

**В. С. Смирнов**



**ТЕОРИЯ  
ОБРАБОТКИ  
МЕТАЛЛОВ  
ДАВЛЕНИЕМ**

В. С. СМЕРНОВ

# ТЕОРИЯ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по специальности «Обработка металлов давлением»



Москва «МЕТАЛЛУРГИЯ» 1973

## АННОТАЦИЯ

Изложена теория процессов обработки металлов давлением с использованием основных положений теории упругости и пластичности, металловедения и физики металлов.

Учебник написан применительно к программам курсов, утвержденных для металлургических, политехнических и машиностроительных вузов. Предназначен для студентов, специализирующихся в области обработки металлов давлением и смежных с ней областей, а также может быть использован аспирантами, научными и инженерно-техническими работниками.

**Василий Сергеевич СМЕРНОВ**

**ТЕОРИЯ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ**

Редактор **Б. А. Прудковский**  
Художественный редактор **Д. В. Орлов**  
Технический редактор **В. В. Баталова**  
Корректоры **В. Б. Левин, Л. И. Тубина**  
Переплет художника **Б. Г. Баймана**

Сдано в набор 7/II 1973 г.	Подписано в печать 27/VII 1973 г.	T-13002.
Формат бумаги 60×90 <sup>1</sup> / <sub>16</sub> ,	бумага типографская № 2.	Печ. л. 31,0.
Тираж 13500 экз.	Заказ 127.	Изд. № 5574.
		Уч.-изд. л. 34,81.
		Цена 1 р. 38 к.

Издательство «Металлургия», 119034, Москва, Г-34, 2-й Обыденский пер., д. 14

Подольская типография Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета Министров СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли  
г. Подольск, ул. Кирова, д. 25

© Издательство «Металлургия», 1973

# Оглавление

Предисловие . . . . .	7
Введение . . . . .	9

## Часть первая

### ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

<b>Глава I. Упругая и пластическая деформации . . . . .</b>	<b>15</b>
1. Общее представление о механизмах упругой и пластической деформаций . . . . .	15
2. Дефекты в кристаллах . . . . .	18
3. Общие свойства дислокаций . . . . .	20
4. Краевая дислокация . . . . .	22
5. Винтовая дислокация . . . . .	23
6. Смешанная дислокация . . . . .	24
7. Полные и частичные дислокации . . . . .	25
8. Энергия дислокации и дислокационные реакции . . . . .	25
9. Сила, действующая на дислокацию . . . . .	27
10. Плотность дислокаций . . . . .	29
11. Скорость дислокаций и длина их пробега . . . . .	30
12. Возникновение дислокаций . . . . .	31
13. Перемещение дислокаций при скольжении . . . . .	33
14. Перемещение дислокаций при диффузии . . . . .	39
<b>Глава II. Теория напряжений и деформаций . . . . .</b>	<b>41</b>
1. Величины, характеризующие напряженное состояние тела . . . . .	41
2. Величины, характеризующие деформацию тела . . . . .	45
3. Уравнения совместности . . . . .	48
4. Связь между деформациями и напряжениями . . . . .	50
5. Плоское напряженное состояние и плоская деформация . . . . .	50
6. Дифференциальные уравнения равновесия для плоской задачи . . . . .	52
7. Условия на контуре для плоской задачи . . . . .	54
8. Нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке . . . . .	56
9. Дифференциальные уравнения равновесия и условия на контуре для трехмерной задачи . . . . .	57
10. Главные напряжения . . . . .	58
11. Максимальные касательные напряжения . . . . .	62
12. Октаэдрические напряжения . . . . .	63
13. Главные деформации и октаэдрический сдвиг . . . . .	65
<b>Глава III. Основные законы теории упругости и пластичности . . . . .</b>	<b>66</b>
1. Обобщенный закон упругости . . . . .	66
2. Закон изменения объема. Конечные деформации . . . . .	68
3. Закон скалывающего напряжения. Условие пластичности Сен-Венана . . . . .	72
4. Энергетическое условие пластичности . . . . .	78

5. Приближенные условия пластичности . . . . .	81
6. Интерпретация кривой упрочнения металлов с позиций теории дислокаций . . . . .	83
7. Закон связи обобщенного напряжения с обобщенной деформацией . . . . .	86
<b>Глава IV. Определение напряжений и деформаций в упругой зоне . . . . .</b>	<b>89</b>
1. Основные уравнения теории упругости и методы их решения . . . . .	89
2. Плоская задача теории упругости . . . . .	90
3. Функция напряжений для плоской задачи . . . . .	91
4. Распределение напряжений, симметричное относительно оси . . . . .	94
5. Полуобратный и обратный методы решения задач . . . . .	98
6. Напряжения от сосредоточенной силы, приложенной в точке полубесконечной пластинки . . . . .	99
7. Напряжения при сжатии цилиндра в условиях плоской деформации . . . . .	101
8. Случай отсутствия осевой симметрии при плоской деформации . . . . .	102
9. Контактная задача Герца . . . . .	106
10. Плоская задача теории упругости и взаимодействие дислокаций . . . . .	111
<b>Глава V. Определение напряжений и деформаций в пластической зоне . . . . .</b>	<b>113</b>
1. Основные уравнения теории малых упруго-пластических деформаций . . . . .	113
2. Плоская задача в прямоугольных координатах . . . . .	114
3. Плоская задача в цилиндрических координатах . . . . .	116
4. Остаточные напряжения . . . . .	122
5. Решение задач с использованием гипотезы плоских сечений . . . . .	126
6. Замечание о приближенном решении плоской задачи . . . . .	132
7. Теория пластического течения . . . . .	137
8. Метод характеристик . . . . .	142
9. Вариационные методы . . . . .	150
Список литературы . . . . .	159

## Часть вторая

### ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ, КРУЧЕНИЕ, РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

<b>Глава VI. Изгиб и кручение . . . . .</b>	<b>160</b>
1. Чистый изгиб . . . . .	160
2. Продольный изгиб . . . . .	162
3. Чистое кручение . . . . .	165
4. Чистый изгиб кривого бруса . . . . .	167
<b>Глава VII. Растяжение . . . . .</b>	<b>169</b>
1. Диаграммы растяжения . . . . .	169
2. Влияние химического состава и температуры на сопротивление деформации и пластичность . . . . .	172
3. Возврат и рекристаллизация с позиций теории дислокаций . . . . .	178
4. Последствие и релаксация . . . . .	181
5. Скорость деформации, прочность и пластичность . . . . .	184
6. Влияние ультразвуковых колебаний на механические свойства металлов . . . . .	191
7. Влияние радиоактивных излучений на прочность и пластичность . . . . .	194
8. Анизотропия свойств текстурованных материалов . . . . .	195
9. Способы повышения прочности и пластичности . . . . .	197

10. Оценка пластичности металлов . . . . .	200
11. Разрушение . . . . .	202
12. Разрушение металлов и технология . . . . .	210

**Глава VIII. Сжатие . . . . . 213**

1. Трение на поверхности контакта инструмента с металлом . . . . .	213
2. Скольжение, торможение и застой на поверхности контакта . . . . .	225
3. Условия наименьшего периметра и геометрического подобия . . . . .	228
4. Краевая задача сжатия . . . . .	231
5. Напряженное состояние при сжатии . . . . .	236
6. Зоны затрудненной деформации . . . . .	240
7. Влияние внешних зон . . . . .	243
8. Изменение контактных напряжений по ширине полосы . . . . .	245
9. Полное давление и среднее контактное напряжение . . . . .	247
10. Работа, затрачиваемая на сжатие, и энергия дислокаций . . . . .	250
11. Операцииковки . . . . .	253
12. Операции объемной штамповки . . . . .	256
13. Особенности деформации импульсными нагрузками . . . . .	258

Список литературы . . . . .	260
-----------------------------	-----

**Часть третья  
ВОЛОЧЕНИЕ И ПРЕССОВАНИЕ**

**Глава IX. Волочение . . . . . 261**

1. Способы волочения . . . . .	261
2. Факторы, влияющие на процесс волочения . . . . .	264
3. Краевая задача волочения . . . . .	270
4. Напряженное состояние при волочении . . . . .	273
5. Усилие и напряжение волочения . . . . .	277

**Глава X. Прессование . . . . . 278**

1. Способы прессования . . . . .	278
2. Особенности деформированного состояния при прессовании . . . . .	280
3. Факторы, влияющие на процесс прессования . . . . .	285
4. Краевая задача прессования . . . . .	292
5. Напряженное состояние при прессовании . . . . .	298
6. Гидростатическое и газовое прессование . . . . .	301
7. Операции листовой штамповки, связанные с прессованием . . . . .	302
8. Особенности прессования металлических порошков . . . . .	304
9. Расчет напряжений и деформаций при прессовании металлических порошков . . . . .	308

Список литературы . . . . .	312
-----------------------------	-----

**Часть четвертая  
ПРОДОЛЬНАЯ ПРОКАТКА**

**Глава XI. Краевая задача плоской прокатки . . . . . 314**

1. Условия захвата . . . . .	314
2. Опережение и отставание . . . . .	317
3. Участки скольжения и прилипания . . . . .	325
4. Внеконтактная деформация при прокатке . . . . .	329
5. Контактные напряжения . . . . .	331

<b>Глава XII. Напряженное состояние при прокатке</b> . . . . .	<b>337</b>
1. Напряженное состояние в объеме, ограниченном поверхностями контакта с валками . . . . .	337
2. Остаточные напряжения . . . . .	345
3. Зоны затрудненной деформации . . . . .	349
4. Нейтральное сечение и очаг деформации . . . . .	352
5. Влияние внешних зон . . . . .	356
6. Напряжения во внешних частях полосы . . . . .	363
7. Напряженное состояние и образование текстуры при прокатке . . . . .	370
<b>Глава XIII. Уширение</b> . . . . .	<b>374</b>
1. Факторы, влияющие на уширение . . . . .	374
2. Кинематические условия процесса прокатки с уширением . . . . .	385
3. Статические условия при прокатке с уширением . . . . .	388
4. Система уравнений для расчета уширения при прокатке и ее решение . . . . .	391
<b>Глава XIV. Давление на валки и момент прокатки</b> . . . . .	<b>398</b>
1. Давление на валки и среднее контактное напряжение . . . . .	398
2. Учет влияния ширины полосы, внешних зон, скорости и наклепа . . . . .	403
3. Момент и мощность при прокатке на гладкой бочке . . . . .	407
4. Давление металла на валки при прокатке в калибрах . . . . .	411
<b>Глава XV. Особые случаи прокатки</b> . . . . .	<b>419</b>
1. Прокатка многослойных металлов . . . . .	419
2. Напряженное состояние при прокатке многослойных металлов . . . . .	422
3. Прокатка в вакууме и нейтральных средах . . . . .	426
4. Прокатка металлических порошков . . . . .	430
5. Прокатка в ультразвуковом поле . . . . .	435
6. Бесслитковая прокатка . . . . .	439
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>443</b>

## Часть пятая

### ПОПЕРЕЧНО-ВИНТОВАЯ ПРОКАТКА

<b>Глава XVI. Поперечная прокатка</b> . . . . .	<b>444</b>
1. Контактная поверхность и обжатие при поперечной прокатке . . . . .	444
2. Деформированное и напряженное состояние в начальный момент прокатки . . . . .	447
3. Деформированное и напряженное состояние в установившейся стадии прокатки . . . . .	454
4. Дислокационный механизм деформации и разрушения при поперечной прокатке . . . . .	461
5. Влияние важнейших факторов на деформацию и разрушение . . . . .	471
<b>Глава XVII. Косая (винтовая) прокатка</b> . . . . .	<b>477</b>
1. Кинематические условия процесса винтовой прокатки . . . . .	477
2. Площадь поверхности контакта заготовки с валками при прошивке . . . . .	483
3. Деформированное и напряженное состояние при прошивке . . . . .	486
4. Давление на валки прошивного стана . . . . .	490
5. Давление на оправку прошивного стана . . . . .	492
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>496</b>

## Предисловие

Обработка металлов давлением базируется на основных положениях механики сплошных сред и физики металлов.

В книге предпринята попытка их синтезировать. Такой синтез невозможен, если оставаться только на позициях механической теории обработки металлов давлением.

Зная законы изменения напряжений и деформаций в объеме тела, можно говорить о привлечении достижений современного физического металловедения с целью дальнейшего проникновения в глубины строения металлических веществ и открытия закономерностей поведения этих веществ при технологической обработке.

Металл гораздо более чутко реагирует на изменение внешних факторов, чем обычно полагают, он «живет» по своим внутренним сложным законам. Ключ к открытию этих законов лежит в объединении учения о напряжениях и деформациях макроскопического характера (изучаемых в теории упругости и пластичности) с представлениями о напряжениях и деформациях микроскопического характера, порождаемых прежде всего движением дислокаций и изучаемых физикой твердого тела.

Теория обработки металлов давлением — это научная дисциплина, которая должна объяснить многие явления, наблюдаемые при осуществлении технологических процессов.

В небольшой по объему книге, какой по необходимости должен быть учебник, невозможно отразить это многообразие. По мнению автора, в этом нет необходимости. Основная задача состоит в том, чтобы научить будущего инженера творчески мыслить, подготовить его к самостоятельному решению новых задач при практической деятельности после окончания высшего учебного заведения.

Методически книга построена так. В основу изложения положено простое, но достаточно полное решение плоской задачи пластичности и решения ряда одномерных задач, используемых в качестве граничных условий. Исходя из этого, проводится анализ закономерностей конкретных технологических процессов и сделана попытка показать всю сложность природы процессов обработки металлов давлением. Наконец, автор хотел бы дать в руки читателю надежный научный метод для дальнейшего познания технологии, развития ее практики и самой теории.

Книга состоит из пяти частей. В первой части излагаются основные понятия механики упругого и пластического тела. Во II—V



частях дана теория пластического изгиба, кручения, растяжения, сжатия, волочения, прессования, продольной, поперечной и кривой прокатки.

Неотъемлемой частью учебника является сборник задач по теории обработки металлов давлением. Подобно учебнику, он также состоит из пяти частей и соответствующего числа одноименных глав. Для закрепления знаний настоятельно рекомендуется одновременно с изучением очередной главы учебника решать задачи и прорабатывать соответствующие примеры из учебника.

Автор выражает благодарность чл.-корр. АН СССР А. И. Лурье, заслуженному деятелю науки и техники РСФСР Ю. И. Ягню за ряд ценных замечаний по содержанию рукописи, всем преподавателям и сотрудникам кафедры пластической обработки металлов физико-металлургического факультета ЛПИ за помощь в расчетах и оформлении рукописи.

## Введение

Научно-техническая революция, охватившая все сферы общественного развития, ускоряет темпы развития металлургии, переводя ее на качественно новый уровень. Велика заслуга металлургов в создании могучей промышленности нашей Родины.

В царской России в 1913 г. было произведено всего лишь 4,3 млн. т стали, столько же чугуна и 3,5 млн. т проката. Доля металлургии России в мировой выплавке стали составляла лишь 5,3%. Сейчас же (1970 г.) по производству стали (116 млн. т), чугуна (85,9 млн. т) и проката (80,6 млн. т) наша страна вышла на второе место в мире. Мировое производство стали в 1970 г. достигло 625 млн. т. Доля Советского Союза в ее выплавке составила 18,6%. Производство цветных металлов и сплавов увеличилось в еще большей мере.

Обработка металлов давлением является завершающим этапом в производстве изделий из металлов и сплавов. Назначение этого этапа заключается в том, чтобы изменить геометрическую форму и размеры тела, а также придать ему определенные механические и физические свойства. Эта же цель в той или иной мере может быть достигнута и иными путями, главными из которых являются литье и обработка резанием. Вопрос о выборе вида обработки металлов для получения изделий определенной геометрической формы и с необходимыми механическими, физическими и физико-химическими свойствами определяется технико-экономическими соображениями применительно к данным конкретным условиям производства.

Типичным является применение всех трех упомянутых способов обработки в такой последовательности: 1) литье; 2) обработка давлением; 3) обработка резанием (по возможности в качестве отделочной операции).

Существуют следующие основные способы обработки металлов давлением:

1. К о в к а является наиболее древним способом обработки металлов, по-видимому, он был известен людям еще за 4 тысячи лет до нашей эры.

2. В о л о ч е н и е впервые начали применять за 3 тысячи лет до нашей эры. Сохранились документы и образцы материальной культуры, из которых явствует, что процесс волочения успешно применяли на территории нашей Родины между первым и вторым тысячелетиями до нашей эры. Высокой степени технического совершен-

ства процесс волочения получил в IX—X вв. на Киевской Руси. Здесь в больших количествах производили проволоку для кольчуг на остроумно сконструированных станках, которые приводились в движение при помощи колес.

3. Прокатка появилась много позжековки и волочения. Описание конструкции прокатного стана впервые встречается в трудах Леонардо да Винчи, которые были опубликованы в 1495 г., в связи с чем эту дату иногда считают годом изобретения прокатного стана. Однако первый прокатный стан был изготовлен значительно ранее, поскольку на нем прокатывали заготовки из благородных металлов для чеканки монет и листового свинца для кровли зданий.

4. Прессование возникло много позжековки, волочения и прокатки. Первый механизм для прессования был построен лишь в 1894 г. Процесс прессования характеризуется высокой удельной затратой энергии на его осуществление. Этим, по-видимому, объясняется его позднее развитие по сравнению с другими процессами. Прессование применяется главным образом для обработки цветных металлов и их сплавов, хотя в последнее время его успешно используют и для изготовления некоторых изделий из стали и других высокопрочных сплавов.

Каждый из упомянутых способов обработки металлов давлением имеет большое количество разновидностей и свои особенности.

Теория обработки металлов давлением формулирует основные закономерности, которым подчиняются технические процессы обработки металлов давлением. Это дает возможность рационально строить существующие и проектируемые технологические процессы, предвидеть возможные их нарушения и принимать обоснованные меры к устранению последних.

Вместе с тем в теории обработки металлов давлением разрабатываются методы расчета напряжений и деформаций, возникающих в металле при его обработке. На этой основе строят расчет режима деформации (обжатий, вытяжек), давлений на инструмент, затрачиваемой работы, моментов и мощности, необходимых для осуществления данного технологического процесса.

Всякий технологический процесс обработки металлов давлением представляет собой сложный комплекс физических и физико-химических явлений. Поэтому теория обработки металлов давлением тесно связана с другими смежными ей науками и в первую очередь с теорией упругости, теорией пластичности, физикой металлов и металловедением.

Свойство упругости присуще всем телам в природе. Оно заключается в том, что после снятия приложенных к телу нагрузок оно восстанавливает свою форму и объем полностью или частично.

Теория упругости изучает действие сил на упругие тела и определяет возникающие при этом напряжения и деформации.

Если после снятия нагрузки металлическое твердое тело не приобретает исходные форму и объем, то это означает, что тело деформировано пластически. Теория пластичности изучает дейст-

вие сил на пластические тела и определяет возникающие при этом напряжения и деформации.

Основные гипотезы, которые используют в теории упругости: о сплошности тела, об отсутствии напряжений в теле перед приложением нагрузки, о наличии однозначной связи между напряжениями и деформациями.

В теории пластичности последнюю гипотезу часто заменяют предположением об идеально пластическом жестком теле, т. е. полагают, что по достижении предела текучести напряжение перестает зависеть от деформации, а упругими деформациями пренебрегают.

Теория упругости подразделяется на математическую, прикладную и сопротивление материалов. Теория пластичности может быть разделена на три раздела — математическую, прикладную и инженерную.

В математических теориях упругости и пластичности сформулированы наиболее общие положения, законы механики деформируемых сред, а также разрабатываются методы решения трехмерных задач в наиболее общем виде.

Прикладные теории упругости и пластичности, построенные на основе выводов математических теорий, необходимы для решения инженерных задач. Сопротивление материалов и инженерная теория пластичности решают соответствующие одномерные задачи.

Для теории обработки металлов давлением наибольшее значение имеют прикладная и инженерная теории пластичности, а также сопротивление материалов.

Теория пластичности в течение последнего шестидесятилетия развивалась на основе закономерностей и практических данных о поведении металлов в пластическом состоянии (механика сплошных сред, физика твердого тела, металловедение). К числу ученых, внесших значительный вклад в развитие математической теории пластичности, относятся А. А. Ильющин, Ю. Н. Работнов, В. В. Соколовский, С. А. Христианович, В. В. Новожилов, Л. М. Качанов, А. Надаи, Ш. Гелеи, Р. Хилл.

Работы Н. С. Курнакова, А. А. Бочарова, Н. Н. Давиденкова, И. А. Одингa, В. Д. Кузнецова, Я. И. Френкеля и других значительно расширили представления о пластическом поведении и разрушении твердых тел. Исследованиями С. И. Губкина и его последователей, Н. И. Корнеева, И. Г. Скугарева и других созданы физико-химические основы пластической обработки металлов.

Теория обработки металлов давлением как прикладная наука является результатом последовательного развития теории пластичности. Наиболее крупный вклад в создание и последующее развитие теории обработки давлением внесен А. И. Целиковым, И. М. Павловым, А. Ф. Головиным, А. П. Чекмаревым, В. П. Северденко, П. И. Полухиным, И. Я. Тарновским, А. А. Королевым, В. Н. Выдриным, П. С. Истоминым, И. Л. Перлиным, С. И. Губкиным, А. Д. Томленовым, М. В. Сторожевым, Е. А. Поповым, Е. П. Унксовым, Г. А. Смирновым-Аляевым.

Раннее теория обработки металлов давлением ограничивалась расчетом усилий и работы деформации: около 30 лет тому назад были решены многие одномерные задачи. Последующее развитие теории пластической обработки металлов привело к постановке двумерных задач. Цель этих решений состоит не только в определении усилий, но и в описании напряженно-деформированного состояния, что расширяет наше понимание о поведении металлов в процессах пластической обработки.

В последнее время в работах И. Я. Тарновского, А. А. Поздеева, В. Л. Колмогорова и других нашли применение так называемые энергетические принципы расчета усилий и деформаций. Эти методы позволяют приближенно решать двумерные и трехмерные задачи (осадка, прокатка с уширением и т. д.).

Но, тем не менее, наиболее развитым разделом теории обработки металлов давлением является расчет усилий. На основании гипотезы плоских сечений (см. гл. V) получены соответствующие формулы и разработана методика расчета усилий применительно к стационарным процессам прокатки, волочения, прессования, а также для ряда операцийковки и листовой штамповки. Менее разработаны методы определения физических параметров (предел текучести при высоких температурах, коэффициент трения, учет влияния скорости деформации и т. д.).

С применением достижений теории обработки металлов давлением созданы новые технологические процессы, машины и механизмы. За годы Советской власти построены сотни новых прокатных станов. Высокая и все возрастающая производительность их базируется на результатах экспериментальных и теоретических работ по определению деформаций и усилий при прокатке.

На основании обширных теоретических и опытных работ, проведенных в СССР в области поперечно-винтовой и продольной прокатки труб, построены высокопроизводительные трубопрокатные агрегаты оригинальной конструкции. Теоретические расчеты и опыты по исследованию напряженно-деформированного состояния в процессах поперечно-винтовой прокатки способствовали созданию новых технологических процессов прокатного производства (заготовки для шатунов, шаров, шестерен, ребристых труб и т. п.). Приоритет советских ученых и инженеров в этой области общепризнан.

Существенные достижения в области гидростатического и газопрессования получены на основании работ, производимых в АН СССР под руководством И. И. Верещагина. Этим исследованиям предшествовали многочисленные работы в области обычного прессования.

Обширный комплекс исследований в областиковки, штамповки, волочения, прессования и прокатки (форма инструмента, смазка, температурно-скоростной режим) благотворно сказался на развитии технологических процессов; повысились производительность и качество продукции, появились новые конструкции установок (работы А. И. Целикова, В. В. Носаля и других) и новые техно-

логические процессы (гидроvolочение, импульсная штамповка), прокатка в вакууме тугоплавких моно- и биметаллов (работы А. В. Крупина).

Характерным для последнего пятидесятилетия является все более широкое использование комбинированных процессов, содержащих в себе прокатку и сварку (производство труб и некоторых фасонных профилей), непрерывную разливку и прокатку (производство слябов и листов), гибку и прокатку (гнутые профили), литье и штамповку.

Тесное слияние процессов разливки стали и сплавов, обработки металлов давлением и термической обработки привело к внедрению процессов с использованием тепла разливки для последующей деформации или тепла, выделяющегося при деформации для последующей термической обработки.

Комбинированные процессы характерны и для порошковой металлургии (прессование из порошков различных изделий, прокатка пористых, беспористых лент и других изделий). При производстве машин стремятся к увеличению массы штампуемых деталей (секционная штамповка, штампованные детали); к уменьшению объема отходов металла и, в частности, идущего в стружку (безоблойная, малоотходная и безуклонная горячая штамповка, штамповка и накатка шестерен с готовым зубом); значительное повышение точности размеров деталей (точная холодная штамповка, калибровка); термомеханическая обработка деталей и т. д.

Развитие этих процессов базируется в нашей стране на результатах, достигнутых в теории литья, пластической обработки металлов, сварки, термической обработки и ряда других отраслей науки и техники.

XXIV съезд КПСС утвердил программу дальнейшего развития советской металлургии. В 1975 г. выплавка стали в нашей стране достигнет 142—150 млн. т.

Существующие методы производства стали получают усовершенствование в процессе их дальнейшего развития: будут применяться крупные мартеновские и дуговые печи, кислородные конвертеры с весом плавки до 350 т.

Производство готового проката достигнет 101—105 млн. т. Выпуск листового проката в 1975 г. будет доведен до 42—45% от общего выпуска проката. В связи с этим в ближайшие годы будет продолжаться интенсивное строительство непрерывных прокатных станов.

В девятом пятилетии в 1,4 раза увеличится выпуск продукции цветной металлургии, в том числе алюминия на 50—60% меди на 36—40%. Производительность труда в черной металлургии должна повыситься в 1,3 раза, а в цветной — не менее чем в 1,4 раза.

Успех решения этих задач зависит в значительной мере от качества выпускаемых советской высшей технической школой специалистов. Опыт развития металлургии показывает, что со времени составления первого документа, обосновывающего необходимость развития принципиально новой технологии, до полного претворе-

ния ее в жизнь проходит 10 и более лет. Поэтому прогнозы развития материального производства по его техническому уровню на этот срок вполне достоверны. Это дает возможность достаточно четко сформулировать содержание учебных планов на отрезок времени 15—20 лет, последовательно внося в них необходимые коррективы, связанные с научно-техническим прогрессом. Например, в последние годы довольно четко наметилась тенденция к сочетанию непрерывной разливки стали с прокаткой ее на непрерывных станах и с дальнейшей термической обработкой. На современных агрегатах цветной металлургии непрерывная разливка и пластическая обработка уже органически сочетаются в одном агрегате.

Таким образом, уже сейчас ощущается потребность в специалистах широкого профиля, хорошо знающих теорию и технологию отливки заготовок, их пластической и термической обработки. Настоящая книга написана с таким расчетом, чтобы способствовать подготовке таких специалистов.

## глава

### Упругая и пластическая деформации

#### 1. Общее представление о механизмах упругой и пластической деформаций

Твердые металлические тела при воздействии на них внешних сил изменяют свои размеры и форму. Такое изменение носит название деформации. Деформация представляет собой совокупность трех взаимно накладывающихся и последовательно идущих процессов: упругой деформации, пластической деформации и разрушения.

Если тело после снятия сил, вызывающих деформацию, полностью восстанавливает свои первоначальную форму и размеры, то такая деформация называется упругой или обратимой.

В процессе упругой деформации тело накапливает потенциальную энергию. При разгрузке эта потенциальная энергия расходуется на восстановление размеров и формы тела.

Между атомами твердого тела одновременно действуют две силы притяжения при больших расстояниях между ними и отталкивания при малых расстояниях. Силы притяжения имеют обычно электростатическую природу (при металлической связи) или обусловлены взаимодействием электронов валентных оболочек (при ковалентной связи). Силы отталкивания объясняются деформацией внутренних электронных оболочек при их соприкосновении в случае малых расстояний между ядрами атомов. Определенное соотношение между силами отталкивания и притяжения обеспечивает стабильность кристаллической решетки.

Энергию взаимодействия двух атомов можно представить в виде

$$U = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n},$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $m$  и  $n$  — постоянные.

Первый член описывает влияние сил притяжения, второй — отталкивания,  $r$  — расстояние между атомами; поэтому  $n > m$ .

Поскольку величина  $U$  выражает собой потенциальную энер-



гию, то первая производная от нее по  $r$  есть усилие  $P$ , которое мы можем рассматривать как равнодействующую межатомных сил:

$$P = \frac{dU}{dr} = \frac{Am}{r^{m+1}} - \frac{Bn}{r^{n+1}}. \quad (1)$$

Обозначим нормальное расстояние между атомами через  $r_0$ . При  $r=r_0$  силы притяжения уравниваются силами отталкивания и равнодействующая межатомных сил равна нулю. Если  $r=r_0+\Delta r$ , то возникает упругая сила, которую можно вычислить по уравнению (1).

При упругой деформации изменение расстояний между атомами  $\Delta r$  всегда меньше параметра кристаллической решетки  $r_0$ . В этом случае усилие  $P$  можно разложить в ряд по степеням  $\Delta r$ :

$$P = P(r_0) + \frac{1}{1!} P'(r_0) \Delta r + \frac{1}{2!} P''(r_0) \Delta r^2 + \frac{1}{3!} P'''(r_0) \Delta r^3 + \dots$$

На основании изложенного выше  $P(r_0) = 0$ . Обозначим:

$$\frac{P'(r_0)}{1!} = a_1; \quad \frac{P''(r_0)}{2!} = a_2; \quad \frac{P'''(r_0)}{3!} = a_3.$$

Тогда записанный выше ряд примет вид:

$$P = a_1 \Delta r + a_2 \Delta r^2 + a_3 \Delta r^3 + \dots$$

Пренебрегая членами ряда, содержащими  $\Delta r$  в степени больше 1, получим:  $P = a_1 \Delta r$ .

Разделим обе части этого равенства на  $r_0^2$ :

$$\frac{P}{r_0^2} = \frac{a_1}{r_0} \frac{\Delta r}{r_0}.$$

Отношение  $P/r_0^2$  мы можем трактовать как напряжение, а отношение  $\Delta r/r_0$  — как относительную деформацию.

В таком случае величина  $a_1/r_0$  имеет размерность напряжения. Введем обозначения:

$$\frac{P}{r_0^2} = \sigma; \quad \frac{\Delta r}{r_0} = e; \quad \frac{a_1}{r_0} = E.$$

Таким образом, мы пришли к равенству:  $\sigma = Ee$ .

Это равенство представляет собой известный закон теории упругости (напряжение прямо пропорционально относительной деформации), который был сформулирован Гуком на основании опытных данных в 1676 г.

Аналогичный вывод можно привести и для сдвиговой деформации. В результате получим:

$$\tau = G\varphi;$$

где  $\tau$  — касательное напряжение;

$G$  — модуль сдвига;

$\phi$  — угол перекоса решетки относительно равновесной конфигурации, т. е. упругая деформация сдвига.

Из изложенного следует, что при упругой деформации расстояние между атомами изменяется так, что оно становится меньше или больше нормального, характеризуемого параметром атомной решетки. Возможно также изменение равновесных углов между межатомными связями, но соседние атомы остаются. В результате изменятся объем тела, возникают напряжения и увеличивается запас потенциальной энергии тела. При разгрузке потенциальная энергия в большей степени расходуется на восстановление размеров и формы тела, а остальная ее часть — на преодоление так называемого внутреннего трения, т. е. эта избыточная часть потенциальной энергии переходит в тепло.

Изменение объема большинства металлов в процессе деформации сравнительно невелико. Например, при всестороннем сжатии под давлением  $1000 \text{ Мн/м}^2$  ( $100 \text{ кг/мм}^2$ ) объем железа уменьшается на 0,6, меди — на 1,3%. Однако из этого правила существуют и исключения: цезий при давлении  $1500 \text{ Мн/м}^2$  ( $150 \text{ кг/мм}^2$ ) упруго уменьшает объем на 30%.

Величина  $E$  носит название модуля нормальной упругости. Она связана с модулем сдвига  $G$  таким отношением:

$$G = \frac{E}{2(1+m)}, \quad (2)$$

где  $m \leq 0,5$  — коэффициент Пуассона.

Если после удаления приложенных сил тело не восстанавливает полностью первоначальную форму и размеры, то такая деформация называется остаточной. Всякая остаточная деформация сопровождается упругой. Сумма упругой и остаточной деформаций является полной деформацией. После снятия нагрузок форма тела частично восстанавливается в результате упругой деформации. Таким образом, остаточная или пластическая деформация есть часть полной деформации, не исчезающая после удаления причины, ее вызывающей.

Напряжение, при котором начинается пластическая деформация, называют пределом текучести. Предел текучести обычно определяется из опытов на растяжение.

Но такое определение неоднозначно, так как зависит от возможности точного определения остаточной деформации. Для технических целей вводят понятие макроскопического предела текучести как напряжения, при котором остаточная деформация достигает величины  $\sim 0,2\%$ . Пластическая деформация, происходящая при напряжениях, меньших макроскопического предела текучести, называется микроскопической. Наименьшее напряжение, при котором начинается микроскопическая деформация, называется микроскопическим пределом текучести. Очевидно, что понятие микроскопического предела текучести также условно, так как зависит от величины пластической деформации, которую еще можно обнаружить в данном эксперименте.

При пластической деформации внешние силы, действующие на

тело, совершают работу, которая частично переходит во внутреннюю энергию тела, но в основном идет на преодоление сопротивления пластической деформации, т. е. переходит в тепло. Это тепло может быть использовано, например, для добавочного нагрева тела.

Таким образом, при пластической деформации атомы кристаллической решетки необратимо меняют своих соседей. Многочисленные исследования показали, что в основном пластическая деформация идет за счет сдвигов одних атомных плоскостей относительно других вдоль определенных кристаллографических направлений. Такие смещения получили название скольжения (рис. 1).

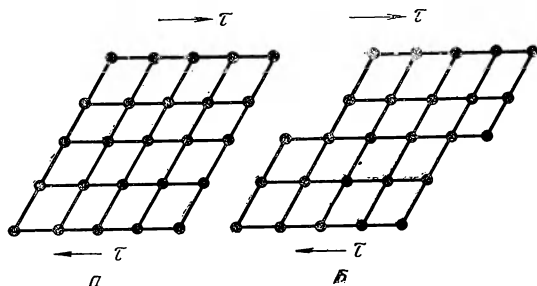


Рис. 1. Схема скольжения при пластической деформации:  
 а — до элементарного сдвига; б — после сдвига

Плоскости или полосы скольжения представляют собой некоторую совокупность атомных слоев в зоне деформации (тысяча и более), которые претерпевают некоторое смещение по отношению к соседям. В начале процесса пластической деформации в промежутках между полосами скольжения пластическая деформация отсутствует. Величина этих промежутков равна примерно одному микрону. В дальнейшем весь объем тела оказывается охваченным деформацией.

Скольжение (сдвиг) происходит под действием скалывающих напряжений. Сравнение результатов расчета с опытными данными показывает, что вычисленные для идеального кристалла значения скалывающего напряжения в сотни раз превышают величины, найденные из опыта.

Можно предположить, что сдвиг не происходит одновременно по всей плоскости скольжения, и поэтому величины реальных напряжений значительно меньше расчетных. Такое явление объясняется наличием нарушений правильной кристаллической структуры и существованием различного рода дефектов в кристаллической решетке.

## 2. Дефекты в кристаллах

Колеблющиеся около положения равновесия атомы могут выходить из этого положения, перемещаться внутри кристаллической

решетки и даже покидать ее в процессе сублимации. Вышедший из положения равновесия атом оставляет после себя в узле кристаллической решетки пустое место — «вакансию» или «дырку». Вакансия — это простейший дефект кристаллической решетки и наличие его приводит к искажению решетки на расстоянии трех — пяти ее параметров от дефекта.

Атомы, вышедшие из положения равновесия в узлах решетки, называются внедренными. Вакансии и внедренные атомы независимо друг от друга перемещаются по решетке, причем скорость этого перемещения резко возрастает с увеличением температуры. Так, у внедренных атомов скорость перемещения достигает величины  $1 \text{ м/сек}$  при  $T \approx 0,4 T_{\text{пл}}$ , а у вакансий при  $T \approx 0,9 T_{\text{пл}}$  ( $T_{\text{пл}}$  — температура плавления). При столкновении вакансии и внедренного атома последний занимает вакантный узел решетки, т. е. оба дефекта исчезают.

Вакансии и внедренные атомы имеют небольшие собственные энергии — порядка 1 и 3 электрон-вольт соответственно. Поэтому термодинамическому равновесию соответствуют их высокие концентрации. Например, при  $T \ll T_{\text{пл}}$  вакантным является примерно каждый тысячный узел решетки. Равновесные концентрации внедренных атомов из-за их большей собственной энергии значительно (на 3—5 порядков) меньше, чем у вакансий, и ими обычно можно пренебречь.

При встрече вакансий могут образоваться дефекты различной величины, которые в некоторых случаях можно видеть невооруженным глазом.

Металлы с примесями образуют растворы внедрения и замещения, при этом появляются частицы вторичной фазы. Даже небольшое количество примесей сильно искажает решетку за счет несоответствия атомных радиусов основного металла и примесей. И хотя эти искажения при удалении от внедренного атома быстро уменьшаются (по закону  $\rho^{-3}$ ), но число их огромно. Поэтому они оказывают заметное влияние на механические свойства металлов.

Большую роль играют упругие поля напряжений, возникающие от частиц второй фазы, интенсивность которых уменьшается медленней, чем  $\rho^{-3}$ .

В процессе кристаллизации формируется блочная структура. Соседние блоки размером  $10^{-4}$ — $10^{-5} \text{ см}$  разориентированы в кристалле на углы до  $(1-3) \cdot 10^{-6} \text{ рад}$  ( $30-100'$ ). При усталостных испытаниях разориентация иногда достигает  $8,75 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$  ( $5 \text{ град.}$ ) и в этом случае уже трудно провести границу между блоками и зернами. Так образуются поверхности раздела, также являющиеся дефектами решетки. Интересно, что такие же большие разориентации соседних блоков ( $\sim 5 \text{ град.}$ ) возникают в некоторых случаях и при прокатке.

Если тело поликристаллическое, то число дефектов еще больше благодаря наличию микро- и макротрещин, образующихся при кристаллизации, наличию усадочных пор, раковин и поверхностей раздела между кристаллами. В целом число несовершенств в

кристаллической решетке исчисляется огромными величинами. Например, при линейном размере блока  $10^{-5}$  см в одном кубическом миллиметре металлического вещества будет около  $10^{12}$  блоков. Дефекты кристаллической решетки создают ее искажения. Последние вызывают неравномерность протекания различных процессов в металлах — деформации, разрушения, фазовых превращений и т. п. Дефекты кристаллической решетки принято подразделять на четыре группы. Точечные (нульмерные) дефекты — атомы примесей, вакансии (свободные узлы решетки), межузельные атомы (лишние атомы, расположенные вне узлов решетки); линейные (одномерные) дефекты; поверхностные (двумерные) — поверхности раздела всякого рода; объемные (трехмерные) — поры и частицы второй фазы.

Линейные, поверхностные и объемные дефекты в отличие от точечных не присущи материалу в равновесном состоянии, а формируются в результате неоднородности протекания кристаллизации и деформации реальных кристаллических тел. Из перечисленных несовершенств особый интерес представляют линейные, типичными представителями которых являются дислокации. Понятие о дислокациях положено в основу современных физических теорий о прочности и пластичности металлов в различных условиях.

### 3. Общие свойства дислокаций

Дислокация является линейным дефектом кристаллической решетки, т. е. линией, вдоль которой нарушены связи между соседними атомами в кристаллической решетке и число ближайших соседей каждого атома не соответствует координационному числу. Область вблизи оси дислокации, где искажения решетки очень велики, называется ее ядром. Размеры ядра дислокации равны двум-трем межатомным расстояниям. Вне области ядра искажения решетки малы, и их можно описывать методами линейной теории упругости.

Основными геометрическими характеристиками дислокации являются направление линии дислокации и вектор сдвига. Направление линии дислокации характеризуется единичным вектором, касательным к этой линии в данной точке.

Сопоставим идеальный кристалл без дефектов (рис. 2, а, в) с кристаллом, имеющим дислокации (рис. 2, б, г). Если окружить дислокацию контуром таким образом, чтобы он проходил по слабо упруго деформированной зоне решетки, и отсчитать число узлов в контуре, соответствующее числу узлов идеального кристалла, то контур кристалла с дислокацией окажется незамкнутым (рис. 2). Вектор  $b$ , замыкающий контур (вектор невязки), соответствует вектору сдвига в идеальной решетке. Этот вектор получил название вектора Бюргерса.

Напряжения вблизи оси дислокации велики и близки к пределу теоретической прочности. Поэтому атомы ядра дислокации легко смещаются, меняя своих ближайших соседей. Такое смещение

приводит к перемещению дислокации. Известны два типа движения дислокации — скольжение и переползание. Плоскость, проведенная через ось дислокации и вектор Бюргерса, называется плоскостью скольжения. Показано, что при движении дислокации в плоскости скольжения общее число нарушенных связей в кристалле остается постоянным. Следовательно, потенциальная энергия кристалла при скольжении дислокации сохраняется, а само движение является обратимым: при изменении знака напряжки дислокация может свободно вернуться в исходное положение. Скольжение дислокаций происходит при всех температурах (до  $\sim 1^\circ\text{K}$ ), а ско-

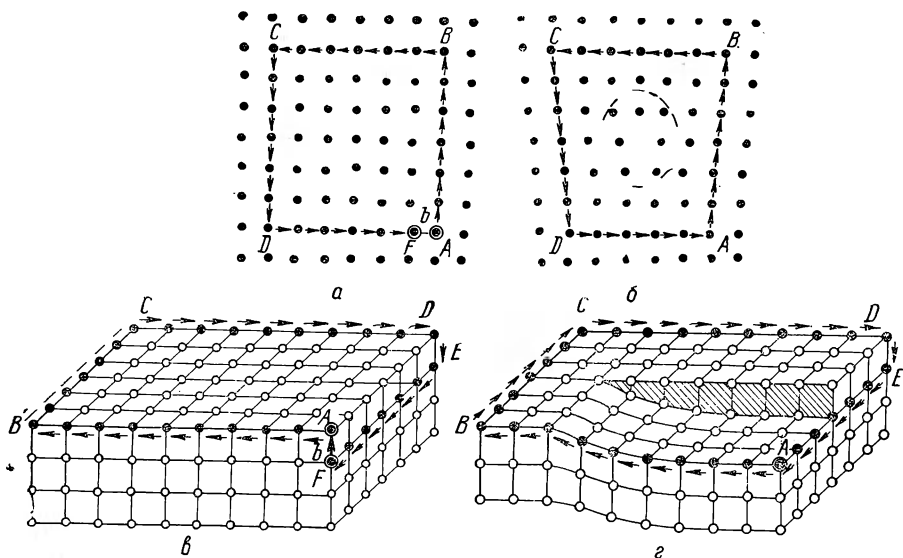


Рис. 2. Схема, поясняющая образование контура невязки краевой (а, б) и винтовой (в, г) дислокаций

рость движения дислокаций может быть весьма большой — порядка скорости звука.

Переползание — это движение дислокаций под углом к плоскости скольжения. Оно требует возникновения или поглощения точечных дефектов и поэтому протекает довольно медленно. Значительное увеличение скорости этого процесса происходит только при высоких температурах:  $T \geq 0,5 T_{\text{пл}}$ .

При движении дислокаций в плоскости скольжения одна половина кристалла смещается относительно другой на вектор Бюргерса дислокации вдоль плоскости скольжения, т. е. движение дислокации приводит к пластической деформации. Показано, что подавляющая часть пластической деформации обусловлена движением дислокаций. При выходе дислокаций на поверхность кристалла там образуется ступенька высотой порядка  $b$ .

Вектор Бюргерса характеризует не только величину пластического сдвига, но и меру искаженности кристаллической решетки.

Вектор Бюргерса не меняет свою величину и направление при перемещении контура Бюргерса вдоль линии дислокации. Поэтому дислокация не может обрываться внутри кристалла. Она либо образует замкнутые петли, либо проходит через весь кристалл, либо ветвится. Часто дислокации в кристалле образуют трехмерную сетку с узлами, в которых сходятся три-четыре дислокации. Обычно одна дислокация имеет расстояние между соседними узлами порядка  $10^{-6} \div 10^{-4}$  см, т. е. 30—300 нм (300—3000 Å), однако за узлом она переходит в другую дислокацию так, что, например, в зерне размером 1 мм суммарная длина дислокации будет  $10^{1/2} \times 10^{-8} = 3 \cdot 10^6$  а.

#### 4. Краевая дислокация

Дислокация, вектор Бюргерса которой перпендикулярен ее оси, называется краевой. Краевая дислокация представляет собой недостаток или избыток одной атомной полуплоскости. Край этой полуплоскости представляет линию с разорванными межатомными связями, т. е. является осью дислокации (рис. 3, Q). В соответствии с общим определением,

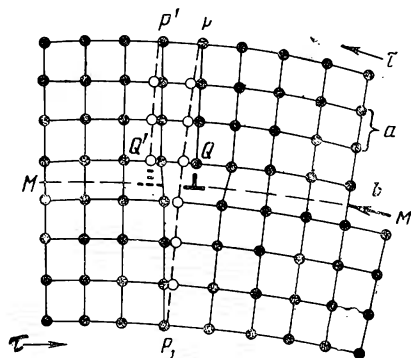


Рис. 3. Краевая дислокация:  $b$  — вектор сдвига;  $PQ$  — «лишняя полуплоскость»;  $P'Q'$  — положение этой полуплоскости при перемещении дислокации на одно межатомное расстояние;  $MM$  — плоскость скольжения;  $a$  — расстояние между атомными плоскостями, параллельными плоскости скольжения

плоскость скольжения проходит через ось дислокации перпендикулярно лишней полуплоскости. Лишняя по сравнению с идеальной решеткой атомная плоскость (экстроплоскость  $PQ$  на рис. 3) обычно называется положительной дислокацией и обозначается знаком  $\perp$ . Дислокация, расположенная под плоскостью скольжения, называется отрицательной и обозначается знаком  $\top$ . Из изложенного следует, что понятия «положительная» и «отрицательная» дислокации условны.

В области положительной дислокации решетка упруго сжата над плоскостью скольжения и растянута под ней. В результате,

если под действием касательных напряжений положительная и отрицательная дислокации перемещаются по направлению друг к другу и встречаются, то они аннигилируют — исчезают. Иными словами, из двух «лишних» формируется добавочная «нормальная» плоскость, но сдвиг на одно межатомное расстояние все же происходит.

В процессе перемещения дислокации происходит последовательное смещение всех атомов вдоль плоскости скольжения и при выходе дислокации за границу кристалла образуется ступенька. Заметим, что сдвиг в случае краевой дислокации направлен перпендикулярно оси последней.

## 5. Винтовая дислокация

Винтовой называется дислокация, вектор Бюргерса которой параллелен ее оси, т. е. при движении винтовой дислокации одна половина кристалла смещается относительно другой в направлении оси дислокации на величину  $b$  (рис. 4). За счет такого сдвига вокруг оси дислокации образуется винтовая поверхность. После каждого оборота вдоль контура Бюргерса вокруг оси дислокации мы будем переходить на близлежащую атомную плоскость и, наконец,

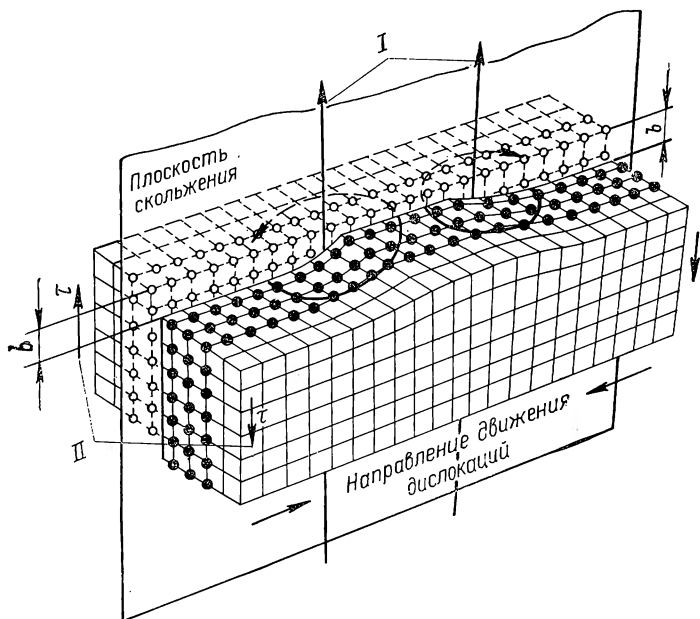


Рис. 4. Винтовые дислокации:  
I — ось дислокаций; II — направления сдвига части кристаллической решетки

окажемся на поверхности кристалла. Таким образом, кристаллы с винтовой дислокацией можно уподобить одной атомной плоскости, закрученной в виде винтовой лестницы. Экстроплоскость у винтовой дислокации отсутствует. Искажение решетки здесь заключается в том, что вблизи оси дислокации атомы меняют своих ближайших соседей, в результате чего плоскости решетки изгибаются. Сдвиг происходит параллельно оси дислокации, лежащей в плоскости скольжения. В этом существенное отличие винтовой дислокации от краевой, где сдвиг происходит в направлении, перпендикулярном оси дислокации.

Винтовая дислокация не связана с определенной плоскостью скольжения, а может последовательно переходить из одной атомной плоскости в другую. Положительная  $\perp$  и отрицательная  $\top$  винтовые дислокации отличаются направлением и сдвигаются



в противоположных направлениях под действием внешней силы. В результате прохождения отрицательной винтовой дислокации через весь кристалл слева направо так же, как и в результате прохождения положительной винтовой дислокации в противоположном направлении, происходит пластический сдвиг в плоскости скольжения. Такой же сдвиг имеет место при встрече винтовых дислокаций разного знака,двигающихся от противоположных граней кристалла. При этом дислокации исчезнут — аннигилируют.

## 6. Смешанная дислокация

Выше мы рассмотрели краевую и винтовую дислокации, считая их оси прямыми линиями, но в общем случае линия (ось) дислокации может быть не прямой.

На рис. 5, *а* показана дислокация [далее термин «линия» (ось) в большинстве случаев опущен] в виде ступенчатого образования. Принимая во внимание направление скольжения, здесь вертикальные участки являются чисто краевыми, а горизонтальные чисто винтовыми дислокациями.

На рис. 5, *б* линия дислокации имеет участки, которые не перпендикулярны и не параллельны вектору сдвига. Таким образом, это дислокация промежуточного вида.

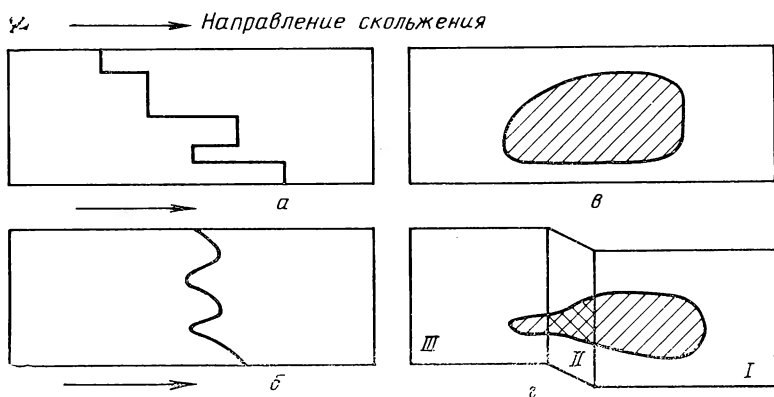


Рис. 5. Смешанная дислокация — четыре характерных случая

На рис. 5, *в* показана дислокация в форме петли, которая имеет участок чисто краевой дислокации, и участок чисто винтовой дислокации, остальные участки промежуточного вида. Сдвиг может иметь место как внутри, так и вне ее.

Поскольку ось винтовой дислокации и ее вектор Бюргерса параллельны, через них можно провести несколько плоскостей скольжения, число которых зависит от структуры решетки. Поэтому винтовой участок дислокационной петли при своем движении может переходить из плоскости скольжения *I* в плоскость скольже-

ния III через плоскость II (рис. 5,з). Это так называемый случай двойного поперечного скольжения, причем плоскость II-плоскость поперечного скольжения.

Изложенные здесь соображения находятся в полном соответствии с одним из основных положений механики, согласно которому всякое движение можно разложить на поступательное и вращательное.

## 7. Полные и частичные дислокации

Если вектор Бюргерса равен какому-либо межатомному расстоянию в решетке, то после прохождения такой дислокации симметрия решетки полностью восстанавливается. Такие дислокации называются полными.

Если вектор Бюргерса дислокации не равен никакому межатомному расстоянию (чаще всего — меньше любого межатомного расстояния), то вокруг такой дислокации нельзя провести контур, который бы весь проходил по малоискаженной области, так как после прохождения такого дефекта решетка не преобразуется сама в себя. Такая дислокация называется частичной и оставляет за собой поверхностный дефект. Наиболее часты два типа таких дефектов — дефект упаковки и граница двойника. Дислокации с вектором Бюргерса, меньшим межатомного расстояния, называются частичными. Частичная дислокация, оставляющая при своем движении за собой поверхность двойника, называется двойнивающей.

Дефект упаковки может обрываться на другой частичной дислокации с вектором Бюргерса, который в сумме с вектором Бюргерса первой дислокации дает вектор решетки. Две частичных дислокации, соединенных участком дефекта упаковки, называются расщепленной дислокацией.

## 8. Энергия дислокации и дислокационные реакции

Энергия дислокации эквивалентна работе, которую необходимо затратить для создания в кристаллическом теле дислокации. Следовательно, это — дополнительная энергия, которую приобретает тело при возникновении в нем дислокации.

Энергию дислокации можно представить в виде суммы двух слагаемых. Первое из них соответствует энергии, аккумулированной в ядре дислокации. Для точного расчета этой энергии необходимые исходные данные пока отсутствуют. Приближенные расчеты показывают, что энергия ядра дислокации составляет 10—20% от общей ее энергии. Второе слагаемое представляет собой энергию слабо искаженных участков, достаточно удаленных от ядра дислокации. Эта часть энергии довольно точно определяется методами теории упругости.

Установлено, что энергия дислокации, приходящаяся на единицу ее длины, равна

$$W \approx \frac{G b^2}{4 \pi k} \ln \frac{r}{r_0} \approx \frac{1}{2} G b^2. \quad (3)$$

Здесь  $r$  — расстояние, где еще имеются напряжения, генерируемые дислокацией;  $r_0$  — радиус ядра дислокаций;  $k=1$  для винтовой и  $k=1-m$  для краевой дислокации;  $m$  — коэффициент Пуассона. Отсюда следует, что энергия дислокации зависит от сил межатомного взаимодействия, которые косвенно характеризуются величиной  $G$ , и степени упругого искажения атомной решетки. Последняя возрастает с ростом величины  $b$ .

Пусть  $n$  — число параллельных атомных плоскостей, перпендикулярных к опресске дислокации протяженностью в единицу длины, т. е.  $n=1/b$ . Тогда энергия, отнесенная к одной атомной плоскости, пересекающей дислокацию:

$$W_1 = \frac{U}{n} = \frac{1}{2} G b^3. \quad (4)$$

Величина  $W_1$  составляет несколько электрон-вольт, т. е. сравнима с энергией сублимации на один атом и, следовательно, довольно велика. Поэтому энергия даже самой маленькой дислокационной петли превышает  $10 \text{ эв}$ , и тепловому равновесию отвечает отсутствие всяких дислокаций. Пусть в плоскостях скольжения  $AB$  и  $BC$  перемещаются две дислокации с векторами Бюргера  $b_1$  и  $b_2$  (рис. 6, а). Слияние дислокаций энергетически выгодно, если этот процесс происходит с уменьшением запаса энергии, т. е. если разность  $\Delta W$  между конечным  $W_k$  и начальным  $W_n$  запасом энергии величина положительная, т. е. если  $\Delta W = W_k - W_n > 0$  или  $\Delta W = \frac{1}{2} G (b^2 - b_1^2 - b_2^2) L$ . Иными словами, дислокации сливаются, если  $b^2 < b_1^2 + b_2^2$ .

Такое слияние происходит, если угол  $\alpha$  острый ( $\alpha < \pi/2$ ) (рис. 6, а). Когда в реакцию вступает  $n$  параллельных дислокаций, то слияние дислокаций будет происходить, если  $b^2 < b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$ .

Аннигиляция дислокаций является частным случаем дислокационной реакции (рис. 6, б):  $b_1 = -b_2$  и  $b = b_1 + (-b_2) = 0$ .

Кроме слияния дислокаций, наблюдается и их расщепление (рис. 6, в). Рассуждая аналогично предыдущему, убедимся, что реакция расщепления будет энергетически выгодна, если  $b^2 > b_1^2 + b_2^2$ , чему соответствует тупой угол ( $\alpha > \pi/2$ ). Отсюда следует, что обычно дислокации имеют наименьший из возможных векторов Бюргера. Пусть, например, дислокация имеет вектор Бюргера  $B = 2b$ . Тогда она расщепится на две дислокации:  $B \rightarrow b + b_1$ , потому что  $B^2 = 4b^2 > b^2 + b_1^2 = 2b^2$ .

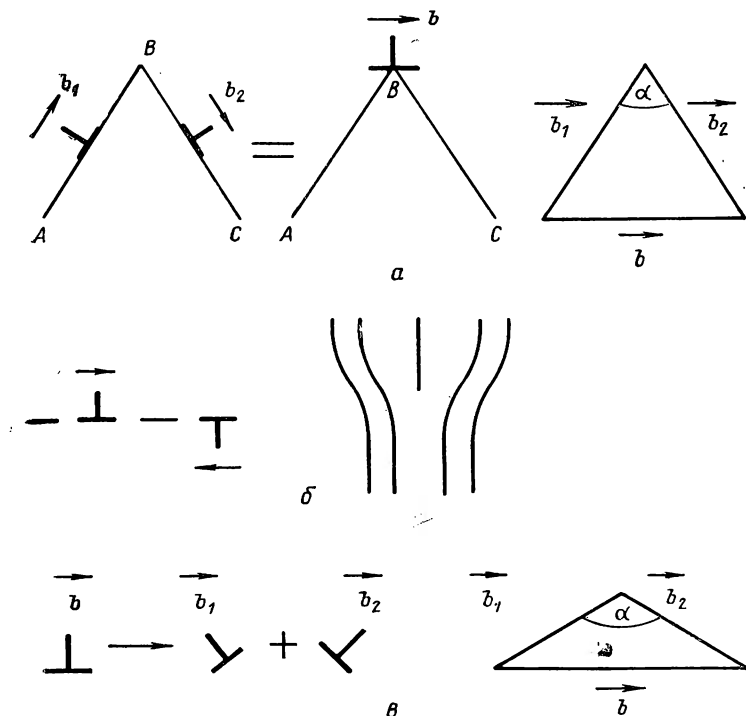


Рис. 6. Схема дислокационных реакций слияния (а, б) и расщепления (в). Справа — векторное изображение

## 9. Сила, действующая на дислокацию

Приближенные теоретические расчеты, основанные на оценке величины амплитуды изменения потенциальной энергии ядра при движении дислокации, показали, что минимальное касательное напряжение, необходимое для движения дислокации, равно

$$\tau_n = \frac{2G}{k} e^{-\frac{2\pi}{k} \frac{a}{b}}, \quad (5)$$

где  $a$  — расстояние между смежными плоскостями скольжения. Из этой формулы следует, что чем больше  $a$  и меньше  $b$ , тем меньше  $\tau_n$ . Известно, что значение  $a$  является максимальным для плотноупакованных атомных плоскостей, а наименьшее значение  $b$  отвечает наиболее плотноупакованным направлениям. Таким образом, особенно подвижными являются дислокации, обеспечивающие пластический сдвиг вдоль направлений и плоскостей, наиболее густо усеянных атомами. Препятствуя каким-либо образом скольжению в этих плоскостях, можно вызвать его в тех плоскостях, где упаковка атомов менее плотная.

Далее, сравнивая значения  $k$  для краевой и винтовой дислокаций, используя формулу (5), можно видеть, что краевые дислокации начинают перемещаться при меньшем уровне напряжений, т. е. обладают большей подвижностью, чем винтовые.

Из тех же соображений очевидно, что частичные дислокации обладают большей подвижностью, чем полные. Поэтому в металлах, обладающих высоким сопротивлением для движения дислокаций при низких температурах, когда тепловое движение уже не в состоянии обеспечить высокую скорость полных дислокаций, деформация обычно идет за счет частичных двойникующих дислокаций, что приводит к двойникованию.

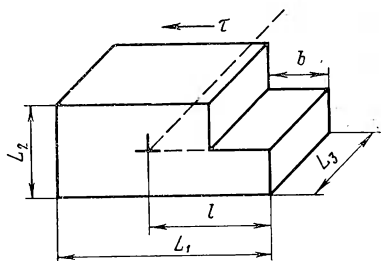


Рис. 7. Схема к определению величины силы, действующей на краевую дислокацию (штриховая линия — линия дислокации)

Пусть под действием касательного напряжения  $\tau$  краевая дислокация продвигается через всю длину кристалла (рис. 7). В результате одна его часть сдвигается относительно другой на величину, равную вектору  $b$  (рис. 7).

Величина внешней силы равна  $F = \tau L_1 L_3$ . Работа этой внешней силы  $A = Fb = b\tau L_1 L_3$ .

Обозначим через  $f$  силу, действующую на единицу длины краевой дислокации. Тогда полная сила, действующая на нее, равна  $F_d = fL_3$ .

Работа силы  $F_d$ , представляющая собой работу внутренних сил, определится по формуле:  $A_d = F_d L_1 = fL_1 L_3$ .

Работа внешней силы  $A$  равна работе внутренних сил  $A_d$ ; поэтому

$$fL_1 L_3 = b\tau L_1 L_3 \quad \text{или} \quad f = b\tau. \quad (6)$$

Можно показать, что это равенство справедливо и для случая винтовой дислокации. Следовательно, это соотношение справедливо и для случая смешанной дислокации. Величина силы  $f$ , помимо прочих факторов, о которых речь пойдет ниже, зависит от расположения плоскости скольжения дислокации по отношению к направлению максимальной главной деформации.

Если пренебречь тепловыми флуктуациями, то минимальная сила, необходимая для движения дислокации, равна:  $f_n = b\tau_n$ , где  $\tau_n$  определяется равенством (5).

Величина

$$f_n = \frac{2Gb}{k} e^{-\frac{2\pi}{k} \frac{a}{b}} \quad (7)$$

называется силой Пайрлса — Набарро.

## 10. Плотность дислокаций

В процессе деформации часть кристалла, лежащая над плоскостью скольжения, смещается относительно части, лежащей под ней, на вектор Бюргерса  $b$ . Но если дислокация прошла не всю плоскость скольжения, то и такое смещение происходит только в той части плоскости скольжения, где дислокация уже прошла. Это означает, что линия дислокации есть контур в плоскости скольжения, ограничивающий площадь незавершенного сдвига.

Если дислокации краевые, то среднее относительное смещение (рис. 7) будет равно

$$x = \frac{l L_3}{L_1 L_3} b = \frac{l}{L_1} b.$$

Относительный сдвиг в кристалле в результате продвижения одной дислокации на расстояние  $l$  можно определить по формуле:

$$\gamma_x = \frac{x}{L_2} = \frac{l L_3}{L_1 L_2 L_3} b = \frac{S}{V} b,$$

где  $S$  — участок плоскости скольжения, на которой произошел сдвиг;

$V$  — объем кристалла.

Если система параллельных плоскостей скольжения содержит  $N$  дислокаций, то суммарное смещение в теле будет равно

$$N x = N \frac{l}{L_1} b.$$

Тогда полная деформация сдвига определится как

$$\gamma = \frac{N x}{L_2} = \frac{N}{L_1 L_2} b l.$$

$$\text{Величина } \frac{N}{L_1 L_2} = \rho_d = \frac{1}{\text{см}^2} \quad (8)$$

называется плотностью дислокаций.

Таким образом, плотность дислокаций равна числу дислокаций, проходящих через единицу поверхности, перпендикулярную к линиям дислокаций.

Плотность дислокаций можно выразить и следующим образом:

$$\rho_d = \frac{l N L_3}{L_1 L_2 L_3} = \frac{\Lambda}{V} \frac{\text{см}}{\text{см}^3}. \quad (9)$$

Здесь величина  $\Lambda$  представляет собой общую длину всех дислокационных линий в объеме  $V$  кристалла.

Итак, деформация сдвига равна произведению плотности дислокаций  $\rho_d$  на величину вектора Бюргерса  $b$  и на среднюю длину их смещения (пробега)  $l$ :

$$\gamma = \rho_d b l. \quad (10)$$

Скорость деформации сдвига можно вычислить как

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \rho_d b \frac{dl}{dt} + b l \frac{d\rho_d}{dt}.$$

Полагая, что скорость сдвига зависит главным образом от скорости дислокаций, т. е. полагая, что второй член правой части этого равенства мал по сравнению с первым, получим

$$\dot{\gamma} = b \rho_d C_d. \quad (11)$$

Соотношения (10) и (11) являются приближенными. Но они справедливы не только для краевых, но и для винтовых, а следовательно, и смешанных дислокаций.

## 11. Скорость дислокаций и длина их пробега

Приближенно деформацию в процессе растяжения можно выразить величиной:

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = \frac{\Delta \omega}{\omega} = \text{tg } \varepsilon \approx \varepsilon,$$

где  $\omega_0$  и  $\omega$  — площади поперечного сечения тела до и после деформации, совпадающие с действием приложенной силы. Отсюда  $\Delta \omega = \varepsilon \omega$ .

Скорость деформации

$$\frac{d(\Delta \omega)}{dt} = \omega \frac{d\varepsilon}{dt} \text{ или } \Delta \dot{\omega} = \omega \dot{\varepsilon}. \quad (12)$$

Здесь величину  $\varepsilon$  в первом приближении можно принять равной скорости деформации сдвига  $\gamma$ , и поэтому на основании уравнения (11) имеем  $\Delta \omega = b \rho_d C_d \omega$ ,

Отсюда

$$C_d = \frac{\Delta \dot{\omega}}{\rho_d b \omega}. \quad (13)$$

Среднее значение величины скорости деформации равно

$$\Delta \dot{\omega} = \frac{\Delta \omega}{t} = \frac{\omega_0 - \omega}{t}.$$

Если длина зоны деформации равна  $l$ , а скорости металла в начале и конце процесса деформации соответственно  $C_0$  и  $C_1$ , то  $t = 2l / (C_0 + C_1)$ .

Из условия постоянства секундного объема имеем

$$C_0 = C_1 \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{C_1}{\lambda},$$

где  $\lambda = \omega_0 / \omega_1$  называется коэффициентом вытяжки.

С учетом этих соотношений получим  $\Delta \dot{\omega} = \frac{\omega C_1 (\lambda^2 - 1)}{2l \lambda}$ .

Вместе с тем  $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{\omega_0}{\omega} - 1 = \lambda - 1$ . Отсюда  $\lambda = \varepsilon + 1$ .

Таким образом:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{C_1 \varepsilon (\varepsilon + 2)}{2l(\varepsilon + 1)}.$$

Поэтому с учетом выражения (13) скорость дислокаций можно вычислить по формуле

$$C_d = \frac{C_1 \varepsilon (\varepsilon + 2)}{2lb\rho_d(\varepsilon + 1)}. \quad (14)$$

Отсюда следует, что скорость движения дислокаций растет с ростом скорости растяжения, величины деформации и уменьшается с ростом плотности дислокаций, вектора Бюргерса и длины очага деформации.

При больших скоростях обработки металла давлением формальное применение формулы (14) может привести к скоростям дислокаций, большим скорости звука  $C_{зв}$ , что, как известно, невозможно.

В этом интервале скоростей формулу (14) следует понимать как формулу для расчета плотности подвижных дислокаций  $\rho_d \geq \frac{C_1 \varepsilon (\varepsilon + 2)}{2lbC_{зв}(\varepsilon + 1)}$ , т. е. при увеличении скорости обработки и величины деформации плотность дислокаций увеличивается.

С увеличением относительной деформации скорость дислокации растет, так как за данный промежуток времени подвергается пластической деформации больший объем металла.

Длина пробега дислокаций определяется выражением:  $l = C_d t_{пр}$ , где  $t_{пр}$  — время свободного пробега дислокации между соседними препятствиями. Обычно  $l \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \approx 10^{-4} \div 10^{-6}$  см для  $\rho \approx 10^8 \div 10^{12}$  см<sup>-2</sup>.

## 12. Возникновение дислокаций

Образование дислокаций происходит в результате многих причин. В процессе формирования кристалла дислокации могут образоваться на границах блоков при их срастании. Действительно, поверхность кристалла с образовавшимися таким образом дислокациями имеет множество «ступенек», на которые могут пристраиваться атомы из раствора. Поэтому скорость роста кристаллов с дислокациями на несколько порядков выше скорости роста кристаллов без дислокаций, несмотря на то что последние имеют меньшую собственную энергию. В связи с этим в обычных условиях зародыши, не имеющие дислокаций, не успевают вырасти и, следовательно, даже искусственно выращенные монокристаллы имеют множество дислокаций, если не принимать особых мер, направленных к предотвращению их появления.



Скопление вакансий, под которыми подразумеваются свободные от атомов узлы атомной решетки, также могут быть причиной образования дислокаций. В процессе кристаллизации и последующей деформации происходит дробление кристалла на блоки и зерна, которые в свою очередь являются источниками дислокаций.

Дислокации могут образоваться и в процессе пластической деформации, причем их источником в этом случае служат сами дислокации — так называемые источники Франка—Рида. На рис. 8, а показана линейная дислокация  $DD'$ . Она располагается в плоскости скольжения. В точках  $D$  и  $D'$  дислокация закреплена. Закрепление может явиться следствием наличия в точках  $D$  и  $D'$

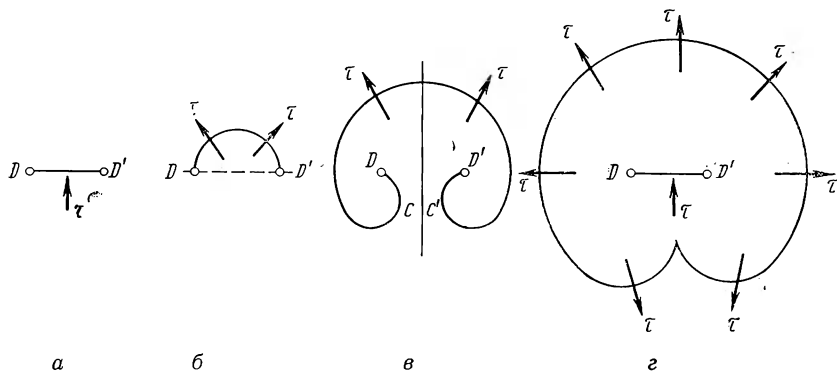


Рис. 8. Схема действия источника Франка—Рида

инородных включений, частиц второй фазы, трещин, границ зерен, пересечения дислокаций  $DD'$  дислокациями, перемещающимися в других плоскостях скольжения.

Под действием касательного напряжения линейная дислокация ведет себя как упругая нить: она выгибается и принимает на некоторой стадии форму полуокружности (рис. 8, б). При этом радиус кривизны дислокации достигает минимального значения.

Оценим величину скальвающего напряжения  $\tau_x$ , необходимого для действия источника Франка—Рида. Энергия дислокаций равна:  $W \approx Gb^2$ .

Сила натяжения выгнутой дислокации определяется по формуле

$$P \approx \frac{W}{r} \approx \frac{Gb^2}{r},$$

где  $r$  — радиус кривизны.

При  $r = l$  имеем:  $P_{\max} = Gb^2/l$ .

Внешнюю силу, выгибающую дислокацию согласно формуле (6), можно найти как:  $f_{\max} = b\tau_{\max}$ . Значение  $\tau_{\max}$  определим из условия  $f_{\max} = P_{\max}$ , что дает:  $\tau_{\max} = Gb/l$ .

Таким образом, критическое напряжение источника Франка—Рида зависит от рода материала (характеризуемого величиной  $G$ ), величины вектора сдвига  $b$  и длины дислокации  $l$ .

Из приведенного расчета следует, что значение касательного напряжения становится максимальным тогда, когда дислокация принимает форму полуокружности. Дальнейшее увеличение длины будет идти при напряжении, меньшем  $\tau_{\max}$ , так как радиус кривизны петли увеличивается. При этом на участках дуги вблизи точек закрепления линейная дислокация переходит в винтовую. Винтовые дислокации образуют спирали вокруг точек  $D$  и  $D'$  (рис. 8, в). В области  $CC'$  сближающиеся винтовые дислокации противоположного знака аннигилируют и распадаются на две дислокации — внешнюю и внутреннюю (рис. 8, г). Внешняя дислокация расширяется до границ кристалла и образует ступеньку на его поверхности. Внутренняя дислокация под действием касательного напряжения снова изгибается, и процесс повторяется. Доказано, что источники Франка—Рида могут быть плоскими, пространственными и спиральными.

Расчет напряжения  $\tau_{\max}$ , необходимого для действия источника Франка—Рида, проводится обычно при допущении, что энергия дислокации зависит только от ее длины и что места закрепления дислокации идеально гибкие. В действительности же углы поворота линии дислокации в местах закрепления малы и зависят от кристаллического строения решетки. Поэтому после образования дислокационной петли вокруг места закрепления образуется дислокационная петля меньших размеров, уменьшающая эффективную длину следующей дислокации, испускаемой источником.

Особенно большое значение имеют дислокационные источники, образующиеся при двойном поперечном скольжении (см. рис. 5, г). Отрезок винтовой дислокации, перешедший в результате двойного поперечного скольжения из плоскости  $I$  в плоскость  $III$ , является источником Франка—Рида в этой плоскости. Но точки закрепления — отрезки дислокации в плоскости поперечного скольжения  $II$  — в этом случае подвижны, а не абсолютно жесткие, как это предполагалось Франком и Ридом. В результате такой источник разрушается (точки закрепления «расползаются») после образования нескольких петель. Число петель зависит от соотношения подвижностей дислокаций в плоскостях  $III$  и  $II$ . Если эти подвижности одинаковы, то число петель равно двум, если подвижность в плоскости  $III$  больше, то число петель может достигать 20—30.

В процессе пластической деформации в результате действия источников Франка—Рида и других упомянутых выше причин плотность дислокации увеличивается от  $10^6$ — $10^8$   $см^{-2}$  до  $10^{11}$ — $10^{12}$   $см^{-2}$ .

### 13. Перемещение дислокаций при скольжении

В кристаллической решетке обычно существует несколько систем плоскостей скольжения. Поэтому дислокации, движущиеся по разным плоскостям скольжения, могут взаимно пересекаться. В связи с этим, например, дислокация  $MN$  служит препятствием для дислокации  $AB$ , которое уменьшает ее скорость (рис. 9).

Сила взаимодействия пересекающихся дислокаций зависит от взаимной ориентации их плоскостей скольжения, векторов Бюргера и степени расщепления. Если взаимодействие сильное (изменение энергии дислокации в результате пересечения  $\sim Gb^3$ ), то при встрече с  $MN$  дислокация  $AB$  изгибается (положение 1). При дальнейшем движении участки  $a$  и  $a_1$  дислокации  $AB$  становятся

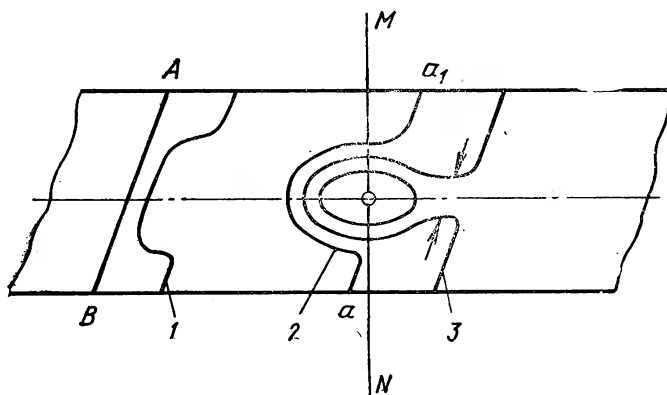


Рис. 9. Последовательные стадии движения дислокации  $AB$  при встрече ее с дислокацией  $MN$

параллельными направлению сдвига (положение 2), т. е. на этих участках дислокация  $AB$  становится винтовой, причем знаки дислокации на участке  $a$  и  $a_1$  различны. Поэтому они будут двигаться навстречу друг другу (положение 3) и в точке совмещения аннигилируют. В результате вокруг дислокации  $MN$  из части дислокации  $AB$  образуется новая дислокация в виде петли. Остальная часть дислокации  $AB$  продолжает свое движение.

Движущаяся дислокация часто вынуждена прорезать целый «лес» дислокаций, не лежащих в ее плоскости. В результате на линии дислокации появляется много изломов—ступенек, испускающих большое количество вакансий и внедренных атомов.

Некоторые металлы (например, медь, алюминий, золото и др.), обладающие кубической гранцентрированной решеткой, имеют четыре пересекающихся плоскости скольжения. В каждой из них расположены дислокации, которые могут перемещаться только в своей плоскости скольжения. При пересечении дислокаций образуются узлы. В результате в металле возникает объемная сетка—как бы жесткий каркас, упрочняющий металл, со звеньями длиной до  $10^{-5}$  см. Наличие такой сетки не исключает, конечно, существования и самостоятельных подвижных дислокаций.

Поверхности раздела (зерен и блоков) также упрочняют металл, так как на этих участках смещения не всегда могут пройти до конца и образовать ступеньку. Чем меньше блоки и зерна, тем больше существует в теле поверхностей раздела и тем выше уро-

ность напряжений, необходимый для осуществления смещений. Провиженность поверхностей раздела блоков много больше поверхностей раздела зерен. Поэтому размеры блоков оказывают на прочность большее влияние, чем размеры зерен. С увеличением расстояния в ориентировке блоков предел текучести увеличивается, так как они становятся более прочными барьерами для подвижных дислокаций. Задержки дислокаций у поверхности раздела приводят к образованию «горизонтальных», расположенных вдоль поверхности скопления, группировок (рис. 10).

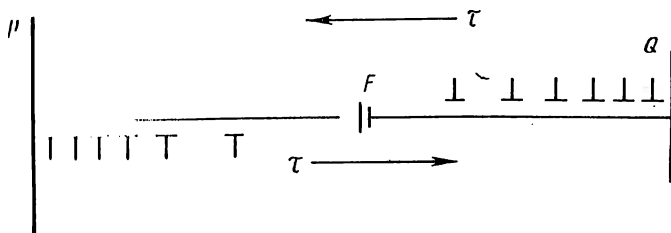


Рис. 10. «Горизонтальная» группировка дислокаций

Пусть источник дислокаций  $F$  (например, источник Франка—Рида) порождает дислокации. Они перемещаются в плоскости скольжения. Если дислокации одного знака, то они скапливаются у препятствий  $P$  и  $Q$  на все больших расстояниях друг от друга. По мере накопления дислокаций искажение решетки увеличивается. В результате происходит упрочнение металла, т. е. уровень напряжений, необходимый для деформации тела, повышается. При некоторой величине напряжения происходит прорыв дислокаций через препятствия. Если по обе стороны препятствия имеются скопления дислокаций с разными знаками, то они аннигилируют и процесс начинается сначала, а на поверхности блоков и зерен образуются ступеньки. Прорыв скопления через препятствия может приводить также к зарождению микротрещин.

При выходе дислокаций на поверхность деформируемого тела образуются ступеньки. При этом у поверхности металлов существует своеобразный барьер из вещества с несовершенным строением (например, окисной пленки), сквозь который дислокации могут проходить лишь после того, как они образуют скопление определенной величины. Интенсивная полировка ослабляет барьер, снимая число дислокаций в скоплении, и уменьшает величину упрочнения. При пластической деформации металлов, представляющих собой перенасыщенные твердые растворы, происходит распад этих растворов с выделением мелкодисперсных частиц по плоскостям скольжения. Эти частицы, а также фазы, представляющие собой твердый раствор, свойства которого отличны от свойств основного металла, упрочняют его, блокируя перемещение дислокаций.

