а производятся, как математическая операция, мгновенно.

В общем случае линии тока не совпадают с траекториями (разным моментам времени соответствуют разные карты линий тока). Совпадение имеет место лишь в случае *стационарного течения*, когда карта линий тока не меняется ($\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r})$).

Построим теперь в окрестности какой-либо точки замкнутый контур малых размеров C . Следя за движением составляющих этот контур точек среды вдоль своих траекторий, мы получим поверхность, ограничивающую *струю тока* – множество близких траекторий частиц. Если же мы выделим множество линий тока, проходящих в данный момент через построенный контур, то ограниченная полученной поверхностью совокупность линий тока даёт нам *трубку тока*.



7.2.2 Конвективное ускорение

Остановимся на формуле материальной производной (7.2.1), связывающей скорость изменения скорости *проходящей через точку наблюдения частицы* (левая часть равенства) со скоростью изменения скорости *наблюдаемых в точке \vec{r} частиц*. Физический смысл её легко подтверждается прямым выводом из формулы приращения скорости наблюдаемой частицы за время dt , в течение которого частица перемещается из точки \vec{r} в точку $\vec{r} + \vec{v}dt$:

$$\begin{aligned} d\vec{v} &= \vec{v}(\vec{r} + \vec{v}dt, t + dt) - \vec{v}(\vec{r}, t) = \\ &= \vec{v}(x_1 + v_1dt, x_2 + v_2dt, x_3 + v_3dt, t + dt) - \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) \sim \\ &\sim \left(v_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_3} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) dt = \left((\vec{v}\nabla)\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) dt. \end{aligned}$$

Преобразуем формулу конвективной составляющей ускорения

$$\vec{a}_{\text{кон}} = (\vec{v}\nabla)\vec{v}$$

к другому, более удобному в ряде случаев виду. С этой целью обратимся к известной формуле двойного векторного произведения:

$$\left[\vec{A} \left[\vec{B}, \vec{C} \right] \right] = \vec{B} \left(\vec{A}, \vec{C} \right) - \vec{C} \left(\vec{A}, \vec{B} \right),$$

в котором \vec{A} и \vec{B} будем полагать функциями векторного аргумента \vec{r} , а \vec{C} заменим векторным дифференциальным оператором ∇ . Запишем

полученное выражение дважды, один раз полагая, что оператор ∇ действует только на вектор \vec{B} ,

$$\left[\vec{A} \left[\vec{B}, \nabla \right] \right] = \vec{B} \left(\vec{A}, \nabla \right) - \nabla \left(\vec{A}, \vec{B} \right),$$

а другой раз, переменяв обозначения $\vec{A} \leftrightarrow \vec{B}$, будем считать его действующим на вектор-функцию \vec{A} :

$$\left[\vec{B} \left[\vec{A}, \nabla \right] \right] = \vec{A} \left(\vec{B}, \nabla \right) - \nabla \left(\vec{B}, \vec{A} \right).$$

Расположим теперь все вектор-функции относительно оператора набла *правильно*, то есть так, чтобы все функции, на которые он действует, и только они стояли справа от него:

$$\begin{aligned} - \left[\vec{A} \left[\nabla, \vec{B} \right] \right] &= \left(\vec{A}, \nabla \right) \vec{B} - \nabla \left(\vec{A}, \vec{B} \right), \\ - \left[\vec{B} \left[\nabla, \vec{A} \right] \right] &= \left(\vec{B}, \nabla \right) \vec{A} - \nabla \left(\vec{A}, \vec{B} \right). \end{aligned}$$

Теперь мы можем убрать подчёркивания, указывающие на дифференцируемые функции во всех слагаемых, кроме последних, однако после суммирования этой пары уравнений исчезнет надобность и в них:

$$\nabla \left(\vec{A}, \vec{B} \right) + \nabla \left(\vec{A}, \vec{B} \right) = \nabla \left(\vec{A}, \vec{B} \right) \equiv \nabla \left(\vec{A}, \vec{B} \right).$$

В результате получим:

$$- \left[\vec{A} \left[\nabla, \vec{B} \right] \right] - \left[\vec{B} \left[\nabla, \vec{A} \right] \right] = \left(\vec{A}, \nabla \right) \vec{B} + \left(\vec{B}, \nabla \right) \vec{A} - \nabla \left(\vec{A}, \vec{B} \right).$$

И вот теперь, подставляя в эту формулу $\vec{A} = \vec{B} = \vec{v}$,

$$-2 [\vec{v}, \text{rot } \vec{v}] = 2 (\vec{v}, \nabla) \vec{v} - \text{grad } v^2,$$

мы приходим к другой форме конвективного ускорения:

$$\vec{a}_{\text{кон}} = \text{grad } \frac{v^2}{2} - [\vec{v}, \text{rot } \vec{v}]. \quad (7.2.3)$$

7.2.3 Первая теорема Гельмгольца

Выше, говоря о положении жидкой частицы в пространстве, мы имели в виду координаты её центра масс $\vec{R} = \{X_i\}$. Теперь же мы обратим внимание и на другие точки этой малой частицы. Пусть

$$x_i = X_i + l_i$$

– такая точка (вектор l_i мал). За время dt она переместится на вектор

$$dx_i = dX_i + \omega_{ij}(dt)l_j + \varepsilon_{ij}(dt)l_j, \quad (7.2.4)$$

представляющий движение жидкой частицы за малое время dt в виде суммы поступательного перемещения, элементарного поворота и элементарной деформации. Для наглядности первые два слагаемых можно объединить в одно, представив движение жидкой частицы в виде суммы *квазитвёрдого* и *деформационного* движений.

Учтём теперь, что

$$dX_i = V_i dt, \\ \omega_{ij}(dt) = \dot{\omega}_{ij} dt = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} dt$$

и

$$\varepsilon_{ij}(dt) = \dot{\varepsilon}_{ij}(0) dt = (1/2)(V_{j,i} + V_{i,j}) dt \approx (1/2)(v_{j,i} + v_{i,j}) dt.$$

Подставляя эти формулы в уравнение (7.2.4) и переходя от дифференциала к производной, получим

$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}_d, \quad (7.2.5)$$

где $\vec{v}_t = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{l}]$ – скорость точки твёрдой частицы, а $(\vec{v}_d)_i = (1/2)(v_{j,i} + v_{i,j})l_j$ – скорость деформации упругой частицы. Уравнение (7.2.5) представляет собой математическую формулировку **первой теоремы Гельмгольца**.

7.2.4 Вторая теорема Гельмгольца и теорема Стокса

Движение текучей среды, сопровождающееся вращением отдельных её элементарных объёмов, называют *вихревым*, а сам вращающийся объём – *вихрем*. Подобно тому, как поле скоростей полюсов (центров масс) этих элементов $\vec{v}(\vec{r})$ изображается линиями тока, поле их угловых скоростей $\vec{\omega}(\vec{r})$ может быть представлено с помощью *вихревых линий* – линий, касательные к которым в каждой точке \vec{r} совпадают по направлению с вектором $\vec{\omega}(\vec{r})$ ². Аналогичный смысл имеют и понятия *вихревой струи* и *вихревой трубки* (рис. 7.6).

²Часто вместо вектора угловой скорости используют его удвоенное значение $\vec{\Omega} = 2\vec{\omega}$, называемое *вихрем*.

Вторая теорема Гельмгольца

гласит: *поток вектора угловой скорости через любое поперечное сечение вихревой трубки в фиксированный момент времени один и тот же.*

Доказательство. Выделим в вихревой трубке объём V , заключённый между боковой поверхностью трубки S_0 и двумя её произвольными поперечными сечениями S_1 и S_2 . По теореме Остроградского-Гаусса поток вектора $\vec{\omega}(\vec{r})$ через замкнутую поверхность $S = S_0 + S_1 + S_2$ этого объёма равен интегралу от дивергенции $\vec{\omega}(\vec{r})$ по ограниченному этой поверхностью объёму. Вектор $\vec{\omega}$ может быть найден из соотношения

$$\vec{v}(\vec{r} + \vec{x}) - \vec{v}(\vec{r}) = [\vec{\omega}(\vec{r}), \vec{x}].$$

Взяв от него ротор по \vec{x} ,

$$\text{rot}(\vec{v}(\vec{r} + \vec{x})) = \vec{\omega}(\vec{r})(\nabla, \vec{r}) - (\vec{\omega}(\vec{r}), \nabla \vec{x}) = 3\vec{\omega}(\vec{r}) - \vec{\omega}(\vec{r}) = 2\vec{\omega}(\vec{r}),$$

и положив $\vec{x} = 0$, находим

$$\vec{\omega}(\vec{r}) = (1/2)\text{rot}\vec{v}(\vec{r}).$$

Дивергенция ротора равна нулю, и из упомянутой теоремы следует

$$\oint_S \vec{\omega}(\vec{r}) \delta \vec{S} = 0.$$

Учитывая, что интеграл по боковой поверхности элемента трубки равен нулю (поскольку $\delta \vec{S} \perp \vec{\Omega}$), получаем

$$\int_{S_1} \vec{\omega}(\vec{r}) \delta \vec{S} + \int_{S_2} \vec{\omega}(\vec{r}) \delta \vec{S} = 0.$$

Поскольку внешние нормали оснований направлены в противоположные стороны, приходим к утверждению теоремы:

$$\int_{S_1} \omega(\vec{r}) \delta S = \int_{S_2} \omega(\vec{r}) \delta S.$$

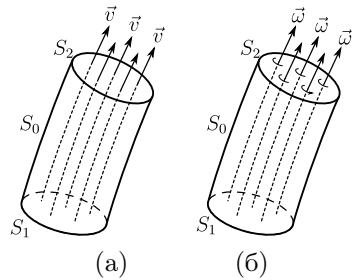


Рис. 7.6. Элементы трубки тока (а) и вихревой трубки (б)

Интеграл

$$J(S) = \int_S \vec{\omega}(\vec{r}) \delta \vec{S},$$

называется *интенсивностью вихревой трубки*. По **теореме Стокса** его величина определяется циркуляцией вектора скорости вокруг контура L , окружающего сечение S вихревой трубки:

$$J(S) = \oint_L \vec{v}(\vec{r}) \delta \vec{l}.$$

Следствие: *вихревые трубки не могут заканчиваться внутри среды*. Опыт подтверждает этот факт: в природе наблюдаются либо замкнутые вихревые кольца (наподобие колец дыма, пускаемых изошрёнными курильщиками), либо вихревые трубки, заканчивающиеся на поверхностях раздела жидкой и газообразной, жидкой и твёрдой или газообразной и твёрдой сред (дым из трубы, водовороты, смерчи).

7.2.5 Первая теорема Кельвина

Первая теорема Кельвина относится к поведению вихревой струи, ограниченной *жидким* (то есть состоящим из одних и тех же частиц жидкости) контуром: *производная по времени от циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру L равна циркуляции ускорения по тому же контуру*:

$$\frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \delta \vec{l} = \oint_L \vec{a} \delta \vec{l}.$$

С формальной стороны речь здесь идет о том, что символ производной по времени можно пронести сквозь интеграл и применить к \vec{v} . Необходимость доказательства справедливости этой процедуры обусловлена тем, что контур L сам находится в состоянии движения (этот факт подчеркивается использованием символа δ вместо обычного d в дифференциале):

$$\frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \delta \vec{l} = \frac{d}{dt} \lim \sum_i \vec{v}_i \delta \vec{l}_i = \lim \sum_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i \delta \vec{l}_i = \oint_L \vec{a} \delta \vec{l} + \oint_L \vec{v} \frac{d}{dt} \delta \vec{l}.$$

Операции, обозначаемые символами $\frac{d}{dt}$ и δ перестановочны, а $d\vec{l} = d\vec{r} = \vec{v} dt$, так что последний интеграл приводится к интегралу по замкнутому контуру от полного дифференциала функции $v^2/2$, который

равен нулю:

$$\oint_L \vec{v} \frac{d}{dt} \delta \vec{l} = \oint_L \vec{v} \delta \left(\frac{d\vec{l}}{dt} \right) = \oint_L \vec{v} \delta \vec{v} = \oint_L \delta \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0.$$

Теорема доказана. Заметим, что циркуляция ускорения пропорциональна циркуляции объёмной силы, представляющей работу этой силы при перемещении материальной точки по замкнутому контуру L .



7.2.6 Упражнения

1. В поле скоростей $\vec{v}(\vec{x}, t) = x_1^2 t \vec{e}_1 + x_2 t^2 \vec{e}_2 + x_1 x_3 t \vec{e}_3$ определить ускорение частицы в момент $t = 1$ в точке $(1, 3, 2)$.
2. Доказать, что в поле скоростей $v_1 = x_1^2 x_2 + x_2^3$, $v_2 = -x_1^3 - x_1 x_2^2$, $v_3 = 0$ линии тока будут окружностями.
3. Показать, что поле скоростей $v_i = A x_i / (x_j x_j)^{3/2}$ удовлетворяет уравнению непрерывности несжимаемой жидкости $v_{i,i} = 0$.
4. Найти циркуляцию скорости по контуру квадрата $x_1 = \pm 1$, $x_2 = \pm 1$, $x_3 = 0$ в двумерном течении с полем скоростей $\vec{v} = (x_1 + x_2) \vec{e}_1 + (x_1^2 - x_2) \vec{e}_2$.

7.3 Динамика текучей среды

7.3.1 Сохранение массы

В механике материальных точек их массы полагались постоянными, не зависящими ни от времени, ни от координат или их производных. В отдельных случаях (типа реактивного движения или релятивистских скоростей) использование понятия переменной массы было скорее дидактическим приёмом, чем логической необходимостью. В механике сплошной среды ситуация иная: вещество распределено непрерывно, и масса, находящаяся в фиксированном или движущемся объёме, может меняться за счёт того, что часть вещества в процессе движения покидает объём, а другая часть, находившаяся ранее за его пределами, входит внутрь его, и масса входящего вещества может не компенсировать массу выходящего. Выход из этого положения заключается в наблюдении объёма, занимаемого выделенным количеством вещества δm : $\delta V \equiv V(\delta m)$. Правда, с течением времени элементарный объём этот обыкновенно расплывается как капля масла на нагретой сковороде, но для небольших (*инфинитезимальных*) интервалов времени это несущественно.

Рассмотрим движение такого элемента δV среды с массой $\delta m = \rho \delta V$. По закону сохранения массы

$$\frac{d}{dt} \delta m = \frac{d}{dt} (\rho \delta V) = \frac{d\rho}{dt} \delta V + \rho \frac{d(\delta V)}{dt} = 0. \quad (7.3.1)$$

За время dt каждая точка среды перемещается на малый вектор $\vec{u} = \vec{v} dt$, и относительное изменение рассматриваемого объёма в этом поле перемещений

$$\frac{d(\delta V)}{\delta V} = \frac{1}{\delta V} \oint_{S(\delta V)} \vec{u} \delta \vec{S} \rightarrow \operatorname{div} \vec{u} = (\operatorname{div} \vec{v}) dt,$$

так что имеет место соотношение

$$\frac{d(\delta V)}{dt} = \delta V \operatorname{div} \vec{v}.$$

Подставляя это соотношение в исходное уравнение сохранения массы и сокращая объём, приходим к *уравнению баланса* (называемому ещё *уравнением непрерывности*) массы в форме Лагранжа:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

В тензорных обозначениях

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{j,j} = 0. \quad (7.3.2)$$

Раскрывая здесь материальную производную по формуле

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho$$

и учитывая, что

$$\vec{v} \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div}(\rho \vec{v}),$$

получим уравнение баланса массы в форме Эйлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

где величина $\rho \vec{v} = \vec{j}$ представляет собой *вектор плотности тока массы* (по аналогии с электрическим током – *током заряда*). В тензорной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_j)_{,j} = 0.$$

Уравнение это называют часто *локальным* уравнением баланса в отличие от уравнения (7.3.2), называемого *субстанциональным*.

В общем случае масса не обязана сохраняться. Предположим, мы рассматриваем смесь двух газов или жидкостей, вступающих друг с другом в химическую реакцию, изменяющую их концентрации и порождающую газ третьего типа. Тогда для плотности *отдельного типа* газа надо будет писать неоднородное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = R(\vec{r}, t),$$

в правой части которого имеется плотность источников (стоков) распространяющейся субстанции (в данном случае массы).

Вообще, уравнение баланса несохраняющейся физической величины X , непрерывно распределённой в пространстве с плотностью $\rho^X(\vec{r}, t)$, имеет вид

$$\frac{\partial \rho^X}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}^X = R^X(\vec{r}, t),$$

где $\vec{j}^X = \vec{j}^X(\vec{r}, t)$ – вектор плотности тока этой величины, а $R^X(\vec{r}, t)$ – плотность её источников (стоков – где эта плотность отрицательна). К числу таких несохраняющихся величин относятся импульс, момент импульса, энергия, энтропия, направления токов которых в общем случае не совпадают ни с направлением течения среды, ни между собой. В механике сплошных сред законы баланса (сохранения, изменения) выводимые из закона движения, играют, пожалуй, даже более важную роль, чем в механике материальных точек. Ниже мы выведем такие уравнения нескольких физических величин, обладающих свойством аддитивности и локально пропорциональных массе.

Пусть $A(\vec{r}, t)$ удельное (на единицу массы) значение такой физической величины в точке \vec{r} в момент времени t . Умножив выражение для её материальной производной

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_j A_{,j} \quad (7.3.3)$$

на плотность среды ρ , уравнение непрерывности для массы

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_j)_{,j}$$

на A и сложив полученные уравнения, получим искомое соотношение

$$\rho \frac{dA}{dt} = \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + (\rho v_j A)_{,j}. \quad (7.3.4)$$

Здесь величина A может быть не только скаляром, но и вектором, точнее, компонентой вектора:

$$\rho \frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial(\rho A_i)}{\partial t} + (\rho v_j A_i)_{,j}. \quad (7.3.5)$$

В векторном представлении уравнение (7.3.4) имеет вид

$$\rho \frac{dA}{dt} = \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}A). \quad (7.3.6)$$

7.3.2 Уравнения движения

Подобно массе, импульс теперь не сосредоточен в отдельных точках системы, а непрерывно распределён по занимаемому сплошной средой пространству, образуя в нём векторное поле. Перемещение среды в пространстве сказывается на картине этого векторного поля: оно меняется. Однако, как и в случае системы материальных точек, импульс остаётся аддитивной величиной: разбив движущуюся среду на элементарные ячейки, мы можем приписать каждой из ячеек массой δm элементарный (бесконечно малый по абсолютной величине) импульс $\delta \vec{p}$, пропорциональный его массе: $\delta \vec{p} = \delta m \cdot \vec{v}$, а затем, при необходимости, просуммировать эти векторы по интересующей нас области движущейся среды и найти её импульс.

Согласно второму закону Ньютона, скорость изменения элементарного импульса даётся выражением

$$\frac{d(\delta \vec{p})}{dt} = \delta m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\delta m) + \vec{P}(\delta m),$$

где $\vec{F}(\delta m)$ и $\vec{P}(\delta m)$ – действующие на элемент массы δm объёмная и поверхностная силы. В роли объёмной силы выступают обычно сила тяжести или сила инерции (в неинерциальной системе отсчёта), которые пропорциональны массе элемента вещества. По этой причине её удобнее выражать через удельную силу (силу, действующую на единицу массы) \vec{f} ,

$$\vec{F}(m) = \int_m \vec{f} \delta m,$$

связанную с объёмной плотностью силы \vec{f} соотношением

$$\vec{f} \equiv \frac{\vec{F}(\delta m)}{\delta V}.$$

В общем случае, все входящие в это выражение величины могут зависеть от координат и даже – от времени. Происхождение объёмной силы не всегда обусловлено действием внешних тел: гравитационному взаимодействию, например, подвержены и сами элементы сплошной среды. Поверхностные же силы предполагаются настолько короткодействующими, что их влияние исчезает сразу же за пределами поверхности. Это, конечно, модель (вроде материальной точки), на самом деле в окрестности поверхности происходит очень много интересного³.

Выражая поверхностную силу через тензор напряжений, запишем уравнение движения элемента массы δm (точнее, центра массы этого элемента) в виде

$$\rho \delta V \frac{dv_i}{dt} = (f_i + \sigma_{ij,j}) \delta V.$$

Сократив объём с обеих сторон, получаем *уравнение движения текучей среды в форме Лагранжа*:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \sigma_{ij,j}. \quad (7.3.7)$$

Его аналог в форме Эйлера имеет вид:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) v_i = f_i + \sigma_{ij,j}.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (6.2.12), видим полное их совпадение с учётом того, что

$$\sigma_{ij} = -p_{ij},$$

что и следовало ожидать из их физического смысла.

В простейшей модели *идеальной жидкости* предполагается, что влияние окружающей жидкости на мысленно выделенный её элемент сводится лишь к давлению, одинаковому во всех направлениях,

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

всегда – в покое и в движении. Такая жидкость названа Р. Фейнманом «сухой водой», её движение описывается уравнением

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \text{grad } p.$$

³Существует увлекательнейшее направление физики сплошной среды – *физика поверхностных явлений*. Как шутят физики, «объём создал Бог, а поверхность – дьявол».

В отличие от твёрдых тел, в покоящейся текучей (то есть способной к течению, но не текущей в данном случае) среде касательные напряжения, даваемые недиагональными элементами тензора напряжений σ_{ij} , равны нулю (иначе среда была бы в движении), и вектор напряжений перпендикулярен площадке:

$$\vec{t}(\vec{n}) = \sigma \vec{n}.$$

Сравнивая выражения для проекций этого вектора

$$t_1(\vec{n}) = \sigma n_1, \quad t_2(\vec{n}) = \sigma n_2, \quad t_3(\vec{n}) = \sigma n_3$$

с тем, что даёт для этого случая формула (7.1.8),

$$t_1(\vec{n}) = \sigma_{11}n_1, \quad t_2(\vec{n}) = \sigma_{22}n_2, \quad t_3(\vec{n}) = \sigma_{33}n_3,$$

находим, что

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma.$$

Нормальные напряжения, приложенные к трём взаимно перпендикулярным площадкам, произвольно ориентированным в пространстве, равны между собой (*закон Паскаля*). Общее значение нормальных напряжений в данной точке среды, взятое со знаком минус, называют *гидростатическим давлением* p . Знак минус указывает, что вектор напряжений в точке поверхности мысленно выделенного объёма направлен в сторону, противоположную внешней нормали \vec{n} , то есть внутрь объёма:

$$\vec{t}(\vec{n}) = -p\vec{n}.$$

Давление в газе, где не может быть растяжений, всегда положительно и обращается в нуль только в условиях абсолютного вакуума. В жидкости, где возможно существование растягивающих напряжений, давление может быть отрицательным.

В результате, уравнение Эйлера для покоящейся текучей среды в поле объёмных сил с плотностью $\rho \vec{g}$ (*условие равновесия*) принимает вид

$$\text{grad } p = \rho \vec{g}.$$

Это уравнение, имеющее в проекциях вид

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho g_1, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho g_2, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho g_3,$$

является *основным уравнением гидростатики*. Из него следует, что в состоянии равновесия поверхности одинаковых давлений (*изобары*) перпендикулярны силовым линиям поля $\vec{g}(\vec{r})$.

Взяв ротор от обеих его частей,

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} p = \operatorname{rot}(\rho \vec{g}) = 0,$$

воспользовавшись свойством этой операции

$$\operatorname{rot}(\rho \vec{g}) = [\nabla, \rho \vec{g}] = [\nabla \rho, \vec{g}] + \rho [\nabla, \vec{g}] = [\operatorname{grad} \rho, \vec{g}] + \rho \operatorname{rot} \vec{g}$$

и умножив уравнение скалярно на \vec{g} , получим

$$\vec{g}[\operatorname{grad} \rho, \vec{g}] + \rho \vec{g} \operatorname{rot} \vec{g} = 0.$$

Первый член равен нулю (векторное произведение перпендикулярно своим сомножителям), поэтому окончательно имеем:

$$\vec{g} \operatorname{rot} \vec{g} = 0.$$

Уравнение это налагает ограничение на класс сил, в поле которых возможно равновесие текучей среды, и отражает существование поверхностей, нормальных к силовым линиям поля. К числу таких сил прежде всего относятся потенциальные силы,

$$\vec{g} = -\operatorname{grad} \phi.$$

Для них

$$[\operatorname{grad} \rho, \vec{g}] = -[\operatorname{grad} \rho, \operatorname{grad} \phi] = 0,$$

то есть при равновесии текучей среды в потенциальном поле удельных сил поверхности одинаковой плотности (*изостеры*) ортогональны силовым линиям поля и, следовательно, совпадают с его эквипотенциальными поверхностями и с изобарами. Можно доказать и обратное: если изобары покоящейся текучей среды совпадают с изостерами, действующее на неё поле \vec{g} потенциально.

Интегрирование уравнения гидростатики особенно просто для несжимаемой (в сильной формулировке) среды. В этом случае $\rho(\vec{r}) = \operatorname{const}$ и мы имеем

$$\operatorname{grad} \left(\phi + \frac{p}{\rho} \right) = 0,$$

откуда

$$\phi + \frac{p}{\rho} = \operatorname{const}. \quad (7.3.8)$$

Таким образом, что поверхности равного давления (изобары) являются поверхностями равной потенциальной энергии (эквипотенциальными поверхностями). В частности, свободная поверхность тяжёлой жидкости (то есть жидкости, находящейся поле тяжести) должна быть эквипотенциальной поверхностью. Свободная поверхность воды в стакане горизонтальна (в таком масштабе поле тяжести можно считать однородным), свободная поверхность океана близка к сферической.

7.3.3 Функция давления

В общем случае уравнение гидростатики

$$\text{grad } p = \rho \vec{g} \quad (7.3.9)$$

решения не имеет: при произвольно заданной функции $\rho(\vec{r})$ жидкость, на которую действуют такие силы, не может находиться в покое. Равновесное состояние, однако, становится возможным, если плотность зависит только от давления, и уже через давление – от координат⁴:

$$\rho = \rho(p(\vec{r})). \quad (7.3.9)$$

В этом, весьма распространённом в практике гидростатических расчётов приближении удобно пользоваться *функцией давления*

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')},$$

играющей роль потенциала давления и часто так и называемой (хотя этому есть и определённые возражения). Теперь (7.3.9) превратится в уравнение

$$\text{grad}(\mathcal{P} + \phi) = 0, \quad (7.3.10)$$

решение которого определяет условие равновесия

$$\mathcal{P}(p(\vec{r})) + \phi(\vec{r}) = \text{const}. \quad (7.3.11)$$

Состояние равновесия, определяемое уравнениями (7.3.10)-(7.3.11), называется *баротропным*. Приведём несколько частных случаев.

1. Среда *несжимаема* (в сильной формулировке), то есть всюду имеет одинаковую плотность $\rho = \text{const}$. В этом случае потенциал

$$\mathcal{P}(p) = \frac{p - p_0}{\rho},$$

определяемый с точностью до произвольной постоянной, может быть заменен функцией

$$\mathcal{P}(p) = \frac{p}{\rho}.$$

⁴Это имеет место, например, в условиях установившегося течения идеальной жидкости для точек, лежащих на одной линии тока (см. теоремы Бернулли).

2. Среда *изотермическая* (типа совершенного газа с постоянной по его объёму температурой). Из её уравнения состояния следует закон Бойля-Мариотта:

$$\rho = (\rho_0/p_0)p,$$

согласно которому

$$\mathcal{P}(p) = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0}.$$

3. Среда *адиабатическая*: нет притока тепла извне. Тогда

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k,$$

где k – показатель адиабаты, равный отношению теплоёмкостей c_p/c_v . Потенциал сил давления в этом случае равен:

$$\mathcal{P}(p) = -\frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1-1/k} \right].$$

7.3.4 Равновесие среды в однородном поле тяжести

Рассмотрим несколько элементарных задач на равновесие жидкостей и газов в однородном поле тяготения. Первая из них – поведение жидкости (будем считать, воды) в длинном вертикальном цилиндре поршневого насоса. Пусть в начальный момент времени нижняя поверхность (основание) поршня находится в контакте с поверхностью воды (рис. 7.7) и поршень медленно начинает подниматься, так что состояния, через которые проходит система жидкость+насос, можно считать почти стационарными (статическими). По мере перемещения поршня вода в цилиндре поднимается за ним, оставаясь в прямом контакте с основанием поршня (боковой контакт между цилиндром и поршнем предполагается герметическим). Однако, в какой-то момент (точнее, на какой-то высоте h_{\max}) поверхность воды отделяется от основания поршня и перестаёт его «догонять». Уравнение гидростатики (3.7.8) легко объясняет этот феномен и даёт возможность вычислить предельную высоту подъёма воды. В проекции на вертикальную ось OZ оно имеет вид

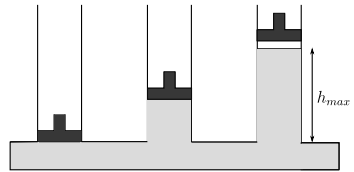


Рис. 7.7. Подъём воды поршневым насосом

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g,$$

после интегрирования по интервалу (z_0, z) приводящий к соотношению

$$p(z) - p(z_0) = -(\rho g z - \rho g z_0).$$

При интегрировании плотность воды, ввиду её практической несжимаемости, считалась постоянной. Начальная координата соответствует свободной поверхности воды, давление на которой равно атмосферному. По мере увеличения высоты подъёма уровня воды в цилиндре $h = z - z_0$ давление $p(z)$ на этой поверхности убывает и на высоте $h_{\text{макс}} =$ обращается в нуль. В этот-то момент и происходит отделение поверхности воды от основания цилиндра: это происходит на высоте $h_{\text{макс}} = p_{\text{атм}}/\rho g \approx 10$ м. Дальнейшее движение поршня не изменяет нулевого давления под ним, и стало быть, уровень поверхности воды остаётся тем же.

Следующая задача – изменение давления в атмосфере с увеличением высоты. Будем считать поверхность Земли плоской – полученные в этом приближении результаты годятся только для небольших по сравнению с радиусом Земли высот. Более того, мы воспользуемся изотермической моделью атмосферы, что тоже ограничит область применимости со стороны больших высот.

Построим систему координат с началом на поверхности Земли и осью OZ , направленной вверх. В рассматриваемом приближении условие равновесия принимает вид

$$\frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p(z)}{p_0} + gz = C,$$

где p_0 и ρ_0 можно считать относящимися к уровню моря. Решение этого уравнения

$$p(z) = p_0 e^{(\rho_0/p_0)(C-gz)}$$

содержит произвольную постоянную C . Из граничного условия

$$p(0) = p_0$$

следует, что $C = 0$ и мы приходим к известной формуле

$$p(z) = p_0 e^{-(\rho_0/p_0)gz}.$$

Уравнения гидростатики можно применять и в тех случаях, когда в исходной системе координат жидкость не является неподвижной, но нет относительного движения её частей и можно найти такую систему координат, где она неподвижна в целом. Пример – вращающийся

с постоянной угловой скоростью Ω вокруг своей вертикальной оси OZ цилиндрический сосуд с несжимаемой жидкостью. В неинерциальной системе координат, вращающейся вместе с цилиндром, удельная потенциальная энергия выражается формулой

$$\phi = g_0 z - \left(\frac{\Omega^2}{2}\right) \varrho^2, \quad \varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

(здесь g_0 – ускорение свободного падения). Интеграл уравнения (7.3.10) при условии $\rho = \text{const}$ имеет вид

$$p + \rho\phi = C,$$

в данном случае

$$p(z, \varrho) + \rho \left[g_0 z - \left(\frac{\Omega^2}{2}\right) \varrho^2 \right] = C.$$

Приравнявая давление $p(z, \varrho)$ к атмосферному p_0 , получаем свободную поверхность вращающейся жидкости в виде параболоида вращения:

$$z = \left(\frac{\Omega^2}{2g_0}\right) \varrho^2 + \text{const}.$$

Ещё один интересный пример: равновесие жидкости, равномерно вращающейся с угловой скоростью Ω вокруг оси OZ , проходящей через силовой центр ньютоновского типа: $\phi = -\alpha/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \equiv -\alpha/r$, $\alpha > 0$. Других сил нет: вращение происходит в космосе, силами взаимного тяготения частиц пренебрегаем. Условие равновесия вращающейся жидкости в этом случае имеет вид

$$p - \frac{\alpha\rho}{r} - \rho \left(\frac{\Omega^2}{2}\right) \varrho^2 = \text{const},$$

а уравнение свободной поверхности, ограничивающей вращающуюся жидкость,

$$\frac{\alpha}{r} + \left(\frac{\Omega^2}{2}\right) \varrho^2 = \text{const}.$$

В отсутствие вращения $\Omega = 0$ и свободная поверхность покоящейся жидкости была бы сферой $r = \text{const}$. Свободная поверхность вращающейся жидкости – сфероид. Похожую форму имеет Земля. Если $r_1 -$

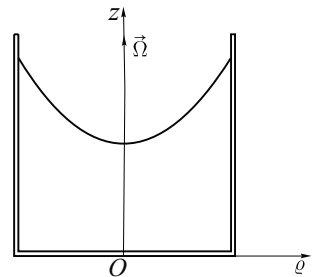


Рис. 7.8. Параболическая поверхность вращающейся жидкости

её минимальный радиус (у полюсов; $\rho_1 = 0$), а r_2 – максимальный (на экваторе, где $\rho_2 = r_2$), то относительная сплюснутость сфероида, мало отличающегося от сферы,

$$\varepsilon = \frac{r_2 - r_1}{r_1} \approx \frac{\Omega^2 R}{2g_R}.$$

Здесь R – средний радиус сфероида, g_R – соответствующее этому радиусу ускорение свободного падения. Для Земли $\varepsilon \approx \frac{1}{600}$. Геодезические измерения дают в два раза большее значение. В числе причин отличия теоретических результатов от наблюдаемых можно указать и неучёт взаимного притяжения частиц.

7.3.5 Твёрдое тело в неподвижной жидкости

Пусть некоторое твёрдое тело полностью погружено в неподвижную несжимаемую жидкость и система эта находится в состоянии равновесия. Главный вектор и главный момент сил давления жидкости на тело даются интегралами

$$\vec{F} = - \oint_S p d\vec{S}, \quad \vec{M} = - \oint_S p [\vec{r}, d\vec{S}].$$

Знак минус здесь объясняется тем, что нормаль \vec{n} в элементе $d\vec{S} = \vec{n}dS$ внешняя по отношению к телу (направлена в жидкость). Преобразуя поверхностные интегралы в объёмные, получим

$$\vec{F} = - \int_V \text{grad } p dV, \quad \vec{M} = - \int_V \text{rot } (\vec{r}p) dV.$$

Для несжимаемой жидкости в однородном поле тяжести

$$\text{grad } p = \rho \vec{g},$$

следовательно,

$$\vec{F} = -m\vec{g},$$

где

$$m = \int_V \rho dV = \rho V$$

– масса вытесненной телом жидкости (закон Архимеда).

Раскрывая выражение $\text{rot}(\vec{r}p)$ по правилам векторного анализа

$$\text{rot}(\vec{r}p) = p \text{rot}\vec{r} - [\vec{r}, \text{grad}p],$$

и учитывая, что $\text{rot}\vec{r} = 0$, получим

$$\vec{M} = - \int_V [\vec{r}, \text{grad}p] dV = -\rho \int_V [\vec{r}, \vec{g}] dV = -m[\vec{R}, \vec{g}],$$

где \vec{R} – радиус-вектор центра тяжести (центра масс) вытесненной телом жидкости. Из этой формулы следует важный для кораблестроителей вывод: чтобы на судно не действовал момент сил, должно быть $\vec{R} = 0$, то есть линия действия главного вектора давления жидкости на погружённое в неё тело должна проходить через центр тяжести *вытесненного телом объёма жидкости*, не совпадающий в общем случае с центром тяжести самого тела.

7.3.6 Упражнения

1. Найти гравитационное давление внутри земного шара в модели однородной несжимаемой жидкости.
2. Жидкость, уравнение состояния которой имеет вид $p = \lambda\rho^k$, находится в однородном поле тяжести. Найти глубину, на которой давление будет в N раз превышать атмосферное.
3. Широкий сосуд с несжимаемой жидкостью движется с постоянным ускорением $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_z\vec{e}_z$ в однородном поле тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Найти наклон свободной поверхности жидкости.

7.4 Уравнения баланса

7.4.1 Уравнение баланса импульса

Заменяя A_i в формуле (7.3.5) величиной v_i и подставив результат в (7.3.1), приходим к *уравнению баланса импульса*

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + (\rho v_i v_j - \sigma_{ij})_{,j} = \rho g_i, \quad (7.4.1)$$

левая часть которого имеет вид левой части уравнения непрерывности в форме Эйлера.

Рассмотрим область пространства, в которой не действуют объёмные силы и уравнение (7.3.2)

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + (\rho v_i v_j - \sigma_{ij})_{,j} = 0,$$

принимает форму уравнения баланса для сохраняющейся величины. Это позволяет интерпретировать ρv_i как *объёмную плотность i -й компоненты импульса среды*, а $(\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) \vec{e}_j$ (при фиксированном i)⁵ как *вектор плотности тока этой компоненты* (напомним, по нему индексу j подразумевается суммирование).

Следовательно, в рассматриваемой области каждая компонента импульса среды не исчезает и не возникает, а *перетекает* из одной части области в другую. Следует заметить, что в общем случае направление тока этой компоненты не совпадает с направлением движения самой среды, такое совпадение наблюдается только в случае $\sigma_{ij} = 0$, то есть когда взаимодействие между элементами среды отсутствует.

В области, где объёмная сила отлична от нуля, происходит производство импульса, величина ρg_i характеризует *плотность источников i -й компоненты импульса среды*.

При обычной постановке гидродинамической задачи известны внешние силы, начальное состояние и граничные условия, а неизвестными являются три компоненты скорости, плотность жидкости и компоненты тензора напряжений в разных точках среды. Трёх уравнений (7.4.1) недостаточно для полного определения движения жидкости. Дополняющие их уравнения выводятся как из теоретических положений типа законов сохранения, так и из эмпирических или модельных соотношений, определяющих связи между материальными параметрами жидкости – плотностью, давлением и т.д.

7.4.2 Уравнение баланса механической энергии

Вернёмся к уравнению движения среды (7.3.7) и, умножив обе части на v_i , преобразуем его к виду

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v_i^2}{2} \right) = v_i \rho g_i + v_i \sigma_{ij,j}. \quad (7.4.2)$$

Величина $v_i^2/2 = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)/2$ представляет собой *удельную* (приходящуюся на единицу массы) *кинетическую энергию* среды в точке \vec{r} в момент t . Чтобы выяснить смысл отдельных членов правой части, преобразуем её к виду

$$v_i \rho g_i + v_i \sigma_{ij,j} = v_i \rho g_i + (v_i \sigma_{ij})_{,j} - v_{i,j} \sigma_{ij},$$

затем умножим обе части уравнения на δV и проинтегрируем по произвольному *движущемуся* объёму среды, ограниченному замкнутой

⁵Совокупность всех элементов $\rho v_i v_j - \sigma_{ij}$ образует *тензор плотности тока импульса*.

поверхностью S . С учётом того, что $\rho\delta V = \delta m$ не меняется в процессе движения, левая часть преобразуется следующим образом:

$$\int_V \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} \rho \delta V = \int_m \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} \delta m = \int_m \frac{d}{dt} \frac{v^2 \delta m}{2} = \frac{d}{dt} \int_m \frac{v^2 \delta m}{2}.$$

В результате получаем

$$\frac{dT(m)}{dt} = \int_V v_i \rho g_i \delta V + \int_V (v_i \sigma_{ij})_{,j} \delta V - \int_V v_{i,j} \sigma_{ij} \delta V,$$

где

$$T(m) = \int_V \frac{\rho v^2}{2} \delta V$$

– кинетическая энергия массы, заключенной в движущемся объёме V . Приведя второй интеграл в правой части к поверхностному с помощью теоремы Остроградского-Гаусса, видим, что изменение кинетической энергии рассматриваемой области движущейся среды в единицу времени

$$\frac{dT(m)}{dt} = \int_V v_i \rho g_i \delta V + \oint_S v_i \sigma_{ij} \delta S_j - \int_V v_{i,j} \sigma_{ij} \delta V$$

обусловлено мощностью (работой в единицу времени) объёмных сил (первый член справа), поверхностных сил (второй член справа) и внутренних (по отношению к поверхности S) сил, производящих деформацию среды в рассматриваемом объёме (третий член).

Предположим теперь, что удельная сила имеет потенциальный характер,

$$\vec{g} = -\nabla\phi,$$

и не зависит явно от времени, так что

$$v_i g_i = -v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{d\phi}{dt} \right) = -\frac{d\phi}{dt}.$$

Уравнение (7.4.2) примет вид:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v_i^2}{2} + \phi \right) = (v_i \sigma_{ij})_{,j} - \sigma_{ij} v_{i,j}.$$

Применение формулы (7.3.3) к левой части этого уравнения, преобразует его к виду *уравнения баланса механической энергии* текущей

среды

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v_i^2}{2} + \phi \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v_j \rho \left(\frac{v_i^2}{2} + \phi \right) - v_i \sigma_{ij} \right] = -\sigma_{ij} v_{i,j}. \quad (7.4.3)$$

Величина

$$\rho^E = \rho \left(\frac{v_i^2}{2} + \phi \right)$$

является объёмной плотностью механической энергии, а

$$\vec{j}^E \equiv \left[v_i \rho \left(\frac{v^2}{2} + \phi \right) - v_j \sigma_{ij} \right] \vec{e}_i$$

представляет собой *вектор плотности тока механической энергии*. Первое его слагаемое, совпадающее по направлению со скоростью, описывает перенос энергии вместе с потоком, тогда как второе – передачу энергии путём контакта с окружающими элементами среды. Правая часть уравнения баланса энергии представляет плотность источников (стоков) механической энергии – работу деформации единичного объёма, изменяющую внутреннюю энергию среды.

7.4.3 Уравнение баланса внутренней энергии

Обозначим удельную внутреннюю энергию среды через ϵ . Выше мы нашли мощность деформации единицы объёма среды, увеличивающую объёмную плотность внутренней энергии на величину $\sigma_{ij} v_{i,j}$. Но это – не единственная причина изменения ϵ . Согласно первому закону термодинамики, другой причиной является теплообмен элементарного объёма с окружающими элементами. Обозначив вектор тока тепла символом \vec{q} , запишем уравнение для скорости изменения объёмной плотности внутренней энергии в движущемся потоке:

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = \sigma_{ij} v_{i,j} - \operatorname{div} \vec{q}.$$

Применив формулу (7.3.6), получим уравнение баланса внутренней энергии:

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\epsilon\vec{v} + \vec{q}) = \sigma_{ij} v_{i,j}.$$

Сложив его с уравнением (7.4.3), получим уравнение баланса для полной (*кинетической+потенциальной+внутренней*) энергии единицы объёма

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v_i^2}{2} + \phi + \epsilon \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v_j \rho \left(\frac{v_i^2}{2} + \phi + \epsilon \right) - v_i \sigma_{ij} + q_j \right] = 0.$$

В предположении об изотропии рассматриваемой среды разложим тензор напряжений на две части, определяющих напряжение в идеальной (не вязкой) среде, характеризуемое давлением p , и вклад вязких напряжений, определяемый *вязким тензором напряжений* τ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}.$$

Обозначив через h удельную *энтальпию* (*тепловую функцию*),

$$h = \epsilon + \frac{p}{\rho},$$

вышеприведённое уравнение баланса полной энергии жидкости при наличии вязкости и теплопроводности можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \rho^{\text{полн}}}{\partial t} + \text{div} \vec{J}^{\text{полн}} = 0,$$

где плотность полной энергии имеет прежний вид,

$$\rho^{\text{полн}} = \rho \left(\frac{v_i^2}{2} + \phi + \epsilon \right),$$

тогда как вектор плотности её тока выразится через удельную энтальпию:

$$\vec{J}^{\text{полн}} = \vec{v}\rho \left(\frac{v_i^2}{2} + \phi + h \right) - \vec{v}\vec{\tau} - \kappa \text{grad} T,$$

где $\vec{v}\vec{\tau}$ – вектор с компонентами $v_i\tau_{ij}$, а вектор \vec{q} принят, согласно закону теплопроводности Фурье, пропорциональным градиенту температуры: $\vec{q} = -\kappa \text{grad} T$.

7.4.4 Уравнение баланса энтропии

Вернёмся к уравнению (7.3.7), исключив, для краткости, объёмные силы, влияние которых на тепловые процессы обычно невелико:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v_i^2}{2} + \epsilon \right) = - \frac{\partial (pv_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial (v_i\tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}, \quad (7.4.4)$$

Из термодинамического соотношения, включающего удельную энтропию s ,

$$d\epsilon = Tds - pdV = Tds - pd \left(\frac{1}{\rho} \right),$$

находим:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}.$$

Умножим обе части этого равенства на ρ , и воспользуемся уравнением баланса массы:

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = T \frac{ds}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}.$$

С помощью этого соотношения преобразуем левую часть уравнения (7.4.4):

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho T \frac{ds}{dt} - p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(v_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}.$$

Первый член справа при дифференцировании распадается на два слагаемых, одно из которых сокращается с равным ему последним членом левой части, в результате чего имеем:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho T \frac{ds}{dt} = -v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial(v_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \quad (7.4.5)$$

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial(v_i \tau_{ij})}{\partial x_j} &= v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tau_{ij}, \\ -v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \end{aligned}$$

и

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j},$$

перепишем уравнение (7.4.5) в виде

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \left\{ \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) - v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right\}.$$

Согласно уравнению баланса механической энергии, в отсутствие объёмной силы ($g_i = 0$) содержимое фигурных скобок тождественно равно нулю, и мы приходим к уравнению, описывающему эволюцию поля энтропии⁶:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \quad (7.4.6)$$

⁶В средах с ярко выраженной анизотропией κ становится тензором, и последний член в этом уравнении принимает вид $(\kappa_{ji} T_{,i})_{,j}$.

Раскрывая материальную производную по формуле (7.3.3), преобразуем это уравнение в уравнение баланса энтропии:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \nabla s \right) = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T). \quad (7.4.7)$$

Уравнение (7.4.6) может быть истолковано также как уравнение теплопереноса. Действительно, ds обозначает приращение энтропии единицы массы движущейся среды за время dt , Tds – количество теплоты, получаемой этим элементом за то же время, а $\rho T ds$ – количество тепла, получаемого единицей объёма этого элемента за время dt . Разделив это на dt , мы получаем передачу тепла в единичный объём за единицу времени. Правая часть уравнения показывает, что это количество складывается из двух частей, одна из которых обусловлена диссипацией, происходящей в результате превращения механической энергии в тепловую из-за трения (вязкости), другая является результатом обычного процесса теплопроводности, не связанного с движением жидкости. В неподвижной среде теплопроводность является единственным механизмом распространения тепла. Этот процесс описывается уравнением (7.4.7), в котором следует положить $v_i = 0$:

$$\rho T \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T). \quad (7.4.8)$$

В идеальной среде, где вязкость отсутствует, отсутствуют оба механизма теплопереноса. Остаётся лишь перенос вместе с самой средой, если она неравномерно нагрета: наблюдая температуру в разных точках неподвижной системы координат, мы можем видеть её вариации и следить, таким образом, за перемещением тёплых и холодных слоёв. Соседние элементы не обмениваются энергией, такое движение называется *адиабатическим* и характеризуется уравнением $ds/dt = 0$. Если однородная среда первоначально была нагрета равномерно (во всех точках среды одна и та же температура), то она останется таковой и в процессе дальнейшего движения. Такое движение, называемое *изэнтропическим*, характеризуется ещё более простым уравнением: $s = \text{const}$.

7.4.5 Многокомпонентные среды

До сих пор мы рассматривали химически и физически однородную среду, для каждой локальной характеристики движения которой требовалось задание всего одной (скалярной, векторной или тензорной)

величины. В некотором (но не буквальном) смысле это аналогично рассмотрению движения одной материальной точки в заданном внешнем поле. Во многих случаях, однако, приходится иметь дело с совместным движением двух или более различных сред.

В процессе движения несмешивающихся сред одна субстанция вытесняет другую и в заданной точке в данный момент мы можем наблюдать лишь одну из них. Границы, разделяющие потоки этих субстанций (называемых часто *фазами*), образуют порой сложные причудливой формы поверхности, перемещающиеся в пространстве нерегулярным (случайным) образом. Задачи такого типа являются объектом многих математических исследований.

В то же время чрезвычайно важной в химической технологии, аэрокосмической технике и других направлениях научно-технического прогресса проблемой является описание движения взаимодействующих между собой потоков вещества. Эти потоки, состоящие из веществ различного химического состава, вступают между собой в химические реакции, что уменьшает концентрации одних компонент, увеличивает концентрации других и производит компоненты нового типа. В принципе, такая ситуация может быть реализована и в рамках модели несмешивающихся жидкостей, когда взаимодействие происходит по границам фаз, что ещё больше усложняет математическое рассмотрение.

В общем случае, такие среды в процессе движения могут перемешиваться, вытесняться, сжимать, деформировать друг друга, диффундировать друг в друга, растворяться друг в друге, нагреваться или охлаждаться друг друга, химически взаимодействовать друг с другом. Процессы эти играют важнейшую роль в возникновении и развитии всей человеческой популяции. Взаимодействие вод океана и воздушных масс атмосферы порождает ураганы и тайфуны, взаимодействие литосферных плит друг с другом и с магмой рождает землетрясения, извержения вулканов, цунами. На фоне этих локальных в пространстве-времени катастроф менее заметны, но не менее, а возможно и более важны медленные изменения климата, вызванные накоплением ежедневных бесконечно малых (в среднем) изменений, включая солнечную активность и динамику магнитных полей в околоземном пространстве и внутри Земли. Важность изучения этих процессов сопоставима разве только с трудностью их математического описания.

Различные компоненты движущегося континуума проникают друг в друга, перемешивание происходит уже на молекулярном уровне. В такой ситуации, очевидно, уже недостаточно указать, что в объёме V в данный момент времени находится m граммов вещества. Для расчёта

скоростей проходящих в этом объёме химических реакций надо знать массы $m_1, m_2, m_3 \dots$ всех участвующих в них компонент смеси. При этом (если речь идёт о сугубо нерелятивистских процессах) должно выполняться правило

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots = m,$$

распространяющееся, разумеется, и на плотности

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \dots = \rho$$

в каждой точке (\vec{r}, t) пространственно-временного континуума. Часто вместо парциальных плотностей ρ_i используются относительные концентрации $c_i = \rho_i/\rho$, удовлетворяющие условию

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots = 1.$$

Таким образом, мы имеем следующую картину. В пространстве и в каждом его элементе находится несколько субстанций, отмечаемых индексом k ($k = 1, 2, \dots, K$), и характеризующихся плотностями ρ_k , скоростями \vec{v}_k и другими характеристиками, зависящими от координат и времени. Можно сказать, что в элементе объёма уместаются K жидких частиц указанных типов с «именами» $1, 2, 3, \dots, K$. Масса вещества, находящегося в элементе объёма, равна сумме масс всех компонент, плотность – сумме соответствующих плотностей, плотность тока массы равна векторной сумме плотностей токов масс отдельных компонент:

$$\vec{J} = \sum_{k=1}^K \vec{J}_k = \rho_1 \vec{v}_1 + \rho_2 \vec{v}_2 + \dots + \rho_K \vec{v}_K.$$

Таким образом, допускается (хотя и не является обязательным) наличие разных скоростей у разных компонент, заполняющих один и тот же элемент объёма в один и тот же момент времени. Легче всего это представить в случае течения газов, когда их потоки в реакторе встречаются под разными углами, имея разные скорости, и проникают друг сквозь друга. Сталкивающиеся при этом молекулы разных газов вступают в химические реакции. В этом случае удобно сохранить понятие скорости *конвективного движения* среды как скорости центра масс элементов компонент, находящихся в единичной окрестности данной точки:

$$\vec{v} = \frac{\sum_{k=1}^K \rho_k \vec{v}_k}{\sum_{k=1}^K \rho_k} = \sum_{k=1}^K c_k \vec{v}_k. \quad (7.4.9)$$

Определяемые этим движением токи масс отметим индексом 0:

$$\vec{J}^0 = \sum_{k=1}^K \vec{J}_k^0 = \left(\sum_{k=1}^K c_k \vec{v}_k \right) \rho.$$

В свою очередь, скорость каждой компоненты \vec{v}_k можно представить в виде векторной суммы скорости центра масс элемента \vec{v} , интерпретируемой как общая скорость смеси, и индивидуальной относительной скорости

$$\vec{w}_k = \vec{v}_k - \vec{v}.$$

Каждая из компонент смеси, первоначально занимавшая элемент движущегося объёма δV , со временем покидает этот объём, перемещаясь через его границы в соседние элементы и далее. Освобождающееся место занимает другими компонентами, прибывающими из соседних объёмов. Если некая компонента в начальный момент целиком сосредоточена в объёме δV , то со временем она расплывётся по всей доступной области среды, даже если среда в целом будет неподвижной. Этот процесс расплывания элемента массы, происходящий на фоне общего движения (или покоя) смеси называется *диффузией* (точнее, *молекулярной диффузией*). Таким образом, подобно тому, как элементарное перемещение твёрдого тела разлагается на поступательную и вращательную составляющие, движение элемента δm_k смеси можно представить в виде суммы двух движений: движения в общем потоке со скоростью \vec{v} центра масс элемента (7.4.9) и диффузии относительно него со скоростью \vec{w}_k ⁷. Введём для плотности относительного диффузионного тока k -й компоненты обозначение:

$$\vec{j}_k = \rho_k \vec{w}_k = \rho_k (\vec{v}_k - \vec{v}). \quad (7.4.10)$$

Заметим, что не все плотности токов независимы: вытекающее из (7.4.9) и (7.4.10) соотношение

$$\sum_{r=1}^K \vec{j}_r = \sum_{k=1}^K \rho_k \vec{w}_k = \sum_{k=1}^K \rho (\vec{v}_k - \vec{v}) = 0$$

уменьшает число независимых токов на 1 (их становится $K - 1$).

Поскольку втекающая в единичный объём в единицу времени масса k -й компоненты даётся дивергенцией плотности её тока (с отрицательным знаком), уравнения баланса масс многокомпонентной среды запишутся в виде системы:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_k^0 = R_k, \quad R_k = -\operatorname{div} \vec{J}_k^D, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (7.4.11)$$

⁷Мы следуем здесь упрощённому варианту описания процесса. В действительности, каждый элемент смеси как целого за малый интервал времени испытывает те же изменения, что и элемент упругого тела: поступательное перемещение, вращение и деформацию. Для разных компонент смеси эти движения выглядят по-разному, в результате чего и происходит наложение разных компонент друг на друга, что и есть диффузия.

Здесь \vec{J}_k^0 конвективные (связанные с движением центров масс элементов) токи, наблюдаемые в отсутствие диффузии (то есть когда *диффузионные источники* $R_k = 0$). При диффузии каждый из них может быть не равен нулю, но должен выполняться общий баланс:

$$\sum_{k=1}^K R_k = \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_k^0 \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}^0 = 0.$$

В простейшей диффузионной задаче рассматриваются две компоненты, одна из них (*основная*) с концентрацией, близкой к единице, находится в покое, другая же, в малом количестве попавшая в основную (*примесь*), испытывает в ней диффузию. Вследствие малой своей концентрации, она не вовлекает в движение основную среду, так что для описания процесса необходимо лишь одно из уравнений системы (7.4.11) – уравнение для самой примеси. Опустив ставший теперь ненужным индекс единственной движущейся компоненты, запишем уравнение баланса массы примеси в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (7.4.12)$$

Вектор плотности диффузионного тока, согласно феноменологическому закону Фика, пропорционален градиенту плотности самой диффундирующей среды (с обратным знаком):

$$\vec{j} = -D \operatorname{grad} \rho. \quad (7.4.13)$$

Коэффициент пропорциональности D называется *коэффициентом диффузии*. В общем случае этот коэффициент зависит от времени и координат. Подставляя (7.4.13) в (7.4.12), имеем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} (D \operatorname{grad} \rho).$$

В однородной стационарной среде уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \Delta \rho.$$

«В термодинамике два основных направления возникли почти одновременно: в 1822 г. появилась работа Фурье «Аналитическая теория тепла», а в 1824 г. – «Размышления о движущей силе огня» Карно. Обе они основывались на понятии о теплороде как неуничтожаемом флюиде (благополучно перекочевавшим и в

современные учебники под видом тепловой энергии); в обеих температура рассматривалась одинаково: у Фурье как аналог потенциала, градиент которого является «теплорододвижущей силой», у Карно как тепловой потенциал, разность значений которого определяет направление перехода теплорода, возможного лишь при $T_2 > T_1$. В сущности, оба определения тождественны. Время и производные по времени содержались только у Фурье, тогда как в работе Карно время не фигурировало, что наложило отпечаток на всё развитие термодинамики и дало основание Брайяну поставить эпиграфом к его статье в «Энциклопедии математических наук» изречение «Термодинамика не знает времени». Далее идеи Фурье развивались в направлении нахождения уравнений динамики различных процессов; Ом вывел в 1827 г. свой знаменитый закон, Фик в 1855 г. – уравнение диффузии. ... Прошло много времени, прежде чем стало ясно (впрочем, даже в настоящее время не всем), что «термодинамика, не знающая времени», является фактически термостатикой, а уравнения Фурье-Ома-Фика и Навье-Стокса представляют собой эмбрион будущей термодинамики»⁸.

Если примесь может поступать в систему извне (в количестве $R(\vec{r}, t)$ примеси в единице объёма около точки \vec{r} в единицу времени около момента t) и/или поглощаться основной средой (с вероятностью поглощения в единицу времени σ), уравнение это дополнится двумя членами – источником и стоком (поглощением):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma \rho = D \Delta \rho + R.$$

Граничные условия для диффузионной задачи определяются расположением и свойствами тел, ограничивающих движение. В случае ограниченного в пространстве источника и удалённых от него и рассматриваемой области границ среду можно считать бесконечной, что превращает граничные условия в условия на бесконечности:

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \rho(\vec{r}, t) = 0.$$

7.4.6 Упражнения

1. Привести закон баланса импульса к интегральному виду.
2. Представить закон баланса механической энергии в интегральном виде.
3. Вывести интегральную форму баланса внутренней энергии.

⁸И. Дьярмати. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. – М.: Изд-во Мир, 1974.

Глава 8

Идеальная жидкость

8.1 Течение идеальной жидкости

8.1.1 Идеальная жидкость

Движущаяся идеальная среда удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0.$$

и уравнению движения Эйлера

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right\} = -\nabla p + \rho \vec{g},$$

Мы имеем четыре уравнения для пяти неизвестных v_x, v_y, v_z, ρ и p . Чтобы замкнуть систему, необходимо ещё одно уравнение, не содержащее новых неизвестных.

Принятым способом замыкания системы уравнений идеальной жидкости является распространение на случай движения статических соотношений между плотностью и давлением. При этом приходится предполагать, что одна и та же формула

$$\rho = \rho(p)$$

применима для всех точек жидкости и во все моменты времени (такую жидкость называют баротропной). Ниже мы покажем, что этот способ эквивалентен использованию первого закона термодинамики в адиабатическом приближении.

Что касается начальных и граничных условий данной системы, то они диктуются конкретной постановкой задачи. Общим условием у непроницаемой стенки Σ является равенство нулю нормальной компоненты скорости относительно стенки:

$$v_n(\vec{r}, t)|_{\text{отн}} = 0, \quad \vec{r} \in \Sigma.$$

Наличие гравитационных сил приводит к возникновению *свободной поверхности*, математическое задание которой осуществляется уравнением

$$p(\vec{r}, t) = p_0,$$

где $p_0 = \text{const}$ – внешнее (атмосферное) давление.

Подставляя в уравнения баланса импульса и энергии сплошной среды (7.4.1), (7.4.3) тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij},$$

получим для идеальной жидкости, текущей в поле сил с потенциальной энергией ϕ , уравнения баланса импульса

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i$$

и энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + U'_m \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v_j \rho \left(\frac{v^2}{2} + U'_m + \frac{p}{\rho} \right) \right] = p \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

Правая часть последнего уравнения

$$p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = p \operatorname{div} \vec{v}$$

даёт работу, совершаемую силами давления при деформации единичного объёма в единицу времени и для несжимаемых жидкостей она равна нулю, и уравнение баланса принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + \phi \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v_j \rho \left(\frac{v^2}{2} + \phi + \frac{p}{\rho} \right) \right] = 0.$$


Адиабатическое течение сжимаемой жидкости, согласно **6.5.3**, описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + \phi + \epsilon \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v_j \rho \left(\frac{v^2}{2} + \phi + h \right) \right] = 0,$$

отражающим баланс полной (механической плюс внутренней) энергии жидкости (напомним, что $h = \epsilon + p/\rho$ здесь – удельная энтальпия, см. **7.4.3**).

Сведём записанные выше выражения для динамических характеристик идеальной жидкости в табл. 8.1.

Таблица 8.1. Плотности и точки динамических характеристик идеальной жидкости (в отсутствие внешнего поля и внутреннего теплообмена)

Величина	Плотность	Плотность тока
Масса	 ρ	ρv_i
Импульс (i -я проекция)	ρv_i	$\rho v_i v_j + p \delta_{ij}$
Полная энергия (механическая + внутренняя)	$\rho(v^2/2 + \epsilon)$	$\rho v_i(v^2/2 + h)$

8.1.2 Уравнение Громеки-Ламба

Мы выведем в этом пункте ещё одну форму уравнения движения текущей среды, но прежде установим связь между введённой выше функцией давления и появившейся в последнем пункте энтальпией. Согласно определению (п. **7.3.3**) имеет место дифференциальное соотношение

$$d\mathcal{P} = \frac{dp}{\rho(p)}.$$

Напомним, что $1/\rho$ есть удельный объём $\overset{\circ}{v}$, так что

$$d\mathcal{P} = \overset{\circ}{v} dp = d(\overset{\circ}{v} p) - p d\overset{\circ}{v}. \quad (8.1.1)$$

В условиях адиабатического течения $-pd\overset{\circ}{v}$ можно заменить величиной $d\epsilon$ и соотношение (8.1.1) может быть представлено в виде

$$d\mathcal{P} = dh.$$

Таким образом, с точностью до несущественного для рассматриваемых процессов постоянного слагаемого функция давления в адиабатическом случае совпадает с удельной энтальпией:

$$\mathcal{P}(p(\vec{r}, t)) = \int_{p_0}^{p(\vec{r}, t)} \frac{dp}{\rho(p)} = h(\vec{r}, t).$$

Вернёмся к уравнению Эйлера, записав его с использованием потенциалов давления и силы:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla(\mathcal{P} + \phi).$$

Применение формулы (7.2.3) для конвективного ускорения приводит к полезной модификации уравнения Эйлера, называемой *уравнением Громеки-Ламба*:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \phi + \mathcal{P} \right) = [\vec{v}, \vec{\Omega}], \quad \vec{\Omega} \equiv \text{rot } \vec{v}. \quad (8.1.2)$$

Вектор $\vec{\Omega}$ представляет собой предел циркуляции скорости по контуру L , охватывающему элементарную площадку S с нормалью \vec{n} :

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{n}, \quad \Omega = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \vec{v} d\vec{l},$$

то есть *вихрь*. Течение, в каждой точке которого ротор скорости равен нулю, называется *безвихревым*.

В случае несжимаемой жидкости $\mathcal{P}(p) = p/\rho$, $\rho = \text{const}$, $\text{div } \vec{v} = 0$, и мы можем определить поле скоростей, исключив из рассмотрения давление (если оно нас, конечно, не интересует). Взяв ротор от обеих частей уравнения Громеки-Ламба, получим уравнение

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \text{rot } [\vec{\Omega}, \vec{v}] = 0.$$

Вместе с уравнениями

$$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$$

и

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

оно позволяет найти поле скоростей $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ (ротор и дивергенция полностью определяют векторное поле).

8.1.3 Стационарное течение

Рассмотрим подробнее сохранение энергии в случае, когда идеальная баротропная среда с функцией давления \mathcal{P} совершает *стационарное движение*. Частная производная по времени в уравнении (8.1.2) обратится при этом в нуль, и мы получим

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \phi + \mathcal{P} \right) = [\vec{v}, \vec{\Omega}].$$

Умножим скалярно обе части этого выражения на вектор перемещения $d\vec{r} = \vec{v}dt$ частицы вдоль траектории. Вспомнив, что в стационарном случае траектории совпадают с линиями тока, вектор $d\vec{r}$ можно заменить вектором $\delta\vec{r}$, коллинеарным скорости потока \vec{v} в этой точке. В результате правая часть этого уравнения обратится в нуль, и мы получим

$$\delta \left(\frac{v^2}{2} + \phi + \mathcal{P} \right) = 0$$

или

$$\frac{v^2}{2} + \phi + \mathcal{P} = \text{const} \text{ вдоль линии тока.} \quad (8.1.3)$$

Теорема Бернулли (слабая форма). При стационарном движении идеальной баротропной среды сумма удельной кинетической энергии, потенциальной энергии внешних массовых сил и потенциала сил давления сохраняет вдоль линии тока (траектории) постоянное значение.

Умножая скалярно обе части того же уравнения на $\vec{\Omega}$, мы вновь приходим к постоянству этой суммы, на этот раз *вдоль вихревой линии*. Если во всех точках жидкости выполняется векторное равенство

$$[\vec{\Omega}, \vec{v}] = 0, \quad (8.1.4)$$

то равенство (8.1.3) выполняется всюду с *одним и тем же значением постоянной*:

$$\frac{v^2}{2} + \phi + \mathcal{P} = \text{const} \text{ по всему объёму.}$$

Это – теорема Бернулли в сильной форме.

Равенство (8.1.4) выполняется в одном из двух случаев.

- 1) $\vec{\Omega} = 0$ – безвихревое движение.
- 2) $\vec{\Omega} \parallel \vec{v}$ – винтовое движение – частный тип вихревого движения, когда вихревые линии совпадают с линиями

тока. При таком движении частицы вращаются вокруг линий тока.

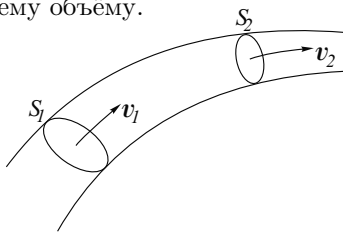


Рис. 8.1. К теореме Бернулли

При таком движении частицы вращаются вокруг линий тока.

Приведём частные формы интеграла Бернулли, соответствующие различным типам движений.

1. Стационарное течение несжимаемой жидкости по трубе переменного сечения в отсутствие объёмных сил:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}.$$

Если площадь одного из сечений (например, сечения 2) велика, так что скорость жидкости в нём пренебрежимо мала, мы получаем формулу

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = p_2,$$

связывающую *статическое* давление p_1 с полным давлением p_2 . Слагаемое $\rho v^2/2$ часто называют *динамическим давлением* или *скоростным напором*.

2. Движение несжимаемой жидкости в однородном поле тяжести:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.}$$

3. Изотермическое движение жидкости:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} = \text{const.},$$

или

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} = \text{const.}$$

4. Адиабатическое движение жидкости:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1-1/k} \right] = \text{const.},$$

или

$$\frac{v^2}{2} - \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} \right] = \text{const.}$$

8.1.4 Условия существования безвихревого течения

Идеальная жидкость – это модель, отличающаяся от реальной отсутствием внутреннего и внешнего (о стенки) трения – вязкости. В реальной жидкости вязкость обеспечивает затухание имеющихся возмущений и препятствует возникновению новых, в том числе и вихрей, путем преобразования их энергии в тепловую. В идеальной жидкости такого регулирующего механизма нет и отнюдь не очевидно, что длительное время могут существовать безвихревые течения. Возможность существования таких течений обосновывается следующей теоремой.

Вторая теорема Кельвина. *При баротропном движении идеальной жидкости в потенциальном поле внешних сил циркуляция скорости по замкнутому жидкому контуру не изменяется.*

Доказательство проводится с применением первой (кинематической) теоремы Кельвина 7.2.5. Подставляя в правую часть (7.2.6) ускорение

$$\vec{a} = -\text{grad}(\phi + \mathcal{P})$$

и учитывая, что интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала, каковым является подынтегральное выражение $\text{grad}(\phi + \mathcal{P})\delta\vec{l}$, равен нулю, приходим к заключению теоремы:

$$\oint_L \vec{v}\delta\vec{l} = \text{const.}$$

Из этой теоремы следует, в частности, что если во всех точках баротропной идеальной жидкости вихрь скорости $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$ в начальный момент времени равен нулю, то движение будет безвихревым и в любой последующий момент времени.

При безвихревом движении в каждой точке среды

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}, t) = 0.$$

Поле скоростей такого движения можно представить как градиент некоторого скалярного поля $\varphi(\vec{r})$, называемого *потенциалом скоростей*:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \text{grad } \varphi(\vec{r}, t). \quad (8.1.5)$$

Чтобы по известному потенциалу найти поле скоростей, надо взять градиент от этого потенциала. Чтобы решить обратную задачу – найти по заданному полю скоростей потенциал, необходимо выполнить обратную операцию: умножив обе части этого выражения скалярно на $\delta\vec{l}$, проинтегрировать их по некоторой кривой $L(\vec{a}, \vec{r})$, выходящей из фиксированной точки \vec{a} и приходящей в интересующую нас точку \vec{r} :

$$\int_{L(\vec{a}, \vec{r})} \vec{v}(\vec{r})\delta\vec{l} = \int_{L(\vec{a}, \vec{r})} \text{grad } \varphi(\vec{r})\delta\vec{l} = \int_{L(\vec{a}, \vec{r})} \delta\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{a}).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{a}) + \int_{L(\vec{a}, \vec{r})} \vec{v}(\vec{r})\delta\vec{l}.$$

Задача определения потенциала чрезвычайно упрощается в случае несжимаемой жидкости. Благодаря условию $\text{div } \vec{v} = 0$, уравнение (8.1.5) приводится к уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Всякое решение этого уравнения можно интерпретировать как потенциал скоростей некоторого потенциального потока. Необходимо найти такой потенциал, который удовлетворяет конкретным условиям данной задачи. Вычислением градиента найденного потенциала находится поле скоростей. Задача о потоке жидкости решена. Само же уравнение движения жидкости нужно теперь лишь постольку, поскольку необходима информация о распределении давления в потоке.

Простейшими примерами часто используемых потенциалов могут служить потенциалы

$$\varphi_0(\vec{r}) \equiv \vec{c}_0 \vec{r},$$

$$\varphi_1(\vec{r}) = \frac{c_1}{r},$$

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{\vec{c}_2 \vec{r}}{r^3},$$

где \vec{c}_0 , c_1 и \vec{c}_2 – постоянные. Нетрудно убедиться, что эти потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа. Существует, конечно, множество других потенциалов, представляющих различные типы течений.

8.1.5 Примеры: поля скоростей

Рассмотрим создаваемые записанными в предыдущем пункте потенциалами поля скоростей.

Вычислим градиент первого потенциала:

$$\text{grad } \varphi_0(\vec{r}) = \nabla(\vec{c}_0 \vec{r}) = [\vec{c}_0, [\nabla, \vec{r}]] + (\vec{c}_0 \nabla) \vec{r} = (\vec{c}_0 \nabla) \vec{r} = \vec{c}_0.$$

Стало быть, потенциал φ_0 описывает безграничный однородный поток с постоянной по объёму скоростью $\vec{v} = \vec{c}_0$.

Градиент второго потенциала

$$\text{grad } \varphi_1(\vec{r}) = -\frac{c_1}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{c_1 \vec{r}}{r^3}$$

даёт центрально симметричное поле скоростей, убывающих по модулю обратно пропорционально квадрату расстояния. Поток объёма жидкости через сферу произвольного радиуса R в единицу времени даётся интегралом

$$vQ = \oint_S \vec{v} d\vec{S} = -4\pi c_1,$$

не зависит от R , что позволяет выразить постоянную c_1 через мощность точечного источника Q :

$$\text{grad } \varphi_1(\vec{r}) = -\frac{vQ}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Заметим, что этот потенциал совпадает по форме со скалярным потенциалом точечного электрического заряда, а поле скоростей, естественно, с напряжённостью электростатического поля, создаваемого этим зарядом.

Следующий потенциал небольшой нашей коллекции – дипольный потенциал. Его градиент

$$\text{grad } \varphi_2(\vec{r}) = \nabla \frac{\vec{c}_2 \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \nabla (\vec{c}_2 \vec{r}) + (\vec{c}_2 \vec{r}) \nabla \frac{1}{r^3} = \frac{\vec{c}_2}{r^3} - 3 \frac{(\vec{c}_2 \vec{r}) \vec{r}}{r^5}.$$

Видно, что поле скоростей симметрично относительно вектора \vec{c}_2 . В случае обтекания бесконечным однородным потоком жидкости шара единственным вектором, определяющим симметрию задачи, может быть невозмущённая скорость \vec{v}_0 , сохраняющаяся на больших расстояниях. В этом случае неопределённым остаётся только скалярный множитель A ,

$$\text{grad } \varphi_2(\vec{r}) = A \left\{ \frac{\vec{v}_0}{r^3} - 3 \frac{(\vec{v}_0 \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right\},$$

определяемый радиусом шара.

8.1.6 Уравнение Лагранжа-Коши

Выше мы показали, что при безвихревом течении *три* неизвестные функции – проекции скорости $v_1(\vec{r}, t)$, $v_2(\vec{r}, t)$, $v_3(\vec{r}, t)$ – выражаются через *одну* неизвестную функцию – потенциал скоростей $\varphi(\vec{r}, t)$. Предположения об отсутствии завихренности и о баротропности сводит решение задачи о движении текучей среды к отысканию двух неизвестных функций $\varphi(\vec{r}, t)$ и $p(\vec{r}, t)$. Для этого необходимо два уравнения, содержащих эти величины. Одно из них – уравнение непрерывности массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Второе – уравнение Лагранжа-Коши, которое мы сейчас выведем.

Подставив в уравнение Громеки-Ламба $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ и $\text{rot } \vec{v} = 0$ и изменив порядок взятия градиента и частной производной по времени, придём к уравнению

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + \phi \right) = 0.$$

Из него следует первый интеграл уравнения движения – *интеграл Лагранжа-Коши*:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + \phi = \chi(t). \quad (8.1.6)$$

Здесь $\chi(t)$ – не зависящая от координат произвольная функция времени. В нестационарной теории движения идеальной жидкости интеграл Лагранжа-Коши играет ту же роль, что и интеграл Бернулли в стационарном случае, и превращается в последний при $\partial \varphi / \partial t = 0$ и $\chi(t) = \text{const}$.

Подставляя $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ в выражение (8.1.6), приходим к уравнению Лагранжа-Коши относительно потенциала скоростей:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \mathcal{P} + \phi = \chi(t).$$

Это и есть второе уравнение, о необходимости которого говорилось выше. Поскольку поле скоростей находится дифференцированием потенциала по координатам, от функции $\chi(t)$ можно избавиться внесением её под знак производной по времени и переопределением потенциала. Для несжимаемой жидкости

$$\rho = \text{const}, \quad \mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{p - p_0}{\rho},$$

и уравнение Лагранжа-Коши в отсутствие объёмных сил принимает вид:

$$\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} \right) + p - p_0 = 0. \quad (8.1.7)$$

В приведённых выше уравнениях потенциал φ представлен как функция времени и координат неподвижной системы отсчёта, по отношению к которой и рассматривается движение жидкости. Переход от неподвижной системы к подвижной сводится к замене производной $\partial \varphi / \partial t$ на $\partial \varphi / \partial t - V \partial \varphi / \partial x$ (V – скорость такой системы, направленная вдоль оси OX), и вместо (8.1.7) имеем:

$$\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - V \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} \right) + p - p_0 = 0.$$

Уравнение Лагранжа-Коши легко приводит нас к уравнению Гамильтона-Якоби для одной частицы. Представляющие точки изображают состояния невзаимодействующих между собой членов ансамбля, поэтому в фазовой жидкости нет ни давления, ни сдвиговых напряжений, характер её движения определяется лишь внешними силами. Уравнение Лагранжа-Коши для потенциала скоростей в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \phi = 0,$$

совпадающий с формой уравнением Гамильтона-Якоби для одной частицы во внешнем поле. Если ещё умножить все члены его на постоянную плотность ρ и ввести обозначения $\rho \varphi = \mathcal{S}(\vec{x}, t)$ и $\rho \phi = U(\vec{r}, t)$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \mathcal{S})^2 + U(\vec{r}, t) = 0,$$

совпадение станет абсолютным. С физической точки зрения ситуация совершенно прозрачна: действие $\mathcal{S}(\vec{r}, t)$ описывает результат движения (интеграл от функции

Лагранжа вдоль траектории) для множества *возможных траекторий* одной и той же частицы, соответствующих различным начальным условиям. Мы можем вообразить себе это множество, как некую сплошную среду, но в действительности существует всего одна частица, и реализуется всего одна траектория.

8.1.7 Упражнения

1. Задано стационарное течение сжимаемого газа полем скоростей $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$, где $\vec{v}_0 = \text{const}$ и $\vec{v}_1 \ll \vec{v}_0$. Представив $\phi = \phi_0 + \phi_1$, найти уравнение для ϕ_1 в линейном приближении и давление.
2. В несжимаемую жидкость помещён шар переменного радиуса $R = R_0 e^{-\alpha t}$. Определить закон, по которому изменяется давление жидкости на поверхности шара.
3. В начале координат находится сферический источник идеальной несжимаемой жидкости, совершающей стационарное безвихревое течение в отсутствие внешних сил. Найти распределение давления при заданной мощности источника Q , полагая давление на поверхности источника $p(r_0) = 0$.

8.2 Волновое движение

8.2.1 Звуковые волны

Наиболее распространённым типом нестационарного движения сжимаемой жидкости в отсутствие внешних сил является волновое движение с малой амплитудой, называемое *звуковой (акустической) волной*, или просто *звуком*.

Пусть в основном состоянии бесконечная идеальная жидкость неподвижна, однородна и характеризуется постоянным давлением p_0 и постоянной плотностью ρ_0 . Мы не налагаем на неё требования несжимаемости, внешние силы отсутствуют. В результате слабого внешнего воздействия состояние жидкости слегка изменяется: частицы жидкости приходят в движение со скоростью \vec{v} и появляются относительно малые добавки к давлению и плотности

$$p_0 \mapsto p(\vec{r}, t) = p_0 + p_1(\vec{r}, t), \quad \rho_0 \mapsto \rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t).$$

Подставляя эти выражения в систему уравнений для идеальной жидкости

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0,$$

и

$$p = p(\rho),$$

получим:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 = -(\vec{v} \nabla) \vec{v},$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \vec{v}) = 0$$

и

$$p_1 = c^2 \rho_1,$$

где $c = \sqrt{(d\rho/dp)_0}$ – скорость звука в среде. При нормальных условиях в воде $c = 1440$ м/с, в воздухе – 333 м/с.

Выразим ρ_1 через p_1 из третьего уравнения системы, подставим во второе, продифференцируем полученное уравнение по времени, применим к первому уравнению оператор ∇ и исключим из них член со смешанной производной. В результате получим *неоднородное волновое уравнение*, описывающее возникновение и распространение в идеальной жидкости *звуковых волн* с фазовой скоростью c :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \nabla^2 p_1 = Q(\vec{r}, t). \quad (8.2.1)$$

Здесь

$$Q(\vec{r}, t) = \rho_0 (\vec{v} \nabla) \vec{v}$$

играет роль *плотности источников звуковых волн*, генерируемых самой жидкостью. В отсутствие турбулентности скорость плавно меняется с изменением координат и при малых амплитудах колебаний можно положить

$$Q(\vec{r}, t) \approx 0$$

и

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 = 0.$$

В результате получаем *однородное волновое уравнение*

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0.$$

описывающее распространение волн избыточного давления p_1 .

Такому же уравнению в этой области удовлетворяет уплотнение ρ_1 , смещение \vec{u} и скорость $\vec{v} = \dot{\vec{u}}$ частиц жидкости, потенциал поля скоростей φ :

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Очевидно, нет принципиальной разницы между описанием волновых процессов в упругих телах, жидкостях и газах, поэтому дальше мы будем говорить о *волнах в среде*, в данной лекции – о волнах в *бесконечной однородной стационарной среде*, скорость c в которой не зависит ни от координат, ни от времени.

8.2.2 Плоские волны

Наиболее эффективным методом решения волновых уравнений (особенно при наличии определённой симметрии) является разложение по системе ортогональных функций. В зависимости от типа симметрии такими функциями могут быть тригонометрические, цилиндрические, сферические функции и др. В основе этого метода лежит свойство линейности волнового уравнения, в силу которого справедливо утверждение: если $\varphi_1(\vec{r}, t)$, $\varphi_2(\vec{r}, t)$, ... являются решениями волнового уравнения, то и их *линейная суперпозиция*

$$\varphi(\vec{r}, t) = C_1\varphi_1(\vec{r}, t) + C_2\varphi_2(\vec{r}, t) + \dots$$

также является его решением.

Будем искать частные решения $\varphi_j(\vec{r}, t)$ в виде произведений двух функций, одна из которых зависит только от координат, другая – только от времени:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\chi(t). \quad (8.2.2)$$

Подставляя это произведение в волновое уравнение (8.2.1) и деля последнее на функцию (8.2.2), представим результат в виде:

$$\frac{\nabla^2\psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} = \frac{1}{c_0^2} \frac{1}{\chi(t)} \frac{d^2\chi(t)}{dt^2}. \quad (8.2.3)$$

Левая часть теперь зависит только от \vec{r} : если зафиксировать \vec{r} , она будет постоянной. Правая же часть пространственных переменных не содержит, но она должна быть равна левой, и поэтому постоянна, хотя числитель и знаменатель её зависят от времени. Обозначив эту постоянную, называемую *постоянной разделения*, через ν , получим обыкновенное дифференциальное уравнение для временного множителя решения

$$\frac{d^2\chi(t)}{dt^2} = \nu c_0^2 \chi(t)$$

Частные решения уравнения (8.2.3)

$$\chi(t) = e^{\pm c_0 \nu t}$$

являются ограниченными функциями только при отрицательных $c_0^2 \nu = -\omega^2$.

Зафиксировав временной аргумент в правой части уравнения (8.2.3) и повторяя такие же рассуждения для левой его части, приходим к уравнению Гельмгольца для пространственного сомножителя:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = -\frac{\omega^2}{c_0^2} \psi(\vec{r}). \quad (8.2.4)$$

$$\chi(t) = e^{\pm i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \omega > 0.$$

Представив уравнение Гельмгольца (8.2.4) в развёрнутом виде

$$\frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^2} = -\frac{\omega_0^2}{c_0^2} \psi(x_1, x_2, x_3),$$

применим опять метод разделения переменных. Разделяя три пространственные переменные, мы получим три постоянные разделения ν_j , $j = 1, 2, 3$, которые должны быть отрицательными. Обозначив их через $-k_j^2$, получим:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3),$$

$$\frac{d^2 \psi_1(x_1)}{dx_1^2} = -k_1^2 \psi_1(x_1),$$

$$\frac{d^2 \psi_2(x_2)}{dx_2^2} = -k_2^2 \psi_2(x_2),$$

$$\frac{d^2 \psi_3(x_3)}{dx_3^2} = -k_3^2 \psi_3(x_3),$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}.$$

Частные решения этих уравнений имеют вид

$$\psi_j(x_j) = e^{ik_j x_j}, \quad -\infty < k_j < \infty.$$

Перемножая решения разделённых уравнений, получаем уравнение плоской монохроматической волны

$$\phi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\chi(t) = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} e^{ik_3 x_3} e^{-i\omega t} = e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)},$$

распространяющейся в направлении вектора \vec{k} с фазовой скоростью c_0 (мы взяли минус перед $i\omega t$, выбор другого знака будет соответствовать

волне, распространяющейся в направлении $-\vec{k}$. Что касается скорости движения частиц жидкости в волне, то она коллинеарна волновому вектору – звуковые волны в идеальной жидкости являются продольными – и по своей абсолютной величине много меньше фазовой скорости: $v = (\rho_1/\rho_0)c_0 \ll c_0$.

Направив ось OX коллинеарно волновому вектору \vec{k} , получим одномерную волну, комбинируя же плоские волны с разными волновыми векторами и начальными фазами, можно получить решение волнового уравнения для произвольных начальных и граничных условий.

8.2.3 Сферические волны

Сферическими называют волны, поверхность волнового фронта которых есть сфера, *сферически симметричными* – волны, имеющие в любой момент времени одно и то же значение во всех точках сферы любого радиуса.

Рассмотрим сферически симметричную волну, возбуждаемую точечным изотропным источником звука, находящимся в начале координат. В этом случае волновая функция $\varphi(\vec{r}, t)$ зависит от пространственных координат только через расстояние $r = |\vec{r}| > 0$,

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2},$$

и волновое уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}.$$

Его общее решение записывается в виде

$$r\varphi(\vec{r}, t) = f_1(r - ct) + f_2(r + ct),$$

где первое слагаемое определяет потенциал скорости волны, распространяющейся от источника, а второе – потенциал волны, идущей к источнику. Если других источников и неоднородностей или препятствий, на которых рассеивается или от которых отражается звук, нет, второе слагаемое отсутствует. Этим случаем мы здесь и ограничимся, положив далее $f_1(r) = f(r)$.

Скорость частиц в сферической звуковой волне

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \nabla\frac{f(r - ct)}{r} = \left\{ \frac{1}{r}f'(r - ct) - \frac{1}{r^2}f(r - ct) \right\} \vec{e}_r.$$

На больших расстояниях вторым слагаемым можно пренебречь:

$$v_r = \frac{1}{r} f'(r - ct).$$

Учитывая, что $p = \rho \partial \varphi / \partial t = -c(\rho/r) f'(r - ct)$, находим соотношение между скоростью и давлением



$$v = p/(\rho c).$$

Оно справедливо не только для сферической, но и для плоской волны и вообще, для любой области, в которой волна может рассматриваться как плоская.

Гармоническая расходящаяся сферическая волна (в комплексной записи) имеет вид

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}.$$

Отсюда скорость частиц в волне

$$v_r = A \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} = ik \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} - \frac{A}{r^2} e^{i(kr - \omega t)},$$

и давление

$$p(\vec{r}, t) = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i\omega \rho \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}.$$

Заметим, что скорость в сферической волне отстаёт по фазе от давления на угол $\psi = \arctg(1/kr)$. На больших расстояниях этот сдвиг исчезает. На малых, когда доминирует второе слагаемое в скорости, вместо волнового процесса мы видим движение несжимаемой среды с амплитудой, убывающей обратно пропорционально квадрату расстояния, тогда как в *волновой зоне* амплитуда убывает *обратно пропорционально первой степени расстояния*. Благодаря последнему факту мы и имеем возможность свободно общаться друг с другом посредством звуковых сигналов (речи).

8.2.4 Волны на поверхности жидкости

Кроме звуковых волн в жидкости может существовать другой тип волнового движения – малые колебания свободной поверхности. В отличие от звуковых поверхностные волны поперечные, для их существования не требуется свойства сжимаемости жидкости, но обязательно наличие поля тяжести.

Обратимся к интегралу Лагранжа-Коши в форме:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = 0.$$

Ось OZ направлена вверх, плоскость XOY соответствует равновесной поверхности жидкости. Ограничившись рассмотрением движением частиц жидкости с малыми скоростями, пренебрежём слагаемым, отвечающим кинетической энергии, и представим это уравнение в виде:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \rho g z = 0.$$

Координата z , от которой зависят Φ , ρ и p , относится к произвольной точке жидкости. Обозначим через ζ z -координату её свободной поверхности, на которую действует постоянное давление p_0 , и внесём эту постоянную под знак частной производной по времени:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi + \frac{p_0 t}{\rho} \right) + \rho g \zeta = 0.$$

Переопределив потенциал $\Phi + \frac{p_0 t}{\rho} \mapsto \Phi$, перепишем уравнение для поверхности в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g \zeta = 0.$$

Учёт сил поверхностного натяжения приводит к появлению в уравнении дополнительного слагаемого, содержащего соответствующий коэффициент α :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g \zeta - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \quad (8.2.5)$$

Здесь x – координата, отсчитываемая в направлении распространения волны. Отметим, что наряду с этим уравнением, для несжимаемой жидкости должно удовлетворяться уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (8.2.6)$$

Дифференцируя уравнение (8.2.5) по времени и учитывая, что

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (8.2.7)$$

Будем искать решение уравнения (8.2.5) в виде

$$\Phi(x, z, t) = \Phi_0(z) \cos(\omega t - kx). \quad (8.2.8)$$

В силу (8.2.6) имеет место соотношение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = k\Phi.$$

Кроме того, из (8.2.8) следуют соотношения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Phi \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -k^2 \Phi. \quad (8.2.9)$$

Подставляя (8.2.9) в уравнение (8.2.7) и производя сокращение на Φ , получим следующую зависимость частоты колебаний ω от волнового числа k (дисперсионное соотношение):

$$\omega^2 = kg + \alpha k^3 / \rho.$$

Отношение частоты к волновому числу даёт фазовую скорость u волны:

$$u^2 = \frac{g}{k} + \frac{\alpha k}{\rho}.$$

При малых k (длинные волны) здесь преобладает первое слагаемое гравитационного происхождения (*гравитационные волны*), при больших k (рябь) важнее поверхностное натяжение (*капиллярные волны*). При $k = \sqrt{g\rho/\alpha}$ фазовая скорость имеет минимум. Для воды это 26 см/с.

8.2.5 Ударные волны

Эффект Доплера

Хорошо известной причиной возникновения ударных волн в окружающей нас среде является эффект Доплера.

Предположим, что источник, испускающий звуковую волну частотой ω_0 , движется с постоянной скоростью \vec{V} относительно однородной среды и находящегося в ней наблюдателя. Наблюдатель воспринимает излучение с волновым вектором \vec{k} . Обозначим через θ угол между \vec{V} и \vec{k} . Эффект Доплера состоит в том, что частота ω излучения, воспринимаемого при этих условиях наблюдателем, не совпадает частотой испускаемого излучения (то есть, частотой в системе покоя источника) ω_0 , а выражается через неё соотношением

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}, \quad (8.2.10)$$

где $c = \omega/k$ – скорость звука в среде. Из этой формулы видно, что критическую роль в оценке величины эффекта Доплера играет отношение

$$M = \frac{V}{c}, \quad (8.2.11)$$

называемое *числом Маха*. Если V меньше скорости звука c , поток газа (или движение тела в нём) называют *дозвуковым*, в противном случае ($V > c$) говорят о *сверхзвуковом* потоке (или движении).

В отличие от дозвукового потока, малое локальное возмущение в котором распространяется во всех направлениях: если среда неподвижна, то тем не менее происходит во всех направлениях. Если через \vec{v} обозначить скорость распространения возмущения относительно неподвижной системы K , и учесть, что скорость звука c есть скорость распространения возмущения относительно потока, то согласно галилееву правилу сложения скоростей

$$\vec{v} = \vec{V} + c\vec{n}, \quad (8.2.12)$$

где \vec{n} – единичный вектор направления движения возмущения в точке наблюдения. В дозвуковом режиме ($|\vec{V}| < |c\vec{n}|$) доминирует второе слагаемое, в котором \vec{n} может принимать все направления из полного телесного угла. Однако, в сверхзвуковом движении ($|\vec{V}| > |c\vec{n}|$) по абсолютной величине преобладает первый

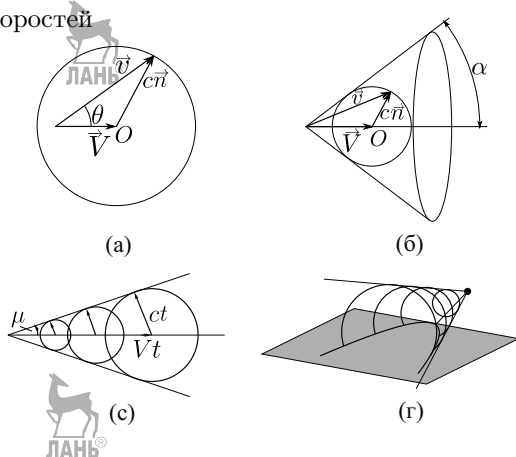


Рис. 8.2. Кинематика возмущения в дозвуковом (а) и сверхзвуковом (б) потоке и образование ударной волны (в и г)

член, и по этой причине суммарный вектор (8.2.12) никогда не сможет, например, иметь направление, противоположное \vec{V} . Вообще говоря, вектор (8.2.12) будет лежать внутри конуса с вершиной в начальной точке возмущения O и образующей, касающейся сферы радиуса c с центром в конце вектора \vec{V} (рис. 8.2.5). Угол α полураствора этого конуса определяется равенством

$$\sin \alpha = \frac{c}{V} = \frac{1}{M}.$$

Вне этого конуса возмущение отсутствует.

С этой последней особенностью связано явление, знакомое многим из нас: наблюдая за высоко летящим сверхзвуковым самолётом, мы слышали внезапный хлопок (звуковой удар) и постепенно затухающий затем звук самолёта. С самим же самолётом ничего не происходило, он продолжал лететь с той же скоростью. Хлопок отмечал просто пересечение поверхностью конуса, заполненного звуком работающих двигателей, точки наблюдения. Движение этой поверхности и представляет собой наглядный пример *ударной волны*. Вследствие высокой скорости источника часть звуковой энергии, которая в дозвуковом движении распространялась бы в заднюю полусферу, в сверхзвуковом режиме «сминается» поверхностью конуса в тонкий слой значительного уплотнения среды, сопровождаемого резким повышением давления и температуры. Ударные волны возникают при обтекании тел сверхзвуковым потоком газа, при взрывах и других сильных кратковременных возмущениях среды. В первом (но довольно хорошем) приближении можно аппроксимировать переходные слои внутренними *поверхностями разрыва*, разделяющими области с различными характеристиками. В нестационарных течениях эти поверхности могут перемещаться, частицы жидкости могут пересекать в процессе своего движения эти поверхности. В то же время существуют определённые соотношения между значениями физических характеристик по обе стороны от этих внутренних границ, вытекающие из приведённых выше уравнений баланса.

Уравнения баланса



Пусть ρ и \vec{j} – плотность и вектор плотности тока некоторой сохраняющейся в процессе течения динамической величины (массы, проекции импульса, полной энергии). В области, свободной от источников, справедливо уравнение баланса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (8.2.13)$$

Теорема Остроградского-Гаусса позволяет представить соотношение баланса в интегральной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \vec{j} d\vec{S}, \quad (8.2.14)$$

где S – замкнутая поверхность, окружающая конечный объём V . Следует заметить, однако, что две эти формулы (8.2.13) и (8.2.14) – не

вполне тождественны друг другу: формула (8.2.13) предполагает проекции вектора тока дифференцируемыми (а, следовательно, и непрерывными) по пространственным координатам, тогда как в (8.2.14) достаточно лишь их интегрируемости. Последнее обстоятельство и позволяет нам записать соотношение баланса для области, пересекаемой границей разрыва плотности динамической величины. Ограничимся для простоты рассмотрением стационарного течения.

Возьмём некоторый элемент dS поверхности разрыва и построим на нём элементарный цилиндр с образующей, параллельной нормали \vec{n} (рис. 8.3). Свойства среды (плотность, ток, скорость) выше поверхности разрыва будем отмечать индексом 1, ниже – индексом 2. Поверхностный интеграл (8.2.14) разобьётся на три части: по верхнему основанию, нижнему основанию и боковой поверхности цилиндра. Строго говоря, последнее слагаемое также будет состоять из двух частей, соответствующих нижней и верхней областям, но если мы устремим высоту цилиндра к нулю, то каждая из них, а значит, и сумма устремится к нулю. Останутся лишь интегралы по основаниям, которые в силу элементарности цилиндра можно заменить произведениями площадей оснований $\partial\vec{S}$ на подынтегральную функцию. В результате получим:

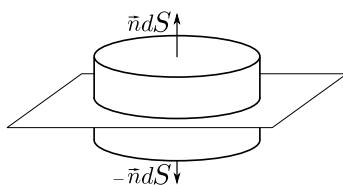


Рис. 8.3. К выводу формулы (8.2.15)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{j} d\vec{S} = \vec{j}_1 \partial\vec{S}_1 + \vec{j}_2 \partial\vec{S}_2 = (\vec{j}_1 \vec{n} - \vec{j}_2 \vec{n}) \delta S. \quad (8.2.15)$$

Как было оговорено выше, мы рассматриваем стационарное течение. В этом случае левая часть уравнения (8.2.14) равна нулю, а значит, равна нулю и правая часть уравнения (8.2.15), что в силу произвольности значения δS приводит к равенству

$$\vec{j}_1 \vec{n} = \vec{j}_2 \vec{n}, \quad (8.2.16)$$

в котором \vec{j}_1 и \vec{j}_2 обозначают предельные значения \vec{j} по обе стороны границы. В отсутствие границы вектор \vec{n} имел бы произвольное направление и все его компоненты были бы непрерывными функциями координат. В рассматриваемом же случае речь идёт о фиксированном направлении вектора \vec{n} , что приводит к выводу о непрерывности нормальной составляющей тока при переходе через граничную

поверхность. Вывод этот является прямым следствием условия стационарности, запрещающего накопления (и вообще, любого изменения) динамической величины со временем: сколько подходит её к границе с одной стороны, столько и должно уходить от границы с другой. На тангенциальные (параллельные поверхности) разрывы этот вывод не распространяется.

Отмечая нормальные и тангенциальные компоненты индексами \perp и \parallel соответственно, приложим уравнение (8.2.16) к трём перечисленным в таблице 8.1 (стр. 485) динамическим характеристикам среды: массе, импульсу и энергии

$$\rho_1 v_{\perp 1} = \rho_2 v_{\perp 2}, \quad (8.2.17)$$

$$p_1 + \rho_1 v_{\perp 1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{\perp 2}^2, \quad \rho_1 v_{\perp 1} v_{\parallel 1} = \rho_2 v_{\perp 2} v_{\parallel 2}, \quad (8.2.18)$$

$$\rho_1 v_{\perp 1} (v_1^2/2 + h_1) = \rho_2 v_{\perp 2} (v_2^2/2 + h_2). \quad (8.2.19)$$

уравнения эти разрешают существование *тангенциального разрыва*, то есть такого, при котором отсутствует поток вещества через поверхность разрыва ($v_{\perp 1} = v_{\perp 2} = 0$). В этом случае $p_1 = p_2$, а скачки ρ и v_{\parallel} произвольны. Если же поток вещества через поверхность разрыва не равен нулю (то есть, $v_{\perp 1} \neq 0, v_{\perp 2} \neq 0$), тангенциальные составляющие скорости непрерывны, $v_{\parallel 1} = v_{\parallel 2}$, а плотность, давление и нормальный компонент скорости изменяются скачком. Это и есть ударная волна.

Ударная адиабата

Пусть ударная волна перпендикулярна направлению потока, $v_{\perp 1} = v, v_{\parallel} = 0$. Уравнения (8.2.17)–(8.2.19) в этом случае принимают вид

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad (8.2.20)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (8.2.21)$$

$$v_1^2/2 + h_1 = v_2^2/2 + h_2. \quad (8.2.22)$$

(последнее уравнение записано для удельной (приходящейся на единицу потока массы) энергии, поскольку перетекающая через фронт масса, согласно (8.2.20) сохраняется. Введя удельные объёмы соотношениями $V_i = 1/\rho_i$, $i = 1, 2$ и учитывая, что плотность $j = \rho v$ непрерывна на поверхности разрыва, с помощью соотношений $v_i = jV_i$ исключим скорости v_1 и v_2 , из уравнения (8.2.21):

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}. \quad (8.2.23)$$

Из положительности левой части этого уравнения следует, что либо $p_2 > p_1$ и $V_1 > V_2$ (то есть, $\rho_1 < \rho_2$), либо $p_2 < p_1$ и $V_2 > V_1$ (то есть, $\rho_1 > \rho_2$). Но в действительности под влиянием ударной волны реализуется лишь скачок уплотнения, вследствие непрерывности потока вещества сопровождаемый падением скорости газа после прохождения ударной волны ($v_2 < v_1$). В результате этого скорости стационарной ударной волны по отношению к газу перед движущимся фронтом и после него оказываются различными по величине ($|v_2| > |v_1|$).

Исключая скорости v_1 и v_2 из уравнения (8.2.22) и используя затем (8.2.23), найдём соотношение

$$h_2 - h_1 = \frac{p_2 - p_1}{2} \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right),$$

называемое *ударной адиабатой*. Ударная адиабата определяет зависимость между ρ_2 и p_2 при заданных значениях ρ_1 и p_1 на противоположной стороне поверхности фронта ударной волны.

Картина течения в системе фронта волны

Рассмотрим ситуацию в области фронта ударной волны в связанной с ним системе координат. Если U – скорость движения фронта ударной волны относительно неподвижной системы отсчёта, в которой газ перед фронтом покоится, а за фронтом движется со скоростью v , то в системе координат, связанной с движущимся фронтом, скорость газа перед фронтом $-U$, а за фронтом $v - U$. В первой системе мы наблюдаем, как проходящий через газ (для определённости, слева направо) фронт ударной волны приводит в движение ранее покоящуюся массу газа, перейдя же во вторую систему координат, мы видим стационарное течение газа (теперь уже справа налево) по обе стороны неподвижного фронта. Отметим наблюдаемые в этой системе характеристики газа перед фронтом индексом 0, а характеристики с другой стороны без индекса. Поток массы, втекающей в область фронта равен $-\rho_0 U$, поток вытекающей из этой области $\rho(v - U)$, и уравнения баланса (8.2.20)-(8.2.22) переписуются в виде

$$\rho(v - U) = -\rho_0 U, \quad (8.2.24)$$

$$p + \rho(v - U)^2 = p_0 + \rho_0 U^2 \quad (8.2.25)$$

и

$$\frac{(v - U)^2}{2} + h = \frac{U^2}{2} + h_0. \quad (8.2.26)$$

Из уравнения (8.2.24) получаем:

$$\frac{\rho}{\rho_0} \equiv \frac{V_0}{V} = \frac{U}{U-v}, \quad (8.2.27)$$

где V и V_0 – соответствующие удельные объёмы. Разрешив (8.2.27) относительно $U-v$ и подставив результат в уравнение баланса импульса (8.2.25), определим из него скорость фронта ударной волны относительно невозмущённого газа

$$U = V_0 \sqrt{\frac{p-p_0}{V_0-V}}. \quad (8.2.28)$$

скорость газа относительно фронта

$$v-U = -V \sqrt{\frac{p-p_0}{V_0-V}} \quad (8.2.29)$$

и скорость сжатого газа относительно несжатого, то есть, в неподвижной системе отсчёта:

$$v = \sqrt{(p-p_0)(V_0-V)}. \quad (8.2.30)$$

В формулах (8.2.28)-(8.2.30) не учитывается уравнение состояния, поэтому они относятся к распространению фронта в любой среде. Подчеркнём, что скорость распространения фронта ударной волны по газу и скорость течения самого газа, как это видно из формул (8.2.28) и (8.2.30), различны.

