А.А. Трухачев

АНАЛИЗ ПРОЦЕДУР И АЛГОРИТМОВ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

Москва • «Радио и связь» • 2003

УДК 621.396.96

Трухачев А.А.

Анализ процедур и алгоритмов обнаружения сигналов. — М.: Радио и связь, 2003. – 248 с.: ил.

ISBN 5-256-01707-1.

Излагаются различные вопросы анализа процедур и алгоритмов обнаружения сигналов. Рассматриваются методы анализа плотностей распределения вероятностей, методы расчёта характеристик обнаружения сигналов при осложненных исходных данных, методы анализа характеристик обнаружения и точности измерения параметров сигналов в многоканальной системе, каждый канал которой настроен на определённые значения задержки и частоты сигнала. Излагаются задачи оптимизации дискретного обзора по угловым координатам. Подробно изучаются многоэтапные методы обнаружения.

При анализе цифровой обработки сигнала основное внимание уделено методам оценки энергетических потерь, обусловленных преобразованием аналоговых реализаций в цифровую форму. Выполнен синтез и разработаны методы анализа схем дискретной обработки наблюдений при обнаружении сигнала на фоне шума и мешающих сигналов с неизвестными интенсивностями.

Для научных работников и радиоинженеров, занимающихся проектированием радиолокационных станций, а также для аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Ил. 33. Табл. 5. Библ. 139 назв.

ISBN 5-256-01707-1

© А.А. Трухачев, 2003

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория обнаружения сигналов является важным разделом статистической радиотехники. Применение статистического подхода привело к созданию основ синтеза и анализа радиотехнических информационных систем. Базируясь на этих основах, теория обнаружения продолжает успешно развиваться.

В процессе проектирования радиотехнических устройств и алгоритмов обнаружения всегда возникают новые и особые задачи, решение которых способствовало бы построению реализуемых алгоритмов и достаточно точному анализу эффективности различных процедур обнаружения. Для многих представляющих практический интерес случаев имеются готовые решения и рекомендации общего характера, применение которых к конкретным реальным условиям иногда сопряжено с математическими затруднениями.

Возникает необходимость в методах анализа процедур и алгоритмов обнаружения сигналов, позволяющих существенно приблизить достижения общей теории к насущным потребностям проектировщиков радиотехнических систем. Большое значение приобретает и анализ характеристик обнаружения при осложнённых исходных данных.

В результате стремительного развития технологии производства радиоэлектронной аппаратуры появляются принципиально новые устройства обнаружения сигналов, осуществляющие цифровую обработку наблюдений, что влечёт за собой необходимость в оценке эффективности цифровых процедур обнаружения.

Данная книга посвящена разработке, систематизации и обобщению методов анализа, предназначенных для оценки характеристик обнаружения и для оптимизации процедур и алгоритмов обнаружения сигналов.

В книге применяются разнообразные аналитические методы в сочетании с приближёнными и численными методами. При оформлении результатов решения не ставилось основной целью получить решения в виде обширных таблиц или графиков. В связи с повсеместным использованием ЭВМ, предпочтительнее эффективные вычислительные процедуры и достаточно простые аналитические соотношения, получению которых уделяется большое внимание. Тем не менее, представление результатов в виде каких-либо обобщённых диаграмм или коэффициентов также используется, если эти результаты могут быть применены в общих математических моделях.

В первых двух главах проводится развитие методов анализа плотностей распределения вероятностей. Такое расположение материала позволило в некоторой степени сократить в дальнейшем математическую сторону дела и сконцентрировать внимание на радиотехнических вопросах. Все изложенные здесь результаты использовались в последующих главах, однако, нужно отметить, что результаты имеют

самостоятельное значение и могут способствовать успешному решению каких-либо других радиотехнических задач.

Третья и четвёртая главы посвящены методам расчёта характеристик обнаружения когерентных и некогерентных сигналов. Основное внимание уделяется построению простых, но достаточно точных методов, позволяющих учитывать произвольные законы флуктуаций сигнала и различные корреляционные связи, имеющие место между флуктуациями интенсивности сигналов.

В пятой главе рассматриваются методы расчёта характеристик обнаружения сигнала с неизвестными задержкой и частотой, когда обнаружение осуществляется многоканальной системой, каждый канал которой настроен на определённые значения неизвестных параметров. Оцениваются ошибки измерения неизвестных параметров сигнала, когда измерения производятся одновременно с обнаружением или с помощью устройств, изначально предназначавшихся для обнаружения сигналов.

В шестой и седьмой главах анализируются вопросы, связанные с оценкой характеристик обнаружения и построением алгоритмов обнаружения сигналов с неизвестными угловыми координатами. В шестой главе изучаются вопросы оптимизации режимов обзора. Седьмая глава посвящена исследованию и оптимизации многоэтапных методов обнаружения. Важное место при этом занимает оценка влияния статистической зависимости флуктуаций сигнала от этапа к этапу.

Восьмая и девятая главы посвящены цифровой обработке сигналов. Оценивается влияние параметров цифровых устройств на энергетические потери, обусловленные преобразованием аналогового сигнала в цифровую форму. Девятая глава полностью посвящена вопросам обнаружения сигнала на фоне шума и мешающих воздействий с неизвестными интенсивностями. Синтез процедур обработки производится исходя из условий обнаружения сигнала на фоне шума с неизвестной интенсивностью. Затем рассматриваются методы оценки эффективности процедур, когда помимо шума и полезного сигнала на входе приёмника присутствуют мешающие сигналы.

Принята тройная нумерация формул. При ссылках на формулы внутри параграфа используется лишь номер формулы. При ссылках на формулы из других параграфов используется составной номер, включающий в себя номер главы и параграфа.

1. ОДНОМЕРНЫЕ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Введение

Основное назначение приёмника обнаружения сигналов состоит в установлении факта наличия полезного сигнала в случайной реализации, поступающей на вход приёмника и являющейся смесью полезного сигнала и помеховой составляющей.

На выходе приёмника формируется случайная величина, являющаяся функционалом от принятой реализации.

При оценке вероятностных характеристик обнаружения сигналов возникают проблемы нахождения плотности распределения вероятностей выходной случайной величины, а также вычисления определённых интегралов от найденной плотности. Для решения этих проблем необходимы различные приёмы и методы, позволяющие с той или иной точностью решать поставленную задачу.

В гл. 1 и 2 излагаются методы исследования плотностей распределения и статистических характеристик случайных величин, необходимые при анализе характеристик обнаружения сигналов.

Первая группа рассматриваемых вопросов основана на применении ортогональных разложений плотностей распределения. Полученные результаты применимы в общих случаях и, в частности, при анализе характеристик обнаружения когерентных и некогерентных сигналов с произвольным законом флуктуаций амплитуды.

Вторая группа вопросов посвящена статистическим характеристикам модуля вектора с гауссовскими компонентами. Результаты находят применение, в основном, при анализе задач обнаружения сигналов с нефлуктуирующей амплитудой или с рэлеевскими флуктуациями амплитуды. Эти результаты необходимы и для выявления наиболее общих закономерностей при исследовании многоканальных и многоэтапных методов обнаружения.

Далее на конкретном примере иллюстрируется основанный на двумерном преобразовании Лапласа специальный метод нахождения статистических характеристик функций от случайных переменных. Этот метод позволяет успешно решать соответствующие радиотехнические задачи. Он будет неоднократно применяться в следующих главах.

1.2. Плотности распределения вероятностей, характеристические функции и преобразование Лапласа

Эффективным инструментом в теории вероятностей является аппарат характеристических функций. Характеристической функцией плотности распределения вероятностей $w(x)$ случайной величины x [34] или характеристической функцией случайной величины x, рас-

пределённой по закону $w(x)$ [42], называется комплекснозначная функция действительного аргумента

$$\chi(\xi) = \overline{\exp(\mathrm{i}\xi x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} w(x)\, dx\,.$$

Черта над выражением здесь и далее будет обозначать среднее значение соответствующего выражения; усреднение производится по всем случайным величинам, входящим в выражение. Заметим также, что случайные переменные и их реализации будут для удобства обозначаться одинаковыми символами.

Использование аппарата характеристических функций во многих случаях облегчает процесс нахождения плотности распределения. Если случайную переменную x удаётся представить в виде функции каких-то случайных величин, то характеристическую функцию x можно найти путём усреднения экспоненты по этим случайным величинам. Затем по формуле

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \chi(\xi)\, d\xi \qquad (1.2.1)$$

находится искомая плотность распределения вероятностей.

Выражение для плотности распределения, представленное формулой (1), можно использовать в различных функциональных преобразованиях. Если $w(x)$ входит в какое-либо подынтегральное выражение, то после замены $w(x)$ правой частью формулы (1) может оказаться допустимым изменение порядка интегрирования, в результате чего становится возможным решение поставленной задачи. Однако использование этого приёма сильно ограничивается тем, что характеристическая функция является по определению функцией действительного переменного и, поэтому, контур интегрирования в (1) предполагается заранее фиксированным.

Ощутимое расширение возможностей в функциональных преобразованиях предоставляет применение преобразования Лапласа вместо аппарата характеристических функций. Применение преобразования Лапласа оказывается возможным благодаря тому, что в задачах обнаружения приходится, в основном, иметь дело с положительными случайными величинами и, поэтому, плотности распределения вероятностей таких случайных величин тождественно равны нулю на отрицательной полуоси.

Изображение по Лапласу плотности распределения вероятностей положительной случайной величины и плотность распределения связаны между собой функциональными преобразованиями

$$F(p) = \overline{\exp(-px)} = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-px} w(x)\, dx\,, \qquad (1.2.2)$$

$$w(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{px} F(p)\, dp\,. \qquad (1.2.3)$$

Функцию $F(p)$ называют также преобразованием Лапласа функции $w(x)$. Функцию $w(x)$ по отношению к изображению называют функцией-оригиналом или просто оригиналом.

Изображение $F(p)$ является функцией комплексного переменного. Значение константы c в формуле (3) может быть выбрано произвольным, лишь бы особые точки подынтегрального выражения были расположены слева от контура интегрирования. Например, если интеграл (2) сходится при некотором отрицательном значении $\mathrm{Re}(p)$, то константа c может быть отличной от нуля и отрицательной, хотя и сколь угодно малой по абсолютной величине.

Для иллюстрации возможностей преобразования Лапласа рассмотрим простой пример. Попробуем вычислить среднее значение некоторой функции положительной случайной величины x. Эту функцию обозначим через $h(x)$. Подставим в формулу для среднего значения

$$m = \int_0^\infty h(x)\, w(x)\, dx$$

вместо $w(x)$ контурный интеграл из формулы (3) и изменим порядок интегрирования. Тогда

$$m = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-i\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} F(p) \left\{ \int_0^\infty \mathrm{e}^{px} h(x)\, dx \right\} dp \qquad (1.2.4)$$

или

$$m = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} F(p)\, g(-p)\, dp\,, \qquad (1.2.5)$$

где $g(p)$ — изображение функции $h(x)$.

Сходимость заключённого в фигурные скобки внутреннего интеграла в (4) и, следовательно, правомерность изменения порядка интегрирования обеспечиваются лишь в том случае, если можно найти такое значение константы c, чтобы особые точки $F(p)$ располагались слева, а $g(-p)$ — справа от прямой, по которой в (4) и (5) ведётся интегрирование. Если $h(x)$ не стремится к нулю при неограниченном увеличении x, то значение c должно быть отличным от нуля и отрицательным.

При использовании характеристических функций можно получить формулу для среднего значения m, аналогичную формуле (5):

$$m = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi)\, \psi(-\xi)\, d\xi\,.$$

Но эта формула справедлива лишь для таких функций $h(x)$, для которых при действительных значениях ξ интеграл

$$\psi(\xi)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,h(x)\,dx$$

сходится абсолютно. Последнее условие существенно ограничивает множество функций $h(x)$, для которых пригоден рассмотренный метод, если применяются характеристические функции.

Аналитические выражения характеристических функций и изображений по Лапласу могут быть использованы для нахождения начальных моментов случайной величины. Если ν-ый момент существует, то его значение можно определить по формуле $m_\nu=\mathrm{i}^{-\nu}\chi^{(\nu)}(0)$, или $m_\nu=(-1)^\nu F^{(\nu)}(0)$, где $\chi^{(\nu)}(\xi)$ и $F^{(\nu)}(p)$ — ν-ые производные характеристической функции и изображения.

Если существуют все (т. е. при любом ν) моменты распределения, то характеристическая функция и изображение в большинстве случаев могут быть представлены в виде рядов Маклорена

$$\chi(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\xi)^\nu}{\nu!}m_\nu\,, \tag{1.2.6}$$

$$F(p)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-p)^\nu}{\nu!}m_\nu\,. \tag{1.2.7}$$

При исследованиях характеристик обнаружения, когда приходится иметь дело с плотностью распределения, приближённо равной нормальной плотности вероятностей, используются коэффициенты разложения в ряд логарифма характеристической функции

$$\ln\chi(\xi)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\xi)^\nu}{\nu!}\kappa_\nu\,.$$

Коэффициенты κ_ν называются семиинвариантами (или кумулянтами) распределения.

Логарифмируя выражение для $\chi(\xi)$ в формуле (6) и разлагая логарифм в степенной ряд, можно получить формулы, выражающие семиинварианты через начальные моменты:

$$\kappa_1=m_1,$$
$$\kappa_2=m_2-m_1^2,$$
$$\kappa_3=m_3-3m_2m_1+2m_1^3,$$
$$\kappa_4=m_4-4m_3m_1-3m_2^2+12m_2m_1^2-6m_1^4,$$

$$\kappa_5 = m_5 - 5m_4 m_1 - 10m_3 m_2 + 20m_3 m_1^2 + 30m_2^2 m_1 - 60m_2 m_1^3 + 24m_1^5,$$
$$\kappa_6 = m_6 - 6m_5 m_1 - 15m_4 m_2 + 30m_4 m_1^2 - 10m_3^2 + 120m_3 m_2 m_1 -$$
$$-120m_3 m_1^3 + 30m_2^3 - 270m_2^2 m_1^2 + 360m_2 m_1^4 - 120m_1^6.$$

Начальные моменты можно в свою очередь выразить через семиинварианты:

$$m_1 = \kappa_1,$$
$$m_2 = \kappa_2 + \kappa_1^2,$$
$$m_3 = \kappa_3 + 3\kappa_2 \kappa_1 + \kappa_1^3,$$
$$m_4 = \kappa_4 + 4\kappa_3 \kappa_1 + 3\kappa_2^2 + 6\kappa_2 \kappa_1^2 + \kappa_1^4,$$
$$m_5 = \kappa_5 + 5\kappa_4 \kappa_1 + 10\kappa_3 \kappa_2 + 10\kappa_3 \kappa_1^2 + 15\kappa_2^2 \kappa_1 + 10\kappa_2 \kappa_1^3 + \kappa_1^5,$$
$$m_6 = \kappa_6 + 6\kappa_5 \kappa_1 + 15\kappa_4 \kappa_2 + 15\kappa_4 \kappa_1^2 + 10\kappa_3^2 + 60\kappa_3 \kappa_2 \kappa_1 +$$
$$+20\kappa_3 \kappa_1^3 + 15\kappa_2^3 + 45\kappa_2^2 \kappa_1^2 + 15\kappa_2 \kappa_1^4 + \kappa_1^6.$$

Формулы связи между семиинвариантами и начальными моментами более высокого порядка (вплоть до 10-го включительно) можно найти в [31]. Там же есть формулы, связывающие центральные моменты с семиинвариантами и начальными моментами.

При программировании на вычислительной машине может оказаться полезной рекуррентная формула

$$h_\nu = \nu g_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_\mu h_{\nu-\mu}, \qquad (1.2.8)$$

где $\nu > 0$, $h_\nu = \kappa_\nu/(\nu-1)!$ и $g_\nu = m_\nu/\nu!$. Эта формула позволяет получать численные значения семиинвариантов любого порядка по известным значениям начальных моментов.

В приведенной рекуррентной формуле при $\nu = 1$ сумму следует полагать равной нулю; по общепринятому правилу считается, что сумма равна нулю, если верхний предел меньше нижнего.

1.3. Использование изображений для нахождения плотностей распределения вероятностей и интегралов от них

Изображение $F(p)$ может быть использовано для нахождения плотности распределения, соответствующей этому изображению. Во многих случаях нахождение оригинала $w(x)$ по формуле обращения (1.2.3) осуществляется с помощью теории вычетов.

Пусть p_ν — особые точки функции $f(p)$, являющиеся полюсами порядка n_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$). В окрестности точки p_ν функция $f(p)$ может быть представлена в виде ряда Лорана

$$f(p)=\frac{c_{-n_\nu}}{(p-p_\nu)^{n_\nu}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{p-p_\nu}+c_0+c_1(p-p_\nu)+\cdots. \qquad (1.3.1)$$

Вычетом функции $f(p)$ в точке p_ν называется коэффициент c_{-1} в разложении (1). Это определение будем записывать в виде

$$\operatorname*{res}_{p=p_\nu} f(p)=c_{-1}.$$

Применение теории вычетов основывается на теореме о вычетах, позволяющей вычислять контурные интегралы:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint f(p)\,dp=\sum_\nu \operatorname*{res}_{p=p_\nu} f(p) \qquad (1.3.2)$$

В этой формуле интегрирование осуществляется вдоль замкнутой кусочно гладкой кривой L. Особые точки p_ν функции $f(p)$ расположены внутри области, охватываемой контуром интегрирования. Функция $f(p)$ предполагается непрерывной на границах и аналитической внутри этой области (разумеется, за исключением особых точек p_ν).

В формуле (2) контур L при интегрировании обходится в положительном направлении (против часовой стрелки). Если интегрирование производится в обратном направлении, то при движении по контуру особые точки будут расположены справа, а теорему о вычетах следует записать в виде

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint f(p)\,dp=-\sum_\nu \operatorname*{res}_{p=p_\nu} f(p) \qquad (1.3.3)$$

Если особыми точками $F(p)$ являются полюсы, то теорема о вычетах может с успехом применяться при вычислении таких интегралов, как в формуле (1.2.3).

Представим себе контур L, состоящий из прямой, соединяющей точки $c-\mathrm{i}\infty$ и $c+\mathrm{i}\infty$ (эта прямая называется контуром Бромвича) и дуги окружности бесконечно большого радиуса с центром в начале координат. Дуга расположена слева от этой прямой и дополняет прямую до замкнутого контура. Контур Бромвича в (1.2.3) можно заменить контуром L: в теории функций комплексного переменного доказывается, что интеграл по дуге будет равен нулю. Тогда все особые точки подынтегрального выражения в (1.2.3) находятся внутри области, охватываемой контуром L, и, следовательно,

$$w(x)=\sum_\nu \operatorname*{res}_{p=p_\nu}\left\{\mathrm{e}^{px}F(p)\right\}, \qquad (1.3.4)$$

где p_ν — полюса изображения $F(p)$.

Если p_ν — полюс первого порядка, т. е. $n_\nu = 1$, то можно записать

$$F(p)=\frac{f(p)}{p-p_\nu}, \qquad (1.3.5)$$

где $f(p)$ — функция, аналитическая в окрестности точки p_ν. Тогда

$$\operatorname*{res}_{p=p_\nu}\left\{e^{px}F(p)\right\}=e^{p_\nu x}\,f(p_\nu)\,. \tag{1.3.6}$$

Если же $n_\nu > 1$, то соответствующий вычет может быть найден по формуле

$$\operatorname*{res}_{p=p_\nu}\left\{e^{px}F(p)\right\}=\frac{1}{(n_\nu-1)!}\frac{d^{n_\nu-1}}{dp^{n_\nu-1}}\left\{e^{px}\,f(p)\right\}\Bigg|_{p=p_\nu}, \tag{1.3.7}$$

где $f(p)=(p-p_\nu)^{n_\nu}F(p)$. Вертикальная черта с пометкой $p=p_\nu$ в конце формулы (7) означает, что выражение, расположенное между знаком равенства и вертикальной чертой, берётся в точке $p=p_\nu$.

Применение теории вычетов иллюстрируется далее на примерах. Помимо того, что примеры поясняют применение теории, результаты будут использоваться в последующих разделах.

Обратим внимание, что в рассматриваемых примерах $F(p)$ удовлетворяет условию $F(0)=1$, которое следует из формулы (1.2.2).

В качестве первого примера рассмотрим изображение

$$F(p)=\frac{1}{1+pa}, \tag{1.3.8}$$

где a — любое положительное число, являющееся параметром распределения. Изображение (8) имеет единственную особую точку $p_1=-1/a$ — полюс первого порядка. Формула (5) преобразуется к виду $F(p)=(1/a)/(p-p_1)$, а из (4) и (6) теперь следует $w(x)=(1/a)\exp(-x/a)$.

Пусть теперь $y=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_N x_N$, где $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — независимые между собой случайные величины, имеющие распределения $w_\nu(x_\nu)=(1/a_\nu)\exp(-x_\nu/a_\nu)$; α_ν — положительные коэффициенты. Найдём распределение $W(y)$ случайной величины y.

Изображение искомого распределения можно найти в результате следующих преобразований

$$F_y(p)=\overline{\exp(-py)}=\overline{\exp\left\{-p\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu x_\nu\right\}}=\prod_{\nu=1}^{N}\overline{\exp\{-p\alpha_\nu x_\nu\}}=$$

$$=\prod_{\nu=1}^{N}\int_0^\infty e^{-p\alpha_\nu x_\nu}\,\frac{1}{a_\nu}e^{-x_\nu/a_\nu}\,dx_\nu\,.$$

После вычисления интеграла получаем

$$F_y(p)=\prod_{\nu=1}^{N}\frac{1}{1+p\alpha_\nu a_\nu}\,. \tag{1.3.9}$$

Если все произведения $\alpha_\nu a_\nu$ различны между собой, то изображение (9) имеет N полюсов первого порядка $p_\nu = -1/(\alpha_\nu a_\nu)$, $\nu = 1, 2, \dots, N$. Записывая (9) в виде $F_y(p) = f_\mu(p)/(p - p_\mu)$, где

$$f_\mu(p) = \frac{1}{\alpha_\mu a_\mu} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{N} \frac{1}{1 + p\alpha_\nu a_\nu},$$

получаем

$$\operatorname*{res}_{p=p_\mu} \left\{ e^{py} F_y(p) \right\} = b_\mu \exp\left\{ -\frac{y}{\alpha_\mu a_\mu} \right\};$$

$$b_\mu = f_\mu(p_\mu) = \frac{1}{\alpha_\mu a_\mu} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{N} \frac{\alpha_\mu a_\mu}{\alpha_\mu a_\mu - \alpha_\nu a_\nu}.$$

Следовательно

$$W(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{py} F_y(p)\, dp =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{N} \operatorname*{res}_{p=p_\mu} \left\{ e^{py} F_y(p) \right\} = \sum_{\mu=1}^{N} b_\mu \exp\left\{ -\frac{y}{\alpha_\mu a_\mu} \right\}. \qquad (1.3.10)$$

Посмотрим, что происходит с формулой (10) при близких между собой значениях произведений $\alpha_\nu a_\nu$. Для простоты положим $N = 2$, $a_1 = a_2 = a$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1 - \varepsilon$ и будем считать, что ε — малое положительное число. Тогда (10) принимает вид

$$W(y) = u_1(y) - u_2(y), \qquad (1.3.11)$$

где

$$u_1(y) = \frac{1}{\varepsilon a} \exp\left\{ -\frac{y}{a} \right\}, \quad u_2(y) = \frac{1}{\varepsilon a} \exp\left\{ -\frac{y}{(1-\varepsilon)a} \right\}.$$

Из формулы (11) видно, что плотность вероятности $W(y)$ является разностью двух выражений, принимающих большие, но близкие между собой значения. Старшие значащие разряды в цифровом представлении значений этих выражений будут взаимно вычитаться, а получаемый результат будет существенно зависеть от младших разрядов, поэтому составляющие $u_1(y)$ и $u_2(y)$ необходимо вычислять с большой точностью.

Рассмотренный пример позволяет сделать важный практический вывод. Если особые точки изображения располагаются на комплексной плоскости близко друг относительно друга, то нахождение плотности распределения вероятностей по точной формуле может быть

сопряжено с вычислительными трудностями. В таких случаях целесообразно применение каких-либо приближённых формул.

Пусть теперь в предыдущем примере $\alpha_\nu = 1$, $a_\nu = a$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Тогда формула (9) принимает вид

$$F_y(p) = \frac{1}{(1+pa)^N} \ . \qquad (1.3.12)$$

Изображение (12) имеет единственную особую точку $p_1 = -1/a$ — полюс N-го порядка. Воспользовавшись формулой (7), запишем

$$\operatorname*{res}_{p=p_1}\left\{e^{py}F_y(p)\right\} = \frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{dp^{N-1}}\left\{e^{py}\frac{1}{a^N}\right\}\Bigg|_{p=p_1} =$$

$$= \frac{1}{(N-1)!}\frac{y^{N-1}}{a^N}e^{py}\Bigg|_{p=p_1} = \frac{y^{N-1}}{(N-1)!\,a^N}e^{-y/a},$$

или

$$W(y) = \frac{y^{N-1}}{(N-1)!\,a^N}e^{-y/a}. \qquad (1.3.13)$$

Если $N = 2$, то формула (13) может быть получена из формулы (11) путём раскрытия в (11) неопределённости при $\varepsilon = 0$.

Заметим, что если вместо $(N–1)!$ в формуле (13) написать гамма-функцию $\Gamma(N)$ и предположить, что N может быть нецелым (положительным) числом, то, всё равно, непосредственным вычислением изображения от оригинала

$$W(y) = \frac{y^{N-1}}{\Gamma(N)\,a^N}e^{-y/a} \qquad (1.3.14)$$

получим формулу (12). Это обстоятельство следует учитывать при применении теории вычетов: получаемые с помощью теории вычетов выражения для частных значений параметров могут быть справедливыми и в общем случае.

Рассмотрим теперь изображение

$$F_N(p) = \frac{1}{(1+p)^{N-1}[1+p(1+a)]}, \ N > 1, \ a > 0, \qquad (1.3.15)$$

которое имеет две особые точки. Распределение $w_N(x)$, соответствующее изображению (15), разумеется, можно найти в результате применения формул (4) – (7). Однако стоит продемонстрировать использование одного технического приёма.

Учитывая, что

$$\frac{1}{(1+p)[1+p(1+a)]} = \frac{1+a}{a}\cdot\frac{1}{1+p(1+a)} - \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+p},$$

при $N > 2$ можно записать

$$F_N(p) = \frac{1+a}{a}F_{N-1}(p) - \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(1+p)^{(N-1)}}. \qquad (1.3.16)$$

Если $N > 3$, то $F_{N-1}(p)$ в (16) можно выразить через $F_{N-2}(p)$ и т. д. В результате

$$F_N(p) = \left(\frac{1+a}{a}\right)^{N-1}F_1(p) - \frac{1}{a}\sum_{\nu=1}^{N-1}\left(\frac{1+a}{a}\right)^{N-1-\nu}\frac{1}{(1+p)^{\nu}}. \qquad (1.3.17)$$

Каждое из слагаемых в правой части (17) имеет по одной особой точке и, поэтому, окончательное выражение для плотности $w_N(x)$ теперь можно найти с помощью результатов, полученных в предыдущих примерах. Окончательное выражение имеет вид

$$w_N(x) = \left(\frac{1+a}{a}\right)^{N-1}\frac{1}{1+a}\times$$

$$\times\left[\exp\left\{-\frac{x}{1+a}\right\} - \sum_{\nu=1}^{N-1}\frac{1}{(\nu-1)!}\left(\frac{ax}{1+a}\right)^{\nu-1}\mathrm{e}^{-x}\right]. \qquad (1.3.18)$$

Рассмотрим ещё один пример. Пусть

$$F(p) = \frac{1}{(1+p)^N}\exp\left\{-\frac{pa}{1+p}\right\}. \qquad (1.3.19)$$

Представим это изображение в виде ряда

$$F(p) = \mathrm{e}^{-a}\frac{1}{(1+p)^N}\exp\left\{\frac{a}{1+p}\right\} = \mathrm{e}^{-a}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a^{\nu}}{\nu!}\frac{1}{(1+p)^{N+\nu}}.$$

Для соответствующей плотности распределения теперь можно записать

$$w(x) = \mathrm{e}^{-a}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a^{\nu}}{\nu!}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{(1+p)^{N+\nu}}\mathrm{e}^{px}\,dp.$$

Из (12) и (13) следует, что

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{(1+p)^{N+\nu}}\mathrm{e}^{px}\,dp = \frac{x^{N+\nu-1}}{(N+\nu-1)!}\mathrm{e}^{-x},$$

поэтому

$$w(x) = \mathrm{e}^{-x-a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^{\nu} x^{N+\nu-1}}{\nu!(N+\nu-1)!} \ .$$

Если учесть разложение в степенной ряд функции Бесселя мнимого аргумента, то плотность вероятности, соответствующую изображению (19), можно записать в виде

$$w(x) = \mathrm{e}^{-x-a} \left(\frac{x}{a}\right)^{(N-1)/2} I_{N-1}\left(2\sqrt{ax}\right) . \qquad (1.3.20)$$

Заслуживает внимания ещё один способ получения распределения (20) по изображению (19).

Формулу (1.2.3) можно записать в виде

$$w(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint e^{px} F(p)\, dp . \qquad (1.3.21)$$

Контур интегрирования в (21) может быть любым, лишь бы он охватывал все особые точки $F(p)$. Если теперь в качестве контура интегрирования взять окружность с центром в точке $p = -1$ и с радиусом R, затем подставить (19) в (21), перейти по формуле $p = -1 + R\exp(\mathrm{i}\varphi)$ к новой переменной интегрирования φ и, наконец, положить $R = \sqrt{ax}$, то получим

$$w(x) = \mathrm{e}^{-x-a} \left(\frac{x}{a}\right)^{(N-1)/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left\{-\mathrm{i}(N-1)\varphi + 2\sqrt{ax}\cos\varphi\right\} d\varphi . \qquad (1.3.22)$$

Замечая, что интеграл в (22) выражается через функцию Бесселя, приходим к формуле (20).

Вычислением плотностей распределения не ограничивается круг задач, в которых может использоваться теория вычетов. Теорема о вычетах может с успехом применяться при вычислении таких интегралов, как в формуле (1.2.5).

Представим контур, состоящий из прямой, соединяющей точки $c - \mathrm{i}\infty$ и $c + \mathrm{i}\infty$, и дуги окружности бесконечно большого радиуса с центром в начале координат. Дуга расположена слева от этой прямой и дополняет прямую до замкнутого контура. Тогда, если $f(p)p^{-r} \to 0$ при $\mathrm{Re}(p) \le c$, $r > 1$, $p \to \infty$, то интеграл от $f(p)$ по дуге можно принять равным нулю и

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+i\infty} f(z)\, dz = \sum_{\nu}{}' \operatorname*{res}_{z=z_\nu} f(z) . \qquad (1.3.23)$$

Штрих у знака суммы в формуле (23) означает, что суммируются только вычеты в особых точках p_ν, расположенных слева от контура интегрирования, т. е. при выполнении условия $\mathrm{Re}(p_\nu) < c$.

Если же $f(p)p^{-r} \to 0$ при $\mathrm{Re}(p) \geq c$, $r > 1$, $p \to \infty$, то для вычисления интеграла можно использовать формулу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} f(z)\,dz = -\sum_{\nu}{}'' \operatorname*{res}_{z=z_\nu} f(z).$$

Теперь два штриха у знака суммы означают, что учитываются только те особые точки, для которых $\mathrm{Re}(p_\nu) > c$.

Рассмотрим ещё одну особенность применения теории вычетов.

Наиболее характерной задачей при исследовании процедур обнаружения сигналов, является нахождение вероятности превышения некоторого порога λ случайной величиной, распределённой по закону $w(x)$. Эта вероятность выражается в виде интеграла

$$D(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} w(x)\,dx \ . \qquad (1.3.24)$$

Зная изображение по Лапласу $F(p)$ плотности $w(x)$, можно изложенными выше методами найти $w(x)$, а затем по формуле (24) найти вероятность превышения порога λ. Однако можно обойтись без промежуточных операций по нахождению $w(x)$. Для этого нужно по заданному изображению $F(p)$ найти изображение $F_D(p)$ функции $D(\lambda)$, а затем для нахождения $D(\lambda)$ применить к $F_D(p)$ теорию вычетов.

Интеграл

$$F_D(p) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-p\lambda}\, D(\lambda)\,d\lambda$$

сходится при $\mathrm{Re}(p) \geq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и вычисляется по частям:

$$F_D(p) = -\frac{1}{p}\int_0^{\infty} D(\lambda)\,d\mathrm{e}^{-p\lambda} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-p\lambda}\, w(\lambda)\,d\lambda \ ;$$

$$F_D(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}F(p) \ .$$

Учитывая, что оригиналом для $1/p$ является 1, можно записать

$$D(\lambda) = 1 - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\varepsilon-\mathrm{i}\infty}^{\varepsilon+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{p\lambda}\,\frac{1}{p}F(p)\,dp, \quad \varepsilon > 0 \ .$$

Вычет подынтегрального выражения в точке $p = 0$ равен 1, поэтому

$$D(\lambda) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{p\lambda} \frac{1}{p} F(p)\, dp, \quad c < 0 \ . \tag{1.3.25}$$

Константа, задающая контур интегрирования, теперь отрицательна, её значение может быть любым, лишь бы все особые точки $F(p)$ располагались слева от контура интегрирования.

Вычислим $D(\lambda)$ по изображению, заданному формулой (15). Учитывая

$$\frac{1}{p[1+p(1+a)]} = \frac{1}{p} - \frac{1+a}{1+p(1+a)} ,$$

получаем

$$D(\lambda) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{e^{p\lambda}}{p(1+p)^{N-1}} dp + \frac{1+a}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{\mathrm{e}^{p\lambda}}{[1+p(1+a)](1+p)^{N-1}} dp$$

и, далее,

$$D(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{N-2} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} \mathrm{e}^{-\lambda} +$$

$$+ \left(\frac{1+a}{a}\right)^{N-1} \left[\exp\left(-\frac{\lambda}{1+a}\right) - \sum_{\nu=0}^{N-2} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\lambda a}{1+a}\right)^{\nu} \mathrm{e}^{-\lambda} \right] . \tag{1.3.26}$$

Чтобы понять ещё одно преимущество непосредственного нахождения вероятности превышения порога через изображение плотности, можно для только что рассмотренного примера попытаться вычислить $D(\lambda)$ по формулам (24) и (18), т. е. непосредственным интегрированием предварительно найденной плотности распределения. При этом получим выражение, которое отличается по форме от (26) и довольно громоздко. Разумеется, путём некоторых преобразований полученного выражения можно свести его к формуле (26), однако это потребует дополнительных усилий. Кроме того, в аналогичных случаях не всегда бывает очевидной возможность упрощения выражения, полученного при интегрировании плотности распределения.

В практических приложениях значения порога λ равны, по крайней мере, нескольким единицам, а иногда составляют несколько десятков. Если в последнем рассматриваемом примере параметр a при этом равен нескольким единицам, то $\exp(-\lambda) << \exp\{-\lambda/(1+a)\}$. Тогда в формуле (26) можно отбросить слагаемые с $\exp(-\lambda)$, в результате

$$D(\lambda) \approx \left(\frac{1+a}{a}\right)^{N-1} \exp\left\{-\frac{\lambda}{1+a}\right\} \ . \tag{1.3.27}$$

Хотя эта формула и приближённая, но она обладает хорошей точностью при использовании её в практических приложениях.

Заметим, что формулу (27) можно легко получить из выражения (15) для изображения, если в процессе нахождения вероятности превышения порога с помощью теории вычетов не учитывать особую точку $p = -1$. Это обстоятельство целесообразно использовать для получения приближённых формул в других практических задачах. Если особые точки подынтегрального выражения находятся на разных расстояниях от мнимой оси комплексной плоскости, то при отыскании вероятности превышения порога вначале нужно проверить целесообразность вычисления вычетов в удалённых от мнимой оси точках.

На этом заканчиваем рассмотрение применения теории вычетов. Некоторые дальнейшие примеры использования теории вычетов для нахождения плотностей распределения вероятностей можно найти в работах [45, 88, 89, 29, 54, 120].

При анализе характеристик обнаружения встречаются изображения с особыми точками, являющимися точками ветвления. Пример практического использования таких изображений можно найти в § 4.4.

Для нахождения аналитического выражения плотности распределения по известному изображению можно использовать различные справочные пособия, среди которых назовём справочник [25].

Получить аналитические выражения для статистических характеристик случайной величины удаётся не всегда. Поэтому в заключение данного параграфа приведём краткий обзор работ, в которых развиваются или применяются различные приближённые и численные методы обращения изображений или характеристических функций.

В работах [49, 50, 131, 109] для решения задачи обращения характеристических функций или изображений рассматриваются непосредственные методы численного интегрирования. В [122] описывается метод численного обращения преобразования Лапласа, основанный на конформном отображении контура Бромвича. Справочные книги [35, 36] позволяют выполнить численное обращение преобразования Лапласа при помощи квадратурных формул.

В [17] в доступной форме излагается метод седловых точек, иначе называемый методом перевала (см. также [87]). Этот метод позволяет получать асимптотические выражения при обращении изображений. Применительно к вероятностным задачам обнаружения сигналов метод седловых точек успешно развивается в работах [82, 116, 117].

В [94] рассмотрен приближённый метод вычисления функции распределения, использующий разложение в ряд с применением полиномов Лагерра.

В [37] описан метод обращения, основанный на представлении плотности распределения в виде ряда Фурье. Примерами практического применения этого метода при анализе процедур обнаружения являются работы [104, 105].

1.4. Ортогональные разложения плотностей распределения вероятностей

Разложение плотностей распределения вероятностей случайных величин в ряд по ортогональным функциям часто применяется в задачах статистической радиотехники. При этом, как правило, используются классические ортогональные полиномы с соответствующими весовыми функциями [42]. Однако применение известных полиномов не всегда даёт хорошие аппроксимации плотностей распределения. Поэтому представляется целесообразным расширить применение ортогональных разложений. Некоторые возможности для этого предоставляют ортогональные полиномы с подходящим образом выбранной весовой функцией.

Пусть $W(x)$ — плотность распределения вероятностей случайной величины, аналитическое выражение для которой неизвестно или является довольно сложным. Полагаем, что известны моменты этой случайной величины M_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) и приближённое выражение $g(x)$ для $W(x)$. Обозначим через α_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) моменты функции $g(x)$, причём будем считать, что $g(x)$ нормирована так, чтобы $\alpha_0 = 1$.

Плотность вероятности $W(x)$ можно представить в виде ряда по ортогональным полиномам

$$W(x) = \{1 + k_1 Q_1(x) + k_2 Q_2(x) + \ldots\}\, g(x), \qquad (1.4.1)$$

где

$$Q_\nu(x) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_\nu \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu-1} & \alpha_\nu & \cdots & \alpha_{2\nu-1} \\ 1 & x & \cdots & x^\nu \end{vmatrix}, \quad k_\nu = \frac{\delta_\nu}{\Delta_{\nu-1}\Delta_\nu},$$

$$\delta_\nu = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_\nu \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu-1} & \alpha_\nu & \cdots & \alpha_{2\nu-1} \\ 1 & M_1 & \cdots & M_\nu \end{vmatrix}, \quad \Delta_\nu = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_\nu \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{\nu+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_\nu & \alpha_{\nu+1} & \cdots & \alpha_{2\nu} \end{vmatrix}.$$

Выражение для полиномов $Q_\nu(x)$ в виде определителя можно найти также в [34]. Там же показано, что при общих условиях, в частности при кусочно непрерывной весовой функции $g(x)$, полиномы определяются однозначно, а определители Δ_ν отличны от нуля и положительны.

Если в формуле (1) ограничиться конечным числом членов ряда, то получим более точную, чем $g(x)$, аппроксимацию плотности вероятности:

$$W_n(x) = R_n(x)\, g(x), \qquad (1.4.2)$$

где $R_n(x) = 1 + k_1 Q_1(x) + \ldots + k_n Q_n(x)$.

При использовании формулы (2) для каждого конкретного случая потребуется вначале находить полиномы и коэффициенты k_ν. Целесообразно получить такую формулу, по которой можно производить непосредственные вычисления полинома $R_n(x)$, минуя эти рутинные промежуточные операции.

Для того, чтобы получить такую формулу, нужно вначале доказать справедливость равенств

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^\nu R_n(x)\, g(x)\, dx = M_\nu\ , \quad \nu = 0, 1, \dots, n, \tag{1.4.3}$$

и единственность решения для $R_n(x)$ (доказательства опускаем). Далее, непосредственной проверкой можно убедиться, что выражение

$$R_n(x) = -\frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & \cdots & x^n \\ 1 & 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ M_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_n & \alpha_n & \alpha_{n+1} & \cdots & \alpha_{2n} \end{vmatrix} \tag{1.4.4}$$

удовлетворяет системе уравнений (3).

Заметим, что первые моменты функции $W_n(x)$, вплоть до n-го момента включительно, совпадают с соответствующими моментами плотности вероятности $W(x)$.

В рассмотренной задаче по существу речь идёт об определении неизвестного распределения вероятностей $W(x)$ по его моментам. Подобные задачи относятся к так называемой проблеме моментов. В частности, из приведенных в [31] сведений следует, что моменты M_ν однозначно определяют распределение $W(x)$, если ряд в выражении для характеристической функции

$$\chi(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{M_\nu}{\nu!}(\mathrm{i}\xi)^\nu$$

сходится абсолютно для некоторого $\xi \neq 0$. Это условие не выполняется, например, для логарифмически нормального распределения.

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с вычислением вероятности превышения порога случайной величиной, имеющей распределение вероятностей $W(x)$.

Приближённую формулу для вероятности превышения порога

$$P_n(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} R_n(x)\, g(x)\, dx \tag{1.4.5}$$

можно также представить в виде выражения с определителем, причём это выражение получается из правой части (4), если в верхней строке определителя заменить x^ν на

$$d_\nu(\lambda) = \int_\lambda^\infty x^\nu g(x)\,dx, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n.$$

При использовании (5) для вычисления вероятности превышения порога требуется производить интегрирование в выражениях для $d_\nu(\lambda)$. Для положительных случайных величин, когда $W(x)$ и $g(x)$ тождественно равны нулю на отрицательной полуоси, можно обойтись только одним интегралом $d_0(\lambda)$, если воспользоваться другим способом вычисления, изложенным далее.

В качестве формулы, аппроксимирующей вероятность превышения порога λ положительной случайной величиной, рассматривается выражение

$$D_n(\lambda) = S_n(\lambda)\, d_0(\lambda), \tag{1.4.6}$$

где $S_n(\lambda)$ — полином степени n. Полином $S_n(\lambda)$ ищется таким, чтобы $D_n(0) = 1$ и первые моменты распределения вероятностей, полученного дифференцированием $1 - D_n(\lambda)$ по λ, совпадали с соответствующими моментами $W(x)$. Этому условию удовлетворяет формула (6) при $S_n(\lambda) = \Omega_n(\lambda)/\gamma_n$, где

$$\Omega_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^n \\ \dfrac{\alpha_1 - M_1}{1} & \dfrac{\alpha_2}{2} & \dfrac{\alpha_3}{3} & \cdots & \dfrac{\alpha_{n+1}}{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\alpha_n - M_n}{n} & \dfrac{\alpha_{n+1}}{n+1} & \dfrac{\alpha_{n+2}}{n+2} & \cdots & \dfrac{\alpha_{2n}}{2n} \end{vmatrix};$$

γ_n — определитель порядка n, получаемый из $\Omega_n(\lambda)$ вычёркиванием первых строки и столбца.

1.5. Ряды Грама — Шарлье и Эджворта

Часто встречаются задачи, в которых рассматриваются плотности распределения вероятностей $W(x)$, близкие к гауссовскому закону. К таким плотностям можно применять рассмотренные в предыдущем параграфе ортогональные разложения с весовой функцией

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{1.5.1}$$

где m и σ — параметры весовой функции.

Моменты весовой функции определяются формулами $\alpha_1 = m$, $\alpha_2 = m^2 + \sigma^2, \ldots,\quad \alpha_{\nu+1} = m\alpha_\nu + \nu\sigma^2\alpha_{\nu-1}\quad (\nu \geq 1)$. Непосредственной проверкой путём раскрытия определителей можно для первых членов ряда (1.4.1) убедиться, что $\Delta_1 = \sigma^2$, $\Delta_2 = 2\sigma^6, \ldots,\ \Delta_\nu = \nu!\,\sigma^{2\nu}\Delta_{\nu-1}$, $Q_1(x) = \sigma y$, $\quad Q_2(x) = \sigma^4(y^2 - 1), \ldots,\quad Q_\nu(x) = \Delta_{\nu-1}\sigma^\nu H_\nu(y)$, где $y = (x - m)/\sigma$, $H_\nu(y)$ — полиномы Эрмита.

Полиномы Эрмита определяются соотношениями

$$\varphi^{(\nu)}(y) = (-1)^\nu H_\nu(y)\,\varphi(y); \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\varphi^{(\nu)}(y) = \frac{d^\nu}{dy^\nu}\varphi(y); \qquad \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-y^2/2},$$

причём

$$H_0(y) = 1, \quad H_1(y) = y, \quad H_2(y) = y^2 - 1, \ldots,$$

$$H_{\nu+1}(y) = y\,H_\nu(y) - \nu\,H_{\nu-1}(y).$$

Разложение плотностей распределения вероятностей в ряд по ортогональным полиномам Эрмита является хорошо известным методом. В этом случае существуют менее трудоёмкие способы получения выражений для коэффициентов разложения.

Если параметры m и σ весовой функции (1) выбрать такими, чтобы её первые два момента α_1 и α_2 совпадали с соответствующими моментами M_1 и M_2 плотности распределения $W(x)$, то первый и второй коэффициенты ряда обращаются в ноль. Получающийся ряд называется рядом Грама — Шарлье. Коэффициенты этого ряда удобно выражать через семиинварианты κ_ν случайной величины x.

Приводимые в литературе формулы для ряда Грама — Шарлье обычно содержат несколько первых членов. Но, как показано в [13], имеется возможность записать члены ряда в виде рекуррентных формул. Используя изложенный в [13] метод, для ряда Грама — Шарлье можно получить следующее выражение:

$$W(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(y)\left\{1 + \sum_{\nu=3}^{\infty} c_\nu H_\nu(y)\right\}, \tag{1.5.2}$$

где $y = (x - m)/\sigma$, а коэффициенты c_ν определяются формулами

$$c_\nu = \frac{1}{\nu}\left\{\beta_\nu + \sum_{\mu=3}^{\nu-3}\beta_\mu c_{\nu-\mu}\right\}, \qquad \beta_\nu = \frac{\kappa_\nu}{(\nu-1)!\,\sigma^\nu},$$

причём $m = \kappa_1$, $\sigma = \sqrt{\kappa_2}$. Здесь κ_ν — семиинварианты распределения $W(x)$ (см. § 1.2). В формуле для c_ν при $\nu < 6$ сумму следует полагать равной нулю.

В частности, для первых коэффициентов c_ν можно записать

$$c_3 = \gamma_3, \quad c_4 = \gamma_4, \quad c_5 = \gamma_5, \quad c_6 = \gamma_6 + \gamma_3^2/2!, \quad c_7 = \gamma_7 + \gamma_4\gamma_3,$$

$$c_8 = \gamma_8 + \gamma_5\gamma_3 + \gamma_4^2/2!, \quad c_9 = \gamma_9 + \gamma_6\gamma_3 + \gamma_5\gamma_4 + \gamma_3^3/3!,$$

$$c_{10} = \gamma_{10} + \gamma_7\gamma_3 + \gamma_6\gamma_4 + \gamma_5^2/2! + \gamma_4\gamma_3^2/2!$$

и т. д. В этих формулах $\gamma_\nu = \beta_\nu/\nu = \kappa_\nu/(\nu!\,\sigma^\nu)$.

Если же семиинварианты неизвестны, но известны начальные моменты M_ν, то коэффициенты β_ν для формулы (2) можно вычислить также рекуррентным способом:

$$\beta_\nu = \frac{h_\nu}{\sigma^\nu}, \qquad h_\nu = \nu\, g_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} g_\mu\, h_{\nu-\mu}, \qquad g_\nu = \frac{M_\nu}{\nu!}\ .$$

Формула (2) даёт разложение плотности вероятности в виде бесконечного ряда. Однако этот ряд может оказаться расходящимся. В [34] содержится утверждение, что ряд Грама — Шарлье для случайной величины x с ограниченной дисперсией сходится в каждой точке непрерывности плотности распределения, если сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(y^2/4)\, w(y)\, dy,$$

где $w(y)$ — распределение нормированной случайной величины $y = (x - m_x)/\sigma_x$, m_x и σ_x^2 — среднее значение и дисперсия случайной величины x. В противном случае ряд может расходиться.

Ряд Грама — Шарлье рассматривают, как правило, применительно к распределению суммы независимых случайных величин. В этом случае принимается во внимание, что характеристическая функция суммы равна произведению характеристических функций слагаемых, а семиинварианты суммы равны сумме семиинвариантов слагаемых. Если аналитическое выражение для распределения суммы найти не удаётся, то, зная семиинварианты (или моменты) слагаемых, с помощью конечного числа членов ряда можно получить приближённое выражение для распределения суммы.

Рассмотрим и мы этот ряд применительно к распределению суммы N независимых случайных величин, причём будем полагать, что все слагаемые имеют одинаковые распределения. Все вышепоказанные выражения, относящиеся к ряду Грама — Шарлье, будут справедливы и по отношению к распределению суммы, если в них m, σ^2 и κ_ν заменить на Nm, $N\sigma^2$ и $N\kappa_\nu$, а под m, σ^2 и κ_ν подразумевать среднее значение, дисперсию и семиинварианты каждого слагаемого. В формулах (2) для $W(x)$ и c_ν потребуется заменить y и β_ν новыми выражениями:

$$y = \frac{x - Nm}{\sqrt{N}\,\sigma}, \qquad \beta_\nu = \frac{N\kappa_\nu}{(\nu-1)!\left(\sqrt{N}\,\sigma\right)^\nu} .$$

Теперь обратим внимание на то, что каждый член ряда является, в свою очередь, тоже суммой некоторых величин. Это имеет место из-за того, что коэффициенты c_ν представляются в виде суммы. При больших N слагаемые, из которых состоят коэффициенты c_ν, имеют разный порядок малости. Например, для c_6 можно записать

$$c_6 = \frac{1}{N^2}\,\frac{\kappa_6}{6!\sigma^6} + \frac{1}{N}\,\frac{1}{2!}\left(\frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\right)^2 .$$

Учитывая это обстоятельство, слагаемые ряда Грама — Шарлье можно перегруппировать так, чтобы новое выражение представляло собой разложение по отрицательным степеням N. Получающееся при этом разложение называют рядом Эджворта, выражение для которого имеет вид:

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{N}\,\sigma}\left\{\varphi(y) - \frac{1}{\sqrt{N}}\,\frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\varphi^{(3)}(y) + \right.$$

$$+ \frac{1}{N}\left[\frac{\kappa_4}{4!\sigma^4}\varphi^{(4)}(y) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\right)^2\varphi^{(6)}(y)\right] -$$

$$- \frac{1}{N\sqrt{N}}\left[\frac{\kappa_5}{5!\sigma^5}\varphi^{(5)}(y) + \frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\,\frac{\kappa_4}{4!\sigma^4}\varphi^{(7)}(y) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\right)^3\varphi^{(9)}(y)\right] +$$

$$+ \frac{1}{N^2}\left[\frac{\kappa_6}{6!\sigma^6}\varphi^{(6)}(y) + \left(\frac{1}{2!}\left(\frac{\kappa_4}{4!\sigma^4}\right)^2 + \frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\,\frac{\kappa_5}{5!\sigma^5}\right)\varphi^{(8)}(y) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2!}\left(\frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\right)^2\frac{\kappa_4}{4!\sigma^4}\varphi^{(10)}(y) + \frac{1}{4!}\left(\frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\right)^4\varphi^{(12)}(y)\right] - \cdots\right\} . \qquad (1.5.3)$$

Интегрируя (3), можно получить выражение для вероятности превышения порога суммой случайных величин; это выражение будет приведено в следующем параграфе.

Формулу (3) можно распространить и на случай, когда слагаемые суммы имеют разные распределения. При этом в (3) нужно положить $N = 1$, а под величинами κ_ν подразумевать семиинварианты суммы случайных величин.

Ряд Эджворта, так же как и ряд Грама — Шарлье, может оказаться расходящимся. Тем не менее, ряд Эджворта широко применяется в задачах статистической радиотехники. Этот ряд обладает свойствами асимптотических рядов Пуанкаре. Практическое применение таких рядов основано на том, что при больших значениях параметра ряда (в данном случае при больших значениях $\sqrt{N}$) учёт конечного числа первых членов ряда даёт хорошее приближение для аппроксимируемой функции.

Члены расходящихся асимптотических рядов вначале убывают по абсолютной величине, а затем, начиная с некоторого номера, неограниченно возрастают. Именно с этого номера необходимо исключать из учёта возрастающие по абсолютной величине члены ряда, чтобы получившаяся сумма конечного числа первых членов ряда давала хорошее приближение для функции, представленной в виде асимптотического ряда.

К сожалению, не представляется возможным сформулировать какие-либо количественные критерии, позволяющие дать ответ на вопрос о том, сколько членов в формуле (3) для ряда Эджворта необходимо учитывать. Однако, в результате применений ряда Эджворта, сформировались некоторые, довольно общие практические рекомендации по этому вопросу.

Если значение N невелико, а также, если гауссовский закон не является хорошим приближением для аппроксимируемой плотности распределения $W(x)$, то в выражении для ряда Эджворта, представленном формулой (3), в фигурных скобках следует оставить члены с $1/\sqrt{N}$ и с $1/N$, а члены с $1/(N\sqrt{N})$ и с $1/N^2$ следует отбросить. С увеличением значения N можно учесть члены с $1/(N\sqrt{N})$ и, далее, члены с $1/N^2$.

Как видим, с увеличением N точность ряда Эджворта возрастает не только потому, что быстрее убывают по абсолютной величине члены ряда, но и потому, что при больших N можно учитывать большее число членов.

Здесь следует заметить, что в литературе крайне редко встречаются формулы для ряда Эджворта, содержащие члены с $1/N^2$.

При вычислениях с помощью ряда Эджворта полезными могут оказаться таблицы [69, 70].

Считается, что для практических применений ряд Эджворта более предпочтителен, чем ряд Грама — Шарлье. С другой стороны, если семиинварианты (или моменты) случайных величин можно выразить аналитической формулой или, в крайнем случае, представить в виде массива, то ряд Грама — Шарлье более удобен в программировании для вычислительных машин, так как формулы для ряда и коэффициентов ряда легко представить в виде рекуррентных соотношений. Иногда при этом лишь необходимо применить специальную нормировку рекуррентных последовательностей, чтобы избежать как пере-

полнения разрядной сетки машины, так и превращения чисел в машинный ноль.

В некоторых случаях можно попытаться получить хорошую точность аппроксимации за счёт использования большого количества членов ряда в формуле (2). При этом следует учитывать, что в рекуррентных вычислениях будет происходить накопление вычислительных погрешностей и иногда именно по этой причине ряды начинают "расходиться". Так, например, проверки для рэлеевского распределения $W(x) = x\exp(-x^2/2)$ при относительной погрешности промежуточных вычислений 10^{-12} показали, что количество членов ряда в формуле (2) нужно ограничить числом 30.

1.6. Модификации ряда Эджворта

Теперь рассмотрим две асимптотические формулы, которые можно получить путём преобразований ряда Эджворта. Первая асимптотическая формула предназначена для определения величины порога по заданной вероятности превышения суммой случайных величин.

Используя ряд Эджворта, можно находить вероятность превышения заданного порога. Но часто возникает обратная задача: найти порог λ, вероятность превышения которого задана и равна F. При этом для нахождения величины порога более удобно иметь зависимость порога λ от вероятности F в явном виде. Эту зависимость можно найти в виде ряда по степеням числа случайных величин.

Предположим, что N независимых случайных величин имеют одинаковый закон распределения. Пусть κ_ν — семиинварианты этих случайных величин, $W(t)$ — распределение их суммы. Аппроксимируя распределение $W(t)$ рядом Эджворта, можно получить следующее выражение для вероятности превышения суммой порога λ:

$$F = \int_\lambda^\infty W(t)\,dt = \int_y^\infty \varphi(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{N}}\,\frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\,\varphi^{(2)}(y) -$$

$$-\frac{1}{N}\left\{\frac{\kappa_4}{4!\sigma^4}\,\varphi^{(3)}(y) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\right)^2 \varphi^{(5)}(y)\right\} +$$

$$+\frac{1}{N\sqrt{N}}\left\{\frac{\kappa_5}{5!\sigma^5}\,\varphi^{(4)}(y) + \frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\,\frac{\kappa_4}{4!\sigma^4}\,\varphi^{(6)}(y) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\right)^3 \varphi^{(8)}(y)\right\} -$$

$$-\frac{1}{N^2}\left\{\frac{\kappa_6}{6!\sigma^6}\,\varphi^{(5)}(y) + \left(\frac{1}{2!}\left(\frac{\kappa_4}{4!\sigma^4}\right)^2 + \frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\,\frac{\kappa_5}{5!\sigma^5}\right)\varphi^{(7)}(y) +\right.$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\right)^2\frac{\kappa_4}{4!\sigma^4}\varphi^{(9)}(y)+\frac{1}{4!}\left(\frac{\kappa_3}{3!\sigma^3}\right)^4\varphi^{(11)}(y)\Bigg\}+\cdots\,, \qquad (1.6.1)$$

где $y=(\lambda-\kappa_1 N)\big/(\sigma\sqrt{N})$, $\sigma=\sqrt{\kappa_2}$.

Будем искать y, удовлетворяющее уравнению (1), в виде

$$y=x+\frac{\delta_1}{\sqrt{N}}+\frac{\delta_2}{N}+\frac{\delta_3}{N\sqrt{N}}+\frac{\delta_4}{N^2}+\cdots,$$

где x, δ_1, δ_2, … — коэффициенты, не зависящие от N.

Разложим правую часть (1) в ряд в окрестности точки x. Для этого воспользуемся выражениями

$$\int_y^\infty \varphi(t)\,dt=\int_x^\infty \varphi(t)\,dt-\varphi(x)\left\{\Delta y-\frac{(\Delta y)^2}{2!}H_1(x)+\cdots\right\},$$

$$\varphi^{(\nu)}(y)=(-1)^\nu\varphi(x)\left\{H_\nu(x)-\Delta y\,H_{\nu+1}(x)+\frac{(\Delta y)^2}{2!}H_{\nu+2}(x)-\cdots\right\}.$$

Здесь

$$\Delta y=y-x=\frac{\delta_1}{\sqrt{N}}+\frac{\delta_2}{N}+\frac{\delta_3}{N\sqrt{N}}+\frac{\delta_4}{N^2}+\cdots\,;$$

$H_\nu(x)$ — полином Эрмита степени ν, определение которого приведено в предыдущем параграфе.

Полученный ряд можно сгруппировать по степеням N. Согласно (1) коэффициент при нулевой степени N равен F, остальные коэффициенты равны нулю. Из этих равенств можно получить x, δ_1, δ_2, … , а затем по формуле $\lambda=\kappa_1 N+\kappa_2^{1/2}\sqrt{N}\,y$ и λ. Окончательное выражение имеет вид:

$$\lambda=\kappa_1 N+\kappa_2^{1/2}\left\{x\sqrt{N}+\frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}}\,\frac{x^2-1}{6}+\frac{1}{\sqrt{N}}\left[\frac{\kappa_3^2}{\kappa_2^3}\,\frac{-2x^3+5x}{36}+\frac{\kappa_4}{\kappa_2^2}\,\frac{x^3-3x}{24}\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{N}\left[\frac{\kappa_3^3}{\kappa_2^{9/2}}\,\frac{12x^4-53x^2+17}{324}+\frac{\kappa_3\kappa_4}{\kappa_2^{7/2}}\,\frac{-x^4+5x^2-2}{24}+\frac{\kappa_5}{\kappa_2^{5/2}}\,\frac{x^4-6x^2+3}{120}\right]+$$

$$+\frac{1}{N\sqrt{N}}\left[\frac{\kappa_3^4}{\kappa_2^6}\,\frac{-252x^5+1688x^3-1511x}{7776}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\kappa_3^2\kappa_4}{\kappa_2^5}\,\frac{42x^5-309x^3+321x}{864}+\frac{\kappa_4^2}{\kappa_2^4}\,\frac{-9x^5+72x^3-87x}{1152}+\right.\right.$$

$$+\frac{\kappa_3\kappa_5}{\kappa_2^4}\,\frac{-8x^5+68x^3-84x}{720}+\frac{\kappa_6}{\kappa_2^3}\,\frac{x^5-10x^3+15x}{720}\Bigg]+\cdots\Bigg\}, \qquad (1.6.2),$$

где x определяется из

$$F=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt\ . \qquad (1.6.3)$$

Формула (2) даёт асимптотическое разложение функции, обратной к дополнению до 1 функции распределения. В отечественной литературе это разложение было представлено в [31, 74]. Способ получения асимптотического разложения в [31] и форма представления разложения отличаются от приведенных здесь и в [74]. Описанный в [31] способ принадлежит Корнишу и Фишеру, поэтому применительно к обращённому ряду Эджворта в литературе встречается название “асимптотическое разложение Корниша — Фишера”.

В [107] приведен ряд (2) для частного случая, когда κ_ν — семиинварианты случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение $w(z)=\exp(-z)$. Подставив в (2) выражения для семиинвариантов экспоненциально распределённой величины $\kappa_\nu=(\nu-1)!$, получим

$$\lambda=N+\sqrt{N}\,Q_1(x)+Q_2(x)+\frac{Q_3(x)}{\sqrt{N}}+\frac{Q_4(x)}{N}+\frac{Q_5(x)}{N\sqrt{N}}+\cdots\ , \qquad (1.6.4)$$

где $Q_\nu(x)$ — полиномы Кемпбелла:

$$Q_1(x)=x,$$
$$Q_2(x)=(x^2-1)/3,$$
$$Q_3(x)=(x^3-7x)/36,$$
$$Q_4(x)=(-3x^4-7x^2+16)/810,$$
$$Q_5(x)=(9x^5+256x^3-433x)/38880.$$

В [107] даны выражения для следующих полиномов вплоть до $Q_{11}(x)$ включительно.

Формулу (2), так же как и ряд Эджворта, можно распространить на случай зависимых случайных величин и на случай, когда слагаемые суммы имеют разные распределения. При этом в (2) нужно положить $N=1$, а под величинами κ_ν подразумевать семиинварианты суммы случайных величин.

Формула (2) иногда оказывается полезной для нахождения приближённого выражения для медианы $\lambda_м$ распределения случайной величины. Полагая в (2) $N=1$ и $x=0$, получим

$$\lambda_м=\kappa_1-\frac{1}{6}\,\frac{\kappa_3}{\kappa_2}+\left(\frac{17}{324}\,\frac{\kappa_3^3}{\kappa_2^4}-\frac{1}{12}\,\frac{\kappa_3\kappa_4}{\kappa_2^3}+\frac{1}{40}\,\frac{\kappa_5}{\kappa_2^2}\right)+\cdots, \qquad (1.6.5)$$

где κ_ν — семиинварианты рассматриваемой случайной величины. Например, для распределения $W(x) = \exp(-x - q)I_0(2\sqrt{xq}\,)$ семиинварианты определяются формулой: $\kappa_\nu = (\nu - 1)!\,(1 + \nu q)$. Далее, для рассматриваемого распределения из (5) можно получить

$$\lambda_{\text{м}} = q + \frac{1}{2} + \frac{1}{24q} + \cdots . \qquad (1.6.6)$$

При $q = 5$ и 10 формула (6) даёт $\lambda_{\text{м}} = 5{,}50833$ и $10{,}50417$, в то время как соответствующие точные значения составляют 5,50844 и 10,50419.

Метод получения второй асимптотической формулы во многом похож на метод получения формулы (2) для порога, поэтому вторую формулу приведём без доказательства. Эта формула позволяет выразить вероятность превышения порога через дополнение к функции нормального распределения:

$$\int_{\lambda}^{\infty} W(x)\,dx \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt\ . \qquad (1.6.7)$$

В (7) $W(x)$ — распределение суммы N независимых случайных величин, имеющих семиинварианты κ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, а величина z является конечной суммой асимптотического ряда:

$$z = y + \frac{b_1}{\sqrt{N}} + \frac{b_2}{N} + \frac{b_3}{N\sqrt{N}} + \frac{b_4}{N^2} + \cdots . \qquad (1.6.8)$$

Первые коэффициенты ряда (8) вычисляются по формулам

$$y = \frac{\lambda - N\kappa_1}{\sqrt{N\kappa_2}}, \quad a_\nu = \frac{\kappa_\nu}{\nu!\kappa_2^{\nu/2}},$$

$$b_1 = -a_3\,(y^2 - 1), \qquad b_2 = -a_4\,(y^3 - 3y) + a_3^2\,(4y^3 - 7y),$$

$$b_3 = -a_5\,(y^4 - 6y^2 + 3) + a_3 a_4\,(11y^4 - 42y^2 + 15) - a_3^3(69y^4 - 187y^2 + 52)/3,$$

$$b_4 = -a_6\,(y^5 - 10y^3 + 15y) + a_3 a_5\,(14y^5 - 96y^3 + 102y) + a_4^2\,(15y^5 - 96y^3 + 105y)/2 - a_3^2 a_4\,(111y^5 - 547y^3 + 456y) + a_3^4\,(948y^5 - 3628y^3 + 2473y)/6.$$

В частном случае из (7) и (8) можно получить формулу Бунимовича [14], представляющую собой приближённое выражение для вероятности превышения порога случайной величиной, распределённой по закону Рэлея — Райса.

1.7. Статистические характеристики модуля вектора с гауссовскими компонентами

В задачах, связанных с гауссовскими процессами, часто приходится иметь дело со случайными переменными, которые можно представить как модуль вектора с независимыми случайными нормальными компонентами. При этом в первую очередь возникает необходимость в нахождении выражений для плотности распределения модуля и для соответствующих моментов.

Математические преобразования оказываются проще, если вначале рассматривать не сам модуль вектора, а его квадрат или величину, пропорциональную квадрату модуля. Некоторые окончательные выражения, полученные для квадрата модуля, в результате несложных действий можно свести к соответствующим выражениям для модуля вектора. Это относится, например, к плотности распределения или к чётным моментам модуля вектора.

Итак, рассматривается n-мерный вектор, компоненты которого x_1, x_2, … , x_n являются нормальными случайными величинами с ненулевыми средними значениями. Все компоненты статистически независимы между собой и имеют одинаковую дисперсию. Без ограничения общности можно принять, что дисперсия компонент равна 1.

Модуль вектора представим в виде $z = \sqrt{2t}$, где $t = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)/2$. Величина t является нормированным квадратом модуля вектора (для краткости эту величину иногда будем называть просто квадратом модуля), нормирующий коэффициент 1/2 здесь введен для упрощения дальнейших окончательных выражений.

Чтобы найти плотность распределения квадрата модуля вектора, рассмотрим изображение по Лапласу

$$F(p) = \overline{\exp(-pt)} \tag{1.7.1}$$

плотности распределения вероятностей случайной величины t. Для усреднения в (1) воспользуемся представлением t через гауссовские компоненты x_1, x_2, … , x_n и распределениями этих компонент. В результате усреднения получим

$$F(p) = \frac{1}{(1+p)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{py}{1+p}\right\}, \tag{1.7.2}$$

где $y = (\bar{x}_1^{\,2} + \bar{x}_2^{\,2} + \cdots + \bar{x}_n^{\,2})/2$.

Для получения плотности распределения теперь можно использовать один из примеров § 1.3. Из приведенных в § 1.3 результатов следует, что изображению (2) при целых $n/2$ соответствует распределение

$$w_n(t) = \left(\sqrt{t/y}\right)^{n/2-1} \mathrm{e}^{-t-y}\, I_{n/2-1}\left(2\sqrt{ty}\right). \tag{1.7.3}$$

Однако эта формула справедлива для любых положительных значений n. Более того, (3) и (2) формально являются сопряжёнными оригиналом и изображением даже при нецелых n. Проверяется утверждение путём вычисления преобразования Лапласа от выражения (3). Для этого можно воспользоваться вспомогательным интегралом

$$\int_0^\infty x^{(\alpha-1)/2}\,\mathrm{e}^{-bx}\,I_{\alpha-1}\left(2a\sqrt{x}\right)dx=\frac{a^{\alpha-1}}{b^{\alpha}}\,\mathrm{e}^{-a^2/b},\qquad \alpha>0. \tag{1.7.4}$$

Получающееся изображение совпадает с изображением в формуле (2).

Если $y = 0$, то

$$w_n(t)=\frac{1}{\Gamma(n/2)}\,t^{n/2-1}\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Рассматриваемая здесь вероятностная модель для большинства радиотехнических задач имеет чётное число компонент вектора. Поэтому дальнейший анализ будем проводить для чётных n, в связи с чем целесообразно ввести новое обозначение: $N = n/2$. Везде, где это не оговорено особо, будем считать, что N — целое положительное число.

Используя формулу (2) и соотношение 8.975.1 из [22], моменты m_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$) случайной величины t нетрудно выразить через полиномы Лагерра: $m_\nu=\nu!L_\nu^{(N-1)}(y)$. Выражения для моментов можно также получить по рекуррентной формуле

$$m_{\nu+1}=(2\nu+N+y)m_\nu-\nu(\nu+N-1)m_{\nu-1}\ (\nu\ge 1),$$

причём $m_0 = 1$, $m_1 = N + y$.

Семиинварианты κ_ν нормированного квадрата модуля вектора t определяются формулой $\kappa_\nu = (\nu - 1)!\,(N + \nu y)$.

Вероятность превышения порога x рассматриваемой случайной величиной t выражается интегралом

$$J_N(x,y)=\int_x^\infty\left(\frac{t}{y}\right)^{(N-1)/2}\mathrm{e}^{-t-y}\,I_{N-1}\left(2\sqrt{ty}\right)dt.$$

Интеграл $J_N(x, y)$ является обобщением рассмотренного в [123] интеграла

$$J(x,y)=\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t-y}\,I_0\left(2\sqrt{ty}\right)dt.$$

В [123] приведены различные соотношения, раскрывающие свойства интеграла $J(x, y)$. Обобщение этих соотношений на интеграл $J_N(x, y)$, а также ряд новых формул, даны в Приложении 1.

Приведенные в Приложении формулы бывают полезными при математических преобразованиях различных соотношений, включающих в себя интеграл $J_N(x, y)$.

Перейдём теперь к статистическим характеристикам модуля вектора.

Осуществляя замену переменной по формуле $z = \sqrt{2t}$, получим распределение модуля вектора

$$W_n(z) = z\left(\frac{z}{V}\right)^{N-1} \mathrm{e}^{-(z^2+V^2)/2} I_{N-1}(zV),$$

где $V = \sqrt{2y} = \sqrt{\bar{x}_1^{\,2} + \bar{x}_2^{\,2} + \cdots + \bar{x}_n^{\,2}}$.

Для моментов M_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$) случайной величины z можно получить общие формулы:

$$M_\nu = 2^{\nu/2} \frac{\Gamma(N+\nu/2)}{\Gamma(N)} \mathrm{e}^{-y}\, {}_1F_1(N+\nu/2;\, N;\, y),$$

$$M_\nu = 2^{\nu/2} \frac{\Gamma(N+\nu/2)}{\Gamma(N)}\, {}_1F_1(-\nu/2;\, N;\, -y), \qquad (1.7.5)$$

где ${}_1F_1(\cdots)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, и рекуррентную формулу:

$$M_{\nu+2} = 2(y+N+\nu)M_\nu - \nu(2N+\nu-2)M_{\nu-2}, \qquad \nu > 1.$$

При больших значениях y для вычисления M_ν пригодна асимптотическая формула

$$M_\nu \sim \left(\sqrt{2y}\right)^\nu {}_2F_0(-\nu/2, -\nu/2-N+1; 1/y), \qquad (1.7.6)$$

где ${}_2F_0(\cdots)$ — гипергеометрическая функция, определяемая в виде ряда

$${}_2F_0(a, b; x) = 1 + \frac{ab}{1!}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!}x^2 + \cdots.$$

Чётные моменты случайной величины z можно определить по формуле $M_{2k} = 2^k m_k$. При чётных ν гипергеометрические ряды в (5) и (6) обрываются (состоят из конечного числа членов). Асимптотическая формула (6) при чётных ν превращается в точную формулу.

Нечётные моменты можно выразить через функции Бесселя от мнимого аргумента. Для этого необходимо воспользоваться формулой

$$ {}_1F_1(1/2;1;y) = \exp(y/2)\, I_0(y/2) $$

и имеющимися в справочниках рекуррентными соотношениями для вырожденной гипергеометрической функции и функций Бесселя. Однако получить при этом достаточно компактные формулы для произвольного значения N не удаётся.

Выражения для первых моментов при $N = 1$ имеют вид:

$$ M_1 = \sqrt{\pi/2}\, \mathrm{e}^{-y/2} \left\{ (1+y) I_0(y/2) + y\, I_1(y/2) \right\}, $$

$$ M_2 = 2(1+y), $$

$$ M_3 = \sqrt{\pi/2}\, \mathrm{e}^{-y/2} \left\{ (3+6y+2y^2) I_0(y/2) + 2y(2+y) I_1(y/2) \right\}, $$

$$ M_4 = 4(2+4y+y^2), $$

$$ M_5 = \sqrt{\pi/2}\, \mathrm{e}^{-y/2} \left\{ (15+45y+28y^2+4y^3) I_0(y/2) + \right. $$
$$ \left. + (23y+24y^2+4y^3) I_1(y/2) \right\}, $$

$$ M_6 = 8(6+18y+9y^2+y^3). $$

Вероятность превышения порога U модулем вектора выражается интегралом

$$ Q_N(U,V) = \int_U^\infty z \left(\frac{z}{V} \right)^{N-1} \mathrm{e}^{-(z^2+V^2)/2} I_{N-1}(zV)\, dz. \qquad (1.7.7) $$

Функция $Q_N(U, V)$ является обобщением рассмотренного в [4] интеграла

$$ Q(U,V) = \int_U^\infty z\, \mathrm{e}^{-(z^2+V^2)/2} I_0(zV)\, dz, \qquad (1.7.8) $$

названного там “интегралом вероятностей Релея — Райса”.

Интегралы типа (7) и (8) имеют широкое распространение в зарубежной литературе под названиями “обобщённая Q-функция Маркума” и “Q-функция Маркума”. Во избежание возможной путаницы обратим внимание на то, что первым аргументом Q-функций является параметр распределения, а порог — вторым аргументом. Формулы (7) и (8) будут являться определениями Q-функций, если в их левых частях соответственно записать $Q_N(V, U)$ и $Q(V, U)$.

Интегралы $J_N(x, y)$ и $Q_N(U, V)$ связаны между собой соотношениями

$$ J_N(x, y) = Q_N\left(\sqrt{2x}, \sqrt{2y}\right), \qquad Q_N(U,V) = J_N(U^2/2, V^2/2). $$

Заметим, что интеграл $J_N(x, y)$ может быть выражен также через неполную функцию Торонто [56].

1.8. Численные методы вычисления интеграла от распределения квадрата модуля вектора с гауссовскими компонентами

Для решения задач, в которых встречается интеграл $J_N(x, y)$, необходимо иметь в арсенале библиотечных программ процедуру его вычисления.

Для тех случаев, когда возникает необходимость в численном интегрировании выражений, содержащих этот интеграл, целесообразно минимизировать объём затрат машинного времени на вычисления.

Основой для построения существующих вычислительных процедур является разложение функции Бесселя в степенной ряд. Подстановка этого ряда в подынтегральное выражение и интегрирование приводят к формуле

$$J_N(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{y^\nu}{\nu!} \sum_{\mu=0}^{\nu+N-1} \frac{x^\mu}{\mu!} \right). \qquad (1.8.1)$$

Преобразованиями и сопоставлением с формулой (1) можно убедиться в справедливости ещё одного выражения:

$$J_N(x,y) = 1 - \mathrm{e}^{-y} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{y^\nu}{\nu!} \left(1 - \mathrm{e}^{-x} \sum_{\mu=0}^{\nu+N-1} \frac{x^\mu}{\mu!} \right) \right]. \qquad (1.8.2)$$

После некоторых преобразований, включающих в себя изменение порядка суммирования, из (1) можно также получить

$$J_N(x,y) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{x^\mu}{\mu!} + \mathrm{e}^{-x} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\frac{x^{\mu+N}}{(\mu+N)!} \left(1 - \mathrm{e}^{-y} \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{y^\nu}{\nu!} \right) \right], \qquad (1.8.3)$$

а затем

$$J_N(x,y) = 1 - \mathrm{e}^{-x-y} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{x^{\mu+N}}{(\mu+N)!} \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{y^\nu}{\nu!} \right). \qquad (1.8.4)$$

Приведенные формулы отражают различные существующие методы вычисления интеграла $J_N(x, y)$ и связанных с ним функций (интеграл вероятности Рэлея — Райса, Q-функция Маркума, обобщённая Q-функция Маркума, частный случай неполной функции Торонто). Далеко не полный перечень литературы, в которой излагаются эти вычислительные методы, можно представить работами [116, 4, 56, 106, 133, 125, 127, 108, 126, 135, 90].

На основании анализа упомянутых работ нельзя сделать вывод о предпочтительности той или иной формулы. Так, в [4, 127, 108, 90] представлены формула (1) или её аналоги. В [106] предложен метод

вычисления Q-функции, которому можно поставить в соответствие формулу (2). В [133, 135] представлена формула (3), а метод из [125] соответствует формуле (4). В [126] рекомендовано при $x > y + N$ пользоваться формулой (1), а при $x < y + N$ — формулой (2); в этих же случаях в [116] использовались формулы (3) и (4). В [56] предпочтение отдаётся формулам (1) и (4).

Из представленных формул целесообразно отобрать ту, которая требует меньше машинного времени на вычисления. В [80] содержится утверждение, что такому условию удовлетворяет формула (3), а из представленных в литературе способов вычисления $J_N(x, y)$ наилучшим является способ, изложенный в работе [135].

Рассмотрим теперь некоторые рекомендации по практическому использованию формулы (3).

Для составления вычислительной процедуры формулу целесообразно записать в виде

$$J_N(x,y) = \mathrm{e}^{-x/2}\left\{\sum_{\mu=0}^{N-1}\left(\mathrm{e}^{-x/2}\frac{x^\mu}{\mu!}\right)+\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu\right\}+\varepsilon_m, \qquad (1.8.5)$$

где

$$a_\mu = \mathrm{e}^{-x/2}\frac{x^{\mu+N}}{(\mu+N)!}\left[1-\mathrm{e}^{-y/2}\sum_{\nu=0}^{\mu}\left(\mathrm{e}^{-y/2}\frac{y^\nu}{\nu!}\right)\right],$$

а через ε_m обозначена ошибка вычисления, обусловленная заменой бесконечного ряда конечной суммой и зависящая от номера m последнего просуммированного члена ряда a_m.

В вычислительной программе при больших значениях x или y при вычислениях сумм может возникать переполнение разрядной сетки или превращение в машинный ноль значений экспонент. В связи с этим область допустимых значений аргументов x и y для вычислительной процедуры будет определяться диапазоном представимых в машине вещественных чисел. Формула (5) даёт основу для составления программы, позволяющей производить вычисления для $x \le 2\omega$ и $y \le 2\omega$, где ω — наибольшее число, при котором $\exp(-\omega)$ ещё не превращается в машинный ноль.

Суммирование в (5) следует заканчивать при выполнении условий $a_m < a_{m-1}$ и $a_m < [\varepsilon \exp(x/2)]/2$, где ε — требуемая точность вычисления интеграла. При этом будет обеспечиваться приближённое выполнение неравенства $\varepsilon_m \le \varepsilon$.

Если возникнет необходимость, чтобы в процедуре строго выполнялось неравенство $\varepsilon_m \le \varepsilon$, то можно воспользоваться рекомендациями из [135]. Там показано, что $\varepsilon_m \le b_m$, где

$$b_m = \left(1-\mathrm{e}^{-x/2}\sum_{\mu=0}^{m+N}\mathrm{e}^{-x/2}\frac{x^\mu}{\mu!}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-y/2}\sum_{\nu=0}^{m+1}\mathrm{e}^{-y/2}\frac{y^\nu}{\nu!}\right).$$

Можно параллельно с вычислением a_m для суммы (5) производить вычисление b_m и оканчивать суммирование в (5) когда $b_m \le \varepsilon$.

При вычислении b_m используются переменные, которые входят в (5), поэтому для b_m требуются небольшие добавочные вычисления. Как сообщается в [80], эти добавочные вычисления составляют 6 … 9 % от основных вычислительных затрат.

Принятием при программировании специальных мер можно добиться некоторого увеличения допустимых значений аргументов при обращении к процедуре $J_N(x, y)$. Учитывая, что $J_N(x, y) \to 0$ при $x \to \infty$ и $J_N(x, y) \to 1$ при $y \to \infty$, при некоторых соотношениях между x и y можно принять $J_N(x, y) = 0$; в других случаях допустимо $J_N(x, y) = 1$. Ошибка аппроксимации $J_N(x, y)$ значениями 0 или 1 также не должна быть больше ε.