Характер и размер включений определяют сопротивление движению дислокаций. Если в плоскости скольжения расположены отдельные чужеродные атомы или группы их, так что поверхности раздела отсутствуют, то дислокация может пройти сквозь эти препятствия, мало изгибаясь — она «переползает» их при сравнительно низком уровне напряжения. Если включения имеют поверхности раздела, т. е. обособлены, то дислокация сквозь них пройти уже не может. Вместе с тем для того, чтобы обойти препятствие выше или ниже, нужно затратить дополнительную энергию для перехода в другие плоскости скольжения. Энергетически для дислокации оказывается более выгодным обогнуть препятствия в данной плоскости скольжения по описанной уже схеме (рис. 9).

В результате максимальное сопротивление движению дислокаций имеет место в промежуточном случае, когда размер включений не слишком велик и не слишком мал.

Как было отмечено, краевые дислокации вызывают искажение атомной решетки так, что в районе экстраплоскости решетка сжата, а под ней растянута. Вместе с тем атомы растворенных в металле примесей могут иметь размеры меньшие или большие размеров атомов основного металла и поэтому также искажают кристаллическую решетку. В результате решетка оказывается в энергетически неустойчивом состоянии. Более устойчивым состоянием оказывается такое, при котором атомы примесей меньших размеров скапливаются в зоне сжатой решетки, а атомы больших размеров — в зоне растянутой решетки. В результате около дислокаций атомы примесей образуют «облака». При малых скоростях деформации, соизмеримых со скоростью диффузии растворенных атомов, дислокация перемещается вместе с облаком и «тащит» облако вместе с собой.

При больших скоростях деформации дислокация «вырывается» из облака и дальше перемещается вне его. Для того чтобы выйти из облака, необходимо затратить дополнительную энергию, а для этого нужно повысить уровень напряжения. После того как дислокации вышли из облака и началось их интенсивное размножение, напряжения, вызывающие их движение, несколько уменьшаются. Так, на диаграмме растяжения некоторых металлов образуется «зуб» текучести (рис. 11, а).

Зуб текучести чаще всего наблюдается на диаграммах растяжения образцов из отожженных металлов с объемноцентрированной кубической решеткой. Но он может быть на диаграммах растяжения образцов и металлов с гранецентрированной кубической решеткой после введения примесей или облучения их частицами с высокими энергиями.

На рис. 11, б показана кривая упрочнения, типичная для гранецентрированных кубических монокристаллов. Участок I соответствует стадии так называемого легкого скольжения, участки II и III — стадиям упрочнения по линейному и параболическому законам.

На рис. 11, в показана типичная кривая упрочнения поликристаллических металлов с центрированной кубической решеткой.

Из приведенного описания следует, что сущность процесса упрочнения при скольжении заключается в торможении дислокаций, создании препятствий для перемещения в процессе их взаимодействия. В результате возрастает упругое искажение кристаллической решетки, увеличивается сопротивление деформации металла и уменьшается его пластичность. Вместе с этим изменяются,

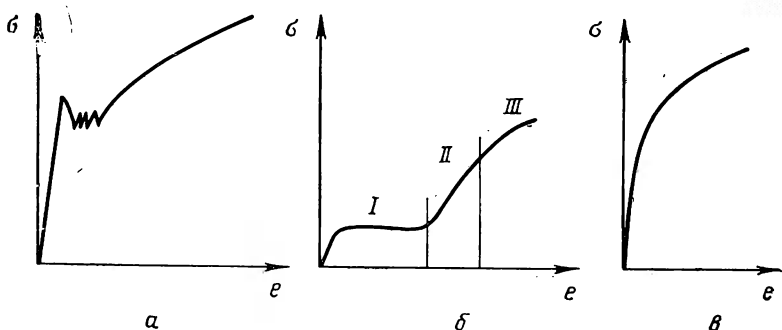


Рис. 11. Диаграммы растяжения:

а — с «зубом» текучести; б — при наличии легкого скольжения; в — для большинства поликристаллических металлов

как известно, и другие механические и физико-химические свойства металлов, например значительно в (3—5 раз) возрастают растворимость в кислотах, электросопротивление (у никеля до 8%, у молибдена до 18%, у вольфрама до 50%), несколько (до 0,5—1,5%) уменьшается плотность.

Повышение сопротивления деформации и понижение пластичности, сопровождаемое изменением упомянутых выше физико-химических свойств металлов, и носит название упрочнения или наклепа металлов.

Известно, что в процессе деформации монокристаллов чистых металлов и пересыщенных твердых растворов при дроблении кристаллической решетки на упомянутые выше блоки или фрагменты происходит упругое искажение решетки.

Исследования показывают, что дислокации, расположенные в смежных плоскостях скольжения, часто образуют «вертикальные» стенки (рис. 12), т. е. располагаются в некоторой плоскости, перпендикулярной их плоскости скольжения.

Как отмечалось ранее, над осью положительной краевой дислокации располагается область сжатия, над осью — область растяжения. Поэтому, если две дислокации расположить одну под другой, то область сжатия нижней дислокации совпадает с областью растяжения верхней. В результате общие напряжения, а следовательно, и энергия значительно уменьшаются. В связи с этим дислокации будут стремиться занять положения, соответствующие их

минимальной энергии, т. е. образовать стенку. Так возникает полигонизация: при невысоком нагреве слегка деформированного металла его первоначальные зерна делятся на более мелкие, мало отличающиеся по ориентировке. Это сопровождается уменьшением искажений в кристаллической решетке и снятием упрочнения.

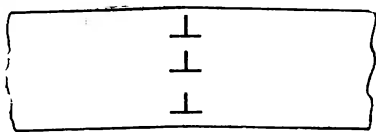


Рис. 12. Схема образования «вертикальных» дислокационных стенок

Из описанных явлений, наблюдаемых в процессе пластической деформации, наиболее существенную роль играет процесс скольжения, другие явления лишь сопутствуют ему. Именно поэтому явление скольжения положено в основу всех современных феноменологических теорий пластичности.

Скольжение наблюдается при деформации всех поликристаллических и монокристаллических тел. При этом смещение слоев кристалла происходит без нарушения их взаимной ориентации.

Как отмечалось, у некоторых металлов наблюдается явление двойникования при низких температурах. При двойниковании одна часть монокристалла поворачивается относительно другой. В результате этого сдвигающиеся части становятся в положение, являющееся зеркальным отражением исходного (рис. 13). Чаше

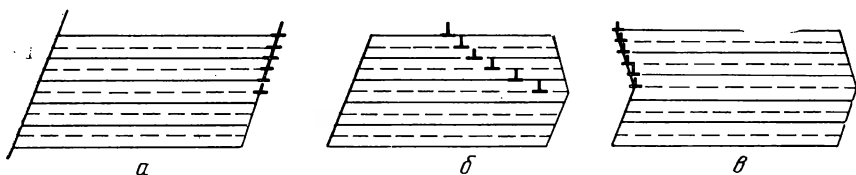


Рис. 13. Стадии двойникования: а — начальная; б — промежуточная; в — завершающая

всего двойникование можно наблюдать в случае, когда деформация осуществляется с большими скоростями. У некоторых металлов (например, меди, латуни) двойники выявляются лишь в результате последовательно осуществленных пластической деформации и отжига. Некоторые металлы двойниваются и в процессе обычного скольжения при статическом воздействии сил. В процессе образования двойников величина скалывающего напряжения скачкообразно уменьшается иногда в 2 и более раз. Деформация двойникованием приводит к появлению больших внутренних напряжений и, следовательно, создает структуру, склонную к хрупкому разрушению.

Область сдвига при двойниковании включает большое число кристаллографических плоскостей. Атомы в каждой плоскости претерпевают сдвиг на одно и то же расстояние по отношению к слою, лежащему над ним. Когда набор двойнивающих дислокаций пройдет через весь объем двойника, расположенный по одну сто-

рону относительно плоскости симметрии, процесс двойникования закончится.

В начале зарождения двойника требуется приложить большее напряжение, чем в процессе его распространения, поэтому в конце двойникования двойникующие дислокации разгоняются до скоростей, близких к скорости звука в металле, в связи с чем время, затраченное на образование двойников, измеряется микросекундами.

В процессе пластической деформации наблюдаются и другие явления. К ним относится изгиб пространственной кристаллографической решетки в результате взаимной помехи перемещающихся друг относительно друга частей кристаллов деформируемого тела. Кроме того, в процессе пластической деформации может иметь место межкристаллическое скольжение и поворот зерен.

Известно, что по границам зерен кристаллографическая решетка более искажена и, следовательно, упрочнена сильнее, чем внутри их. Поэтому при низких температурах деформация происходит главным образом внутри кристаллов. С ростом температуры за счет меньшей термодинамической устойчивости пограничных зон металла, вызванных искаженностью решетки, границы зерен разупрочняются, развивается межкристаллическое скольжение, а также происходит поворот зерен. Деформация за счет этих процессов может составить 30 и более процентов величины общей деформации.

С помощью теории дислокаций удастся объяснить сущность этих явлений введением подвижных межзеренных дислокаций.

#### 14. Перемещение дислокаций при диффузии

Известно, что диффузионное перемещение атомов при тепловых колебаниях одинаково возможно в любом из направлений. Но после того, как в теле под влиянием тех или иных причин возникает напряженное состояние, диффузия или самодиффузия приобретает направленный характер — она облегчается в одном из направлений и затрудняется в других. Таким образом, в твердых растворах атомы элемента с большим радиусом перемещаются в зоны с наличием напряжений растяжения, а атомы с меньшим радиусом — в зоны, находящиеся под действием напряжений сжатия.

Кристаллическая решетка около краевой дислокации по одну сторону от плоскости скольжения сжата, а по другую растянута. Поэтому, в соответствии с только что изложенным, диффузионное движение точечных дефектов в кристаллической решетке приобретает направленный характер. Вакансии устремляются в область сжатия, атомы, расположенные между узлами, — в расширенную область.

Вакансии, подошедшие к дислокации, попадают на кромку нижней полуплоскости и исчезают. При этом атомы полуплоскости заполняют приблизившиеся вакантные узлы и, попадая на



кромку лишней полуплоскости вакансии, исчезают. «Растворение» цепочки атомов полуплоскости соответствует вертикальному перемещению («переползанию») краевой дислокации из своей плоскости скольжения в соседнюю, расположенную над или под ней. Таким образом, переползание направлено перпендикулярно плоскости скольжения, а не вызвано действием сдвигающих напряжений. Этот вид движения может наблюдаться только у краевых и смешанных дислокаций. Чисто винтовые дислокации в связи с отсутствием у них «лишней» полуплоскости перемещаться таким образом не могут.

Диффузионное перемещение дислокаций связано с переносом массы вещества в направлении, перпендикулярном плоскости скольжения. При скольжении дислокаций переноса вещества в этом направлении не происходит.

Переползание ускоряется за счет образования добавочных точечных дефектов, которые могут появиться в процессе пластической деформации, под действием радиоактивного облучения и т. д. С повышением температуры интенсивность переползания быстро увеличивается.

Диффузионный механизм деформации проявляется сначала в наиболее напряженных объемах тела, прежде всего вблизи границ зерен, начиная с температуры, составляющей 0,3—0,5 от абсолютной температуры плавления металла. Особенно заметно это явление при температуре, близкой к температуре плавления. При этом металлы, не теряя свойств пластичных тел, приобретают свойства аморфных — вязких тел, для которых сопротивление деформации и пластичность зависят от скорости деформации и от гидростатического давления и не зависят от степени деформации.

При низких температурах,  $T < 0,5 T_{пл}$ , процесс переползания резко замедляется. В этом существенное отличие переползания от скольжения дислокаций, которое, как показывают опыты, происходит и при температуре, равной 1°K.

Диффузионный механизм деформации характерен тем, что кристаллическое вещество может деформироваться без каких-либо внешних признаков нарушения однородности и изменения макроскопических размеров тела. Из изложенного следует, что явление диффузии представляет собой не только взаимный обмен местами атомов в кристаллической решетке, но в ряде случаев является прямым их переносом. Атомы движутся по схеме, описанной выше, в направлениях, соответствующих отрицательному градиенту химического потенциала.

При наличии высокой скорости диффузионных процессов растворения и осаждения во время пластической деформации выявляется еще так называемый растворно-осадительный механизм пластической деформации. При этом происходит быстрый перенос атомов одной фазы на кристаллы другой фазы, что может приводить к залечиванию нарушений границ между зернами. Это явление выявляется при условии медленно протекающей деформации в зоне высоких температур многофазных сплавов.

Под действием силы поверхностного натяжения начинается миграция атомов вдоль границ за счет диффузии. При этом происходит как бы растворение одного и рост другого зерна. Дефекты растворяющегося зерна также исчезают, и происходит значительный возврат. Это явление характерно для деформации чистых металлов и однофазных сплавов.

Далее, при пластической деформации металлов, представляющих собой пересыщенные твердые растворы, например высокопрочных низкоотпущенных сталей, происходит распад этих растворов с выделением мелкодисперсных частиц (в случае стали — карбидов) по плоскостям скольжения. Эти частицы затрудняют скольжение и тем самым упрочняют металл.

Установлено, что химические соединения (карбиды), фазы, представляющие собой твердый раствор, отличный от матрицы, всегда упрочняют металлы, поскольку их присутствие блокирует пластическую деформацию.

Теория дислокаций позволяет дать всем этим явлениям прилипке более глубокое, чем это было до ее появления, объяснение.

## II глава

### Теория напряжений и деформаций

#### 1. Величины, характеризующие напряженное состояние тела

Обычно технические металлы состоят из большого числа кристаллических образований, т. е. являются поликристаллическими. В большинстве случаев размеры кристаллитов малы по сравнению с размерами тела (характерный размер не превышает 0,01—0,1 мм) и направления их ориентации различны. В связи с этим поликристаллические тела в первом приближении ведут себя так же, как тела однородные и изотропные. Под однородными телами понимают такие, строение и состав которых одинаковы в любых точках. Изотропные тела характеризуются тем, что их свойства по всем направлениям одинаковы.

Анизотропные тела отличаются от изотропных тем, что свойства таких тел в каждой данной точке по разным направлениям различны. К анизотропным телам относятся все различные кристаллические тела, а следовательно, и металлы. Хотя анизотропию поликристаллических тел при соответствующем режиме обработки можно легко выявить, наличием ее в теориях упругости и пластичности обычно пренебрегают, что значительно упрощает эти теории.

Возьмем сплошное, однородное и изотропное тело произвольной формы, находящееся под действием системы сил (рис. 14, а); и мысленно рассежем его плоскостью на две части А и В. Часть В

отбросим. Направление секущей плоскости будем характеризовать внешней нормалью  $\vec{n}$ . Пусть  $dP$  — равнодействующая всех сил, действующих на элементарной площадке  $dF$ , выделенной в плоскости сечения. Тогда вектор

$$\vec{p} = dP/dF \quad (15)$$

полное напряжение на данной площадке.

Напряжения в теле будем характеризовать их проекциями на координатные оси.

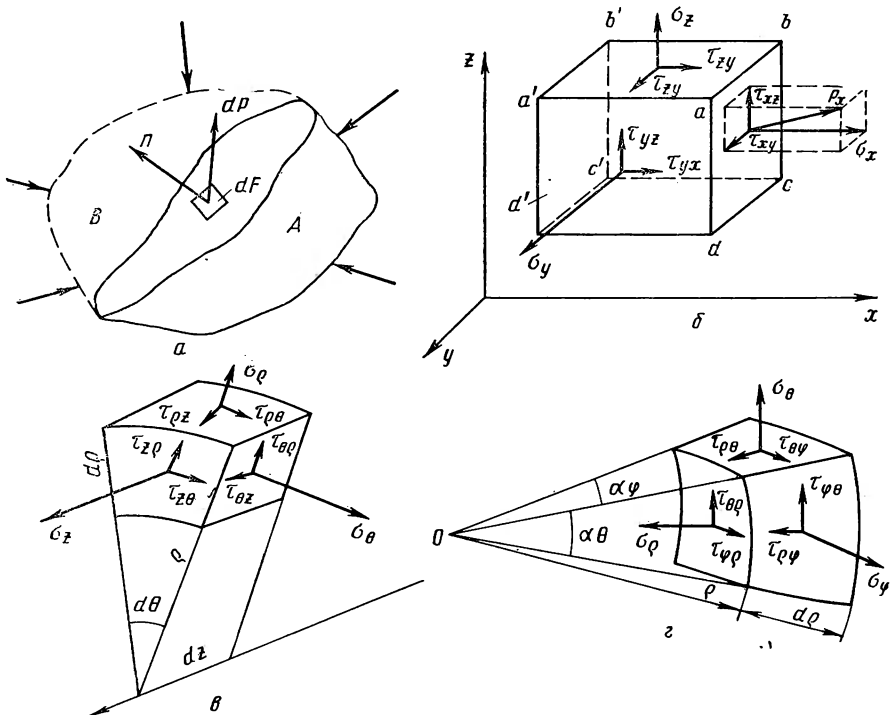


Рис. 14. Сечение тела плоскостью (а), элементарный объем в прямоугольной (б), цилиндрической (в) и сферической (г) системах координат

Мысленные сечения в теле можно производить произвольно. Если выбрать систему декартовых координат, то удобно рассекать тело сечениями, перпендикулярными к осям координат, что и будем делать в дальнейшем.

Если сечение перпендикулярно оси  $x$ , то проекции вектора полного напряжения на оси координат будут  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  (рис. 14, б). Величина  $\sigma_x$  является нормальной составляющей полного напряжения  $p_x$ , действующего на площадке, нормалью к которой является ось  $x$ . Величины  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  представляют собой касательные составляющие полного напряжения  $p_x$ .

Выделим сечениями, перпендикулярными координатным плоскостям, бесконечно малый объем тела в виде куба или параллелепипеда. Заменяя действие отброшенной части тела соответствующими силами и выражая последние через проекции напряжений на координатные оси, аналогично предыдущему получим следующую систему составляющих по осям координат полных напряжений  $p_x, p_y, p_z$  (рис. 14, б) на площадках с нормальными  $x, y, z$ :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Совокупность этих девяти величин носит название тензора напряжений.

Величины  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  представляют собой проекции на оси прямоугольной системы координат полных напряжений  $p_x, p_y, p_z$ , действующих на соответствующих гранях элементарного куба — нормальные составляющие полных напряжений. Остальные шесть величин — касательные составляющие полных напряжений на соответствующих площадках. Индексы при буквах  $\sigma$  обозначают направления нормальных напряжений. Вторые значки при буквах  $\tau$  обозначают направление касательных напряжений, а первые значки — направление нормалей к соответствующим плоскостям рассматриваемого элементарного объема.

Будем последовательно уменьшать ребра элементарного куба так, чтобы он обратился в точку. В таком случае совокупность компонентов тензора напряжений будет в самом общем виде характеризовать напряженное состояние в данной точке тела.

На рис. 14, б изображена система напряжений, действующих на трех плоскостях выделенного элементарного объема. Объем ограничивается шестью плоскостями. Следовательно, на всех шести поверхностях действуют 18 составляющих напряжений, которые являются внешними удельными силами по отношению к рассматриваемому объему. Кроме поверхностных сил, на элемент действуют объемные силы, пропорциональные массе тела (например, силы тяжести). Этими силами в дальнейшем будем пренебрегать, полагая, что они малы по сравнению с поверхностными силами, вызывающими деформацию тела.

Напряжения, возникающие в теле под действием внешних сил, в общем случае различны в различных его точках, т. е. они являются функциями

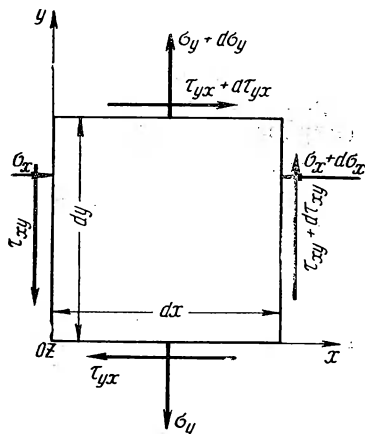


Рис. 15. Схема сил, образующих момент относительно оси  $z$

координат. Поскольку среда непрерывна, то при переходе от одной грани элементарного куба к другой соответствующие напряжения непрерывно изменяются на малую величину.

Предположим далее, что тело находится в равновесии. Тогда для каждого его элемента удовлетворяются шесть условий равновесия статики: сумма проекций всех сил на каждую из трех осей координат равна нулю и сумма моментов всех сил относительно каждой из осей также равна нулю.

Возьмем, например, сумму моментов всех сил, действующих на элемент тела относительно оси  $z$ . Схема сил, образующих момент относительно оси  $z$ , представлена на рис. 15. Остальные силы, не образующие момента относительно оси  $z$ , на чертеже отсутствуют.

Приравнявая сумму моментов сил, относительно оси  $z$  нулю, получаем:

$$\begin{aligned}
 & (\tau_{yx} + d\tau_{yx}) dx dy dz - (\tau_{xy} + d\tau_{xy}) dx dy dz - (\sigma_y + d\sigma_y) dx dz \times \\
 & \times \frac{dx}{2} + (\sigma_x + d\sigma_x) dy dz \frac{dy}{2} - \sigma_x dy dz \frac{dy}{2} + \sigma_y dx dz \frac{dx}{2} = 0, \text{ или} \\
 & (\tau_{yx}^{\text{нов}} - \tau_{xy}) dx dy dz + (d\tau_{yx} - d\tau_{xy}) dx dy dz - d\sigma_y dx dz \frac{dx}{2} + \\
 & + d\sigma_x dy dz \frac{dy}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

Отбрасывая три последних члена этого равенства как величины малые по сравнению с первым членом, будем иметь:  $\tau_{yx} - \tau_{xy} = 0$ .

Приравнявая нулю сумму моментов сил относительно двух других осей, получим аналогичные соотношения. Таким образом, из трех уравнений:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx}, & \tau_{yz} = \tau_{zy}, & \tau_{zx} = \tau_{xz} \end{cases} \quad (16)$$

следует, что касательные составляющие тензора напряжений попарно равны. Соотношения (16) выражают закон взаимности (парности) касательных напряжений.

Выше было получено девять величин, при помощи которых можно описать напряженное состояние в каждой точке тела: три нормальные и шесть касательных составляющих напряжений. Поскольку касательные напряжения попарно равны, напряженное состояние произвольной точки тела в самом общем виде может быть охарактеризовано шестью величинами: тремя касательными и тремя нормальными составляющими напряжения.

Над тензорами можно производить операции сложения и вычитания. Для этого складывают или вычитают соответствующие их компоненты. Тензор  $T_H$  можно представить как сумму шарового тензора напряжений  $T_H^0$  и девиатора напряжений  $D_H$ :  $T_H = T_H^0 + D_H$ .

Введем обозначение  $\sigma_{cp} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ . Тогда можно написать:

$$T_{II} = \begin{bmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{cp} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Это соотношение проиллюстрировано на рис. 16, из которого следует, что шаровой тензор напряжений характеризует такое напряженное состояние элемента, при котором будет происходить только изменение его объема. Девиатор напряжений характеризует напряженное состояние, при котором происходит только изменение формы элементарного объема.

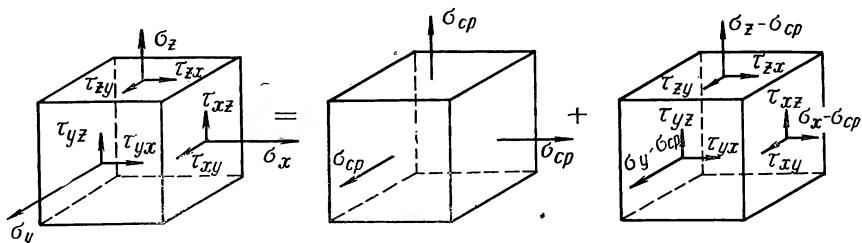


Рис. 16. Схема разложения тензора напряжений на шаровой тензор и тензор-девиатор

При решении многих задач обработки металлов давлением удобно пользоваться цилиндрической системой координат  $\rho, \theta, z$ . В этом случае из тела методом сечений выделяют элементарный объем клинообразной формы, ограниченной четырьмя плоскостями и двумя цилиндрическими поверхностями (рис. 14, в). Рассуждая аналогично предыдущему, получим совокупность величин, характеризующих напряженное состояние в данной точке тела:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\rho\theta} & \tau_{\rho z} \\ \tau_{\theta\rho} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{z\rho} & \tau_{z\theta} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (18)$$

При этом  $\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta\rho}$ ;  $\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$ ;  $\tau_{z\rho} = \tau_{\rho z}$ . Очевидно, что в цилиндрической системе координат можно записать соотношение, аналогичное выражению (17).

## 2. Величины, характеризующие деформацию тела

Закрепим элемент объема сплошного тела так, чтобы он не мог перемещаться в пространстве как абсолютно твердое тело. Тогда перемещения любых точек будут являться следствием

только деформаций тела. Перемещения точек тела будем характеризовать проекциями вектора перемещения на оси координат. Пусть, например, точка из положения  $a$  переместилась в положение  $a_1$  (рис. 17). Проекция вектора перемещения  $\vec{aa}_1$  на оси координат

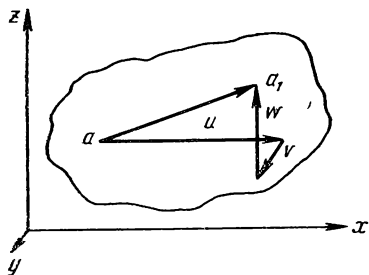


Рис. 17. Вектор перемещения и его проекции на оси координат

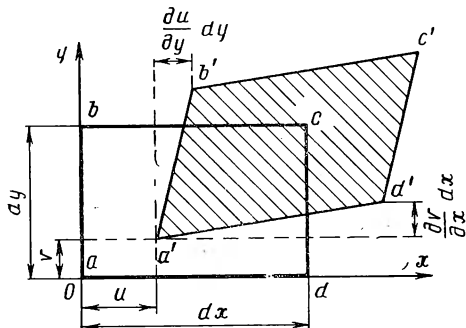


Рис. 18. Деформация грани элементарного объема в плоскости  $хоу$

обозначим соответственно  $u, v, w$ . Будем считать, что выделенный элемент  $dx dy dz$  является весьма малым кубом или параллелепипедом. В результате деформации длина его ребер изменяется и углы между ребрами будут отличаться от прямых. Длина ребер, параллельных оси  $x$ , при деформации изменяется на величину  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx$ . Относительное удлинение в направлении оси  $x$  будет

$e_{xx} = \frac{du}{dx}$ . Соответственно относительные удлинения вдоль осей  $y$  и  $z$  будут:  $e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$ .

Прямой угол между ребрами  $dx$  и  $dy$  (рис. 18) элемента изменится при деформации на малую величину  $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = e_{xy}$ . Для бесконечно малых деформаций это изменение угла является сдвигом. Аналогичные соотношения можно написать и для сдвигов в других координатных плоскостях. Таким образом, будем иметь систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}; & e_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Предположим [5], что при деформации одной из граней параллелепипеда произошел сдвиг на величину  $1/2 e_{xy}$  так, что деформация осуществляется по направлению от оси  $x$  к оси  $y$  (рис. 19, а). До-

пустим теперь, что грань параллелепипеда деформировалась так, что сдвиг осуществляется от оси  $y$  к оси  $x$  (рис. 19, б), причем величина сдвига равна  $\frac{1}{2} e_{yx}$ .

Очевидно, что второй случай деформации можно получить из первого поворотом искаженной грани параллелепипеда как жесткого тела вокруг точки  $O$ . Отсюда следует, что деформации сдвига в обоих случаях одинаковы.

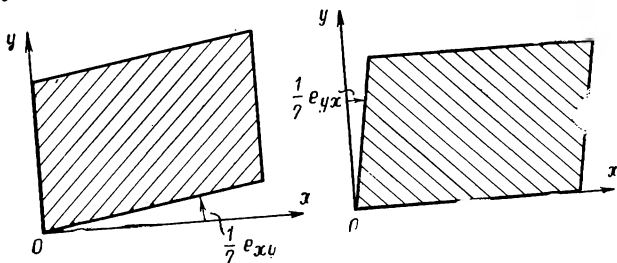


Рис. 19. Сдвиги при повороте грани элементарного объема вокруг точки  $O$

Рассматривая деформации соответствующих граней параллелепипеда и в других плоскостях, получим следующие соотношения:

$$e_{xy} = e_{yx}; \quad e_{yz} = e_{zy}; \quad e_{zx} = e_{xz}. \quad (20)$$

Мы пришли к выводу о том, что сдвиги попарно равны. Соотношения (20) выражают закон взаимности (сопряженности) сдвигов.

Таким образом, деформированное состояние тела характеризуется симметричным тензором:

$$\begin{bmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2} e_{xy} & \frac{1}{2} e_{xz} \\ \frac{1}{2} e_{yx} & e_{yy} & \frac{1}{2} e_{yz} \\ \frac{1}{2} e_{zx} & \frac{1}{2} e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Величины  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ ,  $e_{zz}$  представляют собой относительные удлинения ребер элементарного параллелепипеда вдоль соответствующих осей координат, а величины  $e_{xy}$ ,  $e_{zx}$ ,  $e_{yz}$  — сдвиги в плоскостях  $xoy$ ,  $zox$  и  $yoz$ .

Поскольку сдвиги попарно равны, деформированное состояние в самом общем виде может быть охарактеризовано шестью величинами: тремя относительными удлинениями и тремя сдвигами.

В цилиндрической системе координат относительные удлинения и сдвиги характеризуются следующими выражениями:

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad e_{\theta\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad (22)$$



$$\left. \begin{aligned} e_{\theta\theta} &= \frac{u}{\rho} + \frac{\partial v}{\rho d\theta}; & e_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\rho d\theta}; \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}; & e_{z\rho} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Деформированное состояние элементарного объема (рис. 14, в) характеризуется тензором

$$\begin{bmatrix} e_{\rho\rho} & \frac{1}{2} e_{\rho\theta} & \frac{1}{2} e_{\rho z} \\ \frac{1}{2} e_{\theta\rho} & e_{\theta\theta} & \frac{1}{2} e_{\theta z} \\ \frac{1}{2} e_{z\rho} & \frac{1}{2} e_{z\theta} & e_{zz} \end{bmatrix},$$

для которого так же, как и выше, справедлив закон парности сдвигов.

Тензор деформаций, подобно тензору напряжений, можно представить как сумму шарового тензора деформаций  $T_D^0$  и девиатора деформаций  $D_D$ :

$$T_D = \begin{bmatrix} e_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & e_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & e_{cp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{xx} - e_{cp} & \frac{1}{2} e_{xy} & \frac{1}{2} e_{xz} \\ \frac{1}{2} e_{yx} & e_{yy} - e_{cp} & \frac{1}{2} e_{yz} \\ \frac{1}{2} e_{zx} & \frac{1}{2} e_{zy} & e_{zz} - e_{cp} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где  $e_{cp} = 1/3 (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})$  — средняя относительная деформация.

Из этой записи следует, что шаровая часть тензора деформаций характеризует изменение объема тела, а девиаторная часть — изменение его формы.

Если ребра элементарного параллелепипеда постепенно уменьшать, то мы придем к понятию деформированного состояния в окрестности данной точки тела, подобно тому, как ранее было введено понятие о напряженном состоянии в данной точке тела.

Полученные равенства справедливы только для случая малых деформаций. Это обстоятельство нашло выражение в том, что в соотношениях (21) не принимались во внимание бесконечно малые величины высших порядков.

### 3. Уравнения совместности

Выше было показано, что перемещение любой точки сплошного тела определяется тремя функциями:  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Деформации же в данной точке определяются шестью функциями:  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ ,  $e_{zz}$ ,  $e_{xy}$ ,  $e_{zx}$ ,  $e_{zy}$ .

Шесть компонентов деформации являются функцией трех величин:  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Таким образом, между компонентами деформации должны существовать определенные зависимости.

Число таких зависимостей равно шести и они делятся на две группы. К I группе относятся зависимости между составляющими деформации в одной плоскости.

Возьмем, например, деформации

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

и продифференцируем дважды обе части первого из этих равенств по  $y$ , а второго — по  $x$ :

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получим

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x \partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right],$$

$$\text{но } e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$\text{Поэтому } \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Таким образом, если заданы две линейные деформации в данной плоскости, то этим предопределяется значение угла сдвига в той же плоскости:

$$e_{xy} = \int \left[ \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} \right] dx dy.$$

Аналогичным образом можно получить две другие зависимости первой группы. Их можно записать, не производя вычислений, пользуясь способом круговой подстановки.

Итак, получаем три зависимости первой группы:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{zy}}{\partial z \partial y};$$

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial x \partial z}. \quad (24)$$

Зависимости II группы, т. е. зависимости между составляющими деформации в разных плоскостях [3, с. 105], можно получить, проводя подобные преобразования.

Физический смысл выведенных уравнений заключается в следующем. Пусть тело мысленно разбито до деформации на элементарные объемы. Если все деформации и сдвиги задать произвольно, т. е. не принять во внимание уравнения совместности, то из деформированных параллелепипедов не удастся сложить сплошного (непрерывного) тела. Между ними получим либо пустоты, либо размеры одного деформированного элементарного объема окажутся больше размеров других объемов.

#### 4. Связь между деформациями и напряжениями

В теории упругости и пластичности зависимость, связывающая деформации и напряжения, установлена эмпирическим путем.

Для решения задач теории упругости используются следующие зависимости между компонентами тензоров деформаций и напряжений, выражающие закон Гука [3]:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_x - m (\sigma_y + \sigma_z)]; & e_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_y - m (\sigma_x + \sigma_z)]; & e_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}; \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_z - m (\sigma_y + \sigma_x)]; & e_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

При пластической деформации связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений имеет более сложный вид. Если пренебречь изменением объема от упругой деформации, то эта связь может быть выражена в таком виде [3]:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E'} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right]; & e_{xy} &= \frac{1}{G'} \tau_{xy}; \\ e_{yy} &= \frac{1}{E'} \left[ \sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z) \right]; & e_{yz} &= \frac{1}{G'} \tau_{yz}; \\ e_{zz} &= \frac{1}{E'} \left[ \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_x) \right]; & e_{zx} &= \frac{1}{G'} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

В этих формулах

$$G' = \frac{E'}{2(1+m')}. \quad (27)$$

Так как мы приняли коэффициент Пуассона  $m' = 1/2$ , то

$$G' = \frac{E'}{3}, \quad (28)$$

где  $E'$  — модуль пластичности.

#### 5. Плоское напряженное состояние и плоская деформация

Пусть линейные размеры поперечного сечения тела много больше его размеров вдоль оси  $z$  (рис. 20, б) и по контуру тела параллельно плоскости поперечного сечения приложены силы, равномерно распределенные вдоль оси  $z$ . Тогда составляющие тензора напряжений  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  равны нулю на обеих свободных от нагрузок поверхностях тела. Мы не допустим большой ошибки, если примем, что  $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  равны нулю и во всем объеме тела.

Ввиду того, что нагрузки, приложенные к контуру тела, равномерно распределены по его толщине и размеры тела вдоль оси  $z$  малы,

можно принять, что остальные напряжения ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) не зависят от координаты  $z$ , т. е. остаются постоянными по всей толщине пластинки. Размеры тела в направлении оси  $z$  при принятых допущениях несут существенны, поэтому толщину пластинки для удобства расчетов обычно принимают равной единице. Описанный характер распределения напряжений называют плоским напряженным состоянием.

Рассмотрим теперь напряженное состояние тела, у которого размеры вдоль оси  $z$  много больше размеров его поперечного сече-

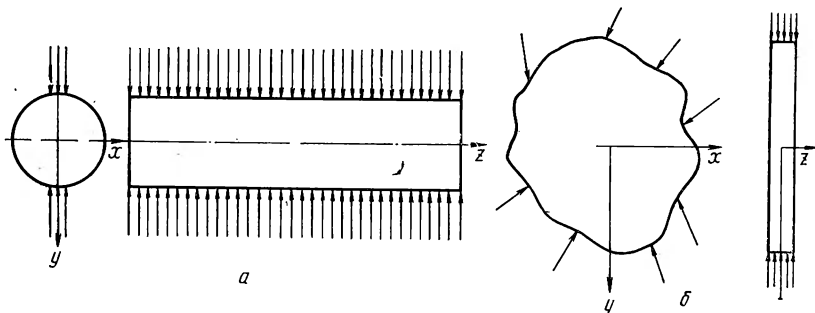


Рис. 20. Схемы плоскодеформированного (а) и плосконапряженного состояния (б)

ния (рис. 20, а). Пусть по контуру тело нагружено силами, равномерно распределенными вдоль оси  $z$  и перпендикулярными к его продольной оси. В таком случае в средней по длине части тела перемещение всех его точек происходит в плоскостях, перпендикулярных длине тела. Это означает, что два смежных сечения, достаточно удаленные от концов, остаются плоскими в течение всего процесса деформации. Поэтому описанный случай и получил название плоской деформации. В случае плоской деформации размеры в направлении оси  $z$  не имеют значения. Поэтому при решении задач о напряженном состоянии плоскодеформированного тела рассматривают какой-либо его элемент, заключенный между смежными сечениями, расстояние между которыми принимают равным единице.

Из изложенного следует, что при плоской деформации составляющие вектора перемещения  $u, v$  являются функциями только координат  $x, y$  и не зависят от координаты  $z$ , составляющая  $w$  равна нулю. Тогда из уравнений (19) получаем:

$$e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad e_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (29)$$

Поэтому на основании выражения (25) имеем:

$$\tau_{yz} = 0; \quad \tau_{zx} = 0; \quad \sigma_z - m(\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\sigma_z = m(\sigma_x + \sigma_y). \quad (30)$$

Если принять условие постоянства объема, то

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y). \quad (31)$$

Нормальные напряжения  $\sigma_z$  имеют место в поперечных сечениях тела и сохраняют деформацию плоской. Если вдоль оси тела приложены равномерно распределенные растягивающие или сжимающие силы, то деформация остается плоской. В этом случае первые два из соотношений (29) остаются в силе, а третье соотношение приобретает вид  $e_{zz} = \text{const}$ .

## 6. Дифференциальные уравнения равновесия для плоской задачи

Выделим из сплошного тела малый объем в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами  $dx$ ,  $dy$ , 1 (рис. 21, а).

Напряжения, как отмечалось в общем случае, различны в разных точках тела, т. е. они являются функциями координат. Отсюда следует, что если, например, на левой грани элемента действует напряжение  $\sigma_x$ , то на правой грани, отстоящей от нее на расстоянии  $dx$ , действует напряжение  $\sigma_x + d\sigma_x$ . Задача плоская, поэтому напряжения являются функциями только координат  $x$ ,  $y$ . Переход от левой площадки к правой будем осуществлять так, чтобы координата  $y$  оставалась неизменной.

В таком случае переменной будет лишь координата  $x$ . Поэтому

$$d\sigma_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx.$$

При этом приращения напряжений  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$  также окажутся функциями только одной из координат:  $x$  или  $y$ .

Полагая, что тело находится в равновесии, и проектируя все силы на оси  $x$ ,  $y$ , получим следующие равенства:

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_x dy + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{xy} dx = 0;$$

$$\left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx - \sigma_y dx + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \tau_{xy} dy = 0.$$

Отсюда после элементарных преобразований будем иметь:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (32)$$

Эти равенства носят название дифференциальных уравнений равновесия для плоской задачи в прямоугольных координатах.

Рассмотрим теперь условия равновесия элементарного объема в цилиндрических координатах для случая плоской задачи. На рис. 21, б показана система напряжений, действующих со стороны отброшенной части тела на элемент объема, поперечное сечение которого представляет собой площадку  $abcd$  и толщина равна единице.

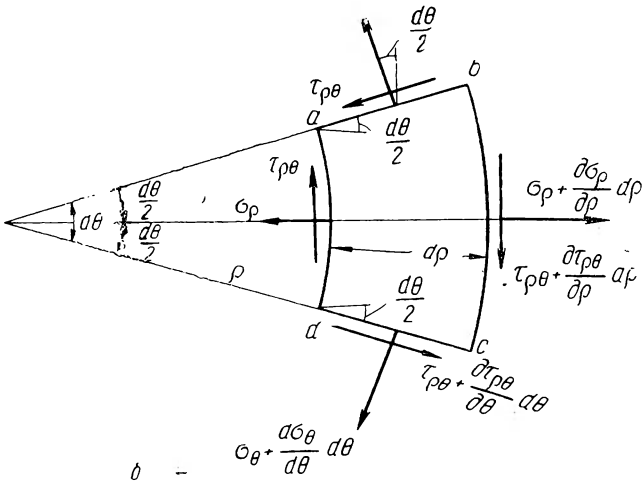
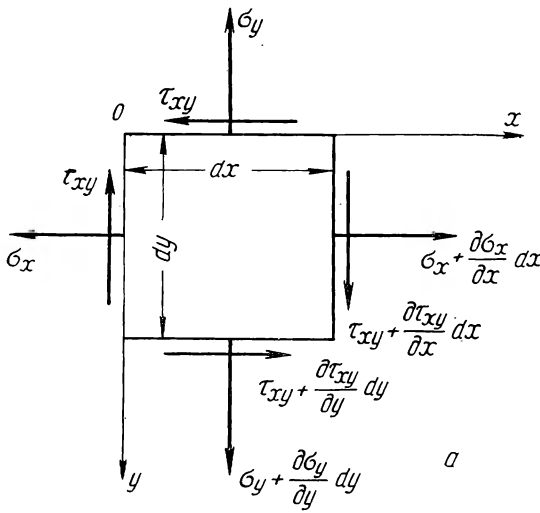


Рис. 21. Напряжения на гранях плоского элемента в прямоугольной (а) и цилиндрической (б) системах координат

Принимая во внимание, что задача плоская и что при переходе между смежными поверхностями, ограничивающими элементарный объем, изменяется только одна из координат, и суммируя все усилия, действующие на элемент объема в радиальном направлении, получим:

$$\left(\sigma_{\rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho}\right) (\rho + d\rho) d\theta - \sigma_{\rho} \rho d\theta - \left(\sigma_{\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} d\theta\right) d\rho \sin \frac{d\theta}{2} -$$

$$- \sigma_{\theta} d\rho \sin \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{\rho\theta} + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} d\theta\right) d\rho \cos \frac{d\theta}{2} - \tau_{\rho\theta} d\rho \cos \frac{d\theta}{2} = 0.$$

После приведения подобных членов получим:

$$\sigma_r d\theta d\rho + \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} d\rho d\theta (\rho + d\rho) - 2\sigma_\theta d\rho \sin \frac{d\theta}{2} - \\ - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta d\rho \sin \frac{d\theta}{2} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta d\rho \cos \frac{d\theta}{2} = 0.$$

Полагая, что  $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$ ,  $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$ , пренебрегая бесконечно малыми высших порядков и сокращая множитель  $d\rho d\theta$ , приходим к уравнению:

$$\sigma_r + \rho \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} - \sigma_\theta + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0.$$

Таким же образом можно получить второе дифференциальное уравнение равновесия для элементарного объема в цилиндрических координатах. Окончательно получим:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} = 0; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{r\theta}}{\rho} = 0. \quad (33)$$

В сферических координатах (рис. 14, з) при наличии осевой симметрии напряжения не зависят от координаты  $\varphi$  и можно принять, что сдвиги  $e_{r\varphi} = e_{\theta\varphi} = 0$ . В самом деле, дифференциальные уравнения равновесия для случая осевой симметрии напряжений можно написать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} [(\sigma_r - \sigma_\theta) + (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta] &= 0; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} [2\tau_{r\theta} + \tau_{\theta\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Отсюда следует, что если

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi) + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta = 0; \quad \tau_{r\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta = 0, \quad (35)$$

то уравнения (34) сводятся к уравнениям равновесия (33) в цилиндрической системе координат.

## 7. Условия на контуре для плоской задачи

Если тело, подвергающееся плоской деформации, разделить на малые объемы, то у самой поверхности получаются объемы, отличные по форме от куба или параллелепипеда (рис. 22). Эти краевые объемы в случае плоской деформации приближенно приняты за призмы, поперечное сечение которых представляет собой треугольник (рис. 23, а). На наклонную грань  $dF$  призмы действуют внешние силы, под влиянием которых на этой грани возникает напряжение  $p_n$  с направлением в общем случае, отличным от направления нормали  $n$ . Напряжения, действующие на двух других гранях призмы, изображены на рис. 23, а. Составляющие вектора напряжения  $p_n$  по осям координат обозначим через  $p_x$  и  $p_y$ .

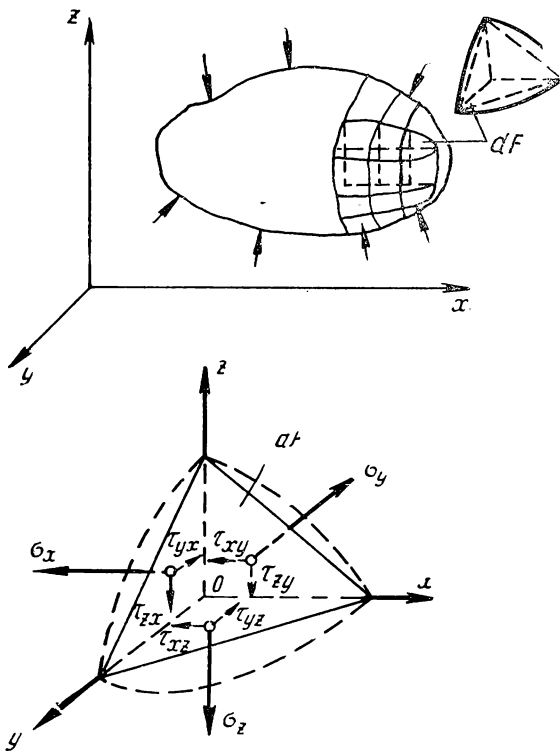


Рис. 22. Схема к выводу уравнений совместности

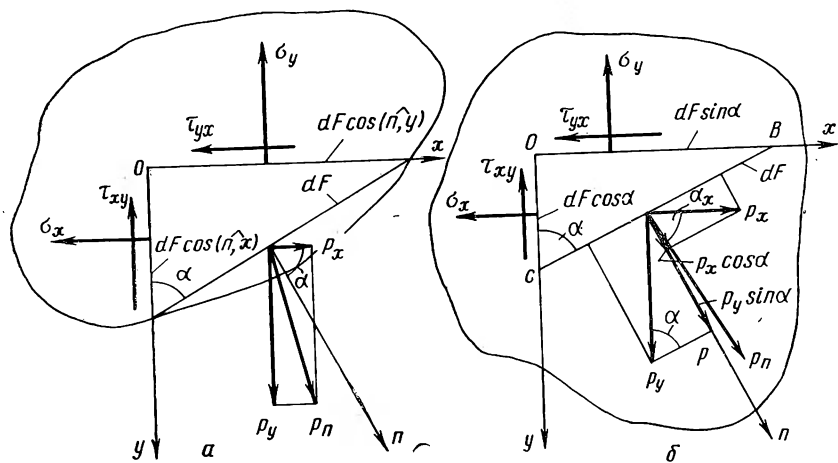


Рис. 23. Система сил, действующих на элементарный объем у поверхности (а) и внутри тела (б) при плоской деформации



Проектируя на оси координат внешние и внутренние силы, действующую на элементарную призму, и сокращая обе части уравнений на  $dF$ , получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x \cos(\widehat{n, x}) + \tau_{xy} \cos(\widehat{n, y}); \\ p_y &= \tau_{xy} \cos(\widehat{n, x}) + \sigma_y \cos(\widehat{n, y}). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Здесь  $(\widehat{n, x})$ ,  $(\widehat{n, y})$  — углы между нормалью  $n$  и осями  $x$ ,  $y$ . Эти равенства носят название условий на контуре для плоской задачи. Они выражают в общем виде связь, которая существует между внутренними и внешними силами на поверхности, ограничивающей тело, подвергнутое плоской деформации или испытывающее плоское напряженное состояние.

### 8. Нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке

Формулы, полученные в предыдущем параграфе, можно применить не только для того, чтобы установить связь между внешними и внутренними силами. Эти формулы можно использовать также для того, чтобы определить нормальное и касательное напряжения на площадке, проходящей наклонно к осям координат, если известны напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  на двух других площадках, параллельных осям координат  $x$  и  $y$ .

Выделим из сплошного тела какую-либо точку  $O$  и проведем в ее окрестности две взаимно перпендикулярные площадки  $OB$  и  $OC$ , параллельные координатным плоскостям. Проведем также наклонную площадку, проходящую через точки  $B$  и  $C$  (рис. 23, б). Если последовательно уменьшать размеры элемента, то в пределе мы придем в точку  $O$  так, что напряжение на наклонной площадке  $BC$  будет представлять собой напряжение на площадке, проведенной через точку  $O$  над некоторым углом к осям координат. Составляющие напряжения  $p_n$ , действующего на наклонной грани  $BC$ , так же как и ранее, обозначим через  $p_x$  и  $p_y$ . Следует только иметь в виду, что в рассматриваемом случае вектор напряжения и его составляющие представляют собой уже не внешние по отношению к телу в целом, а внутренние силы, поскольку элементарная призма выделена внутри тела.

Обозначим через  $\alpha$  угол между нормалью  $\vec{n}$  и осью  $x$ . Тогда, согласно формулам (36), составляющие напряжения по осям координат будут выражаться в виде:

$$p_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha; \quad p_y = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha.$$

Очевидно, что нормальная и касательная составляющие вектора напряжения, действующего на площадке  $BC$ , будут равны:

$$\sigma_n = p_y \sin \alpha + p_x \cos \alpha; \quad \tau_n = p_y \cos \alpha - p_x \sin \alpha.$$

Подставляя сюда величины  $p_x$  и  $p_y$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha; \\ \tau_n &= \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

и после нескольких несложных тригонометрических преобразований:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \tau_n &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

## 9. Дифференциальные уравнения равновесия и условия на контуре для трехмерной задачи

Будем считать, что тело находится в равновесии. Тогда, согласно условиям статики, сумма проекций на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  всех сил, действующих на элемент, равна нулю. Например, на рис. 24 показаны все силы, действующие на элемент, проекции которых на ось  $x$  отличны от нуля. Сумма проекций этих сил

$$(\sigma''_x - \sigma'_x) dy dz + (\tau''_{xy} - \tau'_{xy}) dx dz + (\tau''_{xz} - \tau'_{xz}) dx dy = 0,$$

НО

$$\sigma''_x - \sigma'_x = d\sigma_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx,$$

$$\tau''_{xy} - \tau'_{xy} = d\tau_{xy} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy;$$

$$\tau''_{xz} - \tau'_{xz} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz.$$

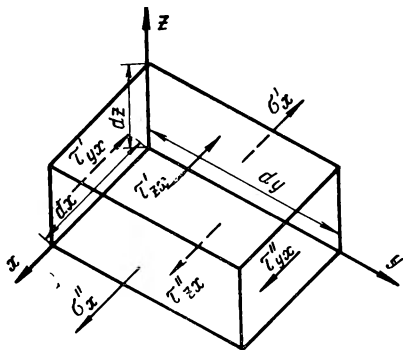


Рис. 24. Схема к выводу уравнений равновесия для трехмерной задачи

Аналогичные соотношения получим, проектируя все силы на оси  $y$  и  $z$ . Производя необходимые подстановки и сокращения, получим такие три дифференциальных уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Если разделить все деформируемое тело произвольной формы на элементарные бесконечно малые объемы, то у самой поверхности получатся объемы, отличные по форме от куба или параллелепипеда. Эти крайние объемы можно принять за тетраэдры. На наклонную грань  $dF$  тетраэдра (рис. 22) действуют внешние силы, а на остальные — внутренние.

Проектируя все силы на оси координат, получим:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x \cos(\widehat{n, x}) + \tau_{xy} \cos(\widehat{n, y}) + \tau_{xz} \cos(\widehat{n, z}); \\ p_y &= \tau_{xy} \cos(\widehat{n, x}) + \sigma_y \cos(\widehat{n, y}) + \tau_{yz} \cos(\widehat{n, z}); \\ p_z &= \tau_{xz} \cos(\widehat{n, x}) + \tau_{yz} \cos(\widehat{n, y}) + \sigma_z \cos(\widehat{n, z}). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Эти соотношения выражают связь между внутренними силами возле поверхности, ограничивающей твердое тело, и внешними силами, действующими на этой поверхности.

Аналогичным путем можно получить дифференциальные уравнения равновесия для трехмерной задачи в цилиндрической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} &= 0. \\ \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

## 10. Главные напряжения

Пусть в некоторой точке  $N$  сплошного тела по некоторому направлению действует полное напряжение  $p_n$  (рис. 25,  $a$ ). Проведем через данную точку три взаимно перпендикулярные площадки, нормальными к которым являются оси  $x, y, z$ .

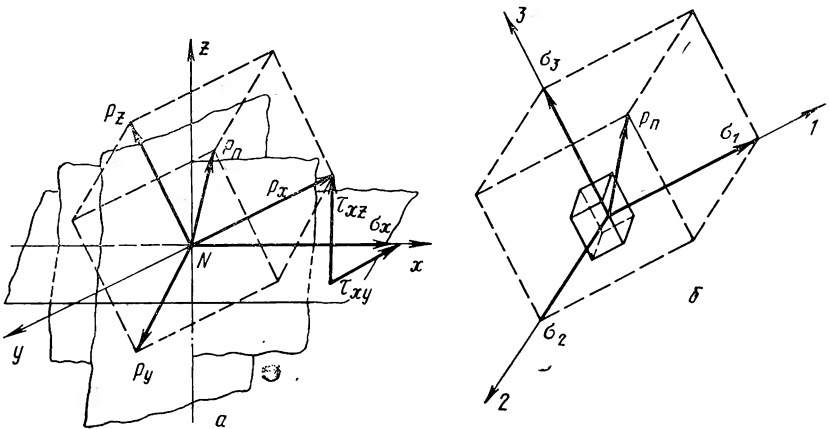


Рис. 25. Схема к описанию напряженного состояния:  
 $a$  — в произвольно выбранной системе координат;  $b$  — в главных осях

Вектор  $p_n$  полного напряжения в точке можно представить в виде геометрической суммы трех векторов  $p_x, p_y, p_z$  и рассматривать последние как полные напряжения, действующие на упомянутых площадках. Каждый из векторов  $p_x, p_y, p_z$  полного напряжения на данной площадке есть геометрическая сумма его проекций на оси координат. Одна из этих проекций есть нормальная составляющая полного напряжения на площадке, а две другие — касательные составляющие того же напряжения (см., например,  $p_x$  и его проекция  $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  на рис. 25, а).

Допустим, что мы изменяем направление осей координат и положение нормальных к ним площадок так, что направление одной из осей координат (например,  $Nx$ ) совмещается с направлением вектора полного напряжения  $p_x$  на данной площадке. В таком случае касательные составляющие полного напряжения  $p_x$ , обозначенные на чертеже через  $\tau_{xy}, \tau_{xz}$ , обратятся в нуль. Но, согласно закону парности, касательные напряжений  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  и  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ . Таким образом обращаются в нуль и касательные напряжения  $\tau_{yx}, \tau_{zx}$ . Более строгое обследование (см., например, [3]) показывает, что при этом обращаются в нуль и остальные два компонента тензора напряжений:  $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$ . Из этого следует, что полные напряжения  $p_x, p_y, p_z$  взаимно перпендикулярны.

Таким образом, при выбранном нами способе поворота осей координат величины полных напряжений  $p_x, p_y, p_z$  окажутся численно равны их нормальным составляющим, которые для этого случая обозначим через  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (рис. 25, б).

Величины  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  назовем главными напряжениями. Направления, по которым действуют главные напряжения, называются главными направлениями или главными осями тензора напряженного состояния.

В дальнейшем примем, что  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Возьмем теперь снова некоторую точку  $N$  сплошного тела и проведем через нее главные оси 1, 2, 3.

В точке  $N$  действует полное напряжение  $p_n$ . Это напряжение можно выразить через его составляющие по главным осям  $p_1, p_2, p_3$ . Проведем через точку  $N$  наклонную площадку с нормалью  $n$ . Применяя для этой площадки формулы (40), получим:

$$p_1 = \sigma_1 \cos(\widehat{n, 1}); \quad p_2 = \sigma_2 \cos(\widehat{n, 2}); \quad p_3 = \sigma_3 \cos(\widehat{n, 3}).$$

Можно написать следующую связь между длиной вектора  $p_n$  и его проекциями:

$$p_n = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2(\widehat{n, 1}) + \sigma_2^2 \cos^2(\widehat{n, 2}) + \sigma_3^2 \cos^2(\widehat{n, 3})}.$$

Из этого выражения следует, что при изменении углов между нормалью и главными осями, т. е. при изменении наклона площадки, изменяется величина и направление полного напряжения, действующего в точке  $N$  на этой площадке. При этом конец радиуса-век-

тора  $p_n$  будет описывать некоторую поверхность, вид которой определим из условий (40):

$$p_1/\sigma_1 = \cos(\widehat{n, 1}); \quad p_2/\sigma_2 = \cos(\widehat{n, 2}); \quad p_3/\sigma_3 = \cos(\widehat{n, 3}).$$

Возведем в квадрат правую и левую части этих равенств и сложим их почленно. Получим:

$$\left(\frac{p_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{p_3}{\sigma_3}\right)^2 = 1.$$

Это — поверхность напряжений или эллипсоид напряжений (рис. 26, б). В описанном случае изменение вектора  $p_n$  происходило за счет изменения положения площадки.

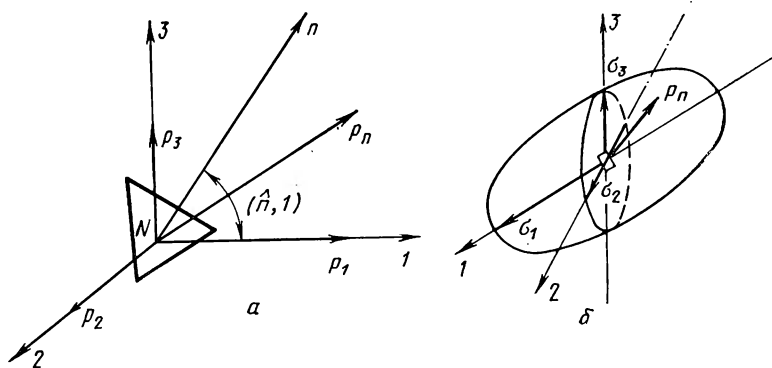


Рис. 26. Полное напряжение в точке и его составляющие по осям (а) и эллипсоид напряжений (б)

Допустим теперь, что мы изменяем величину вектора  $p_n$  за счет изменения величины внешних нагрузок без изменения их направления. При этом согласно формуле  $p_n = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$  будут изменяться и величины  $p_1, p_2, p_3$ .

Далее  $p_1 = \sigma_1 \cos(\widehat{n, 1}); \quad p_2 = \sigma_2 \cos(\widehat{n, 2}); \quad p_3 = \sigma_3 \cos(\widehat{n, 3}).$

При данном угле между нормалью  $\vec{n}$  и главными осями это будет означать, что будут изменяться полуоси эллипсоида, т. е. величины главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Получим семейство эллипсоидов, вставленных один в другой. Если положение в пространстве осей эллипсоидов остается неизменным, то такое нагружение называется простым. Это бывает всегда, когда все нагрузки возрастают пропорционально одному общему параметру, а их направление не изменяется. Если эллипсоид повернется, такое нагружение называется сложным.

Различают девять схем главных напряжений: две линейные, три плоские и четыре объемные (рис. 27, а). От схемы главных напряжений зависят механические свойства (хрупкость и пластич-

ность) подвергаемого обработке тела и его сопротивление деформации.

На основании изложенного выше теперь можно дать несколько более широкое толкование понятию тензора напряжений: тензор напряжений есть совокупность величин, которые характеризуют

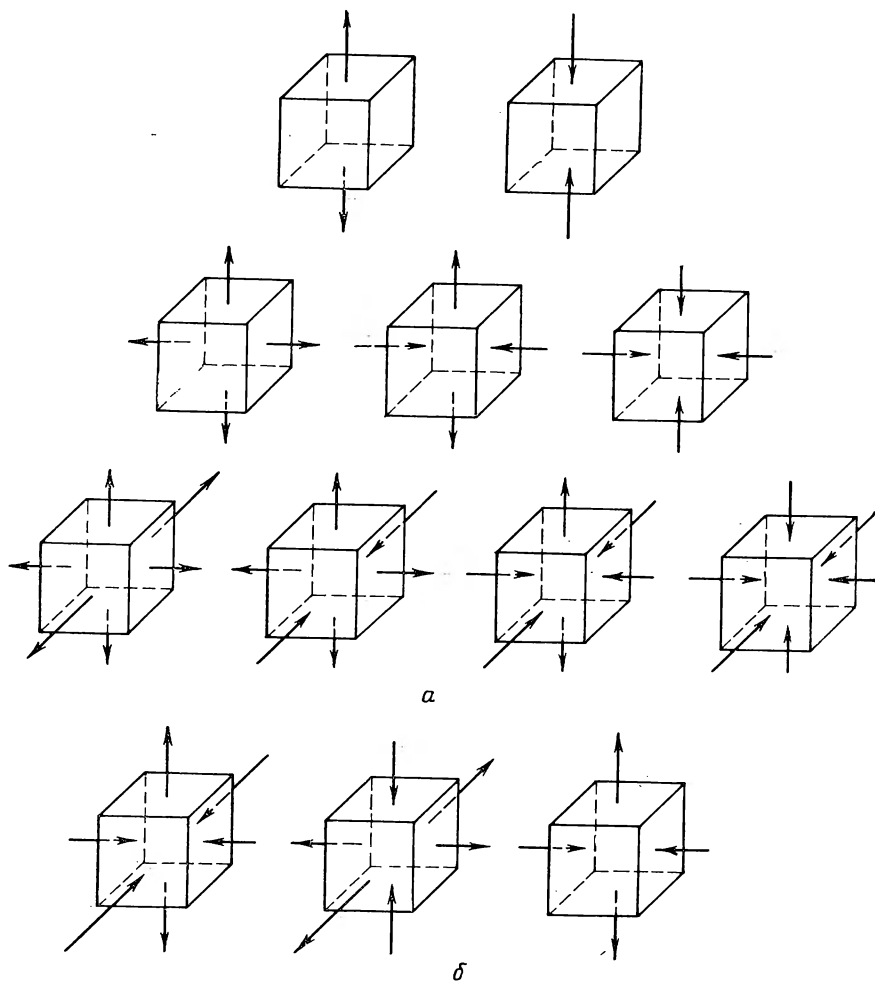


Рис. 27. Основные схемы главных напряжений (а) и главных деформаций (б)

напряженное состояние в данной точке тела по любому направлению. Причем компоненты тензора при повороте координат преобразуются по определенному закону.

На первый взгляд может показаться, что в главных осях напряженное состояние характеризуется только тремя величинами:  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ . Однако такое утверждение было бы неправильным. Дело в том,

что для перехода к главным осям нужно знать их направляющие конусы. Таким образом, в главных осях напряженное состояние в самом общем виде характеризуется шестью величинами так же, как это имеет место и в произвольно выбранных осях. Отличие заключается в том, что в произвольных осях напряженное состояние задается шестью составляющими напряжения, а в главных осях — тремя составляющими напряжения и тремя направляющими косинусами.

Переход от произвольно выбранных осей к главным осям в случае трехосного напряженного состояния осуществляется при помощи формул (40). Для случая плоской задачи такой переход удобнее осуществлять при помощи формул (37) и (38). Делается это следующим образом. Выберем главные оси так, чтобы они совпадали с направлением осей  $x, y$ . При этом  $\sigma_x = \sigma_1$ ;  $\sigma_y = \sigma_3$ ;  $\tau_{xy} = 0$ , и формулы (37) приобретают вид:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha; \quad \tau_n = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \sin 2\alpha.$$

Приравнивая правые части этих формул и (37) или (38) и затем разрешая полученные равенства, будем иметь:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (42)$$

## 11. Максимальные касательные напряжения

Выше было показано, что на элементарных площадках, нормальных к главным осям, касательные напряжения равны нулю. На всех остальных площадках касательные напряжения отличны от нуля. При этом на трех взаимно перпендикулярных площадках, делящих пополам угол между главными плоскостями напряженного состояния, т. е. под углом  $\pi/4$  к ним, касательные напряжения приобретают максимальную величину. Покажем это.

Предположим, что деформация плоская. Выделим из сплошного тела прямоугольный элемент (рис. 28), грани которого совпадают с главными осями 1, 2 и толщина равна единице.

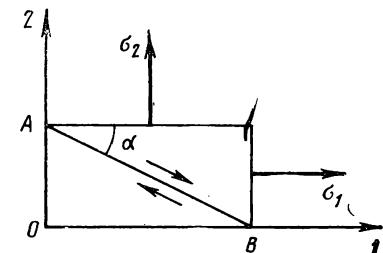


Рис. 28. Прямоугольный элемент в главных осях

На гранях элемента действуют напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$ . Согласно уравнению (38), касательное напряжение на наклонной площадке  $AB$  равно:

$$\tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

В главных осях имеем:  $\sigma_x = \sigma_1$ ;  $\sigma_y = \sigma_2$ ;  $\tau_{xy} = 0$ .

В главных осях 1,2 касательное напряжение  $\tau_n$  обозначим через  $\tau_{12}$ . Тогда получим:

$$\tau_{12} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Отсюда следует, что при  $\alpha = \pi/4$  касательное напряжение имеет максимальное значение

$$\tau_{12} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Принимая во внимание, что касательное напряжение производит взаимный сдвиг треугольных частей рассматриваемого элемента, приходим к выводу, что если, например, на поверхности, ограничивающей часть *OAB*,  $\tau_{12} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ , то на смежной поверхности части *DCB*  $\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ . Итак:  $\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ . Для краткости знаки «плюс» и «минус» в дальнейшем будем отбрасывать.

Рассматривая элемент, грани которого параллельны второй и третьей главной оси, а также элемент, грани которого параллельны первой и третьей главной оси, получим аналогичные выражения для двух других максимальных касательных напряжений.

Более строгое исследование показывает, что соотношения для максимальных касательных напряжений

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad (43)$$

остаются справедливыми и для наиболее общего случая: трехосного (объемного) напряженного состояния.

Из уравнений (42) вытекает такое же соотношение для наибольшего из максимальных касательных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (44)$$

## 12. Октаэдрические напряжения

Если площадка наклонена ко всем трем главным осям, то она представляет собой одну из плоскостей октаэдра и для нее

$$\cos(\widehat{n, 1}) = \cos(\widehat{n, 2}) = \cos(\widehat{n, 3}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Поэтому, согласно формулам (40):

$$p_1 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}; \quad p_2 = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}; \quad p_3 = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}.$$

Проекция вектора полного напряжения  $p_n$  на нормаль представляет собой нормальное напряжение  $\sigma_n$  на октаэдрической площадке (рис. 29). Вектор  $p_n$  есть геометрическая сумма его проекций.



Проекция геометрической суммы равна сумме проекций составляющих векторов, поэтому получим:

$$\sigma_n = p_1 \cos(\widehat{n, 1}) + p_2 \cos(\widehat{n, 2}) + p_3 \cos(\widehat{n, 3})$$

$$\text{или } \sigma_n = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{\text{ср}},$$

т. е. нормальное напряжение на октаэдрической площадке равно среднему напряжению для данной площадки.

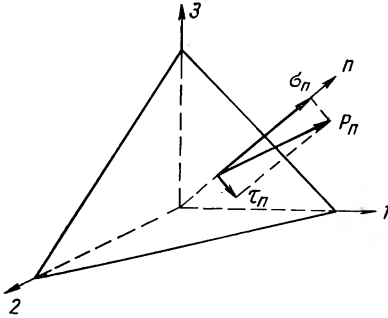


Рис. 29. Полное напряжение и его проекции на октаэдрической площадке

Касательное напряжение на октаэдрической площадке

$$\tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}.$$

Квадрат модуля вектора  $p_n$  равен сумме квадратов составляющих вектора по осям координат:

$$p_n^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_1\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_2\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_3\right)^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2).$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \tau_n^2 &= p_n^2 - \sigma_n^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \\ &= \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\tau_n = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (45)$$

Принимая во внимание уравнение (43), можно написать также:

$$\tau_n = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}. \quad (46)$$

Выражения  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  играют важную роль в теории пластичности.

Характерной особенностью среднего напряжения является то, что величина его остается неизменной или иначе инвариантной при переходе от главных осей к произвольным, так что

$$\sigma_{\text{ср}} = \sigma_n = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (47)$$

Величина среднего напряжения со знаком «минус»

$$\rho = -\frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \tau_3) \quad (48)$$

носит название гидростатического напряжения или среднего давления.

Можно показать, что величина октаэдрического касательного напряжения  $\tau_n$  также остается неизменной в процессе преобразования координатных осей:

$$\begin{aligned} \tau_n &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (49)$$

### 13. Главные деформации и октаэдрический сдвиг

Уже при изучении пп. 1 и 2 настоящей главы легко заметить аналогию, которая существует между теориями напряжений и деформаций.

Подобно напряженному состоянию, деформированное состояние в самом общем виде характеризуется шестью величинами. Диагональные компоненты  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  тензора напряжений представляют собой нормальные напряжения, а остальные (боковые) компоненты — касательные напряжения. Диагональные компоненты  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ ,  $e_{zz}$  тензора деформаций представляют собой относительные удлинения, а боковые компоненты — относительные сдвиги.

Боковые компоненты тензоров напряжений и деформаций парно равны.

В четвертом разделе было показано, что между компонентами тензора напряжений и деформаций существуют однозначные связи.

Кроме того, компоненты тензора деформаций при изменении направления осей координат преобразуются таким же образом, как и компоненты тензора напряжений. Следовательно, как и в теории напряжений, можно найти три взаимно перпендикулярных направления, которые называются главными осями деформаций. В плоскостях, перпендикулярных главным осям, относительные сдвиги равны нулю. Деформации растяжения или сжатия в направлении главных осей называются главными относительными деформациями или просто главными деформациями. В дальнейшем их будем обозначать  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ , полагая, что  $e_1 > e_2 > e_3$ .

Различают три схемы главных деформаций (см. рис. 27, б).

Две из них являются объемными и одна плоской. В случае плоской схемы, как было отмечено выше, в третьем направлении деформации отсутствуют. Схема главных деформаций оказывает влияние на пластичность материала [1], так как, в соответствии с направлением главных деформаций, происходит формирование структуры и различного рода дефектов.

Главные (максимальные) относительные сдвиги, в соответствии с главными касательными напряжениями, имеют место на трех взаимно перпендикулярных площадках, которые делят пополам углы между главными плоскостями деформаций, т. е. под углом  $\pi/4$  к ним. Они определяются формулами

$$\gamma_{12} = e_1 - e_2; \quad \gamma_{23} = e_2 - e_3; \quad \gamma_{31} = e_3 - e_1. \quad (50)$$

Деформированное состояние характеризуется эллипсоидом деформаций, полуоси которого численно равны главным деформациям  $e_1, e_2, e_3$ . Как и в теории напряжений, в главных осях удлинение в направлении, нормальном октаэдрической площадке, равно:

$$e_n = \frac{1}{3} (e_1 + e_2 + e_3) = e_{cp}, \quad (51)$$

т. е. оно равно средней главной деформации. Подобно тому, как это было в теории напряжений, получается и выражение для октаэдрического сдвига:

$$\gamma_n = \frac{2}{3} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2} \quad (52)$$

$$\text{или } \gamma_n = \frac{2}{3} \sqrt{\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2}. \quad (53)$$

Так же, как и в теории напряжений, величины  $e_n = e_{cp}$  и  $\gamma_n$  инварианты, т. е. остаются неизменными в процессе перехода от главных осей к произвольно выбранным, и наоборот.

### III глава

## Основные законы теории упругости и пластичности

### 1. Обобщенный закон упругости

Связь между деформациями и напряжениями в пределах упругой зоны выражается формулами (25).

В главных осях эти формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - m(\sigma_2 + \sigma_3)]; & e_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - m(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ e_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - m(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (54)$$

На основании первых двух равенств можно записать:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{E}{2(1+m)} (e_1 - e_2).$$

По, согласно равенствам (43) и (50):

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{12}; \quad e_1 - e_2 = \gamma_{12}; \quad \frac{E}{2(1+m)} = G.$$

Аналогичные соотношения существуют и для двух других касательных напряжений и сдвигов. Поэтому

$$\tau_{12} = G \gamma_{12}; \quad \tau_{23} = G \gamma_{23}; \quad \tau_{31} = G \gamma_{31}. \quad (55)$$

Согласно равенствам (46) и (53):

$$\tau_n = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}; \quad \gamma_n = \frac{2}{3} \sqrt{\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2}.$$

Отсюда на основании (55) получаем:

$$\tau_n = G \gamma_n, \quad (56)$$

т. е. октаэдрическое касательное напряжение прямо пропорционально октаэдрическому сдвигу.

Введем следующие обозначения:

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_n; \quad e_i = \frac{3}{2\sqrt{2}(1+m)} \gamma_n. \quad (57)$$

Отсюда:

$$\tau_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_i; \quad \gamma_n = \frac{2\sqrt{2}(1+m)}{3} e_i.$$

Тогда выражение (56) примет вид:

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_i = \frac{E}{2(1+m)} \frac{2\sqrt{2}}{3} (m+1) e_i$$

$$\text{или } \sigma_i = E e_i. \quad (58)$$

Это соотношение выражает обобщенный закон упругости.

На основании равенств (45) и (52) можно записать:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \quad (59)$$

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+m)} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2}. \quad (60)$$

Величину  $\sigma_i$  назовем обобщенным напряжением, величину  $e_i$  — обобщенной деформацией.

В таком случае обобщенный закон упругости можно сформулировать так: обобщенное напряжение прямо пропорционально обобщенной деформации. Величины  $\sigma_i$  и  $e_i$  иногда называют также интенсивностями напряжений и деформаций.

Выражения (59) и (60) записаны для главных осей. Для произвольных осей координат обобщенное напряжение и обобщенная деформация записываются в следующем виде:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}; \quad (61)$$

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+m)} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + \frac{3}{2}(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)}. \quad (62)$$

Множители в правых частях формул (57), выражающих обобщенные деформацию и напряжение, подобраны так, чтобы в случае простейших напряженных состояний (одноосное растяжение, сжатие, кручение, изгиб) получить из закона (58) выражение закона Гука в его наиболее простом и удобном для экспериментальной проверки виде.

Выпишем еще такие важные для последующего соотношения. Разделим почленно первое и второе из равенств (55) на третье; с учетом равенств (43) и (50) будем иметь:

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{e_2 - e_1}{e_1 - e_3}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

После сложения получим:

$$\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2e_2 - e_1 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Величины

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad \text{и} \quad \mu_e = \frac{2e_2 - e_1 - e_3}{e_1 - e_3} \quad (63)$$

называются соответственно показателями вида напряженного и деформированного состояний. Мы видим, что эти показатели равны, т. е.  $\mu_\sigma = \mu_e$ .

Равенство показателей  $\mu_\sigma$  и  $\mu_e$  является следствием обобщенного закона упругости. Легко убедиться, что показатели  $\mu_\sigma$  и  $\mu_e$  равны между собой и в пластической зоне при простом нагружении.

## 2. Закон изменения объема. Конечные деформации

Пусть параллелепипед объемом  $V = xyz$  подвергается деформации, направление главных осей которой совпадает с направлением ребер параллелепипеда.

Объем элемента после деформации:

$$V + \Delta V = x(1 + e_1) y(1 + e_2) z(1 + e_3).$$

Раскрывая скобки и отбрасывая члены с произведениями деформаций как величины малые по сравнению с самими деформациями, получаем:

$$V + \Delta V = V(1 + e_1 + e_2 + e_3).$$

$$\text{Отсюда } \frac{\Delta V}{V} = e_1 + e_2 + e_3.$$

Это выражение носит название объемной деформации.

Складывая почленно равенства (54), получаем

$$e_1 + e_2 + e_3 = \frac{1 - 2m}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

и, принимая во внимание формулы (47) и (51), будем иметь

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{E}{1 - 2m} e_{\text{ср}}. \quad (65)$$

Величина  $\frac{E}{1 - 2m}$  называется модулем объемной деформации, а выражение (65) носит название закона изменения объема.

Опыты показывают, что этот закон справедлив при очень высоких значениях среднего напряжения, значительно превышающих предел упругости металла. В связи с этим закон изменения объема формулируется так: при упругих и пластических деформациях твердого тела относительное изменение объема элемента этого тела прямо пропорционально среднему напряжению, причем модуль объемной деформации остается постоянной величиной как в пределах, так и за пределами упругости.

Если предположить, что  $\Delta V/V = 0$ , то получим:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0. \quad (66)$$

Это выражение называют условием постоянства объема. Оно находится в противоречии с законом упругого изменения объема, сформулированным на основании опытных данных.

Тем не менее условием постоянства объема широко пользуются при решении задач обработки металлов давлением ввиду значительных упрощений, вносимых этим допущением.

Условие постоянства объема в виде выражения (66) справедливо только для малых деформаций, при которых последние малы по сравнению с 1, поскольку при выводе его так же, как и при определении относительных деформаций, пренебрегали малыми величинами высшего порядка. В случае больших деформаций вводят логарифмические соотношения, характеризующие деформации, исходя из следующих соображений.

Пусть направления главных осей деформации совпадают с направлениями ребер  $x$ ,  $y$ ,  $z$  параллелепипеда. Если в процессе деформации ребра параллелепипеда изменяются на  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , то, полагая объемную деформацию равной нулю, имеем:

$$\frac{x + \Delta x}{x} \cdot \frac{y + \Delta y}{y} \cdot \frac{z + \Delta z}{z} = 1.$$

Логарифмируя, получим:

$$\ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) + \ln \left( 1 + \frac{\Delta y}{y} \right) + \ln \left( 1 + \frac{\Delta z}{z} \right) = 0.$$

Для случая главных осей применительно к нашим обозначениям будем иметь

$$\frac{\Delta x}{x} = e_1; \quad \frac{\Delta y}{y} = e_2; \quad \frac{\Delta z}{z} = e_3. \quad (67)$$

Учитывая это, окончательно

$$\ln(1 + e_1) + \ln(1 + e_2) + \ln(1 + e_3) = 0.$$

Величины

$$\ln(1 + e_1) = \varepsilon_1; \quad \ln(1 + e_2) = \varepsilon_2; \quad \ln(1 + e_3) = \varepsilon_3 \quad (68)$$

называют логарифмическими деформациями.

Таким образом:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0. \quad (69)$$

Деформации  $e_1, e_2, e_3$  и  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  однозначно связаны равенствами (68). Поэтому при решении задач можно пользоваться деформациями как в виде условия (66), так и в виде (67), однако, если деформации будут большими (конечными), следует пользоваться равенством (69).

Логарифмические формулы (68) для конечных деформаций выведены в предположении, что деформации в данном направлении распределяются равномерно, т. е. что между смещениями и координатами точек существует линейная зависимость — деформации однородны. Таким образом, для вычисления конечных однородных деформаций можно пользоваться и формулами (67), и формулами (68).

Если конечные деформации неоднородны, зависимость между смещениями и координатами нелинейна, и для этого случая формулы (68) непригодны. В большинстве процессов обработки металлов давлением деформации именно неоднородны. Но формулы (68) все же могут быть использованы, если тело условно разделить на малые объемы так, чтобы в пределах каждого из них деформации в первом приближении можно было считать однородными. При еще более приближенных расчетах конечных деформаций в процессах обработки металлов давлением неоднородностью деформации вовсе пренебрегают и в качестве величин, характеризующих конечные деформации, используют как равенства (67), так и равенства (68).

Величину конечной линейной деформации относят к размеру тела до или после деформации, т. е., например, относительное изменение одного из ребер параллелепипеда можно выразить так:

$$e_1 = \frac{\Delta x}{x_0} = \frac{x_0 - x_1}{x_0} \quad \text{или} \quad e_1' = \frac{\Delta x}{x_1} = \frac{x_0 - x_1}{x_1}.$$

Но изменение длины ребра можно выразить и по-другому:

$$\epsilon = \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x_1} \right) = \ln \left( \frac{x_1 - \Delta x}{x_1} \right) = \ln \left( \frac{x_0}{x_1} \right).$$

Все эти соотношения можно выразить через величину  $\frac{\Delta x}{x_0}$ ;

$$e'_1 = \frac{\Delta x}{x_1} = \frac{\Delta x}{x_0 - \Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{x_0}}{1 - \frac{\Delta x}{x_0}}; \quad \epsilon = \ln \left( \frac{x_0}{x_0 - \Delta x} \right) = \ln \left( \frac{1}{1 - \frac{\Delta x}{x_0}} \right).$$

При малых деформациях результаты вычислений для  $e_1$ ,  $e'_1$  и  $\epsilon$  отличаются незначительно. Если деформации конечны, вычисления приводят к существенно различным результатам. Объясняется это следующим. В случае малых деформаций  $\Delta x$  мало, поэтому  $x_0 \approx x_1$ . Воспользовавшись разложением в ряд, получим

$$\epsilon = \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \approx \frac{\Delta x}{x_1} \approx \frac{\Delta x}{x_0} = e_1.$$

При больших деформациях эти соотношения уже теряют силу, потому что величины  $\Delta x/x_1$  и  $\Delta x/x_0$  уже не являются малыми по сравнению с единицей. Вместе с тем при больших деформациях величины  $\Delta x/x_1$  и  $\Delta x/x_0$  значительно отличаются.