8.2.6 Упражнения

1. Сферическая звуковая волна $\varphi(\vec{r}, t)$ распространяется в однородной среде от точечного источника. Показать, что функция $rf(r, t)$ удовлетворяет одномерному волновому уравнению.
2. Определить собственные частоты звуковых колебаний жидкости в сосуде, имеющем форму параллелепипеда.
3. Определить собственные частоты центрально-симметричных звуковых колебаний в сферическом сосуде.

8.3 Движение тел в идеальной жидкости

8.3.1 Обтекание шара идеальной жидкостью

Рассмотрим решение задачи об обтекании абсолютно твёрдого неподвижного шара радиуса R безграничной несжимаемой идеальной

жидкостью. До погружения шара в жидкость её скорость была везде одна и та же и равна $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, что соответствует потенциалу $\varphi_0(\vec{r}) = \vec{v}_0 \vec{r}$. Погружение шара изменяет картину движения, но на больших расстояниях от него жидкость течёт как текла, стало быть на бесконечности можно положить

$$(\text{grad } \varphi)_\infty = \text{grad } \varphi_0 = \vec{v}_0. \quad (8.3.1)$$

Выберем начало координат в центре шара. На поверхности шара нормальная к ней компонента скорости равна нулю,

$$(v_n)_{r=R} = (\text{grad}_n \varphi)_{r=R} = 0, \quad (8.3.2)$$

а при $r > R$ потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$.

Естественно искать решение такой задачи в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) + \varphi'(\vec{r}).$$

Согласно условию (8.3.1), возмущение потенциала φ' должно исчезать на бесконечности, а нормальная составляющая его градиента на поверхности шара должна удовлетворять условию (8.3.2):

$$(\text{grad}_n \varphi')_{r=R} = -v_{0n}.$$

Обоим этим условиям удовлетворяет потенциал φ_2 : он, как и прочие мультипольные потенциалы, стремится к нулю на бесконечности, и он – единственный из них, который может удовлетворить последнему условию. Действительно,

$$(\text{grad}_n \varphi_2)_{r=R} = A \vec{n} \left\{ \frac{\vec{v}_0}{r^3} - 3 \frac{(\vec{v}_0 \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right\}_{r=R} = \frac{A}{R^3} \vec{n} (\vec{v}_0 - 3(\vec{v}_0 \vec{n}) \vec{n}) = -\frac{2A}{R^3},$$

и для выполнения граничного условия достаточно положить просто $A = R^3/2$. В результате получим поле скоростей в виде суммы двух векторных полей – однородного и дипольного:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_0 + \frac{R^3}{2} \left(\frac{\vec{v}_0}{r^3} - 3 \frac{(\vec{v}_0 \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right).$$

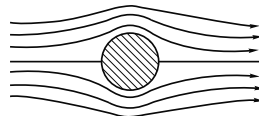


Рис. 8.4. Качественная картина обтекания шара (или цилиндра) идеальной жидкостью

В результате получается картина обтекания типа изображённой на рис. 8.4.

8.3.2 Парадокс Даламбера

Итак, нормальная компонента скорости течения жидкости по поверхности шара равна нулю, касательная же v_τ отлична от нуля. Вычислим её как функцию угла θ между \vec{v}_0 и нормалью \vec{n} :

$$v_\tau(\theta) = \vec{e}_\tau \left\{ \vec{v}_0 + \frac{R^3}{2} \left(\frac{v_0}{r^3} - 3 \frac{(\vec{v}_0 \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right) \right\}_{r=R} = - \left(\frac{3}{2} \right) v_0 \sin \theta.$$

Знак минус здесь является следствием того, что x -составляющая касательного вектора, направленного в сторону возрастания θ , отрицательна. Из этой формулы видно, что в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ поверхность скорости равна нулю – такие точки называются *критическими*. Максимальная скорость достигается в точках большого круга, перпендикулярного набегающему потоку, $\theta = \pi/2$: она в полтора раза больше скорости набегающего потока.

Если поток стационарен, то есть скорость v_0 не меняется со временем, распределение давления по поверхности шара может быть найдено с помощью интеграла Бернулли. Взяв одну точку линии тока, огибающей поверхность, на бесконечности, где скорость равна v_0 , а давление p_∞ , получим

$$p(R, \theta) = p_\infty + \frac{\rho}{2} (v_0^2 - v_\tau^2(\theta)) = p_\infty + \frac{\rho v_0^2}{2} \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right).$$

Действующую на шар силу со стороны обтекающего потока можно было бы вычислить с помощью формулы

$$\vec{F} = - \oint_S p d\vec{S},$$

но мы замечаем, что функция $p(R, \theta)$ симметрична относительно угла $\theta = \pi/2$:

$$p(R, \theta) = p(R, \pi - \theta).$$

Давление на переднюю и заднюю полусферы поверхности шара одинаковы, значит, *суммарная сила, действующая на шар со стороны стационарно обтекающей его идеальной жидкости, равна нулю*. Набегающий поток, отклоняемый передней полусферой шара, передаёт ему определённый импульс в направлении первоначального движения, но смыкающийся на второй полусфере поток передаёт ему импульс в обратном направлении. В отсутствие трения кинетическая энергия потока не теряется, картина симметрична, потому абсолютные величины этих импульсов одинаковы: *обтекающий шар стационарный поток*

идеальной жидкости не создаёт суммарной силы. Этот теоретический вывод справедливый для тела, ограниченного замкнутой поверхности любой формы, известен под названием *парадокса Даламбера*. Парадоксальность его можно подчеркнуть ещё и тем, что он относится к течению *со сколь угодно большой скоростью*. То, что в действительности мы такую силу наблюдаем, объясняется наличием трения, уменьшающего кинетическую энергию обтекающего потока и порождающего сходящиеся с обтекаемой поверхности вихри, что нарушает симметрию в распределении давления по передней и задней полусферам и создаёт результирующую силу. Симметрию нарушает и возникновение вихрей: именно по этой причине специально выбранный профиль крыла обеспечивает его подъёмную силу даже при движении в идеальной (не вязкой) среде. Парадокс Даламбера тут не имеет места.

8.3.3 Движение шара в идеальной жидкости

Пусть теперь погружённый в неподвижную сначала жидкость шар движется в ней с постоянной скоростью $V_x \equiv V$ и необходимо найти установившееся поле *абсолютных скоростей* (то есть скоростей относительно неподвижной системы координат) в системе координат, связанной с движущимся шаром. Отмечая очевидную связь этой задачи с предыдущей, позволяющую избежать повторного решения, мы всё же решим эту задачу независимо от неё, чтобы показать применение подвижной системы координат и рассмотреть затем движение шара с переменной скоростью.

В силу несжимаемости потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа всюду вне шара:

$$\Delta\varphi = 0.$$

На бесконечности жидкость покоится, следовательно


$$\nabla\varphi|_{\infty} = 0.$$

Наконец, на поверхности шара нормальная составляющая скорости жидкости должна совпадать с нормальной составляющей абсолютной скорости точки поверхности:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=R} = V \cos\theta,$$

где θ – угол между радиус-вектором \vec{r} и осью OX (начало координат O совпадает с центром шара).

Решение этой задачи (задачи Неймана) единственно и может быть найдено среди потенциалов, рассмотренных в 8.1.4. Потенциал φ_0 не удовлетворяет второму условию, потенциал φ_1 изотропен, потенциал φ_3 удовлетворяет второму условию, а при $c_2 = -VR^3/2$ – и третьему. Таким образом, функция



$$\varphi = -\frac{R^3 V \cos \theta}{2 r^2}$$

даёт решение поставленной задачи.

Парадокс Даламбера в этой постановке звучит так: движущийся с постоянной скоростью в идеальной жидкости шар не испытывает сопротивления.

Вообще говоря, сказанное относится не только к шару, но к любой фигуре, обладающей ограниченной замкнутой поверхностью и движущейся *поступательно* в неограниченной жидкости. Касаясь происхождения этого парадокса, Ландау и Лифшиц в своей «Гидродинамике» (с. 52) пишут: «Наличие этой силы при равномерном движении тела означало бы, что для поддержания движения какой-либо внешний источник должен производить работу, которая либо диссипируется в жидкости, либо преобразуется в её кинетическую энергию, приводя к постоянно уходящему на бесконечность потоку энергии в движущейся жидкости. Но никакой диссипации энергии в идеальной жидкости, по определению, нет, а скорость приводимой телом в движение жидкости настолько быстро убывает с увеличением расстояния от тела, что никакого потока энергии на бесконечности тоже нет.

Следует, однако, подчеркнуть, что эти соображения относятся лишь к движению тела в неограниченной жидкости. Если же, например, жидкость имеет свободную поверхность, то равномерно движущееся параллельно этой поверхности тело будет испытывать силу сопротивления. Появление этой силы (называемой *волновым сопротивлением*) связано с возникновением на свободной поверхности жидкости системы распространяющихся по ней волн, непрерывно уносящих энергию на бесконечность.»

Выше было указано ещё одно условие, необходимое для применимости вывода Даламбера о свободном обтекании тела идеальной жидкостью – движение жидкости должно быть безвихревым.

8.3.4 Присоединённая масса

В случае движения шара с постоянной скоростью V в уравнении Лагранжа-Коши

$$p = p_0 - \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - V \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} \right)$$

слагаемое с производной по времени исчезает, а оставшиеся члены, как показано выше, дают нулевую силу сопротивления:

$$F' = - \oint_S p \cos \theta dS = 0.$$

Если же скорость шара не постоянна, то упомянутое слагаемое отлично от нуля и порождает силу

$$F' = - \oint_S p \cos \theta dS = -\pi \rho R^3 \frac{dV}{dt} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\frac{2}{3} \pi \rho R^3 \frac{dV}{dt}.$$

Если на шар действует ещё и внешняя сила $F_x = F$, то уравнение движения центра инерции шара имеет вид:

$$m \frac{dV}{dt} = F - \frac{2}{3} \pi \rho R^3 \frac{dV}{dt}.$$

Перенеся последнее слагаемое в левую часть

$$\left(m + \frac{2}{3} \pi \rho R^3 \right) \frac{dV}{dt} = F,$$

мы видим, что под действием силы F погружённый в идеальную жидкость шар массой m будет двигаться по тому же закону, что и шар массой $m + (2/3)\pi\rho R^3$ в *пустоте*. Таким образом, влияние идеальной жидкости на движение погружённого в неё шара сказывается лишь на изменении его инерции. Отражающее это изменение слагаемое $(2/3)\pi\rho R^3$, равное по величине половине массы вытесняемой шаром жидкости, называется *присоединённой массой шара*.

Следует заметить, что присоединённая масса характеризует только *поступательное движение* тела, тензор же инерции, связанный с вращением шара, не изменяется, оставаясь таким же, как и в пустоте. Это происходит потому, что вращающийся шар не вовлекает в движение прилегающие к его поверхности слои идеальной жидкости из-за

отсутствия трения. По этой же причине он не вовлекает жидкость и в поступательное движение, как иногда приходится слышать от студентов. Правильное объяснение феномена присоединённой массы, как указал Биркгоф, ссылаясь на расчёты Дарвина¹, состоит в том, что появление этого слагаемого в уравнении движения отражает инертное сопротивление раздвигаемого шаром в поперечном направлении слоя жидкости².

8.3.5 Плоские течения и комплексные потенциалы

Если бы в условиях предыдущей задачи мы взяли не шар, а бесконечной длины цилиндр с осью, совпадающей с координатной осью OZ , то поле скоростей и другие характеристики движущейся жидкости зависели бы только от двух переменных x и y . Такие течения называют *плоскими*, или *двумерными*. Для описания таких течений очень удобным оказывается аппарат *комплексных потенциалов*.

Запишем в двумерном виде два важнейших свойства рассматриваемых движений: свойство несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (8.3.3)$$

и условие отсутствия вихрей

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \quad (8.3.4)$$

По определению потенциала скоростей, компоненты скорости плоского течения имеют вид

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (8.3.5)$$

Нетрудно видеть, что обладающее таким свойством поле скоростей автоматически удовлетворяет условию (8.3.4), а для выполнения условия (8.3.3) достаточно, чтобы функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяла уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

¹ Г. Биркгоф, Гидродинамика. – М.: ИЛ, 1963. – С. 212.

² Разумеется, всё вышесказанное справедливо только для специальной модели – идеальной жидкости, называемой иногда «сухой водой». Учёт вязкости, всегда присутствующей в реальных жидкостях, часто существенно меняет ситуацию.

Введём теперь другую функцию $\psi(x, y)$, положив

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (8.3.6)$$

Тогда уравнение несжимаемости удовлетворится автоматически, а условие отсутствия вихрей приведет к уравнению

$$\Delta \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом, если в двумерном случае мы имеем функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа, то линии тока из неё можно получить двумя способами: как при помощи (8.3.5), так и с помощью (8.3.6). Чтобы это были одни и те же линии тока, необходимо, чтобы функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ были связаны соотношениями:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Но это как раз условия Коши-Римана, которым удовлетворяют вещественная и мнимая части функции комплексной переменной. Кроме того, как и должно быть, обе они удовлетворяют уравнению Лапласа. Поэтому можно сказать, что любая комплексная функция

$$Z(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad z = x + iy,$$

определяет картину некоторого потока несжимаемой идеальной жидкости. При этом кривые $\varphi(x, y) = \text{const}$ являются эквипотенциальными, а ортогональные к ним траектории $\psi(x, y) = \text{const}$ — линиями тока. Следовательно, на твёрдой стенке $\psi = \text{const}$, тогда как вектор $\text{grad} \varphi = \vec{v}$ направлен вдоль стенки и не имеет нормальной составляющей к ней. С равным успехом мы можем считать потенциалом скоростей функцию $\psi(x, y)$, в этом случае семейство эквипотенциальных линий задаётся уравнениями $\psi(x, y) = \text{const}$, а линий тока — уравнениями $\varphi(x, y) = \text{const}$.

Функция $Z(z)$ отображает сетку взаимно перпендикулярных прямых $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ в сетку кривых $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$, которые тоже ортогональны: элементарный прямоугольник отображается в подобный ему прямоугольник. В теории комплексной переменной отображения, не меняющие формы бесконечно малых фигур, называются *конформными*.

Рассмотрим теперь производную от комплексной функции Z по комплексному аргументу z :

$$Z'(z) = \frac{dZ}{dz}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{dZ}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dZ}{dz},$$

представим эту производную в виде

$$Z'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - iv_y,$$

из которого следует, что абсолютная величина её равна скорости потока $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, а соответствующий ему вектор является зеркальным отображением вектора \vec{v} относительно оси OX . Производная $Z'(z)$ называется *комплексной скоростью*, а сама функция $Z(z)$ – *комплексным потенциалом*.

8.3.6 Обтекание кругового цилиндра

Покажем применение метода конформного отображения к решению простейшей двумерной задачи: расчёту обтекания бесконечно длинного кругового цилиндра потоком, который на большом расстоянии от цилиндра движется перпендикулярно его оси. Выберем начало координат на оси цилиндра, а ось OX направим вдоль движения невозмущённого потока. Решить задачу об определении поля скоростей плоского течения – значит найти функцию $Z(z)$, отображающую плоскость Z на часть плоскости z , лежащую за пределами круга радиуса R , так, чтобы сама эта окружность была линией тока (то есть, линией $\psi(x, y) = \text{const}$), а при больших z комплексная скорость $Z'(z) = dZ/dz$ переходила в вещественную величину $v_0 = |\vec{v}(\infty)|$. Таким требованиям удовлетворяет функция

$$Z(z) = v_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right). \quad (8.3.7)$$

Чтобы убедиться в этом, представим её в виде

$$Z(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

где

$$\varphi(x, y) = v_0 x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right)$$

и

$$\psi(x, y) = v_0 y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right).$$

Разрешая уравнение (8.3.7) относительно z , убеждаемся, что каждому Z соответствует значение z , по абсолютной величине большее R . Далее, кривая $\psi(x, y)$ состоит из круга радиуса R и прямой $y = 0$. Наконец, при $z \rightarrow \infty$ $Z'(z) \rightarrow v_0$. Таким образом, линии тока в данной задаче даются уравнением:

$$y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) = C.$$

Само поле скоростей определяется формулой

$$v = \left| \frac{dZ}{dz} \right|,$$

а распределение скорости по поверхности цилиндра $z = Re^{i\varphi}$ имеет вид

$$v = 2v_0 |\sin \varphi|, \quad \varphi = \arg z.$$

Видим, что максимальная скорость на поверхности цилиндра в два раза превышает скорость набегающего потока, тогда как в случае шара это превышение было в полтора раза. Цилиндр больше возмущает поток жидкости, чем шар, поскольку его поперечное сечение бесконечно. Симметрия решения относительно оси OY вновь указывает на наличие парадокса Даламбера: сила, действующая на бесконечно длинный цилиндр со стороны обтекающей его идеальной несжимаемой жидкости, равна нулю.

8.3.7 Потенциал вихревой нити

Применение метода конформного отображения будет более эффективным, если известны потоки, соответствующие некоторому стандартному набору потенциалов. Один из таких потенциалов мы уже рассмотрели (напомним, что мы вначале *просто записали* его, а уж потом доказали, что он соответствует поставленной задаче).

Рассмотрим теперь комплексный потенциал другого типа:

$$Z(z) = a \ln z = \varphi + i\psi.$$

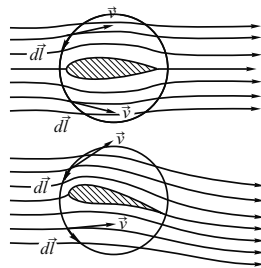


Рис. 8.5. Возникновение циркуляции в случае подходящим образом изогнутого крыла

Разрешив это уравнение относительно z , получим

$$z = \exp(\varphi/a + i\psi/a) = \exp(\varphi/a)[\cos(\psi/a) + i \sin(\psi/a)].$$

Разделяя вещественную и мнимую части, получим

$$x = e^{\varphi/a} \cos(\psi/a), \quad y = e^{\varphi/a} \sin(\psi/a).$$

Разрешим эту систему относительно φ и ψ :

$$\varphi = a \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = a \ln r, \quad \psi = a \operatorname{arctg}(y/x).$$

Если принять $\varphi(x, y) = 0$ в качестве эквипотенциальных линий, то мы получаем семейство концентрических окружностей с центром в начале координат, а линиями тока являются радиальные линии, исходящие из центра. Мы имеем двумерный аналог изотропного истечения жидкости из точечного источника – плоское истечение жидкости из линейного источника. Постоянная a определяется объёмом жидкости, производимым единицей длины источника в единицу времени.

В качестве эквипотенциальных линий течения мы можем выбрать и линии $\psi(x, y) = 0$, представляющие собой радиальные прямые, тогда линии тока примут вид окружностей. Такая картина изображает *циркуляционный поток*, в центре которого находится перпендикулярная к комплексной плоскости прямая – *вихревая нить*. Если точку $z = 0$ отделить от потока малой окружностью, то во всей остальной области циркуляция скорости $\oint \vec{v} d\vec{l}$, а следовательно и $\operatorname{rot} \vec{v}$ равны нулю – течение безвихревое. Если же вычислить такой интеграл (*циркуляцию*) по одной из этих концентрических окружностей, то он окажется отличным от нуля, так как скалярное произведение $\vec{v} d\vec{l}$ в процессе интегрирования будет иметь всё время один знак. Понятно, что интеграл этот не будет зависеть от радиуса окружности:

$$\oint_L \vec{v} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{v} d\vec{S} = \Gamma. \quad (8.3.8)$$

Величина Γ называется *интенсивностью* вихревой нити.

Напомним, что точно такое же соотношение связывает циркуляцию напряжённости магнитного поля по контуру L , охватывающему прямолинейный проводник L' с током I :

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} I.$$

Но для магнитного поля решение этого уравнения хорошо известно – это закон Био-Савара:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \int_{L'} \frac{[d\vec{l}', \vec{r}']}{r^3},$$

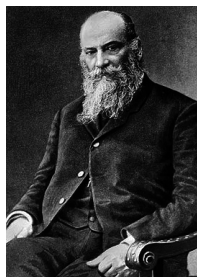
где $d\vec{l}'$ – элемент длины проводника с током. Следовательно, и гидродинамическое уравнение (8.3.8) имеет решение

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{L'} \frac{[d\vec{l}', \vec{r}']}{r^3}.$$

Как говорилось выше, парадокс Даламбера является следствием компенсации сил давления на поверхности тела: если мы возьмём симметрично расположенные элементы его поверхности, то проекции сил давления на направление движения будут равны по величине и противоположны по знаку. Однако, симметрия нарушится, если на это движение наложится циркуляция вокруг контура (рис. 8.5). Результатом такого разбаланса является возникновение *подвёмной силы*. Величина этой силы определяется *формулой Жуковского*

$$F_{\text{под}} = \rho \Gamma v_{\infty},$$

где v_{∞} – скорость потока на бесконечности, ρ – плотность жидкости и Γ – её циркуляция, направлена же эта сила перпендикулярно скорости поступательного движения в сторону поверхности, испытывающей меньшее давление. Чтобы этой поверхностью была верхняя поверхность крыла, её делают слегка изогнутой: в результате удлинняется



Николай Егорович Жуковский (1847-1921). Основатель ЦАГИ, профессор Императорского технического училища и Московского государственного университета, обладал очень глубокими познаниями в высшей математике и инженерных науках. Неудивительно, что вокруг этого человека сплотился коллектив студентов, одержимых идеей практического воздухоплавания. Его теоретические работы в области авиации, практический опыт создания аэродинамических труб и проводившиеся в этих лабораториях исследования послужили фундаментом для развития авиационной науки в России.

путь, проходимый воздухом относительно крыла за то же время, стало быть, увеличивается скорость, что вследствие теоремы Бернулли уменьшает давление на эту поверхность по сравнению с давлением на нижнюю поверхность, имеющую меньшую кривизну.

8.3.8 Упражнения

1. Вывести формулу для силы, действующей на тело, погруженное в несжимаемую жидкость с заданным полем скоростей $\vec{v}(\vec{r})$ ($\vec{v}_\infty = 0$).
2. Шар радиуса a , движущийся в идеальной несжимаемой жидкости со скоростью \vec{v}_0 , создаёт поле скоростей

$$\vec{v}(\vec{r}) = (a^3/2r^5) [3(\vec{v}_0\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{v}_0].$$

Построить линии тока.

3. В условиях предыдущей задачи найти суммарный импульс и кинетическую энергию системы шар + вовлекаемая им в движение жидкость.

8.4 Магнитогидродинамика

8.4.1 Основные уравнения

В этом разделе мы рассмотрим движение электропроводящей среды, на которую действует внешнее магнитное поле. Возникающие в такой среде электрические токи взаимодействуют с магнитным полем, в результате чего изменяется и магнитное поле и движение среды. Раздел механики, изучающий такие задачи, называется *магнитогидродинамикой*. Для описания движения такой среды необходимо к уравнениям обычной гидродинамики (идеальной жидкости)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (8.4.1)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \vec{f}, \quad (8.4.2)$$

добавить уравнения Максвелла и материальные уравнения, связывающие электромагнитное поле с динамическим состоянием среды:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (8.4.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (8.4.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (8.4.5)$$

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \right), \quad (8.4.6)$$

где σ – электропроводность плазмы, c – скорость света в вакууме.

Мы рассмотрим основные принципы магнитной гидродинамики на примере *космической плазмы*. Характерной особенностью космической плазмы является очень высокая проводимость, поэтому ток смещения мал по сравнению с током проводимости и на этом основании опущен (во втором уравнении Максвелла). Опущен и конвекционный ток, поскольку он связан с движением свободных объёмных зарядов, быстро рассасывающихся в среде с высокой электропроводностью. Кроме того, для плазмы $\mu \approx 1$. При этих условиях и записана приведённая выше система.

Эту систему можно упростить и далее, исключив из неё \vec{E} и \vec{j} . Взяв ротор от обеих частей уравнения (8.4.6) и воспользовавшись уравнением (8.4.3), получим:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\sigma} \text{rot } \vec{j} + \text{rot } [\vec{v}, \vec{H}].$$

Воспользовавшись далее уравнением (8.4.4), исключим \vec{j} :

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot } [\vec{v}, \vec{H}] - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \text{rot rot } \vec{H}.$$

Используя формулу

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H},$$

и учитывая, что сила Лоренца, действующая на ток с плотностью \vec{j} , есть

$$\vec{f} = \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{H}] = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \vec{H}, \vec{H}],$$

приходим к системе уравнений

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \vec{v} = 0, \quad (8.4.7)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad } p + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \vec{H}, \vec{H}], \quad (8.4.8)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot } [\vec{v}, \vec{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \vec{H}, \quad (8.4.9)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (8.4.10)$$

Уравнения (8.4.7)–(8.4.10) образуют основную систему уравнений магнитогидродинамики идеальной жидкости. Переход от идеальной проводящей жидкости, описываемой уравнениями, к вязкой, как и в случае обычной, непроводящей жидкости, осуществляется добавлением в правую часть уравнения Эйлера (8.4.2) «вязкого слагаемого» $\eta\Delta\vec{v}$:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad } p + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \vec{H}, \vec{H}] + \eta\Delta\vec{v}.$$

Кроме этого, на рассматриваемую жидкость могут действовать другие силы, немагнитного происхождения (например, гравитационные). Обозначим объёмную плотность этих сил через $\rho\vec{g}$ и тоже добавим в правую часть уравнения движения. Учитывая, что

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \Delta\vec{H} = -\Delta\vec{H},$$

$$[\text{rot } \vec{H}, \vec{H}] = (\vec{H}\nabla) \vec{H} - \nabla \left(\frac{H^2}{2} \right),$$

и (для несжимаемой жидкости)

$$\text{rot } [\vec{v}, \vec{H}] = (\vec{H}\nabla) \vec{v} - (\vec{v}\nabla) \vec{H},$$

можно привести систему уравнений магнитогидродинамики к виду

$$\text{div } \vec{v} = 0,$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\vec{H}\nabla) \vec{H} + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v},$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot } [\vec{v}, \vec{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta\vec{H},$$

$$\text{div } \vec{H} = 0.$$

8.4.2 Магнитное поле в неподвижной и движущейся плазме

Рассмотрим вначале случай, когда идеальная проводящая жидкость (плазма) находится в состоянии покоя, тогда $\vec{v} = 0$. Уравнение (8.4.9) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta\vec{H}, \quad (8.4.11)$$

описывающий обыкновенную диффузию. Магнитное поле, сосредоточенное первоначально в некоторой области, расплывается по пространству, уменьшаясь по величине. Можно оценить время τ , за которое магнитное поле может в основном выйти за пределы области с характерным размером L , с помощью следующего приема, часто используемого в такого рода оценках. Если некоторая функция монотонно изменяется от некоторого начального значения до сравнительно малого, почти нулевого, то оценить производную по этому аргументу (грубо, по порядку величины) можно, разделив это начальное значение на характерную величину аргумента. В нашем случае это даёт оценки (берём абсолютные величины)

$$\frac{\partial H}{\partial t} \simeq \frac{H}{\tau}, \quad \Delta H \simeq \frac{H}{L^2},$$

подстановка которых в уравнение

$$\frac{H}{\tau} \simeq \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{H}{L^2}$$

приводит к оценке:

$$\tau \simeq (4\pi/c^2)\sigma L^2.$$

Этот результат важен, в частности, для понимания процесса образования звёзд из газового облака, пронизанного магнитным полем.

Пусть теперь плазма движется с достаточно высокой скоростью, чтобы диффузионным членом в уравнении (8.4.9) можно было пренебречь:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{v}, \vec{H}]. \quad (8.4.12)$$

Пусть C – некоторый замкнутый контур, движущийся вместе с плазмой, а S – натянутая на него поверхность. Изменение магнитного потока через эту поверхность в общем случае состоит из двух частей: изменения поля, обусловленного внешними источниками, и изменения вследствие движения самого контура. Первый вклад за время dt равен

$$d\Phi_1 = \int_S (\partial \vec{H} / \partial t) d\vec{S} dt.$$

Вторая часть возникает в результате наведённого при движении электрического поля в контуре:

$$\vec{E} = \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{H}].$$

Поскольку

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

изменение потока за время dt вследствие движения контура

$$d\Phi_2 = - \int_S \operatorname{rot} [\vec{v}, \vec{H}] d\vec{S} dt.$$

Складывая обе части и учитывая (8.4.12), получаем

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = \int_S \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \operatorname{rot} [\vec{v}, \vec{H}] \right) d\vec{S} dt = 0.$$

Таким образом, при рассматриваемых условиях поток магнитной напряжённости через связанный с плазмой материальный контур в процессе движения сохраняется. Силовые линии магнитного поля движутся вместе с частицами плазмы, говорят, что магнитные силовые линии (или магнитное поле) *вморожены* в плазму.

8.4.3 Бессилловые магнитные поля

Слагаемое

$$\vec{f}_m = \frac{1}{4\pi} \left[\operatorname{rot} \vec{H}, \vec{H} \right],$$

входящее в уравнение движения, описывает силу, действующую на единицу объёма жидкости со стороны магнитного поля. Она равна нулю в отсутствие магнитного поля, но может обращаться в нуль и в случае, когда напряжённость магнитного поля отлична от нуля; для этого достаточно выполнения условия

$$\operatorname{rot} \vec{H} = a \vec{H}, \quad (8.4.13)$$

где a – некоторая, но не произвольная функция координат. Чтобы найти налагаемые на неё условия, применим к уравнению (8.4.13) операцию div . Принимая во внимание, что

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

получим

$$(\operatorname{grad} a) \vec{H} = 0. \quad (8.4.14)$$

Останется ли магнитное поле бессилловым при уменьшении его напряжённости вследствие конечной проводимости? Другими словами,

может ли картина силовых линий при этом оставаться неизменной и при каких условиях? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к диффузионному уравнению (8.4.13), вернув его правой части роторное представление:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma} \text{rot rot } \vec{H},$$

Подставляя сюда (8.4.13) и используя тождество

$$\text{rot}(a\vec{H}) = a \text{rot } \vec{H} + [\text{grad } a, \vec{H}],$$

видим, что нестационарное бессивовое поле должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left\{ a^2 \vec{H} + [\text{grad } a, \vec{H}] \right\}. \quad (8.4.15)$$

Отсутствие искажений при убывании магнитного поля означает, что производная $\partial \vec{H} / \partial t$ не имеет составляющей, перпендикулярной \vec{H} . Следовательно, последнее слагаемое в правой части уравнения (8.4.15) должно быть равно нулю, то есть $\text{grad } a$ не должен иметь составляющей, перпендикулярной \vec{H} . Но, согласно уравнению (8.4.14), этот градиент не должен иметь и параллельной к \vec{H} составляющей. Таким образом,

$$\text{grad } a = 0, \quad a = \text{const}$$

и уравнение (8.4.15) принимает вид

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{c^2 a^2}{4\pi\sigma} \vec{H}.$$

Спадание бессивового магнитного поля происходит по экспоненциальному закону с постоянной времени $4\pi\sigma / (ca)^2$.

Пример

Рассмотрим простейший случай: поле стационарно, $a = \text{const}$ и задача обладает цилиндрической симметрией. Уравнение (8.4.13) принимает вид системы двух уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_z}{\partial r} &= a H_\varphi, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r H_\varphi)}{\partial r} &= a H_z. \end{aligned}$$

Исключив H_φ , придём к уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + a^2 H_z = 0.$$

Его решением является функция Бесселя нулевого порядка

$$H_z = AJ_0(ar),$$

где A – произвольная постоянная. Подставляя это решение в первое уравнение системы, находим

$$H_\varphi = -\frac{1}{a} \frac{\partial H_z}{\partial r} = AJ_1(ar).$$

8.4.4 Волны Альфвена

Рассмотрим несжимаемую идеальную жидкость и пренебрежём диффузионным членом (то есть примем $\sigma = \infty$). В этом случае система уравнений (8.4.7)-(8.4.10) ещё более упрощается:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi} \left[\operatorname{rot} \vec{H}, \vec{H} \right],$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \left[\vec{v}, \vec{H} \right],$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

Пусть однородная плазма с неизменной плотностью ρ находится в состоянии покоя, $\vec{v}_0 = 0$, в постоянном однородном магнитном поле \vec{H}_0 с давлением p_0 , и в силу какой-то внешней причины в ней возникает слабое возмущение, так что

$$\vec{v}_0 \rightarrow \vec{v}_1 \equiv \vec{v}, \quad \vec{H}_0 \rightarrow \vec{H}_0 + \vec{H}_1 \equiv \vec{H}_0 + \vec{h}, \quad p_0 \rightarrow p_0 + p_1,$$

где индексом 1 отмечены поправки первого порядка по возмущению. Обычная процедура линеаризации с учётом векторных тождеств

$$\operatorname{rot} \left[\vec{v}, \vec{H}_0 \right] = (\vec{H}_0 \nabla) \vec{v} - \vec{H}_0 \operatorname{div} \vec{v},$$

и

$$\operatorname{grad}(\vec{H}_0 \vec{h}) = (\vec{H}_0 \nabla) \vec{h} + \left[\vec{H}_0, \operatorname{rot} \vec{h} \right]$$

приводит систему к виду

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} \left(p_1 + \frac{1}{4\pi} \vec{H}_0 \vec{h} \right) + \frac{1}{4\pi} (\vec{H}_0 \nabla) \vec{h},$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = (\vec{H}_0 \nabla) \vec{v},$$

$$\operatorname{div} \vec{h} = 0.$$

Подставляя в неё волновые решения

$$\vec{v} = \vec{A} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{h} = \vec{B} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad p_1 = C e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

с волновым вектором \vec{k} и частотой ω , получим соответственно:

$$\vec{k}\vec{v} = 0, \quad (8.4.16)$$

$$\rho\omega\vec{v} = \left(p_1 + \frac{1}{4\pi} \vec{H}_0 \vec{h} \right) \vec{k} - \frac{1}{4\pi} (\vec{H}_0 \vec{k}) \vec{h}, \quad (8.4.17)$$

$$-\omega\vec{h} = (\vec{H}_0 \vec{k}) \vec{v}, \quad (8.4.18)$$

и

$$\vec{k}\vec{h} = 0. \quad (8.4.19)$$

Из равенств (8.4.16), (8.4.18) и (8.4.19) видно, что возмущение магнитного поля \vec{h} и скорость частиц среды \vec{v} коллинеарны друг другу и перпендикулярны волновому вектору \vec{k} . Умножая скалярно равенство (8.4.17) на \vec{k} , найдём соотношение между возмущениями давления и магнитного поля

$$p_1 = -\frac{1}{4\pi} \vec{H}_0 \vec{h}.$$

С учетом этого соотношения равенства (8.4.17)–(8.4.18) преобразуем в однородную систему

$$\frac{1}{4\pi\rho} \vec{h} + \omega\vec{v} = 0,$$

$$\omega\vec{h} + \left(\vec{H}_0 \vec{k} \right) \vec{v} = 0, \quad (8.4.20)$$

имеющую нетривиальные решения при условии

$$\omega^2 = \frac{1}{4\pi\rho} \left(\vec{H}_0 \vec{k} \right)^2. \quad (8.4.21)$$

Направим ось OZ вдоль магнитного поля \vec{H}_0 , так что

$$\vec{H}_0 \vec{k} = H_{0z} k.$$

Подставляя это равенство в (8.4.21), извлекая квадратный корень и подставляя результат в уравнение (8.4.20), находим *гидромагнитную (альфвеновскую) скорость*

$$V = \pm \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (8.4.22)$$

которая не зависит ни от частоты волны ω , ни от её амплитуды A . Положим далее, что все характеристики волны зависят только от времени и z -координаты, но не от x и y , тогда получим

$$\begin{aligned} h_y &= A \sin[\omega(t - z/V)], \\ v_y &= -A/\sqrt{4\pi\rho} \cdot \sin[\omega(t - z/V)], \\ p_1 &= -A^2/8\pi \cdot \sin^2[\omega(t - z/V)]. \end{aligned}$$

Поскольку плотность магнитной энергии волны составляет $h_y^2/8\pi$, а плотность кинетической энергии $\rho v_y^2/2$, то из двух первых уравнений видно, что имеет место равномерное распределение между магнитной и кинетической энергиями – важный фактор для анализа плотности энергии во Вселенной.

Эти волны называются *гидромагнитными волнами* или *волнами Альфвена*. Они играют важную роль в физике плазмы, и особенно – в физике космической плазмы.

Заметим, в заключение, что плоские волны – частные решения волнового уравнения. В общем случае ему удовлетворяет линейная суперпозиция решений типа

$$h_y = f(t - z/V)g(x),$$

где f и g – произвольные дважды дифференцируемые функции скалярной переменной. Эти решения описывают возмущения произвольной формы, но все они распространяются параллельно вектору \vec{H}_0 со скоростью V , даваемой выражением (8.4.22). Однако в сжимаемых средах существуют гидромагнитные волны других типов, переносящие возмущения поперек магнитного поля.

8.4.5 Колебания силовых линий

Наглядную картину распространения альфвеновских волн в среде можно получить, проведя аналогию между магнитными силовыми линиями и упругими струнами. Вследствие «вмороженности» магнитного поля в среде магнитно-силовые линии движутся вместе с ней,

поэтому их и можно рассматривать как струны, обладающие массой и испытывающие натяжение. Натяжение легко определить из следующих соображений.

Рассмотрим плотность магнитной силы, входящую в правую часть уравнения Эйлера:

$$\vec{f}_m = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \vec{H}, \vec{H}] = -\text{grad} \left(\frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\vec{H} \nabla) \vec{H}.$$

Проинтегрируем эту плотность по объёму V , ограниченному поверхностью S , воспользовавшись векторными тождествами

$$\int_V \text{grad} \varphi dV = \int_S \varphi d\vec{S}$$

и

$$\int_V (\vec{A} \nabla) \vec{B} dV = \vec{B} (\vec{A}, d\vec{S}) - \int_V \vec{B} \text{div } \vec{A} dV.$$

В результате получим

$$\int_V \vec{f}_m dV = \int_S \left(-\frac{H^2}{8\pi} \right) d\vec{S} + \int_S \frac{\vec{H} (\vec{H} d\vec{S})}{4\pi}.$$

Приведя таким образом объёмную силу к поверхностной, мы видим, что она состоит из двух частей: одна направлена по нормали к поверхности внутрь объёма – это *магнитное давление*

$$p_m = \frac{H^2}{8\pi},$$

не оказывающее влияния на колебания частиц среды, а вторая – *магнитное натяжение*

$$T_m = \frac{H^2}{4\pi},$$

направленное вдоль силовой линии. Таким образом, уравнение колебаний материализованной, «приклеенной» к жидкости «магнитной струны» запишется в виде

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{H^2}{4\pi} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}.$$

Фазовая скорость такой волны

$$v = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

8.4.6 Упражнения

1. Воспроизвести математические выкладки, пропущенные при выводе магнитогидродинамических уравнений в п. 8.4.1.
2. В условиях предыдущей задачи вывести волновое уравнение для магнитного поля в несжимаемой плазме с проводимостью σ . Начальное магнитное поле \vec{H}_0 однородно и направлено вдоль оси OZ . В этом же направлении распространяется и плоская волна $\vec{h}(z)$, созданная током \vec{j}_e , так что $\vec{H}(z) = \vec{H}_0 + \vec{h}(z)$.
3. Представив решение полученного в предыдущей задаче уравнения в виде $h_y = A \sin(\omega t - kz)$, найти фазовую скорость волны и дисперсионное соотношение (связь между ω и $|k|$) для плазмы с бесконечной проводимостью.
4. В условиях предыдущих задач выразить давление через A , ω и k .

8.5 Вселенная как сплошная среда

8.5.1 Однородная изотропная модель

Простейшей *механической* моделью Вселенной является однородная и изотропная космологическая модель, рассматриваемая в рамках нерелятивистской ньютоновой динамики. Локальные характеристики такой среды в разных её точках в один и тот же момент времени одинаковы и все направления относительно каждой точки равноценны. Важность этой модели в том, что если в некоторый момент времени среда, управляемая законами Ньютона, удовлетворяет этим условиям, то указанные свойства будут сохраняться в течение всей её дальнейшей эволюции.

Чтобы убедиться в этом, выберем одну из этих точек в качестве начала координат, тогда скорости всех других точек среды определятся векторным полем Хаббла,

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = H(t)\vec{r}. \quad (8.5.1)$$

Поле это замечательно тем, что вопреки ожидаемому эффекту выбор в качестве начала координат другой точки среды, движущейся относительно первой по закону Хаббла, не изменяет указанных свойств среды. Пусть такой новой точкой среды будет точка A с радиус-вектором \vec{r}_A , а радиус-вектор наблюдаемой точки относительно новой системы обозначим через \vec{r}' . Очевидно,

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_A,$$

и, следовательно,

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{u}_A = H\vec{r} - H\vec{r}_A = H\vec{r}'.$$

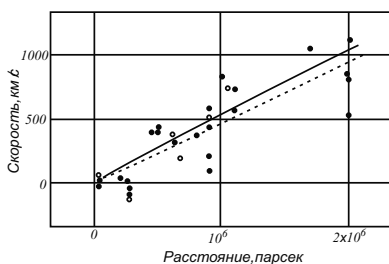


Рис. 8.6. График из оригинальной работы Хаббла 1929 года

Таким образом, и в новой системе координат, движущейся относительно старой по закону $\vec{u}_A = H\vec{r}_A$, мы вновь наблюдаем то же самое поле. Наблюдатель, недовольный тем, что соседи, находящиеся на других точках, удаляются от него во все стороны, и «перескочивший» на другую точку, вновь увидит такую же картину: все соседи будут удаляться от него со скоростями, прямо пропор-

циональными расстояниям. Замечательно, что таким свойством обладает единственное поле скоростей, даваемое формулой Хаббла³.


С точки зрения классической механики, закон Хаббла можно наглядно объяснить следующим образом. Когда-то давно Вселенная образовалась в результате Большого взрыва. В момент взрыва различные частицы материи (осколки) получили различные скорости. Те из них, которые получили большие скорости, соответственно успели к настоящему моменту улететь дальше, чем те, которые получили меньшие скорости. Если провести численный расчёт, то окажется, что зависимость расстояния от скорости оказывается линейной. Кроме того, получается, что эта зависимость одна и та же для всех точек пространства, то есть, по наблюдениям за разлетающимися осколками нельзя найти точку взрыва: с точки зрения каждого осколка, именно он находится в центре. Однако, несмотря на такую наглядность, следует помнить, что расширение Вселенной должно описываться не классической механикой, а общей теорией относительности (ещё большую интригу привнесли недавние измерения, выполненные на космическом телескопе, носящем имя Хаббла: Вселенная расширяется *с ускорением*).

Обратимся теперь к проблеме однородности. Мы сказали, что масса в этой модели распределена однородно (то есть плотность массы не

³В 1929 г. американский астроном Эдвин Хаббл с помощью 100-дюймового телескопа измерил скорости удаления галактик от нашей Галактики, подтвердив тем самым результаты измерений бельгийца Ж.Леметра. По своей значимости результаты Хаббла (а вместе с ним и Леметра) вполне соответствовали уровню работ нобелевских лауреатов, однако решение о включении астрономии в сферу «нобелевских» наук было принято уже после смерти Хаббла. Однако и при жизни слава его не обошла стороной: в списке его наград медаль Кэтрин Брюс (1938), медаль Бенджамена Франклина (1939), Золотая медаль Королевского астрономического общества (1940), орден «Легион почёта» (1946). В СССР одним из активных популяризаторов теории расширяющейся Вселенной был Матвей Бронштейн, несмотря на тридцатилетний возраст уже известный своими работами по разным разделам теоретической физики, включая и космологию. В 1938 году его расстреляли.

зависит от координат), и это, на первый взгляд, может показаться очевидным, но предыдущий случай научил нас критически относиться к первому впечатлению, найдя более доказательные пути.

Построив вокруг начала системы координат сферу, заключающую в себе фиксированную массу M вещества, и по этой причине имеющую зависящий от времени радиус $R(t)$, проследим за изменением плотности вещества среды:



$$\rho(t) = \frac{3M}{4\pi R^3(t)}.$$

Продифференцировав это выражение по времени и воспользовавшись соотношением

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = H, \quad (8.5.2)$$

получим

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{9M}{4\pi R^4(t)} \frac{dR}{dt} = -3H\rho. \quad (8.5.3)$$

Таким образом, приращение плотности


$$d\rho = -3H(t)\rho(t)dt.$$

Таким образом, как и исходная плотность в момент t , её инфинитезимальное (за бесконечно малый промежуток времени dt) приращение тоже не зависит от координат, и по этой причине среда продолжает оставаться однородной, хотя её плотность и меняется со временем.

Рассмотрим теперь поле скоростей. В исходной системе координат

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = H(t)\vec{r}.$$

Чтобы установить закон изменения скорости материальной точки единичной массы, находящейся в точке \vec{r} , вычислим её ускорение \vec{g} . Согласно ньютоновому закону тяготения, оно пропорционально массе $M(r) = (4\pi/3)\rho r^3$, заключённой в рассматриваемой сфере, и обратно пропорционально квадрату её радиуса:



$$\vec{g} = -\frac{4\pi}{3}G\rho\vec{r}.$$

Видим, что приращение скорости $d\vec{u} = \vec{g}(t)dt$ хоть и зависит от времени, но сохраняет то же направление, что и сама скорость. Иными словами, поле скоростей, заданное в какой-то момент времени изотропным, остаётся таковым «до скончания веков».

8.5.2 Критическая плотность и возраст Вселенной

Рассматриваемая модель является простейшей, и по нынешним временам, скорее качественной, но некоторые идеи современной космологии можно увидеть и на этом, сугубо классическом уровне. Проследим за движением пробной частицы среды массой m , находящейся на расстоянии R от начала координат O . Сила притяжения к точке O пропорциональна массе, ограниченной этой сферой,

$$F_R = -G \frac{mM}{R^2},$$

так что

$$m \frac{d^2 R}{dt^2} = -G \frac{mM}{R^2}, \quad (8.5.4)$$

где m и M , напомним, постоянные. Это уравнение одномерного движения под действием ньютоновой силы, описывающее радиальное движение пробного тела с массой m в поле тяготения однородного (точнее, со сферически симметричной плотностью) шара массой M и радиуса R . Очевидно, имеет место закон сохранения полной энергии, который для единичной массы запишется в виде

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{R} = E = \text{const}. \quad (8.5.5)$$

Если начальная скорость этой массы такова, что её кинетическая энергия превосходит абсолютную величину потенциальной или была равна ей, удаление массы от начала координат продолжается бесконечно, в противном же случае в определённый момент времени удаление прекращается и сменяется обратным процессом – падением к центру. Всё как в идеализированном (без учёта сопротивления и других сил) случае бросания тела с поверхности Земли. Отличие только в том, что в данном случае мы имеем не одну изолированную материальную точку, а произвольно выбранный элемент сплошной среды, представляющей всю Вселенную. Удалению его от центра или падению на центр соответствуют теперь *расширение* или *сжатие* всей Вселенной.

Более удобным критерием, разделяющим эти процессы, в последнем случае является не скорость, а плотность вещества Вселенной, критическое значение которой находится из выражения для той же космической скорости, разделяющей процесс бесконечного удаления от процесса с возвращением:

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{2GM/R}.$$

Подставив сюда

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_{\text{кр}} R^3$$

и воспользовавшись формулой Хаббла (8.5.1), получим

$$\rho_{\text{кр}} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (8.5.6)$$

Стало быть, при ρ меньше указанной плотности Вселенная будет расширяться бесконечно, при плотности большей критической процесс расширения когда-то прекратится и пойдёт в обратную сторону.

Впрочем, вывод формулы (8.5.6) не вполне корректен. Необходимо учесть зависимость постоянной Хаббла⁴ от времени. С этой целью вернёмся к уравнению (8.5.4) и выразив массу шара через его радиус и плотность, перепишем его в виде

$$m \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi}{3} G \rho m R. \quad (8.5.7)$$

Сократив обе части уравнения на массу пробной частицы и воспользовавшись формулой (8.5.2), выполним следующие преобразования:

$$\frac{d(HR)}{dt} = \frac{dH}{dt} R + H \frac{dR}{dt} = \frac{dH}{dt} R + H^2 R = -\frac{4\pi}{3} G \rho R.$$

В результате придём к уравнению

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho,$$

которое вместе с (8.5.3)

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H\rho$$

определяет эволюцию локальных свойств Вселенной как в прошлом, так и в будущем. Для наших целей, однако, удобнее продолжить пользоваться образом движущейся точки единичной массы.

Пусть в некоторый момент времени t_0 $H(t_0) = H_0$ и $\rho(t_0) = \rho_0$. Взяв в этот момент какую-нибудь точку R_0 , положим $M = (4\pi/3)\rho_0 R_0^3$ и с учётом (8.5.2) запишем полную энергию единицы массы в виде

$$E = \frac{1}{2} H_0^2 R_0^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho_0 R_0^2.$$

⁴Слово «постоянная» в словосочетании «постоянная Хаббла» означает независимость этой величины от координат.

Заменив этим выражением постоянную E в уравнении (8.5.5), получим

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \left[\frac{G\rho_0 R_0^3}{R} - GR_0^2(\rho_0 - \rho_{0\text{кр}}) \right], \quad (8.5.8)$$

где

$$\rho_{0\text{кр}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

Основные черты поведения решения этого уравнения можно усмотреть и не решая его полностью. Поскольку в настоящее время dR/dt положительно, в прошлом R было меньше и, соответственно, первый член справа был больше, чем сейчас. Стало быть, можно предположить, что в какой-то момент было $R = 0$ и $dR/dt = \infty$. Поведение

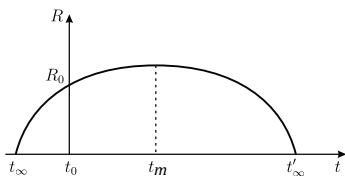


Рис. 8.7. Изменение во времени расстояния R между двумя точками, когда плотность ρ_0 больше, чем критическая плотность ρ_c : t_0 – сегодняшний момент, t_∞ и t'_∞ – моменты бесконечной плотности, t_m – момент максимального расширения

же Вселенной в будущем зависит от знака последней скобки, то есть, от соотношения ρ_0 и $\rho_{0\text{кр}}$. Если $\rho_0 > \rho_{0\text{кр}}$, скобка положительна, и с ростом R наступит момент, когда вся правая часть уравнения обратится в нуль. В этот момент расширение Вселенной сменится сжатием (рис. 8.7). Если же $\rho_0 < \rho_{0\text{кр}}$, то расширение будет продолжаться неограниченно, в асимптотике больших времён выходя на линейный режим (рис. 8.8):

$$R(t) \sim \sqrt{(8\pi/3)G(\rho_{0\text{кр}} - \rho_0)} R_0 t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Следовательно, чтобы узнать (в рамках данной модели, естественно), что ждёт Вселенную в будущем, необходимо сравнить наблюдаемое значение плотности ρ_0 с критическим $\rho_{0\text{кр}}$. Для вычисления последнего необходимо значение H_0 .

Ещё одна интересная характеристика Вселенной, даваемая однородной моделью – это её возраст, который можно найти, если (что, впрочем, вполне логично) отождествить момент t_∞ , когда координата произвольной точки R была нулевой, а плотность вещества, соответственно, бесконечной, с моментом Большого взрыва, породившего Вселенную. При постоянной скорости расширения, равной современному значению,

$$R_0 = \left(\frac{dR}{dt}\right)_{t_0} (t_0 - t_\infty) = H_0 R_0 (t_0 - t_\infty)$$

мы получили бы возраст

$$T = t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0} \simeq 10^{10}.$$

В действительности же скорость не постоянна, её ещё надо найти, и сделать это можно, решив уравнение (8.5.8). Проще всего оно решается в случае, когда $\rho_0 = \rho_{\text{кр}}$:

$$R = R_0 \left(\frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} \right)^{2/3}.$$

В результате получаем

$$t_0 - t_\infty = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0}$$

и

$$\rho = \frac{1}{6\pi G(t - t_\infty)^2}.$$

Второе частное решение простого типа получается в случае, когда плотность в настоящее время исчезающе мала по сравнению с критической. В этом случае уравнение принимает вид

$$\frac{dR}{dt} = H_0 R_0 = \text{const},$$

а его решение

$$R = R_0 + H_0 R_0 (t - t_0).$$

В результате имеем

$$t_\infty = t_0 - \frac{1}{H_0},$$

$$H = \frac{H_0}{1 + H_0(t - t_0)}$$

и

$$\rho = \left(\frac{t_0 - t_\infty}{t - t_\infty} \right) \rho_0.$$

Дальнейшие подробности читатель может найти в книге Я.Б.Зельдовича и И.Д.Новикова⁵, по материалам которой и написан этот раздел.

⁵Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков. Строение и эволюция Вселенной. – М.: Наука, 1975.

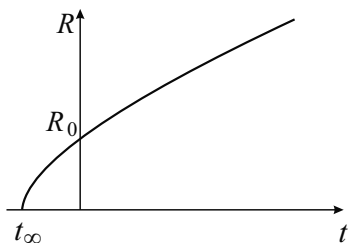


Рис. 8.8. Изменение со временем расстояния между двумя точками, когда плотность ρ_0 больше, чем критическая плотность ρ_c

8.5.3 Функция Лагранжа частицы в расширяющейся системе отсчёта

В среде, расширяющейся по закону Хаббла, вектор расстояния между любой парой её точек A и B удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = H(t)\vec{r}_{AB}(t),$$

решение которого при начальном условии

$$\vec{r}_{AB}(t_0) = \vec{x}_{AB}$$

имеет вид

$$\vec{r}_{AB}(t) = a(t)\vec{x}_{AB},$$

где

$$a(t) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t H(t') dt' \right\}.$$

Подчеркнём, что речь идёт о паре частиц, *вмороженных в расширяющуюся среду*, вместе с этой средой расширяется вмороженная в неё координатная сетка, в которой вектор \vec{x}_{AB} характеризуется постоянными проекциями, и стало быть, постоянен. Но в основной (исходной) системе всё это выглядит как расширение некоего фона, расстояния между всеми точками которого со временем увеличиваются пропорционально масштабному множителю $a(t)$, являющемуся универсальной функцией собственного мирового времени.

Находящаяся в точке \vec{r} частица среды движется со скоростью

$$\vec{u} = \dot{\vec{r}} = \dot{a}\vec{x} + a\dot{\vec{x}} = \dot{a}\vec{x} + \vec{v}(\vec{x}, t), \quad (8.5.9)$$

где

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = a\dot{\vec{x}} \quad (8.5.10)$$

– собственная *пекулярная* скорость частицы, то есть, скорость относительно наблюдателя, у которого \vec{x} не меняется и который находится в том же месте, что и частица, иными словами – это скорость относительно фона. Функция Лагранжа этой частицы

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(a\dot{\vec{x}} + \dot{a}\vec{x})^2 - m\phi(\vec{x}, t).$$

Пусть ρ_0 – плотность вещества фона, тогда гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\vec{r}}^2 \phi = 2\pi G \rho_0,$$

а сам потенциал запишется в виде

$$\phi = \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r^2.$$

Из уравнения движения

$$m\ddot{\vec{r}} = -\nabla_r\phi$$

следует космологическое уравнение

$$m\ddot{a} = -(4/3)\pi G\rho_0(t)a.$$

Преобразуем функцию Лагранжа, чтобы выделить в ней полную производную по времени, и отбросим её:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}ma^2\dot{x}^2 + ma\dot{a}\dot{x}\dot{x} + \frac{1}{2}m\dot{a}^2x^2 - m\phi = \\ &= \frac{1}{2}ma^2\dot{x}^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{ma\dot{a}x^2}{2}\right) - \frac{ma\ddot{a}x^2}{2} - m\phi \rightarrow \frac{1}{2}ma^2\dot{x}^2 - m\left(\phi + \frac{a\ddot{a}x^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = ma^2\dot{x},$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -m\nabla_x\left(\phi + \frac{a\ddot{a}x^2}{2}\right)$$

и уравнение движения частицы принимает обычную форму

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -m\nabla_x\Phi,$$

где

$$\vec{p} = ma^2\dot{x},$$

а

$$\Phi = \phi + \frac{a\ddot{a}x^2}{2}.$$

Пекулярная скорость (8.5.10) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} = -\frac{1}{a}\nabla\Phi.$$

Если $\Phi = 0$, то \vec{p} сохраняется, но \vec{v} уменьшается обратно пропорционально a . Замедление это является следствием эволюции системы координат: пекулярная скорость \vec{v} измеряется относительно наблюдателей, «привязанных» к точкам фона и перемещающихся вместе с ними, и частица, движущаяся свободно, догоняет таких наблюдателей. Поскольку и частица, и наблюдатели движутся в одну сторону, скорость \vec{v} уменьшается.

8.5.4 Вселенная как идеальная жидкость

Сплошная однородная недеформируемая, хотя и расширяющаяся во все стороны среда, какой представляется Вселенная в рамках вышеприведённой модели, не способна дать нам более подробную информацию о происходящих во Вселенной процессах. Нарушение однородности обычно представляют в виде

$$\rho_0(t) \rightarrow \rho(\vec{x}, t) = \rho_0(t) [1 + \epsilon(\vec{x}, t)], \quad \rho_0(t) \propto a^{-3}(t). \quad (8.5.11)$$

Для описания распространения заданного в какой-то момент возмущения материю Вселенной рассматривают, в простейшем случае, как идеальную самогравитирующую расширяющуюся жидкость⁶. Имея в виду, что видимая часть нашей Вселенной состоит из локальных образований – звёзд, галактик, скоплений галактик, которые во вселенских масштабах можно считать частицами, жидкая модель предполагает, что средние пробеги этих частиц малы по сравнению с размерами характерных неоднородностей. Разумеется, модель довольно гипотетичная, хотя и явно более реалистична, чем сплошная однородная твёрдая среда.

Исходные уравнения идеально-жидкой модели Вселенной записываются в виде

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) \right)_r = 0, \quad (8.5.12)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} \right)_r = -(\nabla p + \rho \nabla \phi)_r, \quad (8.5.13)$$

где индекс r , как и прежде, указывает на то, что пространственной переменной является собственный радиус-вектор \vec{r} относительно некоторого выбранного начала координат. Собственная скорость $\vec{u} = \dot{\vec{r}}$ связана с пекулярной скоростью \vec{v} соотношением (см. уравнения (8.5.9)–(8.5.10))

$$\vec{u} = \dot{a} \vec{x} + \vec{v}(\vec{x}, t) = (\dot{a}/a) \vec{r} + \vec{v}(\vec{r}/a, t) \quad (8.5.14)$$

Переход от \vec{r} к \vec{x} преобразует первый член уравнения непрерывности (8.5.12) к виду

$$\left(\frac{\partial \rho(\vec{r}/a, t)}{\partial t} \right)_r = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \nabla \rho \right)_x. \quad (8.5.15)$$

⁶Ф. Дж. Э. Пиблс. Структура Вселенной в больших масштабах: Пер с англ. – М.: Мир, 1983. – С.60.

Подстановка (8.5.14) во второй член уравнения (8.5.12) даёт:

$$(\operatorname{div}(\rho\vec{v}))_r = \left(\frac{1}{a} \operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\dot{a}}{a} \rho + \frac{\dot{a}}{a} \vec{x} \nabla \rho \right)_x. \quad (8.5.16)$$

Складывая уравнения (8.5.15) и (8.5.16), приходим к уравнению непрерывности в расширяющейся системе координат (индекс x опустим):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho + \frac{1}{a} \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0.$$

Второе уравнение, уравнение движения (8.5.13) после перехода от \vec{r} к \vec{x} принимает вид

$$\ddot{a}\vec{x} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{a}(\vec{v}\nabla)\vec{v} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} = -\frac{1}{\rho a} \nabla p - \frac{1}{a} \nabla \left(\Phi - \frac{1}{2} a \ddot{a} x^2 \right).$$

8.5.5 Кое-что из истории

На основе теорем механики о системе материальных точек немецкий философ Иммануил Кант предпринял попытку построить научную теорию эволюции Вселенной в книге «Всеобщая естественная история и теория неба, или Исследование строения и механизмов образования всей структуры Вселенной, рассмотренной с точки зрения ньютоновых принципов» (1755). Эта поистине замечательная работа во многом превосходит результаты современной астрономии. Начинается она с утверждения, что все видимые невооруженным глазом звёзды принадлежат одной системе – Млечному Пути. Все они лежат приблизительно в одной плоскости, и их единство подобно единству Солнечной системы. Туманности – тоже созвездия, только чрезвычайно удалённые. Все эти объекты – туманности, звёзды, планеты и их спутники возникли в результате сгущения рассеянной материи вокруг тех мест, где она обладала большей плотностью. Но Кант был философом и удивительно прозорливые идеи перемежались в его книге неверным предположением о том, что замкнутая система может прийти в состояние вращения «сама по себе», и уж совсем бессмысленным утверждением о том, что обитатели планет должны улучшаться по мере удаления планет от Солнца. В нём не больше смысла, чем в гегелевском утверждении о том, что планет должно быть ровно 7, поскольку это – особое число. Однако правая часть его гипотезы являлась безусловно новаторской и была развита 40 с лишним лет спустя Лапласом в его книге «Изложение системы мира» (1796). Лаплас считал, что система из Солнца и планет первоначально была единой рассеянной туманностью (системой точечных масс, притягивающихся друг к другу по закону Ньютона). Под действием гравитации туманность постепенно сжималась, размеры её уменьшались, а момент импульса

оставался постоянным. В результате этого возрастали линейные скорости движения, увеличивалась центробежная сила, под действием которой некоторые части этой (неоднородной, конечно) туманности отлетали на периферию и, продолжая «упаковываться» под влиянием той же гравитации, становились планетами. В ходе этого процесса от них также могли отделиться фрагменты, превратившиеся в спутники.

Живя в эпоху французской революции, Лаплас был истинно свободомыслящим человеком и решительно отвергал «теорию сотворения мира», насаждаемую в те далекие времена церковью. Когда император Наполеон с неудовольствием заметил, что «Небесная механика» не содержит упоминания о Боге, великий математик ответил: «Сир, я не нуждался в этой гипотезе».

Говоря о таком самом глобальном явлении как расширение Вселенной, нельзя обойти вниманием талантливейшего учёного начала прошлого века А.А.Фридмана – романтическую фигуру сродни Никола Тесла и Сент-Экзюпери. Сын артиста балета, композитора и дирижера, капельмейстера лейб-гвардии Преображенского полка А.А. Фридмана, Александр Александрович Фридман (1888-1925), математик и геофизик, был во время Первой (как говорили тогда, германской) мировой войны военным летчиком. В 1922-1924 гг. нашел нестандартные решения уравнений Эйнштейна, что легло в основу теории расширяющейся Вселенной. Один из создателей теории турбулентности и отечественной школы динамической метеорологии. В 1931 г. ему посмертно была присуждена Ленинская премия.

Поэт Леонид Мартынов в 1965 г. посвятил А.А. Фридману следующее стихотворение:

Мир не до конца досоздан: небеса всегда в обновлениях,
Астрономы к старым звездам вечно добавляют новых.
Если бы открыл звезду я, – я ее назвал бы Фридман, –
Лучше средства не найду я сделать все яснее видимым.
Фридман! До сих пор он житель
Лишь немногих книжных полок –
Математики любитель, молодой метеоролог
И военный авиатор на германском фронте где-то,
А поздней организатор Пермского университета
На заре советской власти... член Осоавиахима.
Тиф схватив в Крыму, к несчастью,
не вернулся он из Крыма.
Умер. И о нем забыли.

Вот что вспоминал о тех годах звезда яркой плеяды физиков – теоретиков XX века Дмитрий Дмитриевич Иваненко⁷.

«Остановимся теперь на ситуации в физике 20-х годов и в университете (ЛГУ). Физическая картина характеризовалась признанием эйнштейновской общей теории относительности (ОТО) с ее геометризованной концепцией гравитации (характеризуемой искривлением пространства-времени, описываемым геометрией Римана).

⁷Из книги Г.А. Сарданавили «Дмитрий Иваненко – суперзвезда советской физики, Ненаписанные мемуары».

Незадолго до этого (во время затмения 1919 г.) подтвердилось предсказание ОТО отклонения света в поле тяготения Солнца. Как раз в ЛГУ была хорошо известна ставшая одним из главнейших достижений всей современной науки теория ленинградского профессора А.А. Фридмана – теория не статической, а развивающейся со временем Вселенной, подтверждавшаяся наблюдениями универсального разбегания галактик, что указывало на расширение Вселенной (окончательно доказанное Хабблом в 1929 г.). Детали удачной полемики Фридмана с Эйнштейном мы узнали от Ю.А. Круткова, передавшего Эйнштейну в Лейдене письмо Фридмана. Эйнштейн сначала усматривал в работе Александра Александровича ошибку, но на самом деле он сам допустил ошибки в своем построении первой общерелятивистской космологии, еще статической, как и нерелятивистская космология Ньютона, вызвавшей большой интерес также у астрономов и философов. Прямое и косвенное влияние Фридмана на всех нас было огромным, независимо от посещения его лекций на математическом отделении ЛГУ и докладов в математическом обществе.

Что касается специальной (частной) теории относительности (СТО), то ее справедливость уже не вызвала сомнений. Напротив, в 20-х и в начале 30-х годов в основном силами также нашего поколения велась борьба с реакционерами в науке, консерваторами-физиками, пытавшимися связать свое отрицание релятивистских теорий с высказываниями основоположников марксизма (такими как профессор Московского университета А.К. Тимирязев, сын известного биолога, а также одесский профессор Н.П. Кастерин). Политизируя научные дискуссии, Э. Кольман, игравший большую роль в партийном руководстве наукой, вел борьбу с современной физикой, обвиняя в «идеализме» ее представителей (профессора Я.И. Френкеля и «школку молодых ленинградских теоретиков», как он писал в центральной печати). В сущности, речь шла о прямом политическом доносе, что и сказалось позднее в годы террора (с середины 30-х годов) и вновь возникло в первые послевоенные годы».

8.5.6 Упражнения

1. Доказать, что

$$\ddot{a}\vec{x} = \frac{1}{2a} \nabla (a\dot{a}x^2).$$

2. Используя уравнение (8.5.11), вывести первое с идеальной самогравитирующей жидкости:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{1}{a} \operatorname{div}(\mathbf{1} \otimes \epsilon) \vec{v} = 0.$$

3. Вывести второе уравнение для этой жидкости:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{a} (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} = -\frac{1}{\rho a} \nabla p - \frac{1}{a} \nabla \Phi.$$

Глава 9

Вязкая жидкость

9.1 Течение вязкой жидкости

9.1.1 Уравнение Навье-Стокса

Жидкость, которую мы рассматривали в предыдущем разделе, была идеальной. Погрузив в такую жидкость свой палец, мы бы вынули его совершенно сухим. Р. Фейнман в своих лекциях называл такую жидкость «сухой водой». Настоящая, «мокрая» жидкость помимо плотности и сжимаемости характеризуется ещё одним свойством – *вязкостью*. Явление вязкости заключается в отличии напряжённого состояния, возникающего в движущейся жидкости или газе, от закона Паскаля (7.3.2):

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}.$$

В вязкой жидкости эта формула справедлива только если каждый элемент среды её покоится относительно соседних. Это имеет место в случае абсолютного покоя, в случае установившихся поступательного или вращательного движений. В случае, когда близкие слои движутся с разными скоростями, $v_{i,j} \equiv \partial v_i / \partial x_j \neq 0$, в жидкости возникают дополнительные *вязкие* напряжения¹:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}(v_{k,l}).$$

Согласно свойствам тензора напряжений σ_{ij} , *тензор вязких напряжений* τ_{ij} должен быть симметричным. При малых градиентах скорости должно быть справедливым линейное приближение $\tau_{ij}(v_{k,l}) \sim v_{k,l}$.

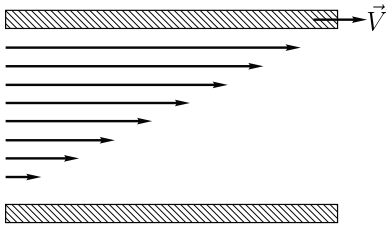
¹Заметим, что тензор напряжений равен тензору давлений с обратным знаком: $\sigma_{ij} = -p_{ij}$.

Симметричных комбинаций из $v_{k,l}$ можно составить только две: $\delta_{ij}v_{k,k}$ и $v_{i,j} + v_{j,i}$, поэтому общее выражение для этого тензора в линейном приближении имеет вид:

$$\tau_{ij} = A(v_{i,j} + v_{j,i}) + B\delta_{ij}v_{k,k}, \quad A, B = \text{const.}$$

Его принято записывать в виде

$$\tau_{ij} = \eta(v_{i,j} + v_{j,i} - (2/3)v_{k,k}\delta_{ij}) + \zeta v_{k,k}\delta_{ij},$$



где η – первый коэффициент вязкости, характеризующий напряжения, возникающие при изменении формы объёма, а ζ – второй коэффициент вязкости, характеризующий влияние сил внутреннего трения на изменение величины объёма. Коэффициент η называется ещё динамической вязкостью, а $\nu = \eta/\rho$ – кинематической вязкостью. Эти коэффициенты зависят, вообще говоря, от плотности жидкости и её температуры.

Рис. 9.1. Профиль скорости вязкой жидкости, заключённой между двумя пластинами, движущимися относительно друг друга

Для несжимаемой вязкой жидкости $v_{k,k} = \text{div} \vec{v} = 0$ и, следовательно,

$$\tau_{ij} = \eta(v_{i,j} + v_{j,i}).$$

Подставляя (4.6.1) в уравнение движения сплошной среды

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i - p_{,i} + \tau_{ij,j},$$

и преобразуя последнее слагаемое правой части

$$\tau_{ij,j} = \eta(v_{i,jj} + v_{j,ij} - (2/3)v_{k,kj}\delta_{ij}) + \zeta v_{k,kj}\delta_{ij} = \eta v_{i,jj} + (\zeta + \eta/3)v_{j,ij},$$

приходим к уравнению Навье-Стокса в форме Лагранжа:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v} + (\zeta + \eta/3) \text{grad div } \vec{v}.$$

На самом деле здесь три уравнения, по одному на каждую проекцию. Умножив каждое из них на свой орт \vec{e}_i и сложив, получим векторную форму этого уравнения

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v} + (\zeta + \eta/3) \text{grad div } \vec{v}.$$

В эйлеровой формулировке векторное уравнение Навье-Стокса имеет вид:

$$\rho(\partial\vec{v}/\partial t + (\vec{v}\nabla)\vec{v}) = \rho\vec{g} - \text{grad } p + \eta\Delta\vec{v} + (\zeta + \eta/3)\text{grad div } \vec{v}.$$

Используя векторное тождество

$$\text{rot rot } \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \Delta\vec{v},$$

уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости можно записать и в другой форме:

$$\rho(\partial\vec{v}/\partial t + (\vec{v}\nabla)\vec{v}) = \rho\vec{g} - \text{grad } p - \eta \text{rot rot } \vec{v}.$$

9.1.2 Граничные условия

Включение вязкости требует уточнения граничных условий: теперь не только нормальная компонента скорости на неподвижной непроницаемой стенке, но и тангенциальная (касательная) её составляющая должна обращаться в нуль (*условие прилипания*)

$$\vec{v}(\vec{r}, t)|_{\text{отн}} = 0, \quad \vec{r} \in \Sigma.$$

В случае идеальной жидкости касательная компонента скорости на стенке могла иметь любое значение и не зависела от касательной составляющей скорости самой стенки.

На границе раздела двух несмешивающихся жидкостей их скорости должны совпадать (в смысле пределов),

$$\vec{v}^{(1)}(\vec{r}, t) = \vec{v}^{(2)}(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in \Sigma,$$

а силы, с которыми эти жидкости действуют друг на друга, должны быть равными по величине и противоположными по направлению:

$$\sigma_{ij}^{(1)} n_j^{(1)} = -\sigma_{ij}^{(2)} n_j^{(2)}$$

(верхние индексы относятся к различным жидкостям). Векторы нормали здесь противоположны по направлениям, так что если ввести единую нормаль $n_i \equiv n_i^{(1)} = -n_i^{(2)}$, то

$$\sigma_{ij}^{(1)} n_j = \sigma_{ij}^{(2)} n_j^{\text{АНЬ}} \textcircled{R}$$

или, в развернутом виде,

$$\tau_{ij}^{(1)} n_j - p^{(1)} n_i = \tau_{ij}^{(2)} n_j - p^{(2)} n_i.$$

Свободная поверхность жидкости определяется условием

$$\tau_{ij} n_j - p n_i = 0.$$

9.1.3 Действие вязкой жидкости на стенку

Рассмотрим подробнее силу, действующую со стороны вязкой жидкости на стенку. Сила $\delta \vec{F}$, действующая на элемент поверхности стенки $\delta \vec{S} = \vec{n} \delta S$ (\vec{n} – внешняя по отношению к жидкости нормаль, направленная внутрь стенки), равна потоку импульса через этот элемент:

$$\delta F_i = (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) \delta S_j = (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) n_j \delta S.$$

Вектор напряжений на стенке

$$t_i = (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) n_j = (p \delta_{ij} - \tau_{ij}) n_j = p n_i - \tau_{ij} n_j,$$

так как все v_i здесь равны нулю.

Направим ось 1 вдоль поверхности стенки в направлении течения жидкости, а ось 2 по нормали к ней. Тогда

$$\delta F_1 = (p n_1 - \tau_{11} n_1 - \tau_{12} n_2) \delta S = -\tau_{12} \delta S = -\eta (v_{1,2} + v_{2,1}) \delta S, \quad (9.1.1)$$

поскольку проекция нормали к стенке на направление течения жидкости n_1 равна нулю. Обе проекции скорости на самой стенке равны нулю. Равна нулю и производная от них вдоль направления течения, а вот производная от v_1 по направлению нормали нулю не равна, она отрицательна: $v_{1,2} < 0$. Таким образом,

$$\delta F_1 = -\eta (\partial v_1 / \partial x_2) \delta S = \eta |\partial v_{||} / \partial n| \delta S.$$

Нормальная же составляющая силы обусловлена только давлением:

$$\delta F_2 = p \delta S.$$

Наличие касательной силы вязкости, действующей на обтекаемое тело и нарушающей симметрию потока до и после него, разрешает упоминавшийся выше парадокс Даламбера (важную роль при этом играет образование на обтекаемой поверхности и отрыв вихрей жидкости).

9.1.4 Несжимаемые среды

Динамика текучих сред (более распространённое название – *гидроаэродинамика*) в рамках единого математического формализма описывает движение таких различных по своему поведению сред, как газы и жидкости. Если газы легко поддаются изменению объёма при изменении давления, то жидкости в широком диапазоне давлений практически сохраняют свой объём. В большинстве случаев можно считать, что они просто *несжимаемы*.

Математически свойство несжимаемости можно сформулировать двояко: как неизменность объёма δV любой мысленно выделенной массы δm среды в процессе её движения (*слабая форма*)

$$\frac{d(\delta V)}{dt} = 0,$$

и как равенство объёмов любых областей, содержащих равные массы (*сильная форма*):

$$\delta V = \delta V', \text{ если } \delta m = \delta m'.$$

Речь идёт, подчеркнём, о *величине* объёма, форма же его может меняться как угодно.

Согласно лагранжеву уравнению (7.3.2), слабое условие несжимаемости влечёт за собой уравнение

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

означающее, что плотность среды в окрестности движущейся точки среды остаётся постоянной. Это не означает независимости плотности от координат, то есть, однородности среды. Если в начальный момент в точках $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3$ несжимаемой жидкости плотность принимала значения ρ_1, ρ_2, ρ_3 , то в момент времени t эти значения плотности будут наблюдаться в точках $\vec{r}_1 = \vec{r}(t|\vec{\xi}_1), \vec{r}_2 = \vec{r}(t|\vec{\xi}_2)$ и $\vec{r}_3 = \vec{r}(t|\vec{\xi}_3)$ соответственно. Сильное же условие несжимаемости ведёт к однородности среды – плотность её должна быть одной и той же во всех точках среды.

Из уравнения (7.3.2) следует простой признак несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

позволяющий устанавливать это свойство по известному полю скоростей. Физическую интерпретацию этому уравнению легко дать, проинтегрировав его по произвольной области неподвижной системы координат V , переведя этот интеграл в интеграл по окружающей её поверхности S и разбив его на два слагаемых, соответствующих разным знакам скалярного произведения $\vec{v}d\vec{S}$:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{v} dV = \oint_S \vec{v}d\vec{S} = \int_{S_+} \vec{v}d\vec{S} + \int_{S_-} \vec{v}d\vec{S} = 0.$$


Следующее отсюда равенство

$$\int_{S_+} \vec{v}d\vec{S} = - \int_{S_-} \vec{v}d\vec{S} = \int_{S_-} |\vec{v}d\vec{S}|$$

гласит, что вытекающий из области V через поверхность S_+ в единицу времени объём несжимаемой жидкости равен втекающему через поверхность S_- за то же время объёму. Применяя эту формулу к течению жидкости в трубе переменного сечения, получим, что усреднённые по поперечному сечению скорости

$$\langle v \rangle \equiv \frac{1}{S} \int_S v dS$$

в двух разных сечениях трубы 1 и 2 обратно пропорциональны площадям этих сечений:



$$\frac{\langle v_1 \rangle}{\langle v_2 \rangle} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Не следует смешивать слабое условие несжимаемости $dp/dt = 0$, ведущее к уравнению $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, с условием стационарности $\partial\rho/\partial t = 0$, влекущим за собой равенство $\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$.

Общая задача гидродинамики несжимаемой жидкости формулируется уравнением Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{v} \quad (9.1.2)$$

вкуче с уравнением несжимаемости $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ и определяемыми конкретной задачей начальными и граничными условиями.

9.1.5 Гидродинамическое подобие. Число Рейнольдса

Перейдём в уравнении Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f'_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} \quad (9.1.3)$$

к *безразмерным* временам, координатам, скоростям, давлениям и силам \bar{t} , \bar{x}_i , \bar{v}_i , \bar{p} , \bar{f}'_i , введя новые единицы измерения T, X, V, P, F :

$$t = T\bar{t}, \quad x_i = X\bar{x}_i, \quad v_i = V\bar{v}_i, \quad p = P\bar{p}, \quad f'_i = F\bar{f}'_i. \quad (9.1.4)$$

Подставив (9.1.4) в (9.1.3), получим уравнение

$$\operatorname{Sh} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} = \frac{1}{\operatorname{Fr}} \bar{f}'_i - \operatorname{Eu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_i^2},$$

содержащее в качестве коэффициентов безразмерные комплексы, называемые *числами подобия*:

$$\text{Sh} = \frac{X}{\sqrt{T}} \quad - \text{число Струхала,}$$

$$\text{Eu} = \frac{P}{\rho V^2} \quad - \text{число Эйлера,}$$

$$\text{Re} = \frac{XV}{\nu} \quad - \text{число Рейнольдса}$$

и

$$\text{Fr} = \frac{V^2}{FX} \quad - \text{число Фруда.}$$

Семь параметров, характеризующих задачу, сгруппированы в четыре *числа подобия*. Если эти числа у двух задач совпадают, а сами физические характеристики (размеры, скорости, вязкости) различаются, то такие задачи называют *подобными*. Решения подобных задач имеют одну и ту же форму, отличаясь только масштабами (то есть, по существу, единицами измерения) физических переменных.

Предположим, мы (теоретически или экспериментально) решили задачу о стационарном обтекании шара диаметром d_1 однородным потоком с вязкостью ν_1 и набором начальных скоростей $\{v_1\}$, а интересуемся обтеканием шара другого диаметра d_2 потоком другой жидкости с вязкостью ν_2 и начальной скоростью v_2 (внешние силы отсутствуют). Теория подобия позволяет нам избежать повторения расчётов или экспериментов, найдя соответствующее второй задаче число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{d_2 v_2}{\nu_2}$$

и определив из уравнения

$$\text{Re} = \frac{d_1 v_1}{\nu_1}$$

то значение v_1 , картина обтекания для которого простым изменением масштаба преобразуется в искомое решение.

Предположим теперь, что в однородный стационарный поток вязкой несжимаемой жидкости с кинематической вязкостью ν , плотностью ρ и скоростью на бесконечности V_∞ помещён цилиндр диаметра d . Задача состоит в определении сопротивления цилиндру набегающему на него потоку в отсутствие объёмных сил. Тогда из необходимых условий подобия остаются лишь два: $\text{Eu} = \text{idem}$ и $\text{Re} = \text{idem}$. Число Рейнольдса в данном случае равно $V_\infty d / \nu$ является критерием подобия, так как содержит наперёд заданные масштабы скоростей, длин

и физическую постоянную ν . Сила сопротивления может быть найдена лишь после решения задачи об обтекании интегрированием по поверхности цилиндра сил давления и сил трения.

Методы подобия находят широкое применение и в экспериментальном моделировании гидро- и аэродинамических процессов (модель самолёта в аэродинамической среде или модель корабля в бассейне – примеры такого моделирования)².

Чтобы лучше уяснить физический смысл числа Рейнольдса, рассмотрим кубический элемент пограничного слоя $L \times L \times L$. Пусть он вначале покоится, затем к нему прилагается некоторая сила и он ускоряется до скорости V на пути L . При этом совершается работа

$$A = \frac{mV^2}{2} = \frac{1}{2}\rho L^3 V^2.$$

Вместе с тем совершает работу и сила трения (вязкость). Эту силу можно оценить формулой

$$\delta F = \eta |\partial V / \partial n| \delta S \sim \eta \frac{V}{L} L^2,$$

так что работа сил трения

$$A' \sim \eta \frac{V}{2} L^2,$$

где коэффициент $1/2$ появился в результате усреднения силы трения, возрастающей от нуля до указанного выше значения. Отношение этих работ

$$\frac{A}{A'} = \frac{\rho L^3 V^2}{\eta L^2 V} = \frac{LV}{\nu} = \text{Re}$$

как раз и есть число Рейнольдса.

Число Рейнольдса характеризует соотношение нелинейного инерционного $((\vec{v}\nabla)\vec{v})$ и линейного вязкого $(\eta\Delta\vec{v})$ членов в уравнении Навье-Стокса:

$$\rho(\partial\vec{v}/\partial t + (\vec{v}\nabla)\vec{v}) = \vec{f} - \text{grad } p + \eta\Delta\vec{v}.$$

При фиксированных X и V большие значения Re соответствуют малым ν – преобладает инерционный член,

$$\rho(\partial\vec{v}/\partial t + (\vec{v}\nabla)\vec{v}) = \vec{f} - \text{grad } p,$$

наблюдается турбулентное движение. Изучая поток жидкости в трубке, Рейнольдс установил, что турбулентное движение гасится вязкостью, когда Re падает ниже критического значения 2000. Вязкий член начинает доминировать, течение становится плавным (ламинарным)

$$\rho\partial\vec{v}/\partial t = \vec{f} - \text{grad } p + \eta\Delta\vec{v}.$$

На первый взгляд кажется, что влиянием вязкости при высоких числах Рейнольдса вообще можно пренебречь, положив η равной нулю и превратив тем самым уравнение Навье-Стокса в уравнение идеальной жидкости Эйлера. Однако граничное условие прилипания не зависит от вязкости вообще: *относительная скорость жидкости на твёрдой границе равна нулю при любой вязкости*. Это означает, что лишь на некотором, может быть, небольшом, удалении от стенки течение реальной жидкости будет близким к течению идеальной, в окрестности же самой стенки

²Если нельзя пренебречь сжимаемостью жидкости, в уравнении Навье-Стокса появляется дополнительный член, а в теории подобия ещё одно важное число подобия – число Маха $M = V/c$.

образуется тонкий *пограничный слой*, в котором скорость быстро убывает и на самой стенке обращается в нуль. В пределах этого слоя силы трения и инерции соизмеримы.

Прекрасной иллюстрацией к сказанному служит тонкая пыль, покрывающая лопасти только что остановившегося вентилятора: она не слетела с быстро вращающихся поверхностей, а спокойно *лежала* на них под тончайшим слоем воздуха, «прилипшимся» благодаря своей вязкости к лопастям.

9.1.6 Упражнения

1. Записать условие несжимаемости в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат.
2. Записать уравнение Навье-Стокса для стационарного потока вдоль оси OX с зависящей только от y скоростью.
3. Записать уравнение Навье-Стокса для стационарного цилиндрического потока вокруг оси OZ со скоростью, всюду перпендикулярной этой оси.
4. Записать уравнение Навье-Стокса для нестационарного исходящего из начала координат изотропного потока.

9.2 Установившиеся течения

9.2.1 Плоское течение Куэтта

Начнём с простейшей задачи о стационарном (установившемся) плоско-параллельном течении несжимаемой жидкости в направлении оси OX в полупространстве $z > 0$ над твёрдой стенкой $z = 0$ в отсутствие объёмных сил и перепада давления. Из постановки задачи следует, что производная по времени равна нулю, $v_y = v_z = 0$, а x -компонента скорости зависит, в силу очевидной симметрии, лишь от одной пространственной переменной: $v_x = v(z)$.

Представив стационарное уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\text{grad } p + \eta\Delta\vec{v}$$

в декартовых проекциях и подставив

$$v_x = v(z), \quad v_y = v_z = 0, \quad f_x = f_y = f_z = 0, \quad \partial p / \partial x = 0,$$

получим:

$$0 = \eta d^2 v / dz^2,$$

$$0 = -\partial p / \partial y,$$

$$0 = -\partial p / \partial z.$$

Из двух последних уравнений и последнего условия задачи следует, что

$$p(x, y, z) = p = \text{const},$$

а первое уравнение имеет решение

$$v = C_1 + C_2 z.$$

Из граничного условия $v(0) = 0$ следует $C_1 = 0$. Постоянная C_2 представляет собой *напряжение трения на стенке*

$$C_2 = \eta \left(\frac{dv}{dz} \right)_{z=0} \equiv \tau_0.$$

Таким образом, профиль скоростей ламинарного потока полубесконечной вязкой жидкости

$$v(z) = \tau_0 z$$

является *линейным*, а напряжение трения между двумя любыми слоями $\eta \Delta v / \Delta z$ постоянным и равным напряжению трения на стенке τ_0 , которое также должно быть задано. Задание это осуществляется естественным образом в случае, когда движение жидкости инициируется другой бесконечной пластиной $z = h$, параллельной первой и движущейся с заданной скоростью u вдоль оси OX :

$$\tau_0 = u/h.$$

Рассмотренный тип движения вязкой жидкости называется *плоским течением Куэтта*. Отметим, что найденный профиль скоростей является *вихревым*:

$$\text{rot} \vec{v} = \tau_0 \vec{e}_y.$$

На практике требование бесконечных размеров может оказаться ограничительным, тогда этот результат используется для определения профиля скорости *вблизи плоской стенки*, когда ограниченностью её размеров и размеров слоя жидкости в перпендикулярном к ней направлении действительно можно пренебречь.

9.2.2 Течение Пуазейля

Рассмотрим теперь ту же задачу, только при обеих неподвижных пластинах, течение между которыми создается перепадом давления (*плоское течение Пуазейля*). Скорость \vec{v} и в этом случае будет направлена вдоль оси OX и будет зависеть только от z . Уравнения движения и граничные условия примут вид:

$$0 = -\partial p / \partial x + \eta \partial^2 v / \partial x^2, \quad 0 = \partial p / \partial z,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ v(0) &= v(h) = 0.\end{aligned}$$

Из z -проекции уравнения Навье-Стокса видно, что давление постоянно по всему поперечному сечению потока. В результате переменные в x -проекции уравнения Навье-Стокса разделяются, для давления мы получаем линейную зависимость, а для профиля скорости – квадратичную

$$v(z) = -p' \frac{(h/2)^2 - (z - h/2)^2}{2\eta}, \quad 0 \leq z \leq h.$$

Здесь $p' = dp/dx$ – перепад давления на единичном отрезке вдоль течения. Сила трения на единицу площади поверхности каждой из пластин

$$t_{\parallel} = -p'h/2.$$

Теперь рассмотрим течение Пуазейля в трубе – стационарное течение вязкой жидкости в прямой бесконечной трубе круглого сечения радиусом R . В цилиндрической системе координат с осью OZ совпадающей с осью трубы, скорость имеет лишь z -компоненту, зависящую от одной – радиальной – переменной, $v_z = v(r)$. Уравнение Навье-Стокса для неё запишется в виде:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

Разделяя переменные, получим два уравнения,

$$\frac{dp}{dz} = C_1,$$

$$\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = C_1.$$

Из первого уравнения следует, что C_1 есть перепад давления p' , а решение второго имеет вид:

$$v(r) = p' \frac{r^2}{4\eta} + a \ln r + b.$$

Постоянная a должна быть взята равной нулю, чтобы скорость была конечной во всех точках потока, а b определяется из условия прилипания: $v(R) = 0$. В результате имеем:

$$v(r) = -p' \frac{R^2 - r^2}{4\eta}.$$

Таким образом, как и в случае плоского течения здесь имеет место параболический профиль скорости. Заметим, что расход жидкости – её объём, протекающий в единицу времени через поперечное сечение трубы, пропорционален четвертой степени радиуса:

$$Q = 2\pi \int_0^R |v(r)| r dr = \frac{\pi |p'|}{8\eta} R^4.$$

Этот закон играет важную роль в механизме регулирования кровообращения человека.

Сила трения о стенку (на единицу площади) t_{\parallel} равна $-Rp'/2$. Она может быть получена дифференцированием профиля скорости, как это делалось выше, или приравниванием полной силы сопротивления $2\pi RLt_{\parallel}$ на участке трубы длиной L к уравновешивающей её в стационарном течении силе $\pi R^2 L p'$, создаваемой перепадом давления.

9.2.3 Круговое течение Куэтта

Так называется стационарное движение жидкости между двумя коаксиальными бесконечными цилиндрами радиусами R_1 и $R_2 > R_1$, вращающимися вокруг общей оси с постоянными угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 , перепад давления вдоль оси равен нулю. Отличной от нуля здесь будет азимутальная составляющая скорости $v_{\varphi} \equiv v$, зависящая только от радиальной координаты $r \in (R_1, R_2)$. Уравнения движения в цилиндрических координатах имеют вид:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{v^2}{r}, \quad \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0.$$

Второе из этих уравнений имеет общее решение в виде

$$v(r) = ar + \frac{b}{r}.$$

Из условий прилипания $v(R_1) = R_1 \Omega_1$, $v(R_2) = R_2 \Omega_2$. В результате получим:

$$v(r) = \frac{R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{R_1^2 R_2^2 (\Omega_1 - \Omega_2)}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}.$$

Давление получается подстановкой этого решения в первое уравнение и последующим интегрированием. Заметим, что в отличие от предыдущих случаев, результат этой задачи не зависит от вязкости η , хотя её наличие играет принципиальную роль: без вязкости вращающиеся цилиндры не увлекали бы за собой жидкость.

9.2.4 Обтекание шара вязкой жидкостью

Приведём набросок решения задачи о медленном стационарном обтекании шара радиуса R потоком несжимаемой жидкости (задача Стокса). Оговорка о медленности течения даёт основание для упрощения (линеаризации) уравнения Навье-Стокса путём отбрасывания инерционных членов. В результате течение определяется системой линейных уравнений

$$\eta \operatorname{rot} \vec{\Omega} + \operatorname{grad} p = 0, \quad (9.2.1)$$

$$\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v}, \quad (9.2.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (9.2.3)$$

с граничным условием $\vec{v}(\vec{r}) = 0$, $|\vec{r}| = R$ и условием на бесконечности $\vec{v}(\infty) = \vec{u}$. Возьмём сферическую систему координат с началом в центре шара и осью OZ , направленной вдоль скорости \vec{u} набегающего на шар однородного потока. Применив оператор rot к уравнению (9.2.1), получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Omega} = 0.$$

Используя цилиндрическую симметрию процесса, можно показать (см. замечательный учебник Л.Г.Лойцянского³), что единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию обращения в нуль на бесконечности, представляется формулой

$$\vec{\Omega} = \frac{A \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\varphi. \quad (9.2.4)$$

Приведя систему (9.2.2), (9.2.4) к виду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{A \sin \theta}{r^2}$$

и добавив уравнение (9.2.3) в сферических координатах,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta \sin \theta}{\partial \theta} = 0,$$

получим новую систему уравнений. Её решение при граничных условиях $v_r = v_\theta = 0$ на поверхности шара, и $v_r = u \cos \theta$, $v_\theta = -u \sin \theta$ на бесконечности имеет вид

$$v_r = \left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right] u \cos \vartheta,$$

³Л.Г.Лойцянский. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003.

$$v_{\vartheta} = - \left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right] u \sin \vartheta, \quad v_{\varphi} = 0.$$

Чтобы найти давление, надо подставить полученные компоненты в уравнение (9.2.1). Выполнив необходимые преобразования, найдём проекции градиента давления

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 3R\eta \frac{u \cos \vartheta}{r^3}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \frac{3R\eta u \sin \vartheta}{2 r^3},$$

а затем – и само давление:

$$p = p_{\infty} - \frac{3R\eta u \cos \vartheta}{2 r^2}.$$

Очевидно, что суммарная сила, действующая на шар, будет иметь только z -компоненту, величина которой даётся интегралом по поверхности шара:

$$F = \oint_S [(-p + \tau_{rr}) \cos \vartheta - \tau_{r\vartheta} \sin \vartheta] dS.$$

Учитывая, что компоненты

$$\tau_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \tau_{r\vartheta} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial r} - \frac{v_{\vartheta}}{r} \right)$$

на поверхности шара равны соответственно 0 и $-(3\eta/2R)u \sin \vartheta$, окончательно получаем *формулу Стокса*:

$$F = 6\pi R\eta u. \quad (9.2.5)$$

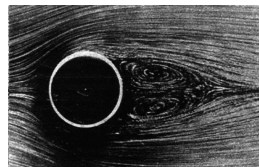
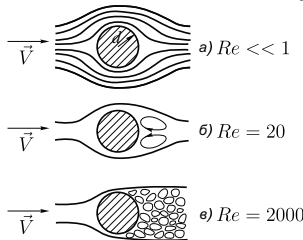


Рис. 9.2. Обтекание цилиндра вязкой жидкостью при разных числах Рейнольдса (а – качественное изображение, б – фотографическое изображение)

Заметим, что вид этой зависимости с точностью до постоянного безразмерного множителя легко устанавливается из соображений размерности: в исходные уравнения плотность жидкости не входит, входят только величины η , u и R , через которые и должна быть выражена сила. Но из этих величин можно составить только одну комбинацию с размерностью силы – $R\eta u$, остаётся только определить постоянную 6π .

Ещё одно замечание следует сделать по поводу приближения: отбросив инерционные члены, мы ушли в область малых чисел Рейнольдса, где течение остаётся, подобно течению идеальной жидкости, плавным (ламинарным). С увеличением скорости обтекания роль этих членов возрастает, и в течении появляется вихревая (турбулентная) область. *Распределение давления вязкой жидкости по поверхности шара является функцией числа Рейнольдса задачи, т.е. зависит от размера тела, от скорости, плотности и вязкости жидкости, а не только от угла θ , как это имеет место при обтекании идеальной жидкостью.*

9.2.5 Немного истории

Вся вторая часть «Математических начал» Ньютона была посвящена движению тел с учётом сопротивления среды. Ему принадлежит первая формулировка основного постулата гидродинамики вязкой среды: «Сопротивление, происходящее от недостатка скользкости жидкости, при прочих одинаковых условиях предполагается пропорциональным скорости, с которою частицы жидкости разъединяются друг от друга». Однако, лишь спустя почти полтора века вязкость была включена в гидродинамические уравнения (1827, Навье). Многие исследователи при этом давно понимали эффект влияния стенок на течение жидкости вдоль них, и считали возникающее при этом трение основной причиной расхождения теоретических (в модели идеальной жидкости) результатов с экспериментальными. Так, Д. Бернулли в своей «Гидродинамике» писал: «Эти огромные расхождения я приписываю действию главным образом прилипания воды к стенкам трубки, которое в таких случаях может играть весьма большую роль...» В 1804 г. известный французский гидравлик Прони сетовал: «Заслуживает сожаления и даже удивления то обстоятельство, что прославленный Эйлер, который на страницах своих обширных трудов отводит столько внимания разрешению физико-математических проблем и их применению к практическим вопросам, не попытался пересмотреть теорию жидкости, принимая во внимание сцепление молекул и некоторого рода трение... я не знаю, однако, ни одной статьи, где бы эти факторы упоминались». Первой такой работой оказался мемуар Навье, опубликованный в 1927 г. В этом мемуаре были получены не только полные дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости, содержащие постоянный коэффициент вязкости, но и граничные условия на стенке в своей общей форме и решения отдельных задач о неустановившемся прямолинейном движении вязкой жидкости.

9.2.6 Упражнения

1. Слой вязкой несжимаемой жидкости течёт по неподвижной плоскости, наклонённой под углом α к горизонту, в однородном поле тяжести. Найти про-

филь скоростей и давлений в поперечном сечении потока.

2. Вязкая несжимаемая жидкость находится между двумя коаксиальными цилиндрами, вращающимися с разными постоянными угловыми скоростями. Определить поле скоростей.
3. Вывести уравнение (9.2.1).

9.3 Неустановившиеся течения

9.3.1 Одномерное течение



Стандартный диффузионный процесс, хотя и описывает распространение одной среды в другой и по этой причине может рассматриваться как специальный тип её движения, но он не относится к *течениям*, непременным атрибутом которых является поле скоростей. Здесь мы обратимся к рассмотрению течений, в которых поле скоростей нестационарно, то есть зависит от времени. Течения такого типа называют ещё *неустановившимися*. Если в пределе больших времён система оказывается в стационарном состоянии, мы говорим о переходном процессе, или релаксации. Наиболее простая (в смысле решения) группа нестационарных задач в гидродинамике вязкой жидкости относится к одномерному (прямолинейно-параллельному) движению, когда траектории всех жидких частиц, составляющих поток, прямолинейны и параллельны друг другу.

Положим, что несжимаемая однородная ($\rho = \text{const}$) жидкость в отсутствие объёмной силы течёт параллельно оси OZ , так что $v_z = u(\vec{r}, t)$, а $v_x = v_y = 0$. Условие несжимаемости при этом имеет вид

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (9.3.1)$$

для всех x , скорость u не зависит от z и уравнение Навье-Стокса в проекциях принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

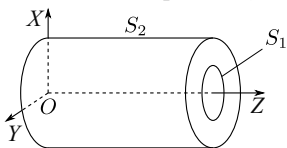
Из двух последних уравнений системы (9.3.2) видно, что давление (которое, в общей постановке, тоже является искомой функцией координат и времени), не зависит от переменных x и y . Такое возможно лишь в случае, если перепад давления по оси z будет функцией лишь одного времени,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(z, t)}{\partial z} = A(t).$$

В результате задача расчёта неустановившегося прямолинейно-параллельного движения несжимаемой вязкой жидкости сводится к решению уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A(t).$$

Уравнение это имеет вид уравнения двумерной диффузии, а не зависящая от координат функция $A(t)$ задаёт плотность источника диффундирующей субстанции, который равномерно распределён в области диффузии, так что без задания ненулевых начальных условий и границ ничего содержательного отсюда мы не получим. Начальное условие должно задать поле скоростей в плоскости XOY для какого-то момента времени, положим, для $t = 0$:



$$u(x, y, 0) = u_0(x, y).$$

Рис. 9.3. Течение между двумя цилиндрическими поверхностями

Область течения может быть как односвязной, так и многосвязной областью плоскости YOZ , но она должна быть *цилиндрической* (прямолинейные траектории жидких частиц не должны упираться в стенку). Предположим, что это – две цилиндрические поверхности с внутренней поверхностью S_1 и внешней S_2 , и рассматривается течение жидкости между ними (рис. 9.3). На обеих границах должны быть заданы граничные условия. Пусть внутренний цилиндр движется параллельно своей образующей со скоростью $U_1(t)$, а внешняя граница неподвижна, тогда граничные условия (условия прилипания) запишутся в виде

$$u(x, y, t) = \begin{cases} U_1(t), & (x, y) \in S_1; \\ 0, & (x, y) \in S_0. \end{cases}$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в безграничной однородной несжимаемой вязкой жидкости задано не зависящее от z поле

скоростей $u(x, y, t)$, параллельных оси OZ , а перепад давления и сила тяжести отсутствуют. В такой постановке задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty, \quad t \geq 0,$$

с начальным условием $u(x, y, z, 0) = u_0(x, y)$ и условием на бесконечности $u(\pm\infty, \pm\infty, z, t) = 0$. Уравнение это совпадает с уравнением диффузии в плоскости XOY с коэффициентом диффузии ν и потому при указанных условиях имеет решение

$$u(z, t) = \frac{1}{4\pi\nu t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4\nu t}\right\} u_0(x', y') dx' dy'. \quad (9.3.3)$$

Пусть в начальный момент времени эту жидкость пронизывает тонкая с очень высокой скоростью струя (или натянута вдоль оси OZ струна, которой мгновенно придали большую скорость вдоль оси, скажем, сильно дёрнули за конец), так что создаваемое ей возмущение можно представить в виде $C\delta(\vec{\varrho})$, где $\vec{\varrho} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ – двумерный вектор, перпендикулярный оси OZ . Поле скоростей (9.3.3) при этом примет двумерный гауссов профиль

$$u(\vec{\varrho}, t) = \frac{C}{4\pi\nu t} \exp(-\varrho^2/4\nu t).$$

С течением времени скорость жидкости на оси OZ падает как $1/t$, этот процесс сопровождается увеличением скорости в окружающей (цилиндрической) области, которая со временем расширяется, а абсолютная величина скорости понижается – в общем, всё происходит так, как в обычном двумерном диффузионном процессе. Расширение области определяется в основном экспоненциальным множителем, а линейный размер этой области растёт пропорционально квадратному корню из времени. В пределе $t = \infty$ возбуждение окончательно рассасывается, жидкость возвращается в состояние покоя: мы имеем дело с процессом релаксации, причём, что важно отметить, релаксации не экспоненциального, а степенного типа.