Чтобы воспользоваться такой аппроксимацией, нужно с помощью каких-либо приближённых формул установить, что $J_N(x, y) \le \varepsilon$ или $J_N(x, y) \ge 1 - \varepsilon$. Для этой цели в [135] применяется оценка сверху для вероятностей больших уклонений, обычно называемая в зарубежной литературе границей Чернова [19]. Применение границы Чернова для обобщённой Q-функции Маркума рассмотрено также в [130].

Аппроксимация $J_N(x, y)$ значениями 0 или 1 на основе границы Чернова применяется, если $py/(1 - p) - px - N \ln(1 - p) \le \ln \varepsilon$, где

$$p = 1 - \left\{ \frac{N}{2x} + \sqrt{\left(\frac{N}{2x}\right)^2 + \frac{y}{2}} \right\}.$$

При этом если $x > y + N$, то полагается $J_N(x, y) = 0$, иначе $J_N(x, y) = 1$.

Использование границы Чернова, например, при значениях x не слишком близких к величине 2ω, позволяет получать $J_N(x, y)$ при любых y от 0 до ∞. Это особенно важно, когда приходится численными методами усреднять $J_N(x, y)$ по случайной переменной y, распределённой на полубесконечном интервале.

Следует также отметить, что применение аппроксимации значениями 0 или 1 не только расширяет диапазон аргументов процедуры, но и позволяет избежать многих излишних вычислений по формуле (5).

Отметим ещё, что существует много приближённых и асимптотических формул для вычисления интеграла $J_N(x, y)$ или его аналогов. Сводка приближённых формул для интеграла Рэлея — Райса дана в [4]. Помимо этого назовём работы [14, 123, 116, 118, 110, 61].

2. МНОГОМЕРНЫЕ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Вычисление определённых интегралов от экспоненты, показатель которой содержит квадратичную форму

При анализе статистических характеристик случайных величин, связанных с нормальными случайными процессами, возникает необходимость в вычислении многомерных определённых интегралов с бесконечными пределами. Подынтегральным выражением является экспонента, содержащая в показателе квадратичную форму переменных интегрирования, а также переменные интегрирования в линейном виде. В связи с этим желательно иметь в распоряжении удобные формулы, с помощью которых можно представить окончательные выражения для интегралов. Вопросам получения таких формул посвящён настоящий параграф. Приведенные здесь результаты будут использоваться в последующих разделах книги.

Наш анализ основывается на хорошо известном соотношении

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det\left\|r_{\nu\mu}\right\|}} \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}R(x_1,\cdots,x_n)\right\} dx_1\cdots dx_n = 1, \qquad (2.1.1)$$

где $\left\|r_{\nu\mu}\right\|$ — положительно определённая симметрическая матрица;

$$R(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} r_{\nu\mu}^{-1} x_\nu x_\mu \quad —$$

квадратичная форма переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $r_{\nu\mu}^{-1}$ — элементы матрицы, обратной к $\left\|r_{\nu\mu}\right\|$ (имеет место $r_{\mu\nu}^{-1} = r_{\nu\mu}^{-1}$).

Формула (1) представляет собой интеграл от многомерной плотности распределения нормальных случайных величин с матрицей вторых моментов $\left\|r_{\nu\mu}\right\|$ и с нулевыми средними значениями.

В [8, 34] содержится утверждение, что формула (1) справедлива даже для матрицы $\left\|r_{\nu\mu}^{-1}\right\|$ с комплексными элементами при условии, что матрица, составленная из действительных частей этих элементов, является положительно определённой. Основываясь на этом утверждении, мы будем полагать, что формула (1) справедлива и при

$$R(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} r_{\nu\mu}^{-1}(x_\nu - m_\nu)(x_\mu - m_\mu), \qquad (2.1.2)$$

где $\left\| r_{\nu\mu}^{-1} \right\|$ удовлетворяет упомянутым выше условиям, а m_1, m_2, … , m_n — любые комплексные числа.

Рассмотрим выражение

$$I = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} Q(x_1, \cdots, x_n) \right\} dx_1 \cdots dx_n \,, \qquad (2.1.3)$$

где

$$Q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} x_\nu x_\mu + 2 \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu x_\nu + c \,,$$

причём $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$, а матрица, составленная из действительных частей элементов $a_{\nu\mu}$, является положительно определённой.

Выражение для $Q(x_1, \dots, x_n)$ запишем в виде

$$Q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} (x_\nu - \alpha_\nu)(x_\mu - \alpha_\mu) - \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}^{-1} b_\nu b_\mu + c \,,$$

где

$$\alpha_\nu = -\sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}^{-1} b_\mu \,, \qquad \left\| a_{\nu\mu}^{-1} \right\| = \left\| a_{\nu\mu} \right\|^{-1}.$$

При проверке этого выражения необходимо учитывать, что если $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$, то и $a_{\mu\nu}^{-1} = a_{\nu\mu}^{-1}$.

Теперь можно записать

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} (x_\nu - \alpha_\nu)(x_\mu - \alpha_\mu) \right\} dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \sqrt{\det \left\| a_{\nu\mu}^{-1} \right\|} \,.$$

Если ещё учесть, что $\left(\det \left\| a_{\nu\mu}^{-1} \right\|\right)\left(\det \left\| a_{\nu\mu} \right\|\right) = 1$, то получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{\det \left\| a_{\nu\mu} \right\|}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(c - \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}^{-1} b_\nu b_\mu \right) \right\}. \qquad (2.1.4)$$

Выражение (4) можно представить в другой форме. Введём обозначения:

$$\Delta = \det\left\|a_{\nu\mu}\right\|, \qquad \tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & c \end{vmatrix}.$$

Определитель $\tilde{\Delta}$ разложим по элементам последнего столбца и, тем самым, представим его в виде взвешенной суммы $n+1$ определителей n-го порядка. Каждый из получившихся определителей, за исключением последнего, входящего в сумму с множителем c, разложим по элементам последней строки. В результате получим

$$\tilde{\Delta} = -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} A_{\nu\mu} b_\nu b_\mu + c\cdot\Delta,$$

где $A_{\nu\mu}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{\nu\mu}$ матрицы $\left\|a_{\nu\mu}\right\|$. Учитывая, что $A_{\nu\mu} = a^{-1}_{\mu\nu}\cdot\Delta$ и $a^{-1}_{\mu\nu} = a^{-1}_{\nu\mu}$, можно записать

$$\frac{\tilde{\Delta}}{\Delta} = c - \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a^{-1}_{\nu\mu} b_\nu b_\mu\ . \tag{2.1.5}$$

Из (4) и (5) теперь получаем новую формулу

$$I = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\tilde{\Delta}}{\Delta}\right\}. \tag{2.1.6}$$

Формула (6) выгодно отличается от формулы (4) тем, что для вычисления интеграла I нет необходимости в вычислении элементов обратной матрицы $\left\|a^{-1}_{\nu\mu}\right\|$.

Заметим, что формула (6) для частного случая $n=2$ была получена в [41, стр. 710].

Интегралы типа представленного формулой (3) встречаются, как правило, в задачах, когда нормальные случайные величины являются отсчётами гауссовского случайного процесса и сопряжённого ему процесса. В этих случаях иногда можно понизить порядок определителей в окончательном выражении для интеграла. И хотя при этом приходится переходить к определителям, составленным из комплексных элементов, получение окончательных выражений существенно упрощается.

Пусть $n = 2N$, $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — отсчёты гауссовского процесса с нулевым средним значением, $y_1, y_2, \ldots, y_N$ — отсчёты, полученные в те же моменты времени из сопряжённого процесса. Полагаем $x_{N+1} \equiv y_1$, $x_{N+2} \equiv y_2, \ldots, x_n \equiv y_N$.

Вторые моменты случайных переменных $x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N$ удовлетворяют соотношениям [42]: $\overline{x_k x_l} = \overline{y_k y_l}$, $\overline{x_k y_l} = -\overline{x_l y_k}$ ($k, l = 1, 2, \dots, N$), поэтому корреляционную матрицу случайных переменных можно представить в блочном виде

$$\left\| r_{\nu\mu} \right\| = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ -\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_1 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{S}_1 = \left\| \overline{x_k x_l} \right\| = \left\| \overline{y_k y_l} \right\|$, $\mathbf{S}_2 = \left\| \overline{x_k y_l} \right\| = -\left\| \overline{x_l y_k} \right\|$.

Определитель матрицы $\left\| r_{\nu\mu} \right\|$ равен

$$\det \left\| r_{\nu\mu} \right\| = \det \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ -\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 + \mathrm{i}\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_2 \\ -\mathbf{S}_2 + \mathrm{i}\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 + \mathrm{i}\mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_2 \\ 0 & \mathbf{S}_1 - \mathrm{i}\mathbf{S}_2 \end{pmatrix} = (\det \mathbf{S}) \cdot (\det \mathbf{S}^*),$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathrm{i}\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}_1 - \mathrm{i}\mathbf{S}_2$. Поскольку подматрица $\mathbf{S}_1$ симметрическая, а $\mathbf{S}_2$ — кососимметрическая (антисимметрическая), то $\mathbf{S}$ — эрмитова матрица и, следовательно, $\det \mathbf{S}$ и $\det \mathbf{S}^*$ являются действительными числами и равны между собой. Значит

$$\sqrt{\det \left\| r_{\nu\mu} \right\|} = \det \mathbf{S} = \det \mathbf{S}^* .$$

Для обратной матрицы $\left\| r_{\nu\mu}^{-1} \right\|$ тоже справедливо представление

$$\left\| r_{\nu\mu}^{-1} \right\| = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \\ -\mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_1 \end{pmatrix},$$

причём $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathrm{i}\mathbf{T}_2$ является эрмитовой матрицей и выполняется соотношение $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.

Выражение (1) в таких задачах можно записывать в виде

$$\frac{1}{(2\pi)^N \det \mathbf{S}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} R(\cdots) \right\} dx_1 \cdots dx_N \, dy_1 \cdots dy_N = 1, \qquad (2.1.7)$$

где

$$R(\cdots) \equiv R(x_1, \dots, x_n) \equiv R(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} s_{kl}^{-1} (x_k + \mathrm{i}\, y_k)(x_l - \mathrm{i}\, y_l),$$

s_{kl}^{-1} — элементы матрицы $\mathbf{S}^{-1}$.

Теперь мы предположим, что аналогичное представление в блочном виде допускает и матрица $\left\| a_{\nu\mu} \right\|$:

$$\left\| a_{\nu\mu} \right\| = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \\ -\mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_1 \end{pmatrix},$$

причём $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathrm{i}\mathbf{G}_2$ — эрмитова. Обозначим g_{kl} — элементы матрицы $\mathbf{G}$, g_{kl}^{-1} — элементы матрицы $\mathbf{G}^{-1}$, $h_k = b_k + \mathrm{i}b_{k+N}$; $k, l = 1, 2, \ldots, N$. Тогда

$$c - \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}^{-1} b_\nu b_\mu = c - \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} g_{kl}^{-1} h_k h_l^* = \frac{\tilde{\delta}}{\delta},$$

где

$$\delta = \det \mathbf{G}, \qquad \tilde{\delta} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} & h_1^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} & h_N^* \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_N & c \end{vmatrix},$$

и, следовательно,

$$I = \frac{1}{\delta} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{\tilde{\delta}}{\delta} \right\}. \tag{2.1.8}$$

2.2. Изображение по Лапласу двумерной плотности распределения квадрата модуля вектора с гауссовскими компонентами

Обобщим задачу из § 1.7 на двумерный случай: рассмотрим совокупность двух случайных величин, являющихся отсчётами квадрата модуля n-мерного вектора, полученными в разные моменты времени. Компоненты вектора — независимые нормальные случайные процессы, имеющие одинаковую корреляционную функцию.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — компоненты вектора для одного момента времени, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — для другого момента времени. Если опять принять, что дисперсия компонент равна 1, то функцию плотности вероятности компонент можно записать в виде

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{\left(2\pi\sqrt{1-r^2}\right)^n} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(x_\nu - \alpha_\nu)^2 - 2r(x_\nu - \alpha_\nu)(y_\nu - \beta_\nu) + (y_\nu - \beta_\nu)^2}{1-r^2} \right\},$$

где $\alpha_\nu = \overline{x_\nu}$, $\beta_\nu = \overline{y_\nu}$ — средние значения компонент,

$$r = \overline{(x_\nu - \alpha_\nu)(y_\nu - \beta_\nu)}; \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим через x и y нормированные квадраты модуля вектора: $x = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)/2$, $y = (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)/2$, и будем искать функцию

$$F(p,q) = \overline{\exp(-px - qy)}, \tag{2.2.1}$$

которая является изображением двумерной плотности распределения вероятностей случайных переменных x и y. Учитывая независимость компонент, выражение (1) запишем в виде

$$F(p, q) = \prod_{\nu=1}^{n} F_\nu(p, q), \tag{2.2.2}$$

где

$$F_\nu(p, q) = \overline{\exp\left(-p\,x_\nu^2/2 - q\,y_\nu^2/2\right)}.$$

Представив $F_\nu(p, q)$ в виде двумерного интеграла и переобозначив в нём переменные интегрирования x_ν и y_ν на t_1 и t_2, получим

$$F_\nu(p, q) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}Q_\nu(t_1, t_2)\right\} dt_1\, dt_2, \tag{2.2.3}$$

где

$$Q_\nu(t_1, t_2) = pt_1^2 + qt_2^2 + \frac{(t_1 - \alpha_\nu)^2 - 2r(t_1 - \alpha_\nu)(t_2 - \beta_\nu) + (t_2 - \beta_\nu)^2}{1 - r^2}.$$

Сравнивая (3) с (2.1.3), можно записать

$$F_\nu(p, q) = I/\sqrt{1-r^2}, \tag{2.2.4}$$

где I определяется формулой (2.1.3), если в ней положить $n = 2$,

$$a_{11} = p + 1/(1-r^2), \quad a_{12} = a_{21} = -r/(1-r^2), \quad a_{22} = q + 1/(1-r^2),$$

$$b_1 = (-\alpha_\nu + r\beta_\nu)/(1-r^2), \quad b_2 = (r\alpha_\nu - \beta_\nu)/(1-r^2),$$

$$c = (\alpha_\nu^2 - 2r\,\alpha_\nu\beta_\nu + \beta_\nu^2)/(1-r^2).$$

Теперь можно воспользоваться формулой (2.1.6), в которую следует подставить

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= [(1+p)(1+q) - r^2 pq]/(1-r^2), \\ \tilde{\Delta} &= [p(1+q)\alpha_\nu^2 + q(1+p)\beta_\nu^2 - 2r\,pq\alpha_\nu\beta_\nu]/(1-r^2). \end{aligned}\right\} \tag{2.2.5}$$

Из формул (2), (4), (2.1.6) и (5) окончательно получаем

$$F(p,q)=\frac{1}{\left[(1+p)(1+q)-r^2pq\right]^{n/2}}\exp\left\{-\frac{pa+qb+pqQ}{(1+p)(1+q)-r^2pq}\right\}, \quad (2.2.6)$$

где

$$a=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2)/2, \quad b=(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_n^2)/2,$$

$$Q=a+b-2r\sqrt{ab}\cos\psi, \quad \cos\psi=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n)/\left(2\sqrt{ab}\right).$$

Двумерное распределение нормированных квадратов модуля вектора является обратным преобразованием Лапласа от $F(p, q)$. Вычислить аналитическим путём обратное преобразование от изображения $F(p, q)$, заданного формулой (6) при произвольном n, не удаётся. Тем не менее, формула (6) может оказаться весьма полезной при вычислениях статистических характеристик функций от двух случайных переменных x и y. Примеры эффективного использования этой формулы можно найти в последующих разделах.

Заметим, что для частного случая $n = 2$, $\cos\psi = 1$ в [42] приведено выражение для двумерного распределения модуля. Применительно к нормированным квадратам модуля и с учётом принятых здесь обозначений это выражение при произвольном $\cos\psi$ имеет вид

$$w(x,y)=\frac{1}{1-r^2}\exp\left\{-\frac{x+y+Q}{1-r^2}\right\}\times$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu I_\nu\left(\frac{2\alpha\sqrt{x}}{1-r^2}\right)I_\nu\left(\frac{2r\sqrt{xy}}{1-r^2}\right)I_\nu\left(\frac{2\beta\sqrt{y}}{1-r^2}\right)\cos(\nu\theta),$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 2$,

$$\alpha=\sqrt{\left(\sqrt{a}-r\sqrt{b}\cos\psi\right)^2+r^2b\sin^2\psi},$$

$$\beta=\sqrt{\left(\sqrt{b}-r\sqrt{a}\cos\psi\right)^2+r^2a\sin^2\psi},$$

$$\theta=\arccos\left[\gamma/(\alpha\beta)\right], \qquad \gamma=\sqrt{ab}\,(1+r^2)\cos\psi-r(a+b).$$

Если $\cos\psi = 1$, то $\theta = 0$ и $\cos(\nu\theta) = 1$.

Рассмотрим теперь одну важную особенность анализируемой задачи.

В постановке задачи неявно полагалось, что число компонент вектора n может быть как чётным, так и нечётным. Вместе с тем, специально оговаривалось, что компоненты вектора статистически взаимно независимы.

Такая модель компонент вектора обладает некоторой универсальностью в том смысле, что может быть применена при нечётном n.

Однако она не подходит для обширного круга радиотехнических задач, изучающих статистические характеристики суммы квадратов огибающих гауссовских процессов. Для таких задач статистическая модель компонент должна быть изменена. Число компонент должно быть чётным и компоненты попарно коррелированы.

Чтобы не загромождать дальнейшего изложения этого вопроса, рассмотрим случай $n = 2$. Теперь по сути дела речь идёт о двумерном распределении нормированных квадратов огибающей гауссовского случайного процесса. Значения огибающей процесса являются райсовскими случайными величинами.

Случайные величины x_1 и y_1 являются отсчётами гауссовского процесса, а x_2 и y_2 получены в те же моменты времени из сопряжённого процесса. Сохраняя прежние обозначения для средних значений случайных величин, соотношения для коэффициентов корреляции запишем в виде:

$$\overline{(x_1-\alpha_1)(x_2-\alpha_2)} = \overline{(y_1-\beta_1)(y_2-\beta_2)} = 0,$$

$$\overline{(x_1-\alpha_1)(y_1-\beta_1)} = \overline{(x_2-\alpha_2)(y_2-\beta_2)} = c,$$

$$\overline{(x_1-\alpha_1)(y_2-\beta_2)} = -\overline{(y_1-\beta_1)(x_2-\alpha_2)} = s,$$

где c и s — параметры вероятностной модели.

Изображение двумерной плотности вероятности случайных величин x и y находится по прежней схеме. Проделав математические преобразования, связанные с раскрытием в формуле (2.1.6) определителей пятого и четвёртого порядков, получим

$$F(p, q) = \frac{1}{(1+p)(1+q)-r^2pq}\exp\left\{-\frac{pa+qb+pqQ}{(1+p)(1+q)-r^2pq}\right\}, \qquad (2.2.7)$$

где a, b и Q определяются прежними формулами, но значения r и $\cos\psi$ для $F(p, q)$ и Q теперь находятся по формулам: $r^2 = c^2 + s^2$,

$$\cos\psi = \left[c(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + s(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\right] \Big/ \left(2r\sqrt{ab}\right). \qquad (2.2.8)$$

При выводе формулы (7) можно вместо (2.1.6) использовать (2.1.8) и, тем самым, свести задачу к раскрытию определителей третьего и второго порядков (вместо пятого и четвёртого порядков). Но для этого придётся переобозначить отсчёты компонент вектора и считать, что x_1 и x_2 — отсчёты гауссовского случайного процесса, а y_1 и y_2 — отсчёты, полученные в те же моменты времени из сопряжённого процесса.

Нетрудно заметить, что если в (7) положить $s = 0$, а в (6) — $n = 2$, то оба выражения для $F(p, q)$ совпадут между собой.

Величину $r = \sqrt{c^2 + s^2}$, входящую в формулу (7), будем называть обобщённым коэффициентом корреляции.

Из рассмотренного следует вывод, что в дальнейшем без ограничения общности можно пользоваться первоначальной формулой (6) для изображения $F(p, q)$. Если же (6) используется для анализа характеристик суммы квадратов огибающих, то нужно учесть, что n — чётное, r является обобщённым коэффициентом корреляции, а $\cos\psi$ вычисляется по формуле (8).

2.3. Двумерные распределения модуля вектора с гауссовскими компонентами при нулевых средних значениях компонент

Если средние значения гауссовских компонент n-мерного вектора равны нулю, то выражение для двумерного преобразования Лапласа плотности распределения нормированных квадратов модуля вектора существенно упрощается. Соответствующее выражение для двумерного преобразования Лапласа получается из формулы (2.2.6) при $a = b = 0$ (см. также [77]):

$$F(p,q) = \frac{1}{\left[(1+p)(1+q) - r^2 pq\right]^{n/2}}. \qquad (2.3.1)$$

Обратное преобразование Лапласа от изображения (1) можно вычислить аналитическим путём по формуле

$$w_n(x,y) = \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{px+qy} F(p,q)\, dp\, dq .$$

Для этого вначале предположим, что q является параметром, а $F(p, q)$ является одномерным преобразованием Лапласа от некоторой функции $f(x; q)$. Выражение для $f(x; q)$ будем искать с помощью теории вычетов по формуле

$$f(x;q) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{px} F(p,q)\, dp . \qquad (2.3.2)$$

Подставляя (1) в (2), запишем

$$f(x;q) = \frac{1}{(1+q)^{n/2}} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{\mathrm{e}^{px}}{\left[1 + p\dfrac{1+q(1-r^2)}{1+q}\right]^{n/2}} dp .$$

Воспользовавшись формулами (1.3.12) и (1.3.14), получаем

$$f(x;q) = \frac{x^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)\left[1+q(1-r^2)\right]^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1+q}{1+q(1-r^2)}x\right\}.$$

Теперь плотность распределения $w_n(x, y)$ находим по формуле:

$$w_n(x,y) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{qy} f(x;q)\, dq\,.$$

Для вычисления этого интеграла можно применить способ, которым была вычислена плотность (1.3.20). В результате получим

$$w_n(x,y) = \frac{(xy)^{(n-2)/4}}{\Gamma(n/2)(1-r^2)r^{n/2-1}} \exp\left\{-\frac{x+y}{1-r^2}\right\} I_{n/2-1}\left(\frac{2r}{1-r^2}\sqrt{xy}\right). \quad (2.3.3)$$

При выводе формулы для $w_n(x, y)$ мы не следили тщательно за расположением особых точек относительно контура интегрирования и не обращали внимания на то, что $n/2$ может быть нецелым числом. Поэтому полученное выражение нуждается в проверке.

Проверка полученного выражения состоит в подстановке его в формулу двумерного преобразования Лапласа

$$F(p,q) = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-px-qy} w_n(x,y)\, dx\, dy\,.$$

При вычислении этого интеграла можно воспользоваться вспомогательной формулой (1.7.4), в результате придём к формуле (1). Более того, такая проверка показывает, что (3) и (1) являются оригиналом и изображением даже при нецелых $n > 0$.

Переходя по формулам $u = \sqrt{2x}$, $v = \sqrt{2y}$ от переменных x и y к значениям модуля вектора u и v, получим двумерное распределение модуля:

$$W_n(u,v) = \frac{(uv)^{n/2}}{\Gamma(n/2)(1-r^2)(2r)^{n/2-1}} \exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2(1-r^2)}\right\} I_{n/2-1}\left(\frac{ruv}{1-r^2}\right). \quad (2.3.4)$$

При нечётных n индекс функции Бесселя равен целому числу плюс 1/2. В этом случае функции Бесселя выражаются через элементарные функции (см., например, [22]).

При $n = 1$ получаем двумерное распределение абсолютных значений зависимых нормальных случайных величин:

$$W_1(u,v) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}} \left\{ \exp\left(-\frac{u^2-2ruv+v^2}{2(1-r^2)}\right) + \exp\left(-\frac{u^2+2ruv+v^2}{2(1-r^2)}\right)\right\}.$$

При $n = 2$ формула (4) даёт двумерное рэлеевское распределение

$$W_2(u,v) = \frac{uv}{1-r^2} \exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2(1-r^2)}\right\} I_0\left(\frac{ruv}{1-r^2}\right),$$

а при $n = 3$ — двумерное максвелловское распределение

$$W_3(u,v) = \frac{uv}{\pi r\sqrt{1-r^2}}\left\{\exp\left(-\frac{u^2-2ruv+v^2}{2(1-r^2)}\right)-\exp\left(-\frac{u^2+2ruv+v^2}{2(1-r^2)}\right)\right\}.$$

При $r \to 0$ двумерное распределение $W_n(u, v)$ распадается на произведение одномерных плотностей, причём одномерная плотность имеет вид

$$W_n(u) = \frac{u^{n-1}}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}\mathrm{e}^{-u^2/2}.$$

Приведём без доказательства формулы для среднего значения произведения случайных величин.

Среднее значение произведения x и y можно вычислить по формуле

$$\overline{xy} = \frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}F(p,q)\bigg|_{p=q=0}$$

и равно $\overline{xy} = (n/2)(n/2+r^2)$.

Применительно к u и v запишем

$$\overline{uv} = M_n(r) = \int_0^\infty\int_0^\infty uvW_n(u,v)\,du\,dv.$$

При $n = 1$ и $n = 2$ справедливы равенства

$$M_1(r) = \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{1-r^2}+r\arcsin r\right), \qquad M_2(r) = 2\mathrm{E}(r)-(1-r^2)\mathrm{K}(r),$$

где $\mathrm{E}(r)$ и $\mathrm{K}(r)$ — полные эллиптические интегралы. При $n > 2$ выражения для $M_n(r)$ можно получить по рекуррентной формуле

$$M_n(r) = \frac{n}{n-2}M_{n-2}(r)+\frac{1-r^2}{(n-2)r}\cdot\frac{d}{dr}M_{n-2}(r).$$

2.4. Двумерные интегральные распределения модуля вектора с гауссовскими компонентами при нулевых средних значениях компонент

Двумерное распределение абсолютных значений зависимых нормальных случайных величин, имеющих нулевое среднее, формально является с точностью до постоянного множителя суммой двух выражений двумерных гауссовских распределений. Поэтому интегралы от двумерного распределения однокомпонентного вектора выражаются через функции двумерного нормального распределения.

Двумерное интегральное максвелловское распределение путём несложных, но громоздких преобразований можно свести к двумерным и одномерным функциям нормального распределения. Окончательное выражение для него можно найти в работе [78].

Для определения значений функции двумерного нормального распределения можно воспользоваться таблицами [62]. При составлении машинных программ окажутся полезными алгоритмы, краткая характеристика и библиографическое описание которых даны в [47].

Более широкое распространение в задачах статистической радиотехники имеют чётные значения числа компонент. Способы вычисления двумерных интегральных распределений в этом случае не являются очевидными.

Для дальнейшего рассмотрения поставленной задачи при чётном числе компонент целесообразно число компонент записать как $n = 2N$, где N — целое. Двумерные функции распределения модуля и квадрата модуля вектора далее будут помечаться индексом N. Индекс N вводится и в обозначение для двумерного преобразования Лапласа. В обозначении двумерной плотности распределения индекс n заменим индексом N, т. е. теперь

$$w_N(x, y) = \frac{(xy)^{(N-1)/2}}{\Gamma(N)(1-r^2)r^{N-1}} \exp\left\{-\frac{x+y}{1-r^2}\right\} I_{N-1}\left(\frac{2r}{1-r^2}\sqrt{xy}\right). \qquad (2.4.1)$$

Если оригиналу $w_N(x, y)$ соответствует изображение $F_N(p, q)$, то для

$$p_N(X, Y) = \int_0^X \int_0^Y w_N(x, y)\, dx\, dy$$

изображением является $F_N(p, q)/(pq)$. Используя в качестве $F_N(p, q)$ приведенное в предыдущем параграфе выражение для преобразования Лапласа от распределения нормированных квадратов модуля вектора, запишем

$$\frac{F_N(p, q)}{pq} = \frac{1}{pq\left[(1+p)(1+q) - r^2 pq\right]^N} =$$

$$= \frac{F_{N-1}(p, q)}{pq} - \frac{F_N(p, q)}{p} - \frac{F_N(p, q)}{q} - (1-r^2)F_N(p, q). \qquad (2.4.2)$$

Справедливость (2) доказывается элементарной проверкой.

Переписывая (2) на “языке оригиналов”, получаем

$$p_N(X, Y) = p_{N-1}(X, Y) -$$

$$- \int_0^X w_N(x, Y)\, dx - \int_0^Y w_N(X, y)\, dy - (1-r^2)\, w_N(X, Y). \qquad (2.4.3)$$

В случае $N = 1$ в этой формуле следует полагать $p_0(X, Y) \equiv 1$ ($X \geq 0$, $Y \geq 0$).

Подставив в (3) выражение (1), можно получить

$$p_N(X,Y) = p_{N-1}(X,Y) - \frac{Y^{N-1}}{(N-1)!}\mathrm{e}^{-Y}\left\{1 - J_N\left(\frac{X}{1-r^2}, \frac{r^2 Y}{1-r^2}\right)\right\} -$$

$$- \frac{X^{N-1}}{(N-1)!}\mathrm{e}^{-X}\left\{1 - J_N\left(\frac{Y}{1-r^2}, \frac{r^2 X}{1-r^2}\right)\right\} -$$

$$- \frac{(XY)^{(N-1)/2}}{(N-1)!\, r^{N-1}}\exp\left\{-\frac{X+Y}{1-r^2}\right\} I_{N-1}\left(\frac{2r}{1-r^2}\sqrt{XY}\right).$$

Воспользовавшись формулой

$$J(x, y) + J(y, x) = 1 + \exp(-x-y)\, I_0\left(2\sqrt{xy}\right),$$

которая является частным случаем формулы (П1.4.1) из Приложения 1, получаем

$$p_1(X,Y) = 1 - \mathrm{e}^{-X}\, J\left(\frac{r^2 X}{1-r^2}, \frac{Y}{1-r^2}\right) - \mathrm{e}^{-Y}\left\{1 - J\left(\frac{X}{1-r^2}, \frac{r^2 Y}{1-r^2}\right)\right\}. \quad (2.4.4)$$

Из формулы (П1.6.3) Приложения 1 при $N > 1$ следует

$$1 - J_N(x, y) + \mathrm{e}^{-x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^{(N-1)/2} I_{N-1}\left(2\sqrt{xy}\right) = 1 - J_{N-1}(x, y).$$

Это равенство позволяет записать рекуррентную формулу для вычисления $p_N(X, Y)$ в виде

$$p_N(X,Y) = p_{N-1}(X,Y) - R_N(X,Y)/(N-1)!, \qquad N > 1, \qquad (2.4.5)$$

где

$$R_N(X,Y) = X^{N-1}\mathrm{e}^{-X}\left\{1 - J_N\left(\frac{Y}{1-r^2}, \frac{r^2 X}{1-r^2}\right)\right\} +$$

$$+ Y^{N-1}\mathrm{e}^{-Y}\left\{1 - J_{N-1}\left(\frac{X}{1-r^2}, \frac{r^2 Y}{1-r^2}\right)\right\}.$$

Заметим, что формула (3) справедлива и при нецелых N. Поэтому её можно использовать для того, чтобы облегчить математические преобразования при сведении двумерного максвелловского распределения к функциям нормального распределения. Кроме того, эта

формула даёт рекуррентное правило для вычислений интегральных распределений при нечётных числах компонент вектора, когда число компонент вектора больше, чем 3.

Учитывая формулы $u = \sqrt{2x}$ и $v = \sqrt{2y}$, по которым ранее производился переход от нормированных квадратов модуля вектора x и y к значениям модуля вектора u и v, получаем выражение для двумерного интегрального распределения модуля вектора

$$P_N(U,V) = p_N(U^2/2, V^2/2). \qquad (2.4.6)$$

В частном случае, при $N = 1$, из (6) и (4) получаем двумерное интегральное рэлеевское распределение

$$P_1(U,V) = 1 - \mathrm{e}^{-U^2/2} J\left(\frac{r^2U^2}{2(1-r^2)}, \frac{V^2}{2(1-r^2)}\right) -$$

$$- \mathrm{e}^{-V^2/2}\left\{1 - J\left(\frac{U^2}{2(1-r^2)}, \frac{r^2V^2}{2(1-r^2)}\right)\right\}.$$

Представление двумерного интегрального рэлеевского распределения через интеграл $J(x, y)$ впервые было получено иным способом в [124].

Если от интеграла $J(\cdot\cdot)$ перейти к интегралу вероятности Рэлея — Райса $Q(\cdot\cdot)$ [4], то получим выражение

$$P_1(U,V) = 1 - \mathrm{e}^{-U^2/2} Q\left(\frac{rU}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{V}{\sqrt{1-r^2}}\right) -$$

$$- \mathrm{e}^{-V^2/2}\left\{1 - Q\left(\frac{U}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{rV}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right\},$$

отличающееся от приведенного в сообщении [75] только обозначениями.

Рассмотрим ещё один способ вычисления интегрального распределения $p_N(X, Y)$, предложенный в работе [76].

Представим изображение функции $p_N(X, Y)$ в виде ряда

$$\frac{1}{pq} F_N(p,q) = \frac{1}{p(1+p)^N} \frac{1}{q(1+q)^N} \frac{1}{\left[1 - r^2 \frac{p}{1+p} \frac{q}{1+q}\right]^N} =$$

$$= \frac{1}{p(1+p)^N} \frac{1}{q(1+q)^N} + \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{N+\nu}^{\nu+1} r^{2\nu+2} \frac{p^\nu}{(1+p)^{(N+\nu+1)}} \frac{q^\nu}{(1+q)^{(N+\nu+1)}}.$$

Осуществляя обратное преобразование Лапласа, окончательно можно получить

$$p_N(X,Y)=\left(1-\mathrm{e}^{-X}\sum_{\nu=0}^{N-1}\frac{X^{\nu}}{\nu!}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-Y}\sum_{\nu=0}^{N-1}\frac{Y^{\nu}}{\nu!}\right)+$$

$$+\frac{X^N}{(N-1)!}\mathrm{e}^{-X}\,\frac{Y^N}{(N-1)!}\mathrm{e}^{-Y}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{r^{2\nu+2}}{(\nu+1)!}\,\frac{L_{\nu}^{(N)}(X)\,L_{\nu}^{(N)}(Y)}{N(N+1)\cdots(N+\nu)}, \qquad (2.4.7)$$

где

$$L_{\nu}^{(N)}(x)=x^{-N}\,\mathrm{e}^{x}\,\frac{d}{dx^{\nu}}\left(\mathrm{e}^{-x}\,x^{N+\nu}\right) —$$

обобщённые полиномы Лагерра, которые можно вычислять по формулам:

$$L_0^{(N)}(x)=1; \qquad L_1^{(N)}=(N+1)-x;$$

$$L_{\nu+1}^{(N)}(x)=(2\nu+N+1-x)L_{\nu}^{(N)}(x)-\nu(\nu+N)L_{\nu-1}^{(N)}(x); \qquad \nu = 1, 2, \ldots .$$

При значениях r^2, не слишком близких к 1, формула (7) требует меньших вычислительных затрат, чем формулы (4) и (5). При $N>1$ различие существенно. Однако, если значение r^2 близко к 1, ряд в (7) сходится медленно и формулы (4) и (5) становятся предпочтительнее.

И, наконец, можно получить ещё одно выражение для двумерного интегрального распределения. Для этого в изображении по Лапласу вместо $(1+p)(1+q)-r^2pq$ следует подставить

$$\frac{[1+p(1-r^2)][1+q(1-r^2)]-r^2}{1-r^2},$$

а затем представить изображение в виде ряда по степеням

$$\frac{r^2}{[1+p(1-r^2)][1+q(1-r^2)]}$$

и осуществить обратное преобразование Лапласа. Именно это выражение получается и в том случае, если пойти по очевидному пути — представить функцию Бесселя в двумерной плотности распределения в виде степенного ряда и затем проделать все необходимые вычисления. Однако практическая ценность получаемого при этом результата весьма сомнительна из-за крайне медленной сходимости ряда в окончательном выражении.

2.5. Специальные методы вычисления статистических характеристик функций от двух случайных переменных

Во многих прикладных задачах возникает необходимость в определении статистических характеристик случайной величины, являющейся функцией других случайных переменных. Прямой путь решения этой задачи заключается в следующем. Зная многомерное распределение исходных случайных переменных, по известным правилам [42] находится плотность распределения вероятностей исследуемой случайной величины. Затем, используя найденную плотность, определяются требуемые характеристики.

Такой путь решения зачастую сопровождается громоздкими и неинтересными промежуточными вычислениями, а иногда при этом даже возникают непреодолимые препятствия.

Использование преобразования Лапласа на различных стадиях решения задачи во многих случаях позволяет упростить вычисления. Так, при изучении статистических характеристик квадрата модуля вектора, мы вначале находили изображение плотности распределения исследуемых случайных величин, а уж затем определяли эту плотность распределения.

В качестве простейшего примера эффективного использования преобразования Лапласа следует упомянуть задачу о нахождении плотности распределения суммы двух случайных величин. Если $F(p, q)$ — изображение двумерной плотности распределения случайных величин x и y, то изображением плотности распределения суммы $z = x + y$ является $f(p) = F(p, p)$. Искомая плотность находится обратным преобразованием от $f(p)$.

Если в этом примере x и y являются, в свою очередь, функциями от каких-то других случайных переменных, то решение можно найти и в том случае, если выражение для плотности распределения x и y неизвестно или является довольно сложным. Бывает достаточно найти изображение этой плотности.

Для более полной иллюстрации высказанных соображений рассмотрим задачу о нахождении законов распределения отношения двух зависимых случайных величин [99, 79]. Предполагается, что известно изображение $F(p, q)$ совместной плотности распределения $w(x, y)$ квадратов x и y этих случайных величин. Выражение для $w(x, y)$ может быть неизвестным.

Обозначим через z отношение случайных величин, т. е. $z = \sqrt{x}/\sqrt{y}$. Пусть $W(z)$ — плотность распределения случайной величины z. Воспользовавшись известными правилами вычисления законов распределения функций от случайных аргументов [42], для функции распределения отношения случайных величин $P(z)$ можно записать

$$P(z) = \int_0^z W(z_1)\,dz_1 = \int_0^z \left\{ 2z_1 \int_0^\infty t\, w(z_1^2 t, t)\,dt \right\} dz_1 .$$

Подставим в эту формулу

$$w(x, y) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{px+qy} F(p, q)\, dp\, dq,$$

где $c < 0$. В получившемся кратном интеграле выполним вначале интегрирование по t и z_1, а затем, при помощи теории вычетов, интегрирование по q. В результате получим

$$P(z) = 1 + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{1}{p} F(p, -p z^2)\, dp. \qquad (2.5.1)$$

Заметим, что для сходимости интеграла при интегрировании по t необходимо $c < 0$. В связи с этим аппарат характеристических функций для данного способа решения задачи неприменим. Кроме того, отсюда можно сделать вывод, что рассматриваемый способ применим, если существует такое $c < 0$, что при любых $\mathrm{Re}\, p \geq c$ и $\mathrm{Re}\, q \geq c$ изображение $F(p, q)$ не имеет никаких особенностей.

Контурный интеграл (1) применительно к конкретным выражениям для $F(p, q)$ можно попытаться вычислить с помощью теории вычетов. Так, например, используя $F(p, q)$ в виде (2.2.7), получим функцию распределения отношения коррелированных райсовских величин

$$P(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-z^2}{K}\right) J\left(\frac{A-B}{2}, \frac{A+B}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1-z^2}{K}\right)\left\{1 - J\left(\frac{A+B}{2}, \frac{A-B}{2}\right)\right\},$$

где $K = \sqrt{(1-z^2)^2 + 4z^2(1-r^2)}$; $A = [2z^2 Q - (1-z^2)(bz^2 - a)]/K^2$; $B = (bz^2 - a)/K$; a, b и Q — параметры в выражении (2.2.7) для изображения.

Дифференцированием $P(z)$ можно получить плотность распределения вероятностей отношения коррелированных райсовских случайных величин

$$W(z) = \frac{1}{2}\left\{(1-z^2) A'/K + B' + 4z(1+z^2)(1-r^2)/K^3\right\} \mathrm{e}^{-A} I_0(C) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{(AB' - A'B)/C - (1-z^2) C'/K\right\} \mathrm{e}^{-A} I_1(C),$$

где $C = \sqrt{A^2 - B^2}$, а штрих обозначает дифференцирование по z, т. е., например, $A' = dA/dz$. Если райсовские случайные величины независимы, то $r = 0$ и формула для $W(z)$ принимает значительно более простой вид

$$W(z)=\frac{2z}{(1+z^2)^3}\left[(1+z^2+az^2+b)I_0\left(\frac{2z\sqrt{ab}}{1+z^2}\right)+\right.$$

$$\left.+2z\sqrt{ab}I_1\left(\frac{2z\sqrt{ab}}{1+z^2}\right)\right]\exp\left\{-\frac{a+bz^2}{1+z^2}\right\}.$$

Изображение $F(p, q)$ можно иногда использовать для непосредственного нахождения моментов функции двух случайных величин (минуя стадию нахождения законов распределения функции). Примеры, иллюстрирующие это утверждение, можно найти в § 5.7.

2.6. Многомерные распределения квадратов модуля двумерного вектора с гауссовскими компонентами при нулевых средних значениях компонент и экспоненциальной функции корреляции

Вопросам получения многомерных распределений рэлеевских и райсовских случайных величин посвящены работы [119, 81, 58, 59, 86]. Полученные результаты весьма громоздки и поэтому вряд ли могут быть использованы в практических приложениях. Однако в одном частном случае, когда средние значения компонент гауссовского вектора равны нулю, а их корреляционная функция имеет экспоненциальный вид, удаётся получить сравнительно несложное выражение для многомерной плотности распределения модуля двумерного вектора. Рассмотрению этого частного случая и посвящён данный параграф.

Пусть $x_\nu=(y_{1\nu}^2+y_{2\nu}^2)/2$, где $y_{1\nu}$ и $y_{2\nu}$ — гауссовские компоненты двумерного вектора в ν-ый момент времени; $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ m$. Для упрощения изложения вопроса допустим, что компоненты статистически независимы. Характеристики компонент удовлетворяют условиям:

$$\overline{y_{1\nu}}=\overline{y_{2\nu}}=0,\quad \overline{y_{1\nu}y_{1\mu}}=\overline{y_{2\nu}y_{2\mu}}=a_{\nu\mu},\quad \overline{y_{1\nu}y_{2\mu}}=0;\quad \nu,\mu=1,2,\ldots,m.$$

Без ограничения общности можно считать, что $a_{\nu\mu}=1$ при $\mu=\nu$; в таком случае $a_{\nu\mu}$ будут являться коэффициентами корреляции.

Определим для рассматриваемой задачи m-мерную плотность вероятности нормированных квадратов модуля вектора $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Для этого запишем $2m$-мерную плотность вероятности компонент

$$w(y_{11},\ldots,y_{1m},y_{21},\ldots,y_{2m})=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^m\det\mathbf{A}}\exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}a_{\nu\mu}^{-1}(y_{1\nu}y_{1\mu}+y_{2\nu}y_{2\mu})\right\}.$$

Здесь: $\mathbf{A} = \left\| a_{\nu\mu} \right\|$ — корреляционная матрица компонент, $a_{\nu\mu}^{-1}$ — элементы обратной матрицы, т. е. $\left\| a_{\nu\mu}^{-1} \right\| = \mathbf{A}^{-1}$. Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ — симметрические.

Произведём замену переменных

$$y_{1\nu} = \sqrt{2x_\nu}\cos\varphi_\nu,\ y_{2\nu} = \sqrt{2x_\nu}\sin\varphi_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots, m.$$

Якобиан преобразования равен 1. Тогда

$$w(x_1,\ldots, x_m, \varphi_1,\ldots, \varphi_m) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m \det \mathbf{A}} \exp\left\{ -\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m} a_{\nu\mu}^{-1}\left(\sqrt{x_\nu x_\mu}\cos(\varphi_\nu - \varphi_\mu)\right)\right\}. \qquad (2.6.1)$$

Плотность распределения случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_m$ получается путём усреднения (1) по переменным $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$. При этом если $m = 2$, то получаем встречавшуюся ранее двумерную плотность квадратов рэлеевских случайных величин. Но уже при $m = 3$ появляются трудности с вычислением интегралов при усреднении. Возникает необходимость либо использовать "теорему сложения" бесселевых функций, либо разлагать в ряд Фурье экспоненциальный множитель в подынтегральном выражении. И в том и в другом случае при $m = 3$ в результате усреднения можно получить

$$w(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \exp\left\{ -a_{11}^{-1}x_1 - a_{22}^{-1}x_2 - a_{33}^{-1}x_3 \right\} \times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu I_\nu\left(-2a_{12}^{-1}\sqrt{x_1x_2}\right) I_\nu\left(-2a_{13}^{-1}\sqrt{x_1x_3}\right) I_\nu\left(-2a_{23}^{-1}\sqrt{x_2x_3}\right),$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 2$.

Если $a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} = 0$, то $a_{13}^{-1} = 0$ и сумма в этой формуле будет состоять из одного слагаемого. Например, при $a_{12} = r_1$, $a_{23} = r_2$, $a_{13} = r_1 \cdot r_2$ получим

$$w(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \frac{1}{(1-r_1^2)(1-r_2^2)} \exp\left\{ -\frac{(1-r_2^2)x_1 + (1-r_1^2r_2^2)x_2 + (1-r_1^2)x_3}{(1-r_1^2)(1-r_2^2)} \right\} \times$$

$$\times I_0\left(\frac{2r_1\sqrt{x_1x_2}}{(1-r_1^2)}\right) I_0\left(\frac{2r_2\sqrt{x_2x_3}}{(1-r_2^2)}\right).$$

Аналогичное упрощение наступает и в многомерном случае, если $y_{1\nu}$ и $y_{2\nu}$ являются выборочными значениями стационарных гауссов-

ских случайных процессов $y_1(t)$ и $y_2(t)$ с нулевыми средними значениями и экспоненциальной функцией корреляции. Коэффициенты корреляции тогда можно записать в виде $a_{\nu\mu} = \exp(-|t_\mu - t_\nu|/\Delta)$, где t_ν и t_μ — моменты времени отсчётов ($\nu, \mu = 1, 2, \ldots, m$), Δ — время корреляции.

Положим для определённости, что $t_{\nu+1} > t_\nu$ и обозначим $r_\nu = \exp\left(-\left|t_{\nu+1} - t_\nu\right|/\Delta\right)$, $\nu = 1, 2, \ldots, m-1$. Тогда все элементы матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ можно выразить через значения r_ν. Матрица $\mathbf{A}^{-1}$ содержит отличные от нуля элементы только на главной и на соседних с ней диагоналях, а $a^{-1}_{\nu\mu} = 0$ при $\left|\nu - \mu\right| > 1$. Многомерная плотность распределения будет иметь вид

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{m} \frac{1 - r_{\nu-1}^2 r_\nu^2}{(1 - r_{\nu-1}^2)(1 - r_\nu^2)} x_\nu\right\} \prod_{\nu=1}^{m-1} I_0\left(\frac{2r_\nu \sqrt{x_\nu x_{\nu+1}}}{1 - r_\nu^2}\right),$$

где

$$\det \mathbf{A} = \prod_{\nu=1}^{m-1} (1 - r_\nu^2), \qquad r_0 = r_m = 0.$$

Заметим, что при экспоненциальной функции корреляции случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_m$ образуют марковскую случайную последовательность.

В частном случае, когда отсчёты значений $y_{1\nu}$ и $y_{2\nu}$ производятся в равноотстоящие моменты времени, получим

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{1}{(1 - \gamma^2)^{m-1}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{x_1 + (1 + \gamma^2)(x_2 + \cdots + x_{m-1}) + x_m}{1 - \gamma^2}\right\} \prod_{\nu=1}^{m-1} I_0\left(\frac{2\gamma \sqrt{x_\nu x_{\nu+1}}}{1 - \gamma^2}\right), \quad (2.6.2)$$

где $\gamma = \exp(-T/\Delta)$, $T = t_{\nu+1} - t_\nu$ — интервал времени между отсчётами.

И ещё одно замечание. Приведенные выражения для плотностей распределения квадратов модуля справедливы и для случая, когда $x_1, x_2, \ldots, x_m$ являются отсчётами нормированного квадрата огибающей гауссовского случайного процесса, если корреляционная функция и взаимно корреляционная функция компонент имеют вид:

$$\overline{y_1(t)\, y_1(t + \tau)} = \exp(-|\tau|/\Delta) \cos \alpha\tau,$$

$$\overline{y_1(t)\, y_2(t + \tau)} = \exp(-|\tau|/\Delta) \sin \alpha\tau.$$

Плотности распределения квадратов огибающей не зависят от параметра α, а входящие в выражения величины r_ν и γ определяются прежними формулами.

3. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ РАДИОИМПУЛЬСА

3.1. Введение

Для более чёткого понимания условий, при которых в данной книге решаются те или иные задачи, а также во избежание каких-либо неопределённостей при интерпретации полученных результатов, необходимо остановиться на используемых определениях, понятиях, моделях и т. п. Поэтому первая половина главы, посвящённая, в основном, изложению подобных вопросов, является начальной для последующих разделов.

Во второй половине главы рассматриваются характеристики обнаружения импульсного сигнала. Основное внимание при этом уделяется методам расчёта характеристик обнаружения при произвольных законах флуктуаций амплитуды полезного сигнала.

3.2. Входной сигнал и математическая модель канала обнаружения

Будем полагать, что принимаемый полезный сигнал является известной функцией времени t, зависящей также от нескольких неизвестных параметров. На входе приёмника действует аддитивная смесь полезного сигнала и нормального белого шума, которую в случае импульсного сигнала запишем в виде

$$s(t) = \sqrt{2E}\, V_0(t-\tau_0)\cos\left[\omega_0 t + \psi_0(t-\tau_0) + \varphi\right] + \sqrt{N_{\text{ш}}}\, n(t), \qquad (3.2.1)$$

где E, τ_0, ω_0, φ — соответственно энергия, задержка, частота и случайная фаза сигнала; $N_{\text{ш}}$ — спектральная плотность шума; $V_0(t)$ и $\psi_0(t)$ — функции, определяющие амплитудную и фазовую модуляции сигнала; $n(t)$ — шумовой процесс. Начальная фаза φ считается независимой от времени, независимой по отношению к остальным параметрам сигнала и равномерно распределённой на интервале от 0 до 2π.

Для удобства записи математических выражений будем использовать комплексную огибающую сигнала $U_0(t) = V_0(t)\exp\{\mathrm{i}\psi_0(t)\}$. С учётом этого выражения формулу (1) можно переписать в виде

$$s(t) = \sqrt{2E}\,\mathrm{Re}\left\{U_0(t-\tau_0)\exp\left[\mathrm{i}(\omega_0 t + \varphi)\right]\right\} + \sqrt{N_{\text{ш}}}\, n(t). \qquad (3.2.2)$$

В формулах (1) и (2) огибающая сигнала и шумовой процесс нормированы таким образом, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|U_0(t)\right|^2 dt = 1, \qquad \overline{n(t)\,n(t+\tau)} = \delta(\tau), \qquad (3.2.3)$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция. Черта над выражением, как и прежде, означает усреднение по случайным переменным.

Физически реализуемые импульсные сигналы имеют конечную длительность, т. е. функция $U_0(t)$ отлична от нуля на конечном интервале, поэтому интегрирование в (3) осуществляется фактически в конечных пределах. Однако для удобства в математических преобразованиях бесконечные пределы в аналогичных выражениях в дальнейшем целесообразно формально сохранять.

Представленная модель полезного сигнала включает в себя, прежде всего, простые импульсные сигналы, в которых отсутствует фазовая модуляция, т. е. $\psi_0(t) \equiv 0$. Типичными сигналами с фазовой модуляцией являются фазокодоманипулированные сигналы (ФКМ сигналы) и частотно модулированные сигналы. В рамках рассматриваемой модели могут быть представлены и когерентные пакеты импульсов.

Вопросы синтеза оптимальных приёмников, осуществляющих обнаружение сигнала, подробно исследованы [20]. В нашем случае оптимальная обработка сводится к умножению принятой реализации на квадратурные составляющие ожидаемого сигнала, интегрированию и образованию квадрата модуля получающейся комплексной величины. Любая взаимно однозначная функция квадрата модуля может служить выходной величиной.

Обработка входной реализации представлена блок-схемой на рис. 3.1. Для сохранения общности результатов эта обработка, вообще говоря, отличается от оптимальной обработки. В качестве ожидаемого сигнала используется опорный сигнал, отличающийся от полезной составляющей принятой реализации. В частном случае, при $\tau_1 = \tau_0$, $\omega_1 = \omega_0$ и $U_1(t) \equiv U_0(t)$, где $U_1(t) = V_1(t)\exp\{i\psi_1(t)\}$, обработка будет оптимальной.

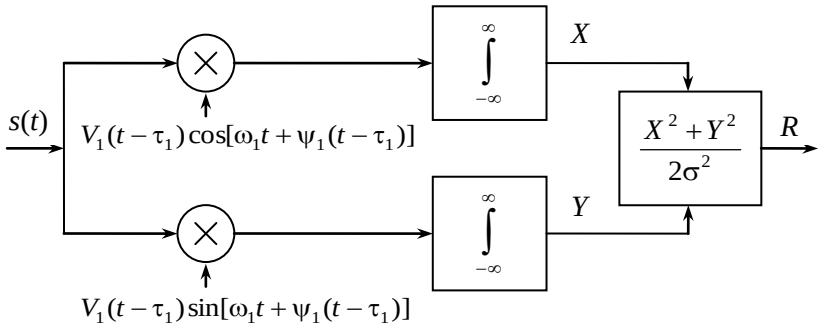


Рис. 3.1. Схема обработки сигнала

Предполагается, что огибающая опорного (ожидаемого) сигнала $U_1(t)$ нормирована так же, как это определено формулой (3) по отношению к $U_0(t)$.

Нормирующий множитель $1/(2\sigma^2)$ введен в схему обработки, чтобы получить более компактные математические выражения, описы-

вающие выходную величину. Нормировка будет применяться в дальнейшем и при анализе других схем обработки. Выходная величина в таком случае становится безразмерной. Величина σ^2, входящая в выражение для нормирующего множителя, является дисперсией шумовых составляющих на выходах квадратурных каналов и пропорциональна спектральной плотности шума $N_ш$. Для схемы на рис. 3.1 $\sigma^2 = N_ш/2$.

Если интенсивность входного шума неизвестна (т. е. неизвестно значение $N_ш$), то нормировку выходной величины всё равно целесообразно сохранять. При этом нормирующий множитель будет определяться дисперсией шумовых составляющих при некотором вполне определённом значении спектральной плотности входного шума. Выходная величина по-прежнему будет безразмерной. Изменения интенсивности шума будут описываться безразмерным множителем.

Если $U_1(t) \equiv U_0(t)$, то схема рис. 3.1 является оптимальной при общих условиях. Так, в [97, § 6.3] показано, что подобная схема обработки оптимальна и в том случае, если амплитуда принимаемого сигнала (в нашем случае амплитудой можно считать величину $\sqrt{2E}$) является случайной величиной с произвольной плотностью вероятности, а начальная фаза распределена равномерно. При известной амплитуде и неизвестном распределении начальной фазы синтез схемы обработки по методу максимума правдоподобия [55] также приводит к схеме рис. 3.1 (см. [97, § 19.3]). К аналогичному выводу можно прийти и при неизвестных законах распределения, как амплитуды, так и начальной фазы.

Изображённая на рис. 3.1 схема представляет так называемый квадратурный корреляционный приёмник. Но оптимальная обработка сигнала допускает и другую форму практической реализации приёмника: пропускание входного сигнала через оптимальный (согласованный) фильтр, детектирование и выделение в определённый момент времени значения огибающей процесса на выходе детектора.

Схема на рис. 3.1 при совпадении принимаемого и опорного сигналов эквивалентна оптимальному фильтру с квадратичным детектором. При анализе приёмников встречаются и другие формы детекторной характеристики (см., например, [92, 111]). На практике чаще всего используется линейный детектор. Оптимальному фильтру с линейным детектором огибающей соответствует корреляционный приёмник, в котором выходная величина формируется по правилу $R = \sqrt{X^2 + Y^2}\,\big/\sigma$.

3.3. Статистические характеристики случайных величин на выходах квадратурных каналов и канала обнаружения

Вначале рассмотрим статистические характеристики случайных величин X и Y на выходах квадратурных каналов.

Поскольку значения $n(t)$ являются нормальными случайными величинами, а X и Y получены в результате линейного преобразования

$n(t)$, то при детерминированных значениях параметров сигнальной составляющей входного процесса случайные величины X и Y будут также нормальными. В этом случае для нахождения плотности распределения X и Y нужно определить их средние значения, дисперсии и коэффициент корреляции.

Выражение для X и Y

$$X + \mathrm{i}Y = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) U_1(t-\tau_1)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}\, dt$$

представим в виде сигнальной и шумовой составляющих

$$X + \mathrm{i}Y = (X_\mathrm{c} + \mathrm{i}Y_\mathrm{c}) + (X_\mathrm{ш} + \mathrm{i}Y_\mathrm{ш})\,, \qquad (3.3.1)$$

где

$$X_\mathrm{c} + \mathrm{i}Y_\mathrm{c} = \sqrt{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{U_0(t-\tau_0)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t+\varphi)}\right\} U_1(t-\tau_1)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}\, dt\,, \qquad (3.3.2)$$

$$X_\mathrm{ш} + \mathrm{i}Y_\mathrm{ш} = \sqrt{N_\mathrm{ш}} \int_{-\infty}^{\infty} n(t) U_1(t-\tau_1)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}\, dt\,. \qquad (3.3.3)$$

Преобразуем выражение (2) для сигнальной составляющей. Подставив в (2)

$$\mathrm{Re}\left\{U_0(t-\tau_0)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t+\varphi)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{U_0(t-\tau_0)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t+\varphi)} + U_0^*(t-\tau_0)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 t+\varphi)}\right\},$$

где звёздочка означает комплексно сопряжённую величину, получим

$$X_\mathrm{c} + \mathrm{i}Y_\mathrm{c} = \frac{\sqrt{2E}}{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(t-\tau_0) U_1(t-\tau_1)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1+\omega_0)t}\, dt\, +$$

$$+\, \frac{\sqrt{2E}}{2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} U_0^*(t-\tau_0) U_1(t-\tau_1)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1-\omega_0)t}\, dt\,. \qquad (3.3.4)$$

Подынтегральное выражение в первом интеграле представляет собой быстроосциллирующую функцию (с частотой $\omega_1 + \omega_0$) с медленно меняющейся огибающей, поэтому величина этого интеграла пренебрежимо мала по сравнению со вторым интегралом (подробнее о вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций см. [97, § 5.2]). Отбрасывая в (4) первый интеграл и делая замену переменной интегрирования во втором интеграле, получаем

$$X_\mathrm{c} + \mathrm{i}Y_\mathrm{c} = \frac{\sqrt{2E}}{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_1-\omega_0)\tau_1-\varphi]}\, C_{10}(\tau_1-\tau_0,\, \omega_1-\omega_0)\,, \qquad (3.3.5)$$

где $C_{10}(\cdot\cdot)$ — взаимно корреляционная функция принимаемого и опорного сигналов:

$$C_{10}(\tau, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(t) U_0^*(t+\tau) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\, dt\,. \qquad (3.3.6)$$

При усреднении (3) по флуктуациям шума учтём, что $\overline{n(t)} = 0$. Поэтому

$$\overline{X_{\text{ш}}} + \mathrm{i}\,\overline{Y_{\text{ш}}} = \sqrt{N_{\text{ш}}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{n(t)} U_1(t-\tau_1) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}\, dt = 0\,.$$

Для определения дисперсии и коэффициента корреляции нормальных случайных величин $X_{\text{ш}}$ и $Y_{\text{ш}}$ будем искать средние значения для $(X_{\text{ш}} + \mathrm{i}Y_{\text{ш}})(X_{\text{ш}} - \mathrm{i}Y_{\text{ш}})$ и $(X_{\text{ш}} + \mathrm{i}Y_{\text{ш}})^2$.

Запишем

$$(X_{\text{ш}} + \mathrm{i}Y_{\text{ш}})(X_{\text{ш}} - \mathrm{i}Y_{\text{ш}}) =$$

$$= \left(\sqrt{N_{\text{ш}}} \int_{-\infty}^{\infty} n(t_1) U_1(t_1-\tau_1) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t_1}\, dt_1 \right) \left(\sqrt{N_{\text{ш}}} \int_{-\infty}^{\infty} n(t_2) U_1^*(t_2-\tau_1) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t_2}\, dt_2 \right) =$$

$$= N_{\text{ш}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(t_1) n(t_2) U_1(t_1-\tau_1) U_1^*(t_2-\tau_1) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 (t_1 - t_2)}\, dt_1 dt_2\,.$$

Усредняя получившееся выражение по флуктуациям шума, с учётом (3.2.3) получим

$$\overline{(X_{\text{ш}} + \mathrm{i}Y_{\text{ш}})(X_{\text{ш}} - \mathrm{i}Y_{\text{ш}})} =$$

$$= N_{\text{ш}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_2 - t_1) U_1(t_1-\tau_1) U_1^*(t_2-\tau_1) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 (t_1 - t_2)}\, dt_1 dt_2\,.$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции и условие нормировки для огибающей $U_1(t)$, получим

$$\overline{(X_{\text{ш}} + \mathrm{i}Y_{\text{ш}})(X_{\text{ш}} - \mathrm{i}Y_{\text{ш}})} = N_{\text{ш}}\,. \qquad (3.3.7)$$

Применив этот способ к вычислению среднего от $(X_{\text{ш}} + \mathrm{i}Y_{\text{ш}})^2$, придём к интегралу от быстроосциллирующей функции (с частотой $2\omega_1$). Полагая этот интеграл равным нулю, получим

$$\overline{(X_{\text{ш}} + \mathrm{i}Y_{\text{ш}})^2} = 0\,. \qquad (3.3.8)$$

Перепишем (7) и (8) в виде

$$\overline{X_{\text{ш}}^2} + \overline{Y_{\text{ш}}^2} = N_{\text{ш}}\,, \qquad (3.3.9)$$

$$\overline{X_{\text{ш}}^2} + 2\mathrm{i}\,\overline{X_{\text{ш}} Y_{\text{ш}}} - \overline{Y_{\text{ш}}^2} = 0\,. \qquad (3.3.10)$$

Из (10) получаем, что $\overline{X_{\text{ш}} Y_{\text{ш}}} = 0$. Случайные величины $X_{\text{ш}}$ и $Y_{\text{ш}}$ некоррелированы, и, следовательно, независимы. Кроме того, из (10)

также следует, что $X_ш$ и $Y_ш$ имеют одинаковую дисперсию. Теперь из формулы (9) находим выражение для дисперсии нормальных случайных величин $X_ш$ и $Y_ш$:

$$\sigma^2 = N_ш /2 . \qquad (3.3.11)$$

Обозначив $\theta = \theta_c + (\omega_1 - \omega_0)\tau_1 - \varphi$, где θ_c — аргумент комплексного числа $C_{10}(\tau_1 - \tau_0, \omega_1 - \omega_0)$,

$$q_0 = E/(2N_ш), \qquad (3.3.12)$$

$$q = q_0 \left| C_{10}(\tau_1 - \tau_0, \omega_1 - \omega_0) \right|^2 , \qquad (3.3.13)$$

и, учитывая формулы (1), (5), (11), можно записать

$$\left.\begin{aligned} X &= \sigma\left(\sqrt{2q}\cos\theta + x\right), \\ Y &= \sigma\left(\sqrt{2q}\sin\theta + y\right), \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.14)$$

где x и y — независимые нормальные случайные величины с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

Выходная величина R выражается через X и Y формулой $R = (X^2 + Y^2)/(2\sigma^2)$ и, следовательно, является нормированным квадратом модуля вектора с независимыми гауссовскими компонентами. Из формулы (14) и из результатов § 1.7 следует, что плотность распределения вероятностей выходной величины R не зависит от θ и имеет вид:

$$W(R) = e^{-R-q} I_0\left(2\sqrt{Rq}\right).$$

Обратим внимание на то, что плотность распределения выходной величины для рассматриваемого приёмника не зависит от значения фазы φ принимаемого сигнала. Это обстоятельство в ряде случаев можно использовать для сокращения объёма вычислительных операций при статистическом моделировании процессов обнаружения.

3.4. Определения отношения сигнал/шум, коэффициента потерь и автокорреляционной функции

Введенные в предыдущем параграфе понятия нуждаются в некоторых комментариях.

Отношение сигнал/шум. Величина q_0, определяемая формулой (3.3.12), называется отношением сигнал/шум [20].

Для определения отношения сигнал/шум чаще пользуются другим соотношением: $q_0 = E/N_o$ (см., например, [84, 24]), где N_o — односторонняя спектральная плотность шума. Так как $N_o = 2N_ш$, то оба соотношения для q_0 совпадают между собой.

Приведенное определение отношения сигнал/шум не единственное.

Плотность распределения выходной величины, формируемой в соответствии с формулой $R = \sqrt{X^2 + Y^2}\big/\sigma$ в оптимальном приёмнике с линейным детектором, будет иметь вид:

$$W(R) = R\exp\left\{-(R^2 + V^2)/2\right\} I_0(RV),$$

где $V = \sqrt{E/N_{\text{ш}}} = \sqrt{2q_0}$. Величина V является отношением амплитуды сигнальной составляющей на выходе оптимального фильтра к среднеквадратичному значению шумовой составляющей. Это отношение также может служить основой для определения отношения сигнал/шум. Отношением сигнал/шум в монографиях [52, 71, 73] называют величину V или V^2. Нетрудно заметить, что это определение отношения сигнал/шум отличается на 3 дБ от введенного формулой (3.3.12). Поэтому во избежание недоразумений подчеркнём, что здесь в дальнейшем под отношением сигнал/шум всегда будет подразумеваться величина, определяемая формулой (3.3.12), т. е. отношение энергии сигнала к односторонней спектральной плотности шума.

В [5, 63] отмечается, что в зарубежной литературе также используются два определения отношения сигнал/шум.

К изложенному добавим, что недоразумения, порождаемые наличием двух определений отношения сигнал/шум, усугубляются существованием двух спектральных плотностей: односторонней и двусторонней. Так, определение отношения сигнал/шум в виде отношения энергии сигнала к спектральной плотности шума не вносит никакой ясности, если чётко не оговорить, какая спектральная плотность имеется в виду.

Автокорреляционная функция и взаимно корреляционная функция. Введём теперь обозначение

$$C_{\nu\mu}(\tau, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_\nu(t) U_\mu^*(t+\tau) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\, dt, \qquad (3.4.1)$$

которое при $\nu = 1$ и $\mu = 0$ совпадает с формулой (3.3.6). При $\nu = \mu = 0$ эта формула задаёт определение автокорреляционной функции $C_{00}(\tau, \Omega)$ принимаемого полезного сигнала. Функция $C_{10}(\tau, \Omega)$ является взаимно корреляционной функцией опорного и принимаемого сигналов. Функция $C_{11}(\tau, \Omega)$ является автокорреляционной функцией сигнала, по отношению к которому приёмное устройство является оптимальным.

Для функции $C_{00}(\tau, \Omega)$ здесь применено название “автокорреляционная функция”. Однако, это название не единственное. Например, в [67] аналогичная функция называется функцией неопределённости, а взаимно корреляционная функция там называется взаимной функцией неопределённости.

Помимо отличий в названии, существует разнообразие и в формулах, посредством которых в различных монографиях определяется

функция автокорреляции (функция неопределённости). Особых неудобств из-за различий в определении в большинстве случаев не происходит, так как квадрат модуля автокорреляционной функции оказывается при этом для различных определений одинаковым, а автокорреляционная функция входит в различные выражения, как правило, в виде модуля или квадрата модуля. Хотя, как показано в [136], из-за различий в определениях возможны и недоразумения.

В некоторых случаях всё же необходимо обязательно иметь в виду эти различия. В гл. 5 будет проведен анализ двухканальной системы. В выражения, описывающие статистические характеристики случайных величин в двух каналах, будут входить не только модули комплексных значений взаимно корреляционных функций, но и аргументы. Поэтому окончательные аналитические выражения в таких случаях могут зависеть от вида формулы, посредством которой определена автокорреляционная функция или взаимно корреляционная функция.

В обозначении (1) учтены рекомендации [136].

Коэффициент потерь. Чтобы пояснить некоторые понятия, которые часто применяются в инженерной практике, рассмотрим отношение q/q_0. Согласно формуле (3.3.13) это отношение равно $\left|C_{10}(\tau_1-\tau_0, \omega_1-\omega_0)\right|^2$. Используя интегральную форму неравенства Коши — Буняковского и условие нормировки огибающих $U_0(t)$ и $U_1(t)$, можно получить, что $\left|C_{10}(\tau_1-\tau_0, \omega_1-\omega_0)\right|^2 \le 1$, причём равенство в этой формуле достигается при оптимальной обработке, когда $U_1(t) \equiv U_0(t)$, $\tau_1 = \tau_0$, $\omega_1 = \omega_0$. Если обработка оптимальная, то $q = q_0$.

Теперь заметим, что вероятностное описание случайной величины на выходе рассматриваемого приёмника при произвольном виде опорного сигнала будет совпадать с соответствующим описанием для оптимального приёмника, если предположить, что на вход оптимального приёмника полезный сигнал поступает с уменьшенной энергией. Поэтому величину $\left|C_{10}(\tau_1-\tau_0, \omega_1-\omega_0)\right|^2$, выражающую уменьшение энергии, можно назвать коэффициентом энергетических потерь из-за неоптимальной обработки сигнала (или просто коэффициентом потерь).

Если $U_1(t) \equiv U_0(t)$, то взаимно корреляционная функция $C_{10}(\cdot\cdot)$ принимаемого и опорного сигналов в формуле (3.3.13) заменяется автокорреляционной функцией сигнала $C_{00}(\cdot\cdot)$. Величину $\left|C_{00}(\tau_1-\tau_0, \omega_1-\omega_0)\right|^2$ при $\tau_0 \ne \tau_1$ и (или) при $\omega_0 \ne \omega_1$ тогда можно назвать коэффициентом потерь, обусловленным расстройкой сигнала по задержке τ_0 и частоте ω_0 относительно параметров τ_1 и ω_1, на которые настроен приёмник.

Если же $\tau_0 = \tau_1$ и $\omega_0 = \omega_1$, то величину $\left|C_{10}(0, 0)\right|^2$ можно назвать коэффициентом потерь из-за отличия огибающих опорного и принимаемого сигналов.

Рассмотрим количественный пример. При приёме прямоугольного импульса для уменьшения боковых лепестков взаимно корреляционной функции на частотной оси можно применить обработку, которая отличается от оптимальной использованием огибающей опорного сигнала типа “косинус-квадрат на пьедестале”. Огибающие принимаемого и опорного сигналов при этом будут определяться формулами:

$$U_0(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & \text{при} \left| t \right| \le T/2, \\ 0 & \text{при} \left| t \right| > T/2; \end{cases}$$

$$U_1(t) = \begin{cases} (\alpha/\sqrt{T})[a + b\cos^2(\pi t/T)] & \text{при} \left| t \right| \le T/2, \\ 0 & \text{при} \left| t \right| > T/2. \end{cases}$$

Здесь T — длительность импульса; a и b — параметры; α — коэффициент, определяемый из условия нормировки огибающей и равный

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{(a + b/2)^2 + b^2/8}}.$$

Подставив эти выражения в формулу для $C_{10}(\cdot\cdot)$, получим для коэффициента потерь

$$\eta = \left| C_{10}(0, 0) \right|^2 = [\alpha(a + b/2)]^2.$$

При $a = 0{,}08$ и $b = 0{,}92$ (весовая функция Хэмминга) для коэффициента потерь η получим: $10 \lg \eta = -1{,}34$ дБ.

Приведенные рассуждения и количественный пример иллюстрируют понятие коэффициента потерь для простейших случаев. При анализе реальных радиотехнических устройств приходится встречаться с более сложными условиями, когда оценка характеристик обнаружения является трудоёмкой задачей. Тем не менее, посредством коэффициента потерь можно оценивать влияние на характеристики обнаружения тех или иных факторов. Имея в своём распоряжении заранее заготовленный набор данных в виде числовых значений, графиков или диаграмм для определения коэффициентов потерь, учитывающих влияние различных явлений, можно значительно упростить комплексную оценку эффективности обнаружения сигнала реальным радиотехническим устройством.

В основе применения этого метода лежит то обстоятельство, что коэффициенты потерь имеют во многих случаях мультипликативный характер, т. е. общий коэффициент потерь является произведением частных коэффициентов (иногда в приближённом виде). Это позволяет разделить исходную задачу на ряд частных более простых задач, которые можно решать каждую по отдельности.

И ещё одно замечание. Величина q_0 названа отношением сигнал/шум. Величину q, определяемую формулой (3.3.13), можно тоже назвать отношением сигнал/шум, но при этом необходимо подразу-

мевать, что это отношение сигнал/шум получено с учётом соответствующего коэффициента потерь. В дальнейшем, если необходимо подчеркнуть, что при анализе используется именно исходное, т. е. не учитывающее каких-либо потерь, отношение сигнал/шум, будем применять обозначение q_0. Если же это уточнение непринципиально, например, когда анализ справедлив и при наличии тех или иных потерь, то "нулевой" индекс в обозначении отношения сигнал/шум будем опускать или, при необходимости, заменять другим индексом.

3.5. Характеристики обнаружения импульсного сигнала

Проблема состоит в том, чтобы на основании принятой реализации сформировать наилучшее решение о наличии или отсутствии в этой реализации полезного сигнала. В практических задачах в качестве критерия оптимальности обнаружения используется критерий Неймана — Пирсона. В этом случае задаётся вероятность ложной тревоги F, а эффективность обнаружения оценивается вероятностью обнаружения D. Решение о наличии (или об отсутствии) сигнала принимается по результатам сравнения с порогом случайной величины, полученной на выходе канала обнаружения. Для оценки эффективности обнаружения необходимо вначале по заданному значению F находить величину порога λ, с которым сравниваются результаты обработки входной реализации, а затем находится вероятность обнаружения сигнала D.

Если на входе приёмника присутствует только гауссовский шум, то выходная случайная величина будет иметь плотность распределения $W(R) = \exp(-R)$. Поэтому $F = \exp(-\lambda)$ и $\lambda = \ln(1/F)$. Вероятность обнаружения сигнала с заданным отношением сигнал/шум q выражается через рассмотренный в §§ 1.7 и 1.8 интеграл и равна $J(\lambda, q)$. Чтобы получить вероятность обнаружения для сигнала с флуктуирующей амплитудой, необходимо усреднить вероятность обнаружения по флуктуациям:

$$D = \int_0^\infty J(\lambda, q)\, w(q)\, dq\,, \qquad (3.5.1)$$

где $w(q)$ — плотность распределения вероятностей отношения сигнал/шум. Усреднение вероятности обнаружения можно заменить предварительным усреднением соответствующей плотности распределения выходной величины или изображения по Лапласу этой плотности.

Классическим видом флуктуаций являются рэлеевские флуктуации амплитуды сигнала, отношение сигнал/шум при этом распределено по экспоненциальному закону $w(q) = (1/\rho)\exp(-q/\rho)$, а вероятность обнаружения сигнала, как известно, имеет вид:

$$D = \exp\{-\lambda/(1 + \rho)\}. \qquad (3.5.2)$$

Здесь и далее ρ — среднее значение отношения сигнал/шум ($\rho = \overline{q}$).

Флуктуации реальных сигналов бывают не только рэлеевскими. В одной из работ Сверлинга [139] предложено амплитуду сигнала представлять как модуль вектора с независимыми нормальными случайными компонентами. Эта модель включает в себя как частный случай рэлеевские флуктуации (если число компонент равно 2). Для так называемых 3-го и 4-го случаев Сверлинга [57, 67], используемых для статистического описания флуктуаций некогерентной пачки импульсов, амплитуду импульса можно представить как модуль вектора с четырьмя независимыми гауссовскими компонентами. Вероятность обнаружения одиночного импульса при этом имеет вид

$$D = \left\{1 + \lambda \frac{\rho/2}{(1+\rho/2)^2}\right\} \exp\left\{-\frac{\lambda}{1+\rho/2}\right\}. \qquad (3.5.3)$$

Широкое применение в зарубежной и отечественной литературе находит логарифмически нормальное распределение флуктуаций амплитуды или энергии сигнала [93, 9]. Плотность логарифмически нормального распределения задаётся двумя параметрами. В задачах обнаружения сигнала в качестве этих параметров удобно задавать медианное значение отношения сигнал/шум и дисперсию натурального логарифма отношения сигнал/шум. Если эти параметры обозначить через $q_м$ и σ^2, то отношение сигнал/шум можно представить в виде $q = q_м \cdot \exp(\sigma x)$, где x — нормальная случайная величина (0, 1). Для вероятности обнаружения сигнала с логарифмически нормальными флуктуациями получим выражение

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} J\left(\lambda, q_м e^{\sigma x}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx. \qquad (3.5.4)$$

Выразить этот интеграл через известные функции не удаётся, вычислить его можно по приближённым формулам или численными методами (см. следующий параграф).

На рис. 3.2 в качестве примера представлены зависимости вероятности обнаружения сигнала от параметров распределения отношения сигнал/шум. На рис. *а* и *б* изображены одни и те же характеристики, отличие в представлении состоит лишь в том, что по оси абсцисс отложены разные параметры. Если по оси абсцисс откладывать медианные значения отношения сигнал/шум $q_м$, то при представлении на одном рисунке характеристик даже для разных распределений отношения сигнал/шум, кривые будут пересекаться в окрестности точки $D = 0{,}5$.

Масштабная сетка на оси ординат нелинейная по отношению к вероятности обнаружения. В линейном масштабе по оси ординат здесь нанесена функция $z = z(D)$, обратная к функции нормального распределения. Такая масштабная сетка широко распространена в зарубежных статьях, причём величина z в этих статьях, как правило, откладывается в дюймах (см., например, [121]).

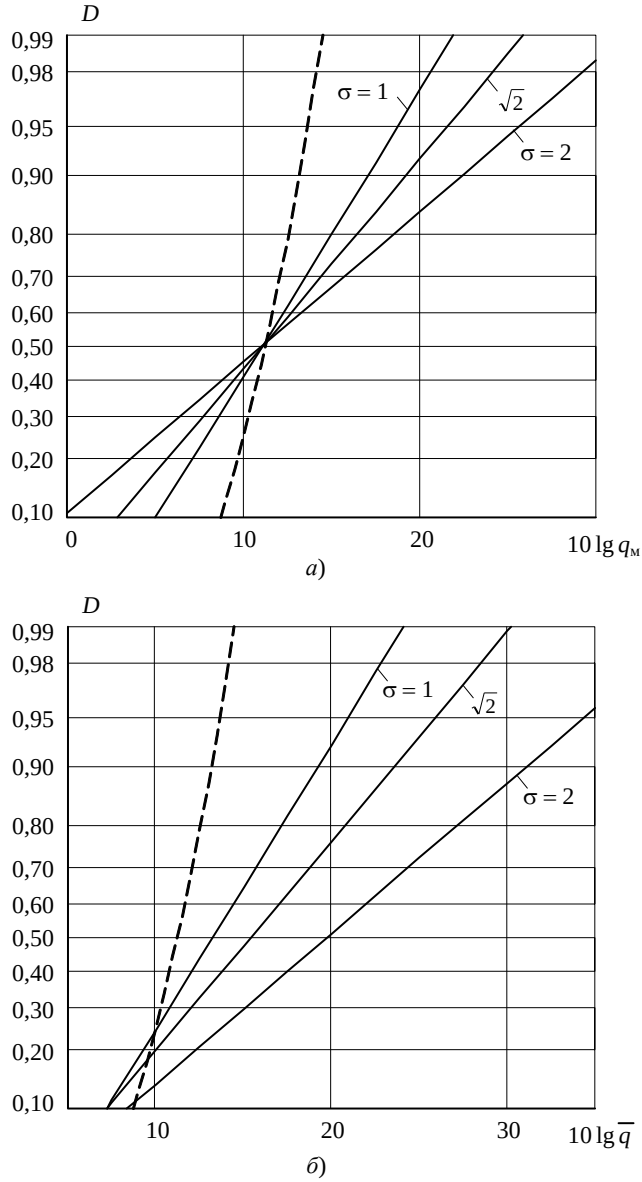


Рис. 3.2. Характеристики обнаружения при $F = 10^{-6}$:
пунктир — нефлуктуирующий сигнал;
сплошные кривые — логарифмически нормальные флуктуации

Применение специальных масштабных сеток позволяет “растягивать” на рисунке наиболее интересный диапазон близких к 1 вероятностей. Кроме того, в ряде случаев путём подбора способа нанесения данных на ось ординат удаётся добиться, чтобы изображаемые зависимости были близки к прямым линиям. Это существенно упрощает и расчёт характеристик, и интерполяцию получаемых результатов. Так, например, при построении характеристик радиолокационного обнаружения приближающихся объектов, по оси абсцисс целесообразно откладывать рубеж обнаружения, а по оси ординат величину $-\lg(1-D_{\text{н}})$. Здесь $D_{\text{н}}$ — накопленная (накопительная) вероятность обнаружения приближающегося объекта.