Легко убедиться в том, что более правильно величину относительной деформации учитывать при помощи соотношений (68), так как эти соотношения обладают свойством аддитивности, в то время как соотношения  $\Delta x/x_0$  и им подобные таким свойством не обладают. Выражения:

$$dV_x = V \frac{dx}{x}; \quad dV_y = V \frac{dy}{y}; \quad dV_z = V \frac{dz}{z} \quad (70)$$

представляют собой величину объемов, смещаемых соответственно вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

$$\text{В самом деле } dV_x = V \frac{dx}{x} = xyz \frac{dx}{x} = yz dx.$$

Здесь произведение  $yz$  представляет собой поперечное сечение тела в плоскости, проведенной перпендикулярно оси  $x$ , а  $dx$  — величину малого смещения вдоль оси  $x$ . Поэтому произведение  $yz dx$  — объем тела, смещенного по оси  $x$ .

Интегрируя уравнение (70) в пределах конечной деформации, получим:

$$V \ln \frac{x_1}{x_0} = V_x; \quad V \ln \frac{y_1}{y_0} = V_y; \quad V \ln \frac{z_1}{z_0} = V_z. \quad (71)$$

На основании условия постоянства объема  $x_0 y_0 z_0 = x_1 y_1 z_1$  можно записать:

$$\ln \frac{x_0}{x_1} + \ln \frac{y_0}{y_1} + \ln \frac{z_0}{z_1} = 0. \quad (72)$$



Теперь нетрудно убедиться, что объем тела, смещенный вдоль одной из осей, равен сумме смещенных объемов по двум другим осям. Действительно, умножая равенство (72) на величину объема, получим:  $V_z = -(V_x + V_y)$ .

Приведенные соотношения широко используются при осуществлении расчетов деформации при обработке металлов давлением.

### 3. Закон скалывающего напряжения. Условие пластичности Сен-Венана

В гл. I были описаны явления, наблюдающиеся в процессе пластической деформации. Как отмечалось, процесс скольжения — сдвига по кристаллографическим плоскостям доминирует над другими, упомянутыми там процессами и, следовательно, обуславливает в основном поведение и важнейшие свойства тела в процессе пластической деформации. В связи с этим понятием о сдвиговом механизме пластической деформации положено в основу современной математической теории пластичности.

Как показывают опыты, от ориентировки плоскостей скольжения по отношению к направлению действующей силы зависит сопротивление деформации металлов. Пусть монокристалл подвергается растяжению силой  $P$ . Тогда в плоскости его поперечного сечения  $F_0$  (рис. 30) действует напряжение  $\sigma_0 = P_0/F_0$ .

Мысленно разрежем образец по одной из плоскостей скольжения  $F_e$  и действие его отброшенной части заменим действием напряжения  $\sigma_e$ , направленного вдоль оси растягиваемого образца.

Проектируя все силы на продольную ось образца, получим:  $\sigma_0 F_0 = \sigma_e F_e$ , откуда  $\sigma_e = \sigma_0 F_0/F_e$  или  $\sigma_e = \sigma_0 \sin \alpha$ .

Напряжение  $\sigma_e$  можно выразить при помощи двух составляющих: нормальной  $\sigma$  и касательной  $\tau$ .

Направление сдвига, вообще говоря, не совпадает с направлением плоскости скольжения. Однако на основании многочисленных опытов установлено, что углы  $\alpha$  и  $\beta$  близки по величине, так что приближенно можно положить  $\alpha \approx \beta$ . Из рис. 30 следует, что

$$\sigma = \sigma_e \cos (90^\circ - \alpha) = \sigma_e \sin \alpha = \sigma_0 \sin^2 \alpha; \quad (73)$$

$$\tau = \sigma_e \cos \alpha = \sigma_0 \cos \alpha \sin \alpha. \quad (74)$$

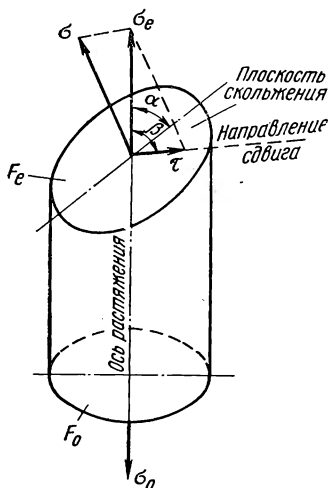


Рис. 30. Нормальное и касательное напряжение в плоскости скольжения при растяжении монокристалла:

Нормальное напряжение  $\sigma$  стремится разорвать монокристалл по плоскости скольжения  $F_e$ . Касательное (скальвающее) напряжение  $\tau$  стремится произвести сдвиг одной части монокристалла относительно другой по плоскости скольжения  $F_e$ .

Начиная с шестидесятых годов прошлого столетия производились многочисленные опыты, целью которых были исследование процесса растяжения образцов, изготовленных из ионных (NaCl, AgCl и др.) и металлических (Mg, Zn, Cd, Al и др.) монокристаллов. В результате этих опытов было установлено, что положение и характер кривой, характеризующей связь между напряжением и деформацией, в значительной степени зависит от кристаллографической ориентировки (величины угла  $\alpha$ ) монокристалла. Например, на рис. 31, а приведена зависимость предела текучести монокристалла кадмия от величины  $\sin\alpha\cos\beta$ , из которой следует, что предел текучести имеет минимальное значение при угле наклона пло-

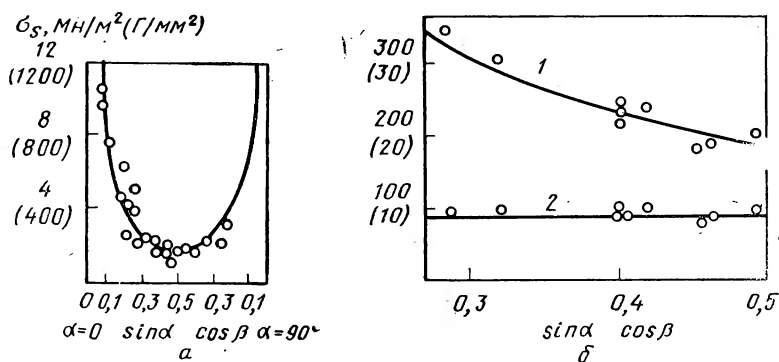


Рис. 31. Зависимость предела текучести монокристалла кадмия (а), предела текучести и скальвающего напряжения у висмута (б) от кристаллографической ориентировки:

1 — предел текучести; 2 — скальвающее напряжение

скости скольжения к оси растяжения, равно  $\pi/4$ . У некоторых монокристаллов (как, например, у кадмия) предел текучести в зависимости от ориентировки изменяется в 40 раз.

На основании опытов по растяжению монокристаллов неоднократно производили такие расчеты. В формулу (74) вместо величины  $\sigma_0$  подставляли значение предела текучести  $\sigma_s$  и соответствующие этому значения углов  $\alpha$  и  $\beta$ . При этом обнаружили, что сдвигающее напряжение не зависит от ориентировки монокристалла. Для примера на рис. 31, б показано изменение сдвигающего напряжения и предела текучести в зависимости от ориентировки монокристалла висмута.

На основании подобных опытов был сформулирован закон скальвающего напряжения для монокристаллов, сущность которого заключается в следующем: пластическая деформация монокристалла начинается тогда, когда скальвающее напряжение достигает некоторого определенного (критического), характерного для данного вещества в данном состоянии значения. Таким обра-

зом, если скалывающие напряжения меньше критического, то монокристалл деформируется только упруго.

Очевидно, что механизм скольжения имеет дислокационную природу. Это хорошо иллюстрируется рис. 32, на котором ясно видны дискретность пластической деформации и отдельные дислокации, выявленные методом ямок травления в их плоскостях скольжения в начале процесса деформации.

Известно (гл. I), что первые пластические сдвиги в монокристалле начинаются при напряжениях, которые примерно на два порядка меньше предела текучести. Подобного рода расчеты, не-

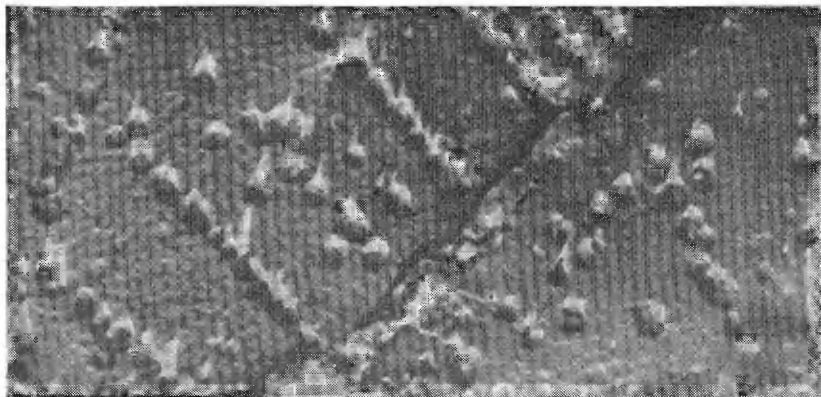


Рис. 32. Зарождающиеся линии скольжения монокристалла кремнистого железа (3% Si) при 600°C под напряжением 45  $Mn/m^2$  (4,5  $Kr/mm^2$ ).  $\times 7000$

смотря на их приближенность, хорошо подтверждаются опытами. С ростом величин напряжений в процессе дальнейшей деформации полосы скольжения выявляются в виде параллельных взаимно пересекающихся под прямым углом сплошных штрихов-семейств. Расположение семейств линий скольжения зависит от ориентировки кристаллографических плоскостей по отношению к оси растяжения. В процессе пластической деформации поликристаллического тела сначала деформируются те зерна, кристаллографическая ориентировка которых наиболее благоприятна по отношению к действующим силам, т. е. плоскости скольжения которых расположены под углом  $\pi/4$  по отношению к действующей силе. Эти деформированные зерна воздействуют на соседние кристаллы, причем сначала деформируются те зерна, кристаллографическая ориентировка которых всегда ближе к углу  $\pi/4$ . Затем деформируются зерна с менее благоприятно ориентированной решеткой. Таким образом, деформация постепенно распространяется на весь объем поликристаллического образца (рис. 33).

Кроме линий скольжения в отдельных зернах образца, появляются еще две системы линий (плос) скольжения, расположенных под углом, близким к углу  $\pi/4$  по отношению к действующей си-

ле, и образующих между собой углы, близкие к прямым. Эти полосы (линии) пронизывают всю толщу образца независимо от ориентировки отдельных зерен. Они являются результатом скольжения групп зерен относительно друг друга. Первые линии скольжения появляются тогда, когда процесс пластической деформации тела еще только начинается. При больших деформациях полосы скольжения сливаются, поверхность образца становится матовой и о характере деформации по ним судить уже нельзя.

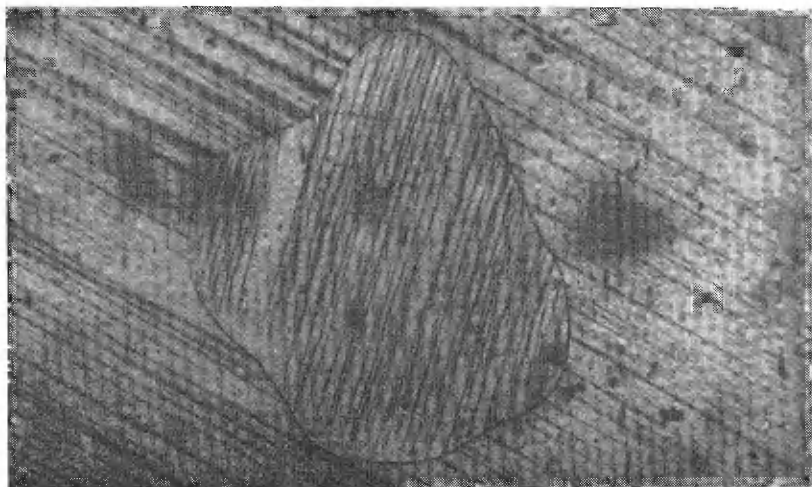


Рис. 33. Кремнистое железо (3% Si) при 1000°C после выдержки под напряжением  $\sigma = 8 \text{ Мн/м}^2$  (0,8 кг/мм<sup>2</sup>).  $\times 70$

Имея в виду, что начало пластической деформации тела характеризуется появлением первых полос скольжения, рассмотрим связь между линиями скольжения и наибольшими касательными напряжениями.

В гл. II мы получили формулу (37) для определения касательного напряжения на наклонной площадке:

$$\tau_n = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha.$$

В случае равномерного одноосного растяжения  $\tau_{xy} = 0$ ;  $\sigma_x = 0$ . Когда напряжение в плоскости скольжения достигнет критической величины, нормальное напряжение окажется равным  $\sigma_y = \sigma_s$  и величина  $\tau_n$  будет равна

$$\tau_n = \sigma_s \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sigma_s \sin 2\alpha. \quad (75)$$

Из последнего соотношения следует, что касательное напряжение имеет максимальное значение в плоскости, расположенной под углом  $\pi/4$  по отношению к си растяжения:

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{\sigma_s}{2}. \quad (76)$$

Таким образом, в плоскости, проходящей под углом  $\pi/4$ , касательные напряжения максимальны, поэтому здесь прежде всего и начинается скольжение.

Полосы скольжения впервые наблюдали известный русский металлург Д. К. Чернов и немецкий ученый Людерс.

Соотношения (75), (76) получены на основании предположения о том, что пластический сдвиг происходит одновременно по всей плоскости скольжения. Это упрощение находится в противоречии с основным положением теории дислокаций о локальности пластического сдвига в пределах ядра дислокации. Оно может быть разрешено использованием величины  $\sigma_s$ , характеризующей физико-механические свойства тела, и определяемой из опыта. Такой подход оправдан тем, что в данном случае мы имеем дело с объемами металла, много большими расстояния между дислокациями. Поэтому сдвиг можно считать равномерным.

Итак, началу пластической деформации при растяжении поликристаллических образцов отвечает соотношение (76). Таким образом, формулировку закона скальвающего напряжения можно распространить на случай растяжения поликристаллического металла в таком виде: пластическая деформация поликристаллического тела при растяжении начинается тогда, когда скальвающее напряжение достигает некоторого определенного (критического) характерного для данного вещества в данном состоянии значения. Физическое состояние вещества определяется температурой, при которой осуществляется деформация, скоростью деформации и напряженным состоянием тела.

Соотношение  $\tau = \frac{\sigma_s}{2}$  получено на основании опытов в условиях простейшего напряжения состояния — одноосного растяжения.

Возникает вопрос: при каком соотношении между главными напряжениями начинается пластическая деформация тела, когда все три главных напряжения отличны от нуля?

В гл. II было показано, что на площадках, расположенных под углом  $\pi/4$  по направлению к главным осям тензора напряжений действуют максимальные касательные напряжения, определяемые равенствами (43). Из этих равенств следует, что максимальные касательные напряжения равны полуразности главных нормальных напряжений, а наибольшее по величине максимальное касательное напряжение определяется равенством

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Еще в семидесятых годах прошлого столетия Треска и Сен-Венан высказали предположение о том, что пластическая деформация тела, находящегося в объемном напряженном состоянии, начинается тогда, когда наибольшее из максимальных касательных напряжений достигает определенного, характерного для данного

вещества в данном состоянии значения, численно равного половине предела текучести при простом растяжении:

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_s}{2} \text{ или } \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_s}{2},$$

откуда  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$ . (77)

Это выражение записано для главных осей. В произвольных осях его можно получить с использованием равенства (44). Возведя обе его части в квадрат, получим:  $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2$ , и на основании равенства (77) условие пластичности для случая произвольных осей запишется в таком виде:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2. \quad (78)$$

Мы получили соотношение, которое носит название условия пластичности или уравнения Сен-Венана. Неоднократная проверка показала, что уравнения пластичности (77), (78) удовлетворительно подтверждается опытами так, что при строгой постановке опыта различие между результатами расчетов и опытными данными лежит в пределах 0—16%. Теоретический анализ и опытная проверка показали, что отмененное расхождение является результатом того, что уравнение (78) не учитывает влияния среднего главного напряжения.

Несмотря на некоторое количественное различие между результатами расчета и опыта, третья теория предельного состояния позволила распространить закон максимального скальвающего напряжения от случая одноосного растяжения на случай трехосного напряженного состояния в такой формулировке: пластическая деформация поликристаллического тела в случае объемного напряженного состояния начинается тогда, когда наибольшее из максимальных скальвающих напряжений достигает определенного, характерного для данного вещества в данном состоянии значения, численно равного половине предела текучести при простом растяжении.

Величина сдвигающего напряжения при данной температуре и скорости деформации определяется величиной нормальных напряжений и схемой напряженного состояния. Действительно, если

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \text{ и } \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} < \frac{\sigma_s}{2},$$

$$\text{то и } \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} < \frac{\sigma_s}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} < \frac{\sigma_s}{2}.$$

На основании закона скальвающего напряжения можно утверждать, что при наличии записанных выше соотношений тело пластически деформироваться не будет и деформация будет только упругой. Поэтому наиболее характерным, по-видимому, является случай, когда  $-\sigma_1 = -\sigma_2 = -\sigma_3 = -\sigma$ , т. е. тело подвергается всестороннему равномерному сжатию. При этом правые части предшествующих выражений обращаются в нуль. Таким образом, в

состоянии равномерного сжатия скальвающие напряжения отсутствуют. В состоянии, близком к равномерному сжатию, они меньше скальвающих напряжений, соответствующих пределу текучести. Поэтому пластическая деформация и разрушение тела произойти не могут. Тело будет лишь упруго уменьшать свой объем. Этот вывод подтверждается опытами, в которых сплошные металлические тела подвергались всестороннему равномерному сжатию при очень высоких давлениях.

#### 4. Энергетическое условие пластичности

В начале текущего столетия (1904) Губер и Мизес высказали следующую гипотезу: пластическая деформация тела начинается тогда, когда удельная потенциальная энергия изменения формы идеально пластического тела (не обладающего упрочнением) достигает определенной в данных условиях величины, не зависящей от характера напряженного состояния тела. Эта гипотеза была сформулирована в процессе поисков более совершенного условия, характеризующего начало пластической деформации, чем условие пластичности Сен-Венана.

Потенциальная энергия  $W$  упругой деформации элемента объема тела представляет собой сумму потенциальной энергии изменения объема и формы тела, т. е.

$$W = W_0 + W_\phi,$$

где  $W_0$  — потенциальная энергия изменения объема;

$W_\phi$  — потенциальная энергия изменения формы,

откуда  $W_\phi = W - W_0$ . (79)

Полная удельная потенциальная энергия элементарного объема

$$W = \frac{\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3}{2}$$

или, принимая во внимание равенства (54):

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2m(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \quad (80)$$

Потенциальная энергия упругого изменения объема:

$$W_0 = \frac{1}{2} \frac{\Delta V}{V} \sigma.$$

На основании равенств (47) и (64) будем иметь:

$$W_0 = \frac{1}{2} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

или, принимая во внимание (54),

$$W_0 = \frac{1-2m}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (81)$$

Подставляя уравнения (80) и (81) в выражение (79), получим выражение для удельной потенциальной энергии упругого изменения формы тела:

$$W_{\phi} = \frac{1+m}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (82)$$

В случае одноосного растяжения пластическая деформация начинается при величинах главных напряжений, равных  $\sigma_1 = \sigma_s$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Отсюда на основании выражения (82) найдем, что

$$W_{\phi} = \frac{1+m}{3E} \sigma_s^2.$$

Учитывая, что удельная потенциальная энергия изменения формы тела не зависит от характера напряженного состояния, величину  $W_{\phi}$  для трехосного напряженного состояния можно приравнять величине удельной потенциальной энергии изменения тела для одноосного растяжения.

Приравнивая правые части написанных выше равенств, для  $W_{\phi}$  получим

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_s^2. \quad (83)$$

Это выражение получило наименование энергетического условия пластичности.

Итак, удельная потенциальная энергия изменения формы идеально пластического тела является для данных условий (степень деформации, температура, скорость деформации) величиной постоянной, не зависящей от характера напряженного состояния.

В такой формулировке условие (83) справедливо только для идеально пластического тела. Однако соотношение (83) используют и для тел, обладающих упрочнением, с тем, чтобы однозначно определить условие, при котором начинается пластическая деформация: пластическая деформация начинается тогда, когда запас потенциальной энергии тела достигает определенной для данных условий величины, не зависящей от характера напряженного состояния.

Если напряжения  $\sigma_2 = \sigma_3$  или  $\sigma_2 = \sigma_1$ , то уравнение (83) приводится к виду:  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$ .

Это условие было получено ранее. Оно представляет собой условие пластичности состояния Сен-Венана.

При промежуточном значении величины  $\sigma_2$ , равной

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2},$$

т. е. для случая плоской деформации (83), уравнение записывают в форме:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s.$$



При всех остальных промежуточных значениях  $\sigma_2$  в пределах изменения между  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  коэффициент перед  $\sigma_s$  изменяется в пределах от 1 до  $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155$  по следующей зависимости:

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} = \frac{2}{\sqrt{3 + \mu_e^2}}. \quad (84)$$

Это соотношение для коэффициента  $\beta$ , учитывающего влияние среднего главного напряжения на переход в пластическое состояние, получено на основании равенств (63) и (83) и подтверждено опытами В. Лоде и других исследователей<sup>1</sup>.

Таким образом, уравнение (83) можно заменить более простым;  $\sigma_1 - \sigma_3 = \beta \sigma_s$ , (85)

при этом

$$1,0 \leq \beta \leq \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155.$$

В произвольной системе координат для случая плоской деформации имеем:

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Тогда на основании равенства (78) условие пластичности приобретает вид:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2 = \frac{4}{3} \sigma_s^2. \quad (86)$$

Это условие, полученное на основании энергетической теории предельного состояния, отличается от условия наибольшего касательного напряжения численным множителем в правой части равенства. Оба эти условия можно написать в виде одного равенства:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2 = 4 k^2, \quad (87)$$

в котором  $k = \frac{1}{2} \sigma_s$  для случая теории Сен-Венана;  $k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_s$  для случая энергетической теории предельного состояния. Энергетическая теория предельного состояния лучше отвечает опытным данным, чем теория Сен-Венана. Объясняется это тем, что энергетическая теория предельного состояния учитывает влияние среднего главного напряжения, которого теория Сен-Венана во внимание не принимает.

<sup>1</sup> Нада и А. Пластичность и разрушение твердых тел, т. 1. Пер. с англ. М., ИЛ, 1954. 648 с. с ил.

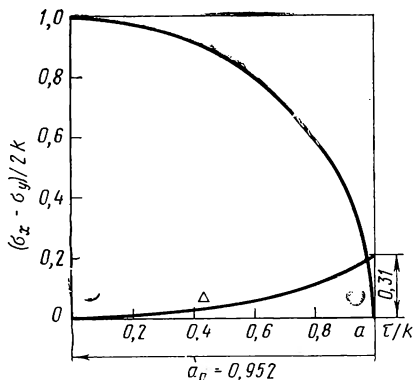
## 5. Приближенные условия пластичности

Следуя Е. П. Ункову<sup>1</sup>, перепишем условие пластичности (87) в таком виде:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2k} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xy}}{k}\right)^2}.$$

На рис. 34 построена кривая, из рассмотрения которой следует, что при изменении отношения  $\frac{\tau_{xy}}{k}$  от нуля до его максимального

Рис. 34. Зависимость отношения  $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2k}$  и средней погрешности от величины  $\tau_{xy}/k$



значения, равного единице, отношение  $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$  изменяется от единицы до нуля.

Вычислим среднюю погрешность  $\Delta$ , возникающую при использовании уравнения пластичности в главных осях:

$$\sigma_x - \sigma_y = 2k \quad (88)$$

вместо уравнения (87) для произвольно выбранных осей координат.

Обозначим  $\frac{\tau_{xy}}{k} = m$ , где  $0 \leq m \leq 1,0$ . Тогда

$$\Delta = \frac{1}{m} \left( m - \int_0^m \sqrt{1 - m^2} dm \right) = \frac{1}{m} \left( m - \frac{m}{2} \sqrt{1 - m^2} + \frac{1}{2} \arcsin m \right).$$

На рис. 34 приведена зависимость средней погрешности  $\Delta$  от величины  $m$ , построенная на основании этого уравнения. Можно заранее задаться некоторой допустимой средней погрешностью при использовании приближенного уравнения пластичности  $\sigma_x - \sigma_y = 2k$  вместо точного  $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$ . Пусть, например,  $\Delta = 10\%$ , что не выходит за пределы  $16\%$ , и, следовательно, меньше погрешно-

<sup>1</sup> Унков Е. П. Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением. М., Машгиз, 1955. 280 с. с ил.

сти, вносимой заменой условия пластичности по энергетической теории предельного состояния условием пластичности максимальных скальвающих напряжений. Из рис. 34 видно, что при  $m > 0,7$  средняя погрешность уже больше 10%, а абсолютная погрешность достигает 30%. Таким образом, при заданной средней погрешности имеется определенное значение  $m = \frac{\tau_{xy}}{k}$ , начиная с которого более точный результат можно получить при использовании условия пластичности в форме

$$\sigma_x - \sigma_y = 0. \quad (89)$$

Если  $\frac{\tau_{xy}}{k} = 1$ , это приближенное условие является точным.

Таким образом, точное условие пластичности (87) можно заменить двумя приближенными условиями (88) и (89).

Границу применения приближенных уравнений пластичности можно найти из условия равенства величин средней погрешности

$\Delta$  и  $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2k}$  на обоих участках. Обозначим граничную точку между

этим участками через  $m_0$ . Тогда при  $0 \leq \frac{\tau_{xy}}{k} \leq m_0$  применимо урав-

нение (88), а при  $m_0 \leq \frac{\tau_{xy}}{k} \leq 1$  — применимо уравнение (89). Точ-

ка  $a$  определяется из среднеинтегрального значения на участках ( $m_0$ ) и  $(1 - m_0)$ :

$$\frac{1}{m_0} \left( m_0 - \int_0^{m_0} \sqrt{1 - m^2} dm \right) = \frac{1}{1 - m_0} \times \\ \times \left\{ (1 - m_0) - \left[ (1 - m_0) - \int_{m_0}^1 \sqrt{1 - m^2} dm \right] \right\}.$$

Отсюда получим, что  $m_0 = 0,95$ . Средняя погрешность величины  $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2k}$  будет составлять  $\Delta \approx 0,18$ .

Таким образом, при  $m_0 > 0,95$  целесообразно пользоваться условием (89). Наибольшая погрешность при пользовании приближенными условиями (88) и (89) вместо точного условия (87) будет при

$$0,7 \leq \frac{\tau_{xy}}{k} \leq 0,95.$$

В дальнейшем мы будем широко использовать приближенные условия пластичности вместо точного с учетом приведенных здесь соображений.

Введем далее обозначения:

$$2k = K, \quad \nu = \pm 1.$$

Тогда равенство (88) примет вид:

$$\sigma_x - \sigma_y = \nu K. \quad (90)$$

## 6. Интерпретация кривой упрочнения металлов с позиций теории дислокаций

Механические свойства большинства металлов и сплавов характеризуются кривыми упрочнения, не имеющими ярко выраженной площадки текучести и «зуба» текучести. Такие кривые хорошо аппроксимируются степенными функциями, которые можно получить с использованием теории дислокаций.

Предположим, что в кристалле линейные дислокации расположены параллельными рядами. Согласно равенству (11), величина пластического сдвига равна:

$$\gamma = \rho_d b l,$$

где  $\rho_d$  — плотность дислокаций;

$b$  — вектор Бюргера;

$l$  — средний путь пробега дислокаций.

Дислокации окружены силовым полем, напряжение которого обратно пропорционально среднему расстоянию между дислокациями:  $\tau = Gb/r$ .

Величина  $r = \frac{1}{\rho_d^{1/2}}$ , и поэтому  $\tau = Gb \sqrt{\rho_d}$ . Воспользовавшись выражением для пластического сдвига  $\gamma$ , получим:

$$\tau = G \left( \frac{b}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}}.$$

Касательные напряжения и сдвиги связаны соотношениями:

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \gamma = e_1 - e_3.$$

В случае одноосного растяжения можно принять  $\sigma_3 = 0$ ;  $e_3 = 0$ . Тогда  $\tau = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{\sigma}{2}$ ,  $\gamma = e_1 = e$ , и напряжение определится по формуле:

$$\sigma = 2G \left( \frac{b}{l} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}}.$$

Но  $G = \frac{E}{2(1+m)} = \frac{\sigma_s}{2(1+m)e_s}$ , где  $e_s$  — деформация, соответствующая пределу текучести, т. е. предел упругой деформации. Поэтому

$$\sigma = \left[ \left( \frac{\sigma_s}{1+m} \right) \left( \frac{b}{le_s} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \frac{e}{e_s} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (91)$$

Множитель в квадратных скобках правой части этого равенства можно интерпретировать как предел текучести  $\sigma_s$ . Действительно, из равенства (11) следует, что средняя длина пробега дислокации равна

$$l = \frac{\gamma}{\rho_d b} = \frac{e}{\rho_d b}.$$

С учетом этого будем иметь

$$\frac{\sigma_s}{1+m} \left( \frac{b^2 \rho_d}{l e_s} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_s}{1+m} \left( \frac{b^2 \rho_d}{e_s l} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Полагая в этом равенстве для начала пластической деформации  $e = e_s$ , имеем:

$$\frac{\sigma_s}{1+m} \left( \frac{b^2 \rho_d}{e_s l} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_s}{1+m} \frac{b}{e_s} \rho_d^{\frac{1}{2}}.$$

Принимая обычные для деформируемых металлических тел значе- ние величин:  $b = 3 \cdot 10^{-8}$  см;  $e_s = 2 \cdot 10^{-3}$ ;  $\rho = 10^{10}$  1/см<sup>2</sup>;  $m \approx 1/2$ , полу- чим:

$$\frac{\sigma_s}{1+m} \frac{e}{e_s} \rho_d^{\frac{1}{2}} = \sigma_s \frac{3 \cdot 10^{-8}}{2 \left( 1 + \frac{1}{2} \right) 10^{-3}} \rho^{\frac{1}{2}} = \sigma_s.$$

Итак, равенство (91) приобретает вид:

$$\sigma = \sigma_s \left( \frac{e}{e_s} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогичное выражение нетрудно получить и предполагая, что дислокации винтовые. Таким образом, полученные соотношения между напряжениями и деформациями справедливы не только для винтовых и краевых, но и для смешанных дислокаций, конечно, при условии, что мы имеем дело с монокристаллами, где имеется относительно небольшое количество границ раздела. Этот параболический закон хорошо подтверждается опытами (рис. 35).

Прочность и пластичность поликристаллических тел следует рассматривать как функцию многих переменных, связанных с составом и структурой, а также связанных с условиями деформирования. Поэтому в случае поликристаллического тела связь между деформациями и напряжением имеет более сложный вид, чем у монокристалла. Тогда мы вправе написать:

$$\sigma = \sigma_s \left( \frac{e}{e_s} \right)^n. \quad (92)$$

В этом равенстве  $n$  — численный коэффициент, определяемый из опытов, а  $v = \pm 1$ . Будем полагать, что коэффициент  $n$  по абсо-

лютой величине может изменяться в пределах от нуля до единицы. Тогда при  $\nu = +1$  имеем  $0 \leq n \leq 1$ ; при  $\nu = -1$  получим  $n^{-1} = \frac{1}{n}$ .

Эти соотношения соответствуют двум типичным формам связи между напряжением и деформацией при растяжении (рис. 36, а, б).

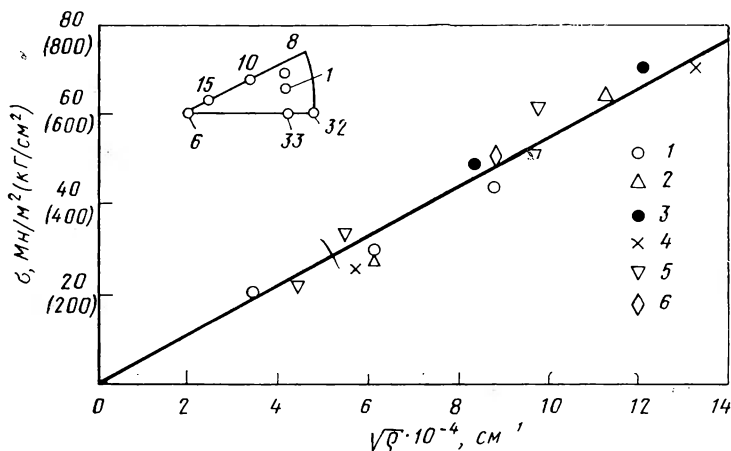


Рис. 35. Связь между плотностью дислокаций  $\rho$  и деформирующим напряжением  $\sigma$  для кристаллов железа разной ориентации: 1 — Fe 1; 2 — Fe 8; 3 — Fe 10; 4 — Fe 13; 5 — Fe 32; 6 — Fe 33

Первый случай типичен для поликристаллических материалов и больших деформаций. Второй случай наблюдается в начальной стадии деформации монокристаллических и некоторых поликристаллических тел (так называемое легкое скольжение). Вместе с тем в последующих главах будет показано, что величина  $\nu$  может служить и неким «служебным» коэффициентом, знак которой выбирается в процессе удовлетворения граничных условий при сохранении выпуклой формы кривой деформация — напряжение.

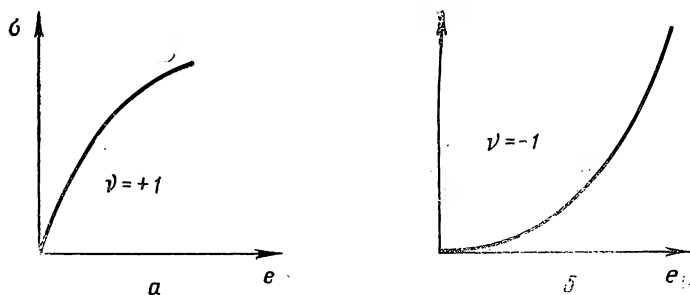


Рис. 36. Две типичные формы связи между напряжениями и деформациями: а — для большинства поликристаллических металлов при больших деформациях; б — для начальной стадии деформации монокристаллических и некоторых поликристаллических тел

## 7. Закон связи обобщенного напряжения с обобщенной деформацией

Условия пластичности, приведенные выше (см. п. 4 и 5), являются частым случаем более общего закона, определяющего связь между напряжениями и деформациями как в упругой, так и в пластической зоне. Закон этот сформулирован на основании многочисленных опытных данных<sup>1</sup>. Формулировка его такова: обобщенное напряжение, возникающее в теле при любой деформации (упругой или пластической), для каждого материала есть определенная функция обобщенной деформации, т. е.  $\sigma_i = \Phi(e_i)$ .

Пусть на основании опытных данных получена диаграмма истинных напряжений при растяжении для данного металла в определенных условиях (рис. 37,а).

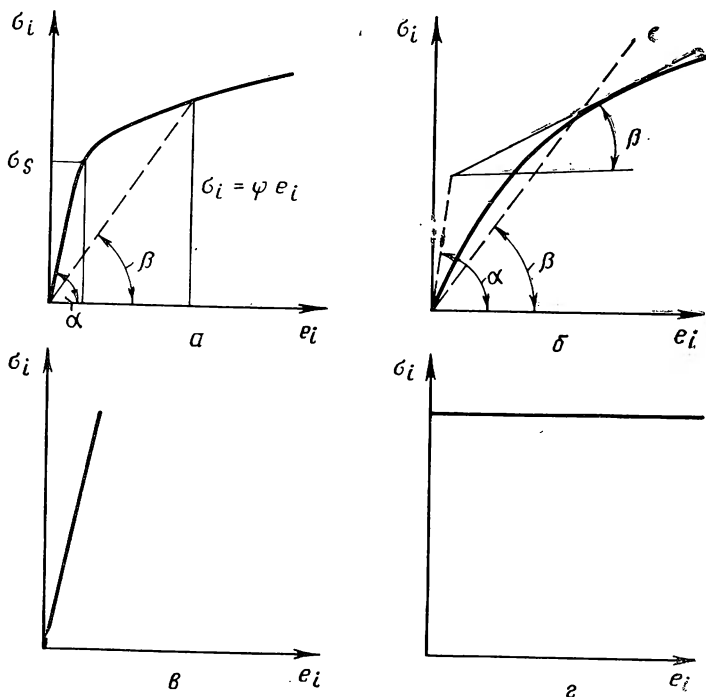


Рис. 37. Различные диаграммы, характеризующие связь между напряжениями и деформациями

Если  $e_s$  — предел упругой деформации, то имеем:

при  $e < e_s$   $\sigma = Ee$ , где  $E = \operatorname{tg} \alpha$  — модуль упругости;

при  $e > e_s$   $\sigma = \psi(e)$  или  $\sigma = E'e$ , где  $E' = \operatorname{tg} \beta = \sigma/e = \psi(e)/e$ .

<sup>1</sup> Ильюшин А. А. Пластичность. ч. 1. М. — Л., Гостехиздат, 1948. 376 с. с ил.

Опыты показывают, что для металлов с кубической решеткой, находящихся в стабильном (устойчивом) состоянии, в частности для отожженного железа, сталей 24, 25, 30 ХГСА, У7, а также для алюминия и меди, величина  $E$  не зависит от характера напряженного состояния, поэтому

$$E' = \frac{|\psi(e)|}{e} = \frac{\psi(e_i)}{e_i}$$

Откуда и следует, что

$$\sigma_i = \Phi(e_i) \text{ или } \sigma_i = E' e_i. \quad (93)$$

Вообще говоря, на основании опытов эта функция может быть записана в различной форме. В частности, ее можно аппроксимировать и с помощью степенной функции, полученной в предыдущем параграфе исходя из теории дислокаций:

$$\sigma_i = \sigma_s \left( \frac{e_i}{e_s} \right)^n, \quad (94)$$

где  $\sigma_i$ ,  $e_i$  определяются выражениями (61) и (62). Пусть  $\nu = +1$ . Тогда при  $0 < n < 1$  эта формула описывает случай пластической деформации с упрочнением (рис. 37, б). При  $n = 1$  получаем

$$\sigma_i = \frac{\sigma_s}{e_s} e_i = E e_i,$$

т. е. случай идеальной упругости (рис. 37, в). При  $n = 0$  имеем:  $\sigma_i = \sigma_s$ , т. е. случай идеальной пластичности (рис. 37, г). Иногда нелинейный закон (94) можно в свою очередь аппроксимировать линейным или двумя отрезками прямой линии (пунктир на рис. 37, б). В дальнейшем для упрощения записи знак  $\nu$  под коэффициентом  $n$  будем опускать, вводя его лишь в тех случаях, когда это окажется необходимым (обычно на завершающих стадиях расчета напряжений и деформаций).

Вместе с тем в правую часть равенства (94) введем множитель  $\nu = \pm 1$  и будем записывать закон (94) в следующем виде:

$$\sigma_i = \nu \sigma_s \left( \frac{e_i}{e_s} \right)^n. \quad (95)$$

В дальнейшем можно убедиться, что такая запись очень удобна для выбора знака напряжений при удовлетворении граничных условий.

Пример. Написать закон связи между обобщенными напряжением и деформацией в форме (95) для продольной прокатки, волочения и прессования, упругими деформациями пренебречь.

Деформированное состояние считаем плоским, касательными напряжениями и сдвигами пренебрегаем. Тогда (рис. 38)

$$\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{z\rho} = 0; \quad \sigma_z = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2}; \quad e_{\rho\theta} = e_{\theta z} = e_{zz} = 0.$$

Из условия постоянства объема при  $e_{zz} = 0$  имеем  $e_{\theta\theta} = -e_{\rho\rho}$ .



На основании этих допущений из выражений (61) и (62) получаем:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_p - \sigma_\theta); \quad e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} e_{pp}.$$

В случае плоской деформации «вынужденный» предел текучести  $K$  в  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  раза больше предела текучести при линейном напряженном состоянии, т. е.  $K = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s$ . Этому значению соответствует «вынужденное» значение предела упругой деформации  $e'_s = \frac{2}{\sqrt{3}} e_s$ . Это следует из подобия прямоугольных треугольников, построенных на прямой Гука для случаев трехосной и плоской деформации. Поэтому выражение (95) принимает вид:

$$\sigma_p - \sigma_\theta = \nu K \left( \frac{e_{pp}}{e_s} \right)^n.$$

В случае прокатки дугу, ограничивающую контактную поверхность, заменим хордой. При этом геометрические соотношения в очаге деформации для прокатки, волочения и прессования будут совпадать. Пусть в процессе обработки

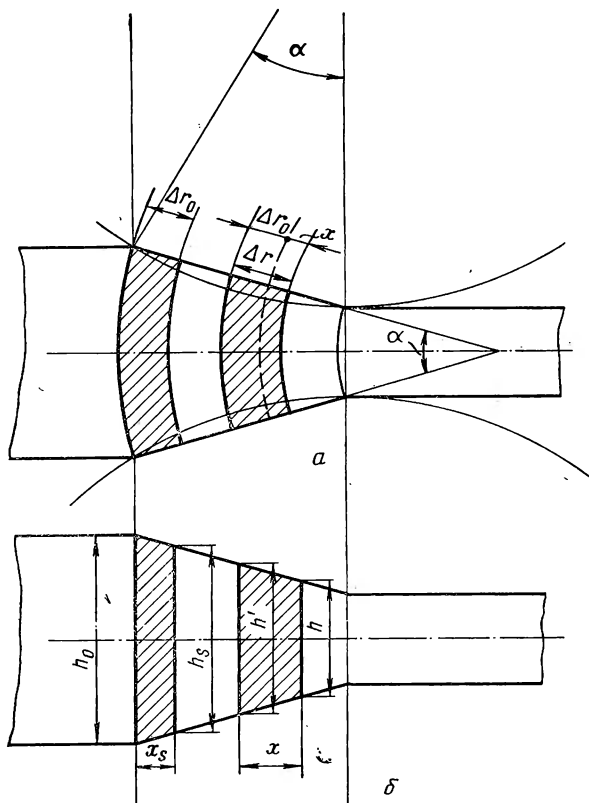


Рис. 38. Схемы к вычислению относительных деформаций при прокатке, волочении, прессовании

элемент тела длиной  $\Delta r_0$  увеличивается до величины  $\Delta r$  (рис. 38, а). Относительное удлинение элемента равно:

$$e_{pp} = \frac{\Delta r - \Delta r_0}{\Delta r_0} = \frac{\Delta r - (\Delta r - x)}{\Delta r_0} = \frac{x}{\Delta r_0}.$$

Аналогично деформация, соответствующая пределу текучести, определится по формуле

$$e_s = \frac{\Delta r_0 - \Delta r_s}{\Delta r_0} = \frac{x_s}{\Delta r_0}.$$

Исходя из условия постоянства объема, можно записать (см. рис. 38, б):

$$x_s \left( \frac{h_0 + h_s}{2} \right) = x \left( \frac{h' + h}{2} \right); \quad \frac{x}{x_s} = \frac{h_0 + h_s}{h' + h},$$

здесь  $h_s$  — высота полосы, соответствующая границе упругой и пластических зон.

Далее произведем очевидное преобразование:

$$\frac{x}{x_s} = \frac{h_0 + h_0 - \Delta h_s}{h - \Delta h_x + h} = \frac{2h_0 - \Delta h_s}{2h - \Delta h_x} = \frac{2 - \frac{\Delta h_s}{h_0}}{2 \frac{h}{h_0} - \frac{\Delta h_x}{h_0}}.$$

Пренебрегая малыми величинами обжатий  $\frac{\Delta h_s}{h_0}$  и  $\frac{\Delta h_x}{h_0}$ , получим, что

$$\frac{x}{x_s} = \frac{h_0}{h_s} = \frac{r \alpha}{\rho \alpha} = \frac{r}{\rho}.$$

Закон (95) окончательно получаем в виде:

$$\sigma_p - \sigma_0 = \sqrt{K} \left( \frac{r}{\rho} \right)^n. \quad (96)$$

## IV глава

### Определение напряжений и деформаций в упругой зоне

#### 1. Основные уравнения теории упругости и методы их решения

Задача теории упругости сводится к совместному решению следующих пятнадцати уравнений: трех уравнений статики (39), шести геометрических соотношений (19), шести физических уравнений (25).

После решения этой системы должны быть удовлетворены граничные условия (40).

Систему уравнений теории упругости можно решать тремя различными методами.

Метод перемещений. В этом случае за основные неизвестные принимают перемещения точек упругого тела:

$$u = f_1(x, y, z); \quad v = f_2(x, y, z); \quad w = f_3(x, y, z).$$

Метод сил. В этом случае за основные неизвестные принимают напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= f_1(x, y, z); & \tau_{xy} &= f_4(x, y, z); \\ \sigma_y &= f_2(x, y, z); & \tau_{yz} &= f_5(x, y, z); \\ \sigma_z &= f_3(x, y, z); & \tau_{zx} &= f_6(x, y, z). \end{aligned}$$

Смешанный метод. В этом случае за основные неизвестные принимают и перемещения, и напряжения.

## 2. Плоская задача теории упругости

На основании изложенного в главе II для плоской деформации имеем:

$$e_{zz} = 0; \quad e_{xz} = 0; \quad e_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \sigma_z = m(\sigma_x + \sigma_y).$$

При этом система уравнений теории упругости принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (97)$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (98)$$

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [(1 - m^2)\sigma_x - m(1 + m)\sigma_y]; \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [(1 - m^2)\sigma_y - m(1 + m)\sigma_x]; \\ e_{xy} &= \frac{2(1 + m)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Из уравнений неразрывности деформации остается одно:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (100)$$

Используя физические уравнения (99) и уравнения равновесия (97), получим уравнение совместности (100) в таком виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - m^2 \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - m^2 \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - m^2 \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \\ &- m \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - m^2 \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 2(1 + m) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -(1 + m) \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x + \sigma_y) - m^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x + \sigma_y) - m^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \times \\ \times (\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

$$\text{или } \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

$$\text{Операция } \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \nabla^2$$

носит название оператора Лапласа второго порядка над функциями  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  или гармонической операции «набла два». Таким образом, получим:  $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ .

Итак, для плоской деформации совокупность основных уравнений теории упругости приводится к следующим трем уравнениям:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (101)$$

В гл. II было показано, что в случае плоского напряженного состояния компоненты  $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = 0$ . Кроме того,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  не зависят от  $z$ . Используя эти соотношения, нетрудно показать [3], что и для плоского напряженного состояния совокупность основных уравнений теории упругости выражается равенствами (101).

Основные уравнения теории упругости для плоской задачи в цилиндрической системе координат имеют вид [3]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0;$$

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (102)$$

### 3. Функция напряжений для плоской задачи

Из предыдущего параграфа следует, что решение плоской задачи в напряжениях сводится к определению в данной области трех функций  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  из трех уравнений (101). Задачу можно значительно облегчить, если ввести в рассмотрение так называемую функцию напряжений. Пусть имеем две функции:  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ . Известно, что если  $dP/dy = dQ/dx$ , то выражение  $Pdx + Qdy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $A(x, y)$ , т. е.  $dA = Pdx + Qdy$ .

Запишем первое из уравнений равновесия (97) в следующем виде:

$$-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}.$$

Можно предположить, что здесь  $-\tau_{xy}=P$ ;  $\sigma_x=Q$ . Следовательно, выражение  $-\tau_{xy}dx + \sigma_x dy$  — полный дифференциал некоторой функции  $A$ . Но  $dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy$ , т. е. для нашего случая

$$-\frac{\partial A}{\partial x} = \tau_{xy}; \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \sigma_x. \quad (103)$$

Возьмем второе уравнение из системы (97):

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}.$$

Здесь  $\sigma_y=P$ ;  $-\tau_{xy}=Q$ . Аналогично предыдущему выражение  $\sigma_y dx - \tau_{xy} dy$  есть полный дифференциал некоторой функции  $B(x, y)$ .

Но  $dB = \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy$ , т. е. для этого случая

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \sigma_y; \quad -\frac{\partial B}{\partial y} = \tau_{xy}. \quad (104)$$

Учитывая выражения (103), (104), можно найти

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial A}{\partial x} \text{ и } \tau_{xy} = -\frac{\partial B}{\partial y}, \text{ т. е. } \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y}.$$

Теперь уже  $Bdx + Ady$  есть полный дифференциал некоторой другой функции  $\varphi(x, y)$ , т. е.

$$d\varphi = Bdx + Ady, \quad (105)$$

$$\text{и поэтому } B = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ и } A = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

На основании уравнений (103) — (105) имеем:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (106)$$

Подставив теперь выражение напряжений из выражений (106) в дифференциальные уравнения равновесия (97), мы убедимся, что они тождественно удовлетворяются, т. е. функция  $\varphi$  действительно существует. Таким образом, все напряжения выражаются с помощью одной функции напряжений  $\varphi$ . Отметим одно из свойств функции напряжений: если  $\varphi_1$  — функция напряжений для данной задачи, то функция  $\varphi = \varphi_1 + ax + by + c$  при любых значениях постоянных  $a, b, c$  также будет функцией напряжений для той же задачи.

Для определения функции  $\varphi$  запишем уравнение совместности: и преобразуем следующим образом:

$$\Delta^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y + \sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x + \sigma_y) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = 0.$$

Из уравнений равновесия имеем:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}.$$

Поэтому 
$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = 0.$$

Используя функцию напряжений, получим:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0. \quad (107)$$

Отсюда 
$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi \right] = 0$$

и 
$$\nabla^4 \Phi = 0. \quad (108)$$

Функция напряжений (функция Эри) удобна при решении задач обратным или полуобратным методом: задаваясь функцией напряжений, удовлетворяющей только одному уравнению (108), можно быть уверенным, что все уравнения теории упругости удовлетворяются.

Функцию напряжений<sup>1</sup>, удовлетворяющую уравнению (108) для случая цилиндрической системы координат, можно получить с использованием формулы перехода от прямоугольных координат к цилиндрическим [3]:  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ;  $\theta = \arctg \frac{y}{x}$ . Более краткий путь решения этой задачи сводится к следующему.

Если совместить ось  $x$  с радиусом-вектором  $\rho$ , то во всех точках этой оси  $\sigma_y = \sigma_\theta$  (рис. 39). Поэтому выражение  $\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$  преобразуется к виду

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}. \quad (109)$$

Уравнения равновесия в цилиндрических координатах [см. равенства (33)] перепишем следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sigma_\rho) + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} - \sigma_\theta = 0; \quad (110)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \tau_{\rho\theta}) + \rho \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (111)$$

Подставляя выражение (109) в формулу уравнения (111), по-

лучим: 
$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \tau_{\rho\theta}) = -\rho \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \rho^2 \partial \theta} = -\rho \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \rho^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \theta} =$$
  

$$= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \theta} \right).$$

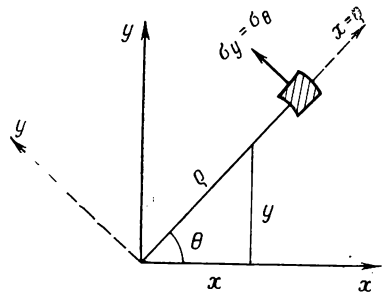


Рис. 39. Схема к выводу уравнений совместности в цилиндрических координатах

<sup>1</sup> К а ц А. М. Теория упругости. Изд. ЛПИ, 1954. 179 с ил.

Отсюда

$$\rho^2 \tau_{\rho\theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial \theta}; \quad \tau_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial \theta}. \quad (112)$$

Подставляя уравнение (112) в равенство (110), будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sigma_\rho) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \rho \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right);$$

тогда

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}. \quad (113)$$

Итак, с помощью функции  $\varphi$  мы вывели следующие выражения для напряжения в цилиндрических координатах:

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2}; \quad \tau_{\rho\theta} = - \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right).$$

Учитывая, что сумма нормальных напряжений представляет собой инвариант (см. гл. II), для случая плоской задачи можно написать:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_\rho + \sigma_\theta = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2}. \quad (114)$$

В связи с этим бигармоническое уравнение  $\nabla^4 \varphi = 0$  в цилиндрической системе координат приобретает следующий вид:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (115)$$

#### 4. Распределение напряжений, симметричное относительно оси

В случае осевой симметрии компоненты напряжений не зависят от угла  $\theta$  (т. е. являются только функцией радиуса  $\rho$ ), а касательное напряжение  $\tau_{\rho\theta} = 0$ . При этом остается только одно уравнение статики:

$$\frac{d \sigma_\rho}{d \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0.$$

Условие совместности (115) можно переписать в виде

$$\left( \frac{d^2}{d \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d \rho} \right) \left( \frac{d^2 \varphi}{d \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d \varphi}{d \rho} \right) = 0 \quad (116)$$

или

$$\frac{d^4 \varphi}{d \rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{d^3 \varphi}{d \rho^3} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 \varphi}{d \rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \frac{d \varphi}{d \rho} = 0. \quad (117)$$

Уравнение (117) — линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка типа Эйлера. Оно имеет частное решение вида  $\varphi = \rho^n$ :

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = n\rho^{n-1}; \quad \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} = n(n-1)\rho^{n-2};$$

$$\frac{d^3\varphi}{d\rho^3} = n(n-1)(n-2)\rho^{n-3}; \quad \frac{d^4\varphi}{d\rho^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)\rho^{n-4}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (117) и произведя сокращение на  $\rho^{n-4}$ , получаем следующее характеристическое уравнение:

$$n(n-1)(n-2)(n-3) + 2n(n-1)(n-2) - n(n-1) + n = 0$$

или после преобразований:  $n^2(n-2)(n-2) = 0$ . Корни этого уравнения:  $n_{1,2} = 0$ ;  $n_{3,4} = 2$ .

У дифференциальных уравнений типа Эйлера двойному корню  $n$  соответствуют два частных решения:  $\rho^n$ ;  $\rho^n \ln \rho$ . Поэтому уравнение (117) имеет частные решения:  $1$ ;  $\ln \rho$ ;  $\rho^2$ ;  $\rho^2 \ln \rho$ . Общим же решением уравнения (117) будет выражение

$$\varphi = A \ln \rho + B \rho^2 \ln \rho + C \rho^2 + D. \quad (118)$$

Компоненты напряжений на основании выражений (114) и уравнения (113) можно найти по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2 \ln \rho) + 2C; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} = \\ &= \sigma_r - \frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2 \ln \rho) + 2C. \end{aligned} \quad (119)$$

Константы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  при решении конкретных задач определяются с учетом граничных условий.

**Пример 1.** Определить напряжения в толстостенном цилиндре с наружным диаметром  $r$  и внутренним радиусом  $r_B$ , подвергающемуся внутреннему равномерно распределенному давлению  $p$  (рис. 40).

Задачу будем решать в напряжениях.

Из условия равновесия следует, что радиальное напряжение на внутренней поверхности цилиндра равно  $-p$ , а на наружной — равно нулю. Таким образом, имеем два граничных условия:

$$\rho = r_B, \quad \sigma_r = -p; \quad \rho = r, \quad \sigma_r = 0. \quad (120)$$

Но постоянных интегрирования в формулах (119) имеется три. Допустим, что  $B=0$ . Тогда получим:

$$\sigma_r = \frac{A}{\rho^2} + 2C; \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{\rho^2} + 2C. \quad (121)$$

Из формул (121), используя граничные условия, имеем:

$$\frac{A}{r_B^2} + 2C = -p; \quad \frac{A}{r^2} + 2C = 0.$$

Отсюда

$$A = -p \frac{r_B^2}{r_B^2 - r^2}; \quad 2C = -p \frac{r_B^2 + r^2}{r_B^2 - r^2}.$$



Подставляя значения констант в выражения (121), получим:

$$\sigma_r = -p \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{r}{r_B}\right)^2\right]}; \quad \sigma_\theta = -p \frac{\left[1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{r}{r_B}\right)^2\right]}. \quad (122)$$

С использованием уравнений (122) на рис. 40 построены эпюры напряжений в стенке толстостенной трубы.

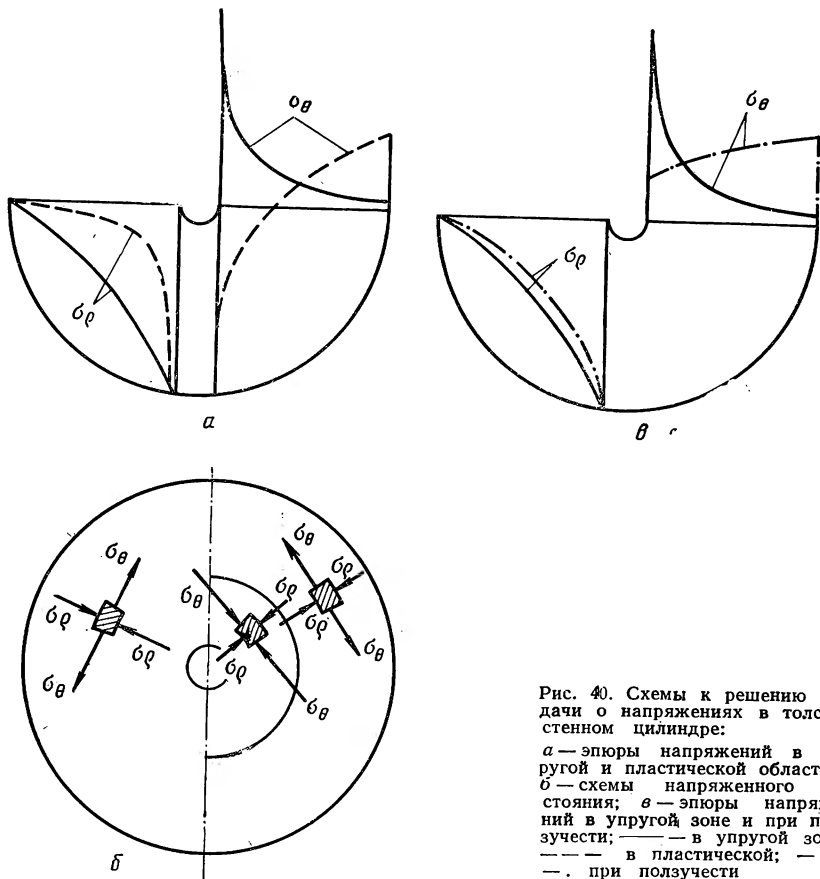


Рис. 40. Схемы к решению задачи о напряжениях в толстостенном цилиндре:

*a* — эпюры напряжений в упругой и пластической областях; *б* — схемы напряженного состояния; *в* — эпюры напряжений в упругой зоне и при ползучести; — — — в упругой зоне; — — — в пластической; — . — при ползучести

В рассматриваемой задаче было сделано допущение, что константа  $B=0$ . Если считать  $B$  отличным от нуля, то получим другое решение, которое будет предполагать наличие остаточных напряжений в осесимметричном теле. Исследование этого случая будет проведено в следующей главе.

Таким образом, мы получили решение осесимметричной задачи в напряжениях. Решим теперь эту же задачу в перемещениях.

Как и выше, считаем, что компоненты тензора напряжений, а следовательно, и перемещения не зависят от угла  $\theta$ , а касательные напряжения  $\tau_{r\theta}=0$ . Это следует из условия симметрии. Система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r}; \quad e_{rr} = \frac{du}{dr}; \quad e_{rr} = \frac{1}{E} (\sigma_r - m\sigma_\theta);$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - m \sigma_{\rho}).$$

Решая два последних уравнения относительно  $\sigma_{\rho}$  и  $\sigma_{\theta}$ , получим:

$$\sigma_{\rho} = \frac{E}{1-m^2} (e_{\rho\rho} + m e_{\theta\theta}); \quad \sigma_{\theta} = \frac{E}{1-m^2} (e_{\theta\theta} + m e_{\rho\rho}),$$

или

$$\sigma_{\rho} = \frac{E}{1-m^2} \left( \frac{du}{d\rho} + m \frac{u}{\rho} \right); \quad \sigma_{\theta} = \frac{E}{1-m^2} \left( \frac{u}{\rho} + m \frac{du}{d\rho} \right). \quad (123)$$

Подставляя выражения (123) в уравнение равновесия, получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка типа Эйлера:

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} - \frac{u}{\rho^2} = 0. \quad (124)$$

Его частные решения имеют вид  $u = \rho^n$ . Далее:  $\frac{du}{d\rho} = n \rho^{n-1}$ ;  $\frac{d^2 u}{d\rho^2} = n(n-1) \rho^{n-2}$ ; с учетом этих выражений получим из (124) характеристическое уравнение:

$$n(n-1) + n - 1 = 0 \quad \text{или} \quad n^2 - 1 = 0.$$

Отсюда  $n_1 = +1$ ;  $n_2 = -1$ . Этим корням характеристического уравнения соответствуют частные решения  $\rho$  и  $\frac{1}{\rho}$ .

Общее решение будет иметь следующий вид:

$$u = A \rho + \frac{B}{\rho}. \quad (125)$$

$$\text{Тогда} \quad \frac{du}{d\rho} = A - \frac{B}{\rho^2}. \quad (126)$$

Подставляя выражения для  $u$  и  $\frac{du}{d\rho}$  в выражение (123), получим формулы для определения напряжений:

$$\sigma_{\rho} = \frac{E}{1-m^2} \left[ A(1-m) + \frac{B}{\rho^2} (1-m) \right]; \quad \sigma_{\theta} = \frac{E}{1-m^2} \times \\ \times \left[ A(1+m) - \frac{B}{\rho^2} (1-m) \right]. \quad (127)$$

Считая, что  $A E \frac{1+m}{1-m^2} = 2C$  и  $B E \frac{1-m}{1-m^2} = A$ , мы приходим к формулам (121), поскольку конечный результат, разумеется, не зависит от способа решения.

Решение задачи в перемещениях содержит только две константы. Это решение подтверждает справедливость сделанного нами в предыдущем случае предположения, согласно которому  $B=0$ .

При решении задач производилось непосредственное интегрирование уравнений теории упругости, что является примерами прямого метода решения.

## 5. Полуобратный и обратный методы решения задач

В случае решения задач теории упругости полуобратным или обратным методами функция напряжений  $\varphi$  определяется исходя из логических соображений, приближенных решений или результатов опыта с учетом граничных условий. При удачном выборе она удовлетворяет бигармоническому уравнению и, следовательно, основным уравнениям теории упругости. В таком случае решение в пределах принятых допущений можно считать точным.

Пример 2. Определить напряжения, возникающие в теле, имеющем форму симметричного клина, от сосредоточенной силы, действующей на его острие.

Допустим, что элемент  $C$  (рис. 41) испытывает простое радиальное сжатие. Тогда можно принять

$$\sigma_{\theta} = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0; \quad \sigma_r = -kP \frac{\cos \theta}{\rho}, \quad (128)$$

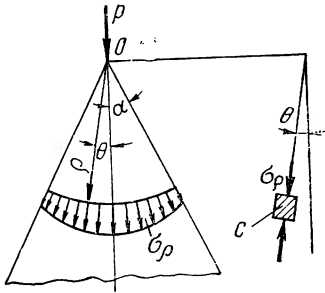
где  $k$  — коэффициент пропорциональности.

Такое предположение логично: при  $\theta = 0$ , г. е. на линии действия силы  $P$ , напряжение  $\sigma_r$  имеет при данном  $\rho$  максимальное значение. С уменьшением  $\rho$  радиальное напряжение возрастает по гиперболическому закону. Теперь необходимо убедиться в справедливости принятого предположения.

Выберем функцию  $\varphi$  в виде:

$$\varphi = -\frac{kP}{2} \rho \theta \sin \theta.$$

Рис. 41. Схема к решению задачи о силе, действующей на острие клина



Выражения для напряжений при этом запишутся следующим образом.

$$\sigma_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} = -\frac{kP \cos \theta}{\rho};$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} = 0; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Отсюда следует, что предположение (128) оказалось точным: условие совместности и уравнения равновесия тождественно удовлетворены. Граничные условия, согласно которым  $\theta = \pm \alpha$ ,  $\tau_{r\theta} = 0$ ,  $\sigma_{\theta} = 0$ , также удовлетворяются.

Теперь нужно подобрать постоянную  $k$ . Это можно сделать, исходя из условия равновесия между внешней силой  $P$  и внутренними силами:

$$P = 2 \int_0^{\alpha} \sigma_r \cos \theta \rho d\theta = 2kP \int_0^{\alpha} \frac{\cos^2 \theta}{\rho} \rho d\theta = 2kP \frac{1}{2} \left| \left( \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right|_0^{\alpha} =$$

$$= kP \left( \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right).$$

$$\text{Отсюда } k = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

$$\text{и окончательно } \sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{\rho \left( \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)}. \quad (129)$$

## 6. Напряжения от сосредоточенной силы, приложенной в точке полубесконечной пластинки

Полубесконечную пластинку получим, развернув грани клина так, чтобы угол  $\alpha$  был равен  $\pi/2$  (рис. 42). Тогда из выражения (129) получим:

$$\sigma_r = - \frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{\rho}. \quad (130)$$

Из формулы (130) следует, что при  $\rho=0$ , т. е. в точке приложения силы, радиальные напряжения равны бесконечности. Физически это означает, что в данной точке напряжения столь велики, что здесь материал деформируется пластически. В связи с этим для этой точки решение, полученное из уравнений теории упругости,

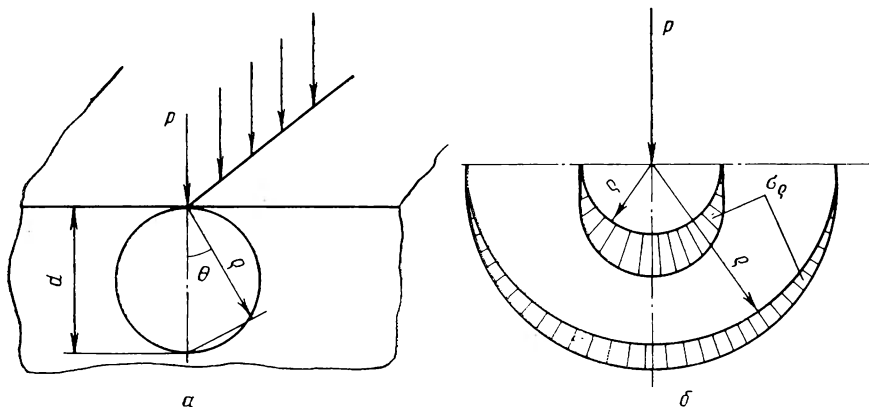


Рис. 42. Схема к решению задачи о сосредоточенной силе, приложенной к полубесконечной пластинке:

$a$  — схемы приложения силы;  $b$  — эпюры напряжений в пластинке

непригодно. Для всех других точек, как показывает опытная проверка, данные расчета вполне соответствуют опытным.

На основании формулы (130) можно сделать важный вывод, который мы будем использовать в дальнейшем. Проведем через точку приложения сосредоточенной силы окружность, диаметр которой равен  $d$ . Тогда непосредственно на рис. 42 можно видеть, что  $\frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{1}{d}$ . Поэтому формула (130) приобретает вид

$$\sigma_r = - \frac{2P}{\pi d}. \quad (131)$$

Следовательно, на любой окружности, проведенной через точку приложения сосредоточенной силы, радиальные напряжения сохраняют постоянное значение, определяемое формулой (131).

Найдем теперь напряжения от сосредоточенной силы в полубесконечной пластинке по горизонтальному сечению на глубине

$x = x_0$  (рис. 43,а). Вырежем из пластинки призму  $abc$  так, как показано на рисунке. Призма находится в состоянии простого радиального сжатия, и поэтому в цилиндрических координатах имеем:  $\sigma_r \neq 0$ ;  $\sigma_\theta = 0$ ;  $\tau_{r\theta} = 0$ .

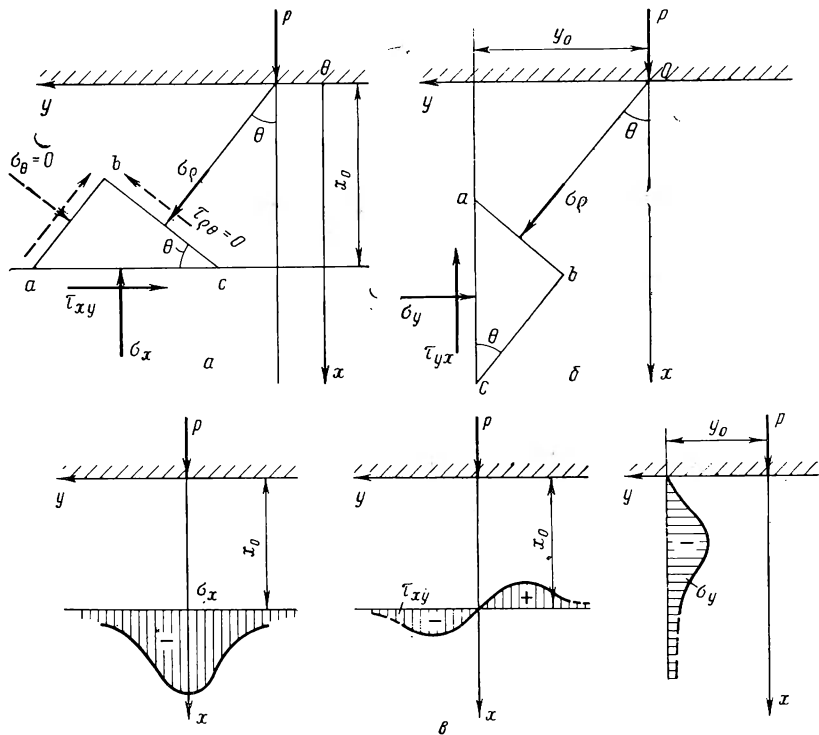


Рис. 43. Схема к определению напряжений  $\sigma$  и  $\tau$  от сосредоточенной силы в прямоугольных координатах (а), напряжений  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yx}$  (б) и эпюры распределения напряжений от сосредоточенной силы в полубесконечной пластинке (в)

На грани  $ac$  с площадью  $dF$  действуют напряжения  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$ . Грань  $bc$  имеет площадь  $dF \cos \theta$ . Проектируя все силы на оси  $x$  и  $y$ , получим:

$$-\sigma_x dF + \sigma_r \cos^2 \theta dF = 0; \quad -\tau_{xy} dF + \sigma_r \cos \theta \sin \theta dF = 0.$$

Отсюда:

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta; \quad \tau_{yx} = \sigma_r \cos \theta \sin \theta. \quad (132)$$

Найдем напряжения по вертикальному сечению  $y = y_0$  (рис. 43, б). Проектируя силы на оси  $x$  и  $y$ , будем иметь:

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta; \quad \tau_{yx} = \sigma_r \cos \theta \sin \theta. \quad (133)$$

Из вторых равенств (132) и (133) следует, что  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ .

Принимая во внимание выражение (130), получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi\rho} \cos^3 \theta; \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi\rho} \cos \theta \sin^2 \theta; \quad \tau_{xy} = \\ &= -\frac{2P}{\pi\rho} \cos^2 \theta \sin \theta. \end{aligned} \quad (134)$$

Произведем переход к прямоугольным координатам по формулам (рис. 39):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos \theta = \frac{x}{\rho}; \quad \sin \theta = \frac{y}{\rho}.$$

Выражения для напряжений (134) при этом приобретают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \quad \tau_{xy} = \\ &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (135)$$

Эпюры напряжений, построенные с использованием зависимостей (135), приведены на рис. 43,в.

## 7. Напряжения при сжатии цилиндра в условиях плоской деформации

При определении напряжений, вызываемых сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в точке  $A$  (рис. 44), воспользуемся полученным выше результатом для полуплоскости, считая, что сила  $P$  приложена к границе плоскости, проходящей через точки  $A$ . Тогда че-

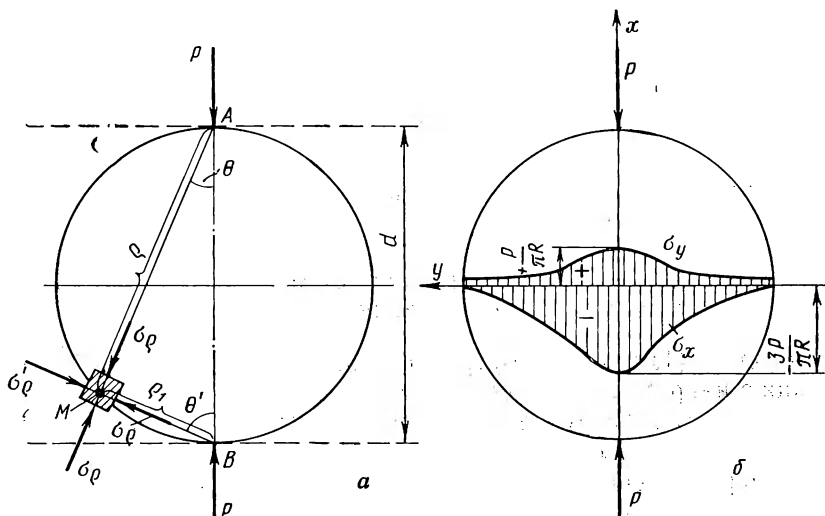


Рис. 44. Схема к расчету напряжений при плоском сжатии цилиндра (а) и эпюра напряжений на горизонтальном диаметре (б)

рез точку  $A$  проходят линии равных напряжений, которые представляют собой окружности. В их числе и окружность контура диска, где  $\sigma_r = -(2P/\pi d)$ . Аналогично, от силы  $P$ , приложенной в точке  $B$  на окружности, действует напряжение:  $\sigma'_r = -(2P/\pi d)$ .

Наложение этих двух сил дает напряжение в средней части полосы между точками  $A$  и  $B$ . В точке  $M$ , на площадках, перпендикулярных  $\rho$  и  $\rho_1$ , действуют напряжения  $\sigma_r = \sigma'_r = -\frac{2P}{\pi d}$ . При этом по

всему контуру будут действовать сжимающие напряжения. Поэтому если из полосы вырезать диск, то для того, чтобы он находился в равновесии, необходимо по контуру диска приложить сжимающие напряжения интенсивностью  $-2P/\pi d$ . Но в действительности его контур свободен от напряжений. Тем не менее диск находится в равновесии за счет того, что реальное напряженное состояние диска отличается от напряженного состояния полуплоскости. Поэтому для того, чтобы определить напряженное состояние диска, следует наложить на напряженное состояние полосы однородное всестороннее растягивающее напряжение интенсивностью  $2P/\pi d$ .

Таким образом, напряжение в данной точке диска можно получить наложением напряжений, создаваемых сосредоточенной силой в точке  $A$ , напряжений от такой же силы, приложенной в точке  $B$ , а также напряжений, полученных от всестороннего растяжения. Расчет напряжений производится по формулам (135).

Напряжения по горизонтальному и вертикальному диаметрам будут равны:

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{r^3}{(r^2 + y^2)^2} - \frac{2P}{\pi} \frac{r^3}{(r^2 + y^2)^2} + \frac{P}{\pi r};$$

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi} \frac{r^2 y}{(r^2 + y^2)^2} - \frac{2P}{\pi} \frac{r^2 y}{(r^2 + y^2)^2} + \frac{P}{\pi r}$$

или

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi r} \left[ 1 - \frac{4r^4}{(r^2 + y^2)^2} \right]; \quad \sigma_y = \frac{P}{\pi r} \left[ 1 - \frac{4r^3 y^2}{(r^2 + y^2)^2} \right]. \quad (136)$$

Эпюры напряжений, построенные с использованием формул (40), приведены на рис. 44, в, г.

## 8. Случай отсутствия осевой симметрии при плоской деформации

Решение (119) осесимметричной задачи позволяет подобрать функцию напряжений и с ее помощью написать выражения для напряжений в случае, когда осевая симметрия отсутствует.

Предположим, что эти выражения, помимо членов, зависящих от  $\rho$ , содержат некоторую функцию  $f(\theta)$ . Пусть, например,

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} = -\frac{C_1}{\rho^2} + C_2(3 + 2 \ln \rho) + C_3 + f(\theta).$$

Интегрируя дважды по  $\rho$ , получим отсюда функцию  $\varphi$  в виде:

$$\varphi = (C_1 + C_2 \rho^2) \ln \rho + (C_3 + f(\theta)) \frac{\rho^2}{2}. \quad (137)$$

Попытаемся тождественно удовлетворить бигармоническим уравнения (115).

Используя выражение (137), будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} &= -\frac{C_1}{\rho^2} + 2C_2 \ln \rho + 4C_2 + C_3 + f(\theta) + \\ &+ \frac{C_1}{\rho^2} + 2C_2 \ln \rho + 4C_2 + C_3 + f(\theta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta^2} = \\ &= 4C_2 \ln \rho + 6C_2 + 2C_3 + 2f(\theta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание этот результат, из уравнения (115) найдем

$$-\frac{4C_2}{\rho^2} + \frac{4C_2}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial^2 + (\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial^4 f(\theta)}{\partial \theta^2} = 0$$

или

$$\frac{d^4 f(\theta)}{d\theta^4} + 4 \frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} = 0. \quad (138)$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка.

Обозначим  $\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} = y$ . Тогда уравнение (138) приобретает вид:

$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + 4y = 0$ . Его характеристическое уравнение:  $n^2 + 4 = 0$ . Отсюда

$$n_1 = 2i; n_2 = -2i$$

и, следовательно:  $y = C' e^{2i\theta} + C'' e^{-2i\theta}$ .

По известным формулам Эйлера имеем:

$$e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta; e^{-2i\theta} = \cos 2\theta - i \sin 2\theta.$$

Поэтому

$$y = (C' + C_2'') \cos 2\theta + i(C' - C_2'') \sin 2\theta.$$

Обозначая  $C_4 = C' + C_2''$  и  $C_5 = i(C' - C_2'')$ , получим:

$$y = \frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} = C_4 \cos 2\theta + C_5 \sin 2\theta.$$

Произвольные функции интегрирования по  $\rho$  здесь не вводим, так как мы ставим перед собой задачу использовать любое подходящее нам значение функции  $\varphi$ , которым бы удовлетворялось бигармоническое уравнение  $\nabla^4 \varphi = 0$ .

Отсюда

$$f(\theta) = -\frac{1}{4} (C_4 \cos 2\theta + C_5 \sin 2\theta) + C_6 \theta + C_7. \quad (139)$$



На основании уравнений (137) и (139) функцию  $\varphi$  запишем в таком виде:

$$\varphi = (C_1 + C_2 \rho^2) \ln \rho + \frac{C_3}{2} \rho^2 - \frac{\rho^2}{8} (C_4 \cos 2\theta + C_5 \sin 2\theta) + \frac{C_6}{2} \rho^2 \theta + \frac{C_7}{2} \rho^2. \quad (140)$$

Легко показать, что бигармоническое уравнение (115) тождественно удовлетворяется при использовании выражения (44), что свидетельствует о правильности вычислений. В результате можно быть уверенным в том, что тождественно удовлетворяются все основные уравнения плоской задачи теории упругости, а функция  $\varphi$  действительно является функцией напряжений.

Воспользовавшись выражением для функции  $\varphi$  (140), по формулам (114) определим теперь выражения для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{C_1}{\rho^2} + 2C_2 \ln \rho + 2C_2 + C_3 + \\ &+ \frac{1}{4} (C_4 \cos 2\theta + C_5 \sin 2\theta) + C_6 \theta + C_7; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} = -\frac{C_1}{\rho^4} + 2C_2 \ln \rho + 4C_2 + C_3 - \\ &- \frac{1}{4} (C_4 \cos 2\theta + C_5 \sin 2\theta) + C_6 \theta + C_7; \\ \tau_{\rho\theta} &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{4} (C_4 \sin 2\theta + C_5 \cos 2\theta) - \frac{C_6}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

Из решения (141) легко получить решение (119) осесимметричной задачи.

При наличии осевой симметрии напряжения от  $\theta$  не зависят. Поэтому допустим, что  $C_4 = C_5 = C_6 = 0$ . Далее приравняем правые части равенств (119) и (141):

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2 \ln \rho) + 2C = \frac{C_1}{\rho^2} + 2C_2 \ln \rho + 2C_2 + C_3 + C_7; \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2 \ln \rho) + 2C = -\frac{C_1}{\rho^2} + 2C_2 \ln \rho + 4C_2 + C_3 + C_7. \end{aligned}$$

Сравнивая правые и левые части, видим, что

$$A = C_1; \quad B = C_2; \quad B + 2C = 2C_2 + C_3 + C_7; \quad 3B + 2C = 4C_2 + C_3 + C_7.$$

Для проверки запишем последние два уравнения так:

$$2C = 2C_2 + C_3 + C_7 - B; \quad 2C = 4C_2 + C_3 + C_7 - 3B.$$

Приравнивая правые части, получим снова  $B = C_2$ . Следовательно, соотношения между константами справедливы, и мы действительно из решения (141) получили решение (119).