9.3.2 Течение вдоль стенок

Рассмотрим плоское течение $u(x, t)$, параллельное оси OZ в пространстве $x > 0$, ограниченного стенкой, на которой задано условие

прилипания $u(0, t) = 0$ (рис. 9.1). Выше этой плоскости поле скоростей удовлетворяет укороченному уравнению Навье-Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(как и прежде, жидкость считается несжимаемой, перепад давлений и объёмные силы отсутствуют). Решение этой задачи при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

можно получить путём построения суперпозиции решений для однородной среды

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\nu t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\nu t}\right] \right\} u_0(x') dx'. \quad (9.3.4)$$

Вычислим теперь силу трения, действующую на единицу площади стенки со стороны движущейся жидкости в момент времени:

$$\tau = \nu\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0}. \quad (9.3.5)$$

Положим для простоты, что u в момент $t = 0$ не зависит и от x , то есть скорость жидкости во всех её точках одинакова, $u_0(x) = u_0$, и в этот момент её свободную поверхность накрывает массивная (не увлекаемая течением) пластина (стенка). Подставляя решение (9.3.4), принявшее теперь вид

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\nu t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\nu t}\right] \right\} dx',$$

в формулу (9.3.5), выполняя дифференцирование по x и полагая затем $x = 0$, получаем:

$$\tau(t) = \frac{\nu\rho u_0}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_0^\infty e^{-x'^2/4\nu t} \frac{x' dx'}{\nu t} = \frac{\nu\rho u_0}{\sqrt{\pi\nu t}}.$$

Обратим внимание на то, что скачок скорости жидкости u_0 (если считать, что $u(x, y, z, t) = 0$ при $t < 0$) создаёт напряжение на стенке

не только в этот момент, но и после него. Эффект этот называют *последствием, наследственностью, эредитарностью*⁴, он обусловлен инерцией приведённой в движение жидкости: пока она не затормозится окончательно (при $t = \infty$), стенка будет испытывать силу трения.

Удобнее, конечно, считать, что не жидкость (вся!) получила в начальный момент скорость u_0 относительно неподвижной стенки, а стенка (находящаяся в контакте с жидкостью пластина) мгновенно пришла в движение параллельно самой себе. Скорость этой пластины V относительно жидкости будет иметь противоположное направление, поэтому действующая на неё сила трения запишется со знаком минус:

$$-\tau(t) = \frac{\nu\rho\Delta V(0)}{\sqrt{\pi\nu t}}.$$


Если скорость пластины задана как функция времени на всей временной оси, то, приближая её многоступенчатой функцией и измельчая разбиение, мы приходим к зависимости вязкой силы от времени в виде

$$-\tau(t) = \frac{\nu\rho}{\sqrt{\pi\nu}} \int_{-\infty}^t \frac{dV(t')}{\sqrt{t-t'}} = \frac{\nu\rho}{\sqrt{\pi\nu}} \int_{-\infty}^t \frac{dV(t')/dt'}{\sqrt{t-t'}} dt',$$

представляющем собой версию формулы Дюгамеля. Обычно полагают, что «входящий сигнал» начинается ступенькой конечной величины $V(0)$ в начальный момент времени $t = 0$, до наступления которого сигнал равен нулю, а после него описывается дифференцируемой функцией $V(t)$, $t > 0$. В этом случае имеем

$$-\tau(t) = V(0)g(t) + \int_0^t g(t-t')\dot{V}(t')dt',$$

где



$$g(t) = \frac{\nu\rho}{\sqrt{\pi\nu t}}$$

– выходной сигнал от импульсного входного дельта-сигнала.

Пусть теперь вязкая несжимаемая жидкость течёт между двумя бесконечными неподвижными стенками с внутренними поверхностями $x = 0$ и $x = a$. Таким образом, мы должны решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

⁴От heredity (лат.) – наследственность.

с начальными и граничными условиями для поля скоростей $u(x, t)$:

$$u(x, 0) = U(x), \quad 0 < x < a; \quad u(0, t) = u(a, t) = 0, \quad t > 0.$$

Частное решение такого уравнения, получаемое методом разделения переменных, имеет вид

$$u(x, t) = e^{-\nu k^2 t} \sin kx,$$

где $\sin kx$, удовлетворяющее уже граничному условию при $x = 0$, должно удовлетворить ему и при $x = a$. Для этого должно выполняться соотношение

$$ka = n\pi,$$

где n – произвольное натуральное число. Беря теперь линейную суперпозицию частных решений

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(\pi n/a)^2 \nu t} \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right)$$

и определяя из начального условия коэффициенты

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a u_0(x) \sin(n\pi x/a) dx,$$

получаем искомое решение. В частности, при начальном условии $u_0(x) = 1$ имеем:

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \exp \left\{ -[(2m+1)\pi/a]^2 \nu t \right\} \frac{\sin [(2m+1)\pi x/a]}{2m+1}.$$

9.3.3 Движение шара в безграничной вязкой среде

Следует отметить, что эта запаздывающая сила сопротивления, называемая *силой Бассэ*, сопровождает движение всех тел в вязких жидкостях⁵. Так, одномерное движение шара массой m_0 радиусом R под

⁵Что не означает, конечно, что она всегда вносит существенный или даже просто заметный вклад. Более того, приведённая для неё формула справедлива лишь в случае безграничной среды. Наличие, скажем, другой стенки (дна), параллельной движению, изменяет вид запаздывающей силы – её асимптотика становится не степенной, а экспоненциальной.

действием внешней силы $F(t)$ описывается уравнением Ньютона с добавленной силой Стокса и силой Бассэ,

$$m \frac{dV}{dt} = F(t) - 6\pi\rho\nu RV - 6\pi\rho R^2 \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{V}(t')dt'}{\sqrt{t-t'}},$$

где m – масса шара в сумме с присоединённой массой.

Рассмотрим решение задачи о движении шара в жидкости при условии, что движение началось в момент времени $t = 0$ и приложенная сила возрастала от нуля без скачка, так что уравнение движения можно переписать в виде

$$\dot{V} = f(t) - bV - \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\dot{V}(t')dt'}{\sqrt{t-t'}}, \quad (9.3.6)$$

где $f(t) = F(t)/m$, а $b = 6\pi\rho\nu R/m$ и $c = 6\pi\rho\sqrt{\nu}R^2/m$ – положительные постоянные. Выполним преобразование Лапласа этого уравнения:

$$V(t) \mapsto \hat{V}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} V(t) dt.$$

Преобразование первого члена выполняется простым интегрированием по частям:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \dot{V}(t) dt = \lambda \hat{V}(\lambda). \quad (9.3.7)$$

Преобразование всех остальных, кроме последнего, вообще не требует вычислений. Последний член уравнения преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{\dot{V}(t')dt'}{\sqrt{t-t'}} &= \int_0^{\infty} dt' \dot{V}(t') \int_{t'}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} dt}{\sqrt{t-t'}} = \\ &= \lambda^{-1/2} \int_0^{\infty} dt' \dot{V}(t') e^{-\lambda t'} \int_0^{\infty} e^{-z} z^{-1/2} dz. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл равен $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, а оставшийся вычислен в (9.3.7), так что имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\dot{V}(t')dt'}{\sqrt{t-t'}} \mapsto \lambda^{1/2} \hat{V}(\lambda). \quad (9.3.8)$$

Формула (9.3.8) даёт основание считать стоящее слева выражение *полупроизводной (производной порядка 1/2)* по времени. Действительно, применяя этот оператор повторно, видим:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t dt' \frac{d/dt'}{\sqrt{t-t'}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t'} dt'' \frac{d/dt''}{\sqrt{t'-t''}} V(t'') \mapsto \lambda \widehat{V}(\lambda) \leftrightarrow \frac{dV}{dt}.$$

Впрочем, проверка соотношения

$$\sqrt{\frac{d}{dt}} \sqrt{\frac{d}{dt}} = \frac{d}{dt},$$

в котором оператор полупроизводной определён формулой

$$\sqrt{\frac{d}{dt}} V(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\dot{V}(t') dt'}{\sqrt{t-t'}},$$

может быть выполнена и прямым способом с применением элементарных средств анализа.

Вернёмся к уравнению (9.3.6). Его образ Лапласа («характеристическое уравнение») выглядит следующим образом:

$$\lambda \widehat{V} + c\lambda^{1/2} \widehat{V} + b\widehat{V} = \widehat{f}.$$

Представив трансформанту искомой функции в виде

$$\widehat{V}(\lambda) = \widehat{G}(\lambda) \widehat{f}(\lambda), \quad (9.3.9)$$

для трансформанты функции Грина получим следующее выражение:

$$\widehat{G}(\lambda) = \frac{1}{\lambda + c\lambda^{1/2} + b}. \quad (9.3.10)$$

Преобразуем её к виду:

$$\widehat{G}(\lambda) = \frac{1}{b} \cdot \frac{b\lambda^{-1/2}}{\lambda^{1/2} + c} \cdot \frac{1}{1 + b\lambda^{-1/2}/(\lambda^{1/2} + c)} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{b\lambda^{-1/2}}{\lambda^{1/2} + c} \right)^{n+1}.$$

Найдя трансформанту Лапласа n -й производной двухпараметрической функции Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha, \beta}^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+n)! t^j}{j! \Gamma(\alpha(j+n) + \beta)}$$

и сопоставив с ней выражение (9.3.9), придём к представлению решения в виде разложения по производным двухпараметрической функции Миттаг-Леффлера:

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} b^n t^n E_{1/2, 1+n/2}^{(n)}(-ct^{1/2}).$$

С помощью найденной функции Грина решение задачи представляется, как это следует из формулы (9.3.9), свёрткой

$$V(t) = \int_0^t G(t-t')f(t')dt'.$$

В заключение заметим, что из формулы (9.3.10) следует, что в асимптотике больших времён, когда, согласно тауберовым теоремам, главную роль играет область малых значений λ , трансформанта функции Грина асимптотически аппроксимируется выражением

$$\widehat{G}(\lambda) \sim \frac{1}{c\lambda^{1/2} + b}, \quad \lambda \rightarrow 0,$$

обращение которого даёт долговременную асимптотику

$$G(t) \sim (1/c)t^{-1/2} E_{1/2, 1/2}(-b/c)t^{1/2},$$

$$t \rightarrow \infty \sim \frac{1}{2\pi^{3/2}} \frac{c}{b^2} t^{-3/2}, \quad t \rightarrow \infty$$

(здесь использовано асимптотическое разложение функции Миттаг-Леффлера, см.⁶)

$$E_{\alpha, \beta}(z) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta - \alpha n)}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Игнорирование же запаздывающей силы Бассэ изменяет асимптотику со степенной на экспоненциальную:

$$\widehat{G}(\lambda) = \frac{1}{\lambda + b} \mapsto G(t) = e^{-bt}.$$

⁶В.В.Учайкин. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008.

Последняя формула соответствует асимптотике противоположного типа ($\lambda \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$) и показывает, что рассматриваемый процесс релаксации⁷ обычной вязкой жидкости, начинаясь с экспоненциального закона, со временем переходит на степенной.

9.3.4 Течения в цилиндрической трубе

Мы рассмотрим два типа неустановившегося течения вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе радиуса a – продольное и круговое. Будем считать, что жидкость несжимаема, в начальный момент находится в покое, перепад давления вдоль трубы (ось OZ) со временем не меняется. В этих условиях поле скоростей осесимметрично, $u = u(r, t)$, и уравнение Навье-Стокса, сопровождаемое начальными граничными условиями

$$u(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad u(a, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{p'}{\rho}, \quad (9.3.11)$$

где

$$p' = \frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}$$

– градиент давления в трубе. Выполним преобразование Лапласа уравнения (9.3.11) по времени:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} - \frac{\lambda}{\nu} \hat{u} = P,$$

где

$$P = -\frac{p'}{\rho\nu} = \frac{p(z) - p(0)}{\rho\nu z} \quad (9.3.12)$$

– положительная постоянная величина. Линейно независимыми решениями однородного (без правой части) аналога этого уравнения являются модифицированные функции Бесселя $I_0(r\sqrt{\lambda/\nu})$ и $K_0(r\sqrt{\lambda/\nu})$, а частное решение самого неоднородного уравнения (9.3.11) есть $\nu P/\lambda$. Стало быть, общее решение уравнения (9.3.11) имеет вид

$$\hat{u}(r, \lambda) = AI_0\left(r\sqrt{\lambda/\nu}\right) + BK_0\left(r\sqrt{\lambda/\nu}\right) + P\nu/\lambda.$$

⁷Напомним, что функция Грина описывает реакцию системы на единичный импульс возбуждения. Процесс рассасывания возбуждения и возвращения системы в равновесное состояние и есть релаксация.

При $r = 0$ вторая функция $K_0\left(r\sqrt{\lambda/\nu}\right)$ обращается в бесконечность, но первая функция и решение в целом конечны. Это возможно лишь при условии $B = 0$. Постоянную A определим из условия прилипания на границе трубы

$$AI_0\left(a\sqrt{\lambda/\nu}\right) + P\nu/\lambda = 0 :$$

$$\hat{u}(r, \lambda) = -\frac{P\nu}{\lambda} \left[\frac{I_0\left(r\sqrt{\lambda/\nu}\right) - I_0\left(a\sqrt{\lambda/\nu}\right)}{I_0\left(r\sqrt{\lambda/\nu}\right)} \right]. \quad (9.3.13)$$

Обратное преобразование Лапласа выполняется путём интегрирования по λ изображения, умноженного на лапласовскую экспоненту с противоположным знаком в показателе, по прямой, параллельной мнимой оси и лежащей справа от всех полюсов λ_n :

$$u(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda t} \hat{u}(r, \lambda) d\lambda, \quad c > \lambda_n, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Используя лемму Жордана (о замыкании контура), а затем теорему Коши (о вычетах), искомое поле скоростей можно представить в виде суммы

$$u(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\lambda t} \hat{u}(r, \lambda) d\lambda = \sum_n \operatorname{Res} \{ e^{\lambda_n t} \hat{u}(r, \lambda_n) \},$$

где λ_n определяются нулями z_n функции Бесселя J_0 :

$$\lambda_n = -\nu(z_n/a)^2.$$

Опустив технические детали расчёта⁸, приведём окончательный результат⁹:

$$u(r, t) = \frac{Pa^3}{4} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(z_n r/a)}{z_n^3 J_1(z_n)} e^{-(z_n/a)^2 \nu t} \right]. \quad (9.3.14)$$

⁸Напомним только, что $I_0(z) = J_0(iz)$, $I_1(z) = i^{-1}J_1(iz)$, $I_0'(-iz_n) = -I_1(iz_n) = -i^{-1}J_1(-z_n) = -iJ_1(z_n)$.

⁹Н.А.Слѣзкин. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гостехиздат, 1955.

Первые два слагаемых в квадратной скобке относятся к установившемуся (при $t = \infty$) течению, с параболическим профилем поля скоростей которого мы ознакомились раньше. Объёмный расход жидкости в единицу времени даётся формулой

$$Q(t) = \frac{Pa^4}{8} \left[1 - 32 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n^4} e^{-(z_n/a)^2 \nu t} \right]. \quad (9.3.15)$$

Стационарная формула Пуазейля находится отсюда предельным переходом $t \rightarrow \infty$: все экспоненты исчезают и остаётся лишь первый член.

Обратимся к другому типу течения – круговому движению в цилиндре (трубе) кругового сечения. Пусть градиент давления отсутствует, а начальные скорости частиц перпендикулярны оси трубы. В каждом сечении мы будем наблюдать одну и ту же картину кругового движения, описываемую двумя уравнениями Навье-Стокса (для радиальной и угловой компонент скорости в цилиндрической системе координат)

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (9.3.16)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \quad (9.3.17)$$

и уравнением непрерывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (9.3.18)$$

При круговом движении $v_r = 0$; подставляя этот нуль в уравнение непрерывности, находим $\partial v_\varphi / \partial \varphi = 0$. В отсутствие объёмных сил, например, силы тяжести, давление p не зависит от φ . С учётом этих условий пара уравнений (9.3.16)-(9.3.17) для $u(r, t) \equiv v_\varphi(r, t)$ принимает вид:

$$\begin{aligned} & \text{ЛАНЬ} \quad \frac{u^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ & \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (9.3.19)$$

Пусть бесконечный круговой цилиндр радиуса a , заполненный вязкой жидкостью, в момент времени $t = 0$ приводится во вращение с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Процесс вовлечения вязкой жидкости

в круговое движение (относительно неподвижной системы координат) описывается уравнением (9.3.19) с начальным и граничным условиями

$$u(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad u(a, t) = \Omega a, \quad t \geq 0.$$

Преобразование Лапласа по времени

$$f(t) \mapsto \hat{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$$

превращает уравнение в частных производных (9.3.18) в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{u}}{dr} - \left(\frac{\lambda}{\nu} + \frac{1}{r^2} \right) \hat{u} = 0$$

с граничным условием $\hat{u}(a, \lambda) = \Omega a$ и условием ограниченности решения $\hat{u}(a, t) < \infty$, $0 \leq r \leq a$. Общее решение его имеет вид

$$\hat{u}(r) = AI_1 \left(r\sqrt{\lambda/\nu} \right) + BK_1 \left(r\sqrt{\lambda/\nu} \right).$$

Функция K_1 обращается в бесконечность в нуле; чтобы удовлетворить условию ограниченности, положим $B = 0$. Оставшуюся постоянную найдём из условия на границе трубы. В результате получим:

$$\hat{u}(r, \lambda) = \Omega a \frac{I_1 \left(r\sqrt{\lambda/\nu} \right)}{I_1 \left(a\sqrt{\lambda/\nu} \right)}.$$

Дальнейший ход решения подобен предыдущему. Полюса подынтегрального выражения в формуле обращения

$$u(r, t) = \frac{\Omega a}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda t} \frac{I_1 \left(r\sqrt{\lambda/\nu} \right)}{I_1 \left(a\sqrt{\lambda/\nu} \right)} d\lambda, \quad c > \lambda_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

связаны теперь с нулями ζ_n функции Бесселя $J_1(z)$ соотношением

$$\lambda_n = -\nu(\zeta_n/a)^2.$$

Продолжение вычислений с использованием указанных выше теорем и свойств функций Бесселя первого рода приводит к следующему результату:

$$u(r, t) = \Omega a \left[\frac{r}{a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\zeta_n r/a)}{\zeta_n J_1'(\zeta_n)} e^{-(\zeta_n/a)^2 \nu t} \right]. \quad (9.3.20)$$

Из полученной формулы, в частности, видно, что с течением времени вклад суммы в поле скоростей, характеризующей переходную стадию процесса, ослабевает, и в конце концов мы получаем систему, вращающуюся как единое целое (как твёрдое тело). Все элементы жидкости теперь неподвижны друг относительно друга, кинетическая энергия на работу против сил трения не расходуется, и тело это будет вращаться с постоянной скоростью сколь угодно долго без всяких внешних усилий. Но в самом начале движения должен был быть приложен значительный момент сил, чтобы сообщить цилиндру вращение с заданной угловой скоростью, а в последующее время – для поддержания этого вращения до тех пор, пока не станет вращаться вся жидкость с одной и той же угловой скоростью. Вычислим величину этого момента сил. Скорость деформации сдвига в полярных координатах

$$2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r},$$

поэтому действующая на единицу площади сила трения

$$\tau(r, t) = 2\nu\rho\varepsilon_{r\varphi} = \nu\rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right).$$

Подставляя сюда $v_\varphi = u$ из (9.3.20) и полагая затем $r = a$, получим:

$$\tau(a, t) = 2\nu\rho\Omega \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\zeta_n/a)vt}.$$

Чтобы найти момент силы, осталось умножить силу $\tau(a, t)$ на длину окружности цилиндра и его радиус:

$$M = 4\pi\nu\rho\Omega a^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\zeta_n/a)^2 vt}.$$

9.3.5 Волны в вязкой жидкости

Рассмотрим волновое движение вязкой *сжимаемой* жидкости, ограничившись, для простоты, одномерным случаем, когда скорость коллинеарна оси OX : $v_x \equiv v$. Представив давление и плотность в виде сумм равновесного (не зависящего от координат и времени) слагаемого, отмеченного индексом 0, и возмущения, отмеченного индексом 1,

$$p = p_0 + p_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1,$$

применим к уравнениям непрерывности и Навье-Стокса процедуру, описанную в 8.2.1. В результате получим два уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ c_0^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} - b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \end{aligned}$$

где $b = \zeta + 4\eta/3$. Решение этой системы ищем в виде вещественных частей функций

$$\rho_1 = C_1 e^{i(kx - \omega t)}, \quad v = C_2 e^{i(kx - \omega t)}.$$

Подставив эти выражения в систему дифференциальных уравнений, получим после сокращения общего множителя однородную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -i\omega C_1 + ik\rho_0 C_2 &= 0, \\ ikc_0^2 C_1 + [-i\omega\rho_0 + bk^2] C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решая её характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -i\omega & ik\rho_0 \\ ikc_0^2 & -i\omega\rho_0 + bk^2 \end{vmatrix} = 0,$$

находим:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{1}{1 - i\varepsilon} = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{1}{1 + \varepsilon^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{i\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}, \quad (9.3.21)$$

где

$$\varepsilon = \frac{b\omega}{\rho_0 c_0^2}.$$

Полагая $\varepsilon \ll 1$, представляя волновое число в виде

$$k = \alpha + i\beta$$

и сравнивая его квадрат

$$k^2 = \alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2 \approx \alpha^2 + 2i\alpha\beta$$

с выражением (9.3.21), получим

$$\alpha = \frac{\omega}{c_0}, \quad \beta = \frac{\omega}{2c_0} \varepsilon = \frac{b\omega^2}{2\rho_0 c_0^3}.$$

Искомые решения, таким образом, имеют вид:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= C_1 e^{-\beta t} \cos(\alpha x - \omega t), \\ v &= C_2 e^{-\beta t} \cos(\alpha x - \omega t).\end{aligned}$$

Экспоненциальный множитель указывает на затухание со временем амплитуды колебаний в вязкой среде, постоянная β называется *коэффициентом затухания звука*.

В вязкой жидкости, в отличие от идеальной, возможны и *поперечные волны*, скорость движения частиц в которых перпендикулярна направлению их распространения. Такие волны могут возбуждаться, например, соприкасающейся с жидкостью пластиной больших размеров, совершающей колебания в своей плоскости (идеальная жидкость просто «не заметит» такого движения плоскости). В отличие от продольных, для существования поперечных волн условие сжимаемости жидкости не является необходимым.

Пусть горизонтальная пластина бесконечных размеров лежит на поверхности несжимаемой жидкости, заполняющей полубесконечное пространство. Выберем эту плоскость в качестве координатной плоскости XOY , направив ось OZ вниз, в сторону жидкости, а ось OX – вдоль направления колебаний пластины. Скорость движения жидкости имеет лишь одну компоненту $v_x \equiv v$ и эта компонента зависит только от одной из пространственных переменных – от глубины z : $v = v(z, t)$. В случае гармонического колебания пластины с частотой ω граничное условие имеет вид: $v(0, t) = u_0 e^{-i\omega t}$. Уравнение несжимаемости при этом выполняется автоматически, проекция уравнения Навье-Стокса на ось OZ имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (9.3.22)$$

Представляя искомое решение в виде $v = u_0 e^{i(kz - \omega t)}$, согласуяемся с граничным условием, получим:

$$i\omega = \nu k^2, \quad k = (1 + i)/\delta, \quad \delta = \sqrt{2\nu/\omega},$$

так что

$$v(z, t) = u_0 e^{-z/\delta} \cos(z/\delta - \omega t).$$

Мы получили поперечные волны с частотой, совпадающей с частотой колебания пластины, и амплитуды, убывающей с глубиной по экспоненциальному закону. *Глубина проникновения* δ падает с увеличением частоты волны и растет с увеличением вязкости жидкости.

Заметим, что частный случай уравнения Навье-Стокса (9.3.22) представляет собой не что иное, как уравнение *одномерной диффузии* (или *теплопроводности*).

9.3.6 Диффузия завихрённости

Ещё один пример диффузионного движения в вязкой жидкости – *диффузия завихрённости*. Возьмём уравнение Громеки-Ламба (8.1.2) для идеальной жидкости и построим на его основе уравнение для вязкой жидкости, добавив вязкий член:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \phi + \mathcal{P} \right) = [\vec{v}, \text{rot } \vec{v}] + \nu \Delta \vec{v}.$$

Возьмём ротор от обеих его частей. Слагаемое с градиентом пропадёт и мы придем к следующему уравнению для завихрённости $\vec{\omega} \equiv \text{rot } \vec{v}$:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \nabla) \vec{v} + \nu \Delta \vec{\omega}. \quad (9.3.23)$$

В случае плоского движения с круговыми относительно оси OZ линиями тока (вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярен плоскости течения, величина $(\vec{\omega} \nabla) \vec{v}$ равна нулю, конвективный член $(\vec{v} \nabla) \vec{\omega}$ равен нулю, так как завихрённость сохраняет постоянное значение) уравнение (9.3.23), спроектированное на ось OX , примет вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \Delta \omega. \quad (9.3.24)$$

Интерпретируется этот результат следующим образом: прямолинейная вихревая нить, расположенная по оси OZ и создавшая установившееся поле скоростей $v_\varphi = \Gamma / (2\pi r)$ (здесь и ниже $r = \sqrt{x^2 + y^2}$), в момент $t = 0$ вынимается из жидкости. В идеальной жидкости поле скоростей после этого не изменилось бы и продолжало существовать в том же виде (подставьте в уравнение (9.3.24) $\nu = 0$). В случае вязкой жидкости

$$\omega = \frac{\Gamma}{4\pi \nu t} \exp[-r^2 / (4\nu t)] \quad (9.3.25)$$

и распределение скоростей имеет вид

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \{1 - \exp[-r^2 / (4\nu t)]\}.$$

9.3.7 Упражнения

1. Вывести формулу (9.3.15) из формулы (9.3.14), пользуясь рекуррентным соотношением для функций Бесселя: $\int_0^x J_0(x')x' dx' = xJ_1(x)$.
2. В расчётах неустановившихся течений часто вместе с преобразованием Фурье по пространственным переменным \vec{r} используется преобразование Лапласа по времени t . Применить эти преобразования (по отдельности и совместно) к выражению (9.3.13).
3. Используя формулу (9.3.25) проанализировать поведение завихренности со временем на расстоянии a от оси нити.

9.4 Турбулентность

9.4.1 Понятие о турбулентности

Признаки турбулентности

В окружающей нас среде мы наблюдаем два типа течений. Приоткрыв осторожно кран в ванной, мы видим «гладкую» струю воды, выходящей из неё и почти беззвучно проходящей через поверхность наполняющей ванну воды, почти не возмущая её. Так умелый спортсмен выполняет прыжок с трамплина, и нам это нравится. Если пристроить к ней вблизи крана тоненькие трубочки с красящим веществом, можно увидеть согласованное движение окрашенных струек: они не перемешиваются, не разрушают друг друга. Так перемещаются колонны гвардейцев на параде, и нам это тоже нравится. Но откроем кран больше: выходящий из крана поток изменился, стал похож на горную речку, теперь он с шумом и брызгами падает в воду и возбуждает там беспорядочное движение, похожее на кипение жидкости, явно видны возникающие и исчезающие вихреподобные образования. Так падает в воду неловкий дилетант, возбуждая помимо поверхности воды ещё и нашу шумную ироническую реакцию: нам такие прыжки не нравятся. Так ведёт себя охваченная паникой толпа, и это не нравится нам. Вы летите в комфортабельном Боинге 777, на столике

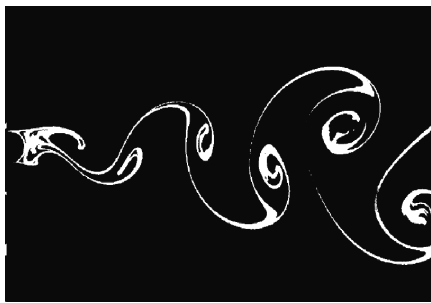


Рис. 9.4. Турбулентная струя

на столике

ещё не тронутая чашечка кофе. Блаженство. Но вот самолёт попадает в зону турбулентности, вы слышите, как бурные потоки воздуха бьют в борта воздушного судна, трясут его, оно подпрыгивает, падает, болтается в разные стороны, как телега, влекомая по сельскому бездорожью обезумевшей лошастью... Где ваша чашечка с кофе? Чем всё это кончится? Вам становится страшно.

Итак, налицо два типа движения: *ламинарное* («слоистое» – лат) и *турбулентное* («беспорядочное» – лат). Можно сказать, что турбулентное течение – это поток, движение которого беспорядочно во времени и пространстве. Данное определение, конечно же, нельзя рассматривать как точное математическое. С физической стороны, оно также недостаточно: диффузия одного газа в другом тоже подпадает под это определение (молекулы примеси движутся беспорядочно во времени и пространстве), но ни физик, ни инженер не увидят здесь турбулентного процесса. Турбулентный процесс – это макроскопически неоднородное и нестационарное течение, способное переносить в потоке импульс, тепло и вещество намного быстрее, чем молекулярная диффузия, но, в отличие от ламинарного, непредсказуемое.

За более чем 150-летнюю историю были развиты различные подходы – статистический, структурный и динамический – для описания феномена турбулентности, но до сих пор не выработан общий подход к описанию турбулентного движения жидкости.

Приведём три условия, которым, как полагает Лесье [Lesieur, 1997], должно удовлетворять течение, чтобы быть турбулентным¹⁰:

- 1) течение должно быть непредсказуемым в том смысле, что малая неопределенность характеристик течения в начальный момент времени будет расти и поэтому точное детерминированное предсказание результата их эволюции будет невозможным;
- 2) течение должно удовлетворять свойствам интенсивного перемешивания;
- 3) течение должно характеризоваться широким диапазоном пространственных длин волн.

Масштабы

Для качественного описания турбулентности полезным понятием оказывается *масштаб движения* – расстояние λ , на котором существенно меняется поле скоростей и связанное с ним число Рейнольдса $Re = \lambda u_\lambda / \nu$. Опыт показывает, что при малых числах Рейнольдса движение вязкой жидкости плавное, подчиняющееся уравнениям Навье-

¹⁰Цитируется по книге Б.Б.Илюшин. Процессы переноса в турбулентных течениях. Курс лекций. – Новосибирск, 2009

Стокса. С увеличением числа Рейнольдса, путём, например, равномерного подогрева жидкости, уменьшающего её вязкость, движение жидкости быстро приобретает сложный и запутанный характер: скорость в точке наблюдения меняется чрезвычайно нерегулярно и беспорядочно, пульсируя вокруг некоторой средней скорости и размах пульсаций соизмерим с самой этой скоростью. Геометрически эти пульсации имеют вид вихрей или вихреподобных образований, играющих ключевую роль в образовании и развитии турбулентности. Столь же нерегулярная картина наблюдается при одновременном сопоставлении скоростей в разных точках наблюдения. Движение становится турбулентным. С уменьшением числа Рейнольдса турбулентное движение вновь становится ламинарным.

Вот как описывается в книге Мони́на и Яглома картина обтекания потоком перпендикулярного ему цилиндра кругового сечения. При $Re < 10$ имеет место плавное обтекание. При $Re \approx 10$ происходит *смена устойчивости* и за цилиндром образуется пара стационарных вихрей. При $Re > 40$ вихри начинают поочередно отрываться от цилиндра, замещаясь новыми вихрями, и уплывать вниз по течению, образуя *вихревую дорожку*. При $Re > 100$ вихри заменяются быстро турбулизирующимися областями поочерёдно отрывающихся пограничных слоев. При $Re > 10^5$ пограничные слои турбулизируются ещё до отрыва, точка отрыва продвигается вниз по течению, турбулентный след сужается и сопротивление уменьшается (*кризис сопротивления*). При $Re \approx 10^6$ турбулентный след расширяется и сопротивление растёт. Наконец, при $Re \approx 10^7$ след начинает колебаться как целое.

Размерности

Большое значение в теоретическом анализе турбулентности играет *метод размерностей*. Рассмотрим пример. Пусть v_λ характерное изменение скорости на расстоянии λ , а ϵ — скорость диссипации энергии в единице массы. Её размерность $[\epsilon] = [E]/([m][t])$, а размерность $v_\lambda^3 = mv^2v/m$ равна $[E][\lambda]/([m][t])$, откуда

$$\Delta v_\lambda \propto (\epsilon \lambda)^{1/3}.$$

Утверждение, что изменение скорости в развитой турбулентной среде на малом расстоянии пропорционально кубическому корню из этого расстояния, носит название *закона Колмогорова-Обухова*.

Эргодичность

Проводя измерение скорости турбулентного потока в фиксированной точке в течение некоторого интервала времени, мы получим нере-

гулярную кривую с характерными пульсациями различной по величине и знаку амплитуды. Повторяя такие измерения много раз при неизменных условиях эксперимента, получим набор таких кривых, который можно рассматривать как статистическую выборку из некоторой генеральной совокупности кривых. Усреднение по этой совокупности будем обозначать угловыми скобками $\langle \dots \rangle$. Утверждение о том, что усреднение по генеральной совокупности независимых реализаций процесса эквивалентно усреднению по времени одной наблюдаемой реализации $T^{-1} \int_0^T \dots dt$, $T \rightarrow \infty$, называется *эргодической гипотезой*. Множество таких кривых с заданными вероятностями их появления в эксперименте образует *случайную функцию*. Проводя аналогичные измерения в различных точках среды, мы приходим к понятию *случайного поля*. В рамках теории случайных функций два метода играют важнейшую роль в количественной теории турбулентности: *спектральный* и *корреляционный*, связанные между собой преобразованием Фурье. Дело в том, что сами гидродинамические уравнения в статистической физике выводятся *уже путём усреднения уравнений* движения взаимодействующих между собой молекул, рассматриваемых как *материальные точки*. В теории усреднение производится по статистическому ансамблю идентичных систем, на практике оно осуществляется прибором, имеющим макроскопические размеры и требующим определённого времени для формирования своих показаний. Усреднение по ансамблю, таким образом, заменяется усреднением по пространственно-временной области, масштаб которой намного превышает микроскопические значения: длины свободных пробегов молекул между столкновениями и соответствующие им интервалы времени. В этих масштабах турбулентные неоднородности незаметны, они проявляются в масштабах, *на несколько порядков превышающих* характерные пространственно-временные размеры молекулярных движений, и могут поэтому рассматриваться как *случайное движение непрерывной среды*.

9.4.2 Условие возникновения турбулентности

Обсуждая особенности турбулентного движения жидкости, нельзя не удивиться тому, что ни уравнения идеальной жидкости, ни уравнения вязкой жидкости, которые мы выводили и решали выше, не давали нам ничего похожего на турбулентность, а приводили к плавным ламинарным течениям. Дело в том, что мы молчаливо (возможно, и не задумываясь) полагали решения устойчивыми относительно начальных условий и малых изменений в окружающей среде. Так, решая зада-

чу о скатывании шарика по абсолютно твёрдой сферической поверхности, мы найдём среди решений положение равновесия, в котором шарик может находиться бесконечно долго. Это хорошо подтвердится экспериментом, если речь идёт о скатывании по внутренней поверхности сферы, но положив шарик на вершину внешней поверхности и с трудом придав ему неподвижность, мы недолго будем наблюдать состояние покоя: что-нибудь, незаметное для нашего глаза, нарушит это *неустойчивое равновесие* и шарик скатится вниз. Расчёт предсказывал, что шарик будет находиться в этой точке бесконечно долго, но этого не произошло.

То же самое имеет место и в гидродинамике: не всякое предсказанное ею течение может существовать в природе бесконечно долго. Важнейшим признаком осуществимости является *устойчивость решения*, когда малые возмущения затухают со временем. Математическое исследование устойчивости течения вязкой жидкости ведётся по следующей схеме. В стационарное решение уравнения Навье-Стокса $\vec{v} = \vec{v}_0(\vec{r})$, $p = p_0(\vec{r})$ кратковременной силой $\delta\vec{g}(\vec{r}, t)$ вносится возмущение $\delta\vec{v}(\vec{r}, t)$, $\delta p(\vec{r}, t)$:

$$\partial(\vec{v}_0 + \delta\vec{v})/\partial t + ((\vec{v}_0 + \delta\vec{v})\nabla)(\vec{v}_0 + \delta\vec{v}) = -(1/\rho)\nabla(p_0 + \delta p) + \nu\Delta(\vec{v}_0 + \delta\vec{v}) + \delta\vec{g},$$

$$\nabla(\vec{v}_0 + \delta\vec{v}) = 0.$$

Раскрывая скобки, учитывая невозмущённые уравнения

$$(\vec{v}_0\nabla)\vec{v}_0 = -(1/\rho)\nabla p_0 + \nu\Delta\vec{v}_0,$$

$$\nabla\vec{v}_0 = 0$$

и опуская члены высших порядков, получаем:

$$\partial\delta\vec{v}/\partial t + (\vec{v}_0\nabla)\delta\vec{v} + (\delta\vec{v}\nabla)\vec{v}_0 = -(1/\rho)\nabla\delta p + \nu\Delta\delta\vec{v} + \delta\vec{g},$$

$$\nabla\delta\vec{v} = 0.$$

На неподвижных твёрдых границах оставим прежние (нулевые) условия: $\vec{v} = 0$. В результате имеем систему линейных дифференциальных уравнений с не зависящими от времени коэффициентами, в роли которых выступают теперь невозмущённые скорости и давления. Эволюция возмущений $\delta\vec{v}$, $\delta\vec{p}$ со временем в таком случае определяется множителем $\exp(-i\omega t)$, где комплексная «частота» $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ находится из уравнений и граничных условий. Если $\omega_2 < 0$, то

$$\exp(-i\omega t) = \exp(\omega_2 t) \exp(-i\omega_1 t) = \exp(-|\omega_2| t) \exp(-i\omega_1 t),$$

возмущения со временем исчезают и, следовательно, решение *устойчиво*. В противном случае экспонента со временем возрастает, решение *неустойчиво*, и возникают предпосылки для турбулентного режима.

9.4.3 Примеры гидродинамической неустойчивости

Стратифицированная среда. *Стратифицированной* называется находящаяся в поле тяжести среда, локальные характеристики которой (плотность, давление, температура и др.) зависят от вертикальной координаты. Примеры стратифицированной среды: атмосфера Земли, океанские глубины, жидкость во вращающемся сосуде (в последнем случае роль силы тяжести играет центробежная сила, создающая радиальную стратификацию).

Рассмотрим элемент объёма δV воздуха, находящийся на высоте z атмосферы и содержащий массу δm с соответствующей этой высоте плотностью $\rho(z)$. В состоянии равновесия сила Архимеда $\delta F_A = \rho g \delta V$ и сила тяжести (в проекции на вертикальную ось) $\delta F_T = -\delta m g$ уравновешивают друг друга. Предположим, что под действием атмосферных течений этот элемент переместился на высоту $z + \Delta z$ (поднялся, если $\Delta z > 0$, или опустился, если $\Delta z < 0$), не изменив своей плотности. В результате этого равновесие нарушится и возникнет результирующая сила

$$\delta F = \rho(z + \Delta z)g\delta V - \rho(z)g\delta V \approx g(d\rho/dz)\delta V \Delta z.$$

Введя обозначение $\Delta z = \zeta$ и записав δF в виде $\delta m \ddot{\zeta} = \rho \delta V \ddot{\zeta}$, получим

$$\ddot{\zeta} = \frac{g}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \zeta.$$

Таким образом, если плотность $\rho(z)$ в рассматриваемой области падает с высотой ($\partial \rho / \partial z < 0$), то на элемент δV действует возвращающая сила: её знак противоположен знаку смещения $\zeta = \Delta z$, положение устойчиво. Наоборот, если $\partial \rho / \partial z > 0$, возникающая сила направлена в сторону смещения, положение *неустойчиво*.

Круговое течение Куэтта. Аналогичные рассуждения справедливы и для кругового течения Куэтта. Элемент жидкости δm , находящийся на расстоянии r от оси вращения, и имеющий скорость $v = v(r) = ar + b/r$, где постоянные a и b определены в **9.2.3**, перемещается под действием возмущения на малое расстояние Δr . Пренебрегая вязкостью, можно определить его новую скорость v' из сохранения момента импульса:

$$r \delta m v(r) = (r + \Delta r) \delta m v'.$$

Если эта скорость

$$v' = [r/(r + \Delta r)]v(r)$$

будет меньше, чем скорость $v(r + \Delta r)$ нового окружения этого элемента, удерживающая жидкость на постоянном расстоянии от оси вращения, на элемент δm будет действовать возвращающая сила. В противном случае действующая на него центробежная сила превысит соответствующее этому расстоянию равновесное значение, и и под действием этого превышения он продолжит свое движение от оси с возрастающей скоростью. Таким образом, круговое течение Куэтта устойчиво, если во всех его точках выполняется условие

$$[r/(r + \Delta r)]v(r) < v(r + \Delta r) \approx v(r) + (dv(r)/dr)\Delta r$$

или, в более компактном виде,

$$dv/dr > -v(r)/r. \quad (9.4.1)$$

Заметим, что v здесь азимутальная компонента скорости, $v \equiv v_\varphi$, которая может быть как положительной, так и отрицательной. Пусть внутренний цилиндр вращается в положительном направлении или покоится ($\Omega_1 \geq 0$). Подставив в (9.4.1) явное выражение для $v(r)$ из **9.3.3**, видим, что течение будет устойчиво, если

$$\Omega_2 > (R_1/R_2)^2 \Omega_1.$$

Если это условие не выполняется, течение Куэтта неустойчиво. В частности, оно неустойчиво при любых скоростях вращения цилиндров, если они вращаются в противоположных направлениях, неустойчиво, если внешний цилиндр покоится ($\Omega_2 = 0$), а вращается только внутренний. Если же внутренний цилиндр покоится ($\Omega_1 = 0$), а внешний вращается – движение устойчиво.

Простейшая модель хаоса

Сложное поведение реальной среды при возникновении и развитии неустойчивости не поддаётся точному математическому анализу. Поэтому качественные аспекты этого процесса рассматриваются на простых моделях, которые изначально являются грубым подобием реальной ситуации, но допускают точное аналитическое или численное решение.

Возьмём одномерное уравнение Навье-Стокса, отбросив в нем слагаемое с давлением:

$$\partial v / \partial t = -v \partial v / \partial x + \nu \partial^2 v / \partial x^2 + g.$$

Нас будет интересовать здесь зависимость от времени. Взяв координатную зависимость в виде экспоненты и заменив физические постоянные арифметическими, получим

$$\partial v / \partial t = -2v^2 - v + 1. \quad (9.4.2)$$

Наконец, заменив производную по времени конечной разностью и введя обозначение $v_t = v(t)$, придём к уравнению

$$v_{t+1} = 1 - 2v_t^2, \quad -1 < v < 1, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Это уравнение, конечно, уже далеко не уравнение Навье-Стокса, однако следы его – слагаемые, соответствующие приращению, нелинейности и вязкости, в нем остались.

Возьмем два близких начальных значения «скорости» v_0 и сравним их дальнейшую эволюцию:

$v_0 = +0,23$		$+0,24$
$v_1 = +0,89$		$+0,88$
$v_2 = -0,60$		$-0,57$
$v_3 = +0,28$		$+0,36$
$v_4 = +0,84$		$+0,74$
$v_5 = -0,41$		$-0,10$
$v_6 = +0,66$		$+0,98$
$v_7 = +0,14$		$-0,92$
$v_8 = +0,96$		$-0,71$
$v_9 = -0,85$		$+0,00$

Видно, что после нескольких первых шагов расхождение между этими двумя «орбитами» с почти одинаковыми начальными условиями начинает с возрастающей скоростью увеличиваться. Такое поведение системы, неустойчивое по отношению к её начальным условиям и не позволяющее прогнозировать поведение системы даже на сравнительно малые времена, называют *динамическим хаосом*.

9.4.4 Турбулентность в спектральном представлении

Неразличимая близость начальных условий, ведущих к совершенно разным картинам движения, создаёт иллюзию, что наблюдаемые реализации порождаются одним и тем же начальным состоянием, и не обладая свойством предсказуемости, являются *выборочными реализациями случайного процесса*. Иллюзия эта, однако, не является «оптическим обманом», она основывается на физической природе измерений. Ни один прибор, измеряющий вещественную характеристику естественного процесса, не обладает идеальной точностью, и всегда найдутся столь близкие состояния, что прибор не различит их и примет за одно. Так, альфа-частица в опыте Резерфорда не быть направлена на атом золота с определённым прицельным параметром – слишком малы размеры атома. Направляя падающие частицы по одной и той же, судя по показаниям прибора, траектории, мы получаем веером расходящиеся траектории, наглядно демонстрирующие нам статистический ансамбль. Признание того, что статистический ансамбль этот отражает реальную природу вещей, и лежит в основе статистического

подхода к явлению хаоса вообще и турбулентности в частности. Такой подход позволяет математически разделить турбулентный поток \vec{v} на две составляющих – регулярную $\langle \vec{v} \rangle$ и турбулентную (случайную) составляющую \vec{u} , к которой и будут относиться наши дальнейшие рассуждения:

$$\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + \vec{u}.$$

Для простоты мы ограничимся случаем стационарной, однородной и изотропной (всё это в статистическом смысле) турбулентности, каковой, например, представляется состояние пропущенной через решётку жидкости наблюдателю, движущемуся вместе с ней со скоростью, равной средней скорости потока \vec{v} (рис. 9.5).

В отличие от элементарной теории измерений, явившейся первым широким применением теории вероятностей, описание статистических свойств функций и полей, характеризующих турбулентность, требует применения более тонкого вероятностного инструмента – корреляционного анализа, образующего одно из наиболее развитых направлений теории случайных процессов. С некоторыми понятиями этой теории мы встречались при обсуждении броуновского движения. Там мы имели дело с временной корреляционной функцией случайной координаты частицы примеси, здесь мы рассмотрим корреляции между двумя проекциями скорости жидкости в двух разных точках среды, разделённых вектором \vec{r} :

$$R_{ij}(\vec{r}) = \langle u_i(\vec{r}_0) u_j(\vec{r}_0 + \vec{r}) \rangle.$$

Ввиду предполагаемой однородности и эргодичности рассматриваемой турбулентности эта функция не зависит от \vec{r}_0 и усреднение по статистическому ансамблю может быть интерпретировано как усреднение по достаточно большому объёму:

$$R_{ij}(\vec{r}) = \langle u_i(\vec{r}_0) u_j(\vec{r}_0 + \vec{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x} + \vec{r}) d\vec{x}.$$

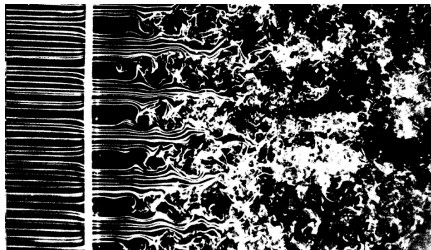


Рис. 9.5. Возникновение турбулентного потока при прохождении жидкости через специальную решётку. В системе координат, связанной с её переносным движением, турбулентную среду можно приближённо считать изотропной

Положив здесь $\vec{r} = 0$ и $i = j$ (перейдя тем самым к суммированию по повторяющимся индексам), мы увидим в корреляционной функции удвоенную среднюю удельную кинетическую энергию турбулентного движения E :

$$R_{ij}(0) = 2 \left\langle \frac{u_i^2}{2} \right\rangle \equiv 2E. \quad (9.4.3)$$

Фурье-образ $\tilde{R}_{ij}(\vec{k})$ функции $R_{ij}(\vec{r})$ в корреляционном анализе принято записывать в виде

$$\tilde{R}_{ij}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\vec{k}\vec{r}} R_{ij}(\vec{r}) d\vec{r},$$

где \vec{k} – фурье-переменная, называемая обычно волновым вектором. При известных условиях имеет место обратное преобразование

$$R_{ij}(\vec{r}) = \int e^{i\vec{k}\vec{r}} \tilde{R}_{ij}(\vec{k}) d\vec{k}. \quad (9.4.4)$$

Подставим (9.4.4) в (9.4.3) и представим результат в виде:

$$E = \int E(\vec{k}) d\vec{k},$$

где

$$E(\vec{k}) d\vec{k} = \frac{1}{2} \tilde{R}_{ii}(\vec{k}) d\vec{k}$$

– удельная кинетическая энергия турбулентных пульсаций, принадлежащих элементу $d\vec{k}$ пространства волновых векторов. Функция $E(\vec{k})$ называется трёхмерным спектром турбулентных пульсаций. Если нас не интересует анизотропия пульсаций, от трёхмерного спектра (снабдим его индексом 3) удобно перейти к одномерному (отметим его индексом 1) по формуле, обычной для сферической системы координат:

$$E_1(k) = \oint E(\vec{k}) k^2 d\Omega, \quad (9.4.5)$$

где $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ – элемент телесного угла в пространстве волновых векторов. В случае изотропной турбулентности функция $\tilde{R}_{ij}(\vec{k})$ не зависит от направления вектора \vec{k} , и формула (9.4.5) принимает вид

$$E_1(k) = 2\pi k^2 \tilde{R}_{ii}(k).$$

9.4.5 Спектр Колмогорова-Обухова

Дадим теперь (тоже качественное) описание энергетических процессов в однородной турбулентной среде. Однородная турбулентная среда возникает при обтекании жидкостью перпендикулярной к ней решётки больших поперечных размеров с малым шагом d , когда число Рейнольдса достаточно велико. В системе координат, где средняя скорость жидкости равна нулю, а решётка движется, последняя совершает работу, подводя к жидкости кинетическую энергию. Эта энергия, первоначально связанная с волновыми числами порядка обратной постоянной решётки $k_0 \sim 1/d$, передаётся большим волновым числам k (размерность $[k] = 1/[l]$), соответствующим меньшим пространственным масштабам, пока в конце концов не перейдёт в тепловую. Таким образом, имеет место каскадный процесс передачи энергии вниз по каскаду (рис. 9.6), при этом скорость удельной передачи энергии ϵ на единицу волнового числа с ростом k спадает по закону

$$\frac{d\epsilon}{dk} \sim -\nu k^2 E(k).$$

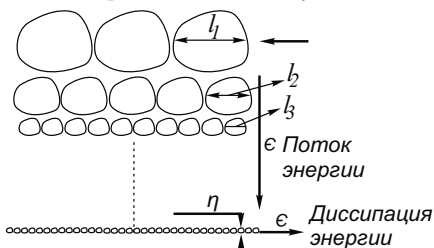
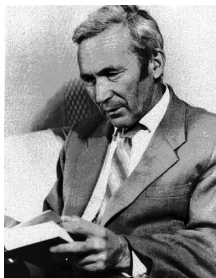


Рис. 9.6. Каскад Ричардсона

Стационарный спектр образующейся при этом турбулентности $E(k)$ (средняя кинетическая энергия единицы массы жидкости, приходящаяся на единичный интервал волновых чисел) имеет размерность

$$[E] = \frac{[mv^2]}{[mk]} \frac{[l]^3}{[t]^2},$$



Андрей Николаевич Колмогоров (1903 — 1987) — советский математик, один из основоположников современной теории вероятностей, им получены основополагающие результаты в топологии, геометрии, математической логике, классической механике, теории турбулентности, теории сложности алгоритмов, теории информации, теории функций, теории тригонометрических рядов, теории меры, теории приближения функций, теории множеств, теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, функциональном анализе.

тогда как размерность скорости подвода энергии к единице массы среды

$$[\epsilon_0] = \frac{[mv^2]}{[mt]} = \frac{[l]^2}{[t]^3}.$$

Из сопоставления этих выражений находим:

$$[E] = \frac{[l]^3}{([t]^3)^{2/3}} = \left(\frac{[l]^2}{[t]^3}\right)^{2/3} [l]^{3-4/3} = [\epsilon_0]^{2/3} [l]^{5/3}.$$

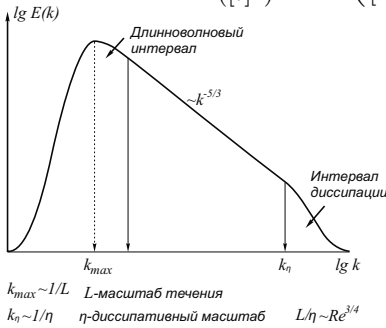


Рис. 9.7. Спектр Колмогорова-Обухова

Отсутствие в этом выражении вязкости η указывает на ограничение области его применения со стороны больших волновых чисел, когда существенна вязкая диссипация. Чтобы оценить границу этой области, возьмём производную от логарифма E (9.4.6) по логарифму k :

$$\frac{d \ln E}{d \ln k} = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} \frac{d \ln \epsilon_0}{d \ln k} = -\frac{5}{3} + \frac{2k}{3\epsilon_0} \frac{d\epsilon_0}{dk}.$$

Подставив сюда (9.4.1) и (9.4.6), получим:

$$\frac{d \ln E}{d \ln k} = -\frac{5}{3} - \frac{2k^3 \nu}{3\epsilon_0} E = -\frac{5}{3} - \frac{2\nu}{3\epsilon_0^{1/3}} k^{4/3}.$$

Отсюда следует вывод, что вязкостью можно пренебречь тогда, когда волновое число k мало по сравнению с числом

$$k_\eta = \left(\frac{\epsilon_0}{\nu^3}\right)^{1/4},$$

характеризующим границу между инерционной и диссипативной областями. При значениях k , больших k_η , соответствующих вихрям малых размеров, спектр быстро спадает. Со стороны малых k степенное поведение спектра также ограничено значением

$$k_{\max} \sim k_\eta \text{Re}^{-3/4},$$

В предположении, что энергетический спектр зависит только от двух переменных ϵ_0 и k , получаем формулу

$$E(k) \propto \epsilon_0^{2/3} k^{-5/3}, \quad (9.4.6)$$

называемую законом 5/3 Колмогорова-Обухова. Недостающий здесь коэффициент оказывается порядка единицы ($\approx 1,5$).

где Re – число Рейнольдса для наибольших вихрей в среде. Величина $l_\eta = 1/k_\eta$, определяемая свойствами самой жидкости, образует внутренний масштаб турбулентности, характеризующий минимальные размеры вихрей:

$$l_\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon_0} \right)^{1/4}.$$

Внешний масштаб турбулентности $l_{\max} = 1/k_{\max}$, связанный с размерами турбулентной области через число Рейнольдса, характеризует максимальные размеры вихрей.

9.4.6 Из статьи А.С.Монина¹¹

Турбулентностью целесообразно называть явление, наблюдающееся в очень многих завихрённых течениях жидкостей и газов в природе и в технических устройствах и заключающееся в том, что термодинамические и гидродинамические характеристики таких течений (вектор скорости, температура, давление, концентрации примесей, плотность среды, скорость звука, электропроводность, показатель преломления и т. п.) испытывают хаотические флуктуации, создаваемые наличием в этих течениях многочисленных вихрей различных размеров, и вследствие этого изменяются в пространстве и с течением времени весьма нерегулярно, причем у пространственных распределений этих характеристик компонентам Фурье с фиксированными волновыми векторами соответствуют широкие интервалы частот (т. е. однозначные дисперсионные соотношения отсутствуют), а сдвиги по фазе между колебаниями различных характеристик в фиксированных точках пространства хаотически изменяются с частотой таких колебаний.

По этому определению главным признаком турбулентности является хаотический, случайный характер изменений термодинамических характеристик течения в пространстве и во времени. Однако не каждое течение такого рода целесообразно называть турбулентным: для ряда целей может быть нужным отличать турбулентные течения от других видов случайных движений жидкостей и газов, обладающих той или иной степенью регулярности. Такими другими видами движений являются, прежде всего, волны, возникающие в жидкости благодаря тому, что при смещениях жидких частиц из их равновесных положений в жидкости развиваются те или иные возвращающие силы: сила давления при акустических колебаниях сжимаемой жидкости, сила тяжести при колебаниях свободной поверхности тяжелой жидкости, сила поверхностного натяжения в капиллярных волнах на свободной поверхности жидкости, архимедова сила плавучести во внутренних гравитационных волнах в стратифицированной жидкости, завихрённая часть вертикальной компоненты силы Кориолиса при меридиональных смещениях частиц во вращающемся шаровом слое жидкости и т. п.

Суперпозиция большого количества волн того или иного типа с различными волновыми векторами и случайными амплитудами и фазами может образовывать течение с весьма нерегулярными изменениями в пространстве и во времени, но во многих случаях его в принципе можно отличить от турбулентности по свойствам его элементарных волновых компонент — определенной (скажем, продольной или поперечной) ориентации смещений частиц относительно направления волнового


¹¹ А.С. Монин. О природе турбулентности. Успехи физических наук, т.125, вып.1 (1978) – С.97-121.

вектора, по определенным сдвигам фаз между колебаниями различных характеристик элементарной волны в фиксированной точке пространства, по однозначно определяемой по волновому вектору (так называемым дисперсионным соотношением) частоте колебаний.

Завихренность течения играет в механике турбулентности определяющую роль, создавая возможность каскадного процесса порождения мелких вихрей более крупными (в случае гидродинамической неустойчивости крупных вихрей) и, как следствие, переноса кинетической энергии по спектру масштабов движений в сторону меньших масштабов (по этой причине попытки вывода уравнений динамики турбулентности из уравнений кинетической теории газов, в которых в низших приближениях появляются только потенциальные случайные флуктуации скорости течения, представляются неудовлетворительными). Поэтому мы определили турбулентность, как случайные флуктуации термогидродинамических характеристик завихренных течений, и тем самым сразу же условились отличать ее от каких бы то ни было случайных безвихревых, т. е. потенциальных течений (в которых вектор скорости \vec{v} есть градиент некоторого скалярного потенциала Φ) и, значит, от всех волн в идеальной жидкости, создаваемых потенциальными силами, в том числе от всех линейных акустических и поверхностных волн и всех нелинейных потенциальных поверхностных волн.

9.4.7 Упражнения

1. Применив преобразование Фурье к $\delta\vec{v}$, показать, что удельная кинетическая энергия турбулентного возбуждения с волновым числом k дается формулой



$$E(k) = \frac{\langle |\delta\vec{v}|^2 \rangle}{4\pi^2 V}.$$

2. Умножив обе части уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости на плотность жидкости и применив оператор ∇ , показать, что в отсутствие объёмных сил давление в жидкости $p(\vec{r}, t)$ связано с её скоростью $\vec{v}(\vec{r}, t)$ уравнением Пуассона: $\Delta p = -\rho \operatorname{div}((\vec{v}\nabla)\vec{v})$.
3. Найти интегральное уравнение, эквивалентное записанному выше дифференциальному. уравнение может быть представлено в интегралах

9.5 Турбулентное течение

9.5.1 Уравнения Рейнольдса

В этой главе мы рассмотрим некоторые особенности турбулентного движения. Запишем уравнения Навье-Стокса вместе с уравнением несжимаемости, опустив слагаемое с объёмной силой:

$$\rho(\partial v_i / \partial t + v_{i,j} v_j) = -p_{,i} + \eta v_{i,jj},$$

$$v_{j,j} = 0. \tag{9.5.1}$$

С учётом условия несжимаемости первое из этих уравнений можно переписать в виде:

$$\rho[\partial v_i / \partial t + (v_i v_j)_{,j}] = -p_{,i} + \eta v_{i,jj}. \quad (9.5.2)$$

Представим теперь *актуальные* скорости и давления в виде сумм *средних значений* и *пульсаций* (*флуктуаций*) около этих средних,

$$v_i = \langle v_i \rangle + \delta v_i, \quad p = \langle p \rangle + \delta p, \quad (9.5.3)$$

и подставим эти суммы в уравнения (9.5.1)–(9.5.2):

$$\langle v_j \rangle_{,j} + (\delta v_j)_{,j} = 0,$$

$$\begin{aligned} \rho[\partial \langle v_i \rangle / \partial t + \partial (\delta v_i) / \partial t + (\langle v_i \rangle \langle v_j \rangle)_{,j} + (\langle v_i \rangle \delta v_j)_{,j} + (\delta v_i \langle v_j \rangle)_{,j} + (\delta v_i \delta v_j)_{,j}] = \\ = -\langle p \rangle_{,i} - (\delta p)_{,i} + \eta \langle v_i \rangle_{,jj} + \eta (\delta v_i)_{,jj}. \end{aligned}$$

Применяя к этим уравнениям процедуру усреднения и учитывая, что согласно определениям (9.5.3) $\langle \delta v_i \rangle = 0$ и $\langle \delta p \rangle = 0$, получим:

$$\langle v_j \rangle_{,j} = 0,$$

$$\rho[\partial \langle v_i \rangle / \partial t + (\langle v_i \rangle \langle v_j \rangle)_{,j}] = -\langle p \rangle_{,i} + [\eta \langle v_i \rangle_{,jj} + \tau'_{ij}]_{,j} \quad \tau'_{ij} = -\rho \langle \delta v_i \delta v_j \rangle.$$

Это и есть *уравнение Рейнольдса*, описывающее турбулентное течение *в среднем*. Собственно говоря, с точки зрения молекулярно-кинетической теории скорость v_i тоже есть средняя скорость, но это – средняя скорость *молекул жидкости*, результат усреднения на *микроскопических* масштабах. Эта скорость описывается уравнением Навье-Стокса. В данном же пункте речь идёт об усреднении *макроскопических* флуктуаций, видимых невооружённым глазом, и это среднее удовлетворяет уравнению Рейнольдса, отличающемуся от уравнения Навье-Стокса дополнительным слагаемым τ'_{ij} в своей правой части. Слагаемое это отражает статистические корреляции макроскопических пульсаций: в их отсутствие $\langle \delta v_i \delta v_j \rangle = \langle \delta v_i \rangle \langle \delta v_j \rangle = 0$ и уравнение Рейнольдса совпадает с уравнением Навье-Стокса.

В общем случае корреляционный член играет важную роль в турбулентном течении. Роль эту удобно сформулировать в терминах переноса импульса. Напомним, что в идеальной жидкости импульс подобно массе переносится только с самой жидкостью, вязкость включает дополнительный механизм переноса импульса – передачу его соседним объёмам через молекулярные силы без перемещения туда массы. Появившийся в уравнении Рейнольдса член – *тензор напряжений Рейнольдса* τ'_{ij} – отражает *передачу импульса интенсивным перемешиванием*, порождаемым хаотическими пульсациями скорости. Подобно

тому, как микроскопические молекулярные движения приводят к появлению вязких напряжений, макроскопические турбулентные пульсации приводят к появлению дополнительных напряжений – *напряжений Рейнольдса*.

Уравнение Рейнольдса незамкнуто – корреляционное слагаемое неизвестно. Можно, конечно, сделать какие-либо предположения на этот счёт, предложить некоторые модели или аппроксимации, может быть, с привлечением экспериментальных данных. Но можно и продолжить манипуляции с уравнениями Навье-Стокса и вывести уравнение для корреляционной функции второго порядка $\langle \delta v_i \delta v_j \rangle$. Оно будет иметь более сложный вид, но самое главное в том, что уравнение это будет содержать корреляционную функцию третьего порядка $\langle \delta v_i \delta v_j \delta v_k \rangle$ и так далее: уравнение для n -й корреляционной функции будет содержать $(n + 1)$ -ю.

9.5.2 Турбулентная вязкость

Рассмотрим передачу импульса турбулентной жидкостью, текущей со средней скоростью, параллельной обтекаемой стенке, то есть действующую на неё силу. Наличие дополнительных напряжений Рейнольдса изменяет тензор вязких напряжений, принимающий теперь вид

$$\tau_{12} = -[\eta \partial \langle v_1 \rangle / \partial x_2 + \tau'_{12}] = -\rho[\nu \partial \langle v_1 \rangle / \partial x_2 - \langle \delta v_1 \delta v_2 \rangle].$$

На самой стенке пульсации скорости равны нулю, напряжения Рейнольдса исчезают, и действующая на элемент поверхности сила выражается только через среднюю скорость

$$\delta P_i = \eta \partial \langle v_1 \rangle / \partial x_2 \delta S.$$

Если же взять площадку $\delta S'$, параллельную δS , но расположенную *над обтекаемой плоскостью*, напряжения Рейнольдса будут играть существенную, часто – доминирующую роль. Используя аппроксимацию Буссинеска, можно положить

$$-\langle \delta v_1 \delta v_2 \rangle = \nu K \partial \langle v_1 \rangle / \partial x_2,$$

где новый коэффициент K , называемый *коэффициентом турбулентной вязкости*, характеризует не свойства жидкости, а статистические свойства пульсационного движения, и поэтому может меняться со временем и зависеть от координат. Вдали от твёрдых границ он может значительно превосходить кинематическую вязкость, тогда

$$\tau_{12} = -\rho(\nu + K) \partial \langle v_1 \rangle / \partial x_2 \approx -\rho K \partial \langle v_1 \rangle / \partial x_2 \equiv \tau'.$$

Другая аппроксимация τ' основывается на модели Прандтля, предложенной им для описания переноса массы между слоями осреднённого турбулентного движения. По этой модели вихревая масса, выделенная в данном «начальном» слое как некоторое индивидуальное образование, перемещается в нормальном по отношению к осреднённому потоку направлении до тех пор, пока не смешается с некоторым другим слоем, не растворится в нем, потеряв свою индивидуальность. Смешиваясь с этим слоем, это образование вносит определённое возмущение в его усреднённое движение. По гипотезе Прандтля это возмущение пропорционально расстоянию l между начальным и конечным слоями и перепаду средней скорости между ними:

$$\Delta\langle v \rangle \simeq l d\langle v \rangle / dy.$$

Оно становится причиной возникновения пульсаций проекций скорости

$$\delta v \propto l \frac{d\langle v \rangle}{dy}.$$

Отсюда и следует оценка, называемая формулой Прандтля:

$$\tau' \sim -\rho \langle \delta v_i \delta v_j \rangle \sim -\rho l^2 \left(\frac{d\langle v \rangle}{dy} \right)^2.$$

9.5.3 Профиль средней скорости вблизи стенки

Рассмотрим простейшее стационарное плоскопараллельное течение жидкости в направлении оси OX в полупространстве $y > 0$ над твёрдой стенкой $y = 0$ без перепада среднего давления. Уравнение Рейнольдса для этой компоненты скорости $v_x = v(y)$ (другие равны нулю) имеет вид:

$$\eta \frac{d^2\langle v \rangle}{dy^2} = \frac{d\tau'}{dy}, \quad \tau' = -\rho \langle \delta v_x \delta v_y \rangle. \quad (9.5.4)$$

В случае ламинарного движения правая часть этого уравнения обращается в нуль, и решение его имеет вид:

$$\langle v \rangle \equiv v = c_1 + c_2 y.$$

Из граничного условия $v(0) = 0$ следует $c_1 = 0$. Постоянная c_2 связана с напряжением трения на стенке соотношением

$$c_2 = \left(\frac{d\langle v \rangle}{dy} \right)_{y=0} \equiv \tau_0 / \eta.$$

Таким образом, профиль скоростей ламинарного потока вблизи стенки является линейным, а напряжение трения между двумя любыми слоями $\eta \Delta v / \Delta y$ постоянным и равным напряжению трения на стенке τ_0 .

Вернёмся к турбулентному движению. Интегрируя уравнение (9.5.4),

$$\eta \frac{d\langle v \rangle}{dy} + \tau' = c_3,$$

и замечая, что τ' на стенке равно нулю, находим, что $c_3 = \tau_0$:

$$\eta \frac{d\langle v \rangle}{dy} + \tau' = \tau_0. \quad (9.5.5)$$

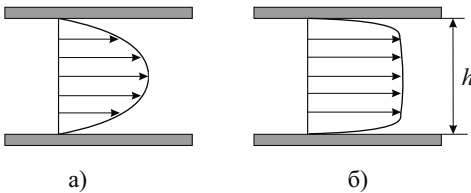
Вблизи стенки $\tau' \ll \eta d\langle v \rangle / dy$ и мы вновь получаем линейную зависимость. Но в области, удалённой от стенки, справедливо обратное соотношение, $\tau' \gg \eta d\langle v \rangle / dy$, так что уравнение Рейнольдса принимает вид

$$\tau' = \tau_0.$$

Подставляя сюда формулу Прандтля с $l = \kappa y$ (κ – положительная постоянная, определяемая опытным путём)

$$\rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{d\langle v \rangle}{dy} \right)^2 = \tau_0,$$

извлекая квадратный корень и выполняя интегрирование, находим:



$$\langle v \rangle = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln y + C. \quad (9.5.6)$$

Таким образом, при переходе от ламинарного течения к турбулентному в условиях данной задачи линейный профиль скоростей сменяется (на некотором расстоянии от стенки) логарифмическим.

Рис. 9.8. Профиль скоростей вязкой жидкости между стенками в случае ламинарного движения (а) и усреднённый профиль – в случае турбулентного (б)

На малых же расстояниях линейный профиль сохраняется, что можно интерпретировать (рис. 9.8) как наличие на стенке тонкого ламинарного слоя, отделяющего её от турбулентного потока¹².

¹²В связи с этим модель Прандтля называется ещё *двухслойной схемой «пристенной» турбулентности*.

9.5.4 Возбуждение звука

В 8-й главе мы видели, как распространяются звуковые волны в идеальной жидкости – гармонические колебания без изменения амплитуды. В 9.3.5 мы убедились, что наличие вязкости среды приводит к поглощению энергии звуковых волн – амплитуда колебаний спадает со временем по экспоненте. В обоих случаях источником (генератором) звука могла быть вибрирующая пластина или произвольная поверхность вибрирующего тела, погружённого в жидкость. Здесь мы покажем, что звук может генерироваться самой жидкостью, если она совершает турбулентное движение. Для этого вернёмся к неоднородному волновому уравнению (8.2.1):

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \nabla^2 p_1 = Q(\vec{x}, t), \quad Q(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{v}\nabla)\vec{v}.$$

Как отмечалось при выводе, неоднородный член становится существенно важным в области, где наблюдаются резкие перепады скоростей, так что производные от скорости по координатам велики, хотя сама скорость остается малой.

Будем считать, что турбулентность имеет место лишь в ограниченной области среды V_0 . Выберем систему координат с началом внутри области V_0 и через R_0 обозначим радиус окружающей эту область сферы. Излучаемый элементом $\delta V'$ звук имеет вид сферической волны с амплитудой, пропорциональной $Q\delta V'$ и убывающей обратно пропорционально расстоянию от источника до точки наблюдения. Волна эта распространяется со скоростью c_0 , так что суммарное звуковое поле, создаваемое всем источником, запишется в виде

$$p_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{Q(\vec{r}', t - R/c_0)\delta V'}{R},$$

где $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$. Коэффициент $(4\pi)^{-1}$ находится подстановкой этого решения в неоднородное уравнение (удобно воспользоваться при этом преобразованием Фурье). Отметим, что значение плотности источника под интегралом берётся в момент времени на R/c_0 раньше момента наблюдения: именно столько времени требуется излучённой в точке \vec{r}' волне, чтобы попасть в точку \vec{r} в момент наблюдения t .

На расстояниях много больших размеров источника (и, конечно, длины волны излучаемого звука) множитель $R^{-1} = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ можно заменить множителем $r^{-1} = |\vec{r}|^{-1}$ и вынести его из-под знака интеграла. Вводя обозначение

$$T_{ij}(\vec{r}, t) = v_i(\vec{r}, t)v_j(\vec{r}, t), \quad (9.5.7)$$

запишем результат в виде:

$$p_1(\vec{r}, t) = \frac{\rho_0}{4\pi r} \int_{V_0} (T_{ij})_{,ij}(\vec{r}', t - R/c) dV'. \quad (9.5.8)$$

Частные производные берутся здесь по координатам вектора \vec{r}' при фиксированном значении R . Обозначим через $T_{ij,ij}$ производные по всем координатам x'_i, x'_j , включая и содержащиеся в R . Очевидно,

$$T_{ij,ij} = (T_{ij})_{,ij} + [T_{ij}]_{,ij}, \quad (9.5.9)$$

где во втором слагаемом производные берутся *только по координатам* x'_i , входящим в $R = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}$. Подставим (9.5.9) в (9.5.8):

$$p_1(\vec{r}, t) = \frac{\rho_0}{4\pi r} \int_{V_0} T_{ij,ij}(\vec{r}', t - R/c) dV' - \frac{\rho_0}{4\pi r} \int_{V_0} [T_{ij}]_{,ij}(\vec{r}', t - R/c) dV'.$$

Первый интеграл справа преобразуется в поверхностный по замкнутой поверхности, окружающей V_0 , и обращается в нуль из-за равенства нулю подынтегрального выражения вне зоны турбулентности. Переходя во втором интеграле от интегрирования по штрихованным переменным к интегрированию по нештрихованным, получаем

$$p_1(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0}{4\pi r} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{V_0} T_{ij}(\vec{r}', t - R/c) dV'.$$

Заменив в аргументе R на $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ и учтя, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} = e_i \frac{\partial}{\partial r},$$

где $e_i = x_i/r$ – компоненты единичного вектора, направленного в точку наблюдения \vec{r} , получим:

$$p_1(\vec{r}, t) = \frac{\rho_0}{4\pi c_0^2 r} e_i e_j \int_{V_0} \ddot{T}_{ij}(\vec{r}', t - r/c) dV'. \quad (9.5.10)$$

Здесь точками обозначено дифференцирование по времени.

Оценим интенсивность излучения – количество энергии, излучаемой единицей массы в единицу времени $\dot{\mathcal{E}}$. Для этого запишем сначала *интенсивность звуковой волны* I – количество энергии, проходящей через единичную площадку, помещённую в волновой зоне перпендикулярно волновому вектору, в единицу времени. Если в некоторый момент времени в данной точке существует давление p_1 , а скорость частиц равна v , то $I = pv$. Учитывая соотношение $v = p/(\rho c_0)$, получим:

$$I = p_1^2/(\rho c_0).$$

Интеграл от интенсивности по замкнутой поверхности равен количеству звуковой энергии, излучаемой данным объёмом в единицу времени:

$$\oint I dS = \oint p_1^2/(\rho c_0) dS = \dot{\mathcal{E}}.$$

В случае изотропного излучения имеем:

$$\dot{\mathcal{E}} = 4\pi r^2 p_1^2/(\rho c_0) = \frac{\rho_0}{4\pi c^5} \left\{ e_i e_j \int_{V_0} \ddot{T}_{ij}(\vec{r}', t - r/c) dV' \right\}^2.$$

Оценку этой величины произведём, полагая $\ddot{T}_{ij} \sim u^4/l^2$, где u – характерная скорость турбулентного движения, а l – пространственные размеры её пульсаций (корреляционная длина поля случайного поля скоростей). В результате получаем, что интенсивность излучения пропорциональна восьмой степени скорости:

$$\dot{\mathcal{E}} \sim \frac{u^8}{c_0^5 l}.$$

9.5.5 Заключительные замечания

Сформулируем в заключение некоторые из рассмотренных нами положений. Не составляя полной картины такого сложного явления, как турбулентность, они дают, тем не менее, некоторые ориентиры в механике турбулентной среды.

- Турбулентность развивается при движении сплошной среды (жидкости, газа, плазмы) с относительно малой вязкостью ν , то есть при больших числах Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{lv}{\nu} \gg 1$$

(l и v – характерные размер и скорость среды). Турбулентность заложена даже в самой простой, бездиссипативной форме уравнений сплошной среды:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{\rho d\vec{v}}{dt} = \rho \operatorname{grad} p, \quad T = \text{const.}$$

- В турбулентном потоке присутствуют одновременно вихревые структуры различных масштабов L . Максимальный масштаб L_{\max} определяется размерами объёма жидкости (газа) (в несколько раз меньше его характерных размеров). Минимальный масштаб L_{\min} соответствует размерам мелких вихрей и определяется вязкой диссипацией сдвигового движения, когда $\operatorname{Re} = L_{\min} v / \nu \cong 1$.
- Основная часть энергии турбулентного движения сосредоточена в крупномасштабных пульсациях (вихрях). Для них $\operatorname{Re} = \operatorname{Re}_{\max} \cong 1$, диссипация турбулентной энергии обусловлена не вязкостью, а взаимодействием с более мелкими вихрями. Энергия крупномасштабных структур передаётся через вихри промежуточных размеров (инерционный интервал в спектре турбулентности) и диссипирует в молекулярных процессах при $L = L_{\min}$. Крупномасштабное турбулентное движение существенно неоднородно и анизотропно, зависит от конкретных начальных и конечных условий. В инерционном же интервале эта зависимость исчезает, пульсации становятся однородными и изотропными.
- Из теории размерностей получен закон двух третей Колмогорова и другие соотношения для пульсаций скорости и давления турбулентного движения в инерционном интервале:

$$\langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle = A_1 (\varepsilon_d r)^{2/3},$$

$$\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle = A_2 (\varepsilon_d r)^{3/2},$$

$$\langle (\Delta v_{\parallel})^3 \rangle = A_3 \varepsilon_d r,$$

$$\langle \Delta v_{\parallel} (\Delta v'_{\perp})^2 \rangle = A_4 \varepsilon_d r,$$

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle = A_5 \rho^2 (\varepsilon_d r)^{4/3}.$$

Здесь $\Delta \vec{v} = \vec{v}(\vec{r}_2) - \vec{v}(\vec{r}_1)$ – мгновенная разность скоростей среды в точках \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , находящихся на расстоянии $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = r$ друг от друга, Δv_{\parallel} и Δv_{\perp} – продольная и поперечная (по отношению к соединяющему эти точки отрезку) составляющие

разности скоростей, Δp – разность давлений в данных точках, $A_1 \cong 1,9$, $A_2 = (4/3)A_1$, $A_3 = -4/5$, $A_4 = -A_3/3$, $A_5 \cong 2$. Из этих выражений следует, что мелкомасштабные пульсации скорости и давления характеризуются меньшей амплитудой, чем крупномасштабные. Скорость диссипации турбулентной энергии в единице массы ε_d определяется крупномасштабным движением, её можно оценить соотношением $\varepsilon_d = Cv^3/l$, где C – безразмерная постоянная порядка единицы. Частота пульсаций для вихрей размером r

$$\nu_r \cong \varepsilon_d^{1/3} r^{-2/3}.$$

Характерное время перемешивания на расстояние r слоёв среды равно $1/\nu_r$.

- Спектр турбулентности – распределение удельной кинетической энергии $E_{\text{кин}}(k)$ по волновым числам флуктуаций k в инерционном интервале $l^{-1} \ll k \ll r_0^{-1}$ для изотропной турбулентности имеет вид

$$E_{\text{кин}}(k) = C_\varepsilon \left(\frac{\varepsilon_d^{2/3}}{k^{5/3}} \right)$$

(закон 5/3 Колмогорова-Обухова), то есть основная энергия содержится в крупных вихрях.

На стадии вырождения турбулентности (затухания движения после прекращения действия источника энергии крупномасштабно-го вихреобразования)

$$E_{\text{кин}}(k, t) = E_{\text{кин}}(k, 0)e^{-2\nu k^2 t},$$

где ν – молекулярная вязкость. Отсюда видно, что сначала угасают мелкие вихри, а затем – крупные. Если в турбулентном потоке произошло крупномасштабное перемешивание жидкостей или газов разных составов или температуры, то за это же время перемешались и все слои меньших масштабов вплоть до молекулярного уровня. Вследствие этого турбулентный перенос массы, импульса и энергии можно описывать в терминах турбулентной диффузии, вязкости и теплопроводности и использовать уравнения сплошной среды с эффективными коэффициентами диффузии $D_{\text{эфф}} = D + D_{\text{турб}}$, вязкости $\nu_{\text{эфф}} = \nu + \nu_{\text{турб}}$ и теплопроводности $\lambda_{\text{эфф}} = \lambda + \lambda_{\text{турб}}$. Крупномасштабные движения при этом определяются уравнениями сплошной среды, а мелкомасштабные учитываются с помощью полуэмпирических соотношений турбулентности, основанных на упрощающих предположениях. Вместе с уравнениями сплошной среды эти соотношения

образуют систему уравнения, для замыкания которой необходимо дополнительно задать значения одного или нескольких эмпирических параметров.

- Такой полумэмпирической моделью является, например, гипотеза (теория) пути смешения Прандтля, согласно которой турбулентные вязкость и температуропроводность определяются по профилю средней скорости сдвигового течения

$$\nu_{\text{турб}} = l_1^2 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad a_{\text{турб}} = \frac{\nu_{\text{турб}}}{Pr_{\text{турб}}},$$

где $Pr_{\text{турб}}$ – турбулентное число Прандтля, v – абсолютная величина осреднённой локальной скорости, y – координата в направлении наибольшего изменения скорости, перпендикулярном \vec{v} , l_1 – *длина пути смешения*. Теория пути смешения Прандтля позволяет получить решение для тех случаев, когда имеются рекомендации по выбору значения l_1 .

- Течение в пограничном слое у твёрдой непроницаемой стенки можно разбить на два подслоя. В непосредственной близости к ней находится вязкий подслой толщиной $y^* \cong 30\nu/v_\infty$ (v_∞ – скорость за пределами пограничного слоя), внутри которого молекулярная вязкость оказывает существенное влияние на течение. Профиль осреднённой скорости в вязком подслое параболический. Напряжение трения определяется молекулярной и турбулентной вязкостями и выражается формулой

$$\tau \cong ky \left(1 - e^{-v_\infty y / (\nu B)} \right).$$

Для гладких твёрдых стенок $B \cong 25$. На больших расстояниях y от стенки, $y^* < y < (0,1 \div 0,2)l_0$ (l_0 – см выше) движение определяется турбулентностью, средняя скорость зависит от расстояния до стенки по логарифмическому закону: $v \propto \ln y + \text{const}$.

9.5.6 О проблеме турбулентности

С незапамятных времён человек живёт в окружении турбулентных потоков воздуха и воды и настолько привык к ним, что больше удивляется зеркальной гладью неподвижного озера, чем пене на гребне набегающей волны. Первым, кто увидел в турбулентности проблему и оставил это видение потомкам, был, несомненно, великий Леонардо. Это было 500 лет назад, но лишь 4 века спустя был сделан первый научный шаг в направлении к решению этой проблемы, и сделал его Рейнольдс. Год появления его первой статьи – 1894 – можно считать годом рождения науки о турбулентности.

Прошло сто с лишним лет. Возникли и завершили построение своих основ такие науки как теория относительности, квантовая физика, ядерная физика, космология, молекулярная физика, физика плазмы, но проблему турбулентности ещё нельзя поставить в ряд решённых задач. «Последняя нерешённая проблема классической физики» – так отозвался о ней крупнейший специалист в этой области А. Яглом. В.Гейзенберг и фон Вайцзеккер, Л.Онзагер и Дж. фон Нейман, А.Колмогоров и А.Обухов, Л.Ландау и Е.Лифшиц – многие известнейшие физики оставили свой след на страницах этой увлекательной¹³, но так и не законченной ещё книги. Одна из семи проблем начавшегося тысячелетия – **Существование и гладкость решений уравнений Навье – Стокса** – имеет прямое отношение к завершению теории турбулентности. Дискуссии между Л.Ландау и А.Колмогоровым, построение Рюэлем альтернативной модели турбулентности, эти и другие инициативы продвигали согласие с экспериментальными данными, но всё оставались «белые пятна» расхождений. И хотя модель Рюэля дала новый импульс развитию сценариев перехода динамических систем к хаотическому режиму, открыв целое направление (странные аттракторы, бифуркации, аномальный транспорт, перемежаемость, фракталы) и стимулировав множество компьютерных вычислений, пятна оставались, и завершённой теории перехода течения жидкости от ламинарного режима к турбулентному не получилось. К такому выводу пришёл А. Яглом в своём докладе¹⁴.

10-20 лет назад исследования турбулентности сдерживались ограниченностью экспериментальных возможностей и чрезвычайной прихотливостью (высокой чувствительностью ко всякого рода возмущениям) уравнения Навье-Стокса. Развитие экспериментально-компьютерного обеспечения измерений и анализа их результатов, включая мощные лазерные источники системы и цифровые методы обработки изображений, вместе с использованием богатого опыта в области ядерно-физических, плазменных и космофизических исследований, открыли исследователям новые возможности. Примером такой инноватики служит высокоскоростной кремние-ленточный детектор, записывающий траектории частиц в турбулентной среде вместе с их мгновенными ускорениями¹⁵. Другой пример – технология определение тензора градиента трёхмерной скорости с высоким пространственно-

¹³Кому-то из этой когорты, приходилось даже слышать, что Эйнштейну, приписываются слова: – Да, я – старый человек, и когда я умру и предстану перед Ним, я обязательно спрошу Его о двух вещах: о квантовой электродинамике и о турбулентности. И более уверен, что получу ответ на первый вопрос, чем на второй.

¹⁴The Century of Turbulence Theory: The main achievements and unsolved problems, in *New Trends in Turbulence*, Lesieur M., et al.(eds.). Les Houches 074. Springer, 2001. – P.3-52.

¹⁵N.Mordant, A.M.Crawford, E.Bodenschatz. The 3D-structure of the Lagrangian acceleration in turbulent flows. *Phys Rev Lett*, 93.214501.

временным разрешением¹⁶, необходимого для вычисления скорости диссипации энергии и среднеквадратичной завихрённости. По мнению специалистов¹⁷, возможности 3-мерного моделирования турбулентных полей вместе со столь же подробным экспериментальным их изучением обещают революционные сдвиги в старинной науке о турбулентности. Наряду с обновлением классического математического аппарата: спектрального анализа, статистических методов, теории подобия и перенормировок, пертурбационных и вариационных подходов, совершенствованием динамического и статистического моделирования, расширением использования новых концепций в описании структур – фрактального анализа, вейвлет-анализа, перколяций и перемежаемости ожидается и появление более радикальных идей. Об этом пишет автор уже упоминавшейся выше статьи [12], поясняя эту мысль следующим образом.

«Объясню, что я имею в виду. В физике конденсированной среды, например, загадка сверхпроводимости была решена Бардином, Купером и Шриффером (1957), которые показали, как спаривание электронов при посредничестве ведёт к конденсации Бозе-Эйнштейна и порождает сверхпроводящее состояние. Несмотря на это решение, точные значения температур перехода в это состояние сверхпроводящих материалов не были вычислены из-за сложностей, порождаемых свойствами. Я полагаю, что есть надежда понять механизмы переноса турбулентной энергии, завихрённости и массы как между масштабами, так и между точками в пространстве. Понимание этого могло бы явиться признаком того, что загадка турбулентности решена. Однако, турбулентность представляет собой скорее не одну, а целый набор проблем, для решения которых могут потребоваться разные подходы. Как было бы интересно увидеть это новое обличье старейшей и богатейшей области физической науки!».

9.5.7 Упражнения

1. Выполнить переход от уравнения (9.5.8) к уравнению (9.5.7).
2. Выполнив предписанные действия, получить уравнение (9.4.2).
3. Найти интеграл Фурье от трёхмерного энергетического спектра (9.5.5).
4. Проверить, что функция (9.5.6) при указанных в тексте условиях является решением уравнения (9.5.5).
5. Выполнив все надлежащие действия, преобразовать формулу (9.5.8) в (9.5.10).

¹⁶B.M.Zeff et al. Measuring intense rotation and dissipation in turbulent flows. Nature 2003, **421**, 9, p.146-149.

¹⁷Ecke R. The Turbulence Problem. Los Alamos Science **29**, 2005, 123-141.



Глава 10

Упругая среда

10.1 Изотропная упругая среда

10.1.1 Выражение деформаций через напряжения

Существуют две в определённом смысле обратные друг другу стандартные задачи теории упругости: определение деформации по заданным силам (напряжениям) и определение напряжений по измеренным деформациям. В основе решения каждой из них лежит связь между напряжениями и деформациями. Простейший вариант её, относящийся к удлинению упругого стержня под действием малой растягивающей силы (*закон Гука*), имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma, \quad (10.1.1)$$

где E – положительная постоянная, характеризующая продольную упругость материала. Она называется *модулем Юнга* и измеряется в паскалях, обозначаемых Па ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$)¹. Модуль Юнга определяет тангенс угла наклона кривой деформирования $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ в её начальной (линейной) области. Заметим, что при $\varepsilon = 1$ $\sigma = E$, что даёт возможность истолковать модуль Юнга E как напряжение, необходимое для двукратного удлинения образца (если бы закон (10.1.1) продолжал оставаться справедливым)².

В общем случае трёхмерной упругой среды имеет место функциональное соотношение между тензорами напряжений и деформаций

¹Единица названа в честь французского физика и математика Блеза Паскаля.

²Относительное удлинение большинства твёрдых тел в области справедливости закона (10.1.1) редко достигает даже одного процента.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{kl}),$$

лишь при малых напряжениях принимающее линейный характер

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}.$$

В однородной изотропной среде обе СГО (как тензора деформаций, так и тензора напряжений) совпадают и можно пользоваться ими одновременно:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \approx a_{ij}\sigma_j.$$

Если бы напряжения в среде были таковы, что $\sigma_i = 0$ для всех направлений, кроме одного (скажем, $O1$), то линейное приближение в точности соответствовало бы закону Гука. Опыт показывает, однако, что удлинение образца в одном (продольном) направлении сопровождается сокращением его других (поперечных) размеров:

$$\varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1,$$

где $\nu > 0$ — коэффициент Пуассона. Поэтому в общем случае, когда все три главных напряжения отличны от нуля, удлинение образца в одном (i -м) направлении является результатом действия всех трёх напряжений:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_j}{E} + \frac{\sigma_k}{E} \right) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_i - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_i - \frac{\nu}{E}\text{Tr } \sigma_{ij}.$$

Переход от главных осей к произвольно направленным осям приводит к изменению диагональных и появлению недиагональных элементов тензора деформации (след³ его при этом сохраняется):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\text{Tr } \sigma_{ij}\delta_{ij}.$$

10.1.2 Коэффициент сжимаемости и модуль сдвига

Поместим единичный куб в жидкость под давлением p , создающим равные главные напряжения

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p.$$

Под их действием куб испытывает всестороннее равномерное сжатие:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \left(\frac{1+\nu}{E} - 3\frac{\nu}{E} \right) \sigma = \frac{1-2\nu}{E}\sigma = -\frac{1-2\nu}{E}p.$$

Относительное изменение (уменьшение) объёма

³Часто можно встретить другой символ следа: Sp (от нем. Spur).

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3 \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma = -3 \frac{1 - 2\nu}{E} p.$$

Величина

$$\varkappa = -\frac{1}{p} \frac{\Delta V}{V} = 3 \frac{1 - 2\nu}{E},$$

численно равная относительному уменьшению объёма единичным давлением, называется *коэффициентом сжимаемости*. Так как давление приводит только к сжатию (а не растяжению), коэффициент сжимаемости должен быть положительным, и, значит, коэффициент Пуассона должен удовлетворять условию

$$\nu \leq 1/2.$$

При $\nu = 1/2$ $\varkappa = 0$, то есть $\Delta V = 0$ – тело несжимаемо (элемент при деформации меняет только форму, но не объём).

Рассмотрим теперь касательные напряжения. Пусть в исходном положении единичного куба одна из его вершин находится в начале координат, а три грани лежат в координатных плоскостях. К грани $x_1 = 1$ приложена сила, равномерно распределённая по ней и направленная вдоль оси $O2$. В соответствии с физическим смыслом элементов тензора напряжений сила эта равна $\sigma_{12} \equiv \tau$, а в соответствии со свойством симметрии этого тензора такая же сила $\sigma_{21} = \tau$ действует на грань x_2 в направлении оси $O1$. В результате угол между ребрами, изначально параллельными осям $O1$ и $O2$, уменьшается на величину $\theta = 2\varepsilon_{12}$, называемую *углом сдвига*. Коэффициент пропорциональности

$$\mu = \frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_{12}} = \frac{\tau}{\theta}$$

называется *модулем сдвига*. Он связан с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона соотношением

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

10.1.3 Выражение напряжений через деформации

Разрешим полученные в 10.1.1 уравнения

$$\varepsilon_1 = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

относительно напряжений σ_i . Для этого

1) сложим их:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

2) найдем отсюда $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ и подставим в уравнение для ε_1

$$\varepsilon_1 = \frac{1 + \nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{1 - 2\nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

3) разрешим полученное уравнение относительно σ_1

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_1 + \frac{\nu}{1 - 2\nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right]$$

4) и перейдем в произвольную систему координат:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1 - 2\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right], \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1 + \nu}\varepsilon_{12}.$$

Вообще,

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu}\varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}.$$

10.1.4 Модули Ламэ и модуль объёмного сжатия

В теории упругости часто используются обозначения

$$\frac{E}{1 + \nu} = 2\mu, \quad \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \lambda,$$

где постоянные μ (уже известный нам модуль сдвига) и λ называются *модулями Ламэ*. В этих обозначениях

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}. \quad (10.1.2)$$

Другое представление для σ_{ij} основано на том, что всякую деформацию можно представить в виде суммы двух деформаций: *чистого сдвига* и *всестороннего сжатия*:

$$\varepsilon_{ij} = \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \right) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}.$$

След первого тензора $\varepsilon_{kk} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk} = 0$, он описывает чистый сдвиг, не изменяющий объёма. Используя это представление тензора деформаций в формуле (10.1.2), получим:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right) + \frac{2\mu}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = 2\mu\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right) + K\delta_{ij}\varepsilon_{kk}.$$

Введённый здесь коэффициент $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ называют *модулем объёмного сжатия* ($K = 1/\kappa$).

10.1.5 Условия равновесия деформаций

Теперь дифференциальные условия равновесия упругой среды можно выразить через компоненты тензора деформаций:

$$f_i + 2\mu\varepsilon_{ij,j} + \lambda\varepsilon_{kk,i} = 0.$$

Учитывая, что

$$\varepsilon_{1j} = \frac{u_{1,j} + u_{j,1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = u_{1,1}, \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}), \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) \end{cases}$$

и выполняя несложные преобразования, приходим к уравнению

$$f'_1 + \mu u_{1,jj} + (\mu + \lambda)u_{j,j1} = 0.$$

Повторяя эти выкладки для других проекций, получим искомое уравнение в координатах:

$$f'_i + \mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda)u_{j,ji} = 0. \quad (10.1.3)$$

Представим полученные условия равновесия в векторной форме. Для этого умножим обе части уравнения (10.1.3) на \vec{e}_i (напомним, что мы рассматриваем только малые деформации, в силу чего разница между НКС и ПКС несущественна) и просуммируем по i :

$$f'_i \vec{e}_i + \mu(u_i \vec{e}_i)_{,jj} + (\mu + \lambda)u_{j,ji} \vec{e}_i = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} (\vec{e}_i u_i)_{,jj} &= \vec{u}_{,jj} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_3^2} = \nabla^2 \vec{u}, \\ u_{j,ji} \vec{e}_i &= \frac{\partial u_{j,j}}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial u_{j,j}}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial u_{j,j}}{\partial x_3} \vec{e}_3 = \text{grad} u_{j,j} \end{aligned}$$

и

$$u_{j,j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \text{div} \vec{u},$$

представим уравнение (10.1.3) в векторном виде:

$$\vec{f} + \mu \nabla^2 \vec{u} + (\mu + \lambda) \text{grad} \text{div} \vec{u} = 0.$$

В качестве граничных условий задаются смещения $\vec{u}(\vec{r})$ на границах⁴.

⁴Учёт температурных напряжений приводит к появлению в этом уравнении дополнительного слагаемого $-(2\mu + 3\lambda)\alpha \text{grad} T$, содержащего коэффициент температурного расширения α и градиент температуры, но такие задачи в нашем курсе не рассматриваются.

Используя соотношение $\text{grad div } \vec{u} = \nabla^2 \vec{u} + \text{rot rot } \vec{u}$, можно переписать это условие в виде

$$\vec{f} + (2\mu + \lambda)\text{grad div } \vec{u} - \mu\text{rot rot } \vec{u} = 0.$$

Поверхностные силы входят в решение уравнений через граничные условия. Пусть $\vec{P}(\vec{r})dS$ – внешняя сила, действующая на элемент dS поверхности тела в окрестности точки \vec{r} , лежащей на этой поверхности. В состоянии равновесия она компенсируется силой $\sigma_{ij}n_j dS$, приложенной с противоположной стороны:

$$P_i = \sigma_{ij}n_j.$$

Это и есть искомое условие равновесия для поверхностной внешней силы.

10.1.6 Энергия упругой деформации

Энергия упругой деформации (*упругая энергия*) как потенциальная энергия межмолекулярных сил, рассматриваемая в масштабах, намного превышающих их радиус действия, может считаться аддитивной величиной. Она непрерывно распределена по объёму деформированного тела: её плотность там больше, где больше деформация. Обозначим через $U(\vec{r})$ объёмную плотность упругой энергии.

Рассмотрим единичный куб в главных осях – его упругая энергия как раз равна U . Под действием σ_1 грань подвинется на $\varepsilon_1 \equiv \delta\varepsilon_1$ и сила σ_1 совершит работу

$$\delta A_1 = \sigma_1 \delta\varepsilon_1 = \delta U = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} \delta\varepsilon_1.$$

Отсюда (см. 10.1.3)

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} = \sigma_1 = 2\mu\varepsilon_1 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2} = \sigma_2 = 2\mu\varepsilon_2 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_3} = \sigma_3 = 2\mu\varepsilon_3 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Интегрирование этих уравнений

$$U = \mu(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + (\lambda/2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2$$

даёт плотность упругой энергии как функцию главных деформаций. Для каждой точки пространства выбирается своя система координат, оси которой совпадают с главными осями деформаций её окрестности.

Чтобы упростить преобразование этой формулы к виду, пригодному для произвольной единой для всего упругого тела системы координат, вспомним, что существует два инварианта тензора: его след

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

и второй инвариант

$$\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1.$$

В результате получим

$$U = (\mu + \lambda/2)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 - 2\mu[\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)].$$

10.1.7 Упражнения

1. Выразить модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль объёмного сжатия через модули Ламэ.
2. Записать уравнение Ламэ для статических деформаций изотропной упругой среды

$$(\lambda + \mu)\text{grad div } \vec{u} + \mu\nabla^2 \vec{u} = 0$$

в проекциях на оси прямоугольной, цилиндрической и сферической систем координат.

3. Выразить элементы тензора напряжений σ_{ij} через объёмную плотность энергии упругих деформаций $U(\varepsilon_{ij})$.

10.2 Элементарные статические задачи

10.2.1 Плоская деформация

В статических задачах теории упругости исследуются равновесные состояния упругих тел при заданных внешних условиях. При такой постановке главный вектор и главный момент приложенных к телу внешних сил равны нулю. В качестве внешних условий могут фигурировать как внешние силы (поверхностные и объёмные), так и перемещения на граничных поверхностях тела. В реальных задачах чаще встречаются комбинации различных условий. В качестве искоемых величин выступают напряжения внутри тела, перемещения его точек (включая граничные). При задании граничных условий в рамках линейной теории упругости предполагается, что поверхность деформированного тела мало отличается от исходной. Ниже мы рассмотрим несколько таких задач.

Простейшим типом статической задачи является *плоская деформация*, когда одна из компонент вектора смещения (например, u_3) равна нулю, а две другие зависят лишь от координат x_1, x_2 . В этом случае

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

В отсутствие объёмных сил условия равновесия выражаются системой двух уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0.$$

Легко проверить, что удовлетворяющая этим уравнениям функция может быть представлена в виде частных производных

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}$$

от произвольной дважды дифференцируемой по этим переменным функции $\chi(x_1, x_2)$, называемой *функцией напряжений*. Чтобы получить уравнение для неё, обратимся к формулам **8.2.3**, содержащим выражения напряжений через деформации. С их помощью находим:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}).$$

В результате имеем

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \operatorname{div} \vec{u}.$$

Действуя на обе части этого уравнения оператором Лапласа и учитывая, что

$$\Delta \operatorname{div} \vec{u} = 0,$$

приходим к уравнению

$$\Delta^2 \chi = 0,$$

свидетельствующему о том, что функция напряжений $\chi(x_1, x_2)$ является бигармонической. Как только она известна, искомое напряжение определяется из уравнения

$$\sigma_{33} = \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nu \Delta \chi.$$

10.2.2 Сжатие тел равномерным давлением

Следующей по сложности задачей можно считать деформацию однородного шара, находящегося в среде с постоянным во всех её точках давлением p . Совершенно очевидно, что поле смещений является сферически симметричным, направленным к центру шара. Удобно решать задачу в сферической системе координат: в ней

$$\operatorname{rot} \vec{u} = [\nabla, (u_r(r)/r) \vec{r}] = [\nabla(u_r(r)/r), \vec{r}] + (u_r(r)/r) [\nabla, \vec{r}] = 0,$$

и уравнение равновесия имеет вид

$$\text{grad div } \vec{u} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u_r)}{dr} \right) = 0 \quad (10.2.1)$$

Двойное интегрирование даёт

$$u_r(r) = ar + \frac{b}{r^2},$$

отсюда

$$\varepsilon_{rr}(r) = a - \frac{2b}{r^3}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^3},$$

Очевидно, произвольную постоянную b следует положить равной нулю, иначе смещение центральной точки окажется бесконечным, что не имеет физического смысла. В результате $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi}$ для всех точек шара и

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{(1-\nu)\varepsilon_{rr} + 2\nu\varepsilon_{\theta\theta}\} = \frac{Ea}{1-2\nu}.$$

На поверхности шара ($r = R$) $\sigma_{rr}(R) = -p$, поэтому

$$a = -\frac{1-2\nu}{E}p$$

и окончательно имеем:

$$u_r(r) = -\frac{1-2\nu}{E}pr.$$

10.2.3 Сжатие тел объёмной силой

Снова рассмотрим шар, но теперь давление снаружи отсутствует, а шар деформируется только под действием собственного гравитационного поля. Объёмная плотность этой силы в точке \vec{r} шара выражается через ускорение свободного падения на поверхности g соотношением

$$\vec{f}(\vec{r}) = -(\rho g/R)\vec{r},$$

где g – ускорение свободного падения (напряжённость гравитационного поля) на поверхности шара. Снова мы имеем дело со сферически симметричной задачей, но уравнение радиальных смещений теперь неоднородное:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u_r)}{dr} \right) = \frac{\rho g r}{(2\mu + \lambda)R}.$$

Общее решение однородного уравнения мы уже знаем. Добавляя к нему частное решение неоднородного уравнения, получим:

$$u_r(r) = ar + \frac{b}{r^2} + cr^3, \quad c = \frac{\rho g}{10(2\mu + \lambda)R}.$$

Как и прежде, естественное условие ограниченности решения в области, занимаемой шаром, приводит к нулевому значению коэффициента b . Постоянную a в этой задаче определяет граничное условие $\sigma_{rr}(R) = 0$. В результате приходим к следующим выражениям для поля смещений и элементов тензора деформаций:

$$\begin{aligned} u_r &= cR^2 \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{3-\nu}{1+\nu} \right) r, \\ \varepsilon_{rr} &= cR^2 \left(3 \frac{r^2}{R^2} - \frac{3-\nu}{1+\nu} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} &= cR^2 \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{3-\nu}{1+\nu} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что внутри сферической части шара

$$r < r_1 = R \left(\frac{3-\nu}{3(1+\nu)} \right)^{1/2}$$

компонента ε_{rr} отрицательна, то есть вещество сжато, тогда как во внешней (относительно этой сферы) части рассматриваемого шара вещество растянуто. Давление в центре шара

$$p = \frac{3-\nu}{10(1-\nu)} g\rho R.$$

10.2.4 Цилиндрическая труба под давлением

Бесконечная (в направлении своей оси OZ) цилиндрическая труба с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 заполнена газом под давлением p . Снаружи давление отсутствует. Найти поле напряжений в стенках трубы.