При подготовке данных для иллюстраций или рабочих материалов целесообразно при вычислениях значений вероятности организовывать и вычисление величин, откладываемых на осях в линейном масштабе.

В [98] приведен подробный обзор работ, посвящённых исследованию статистических свойств амплитуды и мощности сигналов на входе приёмного устройства. Приводятся законы распределения и соответствующие им числовые характеристики. Представленные там данные говорят о многообразии моделей флуктуаций.

Характеристики обнаружения зависят от вида флуктуаций амплитуды сигнала, поэтому возникает вопрос о том, в какую сторону изменяется по этой причине вероятность обнаружения (при фиксированном среднем значении отношения сигнал/шум).

Как показано в [114], если среднее значение отношения сигнал/шум ρ выше некоторой критической величины, то флуктуации амплитуды всегда ведут к уменьшению вероятности обнаружения. Критическая величина среднего значения отношения сигнал/шум зависит от вероятности ложной тревоги. Вероятность обнаружения *D*, соответствующая критической величине среднего значения отношения сигнал/шум, составляет ориентировочно 0,8. При более высоких вероятностях обнаружения наиболее благоприятным является нефлуктуирующий сигнал.

Если необходимое значение *D* меньше 0,3, то при флуктуирующем сигнале в практических ситуациях требуется, как правило, меньшее ρ (по сравнению с нефлуктуирующим сигналом) [114]. В промежуточном случае, при $0{,}3 \le D \le 0{,}8$, наличие флуктуаций приводит чаще всего к увеличению требуемого значения ρ, но существуют также законы флуктуаций, когда флуктуирующий сигнал энергетически выгоднее, чем нефлуктуирующий.

Изложенный в [114] метод отыскания наиболее благоприятного закона флуктуаций можно попытаться применить для отыскания наиболее неблагоприятного закона. Результаты позволяют сделать вывод, что при заданной вероятности ложной тревоги *F* и при фиксированном среднем значении отношения сигнал/шум ρ можно сконструировать такой закон флуктуаций, при котором вероятность обнаружения будет сколь угодно близкой к *F*.

3.6. Приближённые методы вычисления вероятности обнаружения импульсного сигнала

В практических задачах всегда может возникнуть необходимость оценки вероятности обнаружения сигнала, флуктуирующего по какому-либо вновь встретившемуся закону.

Приведенные в предыдущем параграфе формулы (3.5.2) и (3.5.3) для вероятности обнаружения относятся, пожалуй, к исключениям, когда сравнительно просто можно получить результаты. В большинстве случаев аналитическое решение задачи является недостижимым.

Применение новых законов требует каждый раз индивидуального подхода к вычислению вероятности обнаружения сигнала [9, 10, 48]. В связи с этим, представляется необходимым найти, хотя бы и приближённые, но достаточно универсальные способы вычисления этой вероятности.

По характеру требований, которые могут быть предъявлены к результатам оценки вероятности, выделим два способа решения этой задачи.

Первый способ целесообразно использовать, когда оценка вероятностных характеристик имеет одноразовый характер или к точности результатов предъявляются высокие требования. При этом, применяя численные методы вычисления интегралов, вероятность обнаружения можно определить непосредственно по формуле (3.5.1). Рекомендации по составлению процедуры вычисления функции $J(x, y)$, входящей в формулу (3.5.1), были представлены в § 1.8.

Как видно из ряда опубликованных работ, попытки получить для вероятности обнаружения аналитические формулы приводят чаще всего к громоздким выражениям. Усилия и машинное время, затрачиваемые на вывод для каждого конкретного случая формул и отладку для этих формул программ, могут не окупиться даже в том случае, когда вычисления по отлаженной программе потребуют незначительного машинного времени.

Второй способ решения этой задачи — приближённый. Он основан на полученном в § 1.4 представлении плотности распределения случайной величины на выходе приёмника в виде ряда по ортогональным полиномам. Формулы для вероятности обнаружения в виде усечённого ряда из нескольких членов целесообразно применять при экспресс-анализе характеристик обнаружения, а также, в целях экономии машинного времени, в больших комплексных моделях (например, на этапе отладки этих моделей).

Чтобы воспользоваться приведенными в § 1.4 формулами для определения вероятности обнаружения сигнала, необходимо вначале найти моменты случайной величины на выходе приёмника.

Плотность вероятности нормированной случайной величины на выходе приёмника с квадратичным детектором определяется формулой

$$W(R) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-q-R} I_0\left(2\sqrt{qR}\right) w(q)\, dq. \qquad (3.6.1)$$

Осуществляя преобразование Лапласа от обеих частей равенства (1), можно получить

$$F(p) = \frac{1}{1+p}\, f\left(\frac{p}{1+p}\right), \qquad (3.6.2)$$

где $F(p)$ и $f(p)$ — изображения функций $W(R)$ и $w(q)$. Разложение в (2) изображений в ряд Маклорена даёт

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} M_\nu (-p)^\nu = \frac{1}{1+p} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} m_\nu \left(-\frac{p}{1+p}\right)^\nu, \qquad (3.6.3)$$

где M_ν — моменты $W(R)$, m_ν — моменты $w(q)$. Из (3) далее получаем

$$M_1 = m_1 + 1, \quad M_2 = m_2 + 4m_1 + 2, \ldots, \quad M_\nu = \nu! \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{1}{\mu!} C_\nu^\mu m_\mu .$$

Теперь, чтобы применить ортогональное разложение, необходимо выбрать весовую функцию $g(x)$.

Удовлетворительные результаты можно получить, если принять

$$g(x) = (1/a)\, w(x/a), \qquad (3.6.4)$$

где $a = M_1/m_1$. Тогда $\alpha_\nu = a^\nu m_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots$, причём $\alpha_1 = M_1$. Здесь, как и в § 1.4, через α_ν обозначены моменты весовой функции $g(x)$.

В выражение для $w(q)$ кроме переменной q всегда входит один или несколько параметров. Если их число равно двум или более, то в качестве $g(x)$ можно использовать выражение для $w(x)$, в которое вместо истинных значений параметров подставлены откорректированные. Параметры корректируются так, чтобы первые моменты весовой функции совпадали с соответствующими моментами распределения вероятностей $W(R)$. Для иллюстрации этого способа рассмотрим логарифмически нормальное распределение

$$w(q) = \frac{1}{q\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln\frac{q}{q_\text{м}}\right)^2\right\}. \qquad (3.6.5)$$

Параметры $q_\text{м}$ и σ^2 здесь имеют тот же смысл, что и в формуле (3.5.4). Моменты этого распределения равны $m_\nu = q_\text{м}^\nu \exp(\nu^2\sigma^2/2)$. Если в (5) вместо $q_\text{м}$ и σ подставить $q_g = M_1^2/\sqrt{M_2}$, $\sigma_g = \sqrt{\ln(M_2/M_1^2)}$, и по-

лучившееся выражение взять в качестве весовой функции, то будем иметь $\alpha_1 = q_g \exp(\sigma_g^2/2) = M_1$, $\alpha_2 = q_g^2 \exp(2\sigma_g^2) = M_2$.

Точность формул (1.4.5) и (1.4.6) оценивалась на конкретных вероятностных моделях флуктуаций сигнала. Для контроля точности вычислялись численными методами истинные значения вероятности обнаружения D. Для вероятности ложной тревоги F использовались значения 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}.

На основании полученных результатов оказалось возможным сделать вывод о том, что формулы (1.4.5) и (1.4.6) примерно одинаковы между собой по точности.

В качестве одной из вероятностных моделей рассматривались логарифмически нормальные флуктуации отношения сигнал/шум.

Применение приведенных соотношений для логарифмически нормального закона носит формальный характер, так как в этом случае ряды в соотношении (3) расходятся при любых $p \neq 0$. Для этой модели флуктуаций оказалось, что значения вероятностей обнаружения сигнала, получаемые по формулам (1.4.5) и (1.4.6), не удаётся уточнить путём увеличения числа членов усечённого ряда. При изменении n в этих формулах значения вероятностей практически не меняются. Формулы (1.4.5) и (1.4.6) при логарифмически нормальных флуктуациях целесообразно применять лишь при $n = 0$, в этом случае для вероятности обнаружения D получим

$$D \approx \Phi\left(\frac{1}{\sigma_g}\ln\frac{\lambda}{q_g}\right), \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt. \qquad (3.6.6)$$

Относительная погрешность формулы (6) в диапазоне вероятностей обнаружения от 0,01 до 0,99 при $\sigma = 1 \ldots 2$ и $F = 10^{-6}$ максимальна при $D = 0{,}99$, $\sigma = 1$ и составляет 23 %. Если зафиксировать вероятность обнаружения $D = 0{,}99$, то ошибка в определении значения $q_м$, требуемого для достижения этой вероятности, составит 0,4 дБ (при $\sigma = 1$).

Под относительной погрешностью оценки вероятностей здесь и далее подразумевается при $D < 0{,}5$ отношение $\Delta D/D$, а при $D \geq 0{,}5$ — отношение $\Delta D/(1-D)$, где ΔD — абсолютная погрешность.

В [101] содержатся указания по вычислению семиинвариантов логарифма случайной величины, распределение которой близко к логарифмически нормальному закону, когда известны моменты самой случайной величины. Эти указания использовались для построения ряда Эджворта, аппроксимирующего распределение логарифма случайной величины на выходе приёмника. Оказалось, что получаемые с помощью такого ряда оценки вероятности также слабо зависят от числа членов ряда и имеют примерно такую же погрешность, как и оценки по формуле (6).

В другой вероятностной модели амплитуда сигнала являлась модулем $2N$-мерного вектора с независимыми нормальными случайными компонентами, имеющими нулевые средние значения и одинаковые дисперсии. При $N = 1$ (рэлеевские флуктуации амплитуды сигнала) весовая функция (4) совпадает с $W(x)$, поэтому формулы (1.4.2), (1.4.5) и (1.4.6) с этой весовой функцией при любых n превращаются в точные выражения. Если $N = 2$, то максимальная относительная погрешность формул (1.4.5) и (1.4.6) с весовой функцией (4) при $n = 3$ или 4 составляет примерно 5 %. При дальнейшем увеличении N точность формул ухудшается.

Оценка формул производилась ещё для одной вероятностной модели. Отношение сигнал/шум в ней являлось модулем нормальной случайной величины, имеющей нулевое среднее значение (частный случай полигауссовской модели флуктуаций [98]). Для этой модели относительная погрешность формул при $n = 3$ или 4 с весовой функцией (4) составляет доли процента.

Остановимся ещё на одном приближённом способе, предложенном в [103].

Способ основан на предположении, что среднее значение и дисперсия отношения сигнал/шум оказывают наибольшее влияние на величину вероятности обнаружения по сравнению с моментами более высокого порядка. Поэтому для вычисления вероятности обнаружения предлагается использовать не заданный закон распределения отношения сигнал/шум, а какой либо другой, имеющий такие же первые два момента, но значительно более простой для аналитических вычислений. Для практического использования способа в [103] представлены зависимости вероятности обнаружения от нормализованной дисперсии отношения сигнал/шум со средним значением отношения в виде параметра. В качестве законов распределений при построении графиков использовались простые формулы.

Способ из [103] можно иногда использовать для ориентировочных оценок, но при больших вероятностях обнаружения пользоваться им рискованно.

4. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ НЕКОГЕРЕНТНОГО СИГНАЛА

4.1. Введение

В данной главе рассматриваются вопросы определения пороговых уровней, с которыми при принятии решения сравниваются результаты некогерентной обработки принимаемых реализаций. Представленные сведения необходимы при оценке характеристик обнаружения, а также для задания пороговых уровней в реальных устройствах обнаружения.

Далее излагаются методы расчёта характеристик обнаружения сигналов при осложнённых исходных данных. К факторам, затрудняющим анализ характеристик обнаружения, относится, в первую очередь, многообразие законов флуктуаций полезного сигнала. В задачах анализа обнаружения некогерентных сигналов затруднения возникают также из-за необходимости учёта частичной статистической зависимости флуктуаций отдельных импульсов, составляющих некогерентную пачку, когда флуктуации нельзя отнести к крайним случаям полностью независимых или "дружных" флуктуаций.

Приёмник обнаружения некогерентной пачки импульсов включает в себя устройство когерентной обработки импульсов, детектор огибающей, схему накопления и пороговое устройство. Выходной эффект обработки пачки импульсов можно представить в виде

$$R = \sum_{\nu=1}^{N} \alpha\left(\sqrt{R_\nu}\right),$$

где N — число импульсов в пачке; $\alpha(x)$ — монотонная функция, определяющая вид детекторной характеристики ($x \geq 0$); R_ν — нормированный результат обработки ν-го импульса устройством когерентной обработки с квадратичным детектором огибающей.

Когерентная обработка и детектирование каждого импульса осуществляются по схеме рис. 3.1.

При $\alpha(x) \equiv x\sqrt{2}$ говорят о линейном детекторе. Для квадратичного детектора $\alpha(x) \equiv x^2$. При рассмотрении задач обнаружения некогерентного сигнала встречаются ещё детекторные характеристики вида $\alpha(x) \equiv \ln I_0(k\sqrt{x})$, где k — некоторый коэффициент, а также $\alpha(x) \equiv \ln(x)$ [92, 111]. Наибольший практический интерес, видимо, представляют линейный и квадратичный детекторы.

Начальный этап оценки характеристик обнаружения сигнала состоит в определении величины порога, вероятность превышения которого накопленной суммой R при отсутствии сигнала, согласно критерию Неймана — Пирсона, равна заданной вероятности ложной тревоги F. Затем находится вероятность обнаружения сигнала.

4.2. Определение пороговых уровней. Квадратичный детектор

Задача определения пороговых уровней при использовании квадратичного детектора неоднократно рассматривалась в литературе. В [129] представлена таблица пороговых уровней для значений $N = 1(1)150$ и $p = 1(1)12$, где p задаёт вероятность ложной тревоги по формуле $F = 10^{-p}$. Применённая здесь запись означает, что, например, параметр N в таблице перебирается от 1 до 150 с шагом 1.

Указанная таблица затем была воспроизведена в [21, 63, 2].

Для проведения исследований с помощью вычислительной техники необходимо иметь процедуру, позволяющую вычислять значения порогового уровня по заданным N и F. Описание этой процедуры для $N > 1$, основанное на результатах [129, 128], даётся ниже. При $N = 1$ величина порога равна $\lambda = \ln(1/F)$.

Случайная величина на выходе приёмника при отсутствии на входе сигнала представляет собой сумму независимых случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение вероятностей. Вероятность ложной тревоги определяется формулой

$$F = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{R^{N-1}}{(N-1)!} \mathrm{e}^{-R} dR = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} = 10^{-p}.$$

Необходимое значение λ находится путём решения уравнения $f(\lambda) = 0$, где

$$f(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} - F. \qquad (4.2.1)$$

Уравнение $f(\lambda) = 0$ решается методом Ньютона: если известно приближённое решение λ_0, то более точное решение λ определяется по формуле

$$\lambda = \lambda_0 - f(\lambda_0)/f'(\lambda_0),$$

где

$$f'(\lambda_0) = -\left\{\lambda^{N-1}/(N-1)!\right\}\exp(-\lambda).$$

Чтобы избежать переполнения разрядной сетки вычислительной машины, приведенные формулы необходимо преобразовать. Окончательная формула для уточнения решения имеет вид:

$$\lambda = \lambda_0 + S(\lambda_0) - A(\lambda_0). \qquad (4.2.2)$$

Значение $S(\lambda_0)$ здесь находится рекуррентной процедурой: $a_0 = 1$, $a_{\nu} = 1 + \nu\, a_{\nu-1}/\lambda_0$, $S(\lambda_0) = a_{N-1}$, а $A(\lambda_0)$ определяется из

$$\ln A(\lambda_0) = \lambda_0 - (N-1)\ln\lambda_0 - p\ln 10 + \sum_{\nu=2}^{N-1} \ln\nu.$$

Начальное значение λ_0 для итерационной формулы (2) следует находить по асимптотической формуле (1.6.4) с использованием полиномов Кемпбелла вплоть до пятой степени включительно. Величина x, являющаяся аргументом полиномов, задаётся вероятностью ложной тревоги посредством уравнения (1.6.3). Эту величину целесообразно вычислять по приведенной в [128] формуле

$$x = y - \frac{(((p_4 y + p_3)y + p_2)y + p_1)y + p_0}{(((q_4 y + q_3)y + q_2)y + q_1)y + q_0}, \qquad (4.2.3)$$

$$y = \sqrt{2\ln(1/F)};$$

$p_0 = 0{,}322\,232\,431\,088;$ $q_0 = 0{,}993\,484\,626\,060 \cdot 10^{-1};$

$p_1 = 1{,}0;$ $q_1 = 0{,}588\,581\,570\,495;$

$p_2 = 0{,}342\,242\,088\,547;$ $q_2 = 0{,}531\,103\,462\,366;$

$p_3 = 0{,}204\,231\,210\,245 \cdot 10^{-1};$ $q_3 = 0{,}103\,537\,752\,850;$

$p_4 = 0{,}453\,642\,210\,148 \cdot 10^{-4};$ $q_4 = 0{,}385\,607\,006\,34 \cdot 10^{-2}.$

Ошибка вычисления x по формуле (3) в диапазоне F от 10^{-1} до 10^{-12} составляет около 10^{-7}.

В [137] дана довольно простая формула для начального значения порога λ_0. По этому поводу следует заметить, что использование рекомендуемой там простой формулы совместно с итерационной формулой (2) связано с некоторым риском: погрешности этой формулы таковы, что итерационный процесс при малых вероятностях ложной тревоги иногда оказывается “расходящимся”.

В [126] содержится утверждение, что таблица Пэчереса [129] недостаточно точна. Для проверки этого утверждения был произведен расчёт пороговых уровней по изложенному здесь алгоритму. Результаты расчётов представлены в Приложении 2. При сопоставлении полученных результатов с оригиналом таблицы [129] было выявлено 72 отличия, составляющие только одну единицу последнего десятичного знака (четвёртого знака после запятой). Разумеется, эти отличия не могут служить основанием для сомнений в добротности таблицы [129].

В начале этого параграфа отмечалось, что таблица Пэчереса воспроизводилась в ряде последующих изданий. К сожалению, все упомянутые переиздания содержат существенные опечатки. Именно это обстоятельство, а также малодоступность оригинала таблицы Пэчереса, послужили причиной включения в Приложение 2 вновь рассчитанной таблицы.

4.3. Определение пороговых уровней. Линейный детектор

Найти аналитическое выражение для плотности распределения выходной величины, накапливаемой после линейного детектора, при произвольном числе импульсов N не представляется возможным. Для нахождения величины порога неприменимы и методы статистического моделирования, так как оценке подлежат вероятности ложной тревоги, принимающие малые значения, что приводит к нереализуемым требованиям к качеству датчиков случайных чисел и к количеству статистических испытаний.

Удовлетворительное решение этой задачи достигается путём сочетания численных и асимптотических методов. Остановимся кратко на результатах и выводах, полученных при сопоставлении этих методов.

Распределение вероятностей нормированной случайной величины на выходе линейного детектора описывается рэлеевским законом $w(y) = y\exp(-y^2/2)$, $y \ge 0$. Приемлемые формулы для вероятности ложной тревоги на выходе накопителя, суммирующего такие случайные величины, можно получить лишь для малого числа суммирований. Эти формулы имеют следующий вид (индекс у символа F означает число суммирований N):

$$F_1 = \mathrm{e}^{-\lambda^2/2}, \qquad F_2 = \mathrm{e}^{-\lambda^2/2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda^2/4}\mathrm{erf}\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

$$F_3 = \mathrm{e}^{-\lambda^2/2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda^2/4}\mathrm{erf}\left(\frac{\lambda}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{\lambda} x(\lambda - x)\exp\left\{-\frac{x^2}{2} - \frac{(\lambda - x)^2}{4}\right\}\mathrm{erf}\left(\frac{\lambda - x}{2}\right)dx,$$

$$F_4 = \mathrm{e}^{-\lambda^2/2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda^2/4}\mathrm{erf}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{\lambda}\exp\left\{-\frac{x^2}{4} - \frac{(\lambda - x)^2}{4}\right\}\times$$

$$\times\left\{x\,\mathrm{e}^{-x^2/4} + \sqrt{\pi}\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2}\right)\right\}\left\{\mathrm{e}^{-(\lambda - x)^2/4} + (\lambda - x)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{\lambda - x}{2}\right)\right\}dx.$$

Здесь λ — величина порога, с которым сравнивается накопленная сумма; $\mathrm{erf}(\cdot)$ — интеграл ошибок.

Используя эти соотношения, можно численными методами определить пороговые уровни для малого числа суммирований ($N = 1 \ldots 4$).

Для вычисления нормированных пороговых уровней при $N > 4$ можно использовать обращённый ряд Эджворта (1.6.2).

Семиинварианты случайной величины κ_ν связаны с её моментами приведенными в § 1.2 соотношениями. Моменты для нормированных

отсчётов шума на выходе линейного детектора, то есть для рэлеевских случайных величин, равны $\sqrt{\pi/2}\,\nu!!$ при нечётных ν и $\nu!!$ при чётных.

В диапазоне вероятностей $F = 10^{-1} \ldots 10^{-6}$ уже при $N = 4$ точность получаемых по формуле (1.6.2) значений порога не хуже 10^{-2}. С увеличением N точность формулы быстро растёт и при $N > 20$ оказывается не хуже 10^{-4}.

При малых вероятностях ложной тревоги погрешность формулы (1.6.2) увеличивается. В диапазоне вероятностей $F = 10^{-9} \ldots 10^{-12}$ при $N < 8 \ldots 12$ более точные результаты можно получить с помощью оценки вероятности больших уклонений.

Вероятность F превышения порога λ суммой N случайных величин при больших значениях λ определяется приближённой (асимптотической) формулой [51, стр. 303]:

$$F \approx \frac{\exp\{-N[h \cdot m(h) - \ln R(h)]\}}{h\,\sigma(h)\sqrt{2\pi N}}, \qquad (4.3.1)$$

где

$$R(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-hy} w(y)\,dy, \qquad m(h) = R'(h)/R(h), \qquad \sigma^2(h) = m'(h),$$

h — единственный положительный корень уравнения $\lambda = N \cdot m(h)$, $w(y)$ — плотность распределения слагаемых; штрих означает дифференцирование.

Если задана вероятность F, то из (1) вначале находится h, а затем по формуле $\lambda = N \cdot m(h)$ находится величина порога.

Для случайной величины на выходе линейного детектора

$$R(h) = 1 + h \exp(h^2/2)\sqrt{2\pi}\,\Phi(h), \quad m(h) = h + \psi(h),$$

$$\sigma^2(h) = 2 - h\,\psi(h) - \psi^2(h),$$

где

$$\Phi(h) = \int_{-\infty}^{h} \varphi(x)\,dx, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad \psi(h) = \Phi(h)/\omega(h),$$

$$\omega(h) = \varphi(h) + h\,\Phi(h).$$

При этом уравнение (1) приводится к виду

$$h = \sqrt{[A - 2\ln h - \ln \sigma^2(h)]/N + 2\ln w(h) - 2h\psi(h)}, \qquad (4.3.2)$$

где $A = 2\ln(1/F) + (N-1)\ln(2\pi) - \ln N$.

Уравнение (2) решается методом последовательных приближений.

С увеличением N относительная погрешность значений порогов, получаемых этим методом, несколько уменьшается.

При небольших значениях N и малых вероятностях ложной тревоги значения h составляют несколько единиц. При этом $\varphi(h) \approx 0$, $\Phi(h) \approx 1$ и уравнение (2) существенно упрощается.

Более точные значения порогов можно получить с помощью ряда Грама — Шарлье; вероятность ложной тревоги выражается в виде интеграла от этого ряда, а величина порога при заданной вероятности ложной тревоги находится методом последовательных приближений. Начальные значения порога для применения последовательных приближений находятся по формуле (1.6.2) или с помощью оценок вероятности больших уклонений.

Поскольку члены ряда Грама — Шарлье находятся по рекуррентным формулам, то необходим контроль накопления вычислительных погрешностей. При использовании промежуточных вычислений с относительной погрешностью 10^{-16} оказалось возможным использовать до 80 членов ряда.

В Приложении 3 представлена таблица пороговых уровней, составленная в результате комбинированного использования описанных методов.

Анализ и сопоставление получаемых при вычислениях промежуточных результатов позволили прийти к выводу, что все знаки в приведенных числовых значениях порогов верные.

Дополнительные исследования показали, что получаемые по формуле (1.6.2) значения пороговых уровней для линейного детектора точнее, чем для квадратичного детектора. Такой вывод является закономерным, так как форма кривой рэлеевского распределения значительно ближе к гауссовской кривой по сравнению с кривой экспоненциального распределения.

4.4. Характеристики обнаружения некогерентной пачки импульсов

В данном параграфе рассматриваются характеристики обнаружения некогерентной пачки импульсов при дружных, независимых и блочно-коррелированных флуктуациях амплитуды. Основное внимание уделяется универсальным методам анализа, применимым для любых плотностей распределения флуктуаций.

Вначале остановимся на термине “некогерентная пачка импульсов”.

Передаваемый сигнал всегда можно считать когерентным, так как теоретически возможно запомнить все фазовые соотношения (в том числе даже при наличии случайных составляющих в начальных фа-

зах импульсов) и, затем, при необходимости, использовать их в процессе обработки принятого сигнала.

Разрушение когерентности сигнала происходит в результате его флуктуаций. С расширением спектра флуктуаций одновременно происходит ослабление зависимости флуктуаций, как амплитуд принимаемых импульсов, так и их фаз, и поэтому при строгом подходе можно называть пачку импульсов некогерентной, если амплитуды импульсов флуктуируют независимо.

В связи со сказанным следует иметь в виду, что когда говорят о некогерентной пачке импульсов, то при этом одновременно подразумевают и определённый способ приёма пачки, включающий в себя схему некогерентного накопления результатов обработки каждого импульса [16, 84].

Если же все фазовые соотношения внутри принимаемой пачки импульсов известны (за исключением, может быть, начальной фазы) и используются при обработке, то такую пачку можно рассматривать как один импульс со своеобразной амплитудной огибающей.

Перейдём теперь к основным вопросам данного параграфа и начнём с характеристик обнаружения при некогерентном накоплении после квадратичного детектора.

Если сигнал нефлуктуирующий, то отношения сигнал/шум для каждого импульса q_ν не являются случайными величинами. Поэтому результаты обработки импульсов R_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) взаимно независимы и выходная величина R является суммой независимых случайных величин.

Пусть $F(p)$ — изображение по Лапласу распределения вероятностей накопленной суммы, $F_\nu(p)$ — изображения распределений слагаемых. Учитывая, что

$$F_\nu(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pR_\nu}[\mathrm{e}^{-R_\nu - q_\nu} I_0(2\sqrt{R_\nu q_\nu})]dR_\nu = \frac{1}{1+p}\exp\left\{-\frac{p\,q_\nu}{1+p}\right\},$$

получаем

$$F(p) = \prod_{\nu=1}^{N} F_\nu(p) = \frac{1}{(1+p)^N}\exp\left\{-\frac{p\,q_\text{п}}{1+p}\right\},$$

где q_ν — отношение сигнал/шум для ν-го импульса, $q_\text{п} = q_1 + q_2 + \ldots + q_N$. Из формулы для $F(p)$ и результатов § 1.7 теперь следует, что вероятность обнаружения нефлуктуирующего сигнала равна $J_N(\lambda, q_\text{п})$, где λ – величина порога.

Обратим внимание, что вероятность обнаружения не зависит в явном виде от частных значений отношения сигнал/шум q_ν. Перераспределение энергии между импульсами при фиксированном суммарном отношении сигнал/шум $q_\text{п}$ не влияет на величину вероятности.

Величину $q_{\text{п}}$ будем называть отношением сигнал/шум для пачки импульсов.

При дружных (полностью коррелированных) флуктуациях импульсов случайные величины q_{v} изменяются пропорционально. Если флуктуации сигнала не являются рэлеевскими, то во многих случаях наиболее рациональным методом нахождения вероятности обнаружения является применение численного интегрирования в выражении

$$D = \int_0^\infty J_N(\lambda, q_{\text{п}})\, w_{\text{п}}(q_{\text{п}})\, dq_{\text{п}}\,, \qquad (4.4.1)$$

где $w_{\text{п}}(q_{\text{п}})$ — плотность распределения вероятностей отношения сигнал/шум для пачки импульсов.

При независимых флуктуациях амплитуд импульсов универсальным способом вычисления вероятности обнаружения является применение ряда Эджворта. Этот способ пригоден и для нерэлеевских флуктуаций, а также в случае, когда импульсы различаются между собой по энергетическим характеристикам (например, для пачки с произвольной огибающей).

По заданной плотности распределения отношения сигнал/шум для импульса можно найти моменты этого распределения. Затем, по формулам из § 3.6 находятся моменты результатов обработки импульса. По найденным моментам находятся семиинварианты. Просуммировав соответствующие семиинварианты по всем импульсам, получим семиинварианты результата обработки некогерентной независимо флуктуирующей пачки. И, наконец, вычислением интеграла от ряда Эджворта, находим вероятность обнаружения сигнала.

Если огибающая пачки прямоугольная, т. е. все импульсы имеют одинаковые энергетические характеристики, то при взаимно независимых рэлеевских флуктуациях амплитуд вероятность обнаружения пачки будет равна

$$D = \int_h^\infty \frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\mathrm{e}^{-t}\,dt \;=\; \mathrm{e}^{-h}\sum_{\nu=0}^{N-1}\frac{h^\nu}{\nu!}\,,$$

где $h = \lambda/(1+\rho)$, ρ — среднее значение отношения сигнал/шум для импульса.

Если заданы вероятности ложной тревоги F и правильного обнаружения D, то требуемое среднее значение отношения сигнал/шум для импульса при обнаружении рэлеевской независимо флуктуирующей пачки (с прямоугольной огибающей) можно определить по формуле $\rho = (\lambda/h) - 1$, где

$$h = N + \sqrt{N}\,Q_1(y) + Q_2(y) + \frac{Q_3(y)}{\sqrt{N}} + \frac{Q_4(y)}{N} + \frac{Q_5(y)}{N\sqrt{N}} + \cdots\,,$$

$Q_v(\cdot)$ — полиномы Кемпбелла (см. § 1.6), а y определяется из уравнения

$$D = \int_y^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt .$$

Мы рассмотрели два крайних случая флуктуаций амплитуды при обнаружении пачки импульсов. Первый случай (медленные или дружные флуктуации) имеет место, когда время корреляции флуктуаций значительно превышает длительность всей пачки. Второй случай встречается, когда время корреляции меньше периода повторения импульсов. Разумеется, возможны и промежуточные случаи.

Если соблюдаются условия, при которых должны быть медленные или промежуточные флуктуации, то эффективность обнаружения сигнала может быть повышена путём применения нескольких несущих частот (утверждение справедливо, если сигнал не является очень слабым). Амплитуды импульсов, соответствующих разным несущим, будут флуктуировать независимо друг относительно друга. Все импульсы пачки будут "блочно-коррелированными".

Пачку из N импульсов можно представить состоящей из m блоков, каждый блок состоит из n импульсов ($N = m \cdot n$). Будем полагать, что блок является дружно флуктуирующей пачкой, а амплитуды разных блоков взаимно независимы между собой. Частными случаями блочно-коррелированных флуктуаций являются дружные ($m = 1$) и независимые ($n = 1$) флуктуации.

Как показано в [134], применение нескольких несущих целесообразно даже в условиях "частичной" когерентности.

Частичная когерентность может появиться, когда при передаче используется когерентная пачка, но из-за флуктуаций когерентность принимаемого сигнала нарушается. Соседние импульсы пачки при этом когерентны и имеют одинаковые амплитуды, удалённые — независимы и по фазе и по амплитуде.

Оптимальная обработка частично когерентного сигнала должна быть настроена на спектр флуктуаций сигнала [20] или, по крайней мере, должна учитывать скорость флуктуаций. Необходимые для построения оптимальной обработки данные, как правило, бывают неизвестными. Применение нескольких несущих с последующей некогерентной обработкой пачки приводит к некоторым энергетическим потерям по отношению к оптимальной обработке частично когерентного сигнала (не более 1 дБ), но зато позволяет обойти ряд трудностей.

Рассмотрим методы расчёта характеристик обнаружения блочно-коррелированной некогерентной пачки импульсов. Во избежание загромождения изложения ограничимся случаем, когда отношения сигнал/шум для всех блоков имеют одинаковые распределения.

Изображение плотности распределения выходной величины при обнаружении блочно-коррелированной пачки определяется соотношением

$$F(p)=\left[\frac{1}{(1+p)^n}\,f\left(\frac{p}{1+p}\right)\right]^m, \qquad (4.4.2)$$

где $f(\cdot)$ — изображение плотности распределения отношения сигнал/шум для блока импульсов [ср. с формулой (3.6.2)].

Формула (2) служит основой для расчёта вероятности обнаружения блочно-коррелированного сигнала.

Обозначим: m_ν и k_ν — моменты и семиинварианты отношения сигнал/шум для блока импульсов; M_ν и K_ν — моменты и семиинварианты случайной величины, являющейся результатом обработки блока импульсов; κ_ν — семиинварианты выходной величины. Моменты m_ν и M_ν связаны между собой соотношениями

$$M_1 = m_1 + n,$$

$$M_2 = m_2 + 2(n+1)m_1 + n(n+1),$$

$$M_3 = m_3 + 3(n+2)m_2 + 3(n+1)(n+2)m_1 + n(n+1)(n+2),$$

. . . . .

$$M_\nu = \nu!\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{1}{\mu!}m_\mu\,C_{n-1+\nu}^{n-1+\mu}.$$

По известным моментам M_ν можно найти семиинварианты K_ν. Далее находятся необходимые для ряда Эджворта семиинварианты выходной величины: $\kappa_\nu = mK_\nu$.

Если найдены семиинварианты k_ν, то вместо приведенных формул можно воспользоваться следующими:

$$\kappa_1 = m(k_1 + n),$$

$$\kappa_2 = m(k_2 + 2k_1 + n),$$

$$\kappa_3 = m(k_3 + 6k_2 + 6k_1 + 2n),$$

. . . . .

$$\kappa_\nu = m\left\{n(\nu-1)! + \nu!\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{\mu!}k_\mu C_{\nu-1}^{\mu-1}\right\}.$$

Ряд Эджворта должен давать удовлетворительную точность при $m > 2$. Можно его использовать и при $m = 2$. При необходимости для контроля точности ряда при $m = 2$ можно воспользоваться формулой (1) или применить численное интегрирование в выражении:

$$D = \int_0^\infty \int_0^\infty J_N(\lambda, q_1 + q_2) w_б(q_1) w_б(q_2) dq_1 dq_2,$$

где $w_б(\cdot)$ — плотность распределения отношения сигнал/шум для блока импульсов.

Если флуктуации рэлеевские, то из (2) следует

$$F(p) = \frac{1}{(1+p)^{N-m}\left[1 + p(1+\vartheta)\right]^m}, \qquad (4.4.3)$$

причём $\kappa_\nu = (\nu - 1)!\, m[n - 1 + (1+\vartheta)^\nu]$. Здесь ϑ — среднее значение отношения сигнал/шум для блока импульсов. Средним значением отношения сигнал/шум для всей пачки является величина $m{\cdot}\vartheta$.

Если огибающая блока прямоугольная, то $\vartheta = n{\cdot}\rho$; ρ — среднее значение отношения сигнал/шум для импульса.

При вычислении вероятности обнаружения сигнала можно пренебречь вычетом изображения (3) в особой точке $p = -1$. Тогда

$$D \approx \left(\frac{1+\vartheta}{\vartheta}\right)^{N-1} \exp\left\{-\frac{\lambda}{1+\vartheta}\right\} \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\beta_\nu}{\nu!} \left(\frac{\lambda\vartheta}{1+\vartheta}\right)^\nu, \qquad (4.4.4)$$

где

$$\beta_\nu = \frac{1}{(1+\vartheta)^{m-1}} \sum_{l=0}^{m-1-\nu} (-1)^l \vartheta^{m-1-\nu-l} C_{N-m-1+l}^l .$$

Если $m = 1$, то из (4) следует формула для вероятности обнаружения дружно флуктуирующей пачки импульсов при рэлеевских флуктуациях амплитуды

$$D \approx \left(\frac{1+\vartheta}{\vartheta}\right)^{N-1} \exp\left\{-\frac{\lambda}{1+\vartheta}\right\}.$$

При $m = 2$ из (4) получаем

$$D \approx \left(\frac{1+\vartheta}{\vartheta}\right)^{N-1} \left(1 + \frac{\lambda\vartheta/(1+\vartheta) - (N-1)}{1+\vartheta}\right) \exp\left\{-\frac{\lambda}{1+\vartheta}\right\}.$$

Приемлемые аналитические выражения для расчёта характеристик обнаружения можно получить, если флуктуации отношения сигнал/шум для блока импульсов $q_б$ подчиняются гамма-распределению

$$w_б(q_б) = \left(\frac{\alpha}{\vartheta}\right)^\alpha \frac{q_б^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp\left\{-\frac{\alpha q_б}{\vartheta}\right\},$$

где α — параметр распределения ($\alpha > 0$), $\vartheta = \overline{q_б}$. Изображение плотности распределения результата некогерентной обработки блочно-коррелированной пачки импульсов будет иметь вид:

$$F(p) = \frac{1}{(1+p)^{N-\beta}[1+p(1+\theta)]^{\beta}}, \qquad (4.4.5)$$

где $\beta = m \cdot \alpha$, $\theta = \vartheta/\alpha$.

В общем случае, когда параметр β не является целым числом, теория вычетов для обращения изображения (5) неприменима. Покажем, как в этом случае из (5) можно получить асимптотическое разложение плотности распределения.

Изображение имеет две особые точки, которые при нецелых β являются точками ветвления. Оригинал можно представить в виде суммы двух асимптотических рядов, каждый из которых соответствует "своей" особой точке. Слагаемое, соответствующее удалённой от мнимой оси особой точке, можно отбросить (по тем же причинам, как и в случае применения теории вычетов).

Для нахождения асимптотического ряда, дающего основной вклад в аппроксимацию оригинала, изображение необходимо разложить в ряд в окрестности той особой точки p_1, которая имеет наибольшую действительную часть:

$$F(p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (p - p_1)^{\nu-\beta}. \qquad (4.4.6)$$

Теперь, используя приведенные в [26, 33] соотношения, получаем для оригинала

$$W(R) \approx \mathrm{e}^{p_1 R} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\Gamma(\beta-\nu)} R^{\beta-\nu-1}. \qquad (4.4.7)$$

Если β — целое, то $1/\Gamma(\beta - \nu) = 0$ при $\nu \geq \beta$ и ряд в (7) состоит из конечного числа членов, а само выражение (7) совпадает с результатом применения к (5) теории вычетов.

Заметим, что если формулу

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pR} \frac{R^{\beta-\nu-1}}{\Gamma(\beta-\nu)} \mathrm{e}^{p_1 R} dR = (p - p_1)^{\beta-\nu},$$

справедливую при $\nu < \beta$, формально использовать при любых ν, то, осуществляя с её помощью преобразование Лапласа от правой части (7), получим изображение (6).

Конкретизируя формулу (7) применительно к изображению (5), получаем

$$W(R) \approx \left(\frac{1+\theta}{\theta}\right)^{N-\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\theta}\right)^{\nu} \frac{\Gamma(N-\beta+\nu)}{\nu!\,\Gamma(N-\beta)} W_{\nu}(R),$$

где

$$W_{\nu}(R) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\nu)} \frac{R^{\beta-\nu-1}}{(1+\theta)^{\beta-\nu}} \exp\left\{-\frac{R}{1+\theta}\right\}.$$

Выражение для вероятности обнаружения пачки импульсов теперь можно записать в виде

$$D \approx \left(\frac{1+\theta}{\theta}\right)^{N-\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\theta}\right)^{\nu} \frac{\Gamma(N-\beta+\nu)}{\nu!\,\Gamma(N-\beta)} J_{\nu}, \qquad (4.4.8)$$

где

$$J_0 = \int_u^{\infty} \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-t}\, dt = 1 - e^{-u} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{u^{\beta+\mu}}{\Gamma(\beta+\mu+1)}, \qquad u = \frac{\lambda}{1+\theta},$$

$$J_{\nu} = J_{\nu-1} - \frac{u^{\beta-\nu}}{\Gamma(\beta-\nu+1)} e^{-u}, \qquad \nu > 0.$$

Если β — целое, то из (8) получается выражение, эквивалентное формуле (4).

Точное выражение для плотности, соответствующей изображению (5), имеет вид:

$$W(R) = \frac{1}{(1+\theta)^{\beta}} \frac{R^{N-1}}{(N-1)!} e^{-R}\, {}_1F_1\left(\beta;\, N;\, \frac{\theta}{1+\theta} R\right).$$

Из этого выражения можно получить формулу для вероятности обнаружения

$$D = 1 - \frac{1}{(1+\theta)^{\beta}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{a_{\nu}}{(1+\theta)^{\nu}}, \qquad (4.4.9)$$

где

$$a_{\nu} = \frac{\Gamma(\beta+\nu)}{\nu!\,\Gamma(\beta)} \frac{\lambda^{N+\nu}}{(N+\nu)!} e^{-\lambda}\, {}_1F_1(\beta+\nu+1;\, N+\nu+1;\, \lambda),$$

причём, при $\nu > 0$

$$a_{\nu+1} = \frac{(\beta+\nu)}{(\beta+\nu+1)(\nu+1)} \left\{(\lambda - N - \nu)\, a_{\nu} + \lambda\left(\frac{\beta-1}{\nu}+1\right) a_{\nu-1}\right\}.$$

Ряд (9) целесообразно использовать при $\beta < N$.

При больших λ коэффициенты a_ν можно аппроксимировать конечной суммой гипергеометрического, вообще говоря, расходящегося ряда:

$$a_\nu \sim \frac{\lambda^{\beta+\nu}}{(\beta+\nu)\Gamma(\beta)\nu!}\ {}_2F_0(N-\beta,-\beta-\nu;1/\lambda)\,. \qquad (4.4.10)$$

При целых β ряд в правой части (10) обрывается и состоит из $\beta + n + 1$ членов.

Остановимся теперь коротко на характеристиках обнаружения при некогерентном накоплении после линейного детектора.

Характеристики обнаружения для нефлуктуирующей или независимо флуктуирующей пачки импульсов можно вычислить с помощью рядов Эджворта или Грама — Шарлье. При этом представляет интерес сравнение получаемых характеристик с соответствующими характеристиками для квадратичного детектора.

Можно показать, что при $N >> 1$ и при заданных вероятностях ложной тревоги и правильного обнаружения в случае применения линейного детектора требуется отношение сигнал/шум в $2\sqrt{4/\pi - 1}$ раз (0,19 дБ) больше по сравнению с квадратичным детектором. Это соотношение справедливо как для нефлуктуирующей пачки, так и для флуктуирующей независимо (по любому закону).

Исчерпывающее сравнение характеристик для этих двух детекторов при обнаружении нефлуктуирующего сигнала проведено Маркумом [46]. Результаты сравнения состоят в следующем. При $N = 1$ оба детектора дают одинаковые характеристики. При увеличении N для линейного детектора наблюдаются лучшие характеристики, причём наибольшее различие (0,11 дБ) проявляется при $N = 10$. При $N = 70$ энергетические характеристики снова одинаковы, а при дальнейшем увеличении N квадратичный детектор лучше, чем линейный, но и здесь различие незначительно (не более 0,19 дБ).

Выводам Маркума не противоречат результаты других работ, в частности [53].

Если некогерентная пачка флуктуирует дружно, то описанные выше различия будут в некотором смысле усредняться. Значит и при дружно флуктуирующем сигнале можно говорить о том, что линейный и квадратичный детекторы приводят практически к одинаковым результатам.

Для рэлеевской независимо флуктуирующей пачки при любых $N > 1$ квадратичный детектор эффективнее, но и в этом случае отличия незначительные.

Из сказанного можно сделать важный практический вывод. В реальных устройствах использование линейного детектора предпочтительнее из-за меньшего динамического диапазона накапливаемых результатов обработки. Вместе с тем, непосредственная оценка характеристик обнаружения при линейном детектировании представляет собой более трудную задачу, чем при квадратичном. Несуще-

ственные различия в характеристиках обнаружения для рассмотренных двух типов детекторов обосновывает правомерность косвенной оценки, в процессе которой вместо реального линейного детектора рассматривается квадратичный детектор. Полученные результаты затем распространяются на реальный приёмник обнаружения сигналов. Такой технический приём существенно упрощает оценку характеристик обнаружения.

Следует оговориться, что этот вывод полностью справедлив для нефлуктуирующего и дружно флуктуирующего сигналов. Что касается независимо флуктуирующего сигнала, то, судя по результатам работы [65], могут существовать такие законы распределения флуктуаций, что различия в характеристиках обнаружения для линейного и квадратичного детекторов при небольших значениях N всё же необходимо учитывать.

В заключение параграфа приведём некоторые библиографические сведения.

Характеристики обнаружения некогерентного нефлуктуирующего сигнала, соответствующие накоплению после линейного детектора, приведены в виде графиков в [132, 67]. В работах [11, 12, 64, 29, 43, 44] содержатся результаты оценок характеристик обнаружения некогерентного сигнала с нерэлеевскими флуктуациями.

В [23] проведен анализ характеристик обнаружения многочастотного рэлеевского сигнала с любым количеством дружно флуктуирующих импульсов для каждой частоты.

В [113] рассмотрены характеристики обнаружения при накоплении сигнала после детектора с помощью цифровых сумматоров. Там же в списке литературы упомянуты работы, в которых исследованы характеристики обнаружения сигнала при бинарном накоплении.

4.5. Характеристики обнаружения некогерентной пачки импульсов при частично зависимых рэлеевских флуктуациях

В данном параграфе теоретические соотношения относятся к процедуре обнаружения сигнала, использующей квадратичный детектор.

Основополагающие исходные соотношения для расчёта характеристик обнаружения некогерентного сигнала применительно к определённым законам флуктуаций получены в работе Сверлинга [139]. Там было найдено изображение по Лапласу плотности вероятностей выходной величины для случая, когда амплитуды импульсов можно представить как модуль вектора с независимыми гауссовскими компонентами, имеющими нулевые средние значения.

Применительно к рэлеевским флуктуациям амплитуды, когда число компонент вектора равно 2, отношения сигнал/шум для импульсов пачки представляются в виде $q_\nu = \rho(\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2)/2$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Здесь ρ — среднее значение отношения сигнал/шум для одного импульса, ξ_ν и η_ν — компоненты двумерного вектора, N — число некогерентно накапливаемых импульсов. Статистические характери-

стики флуктуаций импульсов задаются моментами гауссовских компонент: $\overline{\xi_\nu} = \overline{\eta_\nu} = 0$; $\overline{\xi_\nu \eta_\mu} = 0$; $\overline{\xi_\nu \xi_\mu} = \overline{\eta_\nu \eta_\mu} = r_{|\nu-\mu|}$; $r_0 = 1$; r_1, r_2, … , r_{N-1} — коэффициенты корреляции; $\nu, \mu = 1, 2, \dots, N$.

Изображение плотности распределения результата обработки флуктуирующей пачки получается путём усреднения соответствующего изображения для нефлуктуирующей пачки по всем случайным переменным ξ_ν и η_ν. Оно имеет вид: $F(p) = 1/\det[\mathbf{E} + p(\mathbf{E} + \rho\mathbf{A})]$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, а $\mathbf{A} = \left\| a_{\nu\mu} \right\|$ — тёплицева матрица, составленная из элементов $a_{\nu\mu} = r_{|\nu-\mu|}$. Учитывая, что определитель матрицы равен произведению её собственных значений, получаем

$$F(p) = \prod_{\mu=1}^{N} \frac{1}{1 + p(1 + \rho\alpha_\mu)}. \qquad (4.5.1)$$

Здесь $1 + p(1 + \rho\alpha_\mu)$ — собственные значения матрицы $\mathbf{E} + p(\mathbf{E} + \rho\mathbf{A})$, а α_μ — собственные значения матрицы $\mathbf{A}$.

Семиинварианты выходной случайной величины равны

$$\kappa_\nu = (\nu-1)! \sum_{\mu=1}^{N} (1 + \rho\alpha_\mu)^\nu = (\nu-1)! \sum_{k=0}^{\nu} C_\nu^k \rho^k T_k ,$$

где

$$T_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \cdots + \alpha_N^k , \qquad (4.5.2)$$

причём T_k является также следом матрицы $\mathbf{A}^k$.

Если пачка импульсов является частично коррелированной, то все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ однократны, причём $N > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_N > 0$. Для независимо флуктуирующей пачки $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 1$, для дружно флуктуирующей $\alpha_1 = N$ и $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_N = 0$.

Приведенные соотношения получили применение для расчёта характеристик при экспоненциальной функции корреляции гауссовских компонент $K(\tau) = \exp(-|\tau|/\Delta)$, где Δ — время корреляции. В этом случае $r_\nu = \gamma^\nu$, где $\gamma = K(T/N) = \exp\{-T/(N\Delta)\}$, T/N — период следования импульсов пачки, T — время наблюдения (длительность по времени всей пачки импульсов). Следовательно, корреляционная матрица имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & \gamma & \gamma^2 & \cdots & \gamma^{N-1} \\ \gamma & 1 & \gamma & \cdots & \gamma^{N-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma^{N-1} & \gamma^{N-2} & \gamma^{N-3} & \cdots & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (4.5.3)$$

Как показано в [138], для матрицы (3) нахождение собственных значений существенно упрощается. Собственные значения этой матрицы выражаются через решения семейства трансцендентных тригонометрических уравнений.

Отмеченное обстоятельство было использовано для расчёта характеристик обнаружения [68, 2, 66, 121]. В [2] использовался ряд Эджворта, а в [68, 66, 121] производилось обращение изображения (1).

Теперь обратим внимание на то, что следы T_k степеней матрицы $\mathbf{A}$ можно получить прямыми методами. Это даёт возможность применения ряда Эджворта, минуя стадию вычисления собственных значений.

Следы T_k первых m степеней матрицы $\left\|a_{\nu\mu}\right\|$ размера $N\times N$ можно найти из формул Ньютона

$$\begin{aligned}
&T_1 + c_1 = 0,\\
&T_2 + c_1T_1 + 2c_2 = 0,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&T_m + c_1T_{m-1} + \ldots + c_{m-1}T_1 + mc_m = 0 \qquad (m \le N),
\end{aligned}$$

где c_k — коэффициенты характеристического уравнения матрицы $\left\|a_{\nu\mu}\right\|$, связанные с её элементами выражениями

$$c_1 = (-1)\sum_{\nu=1}^{N} a_{\nu\nu}, \qquad c_2 = (-1)^2 \sum_{\nu<\mu} \begin{vmatrix} a_{\nu\nu} & a_{\nu\mu} \\ a_{\mu\nu} & a_{\mu\mu} \end{vmatrix},$$

$$c_3 = (-1)^3 \sum_{\nu<\mu<\varepsilon} \begin{vmatrix} a_{\nu\nu} & a_{\nu\mu} & a_{\nu\varepsilon} \\ a_{\mu\nu} & a_{\mu\mu} & a_{\mu\varepsilon} \\ a_{\varepsilon\nu} & a_{\varepsilon\mu} & a_{\varepsilon\varepsilon} \end{vmatrix} \qquad \text{и т. д.}$$

Кроме того, для нахождения следов можно непосредственно вычислять матрицы $\mathbf{A}^k$.

В некоторых случаях удаётся получить аналитические выражения для следов. В частности, можно получить несложные аналитические выражения для следов, соответствующие уже упомянутой экспоненциальной функции корреляции.

Ещё одним приближённым методом определения вероятности обнаружения при произвольной функции корреляции является излагаемый ниже метод пересчёта. Он позволяет по имеющимся в распоряжении графикам с характеристиками обнаружения при экспоненциальной функции корреляции находить вероятности обнаружения при каких-либо других функциях корреляции.

Если пачка импульсов не является независимо флуктуирующей или слабо коррелированной, то собственные значения корреляцион-

ной матрицы обладают следующим свойством: наибольшее собственное значение α_1 однократно и значительно больше остальных. Поэтому из (2) следует $T_k/T_{k-1} \approx \alpha_1$. Учитывая также равенство $T_1 = N$, можно сделать вывод, что две разные корреляционные матрицы, имеющие одинаковые значения T_2, будут иметь примерно одинаковые значения следов с более высокими номерами. Тогда при одинаковых отношениях сигнал/шум будут примерно совпадать и вероятности обнаружения. Как показывают оценки, совпадение вероятностей обнаружения в таких случаях удовлетворительное.

Совпадение значений T_2 достигается соответствующим подбором времени корреляции флуктуаций сигнала для вспомогательной модели с известными характеристиками обнаружения. Приравнивая следы T_2, соответствующие различным функциям корреляции, мы получим уравнение для времён корреляции, в которых N является параметром. Однако, если в выражении

$$T_2 = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{N} r^2_{|\nu-\mu|} = N + 2\sum_{\nu=1}^{N-1} (N-\nu)\, r_\nu^2$$

сумму заменить интегралом

$$T_2 \approx \frac{2N^2}{T^2} \int_0^T (T-\tau) K^2(\tau)\, d\tau\,, \qquad (4.5.4)$$

то параметрическая зависимость от N исчезает, поэтому решения точных уравнений практически не зависят от N.

С использованием формулы (4) получены зависимости, представленные на рис. 4.1. Кривая *1* даёт полученную из условия совпадения следов T_2 зависимость времени корреляции флуктуаций сигнала с экспоненциальной функцией корреляции от времени корреляции флуктуаций для сигнала с гауссовой функцией корреляции $K(\tau) = \exp\{-\pi\tau^2/(4\Delta^2)\}$. Кривая *2* даёт зависимость той же величины от времени корреляции флуктуаций сигнала с функцией корреляции $K(\tau) = (1 + 2|\tau|/\Delta)\exp(-2|\tau|/\Delta)$.

Покажем на примерах, как можно пользоваться изложенным методом.

Предположим, что необходимо найти вероятность обнаружения сигнала с функцией корреляции флуктуаций $(1 + 2|\tau|/\Delta)\exp(-2|\tau|/\Delta)$ при $N = 64$, $F = 10^{-4}$, $\rho = 2$, если время корреляции флуктуаций в 40 раз больше периода повторения импульсов. Отношение времени корреляции флуктуаций к времени наблюдения равно $\Delta/T = 40/64 = 0{,}625$. По кривой 2 находим, что такой же вероятностью обнаружения обладает сигнал с экспоненциальной функцией корреляции при $(\Delta/T)_{\text{эксп}} = 1$. По характеристикам обнаружения из [2] эта вероятность равна 0,88.

Рассмотрим ещё один пример, который иллюстрирует влияние вида корреляционной функции на характеристики обнаружения.

Пусть $N = 128$; $D = 0{,}9$. Найдём отношение порогового значения энергии для сигнала с гауссовой функцией корреляции при $\Delta/T = 0{,}5$ к пороговому значению энергии для сигнала с экспоненциальной функцией корреляции при $(\Delta/T)_{эксп} = 0{,}5$. По кривой *1* находим, что искомое отношение равно отношению пороговых энергий для сигналов с экспоненциальной функцией корреляции при $(\Delta/T)_{эксп} = 0{,}92$ и $(\Delta/T)_{эксп} = 0{,}5$, а по характеристикам обнаружения это отношение равно 1,4 (1,5 дБ).

Заметим, что с ростом вероятности обнаружения подобные расхождения будут увеличиваться.

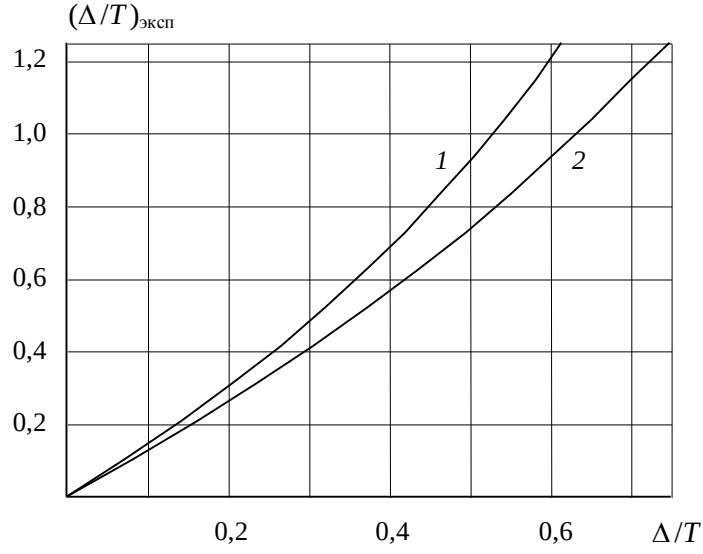


Рис. 4.1. Вспомогательные кривые для пересчёта характеристик обнаружения

Изложенные методы расчёта характеристик обладают одним общим недостатком. Все они являются неэффективными, когда время корреляции существенно превышает время наблюдения. Ряд Эджворта в этом случае неприменим из-за плохой сходимости. Использование изображения (1) для обращения затруднено из-за того, что $(N - 1)$ собственных значений матрицы **A** примерно одинаковы (в пределе, когда пачка является дружно флуктуирующей, эти значения совпадают и равны нулю), что влечёт за собой близкое расположение на комплексной плоскости полюсов изображения и, следовательно, возрастает влияние вычислительных погрешностей.

В связи с этим, изложенные методы не позволяют ответить на вопрос о том, при каких временах корреляции пачку можно считать дружно флуктуирующей. Решить эту задачу позволяет ещё один метод, основанный на методе моментов.

Изображение (1) аппроксимируется выражением

$$F(p)=\frac{1}{(1+p)^{N-m}}\prod_{\mu=1}^{m}\frac{1}{1+p(1+\rho\beta_{\mu})},\qquad m\le N, \tag{4.5.5}$$

Это значит, что $N-m$ собственных значений матрицы **A** заменяются нулём. Параметры $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ в (5) выбираются такими, чтобы первые моменты (или семиинварианты), соответствующие изображению (5), совпадали с истинными моментами (семиинвариантами). Эти параметры находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m&=T_1\\ \beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_m^2&=T_2\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot&\\ \beta_1^m+\beta_2^m+\cdots+\beta_m^m&=T_m\end{aligned}\right\}. \tag{4.5.6}$$

При обращении (5) вычет в особой точке $p=-1$ не учитывается.

Параметр m в формуле (5) выбирается исходя из необходимой точности. С увеличением m точность аппроксимации вероятности обнаружения возрастает. В пределе, когда $m=N$, формула (5) будет совпадать с точным выражением (1). Однако с увеличением m возрастают и вычислительные затруднения, присущие в полной мере точному методу обращения изображения (1).

Решения системы уравнений (6) совпадают с корнями полинома $\beta^m+c_1\beta^{m-1}+\ldots+c_m$, где $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — первые коэффициенты характеристического уравнения матрицы **A**, связанные с $T_1, T_2, \ldots, T_m$ формулами Ньютона.

Выбор значения m можно считать правильным, если решение β_1 близко к N, а β_m в несколько раз меньше 1 (имеется в виду, что $m>1$ и $\beta_1>\beta_2>\ldots>\beta_m$).

При $m=1$ выражение (5) точно соответствует дружно флуктуирующему сигналу.

При $m=2$ или 3 формулу (5) можно применять в случаях, когда время корреляции превышает время наблюдения, по крайней мере, на порядок. Даже при таких соотношениях между временами пачку импульсов не всегда можно считать флуктуирующей дружно.

4.6. Характеристики обнаружения неразрешаемой группы сигналов

Если на входе приёмника действует аддитивная смесь из нескольких импульсных сигналов и нормального белого шума, то на основании результатов § 3.3 выходы квадратурных каналов приёмника можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} X &= \sigma\left(x + \sum_{\nu=1}^{L} \sqrt{2q_\nu}\,\cos\theta_\nu \right), \\ Y &= \sigma\left(y + \sum_{\nu=1}^{L} \sqrt{2q_\nu}\,\sin\theta_\nu \right). \end{aligned}\right\} \qquad (4.6.1)$$

Здесь σ — среднеквадратичное отклонение шумовых составляющих; x и y — независимые нормальные случайные величины (0, 1); L — число сигналов; q_ν — произведение отношения сигнал/шум ν-го принимаемого сигнала на соответствующий квадрат модуля автокорреляционной (или взаимно корреляционной) функции; θ_ν — фазовый параметр ν-ой составляющей, зависящий от начальной фазы соответствующего входного сигнала.

Начальные фазы входных сигналов полагаются далее взаимно независимыми и распределёнными равномерно от 0 до 2π. Отсюда следует, что и случайные величины θ_ν также независимы и каждая распределена равномерно.

Задача состоит в том, чтобы, используя формулы (1), найти распределение выходной величины $R = (X^2 + Y^2)/(2\sigma^2)$. Тогда, интегрируя это распределение, можно было бы получить характеристики обнаружения смеси сигналов.

Вначале будем полагать, что отношения сигнал/шум не флуктуируют. Распределение выходной величины при нефлуктуирующих сигналах в общем случае аналитическим путём вычислить не удаётся. Лишь в простейшем случае, при $L = 2$ можно найти изображение распределения

$$F(p/q_1, q_2) = \frac{1}{1+p}\exp\left\{-\frac{p(q_1+q_2)}{1+p}\right\} I_0\left(\frac{2p}{1+p}\sqrt{q_1 q_2}\right) \qquad (4.6.2)$$

и при большом числе сигналов L приближённое выражение для распределения $W(R) \approx (1/m_1)\exp(-R/m_1)$, где m_1 — среднее значение случайной величины R. Приближённое выражение тем точнее, чем больше L, но, вообще говоря, если q_ν равны между собой, то этим выражением можно пользоваться уже при $L = 4$.

Оказалось также возможным вычислить первые моменты выходной величины (путём усреднения степеней R по случайным переменным θ_ν) при произвольном L. Вот выражения для этих моментов:

$$m_1 = 1 + \alpha_1, \qquad m_2 = 2(1+\alpha_1)^2 - \alpha_2,$$
$$m_3 = 6(1+\alpha_1)^3 - 9(1+\alpha_1)\alpha_2 + 4\alpha_3,$$
$$m_4 = 24(1+\alpha_1)^4 - 72(1+\alpha_1)^2\alpha_2 + 64(1+\alpha_1)\alpha_3 + 18\alpha_2^2 - 33\alpha_4,$$

где $\alpha_k = q_1^k + q_2^k + \cdots + q_L^k$.

Если амплитуды сигналов распределены по рэлеевскому закону, то случайные величины X и Y будут независимыми и распределёнными по нормальному закону. Тогда выходная случайная величина будет распределена по экспоненциальному закону

$$W(R) = \frac{1}{1+\rho}\exp\left\{-\frac{R}{1+\rho}\right\}, \qquad (4.6.3)$$

где $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_L$, причём $\rho_\nu = \overline{q_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, L$.

Таким образом, вероятность обнаружения суммы сигналов с рэлеевскими флуктуациями амплитуд определяется по формуле для вероятности обнаружения одного сигнала, если в эту формулу вместо среднего значения отношения сигнал/шум подставить сумму средних значений отношений сигнал/шум, образованную с весами, равными квадратам модулей автокорреляционной функции.

Если амплитуды сигналов флуктуируют не по рэлеевскому закону, то формула (3) будет выполняться приближённо, при этом тем точнее, чем больше число сигналов L. Однако нужно заметить, что для некоторых законов флуктуаций формулой (3) можно пользоваться лишь при очень больших значениях L.

Перейдём теперь к рассмотрению характеристик обнаружения аддитивной смеси некогерентных пачек импульсов. При этом будем считать, что случайные изменения начальных фаз импульсов независимы также для любых импульсов разных пачек. Каждая пачка имеет прямоугольную огибающую, т. е. амплитуды импульсов или средние значения амплитуд импульсов внутри каждой пачки равны между собой. Число импульсов в каждой пачке обозначим через N. При обработке сигнала используется квадратичный детектор.

Вероятность обнаружения аддитивной смеси некогерентных пачек нефлуктуирующих импульсов можно вычислить с помощью ряда Эджворта. Семиинварианты накопленной суммы находятся по традиционной схеме: $m_\nu \to \kappa_\nu \to N\kappa_\nu$ (формулы для моментов m_ν приведены выше).

Для аддитивной смеси независимо флуктуирующих пачек с рэлеевскими флуктуациями амплитуд можно использовать формульные зависимости, соответствующие одной пачке. При этом следует лишь учесть, что в эти зависимости вместо среднего значения отношения сигнал/шум для импульса нужно подставлять весовую сумму средних значений отношений сигнал/шум. Суммирование ведётся по всем сигналам, а веса равны квадратам модулей автокорреляционной функции.

Наибольший интерес представляет задача обнаружения смеси дружно флуктуирующих пачек. Несмотря на то, что каждая пачка флуктуирует дружно, суммарный сигнал не будет дружно флуктуирующим, так как амплитуда суммы, например, двух синусоид, зависит и от разности начальных фаз, и если эта разность меняется от импульса к импульсу, то и амплитуда суммы будет меняться от импуль-

са к импульсу. Характеристики обнаружения сложного сигнала будут занимать промежуточное положение между характеристиками обнаружения дружно флуктуирующего сигнала и характеристиками обнаружения независимо флуктуирующего сигнала.

Здесь следует обратить внимание на одну особенность рассматриваемой задачи. Каждая из квадратурных составляющих результата обработки импульса с рэлеевской амплитудой, взятая в отдельности от других квадратур, является нормальной случайной величиной. Двумерному нормальному закону подчиняется и совокупность двух квадратурных составляющих результата обработки одного и того же импульса. Однако если взять какие либо две квадратурные составляющие, относящиеся к разным импульсам, то в случае дружных рэлеевских флуктуаций амплитуд оказывается, что совокупность двух таких случайных величин не является гауссовской.

Отмеченное обстоятельство не позволяет использовать при решении поставленной задачи полученные ранее результаты исследования статистических характеристик модуля вектора с гауссовскими компонентами.

Предположим вначале, что амплитуды сигналов не флуктуируют. Пусть $F(p/q_1,\ q_2, \dots, q_L)$ — изображение распределения случайной величины, получаемой после внутрипериодной обработки. Результаты обработки импульсов пачек при нефлуктуирующих амплитудах статистически независимы между собой (так как по предположению все фазы независимы), поэтому изображение распределения накопленной суммы $F_N(\cdots)$ будет иметь вид:

$$F_N(p/q_1, q_2, \dots, q_L) = [F(p/q_1, q_2, \dots, q_L)]^N. \qquad (4.6.4)$$

Если усреднить $F_N(\cdots)$ по флуктуациям амплитуд, то получим изображение $F_N(p)$ распределения накопленной суммы при дружно флуктуирующих амплитудах. Для рэлеевских флуктуаций это усреднение удалось произвести лишь при $L = 2$ и $N = 2$, при этом использовалась формула (2) и было получено выражение

$$F_2(p) = \frac{1}{\sqrt{(1+p)[1+p(1+2\rho_1)][1+p(1+2\rho_2)][1+p(1+2\rho_1+2\rho_2)]}},$$

из которого затем при $\rho_1 = \rho_2 = \rho/2$ была получена формула для вероятности обнаружения в виде ряда по отрицательным степеням отношения сигнал/шум:

$$D = 1 - \frac{A(\lambda/2)}{\rho^{3/2}} + \frac{B(\lambda/2)}{\rho^{5/2}} - \cdots,$$

где

$$A(x)=\frac{4\sqrt{2}}{3}x^2\,\mathrm{e}^{-x}\{I_0(x)+I_1(x)\}-\frac{2\sqrt{2}}{3}x\,\mathrm{e}^{-x}I_1(x),$$

$$B(x)=\frac{4\sqrt{2}}{3}x^2(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\{I_0(x)+I_1(x)\}-\frac{\sqrt{2}}{6}x(4x+1)\,\mathrm{e}^{-x}I_1(x).$$

Для расчёта характеристик обнаружения в общем случае можно применить ряд Эджворта.

Разлагая обе части равенства (4) в ряд, можно выразить моменты M_ν накопленной суммы через моменты слагаемых m_ν, выражения для которых были приведены выше. Затем моменты M_ν необходимо усреднить по флуктуациям амплитуд. Зная моменты случайной величины, находим семиинварианты. В результате были получены следующие выражения для семиинвариантов накопленной суммы при рэлеевских флуктуациях амплитуд:

$$\kappa_1=N(1+\beta_1)=N(1+\rho),$$

$$\kappa_2=N(1+\beta_1)^2+N(N-1)\beta_2,$$

$$\kappa_3=2!\left\{N(1+\beta_1)^3+3N(N-1)\beta_2(1+\beta_1)+N(N-1)(N-2)\beta_3\right\},$$

$$\kappa_4=3!\left\{N(1+\beta_1)^4+6N(N-1)\beta_2(1+\beta_1)^2+N(N-1)(2N-1)\beta_2^2+\right.$$
$$\left.+4N(N-1)(N-2)\beta_3(1+\beta_1)+N(N-1)^2(N-4)\beta_4\right\},$$

$$\kappa_5=4!\left\{N(1+\beta_1)^5+10N(N-1)\beta_2(1+\beta_1)^3+\right.$$
$$+5N(N-1)(2N-1)\beta_2^2(1+\beta_1)++5N^2(N-1)(N-2)\beta_2\beta_3+$$
$$+10N(N-1)(N-2)\beta_3(1+\beta_1)^2+5N(N-1)^2(N-4)\beta_4(1+\beta_1)+$$
$$\left.+N(N-1)(N-2)(N^2-7N+2)\beta_5\right\},$$

где $\beta_k=\rho_1^k+\rho_2^k+\cdots+\rho_L^k$.

На рис. 4.2 представлены в качестве примера характеристики обнаружения смеси дружно флуктуирующих пачек. Полагалось, что все значения ρ_ν равны между собой и равны ρ/L. Большему значению N соответствует расположенный слева пучок кривых. Цифры около кривых соответствуют определённому значению числа пачек. Кривые, помеченные цифрой *1*, соответствуют одной пачке ($L = 1$) и были рассчитаны по формуле вероятности обнаружения дружно флуктуирующего сигнала. Кривые с номерами *2, 3, 4, 5, 6* соответствуют числу пачек 2, 4, 8, 16, 32. Расчёты для этих кривых производились с помощью ряда Эджворта с использованием приведенных выше формул для семиинвариантов. Кривые с номером *7* соответствуют предельному переходу при $L\to\infty$, они рассчитывались по формулам для независимо флуктуирующего сигнала.

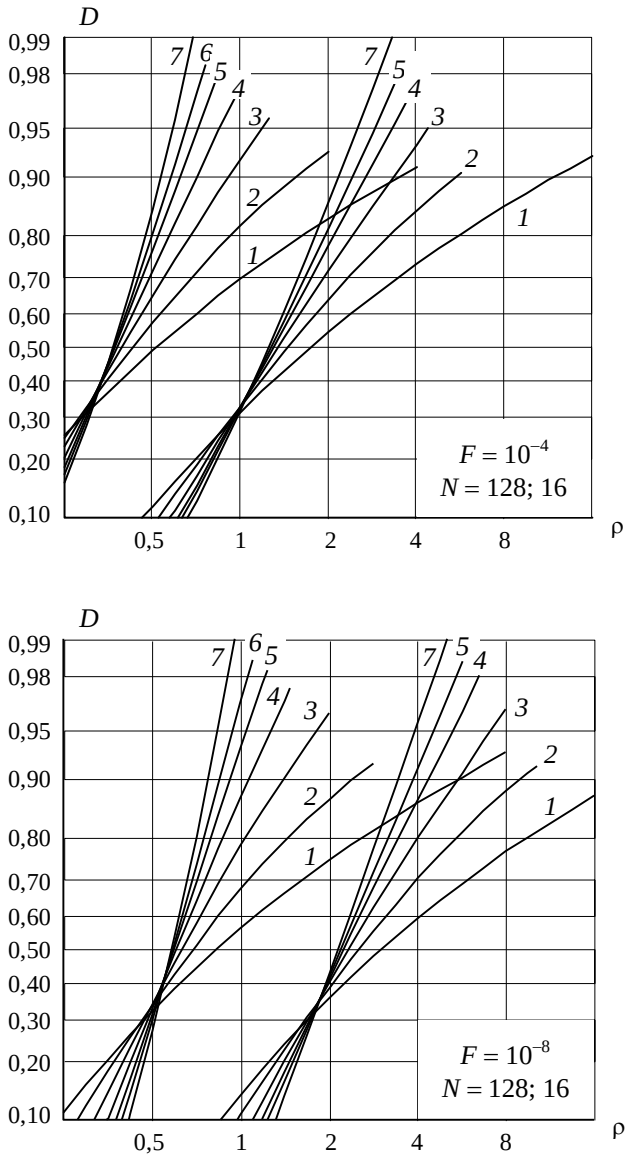


Рис. 4.2. Характеристики обнаружения неразрешаемой группы сигналов

5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ И ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

5.1. Введение

Оптимальные приёмники, осуществляющие обнаружение сигнала, должны принимать решение на основании сравнения с порогом отношения правдоподобия или любой взаимно однозначной функции отношения правдоподобия. Если параметры сигнала неизвестны, то необходимо образовывать отношение правдоподобия как функцию от вероятных значений параметров сигнала, затем отношение правдоподобия необходимо усреднить по априорному распределению параметров; в этом случае решение о наличии сигнала должно приниматься на основании сравнения с порогом усреднённого отношения правдоподобия. Но отношение правдоподобия очень трудно образовать как функцию параметров сигнала. Кроме того, априорное распределение параметров сигнала не всегда известно. Поэтому обнаружение сигнала осуществляется многоканальной системой, в которой каждый канал является приёмником обнаружения, рассчитанным на оптимальную работу при некоторых фиксированных значениях параметров сигнала. Решение о наличии сигнала принимается в том случае, если произойдёт превышение порога в канале с максимальным выходом. Такой способ обнаружения позволяет грубо определить и параметры сигнала: тот канал, в котором выход будет максимальным, соответствует параметрам сигнала.

Можно исключить операцию выявления канала с максимальным выходом и пойти на дальнейшее упрощение. Тогда выходы каналов сравниваются с тем же порогом, решение о наличии сигнала принимается при наличии хотя бы одного превышения; если сигнал обнаружен, то на основании полученной картины превышений и непревышений порога принимается решение о значениях параметров сигнала. К тому же при применении этого способа может решаться задача одновременного обнаружения и разрешения нескольких сигналов [20, стр. 164].

Величина порога для обоих способов одинакова, поэтому с точки зрения характеристик обнаружения эти способы эквивалентны.

Методы расчёта вероятности ложной тревоги в многоканальных системах рассматривались в [95]. В [96] рассматриваются характеристики обнаружения в одном канале многоканальной системы при наибольшей возможной расстройке частоты сигнала относительно резонансной частоты фильтра. В данной главе мы будем рассматривать методы расчёта характеристик обнаружения сигнала с неизвестными параметрами и оценки точности измерения неизвестных параметров. Под неизвестными параметрами подразумеваются задержка τ_0 и частота ω_0 сигнала. Некоторые соотношения, изложенные ранее в

работе [76], здесь уточнены. Обнаружение сигнала производится схемой, в которой выходы всех каналов сравниваются с порогом. Полагаем, что междупериодная обработка заключается в накоплении после квадратичного детектора.

Решения о наличии сигнала и значениях его параметров принимаются на основании картин превышения или непревышения выходными напряжениями порогов в тех или иных каналах. Поэтому в первую очередь возникает задача о вычислении вероятностей появления той или иной картины при наличии сигнала с заданными параметрами. Зная эти вероятности можно оценить вероятность обнаружения сигнала и ошибки измерения параметров обнаруженного сигнала.

5.2. Приближённый метод расчёта вероятностей возникновения различных картин превышений

Рассмотрим вначале систему, состоящую из двух каналов, каждый из которых построен по схеме, рассмотренной в § 3.2. Сохраним обозначения, использованные в §§ 3.2 – 3.4. При этом величины, помеченные ранее индексом 1, будем относить к первому каналу обнаружения, а соответствующие величины для второго канала будем помечать индексом 2. Величины, не имевшие ранее индекса, в необходимых случаях будут также помечаться соответствующим индексом, указывающим на принадлежность к тому или иному каналу. Обозначим ещё

$$D_1 = \int_{\lambda_1}^{\infty} W_1(R_1)\,dR_1\,, \quad D_2 = \int_{\lambda_2}^{\infty} W_2(R_2)\,dR_2\,, \quad P = \int_{\lambda_1}^{\infty}\int_{\lambda_2}^{\infty} W(R_1, R_2)\,dR_1\,dR_2\,.$$

Здесь λ_1 и λ_2 — пороги в первом и втором каналах, $W_1(R_1)$, $W_2(R_2)$ — плотности распределения выходных величин в первом и втором каналах, $W(R_1, R_2)$ — совместное распределение выходных величин.

Вероятности возникновения различных картин для двухканальной системы можно выразить через величины D_1, D_2, P, а именно: P — вероятность превышения порога в обоих каналах, $(D_1 - P)$ — вероятность превышения порога только в первом канале, $D = (D_1 + D_2 - P)$ — вероятность превышения порога хотя бы в одном из каналов, и т. д.

Вычисление величин D_1, D_2 рассматривалось в задачах для одноканального приёмника, здесь мы будем рассматривать вычисление интеграла P.

Для сохранения общности результатов понадобится ввести ещё одну величину, которую обозначим символом ε, и которая будет характеризовать фазовые соотношения для опорных сигналов. С учётом этого нового обозначения косинусные и синусные опорные колебания являются действительными и мнимыми частями выражений: $U_1(t-\tau_1)\exp\{\mathrm{i}\,\omega_1(t-\tau_1)\}$ и $U_2(t-\tau_2)\exp\{\mathrm{i}\,\omega_2(t-\tau_2)+\varepsilon\}$.

Используя методы, изложенные в § 3.3, квадратурные составляющие сигнала на входах детекторов огибающей можно представить в виде $X_1 = (x_1 + a_1)\,\sigma$, $Y_1 = (y_1 + b_1)\,\sigma$, $X_2 = (x_2 + a_2)\,\sigma$, $Y_2 = (y_2 + b_2)\,\sigma$, где x_1, y_1, x_2, y_2 — нормальные случайные величины (0, 1) с коэффициентами корреляции

$$\overline{x_1 y_1} = \overline{x_2 y_2} = 0\,, \qquad \overline{x_1 x_2} = \overline{y_1 y_2} = c\,, \qquad \overline{x_1 y_2} = -\overline{y_1 x_2} = s\,;$$

$$c + \mathrm{i}\,s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2-\omega_1)\tau_2}\,C_{21}(\tau_2-\tau_1,\,\omega_2-\omega_1)\,;$$

$\sigma = \sqrt{N_{\text{ш}}/2}$; $N_{\text{ш}}$ — двусторонняя спектральная плотность шума;

$$a_1 + \mathrm{i}\,b_1 = \sqrt{2q_0}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1-\omega_0)\tau_1}\,C_{10}(\tau_1-\tau_0,\,\omega_1-\omega_0)\,;$$

$$a_2 + \mathrm{i}\,b_2 = \sqrt{2q_0}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-\varepsilon)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2-\omega_0)\tau_2}\,C_{20}(\tau_2-\tau_0,\,\omega_2-\omega_0)\,;$$

q_0 — отношение сигнал/шум (см. § 3.4). Для $C_{\nu\mu}(\cdot\cdot)$ остаётся в силе введенное ранее определение (3.4.1). Функция $C_{21}(\cdot\cdot)$ представляет собой взаимно корреляционную функцию опорных сигналов.

Если $C_{21}(\tau_2 - \tau_1,\,\omega_2 - \omega_1) = 0$, то шумовые составляющие x_1 и y_1 статистически независимы от x_2 и y_2. В таких случаях будем просто говорить, что шумовые составляющие в каналах независимы.

Теперь, чтобы найти изображение по Лапласу двумерной плотности распределения случайных величин $R_1 = (X_1^2 + Y_1^2)/(2\sigma^2)$ и $R_2 = (X_2^2 + Y_2^2)/(2\sigma^2)$, являющихся выходами каналов при приёме одного импульса, можно воспользоваться результатами § 2.2. Окончательное выражение для изображения можно записать в виде

$$F(p_1, p_2) =$$

$$= \frac{1}{(1+p_1)(1+p_2) - r_0^2\,p_1 p_2}\exp\left\{-\frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_1 p_2 Q}{(1+p_1)(1+p_2) - r_0^2\,p_1 p_2}\right\}, \quad (5.2.1)$$

где

$$q_\nu = q_0\left|C_{\nu 0}(\tau_\nu - \tau_0, \omega_\nu - \omega_0)\right|^2, \quad \nu = 1,\,2; \quad r_0 = |C_{21}(\tau_2 - \tau_1,\,\omega_2 - \omega_1)|\,;$$

$$Q = q_1 + q_2 - 2r_0\sqrt{q_1 q_2}\cos\psi\,; \quad \cos\psi = \mathrm{Re}\left\{\frac{B}{|B|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1-\omega_0)(\tau_1-\tau_2)}\right\};$$

$$B = C_{21}(\tau_2 - \tau_1,\,\omega_2 - \omega_1)\,C_{10}(\tau_1 - \tau_0,\,\omega_1 - \omega_0)\,C_{20}^{*}(\tau_2 - \tau_0,\,\omega_2 - \omega_0)\,.$$

Величины q_1 и q_2 представляют собой произведения отношения сигнал/шум на соответствующие коэффициенты потерь, обусловленные неоптимальностью приёма (см. § 3.4). Эти величины будем называть для краткости отношениями сигнал/шум для импульса в первом и втором каналах.