Для того чтобы подчеркнуть общность этих решений, перепишем равенство (141) в таком виде (константы пронумерованы запово):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2 \ln \rho) + 2C + \frac{1}{4} \times \\ &\times (C_1 \cos 2\theta + C_2 \sin 2\theta) + C_3 \theta; \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2 \ln \rho) + 2C - \\ &- \frac{1}{4} (C_1 \cos 2\theta + C_2 \sin 2\theta) + C_3 \theta; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{4} (C_1 \sin 2\theta - C_2 \cos 2\theta) - \frac{C_3}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

Пример 3. Определить напряжения в центре диска, находящегося под действием двух сосредоточенных нагрузок. В центре диска ( $\rho=0$ ) напряжения не могут быть бесконечно велики. Поэтому считаем, что  $A=B=0$ . Вместе с тем с ростом угла  $\theta$  в пределах  $0-\frac{\pi}{2}$  напряжения  $\sigma_r$  могут только уменьшаться. Поэтому следует принять  $C_2=C_3=0$ . В результате формулы (142) получают вид:

$$\sigma_r = 2C + \frac{C_1}{4} \cos 2\theta; \quad \sigma_\theta = 2C - \frac{C_1}{4} \cos 2\theta; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{C_1}{4} \sin 2\theta. \quad (143)$$

Допустим, что диск является частью полубесконечной плоскости (пунктир на рис. 45). Из пункта 6 известно, что через точку приложения силы к полубесконечной плоскости проходят круги разных касательных напряжений. Максимальные касательные напряжения во всех точках окружности диаметром  $d' = \frac{d}{2} r$ , проходящей через центр диска  $O$  (рис. 45), равны

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{P}{\pi d'} + \frac{P}{\pi d'} = \frac{2P}{\pi d'} = \\ &= \frac{4P}{\pi d} = \frac{2P}{\pi r}. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся равенством (44):

$$\left( \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \right)^2 + \tau_{r\theta}^2 = \tau_{\max}^2.$$

Принимая во внимание выражение (143), получим:

$$\left( \frac{C_1}{4} \right)^2 (\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) = \left( \frac{2P}{\pi r} \right)^2.$$

$$\text{Отсюда } \frac{C_1}{4} = \nu \frac{2P}{\pi r}, \quad \text{где } \nu = \pm 1.$$

Принимая, что  $\nu = -1$ , будем иметь следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_r = 2C - \frac{2P}{\pi r} \cos 2\theta; \quad \sigma_\theta = 2C + \frac{2P}{\pi r} \cos 2\theta; \quad \tau_{r\theta} = \frac{2P}{\pi r} \sin 2\theta. \quad (144)$$

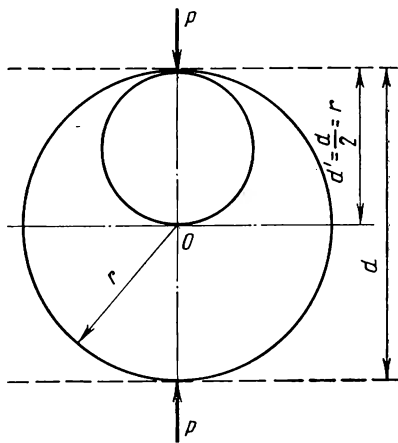


Рис. 45. Схема и расчет напряжений в центре диска, сжатого двумя сосредоточенными силами

Для определения константы  $2C$  воспользуемся формулами (136). Согласно этим формулам, на горизонтальном диаметре в центре диска ( $y=0$ ) напряжения будут равны:

$$\sigma_r = \sigma_x = -\frac{3P}{\pi r}; \quad \sigma_y = \sigma_\theta = \frac{P}{\pi r}.$$

С учетом этого, принимая в формулах (144)  $\theta=0$ , найдем константу  $2C = -\frac{P}{\pi r}$ . В результате выражения для напряжений (144) будут иметь следующий вид:

$$\sigma_r = -\frac{P}{\pi r} (1 + 2 \cos 2\theta); \quad \sigma_\theta = -\frac{P}{\pi r} (1 - 2 \cos 2\theta); \quad \tau_{r\theta} = \frac{2P}{\pi r} \sin 2\theta. \quad (145)$$

Мы пришли к известному в теории упругости решению, которое понадобится нам в дальнейшем.

## 9. Контактная задача Герца

Герц решил задачу о величине площадки контакта двух цилиндров с параллельными осями, сжатых некоторой силой  $P$  (рис. 46). Опуская подробные выкладки, дадим краткое изложение хода решения этой задачи<sup>1</sup>. В пункте 2 были получены физические уравнения (99) для плоской деформации. В данной задаче используется допущение о простом радиальном сжатии, поэтому  $\sigma_\theta = 0$ . При этом уравнения (99) в цилиндрических координатах приобретают вид:

$$e_{r\rho} = \frac{1-m^2}{E} \sigma_r; \quad e_{\theta\theta} = -\frac{m(1+m)}{E} \sigma_r.$$

Принимая во внимание соотношения между деформациями и перемещениями, выражаемые равенствами (22), и выражения для напряжений (128), найдем

$$e_{r\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{2(1-m^2)P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{\rho}; \quad (146)$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{\rho} = \frac{2m(1+m)P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{\rho}; \quad (147)$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} = 0. \quad (148)$$

Интегрируя уравнение (146) по  $\rho$ , будем иметь:

$$u = -\frac{2(1-m^2)P}{\pi E} \cos \theta \ln \rho + f(\theta). \quad (149)$$

Подставив  $u$  в выражение (147) и интегрируя его, получим

$$v = \frac{2m(1+m)P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2(1-m^2)P}{\pi E} \sin \theta \ln \rho - \int_1^{\rho} f(\theta) d\theta + \phi(\rho). \quad (150)$$

<sup>1</sup> В книге Н. И. Безухова [3] приведено решение аналогичной задачи для плоского напряженного состояния ( $\sigma_z=0$ ).

Используя формулы (149) и (150), определим  $f(\theta)$  интегрированием уравнения (148):

$$f(\theta) = -\frac{(1-m-2m^2)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta; \quad (151)$$

$$\varphi(\rho) = C \rho, \quad (152)$$

где  $A, B, C$  — постоянные интегрирования.

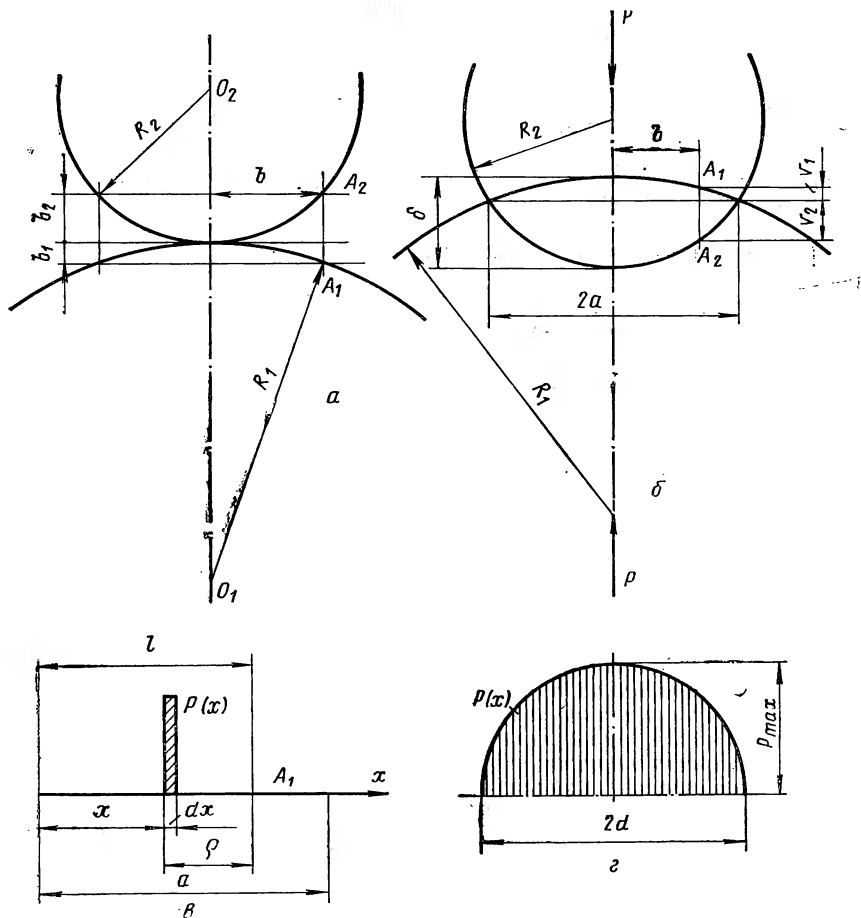


Рис. 46. Схемы к решению задачи Герца:

$a$  — соприкосновение цилиндров до деформации;  $b$  — после приложения сил;  $v$  — контактные смещения;  $z$  — распределение нагрузки

Функции  $f(\theta)$  и  $\varphi(\rho)$  находим с использованием граничных условий:

1) при  $\theta=0$  перемещение  $v=0$  (это сразу дает  $A=C=0$ );

2) при расстоянии  $l$  от начала координат прогиба поверхности ( $\theta = \pi/2$ ) не происходит. В результате для перемещения  $v$  получаем следующее уравнение:

$$v = - \frac{2(1-m^2)P}{\pi E} \ln \frac{\rho}{h} - \frac{(1+m)P}{\pi E}. \quad (153)$$

Здесь  $h$  — расстояние от контактной поверхности, на котором перемещение  $v=0$ .

Цилиндры до деформации соприкасаются лишь по линии, параллельной их продольной оси. Поэтому (рис. 46,а)

$$R_1^2 = b^2 + (R_1 - b_1)^2; \quad R_2^2 = b^2 + (R_2 - b_2)^2.$$

Отсюда, пренебрегая малыми величинами  $b_1^2$  и  $b_2^2$ , найдем

$$b_1 = \frac{b^2}{2R_1}; \quad b_2 = \frac{b^2}{2R_2}.$$

Таким образом, расстояние между точками  $A_1$  и  $A_2$  до деформации равно:

$$b_1 + b_2 = \frac{b^2}{2R_1} + \frac{b^2}{2R_2} = \beta b^2,$$

где

$$\beta = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}. \quad (154)$$

Под действием сил  $P$  цилиндры будут упруго деформироваться, их оси сблизятся (рис. 46,б), и мы можем записать:

$$(b_1 + b_2) - \delta = -(v_1 + v_2); \quad (v_1 + v_2) = \delta - (b_1 + b_2);$$

$$v_1 + v_2 = \delta - \beta b^2. \quad (155)$$

Величина поверхности контакта цилиндров, равная  $2a$  (рис. 46,б), мала по сравнению с их радиусами. Поэтому каждый из цилиндров можно рассматривать как полуплоскость и находить  $v_1$  и  $v_2$  по формуле (153).

Контактное напряжение  $p(x)$  на контактной поверхности переменное. При этом  $\int_{-a}^a p(x) dx = P$ . Под действием силы  $p(x) dx$ , приложенной в некоторой точке  $x$ , точка  $A$  (рис. 46,в) получит вертикальное перемещение, которое с учетом формулы (153) будет равно

$$\begin{aligned} dv_1 &= - \frac{2(1-m_1^2)}{\pi E_1} p(x) dx \ln \frac{(b-x)}{R_1} - \frac{1+m_1}{\pi E} p(x) dx = \\ &= - \frac{2(1-m_1^2)}{\pi E_1} \left[ p(x) \ln(b-x) dx + \left( \frac{1}{2(1-m_1)} - \ln R_1 \right) R(x) dx \right]. \end{aligned}$$

От давления на всю полосу точка  $A_1$  получит вертикальное перемещение:

$$v_1 = - \frac{2(1-m_1^2)}{\pi E_1} \left[ \int_{-a}^{+a} p(x) \ln(b-x) dx + \left( \frac{1}{2(1-m_1)} - \ln R_1 \right) P \right].$$

Аналогично, точка  $A_2$  переместится по вертикали на величину

$$v_2 = - \frac{2(1-m_2^2)}{\pi E_2} \left[ \int_{-a}^{+a} p(x) \ln(b-x) dx + \left( \frac{1}{2(1-m_2)} - \ln R_2 \right) P \right].$$

Таким образом, равенство (155) приобретает вид:

$$\begin{aligned} & - \frac{2}{\pi} \left( \frac{1-m_1^2}{E_1} + \frac{1-m_2^2}{E_2} \right) \int_{-a}^{+a} p(x) \ln(b-x) dx - \\ & - \left\{ \frac{2(1-m_2^2)}{\pi E} \left[ \frac{1}{2(1-m_1)} - \ln R_1 \right] + \frac{2(1-m_2^2)}{\pi E^2} \left[ \frac{1}{2(1-m_2)} - \ln R_2 \right] \right\} \times \\ & \times P = \delta - \beta b^2. \end{aligned}$$

Заметим, что член в фигурных скобках левой части равенства и величина  $\delta$  в правой части от  $b$  не зависят. Дифференцируя по  $b$ , получим:

$$\frac{2}{\pi} \left( \frac{1-m_1^2}{E_1} + \frac{1-m_2^2}{E_2} \right) \int_{-a}^{+a} \frac{p(x)}{b-x} dx = 2\beta b_0. \quad (156)$$

Герц предполагал, что контактное напряжение пропорционально ординатам полуплоскости, построенной на диаметре, равном  $2d$  (рис. 46,з), т. е.

$$p(x) = \frac{p_{\max}}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

При этом из условия

$$\int_{-a}^{+a} p(x) dx = \frac{p_{\max}}{a} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = P$$

получается, что  $p_{\max} = 2P/\pi a$ .

Вычисляя интеграл в уравнении (156), будем иметь:

$$\int_{-a}^{+a} \frac{p(x)}{\xi - x} dx = \frac{\pi p_{\max}}{a}.$$

Тогда уравнение (156) с учетом выражения (154) приобретает вид:

$$\left( \frac{1-m_1^2}{E_1} + \frac{1-m_2^2}{E_2} \right) \frac{2 p_{\max}}{a} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}.$$

Подставляя в это равенство значение  $p_{\max} = \frac{2P}{\pi a}$  получим:

$$a = \sqrt{\frac{4R_1 R_2 P}{\pi(R_1 + R_2)} \left( \frac{1 - m_1^2}{E_1} + \frac{1 - m_2^2}{E_2} \right)}. \quad (157)$$

Пример 4. Вывести формулу для определения контактной поверхности при прокатке с учетом упругого сплющивания валков. Пусть при прокатке ва-

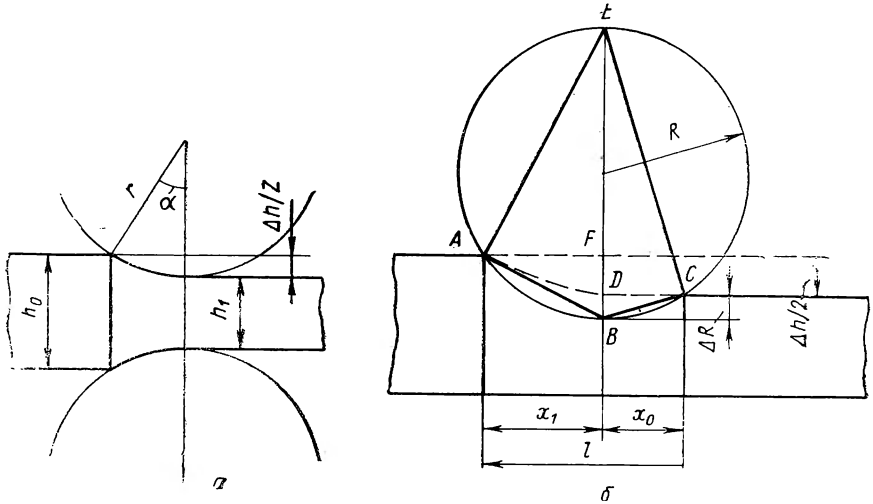


Рис. 47. Схемы к вычислению длины контактной поверхности при прокатке: а — в жестких валках; б — в упругих валках

лок получает упругую деформацию ожатия  $\Delta R = BD$  (рис. 47). Тогда горизонтальная проекция контактной поверхности равна

$$l = x_0 + x_1.$$

Величины  $x_1$  и  $x_0$  приближенно приравняем хордам:

$$x = AB; \quad x_0 = BC.$$

Из подобия треугольников  $ABE$  и  $ABF$  имеем:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BF}{AB} \quad \text{или} \quad \frac{x_1}{2R} = \frac{\frac{\Delta h}{2} + \Delta R}{x_1}.$$

$$\text{Отсюда} \quad x_1 = \sqrt{2R \left( \frac{\Delta h}{2} + \Delta R \right)} = \sqrt{R \Delta h + 2R \Delta R}.$$

Величину  $2R \Delta R$  находим из подобия треугольников  $BCD$  и  $BCE$ :

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BE} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta R}{x_0} = \frac{x_0}{2R}.$$

$$\text{Тогда} \quad 2R \Delta R = x_0^2. \quad \text{Следовательно,} \quad x_1 = \sqrt{R \Delta h + x_0^2}.$$

Таким образом, длина контактной поверхности равна

$$l = x_0 + \sqrt{R \Delta h + x_0^2}. \quad (158)$$

Величину  $x_0$  определим по формуле Герца (157). С учетом наших обозначений преобразуем ее к такому виду:

$$x_0 = \sqrt{\frac{4 R_1 P}{\pi \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)} \frac{1 - m_2^2}{E_2} \left[1 + \frac{(1 - m_1^2)}{(1 - m_2^2)} \frac{E_2}{E_1}\right]}.$$

В нашем случае роль одного из цилиндров выполняет полоса, радиус которой  $R_2$  можно принять бесконечно большим, а ее упругой деформацией пренебречь, т. е. считать, что  $\frac{E_2}{E_1} = 0$ . Полное давление на валки выразим через величину  $p_{cp}$  среднего контактного напряжения:  $P = 2x_0 p_{cp}$ .

$$\text{Тогда } x_0 = \sqrt{\frac{8 x_0 p_{cp} R (1 - m^2)}{\pi E}} \quad \text{или} \quad x_0 = \frac{8 (1 - m^2)}{\pi E} p_{cp} R.$$

Если принять  $m = 0,3$ ;  $E = 21,6 \cdot 10^4 \text{ Мн/м}^2$  ( $21,6 \cdot 10^3 \text{ кг/мм}^2$ ), то получим

$$x_0 = \frac{p_{cp} R}{9,3 \cdot 10^4} \quad (p_{cp}, \text{ Мн/м}^2); \quad x_0 = \frac{p_{cp} R}{9500} \quad (p_{cp}, \text{ кг/мм}^2). \quad (159)$$

Итак, длина контактной поверхности при прокатке выражается формулами:

$$l = \frac{p_{cp} R}{9,3 \cdot 10^4} + \sqrt{R \Delta h + \left(\frac{p_{cp} R}{9,3 \cdot 10^4}\right)^2} \quad \text{или} \quad l = \frac{p_{cp} R}{9500} + \sqrt{R \Delta h + \left(\frac{p_{cp} R}{9500}\right)^2}. \quad (160)$$

В первой из этих формул среднее контактное напряжение имеет размерность  $\text{Мн/м}^2$ , а во второй —  $\text{кг/мм}^2$ ;  $l$ ,  $R$  и  $\Delta h$  имеют соответствующую размерность.

## 10. Плоская задача теории упругости и взаимодействие дислокаций

Поле напряжений краевой дислокации в упругой изотропной среде определяется из уравнения (108). Функцию напряжений, удовлетворяющую этому уравнению, можно принять в таком виде:

$$\varphi = \frac{G b}{2 \pi (1 - m)} y \ln(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Используя соотношение (10), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{G b}{2 \pi (1 - m)} \frac{y (3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}; & \sigma_y &= \frac{G b}{2 \pi (1 - m)} \frac{y (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= \frac{G b}{2 \pi (1 - m)} \frac{x (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \quad (161)$$

Поле напряжений от винтовой дислокации можно описать следующими функциями:

$$\tau_{xz} = -\frac{G b}{2 \pi} \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \tau_{yz} = \frac{G b}{2 \pi} \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (162)$$



В полярных координатах на основе известных соотношений

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta; \quad x^2 + y^2 = \rho^2$$

получим:

$$\tau_{\theta} = \frac{Gb}{2\pi} \frac{1}{\rho}. \quad (163)$$

Из последнего уравнения следует, что поле напряжений винтовой дислокации осесимметрично. Это понятно: винтовая дислокация не имеет экстраплоскости и ее нельзя связать с определенной плоскостью скольжения.

Представленные уравнения описывают поле напряжений, создаваемое дислокациями приближенно.

Действительно, напряжения при удалении от дислокации уменьшаются, но обращаются в нуль только при бесконечно большом значении  $\rho$ . Кристалл же имеет конечные размеры, и поэтому напряжения, согласно приведенным уравнениям, на его внешней поверхности в нуль не обращаются, что вытекает из условий статики.

В другом крайнем случае, когда  $\rho$  приближается к нулю, согласно приведенным уравнениям, напряжения обращаются в бесконечность, что тоже неверно. Поэтому наименьший радиус  $r_0$ , при котором зависимости теории упругости уже нельзя использовать, принимают равным двум-трем векторам Бюргерса. На больших

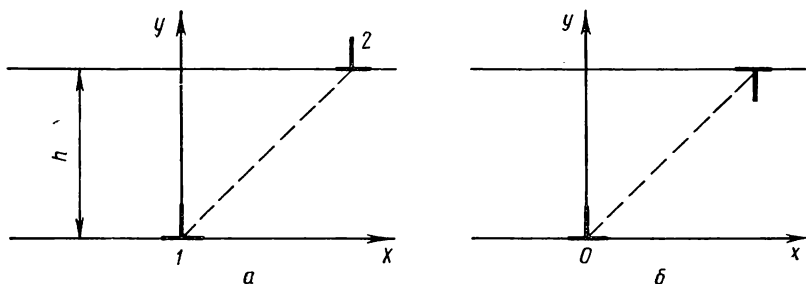


Рис. 48. Схема к определению сил взаимодействия дислокаций одного (а) и разных знаков (б)

расстояниях межатомную среду принимают изотропной и упругой. Этого достаточно для описания взаимодействия дислокаций, находящихся за пределами ядра.

Пусть взаимодействуют две одноименные дислокации (рис. 48, а). В этом случае на дислокацию 2 со стороны дислокации 1 действует сила

$$f_x = b \tau_{xy} = \frac{Gb^2}{2\pi(1-m)} \frac{x(x^2 - h^2)}{(x^2 + h^2)^2}.$$

Если дислокации лежат в одной плоскости скольжения, то  $h=0$  и

$$f_x = \frac{Gb^2}{2\pi(1-m)} \frac{1}{x} > 0,$$

т. е.  $f(x)$  есть сила отталкивания, и дислокации стремятся разойтись на возможно большие расстояния.

В общем случае  $h \neq 0$ . При  $x > h$  дислокации отталкиваются ( $f(x) > 0$ ). При  $x < h$  они притягиваются ( $f(x) < 0$ ). Наиболее устойчивое положение имеем при  $x = 0$ , так как в этом случае силы взаимодействия между дислокациями  $f(x) = 0$ . В результате дислокации образуют «вертикальную» стенку. Это приводит к описанному в гл. I явлению полигонизации. При  $x = h$  силы взаимодействия дислокаций тоже равны нулю. Этот случай соответствует положению неустойчивого равновесия. Если в параллельных плоскостях скольжения находятся различные краевые дислокации (рис. 48, б), то знак силы взаимодействия меняется на обратный:

$$f(x) = - \frac{G b^2}{2 \pi (1 - m)} \frac{x (x^2 - h^2)}{(x^2 + h^2)^2}.$$

В этом случае также имеем два устойчивых положения: при  $x = 0$  и при  $x = h$ . Но теперь уже при  $x > h$  дислокации притягиваются и при  $x < h$  отталкиваются.

Из условия  $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$  можно найти максимальное значение

силы взаимодействия дислокаций:

$$f_{\max} = \frac{G b^2}{2 \pi (1 - m)} \frac{1}{4 h}.$$

Когда внешние силы больше  $f_{\max}$ , они в состоянии сдвинуть дислокации относительно друг друга. Таким образом,  $f_{\max}$  есть максимальная сила взаимного торможения дислокаций.

Если внешнее касательное напряжение в плоскости скольжения меньше  $f_{\max}$ , тодвигающиеся в параллельных плоскостях навстречу друг другу дислокации противоположных знаков при  $x < h$  останавливаются, т. е. оказываются заблокированными друг другом. Накопление таких заблокированных дислокаций приводит к местному перегибу плоскости скольжения и локальной переориентации кристаллической решетки. Участки такого типа обнаруживаются как металлографически, так и рентгенографически в форме так называемых полос деформации, полос перегиба и сбросов.

## ▼ г л а в а

### Определение напряжений и деформаций в пластической зоне

#### 1. Основные уравнения теории малых упруго-пластических деформаций

Настоящая глава посвящена описанию методов определения напряжений и деформаций в теории пластичности с тем, чтобы затем использовать их применительно к конкретным процессам обработки металлов давлением.

Строгое решение задач теории пластичности сводится к совместному решению восемнадцати уравнений: три уравнения статики (39), шесть геометрических соотношений (19), шесть физических уравнений (26), выражение для обобщенного напряжения (61), выражение для обобщенной деформации (62), уравнение, связывающее обобщенную деформацию с обобщенным напряжением (93). После решения этой системы должны быть удовлетворены граничные условия (40).

Получить строгое решение ввиду значительных математических трудностей при современном состоянии науки практически невозможно. Поэтому при решении задач теории пластичности используют допущения, упрощающие их решение. Одно из таких допущений заключается в том, что объемная задача теории пластичности сводится к плоской (двумерная задача). При другом допущении используют гипотезу «плоских сечений» (одномерная задача).

## 2. Плоская задача в прямоугольных координатах

В гл. I было показано, что в случае плоской деформации напряжения не зависят от координаты  $z$  и все деформации осуществляются в плоскости  $xy$ . В связи с этим одно из дифференциальных уравнений равновесия тождественно удовлетворяется, а два другие значительно упрощаются. Введем понятие о жестком идеальном пластичном теле; для такого тела наличием упругих деформаций пренебрегают и считают, что напряжения по достижении предела текучести не зависят от величины деформаций. Система уравнений для случая плоской деформации имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2 = 4k^2. \quad (164)$$

Система уравнений включает три неизвестные функции:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . В результате совместного решения уравнений плоской задачи можно найти эти функции, характеризующие напряженное состояние тела. Вопрос же о деформациях при такой постановке задачи остается открытым.

Продифференцируем первое уравнение системы (164) по  $y$ , а второе по  $x$  и вычтем одно уравнение из другого:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x - \sigma_y) = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2}.$$

Третье из уравнений системы (164) запишем следующим образом:

$$\sigma_x - \sigma_y = \pm 2 \sqrt{k^2 - \tau_{xy}^2}.$$

Тогда предыдущее уравнение будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = \pm 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{k^2 - \tau_{xy}^2}. \quad (165)$$

Если направление главных осей мало отличается от направления произвольно выбранных, то, в соответствии с (90), система (164) и уравнение (165) приобретают вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad \sigma_x - \sigma_y = \nu K. \quad (166)$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0. \quad (167)$$

Предположим, далее, что искомая функция  $\tau_{xy}$  представляет собой произведение двух функций, одна из которых зависит только от  $x$ , а вторая от  $y$ :

$$\tau_{xy} = \Phi(x) \varphi(y) = \Phi \varphi. \quad (168)$$

Подставляя выражение (168) в уравнение (167), получим:

$$\frac{\Phi''}{\Phi} - \frac{\varphi''}{\varphi} = 0.$$

Пусть теперь

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = m^2; \quad -\frac{\varphi''}{\varphi} = -m^2, \quad (169)$$

где  $m$  — некоторая произвольная постоянная.

Таким образом, мы заменили уравнение (167) в частных производных системой из двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка типа Эйлера.

Первое из уравнений (169) запишем в следующем виде:  
 $\Phi'' - m^2 \Phi = 0$ .

Его характеристическое уравнение будет:  $n^2 - m^2 = 0$ .

Отсюда:  $n_1 = +m$ ;  $n_2 = -m$ .

Следовательно:  $\Phi = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$ .

Аналогично получим:  $\varphi = A e^{my} + B e^{-my}$ .

Подставляя выражения для  $\Phi$  и  $\varphi$  в уравнение (168), найдем, что

$$\tau_{xy} = (c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}) (A e^{my} + B e^{-my}).$$

Первые два из уравнений системы (166) перепишем следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}.$$

С учетом выражения для  $\tau_{xy}$  после интегрирования получим:

$$\sigma_y = -(c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) (A e^{my} - B e^{-my}) + f(x);$$

$$\sigma_x = -(c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) (A e^{my} - B e^{-my}) + f_1(y).$$

Выпишем еще раз выражения компонентов тензора напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= (c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}) (Ae^{my} + Be^{-my}); \\ \sigma_y &= -(c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) (Ae^{my} - Be^{-my}) + f(x); \\ \sigma_x &= -(c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) (Ae^{my} - Be^{-my}) + f_1(y). \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

Окончательно решение плоской задачи теории пластичности получим, если удовлетворим уравнение пластичности. Подставив выражение (170) в последнее уравнение системы (166), найдем

$$f_1(y) - f(x) = \nu K,$$

откуда следует, что  $f_1(y)$  и  $f(x)$  представляют собой константы.

Поэтому, возвращаясь к равенствам (170), получим решение для случая идеально пластического тела в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= (c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}) (Ae^{my} + Be^{-my}); \\ \sigma_y &= -(c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) (Ae^{my} - Be^{-my}) + c; \\ \sigma_x &= -(c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) (Ae^{my} - Be^{-my}) + c + \nu K. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Если уравнение пластичности взято в форме (88), то равенства (171) приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= (c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}) (Ae^{my} + Be^{-my}); \\ \sigma_y = \sigma_x &= -(c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) (Ae^{my} - Be^{-my}) + c. \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

### 3. Плоская задача в цилиндрических координатах

Рассмотрим плоскую задачу теории пластичности в цилиндрических координатах в предположении, что направление главных осей мало отличается от направления произвольно выбранных осей координат.

В этом случае необходимо решить систему трех уравнений: два уравнения статического равновесия и условие пластичности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0; \\ \sigma_\rho - \sigma_\theta = \nu K. \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

Первое из уравнений системы (173) приведем к виду:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sigma_\rho) - \sigma_\theta + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} = 0.$$

Или с учетом последнего из уравнений системы (173)

$$\rho \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} = 0.$$

После дифференцирования по  $\theta$  получим:

$$\rho \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \rho \partial \theta} = - \frac{\partial^2 \tau_{\rho \theta}}{\partial \theta^2}.$$

Второе из уравнений системы (173) после дифференцирования по  $\rho$  приводится к виду:

$$\rho \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta \partial \rho} = - \rho^2 \frac{\partial^2 \tau_{\rho \theta}}{\partial \rho^2} - 3\rho \frac{\partial \tau_{\rho \theta}}{\partial \rho}.$$

Приравнивая правые части последних двух равенств, будем иметь

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \tau_{\rho \theta}}{\partial \rho^2} + 3\rho \frac{\partial^2 \tau_{\rho \theta}}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \tau_{\rho \theta}}{\partial \theta^2} = 0.$$

Решение этого уравнения будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от  $\rho$ , а другая — только от  $\theta$ :

$$\tau_{\rho \theta} = \Phi(\rho) \varphi(\theta) = \Phi \varphi. \quad (174)$$

С учетом этого можно записать:

$$\rho^2 \frac{\Phi''}{\Phi} + 3\rho \frac{\Phi'}{\Phi} - \frac{\Phi''}{\Phi} = 0.$$

Пусть

$$- \frac{\Phi''}{\Phi} = - m^2; \quad \rho^2 \frac{\Phi''}{\Phi} + 3\rho \frac{\Phi'}{\Phi} = m^2, \quad (175)$$

где  $m$  — некоторое постоянное число.

Первое из этих уравнений перепишем так:  $\Phi'' - m^2 \Phi = 0$ . Его решение будет иметь вид:  $\Phi = Ae^{m\theta} + Be^{-m\theta}$ .

Решение уравнения  $\rho^2 \Phi'' + 3\rho \Phi' - m^2 \Phi = 0$  будем искать в форме  $\Phi = c \rho^n$ . Отсюда:  $\Phi' = cn \rho^{n-1}$ ;  $\Phi'' = cn(n-1) \rho^{n-2}$ .

Подставляя выражения  $\Phi$ ,  $\Phi'$  и  $\Phi''$  во второе уравнение системы (175), получим его характеристическое уравнение:  $n^2 + 2n - m^2 = 0$ . Отсюда

$$n_1 = -1 + \sqrt{1 + m^2} = a; \quad n_2 = -1 - \sqrt{1 + m^2} = b. \quad (176)$$

Таким образом:  $\Phi = c_1 \rho^a + c_2 \rho^b$ .

Подставив выражения функций  $\varphi$  и  $\Phi$  в выражение (174), находим:

$$\tau_{\rho \theta} = (c_1 \rho^a + c_2 \rho^b) (Ae^{m\theta} + Be^{-m\theta}). \quad (177)$$

Первое из уравнений системы (173) с учетом условия пластичности и равенства (177) приобретает вид:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} = -m(c_1 \rho^{a-1} + c_2 \rho^{b-1}) (Ae^{m\theta} - Be^{-m\theta}) - \frac{\nu K}{\rho}.$$

После интегрирования получаем:

$$\sigma_\rho = -m \left( \frac{c_1 \rho^a}{a} + \frac{c_2 \rho^b}{b} \right) (Ae^{m\theta} - Be^{-m\theta}) - \nu K \ln \rho + f(\theta). \quad (178)$$

Возьмем теперь второе дифференциальное уравнение равновесия из системы (173) и перепишем его следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = -\rho \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} - 2\tau_{\rho\theta}.$$

Принимая во внимание выражение (177), находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} &= -(c_1 a \rho^a + c_2 b \rho^b) (Ae^{m\theta} + Be^{-m\theta}) - 2(c_1 \rho^a + c_2 \rho^b) \times \\ &\times (Ae^{m\theta} + Be^{-m\theta}) = -[c_1(a+2)\rho^a + c_2(b+2)\rho^b] (Ae^{m\theta} + Be^{-m\theta}); \end{aligned}$$

Из соотношений (176) имеем:  $a+2 = m^2/a$ ;  $b+2 = m^2/2$ .  
Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} &= -m^2 \left( \frac{c_1 \rho^a}{a} + \frac{c_2 \rho^b}{b} \right) (Ae^{m\theta} + Be^{-m\theta}) \\ \sigma_\theta &= -m \left( \frac{c_1 \rho^a}{a} + \frac{c_2 \rho^b}{b} \right) (Ae^{m\theta} - Be^{-m\theta}) + f_1(\rho). \\ \text{На основании уравнений (178) и (179) имеем:} \\ \sigma_\rho - \sigma_\theta &= -\nu K \ln \rho + f(\theta) - f_1(\rho). \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

Условие пластичности, как известно, было записано в виде:  
 $\sigma_\rho - \sigma_\theta = \nu K$ .

Приравняв правые части последних двух равенств, получаем:  
 $-\nu K \ln \rho + f(\theta) - f_1(\rho) = \nu K$ .

Отсюда следует, что  $f(\theta) = \text{const}$ , и поэтому

$$f_1(\rho) = -\nu K (\ln \rho + 1) + c. \quad (180)$$

Таким образом, имеем следующую систему для определения компонентов тензора напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\rho\theta} &= (c_1 \rho^a + c_2 \rho^b) (Ae^{m\theta} + Be^{-m\theta}); \\ \sigma_\rho &= -m \left( \frac{c_1}{a} \rho^a + \frac{c_2}{b} \rho^b \right) (Ae^{m\theta} + Be^{-m\theta}) - \nu K \ln \rho + c; \\ \sigma_\theta &= -m \left( \frac{c_1}{a} \rho^a + \frac{c_2}{b} \rho^b \right) (Ae^{-\theta} - Be^{-m\theta}) - \\ &- \nu K (\ln \rho + 1) + c. \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

Здесь, как это следует из равенств (176),

$$m = \pm \sqrt{a(a+2)} = \pm \sqrt{b(b+2)}. \quad (182)$$

Если условие пластичности принять в форме (88), т. е.  $\sigma_\rho - \sigma_\theta = 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= (c_1 \rho^a + c_2 \rho^b) (Ae^{m\theta} + Be^{-m\theta}); \\ \sigma_r = \sigma_\theta &= - \left( \frac{c_1}{a} \rho^a + \frac{c_2}{b} \rho^b \right) (Ae^{m\theta} - Be^{-m\theta}) + c. \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

При наличии деформационного упрочнения необходимо совместно интегрировать два дифференциальных уравнения равновесия с учетом уравнения, выражающего закон связи между обобщенными напряжением и деформацией. Если для случая волочения, пресования и прокатки принять закон (96), то исходная система уравнений будет иметь вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} = 0; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \rho} + \frac{2 \tau_{r\theta}}{\rho} = 0;$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \nu K \left( \frac{r}{\rho} \right)^n. \quad (184)$$

Решение этой системы осуществляется аналогично решению задачи для идеально пластического материала. Читателю рекомендуется проделать соответствующие выкладки самостоятельно в порядке упражнения. В результате вычислений будет получено следующее решение:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= (c_1 \rho^a + c_2 \rho^b) (Ae^{m\theta} + Be^{-m\theta}); \\ \sigma_r &= - m \left( \frac{c_1}{a} \rho^a + \frac{c_2}{b} \rho^b \right) (Ae^{m\theta} - Be^{-m\theta}) + \\ &+ \frac{\nu K}{n} \left( \frac{r}{\rho} \right)^n + c; \\ \sigma_\theta &= - m \left( \frac{c_1}{a} \rho^a + \frac{c_2}{b} \rho^b \right) (Ae^{m\theta} - Be^{-m\theta}) + \nu K \times \\ &\times \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{r}{\rho} \right)^n + c. \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

Если условие пластичности принять в форме  $\sigma_r - \sigma_\theta = 0$ , то в результате решения будет получена система уравнений (183).

Пример 1. Толстостенная труба подвергается внутреннему равномерно распределенному давлению (рис. 40). Определить величину давления  $p$ , при котором вся стенка трубы окажется в пластическом состоянии, и построить эпюры напряжений, возникающих в стенке трубы.

В случае осевой симметрии  $\tau_{r\theta} = 0$  во всех точках поперечного сечения стенки трубы и напряжения не зависят от координаты  $\theta$ . Поэтому в формулах (181) следует считать  $A=B=0$ , тогда:

$$\sigma_r = -\nu K \ln \rho + c; \quad \sigma_\theta = \sigma_r - \nu K. \quad (186)$$

Далее, на наружной поверхности трубы, т. е. при  $\rho=r$ , радиальное напряжение  $\sigma_r=0$ . Поэтому  $c = \nu K \ln r$  и равенства (186) при  $\nu=-1$  получают следующий вид:

$$\frac{\sigma_r}{K} = -\ln \frac{r}{\rho}; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = -\left( \ln \frac{r}{\rho} - 1 \right). \quad (187)$$



Величина внутреннего давления определяется из условия  $\rho = r_b$ ;  $\sigma_\rho = -p$ . Таким образом, внутреннее давление, необходимое для перевода стенки трубы в пластическое состояние, будет равно

$$p = -K \ln \frac{r}{r_b}. \quad (188)$$

Формулы (187) можно получить и другим путем, а именно воспользовавшись результатом решения плоской осесимметричной упругой задачи.

Пример 2. Решить предыдущую задачу, используя основные уравнения теории упругости.

Считая в формулах (119) постоянную  $A$  равной нулю, получим:

$$\sigma_\rho = B(1 + 2 \ln \rho) + 2c; \quad \sigma_\theta = B(3 + 2 \ln \rho) + 2c. \quad (189)$$

Используем граничные условия:

$$B(1 + 2 \ln r_b) + 2c = -p. \quad B(1 + 2 \ln r) + 2c = 0.$$

Отсюда

$$B = + \frac{p}{2 \ln \frac{r}{r_b}}; \quad 2c = - \frac{p(1 + 2 \ln r)}{2 \ln \frac{r}{r_b}}. \quad (190)$$

Подставляя значения констант в формулу (189), получим

$$\sigma_\rho = -p \frac{\ln \frac{r}{\rho}}{\ln \frac{r}{r_b}}; \quad \sigma_\theta = -p \frac{\ln \frac{r}{\rho} - 1}{\ln \frac{r}{r_b}}. \quad (191)$$

Пластическая деформация осуществляется при условии:

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \nu K.$$

или на основании выражений (191):

$$-p \frac{\ln \frac{r}{\rho}}{\ln \frac{r}{r_b}} + p \frac{\ln \frac{r}{\rho} - 1}{\ln \frac{r}{r_b}} = \nu K.$$

Отсюда при  $\nu = +1$  получаем формулу (188), а выражения (191) сводятся к выражениям (187).

Таким образом, результаты решения упругой задачи можно использовать при решении задач теории пластичности. Для этого нужно функциями, характеризующими напряжения в упругой зоне, тождественно удовлетворить уравнение пластичности. В результате будут удовлетворены уравнения равновесия, условия совместности и условия пластичности, т. е. все уравнения, необходимые и достаточные не только для решения плоской задачи упругости, но и плоской задачи для пластического тела.

С этой точки зрения задачу теории пластичности можно рассматривать как предельный случай задач теории упругости. В этом предельном случае характер напряженного состояния может значительно отличаться от характера распределения напряжений в упругой зоне. Это хорошо иллюстрируют эпюры напряжений, приведенные на рис. 49.

Пример 3. На плоскость, ограничивающую полубесконечное тело, действует сосредоточенная сила  $P$ . Определить глубину распространения пластической деформации, если тело обладает идеальной пластичностью, и построить эпюру напряжений на линии  $OO$  под точкой приложения силы (рис. 49).

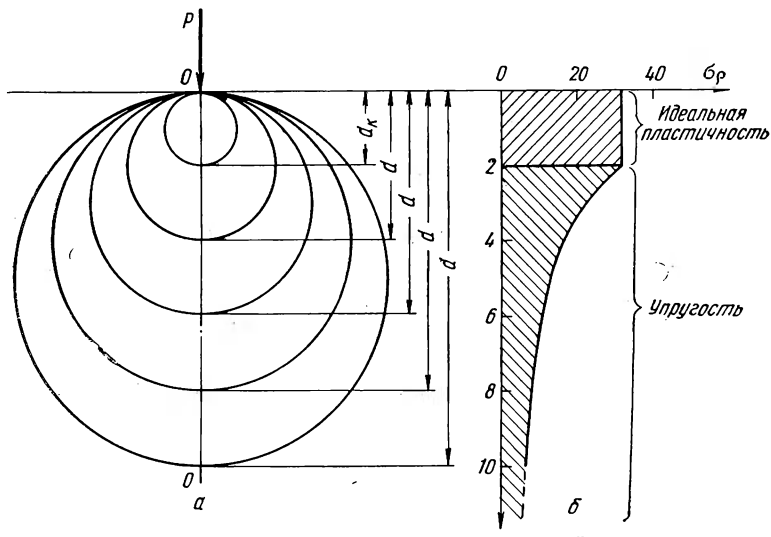


Рис. 49. Окружности равных напряжений (а) и эпюры напряжений (б) в полупространстве, возникающие под действием сосредоточенной нагрузки

В главе IV было показано, что на любой окружности, проведенной через точку приложения сосредоточенной силы к полуплоскости, радиальные напряжения сохраняют постоянное значение, определяемое формулой:

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d}.$$

Это соотношение справедливо и для точек окружностей, расположенных на вертикали  $OO$  (рис. 49). Допустим, что напряжения  $\sigma_r$  достигают величины «вынужденного» предела текучести  $K = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$  в точке, соответствующей диаметру  $d_k$ ,

тогда глубина распространения пластической деформации определится как  $d_k = -\frac{2P}{\pi K}$ . Если, например,  $K = 320 \text{ Мн/м}^2$  ( $32 \text{ кг/мм}^2$ ), сосредоточенная сила,

приходящаяся на длину в 1 мм,  $P = 100 \text{ Мн}$  ( $1000 \text{ кг}$ ), то пластическая деформация распространяется на глубину 2 мм, причем, поскольку среда обладает идеальной пластичностью, напряжение будет оставаться постоянным и равным  $K$  во всех точках отрезка между точкой приложения силы и точкой соответствующей диаметру  $d_k$ . Далее, по мере удаления от этой точки напряжение будет быстро уменьшаться в соответствии с законом  $\sigma_r = -(2P/\pi d)$  и здесь тело будет деформироваться только упруго, причем величина упругих деформаций будет быстро уменьшаться в соответствии с уменьшением величины напряжений. Быстрое падение напряжений по мере удаления от точки приложения сосредоточенной нагрузки объясняется тем, что эта нагрузка распределяется на все большую площадь.

Допустим, что тело имеет ограниченные размеры и к нему приложена нагрузка на очень небольшой поверхности. Если под действием этой нагрузки, которую по существу можно рассматривать как сосредоточенную силу, тело де-

формируется пластически и деформация охватывает весь его объем, то описанная нами картина распределения напряжений принципиально не изменится. Следовательно, нагрузки сосредоточенного характера вызывают неравномерную пластическую деформацию. Пластическая деформация наиболее интенсивна в месте приложения нагрузки и минимальна в точках, наиболее удаленных от него. Это подтверждается многочисленными опытами — экспериментальными данными с помощью оптического метода, опытами по исследованию линии течения, опытами на рекристаллизацию и т. п.

#### 4. Остаточные напряжения

Пусть круглый вал, длина которого значительно превышает диаметр, подвергается обкатке роликами так, чтобы единичные обжатия были небольшими — в пределах десятых долей процента. В таком случае силы, действующие на вал со стороны роликов, будут по существу сосредоточенными. Тогда, в соответствии с приведенными выше примерами, пластическая деформация будет наиболее развита в периферийной части заготовки. За счет резкого спада напряжений от сосредоточенных нагрузок по мере перехода от периферии к центру пластическая деформация будет быстро уменьшаться.

Если таким образом обработать вал по всему периметру, а затем прекратить воздействие на него роликов, то упомянутые выше напряжения сосредоточенного характера от внешних сил исчезнут, поскольку они уравновешиваются этими внешними силами из условия равновесия. Опыты, однако, показывают, что после снятия на-

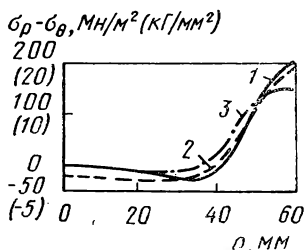


Рис. 50. Распределение разности остаточных нормальных напряжений,  $\text{кг} (\text{T})$ , по сечению стальных цилиндров: 1 — 38,2 (4); 2 — 19,6 (2); 3 — 9,8 (1)

грузок в материале валка будут существовать некоторые напряжения, которые получили наименования остаточных.

Экспериментальное определение напряжений в крупных стальных валках, упрочненных поверхностной обкаткой роликами, показывает, что радиальные напряжения по всему сечению валка являются растягивающими и обращаются в нуль на поверхности в соответствии с условиями статики. Тангенциальные напряжения от растягивающих в центральной области валка переходят к сжимающим в периферийной и на контуре приобретают максимальное значение<sup>1</sup>.

На рис. 50 приведены кривые, построенные по данным этих опытов, характеризующие величину разности нормальных напряжений в различных точках поперечного сечения валка. Как следует из рис. 50, в центральной части заготовки разность напряжений невелика, а в самом центре обращается в нуль. В некотором промежу-

<sup>1</sup> Кобрин М. М., Георгиевский М. Б., Чередов С. В. Остаточные напряжения в крупных валках, упрочненных роликами. Труды ЦНИИТ-МАШ, вып. 49. Машгиз, 1952.

точном кольцевом сечении разность напряжений снова обращается в нуль, а затем начинает быстро возрастать, приближаясь к величине предела текучести по мере перехода к контуру сечения. Описанная закономерность отчетливо выявляется и при анализе других опытов.

С учетом этого обстоятельства произведем ориентировочный расчет величины остаточных напряжений, возникающих в круглом валу, в результате его обкатки роликами.

Сформулируем на основании условий статики и приведенных выше опытных данных граничные условия:

1. На контуре заготовки радиальное напряжение равно нулю; при  $\rho=r$   $\sigma_r = 0$ .

2. Опыты показывают, что в некотором промежуточном кольцевом сечении, которому соответствует радиус  $r_b$ , разность напряжений обращается в нуль и далее во всей центральной зоне эта разность в 5—10 раз меньше, чем на периферии. Это дает возможность приближенно считать для всей центральной зоны разность напряжений равной нулю, а для кольцевого сечения принять точное условие: при  $\rho=r_b$   $\sigma_r - \sigma_\theta = 0$ .

3. Ввиду того, что деформированная заготовка находится в упруго-напряженном состоянии, максимальное значение напряжений на контуре вала должно быть меньше истинного сопротивления деформации  $K$ . Однако, чтобы приближенно оценить величину и характер остаточных напряжений, можно принять максимальное значение разности напряжений на поверхности тела равным  $K$ . Тогда на основании опытных данных третье граничное условие можно написать в следующем виде: при  $\rho=r$   $\sigma_r - \sigma_\theta = \nu K$ .

Окончательно получим совокупность граничных условий:

$$\rho = r; \quad \rho = r_b; \quad \rho_b = r; \quad \sigma_r = 0; \quad \sigma_r = \sigma_\theta; \quad \sigma_\theta = -\nu K. \quad (192)$$

Для решения данной осесимметричной упругопластической задачи применимы формулы (119). Используя второе из граничных условий, находим:  $B = A/r_b^2$ .

Принимая во внимание это соотношение и используя первое и третье граничное условие, получим:

$$A = -\frac{\nu K r_b}{2 \left[ 1 - \left( \frac{r_b}{r} \right)^2 \right]}; \quad B = -\frac{\nu K}{2 \left[ 1 - \left( \frac{r_b}{r} \right)^2 \right]};$$

$$2c = -\frac{\nu K}{2} + \frac{\nu K \ln r}{\left[ 1 - \left( \frac{r_b}{r} \right)^2 \right]}.$$

Подставляя значения констант в формулы (119) и принимая с учетом из граничных условий  $v^2 = +1$ , найдем выражение для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_\rho}{K} &= \frac{1}{2} \frac{2 \ln \frac{r}{\rho} - \left[ \left( \frac{r_B}{\rho} \right)^2 - \left( \frac{r_B}{r} \right)^2 \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{r_B}{r} \right)^2 \right]}; \\ \frac{\sigma_\theta}{K} &= \frac{1}{2} \frac{2 \ln \frac{r}{\rho} - \left[ 2 - \left( \frac{r_B}{\rho} \right)^2 - \left( \frac{r_B}{r} \right)^2 \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{r_B}{r} \right)^2 \right]}; \\ \frac{\sigma_z}{K} &= m \left[ \frac{2 \ln \frac{r}{\rho}}{1 - \left( \frac{r_B}{\rho} \right)^2} - 1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

Последняя формула получена из условия плоской деформации:

$$\sigma_z = m(\sigma_\rho + \sigma_\theta).$$

Если принять  $\rho = r_B$ , то будем иметь:

$$\frac{\sigma_\rho}{K} = \frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2 \ln \frac{r}{r_B}}{1 - \left( \frac{r_B}{r} \right)^2} - 1 \right];$$

$$\frac{\sigma_z}{K} = m \left[ \frac{2 \ln \frac{r}{r_B}}{1 - \left( \frac{r_B}{r} \right)^2} - 1 \right].$$

Таким образом, центральная зона вала подвергается растяжению остаточными напряжениями, возникающими в результате обкатки.

На рис. 51 изображена эпюра остаточных напряжений после обкатки. В расчетах принято:  $r_B/r = 0,1$ ,  $m = 0,25$ . Если коэффициент Пуассона  $\mu = 0,5$ , т. е. принимается условие постоянства объема, то эпюра осевых напряжений имеет вид, изображенный пунктиром.

Итак, из рис. 51 следует, что в центре сечения напряжения являются растягивающими. Наружные слои заготовки деформируются по толщине в большей мере, чем внутренние. За счет уменьшения толщины периметр наружных слоев стремится возрасти и, следовательно, они испытывают стремление к отрыву от сердцевины вала. Этому препятствуют сплошность тела.

Поэтому возникают растягивающие радиальные напряжения, максимальные в центре и равные нулю на периферии. Тангенци-

альные напряжения уравниваются радиальными, и осевые напряжения уравниваются между собой.

Растягивающие остаточные напряжения в осевой зоне могут иногда достигать значительной величины и приводить к разрушению центральной части тела. Эти напряжения являются следствием неравномерной деформации по сечению вала.

После снятия нагрузок напряжения от внешних сил исчезают, поскольку они уравниваются внешними силами. Напряжения от неравномерной деформации также вызваны внешними силами. Однако после снятия нагрузок напряжения, связанные с неравномерностью деформации, продолжают в теле существовать. Именно поэтому эти напряжения получили наименование остаточных напряжений. Остаточные напряжения продолжают существовать после снятия нагрузок потому, что они уравниваются между собой. В самом деле, после снятия нагрузок уравнения равновесия сводятся к единственному:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0.$$

Подставляя сюда выражение радиального и тангенциального напряжений из выражений (193), убеждаемся в том, что оно тождественно удовлетворяется. Но это как раз и является свидетельством того факта, что остаточные напряжения уравниваются взаимно.

Из приведенного здесь описания видно, что в данном случае остаточные напряжения уравниваются в пределах всего тела (или больших его объемов) и обладают ориентировкой, связанной с геометрическими очертаниями тела и характером его обработки. Такие остаточные напряжения получили наименование остаточных напряжений первого рода. Помимо этого, различают еще остаточные напряжения второго и третьего рода.

Остаточные напряжения второго рода уравниваются в пределах объемов, соизмеримых с размерами зерен металла. Остаточные напряжения третьего рода взаимно уравниваются в пределах нескольких ячеек кристаллической решетки.

Из опытов известно, что работа, затраченная на пластическую деформацию, переходит в тепло не полностью, а лишь на 80—90%. Остальные 10—20% как раз и остаются в теле в виде энергии остаточных напряжений. Тело, в котором действуют остаточные напряжения, можно рассматривать как находящееся под воздействием

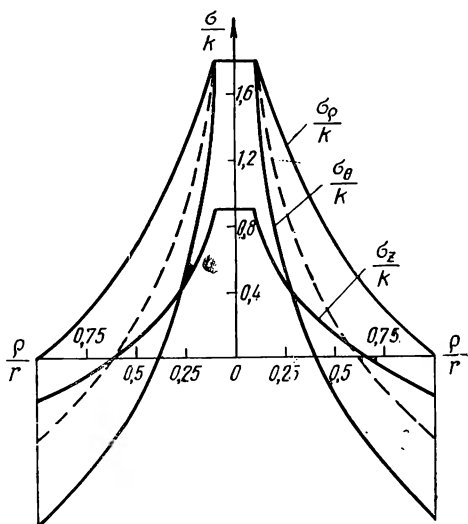


Рис. 51. Эпиюры остаточных напряжений после обкатки,  $r_p/r = 0,1$ ,  $m = 0,25$  и  $0,5$

длительной нагрузки. В результате ее действия с течением времени возможна пластическая деформация и, следовательно, коробление и изменение размеров тела, а также растрескивание.

Кроме того, под влиянием остаточных напряжений уменьшается стойкость металла против коррозии, пластичность и увеличивается сопротивление деформации. Остаточные напряжения могут явиться следствием не только пластической обработки тела, но и неравномерного нагрева, охлаждения, закалки, фазовых превращений и т. п.

Остаточные напряжения можно свести к минимуму подбором соответствующего режима пластической обработки, последующей термообработкой и механическими воздействиями (обкатка, и т. п.), характер которых зависит от конкретных условий обработки данного изделия. Наиболее эффективным способом снятия остаточных напряжений является нагрев. Напряжения I и II рода снимаются частично в процессе возврата и полностью в процессе рекристаллизации, а напряжения III рода — только в процессе рекристаллизации.

Вычисление напряжений, вызываемых дислокациями, позволяет дать новую трактовку теории остаточных напряжений, так как именно дислокации являются главным их источником. При этом по-новому ставится вопрос о классификации внутренних напряжений.

Напряжения от одной дислокации уменьшаются по закону  $1/\rho$ , где  $\rho$  — расстояние от ядра дислокации. Если по условиям пластической деформации в большей по сравнению с размерами зерна области накапливается избыток дислокаций какого-нибудь одного знака, то поля отдельных дислокаций, накладываясь друг на друга, создают поле далекодействующих напряжений — остаточных напряжений I рода. Если пластическая деформация неоднородна в пределах одного или нескольких зерен, то и расстояние между группами дислокаций различных знаков, а следовательно, и эффективный размер поля внутренних напряжений также порядка размеров зерна, т. к. на больших расстояниях их поля напряжений гасаются — возникают напряжения II рода. Наконец, при совершенно неоднородной деформации поле напряжений от дислокаций эффективно только на расстояния порядка расстояний между дислокациями. Такие напряжения эквивалентны напряжениям III рода.

## **5. Решение задач с использованием гипотезы плоских сечений**

При решении многих задач обработки металлов давлением вводятся еще большие упрощения по сравнению с теми, которые были описаны в предыдущих пунктах. Для решения этих задач в качестве одной из основных гипотез используют гипотезу плоских сечений. Согласно этой гипотезе, плоские сечения, проведенные через тело до деформации, остаются плоскими в течение всего процесса деформации. Соседние сечения могут в процессе деформации пере-

мещаться или поворачиваться относительно друг друга, но не искажаются, остаются плоскими.

В цилиндрической системе координат вместо плоских сечений используют параллельные криволинейные сечения. Но это не меняет существа гипотезы, потому что в направлении, перпендикулярном оси, сечения тела все же остаются плоскими. Легко убедиться, что аналогичное положение имеет место и в сферической системе координат.

Мы уже знаем из гл. IV, что если используют гипотезу плоских сечений, то полагают, что компоненты тензора напряжений зависят только от одной из координат.

Для решения таких задач достаточно использовать лишь одно уравнение равновесия, исключив из рассмотрения два других. Но число неизвестных равно трем:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . В качестве второго уравнения используют условие пластичности.

Третье уравнение обычно заменяется соотношением связывающим какое-либо из нормальных напряжений ( $\sigma_y$  или  $\sigma_x$ ) с касательными напряжениями  $\tau_{xy}$ . В некоторых частных случаях касательное напряжение считают равным нулю. При этом уравнения равновесия записываются в упрощенном виде, что, разумеется, значительно облегчает и решение самой задачи.

Поясним все сказанное подробнее. Пусть мы хотим решить задачу в прямоугольных координатах и в предположении, что справедлива гипотеза плоских сечений так, что напряжения зависят только от координаты  $x$ .

Предположение о том, что напряжения от координаты  $y$  не зависят, равносильно предположению о том, что вдоль оси  $y$  напряжения постоянны. Учитывая это, спроектируем на ось  $x$  все силы, действующие на выделенный из тела элемент (рис. 52):

$$\sigma_x h - (\sigma_x + d\sigma_x) h - 2\tau_{xy} dx = 0.$$

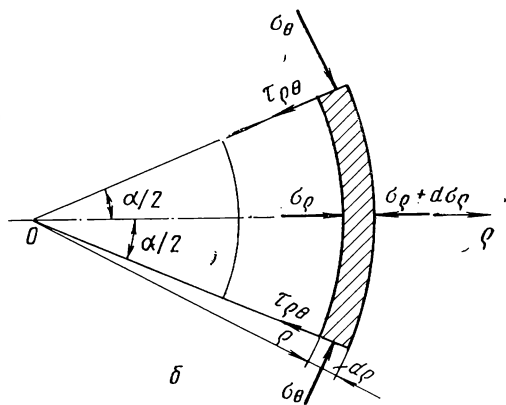
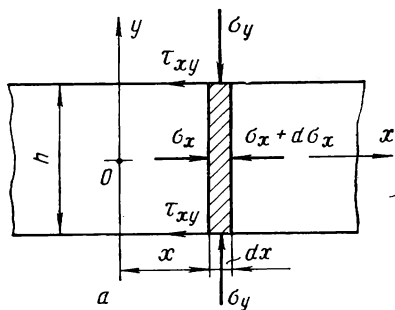


Рис. 52. Схемы к выводу уравнений равновесия в прямоугольной (а) и цилиндрической (б) системах координат



Приведя подобные члены, запишем:

$$\frac{d \sigma_x}{d x} + \frac{2 \tau_{xy}}{h} = 0. \quad (194)$$

Легко убедиться, что уравнение (194) получено в предположении, что напряжения равны их средним значениям в пределах изменения координаты  $y$ . Действительно, введем в рассмотренное среднее значение напряжений  $\sigma_x$  при  $y=h=\text{const}$ :

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x d y.$$

Тогда уравнение равновесия  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$  приобретает вид

$$\frac{d}{d x} \left( \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x d y \right) + \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} d y = 0$$

$$\text{или} \quad \frac{d \bar{\sigma}_x}{d x} + \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} d \tau_{xy} = 0.$$

Интегрируя его, получим

$$\frac{d \bar{\sigma}_x}{d x} + \frac{1}{h} \left[ (\tau_{xy})_{\frac{h}{2}} - (\tau_{xy})_{-\frac{h}{2}} \right] = 0.$$

Учитывая, что  $\tau_{xy}$  нечетная функция от  $y$ , для которой  $(\tau_{xy})_{\frac{h}{2}} = -(\tau_{xy})_{-\frac{h}{2}}$ , приходим к уравнению

$$\frac{d \bar{\sigma}_x}{d x} + \frac{2}{h} (\tau_{xy})_{\frac{h}{2}} = 0.$$

Опуская знак средней величины и индекс  $h/2$ , получим уравнение (194). Уравнение (194) легко получить и из решения (171), что и рекомендуется проделать читателю в качестве упражнения.

Таким образом, по существу вводится допущение о том, что на напряжения на поверхностях контакта инструмента с деформируемым телом равны их средним по высоте тела значениям.

В результате система уравнений, которую приходится решать включает упрощенное уравнение равновесия, условие пластичности

в его приближенной форме и уравнение связи между нормальным и касательным напряжением на поверхностях контакта:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2}{h} \tau_{xy} = 0; \quad \sigma_x - \sigma_y = \nu K \text{ или } \sigma_x - \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = \Phi(\sigma_y). \quad (195)$$

Запись условия пластичности берется в приближенной форме и вполне оправдано для принятых допущений. Использование более точного условия усложнило бы решение задачи, не увеличивая практически точность.

На основании опытов установлено, что в зависимости от условий деформации могут существовать следующие четыре типа функций, характеризующих связь между касательными и нормальными контактными напряжениями<sup>1</sup>:

$$\tau_{xy} = \mu \sigma_y; \quad \tau_{xy} = \mu K; \quad \tau_{xy} = K/2; \quad \tau_{xy} = \mu K \frac{x}{h}. \quad (196)$$

В этих равенствах  $\mu$  — коэффициент трения, предельное значение которого, в соответствии с основными представлениями теории пластичности, равно  $1/2K$ ,  $h$  — высота деформируемого тела,  $x$  — расстояние рассматриваемой точки на поверхности контакта от начала координат.

**Пример 4.** Определить напряжения, возникающие при сжатии полосы между шероховатыми плитами, если на поверхности контакта действуют силы трения  $\tau_{xy} = \mu \sigma_y$ . Полоса симметрична относительно вертикальной оси  $y$ ; уравнения (195) для данного случая принимают вид:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2}{h} \tau_{xy} = 0; \quad \sigma_x - \sigma_y = \nu K; \quad \tau_{xy} = \mu \sigma_y. \quad (197)$$

С использованием второго и третьего из этих равенств уравнение равновесия запишется в таком виде:

$$\frac{d\sigma_y}{dx} + \frac{2\mu}{h} \sigma_y = 0$$

$$\text{или } \frac{d\sigma_y}{\sigma_y} = -\frac{2\mu}{h} dx.$$

$$\text{Отсюда: } \ln \sigma_y = -\frac{2\mu}{h} x + \ln c \text{ и } \sigma_y = c e^{-\frac{2\mu}{h} x} \quad \text{③}$$

При  $x=l/2$  имеем  $\sigma_x=0$  и из условия пластичности  $\sigma_y = -\nu K$ , откуда следует, что  $\sigma_y$  — сжимающее напряжение. Поэтому допустим, что  $\nu = +1$  и получим  $\sigma_y = -K$ . Таким образом, константа  $c = -K e^{\frac{2\mu}{h} \frac{l}{2}}$ . Подставляя это значение константы в исходное уравнение, имеем

$$\sigma_y = -K e^{2\mu \frac{l}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right)}$$

<sup>1</sup> Унксов Е. П. Инженерная теория пластичности. М., Машгид, 1959 328 с. и ил.

Принимая во внимание два последние равенства системы (197), получим такие выражения напряжений при сжатии шероховатой полосы:

$$\frac{\sigma_y}{K} = -e^{2\mu} \frac{l}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right); \quad \frac{\sigma_x}{K} = 1 - e^{2\mu} \frac{l}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right);$$

$$\frac{\tau_{xy}}{K} = \pm \mu e^{2\mu} \frac{l}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right). \quad (198)$$

В последнем равенстве знаки «плюс» и «минус» условны; они означают лишь, что направление касательных напряжений на поверхности контакта справа от оси симметрии совпадает с положительным направлением оси  $x$ , а слева от оси симметрии эти направления противоположны.

Если отношение длины полосы к ее высоте  $\frac{l}{h} < 1$ , то имеем право написать:

$$e^{2\mu} \frac{l}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right) \cong 1 + 2\mu \frac{l}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right);$$

$$\mu e^{2\mu} \frac{l}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right) \cong \mu + 2\mu^2 \frac{l}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right) \approx \mu.$$

В этом случае уравнение (198) приобретает вид:

$$\frac{\sigma_y}{K} = - \left[ 1 + 2\mu \frac{l}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right) \right]; \quad \frac{\sigma_x}{K} = + 2\mu \frac{l}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right);$$

$$\frac{\tau_{xy}}{K} = \pm \mu. \quad (199)$$

Если условие пластичности было бы взято в форме  $\sigma_x - \sigma_y = 0$ , то мы бы получили:

$$\frac{\sigma_y}{K} = \frac{\sigma_x}{K} = - \left[ 1 + 2\mu \frac{l}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right) \right]; \quad \frac{\tau_{xy}}{K} = \pm \mu. \quad (200)$$

Возьмем теперь первое и третье равенства системы (199) и запишем их в таком виде:

$$\frac{\sigma_y}{K} = - \left[ 1 + 2\mu \frac{l}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right) \right] = - \left[ 1 + 2\mu \frac{l}{h} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right) \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{l}}{\frac{1}{2} + \frac{x}{l}} \right];$$

$$\frac{\tau_{xy}}{K} = \pm \mu = \pm \mu \frac{2x}{l} \frac{l}{2x}.$$

Допуская в знаменателе последних сомножителей  $x = \frac{l}{2}$  получим:

$$\frac{\sigma_y}{K} = - \left\{ 1 + 2\mu \frac{l}{h} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right] \right\}; \quad \frac{\sigma_x}{K} = - 2\mu \frac{l}{h} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right];$$

$$\frac{\tau_{xy}}{K} = \pm \mu \frac{2x}{l}. \quad (201)$$

Решения (199) и (201) можно найти, и непосредственно интегрируя систему (195), считая в первом случае  $\tau_{xy} = \mu K$ , а во втором

$$\tau_{xy} = \mu K \frac{2x}{l}.$$

На рис. 53 представлены эпюры напряжений, построенные с использованием уравнений (198), (199), (201). На этих эпюрах ясно видно, как зависят характер и величина напряжения от принятого в расчете закона трения.

При решении задач в цилиндрической системе координат упрощенные уравнения равновесия можно получить из тех же предпосылок, что и в случае прямоугольной системы координат.

Проектируя все силы на направление оси  $\rho$  (см. рис. 52, б) будем иметь:

$$\sigma_{\rho} \rho \alpha - (\sigma_{\rho} + d\sigma_{\rho}) (\rho + d\rho) \alpha - 2\tau_{\rho\theta} d\rho \cos \frac{\alpha}{2} + 2\sigma_{\theta} d\rho \sin \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Раскрывая скобки, приводя подобные члены и пренебрегая малыми высшего порядка, получим уравнения равновесия в упрощенном виде. Тогда система уравнений, которую приходится разрешать в цилиндрических координатах, принимает вид:

$$\frac{d\sigma_{\rho}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho\alpha} = 0; \quad \sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} = \nu K \text{ или } \sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} = 0; \quad \tau_{\rho\theta} = \Phi(\sigma_{\theta}). \quad (202)$$

Приведенные данные дают представление о тех достаточно грубых допущениях, которые имеют место при использовании гипотезы плоских сечений. Решенные выше задачи 1 и 2 по определению напряжений в толстостенном цилиндре, подвергнутом внутреннему давлению, являются по существу примером решения задачи в цилиндрических координатах на основе гипотезы плоских сечений. В самом деле, система уравнений

$$\frac{d\sigma_{\rho}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} = 0; \quad \sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} = \nu K$$

использованная при решении задач 1 и 2, представляет собой упрощенную запись системы (202) и предполагает, что меридианальные сечения цилиндра в процессе деформации остаются плоскими.

При известных граничных условиях, используя ту или иную гипотезу (идеальная пластичность, близость направлений главных и произвольно выбранных осей и т. п.), всегда можно тождественно удовлетворить и уравнение пластичности.

Таким образом, если граничные условия тождественно удовлетворяются в данной точке или сечении, то в этой точке или сечении тождественно удовлетворяются все основные уравнения теории пластичности.

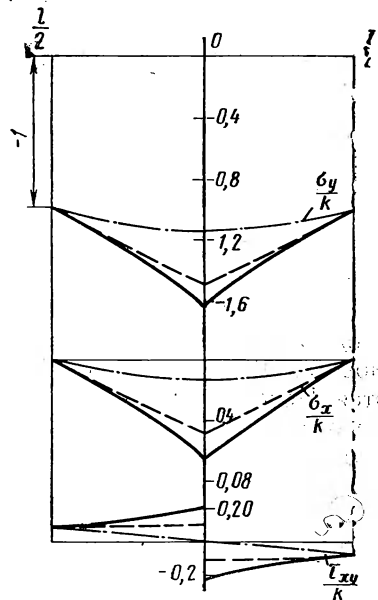


Рис. 53. Эпюры напряжений, рассчитанные по формулам: сплошные — по (198); штриховые — по (199); штрих-пунктирные — по (201);  $\mu = 0,125$ ;  $l/h = 2$

## 6. Замечание о приближенном решении плоской задачи

Примем функцию напряжений в следующем виде:

$$\varphi = -\frac{1}{m^2} (c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) (Ae^{my} - Be^{-my}) + \int \Phi(x) dx + \int \Phi_1(y) dy, \quad (203)$$

где

$$\Phi(x) = \int f(x) dx; \quad \Phi_1(y) = \int f_1(y) dy.$$

Отсюда:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{m} (c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}) (Ae^{my} - Be^{-my}) + \int f(x) dx;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{m} (c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}) (Ae^{my} + Be^{-my}) + \int f_1(y) dy.$$

Учитывая систему (173), получим уже известные из пункта 2 формулы (170):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = (c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}) (Ae^{my} + Be^{-my}); \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -(c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) (Ae^{my} - Be^{-my}) + f(x); \\ \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -(c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) (Ae^{my} - Be^{-my}) + f_1(y). \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

Подстановкой этих выражений в дифференциальное уравнение равновесия (32) легко убедиться, что они тождественно удовлетворяются. Используя физические уравнения (25), убедимся, что уравнение совместности (100) выражениями (204) тождественно удовлетворяться не будут.

Известно, что функции типа (203) не могут быть интегралами гармонического уравнения. Следовательно, функция (203) не дает точного решения плоской задачи теории упругости. Можно показать, однако, что решение (170) представляет собой приближенное решение плоской упругой задачи, если принять, что сдвиги  $e_{xy}$  малы по сравнению с относительными деформациями  $e_{xx}$  и  $e_{yy}$ . При этом условии уравнение совместности (100) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 0.$$

Если принять условие постоянства объема, то для плоской деформации ( $e_{zz}=0$ ) получим  $e_{xx} = -e_{yy}$  и уравнение совместности запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = 0.$$

Это уравнение можно решить таким же образом, что и уравнение (167). В результате получим:

$$e_{xx} = (c'_1 e^{mx} + c'_2 e^{-mx}) (A' e^{my} + B' e^{-my}) \quad (205)$$

и из условия постоянства объема

$$e_{yy} = - (c'_1 e^{mx} + c'_2 e^{-mx}) (A' e^{my} + B' e^{-my}). \quad (206)$$

Физическое уравнение:  $e_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_x - m (\sigma_y + \sigma_z)]$  в случае плоской деформаций и условия постоянства объема приобретает вид:

$$e_{xx} = \frac{3}{4E} (\sigma_x - \sigma_y) \text{ или, принимая во внимание равенство (170):}$$

$$e_{xx} = \frac{3}{4E} [f_1(y) - f(x)]. \quad (207)$$

Аналогичным путем получим

$$e_{yy} = - \frac{3}{4E} [f_1(y) - f(x)].$$

На основании уравнений (205) и (206) из этих равенств следует:

$$f_1(y) - f(x) = \frac{4E}{3} (c'_1 e^{mx} + c'_2 e^{-mx}) (A' e^{my} + B' e^{-my}). \quad (208)$$

Функции  $f_1(y)$  и  $f(x)$  определяются из граничных условий. Рассмотрим три случая:

1) пусть граничная поверхность определяется величинами  $y = h/2$   $x = l$ . В таком случае из уравнения (208) следует, что

$$f_1(y) = c'_3; \quad f(x) = c_3, \quad (209)$$

т. е. представляют собой константы;

2) пусть  $y = h/2$ , при этом функция  $f_1(y) = \text{const} = c'_3$  и

$$f(x) = c_3 - \frac{4E}{3} (c'_1 e^{mx} + c'_2 e^{-mx}) (A' e^{m \frac{h}{2}} + B' e^{-m \frac{h}{2}}); \quad (210)$$

3) пусть  $x = l$ , тогда функция  $f(x) = \text{const} = c_3$  и

$$f_1(y) = c'_3 + \frac{4E}{3} (c'_1 e^{mx} + c'_2 e^{-mx}) (A' e^{my} + B' e^{-my}). \quad (211)$$

Таким образом, если сдвиги малы по сравнению с относительными деформациями вдоль осей  $x$ ,  $y$ , то система (170) представляет собой приближенное решение плоской упругой задачи, если соблюдаются соотношения (209) и (211). Константы, входящие в эти соотношения, определяются после того, как функции  $f(x)$  и  $f_1(y)$  найдены в результате удовлетворения граничных условий по напряжениям. Константы можно найти и непосредственно по заданным перемещениям точек граничных поверхностей.

Итак, равенства (170) представляют собой приближенное решение плоской упругой задачи. Если мы воспользуемся условием пластичности  $\sigma_x - \sigma_y = \nu K$ , то получим известное уже нам решение

(171) плоской задачи теории пластичности. Будем считать в равенствах (204) координату  $y$  равной любому постоянному, значению, например  $y = h/2$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= (c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}) \left( A e^{\frac{mh}{2}} + B e^{-\frac{mh}{2}} \right); \\ \sigma_y &= - (c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) \left( A e^{\frac{mh}{2}} - B e^{-\frac{mh}{2}} \right) + f(x); \\ \sigma_x &= - (c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) \left( A e^{\frac{mh}{2}} - B e^{-\frac{mh}{2}} \right) + c. \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

Легко убедиться, что такая операция эквивалентна внесению в плоскую задачу дополнительной гипотезы — гипотезы плоских сечений. Действительно, возьмем приближенное уравнение равновесия, полученное с использованием этой гипотезы:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2}{h} \tau_{xy} = 0. \quad (213)$$

Принимая во внимание систему (212), получим из уравнения (213)

$$-m \left( A e^{\frac{mh}{2}} - B e^{-\frac{mh}{2}} \right) + \frac{2}{h} \left( A e^{\frac{mh}{2}} + B e^{-\frac{mh}{2}} \right) = 0.$$

$$\text{Отсюда } m = \frac{2}{h} \frac{A e^{\frac{mh}{2}} + B e^{-\frac{mh}{2}}}{A e^{\frac{mh}{2}} - B e^{-\frac{mh}{2}}}. \quad (214)$$

Если  $\frac{A e^{\frac{mh}{2}} + B e^{-\frac{mh}{2}}}{A e^{\frac{mh}{2}} - B e^{-\frac{mh}{2}}} = 1$ , то мы приходим к приближенному уравнению равновесия (213). Заметим, что приближенное уравнение равновесия в виде:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + m \tau_{xy} = 0,$$

которое выведено с использованием гипотезы плоских сечений, можно получить при любом значении  $y$ , лишь бы оно представляло собой константу. Описанные связи открывают большие возможности для приближенного решения многих задач теории упругости и пластичности, представляющих интерес для теории обработки металлов давлением.

Рассмотрим два важных для последующего изложения вывода.

1. Принимая во внимание непрерывность тела, можно допустить, что если уравнения теории пластичности удовлетворяются в данной точке или множестве точек, то уравнения теории пластичности приближенно удовлетворяются и в окрестности этих точек. Это дает нам право, решив по возможности точно задачу для данной точки или сечения, экстраполировать результат и на соседние точки.

2. Решения задач с использованием гипотезы плоских сечений являются точными в пределах принятых допущений, если связь между касательными и нормальными напряжениями на граничных поверхностях выбрана правильно. В результате решения задач, исходя из гипотезы плоских сечений, получают достаточно правдоподобный закон распределения контактных напряжений. Однако при указанном методе решения задач закон распределения внутренних сил оказывается аналогичным закону распределения сил на поверхности контакта, что является в ряде случаев уже слишком грубым допущением.

Вместе с тем при этом получается, что соответствующие контактные напряжения оказываются равными их средним по высоте сечения значениям. Это обстоятельство следует из условия статики и является надежной гарантией правомерности использования гипотезы плоских сечений для расчета контактных напряжений.

На основании изложенного становится ясным, что при решении задач теории обработки металлов давлением с успехом можно использовать гипотезу плоских сечений для отыскания математической формулировки связей, характеризующих напряжения на контактных поверхностях деформируемого тела с инструментом. Затем эти связи можно применять в качестве граничных условий для определения напряжений внутри тела, используя дифференциальные уравнения равновесия для двумерных задач.

Пример 5. Определить контактные напряжения при сдавливании упругой полосы жесткими штампами. Полоса имеет длину  $2l$ .

Из теории упругости известно [3], что при давлении полосы на упругую полуплоскость нормальное контактное напряжение равно:

$$\sigma_y = \frac{p}{\pi \sqrt{l^2 - x^2}}.$$

Таким образом, наименьшее напряжение имеет место в центре штампа при  $x=0$ . При  $x=l$  напряжение  $\sigma_y$  бесконечно велико. В действительности напряжения у краев штампа имеют конечную величину, так как здесь под действием больших напряжений возникают пластические деформации.