Вместо уравнения (10.2.1) мы должны теперь воспользоваться его цилиндрическим аналогом

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d(\rho u_\rho)}{d\rho} \right) = 0.$$

Общее решение его имеет вид

$$u_\rho = a\rho + \frac{b}{\rho}.$$

Отличные от нуля компоненты тензора деформации находятся из общих формул для цилиндрической системы координат:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} = a - \frac{b}{\rho^2}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho} = a + \frac{b}{\rho^2}.$$

Используя граничные условия $\sigma_{\rho\rho}(R_1) = -p$, $\sigma_{\rho\rho}(R_2) = 0$, определим значения постоянных:

$$a = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{(1+\nu)(1+2\nu)}{E}, \quad b = \frac{pR_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{(1+\nu)}{E}.$$

Таким образом, для деформаций стенок трубы ($R_1 \leq \rho \leq R_2$) получаем:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{pR_1^2(1+\nu)}{(R_2^2 - R_1^2)E} \left(1 - 2\nu - \frac{R_2^2}{\rho^2} \right),$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^2(1+\nu)}{(R_2^2 - R_1^2)E} \left(1 - 2\nu + \frac{R_2^2}{\rho^2} \right).$$

Тензорное поле напряжений в стенках трубы даётся выражениями

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{\rho^2} \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{\rho^2} \right),$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\nu p R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

(остальные элементы тензора равны нулю).

10.2.5 Деформации стержней

В задачах с размерностью деформируемой среды меньше трёх (мембраны, стержни, струны) бывает удобнее вывести уравнения упругости непосредственно для конкретных ситуаций, а не из общих уравнений теории упругости (что, конечно, не означает отречения от общей теории). Ниже мы будем следовать этим путём.

Сжатие

Рассмотрим задачу о деформации вертикального стержня длиной l , стоящего на фиксированном нижнем основании в однородном поле

тяжести. Совместим начало координат с центром его нижнего основания, направив ось Oz вверх по оси стержня. Дифференциальные условия равновесия запишутся в виде

$$\sigma_{1j,j} = 0, \quad \sigma_{2j,j} = 0, \quad \sigma_{3j,j} = \rho g z.$$

На боковой поверхности обращаются в нуль все компоненты тензора напряжений кроме σ_{33} , а на верхнем основании равны нулю все его компоненты. Удовлетворяющие этим условиям решения имеют вид

$$\sigma_{ij} = 0, \quad i \neq 3, \quad j \neq 3; \quad \sigma_{33} = -\rho g(l - z).$$

По напряжениям определяем элементы тензора деформации

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = (\nu/E)\rho g(l - z), \quad \varepsilon_{33} = -(1/E)\rho g(l - z), \quad \varepsilon_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Выражая эти элементы через производные проекций вектора перемещений и интегрируя с учётом граничных условий, получим:

$$u_1 = (\nu/E)\rho g(l - z)x_1, \quad u_2 = (\nu/E)\rho g(l - z)x_2, \\ u_3 = -(1/2E)\rho g[l^2 - (l - z)^2 - \nu(x_1^2 + x_2^2)].$$

Ниже мы рассмотрим несколько примеров решения подобных задач.

Изгиб

Рассмотрим теперь типичные статические задачи на изгиб и кручение стержней (балок), продемонстрировав заодно, что в простой задаче бывает удобнее вывести подходящее уравнение деформации заново, чем приспособливать для её решения общее уравнение.

Пусть в исходном (недеформированном) состоянии однородная балка расположена горизонтально, её длина равна l , а площадь поперечного сечения S . Для дальнейших рассуждений удобно представить балку состоящей из бесконечно тонких горизонтальных слоев длины l . В процессе изгиба в вертикальной плоскости верхние слои растягиваются, нижние – сжимаются. Естественно предположить, что существует нейтральный слой, не изменяющий при изгибе своей длины. Обозначим через y вертикальную координату другого слоя относительно нейтрального ($y > 0$, если он расположен выше нейтрального, и $y < 0$, если ниже).

Пусть теперь балка изогнута так, что радиус изгиба нейтрального слоя равен R . Относительное удлинение слоя с координатой y и площадью поперечного сечения δS при этом равно

$$\frac{\delta l(y)}{l} = \frac{y}{R},$$

а действующая на него сила δF , определяемая законом Гука

$$\sigma = \frac{\delta F}{\delta S} = E \frac{\delta l}{l} = E \frac{y}{R},$$

равна⁵

$$\delta F = E \frac{y}{R} \delta S.$$

Поскольку на каждый слой с $y > 0$ сила (скажем, сила растяжения) действует в одну сторону, а на слой с $y < 0$ (сила сжатия) – в другую, то в целом в сечении x действует полный изгибающий момент сил

$$M = \int_S y \delta F = \int_S y \frac{Ey}{R} \delta S = \frac{E}{R} I,$$

где

$$I = \int_S y^2 \delta S$$

– «момент инерции» геометрического поперечного сечения балки относительно горизонтальной оси, проходящей через «центр масс» сечения перпендикулярно плоскости изгиба.

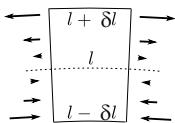


Рис. 10.1. Деформация элемента балки

Величина EI характеризует жёсткость балки: чем она больше, тем меньше изгибается балка под действием одного и того же изгибающего момента. Чтобы повысить жёсткость балки из данного материала, надо максимально увеличить I , то есть максимально удалить массу от нейтрального слоя (сохраняя, тем не менее, прочностные свойства конструкции). Типичные примеры – железнодорожные рельсы, двутавровые балки в строительных конструкциях.

Рассмотрим консольную балку – однородную горизонтально расположенную балку длиной L , один конец которой заделан в стенку, а к другому концу приложена сила F_0 , направленная вертикально вниз. Саму балку считаем невесомой.

Обозначим через $z(x)$ изгиб балки на расстоянии x от стенки. Соответствующая этому изгибу кривизна R определяется соотношением

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 z}{dx^2}.$$

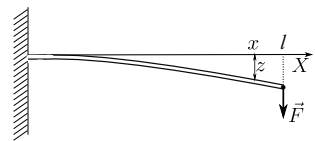


Рис. 10.2. Изгиб консольной балки

⁵Учёт поперечных деформаций Пуассона уточняет эту формулу: $\sigma = Ey/[(1 - \nu^2)R]$.

Полный изгибающий момент M силы F_0 относительно точки x равен

$$M = (l - x)F_0.$$

В статическом случае он уравновешивается моментом упругих сил,

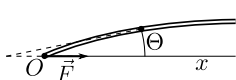
$$M = \frac{EI}{R} = EI \frac{d^2 z}{dx^2},$$

и мы приходим к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{F_0}{EI}(l - x)$$

с граничными условиями $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$.

Интегрирование полученного уравнения дает



$$z = \frac{F}{EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

Рис. 10.3. Изгиб балки продольной нагрузкой

Подставляя сюда $x = l$, видим, что отклонение конца балки

$$z(l) = \frac{F_0 l^3}{EI 3}$$

пропорционально *кубу её длины*.

Изгиб (прогиб) балок наблюдается и при продольных нагрузках, когда они превышают некоторое критическое значение. В этом случае балка удерживается в согнутом виде двумя противоположно направленными силами F , давящими на её концы. Момент силы в точке с координатой x $Fz(x)$ равен моменту упругих сил

$$Fz = \frac{EI}{R},$$

а радиус кривизны определяется соотношением

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 z}{dx^2}.$$

Из двух этих соотношений следует уравнение, совпадающее по форме с уравнением малых колебаний математического маятника (если x интерпретировать как время).

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{F}{EI}z,$$

Его решение при граничных условиях $z(0) = z(l) = 0$ имеет вид *полу-волны*

$$z = K \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Более точная формулировка рассматриваемой задачи даётся уравнением

$$\frac{d^2\theta}{d\tilde{l}^2} = -\frac{F}{EI} \sin\theta,$$

в котором \tilde{l} – расстояние до точки вдоль балки, а $\theta = \theta(\tilde{l})$ – угол наклона касательной в этой точке к первичному направлению. Это уравнение совпадает с уравнением маятника, совершающего колебания с произвольной амплитудой.

Кручение

Рассмотрим теперь однородный, цилиндрический стержень радиусом R и длиной l с осью OX . Один его конец закреплён, а к другому приложен крутящий момент M , под действием которого это незакрепленное основание поворачивается на некоторый угол Φ и остаётся в таком положении, когда крутящий момент M уравновешивается моментом упругих сил. В линейном приближении угол закручивания конца стержня пропорционален крутящему моменту:

$$M = \kappa\Phi.$$

Наша задача – определить зависимость *крутильной жёсткости* κ от длины стержня, его радиуса и свойств материала

Подобно тому, как мы представляли себе балку, набранную из бесконечно тонких слоев конечной ширины и длины, представим сплошной стержень состоящим из множества вставленных друг в друга полых цилиндров («трубок») со стенками толщиной δr , а каждую трубку – из множества параллелепипедов размерами $\delta r \times \delta s \times l$ (δs – элемент длины окружности основания). В процессе закручивания каждый из них деформируется с углом сдвига $\theta = 2\varepsilon_{12} = \Phi r/l$, пропорциональным расстоянию r от оси. Соответствующий элемент тензора напряжений имеет вид

$$\tau = \mu\theta = \mu\Phi r/l,$$

где $\mu = E/[2(1+\nu)]$ – модуль сдвига (см. 10.1.2). На заштрихованную грань параллелепипеда (см. рис. 10.5) действует крутящая сила $\delta F = \tau\delta r\delta s$, создающая момент относительно оси, равный

$$\delta M = \tau\delta r\delta s \cdot r = \mu\Phi r^2\delta r\delta s/l.$$

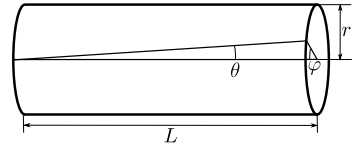


Рис. 10.4. Кручение стержня

Интегрированием по s находим момент сил, действующий на полу трубку толщиной δr ,

$$dM = 2\pi\mu\Phi r^3 dr/l,$$

а последующим интегрированием по радиусу – и суммарный момент, действующий на весь стержень:

$$M = [(\pi/2)\mu R^4/l]\Phi. \quad (10.2.2)$$

Таким образом, крутильная жёсткость цилиндрического стержня

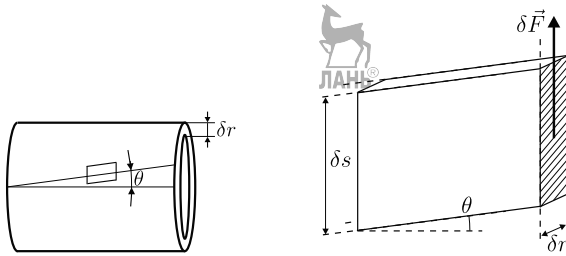


Рис. 10.5. Кручение полый трубы. Деформация элемента её стенки

$$\kappa = \mu \frac{\pi R^4}{2l}$$

пропорциональна четвёртой степени его радиуса и обратно пропорциональна его длине.

10.2.6 Упражнения

1. Найти деформацию (поле смещений) сферической оболочки с внутренним давлением p и радиусами R_1 и $R_2 > R_1$. Давление снаружи отсутствует.
2. Найти давление в центре шара, обусловленное взаимным гравитационным притяжением его частей.
3. Найти деформацию однородного бесконечного цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси.

10.3 Волны в упругой среде

10.3.1 Динамические уравнения теории упругости

Уравнения локального равновесия, выведенные выше, можно использовать и для описания динамики упругого тела. Для этого достаточно заменить \vec{f} объёмной плотностью сил инерции

$$-\rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} \approx -\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}.$$

Замена эта является отражением того факта, что связанная с данным элементом среды система координат в случае его движения оказывается неинерциальной, а замена полной производной по времени частной производной объясняется малостью последнего слагаемого в точной формуле

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}.$$

В результате приходим к динамическому уравнению теории упругости (уравнению Ламэ) в векторной форме:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \vec{u} + (\mu + \lambda) \text{grad div} \vec{u}.$$

Внешние объёмные силы учитываются добавлением в правую часть объёмной плотности сил \vec{f} :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \vec{u} + (\mu + \lambda) \text{grad div} \vec{u} + \vec{f}.$$

Координатная форма динамического уравнения упругости имеет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda) u_{j,ji} + f_i.$$

10.3.2 Волны продольные и поперечные

Важнейшим, можно сказать, единственным типом движения упругой среды, представляющим наибольший практический интерес, является волновое движение. Физическая природа волн обусловлена двумя важнейшими свойствами сплошной среды – упругостью и инерционностью. Упругость проявляется в способности среды оказывать сопротивление изменению её объёма и формы, инерционность обуславливает сопротивление изменению её динамического состояния, то есть изменению скорости.

Рассмотрим плоскую задачу, когда вектор смещения не зависит от x_2 и x_3 : $\vec{u} = \vec{u}(x)$, $x = x_1$. В этом случае его дивергенция равна частной производной $\text{div} \vec{u} = \partial u_1 / \partial x$, и (в отсутствие объёмных сил) мы имеем систему уравнений

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2},$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2},$$

описывающих плоские волны. Первое из них, содержащее смещение u_1 вдоль x_1 , описывает продольную волну (волну сжатия-растяжения), распространяющуюся с фазовой скоростью

$$c_{\parallel} = \sqrt{(2\mu + \lambda)/\rho}$$

вдоль оси x_1 . Два вторых уравнения, содержащих u_2 и u_3 , описывают поперечную волну (волну сдвигов), распространяющуюся в том же направлении, но с другой фазовой скоростью:

$$c_{\perp} = \sqrt{\mu/\rho}.$$

В случае, когда модуль Ламэ μ равен нулю, эта вторая скорость равна тоже нулю: поперечные волны не могут распространяться в упругой среде, если в ней отсутствуют касательные напряжения. В отличие от продольных волн, прохождение поперечных волн в среде не сопровождается изменением объёма составляющих её элементов: $u_1 = 0$, а u_2 и u_3 не зависят от x_2 и x_3 , так что дивергенция \vec{u} , определяющая локальное изменение единичного объёма среды, в этом случае равна нулю,

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0.$$

Однако

$$\operatorname{rot} \vec{u} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \vec{e}_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \vec{e}_3 \neq 0.$$


Это свидетельствует о том, что распространение поперечной, сдвиговой волны в упругом теле сопровождается вращением частиц среды вокруг осей, перпендикулярных направлению её распространения.

Отношение фазовых скоростей продольной и поперечной волн

$$\frac{c_{\parallel}}{c_{\perp}} = \sqrt{2 + \lambda/\mu} = \sqrt{\frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu}}$$

зависит только от коэффициента ν . Для многих веществ $\nu = 1/4$ и $c_{\parallel}/c_{\perp} = \sqrt{3}$. При землетрясениях наблюдаются обе волны. По изменениям отношений скоростей можно определить величину ν для той части земной коры, в которой распространяются эти волны. Она оказывается равной значению 0,29. По разности же времен прихода фронтов этих волн в пункт наблюдения Δt можно судить о расстоянии R

до эпицентра землетрясения:



$$\Delta t = R \left(\frac{1}{c_{\perp}} - \frac{1}{c_{\parallel}} \right).$$

Мы рассматривали плоскую волну, однако подобное разделение волны на две независимые компоненты – продольную и поперечную – возможно осуществить и в случае произвольной (не плоской) волны, распространяющейся в безграничном пространстве. В основе этого разложения лежит известное положение векторного анализа о представлении произвольного векторного поля в виде суммы потенциальной и соленоидальной составляющих, выражающихся через скалярный и векторный потенциалы. Обозначив их через φ и \vec{A} соответственно и применив это положение к полю смещений \vec{u} ,

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \text{grad}\varphi(\vec{r}, t) + \text{rot}\vec{A}(\vec{r}, t)$$

при условии $\text{div}\vec{A} = 0$, подставим это разложение в уравнение движения (при $\rho = \text{const}$):

$$\text{grad} \left[\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\Delta\varphi \right] + \text{rot} \left[\rho \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\Delta\vec{A} \right] = 0.$$

Взяв дивергенцию от этого равенства, получим

$$\text{divgrad} \left[\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\Delta\varphi \right] \equiv \Delta \left[\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\Delta\varphi \right] = 0.$$

Стало быть, содержимое квадратных скобок является гармонической функцией во всем пространстве, которую можно положить равной нулю и, тем самым, прийти к волновому уравнению для скалярного потенциала

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_{\parallel}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Применяя операцию взятия ротора вместо дивергенции и пользуясь свойством соленоидальности вектора в квадратных скобках, получим:

$$\text{rot rot} \left[\rho \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\Delta\vec{A} \right] = -\Delta \left[\rho \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\Delta\vec{A} \right] = 0.$$

Следовательно, непрерывный вектор в квадратных скобках является гармоническим во всем пространстве, и поэтому векторный потенциал

смещений удовлетворяет, как и скалярный, волновому уравнению

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Нетрудно проверить, что построенное из этих потенциалов решение действительно удовлетворяет уравнению Ламэ. В частности, в случае плоской задачи, когда вектор перемещений имеет две отличные от нуля проекции u_1 и u_2 , не зависящие от x_3 , полученные соотношения можно записать в более простом виде через скалярные функции (потенциалы) φ и ψ :

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (10.3.1)$$

Задача свелась к интегрированию двух не связанных друг с другом скалярных волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c_{\parallel}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (10.3.2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c_{\perp}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (10.3.3)$$

10.3.3 Волны на поверхности упругой среды

Выше мы рассматривали безграничную однородную среду, волны в которой можно получить комбинированием продольных и поперечных решений независимых волновых уравнений. Наличие границ может существенно усложнить задачу, граничные условия могут связывать различные типы волн, порождать их расщепление и взаимодействие. В наиболее простых случаях границы являются свободными (напряжения на них равны нулю) или закреплёнными (смещения на них равны нулю). Рассмотрим частную задачу о распространении плоской (волновой вектор параллелен плоскости XOY) волны в однородной упругой среде, занимающей полупространство $x_2 = y > 0$, со свободной поверхностью $y = 0$, на которой

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{32} = 0.$$

Используя связи между σ_{ij} и ε_{ij} , между ε_{ij} и u_i , между u_i и потенциалами φ и ψ (10.3.1), можно установить граничные условия для потенциалов:

$$\left[c_{\parallel}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + (c_{\parallel}^2 - 2c_{\perp}^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - 2c_{\perp}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right]_{x_2=0} = 0,$$

$$\left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right]_{x_2=0} = 0. \quad (10.3.4)$$

В такой полубесконечной упругой среде могут существовать волны, распространяющиеся в приповерхностном слое с амплитудой, убывающей по мере углубления в среду (увеличения y). Потенциалы такой волны, распространяющейся вдоль OX , ищем в виде

$$\varphi(x, y, t) = \varphi_0(y) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \psi(x, y, t) = \psi_0(y) e^{i(kx - \omega t)} \quad (10.3.5)$$

Подставив (10.3.5) в (10.3.2) и (10.3.3), видим, что φ_0 и ψ_0 должны удовлетворять уравнениям

$$\varphi_0'' - (k^2 - k_1^2) \varphi_0 = 0, \quad \psi_0'' - (k^2 - k_2^2) \psi_0 = 0, \quad (10.3.6)$$

где

$$k_1 = \omega/c_{\parallel}, \quad k_2 = \omega/c_{\perp}.$$

Чтобы волна была поверхностной, то есть, чтобы амплитуда её убывала с ростом y , необходимо выполнение условий

$$k^2 > k_1^2, \quad k^2 > k_2^2,$$

иначе φ_0 и ψ_0 окажутся периодическими функциями глубины. Поскольку $k_1 < k_2$, отсюда следует, что скорость бегущей поверхностной волны в упругой полубесконечной среде должна быть меньше скорости поперечной (а тем более, продольной) волн.

Общие решения уравнений (10.3.6) для амплитуд поверхностных волн запишутся в виде

$$\varphi_0 = A e^{-py} + A' e^{py}, \quad \psi_0 = B e^{-qy} + B' e^{qy},$$

где $p = \sqrt{k^2 - k_1^2}$ и $q = \sqrt{k^2 - k_2^2}$. Постоянные A' и B' из очевидных соображений следует принять равными нулю, в результате получим:

$$\varphi = A e^{-py} e^{i(kx - \omega t)}, \quad \psi = B e^{-qy} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (10.3.7)$$

Подставим эти решения, содержащие неопределённые постоянные A , B , k , в граничные условия (10.3.4):

$$[2k^2 - (c_{\parallel}/c_{\perp})^2 k_1^2] A + 2ik \sqrt{k^2 - k_2^2} B = 0, \quad (10.3.8)$$

$$-2ik \sqrt{k^2 - k_1^2} A + (2k^2 - k_2^2) B = 0. \quad (10.3.9)$$

Система однородных уравнений имеет нетривиальные решения при условии, что её определитель равен нулю:

$$[2k^2 - (c_{\parallel}/c_{\perp})^2 k_1^2](2k^2 - k_2^2) - 4k^2 \sqrt{(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2)} = 0.$$

Выражая здесь волновое число k поверхностной волны через её фазовую скорость $c = \omega/k$, приходим к уравнению Рэлея

$$\left(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{c_{\perp}^2}\right)^2 - \frac{4}{c^2} \sqrt{\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_{\perp}^2}\right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_{\parallel}^2}\right)} = 0.$$

Можно показать, что отношение $\xi = c/c_{\perp}$ зависит только от коэффициента Пуассона и при возрастании его от 0 до 0,5 увеличивается от 0,874 до 0,955. Заметим, что скорости c_{\parallel} , c_{\perp} и c не зависят от длины волны или частоты колебаний: в *абсолютно упругой среде дисперсия волн отсутствует*.

Завершим решение задачи вычислением смещений в поверхностной волне. Подставив (10.3.7) в (10.3.1), получим:

$$u_1 = (ikAe^{-py} - qBe^{-qy}) e^{i(kx - \omega t)},$$

$$u_2 = -(pAe^{-py} + ikBe^{-qy}) e^{i(kx - \omega t)}.$$

Из (10.3.8) следует, что отношение

$$\frac{A}{B} = -ib, \quad b \equiv \frac{2\sqrt{1 - \xi^2}}{2 - \xi^2}$$

постоянно для каждого материала. В результате получаем: для волны продольных колебаний

$$u_1 = B (bke^{-py} - qe^{-qy}) e^{i(kx - \omega t)},$$

для волны поперечных колебаний

$$u_2 = iB (bpe^{-py} - ke^{-qy}) e^{i(kx - \omega t)}.$$

Длины волн обоих типов здесь одинаковы: $\lambda = 2\pi/k$.

Пользуясь приведёнными решениями, найдём глубины проникновения y_{\parallel} и y_{\perp} поверхностных волн обоих типов – расстояния от поверхности, на котором их амплитуды убывают в e раз:

$$y_{\parallel} = \frac{1}{p} = \frac{1}{k\sqrt{1 - (c/c_{\parallel})^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{1 - (c_{\perp}/c_{\parallel})^2\xi^2}}$$

и

$$y_{\perp} = \frac{1}{q} = \frac{1}{k\sqrt{1 - (c/c_{\perp})^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

При $\nu = 1/2$, в частности, имеем:

$$y_{\parallel} = \frac{1}{2\pi}\lambda, \quad y_{\perp} \approx \frac{\sqrt{10}}{12\pi}\lambda.$$

В обоих случаях глубина проникновения составляет долю длины поверхностной волны λ , продольная составляющая её оказывается более «мелкой»: глубина её в 3 с лишним раза меньше глубины поперечной составляющей.

10.3.4 Прохождение волны через плоскую границу

Простейшей задачей на распространение волн в неоднородной среде является задача о прохождении волн через плоскую границу, разделяющую две однородные жидкости с разными свойствами. Пусть плоская звуковая волна падает на границу раздела $x = 0$ сред 1 и 2 под углом θ к оси OX :

$$\varphi_1(\vec{r}, t) = A_1 e^{i(k_{1x}x + k_{1y}y + k_{1z}z - \omega t)} = A_1 e^{i(k_{1y}y + k_{1z}z)} e^{i(k_{1x}x - \omega t)}.$$

Наличие границы приводит к появлению *отражённой*

$$\varphi'_1(\vec{r}, t) = A'_1 e^{i(k'_{1y}y + k'_{1z}z)} e^{i(k'_{1x}x - \omega t)}$$

и *преломлённой*

$$\varphi_2(\vec{r}, t) = A_2 e^{i(k_{2y}y + k_{2z}z)} e^{i(k_{2x}x - \omega t)}$$

волн.

Порождаемые границей *граничные условия* в данном случае не зависят ни от y и z , ни от t . Пусть волновой вектор падающей волны лежит в плоскости XOY : $k_{1z} = 0$. Тогда и $k'_{1z} = k_{2z} = 0$ – все три направления (падающей, отражённой и преломлённой волн) лежат в одной плоскости. Из условия $k_{2y} = k'_{1y}$ следует

$$(\omega/c_1) \sin \theta_1 = (\omega/c_1) \sin \theta'_1,$$

то есть $\theta_1 = \theta'_1$ – угол падения равен углу отражения. Из условия

$$(\omega/c_1) \sin \theta_1 = (\omega/c_2) \sin \theta_2,$$

следует

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

– закон Снеллиуса. Отношение скоростей c_2/c_1 называется *коэффициентом преломления*.

Пусть $c_1 < c_2$, например, звуковая волна падает из воздушного полупространства ($c_1 = 333$ м/с) в воду ($c_2 = 1440$ м/с). Если направить её под углом, синус которого равен отношению c_1/c_2 , то $\theta_2 = \pi/2$ – преломленного луча не будет, наступит *полное внутреннее отражение*. Угол $\theta_c = \arcsin(c_1/c_2)$ называется *критическим* (для перехода воздух-вода $\theta_c = 13^\circ$). Полное внутреннее отражение имеет место при всех углах падения больше критического.

10.3.5 Приближение эйконала

Здесь мы рассмотрим ситуацию в определённой степени обратную: свойства среды, в которой распространяется звуковая волна, медленно меняются от точки к точке, оставаясь практически постоянными на расстояниях порядка нескольких длин волн. Пример – распространение звука в атмосфере Земли. В каждой малой пространственно-временной области \mathcal{D} при этом волну можно представить себе как плоскую и приписать центральной точке этой области волновой вектор $\vec{k}(\vec{r}, t)$ и частоту $\omega(\vec{r}, t)$. Геометрическое изображение такого движения даётся полем волновых векторов, касательных к непрерывным кривым – *звуковым лучам*. Такой подход к описанию распространения звука в среде с медленно меняющимися свойствами называется *геометрической акустикой*.

Чтобы вывести основное уравнение геометрической акустики, запишем потенциал скорости в виде

$$\varphi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t)e^{i\Psi(\vec{r}, t)},$$

считая амплитуду A медленно меняющейся функцией координат и времени, а фазу Ψ близкой к линейной функции. Разложим последнюю в ряд:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 + \vec{r}\nabla\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial t}t.$$

Сопоставив это выражение с фазой плоской волны

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 + \vec{k}\vec{r} - \omega t,$$

ПОЛОЖИМ

$$\nabla\Psi = \vec{k}, \quad \omega = -\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Используя соотношение $k^2 = \omega^2/c^2$, приходим к основному уравнению геометрической акустики и оптики

$$(\nabla\Psi)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} \right)^2 = 0.$$

Функция $\Psi(\vec{x}, t)$ называется *эйконалом*. В неоднородной среде скорость звука c может зависеть от координат.

Если найден эйконал как функция координат и времени, можно найти поле скоростей, распределение давления и другие характеристики звуковых волн. В частности, для плотности распределения звуковой энергии \mathcal{E} получаем соотношение

$$\operatorname{div} \left(\frac{c\mathcal{E}\nabla\Psi}{|\nabla\Psi|} \right) = 0,$$

следующее из того, что в стационарных условиях дивергенция вектора плотности тока звуковой энергии $c\mathcal{E}\vec{k}/k = c\mathcal{E}\nabla\Psi/|\nabla\Psi|$ равна нулю.

10.3.6 Упражнения

1. Найти решение уравнения $\partial^2 u(\vec{r}, t)/\partial t^2 = c^2 \Delta u(\vec{r}, t) + \delta(\vec{r})\delta(t)$ при $u(\vec{r}, t) = 0$ ($t < 0$) и нулевых условиях на бесконечности. Дать ему физическую интерпретацию.
2. Найти собственные частоты колебаний жидкости в сосуде, имеющем форму параллелепипеда.
3. Сферическая звуковая волна $\varphi(r, t)$ распространяется в однородной среде от точечного источника. Показать, что функция $f(r, t)$ удовлетворяет одномерному волновому уравнению.
4. Показать, что функция

$$\varphi(r, t) = A \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}, \quad r \geq 0,$$

удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi A e^{-i\omega t} \delta(\vec{r}).$$

10.4 Стержни и мембраны

10.4.1 Волны в бесконечном стержне

Уравнение

Как и в стационарных задачах теории упругости, в задачах, связанных с колебаниями, удобно (в смысле наглядности и интуитивного

сопровождения решения) исходить не из общих решений, а заново выводить уравнения из принципов теории упругости применительно к конкретной рассматриваемой задаче.

Рассмотрим однородный упругий стержень с единичным поперечным сечением и осью, направленной вдоль координатной оси OX . Выделим в покоящемся стержне элементарный объём, заключённый между сечениями (гранями) с координатами x и $x + \delta x$. В результате волнового движения первая грань к моменту времени t получит смещение $u(x, t)$, вторая сместится на величину $u(x + \delta x, t)$. При малых смещениях разность между ними запишется в виде

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x = \varepsilon \delta x,$$

где ε – линейная деформация (относительное удлинение). Сжатие (при $\varepsilon < 0$) или растяжение (при $\varepsilon > 0$) порождает пропорциональный ему (положительный или отрицательный) избыток давления

$$p = -K \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (10.4.1)$$

где K – коэффициент объёмной упругости, связанный с коэффициентом сжимаемости κ обратным соотношением $K = 1/\kappa$. Падение давления на гранях рассматриваемого элемента, взятое с обратным знаком,

$$-\delta p = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x$$

равно действующей на элемент силе, точнее – проекции силы на ось OX (напомним, площадь поперечного сечения стержня равна единице). Эта сила сообщает элементу массой $\rho \delta x$ ускорение $d^2u/dt^2 \approx \partial^2 u / \partial t^2$. Согласно второму закону Ньютона

$$\rho \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x.$$

Сокращая на δx и подставляя сюда (10.4.1), получаем одномерное волновое уравнение

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Левая часть этого уравнения отражает инерционные свойства рассматриваемого стержня, правая – свойства упругости. Приведём его к стандартной форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

где $c = \sqrt{K/\rho} = 1/\sqrt{\kappa \rho}$ – фазовая скорость одномерной волны.

Бегущие волны



Непосредственной подстановкой

$$u(x, t) = f(x \mp ct)$$

легко убедиться, что при любой дважды дифференцируемой $f(z)$ эти функции являются решениями рассматриваемого уравнения (решения Даламбера). Линейная суперпозиция этих волн

$$u(x, t) = C_1 f_1(x - ct) + C_2 f_2(x + ct)$$

тоже является его решением. В этом проявляется важнейший принцип волновой механики – *принцип суперпозиции*. Чтобы получить требуемое частное решение, необходимо задать два начальных и два граничных условия. Начальные условия задают обычно в виде распределения смещений $u(x, 0) = \varphi(x)$ и скоростей $\dot{u}(x, 0) \equiv \partial u(x, t)/\partial t|_{t=0} = \psi(x)$. Граничные условия задают состоянием упругой среды $u(x_1, t)$ и $u(x_2, t)$ на её границах x_1 и x_2 .

При рассмотрении распространения пространственно ограниченно-го возмущения по бесконечно протяжённому стержню граничные условия следует взять нулевыми на бесконечности:

$$u(-\infty, t) = u(\infty, t) = 0, \quad u'(-\infty, t) = u'(\infty, t) = 0$$

(точкой мы отмечаем производную по времени, штрихом – по координате). Начальные условия формально имеют вид:

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= \varphi(x), \\ -f_1'(x) + f_2'(x) &= \frac{1}{c} \psi(x). \end{aligned}$$

Проинтегрировав последнее уравнение, решим полученную систему:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} [\varphi(x) - \phi(x)], \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} [\varphi(x) + \phi(x)], \end{aligned}$$

где

$$\phi(x) = \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(x) dx.$$

В результате имеем: при $\phi(x) = -\varphi(x)$ – волну, бегущую в положительном направлении оси OX ,

$$u(x, t) = \varphi(x - ct),$$

при $\phi(x) = \varphi(x)$ – волну, бегущую в отрицательном направлении оси OX ,

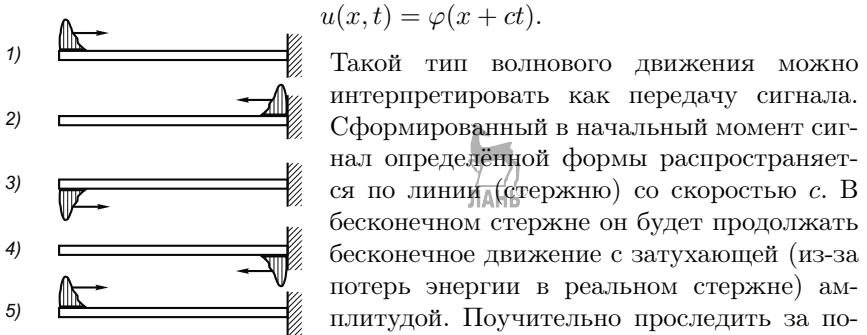


Рис. 10.6. Распространение сигнала в балке с одним свободном концом

Такой тип волнового движения можно интерпретировать как передачу сигнала. Сформированный в начальный момент сигнал определённой формы распространяется по линии (стержню) со скоростью c . В бесконечном стержне он будет продолжать бесконечное движение с затухающей (из-за потерь энергии в реальном стержне) амплитудой. Поучительно проследить за поведением фиксированной точки стержня x_1 . Пусть, например, начальное возмущение сосредоточено на отрезке $[0, a]$, тогда точка $x_1 > a$ стержня будет находиться в покое до момента времени $t_1 = (x_1 - a)/c$, после чего она придёт в движение в соответствии с профилем возмущения и к моменту времени $t_2 = x_1/c$ вернется в исходное состояние и останется там. Отметим, что временная развертка сигнала оказывает инвертированной по отношению к пространственной форме (рис. 10.6). Если же ударить справа, чтобы сигнал пошел налево, то временная и пространственная развертки будут выглядеть одинаково.

Пусть теперь $\phi(x) = 0$, скорости всех точек стержня равны нулю в начальный момент времени. В этом случае решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)].$$

Начальное возмущение при этом *расщепляется*, получаются две волны одного и того же профиля, но половинной амплитуды, бегущие в противоположные стороны (см. рис. 10.6). Заметим, что при этом сохраняется *чётность*: **чётная начальная функция** $\varphi(x) = \varphi(-x)$ порождает **чётную волну** $u(x, t)$, **нечётная** $\varphi(x) = \varphi(-x)$ – **нечётную волну**. Очевидно, что непрерывная нечётная функция и производная дифференцируемой чётной функции равны нулю в начале координат.

Общее решение Даламбера запишется в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(x) dx \right]. \quad (10.4.2)$$

Гармонические волны

Важным частным случаем одномерной волны является *монохроматическая гармоническая волна*

$$\phi(x, t) = a \cos(kx - \omega t + \alpha) = \operatorname{Re} \left\{ A e^{i(\pm kx - \omega t)} \right\}.$$

Плюс перед волновым числом k соответствует распространению волны в положительном направлении оси OX , минус – в отрицательном. Циклическая частота ω связана с волновым числом *дисперсионным уравнением*

$$\omega = \omega(k).$$

Если соотношение это сводится к линейному однородному

$$\omega = ck, \quad c = \text{const},$$

то говорят, что дисперсия волн отсутствует.

Пусть одномерная волна, распространяющаяся вдоль оси OX , представляет собой набор (группу) монохроматических волн с дискретно или непрерывно распределенными в интервале (a, b) волновыми числами k и частотами $\omega = \omega(k)$.

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} \sum_k A_k e^{i\Delta k(x - \omega(k)t)}, & (\text{дискр}), \\ \int_a^b A(k) e^{i\Delta k(x - \omega(k)t)} dk, & (\text{непр}). \end{cases}$$

Предположим, что $\omega(k)$ мало меняется в указанном интервале и, разложив показатель экспоненты в ряд около внутренней точки $k_0 \in (a, b)$, ограничимся первым порядком малости:

$$kx - \omega(k)t = k_0x - \omega_0t + \Delta k(x - \omega'_0t),$$

где $\Delta k = k - k_0$, $\omega_0 = \omega(k_0)$ и $\omega'_0 = (d\omega/dk)|_{k=k_0}$. В результате приходим к формуле

$$\varphi(x, t) = B(x - \omega'_0t) e^{i(k_0x - \omega_0t)},$$

где

$$B(x - \omega'_0 t) = \begin{cases} \sum_k A_k e^{i\Delta k(x - \omega'_0 t)}, & \text{(дискр)} \\ \int_a^b A(k) e^{i\Delta k(x - \omega'_0 t)} dk & \text{(непр)} \end{cases}$$

— *огibaющая волна*. Видно, что она перемещается вдоль оси OX со скоростью

$$v_{\text{гр}} = \omega'_0 \equiv \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0},$$

называемой *групповой скоростью*. С фазовой скоростью

$$v_{\text{фаз}} \equiv \frac{\omega_0}{k_0}$$

она связана соотношением

$$v_{\text{гр}} = v_{\text{фаз}} + k_0 \left(\frac{dc}{dk} \right)_{k_0}.$$

Переходя от волновых чисел к длинам волн, $k = 2\pi/\lambda$, получим соотношение между групповой и фазовой скоростями волн в терминах длин волн:

$$v_{\text{гр}} = v_{\text{фаз}} - \lambda_0 \left(\frac{dc}{d\lambda} \right)_{\lambda_0}.$$

В отсутствие дисперсии, когда частота ω пропорциональна волновому числу k ,

$$v_{\text{гр}} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} = \frac{\omega_0}{k_0} = v_{\text{фаз}},$$

групповая скорость равна фазовой. Если групповая скорость меньше фазовой, дисперсию называют *нормальной*, в противоположном случае — *аномальной*.

Представление решения волнового уравнения в виде суперпозиции монохроматических волн называют решением в *форме Бернулли*. Покажем его применение на примере следующей простой, но очень важной задачи.



10.4.2 Отражение от конца стержня

Рассмотрим теперь волны в полубесконечном стержне $x \geq 0$, единственный (левый) конец которого жёстко закреплен в начале координат. С математической точки зрения речь идёт о решении волнового

уравнения в области $0 < x < \infty$, $t > 0$ при условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \dot{u}(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x < \infty$$

и

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (10.4.3)$$

Возьмём *нечётные* функции

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x > 0; \\ -\phi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

и

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0; \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

и составим из них функцию вида (10.4.2):

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\Phi(x - ct) + \Phi(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(x) dx \right].$$

Мы обозначили её через $u(x, t)$, потому что она действительно является решением волнового уравнения в области $x > 0$, $t > 0$ при заданных условиях, в частности, в начале координат обращается в нуль вследствие нечётности, что отражает неподвижность закреплённого конца. Возвращаясь к исходным функциям, запишем решение задачи о волнах в полубесконечном стержне с жёстко закреплённым в начале координат концом:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\varphi(x + ct) - \varphi(ct - x) + \frac{1}{c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(x) dx \right], & 0 < x < ct, \\ \frac{1}{2} \left[\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(x) dx \right], & x > ct > 0. \end{cases} \quad (10.4.4)$$

В случае свободного (не закреплённого) конца полубесконечного стержня мы должны положить равным нулю на нём *давление*, так что условие (10.4.3) заменится условием

$$u'(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

и составлять решение надо будет уже из чётных функций

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x > 0; \\ \phi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

и

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0; \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

В результате получим решение задачи о волнах в полубесконечном стержне со свободным концом:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\varphi(x + ct) + \varphi(ct - x) + \frac{1}{c} \int_0^{x+ct} \psi(x) dx + \frac{1}{c} \int_0^{ct-x} \psi(x) dx \right], & 0 < x < ct, \\ \frac{1}{2} \left[\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(x) dx \right], & x > ct > 0. \end{cases} \quad (10.4.5)$$

Заметим также, что нижние строки выражений (10.4.4) и (10.4.5) полностью совпадают с формулой (10.4.2) для волны в бесконечном стержне: в области $x > ct$ влияние границы не сказывается, сигнал от неё не успевает дойти до точки x .

Применив полученные формулы к движению сигнала ограниченной длительности, легко понять логику этого метода, называемого *методом продолжения*. Он основан на явлении *интерференции* – взаимном гашении волн с амплитудами равной величины и противоположного знака. Чтобы обеспечить постоянное нулевое значение *падающей волны* в начале координат, по отрицательной полуоси пустим *встречную волну*, такую, чтобы она полностью компенсировала исходную волну в начале координат. Для этого она должна иметь обращённую в пространстве и противоположную по знаку форму исходной волны и в начальный момент находиться на таком же расстоянии от начала координат, что и исходная. В момент, когда передний фронт падающей волны достигнет начала координат, он войдёт в соприкосновение со встречной волной, и в течение всего времени движения падающей волны её значение в этой точке будет скомпенсировано встречной волной, которая на положительной полуоси становится уже *отражённой волной*. Отражённая волна движется в положительном направлении, а исходная продолжает движение в противоположном направлении по отрицательной полуоси. Исключив из рассмотрения «приставленную» для удобства рассуждений отрицательную полуось, получаем наглядную картину процесса отражения. Из неё, в частности, видно, что **при**

отражении от закреплённого конца амплитуда сигнала меняет знак, тогда как при отражении от свободного конца знак амплитуды сохраняется.

Следуя этой логике, можно легко понять, что происходит в случае стержня конечной длины. Пусть концы стержня длиной $2l$ закреплены в точках $x = -l$ и $x = l$, и в начальный момент скорости всех точек стержня равны нулю, а в окрестности начала координат создаётся возмущение $\varphi(x)$ конечной протяжённости. Это возмущение разделится на две своих уменьшенных в два раза копии, движущихся с равными скоростями в противоположные стороны. Достигнув границ, они испытают отражения, как это описано выше, и, двигаясь теперь в противоположные стороны, сойдутся снова в середине стержня, образовав профиль начальной, но перевернутой формы. Далее это возмущение вновь разделится на две волны, разбегающиеся в противоположные стороны, которые, отразившись от концов и изменив при этом знаки, снова вернутся в центр, образовав теперь возмущение, полностью идентичное исходному. Далее процесс этот будет повторяться в той же последовательности, то есть будет периодическим, период $T = 4l/c$.

Аналогичным образом анализируется случай со свободными концами. При этом изменения знака волны не происходит, инвертируется лишь ее форма. Если начальное возмущение описывается чётной функцией координаты, период процесса становится в два раза меньше: $T = 2l/c$.

10.4.3 Стоячие волны

Рассмотрим колебания стержня, концы которого закреплены в точках $x = 0$ и $x = l$. Представим частное решение в виде суперпозиции двух монохроматических волн с равными частотами и противоположно направленными скоростями:

$$u_k(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{i(-kx - \omega t)}, \quad \omega = ck. \quad (10.4.6)$$

Из граничных условий

$$u_k(0, t) = u_k(l, t) = 0$$

следует, что

$$(A + B)e^{-i\omega t} = 0 \quad (10.4.7)$$

и

$$(Ae^{ikl} + Be^{-ikl})e^{-i\omega t} = 0. \quad (10.4.8)$$

Уравнение (10.4.7) даёт

$$B = -A, \quad (10.4.9)$$

а из уравнения (10.4.8) находим:

$$e^{ikl} - e^{-ikl} = 2i \sin kl = 0.$$

Таким образом, функция (10.4.6) может удовлетворить поставленным граничным условиям только при волновых числах $k = k_n$, где

$$k_n = n\pi/l, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.4.10)$$

Мы не включили сюда нулевое значение n , ведущее к тривиальному решению $u_0 = 0$, и отрицательные n , ведущие к тем же (с точностью до знака) решениям, что и положительные n . Подставляя (10.4.9) и (10.4.10) в (10.4.6) и беря вещественную часть, получим

$$u_n(x, t) \equiv \operatorname{Re} u_k(x, t) = a_n \sin(n\pi x/l) \cos(n\pi ct/l + \alpha_n).$$

Профиль полученной волны в любой момент времени представляет синусоиду, равную на концах стержня нулю, амплитуда её совершает гармонические колебания по закону $a_n \cos(\omega_n t)$ с частотой $\omega_n = n\pi c/l$. Гребни такой волны не движутся вдоль оси OX , поэтому её называют *стоячей волной*. Точки $x_m = (m/n)l$, $m = 1, 2, \dots, n-1$, в которых $u_n = 0$, называются *узлами*, а точки $x_m = (m/n)l$, $m = 1, 2, \dots, n-1$, в которых $u_n = a_n \cos(\omega_n t + \alpha_n)$ — *пучностями* стоячей волны. Числа $\omega_n = n\pi c/l$ называются *собственными частотами* продольных колебаний стержня. Числа же k_n и функции $v_n(x) = \sin(k_n x)$ называются *собственными значениями* и принадлежащими им *собственными функциями* уравнения

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v = 0.$$

Волны такого типа называются *стоячими*. Общее решение поставленной задачи представляется в виде линейной суперпозиции стоячих волн

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/l) \cos(n\pi ct/l + \alpha_n),$$

где постоянные a_n и α_n определяются начальными условиями

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/l) \cos(\alpha_n) = \varphi(x) \quad (10.4.11)$$

и

$$\dot{u}(x, 0) = - \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi c/l) a_n \sin(n\pi x/l) \sin(\alpha_n) = \psi(x). \quad (10.4.12)$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в промежутке $0 \leq x \leq l$ удовлетворяют условию разложения в ряд Фурье (являются кусочно-дифференцируемыми), то

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(n\pi x/l), \quad \varphi_n = (2/l) \int_0^{\infty} \varphi(x) \sin(n\pi x/l) dx,$$

и

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin(n\pi x/l), \quad \psi_n = (2/l) \int_0^{\infty} \psi(x) \sin(n\pi x/l) dx.$$

Сравнивая эти ряды с рядами (10.4.11) и (10.4.12), находим постоянные α_n и a_n :

$$\alpha_n = -\arctg[(l/n\pi c)\psi_n/\varphi_n], \quad a_n = \varphi_n / \cos \alpha_n.$$

10.4.4 Колебания струны

Другой наглядный пример стоячей волны даёт движение закреплённой с обеих концов упругой струны. Струна представляет собой предельный случай упругого стержня, толщина которого настолько мала, что сопротивлением изгибу можно пренебречь и принимать во внимание только сопротивление растяжению.

Рассмотрим колебания струны в плоскости XOZ , полагая, что в исходном положении она находилась на оси OX с закреплёнными концами в точках O и L . Мы ограничимся случаем малых колебаний, когда x -координату колеблющейся точки струны можно считать неподвижной и использовать её в качестве «имени» данной точки, а её смещение вдоль оси OZ , скорость и ускорение определить функциями $z(x, t)$, $\partial z/\partial t$ и $\partial^2 z/\partial t^2$ соответственно. Пусть S – площадь поперечного сечения струны, а ρ – плотность материала струны, тогда масса элемента струны, приходящегося на отрезок $[x, x + \delta x]$, запишется в виде:

$$\delta m = \rho \delta S \delta x. \quad (10.4.13)$$

К концам этого элемента приложены силы

$$\delta \vec{P}(x) = -\delta S \vec{t}(x), \quad \delta \vec{P}(x + dx) = \delta S \vec{t}(x + dx),$$

где \vec{t} – вектор напряжения, направленный вдоль касательной к струне во внешнюю по отношению к элементу $[x, x + dx]$ сторону. Равнодействующая этих сил

$$\begin{aligned} \delta \vec{F} &= \delta \vec{P}(x) + \delta \vec{P}(x + \delta x) = \\ &= \{(\cos(\alpha + d\alpha) - \cos \alpha)\vec{e}_x + (\sin(\alpha + d\alpha) - \sin \alpha)\vec{e}_z\} t \delta S \end{aligned}$$

и определяет движение центра масс этого элемента \vec{r} :

$$\delta m \ddot{\vec{r}} = \delta \vec{F}. \quad (10.4.14)$$

Нас интересует лишь поперечное движение элемента, характеризуемое z -проекцией радиус-вектора \vec{r} . Ввиду малости углов α и $\alpha + \delta\alpha$ $\sin \alpha \sim \text{tg} \alpha \sim \alpha = dz/dx$, поэтому

$$\delta F_z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} t \delta S \delta x,$$

и z -проекция уравнения (10.4.14) имеет вид

$$\delta m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} t \delta S \delta x.$$

Подставляя сюда (10.4.13), заменяя z на u и P/ρ на c^2 , вновь приходим к одномерному волновому уравнению⁶

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

решение которого рассмотрено выше.

10.4.5 Волны кручения в стержне

Рассмотрим однородный цилиндрический *полубесконечный* упругий стержень с осью OX и основанием в начале координат. В нем могут распространяться не только продольные или поперечные волны. Мгновенное приложение момента сил к основанию вызывает поворот вначале ближайшей части стержня, затем – всё более и более далёких: распространяется *волна кручения*.

При этом угол поворота перестаёт быть линейной функцией x , и вместо формулы (10.2.2), переписанной в виде

$$M(x) = \mu \frac{\pi R^4}{2} \frac{\Phi(x)}{x},$$

⁶Здесь t снова обозначает время.

применяется её обобщение

$$M(x, t) = \mu \frac{\pi R^4}{2} \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x}.$$

Выделим мысленно отрезок $[x, x + \Delta x]$ стержня и представим действующий на него момент сил в виде

$$\Delta M = M(x + \Delta x, t) - M(x, t) \approx \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \Delta x = \mu \frac{\pi R^4}{2} \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} \Delta x. \quad (10.4.15)$$

В силу малости Δx этот отрезок можно считать абсолютно твёрдым диском и применить к нему уравнение вращения:

$$\Delta M = \Delta I \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (10.4.16)$$

где

$$\Delta I = \frac{m R^2}{2} = \frac{\pi \rho R^4}{2} \Delta x \quad (10.4.17)$$

– момент инерции диска. Подставляя (10.4.15) и (10.4.17) в (10.4.16), получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Волны кручения распространяются по стержню со скоростью $c = \sqrt{\mu/\rho}$. Чем жёстче стержень (то есть чем больше μ) при одной и той же плотности, тем быстрее бежит по нему волна, и наоборот, чем плотнее стержень при одной и той же жёсткости, тем медленнее движется волна. От диаметра стержня скорость волны кручения не зависит.

10.4.6 Колебания мембраны

Рассмотрим теперь мембрану – пластину, толщина которой δh настолько мала, что она не сопротивляется изгибу, точнее, сопротивляется деформации лишь будучи в натянутом состоянии, когда она закреплена по краям. Примером служит пластик, натянутый на обод барабана, а вот гонг не является мембраной.

Пусть мембрана натянута на кривую, целиком лежащую в плоскости XOY прямоугольной системы координат так, что $\sigma_x = \sigma_y = P$. На каждый её элемент с массой $\rho \delta h \delta x \delta y$ действует теперь сила

$$\rho \delta h \delta x \delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) P \delta h \delta x \delta y,$$

что приводит к двумерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\rho}{P} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (10.4.18)$$

Из того, что дифференциальное уравнение (10.4.18) является уравнением второго порядка, можно было бы заключить, что граничное условие может состоять в задании двух величин на граничной кривой: самой функции $z(x, y)$ и её производной (например, по x). Но это не так: такое задание граничных условий переопределяет задачу. Вот что писал по этому поводу Г. Иос, автор известного в своё время «Курса теоретической физики», высоко ценимого академиком А.Ф. Иоффе и другими советскими физиками⁷.

«Представим себе, что в полосе, параллельной оси Y , производится последовательное интегрирование дифференциального уравнения численным или графическим способом, причём оно начато с того элемента поверхности, положение и наклон которого заданы заранее. Дифференциальное уравнение, определяющее *приращение производной* $\partial z/\partial x$, позволяет определить положения и наклоны последующих элементов поверхности. Продолжая интегрирование до конца полосы, мы получим значения z и $\partial z/\partial x$, не совпадающие, вообще говоря, с заданными граничными условиями. Поэтому можно задавать только положение или только наклон элемента мембраны на краю».

Подстановкой

$$z = \psi(x, y)e^{i\omega t}$$

уравнение (10.4.18) приводится к стационарному виду

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad k = \omega\sqrt{\rho/P}.$$

Ограничившись рассмотрением колебаний круглой мембраны радиусом a , перейдём в полярные координаты:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi = 0.$$

Продолжение разделения переменных

$$\psi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

расщепляет стационарное волновое уравнение на радиальное

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R - \frac{m^2}{r^2} R = 0$$

⁷Г. Иос. Курс теоретической физики. Часть I – М.: Гос.учебно-педагогич. изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1963. – С.193.

и азимутальное уравнения

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0.$$

Решение последнего выражается через $\sin(m\varphi)$ и $\cos(m\varphi)$, и чтобы оно было однозначным, m должно быть равно $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, в противном случае изменение аргумента φ на 2π , возвращающее его в ту же точку, приводило бы к другому значению функции Φ . Условие $\varphi = m$ является, по существу, условием азимутального квантования, приводящим к появлению узлов на графике функции $\Phi(\varphi)$ – точек из интервала $[0, 2\pi)$, в которых она обращается в нуль. На двумерной диаграмме области определения пространственного сомножителя решения $\psi(r, \varphi)$ эти узловые точки превращаются в *радиальные узловые линии*.

Частными решениями радиального уравнения являются функции Бесселя $J_m(kr)$. Поскольку края мембраны закреплены на окружности радиуса a , должно выполняться краевое условие $R(a) = 0$. Чтобы удовлетворить ему, аргумент функции Бесселя должен совпадать с

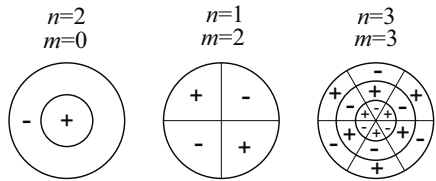


Рис. 10.7. Колебания мембраны круглой

одним из его нулей z_0, z_1, z_2, \dots : $ka = z_0$, или z_1 , или $z_2 \dots$ При этом, для z_0 волновая функция не имеет никаких других нулей, кроме нулей при $r = a$ и (если $m \neq 0$) при $r = 0$. При z_1 появляется ещё один нуль, а при z_2 – ещё два нуля. В общем случае, для собственного значения $k_n a = z_n$ имеется n дополнительных нулей. Нули эти на диаграмме (r, φ) порождают *круговые узловые линии*.

Совместное изображение узловых линий обоих типов дано на рис.10.7. Знаки «+» и «-» указывают на то, что смежные области мембраны, разделяемые пограничными узловыми линиями, колеблются в противоположных фазах.

10.4.7 Упражнения

1. Выразить продольную и поперечную скорости звука через модуль упругости и коэффициент Пуассона.
2. Найти собственные частоты продольных колебаний стержня, один из концов которого закреплён, а другой свободен.
3. Найти собственные частоты и собственные функции продольных колебаний стержня, оба конца которого закреплены.

10.5 Кристаллы

10.5.1 Простая кубическая решётка

В пункте 4.4.5 мы ознакомились с главной особенностью кристаллов – их периодичностью. Для минимального знакомства нам хватило одномерных моделей. Для рассмотрения второй характерной особенности кристаллов – их *анизотропности* – придётся обратиться к пространственным структурам. Возьмём для примера кристалл, микроскопическая структура которого представляет собой простую кубическую решётку, в узлах которых расположены периодически повторяющиеся последовательности атомов (ионов), например, Na-Cl-Na-Cl... Такой кристалл можно представлять себе составленным из одинаковых элементарных кубических ячеек. Поместим в вершину одной из них начало координат O и проведём через него три взаимно ортогональных оси OX_1 , OX_2 , OX_3 , каждая из которых направлена вдоль одного из рёбер выбранной ячейки. Соединив начало координат с другими вершинами этой ячейки, мы получим набор векторов, указывающих характерные для данного кристалла направления. Каждое из этих направлений может быть указано заданием трёх проекций соответствующего вектора на *базисные направления*, то есть на оси координат. Но направлений таких немного, поэтому удобнее задавать их с помощью *индексов Миллера* – последовательности трёх символов со значениями 0 или 1, записываемых в квадратных скобках. Ноль означает здесь нулевую проекцию вектора направления на определяемую местом индекса ось (первую, вторую или третью), единица указывает на то, что эта проекция не равна нулю. Этой информации вполне достаточно, чтобы однозначно определить направление в кубическом кристалле. Так, $[100]$ означает направление вдоль оси OX_1 , $[010]$ – направление вдоль OX_2 , $[110]$ – направление диагонали грани ячейки, лежащей в плоскости X_1X_2 , а $[111]$ представляет направление диагонали куба. Чтобы выйти за пределы первого октанта, договорились, что черта над единицей будет обозначать противоположное по отношению к указанному выше направление: $[\bar{1}00]$ обозначает направление, противоположное оси OX_1 и т.д.

С помощью такой же символики можно задавать и плоскости в кубической структуре, используя как отличительный признак круглые скобки. Так, символы (100) , (110) и (111) означают три плоскости, перпендикулярные соответственно направлениям $[100]$, $[110]$ и $[111]$. Вообще говоря, таким образом задаются лишь ориентации плоскостей, а не их расположения в пространстве, хотя обычно берётся плоскость,

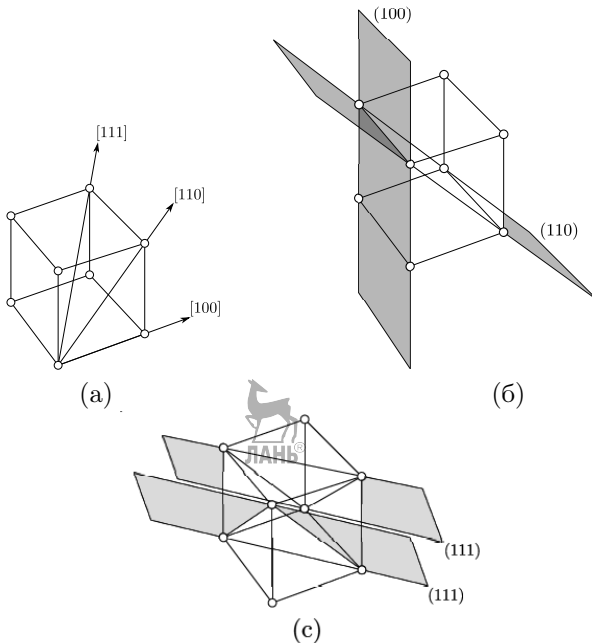


Рис. 10.8. Кристаллографические обозначения в кубических кристаллах; (а) – кристаллографические направления, (б) – плоскости (100) и (110), (с) – две параллельные плоскости (111)

проходящая через один из узлов решётки. Упомянутые выше кристаллографические направления и плоскости показаны на рис. 10.8. Индексная система Миллера применима и к косоугольным аналогам кубической системы. Аналогичные обозначения разрабатывались и для некубических кристаллов, но ни одно из них не стало общеупотребительным.

Как отмечалось в 7.5.1, обобщённый закон Гука при малых деформациях произвольной упругой среды имеет вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (10.5.1)$$

Здесь σ_{ij} – компонента тензора напряжений, равная i -й проекции силы, действующей на единичную площадку, перпендикулярную j -й оси, а ε_{kl} – компоненты тензора деформаций (напомним, по повторяющимся индексам k, l подразумевается суммирование). Оба эти тензора – тензоры второго ранга, а связывающий их тензор упругости C_{ijkl} –

четвёртого ранга. Каждый из индексов пробегает значения 1, 2 и 3, так что общее число компонент тензора упругости $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, однако не все они независимы. Степень и характер зависимости определяется симметрией среды.

Возьмём, например, однородную изотропную среду. В ней тензор напряжений должен быть связан с тензором деформаций способом, не зависящим ни от положения начала системы координат, ни от направления её осей, то есть с помощью скалярных величин. Существует два типа такой связи:

$$\sigma_{ij} = c_1 \varepsilon_{ij}$$

и

$$\sigma_{ij} = c_2 \varepsilon_{kk} \delta_{ij}.$$

Суперпозиция этих выражений и приводит к известной уже формуле (10.1.2)

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}.$$

Выпишем в развёрнутом виде первую компоненту

$$\sigma_{11} = 2\mu \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{22} + \lambda \varepsilon_{33}.$$

Сравнивая с общим выражением (10.5.1), видим, что

$$C_{1111} = 2\mu + \lambda, \quad C_{1122} = C_{1133} = \lambda,$$

а остальные компоненты вида $C_{11..}$ равны нулю.

Следующая компонента тензора напряжений

$$\sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12},$$

откуда

$$C_{1212} = 2\mu,$$

а остальные компоненты вида $C_{12..}$ равны нулю.

Повторяя эту несложную процедуру, для ненулевых компонент тензора упругости изотропной среды находим следующие выражения:

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = 2\mu + \lambda,$$

$$C_{1122} = C_{2211} = C_{2233} = C_{3322} = C_{3311} = C_{1133} = \lambda,$$

$$C_{1212} = C_{2121} = C_{1313} = C_{3131} = C_{2323} = C_{3232} = 2\mu.$$

Заметим, что между компонентами тензора упругости изотропной среды существует связь

$$C_{1111} = C_{1122} + C_{1212} \quad (10.5.2)$$

Плотность упругой энергии деформированной среды, в общем случае имеющая вид

$$U = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad (10.5.3)$$

для изотропной среды принимает вид (10.5.2).

Обратимся теперь к анизотропной кристаллической среде. В качестве простейшего примера рассмотрим ионный кристалл типа NaCl, обладающий прямоугольной кубической решёткой. Выберем систему координат с осями, направленными вдоль главных осей кристалла. В силу кубической симметрии кристалл должен обладать одинаковой жёсткостью в направлении каждой оси, откуда следует, что

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{3333}.$$

Далее, кристалл симметричен относительно каждой координатной плоскости: замена x_2 на $-x_2$ не должна изменять энергию (10.5.2). Но эта замена меняет ε_{12} на $-\varepsilon_{12}$, так как перемещение в направлении x_2 будет теперь перемещением в направлении $-x_2$. Чтобы не изменилась энергия U , компонента C_{1112} должна перейти в компоненту $-C_{1112}$, но в силу симметрии кристалла относительно рассматриваемой операции отражения $C_{1112} = -C_{1112}$. Отсюда следует, что

$$C_{1112} = 0.$$

Аналогично показывается, что $C_{1113} = 0$, $C_{2221} = 0$ и т.д. Отличными от нуля, как и в случае изотропной среды, остаются только компоненты

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{3333},$$

$$C_{1122} = C_{2211} = C_{2233} = C_{3322} = C_{3311} = C_{1133},$$

$$C_{1212} = C_{2121} = C_{1313} = C_{3131} = C_{2323} = C_{3232},$$

но соотношение (10.5.2) уже не имеет места. В результате, плотность упругой энергии кубического кристалла даётся выражением:

$$U = (1/2)[C_{1111}(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + 2C_{1122}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11}) + 4C_{1212}(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)].$$

Часто используются сокращённые (матричные) обозначения для компонент деформации c_{ij} , получаемые заменой пары индексов одним по правилу:

$$11 \rightarrow 1; 22 \rightarrow 2; 33 \rightarrow 3; 23, 32 \rightarrow 4; 31, 13 \rightarrow 5; 12, 21 \rightarrow 6.$$

Так,

$$C_{1111} = c_{11}; \quad C_{1223} (\equiv C_{2123} \text{ и т. д.}) = c_{64}$$

(читается «цэ шесть четыре», а не «шестьдесят четыре»).

Для кубического кристалла направления ± 1 , ± 2 , ± 3 взаимно перпендикулярны и полностью эквивалентны, так что

$$c_{11} = c_{22} = c_{33},$$

$$c_{44} = c_{55} = c_{66},$$

$$c_{14} = c_{25} = c_{36}, \dots$$

и

$$c_{45} = c_{56} = c_{64}, \dots$$

10.5.2 Энергия деформации кубического кристалла

Совместим начало координат с одним из ионов кристалла и рассмотрим расположение других ионов в плоскости X_1OX_2 . В отсутствие деформаций они располагаются в узлах решетки с координатами $x_1 = na$, $x_2 = ta$, где a — постоянная решетки, n и $t = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ Иону, находящемуся в начале координат, присвоим индекс 0, а ближайших его соседей по ячейке перенумеруем, как показано в двух первых колонках табл. 10.1.

Табл. 10.1. Смещения ионов при деформации

Ион	x_1, x_2	u_1	u_2	k
1	$a, 0$	$a\varepsilon_{11}$	$a\varepsilon_{21}$	k_1
2	a, a	$a(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12})$	$a(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})$	k_2
3	$0, a$	$a\varepsilon_{12}$	$a\varepsilon_{22}$	k_1
4	$-a, a$	$a(-\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12})$	$a(-\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})$	k_2
5	$-a, 0$	$-a\varepsilon_{11}$	$-a\varepsilon_{21}$	k_1
6	$-a, -a$	$-(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12})$	$-a(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})$	k_2
7	$0, -a$	$-a\varepsilon_{12}$	$-a\varepsilon_{22}$	k_1
8	$a, -a$	$a(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12})$	$a(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{22})$	k_2

Приложим теперь к кристаллу силы, которые порождают деформации с компонентами ε_{11} , ε_{12} и ε_{22} . Соответствующие смещения ионов $u_1 = \delta x_1$, $u_2 = \delta x_2$ в проекциях на оси 1 и 2 показаны во второй и третьей колонках таблицы.

При малых смещениях можно предположить, что ионы действуют друг на друга посредством упругих сил и, наглядности ради, представить эти силы посредством действующих между атомами пружин. Обозначим жёсткости коротких пружин, соединяющих ближайшие ионы вдоль координатных осей, через k_1 , а длинных пружин, соединяющих ионы ячейки по диагонали, – через k_2 (для простоты полагаем силы, действующие между парами Na-Na и Cl-Cl, одинаковыми по величине, хотя в действительности это, конечно, не так). При деформации потенциальная энергия каждой пружины возрастает на величину $k(\delta l)^2/2$, где δl – удлинение пружины. Обозначим приращение энергии пружины, соединяющей i -й атом с нулевым, через U_i . Так, удлинение δl_1 пружины 1 равно $a\varepsilon_{11}$ (см. табл. 10.1), и следовательно,

$$U_1 = \frac{k_1(a\varepsilon_{11})^2}{2}.$$

Удлинение пружины 2 обусловлено перемещением атома 2 в двух направлениях (см. табл. 10.1):

$$(\delta l_2)_1 = a(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12})$$

и

$$(\delta l_2)_2 = a(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}).$$

Ввиду малости деформаций, результирующее удлинение пружины 2 можно записать в виде суммы проекций на исходную диагональ:

$$\delta l_2 = (\delta l_2)_1 \cos \alpha_1 + (\delta l_2)_2 \cos \alpha_2 = (a/\sqrt{2})(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}).$$

Её вклад в потенциальную энергию соответственно равен:

$$U_2 = (k_2 a^2/4)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})^2.$$

Потенциальная энергия третьей пружины

$$U_3 = \frac{k_1(a\varepsilon_{22})^2}{2},$$

а четвёртой –

$$U_4 = (k_2 a^2/4)(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})^2$$

(обратите внимание на чередование знаков), и т.д. Чтобы получить энергию всех пружин, действующих на выбранный ион, необходимо

просуммировать эти энергии и добавить к ним энергию $k_2 a^2 (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2)$, связанную с диагональными соседями на двух соседних плоскостях.

Напомним, что пружинки — это наши воображаемые вспомогательные конструкции. Если мы их уберём, то полученные энергии мы должны будем приписать ионам — по половинке каждому (каждая пружинка соединяла два иона). Разделив полученную сумму пополам, найдём энергию, приходящуюся на один ион (с номером 0), а умножив результат на число ионов в единице объёма $1/a^3$, получим объёмную плотность упругой энергии кристалла:

$$\begin{aligned}
 U' = \frac{1}{4a} [& k_1 \varepsilon_{11}^2 + (k_2/2)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})^2 + \\
 & + k_1 \varepsilon_{22}^2 + (k_2/2)(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})^2 + \\
 & + k_1 \varepsilon_{11}^2 + (k_2/2)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})^2 + \\
 & + k_1 \varepsilon_{22}^2 + (k_2/2)(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})^2 + 2k_2(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2)]. \quad (10.5.4)
 \end{aligned}$$

Сопоставляя частное выражение (10.5.4) для плотности энергии кубического кристалла с общим её выражением (10.5.3), можно выразить компоненты тензора упругости через микроскопические параметры a , k_1 и k_2 .

Возьмём слагаемое, содержащее $\varepsilon_{11}\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^2$. В общем выражении перед ним стоит коэффициент C_{1111} , в частном (после раскрытия скобок) находим $(k_1 + 2k_2)/a$, так что

$$C_{1111} = (k_1 + 2k_2)/a.$$

Такой же величине оказывается равен и коэффициент C_{2222} .

Рассмотрим теперь слагаемое, содержащее произведение ε_{11} и ε_{22} . Поскольку

$$\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}\varepsilon_{11},$$

мы можем приравнять коэффициенты только перед суммами $\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{11}$:

$$C_{1122} + C_{2211} = 2k_2/a.$$

Из симметрии однако же сразу следует, что

$$C_{1122} = C_{2211} = k_2/a.$$

Аналогично находим

$$C_{1212} = C_{2121} = k_2/2$$

и т.д. В итоге, для исчезающих компонент тензора упругости кристалла имеем:

$$C_{1111} = C_{2222} = (k_1 + 2k_2)/2,$$

$$C_{1212} = C_{2121} = k_2/a,$$

$$C_{1122} = C_{2211} = C_{1221} = C_{2112} = k_2/a.$$

Экспериментальные данные (см. табл. 10.2) подтверждают вытекающее из расчетов соотношение $C_{1122} = C_{1212}$ и в свою очередь могут быть использованы для оценки атомных постоянных a , k_1 и k_2 .

Табл. 10.2. Упругие постоянные кубических кристаллов (в 10^3 Н·м³)

Кристалл	C_{1111}	C_{1122}	C_{1212}
LiF	1,19	0,54	0,53
NaCl	0,486	0,127	0,128
KCl	0,40	0,062	0,062
NaBr	0,33	0,13	0,13
KJ	0,27	0,043	0,042

10.5.3 Волны в кубическом кристалле

Распространение волн в анизотропной среде (в данном случае, в кристалле) является, более сложным процессом, чем в изотропной. Рассмотрим этот процесс несколько подробнее.

Уравнение движения элементарного объёма в процессе малых колебаний запишется в виде

$$\rho \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}.$$

Выделяя в координатах x_i смещения u_i относительно положений равновесия a_i ,

$$x_i = a_i + u_i, \quad a_i = \text{const},$$

и ограничиваясь линейным приближением, в котором

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \Big|_{x_j=a_j} \equiv \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a_j},$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} C_{ijmn} \left(\frac{\partial u_m}{\partial a_n} + \frac{\partial u_n}{\partial a_m} \right)$$

и

$$\rho(x_i, t) = \rho_0,$$

получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijmn} \frac{\partial^2 u_m}{\partial a_j \partial a_n},$$

или, в развёрнутом виде и сокращённых обозначениях упругих постоянных,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial a_1^2} + c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial a_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial a_3^2} \right) + (c_{12} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial a_1 \partial a_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial a_1 \partial a_3} \right), \quad (10.5.5a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial a_2^2} + c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial a_3^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial a_1^2} \right) + (c_{12} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial a_2 \partial a_3} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial a_2 \partial a_1} \right), \quad (10.5.5b)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = c_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial a_3^2} + c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial a_2^2} \right) + (c_{12} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial a_3 \partial a_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial a_3 \partial a_2} \right). \quad (10.5.5c)$$

Заметим, кстати, что каждое последующее уравнение этой системы может быть получено из предыдущего циклической перестановкой индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \dots$ (это не касается индексов упругих постоянных: они не меняются). Решения этих уравнений выражаются через плоские волны

$$\vec{u} = \vec{A} e^{i(\vec{k}\vec{a} - \omega t)}.$$

Волновой вектор \vec{k} перпендикулярен фронту волны, а $\vec{a} = a_p \vec{e}_p$ обозначает положение равновесия, к которому «приписан» колеблющийся элемент.

Волны в направлении [100]

Пусть волна распространяется в направлении [100] кристалла,

$$\vec{k} = k \vec{e}_1,$$

тогда

$$u_i = A_i e^{i(k a_1 - \omega t)}, \quad (10.5.6)$$

и все производные в правой части, кроме тех, что берутся только по a_1 , обратятся в нуль:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial a_1^2}, \quad (10.5.7a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial a_1^2}, \quad (10.5.7b)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial a_1^2}. \quad (10.5.7c)$$

Подстановка (10.5.6) в (10.5.7) даёт дисперсионные соотношения

$$\rho_0 \omega^2 u_1 = c_{11} k^2 u_1,$$

$$\rho_0 \omega^2 u_2 = c_{44} k^2 u_2.$$

и

$$\rho_0 \omega^2 u_3 = c_{44} k^2 u_3,$$

приводящие к следующим результатам:

$$u_1 = A_1 e^{-i\omega(t-a_1/v_{\parallel})},$$

$$u_2 = A_2 e^{-i\omega(t-a_1/v_{\perp})},$$

$$u_3 = A_3 e^{-i\omega(t-a_1/v_{\perp})}.$$

Здесь $v_{\parallel} = \sqrt{c_{11}/\rho_0}$ и $v_{\perp} = \sqrt{c_{44}/\rho_0}$ – скорости продольной и поперечной волн, распространяющихся в направлении [100]. В первой из них колебания совершаются параллельно волновому вектору, второе и третье решения дают линейно независимые поперечные (сдвиговые) колебания, распространяющиеся в том же направлении, что и продольная волна, но с другой скоростью. Любая комбинация двух последних снова даёт поперечную волну

$$\vec{u}_{\perp} = B_2 u_2 \vec{e}_2 + B_3 u_3 \vec{e}_3.$$

Измеряя скорости обеих волн в кристалле, мы можем определить лишь две из трёх его упругих постоянных.

Волны в направлении [110]

Все три упругих постоянных в кубическом кристалле можно определить, измеряя распространение волн в направлении диагонали куба. Теперь уравнения (10.5.7) и вытекающие из них дисперсионные соотношения содержат дополнительные слагаемые. Волна смещения вдоль оси OZ

$$u_3 = A_3 e^{i(k_1 a_1 + k_2 a_2 - \omega t)}$$

распространяющаяся в плоскости XOY , подстановкой в (10.5.5с) даёт результат

$$\rho_0 \omega^2 = c_{44}(k_1^2 + k_2^2) \equiv c_{44}k^2,$$

не зависящий от направления распространения волны в плоскости XOY . Её скорость $v = v_{\perp} = \sqrt{c_{44}/\rho_0}$.

Две другие волны

$$u_1 = A_1 e^{i(k_1 a_1 + k_2 a_2 - \omega t)}, \quad u_2 = A_2 e^{i(k_1 a_1 + k_2 a_2 - \omega t)}$$

дают систему уравнений

$$\rho_0 \omega^2 u_1 = (c_{11}k_1^2 + c_{44}k_2^2)u_1 + (c_{12} + c_{44})k_1 k_2 u_2, \quad (10.5.8a)$$

$$\rho_0 \omega^2 u_2 = (c_{11}k_2^2 + c_{44}k_1^2)u_2 + (c_{12} + c_{44})k_1 k_2 u_1. \quad (10.5.8b)$$

Система эта легко решается для волны, распространяющейся в направлении $[110]$: в этом случае $k_1 = k_2 = k/\sqrt{2}$ и условие нетривиального решения системы имеет вид:

$$\det \begin{pmatrix} -\rho_0 \omega^2 + (1/2)(c_{11} + c_{44})k^2 & (1/2)(c_{12} + c_{44})k^2 \\ (1/2)(c_{12} + c_{44})k^2 & -\rho_0 \omega^2 + (1/2)(c_{11} + c_{44})k^2 \end{pmatrix} = 0$$

Отсюда следуют два дисперсионных соотношения:

$$\rho_0 \omega^2 = (1/2)(c_{11} + c_{12} + 2c_{44})k^2$$

и

$$\rho_0 \omega^2 = (1/2)(c_{11} - c_{12})k^2.$$

Подставив первое из них в (10.5.8),

$$(c_{11} + c_{12} + 2c_{44})k^2 u_1 = (c_{11} + c_{44})k^2 u_1 + (c_{12} + c_{44})k^2 u_2,$$

находим, что $u_1 = u_2$. Это значит, что смещение элементов кристалла в этой волне происходит в направлении $[110]$ параллельно вектору \vec{k} , скорость распространения волны

$$v'_{\parallel} = \sqrt{\frac{c_{11} + c_{12} + 2c_{44}}{2\rho_0}}.$$

Подстановка второй формулы в уравнение (10.5.8) даёт выражение

$$(c_{11} + c_{12})k^2 u_1 = (c_{11} + c_{44})k^2 u_1 + (c_{12} + c_{44})k^2 u_2,$$

из которого следует $u_1 = -u_2$. Стало быть, в этой волне направление смещения совпадает с $[110]$ и перпендикулярно вектору \vec{k} : волна поперечная, и её скорость

$$v'_{\perp} = \sqrt{\frac{c_{11} - c_{12}}{2\rho_0}}.$$

10.5.4 Дислокации Френкеля-Конторовой

После открытия дифракции рентгеновских лучей кристаллами (1912 г.) и создания динамической теории кристаллической решётки (1915 г.) физика пластичности и прочности превратилась из науки описательной, сугубо феноменологической, в обширный раздел физики твёрдого тела, основанный на довольно полных результатах экспериментальных и теоретических исследований. Важнейшая роль в современных представлениях о процессах пластической деформации и разрушения материалов отводится кристаллической структуре (решётке) в твёрдых телах и таким её нарушениям как точечные дефекты и дислокации. Перемещение первых приводит к диффузионному течению, движение вторых объясняет пластическую деформацию.

В 1938 году советские физики Френкель и Конторова предложили простую модель дислокации в виде одномерной цепочки одинаковых частиц («атомов») массой m , связанных упругими силами, на жёсткой подкладке (другие цепочки кристалла), образующей периодическое силовое поле. Уравнение для смещения j -го атома такой цепочки имеет вид

$$m\ddot{q}_j = k(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) - \frac{\partial U}{\partial q_j},$$

где $U = \sum_n A[1 - \cos(2\pi q_n/a)]$ – потенциальное поле с периодом a . Далее q_j полагается непрерывной (и дважды дифференцируемой) функцией j , а получающееся при этом уравнение в частных производных

$$m \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 q}{\partial j^2} - \frac{\partial U}{\partial q}$$

решается в предположении о равномерном (с постоянной скоростью v) движении дислокации:

$$q(j, t) = \frac{2a}{\pi} \operatorname{arctg} \exp \left[-\frac{\pi}{\lambda} (aj - vt) \right].$$

Здесь

$$\lambda = \frac{a^2}{2} \sqrt{\frac{k}{A}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

– ширина дислокации, содержащая характерный для релятивистских формул множитель $\sqrt{1 - (v/c)^2}$, где c , правда, не скорость света, а скорость звука: $c = a\sqrt{k/m}$. Похожей на релятивистскую оказывается и формула энергии дислокации

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (10.5.9)$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{4a}{\pi} \sqrt{kA}.$$

Согласно (10.5.9), энергия дислокации не зависит от положения центра дислокации относительно атомов подкладки, так что равномерное движение дислокации не требует приложения внешних сил. Френкель и Конторова считали, что этот вывод о беспрепятственном скольжении цепочки связан с пренебрежением смещением атомов подкладки. Однако, если при вычислении энергии дислокации учесть дискретность цепочки, модель Френкеля — Конторовой даже при абсолютно жёсткой подкладке даёт конечное сопротивление скольжению, которое можно интерпретировать как критическое скалывающее напряжение $\tau_{кр}$, необходимое для перемещения дислокации. Расчёты показывают, что подвижность дислокаций тем больше, чем меньше межатомное расстояние в направлении скольжения a и чем больше межплоскостное расстояние b . При $b = 2a$ критическое скалывающее напряжение исчезающе мало, при $b = a/2$ оно достигает очень большой величины, а при $b \sim a$ составляет $10^{-5} \div 10^{-4}G$, что обычно и наблюдается на опыте.

Недостатком данной модели, как отмечается в обзоре⁸, является пренебрежение всеми взаимодействиями в атомной цепочке кроме ближних. На самом деле, благодаря взаимодействию с соседними цепочками, внутри каждой цепочки появляются дальнедействующие силы, без учёта которых не может быть обеспечен предельный переход к теории упругости.

10.5.5 Упражнения

1. Кубический кристалл подвергнут растяжению в направлении [100]. Выразить модуль Юнга и коэффициент Пуассона через постоянные упругости.
2. Показать, что скорость продольной волны в направлении [111] кубического кристалла

$$v_{\parallel} = \sqrt{(1/2)[c_{11} + 2c_{12} + 4c_{44}]/\rho}.$$

Указание: для такой волны $u_1 = u_2 = u_3$. Положить

$$u = u_0 \exp\{i[k(x_1 + x_2 + x_3)/\sqrt{3}] - \omega t\}$$

и воспользоваться уравнением (10.5.5с).

3. Показать, что скорость поперечной волны в направлении [111] кубического кристалла

$$v_{\perp} = \sqrt{(1/2)[c_{11} - c_{12} + c_{44}]/\rho}.$$

⁸В.Л.Инденбом, А.Н.Орлов. Успехи физических наук, LXXVI, вып 3, с.557 (1962).



Глава 11

Вязкоупругие и неупругие среды

11.1 Вязкоупругие среды

11.1.1 Ползучесть и релаксация

Вязкая жидкость и абсолютно упругое тело являются идеализациями, моделями реальной среды, во многих случаях очень хорошо отражающими её свойства. Существуют, однако, материалы, проявляющие оба качества – вязкость и упругость. Такие материалы называются *вязкоупругими*. К их числу относятся, например, натуральный и синтетический каучук, аморфные полимерные материалы с малыми и большими молекулярными весами и др. Соотношение между упругостью и вязкостью таких тел сильно зависит от температуры: при низких температурах они почти идеально упруги, при высоких – ведут себя как вязкая жидкость, легко деформируясь даже под действием малых нагрузок. Поскольку единой теории таких материалов ещё нет, вопрос о принадлежности материала к той или иной группе, как и об определяющих уравнениях и значениях входящих в них параметров, решается в первую очередь опытным путём.

Опыт на ползучесть. *Ползучестью* называется явление увеличения деформаций при постоянстве нагрузок, действующих на тело. Таким свойством обладают многие материалы (мягкое железо, полимеры и композиты, строительные материалы – бетон, грунт и др.). Типичный опыт на ползучесть выглядит следующим образом.

К торцам цилиндрического стержня из исследуемого материала в момент времени t_0 прилагается растягивающая его пара сил, создающая напряжение σ_0 , и измеряется одноосная деформация $\varepsilon = \Delta l/l_0$ как функция времени:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t; t_0, \sigma_0).$$

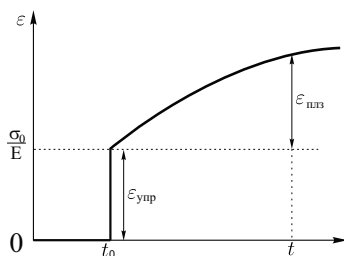


Рис. 11.1. Опыт на ползучесть

В начальный момент мы наблюдаем удлинение стержня на величину $\Delta l_{\text{упр}}$, пропорциональную σ_0 , как в случае упругих деформаций (отсюда индекс «упр»), однако этим дело не кончается: образец продолжает постепенно удлиняться, «ползти», хотя напряжение продолжает поддерживаться постоянным (рис. 11.1). Отмечая соответствующие величины индексом «плз», представим результат опыта в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{упр}}(\sigma_0) + \varepsilon_{\text{плз}}(t; t_0, \sigma_0) = \frac{\sigma_0}{E} + \varepsilon_{\text{плз}}(t; t_0, \sigma_0), \quad \sigma = \sigma_0 = \text{const}, \quad t > t_0.$$

Дальнейшее поведение материала зависит от его свойств. В материалах с ограниченной ползучестью график кривой $\varepsilon_{\text{плз}}(t)$ стремится к пределу, разрушения не происходит. Существуют материалы с неограниченной ползучестью, деформация не прекращается сама по себе, а заканчивается разрушением образца. Всё это, однако, зависит от температуры, технологии изготовления образца, конкретной его предыстории (почему мы и сохраняем t_0 в аргументах, хотя можно писать и 0 вместо t_0 , если в «недавние времена» ничего особенного (ни разогрева, ни наклёпа) с образцом не производилось).

Различие процессов упругой и ползучей деформаций объясняется разной их физической природой. В первом случае происходит просто увеличение межатомных и межмолекулярных расстояний (то есть то же самое, что имеет место и в упругих телах), тогда как причиной ползучих деформаций является движение полимерных комплексов и перемещение надмолекулярных структур, что более похоже на движение масс вязкой жидкости. По этой причине материалы, демонстрирующие оба этих механизма, называют *вязкоупругими*.

Опыт на релаксацию. В этом опыте наоборот: торцы подвергнувшегося в начальный момент стержня закрепляются и измеряется напряжение:

$$\sigma(t) = \sigma(t; t_0, \varepsilon_0).$$

Измерения показывают, что величина его не остаётся постоянной, как следовало бы ожидать в случае идеально упругого тела, а убывает со временем, подобно тому, как убывает температура нагретого тела по прекращении его подогрева. Тело как бы привыкает к своему новому состоянию, напряжение (характеризующее меру сопротивления его внешним усилиям) спадает. Этот процесс называется *релаксацией напряжений* (рис. 11.2).

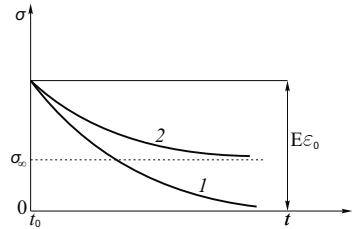


Рис. 11.2. Опыт на релаксацию; 1 — материал без остаточной деформации, 2 — материал с остаточной деформацией

Комбинированный опыт. Весьма показательным представляется комбинированный опыт: образец, находившийся под постоянной нагрузкой в интервале $(0, t^*)$, а в момент t^* освобождается от неё. В течение всего времени производится измерение деформации. Результаты измерений показывают (рис. 11.3), что вполне ожидаемый уже интервал нарастания деформации после первоначального скачка в момент выключения нагрузки заканчивается мгновенным падением деформации (на величину её упругой составляющей), после чего начинается период медленного спада деформации, называемый *релаксацией деформаций* или *последствием*. Деформация в конечном итоге может спадать до нуля, что соответствует полностью обратимым деформациям ползучести (кривая 1), или приближаться к некоторому предельному значению (кривая 2), демонстрируя характерные для многих пластических материалов не полностью обратимые деформации ползучести. Назовём первый тип поведения материалов *вязкоупругим*, а второй — *упругопластичным*. В заключение этой главы мы встретимся ещё и с вязкопластичными материалами.

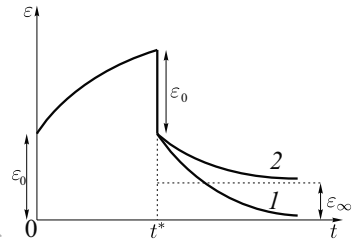


Рис. 11.3. Комбинированный опыт: ползучесть и релаксация; 1 — материал без остаточной деформации, 2 — материал с остаточной деформацией

Заметим, что если в первом случае отклик стержня на приложенное воздействие описывается возрастающей функцией, длина стержня продолжает увеличиваться и после того, как скачок произошёл и приложенное напряжение остаётся постоянным, то во втором порождённое мгновенным растяжением напряжение со временем затухает (тело *релаксирует*).

Обычно рассматриваются воздействия, прилагаемые к телу, находящемуся в ненапряжённом состоянии, однако легко себе представить и случай, когда исследуется уже напряжённое состояние или прилагается к телу последовательность скачков, создающих скачкообразно нарастающее воздействие.

11.1.2 Основные принципы линейной вязкоупругости

Оба опыта – на ползучесть и на релаксацию – определяют реакцию (отклик) одного из параметров системы (ε или σ) в момент времени t на скачкообразное возмущение другого в более ранний момент времени (σ или ε). Следующие принципы в разное время были заложены в формальную модель вязкоупругости.

Принцип причинности. *Отклик системы не может опережать вносимое в неё возмущение.*

Пусть в момент $t = t_1$ к свободному образцу приложено скачкообразное напряжение величиной $\Delta\sigma(t_1)$, а в момент $t_2 > t_1$ добавлен скачок напряжения $\Delta\sigma(t_2)$. Обозначим через $\varepsilon(t; t_1, \Delta\sigma_1; t_2, \Delta\sigma_2)$ вызванную ими деформацию. Пусть в момент $t = t_1$ свободному образцу сообщена деформация $\Delta\varepsilon(t_1)$, а в момент $t_2 > t_1$ добавлена деформация $\Delta\varepsilon(t_2)$. Обозначим через $\sigma(t; t_1, \Delta\varepsilon_1; t_2, \Delta\varepsilon_2)$ вызванное ими напряжение. При не очень больших возмущениях справедлив принцип линейности.

Принцип линейности (принцип Больцмана). *Отклик системы линейно зависит от вносимых в неё возмущений*

$$\varepsilon(t; t_1, \Delta\sigma_1; t_2, \Delta\sigma_2) = \varepsilon(t; t_1, \Delta\sigma_1) + \varepsilon(t; t_2, \Delta\sigma_2),$$

и

$$\sigma(t; t_1, \Delta\varepsilon_1; t_2, \Delta\varepsilon_2) = \sigma(t; t_1, \Delta\varepsilon_1) + \sigma(t; t_2, \Delta\varepsilon_2).$$

Аппроксимируя произвольные функции $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ последовательностью ступенчатых функций, применяя принцип линейности и переходя к пределу, получим *основные соотношения линейной вязкоупругости* в форме интегралов Стильтьеса (при естественном предположении, что $\sigma(-\infty) = 0$ и $\varepsilon(-\infty) = 0$):

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t k(t, t') d\sigma(t'), \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t r(t, t') d\varepsilon(t'). \quad (11.1.1)$$

Ядра $k(t, t')$ и $r(t, t')$ называются *функциями ползучести* и *релаксации* соответственно.

Пусть теперь воздействие на среду имеет периодический характер с периодом T , например,

$$\sigma(t) = \sigma(t + nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.1.2)$$

Принцип замкнутого цикла. *Отклик системы на периодическое возмущение должен быть периодическим с тем же периодом, чтобы система в целом совершала за этот период замкнутый цикл.*

Выясним, какова должна быть структура функции $k(t, t')$, чтобы реакция среды $\varepsilon(t)$, даваемая выражением (11.1.1), тоже была периодической,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t + T). \quad (11.1.3)$$

Заменим в (11.1.1) t на $t + T$ и воспользуемся свойством (11.1.2) в правой части:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t + T) &= \int_{-\infty}^{t+T} k(t + T, t') d\sigma(t') = \int_{-\infty}^{t+T} k(t + T, t') d\sigma(t' - T) = \\ &= \int_{-\infty}^t k(t + T, t' + T) d\sigma(t'). \end{aligned}$$

Согласно (11.1.3), должно иметь место равенство

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t k(t + T, t' + T) d\sigma(t').$$

Сопоставляя это выражение с выражением (11.1.1), видим, что достаточным условием для этого является трансляционная инвариантность ядра ползучести

$$k(t + T, t' + T) = k(t, t').$$

Другими словами, в рамках этого принципа, функция ползучести и (по тем же причинам) функция релаксации должны зависеть только от длительности промежутка времени между воздействием и измеряемой реакцией:

$$k(t, t') = k(t - t'), \quad r(t, t') = r(t - t'). \quad (11.1.4)$$

Подставив (11.1.4) в (11.1.1) и выполнив интегрирование по частям, получим

$$\varepsilon(t) = k(0) \left[\sigma(t) + \int_0^t K(t-t')\sigma(t')dt' \right] \quad (11.1.5)$$

и

$$\sigma(t) = r(0) \left[\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-t')\varepsilon(t')dt' \right], \quad (11.1.6)$$

где

$$K(t) = \frac{1}{k(0)} \left| \frac{dk(t)}{dt} \right|$$

и

$$R(t) = \frac{1}{r(0)} \left| \frac{dr(t)}{dt} \right|$$

– ядра интегральных операторов ползучести и релаксации. Подставив

$$\sigma(t) = \delta(t - t_0)$$

в уравнение (11.1.5), получим

$$\varepsilon(t) = k(0)K(t - t_0), \quad t > t_0.$$

Формула эта вскрывает физический смысл ядра ползучести: $k(0)K(t - t_0)$ численно равно деформации среды в момент времени t вследствие импульсной нагрузки, приложенной в момент $t_0 < t$. Воздействие на среду уже закончилось – оно было мгновенным, но деформация ещё остаётся: среда *помнит* об этом импульсе. Аналогичное заключение справедливо и относительно произведения релаксации $r(0)R(t - t_0)$, численно равного напряжению в среде в момент времени t после импульсной деформации её в момент t_0 . Оба этих ядра отражают *механическую память* вязкоупругой системы ответственную за запаздывающую реакцию материала. Если положить их равными нулю, в этих уравнениях останется лишь мгновенная реакция, которой вполне достаточно для решения статических (когда запаздывание не играет никакой роли) или квазистатических (когда запаздывающей составляющей можно пренебречь) задач:

$$\varepsilon(t) = k(0)\sigma(t),$$

$$\sigma(t) = r(0)\varepsilon(t).$$

Наконец, сформулируем ещё один принцип, лежащий в основе аксиоматики Больцмана-Вольтерры и уже использованный нами в качестве частного предположения.

Принцип затухания памяти. Ядра ползучести и релаксации стремятся к нулю при неограниченном возрастании аргумента:

$$K(t) \rightarrow 0, \quad \text{и} \quad R(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

11.1.3 Модули упругости

Пусть постоянное воздействие (σ_0 в первом случае или ε_0 – во втором) приложено к системе в момент времени $t = 0$, до которого она была свободна. Тогда уравнения (11.1.1)-(11.1.4) при $t \geq 0$ примут вид

$$\varepsilon(t) = k(0)\sigma_0 \left[1 + \int_0^t K(t') dt' \right]$$

и

$$\sigma(t) = r(0)\varepsilon_0 \left[1 - \int_0^t R(t') dt' \right],$$

Полагая в них $t = 0$,

$$\varepsilon(0) = k(0)\sigma_0$$

и

$$\sigma(0) = r(0)\varepsilon_0,$$

видим, что постоянная

$$E_0 = r(0) = 1/k(0)$$

может быть названа *мгновенным модулем упругости*. Устремляя же в этих уравнениях t к бесконечности, приходим к соотношениям

$$\varepsilon(\infty) = k(0)\sigma_0 \left[1 + \int_0^{\infty} K(t) dt \right]$$

и

$$\sigma(\infty) = r(0)\varepsilon_0 \left[1 - \int_0^{\infty} R(t) dt \right],$$

позволяющим ввести *длительный модуль упругости*

$$E_{\infty} = E_0 \left[1 - \int_0^{\infty} R(t) dt \right] = \frac{E_0}{1 + \int_0^{\infty} K(t) dt},$$

совпадающий с обычным модулем Юнга (предполагается, что несобственные интегралы от ядер ползучести и упругости сходятся).

Рассмотрим вязкоупругую среду, находящуюся под действием периодического возмущения

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}.$$

Подставляя это выражение в формулу (11.1.6), получим:

$$\tilde{\sigma} = \varepsilon_0 E \left[e^{i\omega t} - \int_{-\infty}^t R(t-t') e^{i\omega t'} dt' \right] = \tilde{\varepsilon} E [1 - R_c(\omega) + iR_s(\omega)], \quad (11.1.7)$$

где

$$R_c(\omega) = \int_0^{\infty} R(t) \cos \omega t dt, \quad R_s(\omega) = \int_0^{\infty} R(t) \sin \omega t dt$$

– косинус- и синус-преобразования Фурье ядра релаксации.

Введём обозначения

$$E' = E[1 - R_c(\omega)], \quad E'' = ER_s(\omega)$$

и назовём комбинацию $\tilde{E} \equiv E' + iE''$ *комплексным модулем упругости*. Уравнение (11.1.7) может быть представлено в форме обычного закона Гука, только для комплексных напряжения, деформации и модуля:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{E} \tilde{\varepsilon}.$$

Представляя комплексное напряжение в виде

$$\tilde{\sigma} = \sigma_0 e^{i(\omega t + \varphi)},$$

получим

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 \sqrt{E'^2 + E''^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{E''}{E'} = \frac{R_s}{1 - R_c}.$$

11.1.4 Вязкоупругие тела и жидкости

Вывод динамики вязкоупругих материалов из первых принципов является довольно сложной задачей статистической физики, в то же время характерные черты этой динамики могут быть уяснены путём комбинирования нескольких элементов в схемы, как это делается в электротехнике.

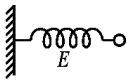


Рис. 11.4. Упругий элемент (Гука)

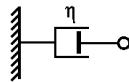


Рис. 11.5. Вязкий элемент (Ньютона)

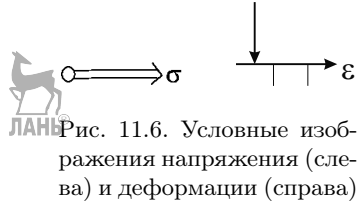


Рис. 11.6. Условные изображения напряжения (слева) и деформации (справа)

Подобно тому, как простейшей механической моделью упругости является пружинка, демонстрирующая одномерный закон Гука (рис. 11.4)

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (11.1.8)$$

символическим образом вязкости является *демпфер* (амортизатор) (рис. 11.5), называемый *элементом Ньютона*. Он изображает поршень в цилиндре, так что под действием приложенной силы воздух (масло, другая жидкость) может медленно выходить из цилиндра или входить в него через малый зазор между боковой поверхностью цилиндра и стенкой, приводя в движение поршень и реализуя тем самым соотношение

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (11.1.9)$$

Введём для наглядности ещё два символа, изображающих напряжение и деформацию (рис. 11.6). Комбинируя эти элементы, можно представить более сложные схемы, лучше отражающие свойства реальных механических материалов. Простейшей схемой такого типа является *параллельное* соединение элементов Гука и Ньютона (рис. 11.7). При этом деформация для каждого элемента одна и та же, а упругая и вязкая компоненты сил складываются (как электрические токи в узле)

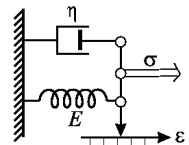


Рис. 11.7. Элемент Кельвина

$$\sigma = \sigma_{\Gamma} + \sigma_{\text{H}},$$

в результате чего мы получаем:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

При $E = 0$ это – вязкая жидкость, при $\eta = 0$ – упругое тело, в случае $E \neq 0$, $\eta \neq 0$ – вязкоупругая среда. Эту схему называют *моделью (элементом) Кельвина*.

Пусть при $t > 0$ к свободному ($\sigma = 0$, $\varepsilon = 0$) до того элементу Кельвина прилагается нагрузка по закону $\sigma(t)$. Представив уравнение (11.1.7) в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \mu\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta}\sigma(t), \quad \mu = \frac{E}{\eta}$$

и проинтегрируем по времени от 0 до t :

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t e^{-\mu(t-t')} \sigma(t') dt'.$$

Преобразуя это выражение интегрированием по частям и сопоставляя результат

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \int_0^t [1 - e^{-\mu(t-t')}] d\sigma(t')$$

с формулой (11.1.2), находим явное выражение для функции ползучести

$$k(t) = \frac{1}{E} [1 - e^{-\mu t}], \quad t > 0$$

и ядра ползучести

$$K(t) = \mu e^{-\mu t}.$$

Внезапное, скачкообразное приложение нагрузки к элементу Кельвина не приводит к мгновенной деформации: в силу вязкого сопротивления деформация нарастает постепенно. По истечении короткого промежутка времени деформация достигает предельного значения, а после отключения нагрузки спадает, стремясь к нулю в соответствии с принципом затухания памяти. Так выглядит поведение реального твёрдого тела в малых временных масштабах. Назовём эту модель *вязкоупругим телом*.

Противоположная картина наблюдается при внезапном приложении силы к реальной жидкости: сразу возникает упругая реакция, подобная реакции твёрдого тела, которая ослабевает по мере того, как жидкость приходит в движение, и в конце концов исчезает вовсе. Это

явление иллюстрируется *последовательным* соединением элементов Гука и Ньютона, образующим *модель (элемент) Максвелла* (рис. 11.8). Внезапное приложение силы растягивает пружину (упругая деформация), под действием которой приходит в движение поршень (вязкое течение). Если же сила прилагается достаточно медленно, пружина существенно не растягивается, и поршень движется в соответствии с приложенной силой, как движется вязкая жидкость. Назовём эту модель *вязкоупругой жидкостью*.