Если огибающие принимаемого и опорных сигналов совпадают между собой (т. е. каналы являются оптимальными устройствами, настроенными на те или иные значения параметров сигнала) и обладают симметрией $U_\nu(t_0 + t) = U_\nu(t_0 - t)$, где t_0 — некоторая точка на временной оси, то

$$C^2_{\nu\mu}(\tau,\Omega) = \left| C_{\nu\mu}(\tau,\Omega) \right|^2 \cdot \exp(-\mathrm{i}\Omega\tau + 2\mathrm{i}\Omega t_0) .$$

Тогда, если расстройки, являющиеся аргументами автокорреляционной функции, находятся в пределах главного лепестка, то

$$\psi = (\tau_1 - \tau_2)(\omega_2 - \omega_0)/2 + (\tau_0 - \tau_2)(\omega_1 - \omega_2)/2 .$$

Для данного случая далее можно убедиться, что $\psi = 0$, если точка (τ_0, ω_0) лежит на отрезке, соединяющей точки (τ_1, ω_1) и (τ_2, ω_2). В частности, $\psi = 0$, если один из параметров сигнала (τ_0 или ω_0) известен и каналы настроены на известное значение этого параметра.

Обратим внимание, что статистические характеристики выходных случайных величин R_1 и R_2 не зависят от фазового сдвига ε.

Двумерную плотность, соответствующую изображению (1), не удаётся получить в пригодном для использования виде. Тем не менее, формула (1) может послужить отправной точкой для нахождения вероятностей при флуктуирующем сигнале.

Если флуктуации сигнала рэлеевские, то отношение сигнал/шум q_0 можно представить в виде $q_0 = \rho_0 x$, где ρ_0 — среднее значение отношения сигнал/шум, а x — случайная величина с плотностью распределения $\exp(-x)$. Усредняя $F(p_1, p_2)$ из (1) по x, получим изображение двумерной плотности распределения выходных величин при приёме рэлеевского сигнала

$$F(p_1, p_2) = \frac{1}{[1 + p_1(1+\rho_1)][1 + p_2(1+\rho_2)] - p_1 p_2 r^2 (1+\rho_1)(1+\rho_2)} , \quad (5.2.2)$$

где $\rho_\nu = \overline{q_\nu} = \rho_0 \left| C_{\nu 0}(\tau_\nu - \tau_0, \omega_\nu - \omega_0) \right|^2$, $\nu = 1, 2$;

$$r^2 = \frac{\left| r_0 + \sqrt{\rho_1 \rho_2} \cdot \exp(-\mathrm{i}\psi) \right|^2}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)} .$$

Если правую часть (2) возвести в N-ую степень, то получим изображение плотности распределения в случае приёма пачки, состоящей из N независимо флуктуирующих некогерентных импульсов (при рэлеевских флуктуациях амплитуд).

Формула (2) является изображением двумерной плотности ненормированных квадратов рэлеевских случайных величин. Путём замены переменных $R_1' = R_1/(1+\rho_1)$ и $R_2' = R_2/(1+\rho_2)$ задачу можно свести к вычислению интегралов от плотности распределения случайных величин R_1' и R_2', являющихся нормированными квадратами мо-

дуля вектора с гауссовскими компонентами. Тогда для вычисления вероятностей событий оказываются пригодными формулы из § 2.4, если в качестве порогов в них использовать значения $\lambda_1/(1+\rho_1)$ и $\lambda_2/(1+\rho_2)$. Так, для вероятности превышения порога в обоих каналах при приёме импульса с рэлеевскими флуктуациями амплитуды получим

$$P = \exp\left\{-\frac{\lambda_1}{1+\rho_1}\right\}\left\{1 - J\left(\frac{r^2\lambda_1}{(1-r^2)(1+\rho_1)}, \frac{\lambda_2}{(1-r^2)(1+\rho_2)}\right)\right\} +$$

$$+ \exp\left\{-\frac{\lambda_2}{1+\rho_2}\right\} J\left(\frac{\lambda_1}{(1-r^2)(1+\rho_1)}, \frac{r^2\lambda_2}{(1-r^2)(1+\rho_2)}\right). \qquad (5.2.3)$$

Аналогичным образом можно использовать результаты § 2.4 для вычисления вероятностей при приёме независимо флуктуирующей некогерентной пачки.

Рассмотрим теперь приём дружно флуктуирующей некогерентной пачки. Изображение распределения выходных величин при рэлеевских флуктуациях амплитуды имеет вид

$$F(p_1, p_2) = \frac{1}{[(1+p_1)(1+p_2) - r_0^2 p_1 p_2]^{N-1}} \times$$

$$\times \frac{1}{[1+p_1(1+\vartheta_1)][1+p_2(1+\vartheta_2)] - p_1 p_2 r^2 (1+\vartheta_1)(1+\vartheta_2)}, \qquad (5.2.4)$$

где N — число импульсов, ϑ_1 и ϑ_2 — средние значения отношения сигнал/шум для пачки импульсов в первом и втором каналах,

$$r^2 = \frac{\left| r_0 + \sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2} \cdot \exp(-i\psi) \right|^2}{(1+\vartheta_1)(1+\vartheta_2)}. \qquad (5.2.5)$$

Если все импульсы имеют одинаковую энергию, то $\vartheta_1 = N\rho_1$ и $\vartheta_2 = N\rho_2$.

При $r_0 = 0$, когда шумовые составляющие в каналах статистически независимы, формула (4) превращается в

$$F(p_1, p_2) = \frac{1}{\left[(1+p_1)(1+p_2)\right]^{N-1}} \times$$

$$\times \frac{1}{[1+p_1(1+\vartheta_1)][1+p_2(1+\vartheta_2)] - p_1 p_2 r^2 (1+\vartheta_1)(1+\vartheta_2)}, \qquad (5.2.6)$$

причём $r^2 = \vartheta_1\vartheta_2/[(1+\vartheta_1)(1+\vartheta_2)]$.

Обращение изображений (4) и (6) и последующее вычисление интеграла P затруднено. Из (6) можно получить аналитическую формулу для P, в которую входят цилиндрические функции двух мнимых переменных [39]. Однако, уже при $N = 2$ это выражение весьма громоздко. Поэтому для вычисления интеграла можно рекомендовать численные или приближённые методы.

Если шумовые составляющие в каналах независимы, то интеграл P можно вычислить двумя способами. Один из способов основан на разложении в ряд изображения (6) и последующих преобразованиях ряда. Получающееся при этом окончательное выражение представлено в работе [76]. Однако, при независимых шумах предпочтительнее другой способ. Он заключается в вычислении интеграла

$$P = \int_0^\infty J_N(\lambda_1, \vartheta_1 x)\, J_N(\lambda_2, \vartheta_2 x)\, \mathrm{e}^{-x}\, dx \qquad (5.2.7)$$

численными методами.

При зависимых шумовых составляющих необходимо применять приближённые формулы. В одной из приближённых формул [76] интеграл выражается через дополнение к функции ошибок erfc(x). Помимо этой формулы можно предложить ещё одну

$$P = D_1 J\left(\frac{\lambda_2 - (N-1)/(1+\gamma)}{(1-r^2)(1+\vartheta_2)}, \frac{r^2[\lambda_1 - (N-1)\gamma/(1+\gamma)]}{(1-r^2)(1+\vartheta_1)}\right) +$$

$$+ D_2\left\{1 - J\left(\frac{r^2[\lambda_2 - (N-1)/(1+\gamma)]}{(1-r^2)(1+\vartheta_2)}, \frac{\lambda_1 - (N-1)\gamma/(1+\gamma)}{(1-r^2)(1+\vartheta_1)}\right)\right\}, \qquad (5.2.8)$$

применимую в случаях, когда ϑ_1 и ϑ_2 не слишком малы. Здесь $\gamma = \vartheta_2/\vartheta_1$, а r^2 определяется формулой (5).

Недостатком приближённых формул является то, что полный контроль их точности затруднён. Относительно точности (8) можно сказать следующее. При $N = 1$ она совпадает с точной формулой (3). При $r_0 = 0$ получаемые результаты можно сличить с результатами формулы (7).

На рис. 5.1 изображены зависимости D_1, D_2, P, и D для дружно флуктуирующей пачки прямоугольных импульсов от величины τ — расстройки сигнала по задержке относительно первого канала ($\tau = \tau_0 - \tau_1$) при $N = 32$, $F = 10^{-6}$, $\vartheta_0 = 256$. Здесь F — вероятность превышения порога в канале в случае отсутствия сигнала (пороговый уровень в обоих каналах одинаковый), ϑ_0 — среднее значение отношения сигнал/шум для пачки. Оба канала настроены на частоту сигнала и расстроены по задержке на величину длительности импульса T (т. е. $\tau_2 - \tau_1 = T$).

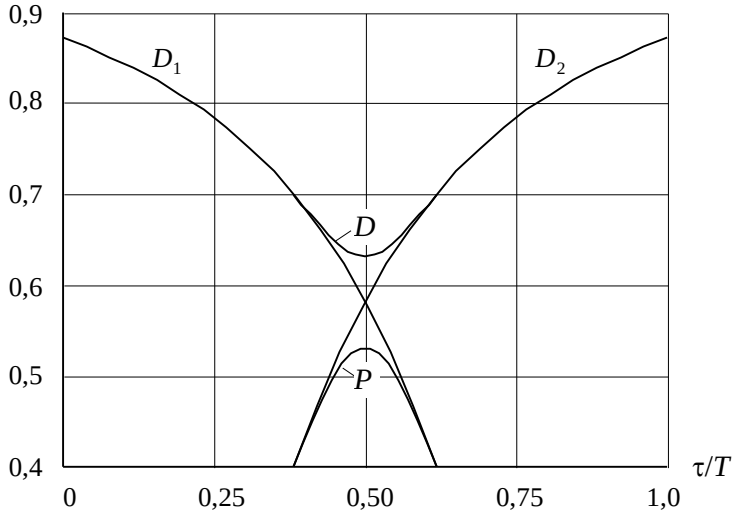


Рис. 5.1. Зависимости вероятностей появления различных событий от задержки сигнала

Если абсолютные величины расстроек сигнала относительно каналов отличаются друг от друга больше, чем в 1,3 … 1,5 раза (квадраты модуля автокорреляционной функции отличаются в 1,5 … 2 раза), то, как это видно из рисунка, $P = \min\{D_1, D_2\}$. Это означает, что если произошло превышение в канале с большей расстройкой относительно флуктуирующего сигнала, то в канале с меньшей расстройкой превышение произойдёт обязательно.

Покажем, как можно использовать этот вывод в расчётах для многоканальной системы. Вероятности различных картин на выходе n-канальной системы можно выразить через интегралы

$$\left.\begin{aligned} D_j = \int_{\lambda}^{\infty} W_j(R_j)\,dR_j, \quad P_{jk} = \int_{\lambda}^{\infty}\int_{\lambda}^{\infty} W(R_j, R_k)\,dR_j\,dR_k, \\ P_{jkl} = \int_{\lambda}^{\infty}\int_{\lambda}^{\infty}\int_{\lambda}^{\infty} W(R_j, R_k, R_l)\,dR_j\,dR_k\,dR_l \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.9)$$

и т. д. Здесь $j = 1, 2, \ldots, n$; $k = j + 1, \ldots, n$; $l = k + 1, \ldots, n$ и т. д.

При обнаружении сигнала с одним неизвестным параметром абсолютные значения расстроек сигнала могут быть примерно равными только в двух каналах, в остальных же каналах расстройки либо больше этих значений, либо меньше (это не имеет места в том случае, если каналы расположены неравномерно или расположены очень часто). Рассмотрим один из интегралов (9) кратности m. Занумеруем каналы, соответствующие переменным интегрирования, так, чтобы

$\vartheta_1 \geq \vartheta_2 \geq \ldots \geq \vartheta_m$, и будем считать, что $\vartheta_j > (1{,}5 \ldots 2)\cdot\vartheta_{j+2}$. Тогда величина этого интеграла, равная вероятности превышения порога во всех m каналах, будет равна вероятности превышения порога в m-ом и $(m-1)$-ом каналах, так как если порог превышен в m-ом канале, то он будет превышен и в каналах с номерами $(m-2)$, … , 2, 1, т. е.

$$\int_{\lambda}^{\infty}\cdots\int_{\lambda}^{\infty} W(R_1,\cdots,R_m)\,dR_1,\cdots,dR_m \approx \int_{\lambda}^{\infty}\int_{\lambda}^{\infty} W(R_{m-1},R_m)\,dR_{m-1}\,dR_m\,.$$

Таким образом, все многомерные интегралы можно заменить двумерными.

Если сигнал имеет два неизвестных параметра, например, задержку и частоту, то для расчётов вероятностей картин необходимо знать интеграл от распределения выходных величин четырёх соседних каналов.

Нетрудно также убедиться в том, что если в канале с меньшей расстройкой порог не превышен, то он не будет превышен и в канале с большей расстройкой. Отсюда получим, что вероятность обнаружения с одним неизвестным параметром можно определять по формуле

$$D = \int_{\lambda}^{\infty} W_1(R_1)\,dR_1 + \int_{\lambda}^{\infty} W_2(R_2)\,dR_2 - \int_{\lambda}^{\infty}\int_{\lambda}^{\infty} W(R_1,R_2)\,dR_1\,dR_2,$$

где R_1 и R_2 — выходные величины, соответствующие каналам с наименьшими расстройками относительно параметра сигнала. Зависимость вероятности обнаружения от параметра сигнала будет периодической. Один из периодов при расстройке каналов по задержке будет иметь такой же вид, как и зависимость, представленная на рис. 5.1.

Из приведенных рассуждений также следует, что при наличии только одного сигнала превышения порогов будут происходить в соседних каналах, а события с чередующимися превышениями маловероятны.

5.3. Коэффициент потерь для дружно флуктуирующего некогерентного сигнала

Расчёт вероятности обнаружения в многоканальной системе часто сводят к более простой задаче для одноканальной системы. При этом вероятность превышения порога в канале с минимальной расстройкой принимают за вероятность обнаружения сигнала. Погрешность такого метода можно характеризовать ошибкой в оценке отношения сигнал/шум, необходимого для обеспечения заданной вероятности обнаружения при фиксированной вероятности ложной тревоги.

В случае, когда сигнал находится на стыке двух каналов, т. е. когда $\vartheta_1 = \vartheta_2$, вероятность обнаружения D отличается от вероятности превышения порога в канале D_1. Если при этом в качестве вероятно-

сти обнаружения принимать величину D_1, то это приведёт к завышению на 20 … 40 % требуемого отношения сигнал/шум. Величина завышения зависит от расстройки между каналами, от *N*, *D*, *F* и поэтому не может быть скомпенсирована путём введения постоянного поправочного коэффициента.

Такая ошибка представляется существенной.

Рассмотрим более подробно случай, когда неизвестный параметр имеет априорное распределение, медленно меняющееся в пределах расстройки между соседними каналами. Пусть $D(s)$ вероятность обнаружения сигнала, параметр которого равен s, δ_s — величина расстройки между соседними каналами (под символом s подразумевается либо $\tau = \tau_0 - \tau_1$, либо $\Omega = \omega_0 - \omega_1$). Тогда, учитывая, что $D(s)$ — периодическая функция с периодом δ_s и что априорное распределение медленно меняется в пределах одного периода, в результате усреднения $D(s)$ по априорному распределению получим

$$D = \frac{1}{\delta_s} \int_0^{\delta_s} D(s)\, ds .$$

На рис. 5.1 приведена зависимость $D(\tau)$. $D(\tau)$ отличается от вероятности превышения порога в канале с меньшей расстройкой, если $\tau \approx \delta_\tau / 2$, и так как это различие проявляется на небольшом отрезке оси τ, то не будет большой погрешности, если за вероятность обнаружения сигнала будем принимать вероятность превышения порога в канале с минимальной расстройкой, т. е.

$$D \approx \frac{2}{\delta_s} \int_0^{\delta_s/2} D_1(s)\, ds . \qquad (5.3.1)$$

Погрешность оценки требуемого отношения сигнал/шум в таких случаях составляет 2 … 3 % и является несущественной.

Поэтому можно сделать следующий вывод. Если сигнал находится на стыке каналов или если выбор числа каналов производится исходя из допустимого уменьшения вероятности обнаружения сигнала, параметры которого оказываются расположенными на стыке каналов, то при расчёте вероятности обнаружения необходимо пользоваться приведенными в предыдущем параграфе формулами. Однако если априорное распределение неизвестных параметров широко по сравнению с расстройками между соседними каналами и изменяется медленно в области обнаружения, то за вероятность обнаружения сигнала с данными параметрами можно принимать вероятность превышения порога в канале с минимальной расстройкой относительно сигнала.

Воспользуемся этим выводом для вычисления вероятности обнаружения дружно флуктуирующей по рэлеевскому закону некогерентной пачки импульсов с неизвестным параметром, имеющим широкое

и медленно меняющееся в области обнаружения априорное распределение. Интеграл (1) непосредственно не вычисляется, поэтому величину D_1 под интегралом представим в виде ряда по отрицательным степеням $\vartheta_0|C(s)|^2$, где ϑ_0 — отношение сигнал/шум для пачки; $C(s)$ — автокорреляционная функция импульсного сигнала, записанная в виде функции одного переменного. Тогда

$$D = 1 - \frac{\lambda - (N-1)}{\vartheta_0} A_1 + \frac{1}{2!} \frac{\lambda^2 - 2(N-2)\lambda + (N-1)(N-2)}{\vartheta_0^2} A_2 - \cdots,$$

где λ — пороговый уровень, N — число импульсов в пачке,

$$A_\nu = \frac{2}{\delta_s} \int_0^{\delta_s/2} \frac{1}{|C(s)|^{2\nu}} ds.$$

Теперь будем рассматривать коэффициент потерь η, который является отношением требуемого значения ϑ_0 для канала, согласованного с сигналом, к требуемому значению ϑ_0 для многоканальной системы. Для него можно получить следующий ряд:

$$\eta = \frac{1}{A_1} + \frac{1}{2!} \frac{\lambda^2 - 2(N-2)\lambda + (N-1)(N-2)}{\lambda - (N-1)} \frac{A_2 - A_1^2}{A_1^2} \frac{1}{\vartheta_0} + \cdots.$$

Очевидно, что при больших ϑ_0 в этой формуле можно брать только первый член и считать

$$\eta \approx 1/A_1 . \qquad (5.3.2)$$

Полученный результат распространим на случай, когда сигнал имеет несколько неизвестных параметров. Если неизвестна задержка и частота, то

$$A_1 = \frac{2}{\delta_\tau} \frac{2}{\delta_\Omega} \int_0^{\delta_\tau/2} \int_0^{\delta_\Omega/2} \frac{1}{|C_{10}(\tau, \Omega)|^2} d\tau\, d\Omega .$$

Тогда, при условии совпадения огибающих принимаемого и опорных сигналов, для пачки прямоугольных импульсов можно получить:

$$A_1 = \frac{2}{\delta_\tau} \frac{2}{\delta_\Omega} \int_0^{\delta_\tau/2} \int_0^{\delta_\Omega/2} \left(\frac{\Omega T/2}{\sin[\Omega(T-\tau)/2]} \right)^2 d\tau\, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{1 - \delta_\tau/(2T)} + \frac{2T}{\delta_\tau} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|B_{2\nu}|}{(2\nu-1)!} \left(\frac{\delta_\Omega T}{2} \right)^{2\nu} \left[1 - \left(1 - \frac{\delta_\tau}{2T} \right)^{2\nu-1} \right], \qquad (5.3.3)$$

где T — длительность импульса, $B_{2\nu}$ — числа Бернулли. При этом если неизвестна только задержка, то $\eta = 1 - \delta_\tau/(2T)$.

На рис. 5.2 приведены полученные при помощи (2) и (3) линии равных коэффициентов потерь для дружно флуктуирующей некогерентной пачки прямоугольных импульсов. Пунктирная кривая пересекает линии в тех точках, где произведение $\delta_\tau \cdot \delta_\Omega$ для точек, лежащих на соответствующей линии, максимально, т. е. число каналов, перекрывающих область обнаружения при данном коэффициенте потерь, минимально.

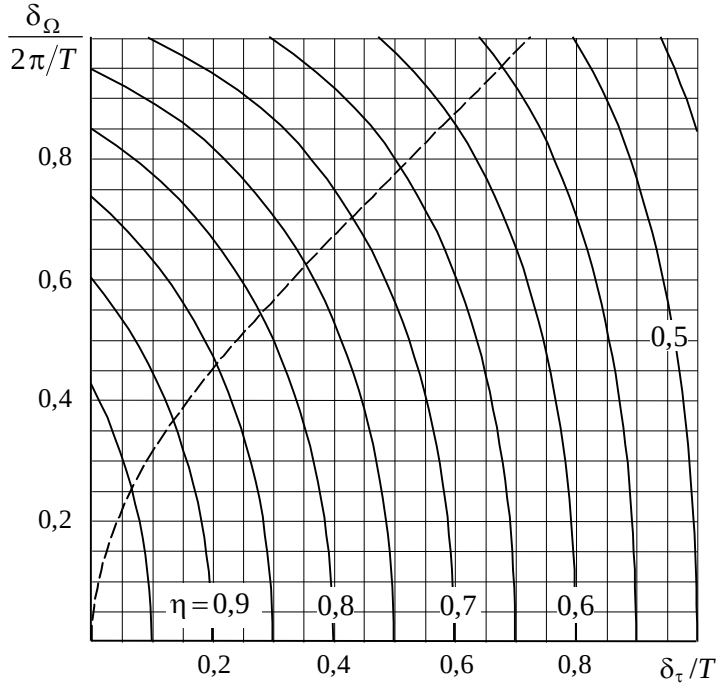


Рис. 5.2. Линии равных коэффициентов потерь

Рис. 5.2 можно использовать и для оценки коэффициента потерь для некогерентной пачки фазокодоманипулированных импульсов. Обозначив этот коэффициент через η_ϕ и, учитывая, что для главного пика автокорреляционной функции ФКМ сигнала $|C_{00}(\tau, \Omega)| \approx |C_{00}(\tau, 0)| \times |C_{00}(0, \Omega)|$, получим $\eta_\phi \approx \eta_\tau \eta_\Omega$. Здесь η_τ — коэффициент потерь, учитывающий только расстройку по задержке, η_Ω — только по частоте. Для η_τ можно записать $\eta_\tau = 1 - \delta_\tau / (2T_d)$, где T_d — длительность дискрета ФКМ сигнала. Коэффициент η_Ω определяется по рис. 5.2 при условии $\delta_\tau = 0$.

Линии равных коэффициентов потерь, представленные на рис. 5.2, получены для рэлеевских флуктуаций амплитуды. Однако, как показывают численные оценки, интегрирование в (1) зависимостей $D_1(s)$, соответствующих другим законам флуктуаций амплитуды, можно также с успехом заменять использованием коэффициента потерь, по-

лучаемого из рис. 5.2. Погрешности оценок при этом оказываются такими же, как и погрешности для рэлеевских флуктуаций.

5.4. Расчёт вероятности ложной тревоги

Ложной тревогой в многоканальной системе является событие, когда полезный сигнал на входе отсутствует, а в одном или нескольких каналах есть превышения порога.

Если все каналы идентичны и выходные величины каналов взаимно независимы, то вероятность ложной тревоги в многоканальной системе F_n связана с вероятностью превышения порога в канале F соотношением:

$$F_n = 1-(1-F)^n = nF - \frac{n(n-1)}{2!}F^2 + \cdots \pm F^n . \qquad (5.4.1)$$

Здесь n — число каналов. Обычно $nF << 1$, поэтому

$$F_n \approx nF . \qquad (5.4.2)$$

Формула (2) служит для расчёта вероятности ложной тревоги. Она обычно используется и в том случае, когда каналы обнаружения перекрываются (не являются ортогональными) и, следовательно, выходные величины каналов статистически зависимы.

Если каналы сильно перекрываются, то формула (2) становится непригодной. Ниже приведены результаты, позволяющие при перекрывающихся каналах оценить погрешность формулы (2) и, в конечном счёте, установить пределы её применимости.

Обобщением формулы (1) на случай зависимых выходных величин является выражение [95]:

$$F_n = \sum P_j - \sum P_{jk} + \sum P_{jkl} - \cdots \quad , \qquad (5.4.3)$$

где P_j — вероятность превышения порога в j-ом канале ($P_j = F$), P_{jk} — вероятность превышения порога в каналах с номерами j и k и т. д. Суммирование в (3) ведётся по всем значениям индексов от 1 до n с учётом условия $j < k < l < \ldots$.

Вероятности P_j, P_{jk}, … представимы в виде интегралов (5.2.9), если в подынтегральных выражениях подразумевать плотности распределения выходных величин каналов, когда полезный сигнал на входе отсутствует.

Пренебрегая вероятностями превышения порога в трёх, четырёх и т. д. каналах, из (3) получим

$$F_n \approx nF - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P_{jk} . \qquad (5.4.4)$$

Формула (4) даёт более точную оценку, чем (2). Кроме того, можно показать, что

$$nF - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P_{jk} \le F_n \le nF \,, \qquad (5.4.5)$$

причём первое неравенство в (5) превращается в равенство при $n = 1$ или 2, а второе — при $n = 1$.

Второе неравенство в (5) можно усилить:

$$nF - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P_{jk} \le F_n \le nF - \sum_{j=1}^{n-1} P_{j,j+1} \,. \qquad (5.4.6)$$

Чтобы минимизировать верхнюю границу вероятности F_n, оцениваемую по формуле (6), целесообразно каналы нумеровать так, чтобы коррелированные выходные величины были в каналах с соседними номерами.

Если при обнаружении некогерентного сигнала применяется квадратичный детектор, то для вычисления вероятностей P_{jk} можно воспользоваться результатами § 2.4. В частном случае, когда многоканальная система предназначена для обнаружения импульсного сигнала,

$$F = \mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad P_{jk} = \mathrm{e}^{-\lambda} J(A, B) + \mathrm{e}^{-\lambda}\{1 - J(B, A)\},$$

где λ — значение порогового уровня; $A = \lambda/(1 - r_{jk}^2)$; $B = r_{jk}^2 A$; $r_{jk} = \left| C(\tau_k - \tau_j, \omega_k - \omega_j) \right|$; $C(\cdot\cdot)$ — автокорреляционная функция сигнала, по отношению к которому каналы оптимальны; τ_k, τ_j, ω_k, ω_j — параметры сигнала, на которые настроены каналы.

Итак, мы имеем три формулы для определения вероятности ложной тревоги F_n по заданному значению порога. Одна из них — приближённая формула (2). Две другие формулы входят в неравенства (6) и позволяют определить диапазон, в котором находится истинное значение F_n. Если задано значение F_n, то эти формулы дают уравнения для определения порога.

Пусть $\lambda_{\text{п}}$ — значение порога, получаемое из приближённой формулы (2), $\lambda_{\text{н}}$ и $\lambda_{\text{в}}$ — нижняя и верхняя оценки порога, получаемые соответственно из формул для нижней и верхней оценок вероятности F_n, причём $\lambda_{\text{н}}$ удовлетворяет и уравнению (4). Обозначим через $\lambda_{\text{т}}$ неизвестное нам точное значение порога, соответствующее заданной вероятности F_n. Очевидно, что $\lambda_{\text{н}} \le \lambda_{\text{т}} \le \lambda_{\text{в}} \le \lambda_{\text{п}}$.

Сравнивая между собой значения $\lambda_{\text{н}}$, $\lambda_{\text{в}}$, $\lambda_{\text{п}}$, можно получить представление о погрешности вычисления порога. Однако, результаты такого сравнения ненаглядны, так как непонятно, к каким последствиям приведёт та или иная погрешность. Результаты будут нагляднее, если погрешность порога пересчитать в погрешность оценки отношения сигнал/шум, требуемого для достижения заданной вероятности правильного обнаружения.

При обнаружении импульсного рэлеевского сигнала требуемое среднее значение отношения сигнал/шум ρ связано с порогом λ и вероятностью обнаружения D соотношением $\rho = \lambda/\ln(1/D) - 1$. При значениях D, близких к 1, можно в этом соотношении отбросить единицу, т. е. положим $\rho \approx \lambda/\ln(1/D)$. Обозначим через $\rho_н$, $\rho_т$, $\rho_в$, $\rho_п$ получаемые по этой формуле значения отношения сигнал/шум, если в качестве порога использовать соответственно $\lambda_н$, $\lambda_т$, $\lambda_в$, $\lambda_п$. Теперь нетрудно заметить, что погрешности в оценке порога практически без изменений трансформируются в погрешность оценки требуемого отношения сигнал/шум. Например, $\rho_п/\rho_н \approx \lambda_п/\lambda_н$.

В табл. 5.1 приведены результаты, позволяющие установить пределы применимости формулы (2). Рассматривалась многоканальная система, предназначенная для обнаружения прямоугольных импульсов с неизвестной задержкой. Здесь, по-прежнему, δ_τ — расстройка между соседними каналами по задержке. Приведенные в таблице значения $\xi_н$ и $\xi_в$ равны соответственно $10\lg(\rho_п/\rho_н)$ и $10\lg(\rho_п/\rho_в)$. Обобщённые коэффициенты корреляции вычислялись по формуле

$$r_{jk} = \begin{cases} 1 - |k-j|\delta_\tau/T & \text{при } |k-j|\delta_\tau/T < 1, \\ 0 & \text{при } |k-j|\delta_\tau/T \geq 1. \end{cases}$$

Прокомментируем данные таблицы. Например, значения $\xi_н = 0{,}20$ и $\xi_в = 0{,}11$ означают, что использование формулы (2) для расчёта характеристик обнаружения при $F = 10^{-4}$, $n = 10$ и $\delta_\tau/T = 0{,}1$ приведёт к завышению требований к энергетическим характеристикам процедуры обнаружения, причём величина завышения лежит в диапазоне от 0,11 до 0,20 дБ.

Таблица 5.1

Оценка применимости
приближённой формулы для расчёта вероятностей ложной тревоги

F_n	n	$\delta_\tau/T = 0{,}1$		$\delta_\tau/T = 0{,}2$		$\delta_\tau/T = 0{,}3$	
		$\xi_н$	$\xi_в$	$\xi_н$	$\xi_в$	$\xi_н$	$\xi_в$
10^{-4}	10	0,20	0,11	0,05	0,04	0,02	0,02
	100	0,14	0,08	0,03	0,03	0,01	0,01
	1000	0,09	0,06	0,02	0,02	0,00	0,00
10^{-6}	10	0,08	0,05	0,02	0,01	0,00	0,00
	100	0,06	0,04	0,01	0,01	0,00	0,00
	1000	0,04	0,03	0,01	0,01	0,00	0,00

В целом, можно сделать такой вывод. При расчётах вероятности ложной тревоги можно пренебрегать статистической зависимостью выходных величин и вероятность ложной тревоги в n-канальной системе определять по формуле $F_n = nF$. Эта формула будет неверной лишь в том случае, если каналы сильно перекрываются, но такие случаи на практике, видимо, не встречаются.

Заметим ещё, что если многоканальная система предназначена для обнаружения импульсного сигнала, то результаты, полученные здесь применительно к квадратичному детектору, будут справедливы и для любого другого вида детекторной характеристики.

5.5. Обнаружение сигнала на фоне шума с неизвестной интенсивностью при наличии дополнительных шумовых выборок

Для обнаружения сигналов при заданной вероятности ложной тревоги необходимо знать интенсивность шума, по которой нормируется пороговый уровень. При воздействии шума с неизвестной интенсивностью возникает необходимость определять эту интенсивность в процессе обнаружения.

В [27, 28] рассматривается метод обнаружения некогерентной пачки импульсов, предполагающий наличие дополнительных выборок шума, по которым можно определить его интенсивность. Величина порогового уровня берётся пропорциональной измеренному значению интенсивности. Схема обнаружения сигнала для этого случая представлена на рис. 5.3, где N — число некогерентно накапливаемых импульсов сигнала, m — число выборочных значений шума, λ — постоянный коэффициент, который в дальнейшем будем называть пороговым коэффициентом. Случайные величины S_ν и R_ν являются выходными величинами каналов, идентичных устройствам для когерентной обработки импульсов. Решение о наличии сигнала принимается, при $R > \lambda x$, где $x = S/m$.

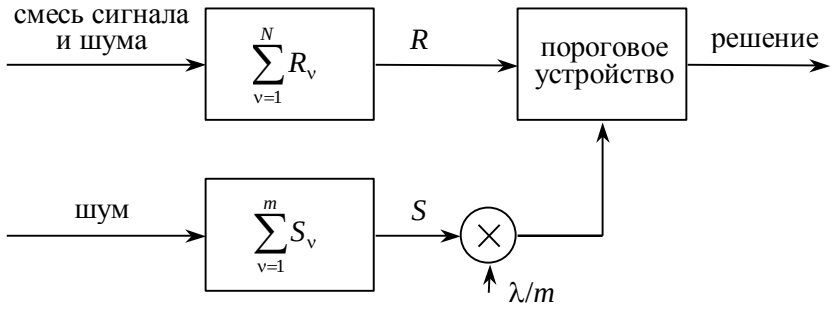


Рис. 5.3. Схема обнаружения сигнала на фоне шума с неизвестной интенсивностью

Характеристики обнаружения независимо флуктуирующей пачки импульсов рассмотрены в [27]. В данном параграфе будут приведены формулы для вероятности ложной тревоги и вероятности обнаружения дружно флуктуирующей пачки, принимаемой на фоне нормального шума с неизвестной интенсивностью. Кроме того, далее будет рассмотрен метод получения формул для оценки характеристик обнаружения в случае, когда шумовые выборочные значения статистически зависимы.

Определение интенсивности шума может производиться путём приёма и обработки шумового процесса в такой области частот и задержек, в которой сигнал не может появиться. Если интенсивность шума медленно меняется во времени, то для определения интенсивности шума можно использовать то же приёмное устройство, что и для приёма сигнала, тогда приём сигнала и анализ интенсивности шума должны быть разделены по времени.

Выборки шума могут браться во всех имеющихся каналах обнаружения. Если в каждом канале берётся одно выборочное значение в периоде повторения, то $m = nN$, где n — число каналов.

При получении точных формул для определения порогового коэффициента λ будет предполагаться, что накопление осуществляется после квадратичного детектора, и каналы обнаружения не перекрываются. Все m выборочных значений шума статистически независимы друг от друга.

Вероятность ложной тревоги на один канал обнаружения можно представить в виде

$$F = \int_0^\infty \frac{S^{m-1}}{(m-1)!} \mathrm{e}^{-S} \left\{ \int_{\lambda S/m}^\infty \frac{R^{N-1}}{(N-1)!} \mathrm{e}^{-R}\, dR \right\} dS\,. \qquad (5.5.1)$$

Из этой формулы можно получить следующее выражение для вероятности ложной тревоги

$$F = \frac{1}{(1+\lambda/m)^m} \sum_{\nu=0}^{N-1} C_{m+\nu-1}^{\nu} \left(\frac{\lambda/m}{1+\lambda/m} \right)^{\nu}, \qquad (5.5.2)$$

из которого по заданному значению F необходимо находить коэффициент λ.

Если $m \to \infty$, то ошибки измерения интенсивности шума стремятся к нулю, поэтому λ будет стремиться к величине порога λ_0, которая определяется вероятностью ложной тревоги при известной интенсивности шума:

$$F = \int_{\lambda_0}^\infty \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} \mathrm{e}^{-t}\, dt\,. \qquad (5.5.3)$$

Если m конечно, то пороговый коэффициент λ представляется в явном виде лишь при $N = 1$:

$$\lambda = m[\exp(\lambda_0/m) - 1],$$

где $\lambda_0 = \ln(1/F)$. А при $N \neq 1$ для λ можно найти лишь несколько первых членов разложения в ряд по отрицательным степеням числа выборочных значений m.

Определим теперь вероятность обнаружения.

Если результат обработки пачки, состоящей из N дружно флуктуирующих импульсов, сравнивается с порогом $\lambda S/m$, то вероятность превышения этого порога будет иметь вид (при рэлеевских флуктуациях):

$$D(S) \approx \left(\frac{1+\vartheta}{\vartheta}\right)^{N-1} \exp\left\{-\frac{\lambda S/m}{1+\vartheta}\right\},$$

где ϑ — среднее значение отношения сигнал/шум для пачки импульсов.

Усредняя $D(S)$ по флуктуациям S, получим

$$D = \int_0^\infty \frac{S^{m-1}}{(m-1)!} e^{-S} D(S)\, dS \approx \left(\frac{1+\vartheta}{\vartheta}\right)^{N-1} \left(1+\frac{\lambda/m}{1+\vartheta}\right)^{-m}. \qquad (5.5.4)$$

При больших значениях m

$$D \approx \left(\frac{1+\vartheta}{\vartheta}\right)^{N-1} \exp\left\{-\frac{\lambda}{1+\vartheta}\right\}.$$

Если ещё и ϑ достаточно велико, то

$$D \approx \exp\left\{-\frac{\lambda-(N-1)}{1+\vartheta}\right\}$$

и $\vartheta \approx [\lambda - (N-1)]/\ln(1/D) - 1$. При точно известной интенсивности шума требуемое отношение сигнал/шум будет равно $\vartheta_0 \approx [\lambda_0 - (N-1)]/\ln(1/D) - 1$. Из этих формул получаем выражение для коэффициента потерь, обусловленных незнанием интенсивности шума: $\eta = \vartheta_0/\vartheta$.

В частном случае $N = 1$, когда осуществляется обнаружение когерентного сигнала с амплитудой, флуктуирующей по рэлеевскому закону, вероятность ложной тревоги и вероятность обнаружения определяются формулами

$$F = \left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{-m}, \qquad D = \left(1+\frac{\lambda/m}{1+\rho}\right)^{-m}, \qquad (5.5.5)$$

где ρ — среднее значение отношения сигнал/шум.

При $N = 1$ для определения коэффициента потерь можно использовать довольно простую формулу

$$10\lg\eta \approx -\frac{5}{m}\lg\left(\frac{1}{F}\right),$$

точность которой увеличивается с ростом m. При $F = 10^{-6}$ и $m = 30$ эта формула даёт −1,00 дБ, в то время как точными вычислениями при $F = 10^{-6}$, $m = 30$ и $D = 0{,}9$ можно получить −1,04 дБ.

Анализ эффективности обнаружения проведен здесь в предположении, что все выборочные значения шума статистически независимы между собой. В действительности выборочные значения, снимаемые с выходов каналов обнаружения, могут быть зависимыми. Это приводит к увеличению ошибок измерения интенсивности шума и, в конечном счёте, к увеличению энергетических потерь.

Для приближённых оценок эффективности обнаружения при зависимых выборочных значениях можно использовать формулы, полученные для независимых значений, если в эти формулы вместо m подставлять $m_э$ ($m_э \le m$). Параметр $m_э$ выбирается таким, чтобы дисперсия случайного порога для условной схемы, использующей для формирования порога $m_э$ независимых выборочных значений, совпадала с дисперсией случайного порога для реальной схемы. Значение $m_э$ зависит от обобщённых коэффициентов корреляции $r_{\nu\mu}$ ($\nu, \mu = 1, 2, \ldots, m$) случайных величин на выходах каналов и определяется по формуле

$$m_э = m^2 \Big/ \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m} r_{\nu\mu}^2 .$$

Если шумовые выборки берутся в N периодах повторения на выходах n каналов, то $r_{\nu\mu} = 0$, если ν и μ соответствуют разным периодам повторения.

Обобщённые коэффициенты корреляции можно выразить через автокорреляционную функцию сигнала, по отношению к которому каналы оптимальны:

$$r_{\nu\mu}^2 = \left| C(\tau_\mu - \tau_\nu, \omega_\mu - \omega_\nu) \right|^2 ,$$

где τ_ν и ω_ν — значения задержки и частоты, на которые настроен ν-ый канал.

Для получения точных формул вероятности обнаружения сигнала на фоне шума с неизвестной интенсивностью можно использовать преобразование Лапласа. Решение о наличии сигнала принимается, если случайная величина R/x превышает порог λ. Используя изложенный в § 2.5 метод, для вероятности этого события можно получить

$$D = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{1}{p} F_R(p) F_x(-\lambda p)\, dp, \qquad c < 0, \tag{5.5.6}$$

где $F_R(\cdot)$ и $F_x(\cdot)$ — изображения плотностей распределения случайных величин R и x. Если R и x статистически зависимы, то $F_R(p)\cdot F_x(-\lambda p)$ в этой формуле следует заменить на $F(p, -\lambda p)$, где $F(\cdot\cdot)$ — изображение двумерной плотности распределения R и x.

Контурный интеграл можно выразить через вычеты особых точек, расположенных либо в левой полуплоскости, либо в правой. Полюс $p = 0$ при вычислении этого интеграла причисляется к особым точкам в правой полуплоскости.

Применительно к обнаружению дружно флуктуирующего сигнала

$$F_R(p) = \frac{1}{(1+p)^{N-1}[1+p(1+\vartheta)]},$$

где ϑ — отношение сигнал/шум для пачки импульсов. Если выборочные значения шума независимы, то

$$F_x(p) = \frac{1}{(1+p/m)^m}.$$

Подставляя $F_R(\cdot)$ и $F_x(\cdot)$ в (6) и вычисляя интеграл, можно получить точные выражения для вероятности обнаружения дружно флуктуирующего сигнала. Если же при вычислении интеграла учесть только вычет в точке $p = -1/(1+\vartheta)$, то придём к формуле (4).

Если шумовые выборки берутся в N периодах повторения на выходах n каналов, то в общем случае (при наличии статистической зависимости выходных величин)

$$F_x(p) = \frac{1}{\left\{\det\left[\mathbf{E} + (p/m)\mathbf{A}\right]\right\}^N},$$

где $\mathbf{A}$ — эрмитова матрица размерами $n\times n$, составленная из элементов

$$a_{\nu\mu} = \exp\left\{\mathrm{i}(\omega_\mu - \omega_\nu)\tau_\mu\right\} C(\tau_\mu - \tau_\nu, \omega_\mu - \omega_\nu).$$

Если и теперь при вычислении интеграла (6) учесть только вычет в точке $p = -1/(1+\vartheta)$, то получим

$$D \approx \left(\frac{1+\vartheta}{\vartheta}\right)^{N-1} \left[\det\left(\mathbf{E} + \frac{\lambda}{m(1+\vartheta)}\mathbf{A}\right)\right]^{-N}.$$

5.6. Ошибки измерения неизвестных параметров сигнала при формировании оценок по картинам превышений

Пусть $c_1, \ldots, c_m$ — картины с превышениями порогов на выходе многоканальной системы, $p_1(s), \ldots, p_m(s)$ — вероятности возникновения этих картин, если параметр сигнала равен s. Предположим, что если возникает картина c_ν, то параметром сигнала считается величина $\tilde{s}_\nu$, при этом ошибка в измерении будет $s - \tilde{s}_\nu$. Средний квадрат ошибки измерения параметра при условии обнаружения будет

$$\sigma^2(s) = \frac{1}{D(s)} \sum_{\nu=1}^{m} (s - \tilde{s}_\nu)^2 \, p_\nu(s) \, .$$

Если неизвестный параметр имеет медленно меняющееся априорное распределение, то в качестве среднего квадрата ошибки измерения при условии обнаружения примем величину

$$\sigma^2 = \frac{1}{D} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\delta_s} \int_0^{\delta_s} (s - \tilde{s}_\nu)^2 \, p_\nu(s) \, ds \, ,$$

где D — среднее значение вероятности обнаружения $D(s)$; усреднение производится по параметру s.

Приравняв производную σ^2 по $\tilde{s}_\nu$ нулю, получим, что σ^2 минимально, если

$$\tilde{s}_\nu = \int_0^{\delta_s} s \, p_\nu(s) \, ds \Big/ \int_0^{\delta_s} p_\nu(s) \, ds \, .$$

Очевидно, если картина превышений симметрична относительно своего центра тяжести, то и зависимость вероятности появления этой картины симметрична относительно центра тяжести; тогда с центром тяжести совпадает и оценочное значение. Выше отмечалось, что превышения происходят в соседних каналах, поэтому если сигнал имеет один неизвестный параметр, то картины превышений симметричны. В этом случае следует считать, что параметр сигнала равен среднеарифметическому значению значений параметра, на которые настроены каналы с превышениями.

На рис. 5.4 приведена зависимость среднего квадрата ошибки измерения задержки обнаруженного прямоугольного импульса (с рэлеевской амплитудой) от величины расстройки между соседними каналами. При расчёте этой зависимости не учитывались превышения порога в каналах, в которых присутствует только шум, так как такие события маловероятны и практически не влияют на величину среднего квадрата ошибки, если число каналов не очень велико. При достаточно большом числе каналов шумовые превышения могут привести к значительным ошибкам, влияющим на величину среднего квадрата, но их также можно не учитывать, если при наличии превышений по-

рога в каналах с большими расстройками друг относительно друга принимаются решения о наличии нескольких сигналов. Можно не учитывать и такие события, когда сигнал пропущен, но в одном из каналов с большой расстройкой относительно сигнала есть превышения порога шумом; в этом случае величину σ^2 на рис. 5.4 точнее называть средним квадратом ошибки при условии правильного обнаружения.

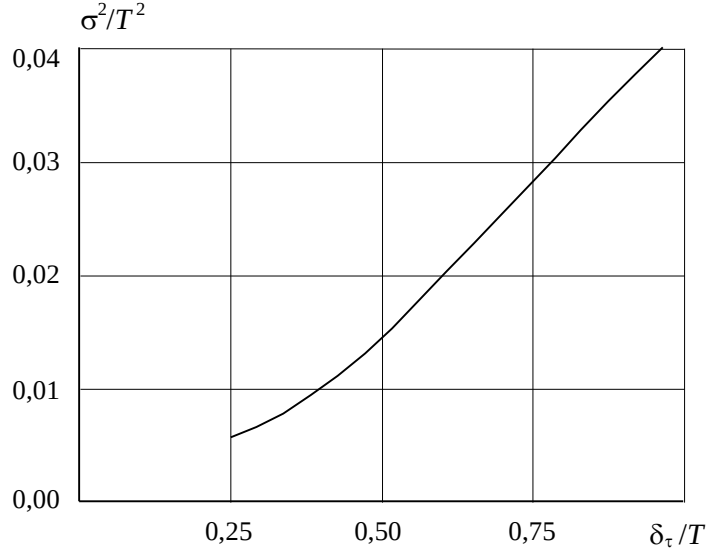


Рис. 5.4. Зависимость среднего квадрата ошибки измерения задержки сигнала от расстройки между каналами

Зависимость на рис. 5.4 построена для $N = 1$, $F = 10^{-6}$, $\rho_0 = 100$, однако расчёты показывают, что средний квадрат ошибки измерения очень слабо зависит от числа импульсов в пачке N, вероятности ложной тревоги F и от среднего значения отношения сигнал/шум ρ_0. Средний квадрат ошибки измерения неизвестного параметра слабо зависит и от вида этого параметра, поэтому рис. 5.4 можно использовать для определения ошибок измерения частоты сигнала; при этом следует считать, что по оси абсцисс отложена величина $\delta_\Omega/(2\pi T)$, а по оси ординат отложена величина $\sigma^2/(2\pi T)^2$. Примерно такими же будут ошибки и при совместном измерении задержки и частоты сигнала, если за оценочные значения принимать центры тяжести двумерных картин, т. е. среднеарифметические значения значений параметров, на которые настроены каналы с превышениями.

Следует оговориться, что изложенные выводы справедливы, если отношение сигнал/шум не настолько велико, что происходят превышения порога боковыми лепестками автокорреляционной функции.

Зная величины ошибок и вероятности этих ошибок, можно найти вероятность превышения некоторой заданной величины абсолютным значением ошибки измерения. На рис. 5.5 по оси ординат отложена величина $P(U)$ — вероятность того, что абсолютное значение ошибки измерения задержки превысит величину U, по оси абсцисс отложена величина U/δ_τ; зависимости построены для $N = 1$, $F = 10^{-6}$, $\rho_0 = 100$. Считалось, что задержка сигнала имеет широкое и медленно меняющееся априорное распределение.

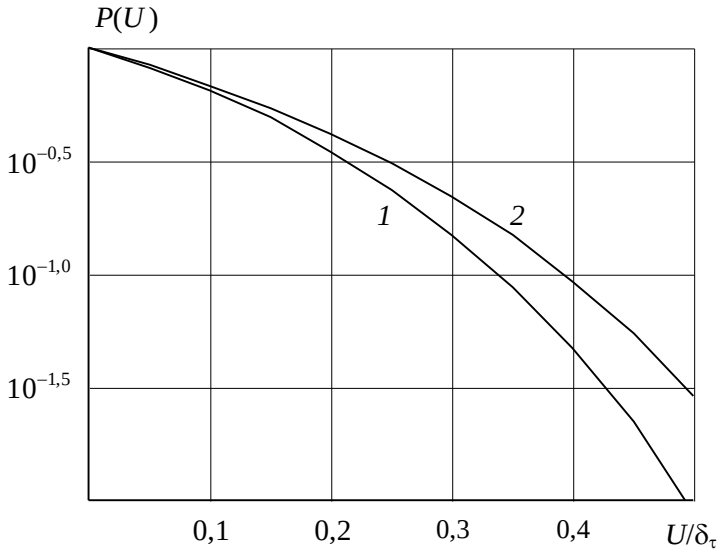


Рис. 5.5. Интегральные распределения абсолютного значения ошибки измерения задержки:
1 — $\delta_\tau = T$; *2* — $\delta_\tau = T/2$

Интересно сравнить, хотя бы примерно, полученные результаты для ошибок измерений с ошибками измерений при отборе канала с максимальной выходной величиной, когда в качестве оценки параметров принимаются параметры сигнала, на которые настроен канал с максимальным выходом. Если s_ν — значения параметра, на которые настроены каналы, $\tilde{s}$ — оценочное значение параметра, то для схемы отбора канала с максимальным выходом будет иметь место неравенство:

$$(s-\tilde{s})^2 \geq \min_{\nu=1,2,\ldots,n}\left\{(s-s_\nu)^2\right\}. \qquad (5.6.1)$$

Усредняя (1) по s, получим

$$\sigma^2 \geq \delta_s^2/12. \qquad (5.6.2)$$

Сравнение (2) с результатами на рис. 5.4 показывает, что даже полученная нижняя граница среднего квадрата ошибки измерения схемой отбора канала с максимальным выходом оказывается хуже, чем средний квадрат ошибки измерения рассмотренным способом. Этот результат можно объяснить тем, что при оценке параметров по центру тяжести картины превышений возможные оценочные значения расположены друг от друга на меньшем расстоянии, чем оценочные значения при отборе канала с максимальным выходом.

Заметим, что нижней границей среднего квадрата ошибки измерения одного неизвестного параметра при формировании оценок по картинам превышений является величина $\delta_s^2/48$.

5.7. Ошибки измерения параметров сигнала с неизвестной амплитудой двумя расстроенными каналами

При формировании оценок по картинам превышений используются результаты обработки сигнала, получаемые в процессе решения задачи обнаружения. Информация о полезных параметрах сигнала, содержащаяся в принимаемой реализации, извлекается при этом не наилучшим образом. Множество оценочных значений параметров дискретно, поэтому ошибки измерения ограничены снизу некоторой величиной и не уменьшаются до нуля при возрастании отношения сигнал/шум.

Устранить этот недостаток можно путём использования амплитудной информации для формирования оценок. При измерении одного параметра для этой цели подходят максимальные выходные величины двух соседних каналов, по крайней мере, в одном из которых обнаружен сигнал.

Измерение параметров сигнала двумя расстроенными каналами имеет и самостоятельное значение, таким способом можно построить дискриминатор для следящего устройства.

Ошибки измерения неизвестных параметров двумя расстроенными каналами изучались в [20]. Однако анализ там был проведен при предположениях, которые эквивалентны тому, что амплитуда принимаемого сигнала точно известна наблюдателю. Отказ от этих предположений, как показывают исследования, может привести к качественно другим результатам.

Когда амплитуда сигнала неизвестна, то одной из возможностей формирования оценок неизвестных параметров является образование отношения разности выходных величин каналов к их сумме [84].

Если в отсутствие шума зависимость отношения разности к сумме от измеряемого параметра имеет достаточно широкий линейный участок, то оценочные значения параметра могут выбираться пропорциональными отношению разности к сумме. В противном случае в качестве оценочных значений может служить соответствующая нелинейная функция отношения, которую с достаточной точностью можно заменить несколькими членами степенного ряда.

Задача вычисления ошибок измерения в обоих случаях будет сводиться к определению статистических характеристик случайной величины, являющейся отношением разности результатов обработки сигнала в расстроенных каналах к их сумме. Методам исследования этих характеристик посвящён данный параграф. Применение полученных результатов иллюстрируется в следующем параграфе.

Заметим, что рассматриваться будут безусловные характеристики, получаемые без учёта наличия превышений порога. Поэтому результаты применимы, в первую очередь, для анализа дискриминаторов.

Пусть R_1 и R_2 — положительные случайные величины, имеющие совместное распределение $W(R_1, R_2)$. Под величинами R_1 и R_2 в дальнейшем будут подразумеваться значения квадратов огибающей сигнала на выходах каналов. Поэтому, если при обработке сигнала в каналах используется квадратичный детектор, то при формировании оценочных значений определяется величина $y = (R_2 - R_1)/(R_2 + R_1)$.

Для получения статистических характеристик случайной величины y, являющейся функцией от двух случайных переменных R_1 и R_2, применим специальный метод, проиллюстрированный в § 2.5.

Случайная величина y распределена по закону

$$W(y) = 2\int_0^\infty u W\big(u(1-y), u(1+y)\big)du, \qquad (5.7.1)$$

причём $W(y) = 0$, если $|y| > 1$. Переходя от распределения $W(R_1, R_2)$ к его изображению $F(p_1, p_2)$, из формулы (1) получим

$$W(y) = -\frac{2}{(1+y)^2}\,\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} F^{(0,1)}\left(p, -p\frac{1-y}{1+y}\right)dp.$$

Здесь и в дальнейшем используется обозначение

$$F^{(\nu,\mu)}(p_1, p_2) = \frac{\partial^{\nu+\mu}}{\partial p_1^{\nu}\partial p_2^{\mu}} F(p_1, p_2).$$

Для интегрального распределения можно получить выражение

$$P(y) = \int_{-1}^{y} W(t)\,dt = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{1}{p} F\left(p, -p\frac{1-y}{1+y}\right)dp. \qquad (5.7.2)$$

Если обе части равенства

$$\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} = \int_0^\infty \left\{\frac{\partial}{\partial t_1}\mathrm{e}^{-R_1 t_1 - R_2 t_2} - \frac{\partial}{\partial t_2}\mathrm{e}^{-R_1 t_1 - R_2 t_2}\right\}\Bigg|_{t_2 = t_1} dt_1$$

умножить на $W(R_1, R_2)$, а затем проинтегрировать по R_1 и R_2, то получим выражение для первого момента случайной величины y:

$$m_1 = \overline{y} = \int_0^\infty \left(F^{(1,0)}(p,\,p) - F^{(0,1)}(p,\,p)\right)dp\,. \qquad (5.7.3)$$

Аналогично можно получить выражение для произвольного момента:

$$m_n = \overline{y^n} = \int_0^\infty \frac{p^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu C_n^\nu F^{(n-\nu,\,\nu)}(p,\,p)\,dp\,. \qquad (5.7.4)$$

Если при обработке сигнала в каналах используется линейный детектор, то выходными величинами в каналах являются $\sqrt{2R_1}$ и $\sqrt{2R_2}$, поэтому при измерении параметров сигнала образуется отношение

$$z = (\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1})\big/(\sqrt{R_2} + \sqrt{R_1})\,.$$

Дифференциальное и интегральное распределения величины z довольно простым образом выражаются через полученные выше распределения, соответствующие каналам с квадратичным детектором:

$$W_{\text{лин}}(z) = \frac{2(1-z^2)}{(1+z^2)^2}W\left(\frac{2z}{1+z^2}\right), \qquad P_{\text{лин}}(z) = \int_{-1}^{z} W_{\text{лин}}(t)\,dt = P\left(\frac{2z}{1+z^2}\right).$$

В связи с этим обстоятельством аналитические выражения распределений величины z при дальнейшем изложении будут опускаться.

При использовании линейного детектора будет иметь место следующее соотношение для моментов отношения разности к сумме:

$$m_\nu = \overline{z^\nu} = \frac{4\nu}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2\nu\varphi}{r}F(r^2\cos^2\varphi,\,r^2\sin^2\varphi)\,dr\,d\varphi\,.$$

Это соотношение получается путём усреднения обеих частей равенства

$$\left(\frac{\sqrt{R_2}-\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_2}+\sqrt{R_1}}\right)^\nu = \frac{4\nu}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2\nu\varphi}{r}\exp\left\{-r^2\left(R_1\cos^2\varphi + R_2\sin^2\varphi\right)\right\}dr\,d\varphi\,,$$

которое, в свою очередь, следует из формул

$$\left(\frac{\sqrt{R_2}-\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_2}+\sqrt{R_1}}\right)^\nu = \nu\int_0^\infty\frac{1}{t}\exp\left\{-(R_2+R_1)t\right\}I_\nu\left((R_2-R_1)t\right)dt\,,$$

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{e}^{x\cos\theta}\cos\nu\theta\,d\theta\,.$$

Если на вход двухканальной системы поступает аддитивная смесь нефлуктуирующего импульсного сигнала и шума, то $F(p_1, p_2)$ определяется выражением (5.2.1). Подставляя это выражение в формулу (2), после преобразований получим

$$P(y) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y}{\sqrt{1 - r_0^2(1-y^2)}}\right)\{1 - J(A, B)\} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{1 - r_0^2(1-y^2)}}\right)J(B, A),$$

где

$$A = \frac{(1-y^2)Q + [q_1(1+y) - q_2(1-y)]\left[y + \sqrt{1 - r_0^2(1-y^2)}\right]}{4\left[1 - r_0^2(1-y^2)\right]},$$

$$B = \frac{(1-y^2)Q + [q_1(1+y) - q_2(1-y)]\left[y - \sqrt{1 - r_0^2(1-y^2)}\right]}{4\left[1 - r_0^2(1-y^2)\right]}.$$

Обозначения и формулы для r_0, q_1, q_2, Q даны в § 5.2 при расшифровке параметров, входящих в формулу для $F(p_1, p_2)$.

Аналитические выражения для моментов m_1 и m_2 в общем случае не вычисляются. В частном случае для квадратичного детектора, когда $q_1 = q_2$, $\cos\psi = 1$ (формулу для $\cos\psi$ см. в § 5.2), из формул (3) и (4) получим:

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = \left[\frac{1 - r_0^2}{2r_0^3} - \frac{q_1(1-r_0)^2(2+r_0)}{2r_0^4} + \frac{q_1^2(1-r_0)^3}{4r_0^5}\right] \times$$

$$\times \left[\mathrm{Ei}\left(\frac{q_1}{r_0}\right) - \mathrm{Ei}\left(\frac{q_1}{r_0}\,\frac{1-r_0}{1+r_0}\right)\right]\exp\left\{-\frac{q_1}{r_0}\right\} + \frac{3(1-r_0)(1-r_0^2)}{4r_0^3} -$$

$$- \frac{(1-r_0^2)(3+r_0)}{4r_0^3}\exp\left\{-\frac{2q_1}{1+r_0}\right\} - \frac{q_1(1-r_0)^3}{4r_0^4} +$$

$$+ \frac{q_1(1-r_0)(1-r_0^2)}{4r_0^4}\exp\left\{-\frac{2q_1}{1+r_0}\right\},$$

где $\mathrm{Ei}(\cdot)$ — интегральная показательная функция:

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t}\mathrm{e}^t\, dt.$$

Если $q_1 = q_2$ и $q_1 > 5 \ldots 10$, то $m_2 \approx (1 - r_0)/q_1$.

При $r_0 = 0$ случайные величины R_1 и R_2 независимы и распределение $W(R_1, R_2)$ можно представить в виде произведения одномерных распределений:

$$W(R_1, R_2) = \mathrm{e}^{-q_1 - R_1} I_0(2\sqrt{q_1 R_1}) \cdot \mathrm{e}^{-q_2 - R_2} I_0(2\sqrt{q_2 R_2}).$$

Распределения $W(y)$ и $P(y)$, а также моменты m_1 и m_2 при использовании квадратичного детектора в этом случае можно вычислить, пользуясь любым из описанных выше способов. Получаемые результаты имеют вид:

$$W(y) = \frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{q_1(1+y)+q_2(1-y)}{2}\right\}\left\{\left[1+\frac{q_1(1-y)+q_2(1+y)}{2}\right]\times\right.$$

$$\left.\times I_0\left(\sqrt{q_1 q_2(1-y^2)}\right)+\sqrt{q_1 q_2(1-y^2)}\, I_1\left(\sqrt{q_1 q_2(1-y^2)}\right)\right\},$$

$$P(y) = \frac{1-y}{2}\left\{1 - J\left(\frac{q_1(1+y)}{2}, \frac{q_2(1-y)}{2}\right)\right\} + \frac{1+y}{2} J\left(\frac{q_2(1-y)}{2}, \frac{q_1(1+y)}{2}\right),$$

$$m_1 = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} - 2\frac{q_2 - q_1}{(q_2 + q_1)^2} + 2\frac{q_2 - q_1}{(q_2 + q_1)^3} - 2\frac{q_2 - q_1}{(q_2 + q_1)^3}\mathrm{e}^{-q_1 - q_2},$$

$$m_2 = \left(\frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1}\right)^2 + 4\frac{2q_1 q_2 - (q_2 - q_1)^2}{(q_2 + q_1)^4}\times$$

$$\times\left\{q_2 + q_1 - 3 + \frac{4}{q_2 + q_1} - \left(1 + \frac{4}{q_2 + q_1}\right)\mathrm{e}^{-q_1 - q_2}\right\}.$$

Аналитические выражения для моментов m_1 и m_2 при использовании линейного детектора удаётся получить лишь в случае $r_0 = 0$, $q_1 = q_2$:

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = -2(1 + q_1) - \mathrm{e}^{-2q_1} + \pi\mathrm{e}^{-q_1}\left\{\left(1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2}\right) I_0^2\left(\frac{q_1}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(2q_1 + q_1^2\right) I_0\left(\frac{q_1}{2}\right) I_1\left(\frac{q_1}{2}\right) + \frac{q_1^2}{2} I_1^2\left(\frac{q_1}{2}\right)\right\}.$$

При этом если $q_1 > 5 \ldots 10$, то $m_2 \approx 1/(4q_1)$.

При флуктуирующей по рэлеевскому закону амплитуде сигнала изображение $F(p_1, p_2)$ определяется формулой (5.2.2). Дифференци-

альное и интегральное распределения отношения разности к сумме будут иметь вид:

$$W(y)=\frac{2(1-r^2)\left[(1-y)(1+\rho_2)+(1+y)(1+\rho_1)\right](1+\rho_1)(1+\rho_2)}{\left\{\left[(1-y)(1+\rho_2)+(1+y)(1+\rho_1)\right]^2-4r^2(1-y^2)(1+\rho_1)(1+\rho_2)\right\}^{3/2}},$$

$$P(y)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times$$

$$\times\frac{(1-y)(1+\rho_2)-(1+y)(1+\rho_1)}{\sqrt{\left[(1-y)(1+\rho_2)+(1+y)(1+\rho_1)\right]^2-4r^2(1-y^2)(1+\rho_1)(1+\rho_2)}}.$$

Формулы для r, ρ_1, ρ_2 см. в § 5.2.

Моменты m_1 и m_2 при квадратичном детекторе имеют вид

$$m_1=\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}-2(1-r^2)\frac{\alpha}{\gamma^3}\ln\frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma},$$

$$m_2=\frac{\alpha^2}{\gamma^2}+8(1-r^2)\frac{2r^2-\alpha^2}{\gamma^4}\left\{\left(\frac{\beta}{2\gamma}\ln\frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma}\right)-1\right\},$$

где

$$\alpha=\sqrt{\frac{1+\rho_2}{1+\rho_1}}-\sqrt{\frac{1+\rho_1}{1+\rho_2}},\qquad \beta=\sqrt{\frac{1+\rho_2}{1+\rho_1}}+\sqrt{\frac{1+\rho_1}{1+\rho_2}},\qquad \gamma=\sqrt{\alpha^2+4r^2}.$$

Если в каналах используется линейный детектор, то

$$m_1=\frac{\alpha\beta}{\delta^2}+\frac{2\beta(1-r^2)}{\delta^3}\ln\frac{(\alpha+\delta)^2}{4(1-r^2)}+\frac{2\alpha}{\delta^2}\left\{(1-r^2)\Pi_1\left(-\frac{\beta^2}{4},r\right)-\mathrm{E}(r)\right\},$$

$$m_2=-\frac{\alpha^2}{\delta^2}+\frac{2\beta}{\delta^4}\left[8(1-r^2)-\alpha^2\right]\left[2\mathrm{E}(r)-\beta\right]-\frac{4(1-r^2)}{\delta^2}\left[\frac{4}{\beta}\mathrm{K}(r)-1\right]+$$

$$+\frac{8\alpha(1-r^2)(\beta^2+2r^2)}{\delta^5}\left\{\frac{\alpha\delta}{\beta}\Pi_1\left(-\frac{\beta^2}{4},r\right)+\ln\frac{(\alpha+\delta)^2}{4(1-r^2)}\right\},$$

где $\delta^2=\alpha^2+4(1-r^2)$; $\mathrm{K}(r)$ и $\mathrm{E}(r)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго родов;

$$\Pi_1(c,r)=\int_0^1\frac{1}{(1+cx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-r^2x^2)}}\,dx\quad —$$

полный эллиптический интеграл третьего рода, который может быть выражен через неполные эллиптические интегралы первого и второго родов [7, стр. 28]. В данном случае

$$\frac{\alpha\delta}{2\beta}\Pi_1\left(-\frac{\beta^2}{4}, r\right) = \mathrm{E}(r)\,\mathrm{F}(\theta, r) - \mathrm{K}(r)\,\mathrm{E}(\theta, r),$$

где $\theta = \arcsin(2/\beta)$; $\mathrm{F}(\theta, r)$, $\mathrm{E}(\theta, r)$ — неполные эллиптические интегралы первого и второго родов.

Если $\rho_1 = \rho_2$, то $m_1 = 0$, $m_2 = 1 + 4\left[\mathrm{E}(r) - 1\right]/(1 - r^2) - 2\mathrm{K}(r)$.

5.8. Измерение частоты прямоугольного импульса

Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрим сигнал, представляющий собой импульс с прямоугольной огибающей. При этом целесообразно оценить ошибки измерения неизвестного параметра и сравнить их с дисперсией эффективной оценки. Поскольку общая формула для дисперсии эффективной оценки временного положения прямоугольного импульса формально приводит к нулевым ошибкам, то в качестве неизвестного параметра рассматривается частота.

Считаем, что каналы оптимальны по отношению к принимаемому сигналу. В этом случае $C_{\nu\mu}(\tau, \Omega) \equiv C(\tau, \Omega)$; ν, $\mu = 0, 1, 2$. Кроме того, будем полагать, что задержка сигнала известна и каналы настроены на известное значение задержки сигнала. Начало отсчёта измеряемой частоты сигнала ω находится в середине интервала, границами которого служат значения частоты, на которые настроены каналы, т. е. $\omega = \omega_0 - (\omega_1 + \omega_2)/2$. Оценочное значение $\tilde{\omega}$ неизвестной частоты ω определяется по формуле

$$\tilde{\omega} = \frac{\alpha}{2}\,\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}, \tag{5.8.1}$$

если в каналах используется квадратичный детектор, или по формуле

$$\tilde{\omega} = \alpha\,\frac{\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1}}{\sqrt{R_2} + \sqrt{R_1}}, \tag{5.8.2}$$

если в каналах используется линейный детектор. Коэффициент α в формулах (1) и (2) выбирается таким образом, чтобы в отсутствие шума и при малых значениях ω из этих формул следовало $\tilde{\omega} = \omega$.

Замечая, что в отсутствие шума величины R_1 и R_2 пропорциональны значениям $\left|C(0, -\Omega_0 - \omega)\right|^2$ и $\left|C(0, \Omega_0 - \omega)\right|^2$, где Ω_0 — половина расстройки между каналами, и что автокорреляционная функция им-

пульса длительностью T при нулевом временном аргументе имеет вид $C(0, \Omega) = [\sin(\Omega T/2)]/(\Omega T/2)$, получим

$$\alpha = \frac{\Omega_0}{\left|1 - \frac{\Omega_0 T}{2} \operatorname{ctg} \frac{\Omega_0 T}{2}\right|}.$$

Анализ дискриминационных характеристик (т. е. зависимостей $\tilde{\omega}$ от ω в отсутствие шума) показывает, что для получения наибольшего линейного участка необходимо выбирать определённые значения расстройки между каналами. При использовании квадратичного детектора наилучший результат можно получить при $\Omega_0 \approx 0{,}2\ (2\pi/T)$. Ширина линейного участка в этом случае составляет около $1{,}5 \cdot (2\pi/T)$. Если используется линейный детектор, то при расстройке между каналами, равной $2\pi/T$, дискриминационная характеристика в пределах расстройки между каналами строго линейна и ширина линейного участка равна $2\pi/T$.

Дальнейшие результаты приводятся для этих значений расстроек между каналами.

Точность измерения при наличии шума характеризуется средним квадратом ошибки измерения:

$$\Delta^2(\omega) = \overline{(\tilde{\omega} - \omega)^2} = \overline{\tilde{\omega}^2} - 2\omega\overline{\tilde{\omega}} + \omega^2. \qquad (5.8.3)$$

При помощи формул (1), (2) и (3) средний квадрат ошибки измерения можно выразить через моменты m_1 и m_2. По получаемой таким образом формуле рассчитывались кривые, представленные на рисунках. При этом моменты m_1 и m_2 вычислялись, в основном, по приведенным в предыдущем параграфе формулам, а в тех случаях, когда не удалось получить аналитические выражения для m_1 и m_2, для их вычисления использовались численные методы интегрирования.

Приведенные на рис. 5.6 результаты показывают, что ошибки измерения существенно возрастают при смещении измеряемой частоты сигнала относительно центра дискриминационной характеристики.

Здесь, как и ранее, через q_0 обозначено отношение сигнал/шум для нефлуктуирующего сигнала; ρ_0 — среднее значение отношения сигнал/шум для сигнала с амплитудой, флуктуирующей по рэлеевскому закону.

Результаты численных расчётов сравниваются на рис. 5.7 с дисперсией эффективной оценки [20]

$$\sigma^2_{\text{эф}} = \frac{6}{T^2} \frac{1 + \rho_0}{\rho_0^2}, \qquad (5.8.4)$$

которая показывает минимальное значение ошибки измерения.

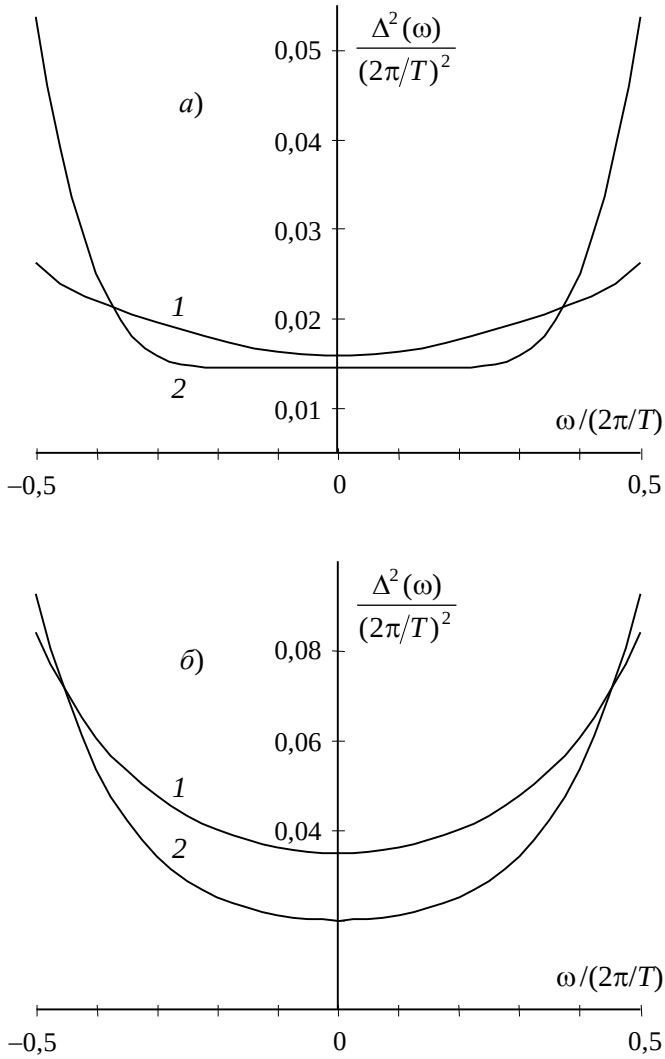


Рис. 5.6. Зависимость среднего квадрата ошибки измерения от величины измеряемой частоты:

а — нефлуктуирующий сигнал, $q_0 = 10$;
б — флуктуирующий сигнал, $\rho_0 = 10$;
1 — квадратичный детектор; *2* — линейный детектор

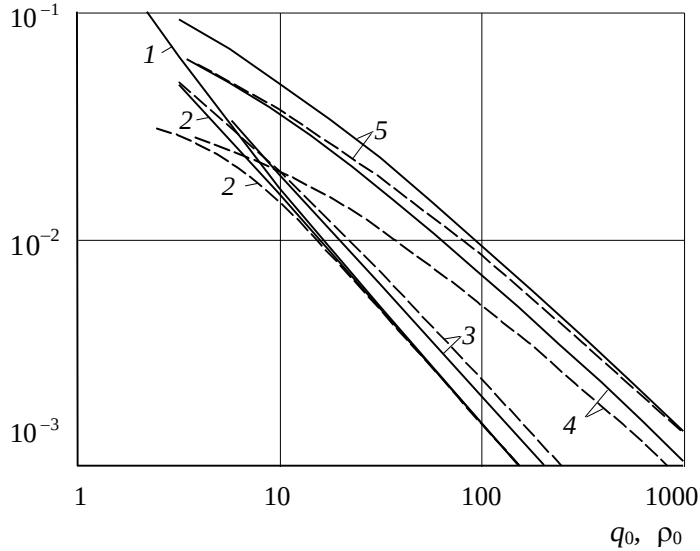


Рис. 5.7. Зависимости дисперсии эффективной оценки и среднего квадрата ошибки измерения от отношения сигнал/шум:

1 — $\sigma^2_{эф}/(2\pi/T)^2$; *2* — $\Delta^2(0)/(2\pi/T)^2$, нефлуктуирующий сигнал; *3* — $\Delta_1^2/(2\pi/T)^2$, нефлуктуирующий сигнал; *4* — $\Delta^2(0)/(2\pi/T)^2$, флуктуирующий сигнал; *5* — $\Delta_1^2/(2\pi/T)^2$, флуктуирующий сигнал (сплошные кривые *2 – 5* — для квадратичного детектора, пунктир *2 – 5* — для линейного детектора)

Кривыми *3* и *5* на рис. 5.7 показан средний квадрат ошибки измерения, когда измеряемая частота сигнала с равной вероятностью может принимать любое значение в пределах $\pm\pi/T$. Эта величина находилась численными методами по формуле

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{2\pi/T}\int_{-\pi/T}^{\pi/T}\Delta^2(\omega)\,d\omega\,.$$

При небольших значениях отношения сигнал/шум кривые *2 – 5* проходят ниже зависимости для дисперсии эффективной оценки. Это обстоятельство объясняется тем, что дисперсия эффективной оценки (4) получена для случая, когда при измерении не используются априорные характеристики измеряемого параметра и поэтому сравнение ошибок измерения с дисперсией эффективной оценки (4), видимо, можно считать корректным лишь в том случае, если дисперсия априорного распределения параметра существенно больше дисперсии эффективной оценки.

Из анализа рис. 5.7 видно, что при больших отношениях сигнал/шум флуктуации амплитуды сигнала приводят к существенному увеличению ошибок измерения.

6. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ ПРИ ДИСКРЕТНОМ ОБЗОРЕ ПО УГЛОВЫМ КООРДИНАТАМ

6.1. Введение

До сих пор мы рассматривали вопросы оценки характеристик обнаружения сигнала с известными координатами или с неизвестными задержкой и (или) частотой. Теперь мы перейдём к характеристикам обнаружения сигнала с неизвестными угловыми координатами. Задержку и частоту сигнала при этом будем условно считать известными или совпадающими с соответствующими параметрами, на которые настроен один из каналов обнаружения. При общей оценке характеристик реального устройства это допущение с некоторой степенью приближения можно снять путём учёта рассмотренного ранее коэффициента энергетических потерь.

Не останавливаясь подробно на природе угловых координат, обозначим их через ε и β. Отметим лишь, что в большей части случаев, когда используется биконическая система координат, в качестве угловых координат выступают углы отклонения в вертикальной и наклонной плоскостях. Хотя не исключено и использование сферической системы координат, и тогда под ε и β следует подразумевать угол места и азимут.

Приёмное устройство обнаружения обладает избирательностью по угловым координатам, которую будем задавать нормированной характеристикой направленности $G^2(\varepsilon, \beta)$. Функция $G^2(\varepsilon, \beta)$ безразмерная, она описывает зависимость отношения сигнал/шум от угловых координат, причём в главном направлении, т. е. когда угловые координаты сигнала совпадают с координатами настройки приёмного устройства, значение этой функции равно 1.

Теперь мы будем полагать, что область обнаружения хотя бы по одной угловой координате имеет размер, превышающий ширину характеристики направленности.

Возникает задача, аналогичная обнаружению сигнала с неизвестной задержкой и частотой. Разумеется, она может быть решена путём построения многоканального устройства, каждый канал которого настроен на определённые угловые координаты. Однако такое устройство будет довольно сложным. Представляет практический интерес другой способ решения данной задачи, путём обзора, когда один угловой канал настраивается последовательно во времени на различные дискретные значения угловых координат.

Сектор обзора, таким образом, оказывается разбитым на последовательно просматриваемые элементарные угловые ячейки. После просмотра всех угловых элементов заканчивается цикл обзора и начинается следующий, т. е. осуществляется новый последовательный перебор угловых элементов. Такие циклы обзора могут повторяться неоднократно.

Сигнал будем считать обнаруженным, если есть превышения порога хотя бы в одном цикле обзора. Если флуктуации сигнала полностью независимы от цикла к циклу и условия обнаружения не меняются во времени, то вероятность обнаружения сигнала за m циклов D_m связана с вероятностью обнаружения за один цикл D формулой $D_m = 1-(1-D)^m$.

В ряде случаев методы оценки вероятности обнаружения сигнала за один цикл обзора сходны с аналогичными методами для многоканальных систем. Так, пользуясь полученными в § 5.3 выводами, можно проанализировать влияние возможных расстроек сигнала по угловым координатам относительно центров элементов обзора и найти соответствующий коэффициент энергетических потерь. Этому вопросу посвящён следующий параграф.

Однако оценка характеристик обнаружения при обзоре имеет и некоторые особенности. Анализ этих особенностей производится в §§ 6.3 – 6.5.

6.2. Коэффициент энергетических потерь

Будем предполагать, что угловые элементы расположены равномерно в секторе обзора. Полезный сигнал представляет собой дружно флуктуирующую пачку импульсов. Амплитуды флуктуирующих сигналов, принимаемых в соседних элементах, полностью коррелированы. Флуктуации амплитуд — рэлеевские.

В этих условиях вероятность превышения порога λ при наличии сигнала определяется формулой

$$D(\varepsilon,\beta) = \left(\frac{1+\vartheta_0 G^2(\varepsilon,\beta)}{\vartheta_0 G^2(\varepsilon,\beta)}\right)^{N-1} \exp\left\{-\frac{\lambda}{1+\vartheta_0 G^2(\varepsilon,\beta)}\right\},$$

где N — число импульсов, ε и β — угловые координаты сигнала, ϑ_0 — среднее значение отношения сигнал/шум для пачки импульсов при совпадении угловых координат сигнала и координат главного направления характеристики направленности.

Теперь распространим выводы § 5.3 на рассматриваемую задачу. Если априорное распределение угловых координат равномерное или медленно меняется в пределах расстройки между центрами соседних угловых элементов, то вероятность обнаружения сигнала можно вычислить по приближённой формуле

$$D \approx \left(\frac{1+\vartheta}{\vartheta}\right)^{N-1} \exp\left\{-\frac{\lambda}{1+\vartheta}\right\},$$

где $\vartheta = \eta_y \vartheta_0$, η_y — коэффициент потерь из-за наличия энергетического рельефа по угловым координатам, определяемый по формулам

$$\eta_y = \frac{1}{A_1}, \qquad A_1 = \frac{2}{\delta_\varepsilon}\frac{2}{\delta_\beta}\int_0^{\delta_\varepsilon/2}\int_0^{\delta_\beta/2}\frac{1}{G^2(\varepsilon,\beta)}\,d\varepsilon\,d\beta.$$

В формуле для A_1 отсчёт координат ε и β в характеристике направленности $G^2(\varepsilon,\beta)$ ведётся относительно главного направления; δ_ε и δ_β — расстояния между центрами соседних угловых элементов.