Воспользуемся для решения этой упруго-пластической задачи равенствами (170). Будем считать, что  $f(x)=f_1(y)=0$ . При изменении  $x$  от 0 до  $l$  напряжения  $\sigma_y$  только возрастают. Поэтому следует предположить, что  $c_2=0$ . Нам интересуют только напряжения на поверхности контакта. Поэтому примем  $y=h/2$ . В этом случае равенства (170) имеют следующий вид:

$$\tau_{xy} = c_1 \left( Ae^{\frac{mh}{2}} + Be^{-\frac{mh}{2}} \right) e^{mx}; \quad \sigma_x = \sigma_y = -c_1 \left( Ae^{\frac{mh}{2}} - Be^{-\frac{mh}{2}} \right) e^{mx}. \quad (215)$$

Поскольку в точках контакта с углами штампа металл переходит в пластическое состояние, то граничные условия запишутся как  $x=l$ ;  $\sigma_y = -K$ ;  $\tau_{xy} = \pm K/2$ . Поэтому

$$c_1 \left( Ae^{\frac{mh}{2}} + Be^{-\frac{mh}{2}} \right) e^{me} = \pm \frac{K}{2}; \quad c_1 \left( Ae^{\frac{mh}{2}} - Be^{-\frac{mh}{2}} \right) e^{me} = -K.$$



Отбрасывая в первом равенстве знак плюс и производя почленное деление, получаем

$$\frac{Ae^{\frac{mh}{2}} + Be^{-\frac{mh}{2}}}{Ae^{\frac{mh}{2}} - Be^{-\frac{mh}{2}}} = \frac{1}{2} \quad \text{и на основании формулы (214) } m=1/h.$$

Таким образом, выражения для компонент в тензоре напряжений (216) будут иметь вид:

$$\frac{\tau_{xy}}{K} = \frac{1}{2} e^{\frac{l}{h} \left( \frac{x}{l} - 1 \right)}; \quad \frac{\sigma_x}{K} = \frac{\sigma_y}{K} = -e^{\frac{l}{h} \left( \frac{x}{l} - 1 \right)}. \quad (216)$$

Максимальное скалывающее напряжение, согласно выражению (44), равно  $\frac{\tau}{K} = \frac{\tau_{xy}}{K}$ . На рис. 54, а, б приведены эпюры контактных напряжений для двух случаев:  $l/h=1$  и  $l/h=2$ , пост-

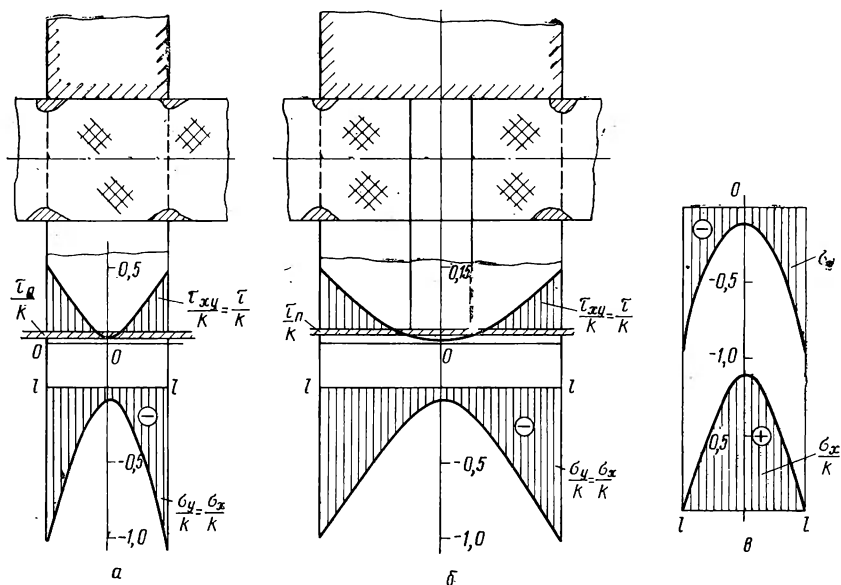


Рис. 54. Эпюры напряжений, возникающих при сжатии полосы жесткими штампами: а —  $l/h=1$ ; б —  $l/h=29$ ; в — в пластической зоне при  $l/h=1$

роенные с использованием формул (216). Здесь же показана полоса возможных значений критического скалывающего напряжения  $\tau_n/K$ , при котором начинается движение дислокаций (см. гл. I), т. е. пластическая деформация. Из рисунка следует, что при  $l/h=1$ , если в точках контакта с углами штампа возникли заметные пластические деформации, определяемые вынужденным пределом текучести  $K$ , то и во всей приконтактной области можно обнаружить следы движения дислокаций по их плоскостям скольжения, как это схематически показано на рисунке. При

$l/h=2$  в средней части по ширине контактной поверхности напряжения уменьшаются и становятся меньше скалывающих напряжений  $\tau_n$ . Движение дислокаций происходит еще не может и поэтому здесь в приконтактной области следы скольжения отсутствуют. Это хорошо подтверждается опытами. Подставляя в решение (216) условие пластичности  $\sigma_x - \sigma_y = K$ , получим (см. рис. 54, в)

$$\frac{\tau_{xy}}{K} = -\frac{1}{2} e^{\frac{l}{h}} \left( \frac{x}{l} - 1 \right); \quad \frac{\sigma_y}{K} = -e^{\frac{l}{h}} \left( \frac{x}{l} - 1 \right); \quad \frac{\sigma_x}{K} = 1 - e^{\frac{l}{h}} \left( \frac{x}{l} - 1 \right)$$

## 7. Теория пластического течения

На рис. 55 изображены кривые, характеризующие зависимость относительного удлинения при растяжении образцов из стали от времени при разных температурах (а) и нагрузках (б). Из графиков следует, что удлинение и в одном, и в другом случаях растет с течением времени. Это явление получило название ползучести, а кривые, подобные изображенным на рис. 55, — кривые ползучести. Явление ползучести имеет важное значение в технике: от характера и величины ползучести зависят срок службы и надежность работы различных механизмов.

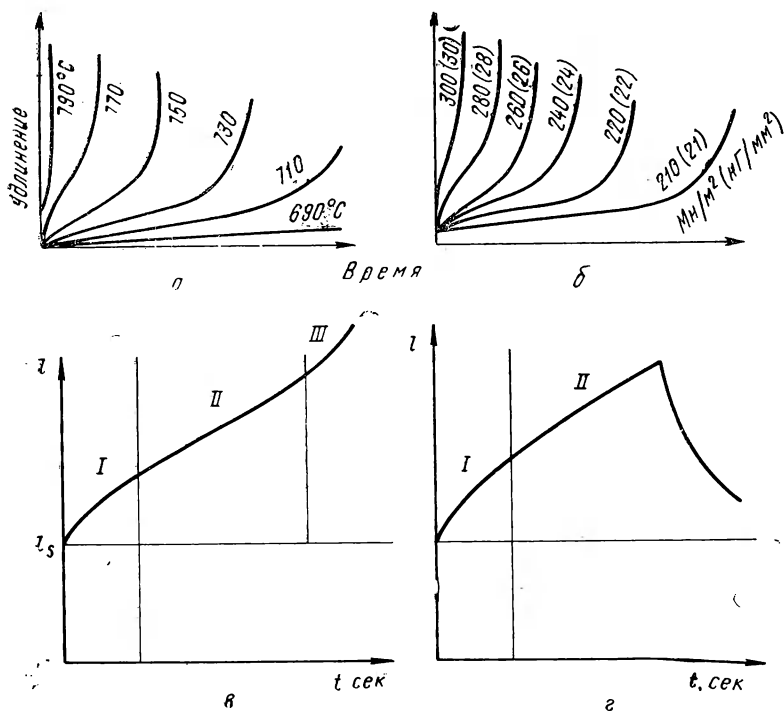


Рис. 55. Зависимость удлинения при растяжении образцов из стали от времени при разных температурах (а), нагрузках (б), характерные участки кривых ползучести при нагружении (в) и последующей разгрузке (г)

Как следует из рис. 55, в, кривая ползучести имеет три характерных участка. На участке I скорость размножения дислокаций больше скорости их аннигиляции, и поэтому связь между временем и удлинением нелинейна. Участок II соответствует процессу установившейся ползучести, т. е. линейной зависимости между временем и удлинением. На участке III между временем и деформацией снова имеет место нелинейная зависимость — происходит лавинообразное размножение дислокаций с последующим образованием трещин и разрушением образца. Если на участке II снять нагрузку, то диаграмма ползучести приобретает вид, изображенный на рис. 55, з.

Теория пластического течения возникла, в частности, в связи с необходимостью количественно описать процесс установившейся ползучести. Кроме того, в последнее время ее уравнения часто используют для решения задач теории пластичности так называемыми вариационными методами.

В основу теории пластического течения положены уравнения, связывающие напряжения и скорости деформации. Уравнения теории пластического течения могут быть записаны аналогично уравнениям теории малых упруго-пластических деформаций.

Обозначим компоненты скорости смещения частицы, находящиеся в момент времени  $t$  в точке  $x, y, z$ , так:

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t}; \quad \dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Тогда компоненты скорости самой деформации запишутся так:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \text{ и т. д.}$$

В теории пластического течения принимают, что: а) направления главных напряжений и направления скоростей главных деформаций совпадают; б) материал в пластическом состоянии несжимаем; в) максимальные касательные напряжения пропорциональны скорости максимальных сдвигов; г) обобщенное напряжение есть определенная функция скорости обобщенной деформации.

Ввиду полной аналогии с теорией малых упруго-пластических деформаций, основные уравнения теории пластического течения включают в себя: три уравнения равновесия, шесть уравнений, связывающих скорости смещения со скоростями деформаций, шесть физических соотношений, связывающих напряжения со скоростями деформаций, выражение для обобщенного напряжения, выражение для скорости обобщенной деформации, уравнение, связывающее обобщенное напряжение с обобщенной скоростью деформации.

В результате имеем следующую совокупность уравнений теории течения:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \quad (217)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_{xx} &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}; \quad \dot{e}_{xy} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial y}; \\ \dot{e}_{yy} &= \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}; \quad \dot{e}_{xz} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial z}; \\ \dot{e}_{zz} &= \frac{\partial \dot{w}}{\partial z}; \quad \dot{e}_{zx} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x}; \end{aligned} \right\} \quad (218)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_{xx} &= \frac{1}{E''} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right]; \quad \dot{e}_{xy} = \frac{1}{G''} \tau_{xy}; \\ \dot{e}_{yy} &= \frac{1}{E''} \left[ \sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z) \right]; \quad \dot{e}_{yz} = \frac{1}{G''} \tau_{yz}; \\ \dot{e}_{zz} &= \frac{1}{E''} \left[ \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right]; \quad \dot{e}_{zx} = \frac{1}{G''} \tau_{zx}; \end{aligned} \right\} \quad (219)$$

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2} + \dots$$

$$\dots \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}; \quad (220)$$

$$\dot{e}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{e}_{xx} - \dot{e}_{yy})^2 + (\dot{e}_{yy} - \dot{e}_{zz})^2 + (\dot{e}_{zz} - \dot{e}_{xx})^2} + \dots$$

$$\dots \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{(\dot{e}_{xy}^2 + \dot{e}_{yz}^2 + \dot{e}_{zx}^2)}. \quad (221)$$

$$\sigma_i = \varphi(\dot{e}_i) \quad \text{или} \quad \sigma_i = E'' \dot{e}_i \quad (222)$$

$$\text{или} \quad G'' = \frac{E''}{3}. \quad (223)$$

В цилиндрической системе координат получим аналогичную совокупность уравнений.

В случае медленного и продолжительного течения пластического материала изложенная в предыдущих параграфах теория малых упруго-пластических деформаций тождественна теории пластического течения. В частности, если тело идеально пластично и деформация плоская, то приведенные уравнения сведутся к уже известным нам уравнениям (164).

При линейном законе связи между обобщенной деформацией и временем (рис. 56, а) скорость обобщенной деформации не зависит от времени (рис. 56, б) и, в соответствии с равенством (222), обобщенное напряжение также не изменяется с течением времени (рис. 56, в).

Пример 6. Определить напряжения в стенке толстостенной трубы при установившейся ползучести материала (см. рис. 40 [3]). Деформация плоская:  $e_{zz} = 0$ .

Задача — осесимметричная, поэтому все напряжения и деформации здесь являются главными. Следовательно:

$$e_{\rho\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho}; \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{\rho}; \quad \dot{e}_{\rho\rho} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial \rho}; \quad \dot{e}_{\theta\theta} = \frac{\dot{u}}{\rho}.$$

Условие несжимаемости (постоянства секундного объема):

$$\dot{e}_{\rho\rho} + \dot{e}_{\theta\theta} + \dot{e}_{zz} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \dot{u}}{\partial \rho} + \frac{\dot{u}}{\rho} = 0.$$

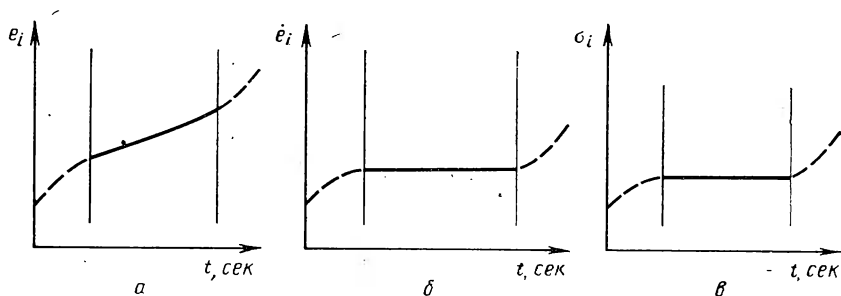


Рис. 56. Зависимость между временем и обобщенной деформацией, скоростью обобщенной деформации и обобщенным напряжением

Интегрируя, получаем

$$\frac{\partial \dot{u}}{\dot{u}} = -\frac{\partial \rho}{\rho}; \quad \ln \dot{u} = -\ln \rho + \ln c; \quad \dot{u} = \frac{c}{\rho}.$$

Таким образом:

$$\dot{e}_{\rho\rho} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial \rho} = -\frac{c}{\rho^2}; \quad e_{\theta\theta} = \frac{\dot{u}}{\rho} = \frac{c}{\rho^2}.$$

С учетом этих соотношений обобщенная скорость деформации приобретает вид:

$$\begin{aligned} e_t &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{e}_{\rho\rho} - \dot{e}_{\theta\theta})^2 + (\dot{e}_{\theta\theta} - \dot{e}_{zz})^2 + (\dot{e}_{zz} - \dot{e}_{\rho\rho})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{4\dot{e}_{\theta\theta}^2 + \dot{e}_{\theta\theta}^2 + \dot{e}_{\theta\theta}^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{6\dot{e}_{\theta\theta}^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \dot{e}_{\theta\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{c}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Обобщенное напряжение запишется как

$$\sigma_t = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2}$$

и при условии плоской деформации приобретает следующий вид:

$$\sigma_t = \nu \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\rho - \sigma_\theta) \quad (225)$$

В этом равенстве следует принять  $\nu = -1$  потому, что  $\sigma_\rho$  — сжимающее напряжение, а  $\sigma_i$  — всегда величина положительная. Уравнение равновесия  $\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0$  перепишем в виде  $\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = -(\sigma_\rho - \sigma_\theta)$  и на основании выражения (225) будем иметь

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i. \quad (226)$$

Пусть  $\sigma_i = \sigma_s \left( \frac{e_i}{e_s} \right)^n$

Здесь  $\sigma_s$  и  $e_s$  — взятые из опытов при данной скорости деформации предел текучести и предел упругой деформации. Примем  $\nu = -1$ , тогда

$$\sigma_i = \sigma_s \left( \frac{e_i}{e_s} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (227)$$

При  $n=1$  мы получим отсюда обобщенный закон упругости при данной скорости деформации, при  $n>1$  закон нелинейного упрочнения при той же скорости.

Из уравнения (227) с учетом выражения (224) получим

$$\sigma_i = \sigma_s \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{c}{e_s} \frac{1}{\rho^2} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Обозначая  $\rho_s \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{c}{e_s} \right)^{\frac{1}{n}} = A$ , найдем  $\sigma_i = A \rho^{-\frac{2}{n}}$ . В таком случае уравнение (226) примет вид:

$$d\sigma_\rho = \frac{2A}{\sqrt{3}} \rho^{-\frac{2}{n}-1} d\rho.$$

Отсюда  $\sigma_\rho = -\frac{An}{\sqrt{3}} \rho^{-\frac{2}{n}} + c_1. \quad (228)$

Граничные условия:

$$\rho = r_b; \quad \sigma_\rho = -p; \quad \rho = r; \quad \sigma_\rho = 0; \quad -p = -\frac{An}{\sqrt{3}} r_b^{-\frac{2}{n}} + c_1;$$

$$0 = -\frac{An}{\sqrt{3}} r^{-\frac{2}{n}} + c_1.$$

Из последних двух уравнений следует, что

$$A = \frac{\sqrt{3} p}{n \left( r_b^{-\frac{2}{n}} - r^{-\frac{2}{n}} \right)}; \quad c = \frac{p r^{-\frac{2}{n}}}{\left( r_b^{-\frac{2}{n}} - r^{-\frac{2}{n}} \right)}.$$

Подставляя в уравнение (228) значения констант, получим

$$\sigma_p = -p \frac{1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{2}{n}}}{1 - \left(\frac{r}{r_b}\right)^{\frac{2}{n}}}. \quad (229)$$

Из уравнения равновесия имеем:

$$\sigma_\theta = \sigma_p + \rho \frac{d\sigma_p}{d\rho},$$

$$\text{откуда } \sigma_\theta = p \frac{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{2}{n}} \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 - \left(\frac{r}{r_b}\right)^{\frac{2}{n}}}. \quad (230)$$

При  $n=1$  равенства (229) и (230) сводятся к решению упругой задачи о напряжениях в толстостенной трубе (см. гл. IV).

## 8. Метод характеристик

В основе метода характеристик лежит понятие о линиях скольжения. Впервые предложение об использовании линий скольжения для оценки напряженного состояния высказал еще Д. К. Чернов.

Если известно напряженное состояние в главных осях, то компоненты тензора напряжений можно найти в любой произвольной координатной системе. Для этого воспользуемся формулами (38), которые устанавливают связь между напряжениями на площадке с нормалью и напряжениями в произвольной системе координат  $x, y$ , с которой площадка образует угол  $\varphi$ :

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi;$$

$$\tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.$$

Пусть новая координатная ось  $x$  (рис. 57) составляет угол  $\varphi$  с осью  $1$ . Тогда, рассматривая ось  $x$  есть нормаль к наклонной площадке  $AB$ , имеем для последней

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi.$$

$$\text{Но } \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \sigma; \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{12},$$

поэтому  $\sigma_x = \sigma + \tau_{12} \cos 2\varphi$ .

Новая ось  $y$  будет наклонена к оси  $I$  на угол  $\varphi + \pi/2$ . Следовательно, заменяя в предыдущем уравнении  $\varphi$  на  $(\varphi + \pi/2)$ , получим

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi; \quad \sigma_y = \sigma - \tau_{12} \cos 2\varphi.$$

Поскольку  $\tau_n = \tau_{xy}$ , напряжение  $\tau_{xy}$  будет определяться по формуле

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi \quad \text{или} \quad \tau_{xy} = \\ = -\tau_{12} \sin 2\varphi.$$

Когда начинается пластическая деформация, то касательное напряжение  $\tau_{12} = \kappa$ . Итак, компоненты тензора напряжений, являющиеся функцией угла  $\varphi$ , имеют следующий вид:

$$\sigma_x = \sigma + k \cos 2\varphi; \quad \sigma_y = \sigma - k \cos 2\varphi; \quad \tau_{xy} = \\ = k \sin 2\varphi. \quad (231)$$

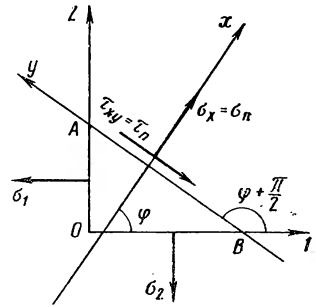


Рис. 57. Схема к выводу уравнений (231)

Заметим, что при  $\varphi = \pi/4$  имеем  $\tau_{xy} = \kappa$  и  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ .

Пусть тело находится в условиях плоской деформации. Возьмем любую его точку  $a$  и отложим вектор  $\tau_1$  главного касательного напряжения, начало которого лежит в этой точке (рис. 58, а). Перейдем в направлении этого вектора к точке  $a_2$ , близкой к точке  $a_1$ . От точки  $a_2$  отложим вектор  $\tau_2$  главного касательного напряжения в этой точке. Вообще говоря, вектор  $\tau_2$  будет отличаться от вектора  $\tau_1$  и по величине и по направлению. В результате получим линию  $a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$  и т. д.

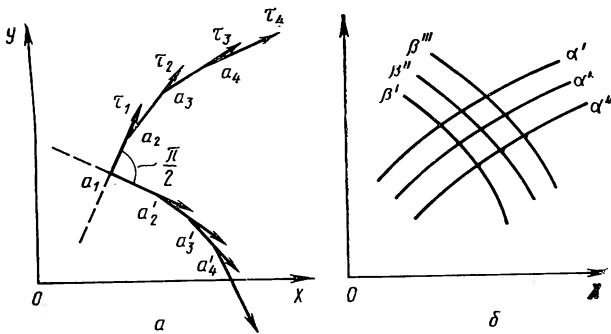


Рис. 58. Линии скольжения (а) и их семейства (б)

Принимая во внимание условие парности касательных напряжений, можно отложить от точки  $a_1$  второй вектор  $\tau_1$ , перпендикулярный к ранее отложенному. Поэтому аналогичным способом можно построить вторую ломаную линию  $a'_1 a'_2 a'_3 a'_4 \dots$  и т. д. В точке  $a$  линии пересекаются под углом  $90^\circ$ . Эти линии могут быть продолжены и по другую сторону от точки  $a_1$ .



При неограниченном сближении точек  $a$  ломаные линии превратятся в плавные кривые, которые называются траекториями главных касательных напряжений или линиями скольжения. Из любой точки тела можно начать построение других линий скольжения. В результате получим криволинейную ортогональную сетку линий скольжения, состоящую из двух семейств (рис. 58, б). Для разных напряженных состояний сетки будут различны, но вполне определенны.

Касательные к линиям скольжения в любой точке будут совпадать с направлениями главных касательных напряжений и пе-

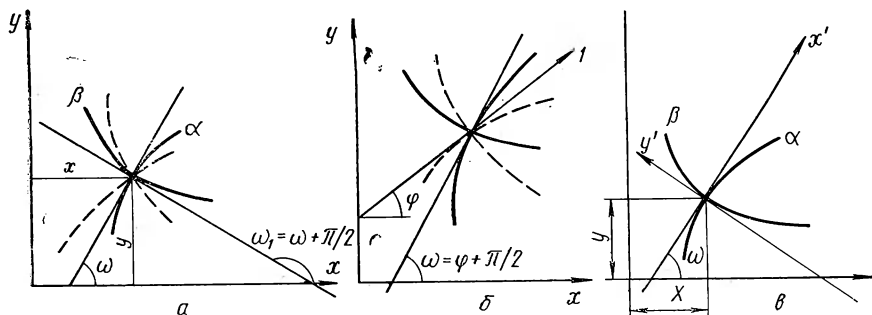


Рис. 59. Схемы к выводу:

$a$  — уравнений линий скольжения;  $б$  — уравнений (232);  $в$  — уравнений Генки

ресекать ось  $x$  под углом  $\omega$  и  $\omega_1 = \omega + \pi/2$  (рис. 59,  $a$ ). Эти углы будут плавно изменяться при переходе от одной точки к другой. Непосредственно из рисунка следует, что для семейств линий скольжения имеем:  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \omega$ ;  $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \omega$ .

Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения линий скольжения. Так же как было проведено построение сетки линий скольжения, можно построить ортогональную сетку траекторий главных нормальных напряжений. Эти траектории будут пересекать линии скольжения под углом  $\pi/4$  (пунктир на рис. 59,  $a$ ), поскольку главные касательные напряжения направлены под углом  $45^\circ$  к главным нормальным.

Из рис. 59 следует, что угол  $\varphi$  характеризует направление главных нормальных напряжений, а угол  $\omega$  характеризует направление максимальных касательных напряжений. Поэтому эти углы связаны между собой следующими зависимостями:  $\omega = \varphi + \pi/4$ ;  $\varphi = \omega - \pi/4$ .

Подставляя значения углов в систему (217), получим:

$$\sigma_x = \sigma + k \sin 2\omega; \quad \sigma_y = \sigma - k \sin 2\omega; \quad \tau_{xy} = +k \cos 2\omega. \quad (232)$$

Очень важно, что эти выражения тождественно удовлетворяют условию пластичности:  $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$ , в чем легко убедиться соответствующей подстановкой. Поэтому в дальнейшем,

оперируя этими выражениями, можно исключить из рассмотрения условие пластичности, поскольку последнее будет удовлетворяться при любых значениях  $\omega$ .

На основании выражений (232) уравнения равновесия (32) для плоской задачи приобретают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2k \left( \cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} + \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) &= 0; \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k \left( \cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y} - \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (233)$$

Уравнения (232) удобно записать в криволинейной системе координат  $\alpha, \beta$ , если за эту систему принять сетку линий скольжения. Каждая пара криволинейных координат  $\alpha, \beta$  определяет положение точки на плоскости.

Уравнения:  $\alpha(x, y) = \alpha_0 = \text{const}$ ;  $\beta(x, y) = \beta_0 = \text{const}$  определяют на плоскости линии скольжения.

Эти уравнения выбираются так, чтобы через каждую точку проходило только по одной линии семейства  $\alpha$  и  $\beta$ . Вдоль линий  $\alpha$  координаты  $\beta$  остаются постоянными, а координаты  $\alpha$  изменяются. Вдоль линий  $\beta$  координаты  $\alpha$  неизменны, а координаты  $\beta$  изменяются подобно тому, как это имеет место в прямоугольной системе координат.

Расположим начало координат системы  $xu$  в произвольной точке  $O$  пересечения двух линий скольжения (рис. 59, в) и направим оси  $x, y$  по касательным  $x', y'$  к пересекающейся в данной точке паре линий скольжения. Уравнения (232) и уравнения равновесия (233) при этом остаются в силе, так как при их выводе направление осей принималось произвольным.

В бесконечно малой окрестности точки  $O$  элементы дуг системы  $\alpha, \beta$  можно считать совпадающими с касательными, по которым направлены новые оси  $x, y$ , и, следовательно, можно принять:

$$dx = d\alpha; \quad dy = d\beta; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \beta}.$$

Угол  $\omega$  теперь равен нулю потому, что координатные оси совпадают с касательными к линиям скольжения. Однако  $\partial\omega/\partial\alpha, \partial\omega/\partial\beta$  в нуль обращаться не будут, так как угол  $\omega$  изменяется вдоль криволинейных координатных направлений. В связи с этим уравнения равновесия (233) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} + 2k \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} &= 0; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} - 2k \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 0 \\ \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sigma + 2k\omega) &= 0; \quad \frac{\partial}{\partial \beta} (\sigma - 2k\omega) = 0. \end{aligned} \quad (234)$$

Интегрируя эти уравнения соответственно вдоль линий  $\alpha$  и  $\beta$ , получим так называемые интегралы уравнений пластичности, которые называют также интегралами Генки:

$$\sigma + 2k\omega = \xi(\beta); \quad \sigma - 2k\omega = \eta(\alpha). \quad (235)$$

Произвольные функции  $\xi(\beta)$  и  $\eta(\alpha)$  имеют постоянные значения при перемещении вдоль одной и той же линии скольжения соответственно системы  $\alpha$  и системы  $\beta$ .

Если бы уравнения линии скольжения  $\alpha, \beta$  были известны, то интегралы Генки представляли бы общее решение плоской задачи пластичности.

Пусть в точке  $a$  некоторого тела действует среднее напряжение  $\sigma = \sigma_a$  и линия скольжения проходит через эту точку под уг-

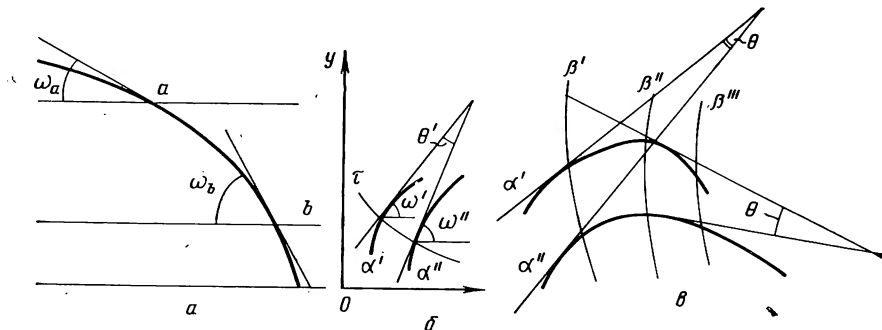


Рис. 60. Схемы к определению угла поворота линии скольжения ( $a$ ), угла между двумя линиями скольжения ( $b$ ) и угла между касательными к ним ( $v$ )

лом  $\omega_a$  (рис. 60,  $a$ ) к оси  $x$ . В точке  $b$  пусть имеем соответственно значения  $\sigma = \sigma_b$  и  $\omega = \omega_b$ .

Подставляя эти данные, например, в первое из уравнений системы (235), получим

$$\sigma_a + 2k\omega_a = \xi(\beta) = c; \quad \sigma_b + 2k\omega_b = \xi(\beta) = c,$$

откуда:  $\sigma_a + 2k\omega_a = \sigma_b + 2k\omega_b$  и аналогично:  $\sigma_a - 2k\omega_a = \sigma_b - 2k\omega_b$ ,

или

$$\sigma_a - \sigma_b = -2k(\omega_a - \omega_b); \quad \sigma_a - \sigma_b = +2k(\omega_a - \omega_b).$$

Эти два уравнения можно записать одной строкой:

$$\sigma_a - \sigma_b = \pm 2k(\omega_a - \omega_b). \quad (236)$$

Обозначим:  $\omega_a - \omega_b = \omega_{ab}$ . Тогда

$$\sigma_a - \sigma_b = \pm 2k\omega_{ab}, \quad (237)$$

откуда  $\sigma_a = \sigma_b \pm 2k\omega_{ab}$ .

Из последнего уравнения следует, что изменение среднего напряжения пропорционально углу поворота линии скольжения, причем коэффициент пропорциональности равен  $2k$ .

Таким образом, если уравнения линии скольжения известны, то интегралы уравнений пластичности позволяют легко определить среднее напряжение в любой точке  $a$  по известному среднему напряжению в другой точке  $b$ .

Продифференцировав первое из уравнений системы (234) по  $\beta$ , а второе по  $\alpha$  и вычтя почленно второе уравнение из первого получим:  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$ .

Интегрируем это уравнение сначала по  $\beta$ , а потом по  $\alpha$ :

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = f(\alpha); \quad \omega = \int f(\alpha) d\alpha + \psi(\beta).$$

Поскольку  $f(\alpha)$  — произвольная функция, то  $\int f(\alpha) d\alpha = \varphi(\alpha)$  тоже произвольная функция и, следовательно:

$$\omega = \varphi(\alpha) + \psi(\beta). \quad (238)$$

Возьмем какие-либо две линии скольжения  $\alpha'$  и  $\alpha''$  (рис. 60, б). Вдоль каждой из них координаты  $\beta$  постоянны:  $\beta' = \text{const}$ ;  $\beta'' = \text{const}$ ; поэтому  $\psi(\beta') = \text{const}$ ;  $\psi(\beta'') = \text{const}$ .

Обозначим углы наклона касательных  $\omega$  для линий  $\alpha'$  через  $\omega'$  и для линий  $\alpha''$  через  $\omega''$  (рис. 60, б). На основании (238):  $\omega' = \varphi(\alpha) + \psi(\beta')$ ,  $\omega'' = \varphi(\alpha) + \psi(\beta'')$ .

Определим угол  $\theta$  между двумя касательными линиями  $\alpha'$  и  $\alpha''$  в точках пересечения их одной и той же линией системы  $\beta$ . В этих точках значения координаты  $\alpha$  будут одинаковы. Следовательно, значения  $\varphi(\alpha)$  будут тоже одинаковыми:

$$\theta = \omega' - \omega'' = \varphi(\alpha) + \psi(\beta') - [\varphi(\alpha) + \psi(\beta'')] = \text{const}.$$

Таким образом, угол  $\theta$  имеет постоянное значение. Аналогичный результат получим для любой пары линий любого другого семейства. Итак, угол между касательными к двум линиям скольжения одного семейства в точках пересечения их линиями скольжения другого семейства остается постоянным на всем протяжении этих линий (рис. 69, в).

Это свойство линий скольжения известно под названием первой теоремы Генки. Важное следствие этой теоремы: если семейство линий скольжения содержит хотя бы одну прямую линию, то оно полностью состоит из прямых.

Линии скольжения выходят на свободную от нагрузки и контактную поверхности деформируемого тела. На свободной, а также на контактной поверхности при отсутствии сил трения касательное напряжение  $\tau_{xy} = 0$ . Отсюда получаем на основании зависимостей (232) следующие соотношения:

$$\tau_{xy} = k \cos 2\omega; \quad 0 = k \cos 2\omega; \quad \cos 2\omega = 0; \quad 2\omega = \frac{\pi}{2}; \quad \omega = \pm \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, линии скольжения обеих семейств пересекают свободную от нагрузок или контактную поверхности при отсутствии сил трения под постоянным углом  $\pi/4$  (рис. 61, а). Например, в случае одноосного растяжения линии скольжения пересекают плоский образец под углом  $\pi/4$  к его оси. Этот результат вполне согласуется с данными, полученными в гл. 3 о скальвающих напряжениях.

Если трение на поверхностях контакта деформируемого металла с инструментом достигает максимального значения, то касательное напряжение на основании формул (232) равно  $\tau_{xy} = k$ . Отсюда:  $k \cos 2\omega = k$ ;  $\cos 2\omega = 1$ ;  $\omega = 0$ ;  $\omega_1 = \omega \pm \frac{\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{2}$ .

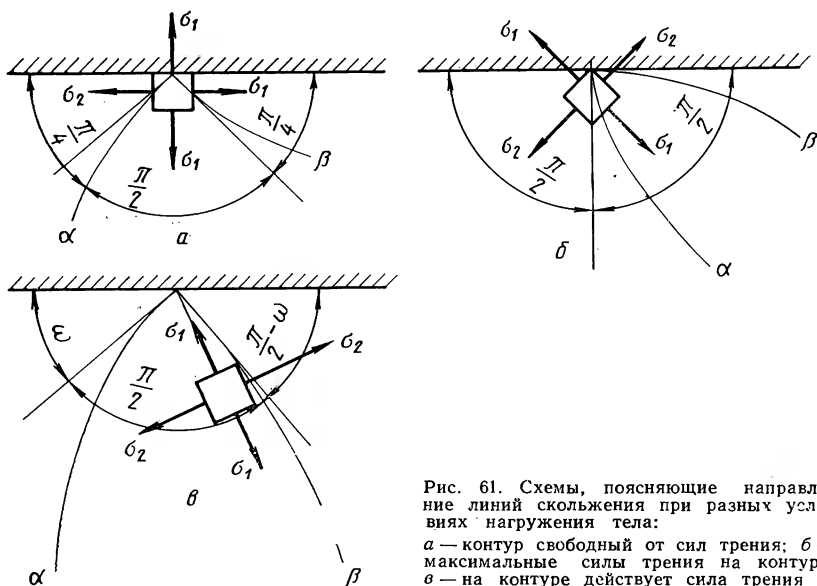


Рис. 61. Схемы, поясняющие направление линий скольжения при разных условиях нагружения тела:

*a* — контур свободный от сил трения; *б* — максимальные силы трения на контуре; *в* — на контуре действует сила трения

В этом случае контактная поверхность является огибающей для одного семейства линий скольжения, а линии другого семейства подходят перпендикулярно к этой поверхности (рис. 61,б).

При промежуточных значениях контактного касательного напряжения углы  $\omega$  будут приобретать промежуточные значения (рис. 61,б):  $0 \leq \tau_{xy} \leq k$ ;  $\pm \pi/4 \leq \omega \leq \pm \frac{\pi}{2}$ .

Следовательно, линии скольжения обладают следующими свойствами: 1) линии скольжения непрерывны; 2) они образуют два семейства; 3) семейства линий скольжения взаимно ортогональны; 4) линии скольжения пересекают траектории главных нормальных напряжений под углом  $\pi/4$ ; 5) угол между касательными к двум линиям скольжения одного семейства в точках пересечения их с линиями другого семейства остается постоянным; 6) если семейство линий скольжения содержит хотя бы одну прямую линию, то оно полностью состоит из прямых; 7) углы наклона линий скольжения при выходе на контур зависят от величины касательного напряжения на контуре и изменяются в пределах от 0 до  $\pi/2$ ; 8) изменение среднего нормального напряжения при движении вдоль линии скольжения пропорционально углу ее поворота.

В математической физике разработаны методы решения уравнений типа (233) с помощью уравнений характеристик.

Для такой системы уравнений характеристики имеют следующий вид:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg} \omega \quad \text{и} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\operatorname{ctg} \omega. \quad (239)$$

Эти уравнения представляют собой две системы ортогональных кривых, получивших название линий характеристик. Мы видим, что линии характеристик совпадают с траекториями главных касательных напряжений в плоскодеформируемом теле, т. е. с линиями скольжения. Таким образом, чтобы найти линии скольжения, достаточно определить характеристики дифференциальных уравнений пластического равновесия (233). Далее, имея уравнение линий скольжения или характеристик, можно определить напряжения в любой точке деформируемого тела.

Методом характеристик решен ряд важных задач. Однако получение решений в замкнутой форме оказывается возможным лишь при наличии предположения об отсутствии трения на поверхностях контакта. При наличии переменных касательных напряжений применяется численное интегрирование уравнений характеристик; при этом поиск общего решения заменяют определением искоемых функций в конечном числе узловых точек приближенной сетки характеристик. В результате после трудоемких вычислений можно построить график для какого-либо конкретного случая без получения наглядных данных о влиянии того или иного параметра процесса на распределение напряжений и деформации. В этом один из недостатков изложенного метода.

Однако иногда можно построить линии скольжения без решения уравнений характеристик, используя лишь геометрические особенности сеток линий скольжения. В самом деле, в общем случае для построения сетки линий скольжения мы располагаем уравнениями характеристик (239) и граничными условиями. В простейшем случае для сетки прямолинейных линий скольжения, выходящих из одной точки, и ортогональных им окружностей уравнения пластического равновесия (233), а следовательно, и уравнения характеристик (239) автоматически удовлетворяются. Поэтому такие сетки могут быть построены только на основании граничных условий.

**Пример 7.** Определить контактные напряжения, возникающие при введении плоского штампа в пластическое полупространство. Трение на поверхности контакта отсутствует.

В данном случае линии скольжения в соответствии с их свойствами образуют поле, состоящее из трех равновеликих треугольников с вершинами  $A$ ,  $B$  и  $C$  и двух веерных полей между ними, ограниченных дугами  $AB$  и  $BC$  окружностей (рис. 62).

Среднее напряжение на свободной поверхности равно

$$\sigma_b = \frac{\sigma_{xb} + \sigma_{yb}}{2}.$$

При этом  $\sigma_{yb}=0$ , следовательно,  $\sigma_b=\sigma_{xb}/2$ . Из условия пластичности  $\sigma_{xb} - \sigma_{yb}=2vk$  при  $\sigma_{yb}=0$  получаем  $\sigma_{xb}=2vk$ . Поэтому  $\sigma_b \approx vk$ .

Обращаясь к равенству (237), найдем среднее напряжение в точке  $a$ :  $\sigma_a = vk \pm 2k \omega_{ab}$ . Используя уравнения пластичности и выражение среднего напряжения, имеем:  $\sigma_1 - \sigma_2 = vk$ ;  $\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma$ .

Складывая и вычитая почленно эти уравнения, получим

$$\sigma_1 = \sigma + vk; \quad \sigma_2 = \sigma - vk. \quad (240)$$

Возьмем первую из формул системы (240). Для нашего случая  $\sigma_1 = \sigma_y$  и  $\sigma_a = \sigma$ , следовательно,  $\sigma_a = \sigma_y - vk$ .

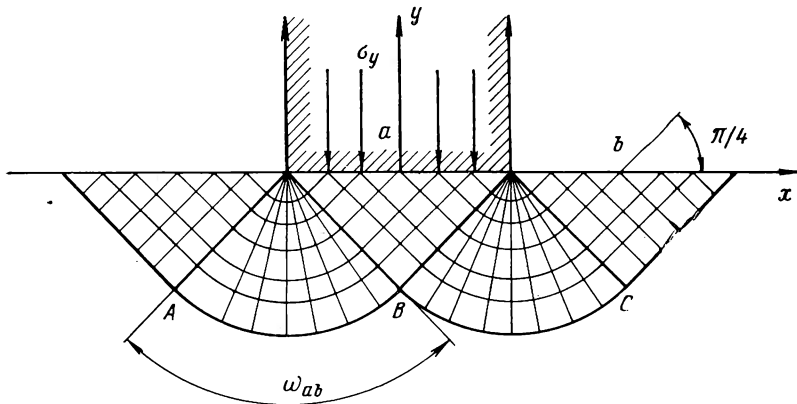


Рис. 62. Схема к определению напряжений при внедрении тупого пуансона в пластическую среду

Приравняем два последних равенства:

$$\sigma_y - vk = vk \pm 2k \omega_{ab},$$

$$\text{отсюда } \sigma_y = 2vk \left( 1 \pm \frac{1}{v} \omega_{ab} \right).$$

Напряжение  $\sigma_y$  — сжимающее. Поэтому следует принять  $v = -1$ . Тогда  $\sigma_y = -2k(1 \pm \omega_{ab})$ . Знак «минус» в скобке следует отбросить, так как по условию задачи напряжения  $\sigma_y$  не может быть меньше  $2k$ . Следовательно:

$$\sigma_y = -2k(1 + \omega_{ab}). \quad (241)$$

В нашем примере  $\omega_{ab} = \pi/2$ , поэтому  $\sigma_y = -2k \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right) = 5,14k = 2,57K$ .

Оказалось, что контактное напряжение в 2,57 раза больше истинного сопротивления деформации  $K$ , что является результатом действия внеконтактных зон. Подробнее этот вопрос будет освещен в главе VIII.

## 9. Вариационные методы

Силы, приложенные от инструмента к металлу, т. е. активные силы, преодолевают внутренние силы сопротивления металла деформации, силы сопротивлений трения и силы сопротивления со стороны внеконтактных зон, если таковые имеются.

Поэтому по закону сохранения энергии работа  $A$  активных сил равна работе  $A_d$  сил сопротивления деформации, работе  $A_{тр}$  сил трения и работе  $A_3$  сил сопротивления внеконтактных зон:

$$A = A_d + A_{тр} + A_3. \quad (242)$$

С позиций этого уравнения рассмотрим случай осадки. Элементарная работа активных сил (рис. 63):  $dA = \sigma_y dx dh$ . Элементарная работа деформации:  $dA_d = K dx dh$ .

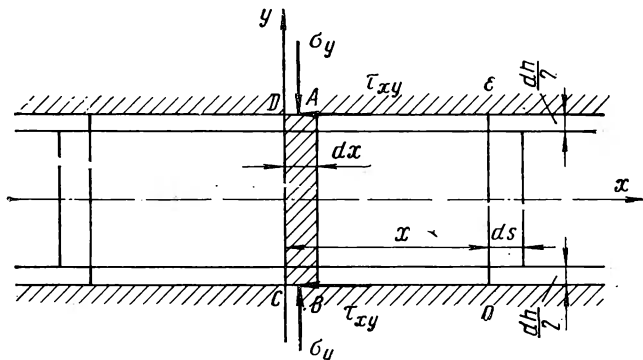


Рис. 63. Схема к методике расчета напряжений, основанной на учете работы внешних и внутренних сил

Элемент  $ABCD$  в процессе деформации перемещает объем  $ABEO$  на величину  $ds$ , равную изменению размера элемента в направлении оси  $x$ . Это перемещение можно определить из условия постоянства объема:  $ds = \frac{dh dx}{h}$ .

Сила трения, действующая на элемент  $ABCD$  от объема  $ABEO$ , равна  $\int_0^x \tau_{xy} dx$ .

Элементарная работа сил трения

$$dA_{тр} = -2 \left( \int_0^x d\tau_{xy} dx \right) ds$$

или

$$dA_{тр} = -\frac{2}{h} \left( \int_0^x d\tau_{xy} dx \right) dh dx.$$

Работа сил сопротивления внеконтактных зон  $A_3 = 0$ . На основании (242) имеем

$$\sigma_y dx dh = K dx dh - \frac{2}{h} \left( \int_0^x d\tau_{xy} dx \right) dx dh$$



или

$$\sigma_y = +K - \frac{2}{h} \int_0^x \tau_{xy} dx. \quad (243)$$

Пример 8. Определить контактное напряжение  $\sigma_y$  по уравнению (243), если  $\tau_{xy} = \mu K$ .

При  $\tau_{xy} = \mu K$  уравнение (243) приобретает вид:

$$\sigma_y = K - \frac{2\mu}{h} K \int_0^x dx.$$

Интегрируя и используя граничные условия:  $x=l/2$ ;  $\sigma_y = -K$ , получим

$$\sigma_y = -K \left[ 1 + \frac{2\mu}{h} \left( \frac{l}{2} - x \right) \right].$$

Мы получили выражение (200) контактного напряжения при осадке. Этот результат будет понятен, если продифференцировать равенство (243). С учетом уравнения пластичности  $\sigma_x - \sigma_y = \nu K$  получим

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2}{h} \tau_{xy} = 0.$$

Таким образом, мы получили уже известное нам приближенное уравнение равновесия. Следовательно, расчет напряжений, основанный на учете работы внешних и внутренних сил, эквивалентен расчету напряжений исходя из рассмотрения условий равновесия сил, воздействующих на тело.

Вариационные методы определения усилий и деформаций, подобно рассмотренному методу учета работ, основаны на энергетическом принципе. Вариационные методы дают возможность приближенного определения распределения напряжений и деформаций по объему тела, а также формы тела после деформации с учетом ее неравномерности.

Для постановки вариационных задач служит в том или ином виде начало возможных изменений напряженного состояния (начало Кастильяно) или начало возможных изменений деформированного состояния (начало Лагранжа) [4—6].

Согласно началу возможных изменений деформированного состояния, работа (энергия, мощность) всех внешних и внутренних сил на возможных перемещениях около состояния равновесия равна нулю.

Это означает, что, если  $U$  — работа внутренних,  $A$  — работа внешних сил, то около состояния равновесия их вариации равны:  $\delta U = \delta A$  или, что вариация некоторого функционала  $W$  около состояния равновесия равна нулю:

$$\delta W = \delta U - \delta A = 0; \quad \delta W = \delta(U - A) = 0.$$

Здесь вариация работы внешних сил

$$\delta A = \int_{(s)} (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) ds,$$

где  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  — смещения, совместные с граничными условиями;  
 $s$  — поверхность, по которой приложены силы.

Вариация работы внутренних сил:

$$\delta U = \delta \left( \iiint_{(v)} \Pi dV \right),$$

где потенциал  $\Pi$  работы деформации

$$\Pi = \sigma_x e_{xx} + \sigma_y e_{yy} + \dots + \tau_{zx} e_{zx}. \quad (244)$$

Если принять условие постоянства объема, то потенциал работы деформации приводится к виду

$$\Pi = \sigma_i e_i. \quad (245)$$

Поэтому вариация работы внутренних сил

$$\delta U = \iiint_{(v)} \sigma_i \delta e_i dV = \delta \iiint_{(v)} \sigma_i e_i dV.$$

Минимум полной энергии для любой сплошной среды соответствует действительной форме равновесия.

Для этого случая:  $\delta W = \delta U - \delta A = 0$

$$\text{или } \delta W = \delta \left( \iiint_{(v)} \sigma_i e_i dV - A \right) = 0.$$

Это условие можно формулировать так: действительная форма равновесия сообщает полной работе деформации экстремальное значение.

Заметим, что перемещения на контактной поверхности можно варьировать только вдоль нее. Если же на некоторой поверхности касательное напряжение  $\tau_{xy} = \frac{1}{2} K$ , то перемещений нет, и поэтому вариация работы внешних сил  $\delta A = 0$ .

В таком случае приходим к равенству

$$\delta \left( \iiint_{(v)} \sigma_i e_i dV \right) = 0, \quad (246)$$

т. е. величина функционала

$$W = \iiint_{(v)} \sigma_i e_i dV \quad (247)$$

получает экстремальное значение по сравнению со всеми его соседними значениями, совместными с условиями равновесия и заданными внешними силами.

Л. М. Качанов<sup>1</sup> доказал, что если  $de_i/d\sigma_i \geq 0$ , то  $\delta^2 W > 0$  и, следовательно, величина  $W$  имеет минимум. Но именно такой харак-

<sup>1</sup> Качанов Л. М. Механика пластических сред. Гостехтеоретиздат, 1948. 215 с. с ил.

тер связи между обобщенными деформацией и напряжением имеет место для металлов. При этом полагают, что нагрузки всегда только возрастают и пропорциональны одному параметру, т. е. что нагружение является простым.

Пусть тело находится в состоянии идеальной пластичности. При этом  $\sigma_i = \sigma_s$  и функционал (247) приобретает вид

$$W = \sigma_s \iiint_{(v)} e_i dV$$

$$\text{или } W = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_s \iiint_{(v)} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + \frac{3}{2} (e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)} dV.$$

Задав  $e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{zz}$  в виде некоторых функций, например в виде:  $e_{xx} = \sum_m c_m \varphi_m(x, y, z)$  и т. д., подставив их в вариационное уравнение, проинтегрировав результат по объему и варьируя по коэффициентам  $c_m$ , получим ряд уравнений:

$$\frac{\partial W}{\partial c_1} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial c_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial c_m} = 0,$$

из которых найдем  $c_1, c_2, \dots, c_m$ . Последние в свою очередь будут некоторыми функциями параметров, определяющих процесс деформации. Таким образом, вариационная задача сводится к решению обычной задачи на экстремум функций конечного числа переменных.

При  $m \rightarrow \infty$  получим точное значение искомых функций. При выборе вида и числа членов функции не следует забывать о том, что они должны удовлетворять уравнениям равновесия. При строгом решении вариационных задач это следует из самой их постановки, но строгие решения вариационных задач наталкиваются на непреодолимые пока ограничения математического характера. Ввиду этого вводятся упрощения, которые приводят к несоответствиям и, в частности, к нарушению условий равновесия. Поэтому, чтобы избежать ошибок, следует произвольно задавая некоторые из деформаций, другие получить из условий статики.

К сожалению, эта операция наталкивается на серьезные, а во многих случаях и непреодолимые трудности. В связи с этим важно всякий раз тем или иным способом показать, интегрированию каких приближенных уравнений статики равноценно данное приближенное вариационное решение.

Далее, во избежание осложнений математического характера не следует брать более трех-четырех параметров. Лучше, выбрав подходящие по краевым условиям функции, ограничиться двумя параметрами. В таком случае один из них находится из граничных условий, а второй — из условия минимума функционала.

Если на контактной поверхности имеют место перемещения, то задача сводится к отысканию минимума такого функционала:

$$W = \iiint_{(v)} \sigma_i \dot{\epsilon}_i dV + \iint_{(s)} (p_x u + p_y v + p_z w) ds.$$

Учитывая, что перемещения на контактной поверхности можно варьировать только вдоль нее, часть членов в интеграле по поверхности обращается в нуль и физический его смысл заключается в том, что он выражает работу (энергию), затрачиваемую на преодоление сил трения.

В случае теории пластического течения ход решения задачи аналогичен только что описанному для деформационной теории. Но в этом случае отыскивают минимум функционала, представляющего собой мощность, затрачиваемую на деформацию тела, и мощность, затрачиваемую на преодоление сопротивлений контактного трения:

$$N = \iiint_{(v)} \sigma_i \dot{\epsilon}_i dV + \iint_{(s)} (p_x \dot{u} + p_y \dot{v} + p_z \dot{w}) ds.$$

Пример 9. Рассчитать коэффициенты деформации и среднее контактное напряжение при осадке параллелепипеда<sup>1</sup>.

Здесь мы впервые встречаемся с объемной задачей пластичности. Совместим начало координат с центром тяжести параллелепипеда (рис. 64) и ввиду симметрии будем рассматривать лишь деформацию 1/8 части параллелепипеда.

Введем допущение о том, что в процессе осадки боковые стороны параллельны.

Пусть средняя скорость относительной деформации по высоте параллелепипеда будет:

$$\dot{\epsilon}_{yy} = -\frac{2v_0}{h},$$

где  $v_0$  — скорость сближения бойков пресса.

В результате осадки по высоте происходит увеличение поперечных размеров. Если скорость деформации уширения принять равной

$$\dot{\epsilon}_{zz} = A \frac{2v_0}{h},$$

то скорость деформации удлинения будет

$$\dot{\epsilon}_{xx} = (1 - A) \frac{2v_0}{h}.$$

Это следует из условия постоянства секундного объема. Абсолютные значения скоростей будут

$$\dot{v} = -\frac{2v_0}{h_0} y; \quad \dot{w} = A \frac{2v_0}{h} z; \quad \dot{u} = (1 - A) \frac{2v_0}{h} x.$$

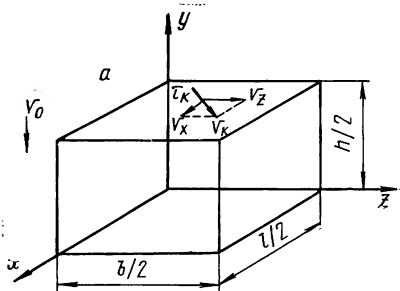


Рис. 64. Схемы к расчету процесса осадки вариационным методом

<sup>1</sup> Эта задача в приведенном здесь виде решена А. К. Григорьевым.

Произвольные функции от  $x, y, z$  (появляются в результате интегрирования величин  $e_{xx}, e_{yy}$  и  $e_{zz}$ ) равны нулю. Это следует из условий:

$$y = 0, v = 0; z = 0, w = 0; x = 0; u = 0.$$

Мощность активных сил равна сумме мощностей сопротивления металла деформации и сопротивления трения:

$$N = N_d + N_{тр}; \quad N_d = \iiint_{(V)} \sigma_i \dot{e}_i dV. \quad (248)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{e}_{xx} - \dot{e}_{yy})^2 + (\dot{e}_{yy} - \dot{e}_{zz})^2 + (\dot{e}_{zz} - \dot{e}_{xx})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{2v_0}{h} \sqrt{(2-A)^2 + (1+A)^2 + (2A-1)^2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{v_0}{h} \sqrt{1-A+A^2}. \end{aligned}$$

Принимая тело идеально пластичным ( $\sigma_i = \sigma_s$ ), имеем:

$$\frac{1}{8} N_d = \sigma_s \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{v_0}{h} \int_0^{\frac{l}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{h}{2}} \sqrt{1-A+A^2} dx dy dz.$$

После интегрирования и подстановки пределов:

$$\frac{1}{8} N_d = \sigma_s \frac{v_0}{2\sqrt{3}} \frac{lbh}{h} \sqrt{1-A+A^2}.$$

Мощность сил трения

$$N_{тр} = \iint_{(F)} \tau_k v_k dF.$$

Примем  $\tau_k = \alpha \sigma_s$ , где  $\alpha$  — постоянный коэффициент. Скорость перемещения частиц на поверхности контакта (см. рис. 64, б)

$$v_k = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \frac{2v_0}{h} \sqrt{A^2 z^2 + (1-A)^2 x^2}.$$

Таким образом:

$$\frac{1}{8} N_{тр} = \alpha \sigma_s \frac{2v_0}{h} \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{l}{2}} \sqrt{A^2 z^2 + (1-A)^2 x^2} dx dz.$$

Этот интеграл можно взять с помощью приближенного соотношения, являющегося частным случаем неравенства Бунаковского:

$$\int_a^b p(x) dx \approx \sqrt{(b-a) \int_a^b p^2(x) dx}.$$

Для нашего случая имеем

$$\int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{l}{2}} \sqrt{A^2 z^2 + (1-A)^2 x^2} dx dz =$$

$$= \sqrt{\frac{bl}{4} \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{l}{2}} [A^2 z^2 + (1-A)^2 x^2] dx dz} =$$

$$= \frac{hbl}{8\sqrt{3}} \sqrt{A^2 \left(\frac{b}{h}\right)^2 + (1-A)^2 \left(\frac{l}{h}\right)^2}.$$

Таким образом:

$$\frac{1}{8} N_{\text{тр}} = \alpha \sigma_s \frac{2v_0}{h} \frac{hbl}{8\sqrt{3}} \sqrt{A^2 \left(\frac{b}{h}\right)^2 + (1-A)^2 \left(\frac{l}{h}\right)^2}.$$

Мощность активных сил:  $N = 2pv_0$ .

Подставляя выражения  $N$ ,  $N_d$  и  $N_{\text{тр}}$  в (248), получим:

$$\frac{p}{\sigma_s} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \sqrt{1-A+A^2} + \frac{\alpha}{2} \sqrt{A^2 \left(\frac{b}{h}\right)^2 - (1-A)^2 \left(\frac{l}{h}\right)^2} \right].$$

Воспользовавшись уравнением  $\partial N / \partial A = 0$ , найдем величину

$$A = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\alpha \sqrt{1-A+A^2} \left[ (1-A) \left(\frac{l}{h}\right)^2 - A \left(\frac{b}{h}\right)^2 \right]}{\sqrt{(1-A)^2 \left(\frac{l}{h}\right)^2 + A^2 \left(\frac{b}{h}\right)^2}} \right\}. \quad (249)$$

По этому равенству с помощью вычислительной машины «Урал-2» были рассчитаны значения показателя уширения  $A$  при различных значениях величин  $\alpha$ ,  $l/h$ ,  $A$ ,  $b/h$  и построена номограмма, представленная на рис. 65.

Определив величину  $A$ , можно найти размеры параллелепипеда после деформации. В самом деле, из условия постоянства объема следует, что если осадка по высоте равна  $dh/h$ , то относительные изменения ширины и длины соответственно равны:

$$\frac{db}{b} = A \frac{dh}{h}; \quad \ln \frac{b_1}{b_0} = A \ln \frac{h_0}{h_1};$$

$$\frac{b_1}{b_0} = \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^A; \quad b_1 = b_0 \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^A;$$

$$\frac{dl}{l} = (1-A) \frac{dh}{h};$$

$$\ln \frac{l_1}{l_0} = (1-A) \ln \frac{h_0}{h_1}; \quad \frac{l_1}{l_0} = \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^{1-A}; \quad l_1 = l_0 \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^{1-A}.$$

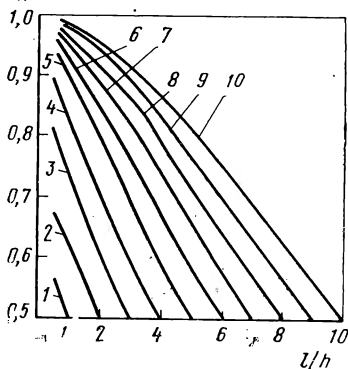


Рис. 65. Номограмма для определения показателя поперечной деформации  $A$  при  $\mu = 0,3 \div 0,5$ . Цифры на кривых обозначают величины отношений  $b/h$

Остается выяснить вопрос о точности решения. Допустим, что мы имеем дело с квадратным поперечным сечением, когда  $l = b$ . В

этом случае  $b/h=l/h=1$  и показатель  $A=1/2$ . Для этого случая, приняв  $\alpha=\mu$ , мы получим из уравнения (235):  $p/\sigma_s=1+\frac{1}{3}\mu\frac{l}{h}$ .

Такой результат получается при вычислении среднего контактного напряжения после совместного решения упрощенных уравнений равновесия и условия пластичности для квадратных сечений. Следовательно, рискованная операция по замене одного из интегралов с помощью неравенства Буняковского, по счастью, не вывела задачу за пределы точности, обусловленной начальной посылкой о гипотезе плоских сечений.

Аналогично предыдущему можно получить вариационные уравнения из начала возможных изменений напряженного состояния. Для этого действительное напряженное состояние сравнивается со всеми возможными напряженными состояниями, удовлетворяющими уравнениям статики и условиям на поверхности.

Пусть объем и поверхность деформируемого тела будут  $V$  и  $s$ . На части поверхности ( $s_1$ ) заданы поверхностные силы  $p_x, p_y, p_z$ . На другой части поверхности  $s$  заданы перемещения. Состоянию равновесия тела отвечают компоненты перемещения  $u, v, w$ .

Пусть тело находится в равновесии под действием заданной системы сил. В таком случае удовлетворяются уравнения равновесия и условия на поверхности.

Сравним напряженное состояние  $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$ , возникающее в теле под действием заданной системы сил и перемещений со всеми смежными напряженными состояниями:  $\sigma_x + \delta\sigma_x, \dots, \tau_{zx} + \delta\tau_{zx}$ . При этом они удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x + \delta\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} + \delta\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} + \delta\tau_{xz}) = 0$$

и условиям на поверхности

$$p_x + \delta p_x = (\sigma_x + \delta\sigma_x) \cos(\hat{n}, x) + (\tau_{xy} + \delta\tau_{xy}) \times \\ \times \cos(\hat{n}, y) + (\tau_{xz} + \delta\tau_{xz}) \cos(\hat{n}, z).$$

В этом случае приращения напряжений  $\delta\sigma_x, \dots, \delta\tau_{zx}$  и приращения внешних сил:  $\delta p_x, \delta p_y, \delta p_z$  образуют уравновешивающуюся систему. Следовательно, работа этих внутренних и внешних сил на всяком возможном для тела перемещении должна обратиться в нуль.

Пусть возможными перемещениями являются действительные  $u, v, w$ . Тогда:

$$\iiint_{(v)} (e_{xx} \delta\sigma_x + \dots + e_{zx} \delta\tau_{zx}) dv + \iint_{(s_1)} (u \delta p_x + v \delta p_y + w \delta p_z) ds = 0.$$

Пусть вариации напряженного состояния таковы, что

$$\iint_{(s_1)} (u \delta p_x + v \delta p_y + w \delta p_z) ds = 0.$$

Это равносильно допущению о том, что внешние силы постоянны или что силы трения на поверхности контакта имеют предельное значение  $\tau_{xy} = \frac{1}{2}K$ , когда взаимные смещения инструмента и металла отсутствуют.

Тогда получаем выражение вариации работы внутренних сил в виде

$$\delta \iiint_{(v)} (e_{xx} \sigma_x + \dots + e_{zx} \tau_{zx}) dV = 0.$$

Таким образом, исходя из начала возможных изменений напряженного состояния, мы снова пришли к равенствам (246) и (247).

Если теперь выразить деформации через напряжения, то из формулы (226) мы получим вариационные уравнения для определения напряжений.

Начало возможных изменений напряженного состояния убедительно свидетельствует о необходимости заботиться об удовлетворении дифференциальных уравнений равновесия в ходе решения вариационной задачи.

Пусть известны выражения для напряжений как функции координат и некоторых неизвестных нам численных параметров  $a, b, c, \dots$ , постоянных в данных условиях, но зависящих от условий нагружения и удовлетворяющих уравнения равновесия. Тогда эти неизвестные численные параметры могут быть найдены из условия минимума величины  $W$ . Для этого необходимо выполнить интегрирование по объему и приравнять нулю частные производные по неизвестным параметрам:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial c} = 0.$$

Решая совместно эту систему уравнений, найдем искомые параметры, подставим их в выражения для напряжений и получим окончательные значения последних.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Губкин С. И. Пластическая деформация металлов. т. I 376 с. с ил.; т. II 416 с. с ил.; т. III 306 с. с ил.
2. Новиков И. И. Дефекты кристаллической решетки металлов. М., «Металлургия», 1968. 188 с. с ил.
3. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., «Высшая школа», 1968. 520 с. с ил.
4. Колмогоров В. Л. Напряжения, деформации, разрушение М., «Металлургия», 1970. 230 с. с ил.
5. Смирнов В. С., Григорьев А. К. Применение ЭЦВМ для расчета параметров прокатки. М. «Металлургия», 1970. 229 с. с ил.
6. Тарновский И. Я., Поздеев А. А., Ганаго Ю. А. и др. Теория обработки металлов давлением. М., Металлургиздат, 1963. 672 с. с ил.
7. Смирнов В. С. Сборник задач по обработке металлов давлением. М., «Металлургия», 1973. 192 с. с ил.





## VI глава

### Изгиб и кручение

#### 1. Чистый изгиб

Пластический изгиб является одной из основных операций процессовковки и штамповки. Изгиб также лежит в основе операции, известной под названием правки. Прокатка большого числа сложных по конфигурации изделий представляет собой комбинацию изгиба с другими видами деформации. Изгиб имеет место при формовке ленты в трубную заготовку, из которой изготавливаются затем сварные трубы. Широкое и все возрастающее применение пластический изгиб получает в связи с освоением производства гнутых профилей на особых многоклетевых станах.

На рис. 66,а изображен стержень, подвергнутый изгибу силами, образующими момент  $M$ . Принято считать, что средняя часть бруса подвергается чистому изгибу потому, что изгибающие моменты в этой части по длине бруса постоянны.

Для решения задачи о чистом изгибе (см. [1]) воспользуемся одним из уравнений статики:  $\Sigma M=0$  и равенством, выражающим закон связи между обобщенными напряжением и деформацией для случая чистого изгиба:

$$\sigma_x = \sigma_s \left( \frac{e_{xx}}{e_s} \right)^n. \quad (250)$$

Из этого соотношения следует, что задача о чистом изгибе решается как одномерная, т. е. считают длину бруса значительно больше его высоты.

Уравнение статического равновесия для бруса с поперечным сечением произвольной формы имеет вид:

$$\int_{(F)} \sigma_x y dF = M. \quad (251)$$

Элемент площади для прямоугольного сечения:  $dF = bdy$ .

Обозначим через  $r_n$  радиус изгиба нейтрального волокна, для которого относительная деформация  $e_{xx}=0$ .

Из рис. 66,а следует, что

$$e_{xx} = \frac{(r_n + y) \alpha - r_n \alpha}{r_n \alpha} = \frac{y}{r_n}, \text{ откуда } dy = r_n de_{xx}.$$

Таким образом,  $dF = br_n de_{xx}$ .

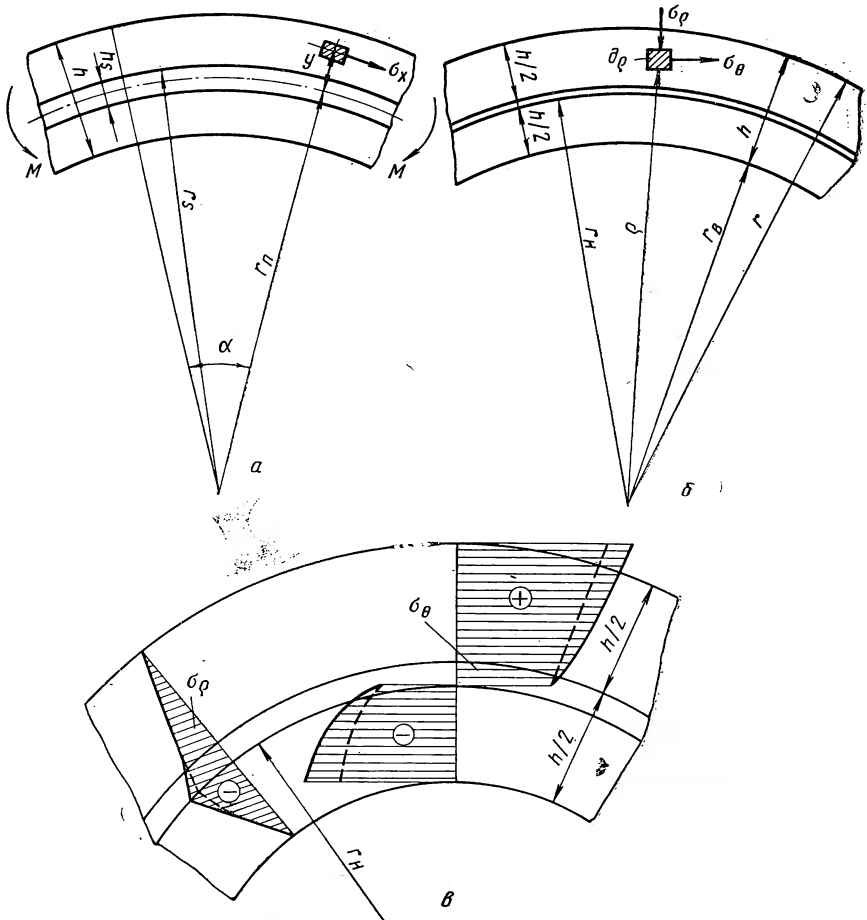


Рис. 66. Схемы к решению задачи о чистом изгибе: геометрические соотношения для первоначально прямого (а) и кривого (б) бруса; эпюры напряжений в кривом брус (в) при наличии упрочнения и идеальной пластичности (пунктирные линии) ( $r_B = 0,5 r$ )

Принимая во внимание равенство (250), получим уравнение (251) в следующем виде:

$$M = 2 b r_n^2 \frac{\sigma_s}{e_s^n} \int_0^1 e_{xx}^{n+1} de_{xx},$$

$$\text{откуда } M = 2 b r_n^2 \sigma_s \frac{e_s^{n+2}}{e_s^n (n+2)}.$$

Согласно рис. 66,а, предел упругой деформации  $e_s$  и относительное удлинение  $l$  в крайнем волокне равны:

$$e_s = \frac{h_s}{2 r_n} \quad \text{и} \quad e = \frac{h}{2 r_n}.$$

Здесь  $h_s$  — величина средней части бруса по высоте, которая подвергается только упругой деформации.

Из условия равенства нуль-момента с учетом формулы (250) (см. рис. 66) получим:

$$M = \frac{\sigma_s b h^{n+2}}{h_s^n 2 (n+2)}$$

или 
$$M = \sigma_s \frac{b h^2}{2 (n+2)} \left( \frac{h}{h_s} \right)^n. \quad (252)$$

Здесь  $b$ ,  $h$  — ширина и высота бруса прямоугольного сечения;  
 $h_s$  — высота упругой центральной зоны.

Эта формула соответствует случаю изгиба для материала бруса, обладающего упрочнением.

Если принять  $n=1$  и распространить упругую зону на всю высоту бруса, т. е. считать, что  $h_s=h$ , то получим случай упругого изгиба бруса:

$$M = \sigma_s \frac{b h^2}{6}.$$

Принимая  $n=0$ , будем иметь случай изгиба бруса из идеально пластического материала:

$$M = \sigma_s \frac{b h^2}{4}.$$

Напряжения при изгибе определяются зависимостью, вытекающей из уравнения (250):

$$\sigma_x = \pm \sigma_s \left( \frac{2y}{h_s} \right)^n.$$

## 2. Продольный изгиб

В процессахковки и штамповки широко распространена операция осадки слитков и заготовок, высота которых в некоторых случаях значительно превосходит размеры их поперечного сечения. Например, на горизонтально-ковочных машинах осуществляют операцию высадки, при которой длина высаживаемого конца заготовки в 2,5—3 раза больше ее диаметра. В связи с этим необходимо иметь данные о величине момента и критической силы, при которых происходит потеря устойчивости осаживаемой заготовки.

При решении этой задачи будем пренебрегать касательными напряжениями и считать, что только компонента  $\sigma_x$  отлична от нуля. Используя закон (95), имеем:

$$\sigma_x = \sigma_s \left( \frac{e_{xx}}{e_s} \right)^n = \frac{\sigma_s}{e_s^n} e_{xx}^n.$$

Обозначим

$$\frac{\sigma_s}{e_s^n} = E'. \quad (253)$$

Тогда  $\sigma_x = E' e_{xx}^n$ , и сила, вызывающая продольный изгиб при ширине бруса  $b=1$ , будет равна (см. рис. 67,а):  $P = E' e_{xx}^n h$ .

Эта сила вызывает в стержне сжимающие напряжения. Когда напряжения достигнут некоторой критической величины, стержень начинает изгибаться так, что на выпуклой стороне напряжения уменьшаются, а на вогнутой возрастают (рис. 67,б). Из условия постоянства силы  $P$  можно записать:

$$\frac{1}{2} \sigma_H h_H = \frac{1}{2} \sigma_B h_B \quad \text{или} \quad \sigma_H h_H = \sigma_B h_B, \quad (254)$$

где  $\sigma_H$  — величина, на которую уменьшаются напряжения сжатия на выпуклой стороне;

$\sigma_B$  — величина, на которую увеличиваются напряжения сжатия на вогнутой стороне.

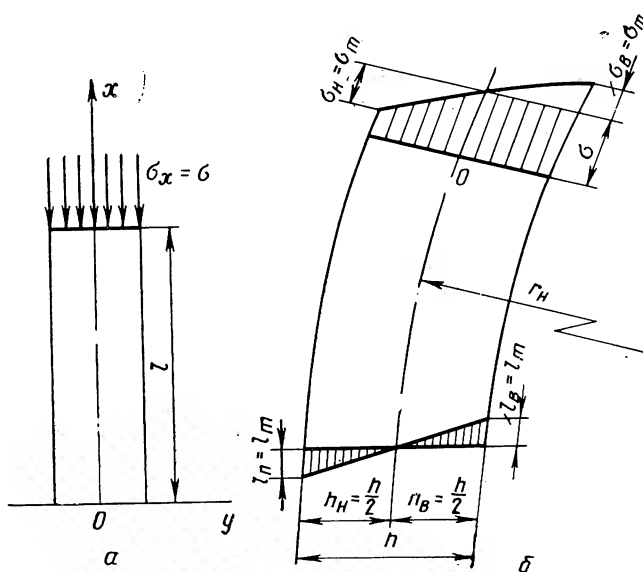


Рис. 67. Продольный изгиб:  
а — схема нагружения; б — схема напряжений и деформаций

Обозначим относительные деформации крайних волокон на выпуклой и вогнутой сторонах соответственно  $e_H$  и  $e_B$ . Тогда

$$\sigma_H = e_H^n E' = \left(\frac{h_H}{\rho}\right)^n E'; \quad \sigma_B = e_B^n E' = \left(\frac{h_B}{\rho}\right)^n E'. \quad (255)$$

Из уравнений (254) и (255) получаем

$$\left(\frac{h_n}{\rho}\right)^n h_n = \left(\frac{h_b}{\rho}\right)^n h_b, \quad (256)$$

откуда  $h_n = h_b = \frac{h}{2}$ , т. е. нейтральная линия продольного изгиба проходит по середине толщины стержня и тогда  $\sigma_n = \sigma_b = \sigma_m$ , а следовательно,

$$e_n = e_b = e_m. \quad (257)$$

При этом величину изгибающего момента приближенно можно выразить как

$$M = 2 \frac{bh \sigma_m}{2 \cdot 2} \frac{2}{3} \frac{h}{2} = 2 \frac{bh^3}{12} \sigma_m.$$

На основании зависимостей (255) и (257) получим:

$$M = \frac{bh^3}{12} 2 \left(\frac{h}{2\rho}\right)^n E' \quad \text{или} \quad M = \frac{bh^3}{12} \frac{1}{\rho} \left(\frac{h}{2\rho}\right)^{n-1} E'. \quad (258)$$

Для упрощения этого уравнения кривую, выражающую закон связи между напряжением и деформацией за пределом текучести, аппроксимируем касательной к ней, проведенной через точку  $(e_s, \sigma_s)$  (рис. 67, в). Это означает, что в выражении  $(h/2\rho)^{n-1}$  принимаем  $n=1$ . В результате уравнение (258) приобретает вид:

$$M = \frac{IE'}{\rho}, \quad (259)$$

где  $I = \frac{bh^3}{12}$  — момент инерции прямоугольного сечения.

Кривизну изогнутого стержня в момент потери устойчивости приближенно выразим следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{y''}{(1+y')^2} = y''.$$

Момент внешней силы равен  $M = Py$ . Поэтому уравнение (259) приобретает вид

$$Py = -IE'y'' \quad \text{или} \quad y'' + \frac{P}{E'I} y = 0. \quad (260)$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его характеристическое уравнение:  $n^2 + P/E'I = 0$  имеет корни:

$$n_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{P}{E'I}}.$$

Поэтому общее решение уравнения (260) будет следующим:

$$y = c_1 \sin \left( \sqrt{\frac{P}{E'I}} x \right) + c_2 \cos \left( \sqrt{\frac{P}{E'I}} x \right). \quad (261)$$

Первое граничное условие:  $x=0$ ;  $y=0$ ; следовательно,  $c_2=0$ . Возвращаясь к уравнению (261), получим

$$y = c_1 \sin \left( \sqrt{\frac{P}{E'I}} x \right).$$

Отсюда вытекает, что упругая линия изогнутого стержня является синусоидой. Второе граничное условие  $x=l$ ;  $y=0$ ; и так как  $c_2$  не может быть равно нулю, то

$$\sin \left( \sqrt{\frac{P}{E'I}} l \right) = 0$$

$$\text{или } \sqrt{\frac{P}{E'I}} l = m \pi.$$

Отсюда

$$P = \frac{m_2 \pi^2 E' I}{l^2}.$$

Здесь  $m$  — число волн, которые могут возникнуть в процессе продольного изгиба.

Потерю устойчивости нужно ожидать при наименьшем значении критической силы, т. е. при  $m=1$ . Таким образом:

$$P = \frac{\pi^2 E' I}{l^2}. \quad (262)$$

Возвращаясь к уравнению (253), легко убедиться, что величина  $E' = \frac{\sigma_s}{\epsilon_s^n}$  меньше модуля нормальной упругости  $E$ . Поэтому устойчивость стержня в пластической зоне меньше, чем в упругой.

### 3. Чистое кручение

Кручение используется в качестве технологической операции в процессах жовки, штамповки и прокатки, например при изготовлении коленчатых валов, спиральных сверл и других изделий.

Определим величину момента, возникающего при пластическом кручении. Примем, что при кручении круглого бруса в нем возникают только касательные напряжения, направленные перпендикулярно к радиусу. Допустим также, что радиусы в плоскости поперечного сечения практически не искривляются, и поэтому из всех компонентов тензора напряжений отличен от нуля только  $\tau_{r\theta}$ .

Обозначим через  $\varphi$  полный угол закручивания на длине  $l$ , а через  $\alpha$  — относительный угол закручивания (рис. 68,а):  $\alpha = \varphi/l$ . Выделим из рассматриваемого круглого бруса цилиндр радиусом и длиной  $dl$ . Тогда

$$\frac{\rho d\varphi}{dl} \approx e_{r\theta}, \quad \text{но } d\varphi = \alpha dl. \quad (263)$$

Поэтому  $\rho d = e_{r\theta}$ .

Уравнение равновесия при кручении (рис. 68,б) имеет вид:

$$M = \int_{(F)} \tau_{\rho\theta} \rho dF.$$

С учетом равенства (263) величина

$$dF = 2 \pi \rho d\rho = 2 \pi \frac{e_{\rho\theta}}{\alpha^2} de_{\rho\theta}.$$

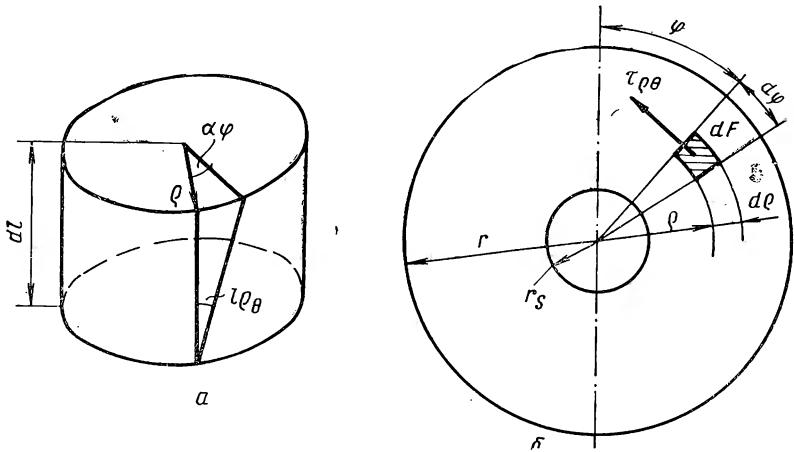


Рис. 68. Схемы к определению величины сдвига  $e_{\rho\theta}$  (а) и напряжений при кручении (б)

Следовательно, обозначая относительную деформацию сдвига при  $\rho = r$ , т. е. в крайнем волокне через  $e$ , получим

$$M = \frac{2 \pi}{\alpha^3} \int_0^l \tau_{\rho\theta} e_{\rho\theta}^\alpha d e_{\rho\theta}.$$

Закон связи между обобщенным напряжением и деформацией найдем из равенства (94)

$$\tau_{\rho\theta} = \tau_s \left( \frac{e_{\rho\theta}}{e_s} \right)^n.$$

С учетом этого выражения формула для определения момента запишется как

$$M = \frac{2 \pi \tau_s}{\alpha^3 e_s^n} \int_0^l e_{\rho\theta}^{n+2} d e_{\rho\theta} = \frac{2 \pi \tau_s}{\alpha^3} \left( \frac{e}{e_s} \right)^n \frac{e^3}{(n+3)}.$$

Но  $e = \alpha r$  и  $e_s = \alpha r_s$ , где  $r_s$  — радиус упругого ядра. Тогда

$$M = \frac{2 \pi}{n+3} \tau_s r^3 \left( \frac{r}{r_s} \right)^n. \quad (264)$$

В упругой зоне  $n=1$ ,  $r_s=r$  и  $M_y = \frac{1}{2} \pi \tau_s r^3$ . Для идеального пластического материала  $n=0$  и  $M_{пл} = \frac{2}{3} \pi \tau_s r^3$ .