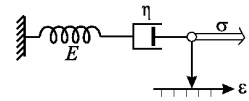


Рис. 11.8. Элемент Максвелла

Чтобы вывести уравнение для этой модели, заметим, что на оба элемента её действует одна и та же сила (подобно тому, как через два последовательных сопротивления течёт один и тот же электрический ток), а деформация складывается из суммы деформаций двух элементов. Дифференцируя сумму

$$\varepsilon = \varepsilon_{\Gamma} + \varepsilon_{\text{Н}},$$

и учитывая соотношения (11.1.8) и (11.1.9), получаем:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\sigma(t) = E \int_0^t e^{-\mu(t-t')} \frac{d\varepsilon}{dt'} dt' = E \int_0^t e^{-\mu(t-t')} d\varepsilon(t').$$

Отсюда

$$r(t) = E e^{-\mu t}$$

и

$$R(t) = \mu e^{-\mu t}.$$

11.1.5 Многоэлементные модели вязкоупругих сред

Простые и наглядные двухэлементные модели качественно объясняют поведение многих сред, занимающих промежуточное положение между абсолютно упругим телом и вязкой жидкостью, однако в количественном отношении они оказываются довольно грубыми. Приблизиться к описанию прямых экспериментальных данных можно конструируя из этих же «кирпичиков» более сложные модели.

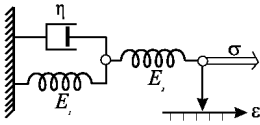


Рис. 11.9. Эквивалентная схема стандартного вязкоупругого тела

Добавим упругий элемент Гука с модулем упругости E_1 последовательно к схеме Кельвина с параметрами E_2, η (рис. 11.9). Удлинение полученной таким образом комбинации под действием приложенной нагрузки теперь будет складываться из удлинения пружины и удлинения элемента Кельвина:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\sigma}{E_1} + \varepsilon_2.$$

Дифференцируя его по времени

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$

и преобразуя последнее слагаемое

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_2}{dt} &= \frac{\sigma - E_2\varepsilon_2}{\eta} = \frac{E_2}{\eta} \left(\frac{\sigma}{E_2} - \varepsilon_2 \right) = \\ &= \frac{E_2}{\eta} \left(\frac{\sigma}{E_2} - \varepsilon + \varepsilon_1 \right) = \frac{E_2}{\eta} \left(\frac{\sigma}{E_2} - \varepsilon + \frac{\sigma}{E_1} \right), \end{aligned}$$

приходим к уравнению

$$\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \sigma + \frac{\eta}{E_1 E_2} \frac{d\sigma}{dt} = \varepsilon + \frac{\eta}{E_2} \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Введя обозначения

$$\lambda = \frac{E_1 + E_2}{\eta}, \quad \mu = \frac{E_2}{\eta},$$

перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d\sigma}{dt} + \lambda\sigma = E_1 \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \mu\varepsilon \right). \quad (11.1.10)$$

При быстром приложении нагрузки производные здесь доминируют,

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_1 \frac{d\varepsilon}{dt},$$

откуда следует

$$\sigma = E_1 \varepsilon,$$

то есть E_1 – мгновенный модуль упругости:

$$E_0 = E_1.$$

При больших временах и постоянной приложенной силе $d\sigma/dt = 0$, $\varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon_\infty$, и уравнение (11.1.10) принимает вид:

$$\lambda\sigma_\infty = \mu E_1 \varepsilon_\infty.$$

Отсюда находим длительный модуль упругости

$$E_\infty = \frac{\mu}{\lambda} E_1 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}.$$

Очевидно,

$$E_\infty < E_0.$$

Параметры $1/\lambda$ и $1/\mu$ имеют размерность времени; первую называют *временем релаксации*

$$\tau_{\text{рел}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\eta}{E_1 + E_2},$$

вторую – *временем ползучести*

$$\tau_{\text{пол}} = \frac{1}{\mu} = \frac{\eta}{E_2}.$$

Очевидно, время релаксации меньше времени ползучести.

Среду, описываемую дифференциальным уравнением (11.1.10), называют *стандартным вязкоупругим телом*. Более точного описания реальных сред можно достичь дальнейшим увеличением числа элементов схемы, приводящим к уравнениям вида

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k \varepsilon}{dt^k}.$$

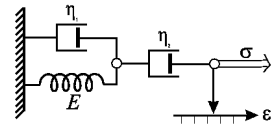


Рис. 11.10. К упражнению 4

11.1.6 Упражнения

1. Найти решение уравнения деформации ползучести в модели Кельвина.
2. Найти решение уравнения релаксации напряжения в модели Максвелла.
3. Записать интеграл наследственности для деформации при условии, что приложено напряжение

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sigma_0 e^{-t/\theta}, & t > 0. \end{cases}$$

4. Проанализировать поведение системы, представленной схемой, изображенной на рис. 11.10.

11.2 Упругопластичная среда

11.2.1 Пластичность и скрытые переменные

Многочисленные опыты над различными материалами, и в первую очередь, металлами (с исследования которых и началось развитие теории деформируемых сред) показывают, что упругое поведение, наблюдаемое в начале процесса, пока деформации ещё малы, с увеличением приложенных сил отклоняется от линейного закона. Такого типа процессы (например, растяжение резины) описываются нелинейной теорией упругости, по отношению к которой рассмотренная выше линейная теория является лишь первым приближением. Уравнения динамики при этом усложняются, но свойство возвращаться в исходное состояние по прекращении действия сил, определяющее класс упругих материалов, остаётся до некоторого момента в силе. По превышении этого предельного значения материал уже не может вернуться в исходное состояние после снятия нагрузки. Такой режим поведения материалов называют *пластичностью* или (в комплексе с предыдущим) *упругопластичностью*, а сами материалы – *упругопластичными*. «Отметим, что в современной научно-технической литературе, посвящённой ползучести материалов, термин «ползучесть» часто заменяется словосочетанием «вязкоупругость», а упругоползучее тело называется «вязкоупругим», хотя по Браннону (с. 233) теория пластичности отличается от вязкоупругости и ползучести тем, что допускает обратимые упругие деформации» (см.¹).

Исходные положения механики пластичности базируются на экспериментальных наблюдениях макроскопического поведения тел при комбинированном действии напряжений. Задача теории пластичности двояка: во первых, дать подходящие аппроксимации экспериментально найденных конститутивных соотношений (типа соотношений между напряжениями и деформациями) с точностью, достаточной для инженерных расчётов; во-вторых, развить математическую технику вычислений неоднородного распределения напряжения в остаточно деформированных различными способами телах. Важной областью исследований является также пограничная область, переходная от чисто упругой к полностью пластичной. Между этими пределами, где упругие и пластические деформации являются величинами одного порядка, и лежит важнейшая характеристика материала – критическая нагрузка, заставляющая элемент конструкции течь пластически в его

¹Н.Х.Арутюнян и В.В. Колмановский. Теория ползучести неоднородных тел. – М.: Наука, 1983. – С.7.

наиболее слабой точке².

Выше мы полагали (часто по умолчанию), что происходящие с телом механические изменения протекают при постоянной температуре. Так происходит не всегда. Более того, деформации тел *всегда* сопровождаются хотя бы небольшими перемещениями соседних элементов друг относительно друга, что в свою очередь преобразует часть механической энергии в тепловую: образец нагревается. Достаточно быстро согнуть алюминиевую ложку, чтобы в этом убедиться. Это, правда, не означает, что температурные эффекты следует учитывать всегда; во многих случаях они играют малозаметную роль. Когда температурные эффекты становятся существенным фактором, вместо функции

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma) \quad (11.2.1)$$

мы должны рассматривать деформацию как функцию двух переменных, добавив в число её аргументов температуру T :

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma, T). \quad (11.2.2)$$

С технической стороны получение этой функции опытным путём не составляет проблемы: температура – доступная для измерений *открытая переменная*. Выполняя измерения, мы видим, как с изменением температуры меняется кривая «деформация-напряжение». Однако различное поведение близких материалов при одной и той же температуре позволяет предположить, что есть *ещё кое-что*, порождающее это разнообразие. Это *кое-что* можно полагать представимым в виде набора

$$\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

некоторого числа *скрытых (внутренних)* переменных, дополнив ими аргументы функции (11.2.2):

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma, T, \vec{\xi}).$$

Ими могут быть любые параметры, в дополнение к деформации (или напряжению) уточняющие локальное состояние континуума во всех его точках. Такими параметрами могут быть (но не обязательно) сами

²С учётом пластических деформаций рассчитывают конструкции разового использования, такие, например, как металлические фермы установок для запуска ракет, ведут прочностные расчёты стволов артиллерийских орудий, броневой защиты танков. Кстати, именно за разработку методов расчёта танковой брони советскому академику А. А. Ильюшину в 1948 году была присуждена Сталинская премия.

компоненты тензоров напряжений или деформаций. Принято считать, что скрытые переменные могут быть двух типов. К первому типу относятся *физические переменные*, отражающие информацию о локальных физико-химических свойствах континуума и процессах, происходящих в нём. Вторую группу образуют математические параметры, обеспечивающие необходимую интерполяцию.

Предположение, что скрытые переменные удовлетворяют системе уравнений эволюционного типа

$$\dot{\xi}_k = g_k(\sigma, T, \vec{\xi}),$$

существенно обогащает набор моделей неупругих деформаций, включая упругопластичные, вязкопластичные и вязкоупругие.

В простейших конститутивных моделях неупругих материалов внутренние переменные состоят из ε_{ij} и параметра κ , определяемого как эффективная неупругая деформация

$$\kappa = \int_{-\infty}^0 \sqrt{(2/3)\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}^{\text{HY}} dt.$$

Появление множителя $2/3$ под знаком корня оправдано тем, что в случае, если образец изотропного материала характеризуется неупругой несжимаемостью, то есть

$$\dot{\varepsilon}_{ii}^{\text{HY}} = 0,$$

то при одноосном растяжении или сжатии скорость неупругих деформаций даётся тензором

$$\dot{\varepsilon}^{\text{HY}} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}^{\text{HY}} & 0 & 0 \\ 0 & -(1/2)\dot{\varepsilon}^{\text{HY}} & 0 \\ 0 & 0 & -(1/2)\dot{\varepsilon}^{\text{HY}} \end{pmatrix},$$

так что

$$\sqrt{(2/3)\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}^{\text{HY}} = |\dot{\varepsilon}|^{\text{HY}}.$$

11.2.2 Диаграммы деформация-напряжение

Наиболее простым и скорым тестом, количественно определяющим пластичность данного материала, является испытание на растяжение или кручение. Результатом его является зависимость возникшего в образце напряжения от величины произведённой деформации. Хотя этой информации и недостаточно для выводов о протекающих в образце

физических процессах, диаграммы «напряжение-деформация» успешно используются для феноменологического описания связей между наблюдаемыми величинами, позволяющего определить энергетические характеристики процесса и даже предсказать некоторые аспекты поведения этого материала в других условиях. Качественный пример такой диаграммы показан на рис. 11.11. Рассмотрим его подробнее.

Начальный участок кривой (от точки O до точки 1) отвечает чисто упругим деформациям, следующим закону Гука:

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon^{упр}.$$

Если на этом начальном участке прекратить нагружение, представляющая состояние образца точка сместится по этой же наклонной кривой и займёт первоначальное положение. В точке 1 мы видим начинающееся отклонение от линейного режима; соответствующее значение напряжения $\sigma^{упр}$ называется *пределом упругости* (строже говоря, пределом *линейной упругости*). Следующий характерный интервал кривой – *участок пластичности 1-2* – на котором

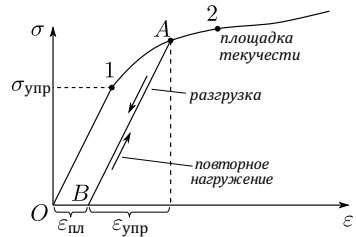


Рис. 11.11. Диаграмма «деформация-напряжение»

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^{плс}(\sigma), \quad \sigma^{упр} < \sigma < \sigma^T. \quad (11.2.3)$$

Если на участке 1-2 прекратить нагружение и снять нагрузку, то представляющая точка из положения A снова вернётся на ось $\sigma = 0$, но уже не по пройденной траектории в начало координат, а по отрезку, параллельному упругому участку кривой, и пересечёт ось ε в точке B . Начиная с какого-то значения напряжения σ^T (точка 2), называемого *пределом текучести*, дальнейшее удлинение образца происходит практически без увеличения нагрузки. Это явление называется *текучестью*, а участок диаграммы правее точки 2 называется *площадкой текучести*.

Дальнейшая деформация происходит, даже если нагрузку не увеличивать. При этом наблюдается уменьшение поперечных размеров образца вплоть до его разрыва. При этом важно решить вопрос о том, к какой площади поперечного сечения образца будет отнесена величина приложенной к нему силы: к первоначальной площади A_0 (такое напряжение называется *номинальным* или *техническим* и обозначается

$\sigma^{\text{ном}}$) или к текущей, изменяющейся в процессе деформации площади A (*истинное напряжение* или *напряжение Коши* $\sigma^{\text{ист}}$). Понятно, что вторая величина, зависящая от текущих размеров, лучше отражает реальное состояние образца, чем первая, которая более удобна для конструкторских и технических нужд.

По величине относительного удлинения материалов при разрыве δ проводится разделение их на *пластичные* и *хрупкие*: при $\delta > 0,1$ материалы считают пластичными, при $\delta < 0,03$ – хрупкими. Интеграл

$$A(\delta) = \int_0^{\delta} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

представляет работу разрушения образца. Главное отличие упругопластичных материалов от вязкоупругих в том, что их сопротивление зависит от величины, но не от скорости деформации, как это наблюдается в вязкоупругих средах. Ещё раз подчеркнём, что строгого разделения материалов по этим, вообще говоря, сугубо внешним признакам, не существует. Есть, в частности, материалы, демонстрирующие вязкопластичное поведение.

Пластическая составляющая формулы (11.2.3) аппроксимируется различными выражениями. Так, в отсутствие резкого перехода от одного режима к другому используется формула Рамберга-Осгуда

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{\sigma_R}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_R} \right)^m, \quad (11.2.4)$$

где α и m – безразмерные постоянные, а σ_R – характерное для данного материала эталонное напряжение. Если m достаточно велико, главную роль при $\sigma < \sigma_R$ играет первое слагаемое, отвечающее идеальной упругой деформации, но в малой окрестности σ_R быстро возрастает второе слагаемое, так что это значение может приближённо считаться напряжением текучести. При $m \rightarrow \infty$ оно становится равным нулю при $\sigma < \sigma_R$ и бесконечным при всех $\sigma > \sigma_R$. Этот предельный случай называют *идеальной моделью пластического тела* с пределом текучести σ_R .

При больших деформациях первым (упругим) слагаемым бывает можно пренебречь и при конечных напряжениях, и формула (11.2.4) тогда обращается относительно напряжения, принимая вид

$$\sigma = C\varepsilon^n, \quad (11.2.5)$$

где $n = 1/m$ и $C = (E/\alpha)^n \sigma_R^{1-n}$ – положительные постоянные. Некорректность формулы (11.2.5) в начальной области (бесконечная скорость возрастания при $\varepsilon = 0$) может быть скомпенсирована составной модификацией

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \sigma_E/E; \\ \sigma_E (E\varepsilon/\sigma_E)^n, & \varepsilon \geq \sigma_E/E. \end{cases}$$

выбором подходящего значения σ_E .

Изучение свойств при больших удлинениях образцов в процессе деформаций вплоть до их разрушения требует более *естественного* (логарифмического) определения удлинения $\varepsilon_l = \ln[(l_0 + \Delta l)/l_0]$ и учёта изменений поперечных размеров. Вследствие последнего эффекта номинальное напряжение возрастает с удлинением медленнее, чем истинное, что (весьма приближённо) может быть отражено выражением $\sigma^{\text{ном}} = \sigma_t^{\text{ист}} e^{-\varepsilon_l}$. В результате имеем

$$d\sigma^{\text{ном}} = (d\sigma_t^{\text{ист}} - \sigma_t^{\text{ист}} d\varepsilon_l) e^{-\varepsilon_l},$$

из чего можно заключить, что номинальное напряжение, а следовательно, и нагрузка максимальны, когда

$$\frac{d\sigma_t^{\text{ист}}}{d\varepsilon_l} = \sigma_t^{\text{ист}}.$$

Максимальное значение достигаемого в экспериментах по растяжению напряжения определяет *предел прочности на растяжение (разрыв)*. По превышении этого предела в образце (металла) появляется утоньшение (*шейка*), по которому и происходит разрыв.

11.2.3 Трёхмерные модели

Переход от описания одномерных моделей к теории трёхмерной деформации непрост даже в случае абсолютной упругости, что же говорить о неупругих процессах – пластичности, текучести, ползучести, упрочнении, разрушении... Нам придётся ограничиться здесь лишь знакомством с несколькими основными понятиями теории, отправив желающих углубиться в неё к более специализированным руководствам.

Модель Треска

Мысленно разбив деформируемое тело на бесконечно малые элементы, скажем, кубической формы, припишем каждому из них свой-

ства, наблюдаемые нами при небольших деформациях в экспериментах с образцами обычных размеров, а именно: положим, что элемент этот ведёт себя как упругое тело, а при больших обнаруживает текучесть. Закрепим такой кубик между параллельными плоскостями и приложим к ним пару сил, характеризуемых касательным (сдвиговым) напряжением τ . Обозначим через k то значение напряжения сдвига, при котором появляется свойство пластичности, тогда *условие пластичности при одноосном сдвиге* запишется в виде равенства

$$\tau = k.$$

Элементарный кубик, находящийся в составе тела конечных размеров, испытывает силовые воздействия со всех сторон, и на каждой грани возникают касательные напряжения. Разные его грани – это элементарные площадки разных ориентаций, поэтому естественно предположить, что элемент этот упругий до тех пор, пока касательные напряжения *на всех площадках* меньше предельного значения k , и перестаёт быть таковым (становится пластичным), как только условие это нарушится *хотя бы на одной грани*. Таким образом, два типа реакции тела на внешние усилия разделяются уравнением

$$\max\{\tau\} = k,$$

называемым *условием пластичности Треска* (по имени французского инженера, сформулировавшего его на основе анализа большой серии экспериментов с металлами). Условие это может быть выражено уравнением

$$f(\sigma_{ij}) \equiv \varphi(\sigma_{ij}) - k = 0,$$

в котором функция $\varphi(\sigma_{ij})$ определяет максимальное касательное напряжение в точке с заданным тензором напряжений σ_{ij} . В пространстве главных напряжений $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ она имеет вид

$$\varphi(\sigma_i) = \max\{|\tau_j(\sigma_i)|\},$$

где τ_i в свою очередь экстремальные значения касательных напряжений, выражаемые соотношениями

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2},$$

$$\tau_2 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2},$$

$$\tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Соотношения эти показывают, что экстремальные касательные напряжения равны полуразностям главных напряжений, действующих на двух гранях единичного куба, пересекающихся вдоль той из главных осей тензора напряжений, через которую проходит рассматриваемая площадка экстремального значения τ . В результате условие Треска запишется в виде

$$\max \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right\} = k. \quad (11.2.6)$$

Из уравнения (11.2.6) видно, что с увеличением нагрузки пластические свойства элемента среды, к которому относятся входящие в уравнение элементы тензора деформации, начнут проявляться только в случае, если выполнится хотя бы одно из следующих шести равенств:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm 2k, \quad (11.2.7a)$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \pm 2k, \quad (11.2.7b)$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \pm 2k. \quad (11.2.7c)$$

Следовательно, *ядро упругости* (область в пространстве главных напряжений, где справедливы законы упругости) отделяется от *пластической зоны*, где проявляются в той или иной мере законы пластичности, поверхностью, состоящей из шести попарно параллельных плоскостей. Каждая из них параллельна одной из координатных осей (σ_1, σ_2 или σ_3) и образует углы $\pi/4$ с двумя другими осями. Таким образом, поверхность нагружения, соответствующая условию текучести Треска, в трёхмерном пространстве главных напряжений имеет вид шестигранной призмы, грани и рёбра которой параллельны прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (рис. 11.12). Несложными построениями можно убедиться, что перпендикулярное оси призмы сечение является правильным шестиугольником, называемым *шестиугольником Треска*.

«За 8 лет (с 1864 по 1872 гг. – В.У.) Треска провел необычайно большое число экспериментов по пластическому деформированию множества твёрдых тел, от свинца и меди до льда, парафина и керамической пасты. Он продемонстрировал, что существуют измеримые и воспроизводимые параметры, которые могли создать основу для теории больших пластических деформаций в твёрдых телах. Большую часть опытов Треска выполнил на свинце. Он выбивал из листов цилиндрические элементы при помощи закалённого стального стержня (пуансона) меньшего диаметра; выдавливал цилиндрические образцы через круглые, треугольные и прямоугольные сквозные отверстия и в тупиковые углубления; сжимал цилиндрические

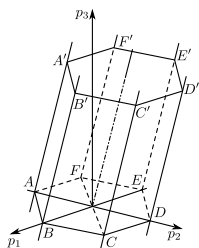


Рис. 11.12. Призма с шестиугольным основанием Треска

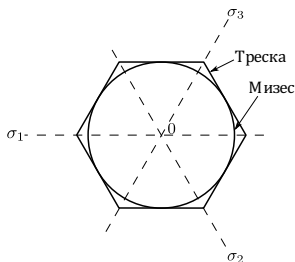


Рис. 11.13. Модели Треска (шестиугольник) и Мизеса (круг)

образцы кругового сечения, помещённые между закаленными плитами; исследовал обратную экструзию сплошных цилиндров различной толщины при наличии и отсутствии бокового стеснения и т. п. Для того чтобы наблюдать течение, он создал образцы в виде пакета отдельных пластин. Измерения состояли в фиксации приложенного давления и соответствующих изменений в форме и положении отдельных пластин. Поперечные разрезы пакета, производившиеся в конце каждого из опытов, позволяли ему детально описать, где каждое сечение тела текло в процессе эксперимента данного типа. Для более мягких материалов (глина, парафин и др.) он использовал слоистые маркеры различных цветов, чтобы проследить путь течения»³.

Модель Мизеса

Модель, развитая фон Мизесом, основывается на несколько ином предположении относительно поверхности текучести, а именно, вместо уравнения (11.2.6) принимается

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 8k^2, \quad (11.2.8)$$

называемое *условием пластичности Мизеса*. Формально оно получается возведением в квадрат и сложением равенств (11.2.7) с последующим переобозначением постоянной k . С геометрической точки зрения полученное уравнение представляет в пространстве $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ цилиндрическую поверхность круглого сечения с осью, параллельной прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. С физической точки зрения это означает, что пластические свойства элемента тела начинают проявляться тогда, когда касательное напряжение на *октаэдрической* площадке (так называют площадку,

³Васин Р.А., Еникеев Ф.У. Введение в механику сверхпластичности. Ч. I. – Уфа: Гилем, 1998.

равнонаклонённую ко всем трём главным осям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) достигает некоторой предельной величины, обозначенной $(8/9)k_1^2$.

Чтобы перейти от главных осей к произвольной системе координат, выразим сначала условие пластичности Мизеса через девиатор тензора напряжений, компоненты которого, как известно, определяются формулой

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}J_1\delta_{ij},$$

где $J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ – первый инвариант тензора напряжений. Очевидно, условие (11.2.8) при переходе к главным компонентам девиатора сохраняет свою форму:

$$(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2 = 8k_1^2.$$

Сложим это равенство с тождественно равным нулю квадратом первого инварианта девиатора

$$(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)^2 = 0,$$

получим выражение

$$(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2 + (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)^2 = 8k_1^2,$$

после раскрытия скобок принимающее вид:

$$\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 = \frac{8}{3}k_1^2.$$

Левая часть представляет собой второй инвариант девиатора напряжений

$$\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 = \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}J_1\delta_{ij}\right) \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}J_1\delta_{ij}\right) \equiv \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}J_1\delta_{ij}\right)^2,$$

поэтому в произвольной системе осей условие Мизеса записывается в виде

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}J_1\delta_{ij}\right)^2 = \frac{8}{3}k_1^2,$$

где $J_1 = \sigma_{ii}$ – первый инвариант тензора напряжений. Постоянная k_1 (как и k в модели Треска) определяется по экспериментальным данным.

Постулат Друкера

По характеру временного развития процесса деформации называют *активными*, если они производятся возрастающей нагрузкой, и *пассивными*, если они наблюдаются в процессе снижения нагрузки. При осевом растяжении или сжатии и чистом сдвиге активная и пассивная деформации устанавливаются по росту или падению абсолютных значений напряжений. Важнейшим отличием этих двух типов деформации является поведение *остаточной деформации* (деформации, оставшейся после снятия нагрузки): активный тип сопровождается повышением остаточной деформации, тогда как при пассивной деформации её остаточная компонента остаётся без изменений.

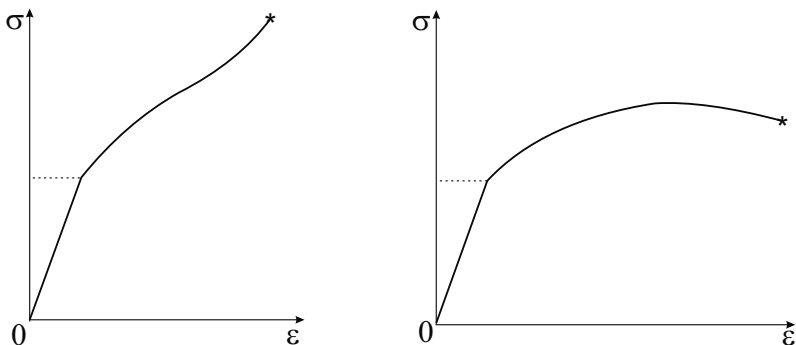


Рис. 11.14. Диаграммы σ – ε для устойчивых (слева) и неустойчивых (справа) материалов (эвэздочкой отмечена точка разрушения)

В активном процессе наблюдаются два основных вида связи между напряжениями и деформациями, показанные (для одноосного растяжения) на рис. 11.14. В левой его части показан процесс, в котором увеличение деформации на $\Delta\varepsilon > 0$ сопровождается повышением напряжения на $\Delta\sigma$; обе величины положительны, поэтому положительна и работа приращения напряжения, $\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon > 0$. Такие материалы называют *устойчивыми*, а сопровождающее эти деформации изменение свойств материала *упрочнением*. В случае чисто упругих деформаций свойства материала не меняются, и после снятия нагрузки деформации полностью исчезают. При этом результирующая работа приращений напряжения за весь цикл деформации равна нулю. На правой же части рисунка изображена иная ситуация: начиная с какого-то значения ε дальнейшее приращение деформации ведёт к падению напряжения. Теперь приращение $\Delta\sigma$, а с ним и работа приращения оказы-

ваются отрицательными, $\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon < 0$. Материал при этом становится неустойчивым, образуется шейка, предвещающая разрыв. Значит, напряжённо-деформированное состояние работоспособного материала должно описываться σ - ε -диаграммой первого типа.

Приведённые выше соображения сформулированы в виде утверждения, известного как *постулат Друкера*:

В процессе нагружения добавочные напряжения производят положительную работу. За весь цикл дополнительного нагружения и разгрузки добавочные напряжения совершают положительную работу при условии, что произошли пластические деформации. Для упрочняющегося тела такая работа будет равна нулю только при чисто упругом деформировании материала.

Постулат этот распространяется и на трёхмерные деформации. Из него вытекают важные следствия. Рассмотрим одно из них. На рис. 11.15 представлены поверхность текучести Ω и точка A , расположенная внутри области, ограниченной этой поверхностью. Обозначим напряжённость в этой точке через σ_i^0 , а в точке B , лежащей на поверхности Ω , через σ . Из этой точки производится бесконечно малое догружение $d\sigma_i$, вызывающее столь же малые приращения упругой $d\varepsilon_i^{\text{упр}}$ и пластической $d\varepsilon_i^{\text{плс}}$ компонент деформации и переводящее тем самым изображающую точку в положение B' , находящееся уже на другой границе Ω' зоны текучести, затем осуществляется возврат в состояние A по другому, не совпадающему с траекторией нагружения пути. Согласно постулату Друкера,

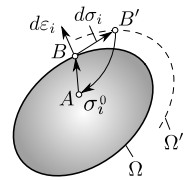


Рис. 11.15. К постулату Друкера

$$\oint (\sigma_i - \sigma_i^0) d\varepsilon_i > 0.$$

Учитывая, что $d\varepsilon_i = d\varepsilon_i^{\text{упр}} + d\varepsilon_i^{\text{плс}}$ и

$$\oint (\sigma_i - \sigma_i^0) d\varepsilon_i^{\text{упр}} = 0,$$

в силу инфинитезимальности процесса BB' можно заключить, что

$$(\sigma_i - \sigma_i^0) d\varepsilon_i^{\text{плс}} > 0.$$

Отсюда следует, что при любом приращении деформации внутри области текучести элементарная работа $\sigma_i d\varepsilon_i^{\text{плс}}$ для действительного напряжённого состояния принимает наименьшее значение.

Малые упругопластические деформации

В основе разработанной А.А.Ильюшиным теории малых упругих деформаций (называемой ещё *деформационной теорией пластичности*) лежат следующие предположения, в основном подтверждаемые экспериментальными данными.

1. При упругопластическом активном и пассивном деформировании изменение объёма каждого элемента тела подчиняется закону Гука.
2. При активном упругопластическом деформировании в процессе простого⁴ нагружения направляющие тензоры напряжений и деформаций совпадают.
3. Зависимость интенсивности напряжений $\sigma^{\text{инт}} = \Phi(\varepsilon^{\text{инт}})$ при любом напряжённом состоянии подобна аналогичной диаграмме простого растяжения $\sigma = \Phi(\varepsilon)$.

Рассмотрим в качестве примера σ - ε -диаграмму, изображённую на рис. 11.16. Она состоит из двух участков: линейного $0a$ и криволинейного ab , в совокупности изображающих поведение упругопластического образца со степенным законом упрочнения. Линейный участок соответствует закону Гука $\sigma = E\varepsilon$. Весь график в целом представим формулой

$$\sigma = E\varepsilon[1 - \omega(\varepsilon)].$$

Согласно третьему положению, эта же формула должна описывать и связь соответствующих интенсивностей,

$$\sigma^{\text{инт}} = E\varepsilon^{\text{инт}}[1 - \omega(\varepsilon^{\text{инт}})].$$

Вид функции понижения ω зависит от конкретного вида диаграммы. Для идеального упругопластического материала, следующего диа-

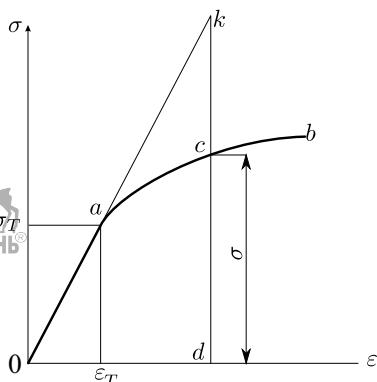


Рис. 11.16. Типичная σ - ε -диаграмма упругопластического образца

⁴Простым называется нагружение, при котором внешние силы возрастают одновременно и пропорционально общему параметру. Нагружение называется *сложным*, если хотя бы одно из этих условий не выполняется.

грамме Прандтля (рис. 11.17),

$$\sigma_{\text{инт}} = \begin{cases} E\varepsilon^{\text{инт}}, & \varepsilon^{\text{инт}} < \varepsilon_T; \\ \sigma_T, & \varepsilon^{\text{инт}} \geq \varepsilon_T. \end{cases}$$

В этом случае

$$\omega(\varepsilon^{\text{инт}}) = \begin{cases} 0, & \varepsilon^{\text{инт}} < \varepsilon_T; \\ 1 - \varepsilon_T / (\varepsilon^{\text{инт}}), & \varepsilon^{\text{инт}} \geq \varepsilon_T. \end{cases}$$

Если диаграмма не имеет начального линейного участка, или он в рассматриваемом масштабе не играет никакой роли, а возрастающая функция $\Phi(x)$ имеет подходящий вид, она может быть аппроксимирована степенной функцией

$$\sigma^{\text{инт}} = \sigma_T (\varepsilon^{\text{инт}} / \varepsilon_T)^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

При $\alpha = 1$ получаем закон деформирования идеально упругого тела,

$$\sigma^{\text{инт}} = E\varepsilon^{\text{инт}},$$

при $\alpha = 0$ – закон для идеально пластического тела, не обладающего упрочнением

$$\sigma^{\text{инт}} = \sigma_T.$$

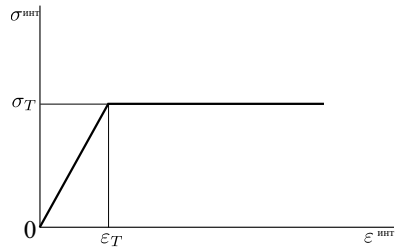


Рис. 11.17. Диаграмма Прандтля

11.2.4 Упругопластические деформации стержня

Рассмотрим в рамках простейшей модели Прандтля деформации изгиба и кручения упругопластичного стержня. Чисто упругую часть этой задачи мы решали в **10.2.5**.

Изгиб

Продолжим рассмотрение задачи об изгибе стержня прямоугольного сечения (балки) (**10.2.5**), воспользовавшись теми же обозначениями и уточнённой модификацией закона упругости Гука для изгиба:

$$\sigma_x(y) = \frac{E y}{(1 - \nu^2) R}. \quad (11.2.9)$$

При $y > 0$ (то есть, выше оси OX) элементы балки растягиваются, при $x < 0$ (ниже оси) сжимаются. Обозначим через $2a$ толщину балки (её размер вдоль оси OY), а через b – её ширину (размер в поперечном направлении), так что площадь поперечного сечения недеформированной балки $S = 2ab$. Чтобы создать изгиб радиусом R , требуется изгибающий момент

$$M = b \int_{-a}^a \sigma_x(y) y dy. \quad (11.2.10)$$

Заметим, что произведение $\sigma_x(y)y$ – чётная функция переменной интегрирования, так что момент (11.2.10) может быть выражен через интеграл по положительному полуинтервалу

$$M = 2b \int_0^a \sigma_x(y) y dy. \quad (11.2.11)$$

В случае, когда приложенный момент не выводит балку за пределы зоны упругости, вопрос решается подстановкой формулы (11.2.10) в (11.2.9) и интегрированием:

$$M_{\text{упр}} = \frac{2a^3 b E}{3(1 - \nu^2) R}.$$

В противном случае за пределами текучести следует принять одну из моделей пластичности. В случае, если это – модель Треска, то продольное напряжение в пластической зоне всегда равно $\pm Y$, и интеграл (11.2.11) предстанет в виде суммы двух интегралов

$$M_{\text{упр-пл}} = 2b \int_0^{y_{\text{кр}}} \sigma_x(y) y dy + 2b \int_{y_{\text{кр}}}^a Y y dy = \frac{2y_{\text{кр}}^3 b E}{3(1 - \nu^2) R} + bY(a^2 - y_{\text{кр}}^2).$$

Учитывая, что обратный радиус кривизны

$$\frac{1}{R} = \frac{1 - \nu^2}{E y_{\text{кр}}} Y,$$

приходим к результату

$$M_{\text{упр-пл}} = bY(a^2 - y_{\text{кр}}^2/3),$$

впервые полученному Сен-Венаном.

Кручение

Перейдём теперь к деформации однородного цилиндрического стержня круглого сечения при нагружении его по торцам усилиями, создающими крутящий момент $\vec{M} = M\vec{e}_3$. В 10.2.5 мы видели, что касательные напряжения при этом возрастают линейно с увеличением расстояния от центра,

$$\tau_z = \varphi \mu r, \quad (11.2.12)$$

где $\varphi = \Phi/l$ – угол закручивания стержня на единицу его длины. Полный крутящий момент в зоне упругости связан с касательным напряжением на поверхности стержня соотношением

$$M = \int_V [(\pi/2)\mu R^4/l] \Phi = (\pi/2)\tau R^3,$$

справедливым лишь до тех пор, пока τ не достигнет критического значения $\tau_{кр}$. При

$$M = M_{кр} = (\pi/2)\tau_{кр}R^3$$

на боковой поверхности образца возникает *пластическое течение*, при дальнейшем увеличении крутящего момента охватывающее *пластическую зону* – часть тела цилиндра, ограниченную поверхностями $r = r_{кр}$ и $r = R$. В упруго-идеально-пластичной модели

$$\tau(r) = \begin{cases} kr/r_{кр}, & 0 \leq r \leq r_{кр}; \\ \tau_{кр}, & r \geq r_{кр}. \end{cases}$$

Следовательно, крутящий момент

$$M = \begin{cases} (\pi/2)\tau_{кр}R^3, & R < r_{кр}; \\ 2\pi \int_0^R \tau(r)r^2 dr = (2\pi/3)\tau_{кр} [R^2 - (r_{кр}/2)^2], & R \geq r_{кр}. \end{cases}$$

Согласно (11.2.12), при фиксированном (для данного материала, его температуры и пр. условий) значении $\tau_{кр}$ по мере уменьшения угла закручивания увеличивается радиус упругого ядра: оно расширяется до тех пор, пока напряжение τ не превзойдёт критического значения и деформация стержня не станет полностью упругой. С увеличением же угла закручивания наблюдается обратный процесс: ядро упругости сжимается и всё большая часть материала оказывается в зоне пластичности. Из полученной формулы можно определить и предельное значение крутящего момента для достижения состояния полной текучести стержня,

$$M_{тек} = (2\pi/3)\tau_{кр}R^3,$$

однако на практике это невыполнимо: всегда остаётся вблизи оси кручения область, в которой деформации ещё упруги.

ЛАНЬ®

11.2.5 Дискуссия о формализме в теории пластичности

Физические процессы, происходящие в области текучести, богаты как своим физическим содержанием, так и разнообразием задач для приложения математического аппарата. Однако, как и физическая теория упругости, они лежат за пределами собственно механики, а изучаются в физике металлов, физике твёрдого тела и др. Демаркация границы между механикой и физикой (в указанном выше смысле) и послужила поводом для дискуссии, разгоревшейся в 1950 г. В тот год в журнале «Изв.АН СССР. Отд-ние техн.н.» вышли одна за другой две статьи: С.Т. Кишкина⁵ и С.И. Ратнер⁶ с критикой работ А.А. Ильюшина за формальное описание механических свойств материалов без учёта протекающих в них физико-химических процессов. Вот фрагмент этой дискуссии (цитируется по книге⁷).

С.Т. Кишкин: Напомним А.А. Ильюшину, что механические свойства металлов и сплавов определяются их структурой, т.е. фактором, который А.А. Ильюшин упорно игнорирует при построении теории пластичности. Нельзя построить законы поведения под нагрузкой даже элемента тела при элементарных способах нагружения, если не учитывать физико-химических процессов, могущих протекать в теле.

А.А. Ильюшин: Напомним С.Т. Кишкину, что механические свойства металлов количественно описываются математическими соотношениями между напряжённым состоянием (тензором напряжений), конфигурацией (тензором деформации и производными от него тензорами) и временем и эти соотношения находятся из опытов при всевозможных сложных однородных напряжённых состояниях металлического тела (бруса, трубы и т.п.). Поэтому такие соотношения учитывают внутренние процессы, протекающие в металле в процессе деформации, и являются количественными следствиями этих явлений.

С.Т. Кишкин: Неправильное распространение закономерностей, полученных при испытаниях стабильных сплавов, находящихся в состоянии устойчивого фазового равновесия, буквально на все сплавы, в том числе и на метастабильные, явилось принципиальной ошибкой при построении универсальной теории пластичности.

А.А. Ильюшин: В теории малых упругопластических деформаций речь идёт об универсальных законах пластичности для данного металла и под словом «универсальность» закона понимается независимость этого закона, причём в известных пределах, от вида напряжённого и деформированного состояний, что вытекает

⁵ С.Т. Кишкин. Против формализма в теории пластичности. – № 2. – С.266-278.

⁶ С.И. Ратнер. К вопросу о задачах теории пластичности. – № 3. – С. 435-450.

⁷ Васин Р.А., Еникеев Ф.У. Введение в механику сверхпластичности. – Уфа: Гилем, 1998. – С.280.

из опытов. Распространение же этих законов буквально на все сплавы делается С.Т. Кишкиным и С.И. Ратнер, и с таким «распространением» мы не согласны.

С.Т. Кишкин: Механика в данном случае сама по себе бессильна предвидеть специфичность поведения того или иного поведения материала при механических испытаниях или эксплуатации машин. Способность предвидения в данном случае принадлежит физике и металловедению. Исследовательская работа должна заканчиваться не тогда, когда делается открытие нового явления или описание его, а когда мы начинаем управлять этим явлением.

А.А. Ильюшин: Я уже говорил, что механики ставят и решают задачу о поведении конструкций в смысле их деформируемости, напряжённости, прочности, устойчивости и колебаний, исходя из основных уравнений теории пластичности, которые содержат выраженные в виде количественных соотношений экспериментальные законы пластичности, характер силовых воздействий, формы и размеры конструкций, но не «для того или иного» материала, а только для тех материалов, для которых точность теории признается достаточной с практической точки зрения. И решение таких задач даёт обоснованное количественное представление о реальном поведении конструкций. Что же касается «способности предвидения» поведения конструкций в реальных условиях, о которой говорит С.Т. Кишкин, то эта способность до сих пор не реализована.

Остановим здесь цитирование дискуссии и дадим слово одному из звёздной плеяды физиков, создавших квантовую механику, – **Вернеру Гейзенбергу**. В короткой статье⁸, опубликованной в 1966 году и переведённой в 1967 г. он пишет:

Под «феноменологической» теорией понимают такую формулировку закономерностей в области наблюдаемых физических явлений, в которой не делается попытки свести описываемые связи к лежащим в их основе общим законам природы, через которые они могли бы быть поняты. *В развитии физики такие феноменологические теории всегда играли значительную роль...* (курсив мой – В.У.). Конечно, феноменологические теории развиваются всегда там, где наблюдаемые явления ещё не могут быть сведены к общим законам природы. Причина этой



Алексей Антонович Ильюшин (1911-1998) – выдающийся советский учёный-механик, член-корреспондент Российской академии наук, действительный член Российской академии ракетных и артиллерийских наук, Лауреат Сталинской премии, Ломоносовской премии 1-й степени, заслуженный профессор Московского университета.

⁸В.Гейзенберг. Роль феноменологических теорий в системе теоретической физики. Успехи физических наук. – Т.91. – В.4. – С. 731-733.

невозможности может состоять либо в чрезвычайной сложности соответствующих явлений, которая ещё не допускает такое сведение из-за математических трудностей, либо в незнании упомянутых законов.

11.3 Вязкопластичные среды

11.3.1 Вязкопластичность

Обсуждая поведение материалов с увеличением нагрузки, мы отмечали, что многие из них (в первую очередь, металлы), будучи при малых деформациях упругими, при больших становятся текучими. В этом и заключается свойство упругопластичности: по достижении напряжением некоторого порогового значения (предела текучести) образец принимает форму, которая, как и упругом процессе, остаётся постоянной при постоянной нагрузке, но при снятии последней уже не восстанавливается. Значение σ зависит от материала, а для заданного материала – от его температуры. Существуют, однако, материалы, деформация которых продолжается и без нарастания нагрузки. Такие материалы называют вязкопластичными (часто вязкопластичными жидкостями или просто вязкопластиками). Наряду с некоторыми металлами и сплавами к ним относятся бетоны, буровые растворы, сточные грязи, масляные краски, растворы полимеров, подобных производным целлюлозы, зубная паста, крем для обуви и даже губная помада – всё то, что похоже на пасту. Лёд ледников, лава вулканов, шоколад тоже входят в число вязкопластиков. Особое поведение вязкопластиков объясняется тем, что в жидкости, находящейся в покое, образуется жёсткая пространственная структура, оказывающая сопротивление любому напряжению, меньшему порогового.

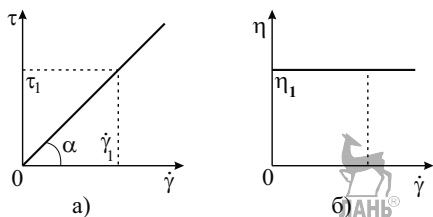


Рис. 11.18. Ньютонова жидкость и вязкопластик Бингама (первоначальная диаграмма)

Изучая движение такой жидкости в трубе под действием повышенного давления на одном из её концов, один из основателей динамики вязкопластических жидкостей Бингам установил, что расход жидкости \dot{V} пропорционален не просто этому давлению, а разности между ним и некоторым критическим значением, ниже которого жидкость вообще не текла. В терми-

нах стандартного описания поведения вязкой жидкости вблизи стенки, перпендикулярной оси OY , под действием напряжения сдвига τ это результат запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{cases} 0, & \tau < \tau_T; \\ (\tau - \tau_T)/\mu, & \tau > \tau_T. \end{cases}$$

Графическое сопоставление поведения вязкопластика Бингама с ньютоновой вязкой жидкостью показано на рис. 11.18а. Сегодня принято представлять это свойство в слегка изменённом виде (рис. 11.18б), поскольку расход жидкости зависит от диаметра трубы, и первоначальное представление требовало дополнительной информации.

11.3.2 Тестирование вязкопластических материалов

Существует несколько специфических тестов, характеризующих вязкопластическое поведение материалов вблизи их твёрдого состояния.

Тесты на упрочнение. Следующие три особенности поведения вязкопластических материалов проявляются в таких испытаниях.

- При одних и тех же деформациях, чем выше их скорость, тем выше напряжение в материале.
- Изменение скорости деформации в процессе опыта сразу сказывается на $\sigma - \varepsilon$ кривой.
- Понятие порога текучести, строго говоря, не является более определённым.

Разложение деформаций на упругую и вязкопластическую составляющие

$$\varepsilon = \varepsilon^{\text{упр}} + \varepsilon^{\text{впл}}$$

остаётся применимым в тех случаях, когда они в совокупности малы. На рис. 11.19 изображена диаграмма, полученная в результате деформаций с переменной (скачкообразно меняющейся) скоростью (нижняя штриховая линия соответствует скорости $\dot{\varepsilon} = 0,1 \text{ с}^{-1}$, верхняя $\dot{\varepsilon} = 100 \text{ с}^{-1}$).

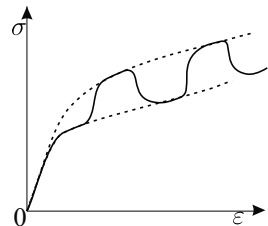
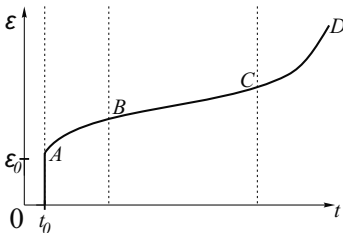


Рис. 11.19. $\sigma - \varepsilon$ -диаграмма вязкопластического материала при переменной скорости деформации

Тесты на ползучесть. В таких испытаниях измеряется временное поведение отклика одноосной деформации $\varepsilon(t)$ на приложенное к образцу постоянное напряжение (рис. 11.20) при постоянной температуре. Как видно из приведённого рисунка, график *кривой ползучести* $\varepsilon(t)$ можно разбить на три участка, соответствующим трём стадиям процесса. 1. Стадия *первичной ползучести* ($t_0 - t_1$) (или *переходный интервал*), содержащая скачок начальной (упругой) деформации, сопровождаемый непрерывным «эхом», скорость роста которого постепенно убывает. Убывание это объясняют конкуренцией механического упрочнения и термического разупрочнения: на первой стадии (участок AB) преобладает механическое упрочнение, связанное с ростом деформации ползучести. Второй участок (BC) соответствует равновесию, установившемуся между этими процессами, в результате которого процесс ползучести протекает с минимальной постоянной по времени скоростью $\xi_{\min}^{\text{ПЛЗ}}$, которая зависит от напряжения (а при изменении температуры – ещё и от температуры). Экспериментальные данные часто представляются в виде эмпирической зависимости



$$\xi_{\min}^{\text{ПЛЗ}} = Q(\sigma) = k\sigma^n, \quad (11.3.1)$$

Рис. 11.20. Временное поведение отклика одноосной деформации $\varepsilon(t)$ на приложенное к образцу постоянное напряжение

где k и n – постоянные, зависящие от материала и его температуры. В третьей стадии (CD) деформации развивается с нарастающей скоростью и заканчивается разрушением образца. Процесс разрушения может происходить как через образование так называемой *шейки*, так и через образование микротрещин. В обоих случаях имеет место уменьшение площади поперечного сечения сплошной части образца.

Тесты на релаксацию. На рис. 11.21 приведён типичный результат испытания вязкопластического материала на релаксацию при одноосном растяжении постоянной нагрузкой. Что можно было ожидать от такого опыта? Продифференцировав разложение деформации на упругую и вязкопластичную составляющие,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_{\text{упр}}}{dt} + \frac{d\varepsilon_{\text{впл}}}{dt},$$

и учтя, что в процессе испытания

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0,$$

можно видеть, что

$$\frac{d\varepsilon_{\text{впл}}}{dt} = -\frac{d\varepsilon_{\text{упр}}}{dt} = -\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}.$$


Стало быть, полученная при этих условиях релаксационная кривая может быть использована для определения скорости вязкопластичных деформаций.

11.3.3 Разрушение

Очень важной проблемой является разрушение материалов и конструкций, происходящее на последней стадии процесса деформации. Мы коснёмся здесь оценки времени разрушения в самом, можно сказать, простом случае: одноосном растяжении вязкопластичного стержня. Обозначив через S и l площадь поперечного сечения стержня и его длину и отметив индексом 0 их начальные значения, запишем условие несжимаемости

$$Sl = S_0 l_0.$$

При растяжении стержня силой P в нём возникает напряжение



$$\sigma = \frac{P}{S} = \frac{P}{S_0} \frac{l}{l_0}.$$

Поскольку речь явно идёт о больших деформациях, пренебрежём их упругой составляющей, а для оценки деформаций ползучести воспользуемся их логарифмическим представлением:

$$\bar{\varepsilon}^{\text{впл}} = \ln(l/l_0).$$

Приравнивая скорость этой деформации

$$\bar{\xi}^{\text{впл}} = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt}$$

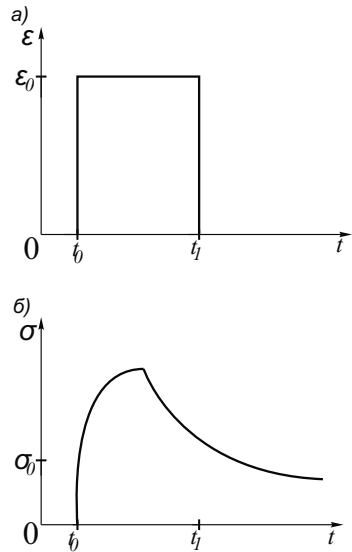


Рис. 11.21. Временной отклик напряжения в вязкопластике (нижний график) на прямоугольный импульс деформации (верхний график)

к эмпирически установленной величине (11.3.1)

$$\frac{dl}{l^{n+1}} = \frac{k\sigma_0^n}{l_0^n}$$

и интегрируя, получим:

$$\frac{l_0}{l} = \frac{S}{S_0} = (1 - nk\sigma_0^n t)^{1/n}.$$

Если речь идёт о вязком разрушении (через образование шейки), то естественно определить момент разрушения $t_{\text{рзр}}$ условием $S_{\text{рзр}} = 0$, тогда получим:

$$t_{\text{рзр}} = \frac{1}{nk\sigma_0^n}.$$

Эта полуэмпирическая формула хорошо согласуется с экспериментальными данными, относящимися к указанному механизму разрушения.

11.3.4 Модели

Как и в случае с упругопластичными материалами существует несколько математических моделей, каждая из которых отражает поведение определённого класса вязкопластичных сред. *Модель Бингама*, рассмотрением которой мы ограничимся здесь, представляется наиболее математически проработанной. В основу её положено конститутивное уравнение

$$\sigma'_{ij} = \begin{cases} 0, & \sigma < \sigma_Y; \\ \left(\nu + \frac{\sigma_Y}{\dot{\gamma}} \right) \dot{\gamma}_{ij}, & \sigma > \sigma_Y, \end{cases} \quad (11.3.2)$$

где σ'_{ij} – девиаторный тензор напряжений, ν – коэффициент вязкости (η),

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i},$$

а

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}$$

и

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}}$$

– вторые инварианты соответствующих тензоров. После некоторого изучения этой формулы можно прийти к выводу, что они действительно отражают основные черты описанного поведения, хотя, разумеется, весьма приближённо. Впрочем, это замечание можно отнести ко всем уравнениям *реологии* – науки, занимающейся представлением конститутивных (определяющих) соотношений, получаемых на эмпирической основе.

11.3.5 Движение

Наглядное представление об отличии поведения вязкопластичной жидкости от ньютоновой даёт нам рисунок 11.18. Однако эти и подобные им диаграммы не вскрывают всей сложности происходящих при этом явлений. Важнейшим отличием движения вязкопластичной среды от обычного течения является возникновение границ – *поверхностей течения*, разделяющих области этой среды с разными свойствами. Области эти движутся, взаимодействуют, распадаются, объединяются... Если добавить к этому физические свойства самих границ, тепловые эффекты, химические реакции, какое великолепное поле применения математических методов можно увидеть! Но наша цель здесь гораздо скромнее: получить лишь самое первое представление об особенностях описания поведения вязкопластичной среды в рамках уже знакомых нам понятий теории упругости и вязкости.

Пример уравнения движения

Не ставя перед собой задачу дать общую математическую формулировку закона движения вязкопластичной жидкости (естественно ожидать, что она будет гораздо сложнее, чем в случае простой вязкой жидкости), мы ограничимся рассмотрением простейшей задачи о течении жидкости по наклонной плоскости. Пусть эта плоскость наклонена к горизонту под углом θ , ось Ox направлена вдоль неё вниз, а ось Oy перпендикулярно к ней вверх (рис. 11.22). Толщину слоя, определяемую y -координатой его поверхности над точкой x , обозначим через $h(x, t)$, x - и y -проекции скорости потока в точке (x, y) в момент t – через $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ соответственно, а давление и плотность в этой точке – как обычно, через p и ρ . Уравнение

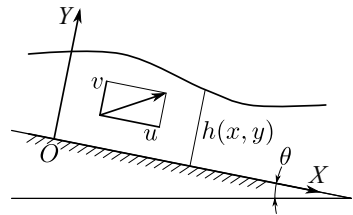


Рис. 11.22. Течение вязкопластичной жидкости

движения в проекциях на оси Ox и Oy имеет вид

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \rho g \sin \theta,$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \rho g \cos \theta.$$

Система эта должна быть дополнена уравнением несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

и граничными условиями: на плоскости, по которой течёт жидкость,

$$u(x, 0, t) = v(x, 0, t) = 0,$$

а на свободной поверхности $y = h(x, t)$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x} = v(x, h, t). \quad (11.3.3)$$

Кроме того, на ней должно выполняться также условие

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - p & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial h / \partial x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а во всём объёме жидкости – определяющее уравнение Бингама (11.3.2).

Приближение тонкого слоя

Если максимальная высота слоя жидкости H много меньше его длины, и вертикальная скорость V много меньше продольной U , система уравнений течения может быть существенно упрощена. Перейдя к безразмерным переменным

$$x' = x/L, \quad y' = y/H, \quad t' = tU/L, \quad u' = u/U,$$

$$v' = vL/(HU), \quad p' = p/[\rho g H \cos \theta]$$

и убрав после замены штрихи, получим систему

$$\epsilon \text{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + S, \quad (11.3.4)$$

$$\epsilon^3 \text{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - 1, \quad (11.3.5)$$

где $S = (L/H)\text{tg}\theta$, а $\text{Re} = UH/(\epsilon\nu)$ – число Рейнольдса. В этих переменных

$$\sigma_{ij} = \nu \frac{U}{H} \begin{pmatrix} 2\epsilon \partial u / \partial x & \partial u / \partial y + \epsilon^2 \partial v / \partial x \\ \partial u / \partial y + \epsilon^2 \partial v / \partial x & 2\epsilon \partial v / \partial y \end{pmatrix}.$$

Вводя $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}/\sigma_Y$ и так же опустив штрихи, получим

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} 2\epsilon \partial u / \partial x & \partial u / \partial y + \epsilon^2 \partial v / \partial x \\ \partial u / \partial y + \epsilon^2 \partial v / \partial x & 2\epsilon \partial v / \partial y \end{pmatrix},$$

где $B = \sigma_Y H / (\nu U)$ – число Бингама.

В случае предельно тонкого слоя (типа смазки на металлической поверхности) ϵ в уравнениях (11.3.4)-(11.3.5) можно положить равным нулю:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + S, \quad (11.3.6)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} - 1. \quad (11.3.7)$$

Интегрированием уравнения (11.3.6) находится вертикальный профиль напряжения сдвига

$$\sigma_{xy} = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - S \right) (y - h).$$

Поверхность текучести $y = Y(x, t)$ определяется уравнением

$$B = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - S \right) (Y - h),$$

решение которого имеет вид

$$Y(x, t) = h(x, t) + \frac{B}{\partial h / \partial x - S}.$$

Часть материала, находящаяся ниже этой поверхности, находится в текучей фазе, тогда как часть, расположенная выше (со свободной верхней границей), находится в твёрдом состоянии. Интегрирование

уравнения (11.3.7) вдоль оси OX даёт следующее выражение для горизонтальной составляющей скорости:

$$u(x, y, t) = \begin{cases} (S - \partial h / \partial x)(2Y - y)y/2, & y < Y; \\ (S - \partial h / \partial x)Y^2/2, & y > Y. \end{cases} \quad (11.3.8)$$

Из него видно, что нижняя, текучая фаза движется подобно обычной вязкой жидкости вблизи стенки: по мере удаления от неё скорость течения возрастает по параболическому закону. Однако при достижении границы текучести Y скорость потока перестаёт меняться, верхняя часть массы движется как одно целое. Интегрируя (11.3.3) по поперечной координате,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy = 0,$$

и используя (11.3.8), видим, что высота свободной поверхности вязкопластичного потока удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left[Y^2(3h - Y) \left(S - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] = 0.$$

Течение между плоскостями

Рассмотрим теперь случай, когда вязкоупругая жидкость Бингама заполняет пространство между двумя параллельными плоскостями $y = L$ и $y = -L$ в отсутствие силы тяжести:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}, \quad (11.3.9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}. \quad (11.3.10)$$

Граничные условия задаются теперь на обеих плоскостях:

$$u(x, -L, t) = v(x, -L, t) = 0, \quad u(x, L, t) = v(x, L, t) = 0.$$

Повторяя переход к безразмерным переменным

$$u \mapsto Uu, \quad v \mapsto Uv, \quad x \mapsto Lx, \quad y \mapsto Ly, \quad p \mapsto \rho U^2 p, \quad \nu = \mu / (\rho UL),$$

и представляя давление p суммой $\nu x + \tilde{p}(x, y, t)$, приводим уравнения (11.3.9)-(11.3.10) к виду

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \nu - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y},$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}.$$

Конститутивное уравнение, определяющее модель Бингама, в данном случае имеет вид

$$\sigma_{xy} = \begin{cases} (1 + B/|U_y|) U_y, & \sigma > B; \\ 0, & \sigma < B. \end{cases}$$

В состоянии термодинамического равновесия (когда температура пластин одинакова), вертикального перемещения массы нет, $v = 0$, $p = 0$ и профиль скорости горизонтального потока

$$u = U(y) = \begin{cases} (1 - B)^2/2 & |y| < B; \\ -(1/2)(1 - y^2) - B(1 - |y|), & |y| > B. \end{cases}$$

11.3.6 Эндохронная модель

Разнообразие физических явлений, сопровождающих деформации не являющихся абсолютноупругими тел, порождает проблемы с их классификацией, и, в частности, терминологией. Грань между упруго-пластичными и вязкопластичными средами несколько размыта, в ещё большей степени размыта она между этими свойствами и вязкоупругостью. Иногда упругопластичность понимается как вязкоупругость. Наиболее осторожные авторы предпочитают говорить об упруговязкопластичности, ссылаясь на то, что модели, развитые для одного класса сред, оказываются, после несложной модификации, применимы к другой. Так, рассмотренная выше модель Бингама может считаться пределом упругопластичности при бесконечно жёсткой упругости тел (употребляется даже термин *rigid-plasticity*). Объединяет их наличие поверхности текучести, разделяющей фазы с разными динамическими свойствами, разделяют же свойства твёрдой фазы, которая рассматривается как абсолютно твёрдая в одном случае, и абсолютно упругая – в другом. В то же время существуют материалы, границы текучести которых являются плохо определяемыми величинами или не играют существенной роли в технических приложениях. Из моделей вязкопластичности, не использующих концепцию границ текучести, мы коснёмся здесь лишь *эндохронной модели* Валаниса (1971), разработанной им для описания механического поведения металлов, хотя позднее она нашла применение к другим материалам, в частности, к бетону.

В основе *эндохронной теории пластичности* лежит представление о *внутреннем времени*, связанном с деформационной историей мате-

риального элемента. Выразив эту историю через длину пути, пройденного элементом материала в многомерном пространстве деформаций

$$d\zeta^2 = A_{ijkl} d\varepsilon_{ij}^{\text{HY}} d\varepsilon_{kl}^{\text{HY}}$$

и поэтому не связанного со скоростью деформации, Валанис вводит внутреннее время z как монотонно возрастающую функцию переменной ζ ,

$$z = z(\zeta)$$

и определяет *псевдорелаксационную функцию* по аналогии с релаксационной функцией в линейной вязкоупругой модели. В случае одноосного растяжения определяющее соотношение имеет вид

$$\sigma(z) = E_0 \int_0^z \rho(z - z') d\varepsilon^{\text{HY}}(z'). \quad (11.3.11)$$

Здесь

$$\rho(z) = \rho_0 \delta(z) + \rho_1(z),$$

первое, сингулярное слагаемое соответствует поверхности текучести, второе представляет регулярную часть процесса.

11.3.7 Упражнения

1. В силу того, что в экспериментах с пластичными материалами относительные удлинения могут быть довольно большими, вместо инфинитезимальной характеристики относительного удлинения ε используется техническая характеристика $\hat{\varepsilon} = \Delta l/l_0$.
2. Предположим, что для некоторого материала соотношения между технической деформацией и напряжением имеют тот же вид, что и аналогичные соотношения между «истинной» деформацией и напряжением с теми значениями модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν . Показать, что во втором приближении для одноосного растяжения $\sigma = E[\varepsilon - (1/2 + 2\nu)\varepsilon^2]$.





Глава 12

Факультативные темы

12.1 Наследственная механика¹

12.1.1 Понятие эредитарности

В физическом аспекте термин *эредитарность* (heredity – лат.) примерно эквивалентен понятиям *память, последствие, запаздывание, наследственность, остаточность*. Речь идет здесь о причинно-следственной связи между двумя процессами: процессом-причиной $f(t)$ и процессом-следствием $g(t)$. Во многих случаях допустимо считать, что временная связь между этими процессами мгновенна и состояние $g(t)$ определяется состоянием $f(t)$ в *тот же момент времени*:

$$g(t) = F(f(t), t). \quad (12.1.1)$$

В действительности же такое мгновенное (не запаздывающее, не эредитарное) влияние одного процесса на другой является лишь приближенной моделью. Фактически, любое осуществление такого влияния обычно требует определенного времени, и дело лишь в том, стоит в рамках решаемой задачи учитывать это запаздывание или нет. Ситуация аналогична той, что возникает при использовании понятия материальной точки: мы игнорируем размеры тела, которыми оно несомненно обладает, покуда они не играют существенной роли в условиях данной задачи, и вносим поправки или вообще решаем задачу заново, если роль размеров становится заметной или весьма существенной.

¹Из книги: В.В.Учайкин. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008.

Выдающийся итальянский математик Вито Вольтерра, посвятивший развитию понятия эредитарности и его применению к физическим и экологическим задачам ряд научных работ и несколько глав в книгах², отмечал, что впервые понятие последействия в физике ввел Пикар в 1907, хотя явления усталости металлов, магнитного и электрического гистерезиса, запаздывания волн и других эредитарных процессов были известны, конечно, много раньше.

Наглядным примером эредитарной связи является дипольный момент атома, наведенный пролетающей вблизи него заряженной частицей. Здесь $f(t)$ – координата пролетающей частицы в момент t , $g(t)$ – наведенный дипольный момент в момент времени t . Влияние частицы на атом осуществляется через электрическое поле, распространение которого требует определенного времени. Однако скорость этого распространения столь велика, что влияние можно считать практически мгновенным и пользоваться формулой типа (12.1.1), за исключением, правда, случая, когда сама налетающая частица движется со скоростью того же порядка, что и скорость распространения электромагнитных взаимодействий (скорость света). В последнем случае уже необходимо учитывать запаздывание и вместо t в аргументе функции $f(t)$ следует писать $t - r(t)/c$, где $r(t)$ – расстояние от частицы до атома в момент времени t , а c – скорость света. Здесь мы имеем дело с простейшим видом эредитарности, выражаемой лишь сдвигом аргумента (заметим, что это лишь первое приближение: точное решение задачи требует вычисления поля, созданного всей предысторией движения заряда).

Математическое отражение эредитарной ситуации состоит в замене функции $F(f(t), t)$ функционалом (эредитарным оператором) $\mathcal{F}(f(\cdot); t) = {}_a\Phi_t[f(\cdot)]$ от предыстории процесса $\{f(t'), a < \tau \leq t\}$:

$$g(t) = {}_a\Phi_t[f(\cdot)]. \quad (12.1.2)$$

Заметим, что в качестве $g(t)$ здесь может выступать и сама функция $f(t)$ и ее производные,

$$\frac{df(t)}{dt} = {}_a\Phi_t[f(\cdot)] \quad (12.1.3)$$

а в качестве a может выступать любое число и символ $-\infty$.

Функционал в соотношении (12.1.2) будем называть *функционалом влияния* процесса $f(t)$ на процесс $g(t)$. Если $g(t)$ является также ха-

²Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976.; Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982.

характеристикой процесса $f(t)$ (как в уравнении (12.1.3)), функционал влияния уместно называть *функционалом памяти*.

12.1.2 Эредитарная теория Вольтерры

Законы эредитарности Вольтерры

Для развития содержательной теории и ее эффективного использования в практических задачах следует установить определенные ограничения на вид функционалов, выделить важнейшие для приложений свойства и изучить соответствующие следствия. Первый шаг в этом направлении сделал сам В. Вольтерра, сформулировав следующие положения, названные им *общими законами эредитарности*.

1. Принцип *линейности*:

$${}_a\Phi_t[f(\cdot)] = \int_{-\infty}^t \phi(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

(В. Вольтерра выделяет мгновенную составляющую функции влияния в явном виде, дополняя интеграл слагаемым $\sigma(t)f(t)$). В соответствии с ним выражение (12.1.2) принимает вид:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t \phi(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

2. Принцип *затухания*:

$$\phi(t, \tau) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow -\infty.$$

3. Принцип *инвариантности*:

$$\phi(t, \tau) = \phi(t - a, \tau - a) = \phi(t - \tau, 0) \equiv \varphi(t - \tau).$$

Эредитарность называется *ограниченной*, если существует такое $\tau_0 < \infty$, что $\phi(\tau) = 0$ при $\tau > \tau_0$. Ограниченность эредитарности дает основание для расширения понятия состояния эредитарной системы: две одинаковые эредитарные системы находятся в данный момент в одинаковых состояниях, если их динамические переменные совпадают на всем интервале эредитарности $(t - \tau_0, t)$, предшествующем этому моменту.

В действительности эти принципы выделяют лишь простейший класс эредитарных явлений. В. Вольтерра замечает, со ссылкой

на несколько современных ему работ, что линейной эредитарности «однако, недостаточно для объяснения некоторых явлений электродинамики».

Эредитарная струна

В. Вольтерра демонстрирует применение эредитарной идеи к задачам упругости (точнее, вязкоупругости) на примере кручения струны, один из концов которой закреплен, а ко второму приложен момент силы M , под действием которого этот конец поворачивается на угол Θ . Если вращение происходит достаточно медленно (квазистатический случай), связь между Θ и M в первом приближении даётся линейным соотношением

$$\Theta = KM, \quad (12.1.4)$$

где K – материальная постоянная. За пределами линейного приближения используется более сложная зависимость

$$\Theta = F(M), \quad (12.1.5)$$

где $F(M)$ – материальная функция. Формула (12.1.4) при этом представляет собой первый не исчезающий член ряда Маклорена:

$$\Theta = F(0) + F'(0)M + \dots \approx KM, \quad F(0) = 0, \quad F'(0) = K.$$

Общим свойством формул (12.1.4) и (12.1.5) является то, что обе переменные M и Θ берутся в один и тот же момент времени: влияние M на Θ предполагается мгновенным, не зависящим от предыстории процесса. Более точные измерения, однако, показывают, что $\Theta(t)$ зависит не только от крутящего момента $M(t)$ в момент измерения, но и от предыстории $M(\tau)$, $-\infty < \tau \leq t$: струна обладает свойством эредитарности. Стало быть, вместо (12.1.4) следует писать функциональное соотношение

$$\Theta(t) = {}_{-\infty}\Phi_t[M(\cdot)].$$

Подобно своему предшественнику (12.1.5), оно так же может быть линеаризовано разложением в (теперь уже функциональный) ряд и удержанием только первого не исчезающего члена:

$$\Theta(t) \approx \int_{-\infty}^t \phi(t, \tau) M(\tau) d\tau. \quad (12.1.6)$$

Нетрудно усмотреть физический смысл *функции влияния* $\phi(t, \tau)$, положив $M(\tau) = \delta(\tau - \tau')$:

$$\phi(t, \tau') = \Theta(t)|_{M(\tau)=\delta(\tau-\tau')}.$$

Она равна углу поворота конца струны в момент t в результате кратковременного импульса крутящего момента, приложенного в один из предшествующих наблюдению моментов времени $\tau' < t$.

Как и материальные постоянные, материальная функция $\phi(t, \tau)$ не выводится «из первых принципов», а получается либо из модельных расчетов, либо из экспериментальных данных. При этом часто используется инвариантная относительно сдвига во времени форма

$$\phi(t, \tau) = \varphi(t - \tau),$$

так что вместо (12.1.6) имеем

$$\Theta(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(t - \tau)M(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} \varphi(\tau)M(t - \tau)d\tau.$$

Решение этого уравнения относительно $M(t)$, записанное в виде

$$M(t) = \int_{-\infty}^t \psi(t - \tau)\Theta(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} \psi(\tau)\Theta(t - \tau)d\tau, \quad (12.1.7)$$

в свою очередь может рассматриваться как уравнение относительно $\Theta(t)$ при заданном $M(t)$.

В. Вольтерра пишет: «Если предположить, что эффектом эредитарности до некоторого момента $t_0 < t$ можно пренебречь (для простоты на t_0 можно смотреть как на начало времени: $t_0 = 0$), то (12.1.7) принимает вид:

$$M(t) = \int_0^t \psi(t - \tau)\Theta(\tau)d\tau,$$

где оба предела интеграла конечны».

Заметим только, что пренебрегать необязательно: условие $M(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ может быть задано как *исходное условие задачи*. С другой стороны, если эредитарность есть, и мы намерены пренебречь влиянием отрицательной полуоси на процесс в момент времени t , то это значит, согласно принципу затухания эредитарности, мы должны подразумевать здесь под t большие времена.

Переход к динамической задаче (крутильным колебаниям струны), согласно принципу Даламбера, осуществляется путем замены $M(t)$ на $M(t) - \mu\ddot{\Theta}(t)$, μ – положительная постоянная. В результате получим интегро-дифференциальное уравнение для динамической эредитарной задачи:

$$M(t) - \mu\ddot{\Theta}(t) = \int_{-\infty}^t \psi(t - \tau)\Theta(\tau)d\tau.$$

Для определения угла закручивания $\Theta(t)$ по заданному моменту $M(t)$ достаточно дважды проинтегрировать это уравнение по времени от 0 до t и разрешить полученное интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\Theta(t)$.



Эредитарный осциллятор

Второй параграф главы VI, названный «Эредитарная динамика», В. Вольтерра посвящает эредитарному обобщению одномерного гармонического осциллятора, осуществляемому заменой дифференциального уравнения

$$m\ddot{q} + kq = 0, \quad m, k > 0,$$

интегро-дифференциальным

$$m\ddot{q} + k \int_{-\infty}^t \varphi(t - \tau)q(\tau)d\tau = 0.$$

Не вдаваясь в обоснование задачи и физический смысл этой замены, он находит выражение для «потенциальной энергии», в наших обозначениях имеющее вид

$$U(q) = \frac{k}{2} \left\{ \int_0^{\infty} \varphi(\tau)d\tau \cdot q^2(t) - \int_0^{\infty} \varphi(\tau)[q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau \right\},$$

так что

$$\frac{\partial U}{\partial q} = k \int_0^{\infty} \varphi(\tau)q(t - \tau)d\tau.$$

Введя внешнюю силу $Q(t)$ и выделив в $\varphi(\tau)$ сингулярную (неэредитарную) составляющую,

$$k\varphi(\tau) = k\delta(\tau) + \theta(\tau),$$

Вольтерра приходит к уравнению

$$d \left\{ \frac{m\dot{q}^2(t)}{2} + \frac{Kq^2(t)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \theta(\tau)[q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau \right\} + \frac{dt}{2} \int_0^{\infty} \dot{\theta}(\tau)[q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau = Qdq, \quad (12.1.8)$$

где

$$K = k + \int_0^{\infty} \theta(\tau) d\tau.$$

В отсутствие эредитарных эффектов $\theta(\tau) = 0$ и уравнение (12.1.8) принимает обычный для неэредитарной динамики вид

$$d \left\{ \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{kq^2}{2} \right\} = Qdq,$$

означающий, что работа внешних сил равна приращению полной механической энергии системы. Включение эредитарности приводит не только к модификации формы потенциальной энергии, в результате чего полная механическая энергия принимает вид

$$E = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{Kq^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \theta(\tau)[q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau,$$

но и к появлению дополнительного (можно показать, что положительного) слагаемого

$$Wdt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \dot{\theta}(\tau)[q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau \cdot dt,$$

отражающего диссипацию энергии в эредитарном процессе. В результате имеем

$$dE + Wdt = Qdq$$

или, в интегральной форме

$$E - E_0 + \int_{t_0}^t Wdt = A. \quad (12.1.9)$$

Здесь E и E_0 суть значения полной механической энергии в моменты времени t и t_0 , а A – работа, совершенная внешними силами в данном интервале времени.

Принцип энергии

Уточним понятие *состояния эредитарной системы*. Будем говорить, что эредитарная система в моменты t_1 и t_2 находится в одном и том же состоянии, если ее динамические переменные совпадают не только в эти моменты времени, но и в предшествующих им интервалах $(t_1 - \tau_0, t_1)$ и $(t_2 - \tau_0, t_2)$ длительностью τ_0 , характеризующей затухание эредитарности.

Теорема Вольтерры. *Если в конце некоторого периода времени эредитарная система возвращается к своему первоначальному состоянию, то работа внешних сил является положительной.*

Поскольку с динамической точки зрения состояние системы то же самое, полная механическая энергия не изменилась и указанная положительная работа является мерой диссипации энергии:

$$E_d = \int_{t_0}^t W dt.$$

Согласно принципу сохранения энергии она должна превращаться в другие формы энергии, в первую очередь – в тепловую. На этом принципе развивается целое направление исследований термодинамических процессов в средах с памятью (эредитарная термодинамика).

12.1.3 Эредитарная термодинамика

Состояние сплошной среды характеризуется набором определённого числа величин (в случае неоднородных сред – функций координат). Удобно разделить их на два класса – взаимно независимые *активные переменные*, которыми можно независимо манипулировать в эксперименте, и *реактивные переменные*, значения которых однозначно определяются активными переменными по известным *конститутивным (определяющим) уравнениям*. Понятно, что это разбиение может быть осуществлено не единственным образом.

В задачах равновесной термодинамики, когда процессы происходят бесконечно медленно, в соотношения между активными x_j и реактивными y_i переменными время в явном виде вообще не входит

$$y_i(t) = \phi^i(x_j(t)).$$

Когда время, за которое осуществляется влияние активных переменных на реактивные, становится заметным по сравнению с характерным временем изменения состояния системы, в списке аргументов функций ϕ^i появляются производные по времени от активных переменных:

$$y_i(t) = \phi^i(x_j(t), \dot{x}_j(t)).$$

Можно представить себе, что дальнейшее увеличение скоростей потребует введения производных высших порядков. Заметив, что совокупность всех производных бесконечно дифференцируемой функции в данной точке определяет всю функцию целиком, естественно предположить, что в общем случае функции ϕ^i необходимо заменить функционалами Φ^i :

$$y_i(t) = -\infty \Phi_t^i[x_j(\cdot)]. \quad (12.1.10)$$

Чаще всего используются линейные функционалы памяти, представляемые интегральными операторами.

В качестве примера соотношений последнего типа приведем уравнение теплопроводности Гуртина-Пипкина³:

$$h_i(t) = \sum_j \int_{-\infty}^t \phi_{ij}(t-t') T_{,j}(t') dt'. \quad (12.1.11)$$

В частном случае, когда ядро памяти имеет экспоненциальный вид,

$$\phi_{ij}(t) = A_{ij} e^{-t/\tau}, \quad (12.1.12)$$

где τ – время температурных релаксаций, из (12.1.11) и (12.1.12) следует:

$$\frac{dh_i}{dt} = \sum_j \left[A_{ij} T_{,j}(t) - \frac{A_{ij}}{\tau} \int_0^t e^{-t'/\tau} T_{,j}(t-t') dt' \right]. \quad (12.1.13)$$

Подставляя (12.1.11) в (12.1.13), получаем обобщенный закон теплопроводности А. Лыкова⁴:

$$h_i(t) + \tau \frac{dh_i}{dt} = \tau \sum_j A_{ij} T_{,j}.$$

³Gurtin M. E., Pipkin A. C., Arch. Rat. Mech. Anal. **31**, 113 (1968).

⁴Luikov A. V., Int. J. Heat Mass Transfer **9**, 139 (1966).

12.1.4 Обобщённое кинетическое уравнение

Возможно, более убедительной идея о роли скрытых переменных покажется читателю на примере уравнения Больцмана (см. 6.2.1). В пространственно-однородном случае оно видимее

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \mathbf{B}_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t)], \quad (12.1.14)$$

где \mathbf{B}_0 – бoльцмановский билинейный оператор столкновений, действующий на $\varphi(\mathbf{v}, t)$ – одночастичную плотность распределения молекул в пространстве скоростей:

$$\mathbf{B}_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t)] \equiv \int d\mathbf{u} \int \sigma(\Theta; g) [\varphi(\mathbf{v}', t)\varphi(\mathbf{u}', t) - \varphi(\mathbf{v}, t)\varphi(\mathbf{u}, t)] d\Omega.$$

Напомним, что \mathbf{v} и \mathbf{u} – скорости сталкивающихся молекул до или после (со штрихом) столкновения, $g = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$ – их относительная скорость, Θ – угол рассеяния, $\sigma(\Theta; g)d\Omega$ – дифференциальное сечение рассеяния в телесный угол $d\Omega$ (законы сохранения энергии и импульса однозначно связывают \mathbf{v}' и \mathbf{u}' с \mathbf{v} , \mathbf{u} и Θ).

Предположения, лежащие в основе вывода этого уравнения, существенно упрощают решение газодинамических задач, но до сих пор не считаются достаточно обоснованными для плотных газов и жидкостей. Для них получены обобщенные кинетические уравнения, связанные с именами Л. ван Хова, И. Пригожина, Р. Браута, П. Резибуа, Р. Цванцига и др. Выведенные при более слабых ограничениях, эти уравнения сохраняют важнейшее свойство бoльцмановского уравнения – описывают необратимый процесс релаксации к равновесию. Главным же математическим отличием обобщенных уравнений является учет запаздывания в интеграле столкновения путём дополнительного интегрирования по сдвинутому временному аргументу одночастичной функции распределения в нелинейном операторе столкновений \mathbf{B}_τ

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t \mathbf{B}_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] d\tau + f(\mathbf{v}, t). \quad (12.1.15)$$

В случае равновесного состояния решение уравнения Больцмана не зависит от времени, $\varphi(\mathbf{v}, t) = \varphi_{eq}(\mathbf{v})$ и влияние запаздывания исчезает.

Укажем основные этапы этого вывода.

1. Из канонических уравнений Гамильтона для системы N взаимодействующих молекул без всяких дополнительных предположений выводится уравнение Лиувилля для фазовой плотности

$$\rho^N \equiv \rho^N(\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}; t):$$

$$\frac{\partial \rho^N}{\partial t} = \mathbf{L}^N \rho^N,$$

где \mathbf{L}^N – оператор Лиувилля. Оно непригодно для решения и применения к конкретным задачам из-за «астрономически» большого числа переменных N .

2. Введением проекционного оператора \mathbf{P} , выполняющего усреднение фазовой плотности по пространству конфигураций,

$$\mathbf{P}\rho^N = \frac{1}{V^N} \int_V \dots \int_V \rho^N(\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}; t) \prod_{j=1}^N d\mathbf{r}_j \equiv \varphi^N(\{\mathbf{v}\}; t),$$

уравнение Лиувилля преобразуется в эквивалентное ему *формальное кинетическое уравнение*

$$\frac{\partial \varphi^N}{\partial t} = \int_0^t \mathbf{C}_\tau^N [\varphi^N(\{\mathbf{v}\}|t - \tau)] d\tau + f^N(\{\mathbf{v}\}, t),$$

где \mathbf{C}_τ^N – оператор взаимодействия молекул между собой. Интеграл по времени появился в результате разложения решения ρ^N на две компоненты – «существенную» $\varphi^N = \mathbf{P}\rho^N$ и «несущественную» $(1 - \mathbf{P})\rho^N$ – и исключения последней из образовавшейся в результате этого разделения системы двух уравнений. Никаких новых процессов, ни ограничений на старые здесь не введено. Таким свойством обладает любой марковский процесс: усреднение по части переменных порождает интегрирование по времени, свидетельствующее о немарковском характере *редуцированного* процесса (справедливо и обратное: подходящим расширением фазового пространства немарковский процесс может быть преобразован в марковский). Свободный член уравнения f^N зависит от начального значения только «несущественной» части. Число независимых переменных, хоть и уменьшилось в два раза, все еще чрезвычайно велико, а само уравнение теперь стало незамкнутым.

3. Чтобы сократить N -частичный набор переменных до одночастичного и вместе с тем замкнуть уравнение, вводится **гипотеза молекулярного хаоса**: *случайные скорости вступающих во*



взаимодействие молекул взаимно независимы:

$$\varphi^N(\{\mathbf{v}\}; t - \tau) = \prod_{j=1}^N \varphi(\mathbf{v}_j; t - \tau),$$

где $\varphi(\mathbf{v}_j; t - \tau)$ – одночастичные плотности в пространстве скоростей. В результате приходим к обобщенному кинетическому уравнению

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t \mathbf{B}_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] d\tau + f(\mathbf{v}, t),$$

где

$$\mathbf{B}_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot | t - \tau)] \equiv \text{TL} \int \dots \int \mathbf{C}_\tau^N \left[\prod_{j=1}^N \varphi(\mathbf{v}_j | t - \tau) \right] \prod_{j=2}^N d\mathbf{v}_j,$$

интегрирование предполагается по всем пронумерованным скоростям (индекс 1 опущен), а TL означает термодинамический предел.

4. Газ достаточно разрежен, чтобы взаимодействие молекул можно было рассматривать в модели бинарных мгновенных столкновений. В этом случае

$$\mathbf{B}_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] = \mathbf{B}_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] \delta(\tau)$$

и мы приходим к уравнению Больцмана.

Отказавшись от последнего ограничения, аппроксимируем зависимость оператора столкновения от времени запаздывания множителем $b(\tau)$, нормированным на 1:

$$\mathbf{B}_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] = \mathbf{B}_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] b(\tau), \quad \int_0^\infty b(\tau) d\tau = 1.$$

Запаздывание это и есть эффект памяти, или немарковский эффект, отражающий реальные процессы, происходящие в среде. Полученное при этом уравнение

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t \mathbf{B}_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] d\tau + f(\mathbf{v}, t)$$

и образует математическую основу эредитарной, или, как её ещё называют, *обобщенной гидродинамики*⁵.

Важно подчеркнуть, что несмотря на очевидное, казалось бы, уточнение уравнения отнесением начального состояния сталкивающихся частиц на чуть более ранний момент (что вполне справедливо для газа упругих шаров), причина эредитарности более тонкая. Действительно, полагая атомы материальными точками, взаимодействующими на расстоянии, мы сохраняем возможность корректного описания парных столкновений без такого рода поправок: уравнения движения обеспечили бы нас верным результатом, *если бы пространственные координаты не исчезли из нашего поля зрения, попав в разряд скрытых переменных*.

12.1.5 Скрытые переменные

Анализируя конкретные задачи в естественном стремлении понять общую природу эредитарности, нельзя не заметить, что всякий раз мы сталкиваемся с феноменом *скрытых переменных*. Исходная система, описываемая полным набором переменных, как правило, неэредитарна. Стоит только исключить из рассмотрения («скрыть») некоторые переменные, появляется член, отражающий предысторию редуцированной системы – она становится эредитарной.

Вот простой механический пример. В горизонтально расположенной открытой с обеих сторон трубке находятся поршень массой m_1 с коэффициентом трения о ее стенки η , соединенный пружинкой длиной l и жесткостью $k > (\eta/2)^2$ с шариком массы m_2 , движущимся в трубке без трения (рис. 12.1). К последнему с момента $t = 0$ приложена сила $F(t)$. Мы имеем дело с неэредитарной системой с двумя степенями свободы, описываемой дифференциальными уравнениями

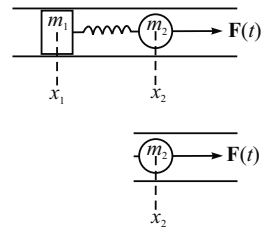


Рис. 12.1. Наглядный пример скрытой переменной (x_1)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -\eta \dot{x}_1 + k(x_2 - x_1 - l), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= F(t) - k(x_2 - x_1 - l). \end{aligned}$$

Дополним эту систему уравнений условиями

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = l, \quad \dot{x}_2(0) = 0,$$

⁵ Дж. Честер. В сб. Термодинамика необратимых процессов. – М.: Мир, 1962.

предполагающими, что в начальный момент времени система неподвижна и поршень находится в начале координат.

Разрешив теперь первое уравнение относительно x_1 в предположении, что $x_2(t)$ известно,

$$x_1(t) = \int_0^t \varphi(\tau)[x_2(t - \tau) - l]d\tau,$$

$$\varphi(\tau) = \frac{k}{m_1\omega_1} \exp\left(-\frac{\eta\tau}{2m_1}\right) \sin(\omega_1\tau), \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1} - \left(\frac{\eta}{2m_1}\right)^2},$$

и подставив результат во второе, получаем эрдитарное уравнение для системы, приведенной к одной степени свободы:

$$m_2\ddot{x}_2 + kx_2 = kl \int_0^t \varphi(\tau)x_2(t - \tau)d\tau + F_2(t), \quad (12.1.16)$$

где

$$F_2(t) = F(t) + kl \left[1 - \int_0^t \varphi(\tau)d\tau \right].$$

Представим для наглядности, что мы прикрыли экраном часть трубки, содержащей поршень с пружиной и видим лишь шарик, движение которого подчиняется уравнению (12.1.16). Влияние предыстории $x_2(t - \tau)$ движения шарика на его поведение в момент времени t осуществляется через невидимую (скрытую) переменную $x_1(t)$.

Наряду с термином скрытые переменные, и даже чаще используется понятие внутренних переменных. Последний термин относят к характеристикам внутренней структуры, имеющим физико-химическую природу, но не всегда ясное происхождение и точный теоретический смысл. Часто решение проблемы интерпретации таких переменных откладывается до окончательных выводов теории, сопоставление которых с экспериментальными результатами позволяет пролить свет на содержание и роль внутренних переменных⁶. В отличие от внешних переменных (температуры, объёма и др.) внутренние переменные не связаны с внешними силами, управляющими процессом. Они не участвуют в производстве механической работы и не проявляются по этой причине в уравнениях баланса энергии, импульса и момента импульса системы. Их эволюция описывается дополнительными уравнениями, связанными с термодинамическими процессами. Отметим, что еще

⁶Мандель (1978) (Mandel J. Propriétés Mé ecaniques des Matériaux, Eyrolles, Paris, 1978.) писал, что «сообразительный физик всегда сумеет обнаружить скрытые переменные и измерить их», хотя в этой фразе можно усмотреть и толику иронии.

Зенер, комментируя интегральный эредитарный член в конститутивном уравнении вязкоупругости, высказывал предположение о том, что эредитарность эта может служить признаком существования скрытых параметров, к числу которых, как пример, он отнес температуру⁷. Другими примерами источников внутренних переменных могут служить химические реакции, дислокации в пластических металлах, перемещение атомов в кристаллах, движения макромолекул в полимерных растворах, намагничивание ферромагнетиков, и др. Общую схему термодинамической интерпретации внутренних переменных в задачах механики жидкостей и твёрдых тел можно найти в книге⁸.

12.1.6 Открытые системы

Возможно, самая простая и общая интерпретация феномена эредитарности кроется в концепции открытых систем, которую можно рассматривать как некоторую легализацию скрытых переменных. Говоря о замкнутой (консервативной) системе, мы обычно имеем в виду механическую систему, полностью изолированную от окружающего мира, не обменивающуюся с ним ни массой, ни энергией, ни импульсом, ни другими аддитивными характеристиками, части которой взаимодействуют друг с другом посредством недиссипативных сил, и потому указанные величины в процессе движения системы сохраняются. Потенциальный характер сил позволяет ввести в действие стандартный аппарат аналитической динамики, в частности, уравнение Лиувилля (см. **6.1.4.**) Открытыми же системами естественно назвать системы, не удовлетворяющие хотя бы одному из указанных условий⁹.

Удобные в чисто механическом отношении, эти понятия недостаточно ёмки в отношении термодинамическом. Так, обмен небольшими некоррелированными порциями энергии, образующий *канонический ансамбль*, практически не влияет на термодинамические свойства системы, не отличая её от замкнутой в узком смысле, характеризующейся микроканоническим ансамблем. По этой причине, наряду с данной классификацией (будем называть такие системы замкнутыми или открытыми в узком смысле системами) используются их аналоги в широком смысле. Мы ограничимся здесь рассмотрением открытой лишь в узком смысле модели. Подробности динамики открытых в ши-

⁷Zener C.M., Suppl. Nuovo Cimento **7**, 544 (1958).

⁸G.Lebon, D.Jou, J.Casas-Vezquez. Understanding Non-equilibrium Thermodynamics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2008).

⁹Существуют, впрочем, и другие определения открытых систем.

роком смысле систем читатель найдёт в книгах¹⁰.

Открытая система как подсистема замкнутой

Рассмотрим замкнутую гамильтонову систему, характеризуемую набором фазовых переменных $\{q_1, p_1; \dots; q_n, p_n\}$. Разобьём её на две части: подсистему 1 с координатами $\mathbf{x} \equiv \{q_1, p_1; \dots; q_{n_1}, p_{n_1}\}$ и подсистему 2 с остальными координатами, совокупность которых обозначим через \mathbf{y} . Гамильтониан исходной системы предстанет в виде суммы

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{H}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{H}_2(\mathbf{y}) + \mathcal{H}_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (12.1.17)$$

первое слагаемое в которой представляет гамильтониан подсистемы 1 в отсутствие подсистемы 2, второе – гамильтониан подсистемы 2 в отсутствие подсистемы 1, а третье – гамильтониан взаимодействия этих подсистем. Если $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ – детерминированное начальное состояние системы, а $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ и $\mathbf{Y}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ – фазовые траектории каждой из подсистем, параметризованные общим физическим временем t , тогда фазовая плотность вероятности

$$f_{n_1+n_2}(q_1, p_1; \dots; q_{n_1+n_2}, p_{n_1+n_2}; t) \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

запишется в виде

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \delta[\mathbf{x} - \mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)]\delta[\mathbf{y} - \mathbf{Y}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)].$$

Более естественно, однако, иметь в виду некий ансамбль случайных начальных состояний $\{\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0\}$, характеризуемый плотностью

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_0)\delta(\mathbf{y} - \mathbf{Y}_0) \rangle. \quad (12.1.18)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению (6.1.4), которое мы будем писать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{L}f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad (12.1.19)$$

и полагать начальное условие распределённым согласно (12.1.18).

В соответствии с (12.1.17) оператор Лиувилля, определяемый формулой

$$\mathcal{L}f = -\{\mathcal{H}, f\} \equiv -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right),$$

¹⁰Климонтвич Ю.Л. Введение в физику открытых систем. – М., Янус-К, 2002. Lindenberг K., West B.J. The Nonequilibrium Statistical Mechanics of Open and Closed Systems, Wiley, VCH Publishers, New York, 1990.

тоже распадается на три слагаемых:

$$L = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{12}, \quad (12.1.20)$$

содержащих, соответственно, \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_{12} . В отсутствие взаимодействия между подсистемами оператор \mathcal{H}_{12} исчезает, а корреляции между подсистемами определяются только начальным состоянием. Если таковые отсутствуют,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = f_1(\mathbf{x}, t_0)f_2(\mathbf{y}, t_0),$$

то решение уравнения (12.1.19), отмеченное для данного случая верхним индексом 0, имеет вид произведения функций

$$f^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = f_1(\mathbf{x}, t)f_2(\mathbf{y}, t), \quad (12.1.21)$$

каждая из которых удовлетворяет своему уравнению,

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \mathcal{L}_1 f_1(\mathbf{x}, t),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \mathcal{L}_2 f_2(\mathbf{y}, t),$$

со своим начальным условием:

$$f_1(\mathbf{x}, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_0) \rangle,$$

$$f_2(\mathbf{y}, t_0) = \langle \delta(\mathbf{y} - \mathbf{Y}_0) \rangle.$$

Заметим, что

$$\int f_1(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int f_2(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \int \int f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = 1$$

при всех $t \geq t_0$.

Проекционные операторы Цванцига-Мори

При наличии взаимодействия подсистем процедура преобразования в систему двух уравнений производится с помощью *проекционного оператора Цванцига-Мори* \mathcal{P} . Определим действие оператора \mathcal{P} на функцию $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ формулой

$$\mathcal{P}f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int d\mathbf{y}' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}', t) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) = f_1(\mathbf{x}, t)f_2(\mathbf{y}, t_0) \equiv \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \quad (12.1.22)$$

Поддействуем на обе части этого равенства оператором P ещё раз:

$$\begin{aligned}
 P^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= P \left(\int dy' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}', t) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) \right) = \\
 &= \int dy' \left(\int dy'' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}'', t) f_2(\mathbf{y}', t_0) \right) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) = \\
 &= \int dy'' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}'', t) \left(\int f_2(\mathbf{y}', t_0) dy' \right) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) = \\
 &= \int dy'' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}'', t) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) = \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t).
 \end{aligned}$$

Повторное применение оператора P не изменило результат. По этой причине оператор P и называется проекционным. Определим *дополнительный* к P оператор P' формулой

$$P' = \mathbf{1} - P \quad (12.1.23)$$

(здесь $\mathbf{1}$ – тождественный оператор). Легко проверить, что P' тоже является проекционным оператором и ортогонален оператору P :

$$PP' = P'P = 0 \quad (12.1.24)$$

Кроме того, можно показать, что P и P' коммутируют с \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 ,

$$P\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_1P = P'\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_1P' = 0, \quad P\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2P = P'\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2P' = 0, \quad (12.1.25)$$

операторы P и \mathcal{L}_2 взаимно ортогональны,

$$P\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2P = 0, \quad (12.1.26)$$

и справедливо тождество

$$P\mathcal{L}_2P = 0 \quad (12.1.27)$$

(см. книгу Максимилиана Ди Вентры¹¹).

Расщепление уравнения Лиувилля

Согласно (12.1.22), фазовую плотность совокупной системы можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = Pf(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + P'f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \equiv \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (12.1.28)$$

¹¹M. Di-Ventra. Electrical Transport in Nanoscale Systems. Cambridge University Press, 2008.

обладающих вытекающими из (12.1.23) свойствами:

$$P\phi_1 = \phi_1, \quad P\phi_2 = 0, \quad P'\phi_1 = 0, \quad P'\phi_2 = \phi_2. \quad (12.1.29)$$

Подставив разложения (12.1.20) и (12.1.28) в уравнение Лиувилля (12.1.19),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_1 + \phi_2) = (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{12})(\phi_1 + \phi_2), \quad (12.1.30)$$

Раскрыв скобки, подействуем на обе части этого уравнения оператором P :

$$\frac{\partial}{\partial t}P\phi_1 + \frac{\partial}{\partial t}P\phi_2 = P\mathcal{L}_1\phi_1 + P\mathcal{L}_1\phi_2 + P\mathcal{L}_2\phi_1 + P\mathcal{L}_2\phi_2 + P\mathcal{L}_{12}\phi_1 + P\mathcal{L}_{12}\phi_2.$$

Учёт соотношений (12.1.25)–(12.1.27) и (12.1.29) позволяет существенно сократить это уравнение без каких-либо потерь:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t} = \mathcal{L}_1\phi_1 + P\mathcal{L}_{12}\phi_2. \quad (12.1.31)$$

Вернёмся теперь к уравнению (12.1.30) и подействуем на обе его части дополнительным оператором P' :

$$\frac{\partial}{\partial t}P'\phi_1 + \frac{\partial}{\partial t}P'\phi_2 = P'\mathcal{L}_1\phi_1 + P'\mathcal{L}_2\phi_1 + P'\mathcal{L}_{12}\phi_1 + P'(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{12})\phi_2.$$

Первое слагаемое в левой части исчезает из-за третьего свойства в списке (12.1.29), первый и второй члены справа преобразуются с использованием соотношений (12.1.24) и (12.1.25):

$$P'\mathcal{L}_1\phi_1 = P'\mathcal{L}_1Pf = P'P\mathcal{L}_1f = 0,$$

$$P'\mathcal{L}_2\phi_1 = P'\mathcal{L}_2Pf = P'P\mathcal{L}_2f = 0.$$

Учитывая, что

$$P'\frac{\partial\phi_2}{\partial t} = \frac{\partial(P'\phi_2)}{\partial t} \equiv \frac{\partial\phi_2}{\partial t},$$

и возвращаясь к символу полного лиувиллиана (12.1.20), представим второе уравнение системы в виде¹²:

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial t} = P'L\phi_2 + P'\mathcal{L}_{12}\phi_1.$$

¹²Простоты ради мы игнорировали здесь временную зависимость эффективного лиувиллиана подсистемы 2. Учёт её может быть осуществлён применением хронологического оператора Дайсона (см. 6.1.3.).

Уравнение Линдблада

Напомним, что начальное условие предполагается заданным при t_0 , запишем формальное решение второго уравнения системы в виде

$$\phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int_{t_0}^t d\tau \exp[(t - \tau)P'L] \mathcal{L}_{12} \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) + \exp[(t - t_0)P'L] \phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0). \quad (12.1.32)$$

По свойству (12.1.27), сомножитель $P'L \mathcal{L}_{12} \phi_1$, появившийся под интегралом, слегка упрощён:

$$P'L \mathcal{L}_{12} \phi_1 = (1 - P) \mathcal{L}_{12} P f = \mathcal{L}_{12} \phi_1.$$

Подставим решение (12.1.32) второго уравнения в правую часть первого уравнения (12.1.31) системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= PL \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + PL \int_{t_0}^t d\tau \exp[(t - \tau)P'L] \mathcal{L}_{12} \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) + \\ &+ PL \exp[(t - t_0)P'L] \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0). \end{aligned}$$

Переходя, согласно (12.1.22), к фазовой плотности подсистемы 1, приведём последнее уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{x}, t) = L_1 f_1(\mathbf{x}, t) + \int_{t_0}^t d\tau Q_1(t - \tau) f_1(\mathbf{x}, \tau) + M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0).$$

где

$$L_1 f_1(\mathbf{x}, t) = [f_2(\mathbf{y}, t_0)]^{-1} PL f_2(\mathbf{y}, t_0) f_1(\mathbf{x}, t),$$

$$Q_1(t - \tau) f_1(\mathbf{x}, \tau) = [f_2(\mathbf{y}, t_0)]^{-1} P \mathcal{L} \exp[(t - \tau)P'L] \mathcal{L}_{12} f_2(\mathbf{y}, t_0) f_1(\mathbf{x}, \tau)$$

и

$$M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = [f_2(\mathbf{y}, t_0)]^{-1} PL \exp[(t - t_0)P'L] \mathcal{L} f_2(\mathbf{y}, t_0) f_1(\mathbf{y}, t_0).$$

Последний член отражает влияние начальных условий совокупной системы на последующее движение подсистемы 1. В момент $t = t_0$ интегральный член, отражающий влияние предыстории процесса на $\partial f_1 / \partial t$, исчезает. Это означает просто, что до этого момента системы не существовало, другими словами, в момент t_0 произошло рождение системы. Но такие процессы в классической механике исключены, логично поэтому принять $t_0 = -\infty$ и положить

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = 0.$$

Производя аналогичную замену и в нижнем пределе интеграла памяти, получим аналог квантового уравнения Лундблада

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{x}, t) = L_1 f_1(\mathbf{x}, t) + \int_{-\infty}^t d\tau Q_1(t - \tau) f_1(\mathbf{x}, \tau), \quad (12.1.33)$$

за которым оставим то же название.

Несмотря на отсутствие явных выражений для операторов, входящих в уравнение (12.1.33), его физический смысл довольно прозрачен. Изменение состояния наблюдаемой замкнутой системы 1+2 в промежутке времени $(t, t + dt)$ полностью определяется её состоянием в момент t , поэтому для предсказания её поведения в будущем ($t > t_0$) достаточно знать состояние в какой-нибудь один (любой) момент времени t_0 , предыстория ($t \in (-\infty < t < t_0)$) роли не играет. Если же наблюдению доступна только часть этой системы – открытая система 1, то состояния только системы 1 недостаточно для предсказания её движения. Подсистема эта находится (и находилась ранее) во взаимодействии с подсистемой 2, характеризуемой скрытыми переменными. В какие-то интервалы времени она передавала ей импульс, момент импульса, энергию, которые участвовали в эволюции подсистемы 2 и спустя некоторое время возвращались в подсистему 1. Вот этот-то обмен динамическими характеристиками и отражается эредитарным интегралом. Иными словами, информация о предыстории открытой системы некоторое время хранится в её окружении и затем возвращается в неё саму. Этот процесс и обозначается термином «память», который не стоит полностью ассоциировать со своим биологическим аналогом, подразумевающим хранение информации в самом биологическом объекте.