Теперь предположим, что $G^2(\varepsilon,\beta)$ является произведением передающей характеристики $G_1(\varepsilon,\beta)$ и приёмной характеристики $G_2(\varepsilon,\beta)$ и что при $\varepsilon \le \delta_\varepsilon/2$ и $\beta \le \delta_\beta/2$ характеристики можно аппроксимировать гауссовыми кривыми

$$G_1(\varepsilon,\beta) = \exp\left\{-(\varepsilon^2/\theta_{\varepsilon1}^2 + \beta^2/\theta_{\beta1}^2)\ln 2\right\},$$

$$G_2(\varepsilon,\beta) = \exp\left\{-(\varepsilon^2/\theta_{\varepsilon2}^2 + \beta^2/\theta_{\beta2}^2)\ln 2\right\},$$

где $\theta_{\varepsilon1}$, $\theta_{\beta1}$, $\theta_{\varepsilon2}$, $\theta_{\beta2}$ — половины ширин характеристик направленности по уровню половинной мощности. Тогда

$$G^2(\varepsilon,\beta) = G_1(\varepsilon,\beta)\cdot G_2(\varepsilon,\beta) = \exp\{-2(\varepsilon^2/\theta_\varepsilon^2 + \beta^2/\theta_\beta^2)\ln 2\},$$

где

$$\frac{1}{\theta_\varepsilon^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_{\varepsilon1}^2} + \frac{1}{\theta_{\varepsilon2}^2}\right), \qquad \frac{1}{\theta_\beta^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_{\beta1}^2} + \frac{1}{\theta_{\beta2}^2}\right).$$

Если передающая и приёмная характеристики направленности совпадают, то

$$\theta_\varepsilon = \theta_{\varepsilon1} = \theta_{\varepsilon2}, \qquad \theta_\beta = \theta_{\beta1} = \theta_{\beta2}, \qquad G(\varepsilon,\beta) = G_1(\varepsilon,\beta) = G_2(\varepsilon,\beta).$$

Окончательно получим

$$A_1 = \frac{1}{u_\varepsilon}\int_0^{u_\varepsilon}\exp(t^2)\,dt\cdot\frac{1}{u_\beta}\int_0^{u_\beta}\exp(t^2)\,dt,$$

где $u_\varepsilon = \sqrt{2\ln 2}\cdot\delta_\varepsilon/(2\theta_\varepsilon)$, $u_\beta = \sqrt{2\ln 2}\cdot\delta_\beta/(2\theta_\beta)$. Таблицы интеграла от $\exp(t^2)$ есть в [100].

На рис. 6.1 изображены линии равных коэффициентов потерь η_y, построенные с помощью приведенных выше формул.

При фиксированном коэффициенте потерь число угловых элементов минимально, когда $\delta_\varepsilon/(2\theta_\varepsilon) = \delta_\beta/(2\theta_\beta)$. Необходимые расстояния между центрами соседних угловых элементов в этом случае определяются по точке пересечения пунктирной линии с соответствующей линией равных коэффициентов потерь.

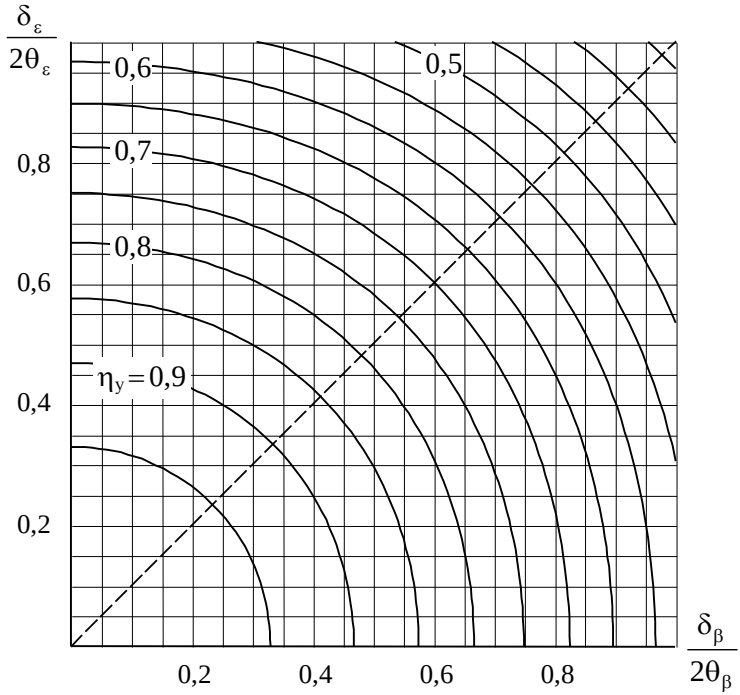


Рис. 6.1. Линии равных коэффициентов потерь

Коэффициент потерь η_y можно представить в виде произведения двух коэффициентов: $\eta_y = \eta(x_\varepsilon)\cdot\eta(x_\beta)$, где $x_\varepsilon = \delta_\varepsilon/(2\theta_\varepsilon)$, $x_\beta = \delta_\beta/(2\theta_\beta)$. Зависимость $\eta(x)$ при составлении математических моделей удобно задавать аппроксимацией Паде

$$\eta(x) = \frac{(a_2x^2 + a_1)x^2 + 1}{(b_2x^2 + b_1)x^2 + 1},$$

где $a_2 = +0{,}09679$; $a_1 = -0{,}56281$; $b_2 = +0{,}02890$; $b_1 = -0{,}10071$. Если потери нужно выражать в децибелах, то удобнее другая формула:

$$10\lg\eta(x) = -\frac{(p_2x^2 + p_1)x^2}{(q_2x^2 + q_1)x^2 + 1},$$

где $p_2 = -0{,}21920$; $p_1 = +2{,}00687$; $q_2 = +0{,}03808$; $q_1 = -0{,}29406$.

При малых расстройках между угловыми элементами

$$\eta_y \approx 1 - \frac{\ln 2}{6}\left[\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\theta_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\delta_\beta}{\theta_\beta}\right)^2\right].$$

В этом случае линии равных коэффициентов потерь аппроксимируются окружностями.

Теперь представим себе, что производится несколько циклов обзора. Если за время цикла обзора угловые координаты сигнала изменяются, то коэффициент потерь, обусловленный расстройками между соседними элементами обзора, также будет определяться полученными выражениями. Если же координаты не меняются, то по априорному распределению нужно усреднять не вероятность обнаружения за один цикл, а общую (накопленную) вероятность обнаружения. Однако проверки показывают, что полученный таким образом коэффициент потерь при сравнительно небольшом числе циклов обзора мало отличается от полученного выше, поэтому и в этом случае коэффициент потерь можно определять изложенными методами.

6.3. Оптимальное разбиение области обзора на элементарные ячейки

Коэффициент потерь не зависит от того, производится ли по той или иной координате обзор или область обнаружения перекрывается многоканальной системой. Но если рассматривать энергетические характеристики устройства обнаружения в целом, то для задач обзора появляется отличительная особенность. Эта особенность состоит в том, что при обзоре с фиксированными энергетическими затратами на всю область обзора существует оптимальное число элементов обзора, в то время как при обнаружении многоканальной системой надёжность обнаружения увеличивается с ростом числа каналов.

Если в каждом угловом положении обработка сигнала когерентная, то вероятность обнаружения зависит от произведения коэффициента потерь η_y на среднее значение отношения сигнал/шум на один элемент обзора ρ_0. При фиксированных затратах на цикл обзора это произведение будет меняться с изменением числа элементов обзора, причём если один из сомножителей будет увеличиваться, то другой — уменьшаться. Нужно выбрать такое число элементов обзора, чтобы произведение $\eta_y\rho_0$ было максимально.

Число элементов обзора обратно пропорционально расстояниям δ_ε и δ_β, отношение сигнал/шум на один элемент обзора обратно пропорционально числу элементов обзора, поэтому можно записать $\rho_0 \sim (\delta_\varepsilon/\theta_\varepsilon)(\delta_\beta/\theta_\beta)$ или $\eta_y\rho_0 \sim \eta_y(\delta_\varepsilon/\theta_\varepsilon)(\delta_\beta/\theta_\beta)$. Знак ~ в данном случае означает пропорциональность. Численные расчёты показывают, что $\eta_y\rho_0$ максимально, если

$$\delta_\varepsilon/(2\theta_\varepsilon)=\delta_\beta/(2\theta_\beta)=0{,}90.$$

Если в каждом элементе обзора используется некогерентное накопление дружно флуктуирующих импульсов, то нужно учесть ещё и коэффициент потерь из-за некогерентного дробления энергии сигнала, который при большом числе импульсов обратно пропорционален квадратному корню из числа некогерентно накапливаемых импульсов. Предполагая, что число импульсов пропорционально времени наблюдения, получим, что расстройки между соседними элементами обзора нужно выбирать исходя из максимума $\eta_y\sqrt{(\delta_\varepsilon/\theta_\varepsilon)(\delta_\beta/\theta_\beta)}$. Это выражение максимально, если

$$\delta_\varepsilon/(2\theta_\varepsilon)=\delta_\beta/(2\theta_\beta)=0{,}68.$$

Если число некогерентно накапливаемых импульсов невелико, то оптимальные относительные расстройки между соседними угловыми положениями лежат в пределах от 0,68 до 0,90.

Нужно отметить, что энергетический рельеф в угловом секторе при полученных расстройках получается довольно изрезанным.

Если ставится задача разбить область обзора таким образом, чтобы вероятность обнаружения сигнала с координатами, находящимися на стыке угловых элементов, была максимальна, то при когерентной обработке сигнала нужно максимизировать величину $(\delta_\varepsilon/\theta_\varepsilon)(\delta_\beta/\theta_\beta)\cdot G^2(\delta_\varepsilon/2,\delta_\beta/2)$, а при некогерентной обработке — величину $\sqrt{(\delta_\varepsilon/\theta_\varepsilon)(\delta_\beta/\theta_\beta)}\cdot G^2(\delta_\varepsilon/2,\delta_\beta/2)$. В результате получим, что вероятность обнаружения на стыке угловых элементов максимальна, если при когерентном накоплении $\delta_\varepsilon/(2\theta_\varepsilon)=\delta_\beta/(2\theta_\beta)=0{,}60$, а при некогерентном накоплении $\delta_\varepsilon/(2\theta_\varepsilon)=\delta_\beta/(2\theta_\beta)=0{,}42$. Рельеф в этом случае будет менее изрезанным.

На рис. 6.2 представлены зависимости, позволяющие судить о чувствительности энергетических характеристик алгоритма обнаружения к размерам угловых элементов. По сути дела кривая *1* — это зависимость $\eta=\alpha_1\eta_y(\delta_\varepsilon/\theta_\varepsilon)(\delta_\beta/\theta_\beta)$, нанесённая в децибелах по оси ординат. Для построения кривой *2* использовалась зависимость $\eta=\alpha_2\eta_y\sqrt{(\delta_\varepsilon/\theta_\varepsilon)(\delta_\beta/\theta_\beta)}$ и т. д. Полагалось $\delta_\varepsilon/(2\theta_\varepsilon)=\delta_\beta/(2\theta_\beta)$; это отношение обозначено на оси абсцисс через $\delta/(2\theta)$. Нормировочные коэффициенты α_1, α_2, … в каждом случае выбирались так, чтобы выполнялось условие $\max\{\eta\}=1$.

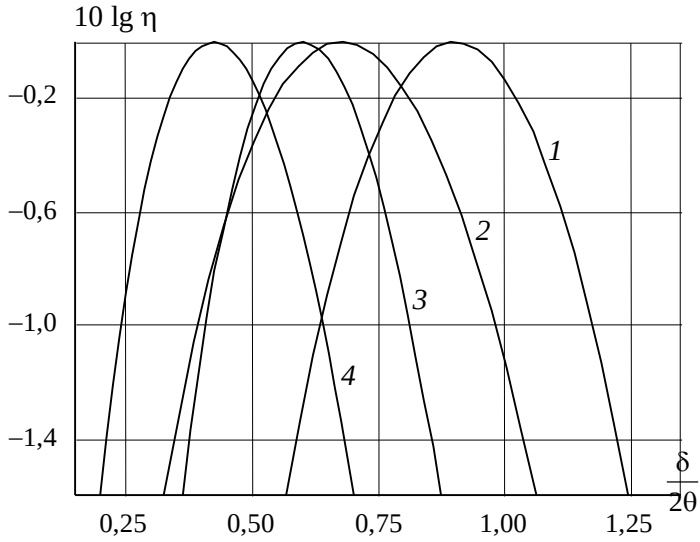


Рис. 6.2. Энергетические потери из-за неоптимальности разбиения области обзора на элементарные ячейки:
1 и *2* — при критерии максимума усреднённой вероятности обнаружения;
3 и *4* — при критерии максимума минимальной вероятности обнаружения;
1 и *3* — для когерентного сигнала;
2 и *4* — для некогерентной дружно флуктуирующей пачки

6.4. Порядок осмотра элементов обзора

Если координаты сигнала находятся на стыке двух элементов обзора, то на вход приёмника обнаружения в каждом цикле обзора сигнал поступает, по крайней мере, дважды. При простом способе обзора эти элементы осматриваются почти сразу друг за другом. Амплитуды флуктуирующих сигналов при этом могут быть полностью коррелированными, и тогда второй сигнал практически не увеличивает вероятность обнаружения.

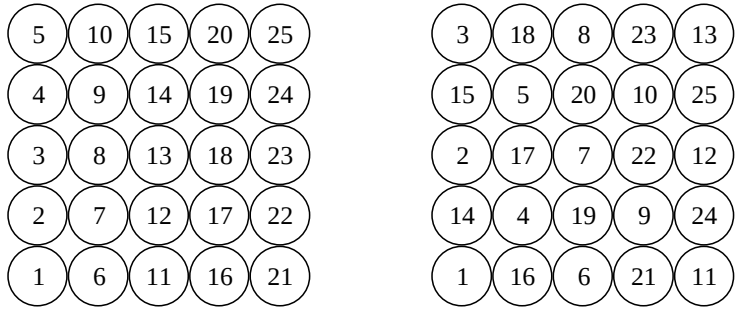
Обнаружение обоих сигналов будет более эффективно, если их амплитуды будут статистически независимыми. А чтобы амплитуды были независимыми, необходимо ввести такой порядок осмотра элементов обзора, при котором соседние элементы, на стыке которых может оказаться сигнал, осматривались бы через промежутки времени, большие времени корреляции флуктуаций сигнала.

Заметим, что такой же эффект можно получить, если при переходе к соседнему угловому элементу производить смену несущей частоты.

Рассмотрим пример. Обзор осуществляется в прямоугольном угловом секторе. Весь сектор условно представлен на рис. 6.3,*а* в виде

набора угловых положений. Соседние угловые положения расстроены относительно друг друга по обоим углам на половину ширины характеристики направленности, т. е. $\delta_\varepsilon/(2\theta_\varepsilon)=\delta_\beta/(2\theta_\beta)=0{,}5$. За заданное время необходимо обнаружить сигнал с вероятностью $D = 0{,}9$. Допустимая вероятность ложной тревоги на весь сектор обзора равна $F_{со} = 10^{-4}$. Обработка сигнала когерентная.

Пусть угловые элементы осматриваются в каждом цикле последовательно друг за другом; на рис. 6.3,*а* угловые элементы занумерованы в порядке их осмотра. В результате расчётов было получено, что требуемое среднее значение отношения сигнал/шум минимально, если обзор разбивается на три независимых цикла (циклы будем называть независимыми, если флуктуации сигнала независимы от цикла к циклу). В этом случае требуемое среднее значение отношения сигнал/шум $\rho_а$, приходящееся на один угловой элемент, равно 79,6.



а) *б*)

Рис. 6.3. Угловые элементы и порядок их осмотра

Проведенные для представленного на рис. 6.3,*б* порядка осмотра расчёты показали, что требуемое среднее значение отношения сигнал/шум минимально, если обзор разбивается на два цикла, при этом среднее значение отношения сигнал/шум на один угловой элемент составляет $\rho_б = 46{,}4$. Энергетический выигрыш, получаемый за счёт введения представленного на рис 6.3,*б* порядка осмотра, следовательно, равен $\xi = \rho_а/\rho_б = 1{,}71$.

Рассмотрим метод, с помощью которого рассчитывались приведенные энергетические характеристики для представленного на рис. 6.3,*б* порядка осмотра.

Будем считать, что время корреляции флуктуаций сигнала меньше половины времени, отводимого на один цикл обзора, при этом сигналы, принятые из соседних элементов, имеющие, например, порядковые номера 1 и 14, будут статистически независимыми.

Обозначим через ρ_0 среднее значение отношения сигнал/шум при совпадении координат сигнала и координат главного направления характеристики направленности.

Пусть сигнал имеет координаты ε и β. Найдём угловой элемент с наибольшим средним значением отношения сигнал/шум, которое обозначим через $\rho_{макс1}(\rho_0, \varepsilon, \beta)$. Отберём теперь угловые элементы, сигнал в которых статистически независим от сигнала, принимаемого в только что найденном угловом элементе. Найдём среди отобранных угловых элементов тот, в котором среднее значение отношения сигнал/шум максимально; обозначим это среднее значение через $\rho_{макс2}(\rho_0, \varepsilon, \beta)$. Тогда вероятность обнаружения в данном цикле обзора будет равна

$$D_1(\rho_0, \varepsilon, \beta) = 1 - [1 - D_{макс1}(\rho_0, \varepsilon, \beta)]\,[1 - D_{макс2}(\rho_0, \varepsilon, \beta)],$$

где

$$D_{макс1}(\rho_0, \varepsilon, \beta) = \exp\left\{-\frac{\ln\left(m n_{уг}/F_{со}\right)}{1+\rho_{макс1}(\rho_0, \varepsilon, \beta)}\right\},$$

$$D_{макс2}(\rho_0, \varepsilon, \beta) = \exp\left\{-\frac{\ln\left(m n_{уг}/F_{со}\right)}{1+\rho_{макс2}(\rho_0, \varepsilon, \beta)}\right\},$$

m — число циклов, $n_{уг}$ — число угловых элементов. Вероятность обнаружения за m независимых циклов находится по формуле $D_m(\rho_0, \varepsilon, \beta) = 1 - [1 - D_1(\rho_0, \varepsilon, \beta)]^m$.

При равномерном или медленно меняющемся априорном распределении угловых координат формула для вероятности обнаружения принимает вид

$$D_m(\rho_0) = \frac{2}{\delta_\varepsilon}\,\frac{2}{\delta_\beta}\int_0^{\delta_\varepsilon/2}\int_0^{\delta_\beta/2} D_m(\rho_0, \varepsilon, \beta)\, d\varepsilon\, d\beta\,.$$

При вычислении этого интеграла следует учитывать, что

$$\rho_{макс1}(\rho_0, \varepsilon, \beta) = \rho_0 \exp\left\{-2\frac{\varepsilon^2+\beta^2}{\theta^2}\ln 2\right\}, \quad \rho_{макс2}(\rho_0, \varepsilon, \beta) = \max\left\{\rho_\varepsilon, \rho_\beta\right\},$$

где

$$\rho_\varepsilon = \rho_0 \exp\left\{-2\frac{(\delta_\varepsilon-\varepsilon)^2+\beta^2}{\theta^2}\ln 2\right\}, \quad \rho_\beta = \rho_0 \exp\left\{-2\frac{\varepsilon^2+(\delta_\beta-\beta)^2}{\theta^2}\ln 2\right\}.$$

Интеграл в формуле для $D_m(\rho_0)$ вычислялся численными методами. Были построены зависимости $D_m(\rho_0)$; по ним находились пороговые значения $\rho_0 = \rho_0(m)$ отношения сигнал/шум, при которых вероятность обнаружения равна 0,9. Необходимые энергетические затраты, приходящиеся на один элемент углового пространства, будут равны $\rho_б = m\,\rho_0(m)$.

Если в приведенных выражениях формально заменить нулём $D_{макс2}(\cdots)$, то получим процедуру расчёта энергетических затрат $\rho_а$,

необходимых для достижения заданной вероятности обнаружения при использовании представленного на рис. 6.3,*а* порядка осмотра угловых элементов.

В [20] получена формула для оптимального числа циклов m_o при простом циклическом обзоре

$$m_o \approx \frac{1}{0{,}3} \lg \frac{1}{1-D}.$$

Представляется, что для рассмотренного способа обзора оптимальное число циклов будет ориентировочно в два раза меньше, чем число m_o, определяемое этой формулой. Тогда, если при простом способе обзора циклы независимы, то и при рассмотренном способе в каждом цикле будут независимы сигналы из соседних элементов. Это значит, что условия, накладываемые на величину времени корреляции флуктуаций сигнала, оказываются одинаковыми и для простого и для рассмотренного способов обзора.

Интересно заметить, что значение ρ_a, равное 79,6, в рассмотренном примере для случая, соответствующего рис. 6.3,*а*, было получено усреднением по априорному распределению вероятности обнаружения за три цикла. Если воспользоваться соответствующим значением для коэффициента потерь $\eta_y = 0{,}785$, то из равенства

$$D = 1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{\ln(m\eta_{уг}/F_{со})}{1+\eta_y\rho_0}\right)\right]^3 = 0{,}9$$

можно получить $\rho_a = 3\rho_0 = 79{,}0$. Это подтверждает то, что полученное в § 6.2 выражение для коэффициента потерь можно использовать и при циклическом обзоре.

Заметим также, что примерно такой же энергетический выигрыш можно было бы получить, если, не применяя специального порядка осмотра, увеличить расстройки между соседними элементами до оптимальных значений. Однако, как это уже отмечалось, в этом случае энергетический рельеф будет сильно изрезанным.

6.5. Разбиение обзора на циклы при частично зависимых от цикла к циклу флуктуациях сигнала

При разработке и оценке эффективности алгоритмов обнаружения, работающих в режиме равномерного обзора, возникает задача организации циклов обнаружения. Для рэлеевских флуктуаций сигнала, независимых от цикла к циклу, она рассмотрена в [20]. В данном параграфе эта задача рассматривается для частично коррелированных рэлеевских флуктуаций амплитуды сигнала.

Общая модель флуктуаций сигнала приводится в работе [139]. В соответствии с ней при рэлеевской модели отношение сигнал/шум в ν-ом цикле обзора можно представить как $q_\nu = \rho_m x_\nu$,

$x_\nu = (y_{1\nu}^2 + y_{2\nu}^2)/2$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, где ρ_m — среднее значение отношения сигнал/шум в цикле обзора, m — число циклов, $y_{1\nu}$ и $y_{2\nu}$ — отсчёты независимых гауссовских стационарных процессов с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

Вероятность обнаружения рэлеевского сигнала за m циклов обзора (вероятность превышения порога λ_m хотя бы в одном из циклов) можно записать в виде

$$D_m = 1 - \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left\{ \prod_{\nu=1}^{m} \left[1 - J(\lambda_m, \rho_m x_\nu) \right] \right\} w(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m ,$$

где $w(\cdots)$ — совместная плотность распределения случайных величин x_ν. Порог λ_m определяется вероятностью ложной тревоги на один угловой элемент $F_э$ по формуле $\lambda_m = \ln(m/F_э)$.

Далее будем рассматривать случай экспоненциальной корреляции гауссовских компонент. Коэффициенты корреляции компонент можно представить в виде

$$\overline{y_{1\nu} y_{1\mu}} = \overline{y_{2\nu} y_{2\mu}} = \exp(-|t_\mu - t_\nu|/\Delta) ,$$

где t_ν и t_μ — моменты времени отсчётов, Δ — время корреляции. Будем полагать, что отсчёты значений $y_{1\nu}$ и $y_{2\nu}$ производятся в равноотстоящие моменты времени, т. е. $t_\nu = t_1 + (\nu - 1)T$, где T — время цикла обзора. Коэффициент корреляции гауссовских компонент в соседних циклах равен $\gamma = \exp(-T/\Delta)$. При таких исходных данных совместная плотность распределения нормированных отношений сигнал/шум определяется формулой (2.6.2).

Получить приемлемое аналитическое выражение для вероятности обнаружения при произвольном числе циклов m не удаётся. Выражения для D_1 и D_2 имеют вид:

$$D_1 = \exp\{-\lambda_1/(1+\rho_1)\} ,$$

$$D_2 = \exp\{-\lambda_2/(1+\rho_2)\}[1 - J(\Lambda_2, r^2\Lambda_2) + J(r^2\Lambda_2, \Lambda_2)],$$

где $\Lambda_2 = \lambda_2/[(1-r^2)(1+\rho_2)]$, $\quad r = \gamma\rho_2/(1+\rho_2)$.

Используя формулу (П1.9.2) из Приложения 1, можно осуществить в общем выражении для D_m интегрирование по x_1 и x_m. Тем самым m-мерный интеграл сводится к $(m-2)$-мерному интегралу. Для вычисления получившегося $(m-2)$-мерного интеграла, например, при $m = 3$ или 4, можно воспользоваться численными методами. Выражения для D_3 и D_4 имеют вид

$$D_3 = 1 - \int_0^\infty e^{-x} \left[1 - J(\lambda_3, \rho_3 x) \right] \left[1 - J(h_3, \theta_3 x) \right]^2 dx ,$$

$$D_4 = 1 - \frac{1}{1-\gamma^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left\{ -\frac{x_2 + x_3}{1-\gamma^2} \right\} \left[1 - J\left(\lambda_4, \rho_4 x_2\right)\right]\left[1 - J\left(\lambda_4, \rho_4 x_3\right)\right] \times$$

$$\times \left[1 - J\left(h_4, \theta_4 x_2\right)\right]\left[1 - J\left(h_4, \theta_4 x_3\right)\right] \cdot I_0\left(\frac{2\gamma\sqrt{x_2 x_3}}{1-\gamma^2} \right) dx_2\, dx_3,$$

где $h_m = \lambda_m / [1 + \rho_m (1-\gamma^2)]$, $\theta_m = \rho_m \gamma^2 / [1 + \rho_m (1-\gamma^2)]$.

В случае $\gamma = 1$ вероятность обнаружения за m циклов можно вычислить по формуле

$$D_m = 1 - \int_0^\infty \left[1 - J\left(\lambda_m, \rho_m x\right)\right]^m \mathrm{e}^{-x} dx.$$

Обычно при отыскании оптимального числа циклов обзора вначале задаются накопленной вероятностью обнаружения и вероятностью ложной тревоги в элементе обзора. А затем используют критерий минимума суммарных энергетических затрат $\rho = m\rho_m$ или критерий максимума энергетического выигрыша $\xi = \rho_1/\rho$, где ρ_1 — энергетические затраты в элементе обзора, когда производится только один цикл обзора. При этом необходимо построить зависимость выигрыша от числа циклов.

На рис. 6.4 изображены такие зависимости при $F_э = 10^{-6}$, полученные численными методами. Для расчётов были использованы приведенные выше формулы. Проверка для $F_э = 10^{-4}$ и 10^{-8} показала, что представленные на рис. 6.4 результаты слабо зависят от вероятности ложной тревоги.

По графикам видно, что при независимых флуктуациях, чем больше D_m, тем больше может быть энергетический выигрыш. Как и следовало ожидать, для полностью зависимых циклов обзора ($\gamma = 1$) при разбиении обзора на циклы вместо выигрыша наблюдается проигрыш из-за отсутствия в последующих циклах новой информации об амплитуде сигнала. Кривые для частично коррелированных флуктуаций лежат между двумя крайними случаями.

Условно принято считать, что отсчёты случайного процесса независимы, если интервал времени между отсчётами T больше времени корреляции Δ (см., например, [30], стр. 43). В нашем случае коэффициент корреляции значений гауссовских компонент в соседних циклах обзора связан с T и Δ соотношением $\gamma = \exp(-T/\Delta)$ и, значит, $\gamma \approx 0{,}4$ при $T = \Delta$. Действительно, по графикам видно, что при нестрогом подходе циклы можно считать независимыми, если $T \geq \Delta$ ($\gamma < 0{,}4$). Погрешность в определении требуемых отношений сигнал/шум из-за такого упрощения не будет превышать 5 … 10 % (т. е. 0,2 … 0,4 дБ).

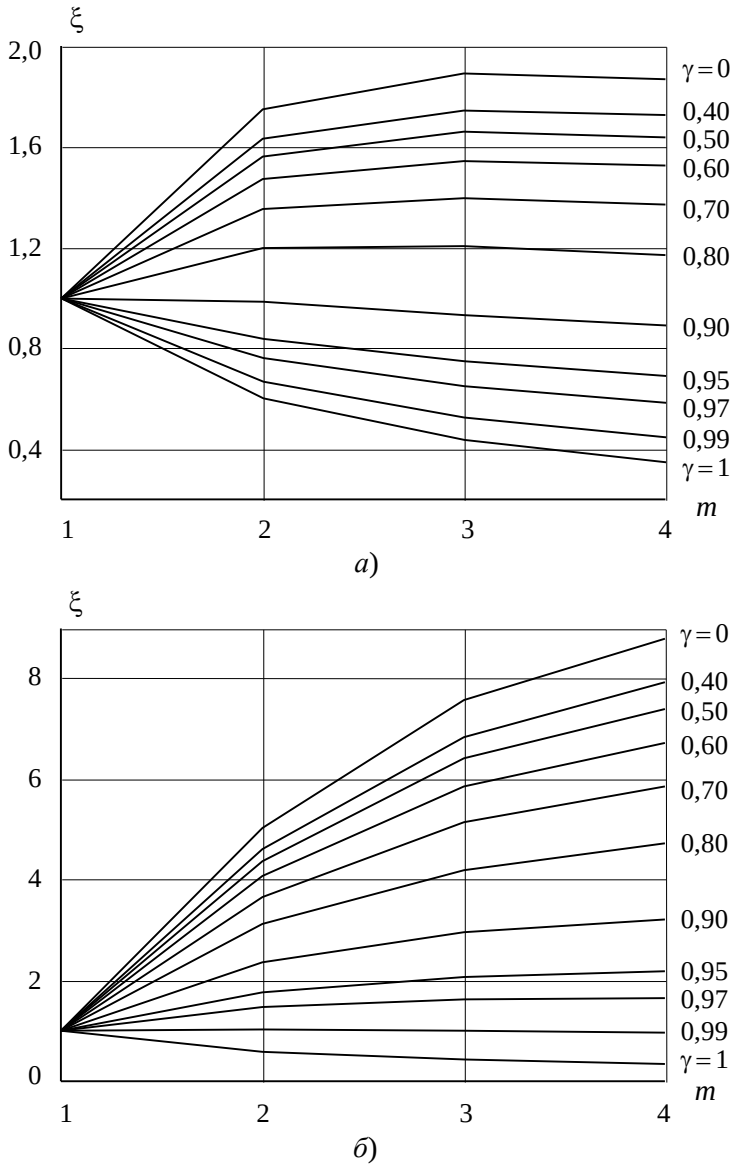


Рис. 6.4. Зависимости энергетического выигрыша при циклическом обзоре от числа циклов:
а — $D_m = 0{,}9$; *б* — $D_m = 0{,}99$

7. ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОЭТАПНЫХ МЕТОДОВ ОБНАРУЖЕНИЯ

7.1. Введение

Обнаружение сигналов с неизвестными угловыми координатами, принимающими значения в широких пределах, требует при обзоре больших энергетических затрат. Поэтому целесообразно применять методы обзора области обнаружения, которые имеют наилучшие характеристики.

Оптимизация обзора состоит в нахождении наиболее рационального распределения временных (энергетических) затрат по элементам обзора. Распределение затрат желательно производить на основании априорной информации и информации, поступающей в процессе обзора. Однако практическое решение подобных задач затруднено. В связи с этим приходится искать подоптимальные процедуры обзора.

Процедура обзора значительно упрощается, если отказаться от учёта всей поступающей информации и при управлении энергетическими затратами в данном элементе пространства учитывать информацию, поступающую только из этого элемента пространства.

При обнаружении сигнала по критерию Неймана — Пирсона задаются время наблюдения и показатели надёжности обнаружения: вероятность ложной тревоги и вероятность правильного обнаружения. Эти показатели определяют необходимые энергетические затраты. Если допустить, что время наблюдения может быть случайным, то можно получить энергетический выигрыш — среднее значение энергетических затрат будет меньше энергетических затрат при обнаружении сигнала по критерию Неймана — Пирсона.

В [18] показано (при некоторых условиях), что минимум среднего времени наблюдения обеспечивает метод испытаний, названный последовательным анализом. Этот метод состоит в непрерывном образовании в процессе наблюдения отношения правдоподобия и сравнении его с двумя порогами. Решение принимается в случае, если значение отношения правдоподобия выходит за пределы интервала, границами которого служат значения порогов, в противном случае испытания продолжаются.

Необходимость образования отношения правдоподобия для различных моментов времени и сравнения его с порогами приводит к затруднениям при практической реализации, поэтому и классический последовательный анализ не получил широкого применения в реальных устройствах обнаружения радиолокационных сигналов. Основная часть преимуществ последовательного анализа может быть реализована в более простых и в то же время достаточно эффективных методах обнаружения.

Наиболее простые из этих методов будут содержать одно промежуточное испытание в процессе обнаружения, а окончательное ре-

шение будет приниматься после второго этапа работы. Эффективность обнаружения может быть значительно повышена, если в зависимости от результата испытания после первого этапа меняется время, отводимое на обнаружение сигнала на втором этапе. Время, отводимое на первый этап, используется как бы для получения предварительной информации о наличии или об отсутствии сигнала. Предварительная информация затем используется при выборе величины вероятности ложной тревоги и времени работы на втором этапе.

Энергетический выигрыш, получаемый при двухэтапных процедурах обнаружения с оптимальными параметрами, оказывается сравнимым с выигрышем при последовательном анализе с однородными выборками [91].

Средние энергетические затраты при двухэтапном обнаружении будут существенно зависеть от того, присутствует или отсутствует сигнал, поэтому для оптимизации процедуры, вообще говоря, необходимо знать априорную вероятность появления сигнала. Эта необходимость отпадает при обзоре, когда априорная вероятность появления сигнала мала или когда возможное число сигналов значительно меньше числа осматриваемых элементов пространства, так как в этом случае затраты на всю область обнаружения определяются в основном величиной затрат на элемент пространства, не содержащий сигнала. Поэтому с некоторой степенью приближения оптимальной можно считать такую процедуру обнаружения, которая обеспечивает минимум средних энергетических затрат при отсутствии сигнала.

Более сложные методы, многоэтапные, будут содержать несколько промежуточных испытаний.

Кроме угловых координат, по которым производится обзор, неизвестными могут быть другие параметры сигнала (задержка, частота). Тогда на каждом этапе обнаружения для перекрытия области дополнительных неизвестных параметров может применяться многоканальная система. В таких случаях для упрощения анализа будем считать, что дополнительные параметры сигнала (задержка, частота) дискретны и совпадают с параметрами, на которые настроен один из каналов. Тем самым полагается, что получаемые энергетические характеристики затем могут быть откорректированы с помощью соответствующего коэффициента потерь.

По этим же соображениям будем считать, что дискретны и те параметры сигнала, по которым производится обзор.

Многоэтапные методы могут успешно сочетаться с изменением разрешающей способности сигнала в процессе обнаружения.

Необходимость в системах обнаружения с переменной разрешающей способностью появляется в случае, если диапазон дополнительных неизвестных параметров (задержки или частоты) большой, а требования, накладываемые на точность измерения дополнительных неизвестных параметров в процессе обнаружения, высоки. Число просматриваемых элементов разрешения при этом может быть довольно большим и оказывается невозможным построить многоканальную систему с необходимым числом каналов, а осуществление

последовательного просмотра ещё и в области дополнительных параметров приведёт к чрезмерному увеличению времени наблюдения.

На первом этапе работы системы с переменной разрешающей способностью осуществляется обнаружение многоканальной системой с грубым определением значений параметров, при этом определяются те элементы области, которые соответствуют каналам с превышениями порога. Для следующего этапа диапазон неизвестных параметров значительно уменьшается. Отобранные элементы области осматриваются сигналом с более высокой разрешающей способностью и перекрываются они многоканальной системой, предназначенной теперь для приёма нового сигнала. Таких этапов работы может быть несколько.

Отличительная особенность устройств обнаружения, которые здесь называются системами с переменной разрешающей способностью, состоит в том, что необходимость в изменении разрешающей способности обусловлена высокими требованиями к точности измерения дополнительных неизвестных параметров и требуемая точность измерения достигается только лишь на последнем этапе обнаружения.

В [15] проводился анализ систем обнаружения с переменной разрешающей способностью, однако, оптимизация процедуры обнаружения в полной мере не производилась.

Многоэтапные методы обнаружения целесообразно использовать в сочетании с разбиением обзора на независимые циклы. При этом в каждом цикле производится поочерёдный просмотр угловых элементов; процедура обнаружения в каждом элементе — многоэтапная. Такой способ построения алгоритма обнаружения позволяет реализовать преимущества и циклического обзора, и многоэтапных процедур.

При исследовании многоэтапного обнаружения возникают задачи, связанные с оценкой характеристик обнаружения и с оптимизацией процедуры обнаружения. Методам решения этих задач посвящена настоящая глава.

Классификация многоэтапных процедур и постановка задачи оптимизации процедур содержится в следующем параграфе.

Наибольший интерес с методологической точки зрения представляет многоэтапное обнаружение, когда сигнал флуктуирует и флуктуации зависимы от этапа к этапу. Исследованию процедур обнаружения таких сигналов уделяется основное внимание.

7.2. Разновидности многоэтапных процедур и постановка задачи их оптимизации

Оптимальная двухэтапная процедура обнаружения может быть описана следующим образом.

На первом этапе используется зондирующий сигнал с энергией E_1. В результате обработки принятой на первом этапе случайной реали-

зации формируется выходная величина R_1. Энергетические затраты на элемент пространства обзора на втором этапе зависят от R_1 и равны $E_2(R_1)$. Результат обработки реализации, принятой на втором этапе, сравнивается с порогом $\lambda_2(R_1)$ и в случае превышения порога принимается решение о наличии сигнала в данном элементе обзора. Средние энергетические затраты на элемент обзора при отсутствии сигнала равны $E = E_1 + \overline{E_2(R_1)}$, причём при усреднении функции $E_2(R_1)$ должна использоваться плотность распределения случайной величины R_1 в случае отсутствия на входе приёмника полезного сигнала.

Поскольку отношение сигнал/шум пропорционально энергии зондирующего сигнала, то средние энергетические затраты пропорциональны величине $\rho = \rho_1 + \overline{\rho_2(R_1)}$, где ρ_1 и $\rho_2(R_1)$ — средние значения отношения сигнал/шум на первом и втором этапах в случае наличия в элементе обзора полезного сигнала.

Величину ρ будем для краткости называть тоже средними энергетическими затратами.

Отыскание оптимальной процедуры сводится к тому, чтобы найти функции $\rho_2(R_1)$ и $\lambda_2(R_1)$, а также величину ρ_1, при которых ρ минимально, а вероятности обнаружения и ложной тревоги равны заранее заданным величинам. Используя методы вариационного исчисления, можно показать, что решение необходимо принимать на основании сравнения с порогом отношения правдоподобия для сигнала, принятого на обоих этапах, причём величина этого порога не зависит от R_1. Функциональное уравнение, определяющее $\rho_2(R_1)$ в неявном виде, оказывается довольно сложным для дальнейшего исследования процедуры, если заранее задаваться значениями вероятностей обнаружения и ложной тревоги. Кроме того, практическая реализация оптимальной функции будет затруднительной, так как $\rho_2(R_1)$ меняется по сложному закону и в широких пределах, поэтому обычно рассматривается двухэтапная процедура при неоптимальных, но простых зависимостях $\rho_2(R_1)$.

Как правило, используется функция

$$\rho_2(R_1) = \begin{cases} \rho_2 & \text{при } R_1 \geq \lambda_1, \\ 0 & \text{при } R_1 < \lambda_1 \end{cases}$$

и, тем самым, полагается, что при $R_1 < \lambda_1$ второй этап обнаружения не производится и принимается решение об отсутствии сигнала. Здесь ρ_2 — среднее значение отношения сигнал/шум на втором этапе, λ_1 — параметр процедуры.

Средние энергетические затраты на элемент обзора в случае отсутствия сигнала будут пропорциональны величине

$$\rho = \rho_1 + F_1 \rho_2, \qquad (7.2.1)$$

где $F_1 = e^{-\lambda_1}$ — вероятность того, что в данном элементе обзора будет производиться второй этап обнаружения.

Рассмотренная процедура может быть обобщена на тот случай, если обнаружение сигнала осуществляется многоканальной системой. При этом второй этап производится, если хотя бы в одном из каналов на первом этапе превышен порог λ_1. Вероятность такого события равна $P = 1 - (1 - F_1)^n$, где n — число каналов.

Средние энергетические затраты при обнаружении сигнала многоканальной системой будут характеризоваться величиной

$$\rho = \rho_1 + P\rho_2 .$$

Вероятность выполнения критерия обнаружения в случае отсутствия полезного сигнала является вероятностью ложной тревоги, а при наличии сигнала — вероятностью правильного обнаружения.

Для упрощения процедуры обнаружения вместо сравнения с порогом отношения правдоподобия двух случайных величин можно применять более простые методы междуэтапной обработки.

Если междуэтапную обработку производить по критерию “2 из 2-х”, то придём к методу, рассмотренному в [32, 6, 20, 91]. В этом случае для принятия решения результаты обработки сигнала, принятого на втором этапе, сравниваются с порогом λ_2. При обнаружении многоканальной системой решение о наличии сигнала принимается, если в каком-либо канале есть превышения порогов и на первом и на втором этапах; в противном случае считается, что сигнала нет.

Двухэтапное обнаружение с критерием “2 из 2-х” для междуэтапной обработки легко обобщается на произвольное число этапов [32, 6, 20, 91]. На первом этапе обнаружения осматриваются все элементы пространства обзора, результаты обработки сигнала сравниваются с порогом. На каждом последующем этапе осматриваются только те элементы, в которых произошло превышение порога результатом обработки сигнала, принятого на предыдущем этапе; решение о наличии сигнала принимается, если есть превышение порога результатом обработки сигнала, принятого на последнем этапе.

Можно предложить ещё два способа междуэтапной обработки, более эффективные при флуктуациях сигнала, независимых от этапа к этапу. В одном из них сравнение с порогом отношения правдоподобия (после завершения второго этапа) заменяется сравнением с порогом λ_2 суммы выходных случайных величин R_1 и R_2. В другом способе применяется логический критерий “1 из 2-х”.

При междуэтапной обработке по критерию “1 из 2-х” процедура обнаружения описывается следующим образом. На первом этапе результаты обработки сигнала на выходах каналов сравниваются с порогами λ_1 и λ_2, причём $\lambda_2 > \lambda_1$. Если есть каналы, в которых превышен порог λ_1, но не превышен порог λ_2, то производится второй этап обнаружения. Результаты обработки сигнала, принятого на втором этапе, сравниваются с порогом λ_3. Решение о наличии сигнала в дан-

ном канале принимается в случае, если в этом канале либо на первом этапе будет превышен порог λ_2, либо на втором этапе будет превышен порог λ_3.

Нетрудно заметить, что при $\lambda_2 \to \infty$ этот метод обнаружения превращается в двухэтапный метод обнаружения с применением критерия “2 из 2-х”, поэтому заранее можно сказать, что применение критерия “1 из 2-х” при оптимальных параметрах будет давать результаты не хуже, чем применение критерия “2 из 2-х”.

При рассмотрении вопроса применения изложенных методов междуэтапной обработки к системам с переменной разрешающей способностью [15] сразу получим такой вывод: те методы междуэтапной обработки, которые допускают принятие решения о наличии сигнала после промежуточных испытаний в процессе обнаружения, к системам с переменной разрешающей способностью неприменимы. Чтобы получить решение о значениях дополнительных неизвестных параметров сигнала с заданной точностью, необходимо обязательно производить последний этап обнаружения. Этому условию удовлетворяет двухэтапная процедура с использованием критерия “2 из 2-х” или многоэтапная с критерием “*m* из *m*”.

Задача оптимизации двухэтапной или многоэтапной процедуры обнаружения состоит в том, чтобы выбрать параметры процедуры (т. е. λ_1, λ_2, ρ_1, ρ_2 и т. п.) таким образом, чтобы вероятность правильного обнаружения и вероятность ложной тревоги были равны заранее заданным величинам, а средние энергетические затраты были минимальными. Минимум средних энергетических затрат можно искать любым подходящим способом.

Эффективность многоэтапной процедуры оценивается энергетическим выигрышем $\xi = \rho_{\text{нп}}/\rho_{\text{мин}}$. Здесь $\rho_{\text{нп}}$ — среднее значение отношения сигнал/шум, необходимое для обнаружения сигнала по критерию Неймана — Пирсона при заданных вероятностях ложной тревоги и правильного обнаружения; $\rho_{\text{мин}} = \min\{\rho\}$ — минимальное значение средних энергетических затрат ρ, необходимых для многоэтапного обнаружения при тех же вероятностях.

Используя метод неопределённых множителей (метод множителей Лагранжа), задачу минимизации энергетических затрат при наличии ограничений (задача на условный экстремум) можно свести к решению системы нелинейных уравнений относительно параметров процедуры.

Задачу оптимизации многоэтапной процедуры можно поставить иначе. Можно зафиксировать вероятность ложной тревоги и средние энергетические затраты, а параметры процедуры выбирать такими, чтобы была максимальной вероятность обнаружения. Результаты, получаемые при этой и при первоначальной постановке задачи, будут эквивалентны между собой в том смысле, что зависимости вероятности обнаружения от средних энергетических затрат при оптимальных параметрах будут совпадать между собой. Одинаковыми будут и уравнения, получаемые методом неопределённых множителей.

При рассмотрении многоэтапных методов обнаружения необходимо ещё учитывать и ограничения, возникающие из условий практической реализации. Так, например, если длительность сигнала на втором этапе отличается от длительности сигнала на первом этапе, то и условия согласованной фильтрации сигнала будут меняться от этапа к этапу. Особенности построения каналов обнаружения, составляющих многоканальную систему, будут накладывать ограничения на соотношения энергий сигнала на различных этапах. В связи с этим представляет определённый практический интерес также и неоптимальный случай, когда, например, для двухэтапного метода $\rho_2 = \rho_1$.

Чтобы выполнить оптимизацию многоэтапной процедуры, нужно вначале найти аналитическое выражение, устанавливающее зависимость вероятности обнаружения от параметров процедуры. Эта зависимость в сильной степени определяется корреляционными связями флуктуаций сигналов, принимаемых на разных этапах. Если сигнал флуктуирует независимо от этапа к этапу, то выражения для вероятности обнаружения могут иметь более простой вид, чем при зависимых флуктуациях. Это объясняется тем, что при независимых флуктуациях статистические свойства результатов обработки сигналов можно описать совокупностью одномерных распределений. При зависимых флуктуациях приходится оперировать с многомерными распределениями (в частном случае с двумерными распределениями) или прибегать к численным методам для определения вероятностей.

7.3. Эффективность двухэтапного обнаружения

Рассматриваем следующий метод обнаружения. Второй этап производится, если результат обработки сигнала на первом этапе R_1 превысит порог λ_1. Решение о наличии сигнала принимается, если полученная на втором этапе величина R_2 превысит порог λ_2. Обнаружение сигнала на каждом этапе осуществляется одним каналом.

Вероятность ложной тревоги на один элемент обзора $F_э$ совпадает с вероятностью ложной тревоги на канал обнаружения F, которая в свою очередь определяется формулой:

$$F = \mathrm{e}^{-\lambda_1}\mathrm{e}^{-\lambda_2}. \qquad (7.3.1)$$

Обозначим через ρ_1 и ρ_2 средние значения отношения сигнал/шум на первом и втором этапах в случае наличия сигнала в элементе обзора. Пусть x — случайная величина с плотностью распределения $w(x)$, являющаяся нормированным отношением сигнал/шум. Нормировка осуществляется так, чтобы $\bar{x} = 1$. Тогда флуктуирующее отношение сигнал/шум, например на первом этапе, можно представить в виде $q_1 = \rho_1 \cdot x$.

При рэлеевских флуктуациях амплитуды сигнала $w(x) = \exp(-x)$.

Вероятность двухэтапного обнаружения при флуктуациях сигнала, статистически независимых от этапа к этапу, теперь можно записать в виде

$$D = D_1 \cdot D_2 ,$$

где

$$D_\nu = \int_0^\infty J(\lambda_\nu, \rho_\nu x) w(x)\, dx ; \qquad \nu = 1, 2.$$

Если флуктуации полностью зависимы, то

$$D = \int_0^\infty J(\lambda_1, \rho_1 x)\, J(\lambda_2, \rho_2 x) w(x)\, dx .$$

Оптимизация процедуры обнаружения состоит в том, чтобы выбрать величины ρ_1, ρ_2, λ_1, λ_2 таким образом, чтобы при заданных значениях ρ и F вероятность обнаружения D была максимальной. Или иначе, чтобы при заданных значениях D и F энергетические затраты были минимальными.

Обозначив $\gamma = \rho_2/\rho_1$ и $\lambda = \ln(1/F)$, из (1) и (7.2.1) получим

$$\lambda_2 = \lambda - \lambda_1 , \qquad \rho_1 = \rho / \left(1 + \gamma e^{-\lambda_1}\right), \qquad \rho_2 = \gamma\rho / \left(1 + \gamma e^{-\lambda_1}\right). \qquad (7.3.2)$$

Теперь видно, что при заданных ρ и F вероятность двухэтапного обнаружения является функцией двух свободных переменных λ_1 и γ. Остальные переменные, от которых зависит D, определяются формулами (2). Оптимизация процедуры обнаружения сводится к поиску максимума функции от двух свободных переменных.

Перебирая значения средних энергетических затрат ρ, можно таким способом построить зависимость от ρ оптимальных значений параметров λ_1 и γ и максимальной вероятности двухэтапного обнаружения D. Если ещё при этом из уравнения

$$D = \int_0^\infty J(\lambda, \rho_{\text{нп}} x) w(x)\, dx$$

находить затраты $\rho_{\text{нп}}$, требующиеся для достижения такой же вероятности обнаружения при одноэтапной процедуре, то можно определить энергетический выигрыш $\xi = \rho_{\text{нп}}/\rho$, получаемый при двухэтапном обнаружении по сравнению с одноэтапным обнаружением.

Представленные соотношения отражают в общем виде метод оценки эффективности двухэтапного обнаружения при любых законах флуктуаций отношения сигнал/шум. Применительно к конкретным законам эти соотношения могут быть видоизменены. Так, если сигнал не флуктуирует, то средние значения отношения сигнал/шум ρ_1 и ρ_2 совпадают с самими значениями отношения сигнал/шум q_1 и q_2, а вероятность двухэтапного обнаружения будет иметь вид

$$D = J(\lambda_1, q_1) \cdot J(\lambda_2, q_2).$$

При логарифмически нормальных флуктуациях в формулах для вероятностей обнаружения удобнее от средних значений ρ_1 и ρ_2 перейти к медианным значениям отношения сигнал/шум $q_{м1}$ и $q_{м2}$. Тогда, например, вероятность двухэтапного обнаружения логарифмически нормального сигнала при полностью зависимых от этапа к этапу флуктуациях можно выразить формулой

$$D = \int_0^\infty J\left(\lambda_1, q_{м1}\, e^{\sigma t}\right) J\left(\lambda_2, q_{м2}\, e^{\sigma t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt\,,$$

где σ — параметр распределения (σ^2 — дисперсия натурального логарифма отношения сигнал/шум).

На рис. 7.1 представлены примеры оценки энергетического выигрыша ξ при $F = 10^{-6}$. Обратим внимание на то, что в случае рэлеевских флуктуаций величина выигрыша ξ при больших вероятностях обнаружения D слабо зависит от D и стремится к некоторому пределу при $D \to 1$. Это обстоятельство может быть использовано для упрощения анализа многоэтапного обнаружения рэлеевских сигналов.

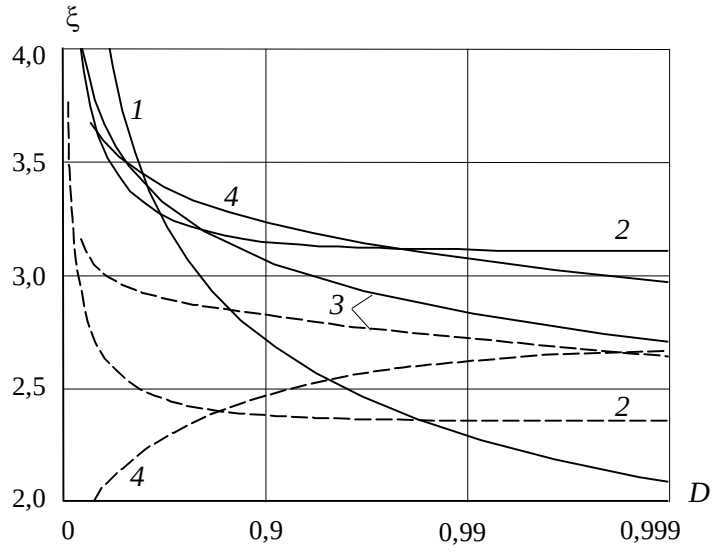


Рис. 7.1. Зависимости энергетического выигрыша при двух этапах от вероятности обнаружения:

1 — нефлуктуирующий сигнал; *2* — рэлеевские флуктуации; *3* — логарифмически нормальные флуктуации, $\sigma = 1$; *4* — логарифмически нормальные флуктуации, $\sigma = 2$; пунктир — независимые от этапа к этапу флуктуации; сплошные кривые *2 – 4* — полностью зависимые флуктуации

Изложенный в данном параграфе метод анализа эффективности двухэтапной процедуры нетрудно обобщить на обнаружение сигнала многоканальной системой. При этом численные оценки показывают, что выигрыш, получаемый в результате применения двухэтапной процедуры, падает с увеличением числа каналов.

7.4. Эффективность многоэтапного обнаружения рэлеевского сигнала

Обобщим задачу из предыдущего раздела на случай m-этапного обнаружения и ограничимся рэлеевскими сигналами.

Обозначим λ_ν — порог и ρ_ν — среднее значение отношения сигнал/шум на ν-ом этапе; $\nu = 1, 2, \ldots, m$. Вероятность превышения порога на ν-ом этапе в случае отсутствия сигнала равна $F_\nu = \exp(-\lambda_\nu)$. Вероятность ложной тревоги равна $F = F_1 F_2 \cdots F_m$. Средние энергетические затраты на элемент обзора в случае отсутствия сигнала пропорциональны величине

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 F_1 + \rho_3 F_1 F_2 + \cdots + \rho_m F_1 F_2 \cdots F_{m-1}.$$

Если флуктуации сигнала независимы от этапа к этапу, то вероятность обнаружения сигнала определяется формулой

$$D = \prod_{\nu=1}^{m} \exp\left\{-\frac{\lambda_\nu}{1+\rho_\nu}\right\} = \exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{m} \frac{\lambda_\nu}{1+\rho_\nu}\right\}.$$

При достаточно больших отношениях сигнал/шум можно в этой формуле пренебречь единицей по сравнению с ρ_ν и записать

$$D \approx \exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{m} \frac{\lambda_\nu}{\rho_\nu}\right\},$$

а затем

$$D \approx \exp\{-M/\rho_1\} = \exp\{-\Lambda/\rho\}, \qquad (7.4.1)$$

где

$$M = \lambda_1 + \lambda_2/\gamma_2 + \cdots + \lambda_m/\gamma_m, \qquad \gamma_\nu = \rho_\nu/\rho_1, \qquad \Lambda = C \cdot M,$$

$$C = \rho/\rho_1 = 1 + \gamma_2 \exp(-\lambda_1) + \cdots + \gamma_m \exp(-\lambda_1 - \cdots - \lambda_{m-1}).$$

При заданных ρ и F вероятность m-этапного обнаружения является функцией $2m - 2$ свободных переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_m$. Переменная λ_m, входящая в выражение для вероятности обнаружения, определяется формулой:

$$\lambda_m = \lambda - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_{m-1},$$

где $\lambda = \ln(1/F)$.

Вероятность обнаружения при одноэтапном способе обзора определяется формулой $D = \exp\{-\lambda/(1+\rho)\}$ или, при больших ρ,

$$D \approx \exp\{-\lambda/\rho\}. \qquad (7.4.2)$$

Из (1) и (2) получаем, что при заданной вероятности D требуемое отношение сигнал/шум при многоэтапном обнаружении в $\xi = \lambda/\Lambda$ раз меньше, чем при одноэтапном обнаружении.

Таким образом, оптимизация процедуры обнаружения сводится к нахождению минимума функции Λ при заданном значении λ.

В данной задаче для определения значений минимизируемой функции требуется сравнительно небольшой объём вычислительных затрат. В подобных случаях минимизацию функции нескольких переменных можно осуществлять приведенным в [1] алгоритмом прямого поиска. Этот алгоритм хотя и не экономичен по объёму вычислений (в особенности при большом числе переменных), но весьма удобен для применения.

Результаты оптимизации процедуры представлены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Оптимальные значения параметров и энергетического выигрыша ξ при рэлеевских полностью независимых от этапа к этапу флуктуациях сигнала

m	F	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-14}
	λ	4,61	9,21	13,82	18,42	23,03	27,63	32,24
2	λ_1	2,42	3,28	3,84	4,23	4,53	4,78	4,98
	γ_2	3,19	6,93	11,0	15,2	19,5	23,9	28,3
	ξ	1,16	1,77	2,35	2,92	3,47	4,01	4,54
3	λ_1	—	2,60	2,78	2,90	2,97	3,03	3,08
	λ_2	—	2,84	3,53	4,00	4,35	4,62	4,85
	γ_2	—	3,84	4,53	5,00	5,35	5,62	5,85
	γ_3	—	18,3	38,5	62,6	89,3	118	148
	ξ	—	1,90	2,72	3,54	4,36	5,18	5,99
4	λ_1	—	2,50	2,56	2,60	2,63	2,65	2,66
	λ_2	—	2,46	2,70	2,84	2,93	3,00	3,05
	λ_3	—	2,34	3,18	3,75	4,16	4,47	4,72
	γ_2	—	3,46	3,70	3,84	3,93	4,00	4,05
	γ_3	—	11,6	15,4	18,2	20,3	21,9	23,2
	γ_4	—	33,6	98,5	186	290	405	529
	ξ	—	1,91	2,80	3,70	4,61	5,51	6,40

Прочерки в колонке $F = 10^{-2}$ означают, что при этом значении вероятности ложной тревоги трёхэтапная и четырёхэтапная процедуры

вырождаются в двухэтапную. Максимальный выигрыш достигается уже при двух этапах. Если, например, $m = 3$, то выигрыш максимален при нулевых значениях порога и затрат для одного из этапов, т. е. если этот этап фактически не производится.

Дополнительные оценки показывают, что при $F = 10^{-3}$ трёхэтапная процедура отличается от двухэтапной, а четырёхэтапная вырождается в трёхэтапную.

Из представленных результатов следует, что величина энергетического выигрыша растёт с увеличением числа этапов не беспредельно, и что при больших вероятностях ложной тревоги предел наступает быстрее. При малых вероятностях ложной тревоги величина энергетического выигрыша увеличится, если применить число этапов больше четырёх, однако это увеличение будет незначительно. Преимущества многоэтапного обнаружения реализуются, в основном, уже при двух или трёх этапах.

Перейдём теперь к анализу эффективности обнаружения при рэлеевских полностью зависимых от этапа к этапу флуктуациях сигнала.

На основании результатов, полученных в предыдущем и в данном параграфах, будем предполагать, что выигрыш при больших отношениях сигнал/шум слабо зависит от величины энергетических затрат. Это предположение позволяет по-прежнему использовать для вероятности обнаружения приближённую формулу (1) с той лишь разницей, что для величины M нужно найти новое выражение.

Выражение для M будем искать по формуле

$$M = \lim_{\rho_1 \to \infty} \{\rho_1 (1 - D)\}. \qquad (7.4.3)$$

Предел в (3) ищется при условии, что $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_m$ отличны от нуля и не зависят от ρ_1, а значения вероятности многоэтапного обнаружения D определяются по точным формулам.

Двумерное распределение результатов обработки сигнала при рэлеевских полностью зависимых флуктуациях амплитуды сигнала имеет вид

$$W(R_1, R_2) = \frac{1}{1+\rho_1+\rho_2} \exp\left\{-\frac{R_1(1+\rho_2)+R_2(1+\rho_1)}{1+\rho_1+\rho_2}\right\} I_0\left(\frac{2\sqrt{R_1 R_2 \rho_1 \rho_2}}{1+\rho_1+\rho_2}\right),$$

а вероятность обнаружения определяется формулой

$$D = \int_{\lambda_1}^{\infty}\int_{\lambda_2}^{\infty} W(R_1, R_2)\, dR_1\, dR_2 = e^{-\lambda_1/(1+\rho_1)}\, J\left(\frac{\lambda_2(1+\rho_1)}{1+\rho_1+\rho_2}, \frac{\lambda_1\rho_1\rho_2}{(1+\rho_1)(1+\rho_1+\rho_2)}\right) +$$

$$+ e^{-\lambda_2/(1+\rho_2)}\left\{1 - J\left(\frac{\lambda_2\rho_1\rho_2}{(1+\rho_2)(1+\rho_1+\rho_2)}, \frac{\lambda_1(1+\rho_2)}{1+\rho_1+\rho_2}\right)\right\}. \qquad (7.4.4)$$

Подставляя (4) в (3) и вычисляя предел, придём к формуле (1), где функция $\Lambda = \Lambda(\gamma, \lambda_1, \lambda)$ имеет вид:

$$\Lambda(\gamma, \lambda_1, \lambda) = (1+\gamma e^{-\lambda_1}) \times$$

$$\times \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_1(\lambda-\lambda_1)}{\gamma}} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda_1\gamma}{1+\gamma} - \frac{\lambda-\lambda_1}{1+\gamma} \right) I_1\left(\frac{2\sqrt{\gamma\lambda_1(\lambda-\lambda_1)}}{1+\gamma} \right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_1 J\left(\frac{\lambda-\lambda_1}{1+\gamma}, \frac{\lambda_1\gamma}{1+\gamma} \right) + \frac{\lambda-\lambda_1}{\gamma} J\left(\frac{\lambda_1\gamma}{1+\gamma}, \frac{\lambda-\lambda_1}{1+\gamma} \right) \right\}.$$

Здесь $\gamma \equiv \gamma_2 = \rho_2/\rho_1$.

Если число этапов произвольно, то вероятность обнаружения определяется формулой

$$D = \int_0^\infty \left\{ \prod_{\nu=1}^{m} J(\lambda_\nu, \rho_\nu x) \right\} e^{-x}\, dx,$$

из которой после несложных преобразований следует

$$1 - D = \frac{1}{\rho_1} \int_0^\infty \left\{ 1 - \prod_{\nu=1}^{m} J(\lambda_\nu, \gamma_\nu t) \right\} e^{-t/\rho_1}\, dt.$$

Здесь $\gamma_1 \equiv 1$. С помощью предельного перехода (3) получаем выражение для M в виде интеграла

$$M = \int_0^\infty \left\{ 1 - \prod_{\nu=1}^{m} J(\lambda_\nu, \gamma_\nu t) \right\} dt, \qquad (7.4.5)$$

значения которого можно находить численными методами.

Численное интегрирование требует существенных вычислительных затрат, поэтому при произвольном числе этапов упомянутый выше алгоритм прямого поиска минимума может оказаться неприемлемым. В данном случае целесообразно использовать градиентный метод. Необходимые при этом аналитические выражения для частных производных функции Λ могут быть найдены дифференцированием с использованием приведенных в Приложении 1 соотношений для частных производных функции $J(\cdot\cdot)$.

Результаты численных оценок эффективности многоэтапного обнаружения при полностью зависимых флуктуациях сигнала сведены в табл. 7.2.

Сравнение данных табл. 7.1 и 7.2 показывает, что при флуктуациях сигнала, статистически зависимых от этапа к этапу, энергетический выигрыш заметно больше, чем при независимых флуктуациях.

Таблица 7.2

Оптимальные значения параметров и энергетического выигрыша ξ при рэлеевских полностью зависимых от этапа к этапу флуктуациях сигнала

m	F λ	10^{-2} 4,61	10^{-4} 9,21	10^{-6} 13,82	10^{-8} 18,42	10^{-10} 23,03	10^{-12} 27,63	10^{-14} 32,24
2	λ_1 γ_2 ξ	1,98 2,44 1,45	2,69 4,26 2,31	3,13 5,97 3,11	3,44 7,61 3,87	3,68 9,19 4,60	3,87 10,7 5,31	4,03 12,2 6,01
3	λ_1 λ_2 γ_2 γ_3 ξ	1,66 1,59 1,82 2,88 1,48	1,91 2,41 2,27 7,12 2,69	2,04 2,90 2,52 11,5 3,89	2,12 3,24 2,69 16,0 5,07	2,17 3,49 2,81 20,5 6,25	2,22 3,70 2,91 25,1 7,42	2,25 3,87 2,99 29,6 8,58
4	λ_1 λ_2 λ_3 γ_2 γ_3 γ_4 ξ	— — — — — — —	1,74 1,83 2,15 1,95 3,82 9,07 2,78	1,78 1,98 2,70 2,03 4,47 16,5 4,11	1,81 2,06 3,08 2,08 4,91 24,4 5,44	1,83 2,12 3,36 2,11 5,23 32,3 6,77	1,84 2,16 3,58 2,13 5,48 40,3 8,10	1,85 2,20 3,76 2,15 5,69 48,5 9,42

Дополнительными исследованиями двухэтапной процедуры, проведенными с использованием точной формулы (4), было выяснено, что выигрыш слабо меняется при небольшом отклонении параметров от оптимальных значений и что вероятность обнаружения (4) хорошо аппроксимируется формулой

$$D = \mathrm{e}^{-\Lambda/(1+\rho)} \qquad (7.4.6)$$

даже при сравнительно небольших ρ. Так при $\rho = 10$ и $F = 10^{-4}$ вероятность обнаружения максимальна при $\gamma = 4{,}72$ и $\lambda_1 = 2{,}76$, при этом выигрыш всего на 0,3 % больше выигрыша, получаемого при приведенных в табл. 7.2 значениях параметров, оптимальных при больших ρ. При $\rho = 5$ и $\rho = 10$ и значениях параметров, приведенных в табл. 7.2 для $F = 10^{-4}$, точная формула (4) даёт вероятности обнаружения 0,502 и 0,692, в то время как приближённая формула (6) даёт значения 0,514 и 0,696. Отсюда видно, что приведенные в табл. 7.2 значения параметров можно использовать и при небольших ρ, определяя вероятность обнаружения по простой формуле (6). Коэффициент Λ при этом можно находить по формуле $\Lambda = \lambda/\xi$.

7.5. Двухэтапное обнаружение рэлеевского сигнала при частично зависимых от этапа к этапу флуктуациях

Остаётся неясным вопрос, при каких количественных соотношениях для степени зависимости флуктуаций можно для упрощения вычислений считать эти флуктуации полностью зависимыми или полностью независимыми. Представляет интерес и эффективность обнаружения для промежуточного случая, когда флуктуации сигнала нельзя отнести ни к тем, ни к другим.

Если амплитуда сигнала флуктуирует по рэлеевскому закону, то отношения сигнал/шум q_1 и q_2 на первом и втором этапах обнаружения можно представить в виде

$$q_1 = \rho_1 (u_1^2 + v_1^2)/2, \qquad q_2 = \rho_2 (u_2^2 + v_2^2)/2,$$

где u_1, u_2, v_1, v_2 — нормальные случайные величины с нулевым средним значением и единичной дисперсией, причём $\overline{u_1 u_2} = \overline{v_1 v_2} = c$ и $\overline{u_1 v_2} = -\overline{u_2 v_1} = s$, где c и s — параметры вероятностной модели. Здесь, как и прежде, ρ_1 и ρ_2 — средние значения отношений сигнал/шум на первом и втором этапах.

Двумерное распределение результатов обработки сигнала для принятой модели флуктуаций имеет вид

$$W(R_1, R_2) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{1-r^2}\left(\frac{R_1}{1+\rho_1} + \frac{R_2}{1+\rho_2}\right)\right\}}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)(1-r^2)} I_0\left(\frac{2r}{1-r^2}\sqrt{\frac{R_1}{1+\rho_1}\frac{R_2}{1+\rho_2}}\right),$$

где

$$r^2 = r_0^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)}, \qquad r_0^2 = c^2 + s^2.$$

Если положить $r_0 = 1$, то получим распределение результатов обработки при флуктуациях амплитуды сигнала, полностью зависимых от этапа к этапу. При $r_0 = 0$, когда этапы статистически независимы, находим, что двумерное распределение превращается в произведение одномерных распределений.

Вероятность двухэтапного обнаружения сигнала равна

$$D = e^{-\lambda_1/(1+\rho_1)} J\left(\frac{\lambda_2}{(1-r^2)(1+\rho_2)}, \frac{r^2 \lambda_1}{(1-r^2)(1+\rho_1)}\right) +$$

$$+ e^{-\lambda_2/(1+\rho_2)} \left\{1 - J\left(\frac{r^2 \lambda_2}{(1-r^2)(1+\rho_2)}, \frac{\lambda_1}{(1-r^2)(1+\rho_1)}\right)\right\}. \qquad (7.5.1)$$

Теперь вероятность обнаружения будем представлять в виде

$$D = \exp\{-\Lambda/(1+\rho)\}, \qquad (7.5.2)$$

где $\rho = \rho_1(1+\gamma e^{-\lambda_1})$ — величина, пропорциональная среднему времени наблюдения в отсутствие сигнала, $\gamma = \rho_2/\rho_1$. Здесь Λ является функцией многих переменных — величины r_0, параметров двухэтапной процедуры (λ_1, λ_2, γ), а также ρ или D.

В случаях полностью зависимых и полностью независимых этапов (при $r_0 = 1$ и при $r_0 = 0$) для упрощения расчётов при построении зависимости D от ρ при достаточно больших значениях ρ логарифм вероятности обнаружения можно аппроксимировать первым членом разложения в ряд по степеням $1/(1 + \rho)$. Иными словами, в формулу (2) можно подставлять значение Λ, вычисленное при $\rho \to \infty$ (подробнее см. предыдущий параграф).

Если попытаться применить этот метод к случаю частично зависимых этапов, то получим следующие выводы.

1. Функция Λ при $r_0 \neq 1$, $\rho \to \infty$ не зависит от r_0 и совпадает со значением Λ при $r_0 = 0$, $\rho \to \infty$, т. е. при больших вероятностях обнаружения эффективность при частично зависимых этапах не отличается от эффективности при полностью независимых этапах.

2. При больших значениях r_0 ($r_0 \neq 1$) функция Λ медленно стремится к своему пределу при $\rho \to \infty$. Отсюда следует, что при больших значениях r_0 эффективность при частично зависимых этапах близка к эффективности при независимых этапах лишь при больших и редко встречающихся значениях вероятности обнаружения, а при меньших значениях вероятности обнаружения нельзя пренебрегать зависимостью Λ от ρ или D.

На рис. 7.2 приведены зависимости Λ от D, построенные для различных значений r_0. Эти зависимости построены для вероятности ложной тревоги на элемент обзора 10^{-4} и при приведенных в предыдущем параграфе значениях параметров процедуры обнаружения, оптимальных при больших ρ при полностью зависимых этапах. Из рисунка видно, что влияние зависимости флуктуаций сигнала на эффективность обнаружения определяется не только значениями r_0, но и в сильной степени значениями вероятности обнаружения. На рис. 7.3 плоскость (r_0, D) разделена на три области по характеру влияния зависимости флуктуаций. Полагалось, что точка (r_0, D) относится к области для независимых (или зависимых) этапов, если функция Λ, соответствующая этой точке, отличается не более чем на 5 % от значения этой функции при $r_0 = 0$ (или при $r_0 = 1$) и при этом же значении D.

Рис. 7.3 построен по приведенным на рис. 7.2 данным и соответствует вероятности ложной тревоги на элемент обзора 10^{-4}. Однако проверка для вероятности 10^{-10} показала, что границы областей практически не зависят от вероятности ложной тревоги.

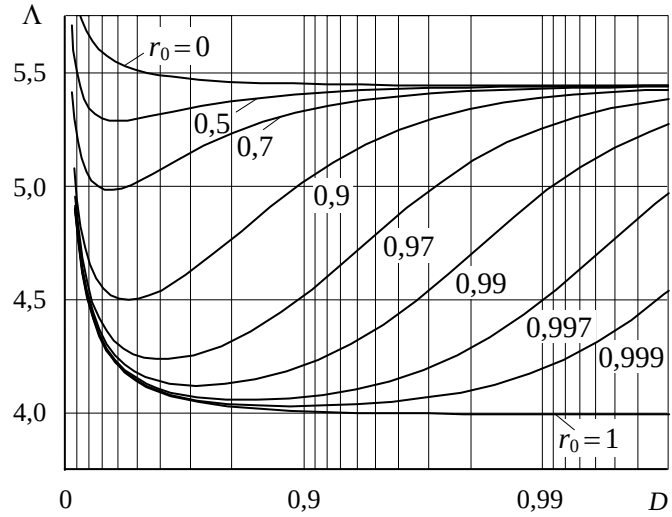


Рис. 7.2. Зависимости коэффициента Λ при частично зависимых этапах

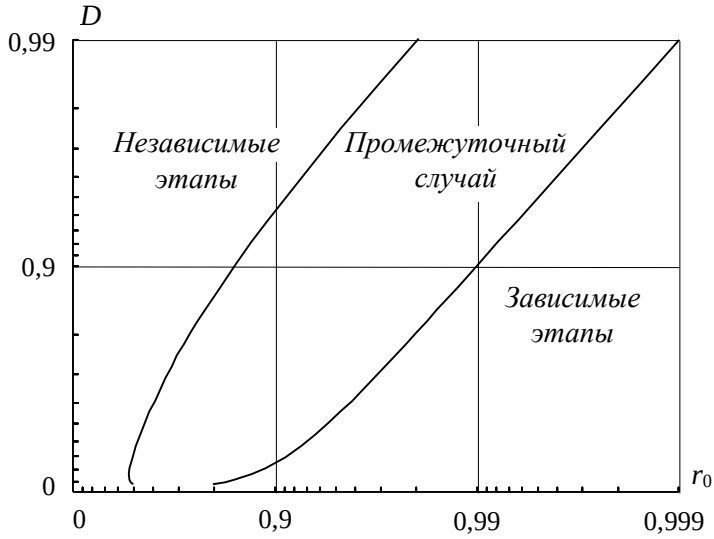


Рис. 7.3. Границы областей

Результаты показывают, что флуктуации сигнала можно считать полностью зависимыми лишь при достаточно больших значениях r_0.

По результатам данного параграфа можно сделать ещё один вывод, который оказывается полезным при оценке характеристик двухэтапного обнаружения сигнала многоканальной системой обнаружения с переменной разрешающей способностью, когда на первом этапе обнаружения вместе с обнаруживаемым сигналом в одном элементе разрешения оказываются ещё другие сигналы. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Для простоты введём идеализирующее предположение, что все сигналы на первом этапе попадают в один разрешаемый элемент, и что все координаты сигналов совпадают при этом с координатами настройки канала обнаружения. А для второго этапа будем предполагать, что все сигналы попадают в разные элементы разрешения. Считаем, что все сигналы имеют одинаковые средние значения отношения сигнал/шум: ρ_1 — на первом этапе и ρ_2 — на втором.

Если флуктуации сигнала независимы от этапа к этапу, то вероятность обнаружения сигнала можно записать в виде

$$D = D_1 \cdot D_2 , \qquad (7.5.3)$$

где $D_1 = \exp\{-\lambda_1/(1+L\rho_1)\}$ — вероятность превышения порога на первом этапе (см. § 4.6), $D_2 = \exp\{-\lambda_2/(1+\rho_2)\}$ — вероятность превышения порога на втором этапе, L — число неразрешаемых на первом этапе сигналов.

Можно показать, что если флуктуации рассматриваемого сигнала полностью зависимы от этапа к этапу, то вероятность обнаружения этого сигнала (при наличии других сигналов, неразрешаемых с ним на первом этапе) будет иметь вид:

$$D = D_1 J\left(\frac{\lambda_2}{1+\varepsilon\rho_2}, \frac{\lambda_1}{1+L\rho_1}\frac{\rho_1}{1+L\rho_1}\frac{\rho_2}{1+\varepsilon\rho_2}\right) +$$

$$+ D_2\left\{1 - J\left(\frac{\lambda_2}{1+\rho_2}\frac{\rho_1}{1+\rho_1}\frac{\rho_2}{1+\varepsilon\rho_2}, \frac{\lambda_1}{1+L\rho_1}\frac{1+\rho_2}{1+\varepsilon\rho_2}\right)\right\},$$

где $\varepsilon = 1 - \rho_1/(1+L\rho_1)$.

Это выражение можно формально получить, если в формуле (1) для вероятности обнаружения при частично зависимых этапах ρ_1 заменить на $L\rho_1$ и сделать подстановку $r_0^2 = (1+\rho_1)/(1+L\rho_1)$. Отсюда следует, что $r_0^2 \approx 1/L$ при $L > 1$. Учитывая теперь результаты для частично зависимых этапов, приходим к выводу, что даже при больших временах корреляции выходные величины при $L > 1$ нужно считать статистически независимыми. Вероятность обнаружения тогда можно определять по простой формуле (3).

7.6. Сравнительная оценка различных методов междуэтапной обработки

В предыдущих параграфах рассматривалось многоэтапное обнаружение с критерием “*m* из *m*”. Здесь мы рассмотрим ещё два способа междуэтапной обработки: суммирование результатов обработки сигналов и критерий “1 из 2-х”. Соответствующие двухэтапные процедуры обнаружения с этими способами междуэтапной обработки были описаны в § 7.2.

Предполагаем, что флуктуации сигнала рэлеевские.

Одномерные распределения результатов обработки сигнала на первом и втором этапах имеют вид

$$W_1(R_1)=\frac{1}{1+\rho_1}\exp\left\{-\frac{R_1}{1+\rho_1}\right\},\qquad W_2(R_2)=\frac{1}{1+\rho_2}\exp\left\{-\frac{R_2}{1+\rho_2}\right\}.$$

Если флуктуации сигнала независимы от этапа к этапу, то двумерное распределение $W(R_1, R_2)$ результатов обработки сигнала является произведением одномерных распределений. Выражения для двумерных распределений при полностью зависимых этапах и при частично зависимых этапах были приведены в § 7.4 и § 7.5.

Вероятность двухэтапного обнаружения при суммировании результатов обработки определяется формулой

$$D=\iint\limits_{\substack{R_1\ge\lambda_1\\ R_1+R_2\ge\lambda_2}} W(R_1,R_2)\,dR_1\,dR_2=$$

$$=\int\limits_{\lambda_2}^{\infty} W_1(R_1)\,dR_1+\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left\{\int\limits_{\lambda_2-R_1}^{\infty} W(R_1,R_2)\,dR_2\right\}dR_1\,. \qquad (7.6.1)$$

При отсутствии сигнала, когда $W(R_1, R_2) = \exp(-R_1 - R_2)$, из (1) получаем формулу для вероятности ложной тревоги

$$F=(1+\lambda_2-\lambda_1)\exp(-\lambda_2)\,. \qquad (7.6.2)$$

При независимых флуктуациях из (1) получим

$$D=\frac{1+\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\exp\left\{-\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\rho_2}-\frac{\lambda_1}{1+\rho_1}\right\}-\frac{1+\rho_1}{\rho_2-\rho_1}\exp\left\{-\frac{\lambda_2}{1+\rho_1}\right\}$$

при $\rho_2 \ne \rho_1$ и

$$D=\left(1+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\rho_1}\right)\exp\left\{-\frac{\lambda_2}{1+\rho_1}\right\}$$

при $\rho_2 = \rho_1$.

Благодаря работе [38] оказалось возможным при зависимых флуктуациях выразить интеграл (1) через цилиндрические функции двух мнимых переменных

$$\Upsilon_n(y, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^{n+2\nu} I_{n+2\nu}(x),$$

подробно изученные в работах [39, 40] и затем табулированные [3].

При флуктуациях амплитуды сигнала, полностью зависимых от этапа к этапу, вероятность обнаружения при суммировании результатов обработки имеет вид

$$D = \mathrm{e}^{-\lambda_1/(1+\rho_1)} J\left(\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(1+\rho_1)}{1+\rho_1+\rho_2}, \frac{\lambda_1\rho_1\rho_2}{(1+\rho_1)(1+\rho_1+\rho_2)}\right) +$$

$$+ \frac{1+\rho_1+\rho_2}{\rho_1+\rho_2} \mathrm{e}^{-\lambda_2/(1+\rho_1+\rho_2)} \left\{1 - J\left(\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\rho_1}{1+\rho_1+\rho_2}, \frac{\lambda_1\rho_2}{1+\rho_1+\rho_2}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\rho_1+\rho_2} \exp\left\{-\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(1+\rho_1)+\lambda_1(1+\rho_2)}{1+\rho_1+\rho_2}\right\} \times$$

$$\times \left\{\Upsilon_1\left(\frac{2(\lambda_2-\lambda_1)\rho_2}{1+\rho_1+\rho_2}, \frac{2\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)\rho_1\rho_2}}{1+\rho_1+\rho_2}\right) -\right.$$

$$\left. - \Upsilon_2\left(\frac{2(\lambda_2-\lambda_1)\rho_2}{1+\rho_1+\rho_2}, \frac{2\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)\rho_1\rho_2}}{1+\rho_1+\rho_2}\right)\right\}. \qquad (7.6.3)$$

Выражение для вероятности обнаружения можно получить и для частично зависимых этапов, когда флуктуации сигнала занимают промежуточное положение между полностью независимыми от этапа к этапу флуктуациями и полностью зависимыми. Это выражение имеет примерно такой же вид, как и формула (3).