Таким образом, у стержня из идеально пластического материала момент кручения в 1,33 раза больше, чем у упругого стержня.

#### 4. Чистый изгиб кривого бруса

В предыдущих пунктах приведено решение трех простейших одномерных задач пластического изгиба и кручения. Рассмотрим теперь двумерную задачу изгиба.

При чистом изгибе бруса, имеющего начальную кривизну, считают, что в средней его части (см. рис. 66,б) напряжения не зависят от координаты  $\theta$ , а напряжение  $\tau_{\rho\theta}$  равно нулю по условию симметрии. Таким образом, задача сводится к осесимметричной, т. е. для данного случая к задаче в главных осях. В результате для растянутой (верхней) части бруса необходимо провести совместное решение уравнений равновесия и условия пластичности с учетом упрочнения (95). Если принять деформацию плоской, а материал несжимаемым (см. [2]), то будем иметь систему уравнений

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0; \quad \sigma_\rho - \sigma_\theta = \nu K \left( \frac{\rho}{r_H} \right)^n. \quad (265)$$

Отсюда

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} = - \frac{\nu K}{r_H^n} \rho^{n-1}; \quad \sigma_\rho = - \frac{\nu K}{r_H^n} \frac{\rho^n}{n} + c. \quad (266)$$

Используя граничное условие для наружной подвергающейся растяжению части бруса:  $\rho=r$ ;  $\sigma_\rho=0$ , получаем

$$c = \frac{\nu K}{n} \left( \frac{r}{r_H} \right)^n.$$

С учетом этого из уравнений (266) с учетом второго равенства системы (265) при  $r_H \leq \rho \leq r$  выведем выражение для компонентов нормальных напряжений:

$$\frac{\sigma_\rho}{K} = - \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{r}{r_H} \right)^n - \left( \frac{\rho}{r_H} \right)^n \right]; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = - \left\{ \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{r}{r_H} \right)^n - \left( \frac{\rho}{r_H} \right)^n \right] - \left( \frac{\rho}{r_H} \right)^n \right\}. \quad (267)$$

В этих равенствах принято  $\nu=-1$ , так как в выпуклой части изгибаемой полосы напряжения  $\sigma_\theta$  являются растягивающими, т. е. имеют положительный знак.



Для сжатой (вогнутой) части бруса необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0; \quad \sigma_\rho - \sigma_\theta = \nu K \left( \frac{r_H}{\rho} \right)^n. \quad (268)$$

Отсюда, используя граничное условие  $\rho = r_B$ ;  $\sigma_\rho = 0$  и принимая  $\nu = +1$ , поскольку на вогнутой части бруса  $r_B \leq \rho \leq r_H$ , напряжения  $\sigma_\theta$  являются сжимающими, получим:

$$\frac{\sigma_\rho}{K} = -\frac{1}{n} \left[ \left( \frac{r_H}{r_B} \right)^n - \left( \frac{r_H}{\rho} \right)^n \right]; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = -\left\{ \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{r_H}{r_B} \right)^n - \left( \frac{r_H}{\rho} \right)^n \right] + \left( \frac{r_H}{\rho} \right)^n \right\}. \quad (269)$$

Заметим, что  $\lim_{n \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{n} \left[ \left( \frac{r}{r_H} \right)^n - \left( \frac{\rho}{r_H} \right)^n \right] \right\} = \ln \frac{\rho}{r}$ ;

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{n} \left[ \left( \frac{r_H}{r_B} \right)^n - \left( \frac{r_H}{\rho} \right)^n \right] \right\} = -\ln \frac{\rho}{r_B}.$$

Поэтому выражения для напряжений в бруске из идеально пластического материала будут иметь следующий вид:

при  $r_H \leq \rho \leq r$  (растянутая зона)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_\rho}{K} &= \ln \frac{\rho}{r}; & \frac{\sigma_\theta}{K} &= \ln \frac{\rho}{r} + 1; \\ \text{при } r_B \leq \rho \leq r_H \text{ (сжатая зона)} & & & \\ \frac{\sigma_\rho}{K} &= -\ln \frac{\rho}{r_B}; & \frac{\sigma_\theta}{K} &= -\left( \ln \frac{\rho}{r_B} + 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (270)$$

Радиус  $r_H$  нейтральной линии найдем из условия равенства радиальных напряжений, определяемых по формуле (266) и (268):

$$-\frac{1}{n} \left[ \left( \frac{r}{r_H} \right)^n - 1 \right] = -\frac{1}{n} \left[ \left( \frac{r_H}{r_B} \right)^n - 1 \right]. \quad (271)$$

Отсюда  $r_H = \sqrt[n]{r r_B}$ .

Эти соотношения можно получить и из равенства (270).

Таким образом, в двумерной задаче изгиба радиус нейтрального сечения не совпадает с половиной толщины бруса, как это имеет место при решении соответствующей одномерной задачи.

С использованием соотношений (267), (269) и (270) на рис. 66, в построены эпюры напряжений для случаев изгиба бруса, материал которого обладает упрочнением, и для бруса из идеально пластического материала.

## Растяжение

## 1. Диаграммы растяжения

Одноосное растяжение как технологическая операция имеет место при правке очень тонких листов и пресованных изделий. Однако пластическое растяжение получило повсеместное распространение как один из методов механических испытаний, по результатам которого судят о прочности и пластичности металлов.

Из опытов на растяжение определяют величину истинного сопротивления деформации, которым называется истинное напряжение, возникающее при линейном пластическом растяжении. На основании данных полученных из этих опытов, выводят математические выражения закона связи между обобщенными напряжением и деформацией.

Машины для механических испытаний на растяжение дают возможность записать индикаторную или рабочую диаграмму в координатах суммарное усилие  $P$  — абсолютное удлинение  $\Delta l$ . На рис. 69,а в качестве примера изображена индикаторная диаграмма, характерная для растяжения низкоуглеродистой стали.

При удлинении, соответствующем точке  $A$ , образец начинает пластически деформироваться, точке  $B$  соответствует образование шейки на рабочей части образца, а точке  $C$  — разрушение образца.

На основании индикаторной диаграммы строят диаграмму условных напряжений в координатах условное напряжение — относительное удлинение (рис. 69,б).

Условное напряжение и относительное удлинение вычисляются по формулам:

$$\sigma = \frac{P}{F_0}; \quad e = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0},$$

где  $F_0$  — площадь поперечного сечения образцов в начале испытания;

$l_0, l_1$  — длина образцов до и после растяжения.

Диаграмму условных напряжений строят также и в координатах условное напряжение  $\sigma$  — сужение поперечного сечения  $q = \frac{F_0 - F_1}{F_0}$  (рис. 69, в), где  $F_0$  и  $F_1$  — площадь поперечного сечения образца до деформации и в конце данной стадии процесса растяжения. Диаграммы условных напряжений отличаются от индикаторных только масштабом. Поэтому максимум кривой на диаграммах условных напряжений соответствует началу образования шейки.

Условное напряжение  $\sigma_b$  при котором начинается образование шейки, называется пределом прочности (временным сопротивлением разрыву). Условное напряжение  $\sigma_s$ , при котором начи-

нается пластическая деформация образца, называется пределом текучести. Иными словами, предел текучести представляет собой условное напряжение, соответствующее границе между упругой и пластической зонами.

Условное напряжение не является действительным напряжением в материале, так как нагрузка здесь относится к начальному

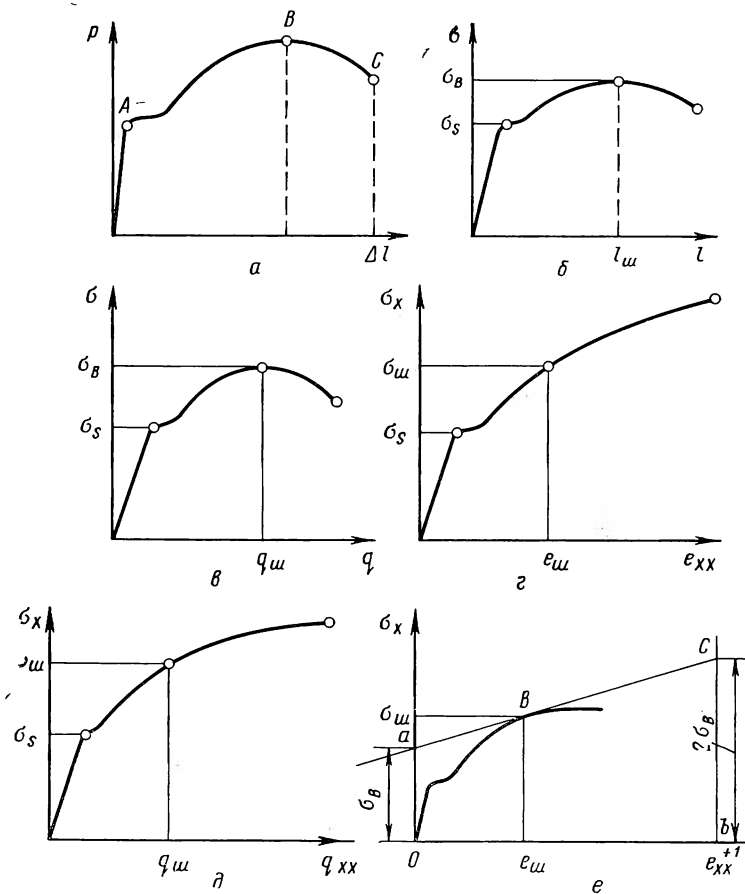


Рис. 69. Диаграммы растяжения:

*a* — индикаторная; *б* — условных напряжений первого и *в* — второго видов; *в* — истинных напряжений первого и второго видов; *г* — истинных напряжений первого вида и ориентировочная прямая

поперечному сечению образца  $\sigma = P/F_0$ . При малых деформациях различие между начальной площадью сечения образца  $F_0$  и площадью поперечного сечения  $F_x$  в процессе деформации невелико. В связи с этим погрешность между условным и истинным напряжением также невелика, поэтому предел текучести определяют как условное напряжение, что упрощает постановку опыта. При больших деформациях погрешность становится уже значительной.

Поэтому для определения действительной величины напряжений при растяжении строят диаграммы истинных напряжений в координатах истинное напряжение — относительное удлинение или истинное напряжение — сужение шейки (рис. 69, *г, д*). Первая из этих диаграмм носит название диаграммы истинных напряжений первого вида, а вторая — диаграммы истинных напряжений второго вида. Понятно, что на кривых истинных напряжений точка, соответствующая пределу прочности, уже ничем не примечательна.

Если считать, что деформации рабочей части образца осуществляются равномерно, то, исходя из условия постоянства объема, легко получить:

$$F_x = \frac{F_0 l_0}{e_x} = \frac{F_0 l_0}{l_0 + \Delta l} = \frac{F_0 l_0}{l_0 + e_{xx} l_0}, \text{ откуда } F_x = \frac{F_0}{1 + e_{xx}}.$$

В таком случае истинное напряжение  $\sigma_x$  определяется как отношение усилия  $P$  к площади поперечного сечения  $F_x$  образца:  $\sigma_x = P/F_x$ .

Начиная с момента образования шейки деформация рабочей части образца осуществляется неравномерно, и поэтому приведенные равенства для определения величин  $F_x$  и  $\sigma_x$  будут не справедливы.

Анализ экспериментальных данных показывает, что у большинства металлов и сплавов кривая истинного напряжения после начала образования шейки совпадает с касательной, проведенной через точку, соответствующую моменту образования шейки. Это обстоятельство дает возможность, экстраполируя касательную, приближенно определить истинное напряжение и после образования шейки.

На рисунке 69, *е* изображена диаграмма истинных напряжений в координатах истинное напряжение — относительное удлинение. Через точку *B*, соответствующую моменту образования шейки, проведена касательная к кривой истинных напряжений. Показано [4], что величины отрезков, которые отсекает касательная на нулевой и конечной ординатах, т. е. при  $e_{xx} = 0$  и  $e_{xx} = 1$ , соответственно равны  $\sigma_B$  и  $2\sigma_B$ . Таким образом, касательная к кривой, или, как еще говорят, ориентировочная прямая истинных напряжений, отсекает на нулевой ординате отрезок, численно равный пределу прочности и на конечной ординате — отрезок, равный удвоенному пределу прочности.

Уравнение ориентировочной прямой первого вида имеет вид:  $\sigma_x = \sigma_B (1 + e_{xx})$ .

На основании сформулированного в гл. III закона связи между обобщенным напряжением и обобщенной деформацией это равенство можно распространить на любое напряженное состояние:  $\sigma_i = \sigma_B (1 + e_i)$ .

В данном случае связь между деформациями и напряжениями аппроксимируется линейной функцией так, что при этом упругими деформациями пренебрегают. Если второй член правой части этого равенства принять равным нулю, то получим:  $\sigma_i = \sigma_B$ . При

горячей деформации предел прочности приблизительно равен пределу текучести  $\sigma_b \approx \sigma_s$ , поэтому  $\sigma_i = \sigma_b \approx \sigma_s$ , т. е. материал можно считать идеально пластическим.

## 2. Влияние химического состава и температуры на сопротивление деформации и пластичность

Пределы текучести, прочности, истинное сопротивление деформации, а также пластичность зависят от химического состава и структуры металла. Соответствующие данные можно найти в справочника или непосредственно из результатов опыта. На основании анализа опытных данных предложено много эмпирических формул. Например, Эжелунд предложил формулу для определения предела текучести, которая имеет следующий вид:

$$\sigma_s = (14 - 0,01 t) (1,4 + C + Mn + 0,3 Cr) \cdot 10^{-1} \text{ Мн/м}^2 \text{ (кг/мм}^2\text{)},$$

где  $t$  — температура;

C, Mn, Cr — содержание углерода, марганца и хрома, %.

Такие формулы, разумеется, не учитывают всех факторов, от которых зависит предел текучести например, величину предварительной пластической деформации, структуры металла и др.

С ростом предварительной степени деформации предел текучести растет быстрее, чем предел прочности, т. е. различие между ними уменьшается. Следовательно, в результате холодной обработки металл становится менее пластичным. Упрочнение, механизм которого был описан в гл. I, особенно интенсивно происходит в начале пластической деформации. При относительном удлинении, равном 50—60% и более, механические свойства металла изменяются менее интенсивно. Затем при некоторой величине степени деформации происходит разрушение.

Нагрев металла, осуществляемый после пластической деформации, дает возможность снова повысить его пластичность и уменьшить прочность. Этот процесс осуществляется в две стадии. При нагреве стали, например, первая стадия заканчивается при температурах 400—500°C. В этой стадии частичное восстановление механических свойств происходит без видимого изменения структуры. Она носит название возврата, и изменение свойств обусловлено снятием напряжений, возникших в результате упругого искажения пространственной решетки металла при пластической деформации. Вторая стадия начинается при температуре 550—650°C. При этом в процессе нагрева до более высоких температур происходит полное восстановление механических и физических свойств стали, сопровождаемое также и восстановлением структуры. Описанное явление носит название рекристаллизации. В процессе рекристаллизации появляются центры кристаллизации, из которых вырастают новые зерна с ненапряженной решеткой. Процесс образования и роста зерен продолжается до тех пор, пока внутренняя потенциальная энергия тела не приобретает ми-

нимально возможного значения. Рекристаллизация осуществляется за счет энергии, накопленной металлом в процессе пластической деформации. Центрами являются мельчайшие обломки зерен, пространственная решетка которых мало искажена. Эти обломки способствуют интенсивному образованию новых зерен потому, что их поверхность движется в сторону больших искажений, так как при этом энергия тела уменьшается и искажения частички или полностью исчезают.

Рекристаллизация усиливает пластическую деформацию за счет диффузии и самодиффузии (см. гл. I). В результате металл становится химически более однородным. В процессе рекристаллизации удельный вес металла несколько увеличивается, что свидетельствует об исчезновении ультрамикроскопических трещин, возникающих в процессе деформации и уменьшении плотности дислокаций. Эти обстоятельства способствуют росту пластичности и уменьшению сопротивления деформации.

Рассмотрим теперь понятие горячей и холодной деформации. В процессе деформации происходят два противоположных процесса: упрочнение и разупрочнение. От соотношения скоростей этих двух процессов зависит характер деформации. Если скорость упрочнения велика по сравнению со скоростью разупрочнения, то деформация считается холодной. Если скорость упрочнения равна скорости разупрочнения — деформация горячая. Резкой границы между горячей и холодной деформацией, вообще говоря, не существует, так что возможны промежуточные случаи.

Омеченное различие является, однако, слишком общим. Поэтому целесообразно по возможности уточнить температурную границу между горячей и холодной деформацией.

Максимальную температуру, при которой удается обнаружить явление рекристаллизации, можно назвать температурой начала рекристаллизации. Приблизительно ее можно определить по формуле А. А. Бочвара:

$$T_p = 0,4 T_{пл},$$

где  $T_p$  и  $T_{пл}$  — абсолютные температуры рекристаллизации и плавления, °К.

Эта формула является приближенной потому, что она не учитывает времени выдержки металла при данной температуре и степени предварительной деформации. Тем не менее понятие о температуре начала рекристаллизации позволяет ввести такое уточнение: холодной деформацией называется такая, которая происходит при температуре ниже температуры начала рекристаллизации; горячей деформацией называется такая, которая происходит при температуре выше температуры начала рекристаллизации.

Существует и другая классификация, предложенная С. И. Губкиным [4] (табл. I).

Холодная и горячая деформации находят наиболее широкое применение в процессах обработки металла давлением. Неплотная холодная деформация используется при так называемых «теплой»

Таблица 1  
Классификация видов деформации в зависимости от температуры

Вид деформации	Температура	Признаки вида деформации
Холодная	$< 0,3 T_{пл}$	Процессы разупрочнения полностью отсутствуют
Неполная холодная	$0,3—0,5 T_{пл}$	Происходит частичное разупрочнение в результате возврата, вызванное разогревом из-за выхода тепла в процессе деформации
Неполная горячая	$0,5—0,7 T_{пл}$	Рекристаллизация и разупрочнение происходят не полностью; наличие рекристаллизованной и деформированной структуры
Горячая	$0,7—0,9 T_{пл}$	В результате деформации упрочнения не происходит. Образуются новые рекристаллизованные равноосные зерна

прокатке, прессовании и волочении труднодеформируемых сплавов. Применение неполной горячей деформации нежелательно ввиду возникающих при этом больших напряжений в металле, которые могут привести к его разрушению.

Типичная для металлов зависимость между величиной зерна, температурой и степенью деформации изображена на рис. 70. При малых степенях деформации (обычно не более 8—15%) величина зерна не зависит от степени деформации. Этот участок диаграммы называют порогом рекристаллизации. С ростом температуры величина порога рекристаллизации уменьшается. При некоторой критической степени деформации, характерной для данной температуры, величина зерна резко возрастает, и затем с дальнейшим ростом деформации снова уменьшается. Отсюда следует важный вывод: для получения мелкозернистой структуры металла необходимо избегать критических степеней деформации.

Вид кривой, связывающей величину зерна со степенью деформации, является результатом следующих обстоятельств. При малых деформациях (соответствующих порогу рекристаллизации) последняя протекает внутри зерен, так что границы между зернами не нарушаются. Поэтому непосредственное соприкосновение соседних кристаллитов и взаимная перестройка их решетки для образования общего нового зерна затруднены. В этих условиях величина зерна не зависит от степени деформации. Когда степени деформации равны критическим начинается межкристаллическая деформация, однако число обломов зерен — центров кристаллизации еще невелико. В связи с этим число вновь образовавшихся зерен также мало, но зато величина их значительна (критическая

величина зерна). Склонность к росту зерна обусловлена происходящим при этом уменьшением уровня потенциальной энергии в связи с сокращением протяженности границ зерен и их искаженности. В дальнейшем с ростом деформации число центров кристаллизации продолжает возрастать, а величина зерен вследствие взаимных помех при их росте уменьшается.

На рис. 70 показано, что при данной степени деформации величина зерна увеличивается с ростом температуры. Объясняется

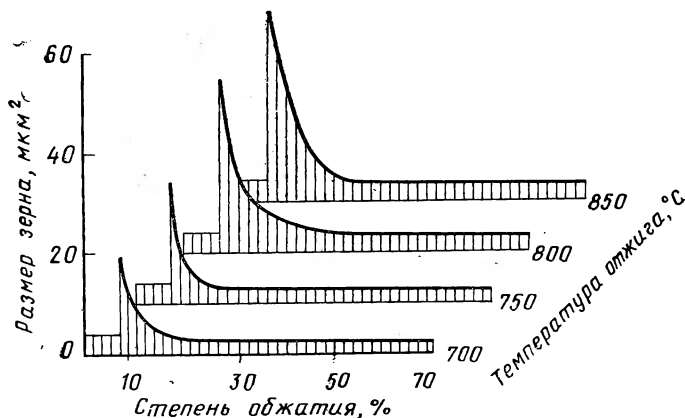


Рис. 70. Диаграмма рекристаллизации малоуглеродистой стали

это тем, что при высоких температурах происходит выравнивание ориентировки всех кристаллитов, за счет чего мелкие зерна сливаются в более крупные.

Многочисленные опыты показывают, что с ростом температуры истинное сопротивление деформации уменьшается. В. С. Курнаков установил, что с увеличением температуры все величины, характеризующие прочностные свойства металлов, уменьшаются по экспоненциальному закону:

$$K = K_0 e^{n(t_0 - t)}, \quad (272)$$

где  $K$  и  $K_0$  — некоторое значение сопротивления деформации при температурах  $t$  и  $t_0$ , причем  $t_0 < t$ ;

$n$  — константа.

Однако при температурах фазовых превращений наблюдается скачкообразный рост или (иногда) уменьшение сопротивления деформации (рис. 71). Рост объясняется тем, что в процессе фазового превращения пространственная решетка металлов сильно искажается. Уменьшение сопротивления деформации и соответственный рост пластичности являются результатом действия напряжений второго рода, возникающих при выделении фазы большего удельного объема (по отношению к исходной фазе) в температурном интервале фазового превращения.



Известно, что при наличии хотя бы небольших примесей в основном металле также наблюдается упругое искажение кристаллографической решетки, что вызывает повышение сопротивления деформации металлов. Сопротивление деформации значительно возрастает, когда примеси находятся в мелкодисперсном состоянии и почти не оказывают влияния, когда она имеет вид более

$\sigma_B, \text{MN/M}^2 (\text{КГ/ММ}^2)$

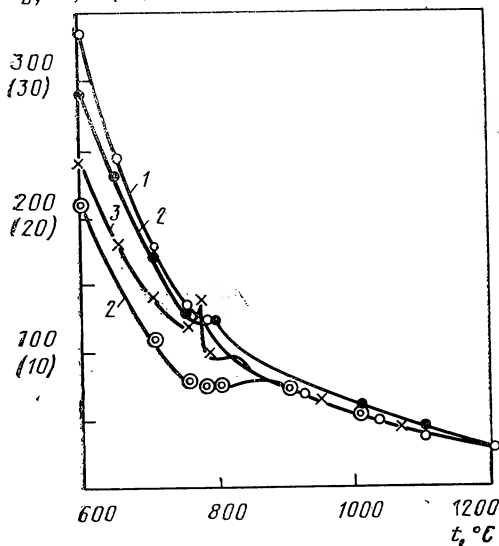


Рис. 71. Зависимость предела прочности углеродистой стали от температуры по данным М. В. Брацкого и С. И. Францевича:  
1 — 0,55% С; 2 — 0,45% С; 3 — 0,3% С

крупных образований. В связи с этим обстоятельством в ряде случаев при высоких температурах сопротивление деформации несколько увеличивается с ростом температуры. Объясняется это тем, что при низких температурах примеси были в коллоидном состоянии, а при высоких температурах молекулы примесей в результате интенсивного теплового движения диффундируют в металле как мелкодисперсная фаза и искажают решетку.

Повышение сопротивления деформации сопровождается, как правило, некоторым понижением пластичности из-за искажения решетки. Но уменьшение пластичности

может явиться также и результатом появления в металле хрупких или легкоплавких образований. Например, пластичность стали понижается в результате образования хрупкой фосфидной эвтектики или легкоплавкой сернистой эвтектики. Первая из них обуславливает наличие так называемой хладноломкости, а вторая — явление красноломкости.

Как отмечалось ранее, с ростом температуры пластичность металла увеличивается. Однако если температура нагрева чрезмерно велика, то пластичность снова уменьшается. Сильное понижение пластичности при высоких температурах объясняется явлением **перегрева** — чрезмерного роста зерен под влиянием высокой температуры. В процессе дальнейшего роста температуры наблюдается уже переход металла, при котором кислород воздуха диффундирует в металле, вызывая его окисление по границам зерен. В результате этого при незначительном воздействии происходит разрушение металла по границам окисленных участков.

Температурный закон Н. С. Курнакова можно получить, решая плоскую упругую задачу. Пусть верхний порец бруска прямо-

угольного сечения жестко заделан, а к нижнему торцу его приложена сила, вызывающая в его поперечном сечении напряжение  $\sigma_x$  (рис. 72,а). Деформация плоская. К нижнему торцу бруса подводится тепло. Тепловой поток равномерно распределен по поперечному сечению бруса и является установившимся. При принятых допущениях можно считать, что температура в каждом поперечном сечении бруса постоянна, т. е. не зависит от координаты  $y$  и линейно уменьшается при переходе от нижнего торца к верхнему (рис. 72,б). Это свидетельствует о гипотезе плоских сечений и, например, для сечения  $y=0$  решение (170) можно написать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= (c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}) (A + B); \\ \sigma_x &= -(c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) (A - B) + c_3; \\ \sigma_y &= -(c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) (A - B) + f(x). \end{aligned} \right\}$$

Как следует из рис. 72,б, с ростом  $x$  температура увеличивается, поэтому напряжение  $\sigma_x$  уменьшается. Однако оно не может стать отрицательным. Поэтому допустим, что  $c_1=0$ . Далее примем, что при любом значении  $y$  напряжение  $\sigma_y=0$ , т. е.

$$f(x) = (c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) (A - B).$$

Таким образом, мы приходим к системе:

$$\tau_{xy} = c_2 (A + B) e^{-mx}; \quad \sigma_x = c_2 (A - B) e^{-mx} + c_3. \quad (273)$$

Это решение удовлетворяет приближенному уравнению равновесия

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2}{h} \tau_{xy} = 0, \quad \text{если } m = \frac{2}{h} \frac{A+B}{A-B}, \quad (274)$$

что свидетельствует о правильности решения (см. пункт 6, гл. V).

Распределение температуры по длине бруса выражается уравнением прямой линии

$$t = a + bx. \quad (275)$$

Используя граничные условия  $x=0; t=t_0; x=l$  и  $t=t_1$ , получим, что  $b = \frac{t_1 - t_0}{l}; a = t_0$ .

Таким образом, из уравнения (275) следует, что  $x = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} l$  и, согласно системе (273), напряжение

$$\sigma_x = c_2 (A - B) e^{-me \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}} + c_3.$$

Примем  $c_3=0$ . Граничные условия для определения констант будут следующие (рис. 72, в):  $t=t_0; \sigma_x=K_0; t=t_1; \sigma_x=K_1$ . Эти условия дают

$$c_2 (A - B) = K_0; \quad m = \frac{1}{l} \ln \frac{K_0}{K_1}. \quad (276)$$

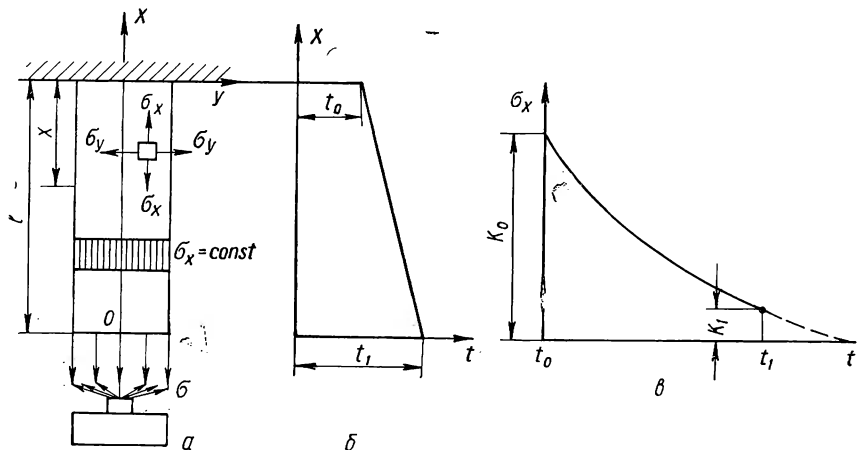


Рис. 72. Задача о потоке тепла в растягиваемом брусе:

*a* — схема нагружения; *b* — распределение температуры по длине; *c* — зависимость истинного напряжения от температуры

Считая  $\sigma_x$  равным истинному сопротивлению деформации  $K$  при температуре  $t$ , будем иметь:

$$K = K_0 e^{\frac{t_0 - t}{t_1 - t_0} \ln \frac{K_0}{K_1}} \quad (277)$$

Это выражение и есть температурный закон (272) Н. С. Журнова.

### 3. Возврат и рекристаллизация с позиций теории дислокаций

С. И. Журков с сотрудниками<sup>1</sup> проводили опыты на растяжение, в которых измеряли время  $\tau$  от момента приложения нагрузки до разрыва образца, названное ими долговечностью, при различных величинах напряжения  $\sigma$  и температуры  $T$ . Испытанию подвергался широкий круг веществ — металлы, стекла и пластмассы (рис. 73). На основании опытов они получили такую зависимость:

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{Q - V\sigma}{KT}}, \quad (278)$$

где  $\tau_0 \approx 10^{-13}$  сек — константа, численно равная периоду собственных колебаний атомов в твердом теле;

$Q$  — начальный энергетический барьер напряженного тела, который равен энергии связи атомов в кристаллической решетке, т. е. теплоте сублимации, ккал/моль;

<sup>1</sup> См., например, обзор В. И. Бетехтина «Температурно-временная зависимость прочности металлов и сплавов». Изд. Ленинградского дома научно-технической пропаганды. 1965.

$V$  — величина, имеющая размерность объема, так называемый активационный объем;

$K$  — постоянная Больцмана,  $1,38 \cdot 10^{-16}$  эрг/гр  $\approx 0,1$  кГ/мм<sup>2</sup>°С  $\approx 1$  Мн/м<sup>2</sup>°С.

Перепишем уравнение (278) в виде:

$$\sigma = \frac{Q}{V} - \frac{KT}{V} \ln \frac{\tau}{\tau_0}. \quad (279)$$

Таким образом, логарифм долговечности линейно связан с напряжением при растяжении (см. рис. 73).

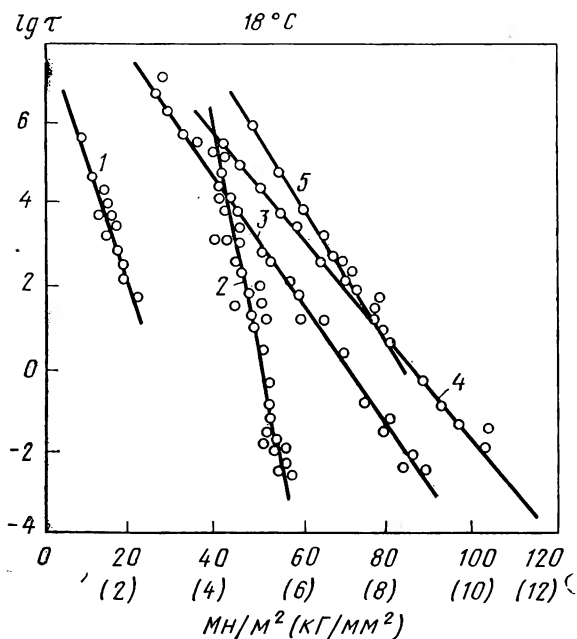


Рис. 73. Зависимость разрывного напряжения  $\sigma$  от длительности нагрузки  $\tau$  при комнатной температуре:

1 — поливинилхлорид; 2 — алюминий (поликристалл); 3 — оргстекло (полиметилметакрилат); 4 — цинк (поликристалл); 5 — целлюлоза

Активационный объем  $V$  связан с дислокационной структурой металлов и равен произведению атомной площади, охваченной единичным актом скольжения, на расстояние, включающее то число атомов, которые движутся во время процесса скольжения. Следовательно, произведение  $V\sigma$  в уравнении (278) есть работа, произведенная приложенным напряжением во время единичного акта скольжения.

Дислокации в деформированном металле образуют частую трехмерную сетку. При движении они взаимно пересекаются с притяжением и отталкиванием. Расчеты показывают, что отношение

постоянной Больцмана к активационному объему  $V$ , в котором происходит такое пересечение, представляет собой величину, на много порядков меньшую единицы. Поэтому в уравнении (279) второй член во много раз меньше первого. В результате сопротивление деформации металла сравнительно мало зависит от температуры в широком интервале ее изменения. Например, жаропрочность сплава нимоник 105 почти не зависит от температуры, пока последняя не достигнет  $700^{\circ}\text{C}$ . Но большинство металлов все же постепенно теряет прочность и при более низких температурах. Главная причина этого явления в том, что трехмерная сетка дислокаций при нагреве теряет стабильность: величина ее ячеек начинает возрастать.

Установлено, что скорость возврата, т. е. падение напряжения, связана со скоростью роста ячеек сетки прямо пропорционально кубу приложенного напряжения.

Пластическая деформация оказывает влияние, противоположное возврату, и измельчает трехмерную сетку дислокаций, подобно тому как она измельчает зерно. Действительно, каждая дислокация задерживается, например, в местах, где сетка измельчена, выгибается между точками закрепления, что приводит к увеличению ее длины. Это происходит во многих местах, что и приводит к увеличению средней плотности дислокаций и измельчению сетки.

При некоторой температуре начинается новый вид возврата — рекристаллизация. Трехмерная сетка дислокаций в процессе постепенного роста ее ячеек внезапно заменяется на более крупные в тех местах, где через нее прорастает граница нового зерна, которое можно назвать субзерном. Таким образом, в процессе рекристаллизации сопротивление деформации снижается за счет внезапного укрупнения, являющегося следствием миграции границ субзерен.

Исследования показывают [5], что напряжения от растягивающей нагрузки даже в пределах упругости влияют на процесс рекристаллизации. Это влияние проявляется в том, что рекристаллизация в растягиваемых образцах начинается раньше, чем в образцах без приложенной нагрузки. Кроме того, растягивающие напряжения создают преимущественную ориентацию зерен и кристаллографических плоскостей в них. Рассмотрим условие миграции границы зерна, расположенной перпендикулярно главному напряжению  $\sigma_1$ , возникающему в образце при его одноосном растяжении (рис. 74). Мигрирующая граница  $ab$  разделяет области  $i$  и  $j$ , в которых кристаллографические направления соответственно равны  $i$  и  $j$ . Из условия равновесия  $\sigma_1^i = \sigma_1^j$ . Но  $i \neq j$ , следовательно, модули упругости  $E$  и упругие деформации  $e$  областей  $i$  и  $j$  не равны между собой, т. е.  $E^i \neq E^j$  и  $e^i \neq e^j$ . Напряжение  $\sigma_1^i$  и  $\sigma_1^j$  на

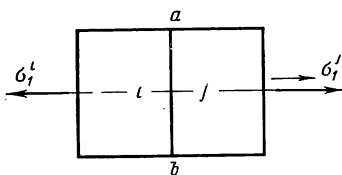


Рис. 74. Взаимное расположение границы  $a$  в двух субзернах относительно направления главных напряжений

перемещениях, отвечающих относительным деформациям  $e_1^i$  и  $e_1^j$ , соответственно совершают работу

$$W^i = \frac{1}{2} \sigma_1^i e_1^i = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^{i2}}{E^i}; \quad W^j = \frac{1}{2} \sigma_1^j e_1^j = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^{j2}}{E^j}.$$

Отсюда  $W^i/W^j = E^j/E^i$ .

Если, например,  $E^i > E^j$ , то  $W^i < W^j$ .

Процесс миграции границы  $ab$  должен подчиняться условию наименьшей работы, в соответствии с которым энергия системы приобретает минимальное значение, когда  $W^i$  станет равна  $W^j$ . Отсюда следует, что если  $E^i > E^j$ , то область  $i$  будет разрастаться за счет области  $j$  до тех пор, пока энергия системы не приобретает минимального значения.

На основании изложенного ясно, что из двух зародышей  $i$  и  $j$ , в районе которых деформированная матрица имеет одинаковые упругие искажения, предпочтительнее будет расти тот, у которого модуль упругости в направлении растяжения меньше.

#### 4. Последствие и релаксация

Подвергнем образец пластическому растяжению и при степени деформации  $e$ , которой соответствует напряжение  $\sigma_1$ , закрепим зажимы испытательной машины, чтобы величина деформации юсталалась постоянной (рис. 75, а). Через некоторый промежуток времени мы обнаружим, что величина напряжения уменьшится. Наблюдения показывают, что скорость изменения напряжения с течением времени уменьшается, а сама величина напряжения асимптотически приближается к некоторому предельному значению. Описанный процесс уменьшения напряжений с течением времени при неизменной деформации называется релаксацией.

Явление релаксации объясняется различием в скорости распространения упругой и пластической деформации в металлах: известно, что упругая деформация распространяется в металле со скоростью звука, а пластическая деформация гораздо медленнее — со скоростью, обусловленной скоростью движения инструмента<sup>1</sup>.

В первый момент после прекращения активной деформации ( $t = t_0$ ) напряжения имеют наибольшую величину, так как доля деформации относительно велика. Через промежуток времени  $t_1$  в связи с перераспределением упругой и пластической деформаций напряжения уменьшаются. Через промежуток времени  $t_2$  напряжения уменьшаются в еще большей мере и т. д. (рис. 76, а).

Очевидно, что ход рассуждений не изменится, если мы будем сравнивать величину напряжений при разных скоростях деформации

<sup>1</sup> Скорости распространения поперечных колебаний в упругой и пластической среде соответственно равны  $V_{упр} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$  и  $V_{пл} = \sqrt{\frac{G'}{\rho}}$ , где  $G, G'$  — модули сдвига в упругой и пластической средах,  $\rho$  — плотность материала

ции. Рис. 76, б наглядно иллюстрирует, что при данной величине деформации с увеличением скорости деформации напряжения возрастают. На правой части рисунка показана зависимость предела текучести от скорости деформации: с ее ростом предел текучести увеличивается. Скорость деформации является одним из параметров, характеризующих состояние вещества. Предел текучести представляет собой физическую константу, характеризующую свойства вещества. Таким образом, из рис. 76 следует положение, согласно

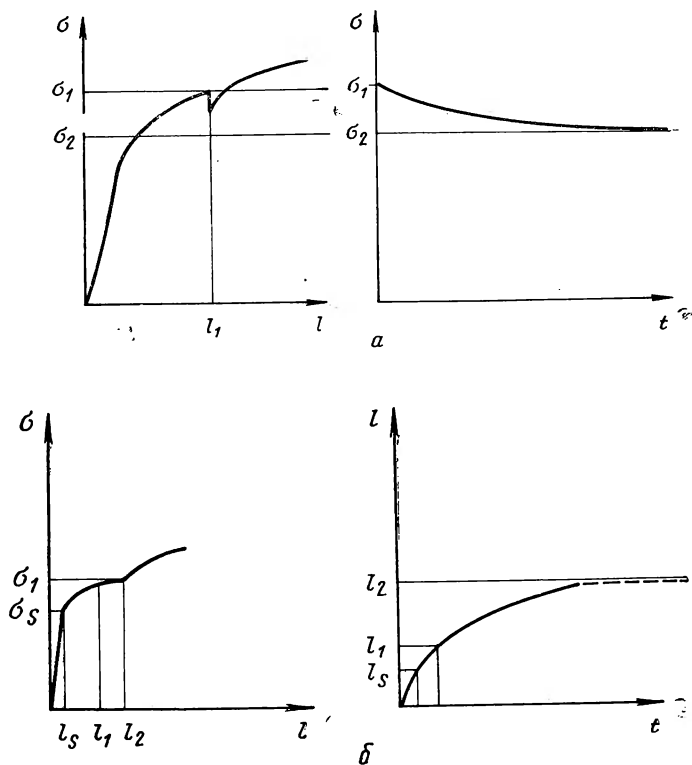


Рис. 75. Схемы, поясняющие явления:  
а — релаксации; б — последействия

которому физические свойства вещества являются функцией его состояния.

При очень высокой скорости пластическая деформация не успевает развиваться. Таким образом, при очень больших скоростях деформации образец разрушается хрупко — почти без предварительных пластических деформаций. Релаксация напряжений, т. е. переход упругой деформации в пластическую, может иметь место в тех случаях, когда в начале деформации пластическое течение отсутствует и наблюдается только упругая деформация.

Явление релаксации осложняется рядом физических процессов, протекающих в металле. Например, если в процессе нагружения температура выше той, при которой начинается релаксация, то релаксация ускоряется, поскольку напряжения при рекристаллизации в большей или меньшей мере снимаются. Релаксация ускоряется за счет диффузии и самодиффузии, в результате которых происходит перераспределение напряжений. Для уменьшения релаксации в сплавы вводят такие компоненты, которые после соответст-

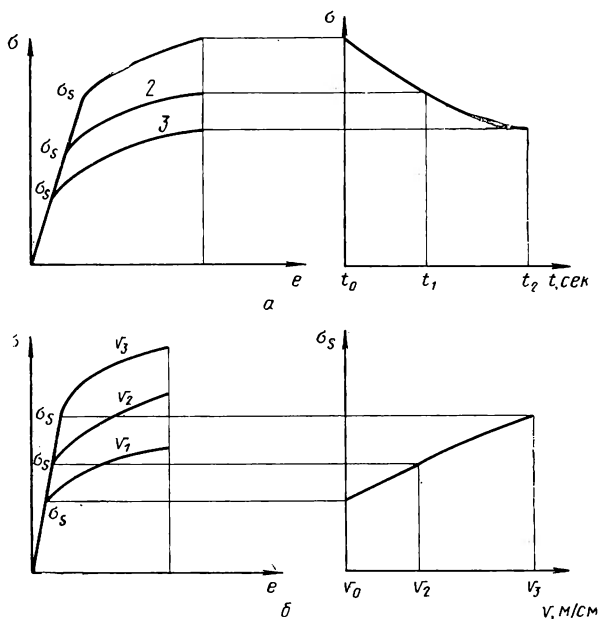


Рис. 76. Связь между деформациями и напряжениями: а — в разные моменты времени (1 — в начале нагружения; 2 — через  $t_1$  сек; 3 — через  $t_2$  сек); б — при разных скоростях деформации

вующей термической обработки дают мелкодисперсные карбидные фазы, упрочняющие металл.

С явлением релаксации тесно связано явление последействия. Прервав внезапно процесс нагружения тела в некоторой точке, которой соответствует степень деформации  $\epsilon_1$  (см. рис. 75, б), и оставим напряжение постоянным. Обнаружим, что с течением времени деформация будет возрастать сначала быстро, а потом все медленней, стремясь к некоторому предельному значению (см. правую часть рис. 75, б). Такое явление роста деформации при постоянном напряжении носит название последействия. Явление последействия объясняется тем, что зерна, менее благоприятно расположенные по отношению к действующей растягивающей силе (или менее пластичные), получают дополнительные напряжения растяжения, а



более пластичные — дополнительные напряжения сжатия. С течением времени под влиянием растягивающих напряжений от внешней силы и растягивающих дополнительных напряжений в менее пластичных зернах последние будут пластически деформироваться. При этом упругая деформация в них переходит в пластическую, что и приводит к росту остаточной деформации при постоянной нагрузке, т. е. к явлению последействия. Если же деформацию сохранять заданной, то будет происходить падение нагрузки, т. е. релаксация.

Частным случаем последействия является ползучесть. В процессе ползучести при постоянном напряжении скорость деформации также остается постоянной и, следовательно, деформация не имеет предела.

Релаксацию можно рассматривать как результат перемещения дислокаций под действием остаточных напряжений. Ограничение падения напряжений при релаксации происходит за счет прочности трехмерной сетки дислокаций, при которой дальнейшее движение дислокаций невозможно.

Последействие — движение дислокаций в поле постоянных внешних убывающих напряжений и увеличивающихся (за счет упрочнения от измельчения сетки) внутренних. Ползучесть — движение дислокаций при эффективном разупрочнении, когда скорость упрочнения в результате измельчения дислокационной сетки равна скорости разупрочнения в результате аннигиляции дислокаций.

Для проявления последействия в различных средах требуется различное время: доли секунды, часы, сутки, годы или века, как это имеет место, например, для случаев пластического течения пластов земной коры.

## 5. Скорость деформации, прочность и пластичность

Относительное удлинение при растяжении в любой данный момент деформации выражается соотношением:  $de_{xx} = dl/l$ , где  $l$  — длина образца в данный момент растяжения.

Относительной скоростью деформации или для краткости просто скоростью деформации назовем произвольную относительной деформации по времени:

$$\dot{e}_{xx} = \frac{de_{xx}}{dt}$$

$$\text{или } \dot{e}_{xx} = \frac{dl}{dt} \frac{1}{l}.$$

Производная  $dl/dt$  — линейная скорость растяжения:  $c = dl/dt$ .

Таким образом, скорость деформации можно выразить и таким соотношением:  $\dot{e}_{xx} = c/l$ .

В большинстве случаев скорость деформации характеризуют ее средним значением в процессе растяжения:

$$u = \frac{1}{l} \int_0^l \dot{e}_{xx} dx. \quad (280)$$

Эта формула имеет общий характер и может быть применена для любого процесса обработки металлов давлением, если под величиной  $l$  понимать рабочую длину зоны деформации.

В качестве примера выведем формулу для определения средней скорости деформации при продольной прокатке (см. рис. 33).

Деформацию при прокатке примем в логарифмическом виде:

$$e_{xx} = \ln \frac{h_0}{h_x}.$$

$$\text{Тогда } de_{xx} = - \frac{dh_x}{h_x}$$

и скорость деформации

$$\dot{e}_{xx} = \frac{de_{xx}}{dt} = - \frac{1}{h_x} \frac{dh_x}{dt}.$$

Так как  $dx = c_x dt$ , то

$$dt = \frac{dx}{c_x} \approx \frac{dx}{c_B} \text{ и } \dot{e}_{xx} = \frac{1}{h_x} \frac{dh_x}{dx} c_B, \quad (281)$$

где  $c_B$  — окружная скорость валков.

Подставляя значение скорости деформации в равенство (280), получим:

$$u = \frac{1}{l} \int_0^l \dot{e}_{xx} dx = \frac{c_B}{l} \int_0^l \frac{1}{h_x} \frac{dh_x}{dx} dx = \frac{c_B}{l} \int_{h_1}^{h_0} \frac{dh_x}{h_x}.$$

Интегрируя и подставляя пределы, будем иметь:

$$\dot{u} = \frac{c_B}{l} \ln \frac{h_0}{h_1}. \quad (282)$$

Разлагая выражение логарифма в ряд и используя его первые два члена, получим известную формулу А. И. Целикова [8]:

$$u = \frac{c_B}{l} \frac{\Delta h}{h_0}. \quad (283)$$

Последнее выражение можно найти и другим путем. Средняя скорость деформации равна  $u = \varepsilon/t$ . Относительная конечная главная деформация равна для случая прокатки  $\varepsilon \approx \Delta h/h_0$ . Время прокатки равно длине очага деформации, поделенной на окружную скорость валков  $t \approx l/c_B$ . Используя эти соотношения, легко получить формулу (283). Следует иметь в виду, что истинная скорость в данной точке очага деформации при прокатке может значительно отличаться от средней по очагу.

Опыты показывают, что при деформации в холодном состоянии предел прочности мало зависит от скорости и заметно зависит от величины самой деформации. С ростом температуры влияние скорости становится все значительнее, но величина степени деформации оказывает все меньшее влияние на прочностные характеристики. Эта связь между прочностью, температурой и скоростью деформации объясняется тем, что при высокой скорости деформации (или при низкой температуре) наклеп снимается лишь частично. Кроме того, для начала течения с большей скоростью необходимо сделать подвижной большую долю дислокаций и сообщить им большую скорость. Следовательно, течение начинается при больших напряжениях, так как начальное сопротивление деформации возрастает.

Опыты<sup>1</sup> (рис. 77) показывают, что при температурах 200, 400 и 500°C у малоуглеродистой стали в некотором интервале скоростей предел прочности уменьшается с ростом скорости деформации. Это явление можно объяснить следующим образом. Влияние скорости деформации на пластичность металла в данном случае обусловлено одновременным действием двух факторов, влияние которых прямо противоположно: с ростом скорости деформации пластичность уменьшается за счет упрочнения. Вместе с тем при увеличении скорости деформации происходит все больший нагрев металла, в результате чего пластичность металла повышается за счет развития диффузионных процессов деформации и разупрочнения. Пластичность металла с ростом скорости может как повышаться, так и понижаться в зависимости от того, какой из указанных выше процессов оказывает в данных условиях обработки большее влияние.

Скорость деформации при растяжении на испытательных машинах находится в пределах  $10^{-5}$ — $10^{-2}$  сек<sup>-1</sup>. Опыты показывают, что в таком интервале скорость деформации оказывает сравнительно малое влияние на истинное сопротивление деформации. Испытания в интервале изменения скоростей деформаций  $10^{-5}$ — $10^{-2}$  сек<sup>-1</sup> часто называют статическими. В процессах обработки металлов скорости деформаций значительно выше, чем в процессе статических механических испытаний. Например, при прокатке скорость деформации обычно лежит в пределах от 1 до 300 сек<sup>-1</sup> и иногда достигает 1200 сек<sup>-1</sup>. Отсюда появляется необходимость учета влияния скорости деформации при проведении различных расчетов, связанных с определением напряжений и усилий в процессах обработки металлов давлением.

Влияние скорости деформации можно учесть при помощи так называемого скоростного коэффициента, представляющего собой отношение истинного сопротивления деформации при данной скорости деформации к истинному сопротивлению при скорости, соответствующей статическим испытаниям. В качестве одной из величин, характеризующих истинное сопротивление деформации, можно взять предел прочности. Скоростной коэффициент определяется с

<sup>1</sup> А. Надаи. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. I. ИЛ., 1954. 648 с. с ил.; Т. 2. М., «Мир», 1969. 863 с. с ил.

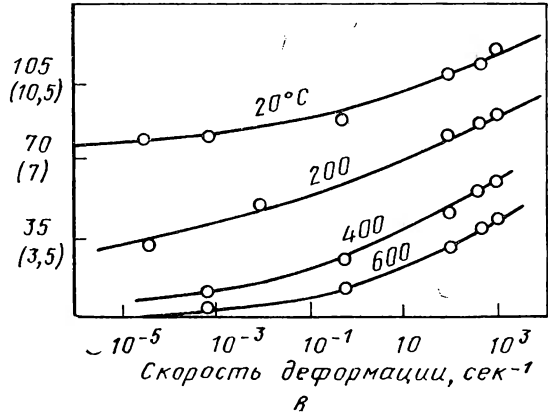
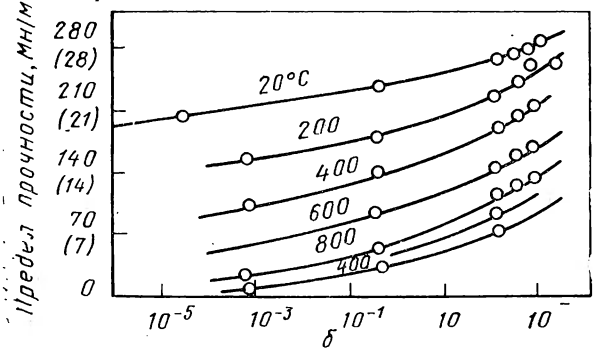
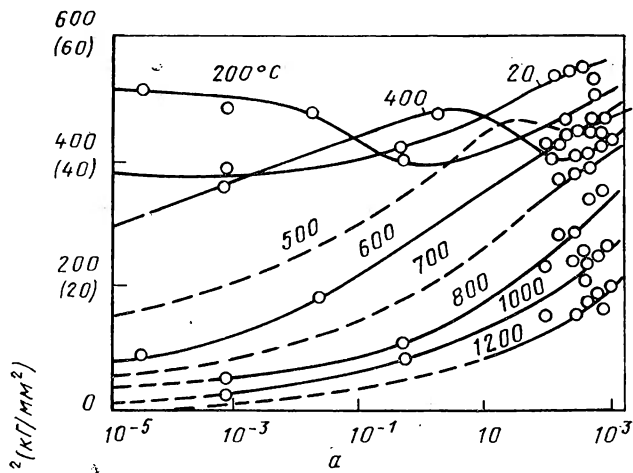


Рис. 77. Зависимость предела прочности от скорости деформации и температуры:  
 а — малоуглеродистой стали; б — меди; в — алюминия

использованием упомянутых выше опытных данных Надаи и Менд-  
жойна.

Примем, что скорость деформации в процессе статических ис-  
пытаний равна  $10^{-2} \text{ сек}^{-1}$ . Взяв значение предела прочности при  
других, более высоких скоростях деформации и разделив их на зна-  
чения предела прочности при  $10^{-2} \text{ сек}^{-1}$ , получим значения скоро-  
стного коэффициента, по которым легко построить кривые, харак-  
теризующие зависимость и величину этого коэффициента от ско-  
рости деформации (рис. 78). Ю. М. Чижиков [6] показал, что при

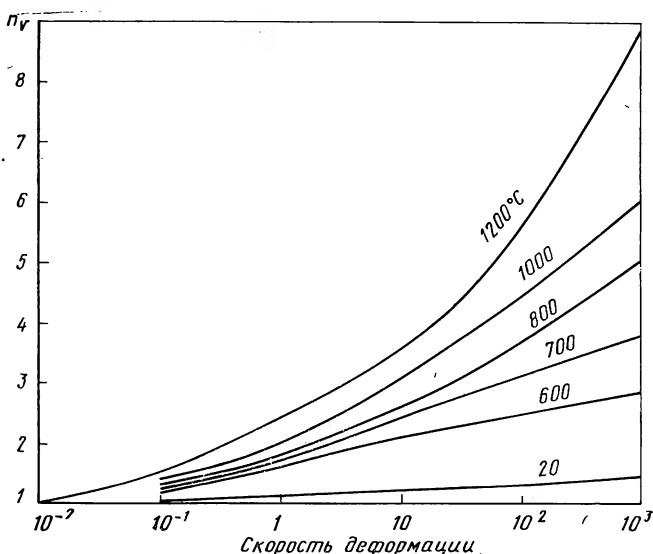


Рис. 78. Кривые скоростных коэффициентов для стали

прокатке влияние скорости деформации проявляется в значительно  
меньшей мере, чем при растяжении.

В исследованиях [7] было отмечено, что сопротивление дефор-  
мации не определяется мгновенными значениями термомеханиче-  
ских параметров деформации, а в значительной мере зависит от  
всей «истории» развития деформации во времени, начиная с мо-  
мента, когда структура металла равновесна. Поэтому при одних  
и тех же эквивалентных (средних) значениях степени и скорости  
деформации сопротивление деформации будет различным для слу-  
чаев прокатки, осадки растяжения и т. д.

Рассматривая процесс деформации как совокупность упрочне-  
ния и разупрочнения, А. И. Целиков и В. А. Персиянцев [8] пред-  
ложили уравнение:

$$\sigma = \sigma_0 + E' \frac{u}{A} \left( 1 - e^{-A \frac{\sigma}{u}} \right),$$

где  $E'$  — модуль упрочнения;

$A$  — коэффициент, учитывающий релаксацию;

$u$  — скорость деформации;

$\epsilon$  — степень деформации;

$\sigma_0$  — начальная величина истинного сопротивления деформации.

Эта формула качественно правильно учитывает влияние важнейших факторов горячей деформации.

При рассмотрении деформации можно использовать теорию наследственной среды, предложенную Больцманом и развитую Вольтера. В основе этой теории лежит принцип суперпозиции деформаций. В силу этого принципа влияние на деформацию напряжения  $\sigma(\tau)$ , действующего в момент  $\tau$ , не нарушается напряжениями, действующими в другие моменты времени. Поэтому

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t \varphi(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (284)$$

где  $\epsilon(t)$  — деформация, создаваемая напряжением  $\sigma(t)$ , действующим в текущий момент времени  $t$ , а под знаком интеграла — сохраняющаяся до текущего времени доля деформации, вызываемая напряжением  $\sigma(\tau)$ , действовавшим в момент  $\tau$  в течение времени  $d\tau$ .

Из изложенного следует, что имеются две принципиальные возможности определения сопротивления деформации: 1) из опытов в условиях, близких к реальным процессам обработки металлов давлением; 2) из простого эксперимента (например, опытов на растяжение) с привлечением физических уравнений деформируемых сред и реологических моделей последних. Из реологических моделей наиболее часто пытались использовать уравнение Максвелла, которое учитывает два важнейших свойства реальных сред — упругость и вязкость. Общая деформация системы складывается из деформации упругого и вязкого элементов:  $e = e_y + e_v$ .

Деформация упругого элемента описывается законом Гука, а сопротивление вязкого элемента — законом Ньютона для вязкой жидкости:

$$e_y = \frac{\sigma}{E}; \quad \sigma = \mu e_v$$

или в приращениях за время  $dt$ :

$$de_y = \frac{d\sigma}{E}. \quad (285)$$

Складывая эти выражения и введя обозначение  $\mu/E = \tau$ , получим уравнение Максвелла для вязко-упругого тела:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{de}{dt} - \frac{\sigma}{\tau}. \quad (286)$$

Однако для металлов линейная зависимость сопротивления деформации от скорости не соответствует действительности.

М. А. Зайков [9] предложил, основываясь на термодинамических условиях деформирования, следующую зависимость:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \left( \frac{\dot{e}}{\dot{e}_0} \right)^\alpha, \quad (287)$$

где  $\alpha < 1$  — показатель скоростной зависимости.

Легко видеть, что соотношение (287) прямо вытекает из закона связи (222) между скоростью обобщенной деформации и обобщенным напряжением. Действительно, из уравнения (222) мы получим

$$\dot{e}_i = \dot{e}_s \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_s} \right)^{n-\nu}$$

или, учитывая, что  $\nu = \pm 1$ , и опуская его для краткости записи, получим:

$$\dot{e}_i = \dot{e}_s \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_s} \right)^n. \quad (288)$$

Для технологических расчетов можно обобщить механическую модель упруго-вязкого течения, предполагая, что уравнение вязкого элемента отлично от линейного, характерного для вязкой жидкости и это уравнение можно принять в виде (288). При этом предположении легко вывести уравнение для случая нелинейного упруго-вязкого тела. Расположим упругий и вязкий элемент последовательно. Тогда полная деформация выражается равенством:  $de_i = de_y + de_b$ . По-прежнему  $de_y = \frac{d\sigma}{E}$ , в соответствии с равенством (288)

$$d\dot{e}_b = e_s \left( \frac{\sigma}{\sigma_s} \right)^n dt.$$

Тогда

$$de_i = \frac{d\sigma_i}{E} + \dot{e}_s \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_s} \right)^n dt$$

$$\text{или } \frac{d\sigma_i}{dt} = E \frac{de_i}{dt} - E \dot{e}_s \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_s} \right)^n. \quad (289)$$

Это уравнение можно записать в общем виде:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{de}{dt} - E \varphi(\sigma_i), \quad (290)$$

где  $\varphi(\sigma_i)$  — функция, вид которой зависит от конкретного способа аппроксимации кривой напряжение — скорость деформации.

## 6. Влияние ультразвуковых колебаний на механические свойства металлов

Упругие колебания представляют собой периодическое изменение состояния среды. Когда частота колебаний лежит в пределах от 16 до 16 000 в секунду, то упругие волны воспринимаются как звук. Если частота колебаний выше 16 000, то колебания называются ультразвуковыми. Верхний предел частот ультразвуковых колебаний соответствует тепловым колебаниям атомов в твердых телах, т. е. равен  $10^{13}$  *гц*.

Явление распространения колебаний в среде называется волной. Двумя основными типами упругих волн являются продольные и поперечные. Если траектория частиц среды параллельна направлению распространения волны, то такая волна называется продольной. Если же траектория частиц перпендикулярна направлению волны, то волна называется поперечной или сдвиговой.

В технике наиболее часто применяют продольные волны, т. к. они легко генерируются, обнаруживаются и концентрируются в виде пучка с небольшим углом расхождения. При распространении волн происходит перенос энергии без переноса вещества, так как каждая частица колеблется около своего положения равновесия.

Опыты показывают, что под воздействием ультразвуковых колебаний наблюдается «акустическое разрушение» и «акустическое упрочнение» металлов [10]. Разупрочнение наблюдается в процессе деформации металлов при наличии ультразвуковых колебаний и выражается в снижении истинного сопротивления при данной величине деформации. Это хорошо иллюстрирует рис. 79,а: наложение ультразвуковых колебаний при напряжениях выше предела текучести приводит к снижению истинного сопротивления деформации примерно на 40% (кривая 1). После включения колебаний истинное напряжение при дальнейшей деформации снова достигает первоначального значения. При возобновлении колебаний сопротивление деформации снова уменьшается. Если весь процесс растяжения осуществляется при наличии ультразвуковых колебаний, то кривая напряжение — деформация располагается ближе к оси абсцисс (кривая 2).

Описанное явление является результатом действия дополнительной энергии ультразвуковых колебаний, которое интенсифицирует зарождение дислокаций и их скольжение. В течение одного полупериода колебаний переменное напряжение ультразвука складывается со статическим, а в течение другого — вычитается. В первом полупериоде суммарное напряжение будет превышать его величину, необходимую для деформации в обычных условиях. При этом большее число дислокаций преодолевает препятствия и вызывает интенсивную пластическую деформацию.

Установлено, что при надлежащем подборе мощности ультразвуковых колебаний можно получить заметное разупрочнение даже у высокопрочных материалов: нержавеющей стали, бериллия, вольфрама и др. При достижении некоторого определенного для данного металла уровня акустической энергии пластическая дефор-



мация будет осуществляться при комнатной температуре даже без приложения внешней нагрузки. При этом монокристаллы деформируются двойникованием, а поликристаллические тела разрушаются по границам зерен.

На рис. 79,б показано, что с ростом интенсивности ультразвуковых колебаний напряжение в процессе растяжения алюминия

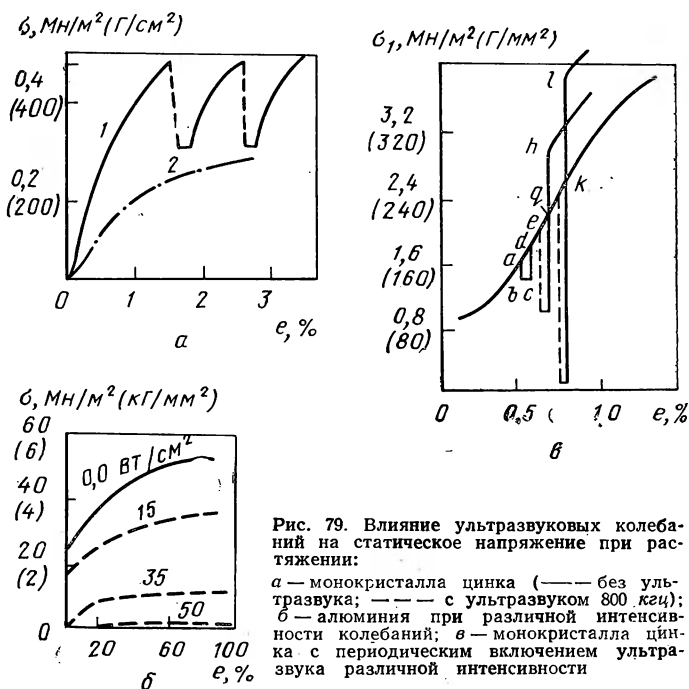


Рис. 79. Влияние ультразвуковых колебаний на статическое напряжение при растяжении:

а — монокристалла цинка (— без ультразвука; --- с ультразвуком 800  $\text{кгц}$ ); б — алюминия при различной интенсивности колебаний; в — монокристалла цинка с периодическим включением ультразвука различной интенсивности

уменьшается и при интенсивности колебаний 50  $\text{BT/cm}^2$  статическое напряжение близко к нулю.

Установлено также, что ультразвуковые колебания и нагрев оказывают на величину напряжений идентичное влияние. Но для достижения равного эффекта при применении ультразвука требуется меньшее количество энергии, чем при нагреве. По-видимому, энергия ультразвука поглощается в большей степени в зонах кристаллов, имеющих дефекты: дислокации, границы зерен и т. п. и почти не поглощается в свободных от дефектов зонах. Тепловая энергия, очевидно, распределяется по всему объему кристалла.

Опыты показывают, что наложение ультразвуковых колебаний активизирует процессы ползучести и усталостного разрушения. При деформации в обычных условиях развитие полос скольжения начинается в отдельных, наиболее благоприятно ориентированных зернах и лишь постепенно охватывает весь объем металла. При деформации с ультразвуком полосы скольжения зарождаются сразу в большом числе зерен. Переход полос скольжения через границы

зерен, как правило, не наблюдается. Иногда они даже заканчиваются, не доходя до границ зерен. Это подтверждает вывод об активации дислокаций вследствие поглощения колебаний.

При исследовании образцов из технического железа, разрушенных под действием ультразвуковых колебаний с амплитудой напряжений  $90\text{--}110 \text{ Мн/м}^2$  ( $9\text{--}11 \text{ кг/мм}^2$ ) было обнаружено, что локальные участки поверхности вблизи зоны разрушения покрыты окисной пленкой. Это могло произойти за счет сильного разогрева металла. Отсюда следует, что в результате поглощения акустической энергии дислокациями и другими структурными дефектами вокруг них происходит локальный нагрев металла. Поэтому движение дислокаций в этих местах облегчается, что в свою очередь снижает величину напряжения, необходимую для осуществления деформации.

Процесс активации дислокаций обратим, т. е. он происходит только до тех пор, пока имеется приток ультразвуковой энергии. Как только подача энергии прекратится, величина истинного сопротивления деформации возрастает. Более того, уже после простого ультразвукового облучения обнаруживается упрочнение, которое было названо выше акустическим.

Акустическое упрочнение наблюдается после воздействия ультразвуковых волн с достаточно высокой амплитудой напряжений. Для примера на рис. 79, в приведена кривая растяжения монокристалла цинка. В точке *a* были включены колебания интенсивностью  $5 \text{ вт/см}^2$ . В результате произошло уменьшение истинного сопротивления деформации до точки *b*. На участке *bc* деформацию осуществляли при воздействии ультразвука. После отключения генератора напряжение скачком возросло до точки *h*, а затем постепенно возрастало до точки *e* и достигло уровня, характерного для обычного растяжения. Затем снова включали генератор с большей интенсивностью колебаний ( $15 \text{ вт/см}^2$ ). Напряжение уменьшилось более значительно (точка *f*). После выключения генератора напряжение не возвратилось на уровень, соответствующий обычному растяжению (точка *g*), а достигло более высокого значения (точка *h*). Отрезок *gh* характеризует упрочнение под действием ультразвуковых колебаний. При интенсивности колебаний более  $25 \text{ вт/см}^2$  наблюдали еще более интенсивное разупрочнение и последующее упрочнение, характеризуемое отрезком *kl*. Эффект упрочнения наблюдается и при озвучивании в ненагруженном состоянии. Степень упрочнения в этом случае возрастала с увеличением времени озвучивания, асимптотически приближаясь к некоторому пределу, при котором наступает состояние насыщения ультразвуковой энергией.

Результаты опытов можно объяснить с позиций теории дислокаций. При прохождении ультразвуковых волн малой интенсивности будет увеличиваться амплитуда колебаний дислокаций около положения равновесия. При высокой интенсивности колебаний степень активации дислокаций и зарождения новых дислокаций достигает величины, достаточной для их движения по плоскости скольжения. В результате возрастает плотность дислокаций, а следовательно, образуется большее число помех их движению и металл уп-

рочняется. После прекращения действия ультразвука в металле фиксируется полученная дислокационная структура. Таким образом, ультразвуковую энергию можно использовать как эффективное средство повышения прочности металлов. Это средство имеет определенные преимущества перед деформационным упрочнением и закалкой: размеры тела в результате упрочнения не изменяются, расход энергии снижается, технологический процесс упрощается.

## 7. Влияние радиоактивных излучений на прочность и пластичность

Из рис. 80,а следует, что облучение потоком интенсивностью  $10^{18}$  нейтронов/см<sup>2</sup> повышает предел текучести железа на 90—100%.

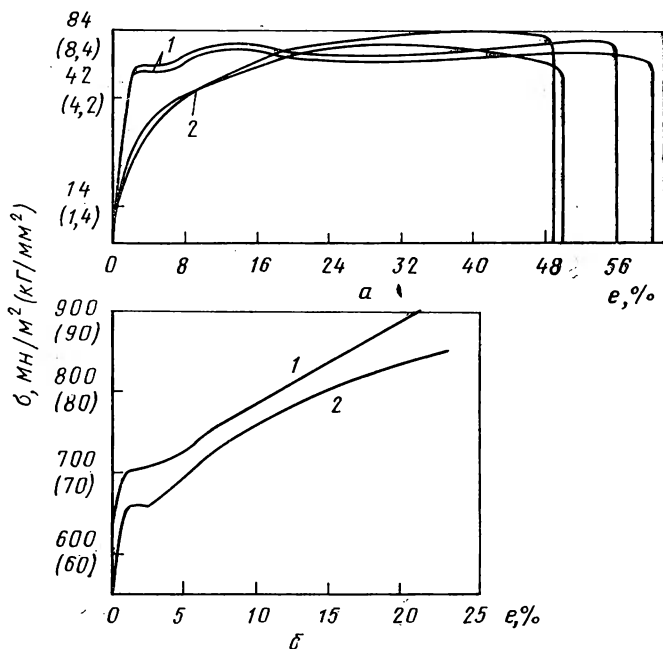


Рис. 80. Влияние облучения на механические свойства:  
 а — монокристаллов чистого железа: 1 — облученный в потоке  $10^{18}$  нейтронов/см<sup>2</sup>; 2 — необлученный; б — молибден: 1 — облученный потоком  $5 \cdot 10^{19}$  медленных нейтронов/см<sup>2</sup> при 100°C; 2 — необлученный

В результате облучения напряжение в начале деформации увеличивается, но после удлинения на 15% обе кривые в пределах точности опыта совпадают, т. е. влияние облучения на сопротивление деформации уменьшается с ростом предварительного наклепа.

На рис. 80,б приведены кривые истинных напряжений при растяжении образца из молибдена облученного потоком медленных

нейтронов, и образца, не подвергающегося облучению<sup>1</sup>. Из рассмотрения кривых ясно, что облучение повышает прочностные характеристики металлов и мало влияет на пластичность.

Приведенные зависимости являются результатом того, что радиоактивные излучения «вышибают» атомы из обычного для необлученных образцов положения равновесия, образуя «межузельные» атомы и вакансии, что производит дополнительное упругое искажение атомной решетки металлов. Таким образом, нарушения, возникающие при облучении металлов, аналогичны наклепу при холодной обработке, однако действие облучения не связано с каким-либо преимущественным кристаллографическим направлением.

При облучении сплавов могут возникать дополнительные эффекты — ускорение фазовых превращений, старение, появление ползучести при пониженных напряжениях.

Замечено, что радиационное упрочнение исчезает уже при сравнительно невысоком нагреве. Облученный материал переходит из хрупкого состояния в пластическое при более высоких температурах. Вместе с тем образуются скопления точечных дефектов, например пары связанных межузельных атомов или вакансий, которые играют роль зародышей для конденсации следующих дефектов этого типа. Дефекты могут скапливаться на имеющихся в кристаллах несовершенствах решетки, например у примесных атомов, на границах зерен и дислокациях.

## 8. Анизотропия свойств текстурированных материалов

Металлы и сплавы в зависимости от наличия общих кристаллографических направлений в отдельных зернах могут быть разделены на изотропные (нетекстурированные), характеризующиеся хаотическим расположением элементов кристаллической решетки по всему объему тела, и текстурированные, в которых имеются одно или несколько направлений, общих для всего объема тела. В основе классификаций лежит понятие «текстуры», под которым подразумевается система преимущественных кристаллографических ориентировок в материале.

При обработке металлов давлением преимущественные ориентации связаны с механизмом пластической деформации металла по предпочтительным кристаллографическим плоскостям и направлениям.

Текстуры, возникающие после термической обработки деформированных материалов, называются текстурами рекристаллизации. Такие текстуры зависят главным образом от химического состава, температурно-временного и скоростного режимов нагрева и охлаждения. Довольно ясно выраженную текстуру металлы получают при застывании в условиях направленного теплоотвода. Литые текстуры характеризуются распределением направлений наиболее легкой теп-

<sup>1</sup> Мак-Лин Д. Механические свойства металлов. Пер. с англ. М. «Металлургия», 1965. 431 с. с ил.

лопередачи вдоль максимального температурного градиента. Текстуры возникают и при механической обработке металлов.

При наличии текстуры в материалах одинаковые кристаллографические оси зерна обладают определенной симметрией пространственного распределения. В зависимости от этой симметрии текстуры разделяются на три типа<sup>1</sup>. К первому типу относят аксиальные текстуры, которые имеют одно общее для всех зерен поликристалла кристаллографическое направление. Такие текстуры характерны для изделий, полученных волочением, и поэтому их часто называют «текстурами проволоки». Вторым типом является текстура «конусного волокна». Особенность этой текстуры состоит в том, что одно из кристаллографических направлений расположено по конической поверхности вокруг оси образца. К третьему типу принадлежат текстуры, в которых фиксируются два направления, как правило, совпадающие с ориентировкой главных деформаций. Эти текстуры характерны для изделий, полученных плоской прокаткой, вследствие чего они получили название «текстур листа». Помимо перечисленных типов текстур, существуют и другие, которые обычно классифицируются как промежуточные между тремя основными.

Анизотропия свойств текстурованных металлов определяется неоднородностью их структуры и преобладающими ориентировками. Неоднородность структуры зависит от формы зерен и включений, характера распределения вторичных фаз, вида предварительной пластической обработки, т. е. от так называемой механической текстуры. Механическая текстура внешне проявляется обычно в виде волокнисто-строчечной структуры и при высоком содержании вторых фаз в металле может привести к существующей анизотропии механических свойств. В частности, стали с большим количеством неметаллических включений в поперечном направлении по отношению к оси растяжения могут иметь прочность на 30—40% ниже, чем в продольном.

Наличие преобладающих кристаллографических ориентировок в металле приводит к статистической анизотропии свойств. Последняя обусловлена различиями упруго-пластических и других механических и физических характеристик кристалла в направлениях с отличающимися расположениями атомов решетки. Поэтому распределение свойств в разных направлениях текстурованного материала определяется типом его текстур. При сильно выраженной текстуре анизотропия свойств поликристалла приближается к анизотропии монокристалла. В квазианизотропном материале свойства усредняются. В частности, в нетекстурованном образце стали модуль упругости равен  $210 \text{ кН/м}^2$  ( $21\,000 \text{ кГ/мм}^2$ ) во всех направлениях. В отдельных же зернах предел упругости изменяется от  $284 \text{ кН/м}^2$  ( $284\,000 \text{ кГ/мм}^2$ ) в направлении  $[111]$  до  $132 \text{ кН/м}^2$  ( $13\,200 \text{ кГ/мм}^2$ ) в направлении  $[100]$ .

Степень анизотропии свойств монокристаллов определяется типом решетки. Например, металлы с гексагональной плотноупако-

<sup>1</sup> Кудрявцев И. П. Текстура в металлах и сплавах. М., «Металлургия», 1965. 292 с. с ил.

ванной (ГПУ) решеткой, как правило, более анизотропны, чем металлы с кубической решеткой. Анизотропия текстурованного материала с практической точки зрения может оказаться как полезной, так и вредной. Классическим примером неблагоприятного влияния текстуры является образование фестонов при глубокой вытяжке листовых материалов. Полезное влияние текстуры может проявиться в улучшении технологической пластичности материала, в уменьшении сопротивления деформации при обработке давлением, в повышении эксплуатационных характеристик (сопротивление усталости, коррозионной стойкости), а также в увеличении механических свойств (сопротивления удару и внедрению, предела текучести и прочности, относительного удлинения) и улучшении магнитных свойств.

Анизотропия свойств текстурованного материала должна учитываться при его технологической обработке и при выборе расположения текстурной оси по отношению к действующим усилиям в условиях службы этого материала. Большое практическое значение имеют текстурованные магнитные материалы. В направлении трудного намагничивания свойства текстурованной стали оказываются более низкими, чем в изотропной стали. Поэтому при использовании текстурованной стали большое значение имеет совмещение магнитного потока в электрическом устройстве с направлением легчайшего намагничивания в элементах магнитопровода. При оптимальном их сочетании в стали может быть достигнуто значительное улучшение технико-экономических характеристик электрического устройства: повышается к. п. д. и снижается его вес. Текстурованные материалы обладают большой коррозионной стойкостью в агрессивных средах, причем в зависимости от текстуры стойкость материала может быть различной.

Установлено, что коэффициент теплового расширения в зависимости от направления может различаться в 1,5—2,0 раза. К анизотропным свойствам относятся также следующие: линейная сжимаемость, температурный коэффициент теплового расширения, температурный коэффициент электропроводности, скорость диффузии и самодиффузии, скорость химических реакций.

Большой проблемой, связанной с анизотропией свойств, является обработка давлением текстурованного материала, так как в зависимости от текстуры для одного и того же материала контактные напряжения, распределение деформации, упрочнение и пластичность в процессе обработки могут сильно различаться.

## **9. Способы повышения прочности и пластичности**

Наличие дефектов кристаллической решетки в форме дислокаций ослабляет металл, но вместе с тем когда этих дефектов много, происходит его упрочнение. Таким образом, для придания металлам высокой прочности можно использовать два способа: или сводить до минимума число дислокаций, или, наоборот, резко его увеличивать (рис. 81).

Если малая величина предела упругости обусловлена наличием дислокаций, то в кристаллах с размерами, меньшими обычных размеров дислокационной сетки Франка, они образоваться не могут и, следовательно, такие кристаллы должны иметь высокий предел упругости. Это справедливо для всех кристаллов, если их размер хотя бы в одном измерении приблизительно равен 1 микрону — опыты показывают, что прочность очень маленьких образцов (так называемых «усов») почти достигает теоретической величины.

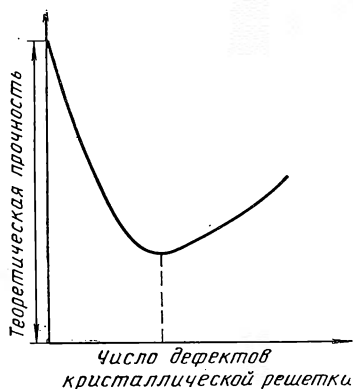


Рис. 81. Зависимость прочности кристалла от числа дефектов

За последние 10—15 лет имеются существенные сдвиги в уменьшении разрыва между теоретической и технической прочностью металлов.

Легированием и термомеханической обработкой можно увеличить прочность стали на 30—50% по сравнению с прочностью при стандартных режимах обработки. Это происходит за счет создания высокой плотности дислокаций и увеличения препятствий для их движения. Однако использование материалов с высокой плотностью дислокаций в технических целях затруднительно, поскольку при определенной величине их плотности (критической) в металле возникают микротрещины.

Производя армирование металлической матрицы высокопрочными «усами», можно получать композиционные материалы высокой прочности<sup>1</sup>, а изменяя объемную долю волокон (усов) — получать материалы с варьируемыми прочностными и пластическими свойствами. Одно из необходимых и трудновыполнимых условий при введении «усов» в матрицу — это обеспечение неповрежденности поверхности усов, так как их прочность в значительной степени зависит от состояния поверхности. Большие трудности при изготовлении волокнистых композиционных материалов возникают также при обеспечении равномерного распределения упрочняющих волокон по объему материала.

Дело существенно упростится, если вместо «усов» использовать тонкую проволоку и сетки из нее. Это может удешевить материалы, так как получение тонкой проволоки — задача более легкая, чем получение «усов». Однако для достижения значительного эффекта упрочнения необходимо получение проволоки с диаметром, соизмеримым с диаметром «усов». Можно ожидать, что при диаметре проволоки менее 5 мк прочность композиционных материалов будет достаточно высокой.

При создании материалов с дискретными волокнами необходи-

<sup>1</sup> «Современные композиционные материалы». Под ред. Браутмана и Р. Крока. Пер. с англ. М., «Мир», 1970. 672 с. с ил.

мо принимать во внимание то обстоятельство, что матрица способна передавать полную нагрузку на волокна в том случае, если длина волокна  $l$  больше некоторой критической длины  $l_k$ .

Наряду с упомянутыми искусственными волокнистыми материалами можно получать волокнистые структуры в процессе роста кристаллов, а также термической обработкой материалов с полиморфными или фазовыми превращениями.