В классической равновесной термодинамике подсистема 1 предполагается достаточно большой, чтобы влияние этого обмена (происходящего через поверхность и потому пропорционального отношению поверхность/объём) можно было считать малым. При этом лишь небольшая доля этих и без того малых потоков содержит информацию, вынесенную ранее из подсистемы 1 и теперь возвращаемую в неё, так что в итоге мы имеем дело с малой величиной второго порядка, что и оправдывает обычное пренебрежение эредитарностью в макроскопических (хотя и далеко не всех) процессах. При переходе к малым (мезо- и нано-) размерам отношение поверхность/объём меняется и учёт эредитарных эффектов может оказаться необходимым¹³.

¹³M. Di-Ventra. Electrical Transport in Nanoscale Systems. Cambridge University Press, 2008.

Таким образом, имеется два способа предсказания эволюции открытой системы, являющейся частью замкнутой. Первый способ: решив дифференциальное уравнение эволюции замкнутой системы при заданных начальных условиях, извлечь из полученного решения всю информацию, касающуюся данной подсистемы. Второй способ: решить интегро-дифференциальное уравнение для самой открытой подсистемы, не вовлекая в процесс решения её окружение. Последнее не означает, что мы игнорируем окружение: интегральный член как раз и описывает передачу информации от открытой системы в ранние времена через её окружение в неё же в более поздние времена. Сюда же «вплетается» информация о начальном состоянии окружения.

Если речь идёт о пространственно разделённых подсистемах, а не о совмещённых в пространстве, как, например, электронная и ионная компоненты в кристалле, передача этой динамической информации осуществляется через поверхность подсистемы S . Результат зависит от отношения поверхность/объём. Для макроскопических образцов это отношение мало и таким обменом можно пренебречь (микророканонический ансамбль, представляющий открытую подсистему S как замкнутую) или ограничиться обменом некоррелированными малыми порциями (канонический и большой канонический ансамбли). В обоих этих случаях интеграл исчезает, и мы получаем традиционную механическую основу термодинамики. С уменьшением размеров образца мы вступаем в область мезо- и далее – наномеханики. Число «действующих лиц» здесь резко сокращается (с 10^{23} атомов до сотен тысяч или даже вообще просто до сотен атомов). Роль поверхностных эффектов при этом во многом становится определяющей, и связанный с ними интеграл в уравнении (12.1.33) превращается в равноправного партнёра среди остальных членов уравнения.

12.2 Мезомеханика

12.2.1 Понятие структуры. Коллективные переменные

Математический аппарат механики континуума (дифференциальное исчисление многих переменных, уравнения в частных производных) основан на предположении, что в бесконечно малых областях среда однородна, бесструктурна. По этой причине и позволено нам писать, что масса dm элемента среды пропорциональна его объёму dV , и вводить коэффициент пропорциональности, называемый плот-

ностью (в данном случае, плотностью массы). Опыт, однако, показывает, что для каждого материала существует некоторый масштаб L , начиная с которого мы более или менее ясно видим определённую, характерные для него неоднородности – *структуру*. Это относится не только к структурам, видимым невооружённым глазом (рис. 12.2 а-г), но и к тем, что возникают перед удивлённым взором на экранах электронных микроскопов (рис. 12.2 д-з) при рассматривании металлов, сплавов и других материалов, кажущихся на вид однородными. Расширяя поле зрения, мы видим, что структура эта повторяет-

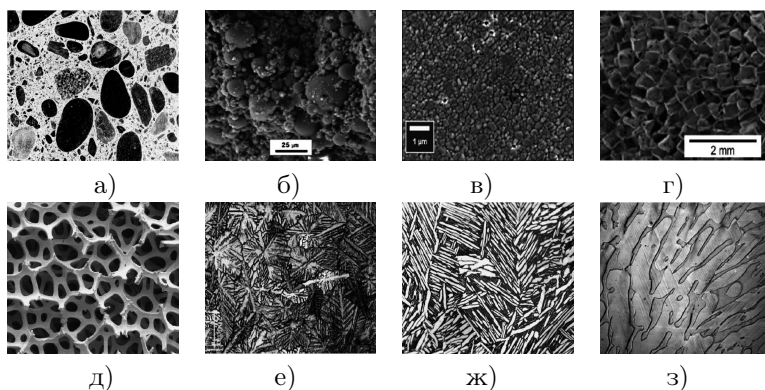


Рис. 12.2. Структуры, видимые невооружённым глазом (а-г) и под электронным микроскопом (д-з)

ся, как некий мотив на персидском ковре (почему мы и назвали её характерной для данного материала), но в конце концов, при значительно меньших масштабах l (на пределе видимости) она распадается, превращаясь в набор трудноразличимых атомов, каждый из которых уже не несёт информации о той структуре, в которой он участвует: все атомы данного химического элемента одинаковы. Если в процессе нагружения материала не происходит разрушения его структуры, то в масштабах, превышающих L , достаточным для описания процесса оказывается феноменологическая (макроскопическая) теория с коэффициентами, определяемыми из эксперимента. В области микроскопических (меньших l) масштабов вступают в силу законы квантовой теории¹⁴ микроскопической (квантовой) теории, описывающих явления в атомно-молекулярных масштабах, меньших l .

¹⁴Они справедливы для всех масштабов, только в макроскопических масштабах их результаты совпадают с классическими.

Феноменологический учёт влияния структурного фактора может быть осуществлён путём введения *коллективных переменных* путём, например, *крупнозернистого усреднения*, когда сплошная среда представляется как плотная совокупность *элементов* (кубиков, параллелепипедов) конечных размеров, а в качестве переменных используются радиус-векторы координат и скоростей центральных точек элементов, которые могут быть дополняемы переменными, характеризующими свойства этих *конечных элементов* – такие переменные отсутствуют в классическом понятии материальной точки (в квантовой механике такая переменная есть: это спин, собственный кинетический момент).

Занимая промежуточное положение между непрерывной и молекулярной-динамической моделями сплошной средой, крупнозернистые модели с одной стороны позволяют учесть определённые структурные свойства материалов, а с другой – достичь приемлемых времён расчётов. Крупнозернистые схемы важны, в частности, для решения мезоскопических задач, где флуктуационные явления доминируют над усреднённым термодинамическим поведением, но число участвующих в этих флуктуациях молекул всё ещё слишком велико для их индивидуального учёта. Введение коллективных переменных в числе, на порядок или несколько меньшем числа молекулярных переменных является, по существу, сокращением большей части последних и потому приводит к эргодичности.

В качестве простейшего примера рассмотрим процесс броуновского движения. Предположив, что в «оцифрованной» крупнозернистой сетке мы наблюдаем движение броуновской частицы, характеризуя её положение указанием адреса ячейки, в которой она в данный момент находится. Некоторое время она блуждает внутри ячейки с центром \vec{R}_0 , куда была изначально помещена, но спустя некоторый промежуток времени T_0 переходит в одну из соседних ячеек с центром, скажем, \vec{R}_1 , в которой проводит время T_1 , и так далее. Пока она блуждает в каждой из этих ячеек, её крупнозернистая координата остаётся постоянной, однако в момент пересечения частицей границы между двумя ячейками эта координата мгновенно перескакивает в центр соседнего узла и «замирает» на некоторое время там. Мы получаем не что иное, как скачкообразный случайный процесс с дискретным множеством состояний и непрерывно распределённым случайным временем пребывания в каждой из них. Такой процесс называется случайным блужданием (на решётке) с непрерывным временем. Мы будем полагать последовательные переходы и времена пребывания в узлах взаимно независимыми событиями.

Пусть m – трёхкомпонентный мультииндекс, характеризующий по-

ложение узла решётки, а $\{m'\}$ – совокупность ближайших к нему узлов, в которые возможен переход, и $p_{mm'}$ – вероятности таких переходов. Обозначив плотность вероятности времени пребывания в узле через $\psi(t)$ и полагая указанные вероятности одинаковыми для всех узлов, можно записать выражение для вероятности, что частица совершит первые k шагов по узлам $\{0 \rightarrow m_1 \rightarrow \dots \rightarrow m_k\}$, в виде произведения

$$P\{0 \rightarrow m_1 \rightarrow \dots \rightarrow m_k\} = p_{0m_1} \cdot p_{m_{k-1}m_k},$$

а плотность распределения длительности этого процесса – в виде свёртки

$$\psi_k(t) = \psi^{*k}(t) \equiv \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_{k-1} \psi(t_1) \cdot \psi(t - t_{k-1}).$$

Манипулируя с этими выражениями, Монтролл и Вест¹⁵ вывели следующее уравнение для вероятности $P(m, t)$ обнаружить блуждающую частицу в узле m в момент времени t :

$$\frac{dP(m, t)}{dt} = \int_0^t d\tau \psi(t - \tau) \left[-P(m, t) + \sum_{m'} P(m', t - \tau) p_{m'm} \right].$$

Можно показать, что в предположении об экспоненциальном распределении $\psi(t)$, уравнение это принимает классический вид, однако физических оснований для такого предположения в данном случае нет. Ядро памяти надо находить отдельно.

Второй пример взят из работы¹⁶. В ней рассматривается модель упругого тела в виде d -мерной системы N связанных осцилляторов с массами m_i , взаимодействие между которыми имеет парный характер и зависит только от расстояния между частицами пары. Функция Гамильтона системы записана в виде

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^d \left(\sum_i m_i v_{\mu i}^2 + \sum_{ij} x_{\mu i} A_{ij} x_{\mu j} \right),$$

где $x_{\mu i}$ и $v_{\mu i}$, $\mu = 1, \dots, d$ – компоненты отклонений координат и скоростей i -й частицы от их равновесных значений, а A_{ij} – симметричная матрица упругих взаимодействий. Система разбивается на области, содержащие некоторое количество частиц, и полученное разбиение характеризуется координатами и скоростями укрупнённых «супрчастиц»

¹⁵E.W.Montroll, B.J.West, в кн. Fluctuation Phenomena, Publishers B.V. 1979, 65-204.

¹⁶D.Cubero, S.N.Yaliraki, Journ. Chem. Phys. **122**, 034108 (2005)

$$X_{\mu k} = \frac{1}{M_k} \sum_i^k m_i x_{\mu i}, \quad V_{\mu k} = \frac{1}{M_k} \sum_i^k m_i v_{\mu i},$$

где $M_k = \sum_i^k m_i$ – полная масса каждой из них. Числа сгруппированных осцилляторов не обязательно должны быть одинаковыми, отмечают авторы. В частности, какая-нибудь группа может содержать всего лишь один осциллятор, другая же – большую часть системы, содержащую много осцилляторов.

Пользуясь техникой проекционных операторов, авторы приходят к следующей системе линейных уравнений

$$\frac{dX_k}{dt} = V_k(t),$$

$$M_k \frac{dV_k(t)}{dt} = - \sum_l \left[\Lambda_{kl} X_l(t) + \int_0^t d\tau \varphi(\tau) V_l(t - \tau) \right] + R_k(t).$$

Здесь Λ_{kl} – перенормированная матрица взаимодействий укрупнённых частиц, $\varphi(t)$ – функция памяти, а $R_k(t)$ – случайные силы, возникшие в результате огрубления переменных. Индекс μ опущен, поскольку взаимодействия между компонентами сил, как видно из гамильтониана, отсутствуют. Для единственного кластера в окружении одиночных осцилляторов одномерной системы последнее уравнение принимает вид

$$M \frac{dV}{dt} = - \int_0^t d\tau \varphi(\tau) V(t - \tau) + R(t).$$

При $\varphi(\tau) = b\delta(\tau)$ эредитарный интеграл представляет собой силу трения, при $\Phi(\tau) = K = \text{const}$ – упругую силу.

В книге¹⁷ выполнены подобные преобразования для потока вязкой жидкости, приведшие так же к эредитарному уравнению для крупно-зернистых характеристик.

12.2.2 Мезоскопическая концепция

Мезоскопические явления определяются процессами, происходящими на микроскопическом (атомно-молекулярном) уровне, но проявляются на макроскопическом уровне. Выработать практически приемлемый аппарат для их описания можно, следуя одним из двух

¹⁷К. Lindenberg, B.J. West, The Nonequilibrium Statistical Mechanics of Open and Closed Systems, VCH Publisher, New York, 1990.

путей: введением дополнительных переменных в список используемых при феноменологическом (континуальном) описании процесса или редукцией набора микроскопических (атомно-молекулярных) переменных. На первой идее и строится мезоскопический подход: в нём пространственно-временная область определения характеризующих состояние системы полей дополняется множеством значений ещё одной, *мезоскопической* векторной переменной \vec{m} . Эта дополнительная переменная характеризует состояние рассматриваемой системы, но не на атомно-молекулярном, а на некотором промежуточном между ним и макроскопическом уровне, который резонно назвать мезоскопическим¹⁸. Физический смысл мезоскопической переменной не является универсальным для любой мезосистемы, а зависит от её конкретной структуры (см. табл. 12.1).

Таблица 12.1. Мезоскопические переменные для нескольких сложных материалов

Сталь	Ориентация кристаллических осей микрокристаллитов
Расплавы с памятью формы	Относительное содержание фаз и ориентация микрокристаллов
Полимерные растворы	Ориентация векторов, соединяющих концы макромолекул
Жидкие кристаллы одноосных молекул	Ориентация оси молекулы
Жидкие кристаллы двухосных молекул	Ориентация осей молекулы
Хрупкие материалы	Размер и ориентация микротрещины

Переменная \vec{m} принимает разные значения в разных точках пространственно-временного континуума, и её удобно считать текущим значением некоторой случайной переменной, введя условную *плотность распределения мезопеременной* (ПРМ) $f(\vec{m}|\vec{r}, t)$, удовлетворяющую условию нормировки

¹⁸Мезомеханика ещё очень молодая наука, а предлагаемый здесь читателю материал слишком скуп, чтобы хоть в какой-то мере дать о ней представление. Здесь я следую уже цитированной выше статье Папенфусса. В других статьях и книгах читатель может встретить иной путь введения в суть мезодинамики. Это естественно. Любой учебник, иногда говоря я своим студентам, подобен фотографическому снимку скульптуры: он показывает её так, как она видится с точки зрения автора (в данном примере, фотографа).

$$\int_M f(\vec{m}|\vec{r}, t) d\vec{m} = 1,$$

предполагающему интегрирование по всей области M значений мезоперменной \vec{m} . С помощью ПРМ можно расширить список аргументов всех полей, характеризующих динамическое состояние системы по общей схеме:

$$A(\vec{r}, t) \mapsto A'(\vec{m}, \vec{r}, t) = f(\vec{m}|\vec{r}, t)A(\vec{r}, t), \quad A(\vec{r}, t) = \int_M A'(\vec{m}, \vec{r}, t) d\vec{m}.$$

Например, плотность

$$\rho(\vec{r}, t) \mapsto \rho'(\vec{m}, \vec{r}, t) = f(\vec{m}|\vec{r}, t)\rho(\vec{r}, t), \quad \rho(\vec{r}, t) = \int_M \rho'(\vec{m}, \vec{r}, t) d\vec{m}.$$

и т.д.

12.2.3 Мезомеханические уравнения баланса

Напомним, что штрихом мы отметили физические величины, представленные как функции расширенного набора переменных (\vec{m}, \vec{r}, t) , введём обозначение \vec{r}' для фазовой части этого набора (\vec{m}, \vec{r}) . Такая замена избавит нас (по крайней мере, на эвристическом уровне) от повторения скучных преобразований, предшествующих появлению уравнений баланса в кинетике сплошных сред, и новые уравнения баланса мезомеханики получатся из обычных уравнений простым добавлением штрихов (с последующим возвращением к расширенному набору переменных, разумеется). Так, из обычного закона баланса масс (ОБМ)

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial(\vec{r}'(\vec{r}, t)\rho(\vec{r}, t))}{\partial \vec{r}} = 0 \quad (12.2.1)$$

получим его мезоскопический аналог уравнения баланса масс (МБМ)

$$\frac{\partial \rho'(\vec{r}', t)}{\partial t} + \frac{\partial(\vec{r}'(\vec{r}', t)\rho'(\vec{r}', t))}{\partial \vec{r}'} = 0. \quad (12.2.2)$$

Из этих уравнений можно вывести уравнение и для мезоскопической плотности распределения (МПР) $f(\vec{r}', t) \equiv f(\vec{m}|\vec{r}, t) = \rho'(\vec{r}', t)/\rho(\vec{r}, t)$. С этой целью умножим уравнение (12.2.1) на $\rho'\rho^2$, уравнение (12.2.2) на ρ/ρ^2 и вычтем второе из первого. В результате получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(\vec{r}' f)}{\partial \vec{r}'} - f \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \vec{r}} = 0. \quad (12.2.3)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial(\dot{\vec{r}}'f)}{\partial\vec{r}'} = \frac{\partial(\dot{\vec{r}}f)}{\partial\vec{r}} + \frac{\partial(\dot{\vec{m}}f)}{\partial\dot{\vec{m}}}$$

В статье¹⁹ подробно обсуждается смысл этих уравнений и их решений. Отмечая, что уравнения (12.2.2) и (12.2.3) не являются независимыми, авторы рассматривают три возможных сценария.

1. Используется МПР-уравнение (12.2.3), не используется ОБМ (12.2.1). Так происходит, если МПР f не изменяется со временем. Примером такой ситуации является процесс растрескивания хрупких материалов: зародившиеся микротрещины не исчезают, не изменяют своего местоположения и своей ориентации.

2. Используется МБМ-уравнение и не используется МПР. Это относится к случаям, когда в обоих уравнениях содержится одинаковая информация.

3. Используются ОБМ- и МПР-уравнения. Нормализованная плотность распределения содержит информацию лишь об относительной концентрации мезоскопических признаков. Оба уравнения применяются в случаях, когда существенную роль играют и абсолютные концентрации.

12.2.4 Одномерная мезодиффузия

Мезоскопические наноструктуры предоставляют уникальную возможность экспериментального исследования процесса переноса в среде с хорошо определённым потенциальным полем, слабо искаженным случайными примесями и другими дефектами. При этом весьма существенным оказывается наличие трёх временных областей с разными режимами переноса: интервал $(0, t_1)$ с преобладанием баллистического переноса, область (t_2, ∞) , $t_2 > t_1$, где устанавливается режим нормальной (гауссовой) диффузии, и промежуточная область (t_1, t_2) , режим переноса в которой назван в статье²⁰ *мезоскопической диффузией* (мы будем использовать термин *мезодиффузия*). Квантовомеханический анализ одномерной задачи, выполненный в этой работе показал, что отличительной особенностью мезодиффузии является отклонение от закона Фика

$$j = -D \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

замещаемого в этой области *соотношением Максвелла-Каттано*

¹⁹H. Herrmann, J. Engelbrecht, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 2012, **61**, 1, 71–74.

²⁰Salvador Godoy, L.S. Garcia-Colin, Physica A 258 (1998) 414.

$$j = -D \frac{\partial \rho}{\partial x} - \theta \frac{\partial j}{\partial t}, \quad \theta > 0.$$

Вместе с уравнением баланса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

оно приводит к уравнению для плотности распределения частиц $\rho(x, t)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (12.2.4)$$

называемому *телеграфным*²¹.

Характерной особенностью решения телеграфного уравнения в случае ограниченного по времени (например, мгновенного) источника является наличие диффузионного фронта, за пределами которого диффундирующие частицы отсутствуют, а в окрестности самого фронта они движутся в баллистическом режиме. При больших временах баллистическая компонента затухает, а оставшаяся часть решения в образцах больших размеров превращается в гауссов пакет, удовлетворяющий обычному диффузионному уравнению.

Рассмотрим эквивалентное (12.2.4) уравнение с обезразмеренной временной переменной (t теперь выражается в единицах θ , $\rho\theta = f_v$, $D/\theta = v^2$)

$$\frac{\partial^2 f_v}{\partial t^2} + \frac{\partial f_v}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 f_v}{\partial x^2}. \quad (12.2.5)$$

При начальных условиях

$$f_v(x, 0) = \delta(x), \quad [\partial f_v(x, t)/\partial t]_{t=0} = 0,$$

его решение состоит из двух слагаемых

$$f_v(x, t) = f_v^{(0)}(x, t) + f_v^{(s)}(x, t). \quad (12.2.6)$$

Первое описывает два мгновенных импульса, расходящихся из начала координат со скоростью v :

$$f_v^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2} [\delta(x - vt) + \delta(x + vt)] e^{-t/2}.$$

²¹ Оно было выведено более ста лет тому назад лордом Кельвином в связи с прокладкой межконтинентального телеграфного кабеля по дну Атлантического океана. Передаваемые по нему телеграммы назывались *каблограммами*.

Второе даёт непрерывную часть решения, заполняющая интервал между этими импульсами ($-vt < x < vt$):

$$f_v^{(s)}(x, t) = \frac{1}{4v} \left[I_0 \left(\sqrt{(t^2 - x^2/v^2)/4} \right) + t I_1 \left(\sqrt{(t^2 - x^2/v^2)/4} \right) / \sqrt{t^2 - x^2/v^2} \right] e^{-t/2}.$$

Отметим следующие свойства приведённого решения:

$$\begin{aligned} f_v(x, t) &> 0, & |x| &\leq vt, \\ f_v(x, t) &= 0, & |x| &> vt, \end{aligned} \quad (12.2.7)$$

$$\int_{-vt}^{vt} f_v(x, t) dx = 1, \quad (12.2.8)$$

$$\int_{-vt}^{vt} x^2 f_v(x, t) dx = 2v^2 [t + e^{-t} - 1], \quad (12.2.9)$$

$$f_v(x, t) \sim g_v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi v^2 t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4v^2 t} \right\}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (12.2.10)$$

Свойства эти, установленные для поведения тока в бесконечном кабеле, оказались как нельзя кстати при описании совершенно иного процесса – симметричного блуждания по прямой, где $f_v(x, t)$ имеет смысл плотности вероятности в момент времени t , параметр v – смысл скорости свободного движения частицы, а $f_v^{(0)}(x, t)$ описывает распределение частиц, не менявших до момента времени t направления своего движения. Они находятся в точках $x = vt$ и $x = -vt$, образуя фронт диффузионного пакета, занимающего отрезок $[-vt, vt]$, вероятность обнаружить частицу за пределами отрезка равна нулю. При $t \rightarrow \infty$ решение $f_v(x, t)$ стремится к нормальному распределению $g_v(x, t)$ с дисперсией $2v^2 t$, удовлетворяющему обычному диффузионному уравнению

$$\frac{\partial g_v}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 g_v}{\partial x^2},$$

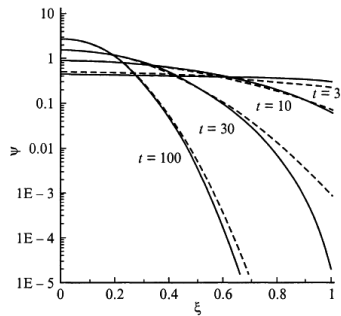


Рис. 12.3. Распределения $\psi(\xi, t) = t f_1(\xi, t)$ (сплошная кривая) и $\psi'(\xi, t) = t g_1(\xi, t)$ (штриховая кривая) для одномерного блуждания

с начальным условием $g_v(x, 0) = \delta(x)$.

В силу своего приближённого (асимптотического) характера оно уже не содержит информации о диффузионном фронте, а описывает лишь центральную (впрочем, довольно большую) часть диффузионного пакета (рис. 12.3).



12.2.5 Изотропная мезодиффузия от плоского источника

С физической точки зрения, однако, одномерная модель представляется довольно искусственной: в результате столкновений скорость реальной частицы может принимать и другие направления, а не только коллинеарные оси x .

Выберем единицу измерения длины таким образом, чтобы абсолютная величина скорости частицы между рассеяниями (она предполагается постоянной) была равна 1. В случае одномерного блуждания такой частицы вдоль оси x её распределение описывалось бы плотностью $f_1(x, t)$. Если же в результате столкновения частица получает новое направление, не зависящее от предыдущего и имеющее то же распределение что и начальное, то плотность распределения её x -координаты в момент времени t $\rho(x, t)$ удовлетворяет интегральному кинетическому уравнению²²

$$\rho(x, t) = \rho^{(0)}(x, t) + \int_0^t dt' \int_{-t'}^{t'} dx' \rho^{(0)}(x', t') \rho(x - x', t - t'), \quad (12.2.11)$$



где $\rho^{(0)}(x, t)$ есть плотность распределения x -координаты нерассеянной частицы. Из элементарных вероятностных соображений можно установить, что при изотропном источнике эта величина равномерно распределена между $-t$ и t (скорость, напомним, равна 1):

$$\rho^{(0)}(x, t) = \begin{cases} (2t)^{-1} e^{-t}, & |x| < t, \\ 0, & |x| > t. \end{cases} \quad (12.2.12)$$

Пусть $\psi(x, \omega, t)$ – совместная плотность распределения x -координаты и косинуса угла между скоростью частицы и направлением оси x в момент времени t

$$\int_{-1}^1 \psi(x, \omega, t) d\omega = \rho(x, t).$$

²²V.V.Uchaikin, Physica A, 255, (1998).

Известно, что интегральное уравнение (12.2.11) с ядром (12.2.12) эквивалентно линейному интегродифференциальному уравнению Больцмана

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right] \psi(x, \omega, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \omega, t) d\omega \quad (12.2.13)$$

с начальным условием

$$\psi(x, \omega, t) = \frac{1}{2} \delta(x).$$

Разложением по полиномам Лежандра

$$\psi(x, \omega, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1/2) P_l(\omega) \psi_l(x, t),$$

$$\psi_l(x, t) = \int_{-1}^1 P_l(\omega) \psi(x, \omega, t) d\omega, \quad \psi_0(x, t) \equiv \rho(x, t)$$

уравнение (12.2.13) приводится к цепочке уравнений

$$\frac{\partial \psi_l}{\partial t} + \frac{1}{2l+1} \left[(l+1) \frac{\partial \psi_{l+1}}{\partial x} + l \frac{\partial \psi_{l-1}}{\partial x} \right] + (1 - \delta_{l0}) \psi_l = 0.$$

Оставляя в ней $L+1$ первых уравнений и отбросив в последнем из них член $\partial \psi_{L+1} / \partial x$, получаем хорошо известное в нейтронной физике P_L -приближение. В частности, в P_1 -приближении

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \psi_1 = 0.$$

Исключая отсюда ψ_1 приходим к уравнению для $\psi_0 \equiv \rho$ в виде

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},$$

так что

$$\rho(x, t) = f_{1/\sqrt{3}}(x, t). \quad (12.2.14)$$

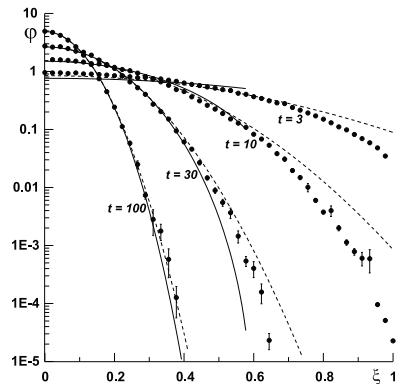


Рис. 12.4. Распределения $\psi(\xi, t) = t\rho(\xi t, t)$ для изотропного блуждания (точки – результаты метода Монте-Карло, сплошная кривая – телеграфное приближение, штриховая – диффузионное приближение)

Происхождение $v = 1/\sqrt{3}$ можно понять, если учесть, что речь идёт о среднеквадратичной проекции изотропно распределённого единичного вектора скорости на одну из координатных осей. Но решение (12.2.14) в соответствии со свойствами (12.2.7)-(12.2.10) отлично от нуля лишь на отрезке $[-t/\sqrt{3}, t/\sqrt{3}]$ и имеет δ -сингулярности в граничных точках, тогда как точное решение сосредоточено на отрезке $[-t, t]$ и в граничных точках имеет конечные разрывы величиной $(2t)^{-1}e^{-t}$, обусловленные нерассеянным излучением (12.2.12). Рисунок 12.4 показывает, что в этой задаче телеграфное приближение описывает процесс переноса хуже, чем диффузионное. Этот на первый взгляд неожиданный результат заставляет с осторожностью относиться к выводам работ, в которых нестационарное диффузионное приближение уточняется переходом к телеграфному уравнению.

12.2.6 Анизотропная мезодиффузия от плоского источника

Как видно из предыдущего, отношения диффузионного и телеграфного уравнений к кинетическому в рассматриваемых крайних случаях в определённом смысле противоположны: в одномерном случае диффузионное решение хуже аппроксимирует точное, в трёхмерном изотропном – наоборот, телеграфное приближение хуже диффузионного. Плавный переход от одного случая к другому удобно осуществить, выбрав угловое распределение частицы после вылета из источника и после каждого рассеяния в виде (12.2.1). В работе²³ рассматривается класс мезодиффузионных моделей, в которых косинус угла между осью x и направлением движения частицы после рассеяния не зависит от направления движения до рассеяния и характеризуется плотностью распределения

$$W_\nu(\omega) = \frac{\alpha + 1}{2} |\omega|^\alpha, \quad |\omega| \leq 1, \quad \alpha = \frac{3\nu^2 - 1}{1 - \nu^2} \geq 0. \quad (12.2.15)$$

С такой же плотностью распределено и начальное направление частицы, в момент времени $t = 0$ начинающей движение из начала координат. Параметр

$$\nu = \left[\int_{-1}^1 \omega^2 W_\nu(\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha + 3} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

²³В.В. Учайкин, В.В. Саенко. К теории классической мезодиффузии. Журнал технической физики **71**. – В. 2. – 2001. – С.8-15.

есть среднеквадратичный косинус: при $\nu = 1/\sqrt{3}$ он соответствует изотропному блужданию, а при $\nu = 1$ мы имеем дело с одномерным блужданием. Плавная зависимость индикатрисы рассеяния (12.2.15) от параметра ν позволяет проследить эволюцию самих распределений с изменением ν и сделать заключение о соотношении решений диффузионного, телеграфного и кинетического уравнений.

Телеграфное приближение в этой схеме легко получить путем преобразования Фурье-Лапласа интегрального уравнения (12.2.11) с распределением нерассеянных частиц, соответствующим индикатрисе рассеяния (12.2.15):

$$\rho^{(0)}(x, t) = t^{-1} W_\nu(x/t) e^{-t}, \quad |x| < t. \quad (12.2.16)$$

Как следует из (12.2.11), трансформанта

$$\tilde{\rho}(k, \lambda) = \int_0^\infty dt \int_{-t}^t dx e^{ikx - \lambda t} \rho(x, t)$$

удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\rho}(k, \lambda) = \tilde{\rho}^{(0)}(k, \lambda) [1 + \tilde{\rho}(k, \lambda)], \quad (12.2.17)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^{(0)}(k, \lambda) &= \int_0^\infty dt \int_{-t}^t dx e^{ikx - \lambda t} \rho^{(0)}(x, t) = \\ &= (\alpha + 1)(\lambda + 1) \int_0^1 \frac{\omega^\alpha d\omega}{(\lambda + 1)^2 + (\omega k)^2} = \\ &= \frac{\alpha + 1}{\lambda + 1} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n + \alpha + 1} \left(\frac{k}{\lambda + 1} \right)^{2n}. \end{aligned}$$

При $k \rightarrow 0$ эта трансформанта имеет асимптотику

$$\tilde{\rho}^{(0)}(k, \lambda) \sim \frac{\lambda + 1}{(\lambda + 1)^2 + \nu^2 k^2},$$

подставляя которую в (12.2.17) и производя несложные преобразования, получим

$$[\lambda^2 + \lambda + \nu^2 k^2] \tilde{\rho}(k, \lambda) = \lambda + 1.$$

Это соотношение является ничем иным как преобразованием Фурье-Лапласа телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nu^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad t > 0 \quad (12.2.18)$$

с начальными условиями

$$\rho(x, 0) = \delta(x)$$

и

$$[\partial\rho(x, t)/\partial t]_{t=0} = 0.$$

Сопоставление приведённого выше решения (12.2.6) уравнения (12.2.18) с результатами численного решения интегрального уравнения (12.2.11) с ядром (12.2.16), полученного методом Монте-Карло, показано на рис. 12.5 в переменных $\xi = x/t$ и

$$\psi(\xi, t) = t\rho(\xi t, t).$$

В верхней части рисунка видно, что уже при $\nu^2 = 1/2$, когда угловое распределение линейно зависит от ω , в области $\xi < \nu$ телеграфное решение оказывается ближе к точному, чем диффузионное. По мере дальнейшего увеличения анизотропии в точном решении появляется фронтовая всплеск, описывающий распределение частиц, движущихся всё время с положительной x -проекцией скорости. В пределе $\nu^2 \rightarrow 1$ этот всплеск переходит в концевую δ -функцию телеграфного решения. При $\nu^2 \geq 0.7$ за пределами фронтового всплеска телеграфное приближение уже хорошо согласуется с точным решением.

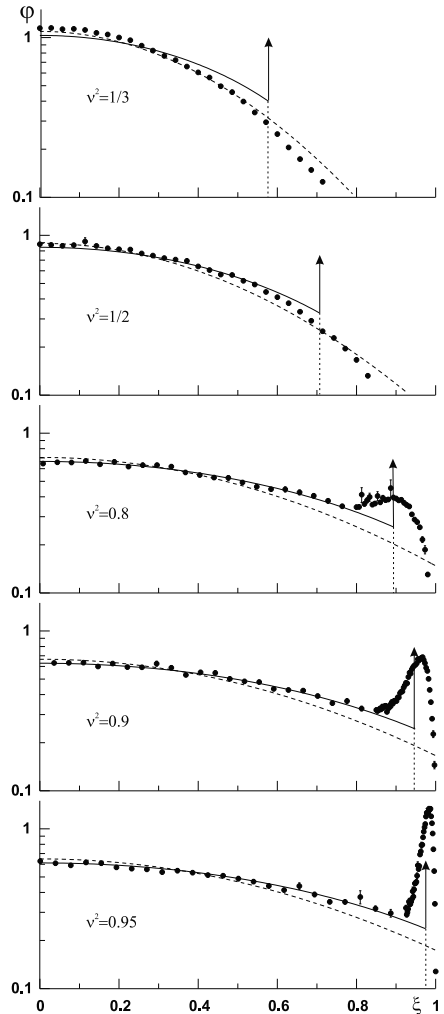


Рис. 12.5. Распределения $\psi(\xi, t)$ для $t = 5$ и указанных значений ν^2 . Верхний график соответствует изотропному блужданию. Обозначения те же, что и на рис. 12.4. Вертикальной стрелкой обозначено положение δ -сингулярности в телеграфном приближении

12.2.7 Фронтной всплеск

Аналитическое описание фронтной всплеска удобно получить методом моментов. Пусть

$$z = t - x$$

– отставание частицы от самой крайней точки фронта t и $\rho^+(z, t)$ – распределение по z в момент времени t частиц, двигавшихся все время в положительном направлении оси x , точнее, имевших все время положительную проекцию скорости на эту ось. Для этой плотности также будет справедливо уравнение типа (12.2.11) (с поправкой на неотрицательность z)

$$\rho^+(z, t) = \rho^{(0)}(z, t) + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dz' \rho^{(0)}(z', t') \rho^+(z - z', t - t'), \quad (12.2.19)$$

где

$$\rho^{(0)}(z, t) \equiv t^{-1} W_\nu (1 - z/t) e^{-t}, \quad 0 < z < t. \quad (12.2.20)$$

Теперь по обоим переменным z и t удобно выполнить преобразование Лапласа:

$$\tilde{\rho}^+(s, \lambda) = \int_0^\infty dt \int_0^\infty dz e^{-\lambda t - s z} \rho^+(z, t),$$

в результате чего мы приходим к формуле

$$\tilde{\rho}^+(s, \lambda) = \frac{\tilde{\rho}^{(0)}(s, \lambda)}{1 - \tilde{\rho}^{(0)}(s, \lambda)}. \quad (12.2.21)$$

Очевидно,

$$[\partial^n \tilde{\rho}^+(s, \lambda) / \partial s^n]_{s=0} = (-1)^n \tilde{m}_n(\lambda),$$

где

$$\tilde{m}_n(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} m_n(t) dt$$

– преобразование Лапласа n -го момента распределения $\rho^+(z, t)$:

$$m_n(t) = \int_0^\infty z^n \rho^+(z, t) dz.$$

Для нерассеянного излучения

$$\tilde{\rho}^{(0)}(s, \lambda) = \frac{\alpha + 1}{2} \int_0^1 \frac{\omega^\alpha d\omega}{1 + \lambda + (1 - \omega)s},$$

откуда

$$\begin{aligned}\tilde{m}_0^{(0)}(\lambda) &= \frac{1}{2(1+\lambda)}, \\ \tilde{m}_1^{(0)}(\lambda) &= \frac{1}{2(1+\lambda)^2(\alpha+2)}, \\ \tilde{m}_2^{(0)}(\lambda) &= \frac{2}{(1+\lambda)^3(\alpha+2)(\alpha+3)}\end{aligned}$$

и т. д. Дифференцированием (12.2.21) по s находим соответствующие выражения для моментов распределения всех частиц, образующих фронтальной всплеск:

$$\begin{aligned}\tilde{m}_0(\lambda) &= \frac{1}{1+2\lambda}, \\ \tilde{m}_1(\lambda) &= \frac{2}{(\alpha+2)(2\lambda+1)^2}, \\ \tilde{m}_2(\lambda) &= 4 \frac{2(2\lambda+1)(\alpha+2) + (\alpha+3)}{(\alpha+2)^2(\alpha+3)(\lambda+1)(2\lambda+1)^3}\end{aligned}$$

и т. д. Обратное преобразование Лапласа методом вычетов дает

$$\begin{aligned}m_0(t) &= (1/2)e^{-t/2}, \\ m_1(t) &= \frac{t}{2(\alpha+2)}e^{-t/2},\end{aligned}\quad (12.2.22)$$

$$m_2(t) = \left[\frac{4-2t+t^2/2}{(\alpha+2)^2} + \frac{4(t-2)}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \right] e^{-t/2} + \frac{4(\alpha+1)}{(\alpha+2)^2(\alpha+3)} e^{-t}.\quad (12.2.23)$$

Пользуясь найденными выражениями для моментов нетрудно установить положение центра тяжести рассматриваемого распределения частиц

$$x = t - z = t - m_1(t)/m_0(t) = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}t = \frac{2t}{1+\nu^{-2}},$$

скорость которого

$$\dot{x} = \frac{2}{1+\nu^{-2}}$$

при ν^2 близком к предельному значению 1 лишь немного меньше скорости фронта, формируемого нерассеянными частицами (12.2.20), движущимися параллельно оси x . Дисперсия же рассматриваемого пакета

$$\sigma_x^2 = \sigma_z^2 = m_2(t)/m_0(t) - [m_1(t)/m_0(t)]^2$$

растет при $t \rightarrow \infty$ как $4(\alpha + 1)t / [(\alpha + 2)^2(\alpha + 3)]$, так что относительная ширина его

$$\delta(t) = \sigma_x(t)/x(t) \sim \frac{2}{\sqrt{(\alpha + 1)(\alpha + 3)t}}$$

с течением времени стремится к нулю как $t^{-1/2}$.

Назовем режим распространения таких частиц квазибаллистическим. Он включает в себя и частицы баллистического режима – нерассеянные частицы, распределение которых дается плотностью (12.2.20) и характеризуется скачком конечной величины

$$\Delta\rho^{(0)} = \rho^{(0)}(0, t) = \frac{\alpha + 1}{2t} e^{-t}. \quad (12.2.24)$$

Доля баллистических частиц в квазибаллистическом пакете

$$\eta(t) = m_0^{(0)}(t)/m_0(t) = e^{-t/2}.$$

Пренебрегая скачком (12.2.24) аппроксимируем решение уравнения (12.2.19) формулой

$$\rho^+(z, t) = \frac{\gamma\mu^2 z}{2\Gamma(2/\gamma)} \exp\{-t/2 - (\mu z)^\gamma\}.$$

Она удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^\infty \rho^+(z, t) dz = (1/2)e^{-t/2}$$

и имеет моменты

$$\int_0^\infty z^n \rho^+(z, t) dz = \frac{\Gamma((n+2)/\gamma)}{2\mu^n \Gamma(2/\gamma)} e^{-t/2}.$$

Приравнивая первый и второй моменты к (12.2.22) и (12.2.23) соответственно, получаем систему уравнений для определения параметров γ и μ как функций t и ν^2 :

$$\frac{2\Gamma(4/\gamma)\Gamma(2/\gamma)}{[\Gamma(3/\gamma)]^2} = \frac{m_2(t)}{[m_1(t)]^2} e^{-t/2},$$

Таблица 12.2. Параметры γ, μ в формуле (12.2.25)

t	ν^2							
	0.8		0.9		0.95		0.99	
	γ	μ	γ	μ	γ	μ	γ	μ
2	0.854	12.69	0.765	35.73	0.729	84.69	0.703	484.8
4	1.103	3.777	0.978	9.908	0.928	22.70	0.892	126.5
6	1.401	1.808	1.229	4.505	1.161	10.07	1.111	55.01
8	1.756	1.093	1.521	2.622	1.428	5.752	1.362	30.98
10	2.184	0.758	1.861	1.767	1.737	3.822	1.650	20.36
12	2.709	0.573	2.262	1.308	2.096	2.799	1.981	14.78
14	3.378	0.459	2.747	1.032	2.521	2.189	2.368	11.48
16	4.280	0.384	3.348	0.851	3.035	1.793	2.828	9.359
18	5.609	0.332	4.129	0.726	3.678	1.521	3.391	7.900
20	7.914	0.294	5.213	0.635	4.524	1.324	4.107	6.849

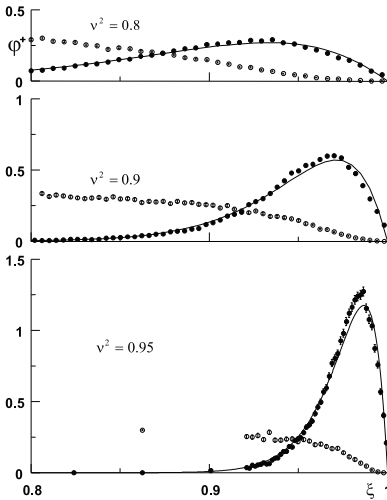


Рис. 12.6. Распределения $\psi^+(\xi, t) = t\rho^+(\xi t, t)$ частиц, движущихся в положительном направлении оси x (тёмные точки – Монте-Карловские результаты, сплошные кривые – аппроксимация (21)), и остальных частиц, хотя бы один раз изменивших знак x -компоненты скорости (светлые кружки – результаты Монте-Карло)

и $\psi^-(\xi, t)$, симметричных относительно начала координат.

$$\mu = \frac{\Gamma(3/\gamma)}{2m_1(t)\Gamma(2/\gamma)} e^{-t/2}.$$

Результаты численных расчетов $\rho^+(\xi, \nu^2)$ и $\mu(t, \nu^2)$ приведены в таблице 12.2.

На рис 12.6. аппроксимация

$$\begin{aligned} \psi^+(\xi, t) &= t\rho^+((1-\xi)t, t) = \\ &= \frac{t^2\gamma\mu^2((1-\xi))}{2\Gamma(2/\gamma)} \times \\ &\times \exp\{-t/2 - (\mu t(1-\xi))^\gamma\} \end{aligned} \quad (12.2.25)$$

сравнивается с результатами моделирования методом Монте-Карло распределения частиц, движущихся всё время в положительном направлении оси x . Хорошее согласие этих результатов позволяет представить решение кинетического уравнения в виде суммы медленно меняющейся компоненты решения телеграфного уравнения и двух всплесков $\psi^+(\xi, t)$

12.2.8 Заключительные замечания о мезодиффузии

Пространственное распределение частиц от мгновенного, точечного источника в случае мезодиффузии отличается от обычного диффузионного распределения наличием фронта, за пределами которого плотность равна нулю. Фронт движется от источника со скоростью свободного движения частицы.

В случае одномерной мезодиффузии в обеих точках фронта находятся δ -сингулярности, отражающие баллистический режим. Вместе с непрерывной частью решения телеграфного уравнения они дают точное решение кинетического уравнения Больцмана.

Учёт углового распределения частиц приводит к исчезновению сингулярностей и появлению на их месте фронтовых всплесков, ярко выраженных при сильной анизотропии, когда $\nu^2 > 0.8$ близко к единице, и исчезающих на фоне плавной компоненты при $\nu^2 < 0.7$. Форма всплесков, отражающих баллистический режим, хорошо аппроксимируется формулой (12.2.25).

При $\nu^2 > 0.7$ непрерывная часть телеграфного уравнения вполне удовлетворительно согласуется с решением кинетического уравнения (при ξ не слишком близком к 1) и вместе с указанной выше аппроксимацией фронтового всплеска может быть использована для аппроксимации точного решения.

В случае слабой анизотропии телеграфное приближение хуже аппроксимирует точное решение, чем диффузионное приближение.

12.3 Нелокальная механика²⁴

12.3.1 О понятии нелокальности

Глубинной концепцией естественно-научного мировоззрения является взаимодействие – взаимное влияние частей мира друг на друга. В механике макроскопических тел мы обнаруживаем взаимодействия по изменению скоростей тел, и можем употребить термин *локальное взаимодействие*, если изменения эти происходят в моменты соприкосновения тел. В противном случае можно было бы говорить о *нелокальном взаимодействии*, если бы не существовало материальных агентов,

²⁴Из книги V.V.Uchaikin. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol.I, Higher Education Press (Beijing)– Springer Verlag (Berlin), 2013.

воспринимающих импульсы при столкновениях с одним телом и передающих другому при столкновении с ним. Известно, что даже кулоновское взаимодействие электрических зарядов по современным представлениям возникает в результате обмена виртуальными фотонами, испытываемыми с ними «столкновения». Строго разделить процессы на локальные и нелокальные с физической точки зрения представляется довольно затруднительным, поскольку многое зависит от уровня рассмотрения. В частности, процессы в твёрдых телах, микроскопическое описание которых невозможно осуществить простыми математическими средствами, на макроскопическом уровне могут быть огублённо описаны в рамках модели нелокальных взаимодействий без какого-либо ущерба для точности результата (в таких задачах не имеет смысла получать теоретические результаты с точностью, существенно превышающей экспериментальную). Разумеется, несмотря на нередкие упоминания о молекулах, атомах и даже об элементарных частицах, мы останемся на «классической почве» до конца этого курса.

С математической точки зрения термин «нелокальный оператор» обычно применяется к моделям, исходные соотношения которых представляются в виде интегралов, выполняющих пространственное усреднение одной характеристики при вычислении другой (они-то и являются нелокальными операторами). В отдельных (но часто встречающихся в классических задачах) случаях интегралы эти могут быть преобразованы в дифференциальные формы как точно, так и приближённо. Преобразования эти приводят к градиентному описанию нелокальности, которое уже не воспринимается как нелокальное, хотя по существу, градиенты (и другие пространственные производные) представляют инфинитезимальную (бесконечно малых размеров) нелокальность.

С формальной точки зрения, оператор A , осуществляющий отображение функций $u \mapsto f$,

$$Au = f, \quad (12.3.1)$$

заданных в некоторой пространственной области V , называется *локальным* при выполнении следующего условия: если две функции u и v тождественно равны на открытом множестве $O \subset V$, то тождественно равны в O и их образы Au и Av безотносительно к поведению u и v за пределами O . В частности, если таким множеством является окрестность точки x_0 , то равенство этих функций во всех точках окрестности влечёт за собой и равенство их образов. Очевидно, дифференциальные операторы удовлетворяют этому условию, а интеграль-

ные (в общем случае) нет: будучи распространёнными на всю область определения, последние охватывают и ту подобласть V , где равенство $u = v$ не гарантировано. По этой причине, интегральные операторы относятся к нелокальным.

Такое деление моделей на локальные-нелокальные по математическому признаку оператора (дифференциальный-интегральный) не закрывает полностью проблему, и по этой причине Рогула, Базант и др. часто называют введённое таким образом понятие *нелокальностью в узком смысле*. Необходимость введения *нелокальности в широком смысле* обусловлена наличием или отсутствием *характеристической длины*. Отсутствие таковой приводит к инвариантности уравнений процесса относительно масштабного преобразования (свойство *скейлинга* или *автомодельности*) и составляет признак нелокальности в широком смысле.

Исторически развитие нелокальной методологии началось и, в основном, продолжается по сей день в рамках линейной интегральной модели. Ещё Дюгем в 1893 году полагал, что напряжение в каждой точке твёрдого тела должно, в принципе, зависеть от состояния всего этого тела, а не только от локальной деформации в этой точке. Рэлей использовал нелокальный подход при оптимизации подшипников скольжения (1918), Озеен при моделировании жидких кристаллов (1933), Чандрасекар в задачах переноса излучения (1950), Ходжкин при описании распространения электрических волн в нейронных сетях (1964), Рогула предложил нелокальную форму конститутивного закона для упругих материалов (1965). Эти ранние работы по нелокальной упругости мотивировались в основном идеей гомогенизации атомной структуры кристаллических решёток с целью более адекватного описания явлений, происходящих в масштабах сравнимых с межатомными расстояниями. Было установлено, что нелокальная модель континуума хорошо аппроксимирует дисперсию коротких волн и лучше описывает взаимодействия между дефектами кристалла (вакансиями, междоузлиями, дислокациями).

12.3.2 Нелокальная механика Власова

Известный советский учёный, профессор Московского университета им. М.В. Ломоносова в течение последних лет своей жизни (мне довелось побывать на его семинарах и пообщаться с ним персонально) занимался развитием нелокальной статистической механики. Вот основные понятия этого подхода, приведённые в его монографии²⁵,

²⁵ А.А.Власов. Нелокальная статистическая механика. – М.: Наука, 1978.

вышедшей уже после смерти автора.

Пространственное положение системы материальных точек задаётся совокупностью радиус-векторов, изменение которых и представляет собой собственно движение системы. Непрерывную среду мы тоже мысленно делим на элементы (хотя бы для того, чтобы ввести её плотность). В обоих случаях динамическое состояние системы можно представить с помощью фазовой плотности распределения (в случае материальных точек она будет иметь вид произведений дельта-функций по координатам и скоростям отдельных частиц, просуммированных по всем частицам). Власов постулировал, что *любая физическая система характеризуется бесконечной последовательностью плотностей распределения*²⁶ $f_0(\vec{r}, t)$, $f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$, $f_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, t)$, ... *связанных друг с другом трёхмерными интегралами*

$$f_0(\vec{r}, t) = \int f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) d\dot{\vec{r}},$$

$$f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \int f_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, t) d\ddot{\vec{r}},$$

и т.д. Предполагается, что система удовлетворяет законам сохранения в форме интегро-дифференциальных соотношений, связывающих плотности с соответствующими средними токами:

$$\frac{\partial f_0(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_{\vec{r}} \int \dot{\vec{r}} f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) d\dot{\vec{r}} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_{\vec{r}}(\dot{\vec{r}} f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)) + \operatorname{div}_{\dot{\vec{r}}} \int \ddot{\vec{r}} f_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, t) d\ddot{\vec{r}} = 0,$$

и т.д. Каждая строка здесь содержит две неизвестных функции, и по этой причине законы сохранения не образуют замкнутой системы уравнений. Власов предложил дополнить их усреднёнными ускорениями

$$\langle \ddot{\vec{r}} \rangle = \frac{\int \ddot{\vec{r}} f_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, t) d\ddot{\vec{r}}}{\int f_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, t) d\ddot{\vec{r}}} = -\frac{1}{m} \nabla_{\vec{r}} U(\vec{r}, t).$$

Потенциальная энергия U учитывает коллективные взаимодействия между элементами континуума и в предположении справедливости линейного приближения выражается через интеграл

$$U(\vec{r}, t) = \int K(\vec{r}, \vec{r}', t) f_0(\vec{r}', t) d\vec{r}' = \int \int K(\vec{r}, \vec{r}', t) f_1(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t) d\vec{r}' d\dot{\vec{r}}'. \quad (12.3.2)$$

²⁶ Подобно другим физикам А.А.Власов называл их функциями распределения, что не согласуется с общепринятой вероятностной терминологией.

Ядро $K(\vec{r}, \vec{r}', t)$ определяется межмолекулярными взаимодействиями. Второе уравнение системы принимает вид

$$\frac{\partial f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) - \frac{1}{m} \nabla_{\vec{r}} U(\vec{r}, t) \cdot \nabla_{\dot{\vec{r}}} f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0. \quad (12.3.3)$$

Выражения (12.3.2)-(12.3.3) дают нелинейное нелокальное уравнение для $f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$.

Вот что он писал в обоснование нелокальной формулировки законов движения системы. «В реальных ситуациях счёт частиц связан с физическими условиями реализации счёта и наличием его влияния на состояние системы частиц. Поэтому, свойства целочисленности, частичной или полной локализации должны выводиться из статистической теории, а не постулироваться с самого начала только при известных физических ограничениях, исключающих статистические выбросы частиц из системы.

Будем описывать частицу некоторым центром (тяжести), положением этого центра и его кинематическими характеристиками – скоростями и ускорениями, включая ускорения высших порядков.

Частица, таким образом, будет характеризоваться нелокальным образом, т.е. всем спектром своих геометрических и кинематических свойств: $\vec{r}, \vec{v}, \dot{\vec{v}} \dots$ для каждого момента времени t . Независимость указанных величин вытекает из независимости дифференциалов $dx^\alpha, d^2x^\alpha, d^3x^\alpha, \dots$, которые можно себе представить в виде бесконечно малых отрезков, опирающихся на точку M . Эта точка находится на некоторой гиперповерхности, изображающей многообразие значений координат x^α , где $\alpha = 1, 2, 3$, и через неё можно провести несколько касательных поверхностей с разным порядком касания к исходной гиперповерхности.

Дифференциалы $dx^\alpha, d^2x^\alpha, d^3x^\alpha, \dots$ располагаются на различных касательных поверхностях и поэтому являются независимыми отрезками как по величине, так и по направлению.

Точка и совокупность дифференциалов разных порядков в окрестности этой точки определяют специфическое пространство, которое для целей математики ввёл Картан, – так называемое пространство опорных элементов.»

Власов применил свой подход к описанию поведения плазмы и кристаллических структур. В этом последнем случае положения составляющих решётку атомов ограничены со стороны минимальных зна-

чений, что и создаёт эффект нелокальности²⁷. Дальнейшее развитие идеи Власова нашли в работе В.В.Козлова²⁸. Введя поле скоростей

$$\vec{u}(\vec{r}, t) \equiv \langle \dot{\vec{r}} \rangle = \frac{\int \dot{\vec{r}} f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) d\vec{r}}{\int f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) d\vec{r}},$$

он вывел нелокальные уравнения движения сплошной среды, обобщающие локальные уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial(f_0 u_i)}{\partial x_i} = 0$$

и

$$\frac{\partial(f_0 u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(f_0 u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} - f_0 \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

где

$$p_{ij}(\vec{r}, t) = \int (\dot{x}_i - u_i(\vec{r}, t))(\dot{x}_j - u_j(\vec{r}, t)) f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) d\vec{r}$$

– тензор давлений. Козлов доказал также закон сохранения: если $K(\vec{r}, \vec{r}') = K(\vec{r}', \vec{r})$, то полная энергия системы сохраняется,

$$T(t) + W(t) = \text{const},$$

где

$$T(t) = \frac{1}{2} \int \int f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) |\dot{\vec{r}}|^2 d\vec{r} d\dot{\vec{r}}$$

– кинетическая энергия, а

$$W(t) = \frac{1}{2} \int \int f_0(\vec{r}, t) f_0(\vec{r}', t) d\vec{r} d\vec{r}'.$$

– потенциальная. Козлов отмечает, что кинетическая энергия в нелокальном случае больше, чем в случае среды с локальным взаимодействием, $(1/2) \int v^2(\vec{r}, t) f_0(\vec{r}, t) d\vec{r}$. Действительно, из неравенства Коши-Буняковского следует

$$\begin{aligned} & \int \int |\dot{\vec{r}}|^2 f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) d\vec{r} d\dot{\vec{r}} - \int \left[\int \dot{\vec{r}} f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) d\dot{\vec{r}} / f_0(\vec{r}, t) \right]^2 f_0(\vec{r}, t) d\vec{r} = \\ & = \int \frac{1}{f_0(\vec{r}, t)} \left\{ \int |\dot{\vec{r}}|^2 f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) d\dot{\vec{r}} \int f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) d\dot{\vec{r}} - \left[\int \dot{\vec{r}} f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) d\dot{\vec{r}} \right]^2 \right\} d\vec{r} > 0. \end{aligned}$$

²⁷Лично у меня динамика Власова ассоциируется с картиной весеннего ледохода: разных размеров льдины, толкаясь и поворачиваясь (взаимодействия!), плывут по турбулентной поверхности, и на каждой из них – крестик, помечающий положение центра масс. Уравнения Власова составлены для концентрации и потока этих крестиков.

²⁸В.В.Козлов. Нелинейная динамика. 6. С.489-512 (2010).

12.3.3 Гидродинамическая нелокальность

Нелокальность уравнения Навье-Стокса

Начнём с того, что покажем, что нелокальные операторы содержатся в самих гидродинамических уравнениях. Обратимся к уравнению (9.1.2) Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\text{grad}p + \nu\Delta\vec{v} \quad (12.3.4)$$

и возьмём дивергенцию от обеих его частей. Учитывая, что

$$\text{div}\vec{v} = 0, \quad (12.3.5)$$

и



$$\text{div}\vec{g} = 0,$$

получим неоднородное уравнение Пуассона

$$\text{div}((\vec{v}\nabla)\vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\Delta p.$$

Его решение

$$p(\vec{r}, t) = \frac{\rho}{4\pi} \int \frac{\{\text{div}((\vec{v}\nabla)\vec{v})\}_{\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (12.3.6)$$

Соединяя уравнения (12.3.4)-(12.3.6) в одну систему, видим, что она не только нелинейна, но ещё и нелокальна.

Отметим, что это решение выведено для бесконечно протяжённой жидкости и соленоидальной внешней силы \vec{g} . Скорости в точках \vec{r}' под интегралом берутся в тот же момент времени, что и в «точке наблюдения» \vec{r} . Сигнал из точки \vec{r}' в точку \vec{r} распространяется мгновенно, что является следствием несжимаемости жидкости.

Турбулентная диффузия

Первыми работами, в которых процесс турбулентной диффузии описывался в рамках нелокальной модели, (то есть, движение мельчайших частиц, «сориннок», брошенных в турбулентную среду) были, скорее всего, работы А.С.Монина (1955, 1956). Надо сказать, что в отличие от молекулярной диффузии, вполне приемлемой моделью которой является броуновское движение с непрерывными траекториями, турбулентная диффузия характеризуется событиями, когда пробная

частица подхватывается вихрем и быстро переносится на значительное расстояние. Это быстрое перемещение можно интерпретировать как перескок из одной точки в другую без затраты времени. Этим и можно объяснить появление интегрального оператора: интегральные операторы и описывают скачки, тогда как дифференциальные соответствуют плавному движению.

Вернёмся к работам Мони́на. Введя соответствующую плотность вероятности $f(\vec{r}, t)$ и предположив марковский характер процесса, он записал уравнение

$$\frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} = Af(\vec{r}, t),$$

где A – некоторый линейный оператор. Преобразование Фурье привело к уравнению

$$\frac{\partial \tilde{f}(\vec{k}, t)}{\partial t} = \tilde{A}(\vec{k})\tilde{f}(\vec{k}, t). \quad (12.3.7)$$

В случае изотропной турбулентности Фурье-образ оператора A зависит лишь от абсолютной величины волнового вектора $\vec{k} \equiv |\vec{k}|$,

$$\tilde{A}(\vec{k}) = \tilde{a}(k).$$

Действуя в рамках системы колмогоровских гипотез, естественно допустить степенной характер зависимости и этой трансформанты от волнового числа,

$$\tilde{a}(k) = -a_1 k^\alpha, \quad a_1 > 0, \quad 0 < \alpha \leq 2. \quad (12.3.8)$$

Ограничения на амплитуду a_1 и показатель α продиктованы физическим смыслом решения уравнения (12.3.7): решение это должно быть плотностью вероятности. Если хотя бы один из этих параметров не уложится в указанные пределы, решение станет знакопеременным или разойдётся нормировочный интеграл. Обратное преобразование уравнения (12.3.7) приводит к интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} = \int A(\vec{r} - \vec{r}')f(\vec{r}', t)d\vec{r}', \quad (12.3.9)$$

с ядром

$$A(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{A}(\vec{k})d\vec{k}.$$

Легко видеть, что при $\alpha = 2$, уравнение (12.3.9) принимает вид обычного *локального* диффузионного уравнения

$$\frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} = a_1 \Delta f(\vec{r}, t),$$

тогда как в интервале $0 < \alpha < 2$, включающем в себя найденное из законов Колмогорова-Обухова значение $\alpha = 2/3$, мы имеем дело с нелокальным уравнением (12.3.9), содержащим неизвестную функцию под интегралом, распространённым на всё пространство, занятое турбулентной средой²⁹. Этот оператор (как нетрудно догадаться, глядя на (12.3.8) пропорционален $-(\Delta)^{\alpha/2}$ и являет собой дробную степень лапласиана. Вывод этот, однако, далеко не бесспорен: эксперименты и модельные расчёты показывают, что условие (12.3.8) выполняется в ограниченной области значений $k \in (k_1, k_2)$, а за пределами быстро отклоняется от степенной зависимости. В любом случае, однако, мы имеем дело с нелокальным уравнением.

В дальнейшем появился целый ряд работ по нелокальным моделям турбулентной диффузии (Roberts, 1961; Schönfeld, 1962; Berkowicz and Prahm, 1979; Fiedler, 1984; Ebert et al, 1989; Nakayama&Vengadesan, 1993; Hamba, 2005; Cushman-Roisin&Jenkins, 2006; и др.). Крайчнан (1987) добавил в нелокальную модель диффузии эредитарный эффект, произведя замену *ядра диффузии* интегрального уравнения

$$D(\vec{r} \leftarrow \vec{r}') \mapsto D(\vec{r}, t \leftarrow \vec{r}', t'),$$

Н. Романов³⁰ распространил это расширение на диффузию в анизотропной среде, записав диффузионное уравнение в виде

$$\frac{\partial \langle C(\vec{r}, t) \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i C(\vec{r}, t) \rangle}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^t \int_{R^3} d\vec{r}' D_{ij}(\vec{r}, t \leftarrow \vec{r}', t') \frac{\partial \langle C(\vec{r}', t') \rangle}{\partial x'_j} + S(\vec{r}, t)$$

(здесь C – концентрация диффундирующей субстанции в случайном поле скоростей, u_i – случайное поле скоростей, S – плотность источников диффундирующих частиц, угловые скобки означают усреднение по ансамблю). Дробно-дифференциальное обобщение нелокально-эредитарного подхода было развито В.В.Учайкиным в задаче о движении релятивистских частиц космических лучей в турбулентной межзвёздной среде³¹.

²⁹ Следует отметить, что существуют так называемые тауберовы теоремы, из которых следует, что степенное поведение трансформант k^α ведёт к длинным степенным хвостам $x^{-\alpha-d}$ оригиналов, как раз и описывающим скачки, но при $\alpha = 2$ этот эффект исчезает и «полёты Леви» превращаются в «ползание Броуна».

³⁰Romanov N., Romanian Journal of Meteorology, **8**, 1-2, 37-45 (2006).

³¹В.В. Учайкин. Письма в ЖЭТФ, **91**, 3, с.115-120 (2010).

Нелокальные эффекты в плазме

Изначально кинетическое уравнение Больцмана выводилось для описания процессов переноса в идеальных газах, или по крайней мере, в газах, состоящих из нейтральных молекул, характеризующихся короткодействующими взаимодействиями. Именно при этих условиях можно было использовать представления о мгновенных взаимодействиях (столкновениях) и прямолинейных (в отсутствие внешних сил) пробегов. В плазме, однако, важную роль играет кулоновское взаимодействие, радиус которого (в отсутствие экранирования) бесконечен. Это обстоятельство порождает далёкие корреляции динамических переменных плазмы, а с ними и коллективные эффекты. Простейший способ учёта последних заключается во введении в правую часть кинетического уравнения

$$\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \nabla f(\vec{r}, \vec{v}, t) = B_0[\vec{v}, f(\vec{r}, \cdot, t)]$$

дополнительного слагаемого

$$V[\vec{r}, f(\cdot, \cdot, t)] = - \left[\nabla \int d\vec{r}' \int d\vec{v}' V(\vec{r} - \vec{r}') f(\vec{r}', \vec{v}', t) \right] \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{m \partial \vec{v}},$$

содержащего нелинейный нелокальный интегральный оператор (см.³², п.11.7). Теперь в правой части кинетического уравнения два слагаемых:

$$\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \nabla f(\vec{r}, \vec{v}, t) = B_0[\vec{v}, f(\vec{r}, \cdot, t)] + V[\vec{r}, f(\cdot, \cdot, t)],$$

и если в случае слабоионизованной плазмы главную роль играет первое из них, то в сильноионизованной плазме эта роль принадлежит второму слагаемому. Пренебрегая первым слагаемым, получим нелокальное нелинейное уравнение Власова

$$\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \nabla f(\vec{r}, \vec{v}, t) = - \left[\nabla \int d\vec{r}' \int d\vec{v}' V(\vec{r} - \vec{r}') f(\vec{r}', \vec{v}', t) \right] \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{m \partial \vec{v}}. \quad (12.3.10)$$

Мы не разделяли здесь заряды на положительные и отрицательные, молчаливо полагая их одинаковыми. Это конечно, неверно: в плазме должны быть заряженные частицы (ионы) обоих знаков, и

³²Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика, т.2. – М.: Мир, 1978.

должно быть два уравнения, описывающих концентрации положительных и отрицательных частиц, и четыре нелокальных оператора (V_{++} , V_{+-} , V_{-+} , V_{--}). Уравнение же (12.3.10) пригодно для описания движения гравитирующих частиц, между которыми действуют лишь силы притяжения.

Рассмотрим теперь распространение возбуждений атомов в плазме. Когда возбуждённый атом сталкивается с невозбуждённым, он «передаёт» своё состояние другому. При столкновении двух атомов плазмы один из них или оба могут перейти в возбуждённые состояния. Но основным механизмом переноса возбуждений в плазме, особенно в плазменных источниках света, является процесс резонансного рассеяния. Главной особенностью переноса резонансного излучения в плазме является пропорциональность линейного коэффициента поглощения $k(\omega)$ коэффициенту излучения в спектральной линии, в результате чего подавляющее большинство фотонов резонансного излучения тут же поглощаются, снова переизлучаются, вновь поглощаются и т.д. до тех пор, пока случайная частота излученного фотона не окажется вдали от центра линии, на ее крыле. Вероятность этого мала, но и вероятность поглощения такого фотона мала, и если уж он приобрел такую частоту, то и пробег его до следующего взаимодействия будет аномально большим. В наиболее популярной в расчетах модели полного перераспределения частот, частота переизлученного фотона не зависит от частоты поглощенного, и уравнение для концентрации $N \equiv N(\mathbf{x}, t)$ возбужденных атомов плазмы, известное как уравнение Бибермана-Холстейна, имеет вид

$$\frac{\partial N(\vec{r}, t)}{\partial t} = \gamma \int d\mathbf{x}' K(\vec{r} - \vec{r}') [N(\vec{r}', t) - N(\vec{r}, t)],$$

где γ – вероятность радиационного девозбуждения атома в единицу времени, $K(\vec{r})$ – усредненное по частоте ядро переноса фотона

$$K(\vec{r}) = \left\langle k(\omega) \frac{e^{-k(\omega)|\vec{r}|}}{4\pi|\vec{r}|^2} \right\rangle.$$

В асимптотическом ($|\vec{r}| \rightarrow \infty$) приближении

$$K(\vec{r}) = \frac{A}{4\pi|\vec{r}|^{\alpha+3}}$$

и уравнение Бибермана-Холстейна принимает вид

$$\frac{\partial N(\vec{r}, t)}{\partial t} = \gamma A \int \frac{N(\vec{r}', t) - N(\vec{r}, t)}{|\vec{r}' - \vec{r}|^{\alpha+3}} d\vec{r}',$$

Преобразование Фурье по координатам даёт

$$\frac{\partial \tilde{N}(\vec{k}, t)}{\partial t} = -\gamma A^* |k|^\alpha \tilde{N}(\vec{k}, t),$$

где

$$A^* = A \int_0^\infty (z - \sin z) z^{-\alpha-2} dz$$

– новая постоянная. Таким образом, уравнение Бибермана-Холстейна эквивалентно уравнению с дробным лапласианом, рассмотренному нами в 2.3.

12.3.4 Перидинамика

Нелокальные модели упругости

Систематическое развитие нелокальных моделей упругости, начавшееся в 70-х годах (Edelen et al. 1971; Eringen 1972; Eringen and Edelen 1972), стимулировалось как повышением требований к материалам в таких областях, как ядерная энергетика, космонавтика, строительство гигантских сооружений в сейсмоопасных зонах и пр., так и возрастанием возможностей компьютерных технологий, принимавших на себя всё большую долю добываемой ранее экспериментальным путём информации. Первые работы, постулировавшие нелокальность сил, масс, энтропии, внутренней энергии, были слишком сложными для экспериментальных проверок и довольно далекими от прикладных задач. Последующее развитие этого подхода в процессе решения конкретных задач привело к практически эффективной формулировке этой концепции на основе нелокального обобщения $\sigma - \varepsilon$ -соотношений при сохранении прежними соотношений равновесия, уравнений баланса и граничных условий. Концепция эта, оказавшаяся эффективным средством решения задач о трещинообразовании и разрушении материалов, известна сегодня по названию *перидинамика* (от греч. *peri* – ближний, и *dynamis* – силы). Следуя работе³³, мы кратко сформулируем здесь исходные понятия этого формализма.

Ограничимся, для простоты, одномерной задачей. В ней нелокальное обобщение закона Гука, уравнения равновесия и упругой энергии осуществляется преобразованиями

$$\sigma(x) = E(x)\varepsilon(x) \mapsto \sigma(x) = \int_L E(x, x')\varepsilon(x')dx',$$

³³Bazant Z.P., Jirasek M., Journ. Engng. Mech, 111-1149 (November 2002).

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[E(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right] = f(x) \mapsto -\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_L E(x, x') \frac{\partial u(x')}{\partial x'} dx' \right] = f(x), \quad (12.3.11)$$

и

$$U = \frac{1}{2} \int_L E(x) \epsilon^2(x) dx \mapsto U = \frac{1}{2} \int_L \int_L \epsilon(x) E(x, x') \epsilon(x') dx dx'$$

соответственно, интегралы в которых можно интерпретировать как операции усреднения интегрируемых величин по некоторой пространственной области конечных размеров.

Дифференцируя последнее выражение по времени и выделив в не зависящем от времени ядре $E(x, x')$ симметричную часть $E^S(x, x') = E^S(x', x)$,

$$E(x, x') = E^S(x, x') + E^A(x, x'), \quad E^S(x, x') = [E(x, x') + E(x', x)]/2,$$

мы получим

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\epsilon}(x) E(x, x') \epsilon(x') dx dx' + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(x) E(x, x') \dot{\epsilon}(x') dx dx' = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(x) [E(x, x') + E(x', x)] \dot{\epsilon}(x') dx dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\epsilon}(x) E^S(x, x') \epsilon(x') dx dx'. \end{aligned}$$

Если мы имеем дело с материалом, для которого $E(x, x')$ изначально обладает симметрией, последнее выражение можно представить в форме:

$$\dot{U} = \int \dot{\epsilon}(x) \bar{\sigma}(x) dx, \quad (12.3.12)$$

где

$$\bar{\sigma}(x) = \int E(x, x') \epsilon(x') dx'. \quad (12.3.13)$$

Уравнение (12.3.12) представляет собой стандартное выражение для мощности внутренних сил в среде с нелокальным конститутивным соотношением (12.3.13). Положив $E(x, x') = E_0 g(x, x')$, последнее удобно представить в виде

$$\bar{\sigma}(x) = E_0 \bar{\epsilon}(x)$$

где результирующая деформация

$$\bar{\epsilon}(x) = \int g(x, x') \epsilon(x') dx'.$$

выражена через локальные деформации в окружающей данную точку области, взвешенные с некоторой функцией ослабления $g(x, x')$. Для однородного изотропного тела эту функцию берут зависящей только от разности рассматриваемых координат $\xi = x - x'$ и обычно нормируют на 1:

$$\int g(\xi) d\xi = 1.$$

Часто в этом качестве используют гауссову плотность

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l} e^{-\xi^2/2l^2},$$

где l – эмпирический параметр, определяющий эффективный размер области нелокальности, однако можно встретить и другие представления, например

$$g(\xi) = \begin{cases} \text{const} (1 - \xi^2/l^2)^2, & \xi < l; \\ 0, & \xi > l. \end{cases}$$

Выбор в качестве весовой функции плотность равномерного на определённом отрезке распределения приводит к формулировке известного в механике сплошных сред *метода конечных элементов*, вызывающего в памяти образ черепичной крыши. Наложив на неё вычислительную сетку и выполняя последовательное её измельчение при сохранении постоянными размеров самих элементов, мы видим, что конечные элементы сами выполняют требуемое усреднение, определяя своим размером характеристическую длину данной среды.

Нелокальные волновые процессы

Вернувшись к нелокальному уравнению (12.3.11) и произведя в нём замену

$$f(x) \rightarrow -\rho \partial^2 u(x, t) / \partial t^2,$$

получим *нелокальное волновое уравнение*

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_L E^S(x, x') \frac{\partial u(x', t)}{\partial x'} dx' \right] = 0.$$

Подставив

$$E^S(x, x') = E_0 g(x - x')$$

во второй член волнового уравнения, преобразуем последний (при $L = (-\infty, \infty)$) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} E^S(x, x') \frac{\partial u(x', t)}{\partial x'} dx' &= E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g(x - x')}{\partial x} \frac{\partial u(x', t)}{\partial x'} dx' = \\ &= -E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g(x - x')}{\partial x'} \frac{\partial u(x', t)}{\partial x'} dx' = E_0 \int_{-\infty}^{\infty} g(x - x') \frac{\partial^2 u(x', t)}{\partial x'^2} dx'. \end{aligned}$$

В результате получим:

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - E_0 \int_{-\infty}^{\infty} g(x - x') \frac{\partial^2 u(x', t)}{\partial x'^2} dx' = 0. \quad (12.3.14)$$

Подстановка в (12.3.14) волновой функции

$$u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} = e^{ik(x - ct)}$$

(здесь, как обычно, $c = \omega/k$), приводит к дисперсионному уравнению

$$-\rho\omega^2 + E_0 k^2 \widehat{g}^*(k) = 0,$$

в котором

$$\widehat{g}^*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-ik\xi} d\xi$$

– Фурье-образ нелокальной весовой функции $g(\xi)$. Отсюда находим фазовую скорость упругой волны в среде с нелокальными свойствами:

$$c_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{E_0 \widehat{g}^*(k)}{\rho}} = c_0 \sqrt{\widehat{g}^*(k)}.$$

Ознакомьтесь с другими версиями нелокального волнового уравнения читатель может по монографии Наумкина и Шишмарева³⁴, где

³⁴П. I. Naumkin, I. A. Shishmarev. Nonlinear Nonlocal Equations in the Theory of Waves. American Mathematical Society, Providence. Rhode Island, 1994.

он найдёт, в частности, уравнение для длинных внутренних волн в стратифицированной жидкости (Benjamin-Ono)

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + f(x, t) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \text{p.v.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f(x', t)}{\partial x'^2} \frac{dx'}{x - x'} = 0,$$

для аксиально-симметричных длинных волн низкой амплитуды в невязкой несжимаемой вращающейся жидкости (Leibovitz)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + f(x, t) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \\ & + A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x', t)}{\partial x'} \frac{dx'}{\sqrt{(x - x')^2 + B^2}} = 0, \end{aligned}$$

для акустических волн внутри пузыря (Накоряков и Шрайбер; Кобелев и Островский)

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + f(x, t) \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + b f(x, t) + c \int_0^x \frac{\partial f(x', t)}{\partial x'} \frac{dx'}{\sqrt{x - x'}} = 0;$$

для скоростей частиц в океанских волнах с учётом диссипационно-релаксационных процессов, обусловленных молекулярной вязкостью (Руденко и Силуян)

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + f(x, t) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + a \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^x \frac{\partial f(x', t)}{\partial x'} e^{-(x-x')/c} dx' = 0;$$

для ленгмюровских волн в плазме

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + i f^2(x, t) f^*(x, t) + i \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - x') f(x', t) dx' = 0.$$

магнитогидродинамическое уравнение для неизотермической бесстолкновительной плазмы (Климонтович)

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + f(x, t) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + c \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x - x') \frac{\partial f(x', t)}{\partial x'} dx' = 0.$$

Заинтересованному читателю рекомендую обратиться к монографии³⁵ и периодическим изданиям.

³⁵E. Madenci, E. Oterkus. Peridynamic Theory and Its Applications, 2014, Springer New York Heidelberg.

Нелокальные модели пластичности

Хотя классическая (локальная) теория пластичности вполне способна объяснить и предсказать поведение материалов в обычных условиях и размерах, она не в состоянии описать такие явления, как экспериментально наблюдаемая зависимость пластического отклика образцов малых (микроскопических) размеров или появление характерных штрихов (полосок конечной толщины) при сильных деформациях. В то же время такие эксперименты, как нановдавливание или кручение тонкой медной проволоки, демонстрируют возникновение зависимости локальных в классической теории свойств твёрдых тел от размеров образцов. Эти факты в совокупности с результатами численных расчётов на компьютерных системах нового поколения и послужили мотивацией дальнейшего продвижения идеи нелокальности в физику твёрдого тела.

В настоящее время развивается несколько версий нелокальной теории пластичности. Коснёмся одной из них. Нелокальная мезоскопическая модель упругопластического поведения твёрдого тела, предложенная Пикаром с соавт. (2005) основана на предположении, что локальное пластическое событие (состояние) связано с микроскопическим пределом текучести и упругой релаксацией напряжения окружения. Рассматривая двумерный материал с макроскопической скоростью сдвига $\dot{\gamma}$ (смещение в направлении OX , зависящее только от z), авторы описывают его в крупнозернистом представлении – промежуточном между микроскопическим (молекулярным) и макроскопическим масштабами. Исследуется xz -компонент нестационарного локального сдвигового напряжения $\sigma(x, z; t)$. Четыре условия определяют модель: (i) ниже определённого предела текучести σ_T система отвечает упруго на приложенные деформации; (ii) выше σ_T система начинает проявлять свойства пластичности; (iii) пластические события принимают форму локализованных деформаций сдвига; (iv) эти пластические деформации сопровождаются длинномасштабными упругими возмущениями поля $\delta\sigma$ сдвиговых напряжений в материале. Связь этого возмущения в точке (x, z) с xz -компонентом пластической деформации в точке (x', z') $\varepsilon^{\text{плс}}(x', z'; t)$ выражается через соответствующую функцию Грина $G(x, x'; z, z')$ соотношением

$$\delta\sigma(x, z; t) = 2\mu \int dx' \int dz' G(x, x'; z, z') \delta\varepsilon^{\text{плс}}(x', z'; t),$$

где μ – модуль сдвига. Суммарное изменение поля напряжений складывается из глобальной упругой нагрузки $\dot{\gamma}$ и представленного выше

возмущения, порождённого пространственным распределением локализованных пластических событий,

$$\frac{\partial \sigma(x, z; t)}{\partial t} = \mu \dot{\gamma} + 2\mu \int dx' \int dz' G(x, x'; z, z') \varepsilon^{\text{плс}}(x', z'; t).$$

На основе этого уравнения построена модель, описывающая пространственно-временное поведение упругопластичной системы при малых скоростях сдвига.



Трёхмерная перидинамика

Перейдём к трёхмерной формулировке, в которой логика перидинамики выглядит даже нагляднее. Вернувшись к динамическому уравнению теории упругости, запишем его в виде:

$$\rho(\vec{r}) \partial^2 \vec{u}(\vec{r}, t) / \partial t^2 = \mathcal{F} \vec{u}(\vec{r}, t) + \vec{f}(\vec{r}, t), \quad (12.3.15)$$

где $\vec{u}(\vec{r}, t)$ – вектор смещения в точке \vec{r} в момент t , $\rho(\vec{r})$ – плотность в точке \vec{r} , $\vec{f}(\vec{r}, t)$ – объёмная плотность действующей на тело силы. Выражение

$$\mathcal{F}(\vec{u}(\cdot, \cdot)) = (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u}(\vec{r}, t) + \mu \Delta \vec{u}(\vec{r}, t)$$

представляет собой результат действия оператора \mathcal{F} , который мы привычно называем локальным, поскольку он «действует на функцию \vec{u} в точке \vec{r} ». Такой словоборот не следует понимать буквально: если вы знаете только значение (то есть, три проекции) вектора \vec{u} в точке \vec{r} , вы ничего не сможете сказать ни о его дивергенции, ни о градиенте этой дивергенции в данной точке. Чтобы найти эти характеристики в точке \vec{r} , необходимо знать поведение вектор-функции \vec{u} в окрестности этой точки, стало быть, оператор этот тоже нелокален, только нелокальность эта носит инфинитезимальный (в бесконечно малом объёме) характер. В большинстве задач, не связанных с нарушением топологической структуры материала (растрескиванием, разрушением), такой инфинитезимальной нелокальности оказывается достаточно, чтобы описать его динамику, если рассматриваемые деформации дважды непрерывно дифференцируемы. Как только зарождается трещина, нарушается сплошность среды и нарушаются условия применимости данного математического аппарата. Понимая теперь, что ограниченность аппарата обусловлена его инфинитезимальностью, легко найти выход из положения: необходимо распространить свойство нелокальности с бесконечно малого носителя (окрестности)

на конечную область тела, влияющего на формирование поля перемещений в каждой точке тела. При этом дифференциалы, порождающие производные (пределы отношений разностей, которые перестают существовать на разломах) заменяются *конечными разностями, которые существуют всегда*, и математика восстанавливает свою работоспособность. В связи с этим можно ожидать, что в этой ситуации функционал $\mathcal{F}(\vec{u}(\cdot, \cdot))$ может быть аппроксимирован интегральной формой с ядром, зависящим от положения точек \vec{r} , \vec{x} и векторов смещений в них:

$$\mathcal{F}(\vec{u}(\cdot, \cdot)) = \int_{\vec{x} \in V(\vec{r})} \vec{F}(\vec{u}(\vec{r}, t), \vec{u}(\vec{x}; \vec{r}, \vec{x}, t)) d\vec{x}. \quad (12.3.16)$$

Форма (12.3.16) задаёт влияние на положение (перемещение) точки \vec{r} не только инфинитезимального (по-существу, непосредственно соприкасающегося с ней) её окружения, но и части тела, находящейся за пределами этой окрестности. В случае изотропных деформаций часть эта берётся в виде шара такого радиуса ρ , что влияние находящейся за его пределами среды уже отсутствует или пренебрежимо мало. Поверхность этого шара (в общем случае – области $V(\vec{r})$) называют *перидинамическим горизонтом*. Основная проблема теперь сводится к установлению вида функции \vec{F} . Вывод явного выражения этой функции «из первых принципов» вряд ли возможен, поэтому приходится опираться, как и в большинстве построений вязко-упруго-пластичных моделей, на некоторые более или менее очевидные закономерности и удовлетворяющие им конструкции. Подробное изложение этих вопросов любопытствующий читатель найдёт в монографии³⁶. Мы же завершим этот раздел кратким указанием на некоторые понятия перидинамики, обобщающие соответствующие понятия теории точечных систем.

Формализм связи

Перидинамика оказывается эффективным средством описания процессов разрушения материала.

Назовём *связью* взаимодействие между центрами A и B двух элементов («зёрен»), находящимися в пределах одного горизонта, и введём следующие обозначения:

$$\vec{r}_A = \vec{r}, \quad \vec{r}_B = \vec{x}, \quad \vec{A}B = \vec{x} - \vec{r} = \vec{\xi}, \quad \vec{u}(\vec{x}, t) - \vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{\eta}, \quad \vec{A}'B' = \xi + \eta.$$

³⁶Ergodan Madenci and Erkan Oterkus. Peridynamic Theory and Its Applications. Springer New York 2014.

В процессе деформирования радиус-вектор $\vec{\xi}$, соединяющий точки \vec{r} и \vec{x} , перемещается в положение $\vec{\xi} + \vec{\eta}$, испытывая при этом относительное удлинение

$$\delta(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{|\vec{\xi} + \vec{\eta}| - |\vec{\xi}|}{|\vec{\xi}|}.$$

В предположении, что взаимодействие между точками тела инвариантно относительно его движения как твёрдого тела (без деформаций) и не зависит явно от времени, можно записать

$$\vec{F}(\vec{u}(\vec{r}, t), \vec{u}(\vec{x}, t); \vec{r}, \vec{x}, t) = \vec{F}_0(\vec{r}, \vec{\xi}, \vec{\eta}).$$

Материал называют *микроупругим*, если существует *парный потенциал*, то есть такая функция $w(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, что

$$\vec{F}_0(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \nabla_{\vec{\eta}} w(\vec{\xi}, \vec{\eta}).$$

Простейшая модель нелокальной микроупругости основана на пропорциональности $|\vec{\xi}|$ и квадратичной зависимости от δ :

$$w(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \begin{cases} \frac{\delta^2(\vec{\xi}, \vec{\eta})}{2} |\vec{\xi}|, & |\vec{\xi}| < \rho \\ 0, & |\vec{\xi}| > \rho \end{cases}.$$

Коэффициент пропорциональности в трёхмерном случае даёт выражением

$$C = \frac{18K}{\pi\rho^4}, \quad K = \lambda(1 + \nu)/(3\nu) = 5\lambda/3.$$

Полагая плотности кинетической и упругой энергий равными соответственно

$$e_{\text{кин}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) \left| \frac{\partial \vec{u}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right|^2$$

и

$$e_{\text{упр}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \int w(\vec{x} - \vec{r}, \vec{u}(\vec{x}, t) - \vec{u}(\vec{r}, t)) d\vec{x},$$

и определив плотность лагранжиана выражением

$$l(\vec{r}, t) = e_{\text{кин}}(\vec{r}, t) - e_{\text{упр}}(\vec{r}, t) + \vec{f}(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t),$$

можно вывести уравнение (12.3.15) с функционалом (12.3.16) путём минимизации функционала

$$S = \int_0^T \int_X l(\vec{x}, t) d\vec{x} dt.$$

Описание растрескивания и моделирование разрушения материала достигается путём разрывов связей, происходящих при превышении относительной деформацией $\delta(\vec{\xi}, \vec{u}(\vec{x}, \tau) - \vec{u}(\vec{r}, \tau))$ при всех $\tau < t$ заданного критического значения $\delta_{кр}$.

12.3.5 Дополнительные замечания

В заключение выскажем некоторые соображения по поводу мотивации введения в механику континуума понятия нелокальности. Первые продвижения в область нелокальной теории сплошных сред были мотивированы стремлением устранить расхождение между результатами локальных моделей и экспериментальными данными в области малых размеров. Ясно, что причины такого положения кроются в микроструктурных неоднородностях, проявляющихся в таких масштабах. Существование таких структур не предполагается стандартной концепцией сплошной среды. Даже в случае макроскопически неоднородной среды концепция эта требует известной однородности среды в малых масштабах. Более того, плотности и другие локальные характеристики должны быть дифференцируемыми, то есть достаточно плавными функциями координат. Эти условия нарушаются при переходе через некоторую критическую длину, материал начинает выглядеть всё более и более неоднородным, и введение нелокальных операторов представляет собой попытку приближённого учёта этих особенностей поведения вещества в области мезо- и наноразмеров. В случае микроскопически неупорядоченных сред привлекаются статистические модели, в которых действие нелокальных операторов трактуется как усреднение по реализациям (Drugan and Willis (1996), Luciano and Willis (2001)).

Иная мотивация нелокального подхода проявилась в анализе роли деформационного разупрочнения в образовании распределённых повреждений. Этот факт связан с интенсивным развитием вычислительной техники в 70-х годах минувшего века, разработкой новых численных методов (метод конечных элементов и др.), позволивших воочию наблюдать происходящие в таких областях процессы путём их адекватного моделирования. Разработка ядерных технологий, проектирование корпусов ядерных реакторов на атомных электростанциях и подводных лодках, подземных и подводных хранилищ для ядерных отходов обеспечило щедрое финансирование этих разработок.

Третьей, возможно, наиболее общей для различных областей теории деформируемого тела проблемой является выяснение физики размерных эффектов – зависимости связи напряжённость-деформация от

размеров образцов.

Логично предположить, что нелокальность и эрдитарность имеют общее происхождение. Действительно, с физической точки зрения возвращающаяся часть динамической информации, переданной ранее окружению (в соответствии с уравнением Линдблада), отражает в некоторой степени и состояние этого окружения (в чём и состоит физика нелокальности), и в соответствии с принципом конечной скорости распространения сигнала ядро нелокального оператора должно учитывать запаздывание во времени, то есть быть эрдитарным. С математической же стороны сама эрдитарность есть просто нелокальность во времени. Таким образом, вполне естественно ожидать появление динамической теории с ядром интегрального оператора, зависящего как от пары координат, так и от пары временных переменных. Образец такой теории построен в статье Зубарева и Тищенко³⁷ на базе неравновесной статистической термодинамики. В основе её лежат интегральные соотношения между термодинамическими силами и потоками, то есть нелокальные запаздывающие уравнения переноса. В линейном приближении для трансляционно-инвариантной (в пространстве и времени) среды ядра этих соотношений (ядра переноса) зависят только от координатных и временных разностей или от волнового вектора и частоты. Выражения этих величин через пространственно-временные корреляционные функции чрезвычайно сложны и для жидкости вряд ли могут быть вычислены из первых принципов. Однако обобщённые (нелокальные и эрдитарные) кинетические уравнения могут оказаться полезными при построении гидродинамических моделей. В частности, в обычных гидродинамических задачах характеризующие квазиравновесное состояние параметры мало меняются на пространственно-временных масштабах корреляций, где корреляционные функции существенно отличны от нуля. Для газов, например, это размеры порядка средней длины пробега и временные интервалы порядка среднего времени между столкновениями. В этих условиях эффекты нелокальности и эрдитарности пренебрежимо малы.

Однако пренебрежение этими эффектами оправдано не всегда. Это недопустимо, например, если характеристики рассматриваемой среды претерпевают существенные изменения на средней длине свободного пробега молекулы (пример – скин-эффект). Аналогичная ситуация возникает вблизи критической точки, когда корреляционные длины пространственной и временной переменных резко возрастают. Кроме того, к процессам такого рода относятся течения вязкой жидкости в

³⁷D.N.Zubarev, S.V.Tischchenko. Physics **59**, 285-304 (1972).

очень узких каналах (щелях).

Следуя работе³⁸, рассмотрим поведение тонкого слоя вязкой жидкости, заключённой между близкими плоскостями, перпендикулярными OY (назовём эту область щелью и обозначим толщину её через h) и находящейся под действием внешней удельной (на единицу массы) силы f_x , направленной вдоль OX . Записав уравнение баланса для плотности импульса потока в виде

$$\rho \frac{du_x(y)}{dt} = - \frac{dp_{yx}}{dy} + \rho f_x,$$

где p_{yx} означает yx -компонент тензора вязкого давления, дополним его ньютоновым законом вязкости

$$p_{yx}(y) = -\eta \dot{\gamma}(y). \quad (12.3.17)$$

В стационарном состоянии (когда $du_x(y)/dt = 0$), уравнение Навье-Стокса имеет простой вид

$$\eta \frac{d\dot{\gamma}(y)}{dy} + \rho f_x = 0.$$

Решение его тривиально, однако вот два условия, которые обычно налагаются на искомую функцию, стоит обсудить. Первое условие: плотность жидкости равномерна по всему её слою, второе – условие прилипания: x -компонент скорости исчезает на границах щели, $u_x(y = \pm h) = 0$). Дело в том, что выполненные по этой схеме расчёты не дали ожидаемого согласия с экспериментом в условиях очень узких щелей. В результате анализа экспериментальных данных и численного моделирования этого процесса была установлена неприменимость локальной характеристики явления вязкости. Авторы книги³⁹ предложили заменить локальное соотношение (12.3.17) его нелокальным обобщением

$$p_{yx}(\vec{r}, t) = - \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \eta'(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \dot{\gamma}(\vec{r}', t'),$$

где η' – нелокальное ядро вязкости, а $\dot{\gamma}$ – скорость деформаций, определяемая соотношением

$$\dot{\gamma}(y, t) = \frac{\partial u_x(y, t)}{\partial y},$$

³⁸P.J.Cadusch et al. Journal of Physica A, 41, 035501 (2008).

³⁹Evans D.J. and Morriss G.P. Statistical Mechanics of Nonequilibrium Liquids. London: Academic, 1990.

при тех же условиях: жидкость течёт вдоль OX (параллельно стенкам), а градиент скорости перпендикулярен стенкам. Замена простой пропорциональности между мгновенными значениями p_{yx} и η двойной свёрткой (по координате и времени) означает не только зависимость тензора $p_{yx}(\vec{r}, t)$ от значений $\dot{\gamma}(\vec{r}', t')$ во всех точках пространственной области интегрирования, но и от значений этой величины в предшествующие времена, то есть от предьстории процесса (феномен памяти).

Наблюдаемые успехи компьютерного моделирования мезо- и наноструктур и происходящих в них процессов позволяют надеяться, что нелокально-эредитарный подход займёт должное место в основании физики сплошных сред.

12.4 Нелинейная динамика

12.4.1 Нелинейные колебания

Понятие аттрактора

Как известно, первой областью применения дифференциального исчисления оказалась механика. В настоящее время этот математический аппарат используется в исследованиях систем самой разной природы: физической, химической, биологической, экологической, экономической, социальной... Поскольку наиболее характерной чертой этих систем является их изменчивость во времени (динамика), их называют *динамическими системами*. Однако сам по себе этот термин мало бы чего стоил без должного математического оформления. Всё течёт, всё меняется, говорил великий философ, и это «всё» и всякая часть этого «всего» являются динамической системой в этом понимании, и нет ничего, что бы таковой не являлось. Мы будем подразумевать по динамическими *динамические в узком смысле системы*, необходимыми атрибутами которых является совокупность переменных (например, набор скалярных величин x_1, x_2, \dots, x_n , интерпретируемых как координаты представляющей точки или проекции вектора состояния в фазовом пространстве) и алгоритм, задающий их изменение со временем (например, – система дифференциальных уравнений⁴⁰).

Важнейшей особенностью таких моделей, неизменно привлекающих к ним внимание специалистов из разных областей, является свой-

⁴⁰Ввиду использования компьютерных методов моделирования непрерывные алгоритмы часто заменяются их дискретными аналогами. Пример этого мы видели в 9.4.3.

ство *нелинейности*. К их числу принадлежит и сама гамильтонова система канонических уравнений

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}(q, p)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}(q, p)}{\partial q}.$$

Из этой пары уравнений при минимальных ограничениях на функцию Гамильтона, обеспечивающих перестановочность операторов при вычислении частных производных по координате и импульсу (то есть консервативность системы),

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}(q, p)}{\partial q \partial p} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}(q, p)}{\partial p \partial q}$$

следует сохранение фазового объёма

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 0.$$

Простейший пример – колебания маятника, рассмотренные в **4.6.2**:

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega_0^2 \sin q. \quad (12.4.1)$$

Представляющая точка совершает циклическое движение по эллипсу, не изменяющему своих параметров. Если вместо точки поместить пятнышко, представляющее собой ансамбль близких по начальным условиям маятников, оно также будет кружить по слегка размазанному (из-за конечных размеров пятна) эллипсу. Так обстоит дело с консервативной системой.

Добавим теперь в правую часть последнего уравнения системы (12.4.1) диссипативный член $-\alpha p$,

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega_0^2 \sin q - \alpha p,$$

и ситуация изменится – точки сойдут с эллиптических траекторий, приближаясь к началу координат, а размеры самого пятна (при $\alpha > 0$) станут уменьшаться:

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = -\alpha.$$

В пределе $t \rightarrow \infty$ фазовое пятнышко соберётся в одну точку (начало координат), все маятники, составляющие статистический ансамбль остановятся (рис. 12.7). Такие точки или их множества в фазовом пространстве, притягивающие к себе фазовую жидкость, называются *аттракторами* (от. англ. *attract* – привлекать, притягивать). В данном случае мы имеем дело с аттрактором нулевой размерности.

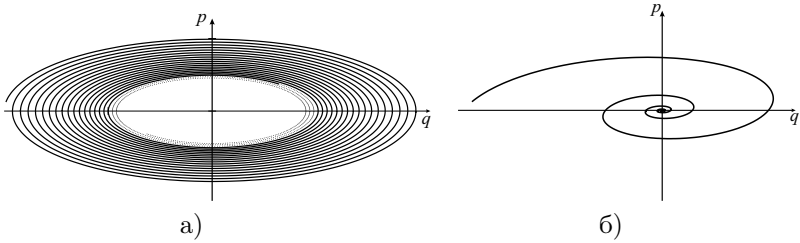


Рис. 12.7. Фазовый портрет осциллятора с трением: (а) малое трение, б) большое трение

Солитоны



Вернёмся к описанию движения фазовой точки математического маятника (см. 4.6.2).

Напомним, что в рассматриваемой задаче $p = \dot{q}$, решим уравнение движения точки по сепаратрисе

$$\dot{q} = \pm 2\omega_0 \cos(q/2),$$

с начальным условием $q(0) = 0$. Используя метод разделения переменных, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{2 \cos(q/2)} &= \pm \omega_0 dt, \\ \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{q}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| &= \pm \omega_0 t, \\ q(t) &= 4 \operatorname{arctg} e^{\pm \omega_0 t} - \pi. \end{aligned}$$

Заметим, что $q(t) \rightarrow \pm \pi$ при $t \rightarrow \infty$. Для обобщённого импульса получаем

$$p(t) = \dot{q} = \pm \frac{4\omega_0}{1 + e^{\pm 2\omega_0 t}} e^{\pm \omega_0 t} = \pm \frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}(\omega_0 t)}.$$

Вблизи сепаратрисы (E чуть меньше ω_0^2) $p(t)$ имеет вид последовательности импульсов чередующегося знака, разделённых временными промежутками продолжительностью π/ω_0 (рис. 4.18). Обозначив положения центральных точек этих импульсов на временной оси через t_n , $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, запишем решение в виде

$$q(t) = \sum_n 4 \operatorname{arctg} e^{\pm \omega_0 |t - t_n|}, \quad \dot{q} = \sum_n (-1)^n \frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}(\omega_0 |t - t_n|)}.$$

Частота $\omega(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow \omega_0^2$.

Добавим теперь к этому маятнику гармоническое возмущение с частотой ω_1 :

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} - \omega_0^2 \cos q + \varepsilon \omega_0^2 \cos(kq - \omega_1 t).$$

Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q = \varepsilon k \omega_0^2 \sin(kq - \omega_1 t).$$

Совершаемая этой силой работа изменяет энергию маятника за время Δt на величину

$$\Delta E = \varepsilon k \omega_0^2 \int_{\Delta t} \sin(kq - \omega_1 t) \dot{q} dt.$$

Возьмем значения q и \dot{q} под интегралом вблизи сепаратрисы в области n -го солитона:

$$q = 4 \arctg e^{\pm \omega_0 |t - t_n|}, \quad \dot{q} = \pm \frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}[\omega_0 |t - t_n|]}. \quad (12.4.2)$$

Так как \dot{q} экспоненциально быстро убывает при $|t - t_n| \rightarrow \infty$, то

$$\Delta E = (-1)^n 2\varepsilon k \omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kq - (\omega_1/\omega_0)\tau - \varphi_n)}{\operatorname{ch} \tau} d\tau,$$

где $\tau = \omega_0(t - t_n)$, а $\varphi_n = \omega_1 t_n$.

Положим, для простоты, $k = 1$. Из формулы (12.4.2) можно найти, что

$$\cos(q/2) = \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}, \quad \sin(q/2) = \frac{\operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau}.$$

С использованием этих формул уравнение для приращения энергии приводится к виду

$$\Delta E = 2(-1)^n \pi \varepsilon \omega_1^2 \frac{\exp(\pi \omega_1 / (2\omega_0))}{\operatorname{sh}(\pi \omega_1 / \omega_0)} \sin \varphi_n.$$

В работах по теории динамического хаоса эта величина интерпретируется как ширина *стохастического слоя*, в который размазывается сепаратриса под действием возмущения. Попав в этот слой, система ведет себя хаотически, проявляя локальную неустойчивость.

Колебания в системе хищники-жертвы

Поучительным примером применения динамических моделей за пределами собственно механики является экологическая модель В. Вольтерры «хищники и жертвы». Пусть в некоторой области (или, как говорят экологи, ареале обитания) имеется N_1 зайцев и N_2 лис, для которых они служат пищей. Могут ли лисы съесть всех зайцев? Для описания динамики популяций Вольтерра предложил нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{N}_1 = \varepsilon_1 N_1 - \gamma_2 N_1 N_2, \quad \dot{N}_2 = -\varepsilon_2 N_2 + \gamma_1 N_1 N_2.$$

Все коэффициенты здесь положительны. Интерпретация их очевидна: $\varepsilon_1 N_1$ определяет скорость размножения зайцев в отсутствие лис, $\varepsilon_2 N_2$ - скорость убывания популяции лис в отсутствие зайцев, нелинейные слагаемые представляют влияние на популяции «взаимодействия» особей разных видов.

В состоянии равновесия $\dot{N}_1^0 = 0$, $\dot{N}_2^0 = 0$, и

$$N_2^0 = \varepsilon_1 / \gamma_2, \quad N_1^0 = \varepsilon_2 / \gamma_1.$$

Пусть теперь имеет место отклонение численности популяций от их равновесных значений:

$$N_1(t) = N_1^0 + q_1(t), \quad N_2(t) = N_2^0 + q_2(t).$$

Подставляя эти выражения в уравнения и пренебрегая членами второго порядка малости (часто применяемый на практике метод линеаризации изначально нелинейной задачи), приходим к линейной системе уравнений первого порядка, аналогичных уравнениям Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -(\varepsilon_2 \gamma_2 / \gamma_1) q_2, \\ \dot{q}_2 = (\varepsilon_1 \gamma_1 / \gamma_2) q_1. \end{cases}$$

Система эта легко преобразуется к паре независимых уравнений второго порядка (типа уравнений Ньютона)

$$\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = 0,$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_2 = 0$$

для гармонических колебаний с одной и той же частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

Такие колебания действительно наблюдаются в природе.