Формулу (3) можно проверить непосредственным дифференцированием, при этом окажутся необходимыми соотношения для частных производных цилиндрических функций, которые нетрудно получить из приведенных в работе [39] формул.

Заметим, что интеграл $J(x, y)$ можно выразить через цилиндрические функции двух мнимых переменных

$$1 - J(x, y) = \mathrm{e}^{-x-y}\{\Upsilon_1(2x, 2\sqrt{xy}) + \Upsilon_2(2x, 2\sqrt{xy})\}.$$

Для дальнейшего исследования двухэтапного обнаружения с суммированием результатов обработки при полностью зависимых этапах применима методика, использованная в § 7.4. При больших средних

значениях отношений сигнал/шум вероятность обнаружения представим в виде

$$D \approx \exp\left\{-\frac{1}{\rho}\Lambda(\gamma, \lambda_1, \lambda_2)\right\}.$$

Здесь, как и в § 7.4, функция Λ от ρ не зависит. Оптимизация процедуры заключается в нахождении условного минимума, т. е. в нахождении значений параметров γ, λ_1, λ_2, минимизирующих функцию Λ при условии выполнения равенства (2). Функция Λ имеет вид

$$\Lambda(\gamma, \lambda_1, \lambda_2) = \left(1+\gamma\, e^{-\lambda_1}\right)\left\{\lambda_1 J\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\gamma}, \frac{\gamma\lambda_1}{1+\gamma}\right)+\right.$$

$$+\frac{\lambda_2-1}{1+\gamma}\left[1-J\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\gamma}, \frac{\gamma\lambda_1}{1+\gamma}\right)\right]+\frac{1}{1+\gamma}\exp\left(-\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\gamma}-\frac{\gamma\lambda_1}{1+\gamma}\right)\times$$

$$\times\left[(\lambda_2-\lambda_1)I_0\left(\frac{2\sqrt{\gamma\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}}{1+\gamma}\right)+\sqrt{\gamma\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}\, I_1\left(\frac{2\sqrt{\gamma\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}}{1+\gamma}\right)-\right.$$

$$-\Upsilon_1\left(\frac{2\gamma(\lambda_2-\lambda_1)}{1+\gamma}, \frac{2\sqrt{\gamma\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}}{1+\gamma}\right)+$$

$$\left.\left.+\Upsilon_2\left(\frac{2\gamma(\lambda_2-\lambda_1)}{1+\gamma}, \frac{2\sqrt{\gamma\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}}{1+\gamma}\right)\right]\right\}.$$

При междуэтапной обработке по критерию “1 из 2-х” вероятность обнаружения определяется формулой

$$D = \int_{\lambda_2}^{\infty} W_1(R_1)\, dR_1 + \int_{\lambda_1}^{\infty}\int_{\lambda_3}^{\infty} W(R_1, R_2)\, dR_1 dR_2 - \int_{\lambda_2}^{\infty}\int_{\lambda_3}^{\infty} W(R_1, R_2)\, dR_1 dR_2 .$$

Выражения для двумерных интегралов, входящих в эту формулу, аналогичны соответствующим выражениям для вероятности обнаружения при обработке с критерием “2 из 2-х”.

В результате исследования эффективности обнаружения при независимых от этапа к этапу флуктуациях сигнала можно прийти к следующему выводу.

Если упомянутые способы междуэтапной обработки сигнала расположить в порядке убывания эффективности процедуры обнаружения, то в случае двух этапов получим следующую последовательность:

суммирование результатов обработки сигнала;

критерий “1 из 2-х”;

критерий “2 из 2-х”.

В дополнение к этому добавим, что первые два способа междуэтапной обработки позволяют получить существенный выигрыш и при неоптимальном соотношении между энергетическими затратами на первом и на втором этапах, когда $\rho_2 = \rho_1$. Если же амплитуда сигнала флуктуирует по рэлеевскому закону, флуктуации независимы от этапа к этапу и $\rho_2 = \rho_1$, то при критерии “2 из 2-х” никакого выигрыша по сравнению с одноэтапным обнаружением нет.

Анализ двухэтапного обнаружения с суммированием результатов обработки при полностью зависимых этапах показывает, что в общем случае, когда γ выбирается оптимальным образом, оптимальные значения параметров λ_1 и γ почти не отличаются от соответствующих оптимальных значений параметров для междуэтапной обработки с критерием “2 из 2-х”. При $F = 10^{-6}$ и 10^{-10} отличия составляют не более 1 %. Оказалось, что и минимальные значения Λ отличаются примерно на 1 %, причём при суммировании результатов обработки минимальное значение Λ даже больше, чем при обработке по критерию “2 из 2-х”. Это говорит о том, что двухэтапная процедура обнаружения с применением критерия “2 из 2-х” (при оптимальных значениях параметров λ_1 и γ) при статистически зависимых этапах практически не отличается от процедуры обнаружения с суммированием результатов.

Заметим, что если после приёма сигнала на втором этапе производить весовое суммирование результатов обработки, то при $\gamma \neq 1$ выигрыш можно несколько увеличить. Скорее всего, выигрыш будет не меньше выигрыша для процедуры с критерием “2 из 2-х”. Выражение для вероятности обнаружения и в этом случае можно выразить через цилиндрические функции двух мнимых переменных. Но можно ожидать, что увеличение выигрыша при этом будет практически незначительным.

При $\gamma = 1$ различия в эффективности процедур заметнее. По графикам рис. 7.4 видно, что суммирование результатов обработки даёт больший выигрыш, чем критерий “2 из 2-х”.

Анализ показывает, что при $\rho_2 = \rho_1$ и при полностью зависимых этапах процедура с критерием “1 из 2-х” практически не отличается по эффективности от процедуры с критерием “2 из 2-х”.

Ранее мы предполагали, что отношение числа элементов обзора, в которых принимаются полезные сигналы, к общему числу элементов обзора пренебрежимо мало. Если же временно отказаться от используемого предположения, то получим, что с увеличением данного отношения энергетический выигрыш при двухэтапном обнаружении уменьшается, причём уменьшение будет более быстрым для процедуры с критерием “2 из 2-х”.

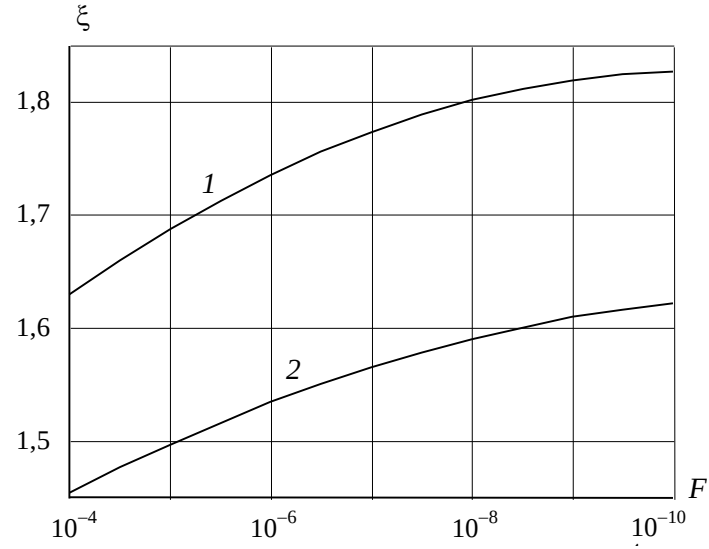


Рис. 7.4. Выигрыш, получаемый при $\gamma = 1$;
флуктуации амплитуды сигнала полностью зависимы от этапа к этапу:
1 — со сложением результатов обработки,
2 — с применением критерия “2 из 2-х”

7.7. Двухэтапное обнаружение некогерентного флуктуирующего сигнала

В оптимальной двухэтапной процедуре обнаружения время наблюдения в элементе обзора на втором этапе должно быть в несколько раз больше, чем на первом этапе. Как уже отмечалось, по этой причине не всегда удаётся осуществить когерентное накопление сигнала, так как при когерентном накоплении будут меняться от этапа к этапу условия согласованной фильтрации. Поэтому здесь будет рассматриваться двухэтапное обнаружение при некогерентном накоплении. Междуэтапная обработка производится по критерию “2 из 2-х”. Обнаружение сигнала на каждом этапе осуществляется многоканальной системой.

Вероятность ложной тревоги на один элемент обзора равна $F_э = 1-(1-F)^n \approx nF$, где n — число каналов обнаружения, F — вероятность ложной тревоги на один канал. Если вероятность F задана, то величины порогов на первом и втором этапах λ_1, λ_2 и числа некогерентно накапливаемых импульсов N_1 и N_2 будут связаны между собой уравнением

$$F = F_1 \cdot F_2 , \qquad (7.7.1)$$

где F_1 — вероятность превышения порога шумами на первом этапе (зависит от λ_1 и N_1), F_2 — на втором этапе (зависит от λ_2 и N_2).

Среднее время наблюдения при двухэтапном обнаружении некогерентного сигнала характеризуется величиной ρ:

$$\rho = \rho_1 + P\rho_2 = \rho_и(N_1 + PN_2)\,, \qquad (7.7.2)$$

где $\rho_1 = N_1\,\rho_и$ и $\rho_2 = N_2\,\rho_и$ — средние значения отношений сигнал/шум для сигналов, принимаемых на первом и втором этапах, $\rho_и$ — среднее значение отношения сигнал/шум для одного импульса, $P = 1 - (1 - F_1)^n$ — вероятность того, что в данном элементе обзора в отсутствие сигнала будет производиться второй этап обнаружения.

Предполагается, что время корреляции флуктуаций сигнала больше времени наблюдения на каждом из этапов, т. е. на каждом этапе импульсы флуктуируют дружно. Тогда с достаточной точностью можно считать, что логарифм вероятности обнаружения обратно пропорционален отношению сигнал/шум. Поэтому вероятность обнаружения сигнала можно записать в виде

$$D \approx \exp\left\{-\frac{1}{\rho_1} M(N_1, N_2, \lambda_1, \lambda_2)\right\}. \qquad (7.7.3)$$

Из формул (2) и (3), получаем $D \approx \exp(-\Lambda/\rho)$, где

$$\Lambda \equiv \Lambda(N_1, N_2, \lambda_1, \lambda_2) = (1 + \gamma P)\, M(N_1, N_2, \lambda_1, \lambda_2), \qquad \gamma = \rho_2/\rho_1 = N_2/N_1.$$

Оптимизация процедуры обнаружения опять сводится к нахождению значений переменных, минимизирующих функцию Λ при заданном значении вероятности ложной тревоги F.

Функция Λ зависит от трёх свободных переменных: N_1, N_2, λ_1; переменная λ_2 определяется уравнением (1). Если N_1 задано, то, построив семейство зависимостей Λ от λ_1 для различных значений N_2, можно найти значения λ_1 и N_2, зависящие от N_1, при которых Λ минимально. Если N_1 не задано, то наибольшая вероятность обнаружения будет при $N_1 = 1$, т. е. когда сигнал на первом этапе когерентный.

Если заданы $\rho_и$ и D, и тем самым не представляется возможным выбрать N_1 оптимальным, то, построив зависимость вероятности обнаружения от N_1 при оптимально выбираемых для каждого N_1 значениях λ_1 и N_2, можно найти из неё требуемое значение N_1, при котором вероятность обнаружения равна заданной величине.

Выигрыш, получаемый при оптимальном двухэтапном обнаружении по сравнению с одноэтапным когерентным обнаружением, будет определяться формулой $\xi = \ln(1/F)/\Lambda_{мин}$, где $\Lambda_{мин}$ — значение функции Λ при оптимальных значениях параметров.

Ниже рассматриваются два случая: независимые и полностью зависимые от этапа к этапу флуктуации сигнала. Считается, что накопление осуществляется после квадратичного детектора.

При независимых от этапа к этапу флуктуациях и при больших отношениях сигнал/шум вероятность обнаружения можно представить в виде

$$D \approx \exp\left\{-\frac{\lambda_1-(N_1-1)}{1+\rho_1}\right\}\exp\left\{-\frac{\lambda_2-(N_2-1)}{1+\rho_2}\right\}.$$

Если в этой формуле пренебречь единицами по сравнению с ρ_1 и ρ_2, то получим выражение (3), где функция M имеет вид

$$M(N_1, N_2, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 - (N_1 - 1) + [\lambda_2 - (N_2 - 1)]/\gamma .$$

При полностью зависимых этапах вероятность обнаружения определяется формулой

$$D = \int_0^\infty J_{N_1}(\lambda_1, \rho_1 x)\, J_{N_2}(\lambda_2, \rho_2 x)\, \mathrm{e}^{-x}\, dx , \qquad (7.7.4)$$

из которой можно получить [ср. (7.4.5)]

$$M = \int_0^\infty \left\{1 - J_{N_1}(\lambda_1, t)\, J_{N_2}(\lambda_2, \gamma t)\right\} dt .$$

Значения M определяются по этой формуле численными методами.

При $\lambda_1 = \lambda_2$ и $N_1 = N_2$ справедлива формула

$$M = \lambda_1 - (N_1 - 1) + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{\mathrm{e}^{p\lambda_1}}{\sqrt{2}\,(1 + p/2)^{N_1 - 1/2}\, p^{3/2}}\, dp ,$$

из которой далее можно получить асимптотическое разложение M при $\lambda_1 >> 1$.

По приведенным выше формулам можно произвести оптимизацию двухэтапной процедуры. В качестве примера на рис. 7.5 представлены результаты расчётов для нескольких случаев при $N_1 = 1$.

Зависимости порога λ_1 от F_1 и порога λ_2 от F_2 и N_2 при расчётах определялись методами, изложенными в § 4.2.

Если сравнить выигрыш, получаемый при двухэтапном обнаружении с некогерентной обработкой на втором этапе, с выигрышем при когерентной обработке (§ 7.4), то можно сделать вывод, что некогерентное дробление энергии сигнала на втором этапе незначительно ухудшает эффективность двухэтапной процедуры.

Этот вывод является частным случаем более общей закономерности: при обработке сигнала на втором этапе можно допускать отклонения от оптимальной обработки. Эффективность двухэтапной процедуры в целом ухудшается при этом несущественно (при оптимальном выборе параметров).

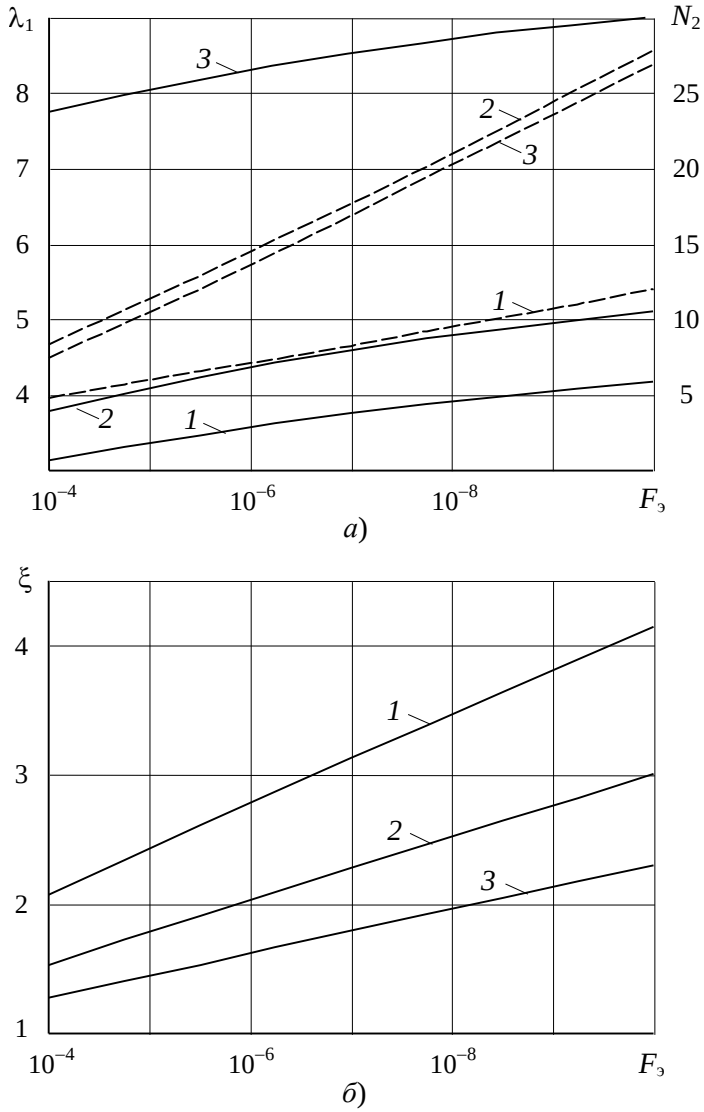


Рис. 7.5. Зависимости оптимальных значений λ_1 (*а*, сплошные кривые), оптимальных значений N_2 (*а*, пунктир) и выигрыша ξ (*б*) от вероятности ложной тревоги на один элемент обзора при $N_1 = 1$:

1 — зависимые этапы, $n = 1$; *2* — независимые этапы, $n = 1$; *3* — независимые этапы, $n = 30$

Если $\rho_и$ и D заданы, то естественно сравнивать двухэтапную процедуру с одноэтапной при таких же $\rho_и$ и D. При этом величины $\rho_и$ и D будут определять необходимое число импульсов и при одноэтапном обнаружении — N, причём будет иметь место $N > N_1$. Потери из-за некогерентного дробления при одноэтапном обнаружении будут больше, чем потери на первом этапе при двухэтапном обнаружении. Поэтому оказывается, что выигрыш, получаемый в результате такого сравнения, будет даже больше, чем при сравнении одноэтапного и двухэтапного методов при когерентной обработке.

Оптимальное значение γ ($\gamma = \rho_2/\rho_1$) увеличивается с введением некогерентной обработки на втором этапе. Можно считать, что это увеличение направлено на то, чтобы частично скомпенсировать потери из-за некогерентного дробления. Однако при этом нужно иметь в виду, что в большинстве случаев увеличение γ бывает в несколько раз меньше, чем это необходимо для полной компенсации.

7.8. Многоэтапное обнаружение с критерием "*m* из *m*" при равных временах наблюдения на каждом этапе

Как уже отмечалось, при независимых этапах и при равных временах наблюдения на каждом этапе, применение критерия "2 из 2-х" для рэлеевского сигнала не даёт никакого выигрыша по сравнению с одноэтапным обнаружением. Такой же вывод справедлив и по отношению к m-этапному обнаружению с критерием "m из m". Но как видно по графикам рис. 7.4, при статистически зависимых этапах положение изменяется: имеется выигрыш и при равных временах наблюдения. Однако этот выигрыш небольшой, поэтому можно предположить, что при статистически зависимых этапах выигрыш увеличится с увеличением числа этапов.

Рассмотрим эту задачу для случая когерентной обработки сигнала на каждом этапе. Полагаем, что амплитуда сигнала флуктуирует по рэлеевскому закону. Обнаружение сигнала на каждом этапе осуществляется одним каналом.

Для упрощения анализа будем считать, что на каждом этапе результаты обработки сигнала сравниваются с одним и тем же порогом λ_1. Если F_1 — вероятность превышения шумами порога λ_1, то вероятность ложной тревоги определяется формулой $F = F_1^m = \exp(-m\lambda_1)$. Отсюда $\lambda_1 = (1/m)\cdot\ln(1/F)$.

Вероятность обнаружения при флуктуирующей амплитуде определяется приближённой формулой $D \approx \exp(-M/\rho_1)$, где

$$M = \int_0^\infty \left\{1 - [J(\lambda_1, t)]^m\right\} dt, \qquad (7.8.1)$$

ρ_1 — среднее значение отношения сигнал/шум для сигнала, принимаемого на каждом этапе. При $m = 2$ имеет место

$$M = \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1} I_0(\lambda_1) + \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1} I_1(\lambda_1),$$

а при $m > 2$ интеграл (1) можно вычислить численными методами. На рис. 7.6 представлены зависимости коэффициента M от вероятности ложной тревоги на канал обнаружения для разного числа этапов.

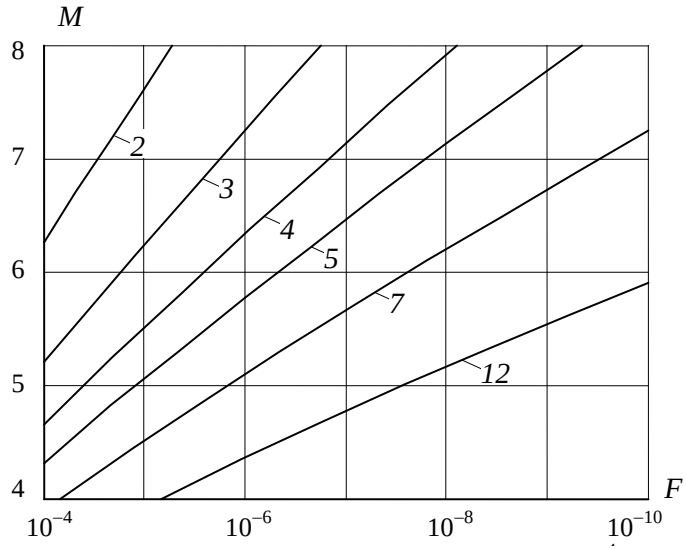


Рис. 7.6. Зависимость коэффициента разложения M от вероятности ложной тревоги; цифрами около кривых обозначено число этапов

Средние энергетические затраты в отсутствие сигнала будут характеризоваться величиной ρ:

$$\rho = \rho_1 + \rho_1 F_1 + \rho_1 F_1^2 + \cdots + \rho_1 F_1^{m-1} = \rho_1 \frac{1-F}{1-F_1} \approx \frac{\rho_1}{1-F_1}.$$

Теперь получаем $D \approx \mathrm{e}^{-\Lambda/\rho}$, где

$$\Lambda = M\,\rho/\rho_1 \approx M/(1-F_1) = M/[1-\exp(-\lambda_1)].$$

Значение λ_1, подставляемое в формулу для Λ, определяется числом этапов и вероятностью ложной тревоги, поэтому свободной переменной, по которой нужно минимизировать Λ, остаётся только число этапов. Исследования, проведенные с использованием кривых, изображённых на рис. 7.6, показали, что оптимальное значение числа этапов можно определять по приближённой формуле $m_\text{o} \approx (1{,}10 \ldots 1{,}25)\lg(1/F)$.

На рис. 7.7 представлена зависимость выигрыша при оптимальном числе этапов ($\xi = \ln(1/F)/\Lambda_{\text{мин}}$) от вероятности ложной тревоги. Здесь

же для сравнения приведена взятая из предыдущего параграфа зависимость выигрыша, получаемого при оптимальном двухэтапном обнаружении с некогерентной обработкой сигнала на втором этапе. По этим результатам можно сделать вывод, что при статистически зависимых этапах можно получить существенный выигрыш и при равных временах наблюдения на каждом этапе.

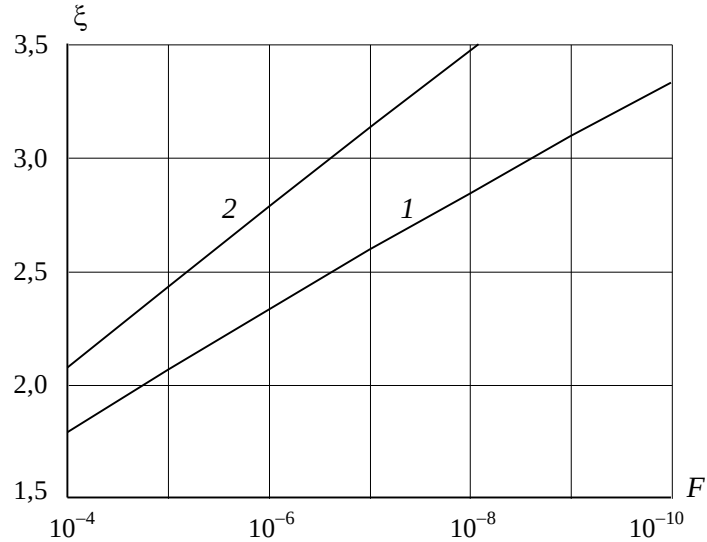


Рис. 7.7. Выигрыш при зависимых этапах:
1 — многоэтапное обнаружение с равными временами; *2* — двухэтапное обнаружение с некогерентным накоплением на втором этапе

Если задано среднее значение отношения сигнал/шум для импульса $\rho_и$, то может возникнуть необходимость в использовании на каждом этапе пачки из N некогерентных импульсов. Тогда для вероятности обнаружения получим $D \approx \exp\{-M/(N\rho_и)\}$, где

$$M = \int_0^\infty \left\{1-[J_N(\lambda_1, t)]^m\right\} dt,$$

а λ_1 находится из уравнения

$$\int_{\lambda_1}^\infty \frac{R^{N-1}}{(N-1)!} e^{-R}\, dR = \sqrt[m]{F}$$

(см. § 4.2).

Как и прежде, необходимое число импульсов N будет определяться заданными значениями $\rho_и$ и D.

8. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

8.1. Введение

В связи с развитием вычислительной техники стало возможным осуществлять обработку сигналов в цифровом виде. Переход к цифровым методам позволяет получить ряд преимуществ. Вместе с тем, такой переход приводит к некоторым энергетическим потерям, так как оптимальным является аналоговый алгоритм обработки сигналов.

Перевод аналоговых реализаций в цифровую последовательность можно представить в виде двух операций. В результате первой операции осуществляется дискретизация по времени, при этом непрерывная реализация представляется её отсчётами, т. е. значениями реализации в фиксированные моменты времени. Вторая операция предусматривает квантование отсчётов по уровню.

Отсчёты реализации производятся в равноотстоящие моменты времени. Величина интервала дискретизации по времени выбирается в результате компромисса между эффективностью обработки и техническими возможностями для построения устройств обработки. В связи с этим весьма актуальной является оценка влияния величины интервала дискретизации на эффективность обработки.

С выбором интервала дискретизации неразрывно связан вопрос с ограничением спектральной полосы входной реализации, так как при неограниченной полосе дисперсия шумовой составляющей входной реализации будет большой и эффективное выделение сигнала на фоне шумов будет возможно лишь при очень малых интервалах дискретизации, что приводит, в конечном счете, к нереализуемости обработки.

В принимаемой далее математической модели устройства обработки полагается, что ограничение полосы входной реализации производится с помощью узкополосного фильтра, размещённого на входе устройства. Термин “узкополосный” здесь имеет общеупотребительный смысл и означает, что ширина полосы фильтра значительно меньше частоты несущей полезного сигнала. В то же время полоса этого фильтра должна быть достаточно широкой, чтобы в её пределах оказывалась основная часть спектральных составляющих полезного сигнала (при любом возможном доплеровском сдвиге несущей).

Квантование по уровню осуществляется аналого-цифровыми преобразователями (АЦП) и заключается в нелинейном преобразовании значений отсчётов. При этом вся вещественная ось разбивается на конечное число интервалов, каждому из которых ставится в соответствие определённое безразмерное число (цифра). Значение отсчёта попадает в некоторый интервал, в результате оно заменяется соответствующим числом. Дальнейшие операции по обработке сигнала состоят в действиях с этими числами, заменяющими значения отсчётов.

Простейшие АЦП основаны на таком разбиении оси, когда все интервалы, за исключением двух, имеют одинаковую и конечную длину. Два интервала имеют неограниченную длину, граница одного из них уходит в $-\infty$, другого — в $+\infty$. Соседним интервалам ставятся в соответствие числа, отличающиеся на одну и ту же постоянную величину.

В дальнейшем будем иметь в виду только такие простейшие АЦП.

Будем считать, что вероятность попадания случайных значений отсчётов в крайние (полубесконечные) интервалы ничтожно мала (этой вероятностью можно пренебречь). Длину конечных интервалов будем называть интервалом квантования по уровню, а отношение интервала квантования к некоторой постоянной величине, имеющей одинаковую с отсчётами размерность, будем называть нормированным интервалом квантования по уровню.

Чтобы упростить задачу, а также, чтобы получить более наглядные результаты, целесообразно принять следующий порядок анализа схем обработки. Вначале проводится исследование влияния характеристик предварительного высокочастотного фильтра и интервала дискретизации в пренебрежении эффектом квантования по уровню. Можно условно представить, что характеристика АЦП имеет большое число уровней квантования при малом интервале квантования и, поэтому, существенно не отличается от линейной характеристики. По сути дела при этом исследуется обработка отсчётов, принимающих любые значения на числовой оси. Учитывается только дискретизация по времени, поэтому такую обработку будем в дальнейшем называть дискретной обработкой.

Затем, при выбранных параметрах дискретной обработки оценивается влияние величины интервала квантования по уровню на эффективность обработки.

8.2. Эффективность дискретной обработки

Рассматриваемая схема обработки приведена на рис. 8.1. На входе этой схемы действует аддитивная смесь $s(t)$ сигнала и нормального шума, представленная ранее формулой (3.2.2). Импульсную переходную функцию $h(t)$ узкополосного фильтра, согласно [42], запишем в виде

$$h(t) = \mathrm{Re}\left\{ g(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\phi t} \right\}, \qquad g(t) = h_0(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\gamma(t)},$$

где $h_0(t)$ и $\gamma(t)$ — медленно меняющиеся функции времени, ω_ϕ — резонансная частота фильтра.

Считаем, что на входы дискретизаторов поступают только низкочастотные составляющие, поэтому колебания частоты $\omega_\phi + \omega_0$ или $2\omega_\phi$ в выражениях для $x(t)$ и $y(t)$ должны быть отброшены. С учётом этого замечания после преобразования выражения

$$x(t) + \mathrm{i}\, y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_ф t} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')\, s(t')\, dt'$$

получаем

$$x(t) + \mathrm{i}\, y(t) = c \left\{ \sqrt{2q_0}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\, z_0^*(t, \tau_0, \Omega_0) + \xi(t) + \mathrm{i}\, \eta(t) \right\},$$

где c — некоторая константа, определяемая только спектральной плотностью шума $N_ш$ ($c = \sqrt{2N_ш}/4$), $q_0 = E/(2N_ш)$ — отношение сигнал/шум, φ — случайная фаза сигнала, $\Omega_0 = \omega_0 - \omega_ф$,

$$z_0(t, \tau, \Omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} g(t') U_0(t - \tau - t')\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t'}\, dt',$$

$$\xi(t) + \mathrm{i}\, \eta(t) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t - t')\, n(t')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_ф t'}\, dt'.$$

Поскольку введение усиления, общего для всех цепей тракта обработки сигнала, не влияет на эффективность обработки, то множитель c во всех последующих выражениях будем опускать.

Нормальные случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ сопряжены между собой. Корреляционные и взаимно корреляционные функции этих процессов определяются соотношениями

$$\overline{\xi(t)\,\xi(t+\tau)} = \overline{\eta(t)\,\eta(t+\tau)} = \mathrm{Re}\, K(\tau),$$

$$\overline{\eta(t)\,\xi(t+\tau)} = -\overline{\xi(t)\,\eta(t+\tau)} = \mathrm{Im}\, K(\tau),$$

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t')\, g(t'+\tau)\, dt' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_0(\mathrm{i}\omega) \right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\, d\omega,$$

где $H_0(\mathrm{i}\omega)$ — преобразование Фурье от $g(t)$.

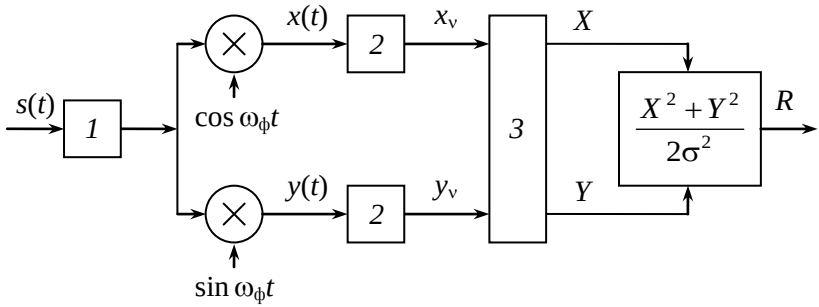


Рис. 8.1. Схема дискретной обработки сигнала:
1 — узкополосный фильтр, *2* — дискретизатор,
3 — устройство обработки отсчётов

Заметим, что для комплексной частотной характеристики $H(\mathrm{i}\omega)$ предварительного высокочастотного фильтра справедлива формула

$$H(\mathrm{i}\omega) = \frac{1}{2} H_0(\mathrm{i}\omega - \mathrm{i}\omega_\phi) + \frac{1}{2} H_0^*(-\mathrm{i}\omega - \mathrm{i}\omega_\phi), \qquad (8.2.1)$$

поэтому $H_0(\mathrm{i}\omega)$ можно представить как частотную характеристику высокочастотного фильтра, смещённую в область низких частот.

В дальнейшем для упрощения будем считать, что $\gamma(t) = \mathrm{const}$. Например, в [42] показано, что если частотная характеристика фильтра симметрична, а фазовая — антисимметрична относительно резонансной частоты ω_ϕ, то функция $\gamma(t) \equiv 0$. Если $\gamma(t) = \mathrm{const}$, то $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — независимые нормальные случайные процессы с корреляционной функцией $K(\tau)$.

После дискретизации процессов $x(t)$ и $y(t)$ на устройство обработки поступают отсчёты $x_\nu = x(t_\nu)$, $y_\nu = y(t_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Оптимальное устройство обработки отсчётов должно формировать отношение правдоподобия или любую взаимно однозначную функцию отношения правдоподобия. Поскольку отсчёты — нормальные случайные величины, то нетрудно записать выражение для отношения плотностей вероятности случайных величин, после чего можно усреднить это отношение по φ. В результате получим, что отношение правдоподобия определяется величиной $R = (X^2 + Y^2)/(2\sigma^2)$, где

$$X = \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu x_\nu - \beta_\nu y_\nu); \qquad Y = \sum_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu x_\nu + \alpha_\nu y_\nu); \qquad (8.2.2)$$

$$\alpha_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}^{-1} r_\mu; \qquad \beta_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}^{-1} s_\mu; \qquad r_\nu = \mathrm{Re}\, z_{0\nu}; \qquad s_\nu = \mathrm{Im}\, z_{0\nu};$$

$z_{0\nu} = z_0(t_\nu, \tau_0, \Omega_0)$; $a_{\nu\mu}^{-1}$ — элементы матрицы, обратной матрице с элементами $a_{\nu\mu}$; $a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu} = K(t_\nu - t_\mu)$; σ^2 — нормировочная константа, равная среднему значению X^2 или Y^2 при отсутствии сигнала.

Переменную R удобно принять в качестве выходной величины.

Если параметры сигнала τ_0 и Ω_0 неизвестны, то для обнаружения такого сигнала можно реализовать (с применением цифровых методов) многоканальную систему, каждый канал которой настроен на определённые значения параметров. Поэтому при дальнейшем анализе в общем случае будем полагать, что рассматриваемая схема дискретной обработки рассчитана на оптимальный приём сигнала с параметрами τ_1 и Ω_1, хотя в действительности на вход поступает полезный сигнал с параметрами τ_0 и Ω_0. Для общности будем также полагать, что огибающая сигнала на входе узкополосного фильтра отличается от огибающей ожидаемого (опорного) сигнала.

В связи со сказанным следует считать, что коэффициенты r_ν и s_ν для формирования квадратур X и Y по формулам (2) определяются

соотношениями $r_\nu = \mathrm{Re}\, z_{1\nu}$, $s_\nu = \mathrm{Im}\, z_{1\nu}$, где $z_{1\nu} = z_1(t_\nu, \tau_1, \Omega_1)$, а выражение для $z_1(\cdots)$ получается из выражения для $z_0(\cdots)$ заменой в последнем $U_0(\cdot)$ на $U_1(\cdot)$.

Выражения для X и Y можно записать в комплексном виде

$$X + \mathrm{i}Y = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{1\nu}\, w_\nu\,, \tag{8.2.3}$$

где

$$\gamma_{1\nu} = \alpha_\nu + \mathrm{i}\beta_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}^{-1}\, z_{1\mu}\,, \qquad w_\nu = x_\nu + \mathrm{i}y_\nu.$$

Плотность распределения $W(R)$ выходной величины нетрудно получить, если учесть, что X и Y — нормальные случайные величины. Можно показать, что X и Y статистически независимы, поэтому $W(R) = \exp(-R-q)\, I_0(2\sqrt{Rq})$, где $q = \left|\, \overline{X} + \mathrm{i}\overline{Y}\, \right|^2 \Big/ (2\sigma^2)$.

Распределение выходной величины имеет такой же вид, как и при оптимальной аналоговой обработке, только вместо отношения сигнал/шум q_0 в приведенном здесь выражении присутствует величина q. Поэтому отношение $\eta_\mathrm{c} = q/q_0$ представляет собой коэффициент энергетических потерь сигнала, обусловленных временной дискретизацией.

Можно далее показать, что

$$\overline{X} + \mathrm{i}\overline{Y} = \sqrt{2q_0}\ \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}^{-1}\, z_{0\nu}^{*}\, z_{1\mu}\,,$$

$$\sigma^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_\nu r_\nu + \beta_\nu s_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}^{-1}\, z_{1\nu}^{*}\, z_{1\mu}\,. \tag{8.2.4}$$

Отсюда

$$\eta_\mathrm{c} = \frac{1}{\sigma^2} \left| \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}^{-1}\, z_{0\nu}^{*}\, z_{1\mu} \right|^2. \tag{8.2.5}$$

Слагаемые двойной суммы в выражении для σ^2 комплексные. Однако сама двойная сумма является действительным числом, так как в силу симметрии $a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}$ мнимые части слагаемых взаимно сокращаются.

Если огибающая $U_0(t)$ и параметры сигнала τ_0 и Ω_0 совпадают с огибающей $U_1(t)$ и параметрами настройки схемы τ_1 и Ω_1, то $\eta_\mathrm{c} = \sigma^2$.

Оптимальная обработка отсчётов должна учитывать импульсную переходную функцию входного узкополосного фильтра. Это может создавать определённые неудобства и усложнения при вычислении весовых коэффициентов α_ν и β_ν. Поэтому целесообразно рассмотреть более простую схему обработки, не имеющую этого недостатка.

Такую схему можно получить, если заменить суммами интегралы, описывающие оптимальную аналоговую обработку. При этом получим, что X и Y необходимо вычислять опять по формулам (2) или (3), но только теперь весовые коэффициенты α_ν, β_ν и $\gamma_{1\nu}$ будут иметь вид

$$\gamma_{1\nu} = \alpha_\nu + \mathrm{i}\beta_\nu = U_1(t_\nu - \tau_1)\exp(\mathrm{i}\Omega_1 t_\nu)\,. \qquad (8.2.6)$$

При приёме прямоугольного импульса без фазовой модуляции весовые коэффициенты α_ν при $\Omega_1 = 0$ равны между собой, а $\beta_\nu = 0$. Обработка заключается в простом суммировании отсчётов в каждом квадратурном канале. При наличии бинарной фазовой манипуляции весовые коэффициенты α_ν отличаются лишь знаком, изменяющимся в соответствии с кодовой последовательностью. Такая обработка является наиболее простой.

К упрощенному алгоритму обработки с весовыми коэффициентами (6) можно прийти ещё одним способом. Для этого при синтезе схемы обработки необходимо предположить, что предварительный узкополосный фильтр не искажает амплитудные и фазовые соотношения полезного сигнала (что на самом деле возможно, если полоса фильтра значительно шире полосы сигнала). Кроме того, все отсчёты x_ν и y_ν следует считать взаимно независимыми. При таких предположениях (допущениях) классический синтез схемы обработки (методом формирования отношения правдоподобия) приводит к формулам (2) и (3), в которых используются весовые коэффициенты (6).

Для упрощенной обработки можно получить следующие соотношения

$$\sigma^2 = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}\,\gamma_{1\nu}^{*}\,\gamma_{1\mu} = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}\left(\alpha_\nu\,\alpha_\mu + \beta_\nu\,\beta_\mu\right), \qquad (8.2.7)$$

$$\eta_{\mathrm{c}} = \frac{q}{q_0} = \frac{1}{\sigma^2}\left|\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_{1\nu}\,z_{0\nu}^{*}\right|^2, \qquad (8.2.8)$$

где $\gamma_{1\nu}$ α_ν, и β_ν определяются формулами (6).

8.3. Некоторые формулы для численного анализа

Представленные в § 8.2 формулы для оценки энергетических потерь можно переписать в различных вариантах, более пригодных для численного анализа. Приведём получающиеся при этом некоторые выражения для случая упрощенной обработки.

Для простоты будем считать, что весовые коэффициенты (8.2.6) точно настроены на огибающую, задержку и частоту обрабатываемого сигнала; при этом, поскольку одинаковые изменения задержки полезного сигнала и задержки в коэффициентах не влияют на качество обработки, то символ τ в последующих выражениях можно опустить, т. е. далее полагаем $\tau_0 = \tau_1 = 0$. Будем считать, что временной интер-

вал между соседними отсчётами постоянный и равен $\Delta t = T/n$, где T — длительность импульса (длина интервала обработки), n — число отсчётов.

Коэффициент энергетических потерь запишем в виде $q/q_0 = Z^2/\sigma^2$, где $Z^2 = \left|\overline{X} + \mathrm{i}\overline{Y}\right|^2 \Big/ (2q_0)$. Поскольку Z входит в числитель дроби, а σ — в знаменатель, то в последующих выражениях для Z и для σ может одновременно отбрасываться один и тот же множитель.

Обозначим $U_\nu = U_0(t_\nu)$, $K_\nu = K(t_{\nu+\mu} - t_\mu) = K(\nu\cdot\Delta t)$ (ν, $\mu = 1, 2, \ldots, n$). Тогда для Z и σ^2 можно записать

$$Z = \left| \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu^* \, \Psi(t_\nu) \right|, \qquad \Psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) U_0(t-\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega\xi}\, d\xi,$$

$$\sigma^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} K_{\nu-\mu}\, U_\nu U_\mu^* \exp\{\mathrm{i}(\nu-\mu)\Omega\Delta t\} = \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} b_\nu K_\nu \exp\{\mathrm{i}\nu\Omega\Delta t\},$$

где $\Omega = \Omega_0 = \Omega_1$, а b_ν — коэффициенты, которые при $\nu \ge 0$ вычисляются по формуле

$$b_\nu = \sum_{\mu=1}^{n-\nu} U_{\mu+\nu} U_\mu^*,$$

а при $\nu < 0$ определяются соотношением $b_\nu = b_{-\nu}^*$.

Можно показать, что преобразование Фурье от $\Psi(t)$ есть $S_0(\mathrm{i}\omega)\cdot H_0(\mathrm{i}\Omega + \mathrm{i}\omega)$, где $S_0(\mathrm{i}\omega)$ — преобразование Фурье от огибающей сигнала $U_0(t)$.

Далее будем рассматривать импульс с прямоугольной формой огибающей

$$\left|U_0(t)\right| = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & \text{при} \quad 0 \le t \le T, \\ 0 & \text{при} \quad \text{других } t \end{cases}$$

без фазовой модуляции, а также с бинарной фазовой манипуляцией.

Если внутриимпульсная фазовая модуляция отсутствует, то

$$Z = \left| \sum_{\nu=1}^{n} f(t_\nu) \right|, \qquad f(t) = \int_{t-T}^{t} g(\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega\xi}\, d\xi, \tag{8.3.1}$$

$$\sigma^2 = T \sum_{\nu=-(n-1)}^{n-1} (n - |\nu|) K_\nu \cos(\nu\Omega\Delta t). \tag{8.3.2}$$

Если теперь $g(t)$ и $K(\tau)$ выразить через $H_0(\mathrm{i}\omega)$ интегралами обратного преобразования Фурье и затем использовать эти выражения в (1) и (2), то для Z и σ^2 можно получить следующие выражения

$$Z = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_0(\mathrm{i}\omega)\, S_0(\mathrm{i}\omega - \mathrm{i}\Omega)\, F(\mathrm{i}\omega - \mathrm{i}\Omega)\, d\omega \right|,$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_0(\mathrm{i}\omega) F(\mathrm{i}\omega - \mathrm{i}\Omega) \right|^2 d\omega,$$

где

$$S_0(\mathrm{i}\omega) = \sqrt{T}\, \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T/2},$$

$$F(\mathrm{i}\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\sin(\omega \Delta t/2)} \exp\{\mathrm{i}\omega[t_1 + (T - \Delta t)/2]\}.$$

Интересно отметить, что если в эти формулы для Z и σ^2 подставить

$$H_0(\mathrm{i}\omega) = S_0^*\left(\mathrm{i}\frac{\omega - \Omega}{n} \right) \exp\{-\mathrm{i}(\omega - \Omega) t_1\},$$

а затем вычислить интегралы, то получим $Z = n$, $\sigma^2 = n^2$, $q/q_0 = Z^2/\sigma^2 = 1$, т. е. в данном частном случае энергетические потери из-за дискретизации отсутствуют.

Чтобы не было потерь при дискретной обработке прямоугольного импульса, частотная характеристика предварительного фильтра должна быть получена видоизменением частотной характеристики фильтра, рассчитанного на оптимальный аналоговый приём импульса. Видоизменение заключается в масштабном растяжении в n раз вдоль частотной оси. Кроме того, резонансная частота предварительного фильтра должна совпадать с частотой входного сигнала.

Для $n = 1$ это утверждение тривиально, так как при $n = 1$ дискретная обработка превращается в обычный аналоговый метод обнаружения.

Рассмотрим формулы для Z и σ^2 применительно к прямоугольному импульсу с бинарной фазовой манипуляцией. Отношение числа отсчётов n к числу дискретов n_d будем считать целым числом: $n/n_d = m$.

Вид фазокодовой манипуляции зададим последовательностью значений k_ν, равных +1 или −1, если $\nu = 1, 2, \ldots, n_d$. Например, для сигнала с фазовой манипуляцией кодом Баркера при $n_d = 13$ эта последовательность имеет вид: +1, +1, +1, +1, +1, −1, −1, +1, +1, −1, +1, −1, +1. Для упрощения записи последующих выражений последовательность k_ν целесообразно дополнить нулями для других значений индекса, т. е. $k_\nu = 0$, если $\nu < 1$ или $\nu > n_d$.

Огибающая $U_0(t)$ теперь является действительной функцией, принимающей как положительные, так и отрицательные значения, причём $U_1 = U_2 = \ldots = U_m = k_1/\sqrt{T}$, $U_{m+1} = U_{m+2} = \ldots = U_{2m} = k_2/\sqrt{T}$ и т. д.

Выражение для Z можно записать в виде

$$Z = \left| \sum_{\nu=1}^{n_d} \sum_{\mu=1}^{n_d} k_\nu \, k_\mu \sum_{\varepsilon=1}^{m} f_{\nu-\mu}(t_\varepsilon) \right| = \left| \sum_{\nu=-(n_d-1)}^{n_d-1} c_\nu \sum_{\mu=1}^{m} f_\nu(t_\mu) \right|,$$

где

$$f_\nu(t) = \int_{t+(\nu-1)T_d}^{t+\nu T_d} g(\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\Omega\xi}\, d\xi\,, \qquad c_\nu = \sum_{\mu=1}^{n_d} k_{\mu+\nu}\, k_\mu\,,$$

$T_d = T/n_d$ — длительность дискрета. Заметим, что c_ν можно выразить через отсчёты автокорреляционной функции ФКМ сигнала: $c_\nu = n_d \cdot C(\nu T_d, 0)$.

Выражение для дисперсии σ^2 имеет вид

$$\sigma^2 = T \sum_{\nu=-(n_d-1)}^{n_d-1} \left\{ c_\nu \sum_{\mu=-(m-1)}^{m-1} (m - |\mu|) K_{\nu m+\mu} \cos[(\nu m + \mu)\Omega \Delta t] \right\}.$$

Если в качестве предварительного фильтра в схеме приёмника используется колебательный контур, то интегрирование и суммирование в формулах из §§ 8.2 и 8.3 удаётся выполнить аналитическими методами. Некоторые из получаемых при этом выражений будут приведены в последующих параграфах.

Для некоторых других фильтров, например для идеального и гауссовского радиофильтров, функции $f(t)$ и $f_\nu(t)$ при $\Omega = 0$ выражаются через известные спецфункции (интегральный синус, интеграл вероятностей). В таких случаях при исследованиях можно использовать стандартные процедуры для вычисления спецфункций. Но при $\Omega \neq 0$ для вычисления $f(t)$ и $f_\nu(t)$ требуется численное интегрирование. Суммирование осуществляется численными методами.

8.4. Примеры оценки эффективности дискретной обработки

Полученные соотношения проиллюстрируем на примерах результатами численной оценки энергетических потерь. В этих примерах рассматривался импульс с прямоугольной формой огибающей без фазовой модуляции, а также с фазовой манипуляцией кодами Баркера. Приведенные в настоящем параграфе результаты получены при $\tau_0 = \tau_1$, $\Omega_0 = \Omega_1 = 0$.

Рассматривались три входных фильтра: одиночный колебательный контур и идеальный и гауссовский радиофильтры. Для колебательного контура задавалась импульсная переходная функция $h(t)$. Для идеального и гауссовского радиофильтров задавалась комплексная частотная характеристика $H(\mathrm{i}\omega)$, причём использовалась формула (8.2.1). Ширина полосы пропускания колебательного контура и гауссовского радиофильтра задавалась уровнем половинной мощности

$$\left|H_0(\pm \mathrm{i}\,\delta)\right|^2 = \frac{1}{2}\left|H_0(0)\right|^2,$$

где $\delta = 2\pi F_\phi$, F_ϕ — половина ширины полосы пропускания.

Приводим основные соотношения для этих фильтров, использовавшиеся в процессе анализа:

колебательный контур

$$h(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\delta t}\sin\omega_\phi t & \text{при } t \ge 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

$$H_0(\mathrm{i}\,\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{1}{\delta + \mathrm{i}\,\omega}, \qquad K(\tau) = \frac{1}{2\delta}\,\mathrm{e}^{-\delta|\tau|}.$$

идеальный радиофильтр

$$H_0(\mathrm{i}\,\omega) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\tau_\phi\omega} & \text{при } \left|\omega\right| \le \delta, \\ 0 & \text{при } \left|\omega\right| > \delta, \end{cases}$$

$$g(t) = \frac{\delta}{\pi}\,\frac{\sin\delta(t-\tau_\phi)}{\delta(t-\tau_\phi)}, \qquad K(\tau) = \frac{\delta}{\pi}\,\frac{\sin\delta\tau}{\delta\tau}.$$

гауссовский радиофильтр

$$H_0(\mathrm{i}\,\omega) = \exp\left\{-\frac{\omega^2 \ln 2}{2\delta^2} - \mathrm{i}\,\tau_\phi\omega\right\},$$

$$g(t) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi\ln 2}}\exp\left\{-\frac{\delta^2(t-\tau_\phi)^2}{2\ln 2}\right\},$$

$$K(\tau) = \frac{\delta}{2\sqrt{\pi\ln 2}}\exp\left\{-\frac{\delta^2\tau^2}{4\ln 2}\right\}.$$

В приведенных выражениях τ_ϕ — коэффициент, задающий фазочастотную характеристику фильтра.

При заданном интервале между отсчётами $\Delta t = T/n$ исследовался вопрос о выборе значения t_1 — момента времени первого отсчёта. Было установлено, что отношение q/q_0 зависит от t_1 и становится максимальным для колебательного контура при $t_1 = \Delta t$, а для идеального и гауссовского радиофильтров — при $t_1 = \tau_\phi + \Delta t/2$. В дальнейшем полагалось, что t_1 задаётся этими формулами.

Как уже отмечалось, для колебательного контура удаётся произвести интегрирование и суммирование аналитическими методами. Так, например, при оптимальной обработке отсчётов окончательное выражение для q/q_0 имеет вид

$$\frac{q}{q_0} = \frac{2}{\delta T} \frac{(1-\gamma)(n-\gamma^2)}{1+\gamma}, \qquad (8.4.1)$$

где $\gamma = \exp(-\delta\,\Delta t)$. Это выражение справедливо не только для импульса без фазовой модуляции, но и для импульса с фазовой манипуляцией кодами Баркера при нечётном числе дискретов. Для упрощенной обработки можно получить

$$\frac{q}{q_0} = \frac{2}{\delta T} \cdot \frac{[n(1-\gamma) - \beta_{nd}]^2}{n(1-\gamma^2) - 2\beta_{nd}},$$

где $\beta_{nd} = \gamma(1-\gamma)^m \left(n_d - \varepsilon_{nd} \dfrac{\gamma^m - \gamma^n}{1+\gamma^m} \right)$, $m = n/n_d$, n_d — число дискретов фазоманипулированного импульса,

$$\varepsilon_{nd} = \begin{cases} 0 & \text{для импульса без фазовой модуляции,} \\ -1 & \text{при } n_d = 3, 7, 11, \\ 1 & \text{при } n_d = 5, 13. \end{cases}$$

В процессе анализа исследовалось влияние на энергетические потери ширины полосы входного фильтра и числа отсчётов. При этом проводилось сравнение результатов с соотношениями из теоремы Котельникова.

Известно [85], что если спектр узкополосного процесса сосредоточен в полосе $\pm F_\phi$ относительно средней частоты, то при выполнении определённых условий, в том числе при $\Delta t \le 1/(2F_\phi)$, периодическая дискретизация обеих квадратурных составляющих процесса с интервалом Δt не приводит к потере информации: используя ряд Котельникова, можно по дискретным отсчётам восстановить исходный процесс. В нашем случае имеется ряд отличий от условий теоремы Котельникова, поэтому соотношения из теоремы могут служить в качестве ориентировочных.

Некоторые из полученных численных оценок приведены на рис. 8.2 и 8.3.

Рис. 8.2 иллюстрирует существование при заданном числе отсчётов оптимального значения полуширины полосы пропускания фильтра $F_\text{о}$, при котором обеспечивается максимальное значение q/q_0.

Полуширина полосы фильтра F_ϕ и оптимальная полуширина полосы фильтра $F_\text{о}$ отложены на осях в относительном масштабе. В качестве нормировочного значения принята величина $F_\text{к} = n/(2T)$, полученная из условия теоремы Котельникова. Эта величина определяет максимальную полуширину полосы, при которой для заданного числа отсчётов n ещё удовлетворяется условие теоремы.

Все характеристики для упрощенной обработки, приведенные на рис. 8.3, представлены в зависимости от отношения n/n_d, так как они

при пропорциональном изменении n и n_d практически не меняются. Эти характеристики построены на основании численных оценок для различных значений числа дискретов.

При оптимальной обработке для идеального и гауссовского радиофильтров изменение характеристик наблюдается даже в том случае, если отношение n/n_d остаётся постоянным, а n и n_d изменяются. Однако изменение характеристик незначительно, поэтому для этих случаев на рис. 8.3 по оси абсцисс также откладывалось n/n_d.

При оптимальной обработке для колебательного контура имеется существенное отличие: как видно из формулы (1), результаты зависят только от числа отсчётов n и совсем не зависят от числа дискретов n_d. Поэтому соответствующие результаты для колебательного контура при оптимальной обработке можно получить из кривых *1* на рис. 8.3 и при $n_d \neq 1$, если по оси абсцисс вместо n/n_d отложить n.

Для идеального радиофильтра при оптимальной обработке значение $F_{\text{о}}$ может резко изменяться (в некоторых пределах) при изменении числа отсчётов, в результате чего затрудняется построение зависимости оптимальной полуширины полосы фильтра от числа отсчётов (соответствующие кривые на рис. 8.3,*а* отсутствуют). Однако в этом случае нет необходимости в точном определении оптимальных параметров: отношение q/q_0 при $F_{\text{ф}}/F_{\text{к}} = (1{,}2 \ldots 1{,}4) \cdot n/n_d$ практически не отличается от максимального значения.

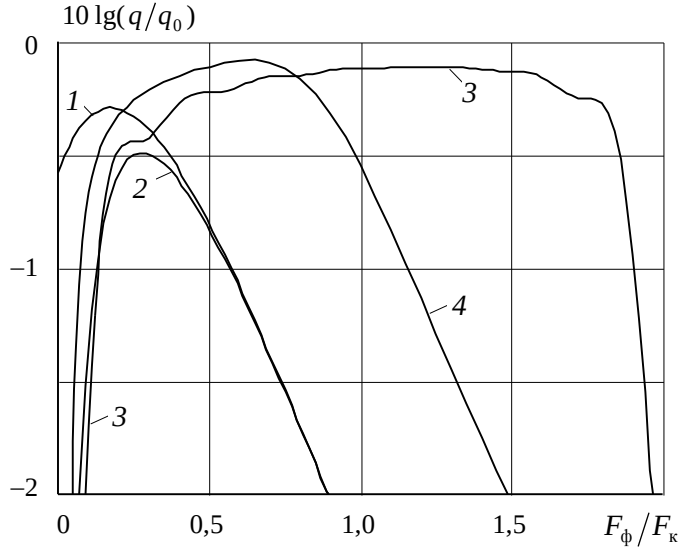


Рис. 8.2. Зависимости коэффициента потерь
от ширины полосы фильтра при $n = 8$, $n_d = 1$:
1 и *2* — колебательный контур, *3* — идеальный радиофильтр,
4 — гауссовский радиофильтр;
1 — оптимальная обработка, *2* – *4* — упрощенная

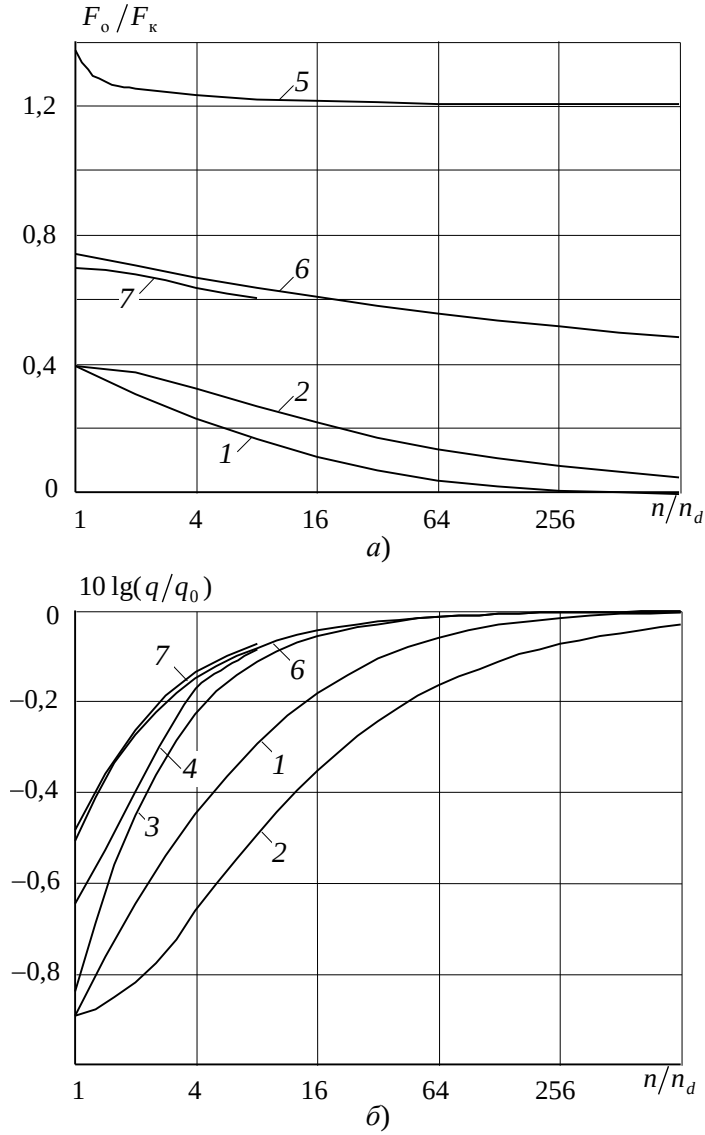


Рис. 8.3. Зависимости оптимальной ширины полосы фильтра (*а*) и коэффициента потерь при оптимальной ширине полосы фильтра (*б*) от числа отсчётов: *1* — колебательный контур, оптимальная обработка при $n_d = 1$; *2* — колебательный контур, упрощенная обработка; *3* — идеальный радиофильтр, оптимальная обработка при $n_d = 1$ и упрощенная обработка; *4* — идеальный радиофильтр, оптимальная обработка при $n_d = 13$; *5* — идеальный радиофильтр, упрощенная обработка; *6* — гауссовский радиофильтр, оптимальная обработка при $n_d = 1$ и упрощенная обработка; *7* — гауссовский радиофильтр, оптимальная обработка при $n_d = 13$

На основании полученных результатов можно сделать вывод о том, что чаще всего упрощенная обработка близка по эффективности к оптимальной обработке.

При заданной ширине полосы фильтра интервал дискретизации должен удовлетворять определённым условиям. Исходя из физических соображений, можно утверждать, что при оптимальной обработке энергетические потери уменьшаются с увеличением числа отсчётов. Как показывает численный анализ, такой же эффект существует и при упрощенной обработке для идеального радиофильтра.

Дополнительный анализ показал, что при упрощенной обработке для колебательного контура и гауссовского радиофильтра при фиксированном $F_ф T$ с ростом n отношение q/q_0 сначала увеличивается, затем уменьшается и при неограниченном увеличении n стремится к определённому пределу. Оптимальное значение числа отсчётов n_o определяется следующими приближёнными формулами: $n_o/n_d \approx (\delta T/n_d)^2/6 + (\delta T/n_d)/2$ для колебательного контура, $n_o \approx 2F_ф TK$ для гауссовского радиофильтра. В последней формуле K — величина, слабо зависящая от $F_ф T/n_d$ и принимающая значения в диапазоне 1,5 … 2 (при $2F_ф T/n_d \geq 1$).

Из сказанного следует, что при упрощенной обработке в некоторых случаях увеличение числа отсчётов будет приводить к увеличению энергетических потерь. Так, например, для колебательного контура при $2F_ф T/n_d = 1$ неоправданное увеличение числа отсчётов может привести к уменьшению отношения q/q_0 дополнительно на 0,8 … 0,9 дБ.

Однако, в практических ситуациях энергетические потери, как правило, уменьшаются с увеличением числа отсчётов.

Если допустить уменьшение q/q_0 по сравнению с максимальным значением, достижимым при заданной ширине полосы фильтра, то можно сформулировать требования к необходимому числу отсчётов. При допустимом уменьшении q/q_0, например на 0,5 дБ, число отсчётов при упрощенной обработке должно быть достаточным для того, чтобы выполнялось условие $\Delta t \leq k/(2F_ф)$. Коэффициент k в этой формуле зависит от $F_ф T$ и принимает значения 0,4 … 0,5 для колебательного контура, 1,0 … 1,9 для идеального радиофильтра и 0,9 … 1,0 для гауссовского радиофильтра.

Полученное условие отличается от условия теоремы Котельникова наличием поправочного коэффициента k.

8.5. Эффективность дискретной обработки при неизвестной частоте сигнала

Рассмотренные в предыдущем параграфе характеристики эффективности обработки соответствуют случаю, когда частота сигнала ω_0 совпадает с резонансной частотой предварительного высокочастотного фильтра $\omega_ф$ $(\Omega_0 = \omega_0 - \omega_ф = 0)$. Оптимизация параметров про-

цедуры обработки производилась также исходя из предположения $\Omega_0 = 0$. Однако не менее важным представляется изучение характеристик при неизвестной частоте сигнала.

Развитие цифровой обработки сигналов стимулировалось решающим образом применением алгоритмов быстрого преобразования Фурье, высокая эффективность которых обусловлена совмещением вычислительных операций для различных частотных каналов. Поэтому можно утверждать, что цифровая обработка сигналов с неизвестной частотой является одной из типовых задач.

В дальнейшем изложении целесообразно наряду с круговой частотой сигнала Ω_0 использовать частоту $F_с = \Omega_0/(2\pi)$.

Частота $F_с$ представляет собой частоту сигнала, начало отсчёта которой совмещено с резонансной частотой фильтра.

Если обнаружению подлежит сигнал, частота которого неизвестна, и может быть любой в некотором диапазоне, включающем в себя как положительные, так и отрицательные значения $F_с$, то в наихудших энергетических условиях оказываются частотные каналы для крайних частот диапазона. В таких случаях целесообразно ширину полосы фильтра оптимизировать для условий приёма сигнала на краях частотного диапазона.

Чтобы представить процессы, влияющие на эффективность обработки при смещении частоты $F_с$ от нулевого значения, обратимся к кривой 3 на рис. 8.2, соответствующей идеальному радиофильтру.

Эта кривая образует столообразную фигуру с довольно крутыми склонами.

Наличие левого склона обусловлено тем, что сужение полосы фильтра приводит к изъятию из дальнейшей обработки части спектральных составляющих полезного сигнала. Склон расположен в окрестности точки $F_ф/F_к = 1/n$; именно при таких значениях $F_ф/F_к$ полоса фильтра ориентировочно совпадает с полосой сигнала.

Правый склон связан с явлением, получившим в литературе название “наложение спектров”. Спектр дискретизированного шумового процесса состоит из полос, центры которых удалены друг относительно друга на частоту дискретизации n/T. Границы полос удалены от центров на расстояние $\pm F_ф$. При $F_ф/F_к = 1$ спектральные полосы примыкают друг к другу, а при увеличении $F_ф/F_к$ они начинают накладываться друг на друга. Устройство обработки отсчётов эффективно накапливает спектральные составляющие, расположенные вблизи частоты $F_с$, поэтому, когда на частоту $F_с$ накладывается дополнительная полоса, то дисперсия шумовых составляющих компонент X и Y удваивается.

Если увеличивать $F_ф/F_к$ при $F_с = 0$, то при достижении значения $F_ф/F_к = 2$ на частоту $F_с = 0$ начинают накладываться сразу две спектральные полосы, что приводит к трёхкратному увеличению дисперсии шумовых составляющих квадратурных компонент. В связи с этим энергетические потери становятся почти сразу примерно равными 4,8 дБ ($4{,}8 = 10\lg 3$).

Из сказанного следует, что при отклонении частоты F_c от нулевого значения левый склон столообразной фигуры, отображающей зависимость энергетических потерь от $F_ф/F_к$, сместится вправо на величину $F_c/F_к$, а правый на эту же величину влево. При применении идеального радиофильтра это приведёт к уменьшению свободы в выборе ширины полосы фильтра, а при применении колебательного контура из-за сближения склонов будет происходить снижение вершины "стола", что, в конечном счете, приводит к увеличению энергетических потерь.

При увеличении F_c до значения $F_к$, когда частота сигнала становится равной половине частоты дискретизации, во всех случаях следует ожидать резкого ухудшения энергетических характеристик цифровой обработки.

Все рассуждения для положительных частот сигнала ($F_c > 0$) справедливы применительно к абсолютным значениям отрицательных частот ($F_c < 0$).

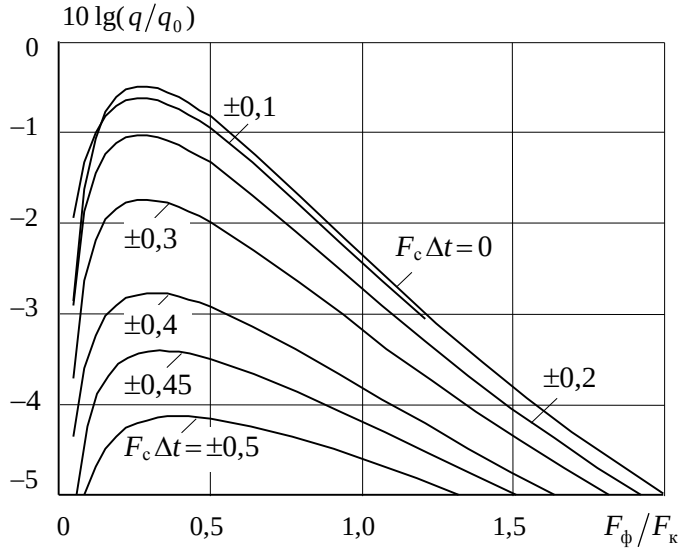
Проведенный качественный анализ подтверждается представленными на рис. 8.4 и 8.5 количественными оценками, полученными в результате расчётов по формулам из § 8.3. Все результаты на этих рисунках соответствуют упрощенной обработке. Кривые для $F_c \Delta t = 0$ идентичны кривым *2 – 4* на рис. 8.2.

Приведенные на рис. 8.4 и 8.5 результаты позволяют сделать вывод, что при ненулевых, но сравнительно небольших значениях $F_c \Delta t$, вид частотной характеристики предварительного фильтра может не оказывать существенного влияния на энергетические характеристики схемы обработки. Однако, наибольший диапазон обрабатываемых частот (при фиксированной частоте дискретизации) можно получить при применении идеального радиофильтра, обладающего П-образной частотной характеристикой.

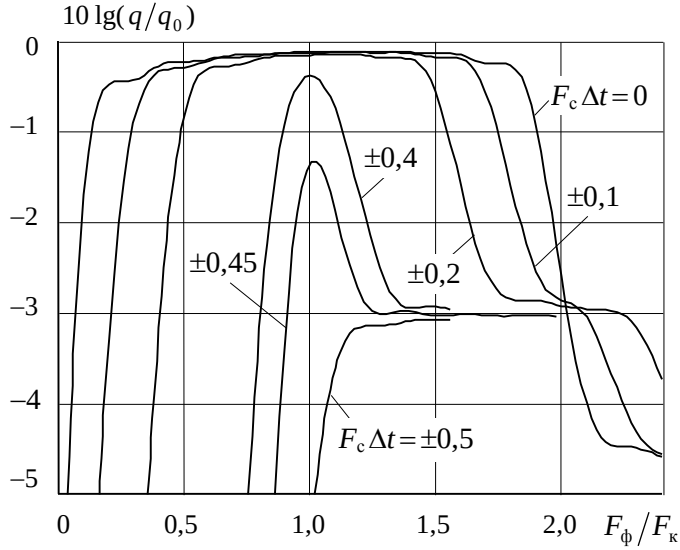
На рис. 8.5,*б* приведены зависимости оптимальной полуширины полосы фильтра от частоты сигнала. Прокомментируем характер изображённых кривых.

Пусть $F_c \Delta t = 0$. Если $n > 1$, то небольшое уменьшение ширины полосы фильтра по сравнению с оптимальной шириной не приводит к существенному увеличению энергетических потерь. Если теперь начать увеличивать $F_c \Delta t$, то наложение спектров будет сказываться в большей степени. Чтобы устранить рост влияния наложения спектров, можно несколько уменьшить ширину полосы фильтра, не опасаясь особо за ослабление сигнальной составляющей. Поэтому при увеличении $F_c \Delta t$ вплоть до значений 0,3 … 0,4 наблюдается уменьшение оптимальной ширины полосы фильтра.

Иное дело, когда $F_c \Delta t$ увеличивается до значения 0,5. Частота сигнала оказывается между центрами двух спектральных полос дискретизированного шума. Оказывается невозможным результативно уменьшить влияние наложения спектров, так как при дальнейшем уменьшении ширины полосы фильтра происходит изъятие из обработки основной части спектральных составляющих сигнала.

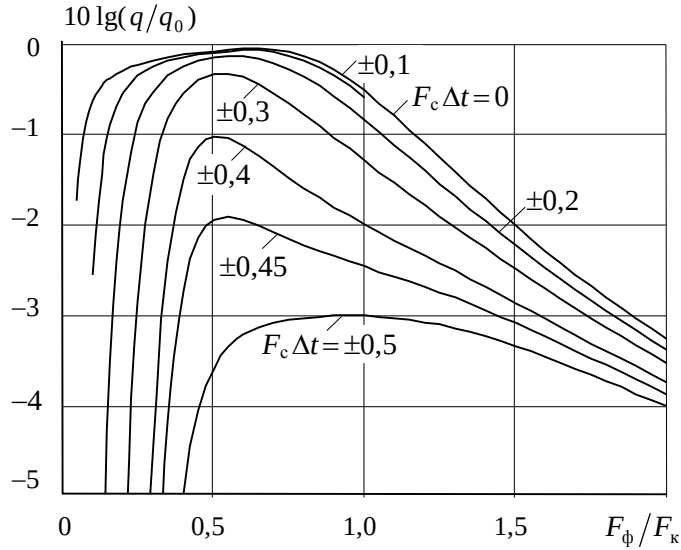


а)

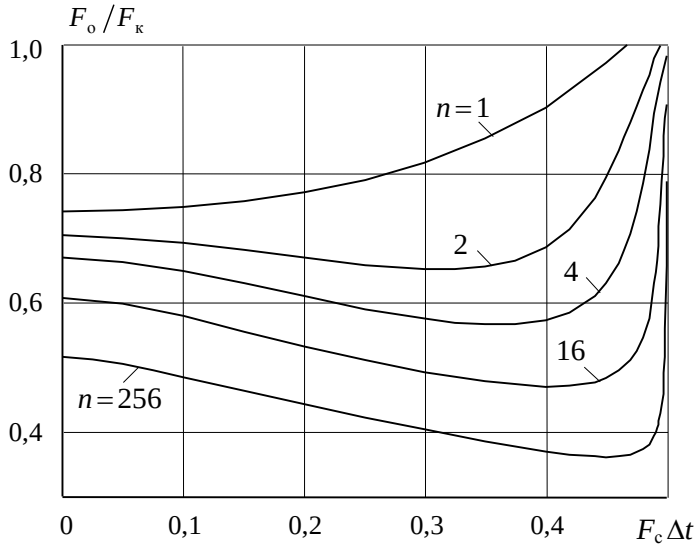


б)

Рис. 8.4. Зависимости коэффициента потерь
от ширины полосы фильтра при $n = 8$, $n_d = 1$:
а — колебательный контур, *б* — идеальный радиофильтр



а)



б)

Рис. 8.5. Гауссовский радиофильтр, $n_d = 1$:
а — зависимости коэффициента потерь от ширины полосы фильтра, $n = 8$;
б — зависимости оптимальной ширины полосы фильтра от частоты сигнала

Тогда уж лучше не уменьшать, а увеличивать ширину полосы фильтра, и увеличивать до тех пор, пока на частоту сигнала не начнут накладываться следующие спектральные полосы. Сигнальные составляющие квадратурных компонент при увеличении ширины полосы фильтра будут увеличиваться, а шумовые составляющие существенно не изменятся. Именно по этой причине наблюдается резкий скачок в зависимости $F_{\text{о}}/F_{\text{к}}$ от $F_{\text{с}}\,\Delta t$ в окрестности точки $F_{\text{с}}\,\Delta t = 0{,}5$.

Справедливости ради отметим, что для колебательного контура зависимости оптимальной полуширины полосы фильтра от частоты сигнала монотонны; все кривые имеют примерно такой же равномерно возрастающий характер, как у кривой для $n = 1$ на рис. 8.5,*б*.

Обратим внимание ещё на одно обстоятельство.

Дисперсия σ^2 шумовой составляющей квадратурных компонент зависит от Ω_0 (или, что эквивалентно, от $F_{\text{с}}$). Это значит, что при реализации цифровыми методами многоканальной системы, каждый канал которой настроен на определённое значение частоты сигнала, абсолютные (т. е. ненормированные) значения порогов, с которыми сравниваются результаты обработки принятого сигнала, должны быть разными для разных частотных каналов. Правда, количественные оценки для некоторых конкретных условий показывают, что этой зависимостью можно в практических условиях пренебречь. Однако, всё же, при разработке алгоритмов формирования порогов не следует упускать из виду это замечание. Если величину порога принять единой для всех каналов, не учитывая зависимости σ^2 от Ω_0, то могут появиться дополнительные энергетические потери из-за некорректной выставки порога.

8.6. Квантование отсчётов нормального случайного процесса

Аналого-цифровой преобразователь представляет собой нелинейное устройство, выходные величины которого принимают квантованные (дискретные по уровню) значения. Далее будет рассматриваться квантователь, характеристика которого изображена на рис. 8.6,*а*. Представленная характеристика отличается от характеристик реальных АЦП тем, что для большей наглядности результатов анализа сохраняются размерность и масштаб преобразуемых данных.

Будем рассматривать статистические характеристики случайных величин на выходе квантователя.

Заметим, что квантование нормального случайного процесса было рассмотрено в [42], однако анализ среднего значения квантованной случайной величины там не проводился, а окончательные результаты для корреляционной функции шумов квантования приведены для случая, когда средние значения квантуемых случайных величин равны нулю.

Следуя [102, 42], выходную величину x^+ представим в виде $x^+ = x - f(x)$, где $f(x)$ — периодическая функция, изображённая на рис. 8.6,*б*. Функцию $f(x)$ будем использовать в виде ряда Фурье

$$f(x) = \frac{h}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \sin\left(\frac{2\pi l x}{h}\right),$$

где h — интервал квантования по уровню.

Теперь предположим, что на вход преобразователя поступает нормальная случайная величина x с параметрами распределения a и σ_0. Тогда для среднего значения выходной случайной величины получим $\overline{x^+} = \bar{x} - \overline{f(x)} = a - \overline{f(x)}$, где

$$\overline{f(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_0^2}\right\} dx.$$

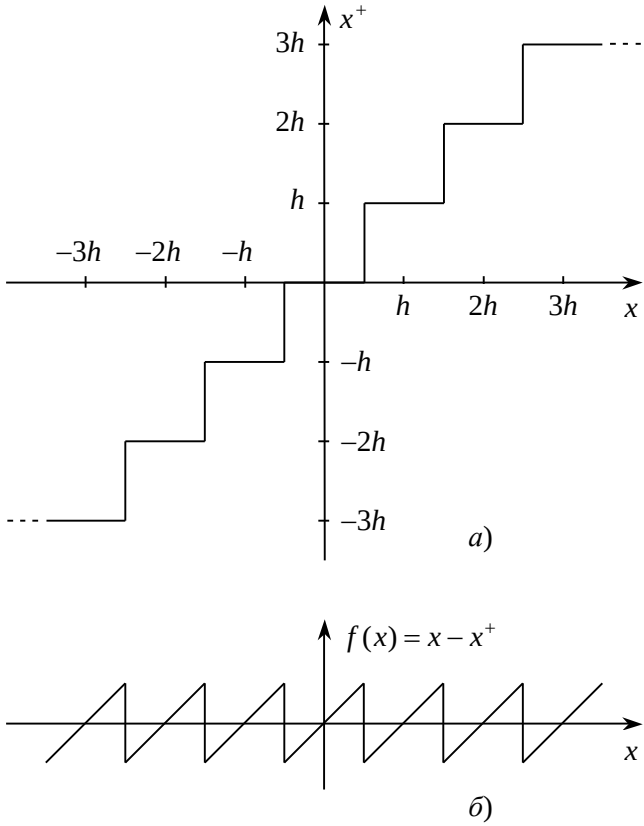


Рис. 8.6. Характеристика аналого-цифрового преобразователя (*а*) и искажения при квантовании (*б*)

Подставляя в эту формулу в качестве $f(x)$ ряд Фурье, после интегрирования получим

$$\overline{f(x)} = \frac{h}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{l}\sin\left(\frac{2\pi la}{h}\right)\exp\left\{-\frac{2\pi^2 l^2}{\varepsilon^2}\right\},$$

где $\varepsilon = h/\sigma_0$ — относительный интервал квантования по уровню.

Среднее значение $\overline{f(x)}$ является знакопеременной периодической функцией от a с периодом h. В точках $a = 0, h/2, h, \ldots$ функция $\overline{f(x)}$ обращается в ноль. Усреднение $\overline{f(x)}$ по a на периоде даёт ноль.

Если $h/\sigma_0 \le 2$, то экспонента в выражении для $\overline{f(x)}$, а, следовательно, и само $\overline{f(x)}$, принимают малые значения, которыми вполне можно пренебречь как по сравнению с интервалом квантования h, так и по сравнению со среднеквадратическим отклонением σ_0. В дальнейшем мы будем полагать, что условие $h/\sigma_0 \le 2$ выполняется, поэтому в анализируемых выражениях будем отбрасывать составляющие с экспонентами, подобными $\exp(-2\pi^2 l^2/\varepsilon^2)$. Поступив так в данном случае, получим $\overline{f(x)} = 0$, $\overline{x^+} = \overline{x} = a$.

В схемах цифровой обработки сигналов величина a является сигнальной составляющей отсчёта дискретизируемого по времени случайного процесса, а σ_0^2 — дисперсией шумовой составляющей отсчёта. Из равенства $\overline{x^+} = a$ следует важный вывод о том, что АЦП является линейным устройством по отношению к сигнальной составляющей. Среднее значение случайной величины на выходе АЦП совпадает со средним значением на входе. Для практических схем это утверждение, разумеется, следует понимать с учётом масштабных изменений при аналого-цифровом преобразовании, в том числе и изменений размерности преобразуемых величин.

Из сказанного также следует предостережение: упрощенный анализ прохождения сигнала через тракт обработки, проводимый в предположении отсутствия шумов, может привести к неправильным выводам. В отсутствии шумов (т. е. при $\sigma_0 = 0$) устройство обработки становится нелинейным.