Аналогом волокнистых материалов являются стали с ферритно-мартенситной структурой; в данном случае относительно мягкая ферритная матрица как бы армирована волокнами в виде мартенситных игл. Однако высокая прочность мартенситных игл может быть реализована в полной мере только в том случае, если при деформировании вся нагрузка воспринимается волокнами (мартенситными иглами), а матрица служит лишь для передачи этой нагрузки. Этого можно достигнуть при определенном значении объемной доли волокна и определенном отношении длины волокна к его диаметру.

Наиболее благоприятные условия для формирования естественной волокнистой структуры сталей получаются, вероятно, при патентировании проволоки и многократной деформации. Получаемые в данном случае цементитные волокна как бы армируют феррит. Прочность проволоки при этом чрезвычайно высока — до  $5000 \text{ Мн/м}^2$  ( $500 \text{ кг/мм}^2$ ). Мартенситные волокна в малоуглеродистой стали можно получать и с помощью термической обработки и последующей деформации.

Большие перспективы в получении материалов с особыми свойствами открываются в результате применения эвтектических структур с так называемыми «контролируемыми» эвтектиками. При затвердевании таких эвтектик образуется смесь направленных пластин одной фазы. Резкий рост прочности материалов с направленной эвтектикой обусловлен тем, что волокнистые кристаллы, выделенные из эвтектики, по своим свойствам оказываются близкими к высокопрочным усам. Так, предел прочности кристаллов хрома, выделенных из эвтектики  $\text{Cu—Cr}$ , равен  $7000 \text{ Мн/м}^2$  ( $700 \text{ кг/мм}^2$ ), а кристаллов  $\text{Al}_3\text{Ni}$ , выделенных из эвтектики  $\text{Al}_3\text{Ni—Al}$ ,  $2800 \text{ Мн/м}^2$  ( $280 \text{ кг/мм}^2$ ).

Важным свойством волокнистых эвтектических материалов является их способность сохранять эвтектическую структуру, а следовательно, и высокую прочность при температурах, близких к температуре плавления.

Перспективность использования в технике волокнистых эвтектических материалов диктуется также и тем, что эти материалы могут обладать необычайными свойствами. Можно создать материал, который будет ферромагнитным в одном направлении и антиферромагнитным — в другом, проводником — в одном направлении, а изолятором — в другом и т. п.; имеются данные, что для материала с эвтектикой  $\text{Sb—InSb}$  ( $\text{InSb}$  — матрица) электросопротивление и теплопроводность различаются в направлении волокон и перпендикулярно волокнам в 10 раз.



## 10. Оценка пластичности металлов

Оценке величины пластичности металлов или, как часто говорят, деформируемости (технологической пластичности), т. е. выяснению величины деформации, которую в состоянии претерпевать металлы до разрушения, посвящена обширная литература. Однако пока еще не разработан общепринятый критерий для количественной оценки пластичности. Систематическая разработка этого вопроса началась под руководством С. И. Губкина [4]. В основу было положено соображение, что для пластичных в условиях простейших напряженных состояний веществ критерием их деформируемости служит та степень деформации, при которой происходит разрушение тела, хотя бы в некоторой его части.

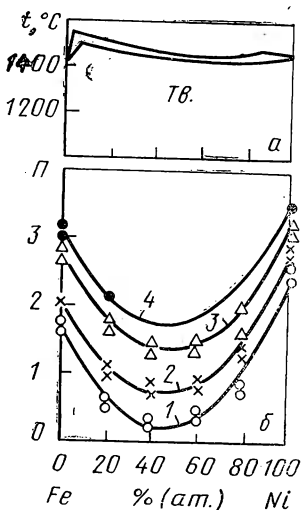
С. И. Губкин рекомендует оценивать пластичность как функцию величин, характеризующих напряженное состояние. Работы С. И. Губкина были развиты в других исследованиях. Среди них отметим работы М. А. Зайкова [9] и В. Н. Перетятыко<sup>1</sup>, считающие, что в качестве критерия пластичности следует брать величину

$$\Pi = \frac{\gamma_n}{n}, \quad (291)$$

где  $\gamma_n$  — октаэдрический сдвиг;

$n$  — показатель напряженного состояния в данном процессе деформации.

В качестве примера кратко опишем результаты исследования упомянутых авторами чистых железоникелевых сплавов на скручивание при гомологических температурах



Критерий пластичности определяли как  $\Pi = \gamma_n = 1,63 \ln(1 + \gamma/2)$ , причем относительный сдвиг  $\gamma = \pi dm/l$ , где  $d$ ,  $l$  — диаметр и длина образца;  $m$  — число оборотов до разрушения;  $T_{оп}$  — температура опыта;  $T_{пл}$  — температура плавления образца. Железо и никель неограниченно растворимы в твердом состоянии и при застывании образуют  $\gamma$ -твердые растворы (рис. 82, а).

Для твердых растворов изменение свойств в зависимости от состава можно объяснить изменением энергетического уровня сплава за счет деформации пространственной решетки. Число искажений решетки при полной взаимной растворимости компонентов  $A$  и  $B$  пропорционально произведению концентраций этих компонентов. Можно предположить, что с увеличе-

Рис. 82. Диаграммы состояния и пластичности железоникелевых сплавов

<sup>1</sup> Перетятыко В. Н., Зайков М. А., Вульф В. В. и др. Пластичность железоникелевых сплавов. Известия вузов. Черная металлургия, 1967, № 8. с. 82—85.

нием числа искажений решетки пропорционально снижаются пластические свойства металла. Тогда

$$P_{AB} = (1 - C_B) P_A + C_B P_B + \omega (1 - C_B) C_B, \quad (292)$$

где  $P_A$ ,  $P_B$ ,  $P_{AB}$  — критерий пластичности растворителя, растворенного вещества и полученного твердого раствора соответственно;

$C_B$  — молярная концентрация растворенного металла;

$\omega$  — коэффициент пропорциональности.

Если  $C_A = C_B = 1/2$ , то искажение решетки будет наибольшим.

$$\text{Поэтому } P_{AB} = P_{\min} \frac{P_A + P_B}{2} + \frac{\omega}{4}.$$

Отсюда:  $\omega = 4(P_{\min} - P_{\text{ср}})$ .

Подставляя это выражение в уравнение (292), получим:

$$P_{AB} = P_A + (4P_{\min} - 4P_{\text{ср}} + P_B - P_A) C_B - 4(P_{\min} - P_{\text{ср}}) C_B^2.$$

Молярные концентрации легирующих элементов пересчитываются на весовые следующим образом:

$$C = \frac{\frac{q}{m_B}}{\frac{q}{m_B} + \frac{1-q}{m_A}},$$

где  $m_A$ ,  $m_B$  — молекулярный вес компонентов.

Для железоникелевых сплавов  $m_A \approx m_B$ , поэтому  $C = q$ . Тогда  $P_{AB} = P_A + (4P_{\min} - 4P_{\text{ср}} + P_B - P_A) q - 4(P_{\min} - P_{\text{ср}}) q^2$ .

Эта зависимость подтверждается опытными данными (см. рис. 82,б).

Таким образом, диаграмма состав — свойства сохраняет закономерности, установленные Н. С. Курнаковым для пластических характеристик. Кривая критерия пластичности является зеркальным отображением кривых, характеризующих сопротивление деформации.

Г. А. Смирнов-Аляев<sup>1</sup> и др. предложили считать, что пластичность зависит от величины

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_t}. \quad (293)$$

Можно показать, что критерий (291) является частным случаем приведенного выше выражения. Используя связи между напряжениями и деформациями, этот критерий можно выразить через величины деформаций. Построение на основании опытных данных зависимости пластичности от последнего критерия дает возможность экстраполировать результаты опытов, полученных в условиях данного опыта на другое напряженное состояние. При этом следу-

<sup>1</sup> Смирнов-Аляев Г. А., Розенберг В. М. Теория пластических деформаций металлов. М. — Л., Машгиз, 1956. 367 с. с ил.

ет, разумеется, определять локальные величины деформаций, т. е. брать их значения там, где замечено первое разрушение. Это заключение основано на многочисленных опытах, описанных В. Л. Колмогоровым [11].

## 11. Разрушение

Процесс разрушения тела при проходящей в нем интенсивной пластической деформации состоит из нескольких последовательных стадий. Например, при пластическом растяжении можно выделить четыре этапа: 1) накопление пор, образующихся в результате пластической деформации; 2) потеря устойчивости в сечении с наибольшей концентрацией пор и образование в нем шейки; 3) интенсивный рост пор в области шейки, их объединение и образование внутренней трещины; 4) распространение этой трещины к поверхности образца и разделение его на две части. Направление роста трещины в среднем поперечное, но в действительности она движется зигзагообразно так, что направление каждого из скачков имеет наклон, равный примерно  $\pi/4$ , к оси растяжения. Эпюры остаточных напряжений имеют вид, приведенный на рис. 83. Из рисунка следует, что в зоне шейки в центре образца имеет место всестороннее

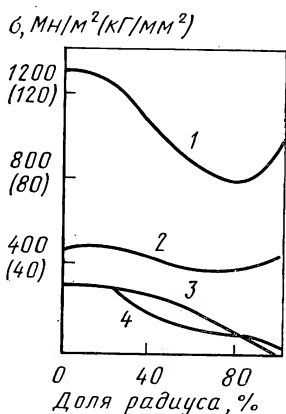


Рис. 83. Эпюры остаточных напряжений, возникающих в шейке образца при растяжении:

1 —  $\sigma_r$ ; 2 —  $\tau_{\max}$ ; 3 —  $\sigma_\rho$ ; 4 —  $\sigma_\theta$

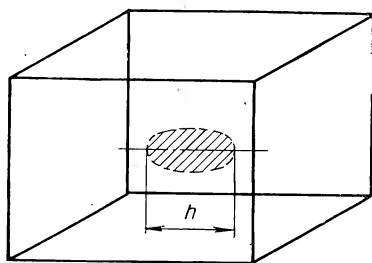


Рис. 84. Схема к решению Гриффитса

растяжение, это и объясняет зарождение первой макроскопической трещины именно в этом месте.

В гл. I было показано, что теоретическая прочность металлов в сотни раз превышает наблюдаемую в действительности. Гриффитс попытался объяснить это различие, опираясь на энергетические соображения. Он предположил, что в теле имеются зародышевые трещины, которые начинают распространяться, когда это становится энергетически выгодным.

Рассмотрим тело, находящееся под действием однородного растягивающего напряжения, и сравним его энергию с энергией такого же тела, содержащего разрез со средним размером  $h$  (рис.

84). Разность энергии  $W$  этих двух тел будет состоять из двух членов. Член  $W_n$ , учитывающий увеличение потенциальной энергии вследствие появления новой свободной поверхности:

$$W_n = 2 \gamma \pi h^2 / 4,$$

где  $\gamma$  — удельная поверхностная энергия, и член  $W_y$ , учитывающий уменьшение упругой энергии, которое происходит за счет релаксации в окрестности трещины, т. е. в объеме  $4/3 \alpha \pi h^3$

$$W_y = \frac{\sigma^2}{2E} \frac{4}{3} \alpha \pi h^3,$$

где  $\alpha$  — коэффициент порядка единицы, зависящий от формы трещины. Таким образом:

$$W = W_n - W_y = \frac{\pi}{2} \gamma h^2 - \frac{2}{3} \pi \alpha \frac{\sigma^2 h^3}{E},$$

и условие распространения трещины по Гриффитсу приобретает вид  $\frac{\Delta W}{\Delta h} \leq 0$  или  $h \geq h_{\Gamma} = \frac{\gamma E}{2 \alpha \sigma^2}$ . (294)

Теория Гриффитса хорошо оправдывается для хрупкого разрушения неупругих материалов, например для стекла при низкой температуре. Зародышевыми трещинами в этом случае являются царапины на внешней поверхности. Для пластичных тел теория Гриффитса неприменима, поскольку при довольно низких напряжениях, характерных для пластического разрушения, по этой теории требуется существование больших зародышевых трещин — до 1 см и более, что неправдоподобно.

По форме все трещины можно разделить на хрупкие, дислокационные и поры. Отличие пластического разрушения от хрупкого связано прежде всего с изменением формы трещины. Хрупкая трещина является упругим разрезом, соответствующим разрыву связей между какими-либо атомными плоскостями. Вектор Бюргера такой трещины после снятия нагрузки замкнут вне зависимости от того, проведен ли он вокруг края или вокруг всей трещины. Дислокационные трещины образуются при слиянии нескольких дислокаций одного знака, их вектор Бюргера всегда равен сумме векторов Бюргера слившихся дислокаций (рис. 85,а). Наконец, пора — полость внутри материала, которая имеет замкнутый контур Бюргера вокруг всей трещины, но разомкнутый вокруг ее вершины.

Считается, что в пластическом теле трещины зарождаются как дислокационные. Предположим, например, что движение дислокаций в теле по какой-либо плоскости заторможено препятствием. Тогда через некоторое время около препятствия образуется дислокационное скопление (рис. 84,б), являющееся источником больших внутренних напряжений, способных породить трещину. Расчет напряжений показывает, что наиболее энергетически выгодным является зарождение трещины в плоскости максимальных растягивающих напряжений, расположенной под углом  $\theta = 1,19 \text{ рад}$  (70 град) к плоскости скольжения. Зародившаяся таким образом трещина растет до размеров, сравнимых с размерами скопления.

Другой способ описания зарождения трещины по этой модели может быть связан с рассмотрением отдельных дислокаций (см. рис. 84,б). Под действием скальвающего напряжения  $\tau$  скопление сжимается до тех пор, пока расстояние между головными дислокациями  $a$  не станет равным межатомному расстоянию  $b$ . Сливающиеся головные дислокации образуют зародыш трещины. Напряжения вблизи этого зародыша релаксируют и отталкивание третьей дислокации от головных уменьшается, в результате чего третья дислокация также «сваливается» в трещину, увеличивая

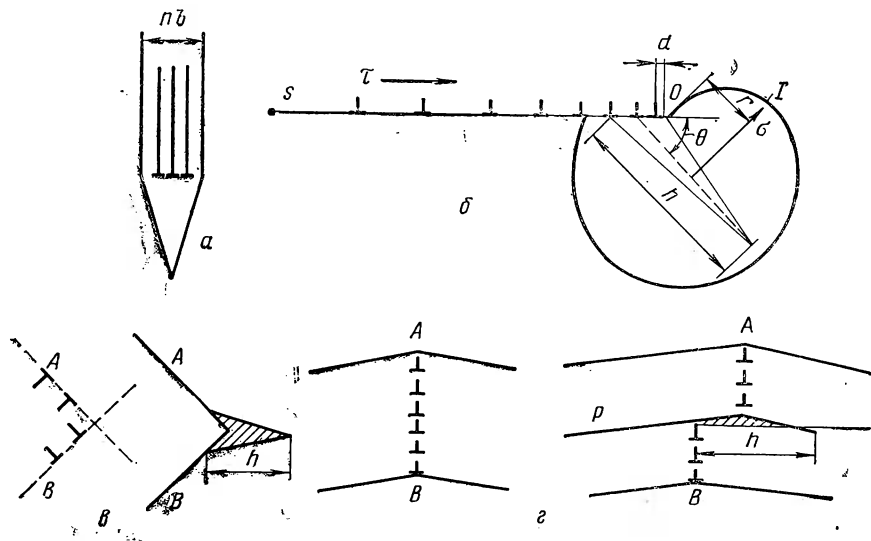


Рис. 85. Схемы образования трещин:

**а** — под крайними дислокациями; **б** — от скопления дислокаций у препятствия; **в** — от скольжения вдоль двух плоскостей  $A$  и  $B$ ; **г** — от скольжения вдоль плоскости скольжения при изгибе у препятствия

ее. После этого процесс повторяется и в трещину «сваливаются» 4-я, 5-я и т. д. дислокационные скопления.

Позднее было предложено много других дислокационных схем. Например скольжение вдоль плоскостей  $A$  и  $B$  (рис. 84,в) приводит к возникновению трещины  $h$ . Плоскости  $A$  и  $B$  могут быть границами зерен, двойниками или просто плоскостями скольжения. На рис. 84,г приведена схема, когда скольжение по плоскости  $P$  приводит при изгибе к разрыву дислокационной стенки  $AB$  и зарождению трещины  $h$ .

Приведенные два описания зарождения трещины соответствуют двум обычно применяемым критериям: энергетическому и силовому. Считается, что эти критерии эквивалентны, т. е. что зарождение трещины становится энергетически выгодным, когда напряжения  $\sigma$  в какой-либо области (хотя бы и очень малой) достигают предела теоретической прочности  $\sigma_T$ . (В рассмотренном выше случае этому условию соответствует условие  $a=b$ .) Напри-

мер, напряжение в верхушке упругой трещины при радиусе кривизны ее вершины  $r=b$  равно  $\sigma_r$  как раз при  $h=h_r$ . Но точные расчеты показывают, что зарождение дислокационных трещин становится энергетически выгодным при  $\sigma < \sigma_r$ . Для рассмотренной выше схемы плоского скопления это означает, что достаточно приблизить головные дислокации скопления на расстояние  $a > b$  (точнее на  $a \approx 7-10b$ ), как их объединение становится энергетически выгодным. Для этого объединения надо преодолеть силы взаимного отталкивания, т. е. некоторый энергетический барьер. Поэтому объединение дислокаций вдоль линии большой длины одновременно невозможно (барьер при этом был бы слишком велик), оно будет идти в два этапа: сначала одна из дислокаций выкинет узкий «язычок» — двойной перегиб — в направлении к другой, а затем этот перегиб разойдется на всю длину дислокации. При таком механизме зарождения барьер за счет отталкивания дислокаций невелик (1—2 эв) и может быть преодолен за счет тепловых флуктуаций. Поэтому зарождение дислокационных трещин может происходить на небольших дислокационных скоплениях (20—40 дислокаций), для торможения которых достаточно не слишком мощных препятствий.

Если разрушению предшествует значительная пластическая деформация, то линии скольжения расположены густо — расстояния между различными группами дислокаций (например между скоплениями дислокаций противоположных знаков) составляют  $10^{-5}-10^{-4}$  см. Поэтому в типичном случае зародившаяся трещина достигает линии скольжения с противоположными по знаку дислокациями, поглощает их и затупляется, превращаясь в пору (рис. 86, а). Дальнейший рост такой трещины возможен за счет зарождения трещин вблизи существующей, что может быть только при увеличении концентрации пор во всем объеме. Исключение составляет случай для области с большими внутренними напряжениями, заполненной скоплениями дислокаций одного знака, кото-

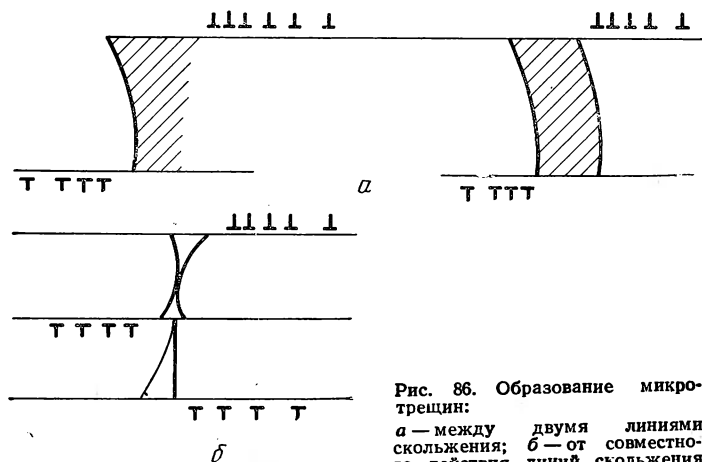


Рис. 86. Образование микротрещин:

а — между двумя линиями скольжения; б — от совместного действия линий скольжения

рые могут «сваливаться» в зародившуюся трещину (рис. 86,б), т. е. случай кооперативного действия нескольких параллельных линий скольжения.

В результате объединения микротрещин образуется макротрещина величиной  $h=h_T$ . Если радиус кривизны ее вершины  $r=b$  (рис. 87,а), то напряжения вблизи этой вершины достигают теоретической прочности  $\sigma \approx \sigma_T$ , и трещина в дальнейшем развивается хрупко. Если же  $r \gg b$ , то  $\sigma \ll \sigma_T$  (что обычно и имеет место в пластической области), и трещина растет медленно и скачкообразно, инициируя вблизи вершины новые линии скольжения, зарождая

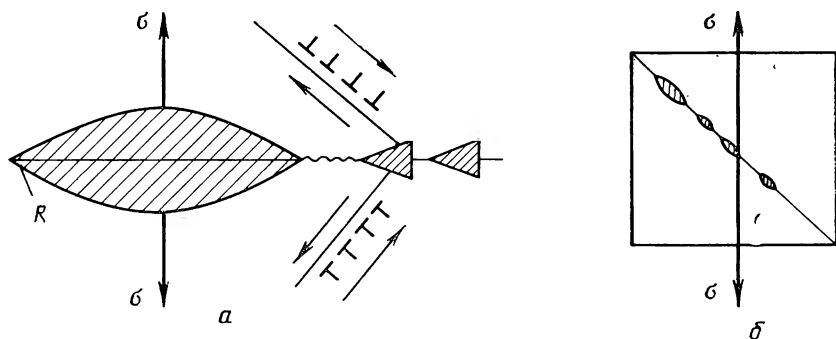


Рис. 87. Схемы зарождения и роста трещин за счет отрыва (а) и среза (б)

на новых скоплениях микротрещины и объединяясь с ними (рис. 87,б). Разрушение перемычки между макро- и микротрещинами может происходить как от нормальных, так и от касательных напряжений. Соответственно меняется направление распространения микротрещины относительно направления главного растягивающего напряжения.

Таким образом, несмотря на разнообразие схем разрушения, можно отметить общие условия, необходимые для зарождения трещины: наличие скопления дислокаций, которые бы создавали большие напряжения в области микроскопических размеров, наличие хотя бы небольшой предварительной пластической деформации в этих областях. Необходимо, чтобы развитие этой микроскопически неоднородной пластической деформации было блокировано либо другими полосами скольжения или двойниками, либо границами зерен или непластичными включениями. Блокировка процесса скольжения может также осуществляться полями напряжений в металле.

С практической точки зрения разрушение является хрупким, независимо от того, какие напряжения его вызвали — нормальные или касательные, лишь бы это разрушение происходило при малой величине пластической деформации так, чтобы тело хотя бы приближенно сохраняло свойство линейной упругости вплоть до разрушения. Однако от правильного ответа на вопрос, какие напряжения в основном повлияли на разрушение, зависит организация

технологического процесса обработки металлов давлением, а также определение условий службы изделий. В связи с этим возникла макроскопическая трактовка проблемы разрушения, основоположником которой был А. Ф. Иоффе.

Известно, что после начала скольжения скальвающие напряжения в монокристалле превышают свое критическое значение и увеличиваются с ростом степени деформации за счет упрочнения, причем связь скальвающего напряжения с нормальным будет выражаться формулой (см. гл. III):  $\tau \sim \sigma \sin \alpha \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол кристаллографической ориентировки.

Когда скальвающее напряжение достигает своего второго критического значения, происходит разрушение монокристалла. Это второе значение касательного напряжения называют вязкой прочностью и обозначают через  $t$ :  $t = \sigma_k \sin \alpha \cos \alpha$ , где  $\sigma_k$  — нормальное напряжение в момент разрушения.

Таким образом, вязкая прочность есть истинное касательное напряжение в момент разрушения. Вязкое разрушение развивается с относительно малой скоростью. Поэтому такому разрушению предшествует заметная пластическая деформация. Разрушение происходит по тем же кристаллографическим плоскостям, по которым происходило скольжение.

Если монокристалл ориентирован так, что  $\alpha = \pi/2$ , получим:  $\tau = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha = 0$ . Отсюда по закону скальвающего напряжения следует, что пластическая деформация монокристалла происходить не будет. Но нормальное напряжение, растягивающее монокристалл по плоскости скольжения (см. гл. III), имеется и равно  $\sigma = \sigma_0 \sin^2 \alpha = \sigma_0 \sin^2 \frac{\pi}{2} = \sigma_0$ .

Отсюда следует, что в процессе растяжения монокристалла возникает нормальное растягивающее напряжение  $\sigma_0$  и монокристалл упруго деформируется до тех пор, пока напряжение  $\sigma_0$  не достигнет некоторого критического значения  $\sigma_T$ , при котором произойдет разрушение монокристалла без заметной пластической деформации.

Нормальное напряжение  $\sigma_T$ , определяющее разрушение монокристалла без заметной предварительной пластической деформации, называется хрупкой прочностью, а разрушение — хрупким разрушением или «разрушением путем отрыва».

Хрупкое разрушение, как правило, происходит по двум кристаллографическим плоскостям в отличие от вязкого. Таким образом, начало пластической деформации монокристалла характеризуется первым критическим значением скальвающего напряжения  $\tau_s$  и связанным с ним пределом текучести  $\sigma_s$ . Начало разрушения характеризуется или вязкой прочностью — вторым критическим значением скальвающего напряжения (вязкое разрушение), или хрупкой прочностью  $\sigma_T$  (хрупкое разрушение). Величины  $\tau_s$ ,  $\sigma_s$ ,  $t$ ,  $\sigma_T$  есть физические константы, зависящие от состояния вещества.

Изменяя температуру, скорость, химический состав, структуру материала, можно изменять величину констант, соотношение меж-



ду ними и получать тот или иной характер разрушения. Отмеченное обстоятельство хорошо иллюстрируют опыты А. Ф. Иоффе, в которых производилось растяжение монокристаллов каменной соли при разных температурах. Он показал, что для монокристаллов каменной соли существует некоторая критическая температура хрупкости, выше которой вещество деформируется пластически, а ниже претерпевает хрупкое разрушение.

Критическая температура хрупкости на диаграмме напряжение — температура определяется точкой пересечения кривых, изображающих зависимость предела текучести (сопротивления срезу)

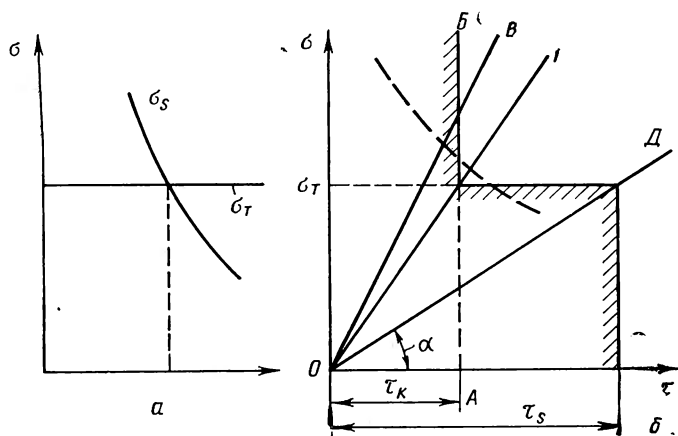


Рис. 88. Зависимость предела текучести и хрупкой прочности каменной соли от температуры по А. Ф. Иоффе (а) и видоизмененная Н. И. Давиденковым схема Я. Б. Фридмана, характеризующая условие перехода от хрупкого разрушения к вязкому (б)

и хрупкой прочности сопротивления отрыву от температуры (рис. 88,а). Параметр «температура» А. Ф. Иоффе избрал потому, что с его помощью можно учесть влияние других важных факторов, определяющих состояние тела: величину, скорость деформации и т. п.

Однако эта схема не учитывает характера напряженного состояния. Н. Н. Давиденков и Я. Б. Фридман развили схему Иоффе для поликристаллического тела, находящегося в любом напряженном состоянии. На рис. 88,б по горизонтальной оси отложены наибольшие касательные, а по вертикальной — наибольшие нормальные напряжения. Каждый луч изображает какой-нибудь один вид напряженного состояния. Способ приложения нагрузки учитывается углом  $\alpha$ , который определяется как:  $\operatorname{tg} \alpha = \sigma / \tau$ .

Например, для одноосного растяжения и изгиба  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 2$ , для кручения  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ . При всестороннем растяжении должны возникать удлинения без действия касательных напряжений и  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \infty$ .

Согласно схеме Давиденкова, для того чтобы произошло хрупкое разрушение, касательное напряжение должно достичь некоторого «порогового» значения  $\tau_k$  и в материале образуется трещина.

Пусть точка  $A$  отвечает тому критическому напряжению  $\tau_k$ , при котором в наиболее благоприятно ориентированном зерне появляется первая трещина (но образец в целом еще не получает заметной пластической деформации). Это напряжение Н. Н. Давиденков предложил условно назвать «сдвиговым порогом». При отрыве нормальное напряжение должно достигнуть величины  $\sigma_T$ , а касательное должно быть не меньше  $\tau_k$ , но меньше макроскопического предела текучести  $\tau_s$ , чтобы отрыв не заменился пластической деформацией. Проведем луч  $OG$  через точку пересечения линий  $\sigma_T$  и  $\tau_k$  и другой луч  $OD$  — через точку пересечения линии  $\sigma_T$  с линией  $\tau_s$ . Этими двумя лучами выделится область хрупкого состояния ГОД, для которой справедлива схема Июффе. Действительно, во всех случаях касательное напряжение будет больше  $\tau_k$  и меньше  $\tau_s$ , а разрушение определится нормальным напряжением  $\sigma_T$  (условие хрупкого отрыва).

Для области, лежащей выше луча  $OG$  (например, луч  $OB$ ), все значения касательных напряжений при пересечении линии  $\sigma_T$  будут меньше «сдвигового порога»  $\tau_k$ , поэтому для разрушения требуется увеличение нормального напряжения до тех пор, пока касательное не достигнет  $\tau_k$ . Следовательно, в этом случае прочность будет определяться величиной уже не нормальных, а касательных напряжений (хотя причиной разрушения по-прежнему останутся нормальные напряжения). Граница хрупкого разрушения изобразится в этом случае прямой  $AB$ . Например, для изгиба (луч  $OB$   $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 2$ ) в материале сначала возникнет нормальное напряжение, равное  $\sigma_T$ . Но разрушения не произойдет до тех пор, пока касательное напряжение не будет равно величине  $\tau_k$ .

Для любого напряженного состояния, при котором сначала достигнется предел текучести ( $\tau_s$ ), материал будет деформироваться пластически.

Таким образом необходимыми условиями хрупкого разрушения являются следующие:  $\sigma_{\max} \geq \sigma_T$ ;  $\tau_{\max} \geq \tau_k$ ;  $\tau_{\max} < \tau_s$ .

По-видимому, переход от горизонтальной границы к вертикальной совершается не мгновенно, а во времени, и прямой угол заменяется сопрягающей кривой, изображенной на рис. 88, б пунктиром. Физический смысл ее — одновременное участие в разрушении обоих видов напряжений. Данная схема была экспериментально подтверждена на молибдене, стали 1Х25Ю5 и вольфраме.

Таким образом, в описанной схеме предполагается, что характер разрушения зависит от вида напряженного состояния.

Опытами установлено, что акты пластической деформации происходят еще в упругой области диаграммы растяжения и, следовательно, хрупкому разрушению, как и вязкому, предшествует некоторая пластическая деформация. Различие между хруп-

ким и вязким разрушением проявляется прежде всего в различном уровне пластической деформации. В связи с этим термин «хрупкое разрушение» является неудачным, ибо он предполагает, что разрушение происходит без пластической деформации. Для чисто технических целей этот термин удобен.

## 12. Разрушение металлов и технология

Общие закономерности процесса разрушения позволяют построить технологию так, чтобы избежать возникновения брака и обеспечить при этом достаточно высокую производительность. При прокатке в качестве одного из обязательных звеньев технологического процесса используют операции ломки и рубки заготовки на прессах, а также резки с помощью различных ножиц и пил. В процессе свободнойковки неизбежно применяют операции рубки различными способами: рубка с одной, двух, трех и четырех сторон, рубка с помощью квадратов. При объемной штамповке с заусенцами вслед за операцией собственно штамповки следует операция обрезки заусенца. При безоблойной штамповке почти всегда имеет место операция зачистки. В процессах штамповки часто используют также специальные отрубные ручки.

Все разделительные операции листовой штамповки, их производительность и качество металла тесно связаны с процессом разрушения. К числу этих операций относятся следующие:

**Отрезка** — полное отделение части заготовки по незамкнутому контуру.

**Вырубка** — отделение части заготовки по замкнутому контуру в штампе, причем отделенная и смещенная в матрицу часть заготовки является деталью или полуфабрикатом для последующей штамповки, механической или иной обработки.

**Пробивка** — отделение части заготовки по замкнутому контуру в штампе, причем отделенная и смещенная в матрицу часть заготовки является отходом (получение отверстий).

**Надрезка** — отделение части заготовки по незамкнутому контуру без нарушения связи разделенных частей заготовки по другим участкам контура.

**Обрезка** — отделение краевой части (припуска) полуфабриката, полученного формоизменяющими операциями.

Во всех перечисленных операциях пластическая деформация распространяется на всю толщину заготовки, но по возможности локализована в направлении, перпендикулярном поверхности раздела.

**Зачистка** — отделение припуска со снятием стружки на боковых поверхностях полуфабриката, полученного вырубкой или пробивкой отверстия. В этой операции деформация еще более локализована вблизи режущей кромки инструмента и охватывает лишь часть толщины заготовки.

Зона деформации в разделительных операциях схематически показана рис. 85, а. Такой характер локализации деформации

подтверждается опытами [3] и находится в соответствии с принципом Сен-Венана о локальности действия взаимно-уравновешивающихся внешних нагрузок. Согласно этому принципу, степень неравномерности распределения напряжений, вызванная действием сосредоточенных сил, быстро убывает с удалением от области приложения этих сил. Поэтому по мере удаления от каждой из режущих кромок неравномерность распределения напряжений уменьшается, но зато протяженность зоны пластических деформаций в направлении, перпендикулярном плоскости, возрастает.

В начале процесса разделения материала пластическая деформация сосредотачивается у режущих кромок, которые внедряются на некоторую глубину в материал. Затем зоны пластических деформаций постепенно увеличиваются, продвигаются к середине толщины по высоте полосы и смыкаются. Продолжающиеся сближение режущие кромки инструмента вызывают пластическую деформацию по всей оставшейся толщине заготовки, в результате которой происходит смещение одной ее части относительно другой. На заключительной стадии этого смещения начинается процесс разрушения; вблизи от режущих кромок образуются трещины, распространяющиеся к средней части по вы-

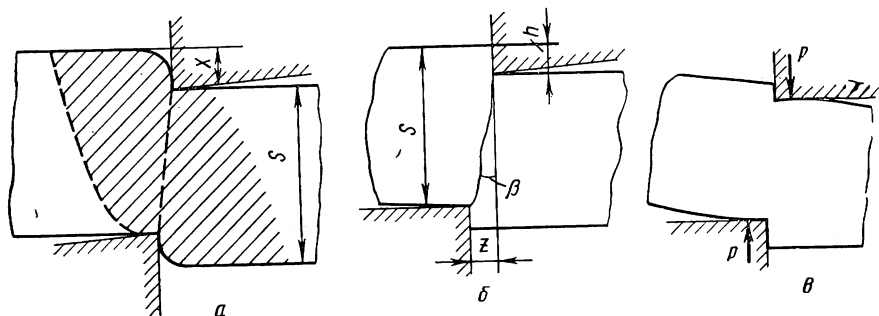


Рис. 89. Разделительные операции:

*a* — схема очага деформации (заштрихована пластическая область); *б* — определение величины относительного зазора; *в* — распространение трещин при малом зазоре

соте заготовки. В результате слияния трещин происходит разделение заготовки на части.

Если принять, следуя В. П. Романовскому<sup>1</sup>, что трещины имеют прямолинейную образующую, то величину зазора *z*, обеспечивающую слияние трещин от режущих кромок, можно найти из соотношения (рис. 89, б):

$$z = (S - h) \operatorname{tg} \beta,$$

где *S* — толщина заготовки;

*h* — глубина внедрения режущей кромки до появления трещин;

$\beta$  — угол наклона трещины к режущей кромке инструмента.

<sup>1</sup> Романовский В. П. Справочник по холодной штамповке. Изд. 5-е, Л., «Машиностроение», 1971. 782 с. с ил.

Из опытов известно, что  $\beta = 0,07 - 0,1$  рад (4—6 град.) и уменьшается с увеличением прочности материала заготовки.

Глубина внедрения инструмента до появления трещины обычно находится в пределах  $h \approx 0,1 - 0,55 S$ , увеличиваясь с увеличением пластичности заготовки.

Зазор, обеспечивающий совпадение (слияние) трещины, называют оптимальным. Уменьшение зазора по сравнению с оптимальным приводит к тому, что трещины, развивающиеся от режущих кромок, не встречаются и на поверхности среза появляются заусенцы. Увеличение зазора по сравнению с оптимальным приводит к росту наклона угла  $\beta$  поверхности среза и искажению сечения под действием изгибающего момента, возникающего от нормальных сил, приложенных от режущих кромок к заготовке (рис. 89, в).

Примем, что по поверхности, соединяющей режущие кромки (рис. 89, а), происходит чистый сдвиг (главные оси проходят под углом  $\pi/4$  к этой поверхности). В таком случае здесь отличны от нуля только напряжения  $\tau_{xy}$  и деформации  $e_{xy}$  и, в соответствии с законом (95):

$$\tau_{xy} = \tau_s \left( \frac{e_{xy}}{e_s} \right)^n.$$

Можно принять, что деформация сдвига равна

$$e_{xy} \approx \frac{S - (S - x)}{S} = \frac{x}{S}.$$

Тогда условие деформации и резания сводится к следующему:

$$P = L (S - x) \tau_{xy} = \tau_s L (S - x) \left( \frac{x}{S e_s} \right)^n = \frac{\sigma_s}{2} L (S - x) \left( \frac{x}{S} \right)^n \frac{1}{e_s^n},$$

где  $L$  — длина линии резания;

$x$  — глубина внедрения режущей кромки;

$S$  — толщина заготовки.

Принимая во внимание, что предел упругой деформации  $e_s$  связан с напряжением законом Гука:  $e_s = \frac{\sigma_s}{E}$ , получим

$$P = \frac{1}{2} (S - x) \left( \frac{x}{S} \right)^n \left( \frac{E}{\sigma_s} \right)^n \sigma_s L. \quad (295)$$

Выясним, при каком значении  $x$  усилие  $P$  имеет максимум. Дифференцируя уравнение (295) по  $x$  и приравнявая результат нулю, находим:  $x/S = n/(n+1)$ .

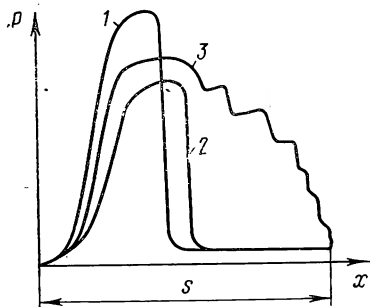
Таким образом, положение максимума усилия, необходимого для разделения материала на части, зависит от закона упрочнения материала. В случае идеально пластического материала ( $n=0$ ) максимум совпадает с началом операции. В случае упругого материала ( $n=1$ ) максимум совпадает с точкой, где  $x=S/2$ . При  $0 \leq n \leq 1$  имеем следующие пределы применения  $x$ :

$$0 \leq \frac{x}{S} \leq \frac{1}{2}.$$

Из формулы (295) следует, что усилие при разделительной операции зависит от геометрических параметров, модуля упругости и предела текучести материала.

Изложенный приближенный анализ соответствует опытным данным. На рис. 90 показано, что усилия разделительной операции характеризуются кривыми, имеющими максимум. Вначале усилие

Рис. 90. Зависимость усилия разделительной операции от величины пути  $x$  режущей кромки



изменяется сравнительно медленно (предварительное сжатие), затем быстро увеличивается до максимума и затем снова резко падает. При зазоре  $z$ , который меньше оптимального, процесс резания неустойчив, что и объясняет зигзагообразный характер кривой 3 на рис. 90.

## **VIII** глава

### **Сжатие**

#### **1. Трение на поверхности контакта инструмента с металлом**

Пластическое сжатие имеет широкое применение как одна из основных операций обработки металлов давлением. Подавляющее большинство операций процессовковки, горячей объемной и листовой штамповки, прессования, прокатки включает в себя пластическое сжатие. Важнейшей особенностью процесса сжатия является наличие трения на поверхностях контакта между инструментом и обрабатываемым материалом.

В конце XV в. Леонардо да Винчи сформулировал следующий закон сухого трения: сила трения пропорциональна нормальной нагрузке и не зависит от величины площади опорной поверхности. Эта закономерность в дальнейшем была забыта и вновь открыта Амонтоном в 1699 г. Изучением трения занимался М. В. Ломоносов. В 1781 г. Кулон выявил еще одну закономерность: при малых значениях скорости относительного скольжения сила трения несмазанных поверхностей практически не зависит от этой скорости.

При трении двух металлических тел происходят в миниатюре почти все те явления, которые мы наблюдаем при исследовании механических свойств металлов. В процессе взаимного перемещения инструмента и деформируемого металла их поверхности вступают в механическое зацепление своими выступами. В результате на поверхностях контакта одновременно осуществляется упругая деформация, пластическая деформация и частичное разрушение (истирание, износ). Наряду с этими между соприкасающимися телами действуют и силы молекулярного сцепления.

Закон сухого трения Кулона выражается соотношением:

$$T = \mu P + F. \quad (296)$$

Здесь  $T$  — сила трения;

$P$  — нормальное давление;

$F$  — сила молекулярного сцепления;

$\mu$  — коэффициент трения.

Силы молекулярного притяжения убывают обратно пропорционально седьмой степени расстояния, однако в действительности за счет шероховатости трущихся поверхностей молекулярные силы убывают пропорционально квадрату или кубу среднего расстояния. По ГОСТ 2789—59 чистота обработки по восьмому классу соответствует высоте выступов в  $3,2 \text{ мкм}$ , что равно для железа  $10^4$  параметрам атомной решетки  $a$ , а для четырнадцатого класса  $6 \cdot 10^2 a^*$ . Таким образом, молекулярные силы взаимодействия при трении должны быть малы по сравнению с прочностью на срез, и в обычных условиях обработки металлов давлением принимать их во внимание нецелесообразно. Поэтому закон Кулона используется в упрощенном виде, предложенном Амонтоном.

Если отнести силу трения и нормального давления к единице площади соприкасающихся поверхностей, то получим соотношение вида  $\tau = \mu \sigma$ , где  $\tau$  и  $\sigma$  — касательное и нормальное напряжения на поверхностях контакта металла и инструмента. Как было отмечено, в процессе трения происходит пластическая деформация и разрушение обрабатываемого металла от действия касательных напряжений. Максимальная величина последних определяется равенством  $\tau = K/2$ , где  $K$  — истинное сопротивление деформации при данных условиях обработки. Таким образом, в обычных условиях обработки давлением удельная сила трения не превосходит половины истинного сопротивления металла деформации.

Это положение хорошо подтверждают следующие результаты опытов Г. И. Епифанова<sup>1</sup> (табл. 2).

Как видно из этой таблицы, величина сил трения и сопротивления срезу в пределах точности опытов совпадают. В ряде особых случаев все-таки  $\tau > K/2$ . Рассмотрим эти случаи.

\* Макушок Е. М. Матусевич А. С., Севереденко В. П. и др. Теоретические основыковки и горячей объемной штамповки. Минск, «Наука и техника», Минск, 1968. 407 с. с ил.

<sup>1</sup> Епифанов Г. И. ДАН СССР, 1957, т. 114, с. 764.

Таблица 2

Величины силы сухого трения и сопротивления срезу для различных металлов

Металл	Удельная сила трения	Сопротивление срезу	Металл	Удельная сила трения	Сопротивление срезу
	Мн/м <sup>2</sup> (кг/мм <sup>2</sup> )			Мн/м <sup>2</sup> (кг/мм <sup>2</sup> )	
Sn	29 (2,9)	33 (3,3)	Cu	290—320 (29—32)	280 (28)
Pb	29—33 (2,9—3,3)	30 (3,0)	Латунь	490 (49)	400 (40)
Al	77—83 (7,7—8,3)	80 (8,0)	Fe	630—660 (63—66)	510 (51)

1. Как следует из равенства (296), это соотношение справедливо, например, когда сила молекулярного сцепления имеет значительную величину. Однако для процессов обработки металлов давлением это не характерно.

2. При грубых методах измерения действительная поверхность тела примерно равна кажущейся. Однако, принимая во внимание шероховатость, фактическая площадь шлифованной и полированной поверхности в 2,5—5, а иногда даже в 10 раз больше видимой.

В связи с этим площадь, на которой происходит трение, формируется постепенно. На этом этапе, хотя сила трения и растет пропорционально нормальной нагрузке, коэффициент пропорциональности  $\mu = \operatorname{tg} \varphi_1$  может быть больше 0,5 (участок *BC* на рис. 91). Затем, когда величина площади трения стабилизируется, коэффициент пропорциональности становится меньше 0,5 и представляет собой действительный коэффициент трения (участок *BC* на рис. 91). Эти соображения Г. И. Епифанов подтверждает опытными данными (табл. 3).

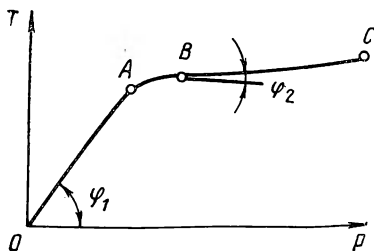


Рис. 91. Связь между силой трения и давлением по нормали:

*OA* — участок упруго-пластического контакта; *BC* — пластического контакта

Таблица 3

Зависимость коэффициентов трения от нормальной нагрузки для различных материалов

Металл	Коэффициент трения		Металл	Коэффициент трения	
	$\mu = \operatorname{tg} \varphi_1$	$\mu = \operatorname{tg} \varphi_2$		$\mu = \operatorname{tg} \varphi_1$	$\mu = \operatorname{tg} \varphi_2$
Sn	0,55	0,07	Cu	0,63	0,06
Pb	1,6—2	0	Латунь	0,75	0,03
Al	1,2—2	0,05	Fe	0,7	0,09



Таким образом, при формировании трения закон, установленный в свое время Леонардо да Винчи, по-видимому, неприемлем.

3. В соответствии с основными положениями теории пластичности можно написать

$$\tau = \mu \sigma_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \mu \sigma_1 \quad \text{или} \quad \mu = \frac{1}{2} - \frac{\sigma_3}{2 \sigma_1}.$$

При равноименной схеме напряженного состояния минимальное главное напряжение  $\sigma_3 < 0$ , поэтому коэффициент трения в этом случае может оказаться больше половины. Этот вывод можно обобщить.

Как известно, с ростом нормального контактного напряжения касательное напряжение увеличивается до значения  $K/2$  и далее остается постоянным, нормальное же напряжение продолжает расти. Очевидно, что зависимости вида  $\tau = f_1(\sigma_s, t, e)$  и  $\sigma = f_2(\sigma_s, t, e)$  являются различными. Поэтому величина

$$\mu = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{f_1(\sigma_s, t, e, u, \dots)}{f_2(\sigma_s, t, e, u, \dots)}$$

при некоторых условиях и может оказаться больше  $1/2$ .

4. По-видимому, «кажущийся» коэффициент трения может оказаться больше 0,5 в результате налипания металла на инструмент, поскольку при этом добавочная часть энергии трения расходуется на разрушение налипших частичек металла. По характеру контакта между деформируемым металлом и инструментом трение можно подразделять на следующие три основные вида.

Жидкостное трение имеет место тогда, когда вместо взаимного трения металлических поверхностей (внешнего трения) происходит внутреннее трение в слое жидкости между ними. При этом величина силы трения зависит от коэффициента вязкости жидкости. Даже один молекулярный слой смазки уменьшает коэффициент трения в несколько раз, но, увеличение числа слоев не приводит к значительному уменьшению коэффициента трения.

Граничное трение можно также назвать трением с адсорбционной смазкой, при этом трущиеся поверхности разделены очень тонким слоем смазки (один или несколько молекулярных слоев). В этих условиях слой смазки уже не подчиняется законам гидродинамики, а, взаимодействуя с трущимися поверхностями, зависит от их природы и состояния. При этом адсорбированный слой сильнее взаимодействует с металлом, чем жидкий, и поэтому его свойства ближе к свойствам твердого тела.

Сухое трение происходит в том случае, когда между трущимися поверхностями полностью отсутствует третья фаза, способная выполнять смазочную функцию.

Поверхность твердого тела может быть признана физической чистой (ювенильной), если на ней отсутствуют инородные атомы. Таковую поверхность можно получить разрушением тела или нагревом его в вакууме. В обычных условиях металл покрыт слоем газов, воды и полярных молекул органического вещества кото-

рые адсорбируются из содержащихся в атмосфере жирных масел и воды (рис. 92).

В процессе обработки металлов давлением трение носит смешанный характер. В общем случае, в одном и том же процессе одновременно могут иметь место жидкостное, граничное и сухое трение. Примером является холодная прокатка с большими степенями деформации, но, пожалуй, наиболее типичным для процессов обработки металлов давлением является граничное трение.

Смазка применяется для уменьшения коэффициента трения в процессе обработки металлов давлением, отвода тепла, возникающего при деформации, уменьшения расхода энергии, устранения налипания обрабатываемого металла на поверхность инструмента, улучшения качества (чистоты) поверхности обрабатываемого металла и повышения износостойкости инструмента. За счет расклинивающего действия смазки силы трения уменьшаются и степень деформации металла увеличивается.

Если смазка находится в твердом состоянии, то ее эффективность зависит от прочностных адгезионных свойств. Эффективность жидкой смазки зависит от способности образовывать в результате адсорбции на поверхности обрабатываемого металла размягченный (пластифицированный) слой, снижающий силы трения. В связи с этим природа металла также имеет существенное значение, поскольку от нее зависит его адсорбционно-химическая активность.

Силы сцепления между молекулами масла и металла тем больше, чем сильнее поверхностная активность металла, т. е. его способность удерживать смазку. Поэтому хорошая смазка должна быть поверхностно активной. Этим свойством обладают смазки, молекулы которых имеют в своем составе так называемые полярные группы. Молекулы смазки представляют собой вытянутые цепочки. Они «сцепляются» с поверхностью металла активными концами, на которых расположены полярные группы. Далее размещаются углеводородные цепочки, состоящие из групп  $\text{CН}_2$ . Молекулы смазки образуют «щетку», перпендикулярную поверхности металла так, что ее менее активные концы являются внешними. В процессе перемещения трущихся поверхностей молекулы прочно удерживаются за активные концы металлом, в то время как малоактивные концы отклоняются в сторону движения, отрываются и образуют смещающиеся слои, по которым осуществляется скольжение.

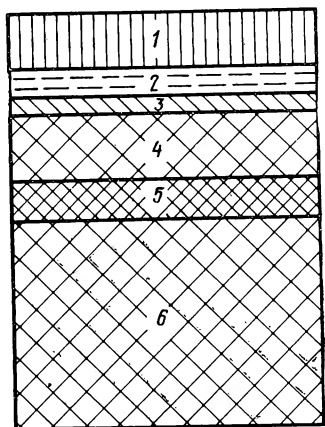


Рис. 92. Строение приконтактной зоны:

1 — адсорбированные слои полярных молекул органического вещества (смазки); 2 — воды; 3 — газов; 4 — окислов; 5 — зона деформированного металла; 6 — первичная объемная структура

К поверхно́стно активным веществам относятся жирные кислоты: олеиновая  $C_{17}H_{33}COOH$ , стеариновая  $C_{17}H_{35}COOH$ , пальмитиновая  $C_{15}H_{31}COOH$  или соединения жирных кислот, представляющие собой мыла —  $C_{15}H_{31}COONa$ ,  $C_{17}H_{35}COOK$ , некоторые соединения глицерина, соединения со стеариновой кислотой — стеарин, соединения с пальмитиновой кислотой — пальмитин и др.

Толщина смазочного слоя должна быть соизмерима со средней высотой выступов на поверхностях обрабатываемого металла и инструмента.

При малых нагрузках поверхностно активные смазки уменьшают износ. При больших нагрузках с ростом последних износ увеличивается. Это объясняется тем, что при больших нагрузках поверхностно активные смазки проникают в микроскопические трещины, которые всегда имеются в металле и частично нарушают его целостность, что приводит к увеличению износа.

Смазка должна удовлетворять следующим основным требованиям. Она должна образовывать на поверхности контакта невыдавливающиеся пленки, прочно связанные с металлом, легко покрывать его поверхность равномерным по толщине слоем, быстро и равномерно охлаждать обрабатываемый металл. Смазка не должна вызывать коррозию металла, изменять своего строения и свойств в течение длительного времени, содержать веществ, вредных для здоровья человека.

Наиболее употребительными смазками при обработке металлов давлением по классификации А. К. Чертавских<sup>1</sup> являются:

Эмульсия масло-вода, которая представляет собой капельки масла, мелко распыленные в воде. Обычно в эмульсию вводят еще так называемый эмульгатор, который понижает поверхностное натяжение смазки и образует на поверхности капелек масла вязкую и прочную пленку. Эмульгаторами служат натриевые и калиевые мыла, т. е. соли жирных кислот находящихся в чистом виде или в соединениях с глицерином в животных и растительных маслах. Для обеспечения хорошей смазки масло должно выделяться из эмульсии на поверхность обрабатываемого металла или инструмента, образуя на них за очень короткое время равномерную пленку необходимой толщины. Охлаждающая способность эмульсии приблизительно на  $\frac{1}{3}$  меньше, чем у воды.

Масла растительные и животные, содержащие жирные кислоты, которые образуют с окислами металлов упомянутые выше мыла. Пленка мыла обладает повышенной механической прочностью, пластичностью и выдерживает до разрушения большие давления. В животных жирах больше жирных кислот, чем в растительных. Поэтому животные жиры обладают лучшими смазочными свойствами.

Масла с наполнителями содержат в качестве наполнителей графит, крахмал, желатину, серный цвет, фосфорные, хлорные соединения, каолин (глину), тальк, слюду, мел, цинковые и

<sup>1</sup> Чертавских А. К. Трение и смазка при обработке металлов давлением М. Металлургия, 1955. 176 с. с ил.

свинцовые белила, литопен (краска из смеси сернистого бария и сернистого цинка), малярный клей, легкоплавкие металлы, наносимые на поверхность металла электролизом или вводимые в смазку в виде пудры. Наполнители увеличивают толщину слоя смазки, что приводит к уменьшению числа точек непосредственного контакта, снижению сил трения и улучшению качества поверхности.

Консистентные смазки представляют собой смеси минеральных масел и воды, связанные натриевыми, кальциевыми или магниевыми мылами, а также парафином, воском, т. е. веществами, которые обеспечивают повышенную вязкость смазки. Типичным представителем таких смазок является солидол, представляющий собой смесь минерального масла с 10—20% кальциевого мыла и 2—8% воды.

Установлено, что наложение ультразвука изменяет эффективность смазки [10]. При этом улучшается контакт между смазкой и металлом, значительно активизируется действие ряда минеральных и органических масел. Ультразвуковые колебания увеличивают энергию деформируемого металла, что приводит к росту его адсорбционной и адгезионной способностей по отношению к смазке. Ультразвук может ускорять химические реакции на контактной поверхности. За счет различных по величине упругих колебаний инструмента и металла между ними периодически создается разрежение, способствующее засасыванию смазки и равномерному ее распределению по контактной поверхности. Такую же функцию выполняют и микротрещины, периодически изменяющие свои размеры под воздействием ультразвуковых колебаний.

Вместе с тем под воздействием ультразвука происходит расщепление молекул смазки. Это особенно заметно при повышенных температурах и степенях деформации. При расщеплении молекул уменьшается вязкость и адсорбционная способность, а следовательно, и эффективность смазки. Таким образом, для каждой смазки должен быть подобран оптимальный режим ультразвуковых колебаний.

В последнее время начинают применять смазки и в процессах горячей обработки металлов давлением. Это необходимо при обработке высокопрочных материалов. Такие материалы с трудом поддаются пластической обработке, и здесь приходится проявлять особую заботу о том, чтобы обеспечить равномерную деформацию тела по возможности во всем его объеме и избежать разрушения. В качестве смазок при горячей обработке металлов используют поваренную соль, некоторые сравнительно легкоплавкие металлы, смеси графита или древесных опилок с мазутом и стеклянные порошки. Опыты показывают, что применение в качестве смазки расплавленного оконного стекла уменьшает давление на инструмент на ~40% по сравнению с обработкой «сухим» инструментом.

Мы рассмотрели влияние смазки на силы трения. Приведем теперь данные о влиянии других основных факторов на коэффициент трения при обработке металлов давлением.

## Состояние поверхности инструмента и обрабатываемого материала

Установлено, что чем выше класс чистоты поверхности инструмента, тем меньше коэффициент трения (рис. 93,а).

При холодной прокатке на коэффициент трения значительное влияние оказывает состояние поверхности инструмента. Состояние поверхности деформируемого металла заметно лишь в начале обработки. В процессе пластической деформации чистота поверхности

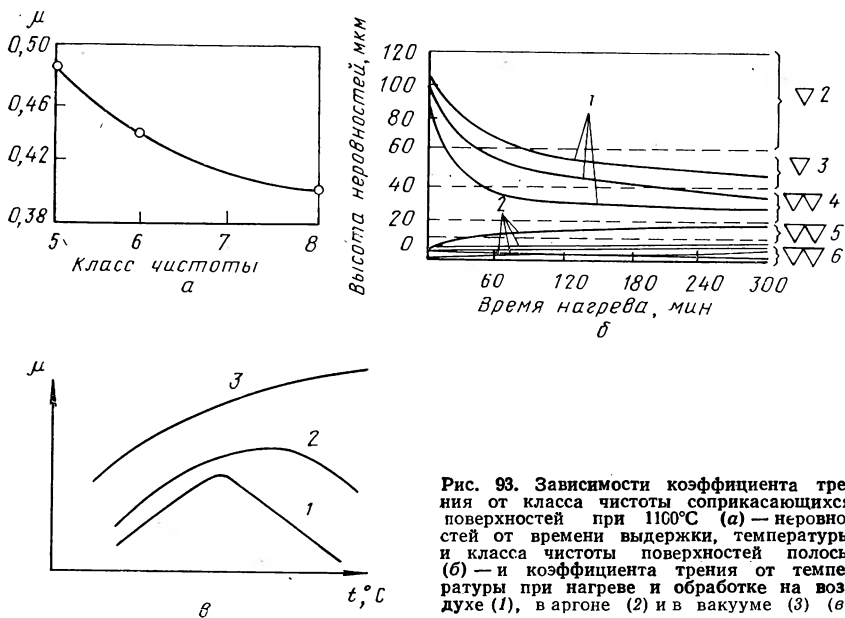


Рис. 93. Зависимости коэффициента трения от класса чистоты соприкасающихся поверхностей при 1160°С (а) — неровностей от времени выдержки, температуры и класса чистоты поверхностей, температуры (б) — и коэффициента трения от температуры при нагреве и обработке на воздухе (1), в аргоне (2) и в вакууме (3) (в)

обрабатываемого металла приближается к чистоте поверхности валков, поскольку твердость поверхности инструмента всегда выше, чем твердость обрабатываемого металла. Вместе с тем из опытов известно, что чем выше твердость обрабатываемого металла и валков, тем меньше коэффициент трения, хотя это уменьшение незначительно.

Состояние поверхности инструмента в процессе деформирования непрерывно изменяется. Отмечают три характерных периода изменения состояния поверхности инструмента при горячей обработке: начальный — после механической его обработки, промежуточный — после приработки инструмента и основной, наиболее длительный, — после образования сетки разгара. Сетка разгара постепенно переходит в трещины, которые на некоторой глубине от поверхности смыкаются, и происходит выкрашивание поверхности инструмента. Соответственно изменяется и коэффициент трения, который имеет минимальное значение на промежуточной стадии работы валков.

На рис. 93,б приведена зависимость высоты неровностей на поверхности стальных образцов при нагреве от времени выдержки температуры и класса чистоты. Из рассмотрения кривых следует, что с ростом температуры величина неровностей на поверхности металла стремится к некоторому значению, лежащему в пределах пятого класса чистоты. Это обстоятельство служит основанием для того, чтобы не связывать величину коэффициента трения с классом чистоты поверхности обрабатываемого металла при высоких температурах.

По данным М. М. Горенштейна, печная окалина образуется в процессе нагрева и имеет толщину 5—10 мм. Наружный слой (около 2% по толщине) состоит из  $Fe_2O_3$ , средний слой (около 40% по толщине) представляет собой  $Fe_3O_4$  и внутренний слой (остальные 58%) —  $FeO$ . Часть печной окалины отпадает при транспортировке и обработке металлов, другая ее часть, уплотненная в процессе обработки, имеет толщину 0,75—1,5 мм. Воздушная окалина, появляющаяся на поверхности металла после удаления печной окалины, имеет толщину 0,1—0,2 мм и очень прочно удерживается на металле. Коэффициент трения при обработке металла с воздушной окалиной выше, чем с печной.

Свойства образующейся окалины в значительной степени зависят от химического состава металла. Можно сказать, что все примеси и элементы в металле, понижающие температуру плавления окалины или способствующие ее размягчению, уменьшают коэффициент трения при горячей обработке металлов давлением.

#### *Состояние обрабатываемого тела и его физическая природа*

**Контактное напряжение.** Установлено, что в условиях обработки металлов давлением с увеличением давления на единицу поверхности тела коэффициент трения уменьшается. По данным опытов И. М. Павлова, при увеличении давления в 20 раз коэффициент трения при прокатке уменьшается в 2—2,5 раза.

**Температура.** В процессе взаимного перемещения поверхностей трущихся тел в ряде случаев наблюдается значительное выделение тепла. В местах наиболее плотного контакта температура поверхности достигает 500—1000°C и в некоторых случаях возможно расплавление металла в местах непосредственного касания. Таким образом, температура поверхности тела в связи с наличием неровностей различна в разных точках контактной поверхности и непрерывно изменяется по времени. Температурные «вспышки» на поверхности в отдельных точках продолжают десятичные или десятитысячные доли секунды, в отдельных точках поверхности температура поднимается выше температуры рекристаллизации металла, при этом снимается наклеп.

Количество тепла, выделяющееся в результате трения, а также за счет перехода в теплоту энергии, затрачиваемой на пластическую деформацию выступов оказывается настолько большим, что

может изменить механические свойства деформируемого металла во всем его объеме.

На рис. 93,в приведена зависимость коэффициента трения от температуры. Из рассмотрения графика следует, что при некоторой температуре, характерной для каждого металла, коэффициент трения имеет максимальную величину. Наличие максимума объясняется тем, что с ростом температуры на поверхности металла постепенно увеличивается толщина слоя окислов, свойства которых изменяются при изменении температуры. С повышением температуры толщина слоя окислов увеличивается, что приводит к росту коэффициента трения. В точке, соответствующей максимуму кривой, начинается размягчение окалины. При дальнейшем росте температуры коэффициент трения уменьшается что вызвано увеличением пластичности окалины.

Описанный механизм влияния температуры на силы трения хорошо подтверждается опытами по определению коэффициента трения в процессе прокатки после нагрева в нейтральной среде (аргон) и в вакууме. При нагреве и прокатке в аргоне величина коэффициента трения возрастает, а максимум его смещается в сторону более высокой температуры по сравнению со случаем нагрева и прокатки на воздухе. При нагреве и прокатке в вакууме максимум исчезает, коэффициент трения монотонно увеличивается с ростом температуры, а его абсолютная величина больше, чем при прокатке на воздухе и в аргоне. Отсутствие максимума при прокатке в вакууме объясняется отсутствием окалины, а более высокое значение коэффициента трения связано с тем, что в вакууме исчезает слой «естественной» смазки из молекул газа на поверхности трущихся тел.

При высоких температурах обработки иногда наблюдается некоторое повышение коэффициента трения в связи с налипанием металла на поверхность рабочего инструмента. Налипание наблюдается в том случае, если температура поверхности инструмента близка к температуре обрабатываемого металла. При этом на некоторых участках поверхностей контакта происходит приваривание металла к инструменту. Эти «узлы схватывания» оказываются прочнее, чем слои металла, расположенные под ними. В результате при относительном перемещении поверхности обрабатываемого тела и инструмента последний «вырывает» кусочки из поверхностного слоя металла. При дальнейшем воздействии на металл налипшие на инструмент кусочки вызывают порчу поверхности обрабатываемого металла и инструмента. Описанное явление наблюдается и в процессе холодной пластической обработки. Здесь частицы металла в «узлах схватывания», возникающих в результате взаимного сдвига участков с ювенильными поверхностями металла и инструмента, оказываются прочнее расположенных ниже частиц за счет наклепа.

Химический состав металла. Установлено, что коэффициент трения при обработке давлением углеродистых сталей уменьшается с ростом содержания углерода. Это происходит в силу

изменения состояния окалины и роста давления. По тем же причинам уменьшается коэффициент трения у твердых сталей по сравнению с мягкими.

**Скорость деформации.** Коэффициент трения при малых давлениях увеличивается с повышением скорости деформации, а при больших давлениях уменьшается. При некоторых средних значениях давления зависимость коэффициента трения от скорости характеризуется кривой, имеющей максимум, который с повышением давления смещается к нулевой ординате. Этот факт можно объяснить следующим образом. Как отмечалось, в процессе трения осуществляется упругая деформация, пластическая деформация и разрушение.

При малых давлениях на поверхности контакта происходят преимущественно процессы пластической деформации шероховатостей, так как соприкасаются только некоторые части выступов поверхности. Сопротивление пластической деформации повышается с увеличением скорости деформации, что приводит к росту коэффициента трения.

При больших давлениях по изложенным выше причинам истирание (износ) увеличивается. Поэтому закономерности трения изменяются: с ростом скорости сопротивление разрушению уменьшается, что ведет к уменьшению коэффициента трения. При некоторых промежуточных величинах давлений эти противоположно влияющих два фактора обуславливают появление максимума на кривой, характеризующей зависимость коэффициента трения от скорости деформации.

Понятно, что чем больше значение давления и твердости поверхности тела, тем ближе к нулевой ординате располагается максимум. Даже в наиболее тяжело нагруженных подшипниках машин величины давлений равны  $20-40 \text{ Мн/м}^2$  ( $2-4 \text{ кг/мм}^2$ ), т. е. относительно малы. В процессе пластической обработки металлов давления обычно имеют большую величину — до  $2000 \text{ Мн/м}^2$  ( $200 \text{ кг/мм}^2$ ) и более. Поэтому коэффициент трения в этих условиях монотонно уменьшается с ростом скорости скольжения.

В самом общем виде существо трения заключается в превращении механической энергии движения в теплоту. При этом проявляется тенденция к выравниванию скоростей движения тел передачей количества движения  $mv$ . Сила трения всегда стремится замедлить движение более быстрого тела и ускорить движение более медленного. Сила трения, как и всякая другая сила, является вектором. Поэтому вопрос о направлении сил трения решается на основании следующих соображений [12].

Если тело  $A$  (рис. 94,а) в плоскости, перпендикулярной нормальному давлению, перемещается со скоростью  $\vec{u}$ , а тело  $B$  в этой плоскости неподвижно, то сила трения  $\vec{T}$ , действующая на тело  $B$ , параллельна вектору  $\vec{u}$ . К телу  $A$  будет приложена сила, равная по величине  $T$ , но имеющая противоположное направление.



Проекция силы трения на любое направление может быть найдена с помощью круговой диаграммы, изображенной на рис. 94,б:

$$T_{\theta} = T \cos \theta,$$

где  $\theta$  — угол между направлением силы трения и направлением ее проекции.

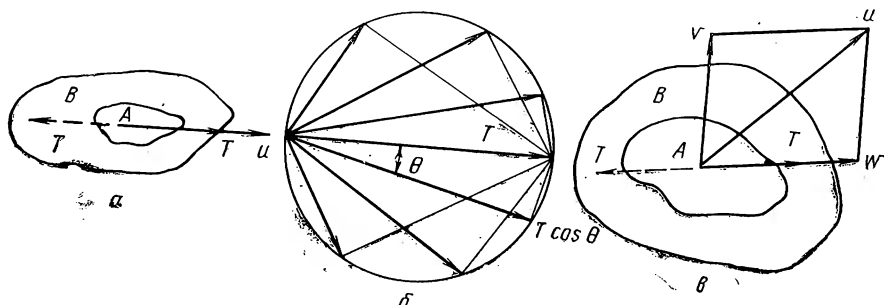


Рис. 94. Направление сил трения:

*a* — когда одно из тел неподвижно; *б* — в круге трения; *в* — когда направления движения тел не совпадают

Если тела *A* и *B* перемещаются в различных направлениях, то направление силы трения между соприкасающимися телами параллельно направлению относительного перемещения. Это означает, что если тело *A* имеет скорость  $\vec{u}$ , тело *B* — скорость  $\vec{v}$ , то вектор  $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$  есть вектор скорости перемещения тела *A* относительно тела *B*, и направление силы трения будет параллельно вектору  $\vec{w}$ .

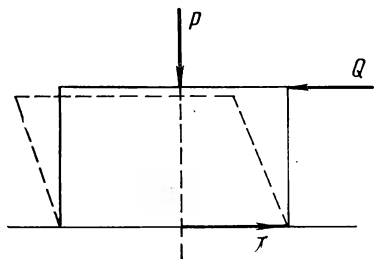


Рис. 95. Схема, поясняющая возникновение сил трения покоя и сил трения движения

На рис. 94,в сплошной линией показаны вектор силы трения, действующей на тело *B*, и пунктиром — вектор силы трения, приложенной к телу *A*.

Пусть к некоторому телу приложена сила *Q* (рис. 95). В результате воздействия силы *Q* на поверхности контакта тела с опорной плоскостью возникает сила трения *T*, приложенная к телу со стороны опорной плоскости, равная по величине и противоположная по направлению силе *Q*. Если тело абсолютно твердое, то в процессе увеличения силы от нуля до некоторого критического значения тело будет оставаться неподвижным, а сила трения *T* будет расти с увеличением силы *Q*. Когда сила *Q* (а следовательно, и сила *T*) достигнет некоторого критического значения, тело начинает двигаться по плоскости. При этом в случае равномерного движения будем иметь:  $Q = T = \mu P$ .

Из изложенного следует, что приведенное соотношение имеет место только тогда, когда происходит скольжение. При отсутствии скольжения сила трения  $T < \mu P$ .

Таким образом, силы трения можно разделить на силы трения покоя и силы трения движения (скольжения). В соответствии с этим коэффициенты трения можно разделить на коэффициент трения покоя и коэффициент трения скольжения. При этом коэффициент трения покоя всегда меньше коэффициента трения скольжения. Коэффициент трения покоя изменяется в пределах от нуля до своего предельного значения, равного коэффициенту трения скольжения:  $0 < \mu_n < \mu$ .

Если сила приложена к упругому телу, то при увеличении силы трения от нуля до своего предельного значения тело деформируется упруго (пунктир на рис. 95). Если пластическая деформация тела происходит при значении силы трения покоя  $T < \mu P$ , то тело в процессе воздействия на него нагрузки будет деформироваться<sup>1</sup> только пластически.

Приведенное разделение сил трения на силы трения покоя и силы трения движения существенно для понимания ряда явлений, наблюдаемых в процессе осадки и прокатки.

Несмотря на длительный срок (3,5 столетия), прошедший со времени первых попыток научно разработать вопросы теории трения, эта проблема разработана еще мало ввиду ее сложности. Поэтому на основании анализа опытных данных появляются все новые предположения по объяснению механизма трения. В работе [11] предложено, например, выразить удельную силу трения в виде функции:

$$\vec{\tau} = f(\sigma, u) \sigma \vec{i}, \quad (297)$$

где  $\vec{i}$  — единичный вектор скорости скольжения инструмента по металлу;

$u$  — скорость скольжения;

$\sigma$  — нормальное контактное напряжение.

Таким образом, здесь функция  $f(\sigma, u)$  выступает в роли «коэффициента трения». Такой подход, по нашему мнению, является весьма плодотворным.

## 2. Скольжение, торможение и застой на поверхности контакта

Как и диаграммы, получаемые в процессе растяжения, диаграммы, получаемые при сжатии, разделяются на индикаторные диаграммы, диаграммы условных напряжений и диаграммы истинных напряжений (рис. 96).

<sup>1</sup> Томленов А. Д. Теория пластических деформаций металлов. М., Машгиз, 1951. 200 с. с ил.

Из рис. 96, в следует, что типичная диаграмма истинных напряжений сжатия пластических материалов состоит из двух участков. Участок  $oa$  соответствует упругой деформации, участок  $ac$  — пластической деформации. Кривая  $ac$  в свою очередь состоит также из двух характерных участков: в пределах от точки  $a$  до точки  $b$  угол наклона кривой к оси абсцисс относительно не-

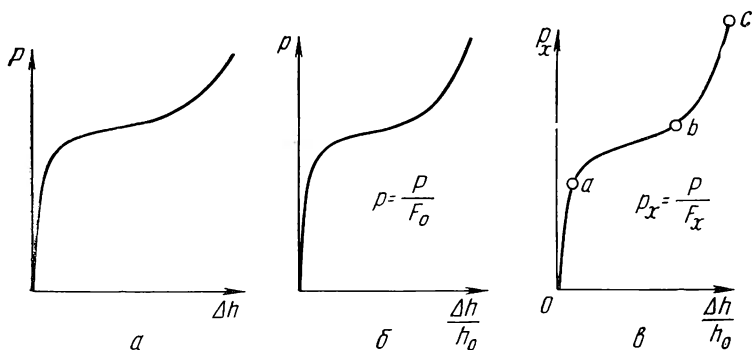


Рис. 96. Диаграммы сжатия:  
 а — индикаторная; б — условных; в — истинных напряжений

велик, а у некоторых металлов он приобретает отрицательное значение. В точке  $b$  наклон кривой к оси абсцисс увеличивается и кривая идет круто вверх.

Если материал в данных условиях сжатия относительно пластичен, то даже при больших степенях деформации разрушить об-

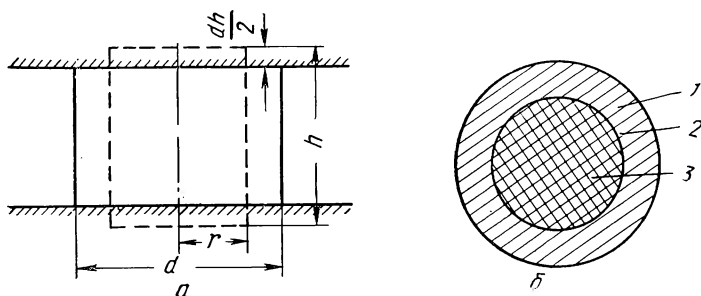


Рис. 97. Переход от напыла к скольжению, зоны:  
 1 — скольжения; 2 — торможения; 3 — застоя (а — вид сбоку, б — вид сверху)

разец практически не удастся и осадку приходится прекращать, поскольку для дальнейшего ведения процесса не хватает мощности оборудования. Материалы менее пластичные на определенном этапе процесса осадки разрушаются (точка  $c$ ). Перегиб в точке  $b$  на кривой обусловлен влиянием контактных сил трения.

Следуя А. Ф. Головину<sup>1</sup>, представим, что круглый цилиндр высотой  $h$  и радиусом  $r$  (рис. 97) подвергается осадке на величину  $dh$ . При этом происходит приращение двух поверхностей контакта  $dF$  и уменьшение боковой поверхности  $dS$ , что можно выразить как

$$dF = 2\pi(r + dr)^2 - 2\pi r^2; \quad dS = 2\pi r h - 2\pi(r + dr)(h - dh)$$

или (пренебрегая во втором случае бесконечно малыми высшего порядка):  $dF = 4\pi r dr$ ;  $dS = 2\pi r dh - 2\pi h dr$ .

Если  $dS \geq dF$ , то происходит наплыв боковой поверхности на контактную, если  $dS \leq dF$ , то наплыв отсутствует и имеет место скольжение на поверхностях контакта.

Скольжение будет иметь место при условии:  $dS \leq dF$  или  $r dh - h dr \leq 2r dr$ . Запишем условие постоянства объема в виде:  $\pi r^2 h = \pi (r + dr)^2 (h - dh)$ . Пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, имеем отсюда:

$$dr = \frac{dh}{2} \frac{r}{h}.$$

Подставляя это значение  $dr$  в предыдущее равенство, получим  $h \leq 2r = d$ .

Следовательно, если высота цилиндра меньше его диаметра, то наряду с наплывом будет происходить скольжение на поверхностях контакта. Этому моменту соответствует точка перегиба  $b$  на кривой сжатия.

Полученные здесь соотношения подтверждаются опытными данными. Если взять образец с достаточно большим отношением высоты к диаметру и поверхность его перед сжатием покрыть равномерной тонкой пленкой окислов или лака, то после сжатия на контактной поверхности легко обнаружить три хорошо различимые области: центральную часть, где покрытие остается неповрежденным, промежуточную концентрическую область, где первоначальная поверхность частично повреждена, и периферийную концентрическую часть, где покрытие исчезло и металл имеет блестящую, обновленную поверхность (рис. 97).

Очевидно, что в центральной части контактной поверхности силы трения были меньше сил трения скольжения и необратимые перемещения металла относительно инструмента отсутствовали. Е. П. Унксов назвал эту центральную часть зоной или участком застоя. На этом участке имеют место перемещения, не превышающие величину перемещений в пределах упругой зоны. В периферийной части металл интенсивно перемещался относительно инструмента — эту часть назовем участком скольжения. В промежуточной части скольжение было менее интенсивным. Оно постепенно развивалось от зоны застоя к зоне скольжения, поэтому промежуточную часть можно назвать участком торможения. Замечено, что участки скольжения и торможения появляются лишь после того, как высота цилиндра становится меньше его диаметра. Это находится

<sup>1</sup> Головин А. Ф. Прокатка, ч. I, Свердловск — М. — Л., 1933. 135 с.

в соответствии с приведенным выше расчетом. Опыты показывают, что в процессе осадки соотношение между размерами различных участков на контактной поверхности непрерывно изменяется: с ростом степени деформации величина участков застоя и торможения уменьшается за счет увеличения участков скольжения. При очень больших степенях деформации, когда высота образца становится мала по сравнению с размерами его поперечного сечения, участок скольжения распространяется на всю контактную поверхность.

### 3. Условия наименьшего периметра и геометрического подобия

Из опытных данных известно, что при осадке цилиндров различного поперечного сечения оно стремится приобрести форму круга, который имеет наименьший периметр из всех плоских фигур при одинаковой площади. Это явление получило наименование условия наименьшего периметра, которое вызывается контактными силами трения.

Пусть сжатию подвергается прямоугольный параллелепипед. При осадке тела за счет уменьшения высоты его поперечное сечение увеличивается, и силы трения направлены по нормальям к периметру поперечного сечения в сторону, обратную направлению движения частиц металла.

Деформация параллелепипеда при осадке была подробно рассмотрена А. Ф. Головиным. Следуя его рассуждениям, в силу симметрии рассмотрим деформацию четвертой части параллелепипеда (рис. 98).

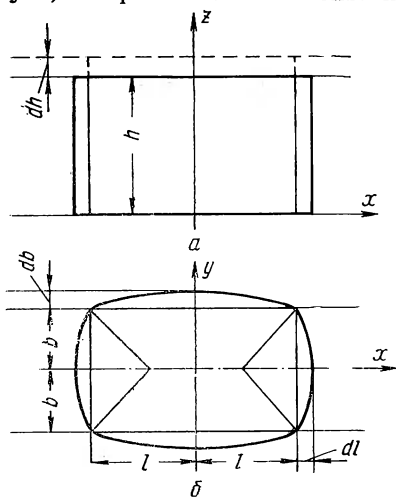


Рис. 98. Схема к выводу условия наименьшего периметра:  
а — вид сбоку; б — вид сверху

В начале осадки приращение объема призмы по осям  $x$  и  $z$  будет:  $dV_x = bhd l$ ,  $dV_z = \frac{1}{2} b^2 dh$ .

Из условия постоянства объема следует, что  $dV_x = -dV_z$ , поэтому  $bhd l + \frac{1}{2} b^2 dh = 0$ , откуда  $\frac{d l}{l} = -\frac{1}{2} \frac{b}{l} \frac{d h}{h}$ .