Генератор Ван дер Поля

Как известно, наличие диссипативных сил в линейных колебательных системах приводит к затуханию колебаний (при малых потерях) или аperiodическому замедляющемуся движению (при больших потерях, когда система не успевает совершить и одного полного колебания, см. 1.5.2).

В отличие от линейных систем, в нелинейных системах могут возникать и поддерживаться колебания даже при наличии диссипации (автоколебания). Примером систем такого типа является генератор Ван-дер-Поля – RLC -контур, включающий в себя усилитель с нелинейной характеристикой $i(u) = (g_0 - g_2 u^2)u$ ($g_0, g_2 > 0$) (рис. 12.8). Качественно механизм возбуждения автоколебаний в этом генераторе может быть представлен следующим образом. Если небольшая энергия, вносимая в контур на его собственной частоте, превосходит энергию потерь, амплитуда колебаний нарастает, но с ростом напряжения u коэффициент усиления падает, что и приводит к установлению стационарных автоколебаний с постоянной амплитудой. Система уравнений Кирхгофа для данного контура имеет вид

$$L \frac{dI}{dt} + RI + u = M \frac{di(u)}{dt}, \quad i(u) = (g_0 - g_2 u^2)u, \quad (12.4.3)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{I}{C}.$$

Из этих уравнений выводится уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{u} - \omega_0^2 (Mg_0 - RC - 3Mg_2 u^2) \dot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad (12.4.4)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – собственная частота колебательного контура.

При малых колебаниях нелинейным членом можно пренебречь, и при $Mg_0 < RC$ мы видим уравнение линейного осциллятора с трением, фазовая точка которого двигается по эллиптической спирали к началу координат, являющемуся точкой устойчивого равновесия (аттрактором) (рис. 12.7). При $Mg_0 = RC$ (и отброшенном нелинейном члене) мы имеем дело с обычным гармоническим осциллятором, фазовый портрет которого – эллипс, а при $Mg_0 > RC$ вновь появляется спираль – на этот раз уже разворачивающаяся: представляющая точка отталкивается от начала координат (осциллятор с отрицательным

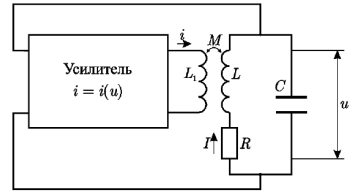


Рис. 12.8. Схема радиотехнического генератора автоколебаний

трением). Понятно, что тут необходимо позаботиться о возвращении в уравнение нелинейного члена, что будет сделано в **12.7.2**. А пока ограничимся следующим замечанием, касающимся природы автоколебательного режима.

Случайно возникшие в колебательном контуре малые собственные колебания через взаимную индукцию управляют усилителем. При положительной обратной связи (при $M > 0$) в контур вносится определённая энергия. Если эта энергия больше потерь энергии в контуре, то амплитуда колебаний в контуре нарастает. Вследствие нелинейности $i(u)$ нарастание амплитуды колебаний сокращается, поступающая в контур энергия уменьшается и при некоторой амплитуде колебаний становится равной потерям энергии. В результате устанавливается режим стационарных автоколебаний, при котором внешний источник компенсирует все потери энергии. Таким образом, автоколебательные системы должны быть принципиально нелинейными – именно нелинейность не позволяет колебаниям безгранично нарастать, управляя поступлением и тратами энергии источника.

12.4.2 Регулярные аттракторы

Анализ системы на устойчивость начнём с одномерной версии, описываемой уравнением

$$\frac{d\dot{X}}{dt} = f(X). \quad (12.4.5)$$

Состояние равновесия системы \dot{X} определяется условием

$$\frac{d\dot{X}}{dt} = f(\dot{X}) = 0. \quad (12.4.6)$$

Приложив некоторую силу, слегка сместим систему из положения равновесия:

$$\dot{X} \mapsto X = \dot{X} + x_0. \quad (12.4.7)$$

Из (12.4.5)-(12.4.7) следует, что дальнейшее поведение этого отклонения будет описываться уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(\dot{X} + x).$$

Полагая x малой величиной, ограничимся в разложении правой части по x членом первого порядка (член нулевого порядка исчезает благодаря (12.4.6)):

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \quad \lambda = \left(\frac{df}{dX} \right)_{\dot{X}}.$$

Решение этого уравнения

$$x = x_0 e^{\lambda t}$$

показывает, что при положительном параметре (*показателе Ляпунова*) λ малое отклонение x будет экспоненциально возрастать со временем (рис. 12.9 а), такую точку называют *узлом*), тогда как при отрицательном его значении – возвращаться в состояние равновесия (рис. 12.9 б), такую точку называют *фокусом*). Правда, чтобы окончательно вернуться в такое состояние и успокоиться в нём, система должна освободиться от приобретённого избытка энергии, то есть должна быть *диссипативной*.

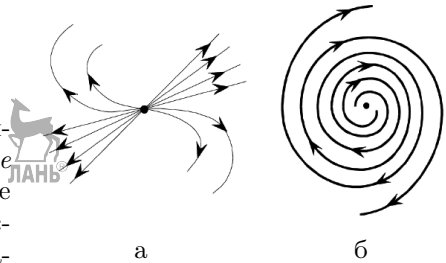


Рис. 12.9. Фазовые траектории в окрестности точек равновесия одномерной системы

Пусть теперь динамическая система обладает двумя степенями свободы:

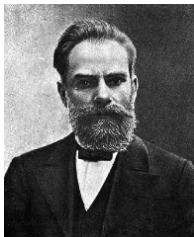
$$\frac{dX_1}{dt} = f_1(X_1, X_2),$$

$$\frac{dX_2}{dt} = f_2(X_1, X_2).$$

Сообщая малое возмущение (x_1, x_2) этой системе, находившейся до этого в состоянии равновесия $(\overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2)$, и, действуя аналогичным образом, получим

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad (12.4.8)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \quad (12.4.9)$$



Ляпунов Александр Михайлович (1857–1918) – русский математик и механик, академик Петербургской Академии наук с 1901 г., член-корреспондент Парижской академии наук, член Национальной академии деи Линчеи (Италия) и ряда других академий наук и научных обществ. Ляпунов создал теорию устойчивости равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров, внёс большой вклад в области дифференциальных уравнений, гидродинамики, теории вероятностей.

где

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{\overset{\circ}{X}_1 \overset{\circ}{X}_2}.$$

Применяя метод характеристических уравнений, то есть подставляя сюда

$$x_1 = A_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = A_2 e^{\lambda t},$$

приходим к однородной алгебраической системе

$$(a_{11} - \lambda)A_1 + a_{12}A_2 = 0,$$

$$a_{21}A_1 + (a_{22} - \lambda)A_2 = 0,$$

имеющей нетривиальное решение при условии, что её определитель равен нулю:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Введя обозначения $T = a_{11} + a_{22}$, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, запишем общее решение системы (12.4.8)-(12.4.9):

$$x_1(t) = A_1^+ e^{\lambda_+ t} + A_1^- e^{\lambda_- t},$$

$$x_2(t) = A_2^+ e^{\lambda_+ t} + A_2^- e^{\lambda_- t},$$

где $\lambda_{\pm} = (1/2)(T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta})$ – *собственные числа* (или *характеристические показатели*) системы.

Возможны следующие ситуации.

1. Собственные числа различны и вещественны. Если при этом $\lambda_+ < 0$ и $\lambda_- < 0$, внесённое в систему возмущение убывает со временем, исходное состояние равновесия *устойчиво*. Если $\lambda_+ > 0$ и $\lambda_- > 0$, малейшее возмущение заставляет систему покинуть это состояние: оно *неустойчиво*. Оба этих типа точек фазового пространства системы называются *узлами*. Если же вещественные показатели λ_+ и λ_- имеют разные знаки, внесённое в систему возмущение может или сразу начать возрастать, или спустя некоторое время убывания. В обоих случаях она в конечном итоге покинет эту точку, называемую *седлом* и принадлежащую к числу неустойчивых.

2. Собственные числа комплексно сопряжённые: $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$. Решение системы (12.4.8)-(12.4.9) в этом случае имеет вид

$$x_1(t) = A_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + B_1 e^{\alpha t} \sin \beta t = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi_1),$$

$$x_2(t) = A_2 e^{\alpha t} \cos \beta t + B_2 e^{\alpha t} \sin \beta t = C_2 e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi_2),$$

соответствующий спиральным кривым. При $\alpha < 0$ состояние равновесия устойчиво, при $\alpha > 0$ неустойчиво. Мнимая часть β характеризует колебания координат, соответствующие вращению фазовой точки вокруг положения равновесия; при $\alpha > 0$ амплитуды этих колебаний растут (спираль развёртывается, представляющая точка движется по ней наружу), при $\alpha < 0$ спираль свёртывается (точка движется внутрь). Такие узлы называются *фокусами*. Притягивающие траектории узлы и фокусы называются *регулярными аттракторами* (от англ. *attract* – притягивать). Основные режимы поведения нелинейной системы с двумя степенями свободы показаны на схеме, приведённой на таблице 12.3.

Свойством притяжения траекторий могут обладать не только точки. Рассмотрим поведение динамической системы, описываемой уравнениями

$$\dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2).$$

В полярных координатах $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg(y/x)$ эта система описывается уравнениями

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\varphi} = 1.$$

Заметим, что и при $r > 1$, и при $r < 1$ точка приближается к окружности $r = 1$, не переходя её (при $r \rightarrow 1$ радиальная составляющая скорости стремится к нулю).

Из второго уравнения сразу следует

$$\varphi(t) = \varphi_0 + t. \quad (12.4.10)$$

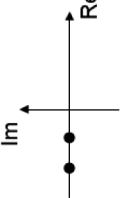
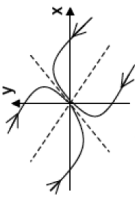
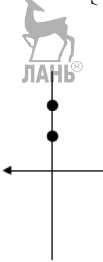

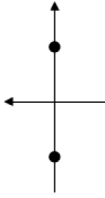
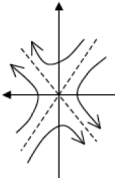
Первое же разделением переменных приводится к виду

$$\frac{dr}{r(1 - r^2)} = \pm dt, \quad (12.4.11)$$

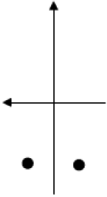

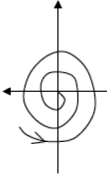
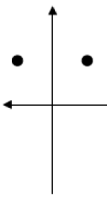

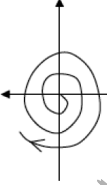
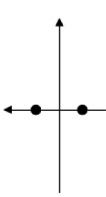
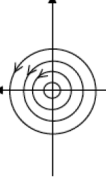
где dr и dt считаются положительными, знак плюс берётся при $r < 1$, а минус – при $r > 1$. Интегрируя уравнение (12.4.11) с использованием разложения

$$\frac{1}{r(1 - r^2)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2(1 + r)} + \frac{1}{2(1 - r)},$$

Таблица 12.3. Динамические режимы нелинейной системы с двумя степенями свободы

Собственные значения	T	Δ	$T^2 - 4\Delta$	Стационарное состояние	Фазовая картина
1	2	3	4	5	6
	$T < 0$	$\Delta > 0$	$T^2 - 4\Delta > 0$	устойчивый узел	
	$T > 0$	$\Delta > 0$	$T^2 - 4\Delta > 0$	неустойчивый узел	
	$T > 0$ или $T < 0$	$\Delta < 0$	$T^2 - 4\Delta > 0$	точка перевала (неустойчивый)	

Динамические режимы нелинейной системы с двумя степенями свободы
(продолжение)

1	2	3	4	5	6
	$T < 0$	$\Delta > 0$		$T^2 - 4\Delta < 0$	
	$T > 0$	$\Delta > 0$	$T^2 - 4\Delta < 0$		
	$T = 0$	$\Delta > 0$	$T^2 - 4\Delta < 0$	центр	

разрешая полученное алгебраическое уравнение относительно r и учитывая (12.4.10), находим уравнение траектории, справедливое для обеих (внутренней и внешней) областей фазовой плоскости:

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + (r_0^{-2} - 1)e^{-2(\varphi - \varphi_0)}}}. \quad (12.4.12)$$

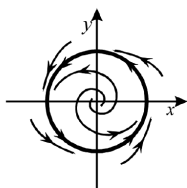


Рис. 12.10. Движение фазовой точки системы по траекториям семейства (12.4.12) в зависимости от начального положения

Графики такой траектории приведены на рис. 12.10. Из рисунка видно, что если в начальный момент представляющая систему точка лежит на окружности единичного радиуса, то на ней и будет продолжать оставаться, выполняя равномерное круговое движение. Если же в начальный момент времени она находится внутри или вне круга единичного радиуса, то с течением времени точка будет приближаться («притягиваться») к единичной окружности. Окружность эта тоже является аттрактором, называемым *предельным устойчивым циклом*.

Эти два типа аттракторов (точечные и предельные циклы) оказываются единственно возможными в системах с размерностью 2, динамика которых представляется потоками на фазовой плоскости. С выходом в пространства трёх и большего числа измерений появляются и другие типы аттракторов. Рассмотрим важный пример трёхмерной системы, одно из решений которой имеет

$$x^0 = (2 + \cos \nu t) \cos \omega t, \quad y^0 = (2 + \cos \nu t) \sin \omega t, \quad z^0 = \sin \nu t, \quad (12.4.13)$$

а остальные стремятся к нему при $t \rightarrow \infty$. Фазовая траектория, соответствующая (12.4.13), лежит на торе (тороидальной поверхности), показанном на рис. 12.11. Сечение тора плоскостью $z = 0$ (*сечение Пуанкаре*) представляет собой две concentric окружности (сплошные линии на рис. 12.12). Штриховой линией отмечено геометрическое место центров окружностей единичного радиуса, образующихся в сечениях тора плоскостями, проходящими через ось z (рис. 12.13).

В случае решения (12.4.12) изображающая точка при перемещении по траектории в трёхмерном фазовом пространстве совершает сложное движение, в котором вращение вокруг оси z (угловая скорость ω) сочетается с вращением в поперечном направлении (угловая скорость ν). Если ω и ν находятся в рациональном отношении (соизмеримы), решение (12.4.12) – периодическое, в противном случае –

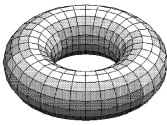


Рис. 12.11. Тор в фазовом пространстве

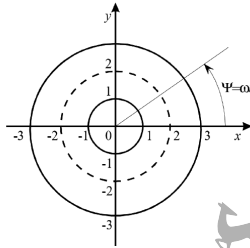


Рис. 12.12. Тор. Сечение горизонтальной плоскостью

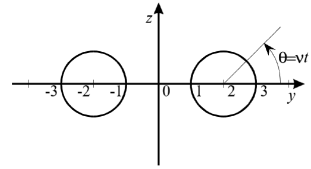


Рис. 12.13. Тор. Сечение вертикальной плоскостью

почти периодическое, соответствующее квазипериодическому движению рассматриваемой трёхмерной системы. В первом случае фазовая траектория, отвечающая решению (12.4.12), замкнута и представляет собой лежащий на торе устойчивый предельный цикл, во втором – мы имеем дело с незамкнутой траекторией, которая с течением времени покрывает собой всю двумерную тороидальную поверхность. Остальные фазовые траектории при $t \rightarrow \infty$ стягиваются (как изнутри, так и снаружи) к тору, который при несоизмеримых ω и ν сам по себе является аттрактором. Размерность такого притягивающего образования равна двум в отличие от устойчивого предельного цикла (одномерный аттрактор) и асимптотически устойчивого состояния равновесия (аттрактор нулевой размерности). В многомерном ($n \geq 3$) случае фазовые портреты динамических систем могут содержать аттракторы в виде торов размерности до $n - 1$.

Перечисленные выше аттракторы представляют собой довольно простые в геометрическом отношении множества (точка, кривая, поверхность), соответствующие и простым *установившимся* динамическим режимам (равновесию, периодическим колебаниям, квазипериодическим колебаниям). Такие множества называют *регулярными аттракторами*.

Закончим этот раздел завершением обсуждения автоколебательного режима, представив уравнение Ван дер Поля (12.4.4) в безразмерных переменных:

$$\ddot{x} - (\beta - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (12.4.14)$$

Для анализа этого процесса воспользуемся *методом медленно меняющихся амплитуд*, разработанный его же автором. Будем искать ре-

шение в виде

$$x(t) = A(t)e^{it} + A^*(t)e^{-it},$$

наложив на A и A^* дополнительное условие

$$\dot{A}(t)e^{it} + \dot{A}^*(t)e^{-it} = 0.$$

Используя последнее при вычислении первой и второй производных от $x(t)$ и подставляя их в уравнение Ван дер Поля (12.4.14), после несложных преобразований находим:

$$2i\dot{A}e^{it} - (\beta - 2|A|^2 - A^2e^{2it} + (A^*)^2e^{-2it})(iAe^{it} - iA^*e^{-it}) = 0.$$

Раскрыв в этом уравнении скобки, сократив на e^{it} и усреднив его по периоду $T = 2\pi$, придём к укороченному уравнению Ван дер Поля

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(\beta - |A|^2)A.$$

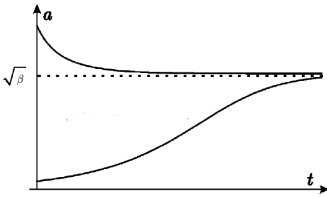


Рис. 12.14. Поведение решения (12.4.16) со временем при разных начальных условиях

Его решение может быть записано в комплексной форме Эйлера $A(t) = a(t)e^{i\varphi(t)}$ с вещественными амплитудой и фазой, удовлетворяющих соответственно уравнениям

$$\dot{a} - \frac{1}{2}(\beta - a^2)a, \quad \dot{\varphi} = 0. \quad (12.4.15)$$

Умножив (12.4.15) на a , проинтегрируем полученное уравнение:

$$a^2(t) = \frac{\beta}{1 + (\beta/(a_0^2 - 1) \exp(-\beta t))}. \quad (12.4.16)$$

При $t \rightarrow \infty$ амплитуда стремится к постоянному пределу $\sqrt{\beta}$ не пересекая его, и предел этот не зависит от начального условия (рис. 12.14). На комплексной фазовой плоскости этот процесс изображается спиральными кривыми, наматывающимися на окружность радиусом $\sqrt{\beta}$ с внешней или внутренней стороны (рис. 12.15).

Численные исследования показывают, что фазовое пространство динамической системы Ван-дер-Поля имеет единственную особую точку $x = \dot{x} = 0$, которая является устойчивым узлом при $\beta < -2$, устойчивым фокусом при $0 < \beta < 2$ и неустойчивым узлом при $\beta > 2$.

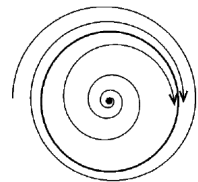


Рис. 12.15. Соответствующие движения фазовых точек

При условии самовозбуждения ($\beta > 0$) на фазовой плоскости имеется предельный цикл, соответствующий режиму периодических автоколебаний.

12.4.3 Странные аттракторы и бифуркации

Рассмотрим теперь следующую по уровню сложности, но всё ещё довольно простую задачу – задачу Хенона-Хейлиса (1963), которая, по словам Балеску⁴¹, весьма ярко демонстрирует фантастическую сложность поведения даже тривиальных на первый взгляд систем. Это задача о плоском движении частицы в потенциальном поле $U(q_1, q_2)$, моделирующая поведение звезды в усреднённом поле галактики. Учёт закона сохранения энергии

$$\mathcal{H}(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + U(q_1, q_2) = E,$$

сокращает до трёх число независимых фазовых переменных, в качестве которых может быть выбрана любая тройка из четвёрки (q_1, q_2, p_1, p_2) .

Предположим, компьютер решает уравнения движения этой частицы при заданном потенциале и заданных начальных условиях и вычерчивает её траекторию в 3-мерном пространстве (q_1, q_2, p_2) . Чтобы лучше понять топографию траекторий, о которых пойдёт речь, имея в своём распоряжении лишь эту плоскую страницу, мы вначале посмотрим на эти фазовые траектории под углом (в диметрической проекции, верхний ряд), а затем отметим точки пересечения ими плоскости (p_2, q_2) при выходе в положительное (относительно p_1) полупространство (нижний ряд). При периодическом движении мы видим

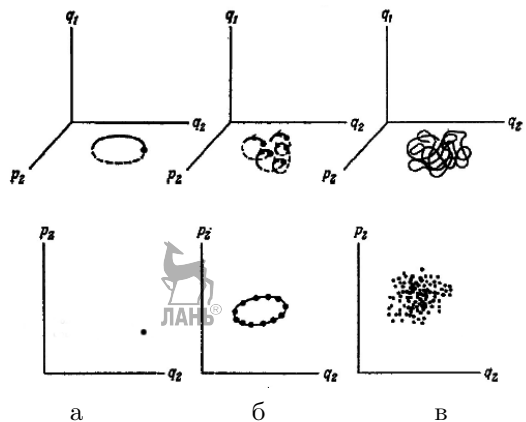


Рис. 12.16. Различные типы траекторий: периодическая (а), условно-периодическая (б), эргодическая (в)

⁴¹Р. Балеску. Равновесная и неравновесная статистическая механика, т.2. – М.: Мир, 1978. – С.365.

в этой плоскости одну такую точку, через которую через равные промежутки проходит представляющая точка системы (рис. 12.16а). Если движение происходит по поверхности тора, последовательные точки пересечения плоскости не будут совпадать, но будут ложиться на замкнутую кривую – линию пересечения тора с плоскостью (p_2, q_2) (рис. 12.16б). В случае несоизмеримых частот несовпадающих точек пересечения будет бесконечно много. Такое движение называется *условно-периодическим*. Если же траектория не ограничена тором, она хаотически блуждает по плоскости, плотно покрывая разрешённую ей область конечной площади. Такие траектории называются *эргодическими*, след каждой из них представляется множеством рассеянных по этой области точек (рис. 12.16в).

На рис. 12.17 представлены результаты численного моделирования поведения системы с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + q_2^2 q_1 - \frac{1}{3}q_1^3,$$

выполненные Хеноном и Хейлесом (1964). Из представленных граф-

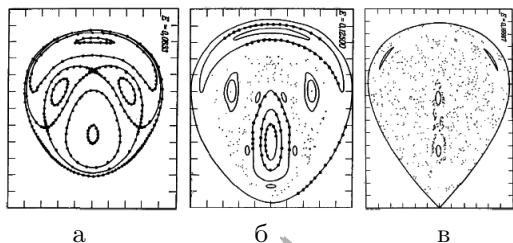


Рис. 12.17. Фазовые траектории частицы с гамильтонианом

ков видно, что при небольшой энергии системы практически всё фазовое пространство занято областями устойчивости – торами, по замкнутым линиям на поверхностях которых и располагаются точки выхода в положительное полупространство (а).

При повышении энергии (что фактически означает возможность больших возмущений) большая часть фазового пространства занята эргодическими траекториями, остаются лишь небольшие островки устойчивости (б). На последнем рисунке (в), где энергия ещё выше, островки устойчивости практически исчезли и почти всё фазовое пространство занято эргодической траекторией, проходящей по всему доступному фазовому пространству.

В системах с числом независимых переменных $n \geq 3$ возможны и более сложные формы движений, траектории которых напоминают запутанный клубок ниток соответствующие которым множества фазовых точек называются *странными аттракторами*. Подобно обычному, странный аттрактор является пределом траекторий изображаю-

щих точек, к которому стремятся исходные режимы. Однако такой аттрактор обладает существенными особенностями. Во-первых, его траектория *непериодическая* (она не замыкается). Если она хотя бы один раз пересеклась сама с собой, то начиная с точки пересечения в силу совпадения начальных условий представляющая точка пошла бы снова по этой кривой и повторяла бы это снова и снова – возник бы предельный устойчивый цикл.

Во-вторых, представить себе сложное и запутанное поведение траекторий внутри ограниченного объёма, куда траектории только входят, можно, если предположить, что все траектории в нём *неустойчивы*: две сколь угодно близкие представляющие точки в дальнейшем далеко разойдутся, а в силу ограниченности области, занятой аттрактором, незамкнутая траектория может подойти к самой себе сколь угодно близко. Возникшее (внесённое) в момент времени t_0 малое возмущение такой траектории ε_0 развивается со временем по экспоненциальному закону $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{\lambda(t-t_0)}$. Показатель Ляпунова является важной характеристикой хаотического движения. Если установлено, что в данном режиме $\lambda > 0$, то следствием будут отсутствие периодичности в изменении любой из координат, сплошной спектр мощности в некотором интервале частот и спадающая во времени автокорреляционная функция.

Простейшим примером такого движения является одномерное отображение⁴², называемое *сдвигом Бернулли*⁴³:

$$x_{n+1} = \sigma(x_n) = 2x_n \pmod{1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Графически это отображение представлено на рис. 12.18. Важнейшими его свойствами, отмечает Шустер⁴⁴, являются высокая чувствительность к начальным условиям, псевдослучайность и демонстрация перехода от детерминированного начального состояния к непредсказуемому; он видит в этом самую суть зарождения хаотического движения в детерминированных системах (мы уже разбирали пример такого рода в 6.1.5).

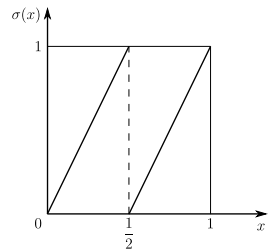


Рис. 12.18. Отображение Бернулли

⁴²Последовательные отображения можно считать моделями движения систем с дискретизованным временем.

⁴³Прообраз современных программ генерирования последовательностей *псевдослучайных* (то есть удовлетворяющих тестам на случайность и независимость) чисел, широко используемых в современной вычислительной практике (метод Монте Карло).

⁴⁴Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. – М.: Изд-во Мир, 1988. – С.29.

Третьим признаком странного аттрактора является дробная размерность составляющего его множества. Дело в том, что объём странного аттрактора в своём пространстве состояний всегда равен нулю («объём» непрерывной линии любой длины равен нулю). Он однако может быть ненулевым в пространстве другой – меньшей размерности. Чтобы построить такое пространство, поступим следующим образом. Разобьём n -мерное пространство на кубической формы элементы с длиной ребра ε и объёмом ε^n . Пусть $N_D(\varepsilon)$ – минимальное число таких элементов, которые в совокупности полностью покрывают аттрактор. Определим положительное число D асимптотическим соотношением

$$N_D(\varepsilon) \sim \frac{A}{\varepsilon^D}, \quad \varepsilon \rightarrow \infty,$$

где A – положительная постоянная. Очевидно, если мы проделаем это разбиение с однородными трёхмерным, двумерным и одномерным множествами, получим соответственно

$$N_3(\varepsilon) \sim \frac{A}{\varepsilon^3} \quad (\text{куб}),$$

$$N_2(\varepsilon) \sim \frac{A}{\varepsilon^2} \quad (\text{квадрат}),$$

$$N_1(\varepsilon) \sim \frac{A}{\varepsilon^1} \quad (\text{отрезок}).$$

Эти три соотношения дают основание назвать число D , определяемое для множества точек заданного аттрактора, его размерностью. Очевидно, D не может превышать полную размерность n пространства состояний, но может быть меньше его, в частности, может оказаться дробной. Такую размерность называют *фрактальной*, а само множество – *фракталом*. Мы вернёмся ещё к фракталам, а сейчас мы рассмотрим ещё одно важное понятие нелинейной динамики – *бифуркации*.

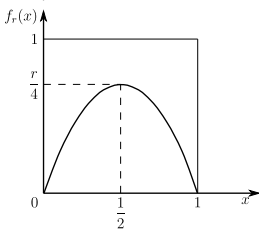


Рис. 12.19. Отображение Ферхюльста



Рассмотрим отображение

$$x_n \mapsto x_{n+1} = f_r(x_n) \equiv rx_n(1 - x_n), \quad (12.4.17)$$

введённое П.Ферхюльстом (1845) для описания динамики популяции в замкнутой среде. Относительная численность особей x_{n+1} в $n+1$ -й год пропорциональна численности в предыдущий год x_n и свободной части жизненного пространства, которая пропорциональна $1 - x_n$. Обозначив общий коэффициент пропорциональности

через r , мы и получаем формулу (12.4.17). График этого отображения представлен на рис. 12.19. Казалось бы, второй сомножитель должен притормозить развитие популяции, стабилизовав её на некотором среднем уровне, однако процесс этот демонстрирует более сложное поведение, становясь в конце концов хаотическим. Это видно на рис. 12.20, где приведены результаты итераций (точки накопления при $n > 300$) и показатель Ляпунова в зависимости от r . В области $r < r_1$ мы видим одно устойчивое состояние движения (показатель Ляпунова отрицателен), это – область периодического режима. При $r = r_1$ образуется два таких состояния – происходит *бифуркация удвоения*. В точке r_2 процесс удвоения повторяется с каждой из ветвей (напомним, всё это относится к системе с фиксированным начальным условием!), и ещё одно повторение мы видим за значением r_2 , но при $r = r_\infty < 4$ возникает бесконечное множество таких точек, в большинстве случаев характеризующихся положительными показателями Ляпунова, свидетельствующими о хаотическом поведении системы. Таким образом, при $r < r_1$ мы наблюдаем *периодический режим* движения, при $r_1 < r < r_\infty$ *бифуркационный режим*, а при $r > r_\infty$ – *хаотический*. Фейгенбаум показал, что такое поведение не связано со своеобразием отображения (12.4.10) (называемого *логистическим*), а присуще всем разностным уравнениям первого порядка $x_{n+1} = f(x_n)$, в которых функция $f(x)$, $x \in [0, 1]$ имеет единственный максимум.

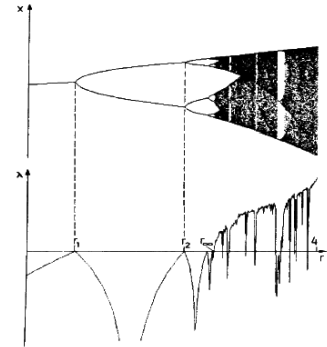
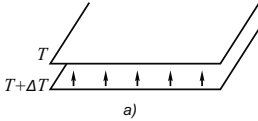


Рис. 12.20. Хаотическое поведение при большом числе итераций. Бифуркации удвоения

12.4.4 Эксперимент Бенара и модель Лоренца

Обратимся теперь к известному эксперименту Бенара. Объектом этого эксперимента является слой вязкой жидкости толщиной h , заключённый между плоским горячим дном и плоской холодной крышкой (рис. 12.21a). Подогретая горячим дном жидкость стремится подняться вверх, а охлаждённая крышкой – опуститься вниз. Вязкость (внутреннее трение) препятствует такому движению, и при малых перепадах температуры дело ограничивается теплопереносом в почти неподвижной среде. Однако с увеличением градиента темпера-

туры это состояние становится неустойчивым, появляются стационарные конвективные потоки циркуляционного типа (*конвективные валлы*, рис. 12.21б), сменяющиеся при дальнейшем возрастании температурного градиента хаотическим движением.



Запишем основные уравнения этого процесса. Это уравнение непрерывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

уравнение Навье-Стокса

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \vec{v} \quad (12.4.18)$$

и уравнение теплопроводности

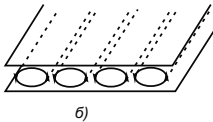


Рис. 12.21. Течение Бенара

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \Delta T \quad (12.4.19)$$

с граничными условиями для $T(x, y, z, t)$:

$$T(x, y, 0, t) = T_0 + \Delta T, \quad T(x, y, h, t) = T_0. \quad (12.4.20)$$

Предположим, что система эта бесконечна вдоль оси y и все её характеристики не зависят от переменной y , а от ΔT зависит лишь один параметр – плотность, и зависит (по Буссинеску) линейным образом:

$$\rho(\Delta T) = (1 - \alpha \Delta T) \rho_0.$$

Уравнение (12.4.19) сократится до

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

и будет автоматически выполняться, если ввести потенциал скоростей $\psi(x, z, t)$ такой, что

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Представим, далее, неизвестный профиль температуры $T(x, z, t)$ в виде суммы определяемой начальными условиями линейной части $T_1(z) = T_0 + (1 - z/h)\Delta T$ и некоторого добавка к ней $\theta(x, z, t)$:

$$T(x, z, t) = T_1(z) + \theta(x, z, t).$$

Приняв ещё несколько упрощений, Лоренц выразил решение рассматриваемой системы через три функции $X(\tau)$, $Y(\tau)$, $Z(\tau)$ безразмерного времени $\tau = (\pi/h)^2(1+a^2)kt$, связанные системой уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= p(Y - X), \\ \dot{Y} &= X(r - Z) - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ,\end{aligned}$$

где b , p – положительные параметры, характеризующие состояние системы, а $r \propto \Delta T$ – внешний (тоже положительный) управляющий параметр. Переменная X пропорциональна скорости циркулирующей жидкости, Y характеризует разность температур между восходящими и нисходящими потоками жидкости, Z пропорциональна отклонению вертикального профиля температуры от равновесного значения.

Дивергенция скорости в фазовом пространстве отрицательна,

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -p - 1 - b < 0,$$

что свидетельствует о повсеместном сжатии фазового объёма: система Бенара-Лоренца диссипативна.

12.4.5 Неустойчивость Рэля-Тейлора

Эта неустойчивость проявляется в росте изначально малых отклонений давления, плотности и скорости от равновесных значений в газообразной или жидкой среде с неоднородным распределением плотности, находящейся в гравитационном поле или движущейся с ускорением. Первое исследование характера равновесия вещества с неоднородным распределением плотности в гравитационном поле было выполнено в 1900 г. Дж. Рэлеем, а неустойчивость равновесия подобной среды, возникающая при её ускорении, была изучена в 1950 г. Дж. Тейлором. Неустойчивость Рэля-Тэйлора играет важную роль в ряде астрофизических явлений. В частности, она возникает, по-видимому, на адиабатической стадии расширения остатков вспышек сверхновых. Действие этой неустойчивости способствует образованию крупных газовой-пылевых комплексов в нашей и других галактиках, которые можно рассматривать как конденсацию вещества в гравитационном поле звёзд.

Самый простой вид неустойчивости Рэля-Тэйлора проявляется в равновесии двух слоев жидкости (или газа) в однородном поле тяжести, и более плотный слой лежит на менее плотном. Если в начальный момент времени поверхность раздела между такими слоями имеет

плоскую форму, то любое случайное изменение формы поверхности раздела будет нарастать (расчёт показывает, что по экспоненте $e^{\lambda t}$) с течением времени: капельки тяжёлой жидкости (жидкие частицы) будут тонуть в лёгкой жидкости, вытесняя её в сторону поверхности и уменьшая тем самым потенциальную энергию системы. Последняя достигнет минимума после полной перестановки слоёв, когда система вновь успокоится уже в состоянии устойчивого равновесия.

Интерес к этому процессу связан с поисками понятного механизма смены ламинарного течения жидкости турбулентным. В 1944 г. Ландау опубликовал статью⁴⁵, в которой предположил, что, когда под действием некоторой внешней силы жидкость приходит в движение, возбуждается определённое число мод (гармонических колебаний с определёнными частотами). Если не возбуждается ни одной моды, мы наблюдаем установившееся ламинарное течение. Если возбуждается одна мода, мы видим гармонические колебания жидкости. При возбуждении нескольких мод движение жидкости становится нерегулярным, а возбуждение множества мод превращает это движение в турбулентное. Позднее вычисления Ландау были подтверждены и обобщены Хопфом.

«Теория Ландау-Хопфа, – пишет в своей книге Рюэль⁴⁶, – на первый взгляд даёт удовлетворительное описание *возникновения турбулентности*» – того, как жидкость становится турбулентной при увеличении силы, приложенной к ней извне. И всё же, читая объяснение Ландау, я мгновенно испытал неудовлетворённость...

Написание статьи под заголовком «О природе турбулентности было рискованным начинанием, которое я предпринял вместе с Флорисом Такенсом, голландским математиком... В своей работе мы ...предложили нечто другое, что содержало странные аттракторы. Дело в том, что, когда жидкость постепенно возбуждается под действием возрастающих внешних сил, приложенных извне, принятая теория предсказывает постепенное увеличение числа независимых частот, присутствующих в жидкости. Предсказание же странного аттрактора выглядит совершенно иначе: должен возникать континуум частот. На самом деле, разницу можно установить, проведя частотный анализ какого-нибудь сигнала, созданного умеренно возбуждённой жидкостью. Численное изучение провёл Пол Мартин в Гарварде. Кроме того, Джерри Голлаб и Гарри Суинни в Сити Колледж, Нью-Йорк, поставили эксперимент. В обоих случаях полученные результаты говорили скорее в

⁴⁵ Л.Д.Ландау. К проблеме турбулентности. ДАН СССР, 1944, т.44. – С.339-342.

⁴⁶ Д. Рюэль. Случайность и хаос. – М.-Ижевск: РХД, 2001.

пользу картины возникновения турбулентности, описанной Рюэлем-Такенсом, нежели Ландау-Хопфом».

Занимаясь проблемой возникновения турбулентности, Суинни и Голлаб (1978) экспериментально исследовали неустойчивость вязкой жидкости между двумя соосными цилиндрическими поверхностями: неподвижной внешней и вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω внутренней⁴⁷. Пока эта скорость меньше критической, вращение (момент импульса относительно оси) распространяется по жидкости от внутреннего цилиндра радиусом в жидкость посредством вязкости и вполне описывается уравнением Навье-Стокса. Однако по превышении этого значения состояние жидкости становится неустойчивым (см. 9.4.3), появляются конвективные кольцевые вихри, которые при дальнейшем повышении входят в режим периодических колебаний, и после появления двух бифуркаций превращаются в хаотическое движение, напоминающее турбулентное поведение жидкости. Авторы осторожно заключают: «Возможно, эти и другие новые теоретические и экспериментальные средства позволят в конце концов получить качественное объяснение рождению хаотических потоков в жидкости».

12.4.6 Нелинейная диффузия

Уравнение Бюргера



Из-за того, что в уравнении Навье-Стокса соединяются два особых качества – нелинейность и нелокальность, гидродинамика по сей день остаётся наиболее сложной в математическом отношении наукой. Именно этим обусловлен интерес к различного рода моделям, освобождённым от некоторых, усложняющих решение свойств. К их числу относится и *уравнение Бюргера*, представляющее собой уравнение Навье-Стокса с «выключенным» градиентом давления, то есть с выключенным источником нелокальности. Выключение нелокальности позволяет лучше понять её роль в гидродинамических процессах. Мы ограничимся рассмотрением одномерной версии уравнения Бюргера

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Интересным свойством нелинейного уравнения Бюргера является его простая связь с линейным уравнением диффузии. Эта связь, называ-

⁴⁷H.L.Swinney, J.P.Gollab. The transition to turbulence. Physics Today, August 1978, 41-49.

емая преобразованием Коула-Хопфа, выражается соотношением

$$v(x, t) = -2\nu \frac{\partial \ln f(x, t)}{\partial x},$$

где $f(x, t)$ – решение диффузионного уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Эта связь, среди всего прочего, свидетельствует о том, что причиной возникновения хаотичности при переходе от ламинарного течения к турбулентному является именно нелокальность: решения диффузионного уравнения (то есть уравнения Навье-Стокса с выключенной нелокальностью) не содержат никаких признаков нерегулярности, ровное плавное течение.



Диффузия частиц в турбулентном потоке

Перемещение частиц примеси в потоке жидкости складывается из двух процессов: молекулярно-кинетической диффузии относительно жидкости и конвекции – движением вместе с жидкостью. Если же само движение жидкости является турбулентным, конвективное движение примеси тоже принимает диффузионный характер, правда с другим, гораздо большим по величине коэффициентом диффузии, да и сам процесс такой турбулентной диффузии приобретает новые качественные особенности. Молекулярной же составляющей диффузионного процесса в таких ситуациях обычно пренебрегают.

Важнейшими особенностями процесса переноса частиц примеси (маркеров) турбулентным потоком являются нелокальность и нелинейность. Физической причиной этих особенностей является то, что случайные траектории частиц в такой среде не являются ни взаимно-независимыми, ни марковскими. Это хорошо продемонстрировано в давней работе Робертса⁴⁸. Вот, вкратце, её основные положения.

Пусть $G(\vec{r}, t | \vec{r}_0, t_0) d\vec{r}$ – вероятность того, что частица жидкости (или маркер), находившаяся в момент времени t_0 в точке \vec{r}_0 , в более поздний момент времени t окажется в элементарном объёме $d\vec{r}$, окружающем точку \vec{r} . Пусть, далее, $W(\vec{r}, \vec{v}, t | \vec{r}_0, t_0) d\vec{r} d\vec{v}$ есть вероятность того, что та же частица не только окажется к моменту t в элементе

⁴⁸P.H.Roberts. Analytical Theory of Turbulent Diffusion. New York University, Res. Rep. No. HSN-2, June 1960.

$d\vec{r}$ пространства, но её скорость будет принадлежать элементу $d\vec{v}$ пространства скоростей. Эта вероятность определяет вектор плотности соответствующего тока

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \int \vec{v} W(\vec{r}, \vec{v}, t | \vec{r}_0, t_0) d\vec{v},$$

так что уравнения баланса условной вероятности запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} G(\vec{r}, t | \vec{r}_0, t_0) + \text{div} \int \vec{v} W(\vec{r}, \vec{v}, t | \vec{r}_0, t_0) d\vec{v} = 0.$$

Считая случайное поле скоростей в среднем однородным и изотропным ($\langle \vec{v}(\vec{r}, t) \rangle = 0$) и ссылаясь на Р.Крайчана, Робертс приводит интегро-дифференциальное нелинейное уравнение для пропагатора $G(\vec{r}, t) \equiv G(\vec{r}, t | \vec{0}, 0)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} G(\vec{r}, t) = \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_0^t dt' \int d\vec{r}' V_{ij}(\vec{r}', t') G(\vec{r}', t') G(\vec{r} - \vec{r}', t - t'). \quad (12.4.21)$$

Умножая (12.4.21) на $x_i x_j$ и интегрируя правую часть по координатам, приходим к выражению

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle x_i x_j \rangle = \int x_i x_j \frac{\partial}{\partial t} G(\vec{r}, t) d\vec{r} = 2 \int_0^t dt' \int d\vec{r}' V_{ij}(\vec{r}', t') G(\vec{r}', t'),$$

интегрирование которого по времени даёт

$$\langle x_i x_j \rangle = 2t K_{ij}(t), \quad K_{ij}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t dt' (t - t') \int d\vec{r}' V_{ij}(\vec{r}', t') G(\vec{r}', t').$$

Выполненный Робертсом анализ коэффициента вихревой диффузии K_{ij} в случае изотропного в среднем поля скоростей показал, что при $t \rightarrow 0$ среднеквадратичный радиус пропорционален t , что характерно для баллистического режима, с возрастанием же времени он замедляет темп роста, выходя в асимптотике больших времён на обычный диффузионный режим (\sqrt{t}). Решение соответствующим образом редуцированных уравнений для пропагатора G показало, что при малых временах вероятность обнаружить маркер сосредоточена вблизи сферы радиуса vt , и равна нулю за её пределами, тогда как при больших временах пропагатор стремится к гауссовой форме, что согласуется с анализом поведения среднего квадрата распределения. Правда,

этот вывод справедлив лишь при условии, что средний квадрат смещения частицы за время Δt конечен, а автокорреляционная функция скорости убывает достаточно быстро. В противном случае, пропагатор может стремиться к другим предельным законам, например, к одному из устойчивых распределений Леви (как это мы видели в модели Монина).



Диффузия взаимодействующих частиц

В основе большинства работ по диффузии лежит (часто негласное) предположение о том, что диффундирующие частицы не взаимодействуют друг с другом. Даже в предыдущей задаче корреляции траекторий маркеров являлись следствием их участия в общем потоке, а не взаимодействия друг с другом (если, конечно, не считать взаимодействием обмен импульсами через посредника – эту самую среду). Учёт взаимодействия между частицами, существенно усложняя вычислительную сторону процесса, открывает путь к описанию химических (реакции) и физических (агрегации) процессов, начатый ещё М. Смолуховским. Главную роль здесь играет нелинейность: если пренебречь ею, исчезнут из уравнений члены, ответственные за взаимодействия частиц. Рассмотрим простейшую (одномерную) модель такого типа.

Пусть $X_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ координаты точечных частиц на оси OX , а $[x - h, x + h]$ – малый интервал, содержащий большое число $N(X_k \in [x - h, x + h])$ таких частиц. Определим «крупнозернистую» плотность числа частиц соотношением

$$f(x, t) \approx \frac{N(X_k \in [x - h, x + h])}{2h},$$

где h удовлетворяет условию $\varepsilon \ll h \ll 1$, в котором ε обозначает среднее расстояние между соседними частицами. Если $V(x - x')$ – потенциал взаимодействия между частицами, находящимися в точках x и x' , то уравнение движения частицы с номером k запишется в виде

$$\frac{dX_k}{dt} = - \sum_{i \neq k} V'(X_k(t) - X_i(t)),$$

где штрихом отмечено дифференцирование по x . В непрерывном пределе «крупнозернистая скорость»

$$u(x, t) \approx - \sum_i V'(x - X_i(t))$$

принимает вид

$$u(x, t) = - \int V'(x - x') f(x', t) dx'.$$

Подстановкой этой функции в уравнение непрерывности

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial [u(x, t) f(x, t)]}{\partial x} = 0,$$

мы получаем *нелокальное уравнение агрегации*:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} V'(x - x') f(x', t) dx' \right].$$

Его трёхмерный аналог имеет вид 

$$\frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla \left[f(\vec{r}, t) \int_{R^3} \nabla V(\vec{r} - \vec{r}') f(\vec{r}', t) d\vec{r}' \right].$$

С подробностями вывода и обзором применений этих уравнений читатель может ознакомиться по работе⁴⁹.

Хищники и жертвы в пространстве

В работе⁵⁰ рассматривается поведение системы «хищники-жертвы» не только во времени, но и в пространстве. В общей постановке такая задача формулируется в виде системы двух уравнений типа реакции-диффузии с интегральным оператором, отражающим влияние пространственно-временного распределения жертв на скорость изменения их концентрации в данный момент в данной точке. Обозначая концентрации жертв и хищников через $n_1 \equiv n_1(\vec{r}, t)$ и $n_2 \equiv n_2(\vec{r}, t)$ соответственно, представим приведённую в работе⁴¹ систему уравнений, управляющим этим процессом:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \varepsilon_1 [1 + Q(n_1(\cdot, \cdot))] n_1 - \gamma_2 n_1 n_2 + D \Delta n_1,$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -\varepsilon_2 n_2 + \gamma_1 n_1 n_2 + \Delta n_2.$$

⁴⁹Grosskinsky S., Klingenberg C. and Oelschläger K. *Stoch. An. Appl.*, 1-19 (2003).

⁵⁰S.A.Gourley, N.F.Britton. A predator-prey reaction-diffusion system with nonlocal effects. *J.Math.Biol.*(1996) **34**, 297-333.

Система эта является обобщением системы Вольтерры-Лотка (см. 12.1.2), дополняя её диффузионными членами, описывающими расплывание популяций в пространстве за счёт случайного перемещения их особей, и функционалом

$$Q(n_1(\cdot, \cdot)) = \alpha n_1 - (1 + \alpha) \int_{-\infty}^t dt' \int d\vec{r}' G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') n_1(\vec{r}', t'), \quad \alpha \geq -1.$$

Этот функционал отражает внутривидовую конкуренцию в борьбе за ресурсы, наличие в его составе интегрального члена объясняется во-первых, постоянным перемещением особей в поисках пищи (находящиеся в данный момент t в точке \vec{r} в момент $t' < t$ находились в другой точке \vec{r}'), и во-вторых, восстановления ресурсов для обеспечения популяции 1 (травка для зайчиков) требует некоторого времени – отсюда и запаздывание по времени. Показатель α носит, скорее всего, служебный характер, регулируя степень влияния внутривидовой конкуренции. С чисто математической точки зрения этот параметр выполняет роль регулятора неоднородности распределения популяций по ареалу, при подходящих значениях порождая хаотические особенности системы – неустойчивость, бифуркации и пр.⁴¹

Диффузия в пористых средах

Нелинейные уравнения возникают при диффузии газов в пористых средах. Пористая среда характеризуется коэффициентом $f \in (0, 1]$, показывающим объёмную долю пустого пространства среды (то есть пространства, занятого порами, открытыми для газа). Описание динамики такого процесса включает в себя уравнение баланса массы (с учётом ограничения доступного газу пространства), соотношение между скоростью движения газа и градиентом давления (закон Дарси) и уравнение состояния газа ($\rho - p$ соотношение в баротропной модели). Вот эта система:

$$\begin{aligned} f \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) &= 0, \\ \vec{v} &= -(\kappa/\eta) \nabla p, \\ \rho &= \rho_0 p^\gamma, \end{aligned}$$

где κ – проницаемость среды, а η – вязкость газа. Исключив с помощью двух последних уравнений \vec{v} и p из первого уравнения,

$$f \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \left[(\kappa/\eta) \rho \nabla (\rho/\rho_0)^{1/\gamma} \right],$$

и выполнив элементарные преобразования в правой части,

$$\begin{aligned} \nabla \left[(\kappa/\eta)\rho \nabla (\rho/\rho_0)^{1/\gamma} \right] &= \\ &= (\kappa/\eta)\rho_0^{-1/\gamma} \gamma^{-1} \nabla \left(\rho^{1/\gamma} \nabla \rho \right) = \\ &= (\kappa/\eta)\rho_0^{-1/\gamma} (\gamma + 1) \nabla \left(\nabla \rho^{1+1/\gamma} \right), \end{aligned}$$

получим ещё один вид нелинейного диффузионного уравнения⁵¹

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = c \Delta \rho^m,$$

где $m = 1 + 1/\gamma$ и $c = (\kappa/\eta)\rho_0^{-1/\gamma} (\gamma + 1)^{-1}$.

Последовательное изложение физического содержания основанной на этом подходе теории *просачивания (фильтрации)* и её применений в задачах подземной гидромеханики читатель найдёт в книге Басниева и др.⁵²

12.5 Размерный анализ, подобие, моделирование

12.5.1 Размерности

Важнейшую роль в механике, особенно в механике континуума, играет понятие размерности, являющейся дополнительной характеристикой числа, представляющего значение рассматриваемой величины. Натуральные числа по своему смыслу не нуждаются в таком уточнении: мы говорим, что молекула водорода состоит из *двух* атомов, и число 2 в формуле $n = 2$ не требует дополнительной информации. Но когда мы говорим о том, что средняя плотность атомов водорода в межзвёздном пространстве равна 1, то этого недостаточно: нужно добавить «в одном кубическом сантиметре» или написать «1 см⁻³»⁵³. Это важно: если мы будем выражать длину в метрах, то плотность межзвёздного водорода будет выражаться числом «10⁶ м⁻³». Заметим, что

⁵¹Первая версия нелинейного уравнения диффузии (с $m = 2$) появилась ещё в работе Буссинеска 1903 года.

⁵²К.С. Басниев, И.Н. Кочина, В.М. Максимов. Подземная гидромеханика. – М.: Недра, 1993.

⁵³Здесь число 1 является приближённым значением вещественного числа, а не натуральным целым числом.

употреблённый выше термин «плотность межзвёздного водорода» не очень аккуратен: не вполне ясно, что речь идёт о числе атомов в единице объёма, а не об их массе. Чтобы избежать неясности, часто пишут эту плотность в виде «1 ат/см³», тогда как массовая плотность выражается в г/см³.

Размерные механические величины делятся на основные – длина, время, масса (или сила), размерности которых обозначаются через L, T, M и F соответственно (общее обозначение $U_j, j = 1, 2, 3$)⁵⁴, – и производные от них: скорость, ускорение, импульс, энергия и др. Размерности последних величин находятся из их определений (см. табл. 12.4).

Таблица 12.4. Размерности механических величин в двух системах

Величина	LTM -система	LTF -система
Длина	L	L
Время	T	T
Масса	M	FT^2L^{-1}
Сила	MLT^{-2}	F
Скорость	LT^{-1}	LT^{-1}
Ускорение	LT^{-2}	LT^{-2}
Импульс	MLT^{-1}	FT
Момент импульса	ML^2T^{-1}	FLT
Энергия, работа	ML^2T^{-2}	FL
Мощность	ML^2T^{-3}	FLT^{-1}
Давление, напряжение	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}
Момент силы	ML^2T^{-2}	FL
Вязкость	$ML^{-1}T^{-1}$	$FL^{-2}T$

Договоримся обозначать размерность физических величин посредством квадратных скобок,

$$[V] = LT^{-1},$$

а для безразмерной величины A писать $[A] = 1$.

Основные правила алгебры размерностей:

1. Все слагаемые должны обладать одной и той же размерностью. Эту же размерность имеет и их сумма. Если уравнение записано в форме равенства двух физических величин, то размер-

⁵⁴При необходимости этот набор может быть дополнен.

ность левой части этого равенства должна совпадать с размерностью его правой части⁵⁵.

2. *Размерность произведения физических величин равна произведению соответствующих размерностей:*

$$[XY\dots Z] = [X][Y]\dots[Z].$$

Отсюда следует, в частности, что для любых вещественных чисел $\alpha, \beta, \dots, \omega$

$$[X^\alpha Y^\beta \dots Z^\omega] = [X]^\alpha [Y]^\beta \dots [Z]^\omega.$$

Рассмотрим в качестве примера выражение для скорости падающего в однородной воздушной среде тела:

$$v = \frac{W}{b}(1 - e^{-(b/m)t}), \quad (12.5.1)$$

где W – вес тела, m – его масса. Размерность левой части равенства, представляющей скорость,

$$[v] = LT^{-1}.$$

Размерность правой

$$\left[\frac{W}{b} (1 - e^{-(b/m)t}) \right] = \frac{[W]}{[b]} (1 - e^{-(b/m)t}).$$

В квадратных скобках из единицы вычитается экспонента. Единица – отвлечённая (безразмерная) величина, таковой же должна быть и вычитаемая показательная функция, и не только она сама, но и её аргумент,

$$[(b/m)t] = 1,$$

поскольку размерности слагаемых ряда $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$ должны быть одинаковы и из $[x^n] = [x^{n+1}] = [x^n][x]$ следует $[x] = 1$. Таким образом,

$$[b] = MT^{-1},$$

а

$$[bv] = MLLT^{-2} = [F].$$

⁵⁵ «Физический» нуль, часто встречающийся в правой части уравнения для размерной величины, может быть представлен в виде произведения отвлечённого нуля и множителя соответствующей левой части размерности. Другими словами, размерность «физического» нуля в правой части размерного уравнения совпадает с размерностью левой его части.

В то же время

$$\frac{[W]}{[b]} = \frac{MLT^{-2}}{MT^{-1}} = LT^{-1}.$$

Таким образом, мы проверили равенство (12.5.1) на размерность и заодно установили смысл величины b как коэффициента пропорциональности между силой торможения и скоростью тела.

12.5.2 П-теорема

Умелое пользование размерностями позволяет не только *проверять* полученные результаты, но и получать новые, то есть фактически *решать* задачи. По этой причине и используется термин *метод размерностей*.

В основе метода размерностей лежит так называемая *П-теорема*. Пусть q_1, q_2, \dots, q_n – полный набор независимых в общем случае размерных переменных, достаточный для вычисления интересующей нас характеристики q рассматриваемой системы:

$$q = \phi(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Пусть первые $k \leq n$ элементов этого набора имеют независимые размерности⁵⁶. Вообще, k не должно превышать число основных единиц выбранной системы; но мы для простоты ограничимся крайним случаем, когда k равно числу основных единиц, и предположим даже, что независимые эти размерности и являются основными. В таком случае

$$q = \phi(q_1, \dots, q_k, q_{k+1}, \dots, q_n), \quad (12.5.2)$$

где переменные имеют следующие размерности

$$\begin{aligned} [q_1] &= U_1, & [q_2] &= U_1, & \dots, & [q_k] &= U_k, \\ [q_{k+1}] &= U_1^{\mu_1} U_2^{\mu_2} \dots U_k^{\mu_k}, & \dots, & [q_n] &= U_1^{\nu_1} U_2^{\nu_2} \dots U_k^{\nu_k}, \\ [q] &= U_1^{\lambda_1} U_2^{\lambda_2} \dots U_k^{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Изменим теперь единицы измерения величин q_1, q_2, \dots, q_k в c_1, c_2, \dots, c_k раз соответственно (перейдём, скажем, от сантиметров к

⁵⁶Это значит, что размерность каждого из них не может быть представлена в виде произведения степеней других: длина, скорость и ускорение зависимы, а длина, скорость и энергия – независимы.

метрам, от граммов к килограммам...) и отметим новые значения переменных штрихом:

$$q'_1 = c_1 q_1, \quad q'_2 = c_2 q_2, \quad \dots, \quad q'_k = c_k q_k, \\ q'_{k+1} = c_1^{\mu_1} c_2^{\mu_2} \dots c_k^{\mu_k} q_{k+1}, \quad q'_n = c_1^{\nu_1} c_2^{\nu_2} \dots c_k^{\nu_k} q_n, \quad q' = c_1^{\lambda_1} c_2^{\lambda_2} \dots c_k^{\lambda_k} q. \quad (12.5.3)$$

Вид физических законов не зависит от согласованного выбора единиц, так что соотношение (12.5.2) сохранит свой вид и в штрихованных переменных:

$$q' = \phi(q'_1, \dots, q'_k, q'_{k+1}, \dots, q'_n).$$

Выражая здесь штрихованные переменные через нештрихованные соотношениями (12.5.3),

$$c_1^{\lambda_1} \dots c_k^{\lambda_k} \phi(q_1, \dots, q_n) = \phi(c_1 q_1, \dots, c_k q_k, c_1^{\mu_1} \dots c_k^{\mu_k} q_{k+1}, \dots, c_1^{\nu_1} \dots c_k^{\nu_k} q_n), \quad (12.5.4)$$

видим, что функция ϕ однородна относительно единиц измерения величин q_1, \dots, q_k . Введённые нами коэффициенты c_1, \dots, c_k положительны, но в остальном – произвольны. При

$$c_1 = 1/q_1, \quad c_2 = 1/q_2, \quad \dots, \quad c_k = 1/q_k,$$

первые k аргументов в правой части уравнения (12.5.3) равны 1, а численные значения $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ переменных q, q_{k+1}, \dots, q_n соответственно равны

$$\Pi = \frac{q}{q_1^{\lambda_1} q_2^{\lambda_2} \dots q_k^{\lambda_k}}, \quad \Pi_1 = \frac{q_{k+1}}{q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2} \dots q_k^{\mu_k}}, \quad \dots, \quad \Pi_{n-k} = \frac{q_n}{q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} \dots q_k^{\nu_k}}. \quad (12.5.5)$$

Таким образом, безразмерное представление функциональной зависимости (12.5.2) имеет вид

$$\Pi = \phi(1, 1, \dots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) = \begin{cases} f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}), & n > k; \\ C, & n = k. \end{cases} \quad (12.5.6)$$

Мы пришли к утверждению, известному под названием **П-теоремы**, которая гласит: *физическое уравнение, включающее $n + 1$ переменных q, q_1, \dots, q_n , выражаемых через k основных единицы, может быть представлено в форме (12.5.6) где $\Pi_j, j = 1, 2, \dots, n - k$, – безразмерные произведения степеней (П-комплексы) исходных переменных, определяемые формулами (12.5.5).*

Практическое применение этой теоремы выглядит следующим образом.

1. Выделяются из множества факторов, отражающих влияние окружения на рассматриваемый процесс, наиболее существенные (с учётом требований к точности результатов) и выбираются для их учёта подходящие переменные q, q_1, \dots, q_n .
2. Выбирается система основных размерностей (например, LTM или LTF) и выражаются исходные переменные в этих единицах.
3. Устанавливается требуемое число Π -комплексов $(n - k + 1)$.
4. Формируется набор Π -комплексов и проверяется их безразмерность и независимость.
5. Результат представляется в виде (12.5.6), даётся физическая интерпретация.
6. Предлагается способ завершения решения задачи (определения неопределённых постоянных, наборов постоянных, функций и др. – включая экспериментальные варианты).

12.5.3 Примеры применения Π -теоремы

Центростремительная сила

Материальная точка массой m движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью v . Что можно сказать о действующей на неё силе F ?

Мы, конечно, знаем ответ, он легко получается из ньютонова уравнения движения, но на этот раз нам нужно прийти к нему *только на основании размерного анализа*, минуя уравнение движения. Требуется выразить F (это q) через три переменных (m, r, v – это q_1, q_2, q_3), так что $n = 3$. В системе LTF

$$\begin{aligned}
 [F] &= F \equiv L^0 T^0 F^1, \\
 [m] &= L^{-1} T^2 F \equiv L^{-1} T^2 F^1, \\
 [r] &= L \equiv L^1 T^0 F^0, \\
 [v] &= LT^{-1} \equiv L^1 T^{-1} F^0,
 \end{aligned}$$

и число независимых единиц k тоже равно 3, следовательно, $n - k = 0$ и мы имеем дело с единственным Π -комплексом

$$\Pi = F m^\alpha v^\beta r^\gamma.$$

Проверим его размерность

$$[Fm^\alpha v^\beta r^\gamma] = [F][m]^\alpha [v]^\beta [r]^\gamma = 1.$$

Пользуясь четырьмя приведёнными выше формулами, находим

$$L^0 T^0 F^1 (L^{-1} T^2 F^1)^\alpha (L^1 T^0 F^0)^\beta (L^1 T^{-1} F^0)^\gamma = L^{-\alpha+\beta+\gamma} T^{2\alpha-\gamma} F^{1+\alpha} = 1.$$

Чтобы это условие выполнялось, то есть чтобы произведение не содержало ни одного размерного множителя, нужно чтобы все три показателя были равны нулю:

$$1 + \alpha = 0, \quad 2\alpha - \beta = 0, \quad -\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Решение этой системы имеет вид

$$\alpha = 1, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 1,$$

из которого следует, что

$$\Pi = \frac{Fr}{mv^2},$$

и, стало быть,

$$F = \frac{mv^2}{r}.$$

Параметр не может быть определён из анализа размерности. Такая неполнота решения характерна для метода размерностей, но во многих случаях это не является серьёзным препятствием: одну или даже несколько постоянных можно определить из дополнительных соображений или экспериментальных данных.

Кручение стержня

К однородному круглому стержню диаметром d и сдвиговым модулем упругости G приложен крутящий момент $M_{\text{кр}}$. Выразить погонный (на единицу длины) угол поворота стержня $\theta_{\text{вр}}$ через указанные переменные.

Всего переменных в этой задаче четыре (θ , d , $M_{\text{кр}}$, G), независимых переменных $n = 3$, а основных размерностей две (L и F), так что $n - k = 1$. Учитывая, что θd – безразмерная величина, примем её в качестве зависимого Π -комплекса: $\Pi = \theta d$. Чтобы найти другой (Π_1) комплекс, запишем его в виде

$$\Pi_1 = G^\alpha d^\beta M_{\text{кр}}$$

и определим показатели из условия



$$[G^\alpha d^\beta M_{\text{кр}}] = [F^1 L^{-2}]^\alpha [F^0 L^1]^\beta [F^1 L^1] = [F]^{\alpha+1} [L]^{-2\alpha+\beta+1} = 1,$$

приводящего к системе уравнений

$$\alpha + 1 = 0,$$

$$-2\alpha + \beta + 1 = 0.$$

В результате имеем

$$\alpha = -1, \quad \beta = -3,$$


откуда и следует выражение для второго комплекса

$$\Pi_1 = \frac{M_{\text{кр}}}{Gd^3}.$$

Таким образом, П-уравнение имеет вид

$$\theta d = f\left(\frac{M_{\text{кр}}}{Gd^3}\right),$$

из которого следует



$$\theta = \frac{1}{d} f\left(\frac{M_{\text{кр}}}{Gd^3}\right),$$

где $f(x)$ – неизвестная функция одной вещественной переменной x . Из эксперимента известно, что при малых значениях крутящего момента наблюдается линейная связь между ним и углом поворота. Математически это означает дифференцируемость функции $f(x)$ в нуле, то есть возможность её аппроксимации до первого порядка:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots$$

Поскольку в отсутствие приложенного момента $\theta = 0$, то $f(0) = 0$, и мы имеем

$$\theta = C \frac{M_{\text{кр}}}{Gd^4},$$

где $C = f'(0)$ – неизвестное положительное число, не зависящее от других параметров задачи. Для его определения нужна дополнительная информация.

Заметим, что классическое решение этой задачи основывается на решении уравнения теории упругости в условиях цилиндрической симметрии.

Шар в вязкой жидкости

Какая сила приложена к шару радиусом r , движущемуся с постоянной скоростью v в жидкости с вязкостью η и плотностью ρ ?

Обозначив искомую силу через F , получим пять исходных переменных F, a, ρ, v, η , выражающиеся через три основных размерности L, T, F . Используя правила алгебры размерностей, легко убедиться, что комплексы

$$\Pi = \frac{F}{\rho v^2 r^2}$$

и

$$\Pi_1 = \frac{\eta}{\rho v r}$$

безразмерны. Таким образом, Π -уравнение может быть записано в виде

$$\frac{F}{\rho v^2 r^2} = \phi \left(\frac{\eta}{\rho v r} \right),$$

из коего следует, что

$$F = \rho v^2 r^2 \phi \left(\frac{\eta}{\rho v r} \right). \quad (12.5.7)$$

Вид функциональной зависимости $\phi(x)$ должен быть найден из более глубокой теории или экспериментальным путём, но очень важным в последнем случае оказывается то обстоятельство, что искать надо не функцию четырёх переменных (ρ, v, r, η) , а функцию всего одной переменной $x = \eta/\rho v r$. При малых значениях этой переменной $\phi(x) \sim \phi'(0)x$ и мы приходим к формуле

$$F = \phi'(0)\eta r v, \quad (12.5.8)$$

при $\phi'(0) = 6\pi$ совпадающей с формулой Стокса.

Заметим, что при выводе формул (12.5.6)-(12.5.7) мы не использовали сферичности формы тела: радиус r выступал просто в качестве размера тела. Стало быть, формулы эти можно считать результатом метода размерностей для ограниченного тела более или менее произвольной формы, которая скажется лишь на виде функции $\phi(x)$ в (12.5.7) или численном значении коэффициента $\phi'(0)$ в асимптотической формуле (12.5.8).

Точечный взрыв в атмосфере

В точке $\vec{r} = 0$ однородной воздушной среды в момент $t = 0$ произошло выделение большого количества энергии E , породившее мощную ударную волну, радиус фронта r которой зависит от E , t и начальной плотности воздуха ρ_0 . Найти функцию $r = r(E, t, \rho_0)$.⁵⁷

Полное число определяющих параметров $(n + 1)$ здесь 4, размерности же их в системе LTM $[r] = L$, $[E] = L^2 T^{-2} M$, $[t] = T$, $[\rho_0] = L^{-3} M$, так что число независимых размерностей ($k = 3$) совпадает с числом независимых переменных ($n = 3$). П-уравнение запишется в виде

$$\Pi \equiv r(Et^2/\rho_0)^{-1/5} = C,$$

откуда

$$r = C(Et^2/\rho_0)^{1/5}.$$

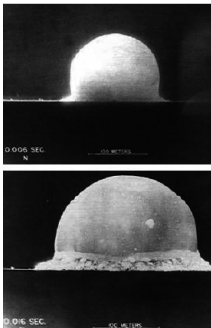


Рис. 12.22. Эволюция облака атомного взрыва (киносъемка США)

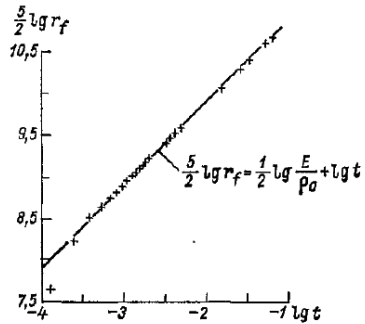


Рис. 12.23. Результаты обработки кинофильма

Полученная формула показывает, что процесс распространения фронта взрывной волны представляется на графике с координатами $((5/2) \lg r, \lg t)$ в виде прямой

$$(5/2) \lg r_f = \lg t + (5/2) \lg (CE^{1/5} \rho_0^{-1/5})$$

с наклоном, равным единице. Обработка кинофильма, снятого во время американских испытаний на полигоне (рис. 12.22), подтвердила этот вывод (рис. 12.23).

⁵⁷Первая математическая модель взрыва атомной бомбы в атмосфере.

12.5.4 Подобие, реальный объект и модель

Наш мир, прекрасный и необозримый, удивительно разнообразен. Но ещё более удивительно то, что в бесконечном этом разнообразии есть повторяющиеся мотивы, которые мы не сразу улавливаем из-за колоссальной разницы масштабов. Выходя из ванны, мы не обращаем внимания на вращающуюся воронку мыльной воды, утекающей в трубу, но если нам попадётся снимок урагана из космоса (рис. 12.24),



Рис. 12.24. Снимок урагана из космоса



Рис. 12.25. Галактика

мы можем вспомнить ту воронку и удивиться тому, насколько эти образы похожи. Однако, какая гигантская разница в размерах, временах, энергиях этих процессов! Потом, увидев, по какому-нибудь случаю, фотографию галактики (рис. 12.25), мы уже не сможем не вспомнить о двух предыдущих образах и не почувствовать таинственное единство этого волшебного мира. Поистине, «случайно, на ноже карманном найдя пылинку дальних стран...» Но эта похожесть, подобие разномасштабных явлений не только служит поводом для глубокомысленных рассуждений философов, но, что гораздо важнее, даёт в руки исследователям дополнительный инструмент изучения природы, развитие и совершенствование которого привело к созданию специального научного направ-



Рис. 12.26. Аэродинамическая труба в лаборатории ЦАГИ (Центрального аэрогидродинамического института им. профессора Н.Е.Жуковского)

ления – моделирования. Современные гидроаэродинамические лаборатории оснащены богатым арсеналом установок, с той или иной степенью подробности моделирующих движение кораблей, подводных лодок, нефтяных платформ, самолётов (см. рис. 12.26), и других сложных технических систем в изменённых (по отношению к реальным) масштабах и соответственно с изменёнными свойствами.

Вообще говоря, термин *моделирование* охватывает как экспериментальное (натурное) так и теоретическое (математическое) моделирование. По существу, весь комплекс математических задач механики есть не что иное, как набор большого количества моделей, всегда чем-нибудь да отличающихся от их реальных прототипов: твёрдые тела не являются абсолютно твёрдыми, упругие не являются абсолютно упругими, при небольших нагрузках стальной стержень ведёт себя почти как абсолютно твёрдое тело, с увеличением нагрузки начинает изгибаться, проявляя упругие свойства, при нагревании до высоких температур обнаруживает текучесть. Поведение одного и того же тела в разных условиях описывается разными теоретическими моделями, в каждой из них чем-то пренебрегается.

В случае экспериментального моделирования изготавливается и исследуется аналог механической системы меньших (*лабораторных*) размеров, характеристики которого измеряются и пересчитываются на реальные масштабы. Аналог этот, сохраняющий в целом структуру и пропорции своего прототипа, называется его *моделью*. Дело, однако, не сводится только к геометрическому подобию: изменение размеров приводит к изменению механических свойств элементов системы, а чтобы осуществить пересчёт результатов натурного эксперимента на реальную систему, необходимо иметь обоснованные алгоритмы пересчёта. Такие алгоритмы разрабатываются в рамках *теории подобия*. В основе этой теории лежит **правило пересчёта результатов измерений с модельной системы (q_j) на натурную систему (Q_j)**, вытекающее из равенства наборов Π -комплекссов:

$$Q_1 = q_1 (Q_2/q_2)^{p_2} (Q_3/q_3)^{p_3} \dots (Q/q_{n-k})^{p_{n-k}}$$

Вообще, различаются три уровня подобия.

- **Геометрическое подобие** – модель и её прототип имеют одинаковые формы, отношения расстояний между сходственными парами точек обеих систем равны одному и тому же числу.
- **Кинематическое подобие** – в дополнение к геометрическому подобию отношения скоростей сходственных пар точек обеих систем равны одному и тому же числу.

- **Динамическое подобие** – две динамические системы называются подобными, если они подобны в геометрическом и кинематическом смыслах (то есть описываются одинаковыми наборами физических переменных, различающихся только своими численными значениями), а соответствующие Π -комплексы этих систем численно совпадают. Безразмерные Π -комплексы при этом называются параметрами (критериями, числами) подобия и многие из них носят собственные имена (число Маха, число Рейнольдса и др.). В п. **9.1.5** мы определим некоторые из них.

Для обеспечения подобия модели натурному объекту необходимо соблюдать определённые условия, вытекающие из теории подобия. На практике, однако, построить точную копию такого объекта конечно невозможно. Различие же в структурах порождает и разницу в результатах – погрешность модели. Выполняя рутинную работу, опытный специалист обычно знает, отклонения каких из входных параметров модели от их натуральных значений могут существенно повлиять на характеристики, являющиеся целью моделирования, а к каким система слабо чувствительна. Приступая же к новой задаче, следует провести оценки погрешности моделирования, вызванные неточностью входных данных, или неполнотой их набора. Конечно, в конкретных давно развивающихся направлениях, будь то моделирование ядерных реакторов или сверхзвуковых самолётов, сложились свои порядки и правила, оформленные часто в виде государственных стандартов. По понятным причинам ядерные реакторы относятся к классу особенно требовательным в этом отношении объектов, и здесь развит эффективный метод решения таких задач, основанный на концепции *функции ценности*⁵⁸. Одной из его особенностей является чрезвычайная прозрачность идеи, позволяющая изложить её в общем и доступном виде. Мы представим её здесь в следующем параграфе под названием *теория чувствительности*, первая часть которого (линейная теория) основана на работе Г.И.Марчука и В.В.Орлова⁵⁹, а вторая (нелинейная) – на статье автора⁶⁰.

Уточним задачу. Пусть изучаемая система описывается линейным уравнением

$$L(Q)f(x; Q) = s(x),$$

⁵⁸Ведущую роль в его развитии играл Г.И.Марчук.

⁵⁹Г.И.Марчук, В.В.Орлов. К теории сопряжённых функций. В сб. Нейтронная физика. – М.: Атомиздат. – С.30-45 (1961).

⁶⁰В.В.Учайкин. Вариационный метод интерполирования ядерно-технических расчётов, Атомная энергия **67**. – С.54-55 (1989).

где x – совокупность фазовых переменных, $L \equiv L(Q)$ – линейный оператор, зависящий от совокупности параметров Q , $s(x)$ – известная функция, играющая роль, например, источника, если уравнение это описывает стационарную диффузию, а интересующая нас величина J представляется интегралом от произведения функции $f(x; Q)$, характеризующей состояние системы, и функции отклика $h(x)$, так что

$$J(Q) = \int h(x)f(x; Q)dx.$$

В результате преобразования подобия $Q \mapsto q$ мы получили модель, в которой уравнения

$$\begin{aligned} L(q)f(x; q) &= s(x), \\ J(q) &= \int h(x)f(x; q)dx. \end{aligned}$$

уже не вполне адекватно описывают систему (чем-то мы пренебрегли, какие-то зависимости упростили, непрерывное время заменили дискретной последовательностью, и пр.).

12.5.5 Теория чувствительности

Принцип двойственности

Идея обычного метода возмущений состоит в том, чтобы принять модельную задачу в качестве *нулевого приближения*, к которому можно добавить поправку первого порядка, не выходя за рамки уравнений нулевого приближения. Это удобно сделать с использованием лагранжевой концепции сопряжённых операторов. Для упрощения выкладок введём обозначения:

$$f(x; q) = f_0, \quad L(q) = L_0, \quad J(q) = J_0, \quad f(x; Q) = f, \quad L(Q) = L, \quad J(Q) = J.$$

Кроме того, встречающиеся интегралы представим в форме скалярных произведений,

$$J_0 = (h, f_0), \quad J = (h, f). \quad (12.5.9)$$

Запишем решения уравнений

$$L_0 f_0 = s, \quad Lf = s, \quad (12.5.10)$$

с помощью операторов Грина G_0 и G , обратных операторам L_0 и L соответственно:

$$f_0 = G_0 s, \quad f = Gs. \quad (12.5.11)$$

Подставим первое выражение (12.5.11) в первую формулу (12.5.9), а второе из (12.5.11) – во вторую формулу (12.5.9), и перейдём к сопряжённым (по Лагранжу) операторам (отмечены крестиками):

$$J_0 = (h, G_0 s) = (G_0^+ h, s), \quad J = (h, G s) = (G^+ h, s). \quad (12.5.12)$$

Введя обозначения

$$G_0^+ h = f_0^+, \quad G^+ h = f^+, \quad (12.5.13)$$

представим (12.5.12) в виде

$$J_0 = (f_0^+, s), \quad J = (f^+, s). \quad (12.5.14)$$

Функции $f_0^+(x)$ и $f^+(x)$ называются *невозмущённой* и *возмущённой сопряжёнными функциями* соответственно (в отличие от $f_0(x)$ и $f(x)$, называемых *основными*). Аргументом сопряжённой функции является точка в фазовом пространстве системы, в которую помещён единичный источник, сама же функция значение изучаемой характеристики (показание прибора), обусловленное созданным таким источником полем. По этой причине сопряжённая функция называется также *ценностью*. В теории ядерных реакторов, где это понятие было впервые введено, $f(x)$ представляла собой фазовую плотность нейтронов, а $f^+(x)$ – будущий вклад нейтрона с фазовыми координатами x в энерговыделение (его *энергетическую ценность*) или другие интегральные характеристики реактора. Как следует из (12.5.13), сопряжённые функции удовлетворяют *сопряжённым уравнениям*

$$L_0^+ f_0^+ = h, \quad L^+ f^+ = h. \quad (12.5.15)$$

Сопоставление как первых уравнений в (12.5.9) и (12.5.14), так и вторых демонстрирует **принцип двойственности**: *линейный функционал (h, f) от решения неоднородного уравнения с оператором L и правой частью s равен линейному функционалу (f^+, s) от решения неоднородного уравнения с сопряжённым оператором (L^+) и правой частью h .*

Теория возмущений

Сформулированный выше принцип двойственности приводит к удобному представлению теории возмущений. Будем полагать величину J_0 , функции f_0 , f_0^+ и оператор L_0 относящимися к *невозмущённой задаче*, а соответствующие характеристики без индексов – к *возмущённой*. Причиной возмущения является изменение (которое тоже

можно называть возмущением) оператора $L_0 \mapsto L = L_0 + V$, следствием – изменение (возмущение) измеряемой величины. Фактически же V характеризует неточности, возникающие при преобразовании подобию (из-за неполного соответствия модели натурному объекту), а ΔJ – поправку, которую следует внести в результат, чтобы компенсировать влияние неточности входящих параметров. Согласно этой теории, в первом приближении (по норме возмущающего оператора) ΔJ приближённо выражается через невозмущённые функции f_0 и f_0^+ и возмущающий оператор V формулой⁶¹

$$\Delta J \approx \delta J = -(f_0^+, V f_0). \quad (12.5.16)$$

Чтобы вывести формулу (12.5.16), называемую *формулой малых возмущений*, левое из уравнений (2) умножим (скалярно) на f^+ и сравним результат с правым уравнением (12.5.14), а правое из уравнений (12.5.15) умножим на f_0 и сравним с левым в (12.5.9). Вычитая полученные выражения

$$(f^+, L_0 f_0) = J, \quad (L^+ f^+, f_0) = J_0$$

друг из друга и пользуясь свойством сопряжённости, выполним следующую преобразования:

$$\begin{aligned} \Delta J &= J - J_0 = (f^+, L_0 f_0) - (L^+ f^+, f_0) = \\ &= (f^+, L_0 f_0) - (f^+, L f_0) = -(f^+, (L - L_0) f_0) = -(f^+, V f_0). \end{aligned} \quad (12.5.17)$$

Формула (12.5.17) является ещё точной: никаких приближений пока не сделано. Однако если представить её как

$$\Delta J = -(f_0^+, V f_0) + (\Delta f^+, V f_0),$$

где $\Delta f^+ = f^+ - f_0^+$ – возмущение точности, вызванное возмущением оператора V и стоящее в произведении с ним, то станет ясно, что при малом, скажем, по норме, возмущении V возмущение Δf^+ будет того же порядка, и стало быть,

$$\Delta J = -(f_0^+, V f_0)[1 + o(1)],$$

откуда и следует формула (12.5.16).

Процедуру подобного рода, впрочем, можно повторить и с членом следующего порядка малости, получив *второе приближение теории*

⁶¹Чтобы подчеркнуть ограниченность этого результата областью малых значений, мы пишем δJ вместо ΔJ .

возмущений, а дальнейшее продолжение ведёт к построению ряда теории возмущений:

$$J = J_0 - (f_0^+, V f_0) + (f_0^+, V G_0 V f_0) - \dots \quad (12.5.18)$$

Вариационный метод

Если оставить в стороне специальные упражнения, в который каждый член ряда теории возмущений вычисляется аналитически, а затем всё суммируется в аналитической форме, содержащей элементарные или специальные функции, а иметь в виду более или менее реальные задачи, требующие численных методов решения, надежд на успешное вычисление членов высоких порядков немного. Уже поправка второго порядка содержит три оператора Грина (один в явном виде, два «спрятаны» в f_0 и f_0^+ , и каждый оператор означает решение соответствующего уравнения с правой частью, стоящей в данном выражении справа от него. Так, во втором слагаемом правой части формулы (12.5.18) мы видим комплекс

$$G_0 V f_0 = G_0 V G_0 s,$$

который расширяется так: вначале надо решить уравнение

$$L_0 f_0 = s, \quad (12.5.19)$$

затем действовать на результат оператором V , после чего снова решить уравнение с тем же оператором L_0 , но другой правой частью, равной теперь $V f_0$, а уж потом вычислять скалярное произведение. По мере повышения порядка, число таких повторных решений уравнения (12.5.19) с нарастающей правой частью растёт, и если погрешность в вычислении ΔJ убывает медленно, метод становится неэффективным.

Извечной альтернативой и успешным конкурентом теории возмущений является вариационный метод. Считается основным его недостатком проблема оценки погрешности. Формально так оно и есть, хотя фактически надёжность теоретических оценок сходимости метода возмущений обеспечивается лишь за счёт их завышения. Впрочем, возникающие при этом оценочные постоянно редко могут быть надёжно вычислены в серьёзных задачах, где основной вердикт о точности обычно выносят *реперные* (*опорные*) расчёты или эксперименты. А в этом случае теория возмущений и вариационные методы находятся в равном положении.

Идея предложенного в статье⁶² вариационного метода заключается в том, что если область \mathcal{L} операторного пространства, содержащая

⁶²В.В. Учайкин, Атомная энергия, **67**, вып. 1, июль 1989, с. 54–55.

неизвестный точный оператор L , недостаточно мала для применения теории возмущения, то необходимо выбрать в ней несколько основных («опорных») операторов L_1, L_2, \dots , решить задачу для каждого из них (т. е. найти f_i и f_i^+ , $i = 1, 2, \dots$), а затем, воспользовавшись стационарной (т. е. удовлетворяющей вариационному принципу $\delta J = 0$) формой

$$J = \frac{(f^+, s)(h, f)}{(f^+, Lf)},$$

представить входящие в неё и f^+ в виде линейных комбинаций опорных решений:

$$f = \sum_i c_i f_i, \quad f^+ = \sum_i c_i^+ f_i^+.$$

В результате получим

$$\tilde{J} = \frac{\sum_{ij} c_i^+ c_j J_i J_j}{\sum_{ij} c_i^+ c_j L_{ij}},$$

где

$$J_i = (f_i^+, s) = (h, f_i); \quad L_{ij} = (f_i^+, Lf_j).$$

Из условия стационарности, принимающего в этом случае вид

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial c_n^+} = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial c_n} = 0,$$

вытекают уравнения для постоянных c_i^+ , c_j :

$$\sum_{ij} c_i^+ c_j [J_n L_{ij} - J_j L_{in}] = 0;$$

$$\sum_{ij} c_i^+ c_j [J_n L_{ij} - J_i L_{nj}] = 0.$$

В случае двух опорных операторов

$$\frac{c_1^+}{c_2^+} = \frac{J_1 L_{22} - J_2 L_{21}}{J_1 L_{12} - J_2 L_{11}};$$

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{J_1 L_{22} - J_2 L_{12}}{J_1 L_{21} - J_2 L_{11}}.$$

Введя обозначения $V_i = L - L_i$ и учитывая, что

$$(L_i)_{kl} = \begin{cases} J_k; & i = l; \\ J_l; & i = k, \end{cases}$$

приведем отношения коэффициентов, от которых только и зависит результат, к виду

$$\frac{c_1^+}{c_2^+} = -\frac{J_1(V_2)_{22} - J_2(V_2)_{21}}{J_1(V_1)_{12} - J_2(V_1)_{11}};$$

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{J_1(V_2)_{22} - J_2(V_2)_{12}}{J_1(V_1)_{21} - J_2(V_1)_{11}}.$$

Для совпадения коэффициентов c_n^+ и c_n достаточно, чтобы матричные элементы $(V_1)_{kl}$ и $(V_2)_{kl}$ были симметричны: $(V_i)_{kl} = (V_i)_{lk}$.

Отметим три важные особенности предложенного алгоритма. Во-первых, в определенном смысле он реализует идею *интерполяции*, решения по двум (а в общем случае по нескольким) известным решениям в области \mathcal{L} , тогда как обычная теория возмущений носит, скорее, характер *экстраполяции* (зная решение в одной «точке» L_0 , его пытаются распространить на область \mathcal{L}). Во-вторых, найденное решение не только совпадает с $J_1(J_2)$ при $L = L_1(L_2)$, но в окрестностях этих операторов совпадает с результатами теории малых возмущений, построенной около $L_1(L_2)$. Действительно, устремляя V_1 к нулю, получим $c_2^+/c_1^+ \equiv \varepsilon^+ \rightarrow 0$; $c_2/c_1 \equiv \varepsilon \rightarrow 0$, в результате чего

$$\tilde{J} \sim \frac{[J_1^2 + (\varepsilon^+ + \varepsilon)J_1J_2]}{[J_1 + (V_1)_{11} + (\varepsilon^+ + \varepsilon)J_2]} \sim J_1 - (V_1)_{11} = J_1 - (f_1^+, Vf_1).$$

В-третьих, вычисление входящих в окончательный результат матричных элементов $(V_i)_{kl}$ по сложности расчетов эквивалентно вычислению в теории малых возмущений, значительно более простым, чем во втором приближении этой теории.

12.5.6 Пример

В качестве численного примера рассмотрим простейшую задачу переноса частиц в однородной среде без рассеяния. В начале координат находится единичный точечный источник, испускающий частицы в положительном направлении оси x , детектор регистрирует число частиц в плоскости $x = t$. В этом случае $s(x) = \delta(x)$, $h(x) = \delta(x - t)$, оператор L зависит от единственного параметра – сечения взаимодействия σ :

$$L(\sigma) = d/dx + \sigma; \quad L^+(\sigma) = -d/dx + \sigma.$$

Основная и сопряжённая функции имеют вид:

$$f(x) = e^{-\sigma x}; \quad f^+(x) = e^{-\sigma(t-x)}; \quad 0 < x < t.$$

Пусть $L_0 \equiv L(\sigma_0)$ – основной оператор, в окрестности которого необходимо построить семейство решений, т.е. найти $J = J(\sigma)$. Теория возмущений в этом случае даёт

$$J(\sigma) = [1 - \Delta\sigma_0 t + (\Delta\sigma_0 t)^2 / 2 - \dots] J_0,$$

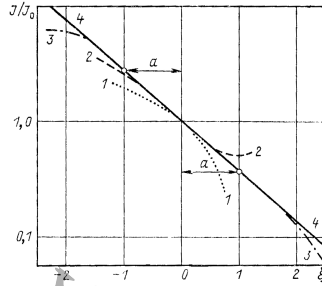


Рис. 12.27. Результаты расчета: 1 и 2 – первое и второе приближения теории возмущений; 3 – вариационное интерполирование ($t = 1$, опорные расчеты указаны точками); 4 – точное решение

$$\Delta\sigma_0 = \sigma - \sigma_0.$$

Чтобы применить вариационный метод интерполяции выберем два опорных оператора $L_1 = L(\Sigma_1)$ и $L_2 = L(\Sigma_2)$, так чтобы $\sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2$ и $(\sigma_2 - \sigma_0)t = (\sigma_0 - \sigma_1)$.

Обозначив $\Delta\sigma_0 t = \xi$, запишем матричные элементы:

$$\begin{aligned} (V_1)_{11} &= (\xi + a)J_1; & (V_2)_{22} &= (\xi - a)J_2; \\ (V_1)_{21} &= \frac{\xi + a}{2a}(J_1 - J_2); & (V_2)_{12} &= \frac{\xi - a}{2a}(J_1 - J_2); \\ J_1 &= e^a J_0; & J_2 &= e^{-a} J_0; & J_0 &= e^{-\Sigma_0 t}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} c_1^+ &= c_1 = (\xi - a)[2a - 1 + e^{-2a}]; \\ c_2^+ &= c_2 = (\xi + a)[2a + 1 - e^{2a}]. \end{aligned}$$

Результаты расчета для $a = 1$ приведены на рисунке 12.27. Видно, что новый метод позволяет существенно расширить область воспроизведения результата: при $a = 1,5$ хорошо вычисляются вариации функционала J на порядок в ту и другую стороны, тогда как теория малых возмущений удовлетворительно описывает лишь 30-40%-ные вариации. При больших a решение начинает заметно «провисать» в центральной области.

12.6 Самоподобие

12.6.1 Геометрическое самоподобие

Говоря о подобии, мы обычно имеем в виду по крайней мере, два объекта, например, два равнобедренных прямоугольных треугольника. Они отличаются друг от друга размерами, но если привести их к

одному масштабу, взяв за единицу длины длину катета, то они совпадут (что показывает простое наложение), и не только они, но и всё бесконечное множество равнобедренных треугольников (при подходящем выборе масштаба каждого из них) совместится в одном. *Разные объекты этого множества подобны друг другу.*

Возьмём теперь бесконечную (евклидову) прямую и изменим её масштаб (увеличим в одинаковое число раз расстояния между всеми её точками). Нам не надо теперь искать какой-то другой объект, чтобы завить, что она подобна ему: *она подобна самой себе.* Самой себе подобна плоскость, самому себе подобно евклидово пространство. Эти объекты *самоподобны*. Существуют ли другие, менее тривиальные объекты, обладающие свойством самоподобия?

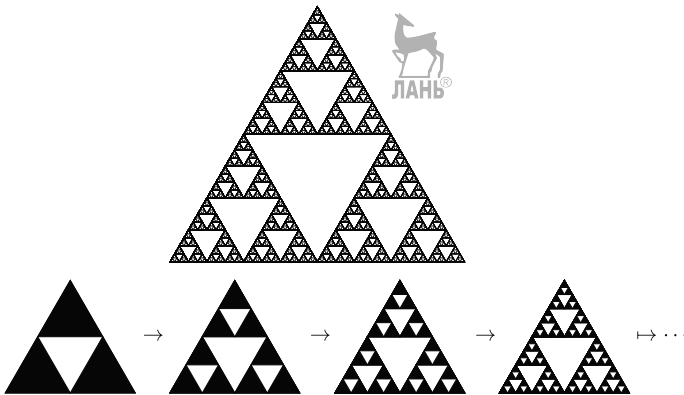


Рис. 12.28. Треугольник Серпинского и процесс его построения

Возьмём правильный треугольник и, соединив срединные точки его сторон, вынем центральную часть (рис.12.28). Оставшаяся фигура являет собой три правильных треугольника в два раза меньшего линейного размера. Повторяя эту процедуру, мы продолжаем измельчать остающиеся на этой *салфетке* треугольнички. То, что получится *в пределе* бесконечного числа таких операций (шагов), называется *треугольной салфеткой* или просто *треугольником Серпинского*.

Если представить себе исходный треугольник как элемент *всемирной* салфетки, то мы

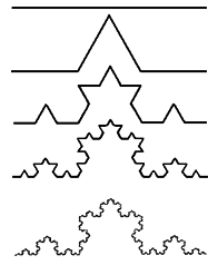


Рис. 12.29. Снежинка Коха

получим самоподобный объект: выбрав центр, скажем, в нижней точке какого-то треугольника и уменьшив размеры всего множества в два раза, мы опять увидим ту же картину. Правда, в отличие от прямой и плоскости, изменение масштаба должно быть кратно 2, а не произвольно. Довольно любопытна ситуация с числовыми характеристиками этой салфетки. Пусть S_0 – площадь начального треугольника, а L – его периметр. После каждого шага от площади предыдущего элемента остаётся $3/4$ его площади, а периметр возрастает, $3/2$ раза. После n шагов имеем $S_n = S_0(3/4)^n$, и $L_n = L_0(3/2)^n$, так что в пределе $S_n \rightarrow 0$, а $L_n \rightarrow \infty$. Легко понять, что подобными построениями мож-

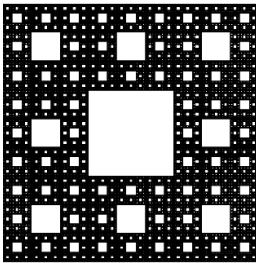


Рис. 12.30. Коврик Серпинского

но получить много новых объектов, некоторые из них так же носят собственные имена – снежинка Коха фрагмент которой показан на рис. 12.29, коврик Серпинского (рис. 12.30), губка Менгера, бабочка Мандельброта... Множество прекрасных (в цвете!) изображений фрактальных структур может быть найдено в Интернете вместе с описанием алгоритмов их компьютерного изготовления.

Существует несколько определений класса таких объектов, называемых *фракталами*. Не собираясь заниматься доказательством теорем,

мы изберём для первичного знакомства наиболее наглядное из них: **фрактал** – это фигура, которую можно разбить на M одинаковых по форме частей, подобных исходной фигуре и имеющих в N раз меньший линейный размер. Число

$$d_f = \log_N M \quad (12.6.1)$$

называется *размерностью фрактала*. Представив последнюю формулу в виде

$$M = N^{d_f},$$

поймём, почему здесь употреблён термин «размерность»: для отрезка прямой получаем $d_f = 1$, для квадрата $d_f = 2$, для куба $d_f = 3$, но эти числа и суть размерности соответствующих пространств. Однако в случае треугольника Серпинского мы имеем

$$d_f = \log_2 3 \approx 1,58.$$

Определённая таким образом размерность его больше размерности линии, но меньше размерности поверхности, на которой он построен.

Однако зачем нужны такие «кубики Рубика» в механике? Какую пользу можно здесь извлечь из них? Прежде чем делать определённые выводы на этот счёт, необходимо освободиться от некоторой предвзятости, являющейся реакцией на непривычные конструкции типа бесконечно расстилающихся салфеток, ковриков, губок... Однако, нас не смущает отсутствие в мире прямых, бесконечных плоскостей, идеальных кубов и других объектов, мы понимаем: это – *модели*. Нам нужна не вся прямая, а её отрезок, не всё пространство, равномерно заполненное веществом, а некоторый объём, в котором происходит то, что нас интересует, и на которое не влияет то, что лежит за пределами этого объёма.

Три с лишним десятка лет тому назад, после первых удачных конференций разгорелся, можно сказать, ажиотажный спрос на фрактальные модели в самых разных областях физики, техники, биологии, геологии, астрофизики – от наноразмерных кластеров до крупномасштабной структуры Вселенной. При этом первый признак, на который обычно обращается внимание, – это явная неоднородность объекта, неоднородность разномасштабная, мелкие неоднородности (пузырьки, включения, примеси) перемешиваются с более крупными, но более редкими, с увеличением обзора встречаются ещё более крупные по размерам, неоднородности... Похоже на развитую турбулентность, правда? Похожая картина наблюдается и в межзвёздной среде, и сами галактики распределены не равномерно, а скоплениями, из которых составляются ещё большие скопления... Но где же здесь наш треугольник?

Да, действительно, такого строго порядка, как на рисунке, скорее всего в естественной среде не встретить, и определить d_f по формуле (12.6.1) не удастся. Но из этой формулы можно (несколько огрубляя ломаную линию гладкой аппроксимацией, получить другую,

$$m(R) \sim AR^{d_m}, \quad (12.6.2)$$

в которой $m(R)$ – масса, заключённая в сфере радиусом R , а $d_m \approx d_f$ – массовый показатель, не слишком отличающийся от d_f , так что мы не будем делать между ними различия. Из формулы ещё более ясно видно, что при $d_m = 3$ мы имеем равномерное распределение массы в объёме, при $d_m = 2$ – по поверхности, при $d_m = 1$ по прямой, на которой находится центр самоподобия.

Выбирая разные точки неоднородной среды в качестве центров самоподобия, мы можем разные $m(R)$ при одном и том же R , что наводит

на мысль об использовании усреднённых данных,

$$\langle m(R) \rangle \sim AR^{d_m}, \quad (12.6.3)$$

но способ усреднения упирается в эргодическую проблему: можно ли рассматривать эти функции, полученные в разных местах неоднородного образца, как *независимые реализации* некоторого статистического ансамбля? К этому вопросу следовало бы добавить: а действительно ли наблюдается самоподобие, а не просто разномасштабно неоднородная среда? А в каком диапазоне масштабов оно наблюдается? А достаточен ли этот диапазон, чтобы сделать надлежащие выводы, основанные только на фрактальных свойствах? Даже при выполнении этих условий в реальности вместо «теоретической» формулы (12.6.3) имеем

$$\langle m(R) \rangle \approx AR^{d_m}, \quad R_1 < R < R_2,$$

где R_1 и R_2 – нижний и верхний пределы фрактального поведения, и не всегда ясно, как ограниченность этой области и поведение $\langle m(R) \rangle$ за её пределами этой влияет результат.

Несмотря на часто остающиеся неотвеченными вопросы, *фрактальный анализ* нашёл заметное применение в механике при изучении турбулентности, просачивания (перколяции) в пористых средах, образования трещин, особенностей трения между шероховатыми поверхностями, поведения древесно-полимерных композитов, течения грунтовых вод, распространения сейсмических волн, при описании атмосферных явлений, образования кластеров, при разработке новых химических технологий, описании явлений в плазме, использовании пористых материалов в полупроводниках, применени пористых электродов в электрохимических устройствах нового поколения (суперконденсаторах) и др.

12.6.2 Стохастическое самоподобие

Переход от *статических структур*⁶³ к *динамическим процессам* потребует от нас некоторых уточнений. Начнём с нескольких определений.

Самоподобие (автомодельность, скейлинг) процесса есть специальный тип его симметрии, такой, что изменение масштаба фазовых переменных может быть скомпенсировано изменением масштаба времени.

⁶³Упомянув выше о турбулентности, мы имели в виду её мгновенное состояние, как бы мгновенный снимок, без всякой динамики.

Детерминистический процесс $x(t)$, $t \geq 0$ называется *самоподобным процессом порядка H* относительно точки x_0 и момента времени t_0 , если существует положительное число H , такое, что для всех $a > 0$ и $t > 0$ выполняется соотношение

$$x(at) - x(at_0) = a^H [x(t) - x(t_0)].$$

Постоянная H , определяющая *порядок самоподобия*, называется *показателем Хёрста*.

Вертикальная координата падающего в однородном поле тяжести тела удовлетворяет уравнению

$$x(t) - x_0 = -g(t - t_0)^2.$$

Заменив в нём t на at , получим

$$x(at) - x(at_0) = -g(at - at_0)^2 = a^2 [x(t) - x(t_0)].$$

Следовательно, свободное падение тела есть самоподобный процесс второго порядка ($H = 2$) относительно начала падения $x_0 = x(t_0)$, Заметим, однако, что если взять в качестве начального другой момент t_1 момент времени, когда скорость была направлена вверх, $\dot{x}(t_1) = -v_1$,

$$x(t) - x(t_1) = -v_1(t - t_1) - g(t - t_1)^2,$$

и выполнить те же действия, мы придём к соотношению

$$x(at) - x(at_1) = -av_1(t - t_1) - a^2 g(t - t_1)^2.$$

Точка $(t_1, x(t_1))$ не является центром самоподобия, поскольку не существует такого числа H , удовлетворяющего условию

$$-ag(t - t_1) - a^2 g(t - t_1)^2 = a^H [-g(t - t_1) - g(t - t_1)^2].$$

В случае же движения движения тела, свободного от действия любых сил,

$$x(t) - x(t_0) = v_0(t - t_0),$$

и условие самоподобия выполняется относительно любой точки его траектории и любого момента времени, при этом $H = 1$.

В дальнейшем мы будем выбирать начало отсчёта времени и начало координат так, чтобы пространственно-временная точка $(x_0 = 0, t_0 = 0)$ совпадала с центром самоподобия,

$$x(at) = a^H x(t). \quad (12.6.4)$$

Решение этого функционального уравнения

$$x_H(t) = x_H(1)t^H. \quad (12.6.5)$$

Если H является целым, эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^H x_H}{dt^H} = H! x_H(1).$$

Формальное распространение этого соотношения на нецелые значения порядка приводит нас к дифференциальному уравнению нецелого (дробного) порядка

$${}_0D_t^H x_H(t) = \Gamma(H + 1)x_H(1).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что это равенство действительно согласуется с одним из определений дробной производной

$${}_0D_t^H x_H(t) = \frac{1}{\Gamma(1-H)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x_H(\tau) d\tau}{(t-\tau)^H}, \quad 0 < H < 1. \quad (12.6.6)$$

Действительно, подставив сюда выражение (12.6.5), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-H)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x_H(1)\tau^H d\tau}{(t-\tau)^H} &= \frac{x_H(1)}{\Gamma(1-H)} \frac{d}{dt} \left(t \int_0^1 \theta^H (1-\theta)^{-H} d\theta \right) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-H)} \frac{\Gamma(H+1)\Gamma(1-H)}{\Gamma(2)} x_H(1) = \Gamma(H+1)x_H(1). \end{aligned}$$

Заметим, что с оператором (12.6.6), точнее, с эквивалентной ему (при нулевом начальном значении функции) формой

$${}_0D_t^H x_H(t) = \frac{1}{\Gamma(1-H)} \int_0^t \frac{\dot{x}_H(\tau) d\tau}{(t-\tau)^H}$$

и специальном значении $H = 1/2$ мы встречались ранее при обсуждении запаздывающей силы Бассе, действующей на тело, движущееся в вязкой среде с переменной скоростью **(9.3.3)**.