Проведём теперь анализ для совокупности двух нормальных случайных величин x и y, подвергающихся квантованию. Полагаем, что x и y распределены по закону

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_0^2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2 - 2r(x-a)(x-b) + (y-b)^2}{2(1-r^2)\sigma_0^2}\right\}.$$

Из только что полученных результатов следует, что

$$\overline{\left(x^+ - \overline{x^+}\right)\left(y^+ - \overline{y^+}\right)} \approx \overline{\left(x^+ - a\right)\left(y^+ - b\right)}\ .$$

Далее запишем

$$\overline{(x^+ - a)(y^+ - b)} =$$

$$= \overline{(x-a)(y-b)} - \overline{(y-b)f(x)} - \overline{(x-a)f(y)} + \overline{f(x)f(y)}.$$

Использованием опять ряда Фурье и интегрированием получаем

$$\overline{(y-b)f(x)} = 2r\sigma_0^2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \cos\left(\frac{2\pi la}{h}\right) \exp\left\{-\frac{2\pi^2 l^2}{\varepsilon^2}\right\} \approx 0.$$

Аналогично $\overline{(x-a)f(y)} \approx 0$. Для $\overline{f(x)f(y)}$ получим

$$\overline{f(x)f(y)} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{kl} \cos\left(\frac{2\pi(la-kb)}{h}\right) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{2\pi^2(k^2 - 2rkl + l^2)}{\varepsilon^2}\right\} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{kl} \times$$

$$\times \cos\left(\frac{2\pi(la-kb)}{h}\right) \exp\left\{-\frac{2\pi^2(k^2 + 2rkl + l^2)}{\varepsilon^2}\right\}. \qquad (8.6.1)$$

Учитывая, что в условиях последующего применения результатов данного параграфа выполняется неравенство $r > -1/2$, пренебрежём второй двойной суммой. В первой двойной сумме основной вклад дают члены, в которых $l = k$, а остальными членами также можно пренебречь. Тогда получим

$$\overline{f(x)f(y)} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{2\pi k(a-b)}{h}\right) \exp\left\{-\frac{4\pi^2 k^2(1-r)}{\varepsilon^2}\right\}. \qquad (8.6.2)$$

Дисперсию случайной величины $f(x)$ можно получить из формулы (2), полагая в ней $r = 1$ и $b = a$. Однако чтобы оценить порядок отбрасываемых малых величин, при нахождении дисперсии вернёмся к формуле (1) и учтём в первой двойной сумме ещё члены с $l - k = \pm 1$. Тогда получим

$$\overline{[f(x)]^2} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi a}{h}\right) \exp\left\{-\frac{2\pi^2}{\varepsilon^2}\right\} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k(k+1)}.$$

Учитывая, что первый числовой ряд в этой формуле равен $\pi^2/6$, а второй равен -1, запишем

$$\overline{[f(x)]^2} \approx \frac{h^2}{12} - \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi a}{h}\right) \exp\left\{-\frac{2\pi^2}{\varepsilon^2}\right\}.$$

При $h/\sigma_0 \le 2$ получаем хорошо известный результат для дисперсии "шумов квантования": $\overline{[f(x)]^2} \approx h^2/12$.

Если теперь учесть, что $\overline{(x-a)(y-b)} = r\,\sigma_0^2$, то окончательно можно записать

$$\overline{\left(x^+ - \overline{x^+}\right)\left(y^+ - \overline{y^+}\right)} \approx$$

$$\approx r\,\sigma_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{2\pi k(a-b)}{h}\right) \exp\left\{-\frac{4\pi^2 k^2 (1-r)}{\varepsilon^2}\right\}. \qquad (8.6.3)$$

Полагая в (3) $r = 1$ и $b = a$, получим выражение для дисперсии квантованной случайной величины $\overline{\left(x^+ - \overline{x^+}\right)^2} \approx \sigma_0^2 + h^2/12$.

8.7. Энергетические потери, обусловленные квантованием сигнала по уровню

Схема цифровой обработки сигнала отличается от схемы, изображённой на рис. 8.1, тем, что отсчёты x_ν и y_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) подвергаются квантованию по уровню, после чего результаты квантования x_ν^+ и y_ν^+ поступают на устройство обработки отсчётов, формирующее квадратурные составляющие X^+ и Y^+.

Случайные величины X^+ и Y^+ являются линейной комбинацией квантованных отсчётов. И хотя распределение квантованных отсчётов отличается от нормального, X^+ и Y^+ можно всё же считать нормальными. Это допущение основывается на двух обстоятельствах. Во-первых, x_ν^+ и y_ν^+ не сильно отличаются от нормально распределённых случайных величин x_ν и y_ν. Во-вторых, распределение линейной комбинации случайных величин довольно быстро приближается к нормальному распределению при увеличении числа компонент линейной комбинации. Всё это даёт основания полагать, что X^+ и Y^+ будут нормальными даже при небольшом числе отсчётов.

Энергетическая эффективность обработки характеризуется величиной Z^2/σ_+^2, где $Z^2 = \left|\overline{X^+} + \mathrm{i}\overline{Y^+}\right|^2 \Big/ (2q_0)$, q_0 — отношение сигнал/шум, σ_+^2 — дисперсия квадратурных составляющих X^+ и Y^+. Утверждение справедливо, если квадратурные составляющие статистически независимы.

Из результатов предыдущего параграфа следует, что квантование по уровню не влияет на величину среднего значения, поэтому $\overline{X^+} \approx \overline{X}$, $\overline{Y^+} \approx \overline{Y}$. Для вторых центральных моментов квадратурных составляющих можно получить следующие выражения:

$$\overline{\left(X^+ - \overline{X^+}\right)^2} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\left[\alpha_\nu\alpha_\mu\overline{\left(x_\nu^+ - \overline{x_\nu^+}\right)\left(x_\mu^+ - \overline{x_\mu^+}\right)} + \beta_\nu\beta_\mu\overline{\left(y_\nu^+ - \overline{y_\nu^+}\right)\left(y_\mu^+ - \overline{y_\mu^+}\right)}\right],$$

$$\overline{\left(Y^+ - \overline{Y^+}\right)^2} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\left[\beta_\nu\beta_\mu\overline{\left(x_\nu^+ - \overline{x_\nu^+}\right)\left(x_\mu^+ - \overline{x_\mu^+}\right)} + \alpha_\nu\alpha_\mu\overline{\left(y_\nu^+ - \overline{y_\nu^+}\right)\left(y_\mu^+ - \overline{y_\mu^+}\right)}\right],$$

$$\overline{\left(X^+ - \overline{X^+}\right)\left(Y^+ - \overline{Y^+}\right)} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_\nu\beta_\mu\left[\overline{\left(x_\nu^+ - \overline{x_\nu^+}\right)\left(x_\mu^+ - \overline{x_\mu^+}\right)} - \overline{\left(y_\nu^+ - \overline{y_\nu^+}\right)\left(y_\mu^+ - \overline{y_\mu^+}\right)}\right].$$

Здесь n — число отсчётов; коэффициенты α_ν и β_ν определены в § 8.2.

Теперь можно записать [см. формулу (8.6.3)]:

$$\overline{\left(x_\nu^+ - \overline{x_\nu^+}\right)\left(x_\mu^+ - \overline{x_\mu^+}\right)} \approx K_{|\nu-\mu|} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\pi}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\left(\frac{2\pi k\left(\overline{x_\nu^+} - \overline{x_\mu^+}\right)}{h}\right)\exp\left\{-\frac{4\pi^2k^2\left(1 - r_{|\nu-\mu|}\right)}{\varepsilon^2}\right\},$$

где $K_{|\nu-\mu|} = K\left((\nu-\mu)\Delta t\right)$, $K(\cdot)$ — корреляционная функция квадратурных составляющих (см. § 8.2), $r_{|\nu-\mu|} = K_{|\nu-\mu|}/\sigma_0^2$, $\sigma_0^2 = K_0$.

Выражение для $\overline{\left(y_\nu^+ - \overline{y_\nu^+}\right)\left(y_\mu^+ - \overline{y_\mu^+}\right)}$ аналогично. Оно отличается от приведенного выше выражения лишь тем, что вместо символов x в нём содержатся символы y.

Как показывает анализ этих выражений применительно к интервалам дискретизации Δt и корреляционным функциям $K(t)$ для реальных параметров рассмотренной ранее схемы дискретной обработки, в выражениях для $\overline{\left(x_\nu^+ - \overline{x_\nu^+}\right)\left(x_\mu^+ - \overline{x_\mu^+}\right)}$ и $\overline{\left(y_\nu^+ - \overline{y_\nu^+}\right)\left(y_\mu^+ - \overline{y_\mu^+}\right)}$ при $\nu \neq \mu$ можно пренебречь суммами. Это обусловлено тем, что при $\nu \neq \mu$ коэффициенты корреляции отсчётов $r_{|\nu-\mu|}$ значимо отличаются от 1 (применительно к данному вопросу), и поэтому значения экспонент пренебрежимо малы. Учитывая ещё, что при $\nu = \mu$ сумма равна $\pi^2/6$, можно записать

$$\overline{\left(x_\nu^+ - \overline{x_\nu^+}\right)\left(x_\mu^+ - \overline{x_\mu^+}\right)} \approx \overline{\left(y_\nu^+ - \overline{y_\nu^+}\right)\left(y_\mu^+ - \overline{y_\mu^+}\right)} \approx \begin{cases}\sigma_0^2 + h^2/12 & \text{при} \quad \nu = \mu, \\ K_{|\nu-\mu|} & \text{при} \quad \nu \neq \mu.\end{cases}$$

Тогда после преобразований получаем

$$\sigma_+^2 = \overline{\left(X^+ - \overline{X^+}\right)^2} \approx \overline{\left(Y^+ - \overline{Y^+}\right)^2} \approx \sigma^2 + \frac{h^2}{12}\sum_{\nu=1}^{n} \left|\alpha_\nu + \mathrm{i}\beta_\nu\right|^2 ,$$

$$\overline{\left(X^+ - \overline{X^+}\right)\left(Y^+ - \overline{Y^+}\right)} \approx 0 ,$$

где σ^2 — дисперсия квадратурных составляющих при дискретной обработке, определяемая формулой (8.2.7).

Полученный вывод эквивалентен утверждению, что время корреляции шумов квантования настолько меньше интервала дискретизации, что шумы квантования в разных отсчётах можно считать статистически независимыми.

Может оказаться полезным следующее формальное правило. В § 8.3 приведено несколько выражений в виде сумм для дисперсии σ^2 при упрощенной дискретной обработке. Если в каком-либо из этих выражений заменить K_0 на $[1+(h/\sigma_0)^2/12]K_0$, а значения K_ν при $\nu \neq 0$ оставить без изменений, то получим соответствующее выражение для дисперсии σ_+^2 при цифровой обработке.

Поскольку средние значения $\overline{X^+}$ и $\overline{Y^+}$ не отличаются от соответствующих средних значений при дискретной обработке, то коэффициент потерь $\eta_ц$, обусловленных квантованием по уровню, можно записать в виде отношения дисперсий: $\eta_ц = \sigma^2/\sigma_+^2$.

На рис. 8.7 в качестве примера представлено несколько зависимостей коэффициента потерь $\eta_ц$ от h/σ_0 при упрощенной обработке отсчётов. Значения $F_ф/F_к$, приведенные в подрисуночных надписях, являются оптимальными для дискретной обработки при $F_c\,\Delta t = 0{,}2$.

Если предположить, что отсчёты, получаемые на выходе дискретизаторов, статистически независимы, то будут независимы и отсчёты на выходе АЦП. В таких случаях квадратурные составляющие являются взвешенной суммой независимых случайных величин, имеющих одинаковую дисперсию. Поэтому дисперсия квадратурных составляющих будет пропорциональна дисперсии отсчётов, а коэффициент потерь будет равен $\eta_ц = \sigma_0^2/(\sigma_0^2 + h^2/12)$.

Статистическая независимость отсчётов имеет место при использовании идеального радиофильтра, когда $F_ф/F_к = 1$. Корреляционная функция дискретизируемых процессов $x(t)$ и $y(t)$ при использовании идеального радиофильтра описывается функцией вида $\sin(x)/x$, принимающей при $F_ф/F_к = 1$ нулевые значения как раз для тех интервалов времени, которые соответствуют интервалам времени между отсчётами. Поэтому пунктирная кривая на рис. 8.7 отображает также коэффициент потерь из-за квантования для схемы с идеальным радиофильтром, когда $F_ф = F_к$ (при любых $F_c\,\Delta t$).

С уменьшением ширины полосы фильтра увеличивается статистическая зависимость отсчётов и поэтому доля дисперсии σ_0^2 одного

отсчёта в величине дисперсии σ^2 накопленной суммы уменьшается. При малых $F_c \Delta t$ это приводит к уменьшению энергетических потерь из-за квантования по уровню.

С увеличением $F_c \Delta t$ энергетические потери растут; этот эффект также иллюстрируется на рис. 8.7. Объясняется это тем, что при обработке отсчётов при $F_c \Delta t \neq 0$ происходит накопление отсчётов с использованием "косинусоидальных" множителей, что в некоторой степени ослабляет влияние статистической зависимости отсчётов на величину дисперсии накопленной суммы.

Теперь обратим внимание на следующее. Выбор оптимальной ширины полосы предварительного фильтра проиллюстрирован на рис. 8.2 и 8.3 для случая, когда отношение h/σ_0 мало и энергетическими потерями из-за квантования можно пренебречь. Если же потери из-за квантования ощутимы, а они в таких случаях будут зависеть от ширины полосы фильтра, то целесообразно оптимизировать цифровую обработку в целом, т. е. выбирать ширину полосы так, чтобы были минимальны совокупные потери и из-за дискретизации и из-за квантования. Такая оптимизация будет приводить, вообще говоря, к изменению (в основном к уменьшению) оптимальной ширины полосы по сравнению с оптимальной шириной при дискретной обработке.

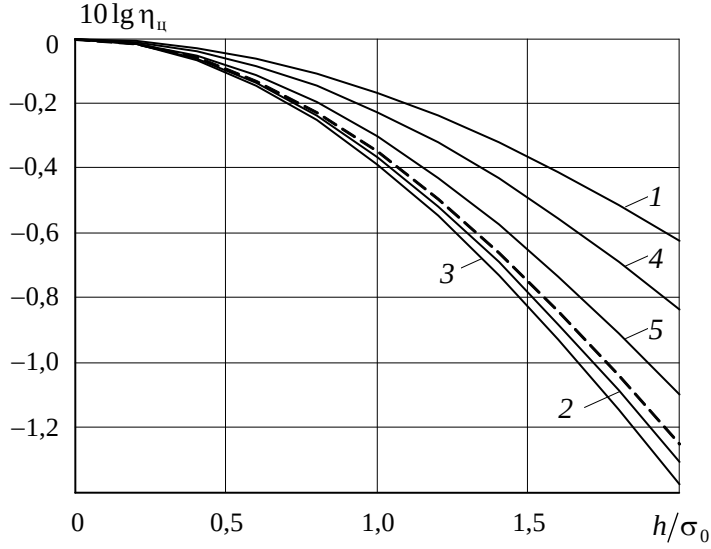


Рис. 8.7. Энергетические потери,
обусловленные квантованием сигнала по уровню при $n = 8$, $n_d = 1$:
1 и *2* — колебательный контур, $F_ф/F_к = 0{,}271$, *1* — $F_c \Delta t = 0$, *2* — $F_c \Delta t = 0{,}2$;
3 — идеальный радиофильтр, $F_ф/F_к = 1{,}124$, $F_c \Delta t = 0$ … 0,2;
4 и *5* — гауссовский радиофильтр, $F_ф/F_к = 0{,}567$, *4* — $F_c \Delta t = 0$,
5 — $F_c \Delta t = 0{,}2$; пунктир — зависимость $\eta_ц = \sigma_0^2 / (\sigma_0^2 + h^2/12)$

9. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ДИСКРЕТНОЙ ОБРАБОТКИ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ СИГНАЛА НА ФОНЕ МЕШАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ С НЕИЗВЕСТНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ

9.1. Введение

Обнаружение сигнала на фоне мешающих воздействий является актуальной задачей. Рассмотренная в § 5.5 схема обнаружения сигнала на фоне шума с неизвестной интенсивностью позволяет в некоторой степени решить задачу. Однако эффективность схемы не всегда является удовлетворительной. Недостатки схемы определяются в основном тем, что измерение помехового фона либо рассовмещено по времени с приёмом полезного сигнала, либо производится в области по задержке и частоте, не совпадающей с областью обнаружения. Отмеченные особенности могут привести к тому, что будет измеряться интенсивность какого-то другого помехового фона.

Кроме того, измерение помехового фона отдельными каналами обнаружения в ряде случаев может представлять собой нерациональное использование аппаратуры.

Целесообразно в максимальной степени сблизить по времени и частоте измерение фона и обработку сигнала. Построению и анализу таких схем, основанных на цифровой обработке сигналов, посвящена данная глава.

Синтез схем обнаружения проводится в предположении, что обнаружение сигнала производится на фоне гауссовского шума с неизвестной интенсивностью. Затем разрабатываются методы анализа полученных схем, при этом предполагается, что в составе входных реализаций могут присутствовать и мешающие сигналы.

9.2. Синтез схем дискретной обработки наблюдений при обнаружении сигнала на фоне шума с неизвестной интенсивностью

Рассматриваем обработку сигнала на фоне белого гауссовского шума с неизвестной спектральной плотностью. Предполагаем, что первоначальная обработка сигнала и дискретизация квадратурных составляющих производится по схеме рис. 8.1. Проведём синтез процедуры обработки отсчётов $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$. Для сокращения записи последующих выражений обозначим $\mathbf{x} \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\mathbf{y} \equiv \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, имея в виду, что под обозначением $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ подразумевается функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Используя результаты § 8.2, плотность распределения отсчётов при наличии нефлуктуирующего сигнала можно записать в виде

$$w_{\text{сш}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^n c^{2n} \det \left\| a_{\nu\mu} \right\|} \exp\left\{ -\frac{1}{2c^2} Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\},$$

где

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}^{-1} \left[\left(x_\nu - \overline{x_\nu} \right) \left(x_\mu - \overline{x_\mu} \right) - \left(y_\nu - \overline{y_\nu} \right) \left(y_\mu - \overline{y_\mu} \right) \right],$$

$$c = \sqrt{2N_{\text{ш}}}/4, \qquad \overline{x_\nu} + \mathrm{i}\,\overline{y_\nu} = A \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} z_{0\nu}^{*}, \qquad A = c\sqrt{2q_0} = \sqrt{2E}/4,$$

E и φ — энергия и фаза сигнала, $N_{\text{ш}}$ — двусторонняя спектральная плотность шума, q_0 — отношение сигнал/шум, элементы $a_{\nu\mu}$, $a_{\nu\mu}^{-1}$ и $z_{0\nu}$ определены в § 8.2.

Если в приведенном выражении для $w_{\text{сш}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ положить равными нулю средние значения сигнальных составляющих отсчётов $\overline{x_\nu}$ и $\overline{y_\nu}$, то это выражение превратится в плотность распределения $w_{\text{ш}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ отсчётов в отсутствие сигнала.

Ранее, при анализе схем обработки сигнала, принимаемого на фоне шума с известной интенсивностью, мы полагали $c = 1$. Теперь, для исследования обработки при неизвестной интенсивности шума, учёт масштабного коэффициента c необходимо восстановить.

Величина c^2 пропорциональна спектральной плотности шума и поэтому c является неизвестным параметром. Средние значения отсчётов зависят от энергии сигнала E и от фазы сигнала φ, которые также неизвестны. Элементы $a_{\nu\mu}$ являются известными параметрами. Они представляют собой значения корреляционной функции шумовых составляющих дискретизируемых процессов, когда спектральная плотность шума такова, что $c = 1$. Плотности распределения $w_{\text{сш}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $w_{\text{ш}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ являются условными плотностями. Их обозначения в дальнейшем понадобится записывать в виде $w_{\text{сш}}(\mathbf{x}, \mathbf{y} / E, \varphi, c)$ и $w_{\text{ш}}(\mathbf{x}, \mathbf{y} / c)$.

Оптимальный приёмник должен образовывать отношение правдоподобия. Для этого необходимо знать плотности вероятности $w_{\text{сш}}(\cdots)$ и $w_{\text{ш}}(\cdots)$. В нашем случае вид этих плотностей известен, однако, в выражения входят параметры E, φ, c, значения которых неизвестны. Используя метод максимального правдоподобия [55], в выражения для плотностей будем подставлять максимально правдоподобные оценки E', φ', c_1', c_2' неизвестных параметров E, φ, c, определяемые из уравнений

$$w_{\text{сш}}(\mathbf{x}, \mathbf{y} / E', \varphi', c_1') = \max_{E, \varphi, c} w_{\text{сш}}(\mathbf{x}, \mathbf{y} / E, \varphi, c),$$

$$w_{\text{ш}}(\mathbf{x}, \mathbf{y} / c_2') = \max_{c} w_{\text{ш}}(\mathbf{x}, \mathbf{y} / c).$$

Тогда отношение правдоподобия, которое должен формировать обнаружитель, можно записать в виде

$$\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{w_{\text{сш}}(\mathbf{x}, \mathbf{y} / E', \varphi', c_1')}{w_{\text{ш}}(\mathbf{x}, \mathbf{y} / c_2')} .$$

Находя оценки E', φ', c_1', c_2' и подставляя их в выражения для плотностей вероятности, получим

$$\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{S}{S - R} \right)^n ,$$

где

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}^{-1} (x_\nu x_\mu + y_\nu y_\mu) , \qquad R = \frac{X^2 + Y^2}{2\sigma^2} ,$$

а X и Y определяются формулами (8.2.2). Параметр σ^2 является дисперсией случайных величин X и Y при $c = 1$.

Используя метод приведения квадратичной формы к сумме квадратов и неравенство Коши — Буняковского, можно показать, что знаменатель в последнем выражении для $\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ неотрицателен и обращается в нуль лишь при отсутствии шумовой составляющей.

Сравнение с порогом отношения правдоподобия можно заменить проверками $R > \alpha S$ или $R/S > \alpha$, где α — пороговый коэффициент. При выполнении неравенства принимается решение о наличии сигнала.

Процедура формирования выходной величины R совпадает с процедурой дискретной обработки сигнала, принимаемого на фоне шума с известной интенсивностью. Поэтому другую процедурную ветвь, формирующую случайную величину S, можно назвать каналом измерения шумового фона. Случайная величина $\lambda = \alpha S$ является порогом, с которым сравнивается результат обработки сигнала R.

Полученную процедуру обработки будем называть оптимальной (в отличие от рассматриваемой далее упрощенной процедуры).

При дальнейшем анализе опять будем полагать, что схема обработки рассчитана на оптимальный приём сигнала с огибающей $U_1(t)$ и с параметрами τ_1 и Ω_1 (см. § 8.2). Поэтому следует считать, что квадратурные составляющие X и Y вычисляются не по формулам (8.2.2), а по формулам (8.2.3).

В гл. 8 наряду с оптимальным алгоритмом рассматривался упрощенный алгоритм обработки при известной интенсивности шума. Там же отмечалось, что упрощенный алгоритм можно получить двумя способами. Учитывая изложенный в гл. 8 второй способ, можно найти упрощенный алгоритм обработки и при неизвестной интенсивности. Для этого при синтезе нужно принять, что параметрами распределения $w_{\text{сш}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ являются $a_{\nu\mu} = \sigma_0^2 \delta_{\nu\mu}$ и $\overline{x_\nu} + \mathrm{i}\,\overline{y_\nu} = A \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} z_{1\nu}^*$,

причём $z_{1\nu} = U_1(t_\nu - \tau_1)\exp\{\mathrm{i}\Omega_1 t_\nu\}$. Здесь $\delta_{\nu\mu}$ — символ Кронекера, а σ_0^2 — некоторый известный параметр (σ_0^2 — дисперсия шумовых составляющих дискретизируемых процессов, когда спектральная плотность шума такова, что $c = 1$). Тогда получим процедуру обработки, состоящую опять из двух ветвей. Одна ветвь этой процедуры совпадает с ранее рассмотренной (§ 8.2) упрощенной процедурой дискретной обработки сигнала при известной интенсивности шума. Другая ветвь (канал измерения шума) формирует случайную величину

$$S = \frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu^2 + y_\nu^2) = \frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{\nu=1}^{n}\left|x_\nu + \mathrm{i}\,y_\nu\right|^2 .$$

Схемы обработки сигнала для оптимальной обработки и для упрощенной обработки представлены на рис. 9.1. Напомним, что присутствующая в схемах величина σ^2 для оптимальной обработки определяется формулой (8.2.4), а для упрощенной — формулой (8.2.7).

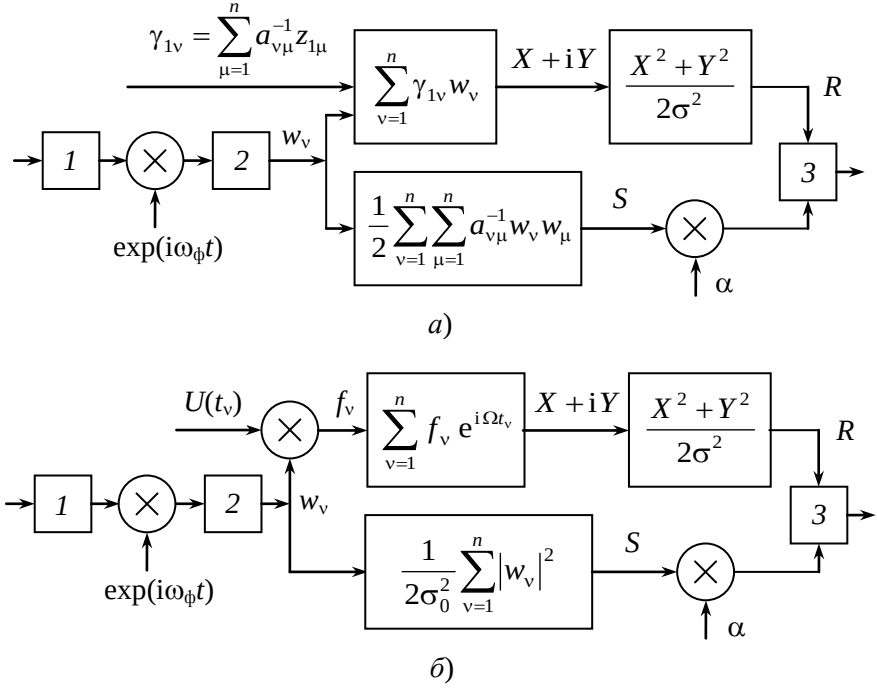


Рис. 9.1. Оптимальная (*а*) и упрощенная (*б*) схемы дискретной обработки наблюдений при обнаружении сигнала на фоне шума с неизвестной интенсивностью:

1 — узкополосный фильтр, *2* — дискретизатор, *3* — пороговое устройство

Принципы, реализовавшиеся в представленных схемах, встречаются в литературе. Подобный обнаружитель, предназначенный для приёма когерентной пачки импульсов, предложен впервые, по-видимому, Сибертом [60] и получил впоследствии название “обнаружитель Сиберта” [112]. Аналоговый вариант обнаружителя сигналов на фоне шума с неизвестной интенсивностью представлен в [83]. В [72] рассматривается синтез аналогичных схем обнаружения при помощи принципа инвариантности в теории проверки статистических гипотез.

9.3. Эффективность оптимальной дискретной обработки при обнаружении сигнала на фоне шума с неизвестной интенсивностью

Применением специального метода вычисления статистических характеристик функций от двух случайных переменных (см. § 2.5) можно получить общую формулу для вероятности обнаружения сигнала:

$$D = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\varepsilon-\mathrm{i}\infty}^{\varepsilon+\mathrm{i}\infty} \frac{1}{p} F(p, -\alpha p)\, dp, \qquad \varepsilon < 0, \tag{9.3.1}$$

где $F(p_1, p_2)$ — изображение двумерной плотности распределения случайных величин R и S. Вначале необходимо найти выражение для $F(p_1, p_2)$.

Рассмотрим оптимальную обработку.

Традиционные методы нахождения аналитического выражения для $F(p_1, p_2)$ приводят к практически непреодолимым математическим осложнениям. Необходимый конечный результат можно получить, если вначале найти промежуточное выражение для функции $F(\xi_1, \xi_2, p_2) = \overline{\exp(\xi_1 X + \xi_2 Y - p_2 S)}$. Гауссовские случайные величины X и Y принимают как положительные, так и отрицательные значения, поэтому ξ_1 и ξ_2 могут быть только мнимыми. По отношению к ξ_1 и ξ_2 выражение $F(\xi_1, \xi_2, p_2)$ является характеристической функцией. Случайную величину S можно представить в виде суммы двух положительно определённых квадратичных форм (при комплексной форме записи — в виде одной квадратичной формы), поэтому по отношению к переменной p_2 функция $F(\xi_1, \xi_2, p_2)$ является изображением по Лапласу.

Нахождение $F(\xi_1, \xi_2, p_2)$ сводится к последовательному вычислению интегралов от экспонент с квадратичной формой в показателе. Вычисляя эти интегралы, получим

$$F(\xi_1, \xi_2, p_2) = K \exp\left\{ \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)\, \sigma_1^2 + \xi_1 \overline{X_1} + \xi_2 \overline{Y_1} \right\},$$

где

$$K = \frac{1}{(1+p_2c^2)^n}\exp\left\{-\frac{p_2c^2}{1+p_2c^2}\eta_\phi q_0\right\},$$

$$\eta_\phi = \frac{1}{2c^2q_0}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}a_{\nu\mu}^{-1}(\overline{x_\nu}\,\overline{x_\mu}+\overline{y_\nu}\,\overline{y_\mu}), \qquad \sigma_1^2 = \frac{c^2}{1+p_2c^2}\sigma^2,$$

σ^2 — дисперсия квадратурных составляющих X и Y при $c^2 = 1$, q_0 — отношение сигнал/шум, $\overline{X_1} = \overline{X}/(1+p_2c^2)$, $\overline{Y_1} = \overline{Y}/(1+p_2c^2)$.

Теперь обозначим через $W(X, Y, S)$ — распределение, соответствующее изображению $F(\xi_1, \xi_2, p_2)$. Изображение по Лапласу совместного распределения R и S запишем в виде

$$F(p_1, p_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-p_1\frac{X^2+Y^2}{2\sigma^2}\right\}f(X, Y; p_2)\,dX\,dY, \qquad (9.3.2)$$

где

$$f(X, Y; p_2) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-p_2S}W(X, Y, S)\,dS.$$

Функцию $f(X, Y; p_2)$ можно найти из уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\xi_1X+\xi_2Y}\,f(X, Y; p_2)\,dX\,dY = F(\xi_1, \xi_2, p_2);$$

она имеет вид

$$f(X, Y; p_2) = \frac{K}{2\pi\sigma_1^2}\exp\left\{-\frac{(X-\overline{X_1})^2+(Y-\overline{Y_1})^2}{2\sigma_1^2}\right\}.$$

Вычисляя интегралы в формуле (2), получим

$$F(p_1, p_2) = \frac{1}{(1+p_2c^2)^{n-1}}\exp\left\{-\frac{p_2c^2(\eta_\phi-\eta_c)q_0}{1+p_2c^2}\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{1+p_1c^2+p_2c^2}\exp\left\{-\frac{(p_1c^2+p_2c^2)\eta_c q_0}{1+p_1c^2+p_2c^2}\right\},$$

где $\eta_c = (\overline{X}^2+\overline{Y}^2)/(2c^2q_0\sigma^2)$.

Дальнейшие преобразования показывают, что для коэффициента η_c по-прежнему справедлива формула (8.2.5), а формулу для коэффициента η_ϕ можно привести к виду

$$\eta_\phi = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}a_{\nu\mu}^{-1}\,z_{0\nu}^*\,z_{0\mu}.$$

Используя метод приведения квадратичной формы к сумме квадратов и неравенство Коши — Буняковского, можно показать, что $\eta_c \le \eta_\phi$. Равенство η_c и η_ϕ достигается, когда $z_{0\nu} = z_{1\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), т. е. при $U_1(t) \equiv U_0(t)$ и при совпадении параметров сигнала τ_0 и Ω_0 с параметрами τ_1 и Ω_1, на которые настроена процедура обработки.

Коэффициенты η_c и η_ϕ не зависят ни от энергии сигнала, ни от спектральной плотности шума.

Величина c^2, пропорциональная спектральной плотности шума, входит в выражение для $F(p_1, p_2)$ множителем к переменным p_1 и p_2. Простым изменением масштаба переменной интегрирования в интеграле (1) можно исключить явную зависимость в выражении для D от параметра c^2, а значит и от спектральной плотности шума. Влияние изменений спектральной плотности шума на вероятность обнаружения проявляется через отношение сигнал/шум q_0. При пропорциональном изменении энергии сигнала и спектральной плотности шума величина вероятности обнаружения остаётся неизменной.

На основании сказанного, при дальнейшем рассмотрении эффективности схемы обработки будем (при анализе!) опять исключать из выражений множитель c, входящий в эти выражения в явном виде (т. е. полагаем $c = 1$).

Если в $F(p_1, p_2)$ положить $p_2 = 0$, то получим изображение по Лапласу одномерной плотности распределения выходной случайной величины R, которое, как и следовало ожидать, является изображением распределения квадрата райсовской случайной величины. Отношение сигнал/шум входит в изображение вместе с множителем η_c. Для схемы обнаружения с известной интенсивностью шума, когда параметры сигнала совпадают с параметрами настройки схемы, множитель η_c имеет смысл коэффициента энергетических потерь, обусловленных временной дискретизацией.

Выражение $F(0, p_2)$ является изображением выходной величины в канале измерения шумового фона. Оно совпадает с изображением выходной величины при обработке некогерентной пачки, состоящей из n импульсов, когда отношение сигнал/шум для всей пачки равно $\eta_\phi q_0$. Поскольку при совпадении параметров сигнала с параметрами настройки схемы имеет место равенство $\eta_c = \eta_\phi$, то можно сказать, что коэффициент η_ϕ играет в некотором смысле роль коэффициента энергетических “потерь” сигнала в канале измерения интенсивности шума, причём эти потери также обусловлены временной дискретизацией.

Итак, в канале обработки сигнала происходит когерентное накопление сигнала, в канале измерения интенсивности шумового фона — некогерентное. “Обработка” сигнала в фоновом канале сопровождается большими дополнительными энергетическими потерями из-за некогерентного дробления энергии сигнала (помимо потерь из-за дискретизации). Коэффициент потерь из-за некогерентного дробления ориентировочно обратно пропорционален величине $\sqrt{n}$. Отсюда

становится ясной физическая суть того, что с ростом энергии входного сигнала увеличивается вероятность правильного обнаружения.

Работу схемы обнаружения можно проиллюстрировать одномерными плотностями распределения выходных величин R и S. На рис. 9.2 показано, что с появлением на входе схемы полезного сигнала плотность распределения результата обработки сигнала существенно смещается в сторону больших значений аргумента, в то время как смещение плотности распределения порога оказывается незначительным.

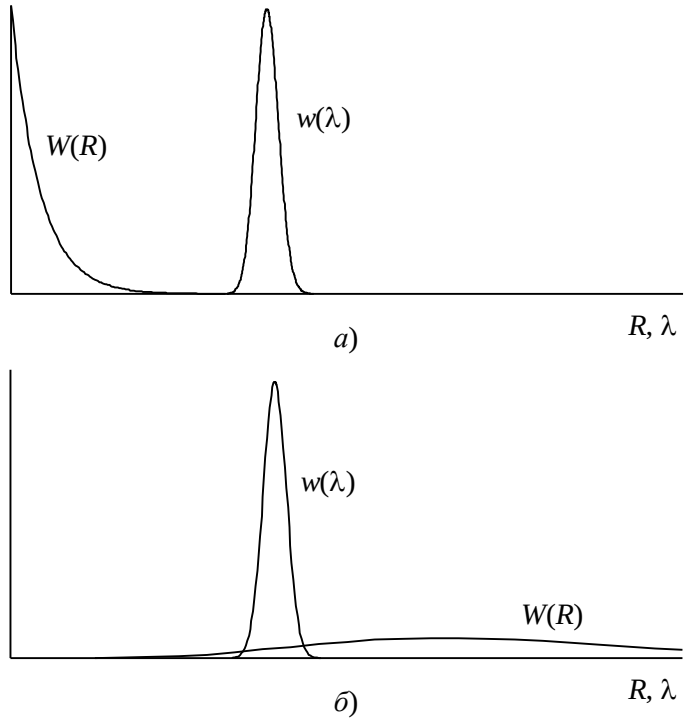


Рис. 9.2. Распределения случайной величины R на выходе канала обработки сигнала и порогового уровня $\lambda = \alpha \cdot S$:
а — при отсутствии полезного сигнала; *б* — при наличии полезного сигнала

Если подставить в интеграл (1) полученное выражение для $F(p_1, p_2)$, то нетрудно заметить, что при $\alpha \geq 1$ подынтегральное выражение не имеет особых точек слева от контура интегрирования, поэтому $D = 0$ при $\alpha \geq 1$. В дальнейшем будем полагать, что $0 < \alpha < 1$.

Получим теперь выражение для вероятности обнаружения сигнала.

Рассмотрим совокупность двух случайных величин R и G, причём $G = S - R$. Изображение плотности распределения этих двух случайных величин имеет вид

$$F_{RG}(p, q) = \overline{\exp\{-pR - qG\}} = \overline{\exp\{-(p-q)R - qS\}} = F(p-q, q) =$$

$$= \frac{1}{1+p} \exp\left\{-\frac{p}{1+p}\eta_c q_0\right\} \cdot \frac{1}{(1+q)^{n-1}} \exp\left\{-\frac{q}{1+q}(\eta_\phi - \eta_c)\, q_0\right\}.$$

Из полученного выражения видно, что случайные величины R и G статистически независимы.

Неравенство $R > \alpha S$ эквивалентно неравенству $G < [(1-\alpha)/\alpha]R$. Поэтому, если зафиксировать R, то вероятность выполнения критерия обнаружения равна

$$D(R) = 1 - J_{n-1}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} R, (\eta_\phi - \eta_c)\, q_0\right).$$

Усредняя эту вероятность по случайной переменной R, получим

$$D = 1 - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-R-\eta_c q_0}\, I_0(2\sqrt{R\eta_c q_0})\, J_{n-1}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} R, (\eta_\phi - \eta_c) q_0\right) dR.$$

Значения вероятности обнаружения необходимо находить по этой формуле численными методами.

Более простые выражения для вероятности обнаружения получаются для рэлеевских флуктуаций амплитуды сигнала. В этом случае q_0 — случайная величина с распределением $w(q_0) = (1/\rho_0)\exp(-q_0/\rho_0)$. Усредняя по q_0 изображение $F(p_1, p_2)$, соответствующее нефлуктуирующему сигналу, получим для флуктуирующего сигнала

$$F(p_1, p_2) = \frac{1}{(1+p_2)^{n-2}[(1+p_2)(1+p_1+p_2) + p_2(1+p_1+p_2)\rho_\phi + p_1\rho_c]},$$

где $\rho_\phi = \eta_\phi \rho_0$, $\rho_c = \eta_c \rho_0$.

Функцию $F(p, -\alpha p)$ можно записать в виде

$$F(p, -\alpha p) = -\frac{1}{\alpha(1-\alpha)(1+\rho_\phi)(1-\alpha p)^{n-2}(p-p')(p-p'')},$$

где p' и p'' — корни квадратного уравнения

$$-\alpha(1-\alpha)(1+\rho_\phi)p^2 + (1 - 2\alpha - \alpha\rho_\phi + \rho_c)p + 1 = 0.$$

Эти корни имеют разные знаки, поэтому для определённости положим $p' < 0$, $p'' > 0$. Тогда, вычисляя вычет в точке p', из формулы (1) получаем

$$D = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)(1+\rho_\phi)\,p'(p'-p'')(1-\alpha p')^{n-2}}.$$

Если параметры сигнала совпадают с параметрами настройки схемы, т. е. $U_0(t) \equiv U_1(t)$, $\tau_0 = \tau_1$, $\Omega_0 = \Omega_1$, то $\rho_\phi = \rho_c$ и $p' = -1/[(1-\alpha)(1+\rho_c)]$, $p'' = 1/\alpha$. В этом случае формулу для вероятности обнаружения можно записать в виде

$$D = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\alpha}{(1-\alpha)(1+\rho_c)}\right)^{n-1}}.$$

При $\rho_c = 0$ из этой формулы следует выражение для вероятности ложной тревоги

$$F = (1-\alpha)^{n-1}.$$

Если в формулы для F и D подставить $\alpha = 1/[1 + (n-1)/\beta]$, где β — некоторый новый коэффициент, то получим

$$F = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\beta}{n-1}\right)^{n-1}}, \qquad D = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\beta/(n-1)}{1+\rho_c}\right)^{n-1}}. \tag{9.3.3}$$

В таком виде формулы оказываются полезными для сравнения характеристик рассматриваемой схемы дискретной обработки и схемы обнаружения одноимпульсного сигнала при наличии дополнительных выборок шума (схема на рис. 5.3 при $N = 1$).

В результате сопоставления формул (3) с формулами (5.5.5) можно прийти к следующему выводу. Если в представленной на рис. 5.3 схеме обнаружения число выборочных значений шума m на единицу меньше числа отсчётов n при дискретной обработке ($m = n - 1$) и выборочные значения шума статистически независимы, то энергетические потери из-за незнания интенсивности шума для сравниваемых схем в точности совпадают между собой.

Для определения коэффициента энергетических потерь η, обусловленных незнанием интенсивности шума, можно воспользоваться приближённой формулой $10\lg\eta \approx -(5/n)\lg(1/F)$. Например, при $n = 1000$ и $F = 10^{-6}$ эта формула даёт $-0{,}03$ дБ (напомним, что при общей оценке схемы дискретной обработки помимо потерь из-за незнания интенсивности шума необходимо ещё учитывать потери из-за временной дискретизации).

Обратим внимание на то, что при совпадении параметров сигнала с параметрами настройки схемы обработки потери из-за незнания интенсивности шума определяются числом отсчётов n и не зависят от частотной характеристики узкополосного фильтра. Влияние частотной характеристики на энергетическую эффективность схемы прояв-

ляется через коэффициент η_c, который характеризует потери из-за дискретизации, как при неизвестной интенсивности шума, так и при известной интенсивности. Однако оговоримся, что высказанное утверждение справедливо лишь для оптимальной обработки отсчётов.

Если шум нестационарный или интенсивность шума зависит от параметров настройки (τ, Ω) каналов обнаружения, то схема обнаружения типа "обнаружитель Сиберта" предпочтительнее схемы рис. 5.3, использующей дополнительные выборки шума. В таких случаях дополнительные выборки шума могут давать недостоверную информацию об интенсивности шума на входе канала обнаружения. В то время как в обнаружителе Сиберта для канала измерения шума используются те же самые отсчёты реализаций, которые поступают в канал обработки сигнала и, следовательно, оба канала испытывают одни и те же мешающие воздействия.

Следует также отметить, что применение обнаружителей Сиберта может быть оправдано и в тех случаях, которые принято относить к обнаружению при известной интенсивности шума. Обеспечение стабильности работы реального приёмника с помощью каких-либо подстроек, шумовой автоматической регулировки усиления или предварительной операции измерения мощности шума будет неизбежно производиться с погрешностями, которые также приводят к некоторым энергетическим потерям. Эти потери могут оказаться сравнимыми или даже большими, чем потери для обнаружителей Сиберта.

9.4. Эффективность упрощенной дискретной обработки при неизвестной интенсивности шума

Анализ упрощенной обработки при нефлуктуирующем сигнале оказывается сложным, поэтому ограничимся случаем рэлеевских флуктуаций сигнала.

Если отношение сигнал/шум q_0 распределено по экспоненциальному закону $w(q_0) = (1/\rho_0)\exp(-q_0/\rho_0)$, а начальная фаза φ — по равномерному закону, то отсчёты x_ν и y_ν — нормальные случайные величины с нулевым средним. В общем случае x_ν и y_μ при $\nu \neq \mu$ статистически зависимы, причём $\overline{x_\nu y_\mu} = -\overline{y_\nu x_\mu}$. В частном случае, когда $\Omega_0 = \Omega_1 = 0$ и $U_0(t)$ — действительная функция, x_ν и y_μ независимы при любых ν и μ.

Учитывая результаты предыдущего параграфа, будем для упрощения выражений полагать $c = 1$.

Элементы корреляционной матрицы отсчётов определяются формулами:

$$\overline{x_\nu x_\mu} = \overline{y_\nu y_\mu} = \rho_0 \operatorname{Re}\left\{z_{0\nu}\, z_{0\mu}^*\right\} + a_{\nu\mu},$$

$$\overline{x_\nu y_\mu} = -\overline{x_\mu y_\nu} = \rho_0 \operatorname{Im}\left\{z_{0\nu}\, z_{0\mu}^*\right\}.$$

Элементы $a_{\nu\mu}$ и $z_{0\nu}$ определены в § 8.2.

Как показано в [119, 16] (см. также § 2.1), когда первые моменты равны нулю, а вторые моменты удовлетворяют условиям $x_\nu x_\mu = y_\nu y_\mu$, $x_\nu y_\mu = -x_\mu y_\nu$, многомерное распределение Гаусса можно записать в виде

$$w(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n \det \mathbf{B}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} b_{\nu\mu}^{-1} (x_\nu + \mathrm{i}\, y_\nu)(x_\mu - \mathrm{i}\, y_\mu) \right\},$$

где $\mathbf{B}$ — эрмитова матрица размера $n \times n$ с элементами $b_{\nu\mu} = x_\nu x_\mu + \mathrm{i}\, x_\nu y_\mu$, $b_{\nu\mu}^{-1}$ — элементы матрицы $\mathbf{B}^{-1}$, обратной матрице $\mathbf{B}$. Учитывая эту формулу, выражение

$$F(p_1, p_2) = \overline{\exp\left\{ -p_1 \frac{X^2 + Y^2}{2\sigma^2} - p_2 \frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu^2 + y_\nu^2) \right\}}$$

приводим к виду $F(p_1, p_2) = (\det \mathbf{C}/\det \mathbf{B}) I$, где

$$I = \frac{1}{(2\pi)^n \det \mathbf{C}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\nu\mu}^{-1} (x_\nu + \mathrm{i}\, y_\nu)(x_\mu - \mathrm{i}\, y_\mu) \right\} dx_1 \cdots dy_n ,$$

$$c_{\nu\mu}^{-1} = b_{\nu\mu}^{-1} + \frac{p_1}{\sigma^2} \gamma_{1\nu} \gamma_{1\mu}^* + \frac{p_2}{\sigma_0^2} \delta_{\nu\mu}, \qquad \gamma_{1\nu} = U_1(t_\nu - \tau_1)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega_1 t_\nu},$$

$\delta_{\nu\mu}$ — символ Кронекера, $\mathbf{C}$ — матрица, обратная матрице $\left\| c_{\nu\mu}^{-1} \right\|$.

Величина I является интегралом от плотности распределения, поэтому $I = 1$. Далее,

$$F(p_1, p_2) = \frac{\det \mathbf{C}}{\det \mathbf{B}} = \frac{1}{\det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})} = \frac{1}{\det\left(\mathbf{E} + \frac{p_1}{\sigma^2} \mathbf{H}\mathbf{B} + \frac{p_2}{\sigma_0^2} \mathbf{B} \right)},$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, $\mathbf{H} = \left\| \gamma_{1\nu} \cdot \gamma_{1\mu}^* \right\|$.

Если в найденную формулу для $F(p_1, p_2)$ подставить $p_1 = p$ и $p_2 = -\alpha p$, а затем учесть, что определитель матрицы равен произведению собственных чисел этой матрицы, то можно получить

$$F(p, -\alpha p) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{1 + p\, \theta_\nu / \sigma^2},$$

где θ_ν — собственные числа матрицы $\mathbf{H}\mathbf{B} - \alpha(\sigma/\sigma_0)^2 \mathbf{B}$.

Из выражения для $F(p, -\alpha p)$ с помощью формулы (9.3.1) теперь нетрудно найти вероятность обнаружения D. Если, например, выполняются условия $\theta_1 > 0$ и $\theta_\nu < 0$ при $\nu = 2, 3, \ldots, n$, то вероятность обнаружения равна

$$D = \frac{\sigma^2}{\theta_1} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{\theta_1}{\theta_1 + |\theta_\nu|}.$$

Заметим, что все собственные числа θ_ν вещественные.

Если $\Omega_0 = \Omega_1 = 0$ и $U_0(t)$ — действительная функция, то $\mathbf{B}$ — симметрическая матрица, все элементы которой действительны.

При $\rho_0 = 0$ из формулы для вероятности обнаружения следует формула для вероятности ложной тревоги. При использовании этой формулы необходимо находить собственные числа матрицы $\mathbf{HA} - \alpha(\sigma/\sigma_0)^2\,\mathbf{A}$, где $\mathbf{A} = \left\| a_{\nu\mu} \right\|$.

Если узкополосный фильтр является идеальным радиофильтром с полушириной полосы пропускания $F_\phi = F_к$, то все шумовые составляющие независимы между собой, т. е. $\mathbf{A} = \sigma_0^2 \mathbf{E}$. Анализ эффективности обработки для данного частного случая существенно упрощается. При этом оказывается, что выражение для $F(p_1, p_2)$ имеет такой же вид, как и в случае оптимальной обработки, только коэффициент η_c определяется другими формулами:

$$\eta_c = \frac{1}{\sigma^2} \left| \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{1\nu}^{*}\, z_{0\nu} \right|^2, \qquad \sigma^2 = \sigma_0^2 \sum_{\nu=1}^{n} |\gamma_{1\nu}|^2 .$$

Коэффициент η_ϕ определяется по соответствующей формуле для оптимальной обработки с учётом того, что $a_{\nu\mu} = \sigma_0^2 \delta_{\nu\mu}$.

Для отмеченного частного случая всегда $\eta_c < \eta_\phi$. Равенство $\eta_c = \eta_\phi$ не достигается даже при совпадении параметров сигнала с параметрами настройки схемы. Это необходимо учитывать, если для оценки эффективности схемы упрощенной обработки с идеальным радиофильтром (при $F_\phi = F_к$) применяются формулы для вероятности обнаружения сигнала при оптимальной обработке.

Далее рассматривается обработка прямоугольного импульса с фазовой манипуляцией кодами Баркера. В качестве узкополосного фильтра принимается идеальный радиофильтр с полушириной полосы пропускания $F_\phi = F_к$.

По результатам численных оценок можно сделать вывод, что характеристики обнаружения сигнала при упрощенной обработке практически совпадают с характеристиками при оптимальной обработке. Отсюда далее следует, что для практической реализации можно рекомендовать упрощенную обработку, так как реализация оптимальной обработки более сложна. В то же время, для оценок характеристик обнаружения сигнала при упрощенной обработке можно использовать соответствующие более простые соотношения для опти-

мальной обработки, подставляя в них коэффициент η_c, полученный по формуле (8.2.8).

На рис. 9.3 приведены результаты для 13-значного кода Баркера.

Напомним, что символом F мы ранее обозначали вероятность ложной тревоги, т. е. вероятность превышения порога при отсутствии полезного сигнала. Применительно к рассматриваемому сейчас вопросу уточним, что символом F здесь и далее обозначена вероятность превышения порога, когда на входе приёмника действует только шум, а сигналы, как полезный, так и мешающий, отсутствуют.

Выбранные для рис. 9.3 масштабы изображения таковы, что зависимости для оптимальной и упрощенной процедур сливаются. Поэтому кривые *2 – 4* относятся и к оптимальной обработке и к упрощенной. Кривая *1* рассчитывалась по формуле $D = \exp\{-[\ln(1/F)]/(1+\rho_0)\}$. Параметр τ в подрисуночной надписи означает расстройку по задержке между сигналом и каналом обнаружения ($\tau = \tau_0 - \tau_1$); T_d — длительность дискрета ФКМ сигнала.

Кривые *3* и *4* характеризуют работоспособность схем при наличии сильного мешающего сигнала, действующего по боковому лепестку автокорреляционной функции (полезный сигнал отсутствует). При расстройке между сигналом и каналом обнаружения, равной двум длительностям дискрета ФКМ сигнала, координаты первого бокового лепестка совпадают с координатами настройки канала.

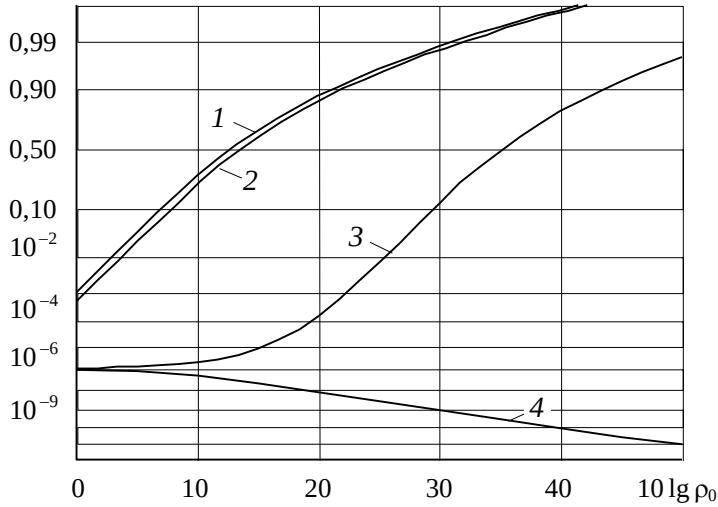


Рис. 9.3. Вероятности превышения порога при $n_d = 13$, $n/n_d = 4$, $F = 10^{-6}$, $\Omega_0 = \Omega_1 = 0$:

1 — аналоговая обработка, фиксированный порог, $\tau = 0$;
2 — дискретная обработка с формированием порога, $\tau = 0$;
3 — дискретная обработка, фиксированный порог, $\tau = 2T_d$;
4 — дискретная обработка с формированием порога, $\tau = 2T_d$

Если в схеме обнаружения отсутствует канал измерения шумового фона, то наличие сильного мешающего сигнала может приводить к ложному обнаружению (кривая *3*). Схема, предназначенная для обнаружения сигнала на фоне шума с неизвестной интенсивностью, подобным недостатком не обладает (кривая *4*).

Расстояние между кривыми *2* и *3* по оси абсцисс практически совпадает с абсолютным значением уровня бокового лепестка (в децибелах). Уровень бокового лепестка в данном случае равен $-20 \lg n_d$.

Следует отметить, что, хотя случай $\tau = T_d$ соответствует нулю автокорреляционной функции рассматриваемого ФКМ сигнала, при отсутствии канала измерения интенсивности шума также могут быть ложные обнаружения сильного сигнала, вероятность которых больше вероятности ложной тревоги. Это объясняется тем, что из-за наличия узкополосного фильтра искажается форма огибающей принимаемого сигнала, что приводит к "размыванию" нулей сигнальной функции. Кривая вероятности обнаружения сигнала при $\tau = T_d$ будет проходить правее кривой *3*, причём для оптимальной обработки это смещение составит 9 … 10 дБ, а для упрощенной 14 … 15 дБ. Аналогичное явление наблюдается и в реальных аналоговых схемах, так как полоса пропускания предварительных усилителей не является неограниченной.

Рассмотренная дискретная обработка может быть реализована в каналах многоканальной системы, предназначенной для обнаружения сигнала с неизвестными параметрами. При возникновении расстроек между параметрами сигнала и параметрами, на которые настроен канал обнаружения, происходит уменьшение вероятности обнаружения. В аналоговых схемах обнаружения при известной интенсивности шума характер подобного уменьшения вероятности обуславливается формой главного пика автокорреляционной функции (функции неопределённости). В дискретных схемах при неизвестной интенсивности шума характер изменения вероятности несколько отличается. Это отличие эквивалентно некоторому сужению главного пика автокорреляционной функции (по сравнению с обнаружением сигнала аналоговой схемой при известной интенсивности шума). Подобное изменение сигнальной функции ведёт к соответствующему увеличению энергетических потерь, обусловленных возможными расстройками параметров сигнала относительно параметров настройки каналов обнаружения. Однако следует ожидать, что эти потери увеличатся несущественно.

По изложенным в §§ 9.3 и 9.4 результатам можно сделать вывод, что синтезированные схемы дискретной обработки наблюдений позволяют с высокой эффективностью производить обнаружение сигнала на фоне гауссовского шума с неизвестной интенсивностью. Энергетические потери, обусловленные незнанием интенсивности шума, зависят от числа дискретных отсчётов обрабатываемого сигнала и при большом числе отсчётов пренебрежимо малы.

9.5. Обнаружение полезного сигнала на фоне мешающих сигналов и гауссовского шума с неизвестной интенсивностью

Представляет интерес задача обнаружения полезного сигнала, когда мешающее воздействие является аддитивной смесью шума (с неизвестной интенсивностью) и сигнала с большим отношением сигнал/шум, действующего на канал обнаружения боковым лепестком автокорреляционной функции. В общем случае мешающий сигнал может быть множественным, т. е. состоящим из большого числа сигналов, параметры которых отличаются друг от друга и распределены в некоторой области плоскости (τ, Ω).

Рассматриваем оптимальную обработку.

Полезным сигналом здесь мы называем тот сигнал, параметры которого близки или совпадают с параметрами настройки схемы. Параметры остальных (мешающих) сигналов отличаются от параметров настройки схемы настолько, что располагаются в области боковых лепестков автокорреляционной функции.

Сделаем переобозначение индексов, которыми помечаются параметры τ и Ω, а также последовательности z. Индекс у τ_k и Ω_k, а также первый индекс элемента последовательности $z_{k\nu}$, теперь будет означать номер сигнала. Второй индекс элемента последовательности $z_{k\nu}$ будет по-прежнему означать номер отсчёта функции $z_k(\cdots)$, выражение для которой при нулевом индексе приведено в § 8.2, т. е. $z_{k\nu} = z_k(t_\nu, \tau_k, \Omega_k)$. Здесь $k = 1, 2, \ldots, L$, а $\nu = 1, 2, \ldots, n$; L — число сигналов, n — число отсчётов. Параметры сигнала, на которые настроена схема обработки (цифровой фильтр), а также соответствующие элементы последовательности z, будем помечать символом "ф", при этом $z_{\text{ф}\nu} = z_\text{ф}(t_\nu, \tau_\text{ф}, \Omega_\text{ф})$.

Вместо отношения сигнал/шум q_0 теперь в анализе будут участвовать $q_1, q_2, \ldots, q_L$ — отношения сигнал/шум для L сигналов. Начальную фазу k-го сигнала обозначим через φ_k. Опять полагаем $c = 1$.

Если амплитуды и начальные фазы полезного и мешающих сигналов фиксированы, то изображение двумерной плотности распределения выходных величин R и S можно записать в виде:

$$F(p_1, p_2) = \frac{1}{(1+p_2)^{n-1}} \exp\left\{-\frac{p_2}{1+p_2}\left(\mathrm{H}_\text{ф} - \mathrm{H}_\text{с}\right)\right\} \times$$

$$\times \frac{1}{1+p_1+p_2} \exp\left\{-\frac{p_1+p_2}{1+p_1+p_2}\mathrm{H}_\text{с}\right\}, \qquad (9.5.1)$$

где $$\mathrm{H}_\text{ф} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}^{-1}\left(\overline{x_\nu} + \mathrm{i}\,\overline{y_\nu}\right)\left(\overline{x_\mu} - \mathrm{i}\,\overline{y_\mu}\right), \qquad \mathrm{H}_\text{с} = \frac{\left|\overline{X} + \mathrm{i}\,\overline{Y}\right|^2}{2\sigma^2}.$$

В новых обозначениях и условиях средние значения отсчётов, а также дисперсия σ^2 квадратур X и Y, будут иметь вид

$$\overline{x_\nu} + \mathrm{i}\,\overline{y_\nu} = \sum_{k=1}^{L} \sqrt{2q_k}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_k}\; z^*_{k\nu}\,, \qquad \sigma^2 = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a^{-1}_{\nu\mu}\, z^*_{\phi\nu}\, z_{\phi\mu}\,.$$

Выражение

$$\overline{X} + \mathrm{i}\,\overline{Y} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\sum_{\mu=1}^{n} a^{-1}_{\nu\mu}\, z_{\phi\mu} \right) \left(\overline{x_\nu} + \mathrm{i}\,\overline{y_\nu} \right)$$

после преобразований приводим к виду

$$\overline{X} + \mathrm{i}\,\overline{Y} = \sigma \sum_{k=1}^{L} \sqrt{2q_k}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_k}\; a_k\,, \qquad a_k = \frac{1}{\sigma} \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a^{-1}_{\nu\mu}\, z^*_{k\nu}\, z_{\phi\mu}\,.$$

Далее,

$$\mathrm{H_c} = \left| \sum_{k=1}^{L} a_k \sqrt{q_k}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_k} \right|^2, \qquad \mathrm{H_\phi} = \sum_{k=1}^{L}\sum_{l=1}^{L} \sqrt{q_k q_l}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi_k - \varphi_l)}\, \mathrm{H}_{kl}\,,$$

где

$$\mathrm{H}_{kl} = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a^{-1}_{\nu\mu}\, z^*_{k\nu}\, z_{l\mu}\,.$$

Величина $|a_k|^2$ совпадает с коэффициентом энергетических потерь в канале обработки сигнала η_c, когда на входе помимо шума присутствует только один k-ый сигнал. Диагональный элемент H_{kk} эрмитовой матрицы $\| \mathrm{H}_{kl} \|$ совпадает с коэффициентом "потерь" k-го сигнала в фоновом канале η_ϕ.

В выражениях для H_ϕ мнимые слагаемые взаимно сокращаются, поэтому H_ϕ — действительное число.

Теперь предположим, что все амплитуды и фазы сигналов являются независимыми случайными величинами, амплитуды флуктуируют по рэлеевскому закону, фазы — по равномерному закону. От случайных величин q_k и φ_k перейдём к новым переменным ξ_k и η_k по формулам $\xi_k = \sqrt{2\,q_k/\rho_k}\cdot\cos\varphi_k$, $\eta_k = -\sqrt{2\,q_k/\rho_k}\cdot\sin\varphi_k$ ($k = 1, 2, \ldots, L$), где ρ_k — среднее значение отношения сигнал/шум k-го сигнала. Все случайные переменные ξ_k и η_k являются взаимно независимыми нормальными случайными величинами с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

Заменяя $\sqrt{q_k}\cdot\exp(-\mathrm{i}\varphi_k)$ на $\sqrt{\rho_k/2}\,(\xi_k + \mathrm{i}\,\eta_k)$, получим

$$\mathrm{H_c} = \frac{1}{2}\left| \sum_{k=1}^{L} \sqrt{\rho_k}\cdot a_k (\xi_k + \mathrm{i}\,\eta_k) \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L}\sum_{l=1}^{L} \sqrt{\rho_k \rho_l}\cdot a_k a_l^* (\xi_k + \mathrm{i}\,\eta_k)(\xi_l - \mathrm{i}\,\eta_l)\,,$$

$$\mathrm{H}_{\phi} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\sum_{l=1}^{L}\sqrt{\rho_k \rho_l}\cdot \mathrm{H}_{kl}\left(\xi_k + \mathrm{i}\,\eta_k\right)\left(\xi_l - \mathrm{i}\,\eta_l\right).$$

Плотность распределения нормальных случайных величин запишем в виде

$$w(\xi_1, \ldots, \xi_L, \eta_1, \ldots, \eta_L) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^L}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\sum_{l=1}^{L}\delta_{kl}\left(\xi_k + \mathrm{i}\,\eta_k\right)\left(\xi_l - \mathrm{i}\,\eta_l\right)\right\}.$$

Теперь усреднение по случайным переменным изображения $F(p_1, p_2)$, определяемого формулой (1), сводится к вычислению интеграла от экспоненты, показатель которой содержит квадратичную форму. Выполняя это усреднение и некоторые дополнительные преобразования, получим изображение двумерной плотности распределения выходных величин при флуктуирующих сигналах:

$$F(p_1, p_2) = \frac{1}{(1+p_2)^{n-1}(1+p_1+p_2)\left(\prod_{k=1}^{L}\rho_k\right)\det \mathbf{C}},$$

где

$$\mathbf{C} = \mathbf{R} + \left(\frac{p_1+p_2}{1+p_1+p_2} - \frac{p_2}{1+p_2}\right)\cdot\left\|a_k\, a_l^*\right\| + \frac{p_2}{1+p_2}\left\|\mathrm{H}_{kl}\right\|,$$

$\mathbf{R}$ — диагональная матрица с элементами $1/\rho_1, 1/\rho_2, \ldots, 1/\rho_L$.

Из полученных формул видно, что выражение $F(p, -\alpha p)$ в общем случае можно представить в виде дробно-рациональной функции. Для нахождения полюсов функции и вычетов необходимо находить корни полинома степени $2L$. Случай $L = 1$ рассматривался в § 9.3, и для решения задачи там необходимо было находить корни квадратного уравнения.

Упростим задачу. Будем считать, что параметры первого сигнала совпадают с параметрами настройки схемы, т. е. $\tau_1 = \tau_{\phi}$, $\Omega_1 = \Omega_{\phi}$, $z_{1\nu} = z_{\phi\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). При сделанном допущении справедливы равенства $\sigma^2 = \mathrm{H}_{11}$ и $a_k a_l^* = \mathrm{H}_{k1}\mathrm{H}_{1l}/\mathrm{H}_{11}$, благодаря которым степень полинома в знаменателе дробно-рациональной функции уменьшается (из-за взаимного сокращения ряда членов в определителе). Так, при $L = 2$, получим

$$F(p, -\alpha p) = \frac{1}{\alpha_2(1-\alpha p)^{n-2}(p-p')(p-p'')},$$

где p' и p'' — корни квадратного уравнения $\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + 1 = 0$;

$$\alpha_2 = -\alpha(1-\alpha)(1+\rho_1\mathrm{H}_{11} + \rho_2\mathrm{H}_{22} + \rho_1\rho_2\Delta), \qquad \Delta = \mathrm{H}_{11}\mathrm{H}_{22} - \mathrm{H}_{12}\mathrm{H}_{21},$$

$$\alpha_1 = (1-\alpha)(1+\rho_1\mathrm{H}_{11}) - \alpha - \alpha\rho_2\mathrm{H}_{22} + \rho_2\mathrm{H}_{12}\mathrm{H}_{21}/\mathrm{H}_{11}.$$

Корни квадратного уравнения имеют разные знаки (полагаем $p' < 0$ и $p'' > 0$). Вероятность обнаружения полезного сигнала на фоне мешающего сигнала и гауссовского шума с неизвестной интенсивностью будет определяться формулой

$$D = \frac{1}{\alpha_2\, p'(p'' - p')(1 - \alpha\, p')^{n-2}} \ .$$

На рис. 9.4. представлен пример. Предполагалось, что полезный и мешающий сигнал представляют собой прямоугольные импульсы с фазовой манипуляцией 13-значным кодом Баркера. Мешающий сигнал отстроен от канала обнаружения на величину $2T_d$ ($\tau_2 - \tau_\phi = 2T_d$). Входным узкополосным фильтром являлся идеальный радиофильтр с полушириной полосы пропускания $F_\phi = F_к$. По оси абсцисс откладывалась в децибелах величина $\rho_п = \rho_1 / \left(1 + \rho_2 / n_d^2\right)$, которую можно назвать отношением сигнал/помеха.

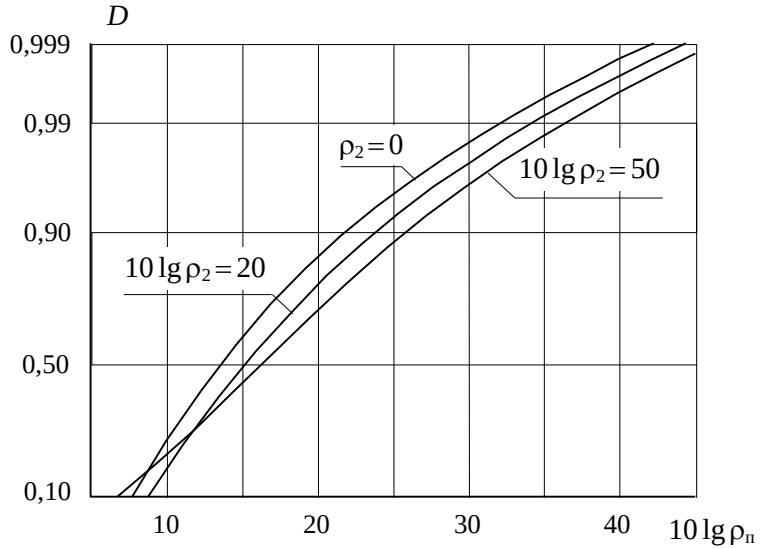


Рис. 9.4. Вероятность обнаружения полезного сигнала на фоне мешающего сигнала и гауссовского шума с неизвестной интенсивностью
($n_d = 13$, $n/n_d = 4$, $F = 10^{-6}$, $\Omega_\phi = \Omega_1 = \Omega_2 = 0$)

Представленные результаты показывают, что анализируемая схема обнаружения работоспособна и при наличии на входе приёмника мешающих сигналов. Обеспечивается надёжная защита от ложных превышений порога при воздействии мешающих сигналов по боковым лепесткам автокорреляционной функции. В случае если полезный сигнал превышает боковые лепестки мешающих сигналов, обеспечивается и обнаружение полезного сигнала.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ В СЕБЯ ФУНКЦИЮ $J_N(x, y)$

1. Определения и обозначения

Функция $J_N(x, y)$ определяется как

$$J_N(x, y) = \int_x^\infty \mathrm{e}^{-t-y}\left(\frac{t}{y}\right)^{(N-1)/2} I_{N-1}\left(2\sqrt{ty}\right)dt,$$

где $I_\nu(\cdot)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, x и y — вещественные неотрицательные переменные.

Следуя общепринятым обозначениям (см. [118]), вместо $J_1(x, y)$ будем записывать $J(x, y)$, т. е. $J(x, y) \equiv J_1(x, y)$.

При использовании приведенных ниже формул следует считать, что N — целое положительное число. Некоторые формулы могут быть обобщены на вещественные положительные N, но этот вопрос здесь не затрагивается.

В дальнейшем также полагается, что ν — целое, а α и β — вещественные и неотрицательные.

2. Вспомогательные соотношения

$$I_{-\nu}\left(2\sqrt{xy}\right) = I_\nu\left(2\sqrt{xy}\right). \tag{П1.2.1}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu/2} I_\nu\left(2\sqrt{xy}\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu+\mu}}{(\nu+\mu)!}\,\frac{y^\mu}{\mu!}. \tag{П1.2.2}$$

$$\mathrm{e}^{-x-y} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^{\nu/2} I_\nu\left(2\sqrt{xy}\right) = 1. \tag{П1.2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu/2} I_\nu\left(2\sqrt{xy}\right)\right\} = \left(\frac{x}{y}\right)^{(\nu-1)/2} I_{\nu-1}\left(2\sqrt{xy}\right). \tag{П1.2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu/2} I_\nu\left(2\sqrt{xy}\right)\right\} = \left(\frac{x}{y}\right)^{(\nu+1)/2} I_{\nu+1}\left(2\sqrt{xy}\right). \tag{П1.2.5}$$

3. Частные значения

$$J_N(0, y) = 1. \qquad (П1.3.1)$$

$$J_N(x, 0) = 1 - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{N+\nu}}{(N+\nu)!} e^{-x} = \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{x^{\nu}}{\nu!} e^{-x}. \qquad (П1.3.2)$$

$$\lim_{y\to\infty} J_N(x, y) = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} J_N(x, y) = 0. \qquad (П1.3.3)$$

$$J(x, x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2x} I_0(2x). \qquad (П1.3.4)$$

$$J_N(x, x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2x} I_0(2x) + e^{-2x} \sum_{\nu=1}^{N-1} I_{\nu}(2x). \qquad (П1.3.5)$$

4. Частное соотношение

$$J_N(x, y) + J_N(y, x) = 1 + e^{-x-y} \sum_{\nu=-(N-1)}^{N-1} \left(\frac{x}{y}\right)^{\nu/2} I_{\nu}\left(2\sqrt{xy}\right). \qquad (П1.4.1)$$

5. Дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial J_N(x,y)}{\partial x} = -e^{-x-y} \left(\frac{x}{y}\right)^{(N-1)/2} I_{N-1}\left(2\sqrt{xy}\right). \qquad (П1.5.1)$$

$$\frac{\partial J_N(x,y)}{\partial y} = e^{-x-y} \left(\frac{x}{y}\right)^{N/2} I_N\left(2\sqrt{xy}\right). \qquad (П1.5.2)$$

$$\frac{\partial^2 J_N(x,y)}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{N-1}{x}\right) \frac{\partial J_N(x,y)}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial J_N(x,y)}{\partial y} = 0. \qquad (П1.5.3)$$

$$\frac{\partial^2 J_N(x,y)}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{N}{y}\right) \frac{\partial J_N(x,y)}{\partial y} + \frac{x}{y} \frac{\partial J_N(x,y)}{\partial x} = 0. \qquad (П1.5.4)$$

$$\frac{\partial^2 J_N(x,y)}{\partial y^2} + \frac{N}{y} \frac{\partial J_N(x,y)}{\partial y} + \frac{N-1}{y} \frac{\partial J_N(x,y)}{\partial x} - \frac{x}{y} \frac{\partial^2 J_N(x,y)}{\partial x^2} = 0. \qquad (П1.5.5)$$

$$\frac{\partial^2 J_N(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial J_N(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial J_N(x,y)}{\partial y} = 0. \qquad (П1.5.6)$$

6. Разложения в ряд и рекуррентное соотношение

$$J_N(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y} \sum_{\nu=-(N-1)}^{\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^{\nu/2} I_\nu\left(2\sqrt{xy}\right). \qquad (\Pi 1.6.1)$$

$$1 - J_N(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y} \sum_{\nu=N}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^{\nu/2} I_\nu\left(2\sqrt{xy}\right). \qquad (\Pi 1.6.2)$$

$$J_{N+1}(x,y) = J_N(x,y) + \mathrm{e}^{-x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^{N/2} I_N\left(2\sqrt{xy}\right). \qquad (\Pi 1.6.3)$$

$$J_N(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{y^\nu}{\nu!} \sum_{\mu=0}^{\nu+N-1} \frac{x^\mu}{\mu!} \right). \qquad (\Pi 1.6.4)$$

$$1 - J_N(x,y) = \mathrm{e}^{-y} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{y^\nu}{\nu!} \left(1 - \mathrm{e}^{-x} \sum_{\mu=0}^{\nu+N-1} \frac{x^\mu}{\mu!} \right) \right]. \qquad (\Pi 1.6.5)$$

$$J_N(x,y) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{x^\mu}{\mu!} + \mathrm{e}^{-x} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\frac{x^{\mu+N}}{(\mu+N)!} \left(1 - \mathrm{e}^{-y} \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{y^\nu}{\nu!} \right) \right]. \qquad (\Pi 1.6.6)$$

$$1 - J_N(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{x^{\mu+N}}{(\mu+N)!} \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{y^\nu}{\nu!} \right). \qquad (\Pi 1.6.7)$$

7. Преобразование Лапласа

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \mathrm{e}^{-x-y} \left(\frac{x}{y}\right)^{(N-1)/2} I_{N-1}\left(2\sqrt{xy}\right) dx = \frac{1}{(1+p)^N} \exp\left\{ -\frac{py}{1+p} \right\}. \qquad (\Pi 1.7.1)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \left\{ 1 - J_N(x,y) \right\} dx = \frac{1}{p(1+p)^N} \exp\left\{ -\frac{py}{1+p} \right\}. \qquad (\Pi 1.7.2)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-py} \mathrm{e}^{-x-y} \left(\frac{x}{y}\right)^{(N-1)/2} I_{N-1}\left(2\sqrt{xy}\right) dy = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+p)} \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} {}_1F_1\left(1; N; \frac{x}{1+p}\right) =$$

$$= (1+p)^{N-2}\,\mathrm{e}^{-x}\left\{\mathrm{e}^{\frac{x}{1+p}} - \sum_{\nu=0}^{N-2}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{x}{1+p}\right)^{\nu}\right\}, \qquad (\text{П1.7.3})$$

где ${}_1F_1(\cdots)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-py}\,J_N(x,y)\,dy = \frac{J_N(x,0)}{p} + \frac{1}{p(1+p)}\,\mathrm{e}^{-x}\,\frac{x^N}{N!}\;{}_1F_1\left(1;N+1;\frac{x}{1+p}\right) =$$

$$= \frac{J_N(x,0)}{p} + \frac{(1+p)^{N-1}}{p}\,\mathrm{e}^{-x}\left\{\mathrm{e}^{\frac{x}{1+p}} - \sum_{\nu=0}^{N-1}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{x}{1+p}\right)^{\nu}\right\}. \qquad (\text{П1.7.4})$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-py}\,J(x,y)\,dy = \frac{1}{p}\exp\left\{-\frac{px}{1+p}\right\}. \qquad (\text{П1.7.5})$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-py}\,J(\alpha y,y)\,dy = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p}\,\frac{p-(\alpha-1)}{\sqrt{(p+\alpha+1)^2-4\alpha}}. \qquad (\text{П1.7.6})$$

Пусть

$$R_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{p(p+4)}},\quad R_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{p(p+4)}+p+2},\quad R_3 \equiv \frac{1}{\sqrt{p(p+4)}+p},$$

$$R_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{p(p+4)}-p}, \qquad E \equiv \exp\left\{-\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{p(p+4)}-p\right)\right\}.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}\left\{\mathrm{e}^{-2t-\alpha}\,I_0\left(2\sqrt{t(t+\alpha)}\right)\right\}dt = R_1E. \qquad (\text{П1.7.7})$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}\left\{\mathrm{e}^{-2t-\alpha}\sqrt{\frac{t}{t+\alpha}}\cdot I_1\left(2\sqrt{t(t+\alpha)}\right)\right\}dt =$$

$$= 2R_1R_2E = \left[\left(1+\frac{p}{2}\right)R_1 - \frac{1}{2}\right]E. \qquad (\text{П1.7.8})$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-px}\, J(x, \alpha + x)\, dx = \frac{1}{p} - 2R_1R_3E = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\left(R_1 - \frac{1}{p}\right)E\,. \qquad (\Pi 1.7.9)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-py}\, J(\alpha + y, y)\, dy = R_1R_4E = \frac{1}{2}\left(R_1 + \frac{1}{p}\right)E\,. \qquad (\Pi 1.7.10)$$

8. Интегральные представления и асимптотические разложения

$$J_N(x, y) = \begin{cases} \left(\sqrt{x/y}\right)^{N-1} \mathrm{e}^{-x-y}\, I(x, y) & \text{если } y < x, \\ 1 + \left(\sqrt{x/y}\right)^{N-1} \mathrm{e}^{-x-y}\, I(x, y) & \text{если } y > x, \end{cases} \qquad (\Pi 1.8.1)$$

где

$$I(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(N-1)\theta - \sqrt{y/x}\cos N\theta}{1 - 2\sqrt{y/x}\cos\theta + y/x}\, \mathrm{e}^{2\sqrt{xy}\cos\theta}\, d\theta\,,$$

причём, если $N = 1$, то

$$I(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1 - \sqrt{y/x}\cos\theta}{1 - 2\sqrt{y/x}\cos\theta + y/x}\, \mathrm{e}^{2\sqrt{xy}\cos\theta}\, d\theta\, =$$

$$= \frac{1}{2} I_0\left(2\sqrt{xy}\right) + \frac{1 - y/x}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{xy}\cos\theta}}{1 - 2\sqrt{y/x}\cos\theta + y/x}\, d\theta\,.$$

$$J(x, y) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, \frac{1}{\sqrt{t}}\, J_0\left(2\sqrt{yt}\right) J_1\left(2\sqrt{xt}\right) dt\,, \qquad (\Pi 1.8.2)$$

где $J_\nu(\cdot)$ — функции Бесселя действительного аргумента [110, 115, 123].

$$J(\alpha y, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(\alpha+1)y}\, I_0(2\sqrt{\alpha}\, y) - \frac{\alpha - 1}{2}\int_0^y \mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}\, I_0(2\sqrt{\alpha}\, t)\, dt\,. \qquad (\Pi 1.8.3)$$

Пусть $\xi = N - 1/2$,

$$Q_1(a) = a/2\,,$$
$$Q_2(a) = -5a^2 + 3a\,,$$
$$Q_3(a) = (210a^3 - 287a^2 + 135a)/2\,,$$
$$Q_4(a) = -4(945a^4 - 1876a^3 + 2106a^2 - 945a)\,.$$

Если $J_N(x, y) = 1/2$ и $y >> 1$, то

$$x \approx y + \xi + \frac{Q_1(\xi)}{3!y} + \frac{Q_2(\xi)}{5!y^2} + \frac{Q_3(\xi)}{7!y^3} + \frac{Q_4(\xi)}{9!y^4} + \cdots . \qquad (\text{П1.8.4})$$

Если $J_N(x, y) = 1/2$ и $x >> 1$, то

$$y \approx x - \xi + \frac{Q_1(-\xi)}{3!x} + \frac{Q_2(-\xi)}{5!x^2} + \frac{Q_3(-\xi)}{7!x^3} + \frac{Q_4(-\xi)}{9!x^4} + \cdots . \qquad (\text{П1.8.5})$$

Пусть $\xi = N - 1/2$, $J_N(x, y) = D$, χ — решение уравнения

$$\int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt = D ,$$

$$R_1(b) = b ,$$

$$R_2(b) = -(b^2 - 1) ,$$

$$R_3(a,b) = b[2(b^2 - 1) - 3a] ,$$

$$R_4(a,b) = (-6b^2 + 20a)(b^2 - 1) + 12 .$$

Тогда, если $y >> 1$, то

$$x \approx y + \chi\sqrt{2y} + \frac{\chi^2}{2} +$$

$$+ \xi\left\{1 + \frac{R_1(\chi)}{2!(2y)^{1/2}} + \frac{R_2(\chi)}{3!(2y)} + \frac{R_3(\xi,\chi)}{4!(2y)^{3/2}} + \frac{R_4(\xi,\chi)}{5!(2y)^2} + \cdots\right\}. \qquad (\text{П1.8.6})$$

Если $x >> 1$, то

$$y \approx x - \chi\sqrt{2x} + \frac{(-\chi)^2}{2} -$$

$$- \xi\left\{1 + \frac{R_1(-\chi)}{2!(2x)^{1/2}} + \frac{R_2(-\chi)}{3!(2x)} + \frac{R_3(-\xi,-\chi)}{4!(2x)^{3/2}} + \frac{R_4(-\xi,-\chi)}{5!(2x)^2} + \cdots\right\}. \qquad (\text{П1.8.7})$$

Некоторые интегральные представления $J(x, y)$, а также интегралы, которые можно выразить через $J(x, y)$, дополнительно можно найти в [123]. Там же представлена обширная сводка асимптотических разложений $J(x, y)$.

9. Интегралы

$$\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,J(x,\beta t)\,dt=\frac{1}{\alpha^2}\left[1+\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\,x\right]\exp\left\{-\frac{\alpha x}{\alpha+\beta}\right\}. \qquad (\text{П1.9.1})$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\,I_0\left(2\sqrt{\beta t}\right)J(x,t)\,dt=\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{\beta/\alpha}\,J\left(\frac{x\alpha}{1+\alpha},\frac{\beta}{\alpha(1+\alpha)}\right). \qquad (\text{П1.9.2})$$

Пусть $\quad r^2=\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\,\dfrac{\beta}{1+\beta}, \qquad X_1=\dfrac{x_1}{1+\alpha}, \qquad X_2=\dfrac{x_2}{1+\beta},$

$$X'_\nu=\frac{X_\nu}{(1-r^2)}, \qquad X''_\nu=r^2X'_\nu; \qquad \nu=1,\,2.$$

Тогда

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,J(x_1,\alpha t)\,J(x_2,\beta t)\,dt=\mathrm{e}^{-X_1}\left\{1-J(X''_1,X'_2)\right\}+\mathrm{e}^{-X_2}\,J(X'_1,X''_2)\,. \qquad (\text{П1.9.3})$$

$$\alpha\int_y^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\,J(x,t)\,dt=$$

$$=\mathrm{e}^{-\alpha y}\,J(x,y)+\left[1-J\left(\frac{x}{1+\alpha},y(1+\alpha)\right)\right]\exp\left\{-\frac{\alpha x}{1+\alpha}\right\}. \qquad (\text{П1.9.4})$$

$$\int_y^\infty \mathrm{e}^{-t}\,J(\alpha t,\beta t)\,dt=$$

$$=\mathrm{e}^{-y}\,J(\alpha y,\beta y)+c_1J(ay,by)-c_2\,\mathrm{e}^{-(1+\alpha+\beta)y}\,I_0\left(2\sqrt{\alpha\beta}\,y\right), \qquad (\text{П1.9.5})$$

где

$$a=\frac{(\gamma_1+\gamma_2)^2}{4}, \qquad b=\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{4}, \qquad \gamma_1=\sqrt{1+\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}\,,$$

$$\gamma_2=\sqrt{1+\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}}\,, \qquad c_1=\frac{1+\beta-\alpha}{a-b}, \qquad c_2=\frac{a-\alpha}{a-b},$$

причём $ab=\alpha\beta$, $a+b=1+\alpha+\beta$.

$$\int_0^y J(x,t)\,dt=$$

$$=(y-x)\,J(x,y)+x\,\mathrm{e}^{-x-y}\,I_0\left(2\sqrt{xy}\,\right)+\sqrt{xy}\,\mathrm{e}^{-x-y}\,I_1\left(2\sqrt{xy}\right). \qquad (\text{П1.9.6})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ТАБЛИЦА ПОРОГОВ. НЕКОГЕРЕНТНОЕ НАКОПЛЕНИЕ ПОСЛЕ КВАДРАТИЧНОГО ДЕТЕКТОРА

N \ F	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
1	2,3026	4,6052	6,9078	9,2103	11,5129	13,8155
2	3,8897	6,6384	9,2334	11,7564	14,2366	16,6884
3	5,3223	8,4059	11,2289	13,9282	16,5535	19,1292
4	6,6808	10,0451	13,0622	15,9138	18,6658	21,3505
5	7,9936	11,6046	14,7941	17,7820	20,6481	23,4315
6	9,2747	13,1085	16,4547	19,5672	22,5381	25,4126
7	10,5321	14,5706	18,0616	21,2896	24,3580	27,3177
8	11,7709	16,0000	19,6262	22,9624	26,1225	29,1622
9	12,9947	17,4027	21,1562	24,5947	27,8415	30,9571
10	14,2060	18,7831	22,6574	26,1930	29,5223	32,7103
11	15,4066	20,1447	24,1340	27,7623	31,1705	34,4279
12	16,5981	21,4899	25,5893	29,3065	32,7904	36,1144
13	17,7816	22,8208	27,0260	30,8286	34,3855	37,7737
14	18,9580	24,1391	28,4461	32,3312	35,9585	39,4087
15	20,1280	25,4461	29,8515	33,8163	37,5117	41,0221
16	21,2924	26,7429	31,2436	35,2856	39,0471	42,6158
17	22,4516	28,0305	32,6236	36,7406	40,5663	44,1916
18	23,6061	29,3096	33,9926	38,1825	42,0706	45,7512
19	24,7563	30,5810	35,3514	39,6124	43,5614	47,2958
20	25,9025	31,8454	36,7010	41,0311	45,0395	48,8265
21	27,0451	33,1031	38,0419	42,4397	46,5061	50,3444
22	28,1843	34,3548	39,3748	43,8386	47,9618	51,8503
23	29,3203	35,6007	40,7002	45,2287	49,4074	53,3451
24	30,4533	36,8413	42,0186	46,6105	50,8436	54,8295
25	31,5836	38,0769	43,3304	47,9844	52,2708	56,3040
26	32,7112	39,3079	44,6361	49,3509	53,6898	57,7694
27	33,8364	40,5344	45,9359	50,7106	55,1008	59,2260
28	34,9593	41,7567	47,2303	52,0636	56,5044	60,6744
29	36,0799	42,9751	48,5194	53,4105	57,9009	62,1150
30	37,1985	44,1897	49,8036	54,7515	59,2907	63,5482
31	38,3151	45,4008	51,0831	56,0868	60,6742	64,9743
32	39,4298	46,6084	52,3582	57,4169	62,0516	66,3937
33	40,5427	47,8129	53,6289	58,7418	63,4232	67,8068
34	41,6540	49,0142	54,8956	60,0619	64,7892	69,2137
35	42,7635	50,2126	56,1585	61,3773	66,1500	70,6147
36	43,8715	51,4082	57,4176	62,6883	67,5057	72,0102
37	44,9780	52,6010	58,6731	63,9950	68,8566	73,4002
38	46,0831	53,7913	59,9252	65,2977	70,2027	74,7852
39	47,1868	54,9790	61,1740	66,5964	71,5444	76,1651
40	48,2891	56,1644	62,4196	67,8913	72,8818	77,5403

N \ F	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
41	49,3902	57,3474	63,6622	69,1825	74,2151	78,9108
42	50,4900	58,5283	64,9018	70,4703	75,5443	80,2770
43	51,5886	59,7069	66,1387	71,7546	76,8697	81,6388
44	52,6861	60,8836	67,3727	73,0357	78,1913	82,9965
45	53,7825	62,0582	68,6042	74,3136	79,5094	84,3503
46	54,8778	63,2308	69,8331	75,5885	80,8239	85,7001
47	55,9721	64,4016	71,0595	76,8604	82,1351	87,0463
48	57,0654	65,5706	72,2835	78,1295	83,4430	88,3888
49	58,1576	66,7378	73,5052	79,3957	84,7478	89,7278
50	59,2490	67,9034	74,7246	80,6593	86,0495	91,0634
51	60,3394	69,0672	75,9419	81,9203	87,3482	92,3957
52	61,4290	70,2295	77,1570	83,1787	88,6440	93,7248
53	62,5177	71,3902	78,3701	84,4347	89,9370	95,0508
54	63,6055	72,5494	79,5812	85,6883	91,2273	96,3737
55	64,6926	73,7072	80,7904	86,9395	92,5149	97,6937
56	65,7788	74,8635	81,9976	88,1885	93,7999	99,0108
57	66,8643	76,0184	83,2030	89,4353	95,0824	100,3252
58	67,9490	77,1719	84,4067	90,6799	96,3625	101,6368
59	69,0330	78,3241	85,6085	91,9225	97,6402	102,9458
60	70,1163	79,4751	86,8087	93,1630	98,9155	104,2522
61	71,1989	80,6248	88,0072	94,4015	100,1886	105,5561
62	72,2808	81,7732	89,2041	95,6381	101,4595	106,8575
63	73,3620	82,9205	90,3994	96,8728	102,7282	108,1565
64	74,4426	84,0666	91,5932	98,1056	103,9948	109,4532
65	75,5226	85,2116	92,7855	99,3366	105,2593	110,7476
66	76,6020	86,3554	93,9763	100,5659	106,5219	112,0397
67	77,6807	87,4982	95,1656	101,7935	107,7824	113,3297
68	78,7589	88,6399	96,3536	103,0193	109,0410	114,6175
69	79,8365	89,7805	97,5402	104,2435	110,2978	115,9033
70	80,9135	90,9202	98,7254	105,4661	111,5527	117,1870
71	81,9900	92,0588	99,9093	106,6871	112,8058	118,4687
72	83,0659	93,1965	101,0919	107,9066	114,0571	119,7484
73	84,1413	94,3332	102,2733	109,1246	115,3067	121,0262
74	85,2162	95,4690	103,4534	110,3410	116,5546	122,3022
75	86,2906	96,6038	104,6323	111,5561	117,8009	123,5763
76	87,3645	97,7378	105,8100	112,7696	119,0455	124,8486
77	88,4379	98,8709	106,9866	113,9818	120,2885	126,1191
78	89,5108	100,0031	108,1620	115,1927	121,5300	127,3879
79	90,5833	101,1345	109,3363	116,4022	122,7699	128,6549
80	91,6553	102,2650	110,5095	117,6103	124,0084	129,9203
81	92,7268	103,3948	111,6816	118,8172	125,2453	131,1841
82	93,7980	104,5237	112,8527	120,0228	126,4808	132,4462
83	94,8686	105,6519	114,0227	121,2272	127,7149	133,7068
84	95,9389	106,7792	115,1917	122,4303	128,9475	134,9658
85	97,0087	107,9059	116,3597	123,6323	130,1788	136,2233

N \ F	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
86	98,0781	109,0317	117,5267	124,8330	131,4088	137,4793
87	99,1471	110,1569	118,6927	126,0326	132,6374	138,7338
88	100,2158	111,2813	119,8578	127,2311	133,8647	139,9869
89	101,2840	112,4050	121,0220	128,4284	135,0908	141,2385
90	102,3518	113,5281	122,1852	129,6246	136,3156	142,4888
91	103,4193	114,6504	123,3476	130,8198	137,5391	143,7377
92	104,4864	115,7721	124,5090	132,0139	138,7614	144,9852
93	105,5531	116,8931	125,6696	133,2069	139,9825	146,2314
94	106,6195	118,0135	126,8293	134,3989	141,2025	147,4762
95	107,6855	119,1332	127,9882	135,5899	142,4213	148,7198
96	108,7512	120,2523	129,1462	136,7799	143,6389	149,9621
97	109,8165	121,3708	130,3034	137,9689	144,8554	151,2032
98	110,8815	122,4886	131,4598	139,1569	146,0708	152,4430
99	111,9462	123,6059	132,6154	140,3440	147,2851	153,6816
100	113,0105	124,7226	133,7703	141,5301	148,4984	154,9190
101	114,0745	125,8387	134,9243	142,7153	149,7106	156,1553
102	115,1382	126,9542	136,0776	143,8996	150,9217	157,3904
103	116,2016	128,0691	137,2302	145,0830	152,1318	158,6243
104	117,2647	129,1835	138,3820	146,2656	153,3409	159,8571
105	118,3275	130,2974	139,5330	147,4472	154,5490	161,0888
106	119,3899	131,4107	140,6834	148,6280	155,7561	162,3195
107	120,4521	132,5234	141,8331	149,8079	156,9623	163,5490
108	121,5140	133,6357	142,9820	150,9870	158,1674	164,7775
109	122,5756	134,7474	144,1303	152,1653	159,3717	166,0049
110	123,6369	135,8586	145,2779	153,3427	160,5750	167,2313
111	124,6980	136,9693	146,4248	154,5194	161,7774	168,4566
112	125,7587	138,0795	147,5711	155,6952	162,9789	169,6810
113	126,8192	139,1893	148,7167	156,8703	164,1795	170,9044
114	127,8794	140,2985	149,8617	158,0446	165,3792	172,1268
115	128,9394	141,4072	151,0060	159,2182	166,5780	173,3482
116	129,9991	142,5155	152,1497	160,3910	167,7760	174,5686
117	131,0586	143,6233	153,2928	161,5630	168,9731	175,7882
118	132,1177	144,7307	154,4353	162,7344	170,1694	177,0067
119	133,1767	145,8376	155,5772	163,9050	171,3649	178,2244
120	134,2354	146,9441	156,7184	165,0748	172,5595	179,4412
121	135,2938	148,0501	157,8591	166,2440	173,7534	180,6570
122	136,3520	149,1556	158,9993	167,4125	174,9464	181,8720
123	137,4100	150,2608	160,1388	168,5803	176,1387	183,0861
124	138,4677	151,3655	161,2778	169,7474	177,3302	184,2994
125	139,5252	152,4698	162,4162	170,9139	178,5209	185,5118
126	140,5825	153,5737	163,5541	172,0797	179,7109	186,7233
127	141,6395	154,6771	164,6914	173,2448	180,9001	187,9340
128	142,6963	155,7802	165,8282	174,4093	182,0886	189,1439
129	143,7529	156,8828	166,9644	175,5731	183,2763	190,3530
130	144,8093	157,9851	168,1002	176,7363	184,4633	191,5612

N \ F	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
131	145,8655	159,0869	169,2354	177,8989	185,6496	192,7687
132	146,9214	160,1884	170,3701	179,0609	186,8352	193,9754
133	147,9771	161,2895	171,5042	180,2222	188,0201	195,1813
134	149,0326	162,3902	172,6379	181,3830	189,2043	196,3865
135	150,0880	163,4906	173,7711	182,5431	190,3878	197,5908
136	151,1431	164,5905	174,9038	183,7027	191,5706	198,7945
137	152,1980	165,6901	176,0360	184,8617	192,7528	199,9973
138	153,2527	166,7894	177,1677	186,0201	193,9343	201,1995
139	154,3072	167,8882	178,2990	187,1779	195,1152	202,4009
140	155,3615	168,9868	179,4297	188,3352	196,2954	203,6016
141	156,4156	170,0849	180,5600	189,4919	197,4750	204,8016
142	157,4695	171,1827	181,6899	190,6480	198,6539	206,0009
143	158,5233	172,2802	182,8193	191,8036	199,8322	207,1995
144	159,5768	173,3774	183,9482	192,9587	201,0099	208,3974
145	160,6302	174,4742	185,0767	194,1132	202,1870	209,5946
146	161,6834	175,5706	186,2048	195,2672	203,3634	210,7911
147	162,7364	176,6668	187,3324	196,4207	204,5393	211,9870
148	163,7892	177,7626	188,4595	197,5736	205,7146	213,1822
149	164,8418	178,8580	189,5863	198,7260	206,8893	214,3768
150	165,8943	179,9532	190,7126	199,8780	208,0634	215,5707

N \ F	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}
1	16,1181	18,4207	20,7233	23,0259	25,3284	27,6310
2	19,1198	21,5358	23,9397	26,3340	28,7203	31,0999
3	21,6689	24,1813	26,6723	29,1459	31,6052	34,0524
4	23,9862	26,5847	29,1538	31,6990	34,2243	36,7330
5	26,1548	28,8320	31,4727	34,0838	36,6702	39,2358
6	28,2168	30,9671	33,6746	36,3472	38,9907	41,6097
7	30,1976	33,0165	35,7867	38,5173	41,2148	43,8842
8	32,1137	34,9974	37,8271	40,6126	43,3613	46,0788
9	33,9766	36,9219	39,8083	42,6463	45,4439	48,2073
10	35,7947	38,7990	41,7396	44,6279	47,4725	50,2799
11	37,5744	40,6353	43,6280	46,5646	49,4544	52,3043
12	39,3207	42,4362	45,4790	48,4623	51,3957	54,2867
13	41,0377	44,2058	47,2972	50,3255	53,3012	56,2318
14	42,7286	45,9476	49,0859	52,1581	55,1746	58,1439
15	44,3960	47,6644	50,8484	53,9629	57,0193	60,0260
16	46,0422	49,3587	52,5870	55,7428	58,8379	61,8811
17	47,6692	51,0323	54,3038	57,4999	60,6327	63,7116
18	49,2785	52,6872	56,0008	59,2362	62,4058	65,5194
19	50,8717	54,3248	57,6795	60,9532	64,1588	67,3064
20	52,4498	55,9464	59,3412	62,6524	65,8933	69,0740

N \ F	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}
21	54,0141	57,5531	60,9873	64,3352	67,6105	70,8238
22	55,5654	59,1460	62,6187	66,0025	69,3116	72,5569
23	57,1047	60,7260	64,2365	67,6555	70,9978	74,2743
24	58,6326	62,2939	65,8414	69,2950	72,6698	75,9771
25	60,1499	63,8505	67,4343	70,9219	74,3286	77,6661
26	61,6572	65,3963	69,0158	72,5368	75,9749	79,3421
27	63,1551	66,9320	70,5867	74,1405	77,6094	81,0058
28	64,6441	68,4582	72,1474	75,7334	79,2328	82,6579
29	66,1246	69,9753	73,6984	77,3163	80,8455	84,2989
30	67,5970	71,4838	75,2404	78,8895	82,4482	85,9295
31	69,0618	72,9841	76,7736	80,4536	84,0413	87,5501
32	70,5193	74,4766	78,2986	82,0090	85,6253	89,1611
33	71,9699	75,9616	79,8157	83,5560	87,2005	90,7631
34	73,4138	77,4396	81,3252	85,0950	88,7674	92,3564
35	74,8513	78,9107	82,8274	86,6265	90,3264	93,9413
36	76,2828	80,3753	84,3228	88,1506	91,8776	95,5183
37	77,7084	81,8336	85,8114	89,6677	93,4215	97,0876
38	79,1284	83,2859	87,2937	91,1781	94,9584	98,6495
39	80,5431	84,7324	88,7699	92,6820	96,4884	100,2043
40	81,9525	86,1733	90,2401	94,1796	98,0119	101,7523
41	83,3569	87,6089	91,7046	95,6713	99,5291	103,2938
42	84,7565	89,0393	93,1636	97,1571	101,0403	104,8289
43	86,1515	90,4647	94,6173	98,6374	102,5455	106,3579
44	87,5419	91,8853	96,0659	100,1122	104,0451	107,8809
45	88,9281	93,3012	97,5096	101,5818	105,5393	109,3983
46	90,3100	94,7126	98,9484	103,0464	107,0281	110,9101
47	91,6878	96,1197	100,3826	104,5060	108,5117	112,4165
48	93,0617	97,5225	101,8123	105,9609	109,9904	113,9178
49	94,4318	98,9212	103,2377	107,4113	111,4643	115,4140
50	95,7982	100,3160	104,6588	108,8571	112,9335	116,9053
51	97,1610	101,7068	106,0758	110,2986	114,3981	118,3919
52	98,5204	103,0940	107,4888	111,7359	115,8583	119,8738
53	99,8763	104,4775	108,8980	113,1691	117,3143	121,3513
54	101,2289	105,8574	110,3034	114,5984	118,7660	122,8244
55	102,5783	107,2339	111,7051	116,0238	120,2137	124,2933
56	103,9246	108,6071	113,1033	117,4454	121,6575	125,7580
57	105,2679	109,9770	114,4979	118,8633	123,0973	127,2187
58	106,6082	111,3437	115,8892	120,2777	124,5335	128,6756
59	107,9456	112,7073	117,2772	121,6885	125,9660	130,1285
60	109,2802	114,0679	118,6620	123,0960	127,3949	131,5778
61	110,6120	115,4256	120,0437	124,5002	128,8203	133,0234
62	111,9412	116,7803	121,4223	125,9011	130,2424	134,4655
63	113,2678	118,1323	122,7979	127,2989	131,6611	135,9041
64	114,5918	119,4815	124,1705	128,6936	133,0766	137,3394
65	115,9134	120,8280	125,5404	130,0853	134,4889	138,7713

N \ F	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}
66	117,2325	122,1720	126,9074	131,4741	135,8982	140,2000
67	118,5492	123,5133	128,2717	132,8599	137,3044	141,6255
68	119,8636	124,8522	129,6334	134,2430	138,7076	143,0480
69	121,1757	126,1886	130,9924	135,6233	140,1080	144,4674
70	122,4855	127,5226	132,3489	137,0009	141,5055	145,8838
71	123,7932	128,8543	133,7029	138,3758	142,9003	147,2974
72	125,0988	130,1837	135,0545	139,7482	144,2923	148,7081
73	126,4023	131,5108	136,4036	141,1180	145,6817	150,1161
74	127,7037	132,8357	137,7504	142,4854	147,0685	151,5213
75	129,0031	134,1585	139,0950	143,8503	148,4527	152,9238
76	130,3006	135,4791	140,4372	145,2129	149,8345	154,3238
77	131,5961	136,7977	141,7772	146,5731	151,2137	155,7211
78	132,8897	138,1142	143,1151	147,9310	152,5906	157,1160
79	134,1815	139,4287	144,4509	149,2867	153,9651	158,5084
80	135,4714	140,7413	145,7845	150,6401	155,3372	159,8983
81	136,7596	142,0520	147,1161	151,9914	156,7071	161,2859
82	138,0459	143,3607	148,4457	153,3406	158,0748	162,6711
83	139,3306	144,6676	149,7733	154,6876	159,4403	164,0540
84	140,6136	145,9727	151,0990	156,0327	160,8036	165,4347
85	141,8949	147,2760	152,4228	157,3757	162,1648	166,8132
86	143,1746	148,5775	153,7447	158,7167	163,5239	168,1895
87	144,4527	149,8773	155,0647	160,0558	164,8809	169,5636
88	145,7292	151,1754	156,3830	161,3929	166,2360	170,9357
89	147,0041	152,4719	157,6995	162,7282	167,5890	172,3056
90	148,2775	153,7667	159,0142	164,0617	168,9402	173,6736
91	149,5494	155,0598	160,3272	165,3933	170,2894	175,0395
92	150,8199	156,3514	161,6385	166,7231	171,6367	176,4035
93	152,0889	157,6415	162,9481	168,0512	172,9822	177,7655
94	153,3564	158,9299	164,2561	169,3775	174,3259	179,1256
95	154,6226	160,2169	165,5625	170,7021	175,6677	180,4839
96	155,8873	161,5024	166,8673	172,0250	177,0078	181,8403
97	157,1507	162,7864	168,1705	173,3463	178,3462	183,1949
98	158,4128	164,0690	169,4722	174,6660	179,6828	184,5476
99	159,6735	165,3501	170,7724	175,9840	181,0178	185,8987
100	160,9329	166,6299	172,0710	177,3005	182,3511	187,2480
101	162,1911	167,9082	173,3682	178,6154	183,6827	188,5955
102	163,4480	169,1852	174,6640	179,9288	185,0128	189,9414
103	164,7036	170,4609	175,9583	181,2407	186,3412	191,2856
104	165,9580	171,7352	177,2512	182,5510	187,6681	192,6282
105	167,2112	173,0082	178,5428	183,8599	188,9935	193,9692
106	168,4632	174,2800	179,8329	185,1674	190,3173	195,3085
107	169,7141	175,5505	181,1217	186,4734	191,6396	196,6463
108	170,9637	176,8197	182,4092	187,7781	192,9604	197,9826
109	172,2122	178,0877	183,6954	189,0813	194,2798	199,3173
110	173,4596	179,3545	184,9802	190,3831	195,5977	200,6505

N \ F	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}
111	174,7059	180,6201	186,2638	191,6837	196,9142	201,9823
112	175,9511	181,8845	187,5461	192,9828	198,2294	203,3125
113	177,1952	183,1477	188,8272	194,2807	199,5431	204,6413
114	178,4382	184,4098	190,1071	195,5772	200,8554	205,9687
115	179,6802	185,6707	191,3857	196,8725	202,1664	207,2947
116	180,9211	186,9306	192,6632	198,1665	203,4761	208,6192
117	182,1610	188,1893	193,9394	199,4593	204,7845	209,9424
118	183,3999	189,4469	195,2145	200,7508	206,0916	211,2643
119	184,6378	190,7035	196,4885	202,0411	207,3973	212,5848
120	185,8747	191,9589	197,7613	203,3302	208,7019	213,9040
121	187,1106	193,2134	199,0330	204,6182	210,0051	215,2218
122	188,3456	194,4667	200,3036	205,9049	211,3072	216,5384
123	189,5796	195,7191	201,5731	207,1905	212,6080	217,8537
124	190,8126	196,9704	202,8415	208,4749	213,9076	219,1677
125	192,0447	198,2208	204,1088	209,7582	215,2060	220,4805
126	193,2759	199,4701	205,3751	211,0404	216,5033	221,7921
127	194,5062	200,7185	206,6403	212,3215	217,7993	223,1024
128	195,7356	201,9659	207,9045	213,6015	219,0943	224,4116
129	196,9641	203,2123	209,1677	214,8804	220,3881	225,7195
130	198,1917	204,4578	210,4298	216,1583	221,6807	227,0263
131	199,4185	205,7024	211,6910	217,4350	222,9723	228,3319
132	200,6444	206,9460	212,9512	218,7108	224,2628	229,6364
133	201,8695	208,1888	214,2104	219,9855	225,5522	230,9397
134	203,0937	209,4306	215,4687	221,2592	226,8405	232,2419
135	204,3170	210,6715	216,7260	222,5319	228,1277	233,5430
136	205,5396	211,9115	217,9823	223,8036	229,4139	234,8430
137	206,7614	213,1507	219,2377	225,0743	230,6991	236,1419
138	207,9823	214,3890	220,4922	226,3440	231,9832	237,4397
139	209,2025	215,6265	221,7458	227,6128	233,2663	238,7365
140	210,4218	216,8631	222,9985	228,8806	234,5484	240,0322
141	211,6404	218,0988	224,2503	230,1474	235,8296	241,3269
142	212,8582	219,3338	225,5012	231,4133	237,1097	242,6206
143	214,0753	220,5679	226,7512	232,6783	238,3888	243,9132
144	215,2916	221,8012	228,0004	233,9424	239,6670	245,2048
145	216,5072	223,0337	229,2487	235,2056	240,9443	246,4954
146	217,7220	224,2654	230,4962	236,4679	242,2206	247,7851
147	218,9361	225,4963	231,7428	237,7293	243,4960	249,0737
148	220,1494	226,7265	232,9886	238,9898	244,7704	250,3614
149	221,3621	227,9558	234,2336	240,2494	246,0439	251,6481
150	222,5740	229,1845	235,4777	241,5082	247,3165	252,9339

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ТАБЛИЦА ПОРОГОВ. НЕКОГЕРЕНТНОЕ НАКОПЛЕНИЕ ПОСЛЕ ЛИНЕЙНОГО ДЕТЕКТОРА

N \ F	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
1	2,1460	3,0349	3,7169	4,2919	4,7985	5,2565
2	3,7431	4,9316	5,8492	6,6275	7,3164	7,9415
3	5,2620	6,6747	7,7643	8,6898	9,5106	10,2568
4	6,7397	8,3398	9,5713	10,6173	11,5456	12,3902
5	8,1908	9,9552	11,3103	12,4606	13,4816	14,4109
6	9,6230	11,5356	13,0015	14,2450	15,3486	16,3531
7	11,0409	13,0894	14,6567	15,9853	17,1639	18,2368
8	12,4474	14,6223	16,2835	17,6908	18,9388	20,0747
9	13,8446	16,1381	17,8873	19,3680	20,6808	21,8754
10	15,2341	17,6396	19,4718	21,0218	22,3955	23,6453
11	16,6169	19,1288	21,0399	22,6555	24,0869	25,3890
12	17,9940	20,6076	22,5937	24,2720	25,7583	27,1101
13	19,3660	22,0770	24,1352	25,8734	27,4122	28,8114
14	20,7335	23,5383	25,6657	27,4613	29,0506	30,4954
15	22,0970	24,9922	27,1863	29,0374	30,6752	32,1637
16	23,4569	26,4395	28,6980	30,6027	32,2873	33,8181
17	24,8135	27,8808	30,2018	32,1582	33,8882	35,4599
18	26,1672	29,3167	31,6982	33,7048	35,4787	37,0901
19	27,5181	30,7475	33,1879	35,2433	37,0599	38,7098
20	28,8664	32,1737	34,6714	36,7743	38,6324	40,3197
21	30,2124	33,5956	36,1491	38,2984	40,1969	41,9206
22	31,5563	35,0135	37,6216	39,8160	41,7540	43,5132
23	32,8981	36,4277	39,0891	41,3276	43,3041	45,0980
24	34,2379	37,8385	40,5519	42,8336	44,8478	46,6756
25	35,5761	39,2460	42,0104	44,3343	46,3854	48,2464
26	36,9125	40,6504	43,4648	45,8301	47,9173	49,8107
27	38,2473	42,0520	44,9154	47,3212	49,4438	51,3691
28	39,5807	43,4508	46,3623	48,8079	50,9652	52,9217
29	40,9126	44,8470	47,8058	50,2905	52,4819	54,4690
30	42,2432	46,2408	49,2460	51,7691	53,9939	56,0112
31	43,5725	47,6323	50,6831	53,2439	55,5017	57,5485
32	44,9006	49,0215	52,1172	54,7152	57,0053	59,0813
33	46,2276	50,4086	53,5486	56,1830	58,5050	60,6096
34	47,5534	51,7938	54,9772	57,6476	60,0010	62,1338
35	48,8782	53,1769	56,4033	59,1091	61,4934	63,6539
36	50,2019	54,5583	57,8269	60,5677	62,9824	65,1702
37	51,5247	55,9379	59,2481	62,0233	64,4680	66,6829
38	52,8466	57,3157	60,6671	63,4763	65,9506	68,1920
39	54,1675	58,6920	62,0839	64,9266	67,4301	69,6978
40	55,4876	60,0666	63,4986	66,3744	68,9067	71,2002

N \ F	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
41	56,8069	61,4398	64,9113	67,8197	70,3805	72,6996
42	58,1254	62,8115	66,3221	69,2628	71,8516	74,1959
43	59,4431	64,1818	67,7310	70,7035	73,3201	75,6894
44	60,7600	65,5508	69,1381	72,1421	74,7862	77,1800
45	62,0763	66,9184	70,5434	73,5786	76,2497	78,6680
46	63,3918	68,2848	71,9470	75,0130	77,7110	80,1533
47	64,7067	69,6499	73,3491	76,4455	79,1700	81,6360
48	66,0209	71,0139	74,7495	77,8760	80,6267	83,1164
49	67,3345	72,3767	76,1484	79,3047	82,0814	84,5943
50	68,6474	73,7384	77,5459	80,7317	83,5340	86,0700
51	69,9598	75,0991	78,9419	82,1569	84,9846	87,5434
52	71,2716	76,4586	80,3365	83,5804	86,4333	89,0146
53	72,5829	77,8172	81,7297	85,0022	87,8801	90,4838
54	73,8936	79,1748	83,1216	86,4225	89,3250	91,9509
55	75,2037	80,5314	84,5123	87,8412	90,7682	93,4160
56	76,5134	81,8870	85,9017	89,2585	92,2097	94,8792
57	77,8226	83,2418	87,2898	90,6742	93,6494	96,3405
58	79,1312	84,5957	88,6768	92,0886	95,0876	97,8000
59	80,4394	85,9487	90,0627	93,5015	96,5241	99,2577
60	81,7472	87,3009	91,4474	94,9131	97,9591	100,7136
61	83,0544	88,6522	92,8311	96,3234	99,3925	102,1679
62	84,3613	90,0027	94,2136	97,7324	100,8245	103,6205
63	85,6677	91,3525	95,5952	99,1401	102,2551	105,0715
64	86,9737	92,7015	96,9757	100,5466	103,6842	106,5209
65	88,2793	94,0498	98,3552	101,9519	105,1120	107,9688
66	89,5844	95,3973	99,7337	103,3561	106,5384	109,4152
67	90,8892	96,7441	101,1113	104,7591	107,9635	110,8601
68	92,1936	98,0902	102,4880	106,1610	109,3873	112,3036
69	93,4977	99,4356	103,8638	107,5618	110,8098	113,7457
70	94,8013	100,7804	105,2387	108,9615	112,2312	115,1864
71	96,1046	102,1245	106,6127	110,3602	113,6513	116,6258
72	97,4076	103,4680	107,9858	111,7578	115,0703	118,0638
73	98,7102	104,8109	109,3582	113,1545	116,4881	119,5006
74	100,0125	106,1531	110,7297	114,5501	117,9047	120,9361
75	101,3144	107,4948	112,1004	115,9448	119,3203	122,3704
76	102,6161	108,8358	113,4704	117,3386	120,7348	123,8034
77	103,9174	110,1763	114,8395	118,7314	122,1482	125,2353
78	105,2184	111,5162	116,2080	120,1234	123,5606	126,6660
79	106,5191	112,8556	117,5757	121,5144	124,9719	128,0956
80	107,8194	114,1944	118,9426	122,9046	126,3823	129,5241
81	109,1195	115,5327	120,3089	124,2939	127,7917	130,9514
82	110,4194	116,8704	121,6744	125,6824	129,2001	132,3777
83	111,7189	118,2077	123,0393	127,0700	130,6075	133,8029
84	113,0181	119,5444	124,4035	128,4569	132,0141	135,2271
85	114,3171	120,8807	125,7671	129,8429	133,4197	136,6503

N \ F	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
86	115,6158	122,2165	127,1300	131,2282	134,8244	138,0724
87	116,9143	123,5517	128,4922	132,6127	136,2283	139,4936
88	118,2125	124,8866	129,8538	133,9965	137,6312	140,9138
89	119,5104	126,2209	131,2149	135,3795	139,0334	142,3331
90	120,8081	127,5548	132,5753	136,7617	140,4347	143,7514
91	122,1055	128,8883	133,9351	138,1433	141,8351	145,1688
92	123,4027	130,2213	135,2943	139,5242	143,2348	146,5854
93	124,6997	131,5538	136,6530	140,9043	144,6336	148,0010
94	125,9964	132,8860	138,0111	142,2838	146,0317	149,4157
95	127,2929	134,2177	139,3686	143,6626	147,4290	150,8296
96	128,5892	135,5491	140,7256	145,0408	148,8256	152,2426
97	129,8852	136,8800	142,0821	146,4183	150,2214	153,6548
98	131,1810	138,2105	143,4380	147,7951	151,6164	155,0662
99	132,4767	139,5406	144,7934	149,1713	153,0108	156,4768
100	133,7720	140,8704	146,1483	150,5469	154,4044	157,8866
101	135,0672	142,1997	147,5026	151,9219	155,7973	159,2956
102	136,3622	143,5287	148,8565	153,2963	157,1896	160,7038
103	137,6570	144,8573	150,2099	154,6701	158,5811	162,1113
104	138,9516	146,1855	151,5628	156,0433	159,9720	163,5180
105	140,2459	147,5134	152,9152	157,4160	161,3622	164,9239
106	141,5401	148,8410	154,2671	158,7881	162,7518	166,3292
107	142,8341	150,1681	155,6186	160,1596	164,1407	167,7337
108	144,1279	151,4950	156,9697	161,5305	165,5290	169,1375
109	145,4215	152,8215	158,3202	162,9009	166,9166	170,5406
110	146,7150	154,1476	159,6703	164,2708	168,3037	171,9431
111	148,0082	155,4735	161,0200	165,6402	169,6901	173,3448
112	149,3013	156,7990	162,3693	167,0090	171,0760	174,7459
113	150,5942	158,1242	163,7181	168,3773	172,4612	176,1463
114	151,8869	159,4490	165,0665	169,7451	173,8459	177,5461
115	153,1794	160,7736	166,4145	171,1124	175,2299	178,9452
116	154,4718	162,0978	167,7621	172,4792	176,6135	180,3437
117	155,7640	163,4218	169,1092	173,8455	177,9964	181,7416
118	157,0560	164,7454	170,4560	175,2113	179,3788	183,1388
119	158,3479	166,0687	171,8024	176,5767	180,7607	184,5355
120	159,6396	167,3918	173,1483	177,9415	182,1420	185,9315
121	160,9312	168,7145	174,4939	179,3060	183,5227	187,3269
122	162,2226	170,0370	175,8392	180,6699	184,9030	188,7218
123	163,5138	171,3592	177,1840	182,0334	186,2827	190,1160
124	164,8049	172,6811	178,5285	183,3965	187,6619	191,5097
125	166,0959	174,0027	179,8725	184,7591	189,0406	192,9029
126	167,3866	175,3241	181,2163	186,1213	190,4188	194,2954
127	168,6773	176,6452	182,5597	187,4830	191,7965	195,6874
128	169,9678	177,9660	183,9027	188,8443	193,1738	197,0789
129	171,2581	179,2866	185,2454	190,2052	194,5505	198,4698
130	172,5483	180,6068	186,5877	191,5657	195,9268	199,8602

N \ F	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
131	173,8384	181,9269	187,9297	192,9258	197,3025	201,2501
132	175,1283	183,2467	189,2713	194,2854	198,6778	202,6394
133	176,4181	184,5662	190,6126	195,6447	200,0527	204,0282
134	177,7077	185,8855	191,9536	197,0035	201,4271	205,4166
135	178,9972	187,2045	193,2942	198,3620	202,8010	206,8044
136	180,2866	188,5233	194,6346	199,7201	204,1745	208,1917
137	181,5759	189,8419	195,9746	201,0778	205,5476	209,5785
138	182,8650	191,1602	197,3143	202,4351	206,9202	210,9648
139	184,1539	192,4783	198,6537	203,7920	208,2924	212,3507
140	185,4428	193,7961	199,9927	205,1485	209,6641	213,7360
141	186,7315	195,1138	201,3315	206,5047	211,0355	215,1209
142	188,0201	196,4312	202,6700	207,8606	212,4064	216,5054
143	189,3086	197,7483	204,0081	209,2160	213,7769	217,8893
144	190,5970	199,0653	205,3460	210,5711	215,1470	219,2728
145	191,8852	200,3820	206,6836	211,9259	216,5166	220,6559
146	193,1733	201,6985	208,0208	213,2803	217,8859	222,0385
147	194,4613	203,0148	209,3578	214,6343	219,2548	223,4207
148	195,7492	204,3309	210,6945	215,9881	220,6233	224,8024
149	197,0370	205,6467	212,0310	217,3414	221,9914	226,1837
150	198,3246	206,9624	213,3671	218,6945	223,3591	227,5645

N \ F	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}
1	5,6777	6,0697	6,4379	6,7861	7,1174	7,4338
2	8,5181	9,0561	9,5625	10,0423	10,4993	10,9366
3	10,9463	11,5905	12,1976	12,7734	13,3225	13,8484
4	13,1713	13,9018	14,5907	15,2448	15,8688	16,4668
5	15,2706	16,0752	16,8343	17,5554	18,2437	18,9036
6	17,2827	18,1528	18,9742	19,7546	20,4998	21,2145
7	19,2297	20,1593	21,0369	21,8709	22,6676	23,4318
8	21,1259	22,1101	23,0394	23,9227	24,7666	25,5762
9	22,9809	24,0159	24,9933	25,9224	26,8100	27,6618
10	24,8018	25,8845	26,9069	27,8788	28,8075	29,6987
11	26,5936	27,7214	28,7864	29,7988	30,7662	31,6946
12	28,3605	29,5311	30,6365	31,6873	32,6914	33,6551
13	30,1056	31,3171	32,4610	33,5484	34,5875	35,5848
14	31,8315	33,0821	34,2629	35,3854	36,4580	37,4874
15	33,5402	34,8285	36,0447	37,2008	38,3056	39,3659
16	35,2335	36,5580	37,8085	38,9970	40,1328	41,2227
17	36,9129	38,2724	39,5559	40,7758	41,9414	43,0600
18	38,5795	39,9730	41,2884	42,5386	43,7332	44,8795
19	40,2345	41,6610	43,0074	44,2870	45,5095	46,6828
20	41,8788	43,3373	44,7138	46,0219	47,2718	48,4711

N \ F	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}
21	43,5132	45,0029	46,4087	47,7446	49,0209	50,2456
22	45,1385	46,6585	48,0929	49,4558	50,7579	52,0074
23	46,7551	48,3048	49,7670	51,1564	52,4837	53,7572
24	48,3638	49,9424	51,4319	52,8470	54,1989	55,4960
25	49,9650	51,5719	53,0880	54,5284	55,9043	57,2244
26	51,5592	53,1938	54,7360	56,2010	57,6004	58,9430
27	53,1468	54,8086	56,3762	57,8654	59,2878	60,6524
28	54,7281	56,4165	58,0092	59,5221	60,9670	62,3532
29	56,3035	58,0180	59,6353	61,1714	62,6385	64,0459
30	57,8732	59,6135	61,2548	62,8137	64,3025	65,7307
31	59,4377	61,2032	62,8682	64,4495	65,9596	67,4082
32	60,9971	62,7874	64,4757	66,0790	67,6101	69,0787
33	62,5517	64,3663	66,0775	67,7025	69,2542	70,7426
34	64,1017	65,9403	67,6740	69,3203	70,8923	72,4001
35	65,6473	67,5095	69,2654	70,9327	72,5247	74,0515
36	67,1886	69,0742	70,8519	72,5399	74,1515	75,6972
37	68,7260	70,6345	72,4338	74,1421	75,7731	77,3373
38	70,2595	72,1906	74,0111	75,7395	77,3896	78,9720
39	71,7892	73,7427	75,5841	77,3323	79,0012	80,6017
40	73,3154	75,2909	77,1530	78,9207	80,6082	82,2264
41	74,8382	76,8354	78,7179	80,5048	82,2107	83,8464
42	76,3577	78,3763	80,2789	82,0849	83,8088	85,4619
43	77,8739	79,9138	81,8362	83,6610	85,4028	87,0730
44	79,3871	81,4479	83,3900	85,2333	86,9928	88,6798
45	80,8973	82,9788	84,9403	86,8020	88,5789	90,2826
46	82,4047	84,5066	86,4873	88,3671	90,1612	91,8814
47	83,9092	86,0314	88,0310	89,9288	91,7400	93,4764
48	85,4111	87,5533	89,5717	91,4871	93,3152	95,0677
49	86,9104	89,0723	91,1093	93,0423	94,8870	96,6555
50	88,4071	90,5886	92,6440	94,5943	96,4555	98,2398
51	89,9014	92,1023	94,1758	96,1433	98,0208	99,8207
52	91,3934	93,6134	95,7049	97,6894	99,5831	101,3983
53	92,8830	95,1220	97,2313	99,2326	101,1423	102,9728
54	94,3704	96,6282	98,7551	100,7731	102,6986	104,5443
55	95,8556	98,1321	100,2764	102,3109	104,2521	106,1127
56	97,3386	99,6336	101,7953	103,8461	105,8028	107,6782
57	98,8197	101,1329	103,3117	105,3787	107,3508	109,2410
58	100,2987	102,6300	104,8258	106,9088	108,8962	110,8009
59	101,7757	104,1250	106,3377	108,4366	110,4390	112,3582
60	103,2509	105,6180	107,8473	109,9620	111,9794	113,9129
61	104,7242	107,1089	109,3548	111,4851	113,5174	115,4650
62	106,1956	108,5979	110,8602	113,0060	115,0530	117,0147
63	107,6653	110,0850	112,3635	114,5247	116,5863	118,5619
64	109,1333	111,5702	113,8648	116,0413	118,1173	120,1068
65	110,5996	113,0536	115,3642	117,5558	119,6462	121,6494

N \ F	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}
66	112,0643	114,5352	116,8617	119,0682	121,1729	123,1897
67	113,5273	116,0150	118,3573	120,5787	122,6975	124,7278
68	114,9888	117,4932	119,8511	122,0873	124,2201	126,2638
69	116,4488	118,9697	121,3431	123,5939	125,7407	127,7977
70	117,9072	120,4446	122,8334	125,0988	127,2593	129,3295
71	119,3642	121,9179	124,3220	126,6018	128,7760	130,8593
72	120,8197	123,3896	125,8089	128,1030	130,2909	132,3871
73	122,2738	124,8598	127,2941	129,6025	131,8039	133,9131
74	123,7265	126,3285	128,7778	131,1003	133,3151	135,4371
75	125,1779	127,7957	130,2599	132,5964	134,8246	136,9593
76	126,6280	129,2615	131,7405	134,0909	136,3323	138,4796
77	128,0767	130,7259	133,2195	135,5838	137,8383	139,9982
78	129,5242	132,1890	134,6971	137,0751	139,3427	141,5151
79	130,9704	133,6506	136,1733	138,5649	140,8455	143,0302
80	132,4154	135,1110	137,6480	140,0532	142,3467	144,5437
81	133,8592	136,5700	139,1213	141,5400	143,8463	146,0555
82	135,3019	138,0278	140,5933	143,0254	145,3444	147,5658
83	136,7433	139,4843	142,0639	144,5093	146,8409	149,0744
84	138,1837	140,9396	143,5332	145,9919	148,3360	150,5815
85	139,6229	142,3937	145,0012	147,4730	149,8297	152,0871
86	141,0610	143,8466	146,4680	148,9528	151,3219	153,5911
87	142,4980	145,2983	147,9335	150,4313	152,8127	155,0937
88	143,9340	146,7489	149,3977	151,9085	154,3022	156,5949
89	145,3689	148,1984	150,8608	153,3844	155,7902	158,0946
90	146,8028	149,6467	152,3227	154,8590	157,2770	159,5929
91	148,2357	151,0940	153,7834	156,3324	158,7625	161,0899
92	149,6677	152,5402	155,2430	157,8046	160,2466	162,5855
93	151,0986	153,9853	156,7014	159,2756	161,7296	164,0798
94	152,5286	155,4295	158,1587	160,7454	163,2112	165,5728
95	153,9576	156,8725	159,6150	162,2141	164,6917	167,0645
96	155,3857	158,3146	161,0701	163,6816	166,1709	168,5549
97	156,8129	159,7557	162,5242	165,1480	167,6489	170,0441
98	158,2392	161,1958	163,9773	166,6133	169,1258	171,5320
99	159,6646	162,6350	165,4294	168,0775	170,6016	173,0188
100	161,0892	164,0732	166,8804	169,5406	172,0762	174,5043
101	162,5129	165,5105	168,3304	171,0027	173,5497	175,9887
102	163,9357	166,9469	169,7795	172,4637	175,0221	177,4720
103	165,3577	168,3824	171,2276	173,9237	176,4934	178,9541
104	166,7789	169,8170	172,6748	175,3827	177,9636	180,4351
105	168,1993	171,2507	174,1210	176,8407	179,4328	181,9149
106	169,6188	172,6836	175,5663	178,2977	180,9010	183,3937
107	171,0376	174,1156	177,0106	179,7538	182,3681	184,8715
108	172,4556	175,5467	178,4541	181,2089	183,8343	186,3481
109	173,8729	176,9771	179,8967	182,6631	185,2994	187,8237
110	175,2894	178,4066	181,3385	184,1163	186,7636	189,2983

N \ F	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}
111	176,7051	179,8353	182,7793	185,5686	188,2268	190,7719
112	178,1202	181,2633	184,2193	187,0201	189,6890	192,2445
113	179,5345	182,6904	185,6585	188,4706	191,1504	193,7161
114	180,9480	184,1168	187,0969	189,9203	192,6108	195,1867
115	182,3609	185,5424	188,5344	191,3690	194,0702	196,6564
116	183,7731	186,9673	189,9712	192,8170	195,5288	198,1251
117	185,1846	188,3914	191,4071	194,2641	196,9865	199,5929
118	186,5954	189,8148	192,8423	195,7103	198,4433	201,0598
119	188,0055	191,2374	194,2766	197,1558	199,8992	202,5257
120	189,4150	192,6594	195,7103	198,6004	201,3543	203,9908
121	190,8239	194,0806	197,1431	200,0442	202,8085	205,4549
122	192,2320	195,5012	198,5753	201,4873	204,2619	206,9182
123	193,6396	196,9211	200,0066	202,9295	205,7145	208,3807
124	195,0465	198,3402	201,4373	204,3710	207,1663	209,8422
125	196,4528	199,7588	202,8672	205,8117	208,6172	211,3029
126	197,8585	201,1766	204,2965	207,2517	210,0674	212,7628
127	199,2636	202,5938	205,7250	208,6909	211,5168	214,2219
128	200,6681	204,0103	207,1528	210,1294	212,9654	215,6801
129	202,0720	205,4263	208,5800	211,5672	214,4132	217,1376
130	203,4753	206,8415	210,0065	213,0042	215,8603	218,5942
131	204,8780	208,2562	211,4323	214,4406	217,3066	220,0501
132	206,2802	209,6702	212,8574	215,8762	218,7522	221,5052
133	207,6818	211,0836	214,2819	217,3111	220,1970	222,9595
134	209,0828	212,4964	215,7058	218,7454	221,6412	224,4130
135	210,4833	213,9087	217,1290	220,1790	223,0846	225,8658
136	211,8832	215,3203	218,5516	221,6119	224,5273	227,3179
137	213,2826	216,7313	219,9735	223,0441	225,9693	228,7692
138	214,6815	218,1418	221,3948	224,4757	227,4106	230,2198
139	216,0798	219,5517	222,8156	225,9066	228,8512	231,6697
140	217,4776	220,9610	224,2357	227,3369	230,2912	233,1188
141	218,8749	222,3698	225,6552	228,7666	231,7305	234,5673
142	220,2717	223,7780	227,0741	230,1956	233,1691	236,0151
143	221,6679	225,1857	228,4925	231,6240	234,6071	237,4621
144	223,0637	226,5929	229,9103	233,0518	236,0444	238,9085
145	224,4590	227,9995	231,3274	234,4790	237,4810	240,3543
146	225,8538	229,4055	232,7441	235,9056	238,9171	241,7993
147	227,2481	230,8111	234,1601	237,3316	240,3525	243,2437
148	228,6419	232,2161	235,5756	238,7570	241,7873	244,6874
149	230,0352	233,6206	236,9906	240,1818	243,2215	246,1305
150	231,4281	235,0246	238,4050	241,6060	244,6550	247,5730

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Агеев М. И., Алик В. П., Марков Ю. И.** Библиотека алгоритмов 151б – 200б. — М.: Радио и связь, 1981. – 184 с.
2. **Амиантов И. Н.** Избранные вопросы статистической теории связи. — М.: Сов. радио, 1971. – 416 с.
3. **Барк Л. С., Кузнецов П. И.** Таблицы цилиндрических функций от двух мнимых переменных. — М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1962. – XX, 264 с.
4. **Барк Л. С., Большев Л. Н., Кузнецов П. И., Черенков А. П.** Таблицы распределения Релея — Райса. — М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1964. – XXVIII, 246 с.
5. **Бартон Д.** Радиолокационные системы: Пер. с англ./Под ред. К. Н. Трофимова. — М.: Военное издательство, 1967. – 480 с.
6. **Башаринов А. Е., Флейшман Б. С.** Методы статистического последовательного анализа и их радиотехнические приложения. — М.: Сов. радио, 1962. – 352 с.
7. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции (эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье): Пер. с англ. — М.: Наука, 1967. – 299 с.
8. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц: Пер. с англ./Под ред. В. Б. Лидского. — М.: Наука, 1976. – 351 с.
9. **Билетов М. В., Вассерштейн И. С., Рыльский В. В.** Обнаружение радиолокационных сигналов при логарифмически-нормальных флуктуациях их интенсивности. Радиотехника, 1975, № 6, с. 98 – 100.
10. **Билетов М. В., Вассерштейн И. С., Рыльский В. В.** Обнаружение радиолокационных сигналов при флуктуациях их интенсивности по закону Накагами. Радиотехника, 1976, № 1, с. 16 – 19.
11. **Билетов М. В., Вассерштейн И. С., Чесноков В. А.** Обнаружение радиолокационной цели при некогерентном накоплении сигналов и быстрых их флуктуациях. Радиотехника, 1976, № 12, с. 18 – 22.
12. **Билетов М. В., Вассерштейн И. С.** Характеристики обнаружения некогерентной РЛС при быстрых флуктуациях отражённых сигналов по закону Накагами. Радиотехника, 1980, № 4, с. 87 – 90.
13. **Бильери**. Рекуррентный метод вычисления коэффициентов ряда Грама — Шарлье. ТИИЭР, 1973, т. 61, № 2, с. 120 – 121.
14. **Бунимович В. И.** Приближённое выражение вероятности правильного обнаружения при оптимальном приёме сигнала с неизвестной фазой. Радиотехника и электроника, 1958, т. 3, № 4, с. 552 – 554.
15. **Буреев В. А., Меньшиков А. В.** Анализ характеристик обнаружения систем с переменной разрешающей способностью. Радиотехника и электроника, 1965, т. 10, с. 2091 – 2098.
16. **Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д.** Выделение сигналов на фоне случайных помех. — М.: Сов. радио, 1960. – 447 с.
17. **Вакман Д. Е.** Асимптотические методы в линейной радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1962. – 247 с.
18. **Вальд А.** Последовательный анализ: Пер. с англ./Под ред. Б. А. Севостьянова. — М.: Физматгиз, 1960. – 328 с.
19. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции в 3-х т.: Пер. с англ./т. 1. Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции/Под ред. В. И. Тихонова. — М.: Сов. радио, 1972. – 744 с.
20. **Вопросы** статистической теории радиолокации/П. А. Бакут, И. А. Большаков, Б. М. Герасимов и др.; Под ред. Г. П. Тартаковского. — М.: Сов. радио, 1963, т. 1 – 424 с.; 1964, т. 2 – 1079 с.
21. **Голев К. В.** Расчёт дальности действия радиолокационных станций. — М.: Сов. радио, 1962. – 204 с.

22. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
23. **Грассо, Гуаргуаглини.** Характеристики обнаружения многочастотной РЛС. Зарубежная радиоэлектроника, 1968, № 8, с. 45 – 55.
24. **Гуткин Л. С.** Теория оптимальных методов радиоприёма при флуктуационных помехах. — М.: Сов. радио, 1972. – 447 с.
25. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Справочник по операционному исчислению. — М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
26. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Операционное исчисление. — М.: Высшая школа, 1975. – 407 с.
27. **Дмитриенко А. Н., Корадо В. А.** Характеристики обнаружения пакета независимо флуктуирующих импульсов на фоне гауссовой помехи с неизвестной интенсивностью. Радиотехника и электроника, 1967, т. 12, № 7, с. 1272 – 1274.
28. **Дмитриенко А. Н., Корадо В. А.** К характеристикам обнаружения пакета независимо флуктуирующих импульсов на фоне гауссовой помехи с неизвестной интенсивностью. Радиотехника и электроника, 1968, т. 13, № 9, с. 1700 – 1701.
29. **Добрынин С. В., Яцуценко А. Я.** Характеристики обнаружения сигналов, флуктуирующих по закону Накагами. Радиотехника, 1985, № 5, с. 29 – 31.
30. **Защита** от радиопомех/М. В. Максимов, М. П. Бобнев, Б. Х. Кривицкий и др.; Под ред. М. В. Максимова. — М.: Сов. радио, 1976. – 495 с.
31. **Кендалл М., Стьюарт А.** Теория распределений. — М.: Наука, 1966. – 587 с.
32. **Кобзарев Ю. Б., Башаринов А. Е.** Об эффективности алгоритмов поиска, основанных на методе пробных шагов управляемой длительности. Радиотехника и электроника, 1961, т. 6, № 9, с. 3 – 11.
33. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике: Пер. с англ./Под ред. И. Г. Арамановича. — М.: Наука, 1973. – 831 с.
34. **Крамер Г.** Математические методы статистики: Пер. с англ./Под ред. А.Н. Колмогорова. — М.: Мир, 1975. – 648 с.
35. **Крылов В. И., Шульгина Л. Т.** Справочная книга по численному интегрированию. — М.: Наука, 1966. – 370 с.
36. **Крылов В. И., Скобля Н. С.** Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. — Минск: Наука и техника, 1968. – 295 с.
37. **Крылов В. И., Скобля Н. С.** Методы приближённого преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. — М.: Наука, 1974. – 223 с.
38. **Кузнецов П. И.** О представлении одного контурного интеграла. Прикладная математика и механика, 1947, т. 11, вып. 2, с. 267 – 270.
39. **Кузнецов П. И.** Функции Ломмеля от двух мнимых аргументов. Прикладная математика и механика, 1947, т. 11, вып. 5, с. 555 – 560.
40. **Кузнецов П. И.** Асимптотические разложения цилиндрических функций от двух мнимых переменных. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 4, с. 571 – 589.
41. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1. — М.: Сов. радио, 1969. – 751 с.
42. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1. — М.: Сов. радио, 1974. – 550 с.
43. **Левченко Л. С., Сопельник Ю. В.** Характеристики обнаружения некогерентных сигналов с гамма-распределением вероятности энергии. Радиотехника, 1986, № 8, с. 59 – 61.
44. **Левченко Л. С., Сопельник Ю. В.** Вероятность обнаружения радиолокационных некогерентных сигналов с негауссовским распределением флуктуаций амплитуды. Радиотехника, 1986, № 8, с. 63 – 64.
45. **Лихарев В. А., Добролюбов Л. В.** Весовое суммирование пачки некогерентных сигналов. Радиотехника и электроника, 1967, № 7, с. 1173 – 1177.
46. **Маркум.** Статистическая теория обнаружения целей импульсной радиолокационной станцией. Зарубежная радиоэлектроника, 1960, № 10, с. 3 – 10.

47. **Мартынов Г. В.** Вероятностно-статистические программы из “Applied Statistics”. В сб.: Итоги науки и техн., сер. Теор. вероят. Мат. стат. Теорет. киберн. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1988, т. 26, с. 151 – 203.
48. **Мелитицкий В. А.** Вероятность обнаружения негауссовых сигналов при наличии нормальной помехи. Радиотехника, 1982, № 10, с. 46 – 48.
49. **Нэттол.** Численный метод расчёта функций распределения вероятности непосредственно по характеристическим функциям. ТИИЭР, 1969, т. 57, № 10, с. 180 – 181.
50. **Нэттол.** Некоторые методы численного расчёта функций распределения вероятностей непосредственно по характеристическим функциям. ТИИЭР, 1970, т. 58, № 11, с. 119 – 120.
51. **Петров В. В.** Суммы независимых случайных величин. — М.: Наука, 1972. – 414 с.
52. **Поиск,** обнаружение и измерение параметров сигналов в радионавигационных системах/В. П. Ипатов, Ю. М. Казаринов, Ю. А. Коломенский, Ю. Д. Ульяницкий; Под ред. Ю. М. Казаринова. — М.: Сов. радио, 1975. – 296 с.
53. **Поляк Ю. В., Кельзон В. С.** К теории обнаружения периодических импульсных сигналов в гауссовом шуме при некогерентном накоплении. Радиотехника и электроника, 1958, т. 3, № 6, с. 764 – 769.
54. **Проскурин В. И.** Распределение вероятностей квадратичного функционала от гауссовского случайного процесса. Радиотехника и электроника, 1985, т. 30, № 7, с. 1335 – 1340.
55. **Репин В. Г., Тартаковский Г. П.** Статистический синтез при априорной неопределённости и адаптация информационных систем. — М.: Сов. радио, 1977. – 432 с.
56. **Сагон.** Численный метод расчёта неполной функции Торонто. ТИИЭР, 1966, т. 54, № 8, с. 99.
57. **Сверлинг.** Вероятность обнаружения флуктуирующих целей. Зарубежная радиоэлектроника, 1960, № 10, с. 29 – 32.
58. **Светлов В. Г.** О некоторых представлениях многомерной плотности вероятности огибающей нормального случайного процесса с нулевым средним. Радиотехника и электроника, 1966, т. 11, № 12, с. 2119 – 2127.
59. **Светлов В. Г.** Два представления многомерной плотности вероятности огибающей аддитивной смеси регулярного сигнала и нормальной помехи. Радиотехника и электроника, 1967, т. 12, № 10, с. 1813 – 1815.
60. **Сиберт.** Некоторые применения теории обнаружения к радиолокации. Радиотехника и электроника за рубежом, 1959, № 1, с. 26 – 36.
61. **Сивозализов Н. А.** Асимптотическое разложение интеграла Райса. Радиотехника, 1985, № 3, с. 80 – 81.
62. **Смирнов Н. В., Большев Л. Н.** Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения. — М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1962. – 204 с.
63. **Современная** радиолокация: Пер. с англ./Под ред. Ю. Б. Кобзарева. — М.: Сов. радио, 1969. – 704 с.
64. **Солодовников Г. К., Левченко Л. С., Русскин В. М., Яцуценко А. Я.** Обнаружение эхо-сигналов в условиях ионосферных замираний. Радиотехника, 1983, № 12, с. 60 – 62.
65. **Сопельник Ю. В.** Обнаружение независимо флуктуирующих сигналов при линейном детектировании. Радиотехника, 1987, № 11, с. 38 – 39.
66. **Сосулин Ю. Г.** Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. — М.: Сов. радио, 1978. – 320 с.
67. **Справочник** по радиолокации в 4-х т.: Пер. с англ./Под общей ред. К. Н. Трофимова. т. 1. Основы радиолокации/Под ред. Я. С. Ицхоки. — М.: Сов. радио, 1976. – 456 с.

68. **Стратонович Р. Л., Сосулин Ю. Г.** К расчёту характеристик обнаружения флуктуирующих сигналов. Вестн. Моск. ун-та, сер. физ., астрон., 1964, № 1, с. 43 – 49.
69. **Таблицы** нормального интеграла вероятностей, нормальной плотности и её нормированных производных/Под ред. Н. В. Смирнова. — М.: Изд. АН СССР, 1960. – 136 с.
70. **Таблицы** функции ошибок и её первых двадцати производных: Пер. с англ./Пер. Л. С. Барк и Л. Н. Большева. — М.: ВЦ АН СССР, 1965. – XXI, 277 с.
71. **Теоретические** основы радиолокации/А. А. Коростелев, Н. Ф. Клюев, Ю. А. Мельник и др.; Под ред. В. Е. Дулевича. — М.: Сов. радио, 1978. – 607 с.
72. **Теория** обнаружения сигналов/П. С. Акимов, П. А. Бакут, В. А. Богданович и др.; Под ред. П. А. Бакута. — М.: Сов. радио, 1984. – 440 с.
73. **Тихонов В. И.** Оптимальный приём сигналов. — М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.
74. **Трухачёв А. А.** Определение величины порога по заданной вероятности превышения суммой случайных величин. Радиотехника и электроника, 1966, т. 11, № 8, с. 1486 – 1488.
75. **Трухачёв А. А.** Письмо в редакцию. Теория вероят. и её примен., 1966, т. 11, вып. 4, с. 727.
76. **Трухачёв А. А.** О надёжности обнаружения и точности измерения параметров флуктуирующих сигналов в многоканальных системах. Радиотехника и электроника, 1967, т. 12, № 3, с. 387 – 397.
77. **Трухачёв А. А.** Двумерное распределение модуля вектора с гауссовскими компонентами. Радиотехника и электроника, 1988, т. 33, № 9, с. 2001 – 2003.
78. **Трухачёв А. А.** Двумерная функция распределения модуля вектора с гауссовскими компонентами. Радиотехника и электроника, 1990, т. 35, № 1, с. 215 – 217.
79. **Трухачёв А. А.** Функция распределения и плотность распределения вероятностей отношения коррелированных райсовских случайных величин. Радиотехника, 1990, № 6, с. 46 – 47.
80. **Трухачёв А. А.** Сравнительный анализ методов вычисления интеграла $J_N(x, y)$. Радиотехника и электроника, 1990, т. 35, № 12, с. 2637 – 2640.
81. **Тюльпанов С. К.** *n*-мерная рэлеевская функция распределения огибающей смеси детерминированного сигнала и нормального шума. Радиотехника, 1966, № 11, с. 63 – 66.
82. **Уанг.** Численный метод расчёта вероятности по производящей функции моментов. ТИИЭР, 1972, т. 60, № 12, с. 116 – 118.
83. **Фалькович С. Е.** Оптимальное обнаружение сигналов на фоне помех неизвестной интенсивности. Радиотехника и электроника, 1960, т. 5, № 9, с. 1539 – 1541.
84. **Фалькович С. Е.** Приём радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех. — М.: Сов. радио, 1961. – 311 с.
85. **Фалькович С. Е., Хомяков Э. Н.** Статистическая теория измерительных радиосистем. — М.: Радио и связь, 1981. – 287 с.
86. **Федорченко В. А.** О совместном распределении и числовых характеристиках сигналов на выходах нескольких устройств обработки пачек импульсных сигналов. Радиотехника, 1981, № 6, с. 18 – 23.
87. **Федорюк М. В.** Метод перевала. — М.: Наука, 1977. – 368 с.
88. **Фельдман Ю. И.** Плотность вероятности случайного процесса при весовом квадратичном суммировании. Радиотехника, 1979, № 4, с. 71 – 74.
89. **Фельдман Ю. И.** О плотности вероятности случайного процесса при весовом квадратичном суммировании. Радиотехника, 1983, № 11, с. 95 – 96.
90. **Финк Л. М.** О вычислении Q-функции с помощью калькулятора “Электроника Б3–21”. Радиотехника, 1982. № 4, с. 61 – 62.

91. **Финн.** Новый подход к проблеме последовательного обнаружения в радиолокационных системах с фазированными решётками. Зарубежная радиоэлектроника, 1964, № 8, с. 18 – 32.
92. **Флейшман Б. С.** Об оптимальном детекторе с $\log I_0$-характеристикой для обнаружения слабого сигнала при наличии шума. Радиотехника и электроника, 1957, т. 2, № 6, с. 726 – 734.
93. **Хейдбредер, Митчел.** Вероятности обнаружения сигналов с логарифмически-нормальным законом распределения. Зарубежная радиоэлектроника, 1967, № 7, с. 36 – 48.
94. **Хелстром.** Приближённое вычисление вероятности из производящей функции моментов. ТИИЭР, 1969, т. 57, № 3, с. 127 – 128.
95. **Черняк Ю. Б.** Приближённый метод расчёта характеристик обнаружения многоканальных систем с коррелированными шумами при отборе амплитуд по наибольшему значению. Радиотехника и электроника, 1960, т. 5, № 2, с. 198 – 205.
96. **Черняк Ю. Б.** Обнаружение сигнала с неизвестной частотой и произвольной начальной фазой на фоне белого шума. Радиотехника и электроника. 1960, т. 5, № 3, с. 366 – 375.
97. **Ширман Я. Д., Манжос В. Н.** Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.
98. **Шляхин В. М.** Вероятностные модели нерэлеевских флуктуаций радиолокационных сигналов (Обзор). Радиотехника и электроника, 1987, т. 32, № 9, с. 1793 – 1817.
99. **Шульгин А. В., Ковальчук Я. М.** Статистические характеристики отношения коррелированных райсовских случайных величин. Радиотехника, 1986, № 5, с. 60 – 62.
100. **Янке Е., Эмде Ф.** Таблицы функций с формулами и кривыми. — М.: Физматгиз, 1959. – 420 с.
101. **Aitchison J., Brown J. A. C.** The lognormal distribution. Cambridge: Cambr. Univer. Press, 1957. – XVIII, 176 p.
102. **Banta E. D.** On the autokorrelation function of quantized signal plus noise. IEEE Trans., 1965, v. IT-11, № 1, p. 114 – 117.
103. **Bates R. H. T.** Statistics of fluctuating target detection. IEEE Trans., 1966, v. AES-2, № 1, p. 137 – 138.
104. **Bird J. S.** Calculating detection probabilities for systems employing noncoherent integration. IEEE Trans., 1982, v. AES-18, № 4, p. 401 – 409.
105. **Bird J. S.** Calculating detection probabilities for adaptive thresholds. IEEE Trans., 1983, v. AES-19, № 4, p. 506 – 512.
106. **Brennan L. E., Reed I. S.** A recursive method of computing the Q function. IEEE Trans., 1965, v. IT-11, № 2, p. 312 – 313.
107. **Campbell G. A.** Probability curves showing Poisson's exponential summation. Bell System Tech. J., 1923, v. 2, № 1, p. 95 – 113.
108. **Dillard G. M.** Recursive computation of the generalized Q function. IEEE Trans., 1973, v. AES-9, № 4, p. 614 – 615.
109. **Dillard G. M., Rickard J. T.** Performance of an MTI followed by incoherent integration for nonfluctuating signals. IEEE Intern. Radar Conf., 1980, p. 194 – 199.
110. **Goldstein S.** On the mathematics of exchange processes in fixed columns. I. Mathematical solutions and asymptotic expansions. Proc. Roy. Soc., ser. A, 1953, v. 219, № 1137, p. 151 – 171.
111. **Green B. A., Jr.** Radar detection probability with logarithmic detectors. IRE Trans., 1958, v. IT-4, № 1, p. 50 – 52.
112. **Hansen V. G., Zöttl A. J.** The detection performance of the Siebert and Dicke-fix CFAR radar detectors. IEEE Trans., 1971, v. AES-7, № 4, p. 706 – 709.

113. **Hansen V. G.** Optimization and performance of multilevel quantization in automatic detectors. IEEE Trans., 1974, v. AES-10, № 2, p. 274 – 280.
114. **Hansen V. G., Parl S. A.** An upper bound on detection probability for fluctuating signals. IEEE Trans., 1978, v. AES-14, № 2, p. 305 – 311.
115. **Helstrom C. W.** The resolution of signals in white, Gaussian noise. Proc. IRE, 1955, v. 43, № 9, p. 1111 – 1118.
116. **Helstrom C. W.** Approximate evaluation of detection probabilities in radar and optical communications. IEEE Trans., 1978, v. AES-14, № 4, p. 630 – 640.
117. **Helstrom C. W., Ritcey J. A.** Evaluating radar detection probabilities by steepest descent integration. IEEE Trans., 1984, v. AES-20, № 5, p. 624 – 633.
118. **Hiester N. K., Vermeulen T.** Saturation performance of ionexchange and adsorption columns. Chem. Eng. Progress, 1952, v.48, № 10, p. 505 – 516.
119. **Hoffman W. C.** The joint distribution of *n* successive outputs of a linear detectors. J. Appl. Phys., 1954, v. 25, № 8, p. 1006 – 1007.
120. **Hou X.-Y., Morinaga N., Namekawa T.** Direct evaluation of radar detection probabilities. IEEE Trans., 1987, v. AES-23, № 4, p. 418 – 424.
121. **Kanter I.** Exact detection probability for partially correlated Reyleigh targets. IEEE Trans., 1986, v. AES-22, № 2, p. 184 – 196.
122. **Kitahara N., Nagahara D., Yano H.** A numerical inversion of Laplase transform and its application. J. Franklin Inst., 1988, v. 325, № 2, p. 221 – 233.
123. **Luke Y. L.** Integrals of Bessel functions. — N.Y.: McGraw-Hill, 1962. – XV, 419 p.
124. **Mark W. D.** Reduction of an integral of the joint Reyleigh probability density to tabulated functions. Proc. IEEE, 1964, v. 52, № 6, p. 741 – 742.
125. **McGee W. F.** Another recursive method of computing the Q-function. IEEE Trans., 1970, v. IT-16, № 4, p. 500 – 501.
126. **Meyer D. P., Mayer H. A.** Radar target detection. — N.Y., London: Acad. Press, 1973. – XVI, 493 p.
127. **Mitchell R. L., Walker J. F.** Recursive methods for computing detection probabilities. IEEE Trans., 1971, v. AES-7, № 4, p. 671 – 676.
128. **Odeh R. E., Evans J. O.** Algorithm AS 70. The percentage points of the normal distribution. Appl. Statist., 1974, v. 23, № 1, p. 96 – 97.
129. **Pachares J.** A table of bias levels useful in radar detection problems. IRE Trans., 1958, v. IT-4, № 1, p. 38 – 45.
130. **Rappaport S. S.** Computing approximations for the generalized Q-function and its complement. IEEE Trans., 1971, v. IT-17, № 4, p. 497 – 498.
131. **Rice S. O.** Distribution of quadratic forms in normal random variables — evaluation by numerical integration. SIAM J. Stat. Comput., 1980, v. 1, № 4, p. 438 – 448.
132. **Robertson G. H.** Operating characteristic for a linear detector of CW signals in narrow-band Gaussian noise. Bell System Tech. J., 1967, v. 46, № 4, p. 755 – 774.
133. **Robertson G. H.** Computation of the noncentral chi-square distribution. Bell System Tech. J., 1969, v. 48, № 1, p. 201 – 207.
134. **Scholtz R. A., Kappl J. J., Nahi N. E.** The detection of moderately-fluctuating Reyleigh targets. IEEE Trans., 1976, v. AES-12, № 2, p. 117 – 125.
135. **Shnidman D. A.** Efficient evaluation of probabilities of detection and the generalized Q-function. IEEE Trans., 1976, v. IT-22, № 6, p. 746 – 751.
136. **Sinsky A. I., Wang C. P.** Standardization of the definition of radar ambiguity function. IEEE Trans., 1974, v. AES-10, № 4, p. 532 – 533.
137. **Smith J. M.** Problems solved and unsolved in radar detection theory. Intern. Conf. Radar-77, London, 1977, p. 263 – 265.
138. **Stein S., Storer J. E.** Generating a Gaussian sample. IRE Trans., 1956, v. IT-2, № 2, p. 87 – 90.
139. **Swerling P.** Detection of fluctuating pulsed signals in the presence of noise. IRE Trans., 1957, v. IT-3, № 3, p. 175 – 178.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

1. **ОДНОМЕРНЫЕ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ** 5

1.1. Введение 5
1.2. Плотности распределения вероятностей, характеристические функции и преобразование Лапласа 5
1.3. Использование изображений для нахождения плотностей распределения вероятностей и интегралов от них 9
1.4. Ортогональные разложения плотностей распределения вероятностей 19
1.5. Ряды Грама — Шарлье и Эджворта 21
1.6. Модификации ряда Эджворта 26
1.7. Статистические характеристики модуля вектора с гауссовскими компонентами 30
1.8. Численные методы вычисления интеграла от распределения квадрата модуля вектора с гауссовскими компонентами 34

2. **МНОГОМЕРНЫЕ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ** 37

2.1. Вычисление определённых интегралов от экспоненты, показатель которой содержит квадратичную форму 37
2.2. Изображение по Лапласу двумерной плотности распределения квадрата модуля вектора с гауссовскими компонентами 41
2.3. Двумерные распределения модуля вектора с гауссовскими компонентами при нулевых средних значениях компонент 45
2.4. Двумерные интегральные распределения модуля вектора с гауссовскими компонентами при нулевых средних значениях компонент 47
2.5. Специальные методы вычисления статистических характеристик функций от двух случайных переменных 52
2.6. Многомерные распределения квадратов модуля двумерного вектора с гауссовскими компонентами при нулевых средних значениях компонент и экспоненциальной функции корреляции 54

3. **МЕТОДЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ РАДИОИМПУЛЬСОВ** 57

3.1. Введение 57
3.2. Входной сигнал и математическая модель канала обнаружения . . 57
3.3. Статистические характеристики случайных величин на выходах квадратурных каналов и канала обнаружения 59
3.4. Определения отношения сигнал/шум, коэффициента потерь и автокорреляционной функции 62

3.5. Характеристики обнаружения импульсного сигнала 66
3.6. Приближённые методы вычисления вероятности обнаружения импульсного сигнала 70

4. **МЕТОДЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ НЕКОГЕРЕНТНОГО СИГНАЛА** 74

4.1. Введение 74
4.2. Определение пороговых уровней. Квадратичный детектор 75
4.3. Определение пороговых уровней. Линейный детектор 77
4.4. Характеристики обнаружения некогерентной пачки импульсов . . 79
4.5. Характеристики обнаружения некогерентной пачки импульсов при частично зависимых рэлеевских флуктуациях 88
4.6. Характеристики обнаружения неразрешаемой группы сигналов . . 93

5. **ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ И ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ**. 99

5.1. Введение 99
5.2. Приближённый метод расчёта вероятностей возникновения различных картин превышений 100
5.3. Коэффициент потерь для дружно флуктуирующего некогерентного сигнала 106
5.4. Расчёт вероятности ложной тревоги 110
5.5. Обнаружение сигнала на фоне шума с неизвестной интенсивностью при наличии дополнительных шумовых выборок 113
5.6. Ошибки измерения неизвестных параметров сигнала при формировании оценок по картинам превышений 118
5.7. Ошибки измерения параметров сигнала с неизвестной амплитудой двумя расстроенными каналами 121
5.8. Измерение частоты прямоугольного импульса 127

6. **ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ ПРИ ДИСКРЕТНОМ ОБЗОРЕ ПО УГЛОВЫМ КООРДИНАТАМ** 131

6.1. Введение 131
6.2. Коэффициент энергетических потерь 132
6.3. Оптимальное разбиение области обзора на элементарные ячейки 135
6.4. Порядок осмотра элементов обзора 137
6.5. Разбиение обзора на циклы при частично зависимых от цикла к циклу флуктуациях сигнала 140

7. **ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОЭТАПНЫХ МЕТОДОВ ОБНАРУЖЕНИЯ** 144

7.1. Введение 144

7.2. Разновидности многоэтапных процедур и постановка задачи их оптимизации 146
7.3. Эффективность двухэтапного обнаружения 150
7.4. Эффективность многоэтапного обнаружения рэлеевского сигнала 153
7.5. Двухэтапное обнаружение рэлеевского сигнала при частично зависимых от этапа к этапу флуктуациях сигнала 158
7.6. Сравнительная оценка различных методов междуэтапной обработки 162
7.7. Двухэтапное обнаружение некогерентного флуктуирующего сигнала 166
7.8. Многоэтапное обнаружение с критерием “m из m” при равных временах наблюдения на каждом этапе 170

8. **ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ** . . 173

8.1. Введение 173
8.2. Эффективность дискретной обработки 174
8.3. Некоторые формулы для численного анализа 178
8.4. Примеры оценки эффективности дискретной обработки 181
8.5. Эффективность дискретной обработки при неизвестной частоте сигнала 186
8.6. Квантование отсчётов нормального случайного процесса 191
8.7. Энергетические потери, обусловленные квантованием сигнала по уровню 195

9. **ЭФФЕКТИВНОСТЬ ДИСКРЕТНОЙ ОБРАБОТКИ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ СИГНАЛА НА ФОНЕ МЕШАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ С НЕИЗВЕСТНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ** 199

9.1. Введение 199
9.2. Синтез схем дискретной обработки наблюдений при обнаружении сигнала на фоне шума с неизвестной интенсивностью . . . 199
9.3. Эффективность оптимальной дискретной обработки при обнаружении сигнала на фоне шума с неизвестной интенсивностью. . 203
9.4. Эффективность упрощенной дискретной обработки при неизвестной интенсивности шума 209
9.5. Обнаружение полезного сигнала на фоне мешающих сигналов и гауссовского шума с неизвестной интенсивностью 214

Приложение 1. Некоторые формулы и интегралы, включающие в себя функцию $J_N(x, y)$ 218

Приложение 2. Таблица порогов. Некогерентное накопление после квадратичного детектора 225

Приложение 3. Таблица порогов. Некогерентное накопление после линейного детектора 232

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 239

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УНИТАРНОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«РАДИО И СВЯЗЬ»
127473 Москва, 2-й Щемиловский пер., д. 5/4, стр.1.
Отдел заказов: тел./факс: 978-54-10 / E-mail: radiosv@bk.ru
Редакция: тел./факс: 978-53-51 / E-mail: radsv@garnet.ru
Интернет: www.radiosv.ru

Научное издание

Трухачев Александр Алексеевич

**АНАЛИЗ ПРОЦЕДУР
И АЛГОРИТМОВ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ**

Печатается в авторской редакции

Художественный и технический редактор
Л.А. Горшкова

ИБ № 3121

ЛР № 010164 от 29.01.97
Подписано в печать 02.09.2003
Формат 60×90/16 Печать офсетная Усл. печ. л. 15,5
Из. № 24434 Зак. тип. № 34 Тираж 300 экз.
Заказное издание

www.radiosv.ru
Издательство «Радио и связь», 127473 Москва, 2-й Щемиловский пер., 5/4, стр.1.

Типография издательства «Радио и связь»,
127473 Москва, 2-й Щемиловский пер., 5/4, стр.1.