Понятие самоподобия естественным образом распространяется на случайные процессы: случайный процесс $X(t)$, $t \geq 0$, называется *самоподобным порядка $H > 0$ в узком смысле*, если при любых $a > 0$ и $n =$

1, 2, 3, ... для любой последовательности $n \geq 1$, t_1, t_2, \dots, t_n совместное распределение случайных величин $X(at_1), \dots, X(at_n)$ совпадает с совместным распределением случайных величин $a^H X(t_1), \dots, a^H X(t_n)$:

$$(X(at_1), \dots, X(at_n)) \stackrel{d}{=} (a^H X(t_1), \dots, a^H X(t_n)). \quad (12.6.7)$$

Подчёркнём, что самоподобие случайных процессов, не означает совпадение реализаций этих процессов, а лишь совпадение вероятностей на их подмножествах, и по этой причине называется *стохастическим*.

Условие (12.6.7) мы будем записывать в виде

$$\{X(at)\} \stackrel{d}{=} \{a^H X(t)\},$$

запись же

$$X(at) \stackrel{d}{=} a^H X(t), \quad (12.6.8)$$

означающая совпадение только одномерных распределений случайных процессов $X(at)$ и $a^H X(t)$, определяет *самоподобие в широком смысле*.

Для однородных марковских процессов (процессов с независимыми приращениями), свойства которых полностью определяются их одномерными распределениями (к числу таковых относится, например, броуновское движение), оба эти понятия совпадают.

12.6.3 Автомодельность устойчивых распределений

Чтобы выразить стохастическое самоподобие однородных марковских процессов в терминах распределений, заметим, что из (12.6.8) следует соотношение

$$X(t) \stackrel{d}{=} t^H X(1),$$

согласно которому одномерную функцию распределения процесса можно выразить через плотность вероятности случайной величины

$$g(x) \equiv f(x, 1) :$$

$$P(X(t) < x) = P(t^H X(1) < x) = P(X(1) < xt^{-H}) = \int_{-\infty}^{xt^{-H}} g(x') dx'.$$

Дифференцируя по x , приходим к формуле

$$f(x, t) = t^{-H} g(xt^{-H}),$$

являющейся просто иной формы записи свойства стохастического самоподобия:

$$f(x, at) = a^{-H} f(xa^{-H}, t).$$

Детерминированную траекторию $x(t) = t^H$ (напомним, $H = 1$ для свободного движения и 2 – для равноускоренного) формально тоже можно представить посредством плотности вероятности

$$f(x, t) = \delta(x - t^H).$$

Воспользовавшись элементарным свойством δ -функции, перепишем это распределение в виде

$$f(x, t) = t^{-H} \phi(xt^{-H}), \quad (12.6.9)$$

где $\phi(\xi) = \delta(\xi - 1)$. Поскольку $f(x, t)$ – плотность вероятности, сама вероятность удовлетворяет соотношению

$$f(x, t)dx = \phi(xt^{-H})d(xt^{-H}), \quad (12.6.10)$$

откуда ясно видно, что влияние на вероятность любого изменения времени t может быть строго компенсировано соответствующим выбором x . Такая функция (12.6.10) и соответствующая ей плотность (12.6.9) могут быть названы *автомодельными*.

Вернёмся теперь к хорошо известному нам случайному процессу – броуновскому движению. Его одномерная версия (при единичном коэффициенте диффузии) описывается уравнением

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad f(x, 0) = \delta(x).$$

Решение этого уравнения

$$f(x, t) = (2\sqrt{\pi t})^{-1} \exp(-x^2/4t)$$

автомодельно,

$$f(x, t) = t^{-1/2} g_2(x/\sqrt{t}), \quad g_2(\xi) = (2\sqrt{\pi})^{-1} \exp(-\xi^2/4),$$

с показателем Хёрста $H = 1/2$. Заметим, что $g_2(x)$ представляет собой нормальную (гауссову) плотность с удвоенной дисперсией.

Будучи однородным марковским процессом, броуновское движение удовлетворяет условию

$$X(t_1 + t_2) = X(t_1) + X(t_2), \quad (12.6.11)$$

в котором случайные смещения $X(t_1)$ и $X(t_2)$ в непересекающиеся интервалы времени $(0, t_1)$ и $(t_1, t_1 + t_2)$ взаимно независимы. Существуют ли другие однородные марковские процессы, являющиеся самоподобными?

Обратимся к формуле (12.6.11). Ввиду независимости смещений плотность вероятности для их суммы даётся свёрткой плотностей слагаемых:

$$f(x, t_1 + t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x', t_1) f(x', t_2) dx' \equiv f(x, t_1) * f(x, t_2). \quad (12.6.12)$$

Переход в интегральном уравнении (12.6.12) от плотностей вероятностей к характеристическим функциям (путём выполнения преобразования Фурье) в предположении об автомодельном характере распределения $f(x, t)$,

$$\tilde{f}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} g(xt^{-H}) t^{-H} dx = \tilde{g}(kt^H),$$

приводит к алгебраическому уравнению для $\tilde{g}(k)$:

$$\tilde{g}(k(t_1 + t_2)^H) = \tilde{g}(kt_1^H) \tilde{g}(kt_2^H).$$

Прямой подстановкой легко проверить, что чётные (относительно k) решения этого уравнения, соответствующие симметричным относительно нуля распределениями (мы ограничимся здесь лишь таким, хотя есть и несимметричные) имеют вид⁶⁴

$$\tilde{g}^\alpha(k) = e^{-|k|^\alpha}, \quad -\infty < k < \infty, \quad 0 < \alpha \equiv H^{-1} \leq 2.$$

Здесь коэффициент перед экспонентой единица – характеристическая функция в нуле и должна быть равна 1, показатель отрицательный – характеристическая функция должна быть меньше единицы при всех других k . Далее, пусть S – случайная величина с характеристической функцией $\tilde{g}(k)$. Легко убедиться, что какой бы ни была эта характеристическая функция, имеет место соотношение

$$-[\ln \tilde{g}(k)]'_{k=0} = \sigma_S^2 \equiv \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2 > 0.$$

⁶⁴Следуя традициям теории вероятностей, мы переходим здесь от индекса Хёрста H к показателю Леви $\alpha = 1/H$.

По этой причине предельное (при $k \rightarrow 0$) значение величины

$$-\ln \tilde{g}^\alpha(k)'' = (|k|^\alpha)'' = \alpha(\alpha - 1)|k|^{\alpha-2}$$

должно быть положительным (пока существует математическое ожидание), и это имеет место при $\alpha \leq 2$, однако при $\alpha > 2$ предел равен нулю, и стало быть, величина S перестаёт быть случайной. За указанными пределами значений показателя α трансформанта Фурье перестаёт быть характеристической функцией и вероятностное описание теряет смысл.

Таким образом, мы нашли целое семейство самоподобных (однородных марковских симметричных) процессов и соответствующих им автомодельных распределений. Заметим, что при $\alpha = 0$ соответствующая плотность имеет вырожденный вид: $g^{(0)}(x) = \delta(x)$ и не включается обычно в семейство этих распределений, называемых *устойчивыми законами Леви*, крайнее значение $\alpha = 2$ соответствует нормальному распределению с дисперсией, равной 2, а *все остальные устойчивые распределения имеют бесконечную дисперсию, порождаемую тяжёлыми асимптотическими хвостами степенного типа* $P(|S| > x) \sim x^{-\alpha}, x \rightarrow \infty$. Происхождение названия связано с важнейшим их свойством: сумма независимых случайных слагаемых, распределённых по устойчивому закону, распределена по тому же закону (с соответствующей коррекцией масштабов). Среди симметричных плотностей устойчивого семейства лишь две выражаются в элементарном виде: это нормальное (гауссово) распределение ($\alpha = 2$) и распределение Коши ($\alpha = 1$):

$$g^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Из несимметричных устойчивых плотностей нам тоже знакома одна: это – плотность Леви-Смирнова, возникающая в задаче о времени первого прохождения броуновской частицей заданной координаты.

И последнее замечание: автомодельное распределение

$$f^{(\alpha)}(x, t) = t^{-1/\alpha} g^\alpha(xt^{-1/\alpha})$$

является решением уравнения с *дробной производной по координате*:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = - \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{\alpha/2} f(x, t), \quad f(x, 0) = \delta(x).$$

Более подробные сведения по этим вопросам читатель может найти в обзоре автора⁶⁵ и его книге⁶⁶.

12.6.4 Автомодельные решения и динамическое самоподобие

Надеюсь, читатель понимает, что автомодельность решений вовсе не является непременным свойством любой динамической системы. Автомодельность свидетельствует об особом типе эволюции системы, таком, что её состояния в различные моменты времени связаны неизменным соотношением подобия, характеризующим процесс. С точки зрения теории подобия, *другой* системой является здесь *та же система в другой момент времени* (отсюда и термин *самоподобие*, синоним автомодельности). Пример такого процесса мы уже видели в п. 12.5.3: увеличиваясь со временем в размерах, полусфера продолжала оставаться полусферой. В учебной литературе можно найти много других примеров, но большинство из них адаптированы путём упрощения и пренебрежения каким-то не всегда несущественными факторами. Если удаётся в процессе решения *реальной задачи* выйти на автомодельное решение, это считается большой удачей.

Линейная диффузия



До сих пор мы замечали автомодельность уже готовых уравнений. Сейчас же покажем, каким образом идея автомодельности позволяет находить такие решения, иными словами, решать уравнения. Преимущество такого подхода (если он применим, конечно) заключается в том, что он уменьшает число независимых переменных, что, естественно, упрощает процесс решения. Так, в случае изначально двух переменных введение автомодельной переменной позволяет перейти от уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению. Вот такие случаи мы здесь и рассмотрим. Начнём опять с известного нам уравнения одномерной диффузии

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}. \quad (12.6.13)$$

Требуется найти его *фундаментальное решение*, то есть решение $f(x, t)$ на прямой $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющее условиям $f(x, 0) =$

⁶⁵ В.В.Учайкин. Успехи физических наук, **173**, 8, 847-876 (2003).

⁶⁶ В.В.Учайкин. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008.

$Q\delta(x)$ и $f(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и любом t . Размерности определяющих величин в классе MLT

$$[x] = L, [t] = T, [D] = L^2T^{-1}, [Q] = FL,$$

где F – размерность f . Из уравнения следует, что комплекс $f(Dt)^{1/2}Q^{-1}$ безразмерен. По II-теореме, f в этом случае может зависеть лишь от безразмерных комплексов, составленных из размерных величин x, t, D, Q . Выбрав в качестве такового $\xi = x/\sqrt{Dt}$, представим фундаментальное решение в виде

$$f(x, t) = \frac{Q}{\sqrt{Dt}}g(\xi), \quad (12.6.14)$$

где g – некая, неизвестная пока нам безразмерная функция *автономной переменной* ξ . Чтобы найти эту функцию, надо получить уравнение для неё, что несложно сделать, подставив (12.6.14) в уравнение (12.6.13) и выполнив предписываемые левой частью действия:

$$g'' = -(1/2)(\xi g' + g) = -(1/2)(\xi g)'$$

Однократное интегрирование обеих частей его даёт

$$g' = -(1/2)\xi g + C_1,$$

где C_1 – постоянная. Функция $f(x, t)$ – чётная (по x : это видно из инвариантности уравнения (1) относительно изменения знака координаты), стало быть и $g(x)$ – чётная, да ещё и дифференцируемая (что обычно подразумевается по умолчанию, поскольку уравнение содержит производную от неё), а значит, её производная в точке симметрии $\xi = 0$ равна нулю, поэтому и $C_1 = 0$. Интегрирование оставшегося уравнения

$$g' = -(1/2)\xi g$$

даёт

$$g(\xi) = C_2 e^{-\xi^2/4}, \quad -\infty < \xi < \infty.$$

Значение последней постоянной можно определить, проинтегрировав уравнение (12.6.13) по всей оси координат и воспользовавшись условиями на бесконечности (там все производные равны нулю). В результате окажется

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = 0,$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, 0) dx = Q.$$

Подставляя сюда

$$f(x, t) = \frac{C_2 Q}{\sqrt{Dt}} e^{-\xi^2/4},$$

получим $C_2 = 1/(2\sqrt{\pi})$, так что искомого фундаментального решения имеет вид

$$f(x, t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Нелинейная диффузия

В заключение приведём автомодельное решение одномерного аналога нелинейного диффузионного уравнения (12.1.21) с параметрами $c = 1/2$ и $m = 2$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho^2(x, t)}{\partial x^2}, \quad \rho(x, 0) = \delta(x). \quad (12.6.15)$$

Автомодельная подстановка здесь получается в виде

$$\rho(x, t) = t^{-1/3} g(\xi), \quad \xi = xt^{-1/3}.$$

Выполняя необходимые вычисления,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{3} \left(t^{-4/3} g + t^{-5/3} x g' \right),$$

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial x} = 2t^{-1} g g',$$

$$\frac{\partial^2 \rho^2}{\partial x^2} = 2 \left(t^{-4/3} g'^2 + t^{-4/3} g g'' \right),$$

и подставляя результат в уравнение (12.6.15) приходим к уравнению для $g(\xi)$

$$(g g')' + (1/3) \xi g' + (1/3) g = 0.$$

Первое интегрирование вместо с подходящим выбором постоянной ведёт к нелинейному уравнению

$$g g' + (1/3) \xi g = 0.$$

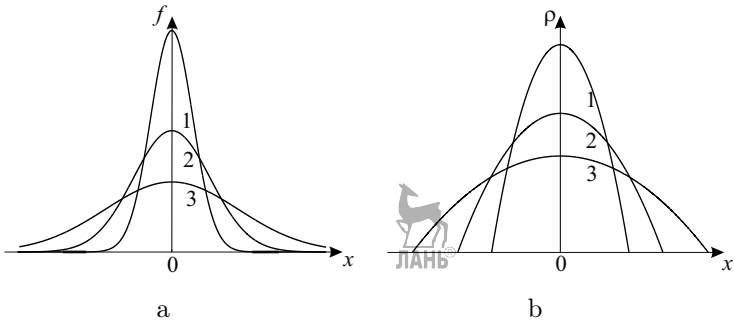


Рис. 12.31. Фундаментальные решения уравнений линейной (а) и нелинейной (б) диффузии; $t = 0.3(1), 1(2), 3(3)$

Его решение представляется в виде

$$g(\xi) = \begin{cases} C - \xi^2/6, & \xi^2 \leq 6C; \\ 0, & \xi^2 > 6C. \end{cases}$$

Постоянная $C = \left(\frac{3}{4\sqrt{6}}\right)^{2/3}$ находится из условия нормировки. Заметим, что в отличие от линейной нелинейная диффузия представляет собой расширение ограниченного сферой облака, за пределами которого диффундирующая субстанция отсутствует (рис. 12.31). Радиус этого облака растёт по закону $t^{1/3}$.

12.7 Дробно-дифференциальные модели

12.7.1 Производные дробного порядка

Весьма популярным в последние годы видом эредитарных операторов становятся дифференциальные и интегральные операторы *дробных порядков*. Мы уже пользовались ими в нестационарной динамике вязкой жидкости (см. **9.3.3**). Напомним ещё раз их математический смысл и физическую интерпретацию.

Простейшая форма производной дробного порядка $\nu \in (0, 1]$ даётся сочетанием интегрального оператора дробного порядка $\mu = 1 - \nu$

$${}_a I_t^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t (t-t')^{\mu-1} f(t') dt'$$

(продолжающего известную формулу Коши для многократного повторного интеграла в область нецелых порядков) с обычным оператором дифференцирования. В зависимости от порядка следования этих операторов получается производная Римана-Лиувилля

$${}_a D_t^\nu f(t) = \frac{d}{dt} {}_a I_t^{1-\nu} f(t)$$

или Герасимова-Капуто

$${}_a^\nu D_t f(t) = {}_a I_t^{1-\nu} \frac{d}{dt} f(t)$$

порядка $\nu \in (0, 1)$. Поскольку порядки интегральных и дифференциальных операторов теперь образуют непрерывные множества, по ним можно интегрировать и даже дифференцировать. Кроме того, они (порядки) могут быть и комплексными.

Дробно-дифференциальные операторы удобны тем, что будучи нелокальными по аргументу (в данном случае, по времени) и привнося тем самым новые качественные свойства формулируемым с их помощью моделям физических процессов, они, в основном, сохраняют или несколько модифицируют свойства обычных производных и переходят в них, как только порядок становится целым. Подробную информацию о работе с этими операторами и их применении к физическим задачам можно найти в книге⁶⁷.

Классический пример появления дробно-дифференциального (правда, неопознанного в этом качестве) оператора даёт решение задачи о движении тела по поверхности несжимаемой вязкой жидкости (см. 9.3.2). На горизонтальной поверхности $z = 0$ (ось z направлена вверх) бесконечно глубокого слоя ($-\infty < z < 0$) такой жидкости находится больших размеров тонкая пластина, к которой приложена горизонтальная же сила $F(t)$, увлекающая её вместе с прилегающими слоями жидкости в движение вдоль оси x (рис. 12.32). Движение пластины описывается уравнением Ньютона

$$m \frac{dV}{dt} = F(t) + Q(t), \quad (12.7.1)$$

где $Q(t) = -S\eta \partial v(z, t) / \partial z|_{z=0}$ – сила сопротивления, действующая на пластину со стороны жидкости, $v(z, t)$ – x -компонента скорости жид-

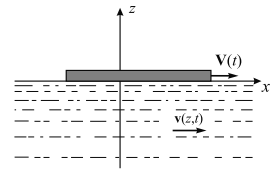


Рис. 12.32. Движение тела по поверхности несжимаемой вязкой жидкости

⁶⁷ В.В.Учайкин. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008.

кости на глубине z (остальные компоненты её равны нулю). По условию прилипания $V(t) = v(0, t)$, а поле скоростей $v(z, t)$ удовлетворяет уравнению Навье-Стокса:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (12.7.2)$$

В системе уравнений (12.7.1)-(12.7.2), описывающей механическую систему тело+жидкость, все производные целого порядка и все операторы дифференциальные. Инфинитезимальная эволюция в любой момент времени t зависит только от состояния $(V(t), v(z, t))$ в этот же момент, и по этой причине дальнейшая эволюция системы при заданном состоянии не зависит от предыстории (по вероятностной терминологии процесс марковский).

Но вот, выполняя известные процедуры⁶⁸, мы исключаем из этой системы переменную $v(z, t)$ и получаем уравнение для оставшейся переменной – скорости пластины. Если при $t < 0$ жидкость вместе с пластиной находилась с покое, а приложенная затем сила ограничена по величине, остающееся уравнение вид

$$m \frac{dV}{dt} = F - S\sqrt{\eta\rho} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau \right].$$

Теперь это – интегро-дифференциальное уравнение вольтерровского типа с запаздывающим аргументом неизвестной функции под интегралом. Более того, заключённый в квадратные скобки член представляет собой дробную производную порядка $\nu \equiv 1/2$ (при указанных условиях различие между обоими типами производных исчезает).

Перепишем это уравнение в виде

$$m \frac{dV}{dt} + S\sqrt{\eta\rho} {}^{\nu}D_t V = F(t).$$

Физическая интерпретация этого результата заключается в том, что наблюдаемое в момент времени t в точке (x, z) напряжение определяется распределением скоростей жидких частиц, приходящих из окрестности другой точки этого слоя (x', z) , где они находились, скажем, в момент $t' < t$. В силу трансляционной инвариантности решения относительно x , такое же распределение скоростей в этот момент (t') имело место и в точке наблюдения (x, z) . Это и есть простейший механизм эредитарности – «механическая» память.

⁶⁸Слэзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: ГИТТЛ, 1955.

12.7.2 Дробно-дифференциальная вязкоупругость

В 1921 г. Нуттинг сообщил о результатах своих наблюдений временной динамики релаксаций, согласно которым механические напряжения, возникшие при мгновенной деформации вязкоупругих материалов, спадают со временем по степенному закону⁶⁹:

$$\sigma(t) \simeq \text{const} \cdot \Delta\varepsilon \cdot t^{-\alpha},$$

где $\alpha \in (0, 1)$ – показатель степени, для многих материалов близкий к 0,5. Этот вывод находился в резком противоречии с классическим представлением об экспоненциальном характере релаксаций. Позже исследование Гемантом поведения вязкоупругих материалов под действием гармонической нагрузки и вычисление методами молекулярной динамики подтвердили медленное затухание функции памяти по степенному закону $t^{-3/2}$.⁷⁰

В числе первых механиков, увидевших в таком проявлении вязкоупругости перспективы создания дробно-дифференциальной модели релаксации, следует назвать Геманта (1936), Скотт-Блэра (1947), Герасимова (1948). В своей работе, начинающейся со ссылки на известное уравнение Больцмана с последствием (рис. 12.33), А. Н. Герасимов пишет:

«Экспериментальные исследования показывают, что особого внимания заслуживает частный вид этого уравнения, соответствующий только наследственной части напряжения,

$$\sigma(t) = \int_0^{\infty} G(\tau)\varepsilon(t - \tau)d\tau.$$

Не меньший интерес представляет также тот случай, когда напряжение $\sigma(t)$ зависит от всех предшествующих, надлежащим образом взвешенных значений скоростей деформации, но не деформаций. Для таких процессов деформирования зависимость между σ и ε

$$\sigma(t) = \int_0^{\infty} K(\tau)\dot{\varepsilon}(t - \tau)d\tau,$$

если ограничиваться только наследственной частью напряжения».

Продолжим цитирование работы Герасимова (мне представляется это важным, потому что обычно приоритет в создании и развитии дробно-дифференциальной модели вязкоупругости приписывают авторам более поздних публикаций).

⁶⁹Nutting P.G., J. Franklin Inst. **191**, 679-685 (1921).

⁷⁰Есть основания думать, что такими тяжелыми хвостами обладают функции памяти всех навье-стоксовых коэффициентов. Полагают также, что наличие долговременных релаксаций степенного типа может быть связано с крупномасштабными коллективными процессами.

Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII. 1948

ЛАНБ®

ОБОБЩЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ¹

А. Н. Герасимов

(Москва)

Явления упругого последействия в свете теории наследственности описываются линейным интегральным уравнением Больцмана^[1]

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \int_0^{\infty} G(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

где E — упругая постоянная и $G(\tau)$ — наследственная функция, определяемая из опыта. Экспериментальные исследования показывают, что особого внимания заслуживает частный вид этого уравнения, соответствующий только наследственной части напряжения,

$$\sigma(t) = \int_0^{\infty} G(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

Не меньший интерес представляет также тот случай, когда напряжение $\sigma(t)$ зависит от всех предшествующих, надлежащим образом взвешенных значений скоростей деформации, но не деформаций.

Для таких процессов деформирования зависимость между σ и $\dot{\varepsilon}$

$$\sigma(t) = \int_0^{\infty} K(\tau)\dot{\varepsilon}(t-\tau)d\tau$$

если ограничиваться только наследственной частью напряжения.

Наследственная функция для некоторых материалов (волоконистой структуры) должна иметь вид

$$K(\tau) = \frac{A}{\tau^\alpha}$$

где постоянная $A > 0$ и α лежит между нулем и единицей. Положив еще

$$A = \frac{x}{\Gamma(1-x)}$$

где постоянная $x > 0$ зависит от свойств вещества и Γ есть эйлеров интеграл второго рода, получим

$$\sigma(t) = x \frac{1}{\Gamma(1-x)} \int_0^{\infty} \frac{\dot{\varepsilon}(t-\tau)d\tau}{\tau^x} = x \frac{\partial^x \varepsilon(t)}{\partial t^x} \quad (0 < x < 1) \quad (1)$$

так как производная от $\varepsilon(t)$ по t порядка α будет

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)} \int_0^{\infty} \frac{\dot{\varepsilon}(t-\tau)d\tau}{\tau^x}$$

¹ Доложено в Институте механики АН СССР 29 мая 1947 г.

«Наследственная функция для некоторых материалов (волокнистой структуры) должна иметь вид

$$K(\tau) = \frac{A}{\tau^\alpha},$$

где постоянная $A > 0$ и α лежит между нулём и единицей. Положив ещё

$$A = \frac{\kappa_\alpha}{\Gamma(1-\alpha)},$$

где постоянная $\kappa_\alpha > 0$ зависит от свойств вещества и Γ есть эйлеров интеграл второго рода, получим

$$\sigma(t) = \frac{\kappa_\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{\dot{\varepsilon}(t-\tau)}{\tau^\alpha} dt \equiv \kappa_\alpha {}_0^{\alpha}D_t \varepsilon(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Это линейное соотношение между ε и σ при $\alpha = 0$ обращается в закон Гука, при $\alpha = 1$ – в закон Ньютона для внутреннего трения. Мы будем исходить из зависимости (12.10.1) для любого α между 0 и 1.⁷¹

Таким образом, вязкоупругая среда в определенном отношении занимает промежуточное положение между вязкой неупругой и абсолютно упругой невязкой материями,

$$\sigma(t) = \begin{cases} E\varepsilon(t), & (\text{закон Гука}); \\ \eta d\varepsilon(t)/dt, & (\text{закон Ньютона}), \end{cases}$$

и формула

$$\sigma(t) = \kappa_\alpha {}_0^{\alpha}D_t \varepsilon(t)$$

может рассматриваться как возможный способ интерполяции между ними. При $\alpha = 1$ она даёт закон Ньютона, при $\alpha = 0$ – закон Гука. Конечно, это не единственный способ интерполяции, и тот факт, что степенной закон Нуттинга связан с решением уравнения с дробной производной, играет здесь решающую роль.

Дробно-дифференциальный подход, развитие которого в реологии связано с именами Скотта-Блэра, Бэгли и Торвика, Горенфлю и Майнарди, Фридриха и Шисселя, Блюмена и Метцлера, Нонненмейкера и Глекля, Клафтера и Шлесингера, Россихина и Шитиковой, был успешно применен для описания реологического поведения неорганических и органических материалов в широкой области температур (см, работы⁷² и библиографию в них).

⁷¹Герасимов А. Н., Прикладная математика и механика **12**, 251 (1948).

⁷²Alcoutlabi M., Martinez-Vega J. J., Journal of Materials Science **34**, 2361 (1999); Deseri L., Zingales M., Pollaci P., The state of fractional hereditary materials, Discrete and Continuous Dynamical Systems, ser. B, Volume 19, Number 7, 2014, 2065-2089.

12.7.3 Динамика вязкоупругой среды в модели Герасимова

Плоское течение

Первой задачей, решенной Герасимовым в простейшей дробно-дифференциальной реологической модели с конститутивным уравнением

$$\sigma(t) = \kappa_\alpha {}_0^\alpha D_t \varepsilon(t),$$

была задача о течении вязкоупругой среды с указанными свойствами, заключенной между двумя параллельными плоскостями. Нижняя плоскость ($x = 0$) неподвижна, верхняя ($x = a$) движется в направлении оси OY по заданному закону $\varphi(t)$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. Начальное и граничное условия для y -координаты жидкой частицы $y(x, t)$ имеют вид:

$$y(x, 0) = 0, \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, y(0, t) = 0, y(a, t) = \varphi(t).$$

Выделим элементарный параллелепипед жидкости, ограниченный двумя горизонтальными гранями единичной площади с расстоянием dx между ними. Уравнение движения центра масс этого элемента имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

где $\rho = \text{const}$ – плотность жидкости. Принимая во внимание, что

$$\varepsilon = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \sigma = \kappa_\alpha {}_0^\alpha D_t \varepsilon = \kappa_\alpha {}_0^\alpha D_t \frac{\partial y}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_\alpha {}_0^\alpha D_t \varepsilon) = \kappa_\alpha {}_0^\alpha D_t \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

получаем уравнение движения в виде

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = {}_0^\alpha D_t \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad c_\alpha^2 = \frac{\rho}{\kappa_\alpha}.$$

Для решения этой задачи Герасимов использовал операционный метод Хэвисайда. Переход от функции $y(x, t)$ к ее изображению $\hat{y}(x, p)$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению 2-го порядка

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = c_\alpha^2 p^{2-\alpha} \hat{y}$$

с граничными условиями

$$\hat{y}(0, p) = 0, \quad \hat{y}(a, p) = \hat{\varphi}(p).$$

Его решение имеет вид

$$\hat{y}(x, p) = \hat{K}(p)\hat{\varphi}(p),$$

где

$$\hat{K}(p) = \frac{\text{sh}(c_\alpha p^{1-\alpha/2} x)}{\text{sh}(c_\alpha p^{1-\alpha/2} a)}.$$

Обратное преобразование было выполнено для трех случаев.

1. Ньютонова жидкость ($\alpha = 1$):

$$y(x, t) = \frac{2}{(\pi c_1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \times$$

$$\times \int_0^t \exp\left\{-\left(\frac{k\pi}{c_1}\right)^2 (t-\tau)\right\} \varphi(\tau) d\tau,$$

$$0 \leq x \leq a.$$

2. Упругая среда ($\alpha = 0$):

$$y(x, t) = \frac{2}{c_0 a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \int_0^t \sin\left\{\left(\frac{k\pi}{c_0 a}\right) (t-\tau)\right\} \varphi(\tau) d\tau,$$

$$0 \leq x < a.$$

3. Промежуточный случай – вязкоупругая среда с $\alpha = 1/2$.

$$y(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \int_0^t \dot{\phi}_n(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad 0 \leq x < a,$$

$$\phi_n(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{c_{1/2} a}\right) \frac{(-1)^k \tau^{3k/2}}{\Gamma(3k/2 + 1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Для равномерного движения верхней плоскости

$$\varphi(t) = vt, \quad v = \text{const} > 0$$

Герасимов нашел напряжение на верхней поверхности при произвольном α в виде двойного ряда:

$$\sigma(a, t) = \kappa c_{1/2} v \left\{ \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha/2)} t^{-\alpha/2} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[-(2k+2)c_{\alpha} a^j]^k}{j! \Gamma((1-j)(1-\alpha/2))} t^{-j(1-\alpha/2) - \alpha/2} \right\}.$$

При $t = 0$ оно обращается в бесконечность порядка $\alpha/2$: в вязкой жидкости нельзя мгновенно сообщить граничной плоскости $x = a$ конечную скорость, применяя усилие конечной величины.

Цилиндрическое течение

Вторая задача, решенная Герасимовым, – движение вязкоупругой жидкости между коаксиальными цилиндрическими поверхностями $r_1 < r < r_2$, вращающимися по заданным законам $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Уравнение движения для углового смещения $\varphi(r, t)$ получено в виде

$$\rho r^3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left({}^{\alpha} D_t \varphi(r, t) \right) \right], \quad r_1 \leq r \leq r_2.$$

Его решение должно удовлетворять начальным условиям

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

и граничным условиям

$$\varphi(r_1, t) = \varphi_1(t), \quad \varphi(r_2, t) = \varphi_2(t),$$

выражающим прилипание частиц на стенках. Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ в начальный момент времени $t = 0$ предполагаются равными нулю вместе со своими производными.

В частном случае, когда $r_2 - r_1 = \delta_0$ мало по сравнению с r_1 (подшипник скольжения),

$$\sigma(r, t) = \frac{\kappa r_1 r_2}{r \delta_0} {}^{\alpha} D_t \psi(t), \quad \psi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t),$$

напряжения на поверхностях даются выражениями

$$\sigma(r_1, t) = \frac{\kappa r_2}{\delta_0} {}^{\alpha} D_t \psi(t), \quad \sigma(r_2, t) = \frac{\kappa r_2}{\delta_0} {}^{\alpha} D_t \psi(t). \quad (12.7.3)$$

Заметим, что напряжение на внешней поверхности меньше напряжения на внутренней в r_2/r_1 раз. Причина этого чисто геометрическая: по закону действия и противодействия обе силы должны быть равны, но распределены они по разным площадям, и концентрация силы (напряжение) должна быть выше на поверхности с меньшей площадью. При $\alpha = 1$ уравнение (12.7.3) дает закон Кулона – напряжение пропорционально относительной скорости вращения поверхностей; при $\alpha = 0$ оно превращается в закон Гука: напряжение пропорционально относительному смещению поверхностей. В случае гармонических колебаний поверхностей

$$\psi(t) = A \sin(\omega t)$$

напряжение тоже имеет гармонический вид

$$\sigma(r_1, t) = \frac{\kappa r_2}{\delta_0} A \sin\left(\omega t + \frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

со сдвигом фазы, зависящим от α . Напряжения в чисто упругой среде колеблются синфазно с движением поверхностей, в чисто вязкой среде сдвиг фаз составляет $\pi/2$.

Звук в термовязкой среде

Важной задачей акустики является расчет прохождения звуковых волн с учетом поглощения и рассеяния их в среде. Известно, что амплитуда плоской волны, распространяющейся вдоль оси z , убывает за счет поглощения по экспоненциальному закону

$$A(z) = A(0)e^{-\gamma z},$$

где коэффициент поглощения γ зависит от частоты звуковой волны, $\gamma = \gamma(\omega)$. Стандартная форма соотношения между волновым числом (длиной волнового вектора) k , частотой и коэффициентом поглощения имеет вид⁷³

$$k = \frac{\omega}{c_0} + i\gamma(\omega),$$

где $\gamma(\omega) = a_2\omega^2$. Эта квадратичная зависимость, однако, имеет место лишь в условиях малого поглощения, что фактически всегда справедливо для газов, но для других, более плотных сред, зависимость $\gamma(\omega)$ может оказаться отличной от квадратичной. В частности, в вязкой среде с очень высокой теплопроводностью коэффициент поглощения

⁷³Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988.

квадратично возрастает при низких частотах и приближается к постоянной величине при высоких:

$$\gamma(\omega) \sim \begin{cases} a_2\omega^2, & \omega \rightarrow 0, \\ a_0, & \omega \rightarrow \infty. \end{cases}$$

В работе⁷⁴ предложена более общая степенная аппроксимация, подкрепляемая рядом экспериментальных данных (п. 2.3.1, табл. 2.1):

$$\gamma(\omega) = a_\nu |\omega|^\nu, \nu \in [0, 2].$$

Объединим эти аппроксимации в единую формулу

$$\gamma(\omega) = a_0 + a_\nu |\omega|^\nu,$$

приводящую к соотношению

$$k = \frac{\omega}{c_0} + i[a_0 + a_\nu |\omega|^\nu].$$

Умножив обе части его на $-i\tilde{p}_\nu(k, \omega)$, где

$$\tilde{p}_\nu(k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(kx - \omega t)} p_\nu(x, t),$$

– трансформанта Фурье (по обоим переменным) давления в звуковой волне, мы увидим образ Фурье уравнения в частных производных

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial x} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial p_\nu}{\partial t} - [a_0 + a_\nu (-\Delta_1)^{\nu/2}] p_\nu(x, t), \quad \Delta_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Введя новые переменные $\tau = t - x/c_0$ и $f_\nu(x, \tau) = e^{a_0 x} p_\nu(x, \tau)$, приходим к одномерному дробно-дифференциальному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial f_\nu(x, \tau)}{\partial x} = -a_\nu (-\Delta_1)^{\nu/2} f_\nu(x, \tau).$$

Полагая источник звука находящимся в плоскости $x = 0$, запишем граничное условие в виде $f_\nu(0, \tau) = p_\nu(0, \tau) = p_0(\tau)$, тогда соответствующее ему решение выразится через одномерную симметричную устойчивую плотность⁷⁵ $g_1(\tau; \nu)$ интегралом

$$p_\nu(x, \tau) = (ax)^{-1/\nu} e^{-a_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} g_+ \left((\tau - \tau')(ax)^{-1/\nu} x; \nu \right) p_0(\tau') d\tau'.$$

⁷⁴Chen W. Chin. Phys. Lett. **22**, 2601 (2005).

⁷⁵В.В.Учайкин. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008.

В случае импульсного источника, или на большом расстоянии от источника ограниченной длительности решение принимает вид⁷⁶

$$p_\nu(x, \tau) = (ax)^{-1/\nu} e^{-a_0 x} g_+ \left(\tau(ax)^{-1/\nu}; \nu \right) Q_0, \quad Q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\tau') d\tau'.$$

По мере распространения импульса его длительность растет пропорционально $x^{1/\nu}$, где x – пройденное волной расстояние, амплитуда же волны убывает пропорционально обратной величине, $x^{-1/\nu}$.

12.7.4 Дробно-дифференциальная реология

Обобщённая модель Максвелла

Изучение деформаций и текучести вязкоупругих материалов составляет предмет раздела физической науки о веществе, называемый *реологией* (от греч. $\rho\epsilon\omicron\zeta$ – *течение, поток*). Рассмотренные в 11.1 составные модели вязкоупругих сред, образующие классическую реологию, легко обобщаются на дробные порядки. Так, обобщение модели Максвелла на дробно-дифференциальный тип⁷⁷ достигается заменами

$$\tau D_t \sigma \mapsto \tau^\alpha {}_0 D_t^\alpha \sigma(t), \quad \tau D_t \varepsilon \mapsto \tau^\beta {}_0 D_t^\beta \varepsilon(t); \quad 0 < \alpha, \beta < 1:$$

$$\sigma(t) + \tau^\alpha {}_0 D_t^\alpha \sigma(t) = E \tau^\beta {}_0 D_t^\beta \varepsilon(t),$$

Решение этого уравнения относительно напряжения $\sigma(t)$ при заданной зависимости деформации $\varepsilon(t)$ от времени ($\varepsilon(t)$ при $t < 0$) имеет вид

$$\sigma(t) = cG(t) + E\tau^\beta \int_0^t G(t-z) {}_0 D_z^\beta \varepsilon(z) dz,$$

где

$$G(t) = (t^{\alpha-1}/\tau^\alpha) E_{\alpha, \alpha}(-t^\alpha/\tau^\alpha).$$

При $\alpha = \beta = 1$

$$G(t) = (1/\tau) E_{1,1}(-t/\tau) = (1/\tau) e^{-t/\tau}. \quad (12.7.4)$$

⁷⁶Д.В. Учайкин. Обзорение прикладной и промышленной математики, 2009, 16, № 6, с. 1137–1138.

⁷⁷Friedrich C., Rheol. Acta **30**, 151 (1991); Nonnenmacher T. F., Rheological Modeling: Thermodynamical and Statistical Approaches. Lecture Notes in Physics **381**, Ed. by Casas-Vazquez J., Jou D. – Berlin: Springer, 1991.

Если деформация $\varepsilon(t)$ в момент времени $t = 0$ скачкообразно меняется от нуля до величины ε_0 и остается затем постоянной, функция Грина (12.7.4) дает обычную (дебаевскую) релаксацию напряжения:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E e^{-t/\tau}.$$

Обобщённая модель Кельвина

Дробно-дифференциальное обобщение модели Кельвина выглядит следующим образом⁷⁸:

$$\sigma(t) = E \left[\tau^\alpha {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t) + \tau^\beta {}_0D_t^\beta \varepsilon(t) \right], \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq 1.$$

Частное решение этого уравнения

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E\tau^\beta} \int_0^t (t-z)^{\beta-1} E_{\beta-\alpha, \beta} [-\tau^{\alpha-\beta} (t-z)^{\beta-\alpha}] \sigma(z) dz.$$

Подстановка сюда $\alpha = 0$, $\beta = 1$ возвращает нас в рамки стандартной модели Кельвина, в которой скачкообразно (в момент времени $t = 0$) возникшее напряжение σ_0 вызывает деформацию

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-t/\tau} \right),$$

экспоненциально приближающуюся к гуковскому пределу σ_0/E , при $t \rightarrow \infty$.

Модель Капуто-Майнарди

Дробно-дифференциальное обобщение стандартной модели представляется *четырёх-параметрической моделью Капуто-Майнарди*, конститутивное уравнение которой содержит дробные производные одинаковых порядков α (четвертый параметр):

$$\sigma(t) + \tau^\alpha {}_0D_t^\alpha \sigma(t) = E [\varepsilon(t) + \theta^\alpha {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t)], \quad 0 < \alpha < 1. \quad (12.7.5)$$

Интерпретируя параметры τ и θ как времена температурных релаксаций при постоянном напряжении и постоянной деформации соответственно, а E как изотермический модуль, Зенер дал термоди-

⁷⁸Schiessel H., Metzler R., Blumen A., Nonnenmacher T. F., J. Phys. A: Math. Gen. **28**, 6567 (1995).

намическое обоснование стандартной модели в рамках теории термоупругости твердых тел (металлов)⁷⁹. Два основных уравнения термоупругости связывают отклонение температуры δT от ее равновесного значения с напряжением и деформацией. Первое из них связано с тепловым расширением тела

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma + \lambda\delta T \quad (12.7.6)$$

(λ – линейный коэффициент теплового расширения). Второе отражает две причины изменения температуры: термодиффузию (температурная релаксация)

$$\left(\frac{d\delta T}{dt}\right)_{\text{diff}} = -\frac{1}{\tau_\varepsilon}\delta T, \quad (12.7.7)$$

и адиабатическое изменение деформации

$$\left(\frac{d\delta T}{dt}\right)_{\text{adiab}} = -\gamma\frac{d\varepsilon}{dt},$$

где $\gamma = (\partial T/\partial \varepsilon)_{\text{adiab}}$. В результате получаем:

$$\left(\frac{d\delta T}{dt}\right) = \left(\frac{d\delta T}{dt}\right)_{\text{diff}} + \left(\frac{d\delta T}{dt}\right)_{\text{adiab}} = -\frac{1}{\tau_\varepsilon}\delta T - \gamma\frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (12.7.8)$$

Полагая $1 + \lambda\gamma = \tau_\sigma/\tau_\varepsilon$ и исключая из уравнений (12.7.6) и (12.7.7) член с изменением температуры δT , Зенер и пришел к уравнению (12.7.5).

Заменяя уравнение (12.7.7) дробно-дифференциальным уравнением субдиффузионной релаксации

$${}_0D_t^\alpha \delta T = -\frac{1}{\tau^\alpha}\delta T, \quad 0 < \alpha < 1,$$

Ф. Майнарди получил вместо (12.2.7) уравнение

$${}_0D_t^\alpha \delta T = -\frac{1}{\tau^\alpha}\delta T - \gamma {}_0D_t^\alpha \varepsilon,$$

что и привело к дробно-дифференциальному обобщению стандартной модели (12.7.5), в котором использовано соотношение

$$1 + \lambda\gamma = (\theta/\tau)^\alpha.$$

⁷⁹Zener C., *Elasticity and Anelasticity of Metals*. – Chicago: University of Chicago Press, 1948.

Уравнение типа (12.7.5) вместе с вытекающими из него функциями релаксации и ползучести, впервые предложено Капуто и Майнарди в 1971 г с использованием дробных производных Капуто⁸⁰ как эмпирическая модель, позволяющая более аккуратно воспроизвести данные эксперимента. Функция Миттаг-Леффлера была предложена Гроссом в 1947 году в качестве уточнения степенной функции при аппроксимации экспериментальных данных по функции ползучести⁸¹.

Модель Бэгли-Торвика

Продолжив развитие дробно-дифференциальной феноменологии за пределами описанного выше обобщения стандартной модели, Бэгли и Торвик взяли уравнение с различными порядками дробных производных деформации и напряжения:

$$\sigma(t) + \tau^\beta {}_0D_t^\beta \sigma(t) = E [\varepsilon(t) + \theta^\alpha {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t)].$$

Следуя работе⁸², воспользуемся преобразованием Лапласа с мнимым параметром $\lambda = i\omega$:

$$\widehat{f}(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

В результате такого преобразования получим:

$$\widehat{\sigma}(i\omega) = \widehat{E}(i\omega) \widehat{\varepsilon}(i\omega),$$

где

$$\widehat{E}(i\omega) = \frac{1 + (i\omega\theta)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\beta} E$$

– комплексный модуль. При очень низких частотах $\widehat{E}(i\omega) \rightarrow E$ и материал ведет себя как абсолютно упругая, идеальная резина. При высоких частотах трансформанта $\widehat{E}(i\omega) \sim (\theta^\alpha/\tau^\beta)(i\omega)^{\alpha-\beta}$ имеет конечный предел только в случае $\alpha = \beta$, и тот же самый материал ведет себя подобно стеклу. Наличие такой переходной области подтверждается экспериментальными данными.

Параметры модели должны быть вещественными, но и при этом они не могут быть произвольными: основанные на этом конститутивном уравнении вычисления должны давать неотрицательную внутреннюю работу и неотрицательную скорость диссипации энергии. Чтобы

⁸⁰Caputo M., Mainardi F., Pure and Applied Geophysics **91**, 134 (1971); Caputo M., Mainardi F., Riv. Nuovo. Cimento (II) **1**, 161 (1971).

⁸¹Gross B., J. Applied Phys. **18**, 212 (1947).

⁸²Bagley R. L., Torvik P. J., J. of Reology **30**.

установить вытекающие отсюда *термодинамические ограничения* на параметры модели, Бэгли и Торвик рассмотрели синусоидальную деформацию

$$\varepsilon(t) = \sin(\omega_0 t),$$

производящую напряжение

$$\sigma(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t).$$

Внутренняя работа, совершаемая в единице объема в единицу времени, дается выражением:

$$\sigma(t)\dot{\varepsilon}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos^2(\omega_0 t). \quad (12.7.9)$$

При постоянной температуре это выражение эквивалентно термодинамическому соотношению

$$\dot{p} = \dot{\Psi} + \dot{\epsilon}, \quad (12.7.10)$$

утверждающему, что скорость производства механической работы внутренними силами \dot{p} равна скорости приращения свободной энергии $\dot{\Psi}$ плюс скорость диссипации энергии $\dot{\epsilon}$. Сопоставление этих двух уравнений и позволяет прояснить ситуацию с термодинамическими ограничениями на параметры модели. Действительно, чтобы гарантировать неотрицательность скорости диссипации энергии $\dot{\epsilon} \geq 0$, необходимо потребовать неотрицательности B . В свою очередь, для неотрицательности B достаточно, чтобы для всех частот выполнялось неравенство

$$\text{Im } \hat{E}(i\omega) \geq 0, \quad 0 < \omega < \infty.$$

Аналогичным образом налагается ограничение неотрицательности внутренней работы: проинтегрировав уравнения (12.7.9) и (12.7.10) по времени и учитывая неотрицательность B , достаточно потребовать неотрицательности A , чтобы гарантировать неотрицательность работе внутренних сил. Неотрицательность A достигается условием

$$\text{Re } \hat{E}(i\omega) \geq 0, \quad 0 < \omega < \infty.$$

Установленные термодинамические ограничения свели 5-параметрическую модель к 4-параметрической с конститутивным уравнением

$$\sigma(t) + \tau^\alpha {}_0 D_t^\alpha \sigma(t) = E [\varepsilon(t) + \theta^\alpha {}_0 D_t^\alpha \varepsilon(t)].$$

Разложим напряжение $\sigma(t)$ на две составляющих,

$$\sigma(t) = \sigma_0(t) + \sigma_1(t),$$

определяемых уравнениями

$$\sigma_0(t) + \tau^\alpha {}_0D_t^\alpha \sigma_0(t) = E\varepsilon(t), \quad (12.7.11)$$

и

$$\sigma_1(t) + \tau^\alpha {}_0D_t^\alpha \sigma_1(t) = E\theta^\alpha {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t). \quad (12.7.12)$$

Поддействовав на обе части уравнения (12.7.11) оператором $\theta^\alpha {}_0D_t^\alpha$ и сопоставив результат с уравнением (12.7.12), можно увидеть, что введенные компоненты связаны соотношением

$$\sigma_1(t) = \theta^\alpha {}_0D_t^\alpha \sigma_0(t),$$

так что результирующее напряжение полностью определяется иницирующей составляющей $\sigma_0(t)$:

$$\sigma(t) = \sigma_0(t) + \theta^\alpha {}_0D_t^\alpha \sigma_0(t). \quad (12.2.13)$$

Пусть она равна нулю до момента времени $t = 0$, а далее изменяется по синусоиде с частотой ω_0 :

$$\sigma_0(t) = \sigma_0 \sin(\omega_0 t).$$

Подставляя это выражение в формулу (12.2.12), получим

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \sigma_0 \sin(\omega_0 t) + \\ & + \frac{\sigma_0 \omega_0 \theta^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\cos(\omega_0 t) \int_0^t \cos(\omega_0 z) z^{-\alpha} dz + \sin(\omega_0 t) \int_0^t \sin(\omega_0 z) z^{-\alpha} dz \right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, из уравнения (12.7.11) находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \frac{\sigma_0}{E} \sin(\omega_0 t) + \\ & + \frac{\sigma_0 \omega_0 \tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha) E_0} \left(\cos(\omega_0 t) \int_0^t \cos(\omega_0 z) z^{-\alpha} dz + \sin(\omega_0 t) \int_0^t \sin(\omega_0 z) z^{-\alpha} dz \right). \end{aligned}$$

В окрестности начального момента эти функции возрастают по степенному закону с показателем $1 - \alpha$,

$$\sigma(t) \sim \frac{\sigma_0 \omega_0 \theta^\alpha}{\Gamma(2-\alpha) E} t^{1-\alpha}, \quad \varepsilon(t) \sim \frac{\sigma_0 \omega_0 \tau^\alpha}{\Gamma(2-\alpha) E} t^{1-\alpha}, \quad t \rightarrow 0,$$

в асимптотике больших времен превращаются в гармонические колебания с заданной частотой ω_0 :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left\{ \left[1 + (\omega_0 \theta)^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \sin(\omega_0 t) + \left[(\omega_0 \theta)^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \cos(\omega_0 t) \right\},$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left\{ \left[1 + (\omega_0 \tau)^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \sin(\omega_0 t) + \left[(\omega_0 \tau)^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \cos(\omega_0 t) \right\}.$$

Петля гистерезиса при этом становится эллиптической, а тангенс угла потерь дается выражением

$$\eta = \operatorname{tg}(\varphi_\sigma - \varphi_\varepsilon),$$

где

$$\varphi_\sigma = \operatorname{arctg} \left(\frac{(\omega_0 \theta)^\alpha \sin(\alpha\pi/2)}{1 + (\omega_0 \theta)^\alpha \cos(\alpha\pi/2)} \right)$$

и

$$\varphi_\varepsilon = \operatorname{arctg} \left(\frac{(\omega_0 \tau)^\alpha \sin(\alpha\pi/2)}{1 + (\omega_0 \tau)^\alpha \cos(\alpha\pi/2)} \right).$$

Пользуясь известной тригонометрической формулой, получаем:

$$\eta = \frac{\omega_0^\alpha (\theta^\alpha - \tau^\alpha) \sin(\alpha\pi/2)}{1 + \omega_0^\alpha (\theta^\alpha + \tau^\alpha) \cos(\alpha\pi/2) + \omega_0^{2\alpha} (\tau\theta)^\alpha}.$$

Из термодинамического ограничения следует, что потери положительны при любой частоте.

Дальнейшее развитие дробно-дифференциального направления в реологии связано с изучением многопараметрических моделей, конститутивные уравнения которых имеют вид

$$\sigma(t) + \sum_{j=1}^m \tau_j^{\nu_j} {}_0 D_t^{\nu_j} \sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) + \sum_{k=1}^m \theta_k^{\mu_k} {}_0 D_t^{\mu_k} \varepsilon(t) \right].$$

Модель Работнова

В основу своей модели наследственной механики твердых тел⁸³ Ю. Н. Работнов положил определяющее уравнение

$$\sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) - \beta \int_0^t \mathcal{D}_\alpha(-\beta, t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right], \quad (12.7.14)$$

⁸³Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977.

где $\alpha \in (-1, 0]$, $\beta \neq 0$, а функция \mathcal{E}_α задается степенным рядом

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta, x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n x^{n(\alpha+1)}}{\Gamma((n+1)(1+\alpha))}. \quad (12.7.15)$$

Подставляя (12.7.15) в (12.4.14) и пользуясь формулой дробного интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E \left[\varepsilon(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^{n+1}}{\Gamma[(\alpha+1)(n+1)]} \int_0^t \frac{\varepsilon(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-(\alpha+1)(n+1)}} \right] = \\ &= E \left[\varepsilon(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{n+1} {}_0D_t^{-(\alpha+1)(n+1)} \varepsilon(t) \right] = \\ &= E \left[\varepsilon(t) + {}_0D_t^{-(\alpha+1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{n+1} {}_0D_t^{-(\alpha+1)n} \varepsilon(t) \right]. \quad (12.7.16) \end{aligned}$$

Следуя работе⁸⁴, применим к обеим частям этого равенства оператор ${}_0D_t^{\alpha+1}$:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha+1} \sigma(t) &= E \left[{}_0D_t^{\alpha+1} \varepsilon(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{n+1} {}_0D_t^{-(\alpha+1)n} \varepsilon(t) \right] = \\ &= E \left[{}_0D_t^{\alpha+1} \varepsilon(t) - \beta \varepsilon(t) - \beta \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^n {}_0D_t^{-(\alpha+1)n} \varepsilon(t) \right] = \\ &= E \left[{}_0D_t^{\alpha+1} \varepsilon(t) - \beta \varepsilon(t) - \beta \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{n+1} {}_0D_t^{-(\alpha+1)(n+1)} \varepsilon(t) \right]. \end{aligned}$$

Найдя из последнего равенства

$$E\beta \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{n+1} {}_0D_t^{-(\alpha+1)(n+1)} \varepsilon(t) = E[{}_0D_t^{\alpha+1} \varepsilon(t) - \beta \varepsilon(t)] - {}_0D_t^{\alpha+1}$$

и подставив это вместо последнего слагаемого в (12.7.16), приходим к уравнению

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + (E/\beta)[{}_0D_t^{\alpha+1} \varepsilon(t) - \beta \varepsilon(t)] - (1/\beta) {}_0D_t^{\alpha+1} \sigma(t),$$

⁸⁴Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик, 2000.

которое после элементарных преобразований принимает вид

$$\sigma(t) + \tau {}_0D_t^\rho \sigma(t) = \tau E {}_0D_t^\rho \varepsilon(t),$$

где $\tau = 1/\beta$, а $\rho = \alpha + 1$. Таким образом, модель Работнова является частным случаем 4-параметрической модели Бэгли-Торвика. При $\alpha = 0$ она совпадает с определяющим уравнением Максвелла.

Модель Гросса-Марвина

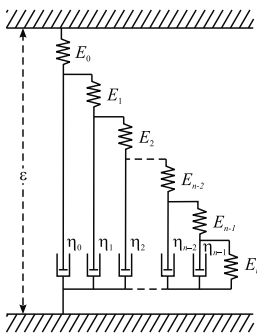


Рис. 12.34. Модель Гросса-Марвина

Естественно поставить вопрос: можно ли с помощью стандартных элементов двух типов (упругого и вязкого) построить вязкоупругую модель дробно-дифференциального типа?

Такая модель была построена Гроссом и Марвином для $\alpha = 1/2$ ⁸⁵ по аналогии с ее электротехническим прообразом, изложенным в книге⁸⁶, и обобщена Шисселем и Блюменом на произвольное $\alpha \in (0, 1)$ ⁸⁷. Она представляет собой структуру лестничного типа, составленную из бесконечной последовательности элементов с выбранными определенным образом параметрами (см. рис. 12.34).

Обозначим через ε_k^e и ε_k^d удлинение k -й пружины (с модулем упругости E_k) и смещение k -го демпфера (с вязкостью η_k) соответственно. Аналогичные обозначения введем для соответствующих компонент напряжения. Подобно электротехническим, механические цепи рассчитываются с использованием определенного набора правил (эти вопросы превосходно описаны в книге⁸⁸). Перечислим их.

1. Аддитивность последовательных деформаций:

$$\varepsilon_k^d = \varepsilon_{k+1}^e + \varepsilon_{k+1}^d, \quad k = 0, 1, \dots, n-2. \quad (12.7.17)$$

$$\begin{array}{ll} \text{На верхнем конце} & \varepsilon = \varepsilon_0^e + \varepsilon_0^d, \\ \text{на нижнем} & \varepsilon_{n-1}^d = \varepsilon_n^e. \end{array}$$

⁸⁵Tschoegl N. W., The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior. – Berlin: Springer, 1989.

⁸⁶Oldham K. B., Spanier J., The Fractional Calculus. – New York: Academic Press, 1974.

⁸⁷Shiessel H., Blumen A., J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 5057 (1993).

⁸⁸Гарднер М. Ф., Бэрнс Дж. Л. Переходные процессы в линейных системах. – М.: ГИФМЛ, 1961.

2. Аддитивность параллельных напряжений:

$$\sigma_k^e = \sigma_{k+1}^e + \sigma_k^d, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (12.7.18)$$

На конце лестницы $\sigma = \sigma_0^e$.

3. Компоненты деформаций и напряжений связаны между собой соотношениями:

$$\varepsilon_k^e = \frac{1}{E_k} \sigma_k^e, \quad (12.7.19)$$

и

$$\sigma_k^d = \eta_k \frac{d\varepsilon_k^d}{dt} \quad (12.7.20)$$

4. Предполагается, что

$$\varepsilon(t) = 0, \quad t \leq 0,$$

и

$$\sigma(t) = 0, \quad t \leq 0.$$

Подставляя (12.7.19) в (12.7.17) и переходя к трансформантам Лапласа, получим:

$$E_{k+1} \widehat{\varepsilon}_k^d(\lambda) = \widehat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda) + E_{k+1} \widehat{\varepsilon}_{k+1}^d(\lambda), \quad k = 0, 1, \dots, n-2. \quad (12.7.21)$$

Аналогично, подставляя (12.7.20) в (12.7.18), приходим к уравнению

$$\widehat{\sigma}_k^e(\lambda) = \widehat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda) + \lambda \eta_k \widehat{\varepsilon}_k^d(\lambda), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (12.7.22)$$

Разделив обе части уравнения (12.7.21) на $\widehat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda)$, подставив в него найденное из формулы (12.7.22) напряжение

$$\widehat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda) = \widehat{\sigma}_{k+2}^e(\lambda) + \lambda \eta_{k+1} \widehat{\varepsilon}_{k+1}^d(\lambda)$$

и произведя некоторые сокращения, представим результат в виде:

$$E_{k+1} \frac{\widehat{\varepsilon}_k^d(\lambda)}{\widehat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda)} = 1 + \frac{E_{k+1}}{\eta_{k+1}} \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\eta_{k+1}} \frac{\widehat{\sigma}_{k+2}^e(\lambda)}{\widehat{\varepsilon}_{k+1}^d(\lambda)}},$$

$$E_{n-1} \frac{\widehat{\varepsilon}_{n-2}^d(\lambda)}{\widehat{\sigma}_{n-1}^e(\lambda)} = 1 + \frac{E_{n-1}}{\eta_{n-1}} \frac{1}{\lambda + \frac{E_n}{\eta_{n-1}}}.$$

Многократное повторение этой процедуры ведет к представлению отношения $\widehat{\varepsilon}(\lambda)/\widehat{\sigma}(\lambda)$ в виде цепной дроби⁸⁹

$$E_0 \frac{\widehat{\varepsilon}(\lambda)}{\widehat{\sigma}(\lambda)} = 1 + \frac{\lambda^{-1}E_0/\eta_0}{1+} \frac{\lambda^{-1}E_1/\eta_0}{1+} \dots \frac{\lambda^{-1}E_{n-1}/\eta_{n-1}}{1+} \frac{\lambda^{-1}E_n/\eta_{n-1}}{1}.$$

Сопоставляя полученное выражение с разложением

$$x(x+1)^{\alpha-1} = \frac{x}{1+} \frac{(1-\alpha)x}{1+} \frac{1 \cdot (0+\alpha)}{1 \cdot 2} \frac{1 \cdot (2-\alpha)}{2 \cdot 3} \frac{1 \cdot (1+\alpha)}{3 \cdot 4} \frac{1 \cdot (3-\alpha)}{4 \cdot 5} \dots,$$

можно увидеть, что при подходящем выборе параметров,

$$E_1/\eta_0 = (1-\alpha)c_0, \quad E_1/\eta_1 = \frac{1 \cdot (0+\alpha)}{1 \cdot 2} c_0, \quad \dots,$$

исследуемое отношение имеет предел

$$E_0 \frac{\varepsilon(\lambda)}{\sigma(\lambda)} \Big|_{n \rightarrow \infty} = 1 + (c_0/\lambda)(c_0/\lambda + 1)^{\alpha-1}.$$

В асимптотике малых λ , соответствующих большим временам t ,

$$E_0 \frac{\varepsilon(\lambda)}{\sigma(\lambda)} \sim (c_0/\lambda)^\alpha.$$

Во временной области этому соотношению соответствует выражение с дробной производной

$$\sigma(t) = \eta_0^\alpha E_0^{1-\alpha} {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t).$$

Некоторое усложнение конструкции модели ведет к дробно-дифференциальному обобщению модели Максвелла

$$\sigma(t) + \tau^\alpha {}_0D_t^\alpha \sigma(t) = \tau^\beta E {}_0D_t^\beta \varepsilon(t).$$

Построения подобного сорта весьма любопытны и продолжаются в ряде работ, хотя их отчётливый формализм и отстранённость от физики явлений не позволяют принять их как физическую интерпретацию дробно-дифференциальной модели.

⁸⁹Хинчин А. Я. Цепные дроби. – М.: Наука, Физматлит, 1973.

12.7.5 Полимеры в растворе

Физическое объяснение дробно-дифференциальному соотношению между деформацией и напряжением было дано на основе статистической теории Рауса для вязкоупругости растворов полимеров в ньютоновской жидкости. Разлагая скорость каждой из N молекул полимерной цепочки на скорость движения центра тяжести цепочки, совпадающую со скоростью течения жидкости, и относительную скорость, описывающую возвращение деформированной цепочки к равновесной форме, и выполняя необходимые вычисления, Раус получил для *сдвигового модуля* $\tilde{G}(\omega) \equiv \tilde{\sigma}(\omega)/\tilde{\varepsilon}(\omega)$ выражение

$$\tilde{G}(\omega) = nkT \sum_{j=1}^N \frac{\tau_j^2 \omega^2}{1 + \tau_j^2 \omega^2} + i \left\{ \mu_s \omega + nkT \sum_{j=1}^N \frac{\tau_j \omega}{1 + \tau_j^2 \omega^2} \right\}. \quad (12.7.23)$$

Здесь T – абсолютная температура, k – постоянная Больцмана, n – число молекул в единице объема раствора, и τ_j – характеристические времена релаксаций, имеющие (при $j < N/5$ и $\omega \tau_1 < N^2/250$) вид

$$\tau_j \simeq \frac{\tau_1}{j^2}, \quad (12.7.24)$$

$$\tau_1 \simeq \frac{6(\mu_0 - \mu_s)}{n\pi^2 kT},$$

где μ_0 и μ_s – стационарные вязкости раствора и растворителя соответственно. Подставляя (12.7.24) в (12.7.23), приходим к выражению

$$\tilde{G}(\omega) \simeq i\mu_s \omega + nkT \sum_{j=1}^{[N/2]} [1 - ij^2/(\tau_1 \omega)]^{-1}.$$

Переходя от суммирования к интегрированию с использованием формулы

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} [1 - i(j\Delta x)^2] \Delta x = \int_0^{\infty} (1 - i\xi^2)^{-1} d\xi = i^{1/2} \pi/2$$

при $\Delta x = (\tau_1 \omega)^{-1/2}$ и $[N/5] \gg \tau_1 \omega \geq 25$, получаем:

$$\tilde{G}(\omega) \simeq i\mu_s \omega + nkT(\pi/2) \sqrt{i\tau_1 \omega} = i\mu_s \omega + \sqrt{(3/2)(\mu_0 - \mu_s)nkT} \sqrt{i\omega}.$$

Обратное преобразование Фурье соотношения

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \tilde{G}(\omega) \tilde{\varepsilon}(\omega)$$

и ведет к искомому результату:

$$\sigma(t) = \mu_s D_t \varepsilon(t) + \sqrt{(3/2)(\mu_0 - \mu_s)nkT} {}_0D_t^{1/2} \varepsilon(t).$$

Из найденного выражения видно, что напряжение в полимерном растворе складывается из двух частей, одна из которых характеризует растворитель (ньютоновскую жидкость), а вторая дает вклад полимерных цепочек, который зависит от их предыстории, а следовательно, и от предыстории всего течения. Теория Рауса дает форму этой зависимости, обеспечивая тем самым физическое обоснование применению дробных производных к описанию рассматриваемого процесса. Заметим, что при мгновенно (при $t = 0$) созданной постоянной деформации

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \varepsilon_0, & t > 0 \end{cases}$$

ее производная при $t > 0$ равна нулю, тогда как полупроизводная отлична от нуля и спадает со временем по степенному закону:

$$\sigma(t) = \sqrt{(3/2\sqrt{\pi})(\mu_0 - \mu_s)nkT} \varepsilon_0 t^{-1/2}.$$

Таким образом, расчёт Рауса ведет к конститутивному уравнению с *полупроизводной*,

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_1 {}_0D_t^{1/2} \varepsilon(t),$$

представляющему собой частный случай модели Бэгли и Торвика. Эксперименты с многочисленными твёрдыми полимерами показали, однако, что существует широкий разброс значений α в интервале $(0, 1)$, объяснение которого, возможно, потребует более сложной модели, чем независимые полимерные молекулы в растворе.

12.7.6 Дробная динамика открытых систем

Вернёмся к уравнению Линдблада – основному уравнению динамики открытых систем (12.1.33) – опустив, для краткости, индексы 1 у всех членов и фазовую переменную \mathbf{x} в аргументах плотности:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathbf{L}f + \int_{-\infty}^t \mathbf{Q}(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (12.7.25)$$

Выразив операторную функцию $Q(t)$ через её трансформанту Меллина

$$Q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-s} \bar{Q}(s) ds, \quad \sigma = \Re s,$$

подставим это выражение в интегральный член уравнения (12.7.25):

$$\int_{-\infty}^t Q(t-t') f(t') dt' = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} W(s) I_t^{1-s} f(t) ds.$$

Здесь

$$W(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \bar{Q}(s),$$

а

$$I_t^{1-s} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_{-\infty}^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^s}$$

– интеграл комплексного порядка $\mu = 1 - s$. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \mathcal{L}f(t) + \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} W(s) I_t^{1-s} f(t) ds,$$

содержащему оператор, который можно интерпретировать как интегральный оператор с *операторно-распределённым* комплексным порядком. Переход от интеграла к дробной производной можно осуществить, скажем, регуляризацией по Адамару (выделением конечной части при $\mu < 0$).

На основании вышеизложенного можно сделать следующий вывод: в отличие от замкнутой гамильтоновой системы, управляемой дифференциальным уравнением целого порядка, её подсистема управляется интегродифференциальным уравнением дробного (распределённого по контуру в комплексной плоскости) порядка. Именно спектральная оператор-функция и определяет специфику кинетики открытой системы этого класса, и важное, на наш взгляд, направление динамики открытых систем заключается в развитии математического аппарата, необходимого для вычисления и аппроксимации спектральной функции⁹⁰.

⁹⁰В. В. Учайкин. Научные ведомости Белгородского университета, серия: Математика. Физика. 2014. 25(196). Вып. 37, 58-67.



Заключение

Заканчивая этот учебник, хочу предложить взглянуть на всё то, о чём здесь говорилось, так сказать, в ретроспективно-перспективном плане.

Важнейшие научные события, в значительной степени определившие развитие нашей цивилизации, произошли в конце XVII века и первой четверти XX века. В первом случае речь идёт о создании математических основ современной механики (И. Ньютон, 1687), и основы эти оказались весьма кстати. Наступление технической эры цивилизации настоятельно требовало развития прикладных направлений «натуральной философии» — механики, и многие открытия в гидродинамике, динамике твёрдого тела, теории упругости, пластичности и механике сплошной среды вообще обессмертили имена своих авторов (Д. Бернулли, Р. Гук, Л. Эйлер, Ж. Л. Лагранж и др.). В течение двух веков механика властвовала среди точных наук, и успехи термодинамики и теории электромагнетизма во многом определялись её (механики) образами (течения, волны), понятиями (энергия, напряжения) и математическим инструментарием (производные, дифференциальные уравнения, векторный и тензорный анализ).

Второе же событие, а точнее, два важнейших события, происшедших в начале XX века — это создание специальной теории относительности (А. Эйнштейн, 1905) и квантовой механики (целая плеяда физиков — М. Планк, Н. Бор, Э. Шредингер, Л. де Бройль, В. Гейзенберг, П. Дирак и др.). Не будет преувеличением сказать, что большую часть XX века теоретическая физика развивалась «под знаком кванта», и то, что не требовало применения новых понятий и методов, многим казалось уже не теоретической физикой, а какой-то технической, инженерной, в общем, рутинной наукой. Термины «механика», «динамика» как-то ещё сохраняли указания на происхождение от одного корня (или, вольнее сказать, от Ньютонова яблока) гидродинамики, квантовой механики, но передний край великой битвы за тайну устройства

мира пролегал где-то в области невидимых элементарных частиц и недостижимых чёрных дыр...

Между тем, классические направления, объединившись под грифом «механики сплошной среды», продолжали интенсивно развиваться. Сопротивление материалов, динамика возникновения и развития трещин, обработка металлов, проблемы скольжения и обтекаемости – список задач всё увеличивался. Морские суда и воздухоплавание, дирижабли и паровозы, подъёмные краны и шахтное оборудование нуждались в инженерах-механиках. Строительство гигантских небоскрёбов и мостов, подводных лодок и авиалайнеров, тоннелей и телебашен – все эти работы на стадии проектирования требовали теоретических расчётов. Континенты медленно перемещаются, плиты наползают друг на друга, порождая землетрясения, цунами, провоцируя извержения вулканов... Это всё – механика, и специалисты по геомеханике и геофизике выполняют расчёты напряжений и измеряя сейсмические волны в земной коре, стараясь получить предупреждение о грядущей катастрофе. Человек ещё беззащитен перед угрозами торнадо или падения крупного метеорита, но ведутся наблюдения, выполняются расчёты, анализируются результаты. Солнечные протуберанцы, движения комет, взрывы далёких сверхновых, столкновения галактик – вся эта информация пропускается сквозь вычислительный аппарат современной механики, в котором вы найдёте и блоки, вычисляющие характеристики плазмы, и блоки, учитывающие взаимодействия атомов с поверхностью космического аппарата или летящей из далёкого космоса кометы... Всё вновь соединяется в одну большую вычислительную программу, общей платформой которой остаётся, точнее, в которую *эволюционирует механика*. Как назвать эту платформу? Платформу, на фоне которой механика материальных точек, и механика твёрдых тел, гидроаэродинамика и динамика турбулентности, динамика химических реакций и взрывов, динамика бильярдных шаров и сталкивающихся галактик представляют собой островки частных задач, и в то же время в атомный взрыв или в прохождение космического корабля через атмосферу, в создание нанороботов, вместе с кровью циркулирующих по организму или рассыпающихся нано-пылью по поверхности и передающих информацию о том, что они «видят и слышат», вовлекается масса разноуровневых процессов, «де юре» относящихся к разным наукам, но выражаемых на одном и том же языке, содержащем «механические» существительные, прилагательные и глаголы...

Что же такое *сложная система*? «Грубо говоря, – писал полвека назад профессор Технологического института Карнеги Г. Саймон, –

под сложной системой я понимаю систему, состоящую из большого числа частей со сложным законом взаимодействия. В таких системах целое больше, чем сумма его частей, не в обобщённом метафизическом смысле, а в практически важном признании того, что установление свойств самой системы по известным свойствам её частей и законов их взаимодействия между собой оказывается далеко не простой задачей»⁹¹. Лэдимен, Ламберт и Виснер в недавней статье «Что такое сложная система?»⁹² приводят следующий список признаков принадлежности системы к классу сложных систем:

1. *Нелинейность* (неприменимость принципа суперпозиции).
2. Наличие феномена *памяти, немарковости*: реакция части системы на действие своего окружения в данный момент зависит от их взаимодействия в более ранние времена (авторы статьи – философы Бристольского университета – называют этот признак «обратной связью»).
3. *Робастность* (устойчивость системы относительно возмущений её параметров, свойство сохранять качество функционирования при изменении параметров системы или её структуры).
4. *Возникаемость*⁹³: сложные системы могут возникать, как возникает турбулентное состояние в текущей жидкости при достижении числом Рейнольдса некоторого, характерного для неё, порогового значения.
5. *Иерархия* структур, составляющих систему. Предельным случаем такого признака является фрактальность, когда часть подобна целому.
6. Добавим сюда отмечающуюся Саймоном *неразложимость* сложной системы.

Можно встретить и другие признаки сложности систем в разных работах. Важно отметить, что эти признаки только в совокупности определяют сложный характер.

Впереди механику ожидают всё более сложные задачи, которые потребуют ещё больших интеллектуальных усилий от нынешних студентов и аспирантов. Надеюсь, и мой учебник внесёт свою лепту в подготовку таких специалистов.



⁹¹ G.Simon. Proc. Amer.Phil. Soc., **106**, 6, 1962, 467-482.

⁹² J. Ladyman, J. Lambert, K. Wiesner. Euro Jnl. Phil. Sci. (2013) 3, 33-67.

⁹³ Читатель, недовольный непрерывностью такого слова, но безразличный к русской речи, легко согласится, что оно гораздо благозвучнее встречавшегося мне уродца «эмерджентность».

Обозначения

A – работа

\vec{A} – ускорение центра масс системы, ускорение начала подвижной системы координат относительно неподвижной, 3-мерный векторный потенциал

a_{ij} – элементы матрицы 3-мерного ортогонального преобразования

\vec{a} – ускорение материальной точки

a_n – нормальная составляющая ускорения

a_τ – тангенциальная (касательная) составляющая ускорения

b – прицельный параметр

$C_{кр}$ – крутильная жёсткость

$C_{из}$ – жёсткость балки на изгиб

\vec{C} – один из интегралов движения по кеплеровой орбите

c – скорость звука, света

c_p – удельная теплоёмкость при постоянном давлении

c_V – удельная теплоёмкость при постоянном объёме

E – модуль Юнга

$\mathcal{E}_{кин}$ – кинетическая энергия

\mathcal{E}, E – полная энергия

\vec{E} – напряжённость электрического поля

e – заряд частицы (для электрона $e < 0$)

$\vec{e}_i, i = x, y, z$ или $1, 2, 3$ – орты декартовой (вообще – ортогональной) системы абсолютных или относительных координат

\mathcal{F} – производящая функция канонических преобразований

\vec{F} – активная сила

\vec{F}' – сила реакции связи

$\vec{F}_{ин}$ – сила инерции

$F_{уп}$ – сила упругости

$\vec{F}_{тр}$ – сила трения

\vec{F}_c – сила сопротивления

\vec{F}_T – сила тяжести (гравитационная сила)

$\vec{F}_{цб}$ – центробежная сила



\vec{F}_{ij} – сила, с которой j -я материальная точка действует на i -ю

$\vec{G}_i(q_1, \dots, q_n) = 0, \quad i = 1, \dots, s$ – уравнения голономных связей

G – гравитационная постоянная

g – ускорение силы тяжести

\vec{g} – удельная (на единицу массы) сила, частный случай: напряжённость гравитационного поля



\mathcal{H} – функция Гамильтона

\vec{H} – напряжённость магнитного поля

\hbar – постоянная Планка

I – момент инерции, адиабатический инвариант

$I_i, \quad i = 1, 2, 3$ – главные моменты инерции

I_{ij} – тензор инерции

$I' = I_1 + ml^2$ – приведённый момент инерции тяжёлого волчка

$i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица

J – якобиан преобразования, фазовый интеграл, каноническая переменная действия

\vec{j} – вектор плотности тока массы

\vec{j}_e – вектор плотности электрического тока

\mathcal{K} – канонически преобразованная функция Гамильтона

K – система отсчёта

$K = Gm$ – коэффициент в выражении для гравитационного потенциала точечной массы $\phi(r) = -K/r$, модуль всестороннего сжатия

k – коэффициент жёсткости, коэффициент сжимаемости

k_B – постоянная Больцмана

\vec{k} – волновой вектор

k_{ij} – коэффициенты в разложении потенциальной энергии в окрестности точки устойчивого равновесия

\mathcal{L} – функция Лагранжа

\vec{L} – момент импульса (кинетический момент)

L – оператор Лиувилля

l – кривая, длина кривой, длина замкнутой орбиты

\vec{l} – вектор, проведённый от неподвижной точки до центра масс симметричного волчка

$d\vec{l}$ – векторный элемент кривой интегрирования

\vec{M} – момент силы (вращающий момент)

m – масса (инертная и гравитационная), системы, твёрдого тела

m_i – масса i -й точки системы

m_{ij} – коэффициенты в разложении кинетической энергии системы в окрестности точки её устойчивого равновесия

N – число частиц в системе
 N_A – число Авогадро
 n – число степеней свободы
 \vec{n} – единичный вектор, нормаль

\mathcal{P} – тепловая функция единицы массы, функция давления
 \vec{P} – импульс системы, поверхностная сила
 p – давление
 p_{ij} – тензор давления
 \vec{p}, \vec{p}_i – импульс частицы, i -й частицы
 p_i – обобщённые (канонические) импульсы



Q – потери энергии при столкновении
 Q_i – обобщённые силы, канонически преобразованные координаты
 q_i – обобщённые координаты
 \vec{q} – вектор завихренности
 \vec{q} – вектор плотности потока тепла

R – функция Рауса, радиус кривизны, радиус шара, цилиндра, универсальная газовая постоянная

Re – число Рейнольдса

\vec{R} – радиус-вектор центра масс

r – радиальная координата в сферической, плоской полярной системе координат

\vec{r}, \vec{r}_i – радиус-вектор точки, частицы, i -й частицы

r_a – апогейное расстояние

r_{Π} – перигейное расстояние.

S, s – энтропия, массовая плотность энтропии

S, dS – поверхность, площадь элемента поверхности

$d\vec{S} = \vec{n}dS$ – вектор элемента поверхности

S – действие

T – абсолютная температура

T – кинетическая энергия системы, частицы

t – время

U – потенциальная энергия системы, частицы

$U_{\text{эфф}}$ – эффективная потенциальная энергия

U_{ij} – потенциальная энергия парного взаимодействия i и j частиц

\vec{u} – скорость

V – область, объём

\vec{v} – скорость

$v_{\text{кр}}$ – круговая скорость

$v_{\text{пар}}$ – параболическая скорость

$v_{1\text{к}}$ – первая космическая скорость

$v_{2\text{к}}$ – вторая космическая скорость

W – вириал сил

\vec{W} – вес тела

w – каноническая угловая переменная, комплексное поле скоростей

w_{ij} – тензор завихрённости

X, Y, Z – декартовы координаты центра масс

x, y, z – координаты точки в неподвижной декартовой системе (абсолютные координаты)

x_1, x_2, x_3 – координаты точки в подвижной декартовой системе (относительные координаты)

Z – число Циолковского

α – коэффициент в выражении для потенциальной энергии частицы в кулоновом (ньютоновом) поле $U = -\alpha/r$

α_i – постоянный импульс, соответствующий циклической координате

$\vec{\beta} = \vec{v}/c$ – безразмерная скорость в релятивистских задачах

γ – отношение теплоёмкостей c_p/c_v , релятивистский множитель $(1 - \beta^2)^{-1/2}$

δ – символ вариации при постоянном времени

δ_{ik} – дельта-символ Кронекера

$\delta(\vec{r})$ – дельта-функция Дирака

ε – эксцентриситет орбиты, диэлектрическая проницаемость

ε_{ij} – тензор деформаций

ε_{ijk} – тензор Леви-Чивита

ϵ – внутренняя энергия единицы массы

Θ – угол рассеяния в системе центра масс

ϑ – полярный угол в сферической системе координат, угол рассеяния в лабораторной системе координат, один из углов Эйлера

\varkappa – теплопроводность



\vec{L} – один из интегралов движения по кеплеровой орбите (вектор Лапласа)

λ – неопределённый множитель Лагранжа, коэффициент Ламэ, линейная плотность, длина волны

μ – приведённая масса, коэффициент Ламэ

ν – кинематическая вязкость

η – динамическая вязкость

ρ – объёмная плотность массы

ϱ – радиальная координата в цилиндрической системе координат

ρ_e – объёмная плотность электрического заряда

σ – коэффициент Пуассона, поверхностная плотность

$\sigma, d\sigma, d\sigma/d\Omega$ – сечение рассеяния, дифференциальное сечение рассеяния

$\vec{\sigma}$ – секториальная скорость

τ – период колебаний, период обращения планеты

φ – электромагнитный скалярный потенциал, угол в цилиндрической и сферической системе координат, истинная аномалия, один из углов Эйлера

ϕ – удельная (на единицу массы) потенциальная энергия в поле объёмной силы, в частном случае – гравитационный потенциал; потенциал скоростей

ψ – один из углов Эйлера (угол собственного вращения)

$\vec{\Omega}$ – угловая скорость

$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ – элемент телесного угла

ω – частота колебаний

ω_H – ларморовская (циклотронная) частота

ω_{ij} – тензор поворота

0 – нуль скалярный, векторный, тензорный (по тексту)

Сокращения

ИСО – инерциальная система отсчёта

НСО – неинерциальная система отсчёта

СЦМ – система центра масс

ЛСК – лабораторная система координат

СГО – система главных осей

НСК – неподвижная система координат

ПСК – подвижная система координат

Предметный указатель

- абсолютная скорость, 509
абсолютно твёрдое тело, 179
автомодельность, 735
аддитивная величина, 143
адиабатическая гипотеза, 313
адиабатическая инвариантность, 310
адиабатический инвариант, 310
адиабатическое движение, 477
адиабатическое приближение, 311
активная сила, 119
акустическая волна, 493
альфвеновская скорость, 526
аномальная дисперсия, 628
аперiodическое движение, 73
апогей, 100
астрономическая единица, 103
- барицентрическая система, 148
баротропная жидкость, 483
баротропное уравнение, 466
безвихревое движение, 487
биение колебаний, 273
бинормаль, 31
броуновское движение, 414
- вектор Лапласа, 106
вектор напряжения, 445
вектор плотности тока, 384, 472
вектор плотности тока массы, 460
вектор плотности тока
 механической энергии, 474
вектор поворота, 441
вектор рассеяния, 397
вероятностная мера, 193
вес тела, 138
- вихревая дорожка, 575
вихревая линия, 456
вихревая нить, 516
вихревая струя, 456
вихревая трубка, 456
вихревое движение, 456
вихревой профиль, 550
вихрь, 486
винтовое движение, 487
вириал сил, 146
виртуальные перемещения, 235
внешнее поле, 53
внешние силы, 145
внутреннее время, 691
внутренняя переменная, 665
волна Альфвена, 526
волна кручения, 634
волна в среде, 495
волновая оптика, 328
волновая зона, 498
время, 343
время взаимодействия, 93
время первого достижения, 425
время ползучести, 663
время релаксации, 426, 663
всестороннее сжатие, 602
вторая формула Бине, 95
вторая космическая скорость, 104
второй закон Ньютона, 37
второй коэффициент вязкости, 542
вынуждающая сила, 74
вязкие напряжения, 541
вязкий тензор напряжений, 475
вязкость, 541
вязкоупругая жидкость, 661
вязкоупругое тело, 660

- гармонические колебания, 70
газокинетическое уравнение
 Больцмана, 398
геодезические кривые, 124
геометрическая акустика, 622
геометрическая оптика, 328
гидроаэродинамика, 544
гидромагнитная скорость, 526
гидромагнитная волна, 526
гидростатическое давление, 464
гидростатическое напряжение, 447
гиперболическая спираль, 97
гипотеза о молекулярном хаосе, 397
гирочастота, 318
гироскопическая сила, 135, 247
главная функция, 320
главные оси инерции тела, 196
главный инвариант, 447
главный момент инерции тела, 196
главный момент внешних сил, 143
главный вектор внешних сил, 142
главное напряжение, 447
глубина проникновения, 571
голономные связи, 120
граничные условия, 621
гравитационная постоянная, 41
гравитационная волна, 500
групповая скорость, 628
- давление, 629
девиатор, 447
деформационное движение, 456
действительные перемещения, 235
декремент затухания, 74
демпфер, 659
динамическая вязкость, 542
динамические силы реакции, 223
динамический хаос, 580
динамическое давление, 488
дисперсионное соотношение, 274, 434
дисперсионное соотношение
 БомаГросса, 436
дисперсионное уравнение, 627
диссипативная сила, 262
дифференциальное сечение рассеяния,
 110
диффузия, 480
диффузия вероятности, 425
диффузия завихрённости, 572
длина пути смещения, 596
- длительный модуль упругости, 658
дозвуковой поток, 501
- естественная система координат, 31
- жидкая частица, 451
- закон 5/3 Колмогорова-Обухова, 584
закон Архимеда, 470
закон всемирного тяготения, 41
закон Гука, 599
закон движения точки, 26
закон изменения момента импульса, 56
закон изменения обобщённой
 энергии, 259
закон изменения энергии, 145
закон инерции, 36
закон Кеплера, 102
закон Колмогорова-Обухова, 575
закон Паскаля, 464
закон площадей, 56
закон сложения скоростей Галилея, 344
закон Снеллиуса, 622
закон сохранения импульса, 54
закон сохранения импульса системы,
 143
закон сохранения полной энергии,
 65, 145
замкнутая система, 141
затухание Ландау, 436
затухающие колебания, 73
золотое правило механики, 57
звуковая волна, 493, 494
звуковой луч, 622
- идеальная модель пластического тела,
 668
изобара, 464
изотропное рассеяние, 112
изостера, 465
изохронность, 123
изменение силы, 49
изэнтропическое движение, 477
импульс, 37
импульс силы, 54
импульс системы, 142
индекс Миллера, 638
инерциальная система отсчёта, 36
инертная масса, 38

- интеграл Лагранжа-Коши, 491
интегро-дифференциальная форма, 400
интенсивность вихревой нити, 516
интенсивность вихревой трубки, 458
интенсивность напряжений, 448
интенсивность звуковой волны, 593
интерференция, 630
инфинитезимальный интервал, 459
инфинитное движение, 66
истинная аномалия, 105
истинное напряжение, 668
- канонически сопряжённые переменные, 304
канонические преобразования, 301
канонический ансамбль, 707
каноническое уравнение, 293
капиллярная волна, 500
касательное напряжение, 447
квадратичная форма, 265
квант, 373
квантовая механика, 329
квантовая теория поля, 338
квазитвёрдое движение, 456
кинематическое определение абсолютно твёрдого тела, 181
кинетическая энергия, 57, 472
кинетический момент вращения, 214
классическое поле, 338
коэффициент Пуассона, 600
коэффициент диффузии, 481
коэффициент преломления, 622
коэффициент сжимаемости, 601
коэффициент турбулентной вязкости, 588
коэффициент затухания звука, 571
количество движения, 37
комплексная амплитуда колебаний, 266
комплексная скорость, 514
комплексный модуль упругости, 658
комплексный потенциал, 512, 514
комптоновская длина волны, 372
консервативная система, 243
конститутивное уравнение, 700
конвективная производная, 452
конвективное движение, 479
конформное отображение, 513
кориолисово ускорение, 133
корреляционный метод, 576
космическая плазма, 519
космологическое уравнение, 536
- критический угол, 622
кривизна траектории, 31
кризис сопротивления, 575
круговая узловая линия, 637
крутильная жёсткость, 613
кулоновская сила, 41
- лабораторная система координат, 148
лагранжиан, 333
ламинарное движение, 574
либрационное движение, 67
лимитационное движение, 66
линейная суперпозиция, 495
линейные колебания, 264
линии узлов, 276
линия тока, 453
локальная производная, 452
локальный оператор, 734
локальное диффузионное уравнение, 740
локальное уравнение, 461
локальное взаимодействие, 733
- магнитное давление, 527
магнитное натяжение, 527
магнитное отражение, 319
магнитогидродинамика, 518
малые деформации, 439
малые колебания, 264
масса, 38, 49
математическое ожидание, 193
материальная производная, 452
материальная точка, 25, 576
мгновенная ось вращения тела, 183
мгновенный центр ускорений, 187
мгновенный модуль упругости, 657
механическая модель Вселенной, 528
механическая память, 656
мембрана, 635
метод конечных элементов, 746
метод продолжения, 630
метод размерностей, 575
метод сечений, 207
метод возмущений, 115
микрканонический ансамбль, 381
мировая линия, 357
мода колебаний, 267
модель Бингама, 686
модель Капуто-Майнарди, 831
модель Кельвина, 660

- модель Максвелла, 661
 модуль Ламэ, 602
 модуль Юнга, 599
 модуль объёмного сжатия, 602
 модуль сдвига, 601
 молекулярная диффузия, 480
 момент импульса, 55
 момент импульса системы, 143
 момент инерции, 190
 момент пары силы, 203
 момент силы, 55
 монохроматическая гармоническая волна, 627
- направляющий тензор напряжений, 448
 напряжение Коши, 668
 напряжение Рейнольдса, 588
 напряжение сдвига, 447
 напряжение трения на стенке, 550, 589
 напряжённость гравитационного поля, 43
 наследственность, 560
 неголономная связь, 120
 нелинейные колебания, 78
 нелинейное уравнение Гамильтона-Якоби, 323
 нелинейность, 400
 нелокальное уравнение агрегации, 783
 нелокальное волновое уравнение, 746
 нелокальное взаимодействие, 733
 нелокальность, 410
 неоднородное волновое уравнение, 494
 неопределённый множитель Лагранжа, 236
 неподвижная центроида, 186
 неподвижный аксоид, 184
 нестационарное уравнение Гамильтона-Якоби, 322
 несвязанные системы, 271
 несжимаемая среда, 466
 несжимаемая вязкая жидкость, 542
 неустойчивое равновесие, 577
 неустойчивое решение, 577
 невесомость, 135
 незатухающие колебания, 75
 независимая переменная, 291
 номинальное напряжение, 667
 нормальная дисперсия, 628
 нормальные координаты, 268
 нормальный орт, 31
 нормальное напряжение, 447
- ньютоновская сила, 41
 ньютоновское поле тяготения, 98
 нутация, 280
- обменное взаимодействие, 50
 обобщённая скорость, 239
 обобщённая энергия, 259
 обобщённо-потенциальные силы, 246
 обобщённые координаты, 238
 обобщённые силы, 240
 обратная задача, 116
 обратные преобразования Лоренца, 348
 общие законы эрмитарности, 695
 объёмная плотность силы, 445
 огибающая волны, 628
 ограниченная задача трёх тел, 175
 ограниченная эрмитарность, 695
 одномерная диффузия, 572
 однородное поле, 214
 однородное волновое уравнение, 494
 однородность времени, 258
 однородность пустого пространства, 259
 одночастичная плотность, 389
 одночастичная функция распределения, 389
 октаэдрическая площадка, 672
 оптика Ньютона, 328
 орбитальный момент, 149, 214
 орты, 27
 осевой момент, 191
 открытая переменная, 665
 основная формула гироскопии, 281
 основное уравнение гидростатики, 464
 остаточная деформация, 674
 относительная величина, 349
 относительное ускорение, 133
 отражённая волна, 621, 630
 отрицательная концентрация, 424
 осциллятор с линейным трением, 73
- память, 410
 парадокс близнецов, 351
 парадокс Даламбера, 509
 парадокс парусника, 45
 парадокс спутника, 106
 параметрическая форма, 64
 параметрический резонанс, 77
 парсек, 103
 пассивная сила, 119

- пекулярная скорость, 535
 первая космическая скорость, 104
 первая формула Бине, 94
 первый адиабатический инвариант, 318
 первый закон Ньютона, 35
 первый коэффициент вязкости, 542
 переменные действие-угол, 309
 переносная скорость, 132
 переносное ускорение, 133
 перигей, 100
 перидинамика, 744
 пластическая зона, 671, 679
 пластическое течение, 679
 пластичность, 664
 пластичные материалы, 668
 плоская деформация, 605
 плоская монохроматическая волна, 496
 плоская траектория, 56
 плоская фигура, 185
 плоское движение, 55
 плоское течение Куэтта, 550
 плоское течение Пуазейля, 550
 плотность импульса, 336
 плотность источников звуковых волн, 494
 плотность лагранжиана, 333
 плотность потока тепла, 4
 площадка текучести, 667
 поверхностная сила, 445
 поверхность разрыва, 502
 поверхность течения, 687
 пограничный слой, 549
 подвижная центроида, 186
 подвижный аксоид, 185
 подвижность частиц, 413
 подъёмная сила, 517
 поле скоростей, 186
 поле смещений, 439
 ползучесть, 651
 полное внутреннее отражение, 622
 полное сечение рассеяния, 111, 112
 полупроизводная, 563, 842
 поперечная волна, 571
 последствие, 560, 653
 постоянная разделения, 495
 постулат Друкера, 675
 постулат теории относительности, 345
 поступательное движение, 181, 511
 потенциал скоростей, 489
 потенциальная энергия, 58
 потенциальная сила, 58
 потенциальная яма, 67
 потенциальный барьер, 67
 предел прочности, 669
 предел текучести, 667
 предел упругости, 667
 преломлённая волна, 621
 преобразование Галилея, 344
 преобразование Якоби, 305
 преобразования Лоренца, 348
 прецессия, 228
 приведение тензора к главным осям, 197
 приведённая длина, 223
 приведённая масса, 157, 173, 174
 приведённый момент инерции, 278
 принцип Даламбера, 236
 принцип минимума энергии, 250
 принцип относительности Галилея, 345
 принцип относительности Эйнштейна, 345
 принцип суперпозиции сил, 42
 приращение производной, 636
 присоединённая масса шара, 511
 прицельный параметр, 110
 пространство, 343
 пространство Минковского, 356
 прямая задача, 116
 прямолинейное движение, 55
 псевдорелаксационная функция, 692
 пульсация, 587
 пучность, 632

 работа силы, 57
 равнодействующая сила, 42
 равномерное движение, 31
 равноускоренное движение, 31
 радиальная узловая линия, 637
 радиус-вектор, 27
 радиус кривизны, 31
 размерность, 238
 распад, 169
 распределение вероятности, 193
 распределение Леви-Смирнова, 425
 распределение Максвелла-Больцмана, 406
 рассогласование частот, 75
 расширение Вселенной, 531
 регулярная прецессия, 229
 резонанс, 75
 резонансная катастрофа, 75
 релаксационное приближение, 426
 релаксация, 73, 426

- релаксация деформации, 653
релаксация напряжения, 653
релятивистская динамика, 343
релятивистская масса, 360
релятивистский инвариант, 356
релятивистское замедление времени, 351
релятивистское сокращение длины, 349
реология, 687
реономные связи, 120
- самосогласованные поля, 429
сверхзвуковой поток, 501
свободная поверхность, 484
связанная система, 271
связи, 62
сдвиговой модуль, 841
сжатие Вселенной, 531
секториальная скорость, 32, 56
сепаратриса, 295
сила, 37, 49
сила Бассэ, 561
сила инерции, 38, 134
сила Минковского, 365
сила реакции стержня, 119
сила сопротивления, 262
сильная форма несжимаемости, 545
симметричный волчок, 226, 228
система двух материальных точек, 154
система координат, 25
система материальных точек, 53
система отсчета, 25
система центра инерции, 148
система центра масс, 148
скачок уплотнения, 505
скейлинг, 735
склерономные связи, 120
скобки Пуассона, 296
скользящий вектор, 204
скоростной напор, 488
скорость, 36
скорость звука в среде, 494
скорость свободного тела, 36
скрытая переменная, 665, 705
слабая форма несжимаемости, 545
случайная функция, 414, 576
случайное движение непрерывной среды, 576
случайное поле, 576
смена устойчивости, 575
собственная длина, 349
собственная кинетическая энергия, 151
собственная функция, 632
собственная частота, 267, 632
собственная энергия системы, 151
собственное время, 357
собственное значение, 632
собственный момент, 149
сокращение Лоренца-Фитцджеральда, 349
соотношение Эйнштейна, 413
соприкасающаяся плоскость, 30
сопротивление материалов, 203
спектральный метод, 576
среднее время, 352
среднее значение, 587
среднее напряжение, 447
стандартное вязкоупругое тело, 663
статика, 203
статистический ансамбль Гиббса, 381
статические силы реакции, 222
статическое давление, 488
стационарное движение, 486
стационарное течение, 454
стационарное уравнение Гамильтона-Якоби, 307
столкновение, 159
столкновение тел, 39
стоячая волна, 274, 632
стратифицированная среда, 578
струя тока, 454
субстанциональное уравнение, 461
сферическая волна, 497
сферически симметричная волна, 497
сферический маятник, 125
сфероид, 469
- тангенциальный разрыв, 504
тахiony, 354
текучая среда, 451
текучесть, 667
тёмная материя, 109
тензор вязких напряжений, 541
тензор давлений, 403
тензор деформаций, 442
тензор инерции, 195
тензор малых деформаций, 442
тензор напряжений, 447
тензор напряжений Рейнольдса, 587
тензор плотности тока импульса, 472
тензор поворота, 194, 441
тензор упругости, 639

- теорема Вольтерры, 700
 теорема Кёнига, 151
 теорема Клеро, 124
 теорема Кориолиса, 133
 теорема Лиувилля, 384
 теорема Пуассона, 297
 теорема Штейнера, 195
 теоремы сохранения, 402
 теория механизмов и машин, 203
 теория относительности, 343
 теплопроводность, 572
 термодинамические ограничения, 834
 техническое напряжение, 667
 течение, 556
 тождественные механические системы, 380
 тождественное преобразование, 304
 тождество Якоби, 296
 ток заряда, 460
 точечные преобразования Лежандра, 300
 точки Лагранжа, 178
 точка поворота, 67
 траектория точки, 26
 траектория частицы, 453
 третий закон Ньютона, 39
 третья космическая скорость, 104
 треугольник Лагранжа, 177
 трубка тока, 454
 турбулентное движение, 574
 тяжёлое тело, 142
- угол нутации, 229, 276
 угол отдачи, 162
 угол прецессии, 276
 угол рассеяния, 110, 161, 162
 угол сдвига, 601
 угол собственного вращения, 276
 угол Эйлера, 276
 ударная адиабата, 505
 ударная волна, 502
 удельная масса, 472
 узел, 632
 укороченное действие, 323
 упрочнение, 674
 упругая деформации, 439
 упругая энергия, 604
 упругое столкновение, 159, 368
 упругое тело, 439
 упругопластичность, 664
 упругопластичный материал, 664
- уравнение баланса, 460
 уравнение баланса импульса, 471
 уравнение баланса механической энергии, 473
 уравнение Власова, 429, 742
 уравнение Гамильтона, 293
 уравнение Гельмгольца, 496
 уравнение Громеки-Ламба, 486
 уравнение движения, 52
 уравнение движения текучей среды, 463
 уравнение Кеплера, 106
 уравнения Лагранжа, 237, 242
 уравнение Лагранжа-Коши, 492
 уравнение Ламэ, 615
 уравнение Максвелла, 42
 уравнение Матё, 77
 уравнение Мецгерского, 155
 уравнение Навье-Стокса, 408, 542
 уравнение непрерывности, 403, 408, 460
 уравнение Рэлея, 620
 уравнение сохранения энергии, 404
 уравнение теплопроводности, 408
 уравнение траектории, 93
 уравнение Циолковского, 155
 уравнение Шрёдингера, 331
 ускорение, 49
 ускорение свободного падения, 43
 условие пластичности Мизеса, 672
 условие пластичности Треска, 670
 условие прилипания, 543
 условие равновесия, 464
 условия Сен-Венана, 442
 условия совместности, 442
 устойчивое решение, 577
 устойчивость решения, 577
 устойчивый материал, 674
- фазовая жидкость, 381
 фазовая плотность распределения, 380
 фазовое пространство, 292
 фазовый интеграл, 309
 фазовый портрет, 293
 физика поверхностных явлений, 463
 физическая переменная, 666
 физически малые, 25
 физический маятник, 223
 финитное движение, 67
 флуктуационно-диссипационная теорема, 413
 флуктуация, 587
 фокальный параметр, 100

- форма Бернулли, 628
 формула Резерфорда, 113
 формула Ривальдса, 182
 формулы сложения скоростей
 Эйнштейна, 353
 формула Стокса, 554
 формула Циолковского, 155
 формула Эйлера, 182
 фотон, 373
 фрактал, 357
 функционал, 250
 функционал влияния, 694
 функционал действия, 251
 функционал Лагранжа, 333
 функционал памяти, 695
 функциональные скобки Пуассона, 338
 функция влияния, 697
 функция давления, 466
 функция Гамильтона, 292
 функция Лагранжа, 243
 функция напряжения, 606
 функция Рауса, 256
 функция Рэлея, 262
- характеристическая длина, 735
 характеристическое уравнение, 200, 266
 хронологический оператор, 386
 хрупкие материалы, 668
- центр инерции, 148
 центр массы тела, 25
 центр приведения, 205
 центральная сила, 56
 центрально-симметричное поле, 58
 центробежный момент инерции, 192
 центростремительное ускорение, 133
 циклические координаты, 255
 циклотронная частота, 318
- циркуляционный поток, 516
- частичное распределение, 388
 частная производная, 337
 четвёртый закон Ньютона, 41
 четырёхмерный вектор, 355
 число Бингама, 689
 число Кнудсена, 427
 число Маха, 501
 число степеней свободы, 238
 число Циолковского, 155
 чистый сдвиг, 602
- шаровой тензор, 201, 447
 шестиугольник Треска, 671
- эйконал, 623
 эквивалентные системы, 204
 экзоэнергетическая реакция, 168, 374
 эксцентрическая аномалия, 104
 эксцентриситет, 100
 элемент Максвелла, 661
 элемент Ньютона, 659
 элемент Фойхта, 660
 эндохронная модель, 691
 эндохронная теория пластичности, 691
 эндоэнергетическая реакция, 168, 374
 энергия покоя, 360
 энергия реакции, 168, 374
 эредитарность, 560, 693
 эргодическая гипотеза, 576
 эффект Комптона, 373
 эффективное распределение заряда, 433
 эффективный потенциал, 92
- ядро диффузии, 741
 ядро упругости, 671

Владимир Васильевич УЧАЙКИН
**МЕХАНИКА. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ
СПЛОШНЫХ СРЕД**

Учебник

Издание второе, стереотипное

Зав. редакцией естественнонаучной
литературы *М. В. Рудкевич*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 16.02.17.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 60×90^{1/16}.
Печать офсетная. Усл. п. л. 53,75. Тираж 100 экз.

Заказ № 111-17.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в ПАО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.