Из условия постоянства объема для одной четвертой части параллелепипеда имеем:

$$\frac{d b}{b} = -\frac{d l}{l} - \frac{d h}{h}.$$

Подставляя сюда выражение  $dll$ , получим:

$$\frac{db}{b} = - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{b}{l} \right) \frac{dh}{h}.$$

Приведенные уравнения справедливы для начальной стадии сжатия. Затем прямоугольное сечение постепенно становится эллиптическим. А. Ф. Головин показал, что для эллиптического сечения справедливы соотношения

$$\frac{dl}{l} = - \frac{1}{2} \left( \frac{b}{l} \right)^2 \frac{dh}{h}; \quad \frac{db}{b} = - \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{b}{l} \right)^2 \right] \frac{dh}{h}.$$

Для сечений, промежуточных между эллиптическим и прямоугольным, будут иметь место соотношения вида

$$\frac{dl}{l} = - \frac{1}{2} \left( \frac{b}{l} \right)^n \frac{dh}{h}; \quad \frac{db}{b} = - \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{b}{l} \right)^n \right] \frac{dh}{h}. \quad (298)$$

Из опытных данных следует, что величина  $n$  зависит не только от начальной формы поперечного сечения тела и коэффициента обжатия по высоте  $h_0/h_1$ , но и от коэффициента трения.

Так как  $\frac{b}{l} < 1$  и  $n$  — положительное число, то

$$\frac{db}{b} > \frac{dl}{l}; \quad \int_{l_0}^{l_1} \frac{db}{b} > \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} \quad \text{или} \quad \frac{b_1}{b_0} > \frac{l_1}{l_0}.$$

Таким образом:  $b_1/l_1 > b_0/l_0$ .

Отсюда становится ясным, что в процессе осадки отношение сторон поперечного сечения увеличивается так, что отношение  $b/l$  стремится к единице. Это означает, что прямоугольное поперечное сечение стремится в процессе осадки приобрести форму круга. При наличии сил трения на поверхностях контакта эта тенденция наблюдается для тел, имеющих любую форму поперечного сечения. При этом если поперечное сечение имеет вогнутый периметр, то каждый из простейших элементов, составляющих поперечное сечение, деформируется по условию наименьшего периметра.

Условие наименьшего периметра позволяет предугадать характер деформации тел в процессе пластической обработки, что существенно облегчает разработку технологических процессов. Замечено, что при сжатии тел, у которых высота в два и более раз превышает диаметр, образуется так называемая «двойная бочка». В процессе дальнейшего сжатия эти две бочки сливаются и при некоторой степени деформации образуется одна бочка. При сжатии тел, у которых высота равна диаметру или меньше его величины, сразу образуется только одна бочка. Обжатие, при котором начинается образование бочки, соответствует обжатию, при котором усилие сжатия начинает резко возрастать, т. е. когда  $h \leq d$

Образование бочки является результатом действия сил трения. Трение обуславливает возникновение сложной объемной (трехосной) схемы напряженного состояния. На преодоление сил трения

приходится затрачивать дополнительную работу, под их влиянием в ряде случаев усилие деформации увеличивается в несколько раз по сравнению с тем, которое обусловлено истинным сопротивлением металла деформации. От характера и величины сил трения зависит износ и качество поверхности изделия. Вместе с тем ряд технологических процессов обработки металлов давлением невозможно осуществить, если силы трения отсутствуют.

Процессы образования бочки и изменение формы поперечного сечения тела в процессе осадки свидетельствуют о неравномерности деформации по его объему. Неравномерная деформация нежелательна, так как структура, а следовательно, и физические свойства тела после деформации в различных точках получаются различными. Кроме того, в результате неравномерной деформации на боковой поверхности тела могут возникать трещины даже при сжатии довольно пластичных металлов. Неравномерность структуры и образование трещин особенно нежелательны при обработке высокопрочных металлов и сплавов.

Бочкообразность при осадке вынуждает назначать повышенные припуски на заготовку. Образующиеся зоны затрудненной деформации, в которых степень деформации минимальна, заставляют увеличивать обжатие или усредненную по объему степень деформации.

Проф. А. Ф. Головин показал, что когда коэффициент трения равен нулю, то и показатель  $n$  в формулах (298) равен нулю. В таком случае

$$\frac{db}{b} = \frac{dl}{l} = -\frac{1}{2} \frac{dh}{h}.$$

Интегрируя это выражение, получаем:

$$\int_{b_0}^{b_1} \frac{db}{b} = \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} = -\frac{1}{2} \int_{h_0}^{h_1} \frac{dh}{h} \quad \text{или} \quad \lg \frac{b_1}{b_0} = \lg \frac{l_1}{l_0} = \frac{1}{2} \lg \frac{h_0}{h_1}$$

$$\text{и} \quad \frac{b_1}{b_0} = \frac{l_1}{l_0} = \sqrt{\frac{h_0}{h_1}}.$$

Отсюда следует, что при отсутствии трения на поверхностях контакта тело деформируется так, что отношение между размерами поперечного сечения тела остается постоянным. Это условие справедливо для тел, обладающих любой формой поперечного сечения. Оно получило наименование условия геометрического лободия.

В процессе осадки силы трения полностью устранить невозможно. Тем не менее, при помощи ряда приемов можно существенно уменьшить их величину и таким путем добиться более равномерной деформации тела. К числу таких приемов относятся: 1) применение инструмента с поверхностью, обработанной по высокому классу чистоты; 2) применение смазки; 3) подбор надлежащих условий деформации, определяющих состояние тела: температуры, скорости деформации и обжатий; 4) осадка между выпуклыми или

коническими бойками; 5) применение неглубоких конических или цилиндрических выточек на торцах обрабатываемого тела, которые заполняются смазкой, так как малая ширина бурта  $(0,03—0,4)d$  и наличие смазки уменьшают величину сил трения на поверхности его контакта с бойками; 6) использование гофрированных бойков для расчленения поля сил трения на первой операции процесса осадки и использование гладких бойков на второй; 7) применение ультразвука.

В. П. Северденко и В. В. Клубович исследовали распределение деформации по высоте образца при осаживании в ультразвуковом поле с частотой 23 кгц. Как следует из рис. 99, распределение де-

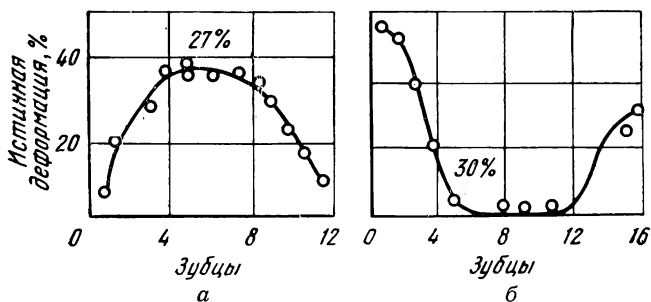


Рис. 99. Распределение деформации по высоте медных образцов после обжата:

а — в обычных условиях; б — в ультразвуковом поле

формации по высоте образцов после осадки в ультразвуковом поле прямо противоположно распределению деформации в процессе осадки в обычных условиях. Это можно объяснить суммарным влиянием инерционных сил, возникающих в результате действия больших ускорений, температуры, а также уменьшением сил трения на контактных поверхностях. При этом примерно в 2 раза уменьшается и величина усилия осадки. По мере увеличения интенсивности ультразвуковых колебаний степень неравномерности деформации увеличивается. Следовательно, имеется принципиальная возможность добиться равномерной деформации, выбрав оптимальную частоту ультразвуковых колебаний.

#### 4. Краевая задача сжатия

Е. П. Унксов<sup>1</sup> и В. М. Заварцевой в результате остроумно и строго поставленных опытов впервые удалось выяснить характер изменения на поверхности контакта не только нормальных, но и касательных напряжений с помощью поляризационно-оптического метода.

Они производили осадку плоских свинцовых образцов на прес-

<sup>1</sup> Унксов Е. П. Инженерные методы расчета при обработке металлов давлением. М., Машгиз, 1955. 280 с. с ил.



се, нижний боек которого был изготовлен из оптически чувствительного материала ИМ-44 с пределом пропорциональности, равным  $49 \text{ Мн/м}^2$  ( $4,9 \text{ кг/мм}^2$ ). Предел текучести чистого свинца равен  $15\text{—}20 \text{ Мн/м}^2$  ( $1,5\text{—}2 \text{ кг/мм}^2$ ). Это позволило произвести пластическую деформацию свинцового образца с помощью бойка из прозрачного оптически чувствительного материала.

Величина степени деформации в процессе опытов изменялась в пределах от 6 до 13%. Были приняты необходимые меры для того, чтобы свинцовый образец и оптически активная плита находились в условиях плоской деформации. В результате опытов определяли, используя методы теории упругости, величину нормальных и касательных напряжений в различных точках прозрачного бойка, а также на контактной поверхности.

Оказалось, что в общем случае эпюра нормальных напряжений (рис. 100,а) состоит из трех участков. На участках *ab* нормальное напряжение изменяется по показательному закону, на участках *bc* — по линейному закону, на участках *co* — по параболическому закону.

Касательное напряжение также имеет характерные участки. На участках *ab* оно возрастает пропорционально нормальному напряжению:  $\tau_{xy} = \sigma_y \nu$ .

На участках *bc* касательные напряжения сохраняют постоянное значение, так что здесь

$$\tau_{xy} = \frac{K}{2} = 1,15 \frac{\sigma_s}{2} .$$

Наконец, на участках *oc* касательное напряжение изменяется по линейному закону и обращается в нуль на оси симметрии. На основании опытных данных установлено, что на этом участке

$$\tau_{xy} = \frac{K}{2} \frac{x}{h} ,$$

где *h* — высота полосы.

Участки *ab*, *bc*, *co* представляют собой соответственно участки скольжения, торможения и застоя. Характер эпюр изменяется в зависимости от условий осадки, величины обжатия, соотношения между длиной тела и его высотой и коэффициента трения. В некоторых случаях отдельные участки на кривых могут отсутствовать.

Метод фотоупругости, а впоследствии и фотопластичности был развит и широко использован для изучения контактных напряжений при осадке и в особенности при прокатке П. И. Полухиным и его сотрудниками [13].

В процессе обжатия в общем случае деформация неравномерна потому, что напряжения уменьшаются по мере перехода от контактных поверхностей к средней части по высоте полосы (см. раздел третий, гл. V). Чем меньше отношение длины поверхности контакта *l* к высоте полосы *h*, тем все более сосредоточенный характер носят нагрузки и тем более неравномерной становится деформация. В связи с этим внешние слои перемещаются в направлении, пер-

пендикулярном направлению сжатия, в большей мере, чем внутренние. Внешние слои тянут за собой внутренние, поэтому в них возникают продольные напряжения растяжения. Как реакция по отношению к ним во внешних частях возникают напряжения сжатия (рис. 100,б).

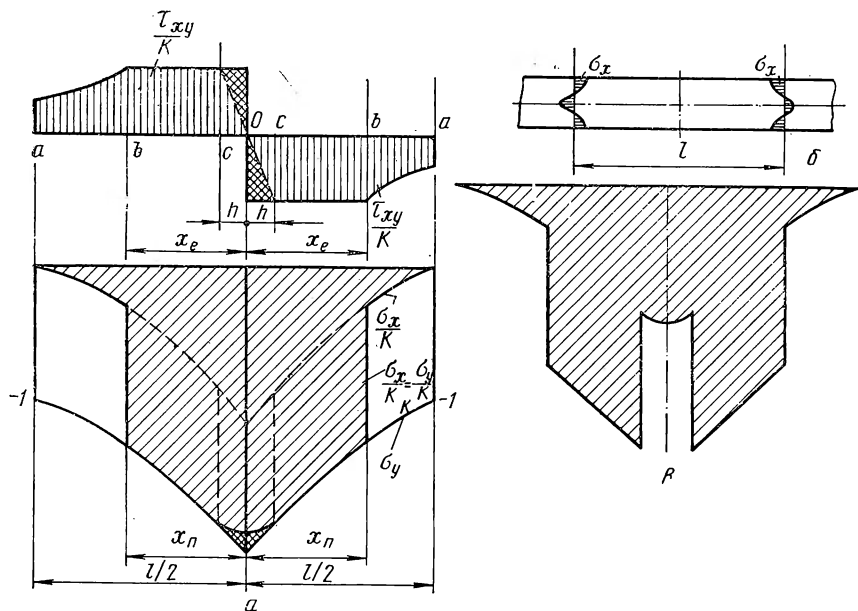


Рис 100. Схема краевой задачи сжатия полосы с внеконтактными зонами:

$a$  — изменение контактных напряжений по длине тела;  $b$  — изменение продольных напряжений по высоте;  $c$  — изменение продольных напряжений, если использовать условие  $\sigma_p - \sigma_0 = \nu k$  в зоне прилипания

Примем, что в точке  $(x=l/2; y=h/2)$  напряжения  $\sigma_x = -n'K$ , причем  $0 \leq n' \leq 1$ . При  $n'=0$  имеет место гипотеза плоских сечений, деформация равномерна по высоте («низкая» полоса) и  $\sigma_x = 0$ . При  $n'=1$  существует максимальная неравномерность («высокая» полоса) и  $\sigma_x = -K$ .

Условие пластичности в главных осях запишется в виде  $\sigma_x - \sigma_y = \nu K$ . Принимая  $\nu = +1$ , получим  $\sigma_y = -(n'+1)K$ .

Обозначим величину  $n'+1 = n_3$  и назовем ее коэффициентом внешних зон. Окончательно имеем для точки  $(l/2, h/2)$

$$\sigma_y = -n_3 K. \quad (299)$$

Здесь  $n_3$  выступает как коэффициент формы, учитывающий влияние внешних зон на контактные напряжения при осадке.

Выражения контактных напряжений при сжатии легко найти на основе гипотезы плоских сечений, используя систему уравнений

(195). Выражения для напряжений (198), полученные для участков скольжения  $ab$ , с учетом соотношения (299) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \pm n_3 K \mu e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)}; \\ \sigma_y &= -n_3 K e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)}; \quad \sigma_x = K \left[1 - n_3 e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)}\right]. \end{aligned} \right\} \quad (300)$$

Для участков торможения  $bc$  систему уравнений (195) перепишем в виде:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2}{h} \tau_{xy} = 0; \quad \sigma_x - \sigma_y = \nu K; \quad \tau_{xy} = \pm \frac{n_3 K}{2}.$$

Отсюда при  $\tau_{xy}$ , взятом со знаком минус (поскольку направление его действия противоположно направлению оси  $x$ ), получим:

$$\sigma_y = \frac{n_3 K}{h} x + c.$$

Для точки  $x = x_b$  имеем  $\sigma_y = \frac{\tau_{xy}}{\mu} = -\frac{Kn_3}{2\mu}$ . Поэтому  $c = -\frac{Kn_3}{2\mu} - \frac{n_3 K}{h} X_b$ . Полагая  $\nu = +1$ , для участков торможения будем иметь

$$\tau_{xy} = \pm \frac{n_3 K}{2}; \quad \sigma_y = -\frac{n_3 K}{2\mu} \left[1 + \frac{2\mu}{2} (x_b - x)\right]; \quad \sigma_x = \sigma_y + K. \quad (301)$$

Для участков застоя  $co$ , используя систему уравнений

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2\tau_{xy}}{h} = 0; \quad \sigma_x - \sigma_y = \nu K; \quad \tau_{xy} = \pm \frac{n_3 K}{2} \frac{x}{h} \quad (302)$$

при  $\tau_{xy}$ , взятом со знаком минус, выведем следующее уравнение:

$$\sigma_y = n_3 K \frac{x^2}{2h^2} + c. \quad (303)$$

Из условия непрерывности напряжений  $\sigma_y$  в точке  $C$  следует, что при  $X = X_c = h$  правые части соответствующего равенства (301) и (303) равны. Отсюда

$$c = -\frac{n_3 K}{2\mu} \left[1 + \frac{2\mu}{h} (x_b - h)\right] - \frac{n_3 K}{2}.$$

Подставив это выражение в уравнение (302), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{n_3 K}{2\mu} \left[1 + \frac{2\mu}{h} (x_b - h)\right] - \frac{n_3 K}{2h^2} (h^2 - x^2), \quad \sigma_x = \sigma_y + K; \\ \tau_{xy} &= \pm \frac{n_3}{2} \frac{x}{h}. \end{aligned} \quad (304)$$

В точке  $b$  касательные напряжения  $\tau_{xy}$  по равенствам (300) и (301) должны быть равны, поэтому

$$-n_3 K \mu e^{\frac{2\mu}{h} \left( \frac{l}{2} - x_b \right)} = -\frac{n_3 K}{2} \quad \text{или} \quad e^{\frac{2\mu}{h} \left( \frac{l}{2} - x_b \right)} = \frac{1}{2\mu}.$$

Отсюда находим координату  $x_b$ :

$$\frac{x_b}{h} = \frac{l}{2h} + \frac{\ln 2\mu}{2\mu}. \quad (305)$$

С использованием уравнений (300) и (304) на рис. 100 построены эпюры контактных напряжений. Приведенное решение содержит противоречие, заключающееся в том, что для всех участков условие пластичности взято в форме  $\sigma_x - \sigma_y = K$ , т. е. в предположении, что касательное напряжение мало по сравнению с нормальным. Между тем на участках  $bc$  оно имеет максимальное значение ( $\tau_{xy} = \pm \frac{K}{2}$ ) и условие пластичности в форме  $\sigma_x - \sigma_y = 0$  было бы здесь более подходящим. Но тогда мы получили бы разрыв напряжений  $\sigma_x$  в точках  $C$ . Справа от оси  $y$  эти напряжения внезапно бы уменьшали свое значение на величину  $K$ , а слева снова увеличивались бы на ту же величину (рис. 100). Такие скачки не оправданы по смыслу задачи.

Для того чтобы сделать задачу более корректной, представляется целесообразным участок застоя объединить с участком торможения в один, называя его участком прилипания и в соответствии с этим ввести новое обозначение координаты  $x_b = x_{\text{п}}$ . Такой подход правомерен потому, что теоретически [14, с. 218] и экспериментально [5] доказано, что характер перемещения частиц металла относительно инструмента на участках торможения и застоя идентичен.

На основании многочисленных опытов по осадке установлено, что контактные касательные напряжения при неизменном состоянии трущихся поверхностей зависят не только от величины нормального давления  $P$ , но и от величины скорости контактного смещения  $u$ , т. е. что выполняется закон (297). Это позволяет понять, почему происходит снижение величины касательных напряжений с увеличением нормальных давлений на участках контакта с зонами прилипания. В критическом сечении  $\tau = 0$ , потому что при этом  $u = 0$ , хотя нормальное контактное напряжение максимально. Малым смещениям в зоне застоя соответствуют и малые касательные напряжения. Таким образом, можно принять, что в зоне прилипания имеем  $\tau_{xy} = \pm \frac{K}{2}$  и, следовательно, условие пластичности должно быть выбрано в виде  $\sigma_x - \sigma_y = 0$ .

Окончательно имеем следующее решение краевой задачи сжатия в условиях плоской деформации:

$$\text{зона скольжения} \left( \frac{x_{\text{п}}}{h} \leq x \leq \frac{l}{2} \right)$$

$$\frac{\sigma_x}{K} = -n_3 e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)}; \quad (306)$$

зона прилипания  $\left(0 \leq x \leq \frac{x_{\Pi}}{h}\right)$

$$\frac{\tau_{xy}}{K} = \pm \frac{n_3}{2}; \quad \frac{\sigma_y}{K} = \frac{\sigma_x}{K} = -\frac{n_3}{2\mu} \left[1 + \frac{2\mu}{h} (x_{\Pi} - x)\right]; \quad (307)$$

$$\frac{x_{\Pi}}{h} = \frac{l}{2h} + \frac{\ln 2\mu}{2\mu}. \quad (308)$$

Из последних равенств следует, что в зоне прилипания нормальные напряжения изменяются по линейному закону и разница с решением при наличии участка застоя выражается площадью треугольника 1—2—3—4 на рис. 100,а. Напряжение  $\sigma_x$  в точках  $x = x_{\Pi}$  скачкообразно (а в действительности очень быстро) увеличивается до значения  $\sigma_y$ , что, как увидим позже, находит свое объяснение.

## 5. Напряженное состояние при сжатии

Результаты решения одномерной задачи, полученные в предыдущем разделе, используем теперь в качестве краевых условий для решения плоской (двухмерной) задачи о напряженном состоянии при сжатии. На основании первых двух равенств (171) и соответствующих двух равенств (300) из предыдущего пункта получим при  $y = h/2$

$$\begin{aligned} (c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}) \left( A e^{\frac{mh}{2}} + B e^{-\frac{mh}{2}} \right) &= \pm n_3 K \mu e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)}; \\ - (c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx}) \left( A e^{\frac{mh}{2}} - B e^{-\frac{mh}{2}} \right) + c &= -n_3 K e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)}. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$c_1 = 0; \quad c = 0; \quad e^{-mx} = e^{-\frac{2\mu}{h} x}; \quad m = \frac{2\mu}{h}; \quad (309)$$

$$c_2 (A e^{\mu} + B e^{-\mu}) = \pm n_3 K \mu e^{\frac{\mu l}{h}}; \quad c_2 (A e^{\mu} - B e^{-\mu}) = -n_3 K e^{\frac{\mu l}{h}}. \quad (310)$$

Из соотношений (310) получаем два выражения для константы  $c_2$ :

$$c_2 = \pm \frac{n_3 K \mu e^{\frac{\mu l}{h}}}{A e^{\mu} + B e^{-\mu}}; \quad c_2 = -\frac{n_3 K e^{\frac{\mu l}{h}}}{A e^{\mu} - B e^{-\mu}}. \quad (311)$$

Приравнивая правые части этих равенств, получим:

$$\mu = \frac{Ae^{\mu} + Be^{-\mu}}{Ae^{\mu} - Be^{-\mu}}. \quad (312)$$

Мы пришли к важному соотношению. Простой подстановкой легко убедиться, что если соотношение (16) выполняется, то дифференциальные уравнения равновесия тождественно удовлетворяются. Вместе с тем константы  $A$  и  $B$  являются параметрами, от которых зависит величина и характер изменения напряжений по высоте тела. Таким образом, из соотношения (312) следует, что коэффициент трения является тем существенным фактором, который определяет напряженное состояние при обработке металлов давлением.

Выражения для напряжений с учетом полученных результатов имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \pm n_3 K \mu e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)} \frac{Ae^{\frac{2\mu}{h} y} + Be^{-\frac{2\mu}{h} y}}{Ae^{\mu} + Be^{-\mu}}; \\ \sigma_y &= -n_3 K e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)} \frac{Ae^{\frac{2\mu}{h} y} - Be^{-\frac{2\mu}{h} y}}{Ae^{\mu} - Be^{-\mu}}; \\ \sigma_x &= -n_3 K e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)} \frac{Ae^{\frac{2\mu}{h} y} - Be^{-\frac{2\mu}{h} y}}{Ae^{\mu} - Be^{-\mu}} + k. \end{aligned} \right\} \quad (313)$$

Константы  $A$  и  $B$  можно найти двумя способами. Первая возможность — воспользоваться условием минимума нормального напряжения в середине тела по высоте:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0.$$

Это условие дает  $A = -B$ , и из системы (313) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xy}}{n_3 K} &= \pm \mu \Phi_1 e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)}; & \frac{\sigma_y}{n_3 K} &= -\Phi_2 e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)}; \\ \frac{\sigma_x}{n_3 K} &= -\Phi_2 e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)} + \frac{1}{n_3}. \end{aligned} \quad (314)$$

В этих выражениях

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{e^{\frac{2\mu}{h} y} - e^{-\frac{2\mu}{h} y}}{e^{\mu} - e^{-\mu}} = \frac{\text{sh } \frac{2\mu}{h} y}{\text{sh } \mu}; & \Phi_2 &= \frac{e^{\frac{2\mu}{h} y} + e^{-\frac{2\mu}{h} y}}{e^{\mu} + e^{-\mu}} = \\ &= \frac{\text{ch } \frac{2\mu}{h} y}{\text{ch } \mu}. \end{aligned} \quad (315)$$

С использованием выражений (314) и (315) на рис. 101, а построены эпюры напряжений. Из рисунка следует, что нормальные напряжения  $\sigma_y$  и  $\sigma_x$  незначительно изменяются по высоте тела.

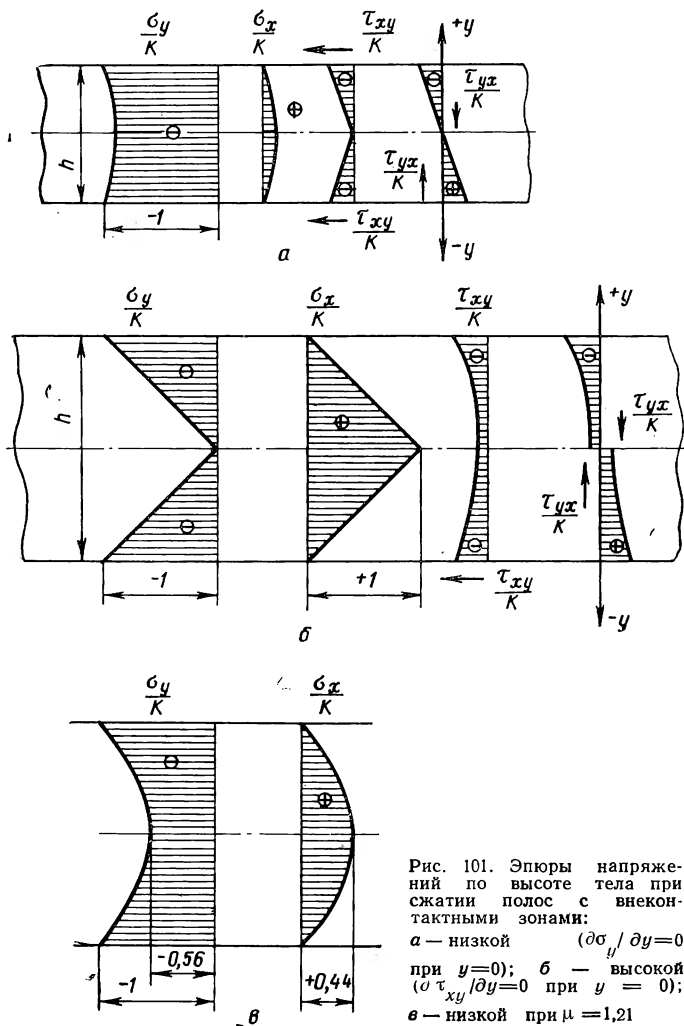


Рис. 101. Эпюры напряжений по высоте тела при сжатии полос с внеконтактными зонами: а — низкой ( $\partial \sigma_y / \partial y = 0$  при  $y=0$ ); б — высокой ( $\partial \tau_{xy} / \partial y = 0$  при  $y=0$ ); в — низкой при  $\mu = 1,21$

Соотношение  $A = -B$  легко получить также из условия симметрии касательных напряжений  $\tau_{xy}$  относительно оси  $x$  (т. е. при  $y=0$ ). Если касательные напряжения малы по сравнению с нормальными, то можно принять, что при  $A = -B$  в первом приближении справедлива гипотеза плоских сечений. Таким образом, равенства (314) и (315) характеризуют случай сжатия низких (тонких) полос.

При  $A = -B$  уравнение (312) приобретает вид:  $\mu = th\mu$ .

Таким образом, если  $0 \leq \mu \leq 0,5$ , дифференциальные уравнения удовлетворяются с хорошей степенью приближения.

Вторая возможность определить константы  $A, B$  заключается в том, чтобы воспользоваться условием минимума касательных напряжений:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0.$$

Это условие дает  $A=B$  и мы получим из системы (313) снова равенства (314). Однако в этих равенствах

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{e^{\frac{2\mu}{h}y} + e^{-\frac{2\mu}{h}y}}{e^\mu + e^{-\mu}} = \frac{\operatorname{ch} \frac{2\mu}{h}y}{\operatorname{ch} \mu}; & \Phi_2 &= \frac{e^{\frac{2\mu}{h}y} - e^{-\frac{2\mu}{h}y}}{e^\mu - e^{-\mu}} = \\ &= \frac{\operatorname{sh} \frac{2\mu}{h}y}{\operatorname{sh} \mu}. \end{aligned} \quad (316)$$

Как и в предыдущем случае, соотношение  $A=B$  также следует из условия симметрии касательных напряжений  $\tau_{xy}$  относительно оси  $x$  (рис. 101, б). Но в случае  $A=-B$  на оси симметрии было равно нулю абсолютное значение касательного напряжения  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . В случае же  $A=B$  на оси симметрии в нуль обращается среднее значение касательного напряжения. Таким образом, на продольной оси симметрии ( $x=0$ ) касательные напряжения претерпевают разрыв. Вместе с тем нормальные напряжения значительно меняются так, что в средней части по высоте тела сжимающие напряжения  $\sigma_y$  минимальны, а растягивающие  $\sigma_x$  максимальны (рис. 101, б).

Описанный характер напряженного состояния в средней части по высоте тела, характеризуемый наличием касательных напряжений, относительно небольших поперечных сжимающих и значительных продольных растягивающих напряжений может приводить здесь к разрушению, что и наблюдается в практике при осадке высоких полос в процессе операции вытяжки (см. п. 12), если она проводится неправильно. Таким образом, равенства (314) при наличии соотношений (316) характеризуют случай сжатия высоких (толстых) полос. При  $A=B$  уравнение (312) приобретает вид  $\mu = \operatorname{cthr} \mu$ . Графическое решение этого уравнения дает  $\mu = 1,21$ .

Если воспользоваться этим значением  $\mu$  и по равенствам (314) и (315) вычислить нормальные напряжения, то мы получим эпюры, изображенные на рис. 101, в: в центре сечения ( $y=0$ ) получают следующие значения нормальных напряжений:  $\sigma_y/K = -0,56$ ;  $\sigma_x/K = +0,44$ .

Воспользуемся теперь соотношением из пункта 1:

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{\sigma_3}{2\sigma_1}.$$

В нашем случае  $\sigma_1 = 0,44 K$  и  $\sigma_3 = 0,56$ . Поэтому

$$\mu = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{0,56}{0,44} \right) = 1,14.$$



Мы получили значение коэффициента трения, близкое к  $\mu = 1,21$ , выведенного из уравнения (312) при  $A=B$ . Таким образом, при осадке высоких полос неравномерность напряженного состояния (и, следовательно, неравномерность деформаций) по своему порядку была бы так же велика, как и при осадке низких полос с очень большими коэффициентами трения, значительно превышающими его обычную величину  $\mu = 0,5$ . Но на контактной поверхности металла с инструментом коэффициенты трения обычно не превышают величину  $\mu = 0,5$ . Поэтому если на контактной поверхности имеются участки  $\mu = 0,5$ , то схема напряженного состояния изменяется таким образом, как это показано на рис. 101, б.

Мы получили решение для зон скольжения. Решение для зоны прилипания получим из системы (314), принимая во внимание условия на границе между зонами скольжения и прилипания. Воспользовавшись разложением в ряд, пренебрегая малыми высшего порядка и принимая во внимание, что в точке перехода от зоны скольжения к зоне прилипания и далее в этой зоне  $\mu = 1/2$ , получим первое из равенств (314) в следующем виде:

$$\frac{\tau_{xy}}{n_3 K} = \pm \frac{1}{2} \Phi_1.$$

Воспользовавшись разложением в ряд и пренебрегая малыми высшего порядка, запишем второе из равенств (314) как

$$\frac{\sigma_y}{n_3 K} = - \left[ 1 + \frac{2\mu}{h} \left( \frac{l}{2} - x \right) \right] \Phi_2.$$

Это равенство преобразуем, принимая во внимание наличие зоны прилипания. Для этого заменим  $l/2$  на  $x_n$ . Далее, при  $x = x_n$  имеем  $\sigma_y = - \frac{\tau_{xy}}{\mu} = - \frac{K}{2\mu}$ . Поэтому

$$\frac{\sigma_y}{n_3 K} = - \frac{1}{2\mu} \left[ 1 + \frac{2\mu}{h} (x_n - x) \right] \Phi_2.$$

Принимая во внимание, что в зоне прилипания  $\sigma_x - \sigma_y = 0$ , окончательно получим:

$$\frac{\tau_{xy}}{n_3 K} = \pm \frac{1}{2} \Phi_1; \quad \frac{\sigma_y}{n_3 K} = \frac{\sigma_x}{n_3 K} = - \frac{1}{2\mu} \left[ 1 + \frac{2\mu}{h} (x_n - x) \right] \Phi_2. \quad (317)$$

Здесь  $\Phi_1, \Phi_2$  определяются равенствами (315) для тонких полос и равенствами (316) для толстых.

## 6. Зоны затрудненной деформации

На границах между зонами скольжения и прилипания, в соответствии с равенствами (300) и (301), нормальное напряжение  $\sigma_y$  выражается как

$$\sigma_n = - n_3 K e^{\frac{2\mu}{h} \left( \frac{l}{2} - x_n \right)}; \quad \sigma_n = - \frac{\tau_{xy}}{\mu} = - \frac{n_3 K}{2\mu}.$$

Принимаем, что эти связи сохраняются и внутри полосы. Тогда

$$\sigma_n = -n_3 K e^{\frac{2\mu}{h} \left( \frac{l}{2} - x_n \right)} \varphi_2; \quad \sigma_n = -\frac{n_3 K}{2\mu} \varphi_1.$$

Приравнивая правые части этих равенств, получим:

$$e^{\frac{2\mu}{h} \left( \frac{l}{2} - x_n \right)} \varphi_2 = \frac{1}{2\mu} \varphi_1.$$

Логарифмируя и производя другие простейшие преобразования, будем иметь:

$$\frac{x_n}{h} = \frac{l}{2h} + \frac{1}{2\mu} \left[ \ln 2\mu + \ln \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right]. \quad (318)$$

Это выражение представляет собой уравнение кривых, ограничивающих границы зоны затрудненной деформации.

При  $y = h/2$  получим  $\ln \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \ln 1 = 0$ , и равенство (318) приобретает вид (308):  $\frac{x_n}{h} = \frac{l}{2h} + \frac{\ln 2\mu}{2\mu}$ .

В этом случае оно определяет величину зоны прилипания. Если зона прилипания отсутствует, то

$$\frac{l}{2h} + \frac{\ln 2\mu}{2\mu} = 0.$$

Таким образом,

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \frac{l}{2h} \leq -\frac{\ln 2\mu}{2\mu} \text{ — зоны прилипания нет,} \\ \text{если } \frac{l}{2h} \geq -\frac{\ln 2\mu}{2\mu} \text{ — зона прилипания существует.} \end{array} \right\} \quad (319)$$

Из равенства (308) следует, что зона прилипания распространяется на всю контактную поверхность, если коэффициент трения имеет предельное значение, равное 0,5. На рис. 102 с использованием зависимостей (318) построены кривые, ограничивающие зоны затрудненной деформации при сжатии тел при различных отношениях  $l/h$  и коэффициентах трения. Из рисунка следует, что протяженность зоны прилипания и объем зоны затрудненной деформации увеличиваются с ростом величин  $l/h$  и  $\mu$ .

Итак, границей зоны затрудненной деформации на поверхности контакта является зона прилипания.

Вычислим величину максимального контактного напряжения по формуле (44).

При  $y = h/2$  в зонах скольжения  $\sigma_x - \sigma_y = K$ , и в соответствии с выражениями (314) (при  $n_3 = 1$ )

$$\tau = \sqrt{\frac{K^2}{4} + \mu^2 e^{\frac{4\mu}{h} \left( \frac{l}{2} - x \right)}}.$$

На участках прилипания  $\sigma_x - \sigma_y = 0$ , и в соответствии с выражениями (317)

$$\tau = \sqrt{0 + \frac{K^2}{4}} = \frac{K}{2}.$$

С использованием этих зависимостей на рис. 103 построены эпюры максимальных касательных и нормальных напряжений при

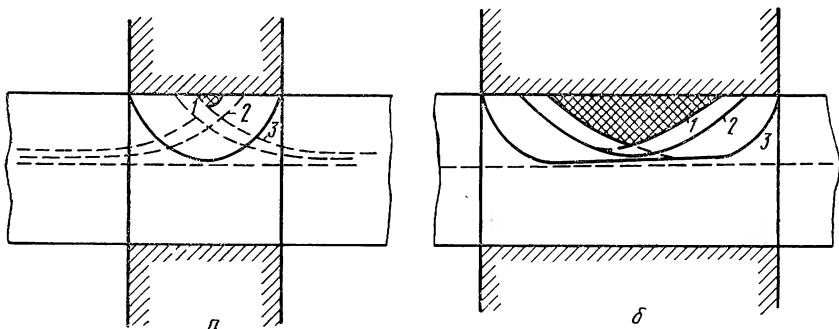


Рис. 102. Границы зон затрудненной деформации при:  
а —  $l/h=1$ ; б —  $l/h=2$  ( $1-\mu=0,2$ ;  $2-\mu=0,25$ ;  $3-\mu=0,5$ )

наличия зоны прилипания. Они наглядно иллюстрируют физический смысл зоны затрудненной деформации: во всех точках этих зон, как и в зоне прилипания, условие пластичности будет иметь вид  $\sigma_x - \sigma_y = 0$ . Принимая во внимание условие  $\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4}$ , при-

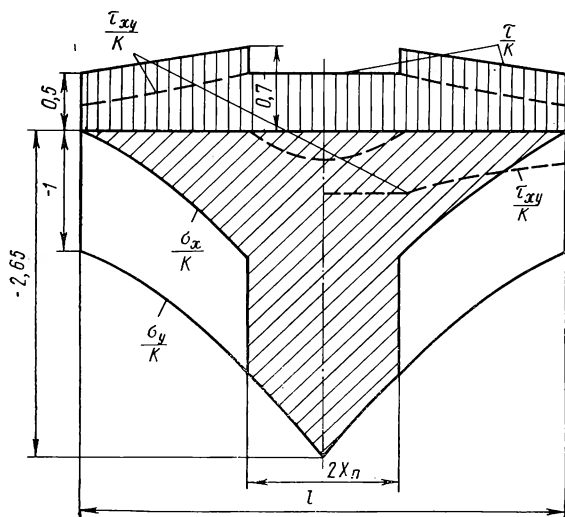


Рис. 103. Эпюры максимальных касательных и нормальных напряжений при наличии зон затрудненной деформации при  $n_3=1$ ,  $l/h=4$ ;  $\mu=0,5$ ;  $y=h/2$

ходим к выводу, что здесь  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ . Таким образом, в зонах затрудненной деформации имеют место всесторонние сжимающие нормальные напряжения и минимально возможные касательные напряжения. В результате пластическая деформация здесь затруднена. Зоны затрудненной деформации действуют почти как жесткие клинья, вызывая неравномерность деформации и в остальных объемах. При отсутствии зоны затрудненной деформации сжатие происходит равномерно, и в первом приближении будет справедлива гипотеза плоских сечений.

Из изложенного следует, что естественная граница, разделяющая высокие полосы от низких, определяется существованием зон прилипания и соответствующих им зон затрудненной деформации. Таким образом, соотношения (319) определяют соответственно условие существования различных видов напряженного состояния для высоких и низких полос.

### 7. Влияние внешних зон

Величину коэффициента  $n_3$ , который характеризует влияние внешних зон, найдем из очевидного условия статического равновесия:

$$2 \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_x dy = 0.$$

Из уравнений (314) и (316) имеем

$$- \frac{n_3 K e^{\frac{2\mu l}{h} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)} \frac{h}{2}}{e^\mu - e^{-\mu}} \int_0^{\frac{h}{2}} \left( e^{\frac{2\mu}{h} y} - e^{-\frac{2\mu}{h} y} \right) dy + K \int_0^{\frac{h}{2}} dy = 0.$$

$$\text{Отсюда } n_3 = \mu \frac{e^\mu - e^{-\mu}}{e^\mu + e^{-\mu} - 2} e^{-2\mu \frac{l}{h} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)}.$$

Воспользовавшись тремя членами разложения в ряд функций  $e^\mu$  и  $e^{-\mu}$ , легко показать, что при любых значениях  $\mu$  в пределах возможного его изменения (от 0 до 0,5) величина

$$\mu \frac{e^\mu - e^{-\mu}}{e^\mu + e^{-\mu} - 2} \approx 2.$$

Таким образом, получаем:

$$n_3 = 2 e^{-2\mu \frac{l}{h} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)}. \quad (320)$$

На основании теоретических соображений, изложенных в пункте 2, и результатов опытов можно принять, что при  $l/h = 1$  коэффициент  $n_3 = 1$ . Поэтому из уравнения (320) следует:

$$2 e^{2\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} - \frac{x}{l} = \frac{\ln 2}{2\mu} = \frac{0,7}{2\mu}. \quad (321)$$

Таким образом, из уравнения (320) окончательно получим

$$n_3 = 2 e^{-0,7 \frac{l}{h}}. \quad (322)$$

На рис. 104 построены зависимости коэффициента внешних зон по формуле (322) и для сравнения приведены данные А. И. Целикова и В. С. Смирнова [8], а также результаты расчетов по формуле, полученной ранее с помощью теории размерностей [14].

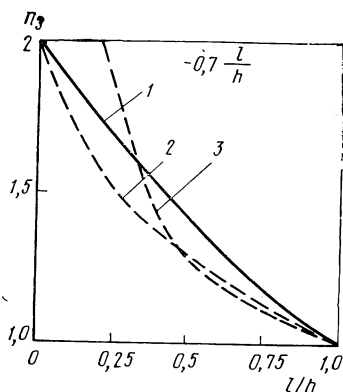


Рис. 104. Зависимость коэффициента влияния внешних зон от отношения  $l/h$  при осадке:

$$1 - n_3 = 2l; \quad 2 - n_3 = 2 - \sqrt{\frac{l}{h}};$$

$$n_3 = \left(\frac{l}{h}\right)^{-0,4}$$

Вернемся к формуле (320). Из нее следует, что при уменьшении  $x$  величина  $n_3$  уменьшается. Выясним, при каких значениях  $x$  прекращается влияние внешних зон на напряженное состояние очага деформации. В этих точках, очевидно,  $n_3 = 1$ . Преобразуем формулу (321) следующим образом:

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{2} - \frac{0,35}{\mu}. \quad (323)$$

С использованием формулы (320) с учетом выражения (323) на рис. 105 построены кривые, характеризующие изменение  $n_3$  по длине полосы. Кривые показывают, что с уменьшением коэффициента трения  $\mu$  и величина  $n_3$  увеличивается. При этом правая внеконтактная зона постепенно перестает оказывать влияние на напряженное состояние очага деформации слева от оси симметрии, а левая внеконтактная зона не оказывает влияния на область, расположенную справа от оси симметрии.

При  $\mu < 0,23$  внеконтактные зоны начинают влиять не только на напряженное состояние очага деформации, но и взаимно друг на друга. Минимальное совместное влияние внешних зон на напряженное состояние очага деформации имеет место на его оси симметрии.

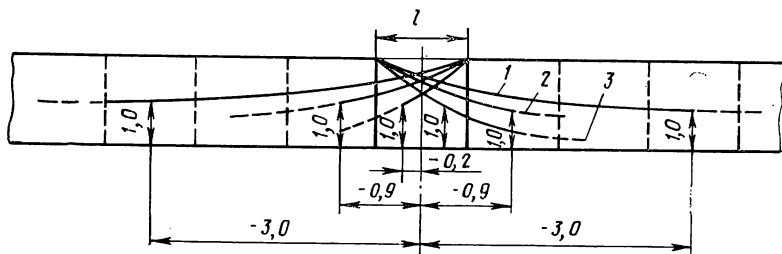


Рис. 105. Изменение параметров  $n_3$  по длине полосы:

1 — при  $\mu = 0,1$ ; 2 —  $0,25$ ; 3 —  $0,5$

## 8. Изменение контактных напряжений по ширине полосы

П. Ф. Иванушкин и В. И. Дорошенко<sup>1</sup> произвели опыты по сжатию свинцовых полос длиной 140 мм без уширения в штампе (рис. 106) с использованием пятнадцати штифтовых месдоз. Для пяти образцов нагрузки последовательно возрастали. После осадки высоты каждой из полос были различны по длине и колебались в пределах  $h_{\max}=4,54-4,7$ ;  $h_{\min}=4,31-4,63$  мм.

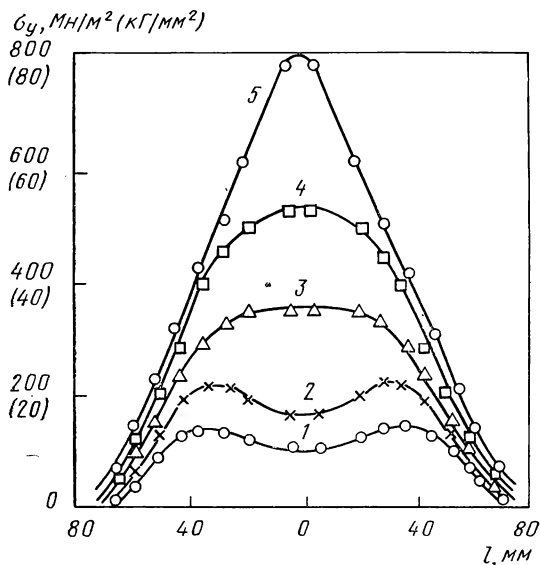


Рис. 106. Эпюры контактных напряжений при осадке в закрытом штампе с малыми обжатиями

Эпюры контактных напряжений приведены на рис. 106. При малых обжатиях (образцы 1 и 2) в средней части по ширине полосы деформации были упругими и эпюра в этом месте имеет минимум, характерный для упругих задач (см. п. 6, гл. V). С ростом обжатия пластическая деформация постепенно распространялась от краев образца к средней части и минимум исчезал.

Далее, по мере роста деформации эпюра становилась все более выпуклой.

Решим эту задачу для случая осадки со степенью деформации, равной величине перехода от упругой деформации к пластической.

<sup>1</sup> Иванушкин П. Ф., Дорошенко В. И. «Известия вузов. Черная металлургия», 1967, № 1., с. 98—103.

Полосу будем считать тонкой ( $n_3=1$ ) и из системы (300) для крайних участков  $x_m \leq x \leq \frac{l}{2}$  (рис. 107) имеем:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= K \mu e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)}; & \sigma_y &= -K e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)}; \\ \sigma_x &= -K e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x\right)} + K. \end{aligned}$$

Нас интересуют контактные напряжения, и поэтому решение (170) для двумерной задачи сводится к решению одномерной задачи:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= c_1' e^{mx} + c_2' e^{-mx}; \\ \sigma_y &= -(c_1'' e^{mx} - c_2'' e^{-mx}) + f(x); \\ \sigma_x &= -(c_1'' e^{mx} - c_2'' e^{-mx}) + c, \end{aligned} \right\}$$

где

$$c_1' = c_1 \left( A e^{\frac{mh}{2}} + B e^{-\frac{mh}{2}} \right); \quad c_2' = c_2 \left( A e^{\frac{mh}{2}} + B e^{-\frac{mh}{2}} \right).$$

$$c_1'' = c_1 \left( A e^{\frac{mh}{2}} - B e^{-\frac{mh}{2}} \right); \quad c_2'' = c_2 \left( A e^{\frac{mh}{2}} - B e^{-\frac{mh}{2}} \right).$$

На средних участках ( $0 \leq x \leq x_m$ ) напряжения только возрастают. Поэтому примем  $c_2' = c_2'' = 0$  и полученное решение приобретает вид:

$$\tau_{xy} = c_1' e^{mx}; \quad \tau_y = -c_1'' e^{mx} + f(x); \quad \sigma_x = -c_1'' e^{mx} + c. \quad (324)$$

При  $x = x_m$  касательные напряжения, по вычисленным уравнениям (300) и (324), равны между собой:

$$c_1' e^{mx_m} = K \mu e^{\frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x_m\right)}.$$

Отсюда получим:

$$c_1' = k \mu; \quad mx_m = \frac{2\mu}{h} \left(\frac{l}{2} - x_m\right).$$

Из последнего равенства следует:

$$m = \frac{2\mu}{h}; \quad x_m = \frac{l}{2} - x_m \quad \text{или} \quad x_m = \frac{l}{4}. \quad (325)$$

Таким образом, в момент, когда пластическая деформация дошла до средней точки по длине тела, максимум эпюры напряжений соответствует четверти его длины, что подтверждается опытными данными (см. рис. 106).

Приравнивая при  $x = x_m$  напряжения  $\sigma_y$  и  $\sigma_x$ , по формулам (300) и (326) получим снова соотношения и, кроме того:

$$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad c = K.$$

Окончательно для средней части полосы будем иметь:

$$\frac{\tau_{xy}}{K} = \mu e^{\frac{2\mu}{h}x}; \quad \frac{\sigma_y}{K} = -e^{\frac{2\mu}{h}x}; \quad \frac{\sigma_x}{K} = -e^{\frac{2\mu}{h}x} + 1. \quad (326)$$

Подставляя в приближенное уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2}{h} \tau_{xy} = 0$$

выражения  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$  из уравнений (326), убедимся, что оно тождественно удовлетворяется. Следовательно, мы получили хотя и приближенное, но правильное решение.

С использованием зависимостей (326) на рис. 107 построены эпюры, которые соответствуют эпюрам 1 и 2, полученным из опытов (рис. 106). С ростом обжатия максимумы на эпюрах будут смещаться к началу координат. На основании опытных данных П. Ф. Иванушкина и В. И. Дорошенко можно принять:

$x_m = \left(1 - \frac{\varepsilon}{0,02}\right) \frac{l}{4}$ , где обжатие  $0 \leq \varepsilon \leq 0,02$ . При  $\varepsilon = 0,02$  максимум эпюры окажется в точке  $x=0$ , напряжения будут определяться уже формулами (300), что будет соответствовать эпюре 5 на рис. 106.

## 9. Полное давление и среднее контактное напряжение

Полное давление и среднее контактное напряжение при сжатии вычисляются соответственно по формулам:

$$P = \int_{(F)} \sigma_y dF; \quad p = \frac{P}{F},$$

где  $F$  — площадь контактной поверхности.

Контактные напряжения  $\sigma_y$  и их среднее значение  $p$  можно представить как произведение

$$p = K n_\sigma n_\beta n_3, \quad (327)$$

где  $n_\sigma$  — коэффициент подпора, учитывающий влияние трения на контактных поверхностях в продольном направлении;

$n_\beta$  — коэффициент, учитывающий влияние среднего главного напряжения, т. е. в условиях плоской деформации — влияние трения в поперечном направлении или иначе ширины полосы;

$n_3$  — коэффициент влияния внешних зон.

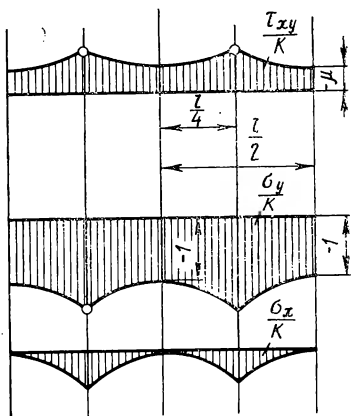


Рис. 107. Схемы эпюр к решению задачи об осадке тонкой полосы с малыми обжатиями



В свою очередь истинное сопротивление деформации, определяемое из опытов на растяжение (гл. VII), выражается следующим образом:

$$K = n_v n_n \sigma_s, \quad (328)$$

где  $n_v$  — коэффициент, учитывающий влияние скорости деформации;

$n_n$  — коэффициент, учитывающий влияние наклепа;

$\sigma_s$  — предел текучести металла, полученный из опытов на статическое растяжение.

В случае плоской деформации  $n_\beta = 1,155$  и его удобно ввести в выражение для истинного сопротивления. Поэтому для плоской деформации можно принять:

$$p = K n_\sigma n_3; \quad K = n_\beta n_v n_n \sigma_s. \quad (329)$$

Перейдем к определению коэффициента подпора; на основании уравнений (306) и (307) можно записать:

$$P = \frac{n_3 K}{\mu} \int_0^{x_n} \left[ 1 + \frac{2\mu}{h} (x_n - x) \right] dx + 2n_3 K \int_{x_n}^{\frac{l}{2}} e^{\frac{2\mu}{h} \left( \frac{l}{2} - x \right)} dx.$$

После интегрирования, подстановки пределов и приведения подобных членов получим среднее контактное напряжение в следующем виде:

$$\frac{P}{K} = \frac{P}{F} = \frac{n_3 h}{\mu l} \left\{ \frac{x_n}{h} \left( 1 + \mu \frac{x_n}{h} \right) + \left[ e^{\frac{2\mu}{h} \left( \frac{l}{2} - x_n \right)} - 1 \right] \right\}. \quad (330)$$

Принимая во внимание выражение (308), получим

$$e^{\frac{2\mu}{h} \left( \frac{l}{2} - x_n \right)} = e^{2\mu \left( \frac{1}{2} \frac{l}{h} - \frac{x_n}{h} \right)} = e^{-\ln 2\mu}.$$

Коэффициент подпора представляет собой среднее контактное напряжение, отнесенное к величине  $K$  при  $n_3 = 1$ . Таким образом, будем иметь:

$$n_\sigma = \frac{h}{\mu e} \left[ \frac{x_n}{h} \left( 1 + \mu \frac{x_n}{h} \right) + e^{-\ln 2\mu} - 1 \right]; \quad \frac{x_n}{h} = \frac{1}{2} \frac{l}{h} + \frac{\ln 2\mu}{2\mu}. \quad (331)$$

Из приведенных формул следует, что  $n_\sigma$  является функцией двух величин — отношения  $l/h$  и коэффициента трения  $\mu$ . С использованием зависимостей (331) на рис. 108 построена номограмма для определения коэффициента подпора при сжатии. Из рисунка следует, что в пределах изменения коэффициента трения от 0,5 до 0,3 его влияние на коэффициент подпора незначительно. При дальнейшем уменьшении величины  $\mu$  его влияние более заметно сказывается на величине коэффициента подпора и, следовательно, на величине контактных напряжений и суммарном давлении при сжатии. С этим обстоятельством необходимо считаться при осуществлении технологических расчетов.

Итак, коэффициент подпора  $n_{\sigma}$  и коэффициент влияния внешних зон  $n_3$  можно определить теоретически.

Перейдем к рассмотрению скоростного коэффициента  $n_v$ . Влияние скорости можно учесть или непосредственно с помощью кривых, подобных тем, которые были приведены на рис. 77, или при помощи скоростных коэффициентов  $n_v$ , полученных на основании опытных данных (рис. 78).

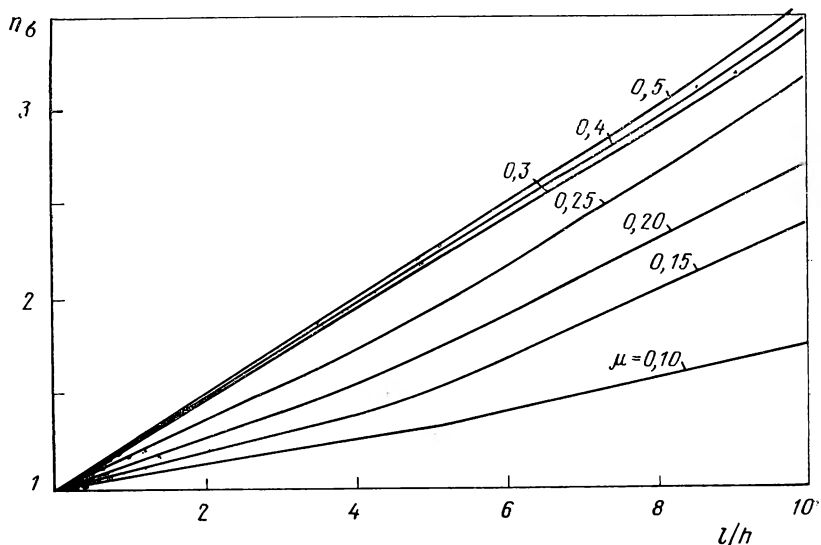


Рис. 108. Зависимость коэффициента подпора  $n_{\sigma}$  при сжатии от величины  $z/h$

В процессе сжатия, вообще говоря, предел текучести изменяется в какой-то степени и в результате наклепа. Это явление особенно заметно при низкой температуре и высокой скорости деформации. Кроме того, величина предела текучести растет с повышением гидростатического (среднего) напряжения сжатия. Зависимость наклепа от степени деформации можно приближенно учесть, приняв константу пластичности изменяющейся с ростом деформации по линейному закону.

Линейная зависимость является, разумеется, приближенной. Ее можно уточнить, приняв, как рекомендует А. И. Целиков, основываясь на опытах Бриджмена, линейную связь между величиной  $K$  и логарифмом коэффициента относительного обжатия  $\ln \frac{h_0}{h_1}$  или  $\ln \frac{h}{h_1}$ . Наконец, можно принять степенной закон изменения константы пластичности (см. гл. 3).

Доказано<sup>1</sup>, однако, что в случае сжатия металла в холодном

<sup>1</sup> Смирнов В. С. Давление металла на валки при наличии упрочнения. Труды ЛПИ. вып. 203, М. — Л., Машгиз, 1959, с. 5—24.

состоянии можно принять истинное сопротивление деформации равным среднему арифметическому его значению до и после осадки без риска внести большую погрешность. В таком случае коэффициент, учитывающий влияние наклепа, будет равен:

$$n_H = \frac{K_0 + K_1}{2 K_0} . \quad (332)$$

При осадке в горячем состоянии можно принимать  $K_0 = K_1$  и, следовательно,  $n_H = 1$ .

### 10. Работа, затрачиваемая на сжатие, и энергия дислокаций

Работа сил сжатия вычисляется по очевидному равенству:  $dA = -Pd h = -p F d h$ .

Знак минус взят условно потому, что приращение высоты тела в процессе осадки отрицательно. Умножая числитель и знаменатель правой части равенства на  $h$ , можем записать:

$$dA = -p V \frac{d h}{h} ,$$

где  $V = F h$  — объем осаживаемого тела.

$$\text{Отсюда } A = -V \int_{h_0}^{h_1} p \frac{d h}{h} . \quad (333)$$

Если приближенно считать, что в процессе сжатия давление металла на инструмент остается постоянным, то

$$A = -p V \int_{h_0}^{h_1} \frac{d h}{h} \quad \text{или} \quad A = p V \ln \frac{h_0}{h_1} .$$

Как было показано в гл. 3, величина

$$-V \int_{h_0}^{h_1} \frac{d h}{h} = V \ln \frac{h_0}{h_1} = V_h$$

представляет собой смещенный объем.

Таким образом, работа сжатия представляет собой произведение смещенного по высоте объема тела на среднее давление сжатия. Легко показать, что этот вывод справедлив для любого процесса обработки металлов давлением, если под величиной  $\ln \frac{h_0}{h_1}$  понимать максимальную главную деформацию при осуществлении процесса.

Более точное выражение работы сжатия можно получить подставив в формулу (333) выражение среднего контактного напряжения как функцию высоты осаживаемого тела.

Если при сжатии на поверхности контакта имеется только участок скольжения, то среднее контактное напряжение, согласно уравнению (332), будет выражаться следующим образом:

$$p = \frac{n_3 h}{\mu e} \left( e^{\frac{\mu l}{h}} - 1 \right).$$

Из условия постоянства объема следует, что  $l = \frac{V}{bh}$ , поэтому:

$$p = \frac{K n_3}{V} \left( \frac{h^2}{\mu} e^{\frac{\mu V}{h^2}} - 1 \right).$$

Произведя разложение в ряд

$$e^{\frac{\mu V}{h^2}} = 1 + \frac{\mu V}{h^2} + \frac{\mu^2 V^2}{2 h^4} + \dots$$

и используя три члена этого ряда, получим:

$$p = K n_3 \left( 1 + \frac{\mu V}{2 h^2} \right), \quad A = -V K n_3 \int_{h_0}^{h_1} \left( 1 + \frac{\mu V}{2 h^2} \right) \frac{dh}{h},$$

откуда

$$A = n_3 K V \ln \frac{h_0}{h_1} + \frac{n_3 K V^2 \mu}{4} \left( \frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_0^2} \right). \quad (334)$$

Рассматривая это выражение, убеждаемся в том, что работа осадки представляет собой сумму работ, затрачиваемых на преодоление сопротивления металла деформации в данных условиях (правый член равенства) и на преодоление сопротивлений трения на поверхностях контакта деформируемого металла и инструмента (второй член равенства). Третьей составляющей работы деформации является работа, затрачиваемая на преодоление сопротивлений, вызываемых внешними частями полосы, которая в равенстве (334) учитывается коэффициентом  $n_3$ .

Обобщая, можно сказать, что работу деформации тела при осуществлении любого процесса обработки металлов давлением можно представить в виде суммы работ, затрачиваемых на преодоление истинного сопротивления металла деформации, и сопротивлений, вызываемых силами трения и внеконтактными зонами.

Выражение для работы пластической деформации  $A$  в объеме тела может быть получено и из дислокационных представлений. Согласно этим представлениям, вся работа внешней силы уходит на увеличение потенциальной энергии тела  $U_n$  и его разогрев  $Q$ :  $A = U_n + Q$ . Потенциальная энергия тела затрачивается на увеличение числа участков с неправильным расположением атомов, т. е. на увеличение концентрации дефектов тела. В основном этими де-

фектами являются дислокации. Согласно равенству (5), энергия одного сантиметра длины дислокации равна

$$U_d = \frac{G b^2}{4 \pi k} \ln \frac{r}{r_0} \approx \frac{1}{2} G b^2.$$

Напомним, что  $r$  — расстояние, где еще имеются напряжения, генерируемые дислокацией;  $r_0$  — радиус ядра дислокации;  $k=1$  для винтовой и  $k=1-m$  для краевой дислокации.

Если в начале пластической деформации плотность дислокаций была  $\rho_0$ , а в конце —  $\rho$ , то:

$$U_{\text{п}} \approx (\rho - \rho_0) U_d V = \frac{1}{2} G b^2 (\rho - \rho_0) V,$$

или, если пластическая деформация  $\varepsilon$  была достаточно велика ( $\varepsilon > 5\%$ ), то можно пренебречь  $\rho_0$  по сравнению с  $\rho$  и считать, что

$$U_{\text{п}} \approx \frac{1}{2} G b^2 \rho V, \quad (335)$$

где  $V$  — объем деформируемого тела.

В теории дислокаций эту энергию обычно называют латентной (запасенной или потенциальной). При движении дислокаций — пластической деформации — на них действует встречная сила сопротивления движению  $F_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тр}} b$  (на один сантиметр длины). Если дислокация проходит путь  $l$ , то работа этой силы равна  $\sigma_{\text{тр}} b l$ . Так как сила сопротивления, особенно при больших скоростях деформации, имеет характер силы трения, то вся эта работа переходит в тепло. При общей плотности подвижных дислокаций  $\rho_{\text{п}}$  выделение тепла, таким образом, равно:

$$Q = \sigma_{\text{тр}} b l \rho_{\text{п}} V$$

или учитывая, что  $\varepsilon = \rho_{\text{п}} b l$  (см. гл. I):

$$Q = \sigma_{\text{тр}} \varepsilon V. \quad (336)$$

Силу сопротивления (трения) движению дислокаций можно приравнять при больших скоростях деформации макроскопическому пределу текучести.

Тогда окончательно получим:

$$A = \left( \frac{1}{2} G b^2 \rho + \sigma_{\text{т}} \varepsilon \right) V. \quad (337)$$

Сравним оба члена в этом равенстве. Типичные значения для больших степеней деформации:  $\varepsilon \approx 0,5$ ,  $\sigma_{\text{т}} = 300 \text{ Мн/м}^2$  ( $30 \text{ кг/мм}^2$ ) и  $\rho = 10^{12} \text{ см}^{-2}$ , кроме того,  $L \approx 30\,000 \text{ Мн/м}^2$  ( $3000 \text{ кг/мм}^2$ ),  $b \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ Мн/м}^2$  ( $3 \cdot 10^{-7} \text{ кг/мм}^2$ ). Подставляя эти значения в уравнение (337), получим, что  $U_{\text{п}} \approx 15 \text{ Мдж/м}^3$ , а  $Q = 150 \text{ Мдж/м}^3$ , т. е.  $U_{\text{п}} \approx 0,1 Q$ . Такое соотношение между латентной и тепловой энергией характерно и для других обжатий  $\varepsilon$  и других значений  $\sigma_{\text{тр}}$ ,  $\rho$ ,  $L$  и  $b$  (например, чем больше  $\sigma_{\text{тр}}$ , тем больше  $\rho$ , а отношение

$U_{II}/Q$  сохраняется). Следовательно, для грубых оценок можно пренебречь первым членом и записать

$$A \approx \sigma_T \varepsilon V, \quad (338)$$

при малых  $\varepsilon$  совпадает с первым членом формулы (334), так как  $\varepsilon \approx \ln \frac{h_0}{h_1}$  и  $\sigma_T \approx K$ . Для полного совпадения необходимо учесть более точно зависимость  $\varepsilon$  и  $\rho$ , т. е. ввести зависимость деформации от углов между плоскостями скольжения и осью сжатия, учесть изменение  $\rho$ ,  $l$  и  $\sigma_T$  в процессе деформации.

Таким образом, из теории дислокаций следует, что основная часть работы пластической деформации переходит в тепловую энергию. Формулы работы, полученные из макроскопических и микроскопических подходов, практически совпадают.

## 11. Операцииковки

Операцииковки и горячей объемной штамповки имеют в своей основе пластическое сжатие или же включают его как элемент технологического процесса. Дадим краткую характеристику таких операций.

Свободнаяковка содержит операцииосадки, вытяжки, гибки, закручивания, передачи, рубки и прошивки.

Осадкой называется кузнечная операция, в результате которой происходит увеличение площади поперечного сечения заготовки за счет уменьшения ее высоты при сжатии. Осадку осуществляют так, что после каждого очередного воздействия (удара, нажатия бойками) на заготовку она поворачивается вокруг вертикальной оси на небольшой угол.

Схемы основных разновидностей осадки приведены на рис. 109, а.

Вытяжка (протяжка) — кузнечная операция, в процессе которой увеличивается длина исходной заготовки и уменьшается площадь поперечного сечения. Она применяется при изготовлении поковок с удлиненной осью. Вытяжку можно производить, осуществляя поворот (кантовку) заготовки на 90 град. после каждого удара (рис. 109, б, 1) или по винтовой линии. При втором способе вытяжки заготовку непрерывно поворачивают на четверть полного оборота, и после четырех ударов подают вперед на величину подачи так, что получается как быковка по винтовой линии (рис. 109, б, 2). Вытяжку можно производить в плоских (рис. 109, в, 1) или вырезных бойках (рис. 109, в, 2). Ковку по винтовой линии и в вырезных бойках применяют в случае обработки высоколегированных сталей во избежание образования разрушений в центре от растягивающих напряжений при недостаточной силе ударов. Длина подачи  $l$  должна быть не меньше высоты уступа  $\Delta h$  (рис. 109, в, 1), в противном случае металл не осаживается, а сползает вниз так, что образуется зажим. Из практики известно, что для получения гладкой поверх-

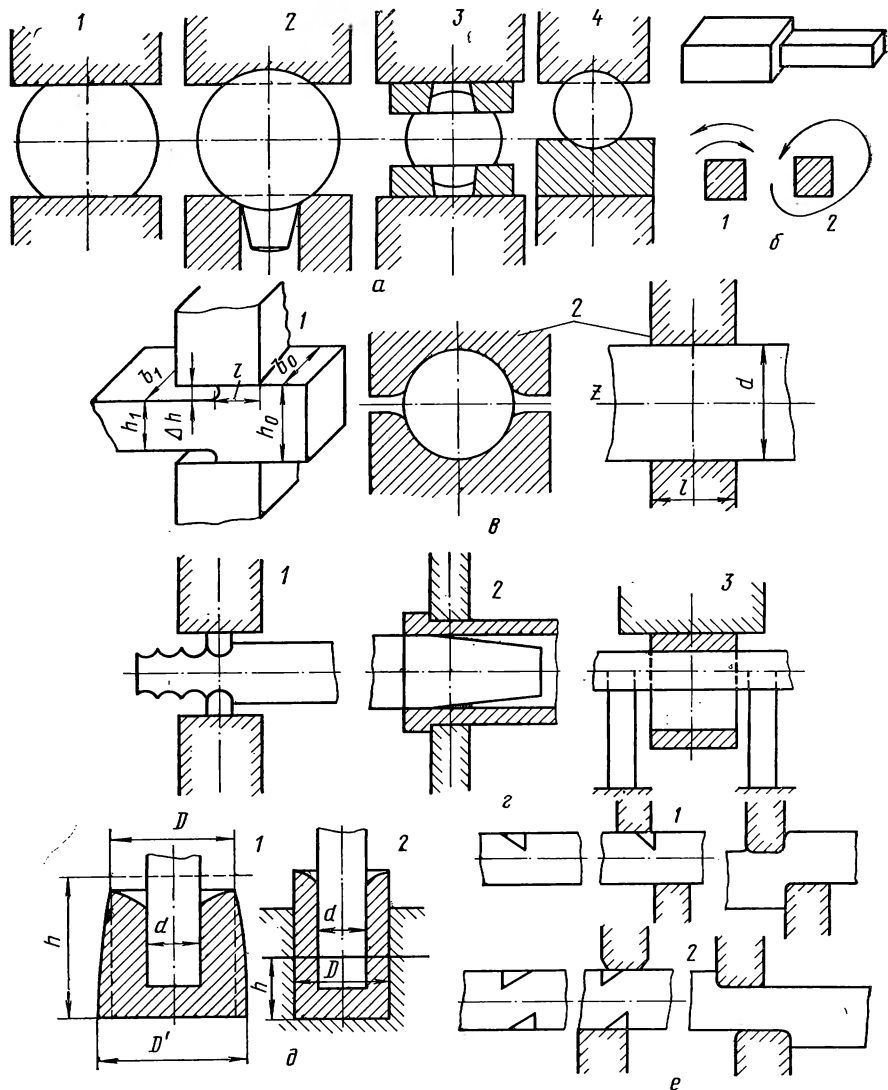


Рис. 109. Схема операцийковки:

*а* — разновидности осадки (1 — без хвостовика; 2 — с хвостовиком; 3 — в подкладных кольцах; 4 — высадка); *б* — два способа вытяжки при ковке (1 — слитков и круглых заготовок; 2 — специальных сталей); *в* — вытяжка в плоских (1) и вырезных (2) бойках; *г* — разновидности вытяжки; (1 — с применением раскатки; 2 — на конической оправке; 3 — раздача (раскатка) на оправке); *д* — прошивка открытая (1) и закрытая (2); *е* — операция передачи

ности у поковки величина подачи  $l$  должна находиться в пределах 0,4—0,8 ширины бойка  $b$ .

Для получения поковок круглого сечения ковку производят сначала «на квадрат». В последнем переходе сбивают углы, так что образуется многогранная заготовка, и в последнем переходе в вырезных бойках получают круглую заготовку. Это делается во избежание образования большой утяжки на торцах (что приводит к образованию больших отходов металла) и разрушения в центральной части поковки.

Схемы основных разновидностей операции вытяжки показаны на рис. 109, *г*.

Прош и в к о й (рис. 109, *д*) называется кузнечная операция, которая служит для получения отверстий (1) или улублений (2) в заготовках. Разновидностями процесса прошивки являются: 1) прошивка с поворотом заготовки и возвратом прошивки обратно, в результате чего получается углубление, затем заготовку поворачивают и производят повторную прошивку; такая операция называется пробивкой; 2) прошивка на подкладном кольце с проходом поковки насквозь сплошным или пустотелым прошивнем.

Передачей называется операция, при которой одна часть заготовки смещается по отношению к другой с сохранением параллельности их осей. Операция применяется, например, при ковке коленчатых валков под прессами. Разновидности этой операции показаны на рис. 109, *е*. Вторую из них можно рассматривать как комбинацию изгиба с вытяжкой.

Г и б к о й называется кузнечная операция, при которой заготовке придается изогнутая форма по заданному контуру.

З а к р у ч и в а н и е м называется операция, при которой одна часть заготовки поворачивается по отношению к другой на некоторый угол. Закручивание часто применяют при изготовлении коленчатых валов.

Р у б к о й называется операция, в процессе которой заготовка или слиток разделяются на части.

Кроме рассмотренных операций, применяют ряд вспомогательных: оттяжка хвостовиков, биллетирование (т. е. обжатие граней слитков), наметка и пережим металла, образование уступов — все они являются в той или иной мере комбинациями или частными случаями основных операций.

Из приведенного обзора следует, что изложенной в данной и предыдущих главах теории достаточно для того, чтобы провести расчеты деформаций, усилий, работы, моментов, мощности, необходимых для осуществления упомянутых операцийковки. Ограничимся несколькими общими замечаниями о методике расчетов.

При расчете операций осадки высоких заготовок и слитков рекомендуется после определения суммарного давления осадки проверить по равенству (262), не будет ли потеря устойчивости вследствие продольного изгиба. Величину уширения при вытяжке можно рассчитать по номограмме (рис. 65) и соответствующим равенствам из гл. V. Расчет показателя уширения  $A$ , приведенный в



гл. V, не учитывает наличия внешних зон. Однако в основе его лежит «двухсторонняя» гипотеза плоских сечений и поэтому следует ожидать, что погрешность, вносимая таким допущением, не превысит 10—20% — точность вполне достаточная для расчета операции кузнечной вытяжки.

Операцию «передачи» можно рассчитывать, как и операцию вытяжки. Для операций гибки, закручивания и рубки можно применять равенства из глав VI и VII, однако с учетом влияния скорости и наклепа на истинное сопротивление деформации способом, изложенным в разделе X данной главы.

## 12. Операции объемной штамповки

Объемная штамповка чаще всего производится в горячем состоянии и включает в себя рассмотренные в предыдущем параграфе операции. Но в этом случае они приобретают определенную специфику в связи с использованием штампов. Штампы представляют собой инструмент, содержащий полость, в которой происходит принудительное перераспределение металла заготовки для получения заданных формы и качества изделия. Конструкция штампов во многом зависит не только от формы поковки, но и от ковочных механизмов, применяемых для штамповки. Поэтому часто технологические процессы штамповки подразделяют в соответствии с классификацией используемых машин: штамповки на молотах, прессах и т. п.

Полости штампов называются ручьями. Ручьи для одинаковых по наименованию поковок различного типа отличаются по форме. При этом процесс течения металла в штампах различен, что приводит к различию в макроструктуре и качестве поковок. Штамповка в открытых штампах производится с заусенцем или облоем. Заусенец впоследствии обрубается и является отходом, но его наличие во многих случаях необходимо. При штамповке наиболее трудно заполняются углы полости штампа. Металл с большей легкостью течет сначала в полость, предназначенную для заусенца. При сближении штампов увеличивается сопротивление сил трения и заусенцы закрывают выход из ручья. При этом происходит окончательное заполнение всей полости штампа.

Заполнение ручья металлом можно разделить на четыре стадии (рис. 110, а). Опыты [3] показывают, что в период доштамповки деформация локализуется в средней части по высоте поковки в объеме линзообразной формы (рис. 110, а).

Штамповка в закрытых штампах производится практически без облоя (рис. 110, б).

Вытяжка при штамповке осуществляется в так называемых протяжных ручьях (рис. 110, в), которые могут быть открытыми и закрытыми. В последнем случае за счет стесняющего действия стенок ручья вытяжка происходит более интенсивно. Аналогичной этой операции является операция подкатки в ручье, открытом или закрытом. Подкатка сопровождается уменьшением или увеличе-

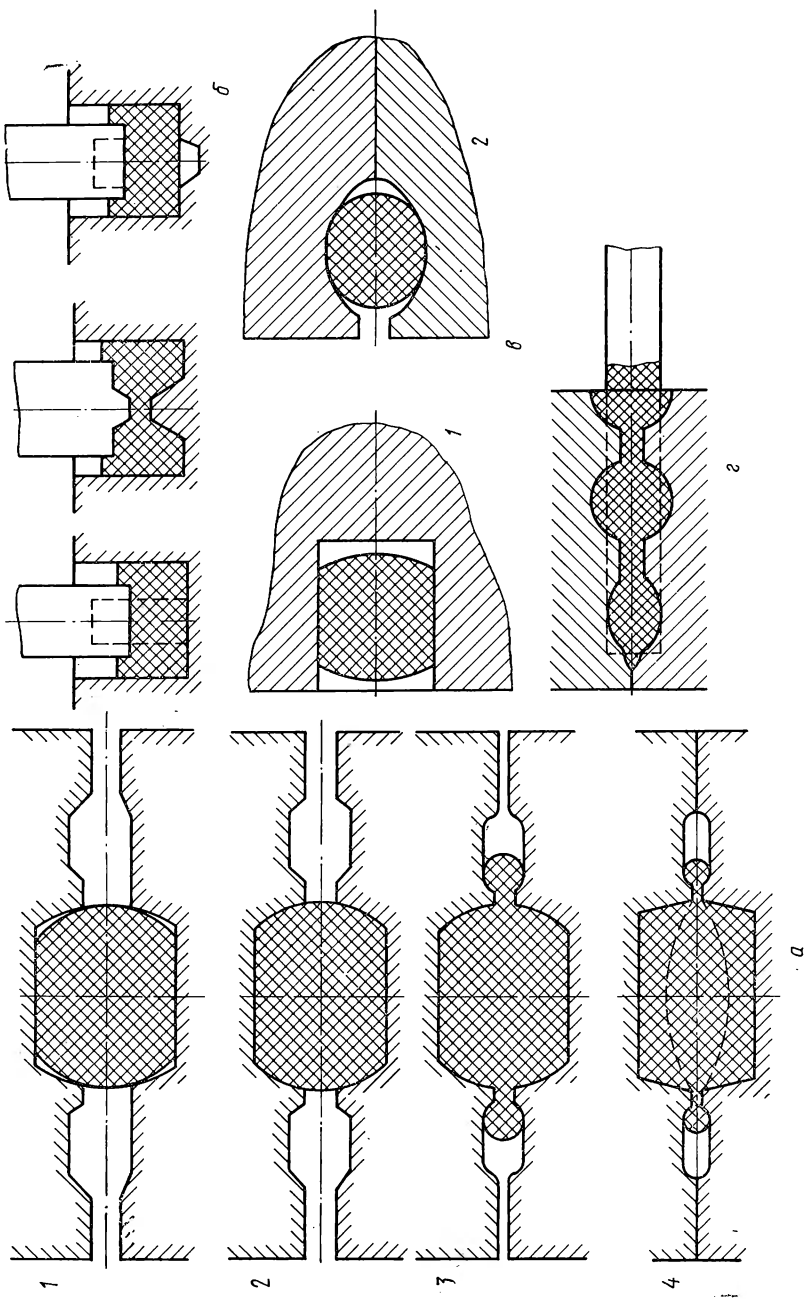


Рис. 110. Схемы объемной штамповки:

*а* — основные стадии заполнения ручья при открытой штамповке (1 — свободная осадка заготовки; 2 — осадка при соприкосновении с боковыми стенками штампа; 3 — осадка с истечением в заусенечную канавку; 4 — доштамповка); *б* — стадии штамповки в закрытых штампах; *в* — вытяжка в открытом (1) и закрытом (2) ручьях; *г* — схема операции подкатки

нием поперечных сечений заготовки против первоначального размера в разных местах ее по длине (рис. 110, з).

Операция высадки (местной осадки) чаще всего осуществляется на быстроходных горизонтально-ковочных машинах, имеющих фаземные штампы, состоящие из трех частей.

Как и в процессековки, в штампах можно осуществлять операцию прошивки. Ее применяют для деформации заготовок, у которых отношение внутреннего диаметра углубления к наружному  $d/D > 0,5$  (см. рис. 109, д, 2). В этом случае, как уже отмечалось, прошивку называют закрытой. При такой прошивке высота заготовки увеличивается тем больше, чем больше  $d/D$ . Наименьшее среднее напряжение при прошивке соответствует величине отношения  $d/D = 0,5—0,6$ . В зависимости от формы рабочей части пуансона меняются характер течения металла и величина усилия прошивки. Опыты показывают, что в начале процесса усилие прошивки пуансоном с плоской головкой больше, чем при прошивке пуансонами с круглой и конической головками. На конечной стадии процесса наблюдается обратная зависимость.

В штампах осуществляют и операцию гибки, а также связанные с ней операции правки, чеканки, рубки и обрезки.

Из изложенного следует, что операции объемной штамповки принципиально не отличаются от операций свободнойковки, и, следовательно, приемы расчета этих операций аналогичны.

### 13. Особенности деформации импульсными нагрузками

Импульсные нагрузки могут создаваться действием взрывчатых веществ, энергией взрыва газовых смесей, давлением некоторых быстро испаряющихся газов, высоковольтным электрическим разрядом в жидкости и мощными импульсами магнитного поля. Импульсные нагрузки используют для штамповки иковки различных деталей, а также для пробивки отверстий в них [3].

Магнитный метод штамповки основан на мгновенном разряде конденсаторной батареи. Разряд ее осуществляется через индуктор (соленоид), при этом в нем образуется импульсное магнитное поле высокой напряженности. Это магнитное поле индуцирует ток противоположного направления в металлической заготовке, помещенной вблизи контура. Индуцированный в заготовке ток образует свое магнитное поле, которое, взаимодействуя с полем индуктора, создает силы, отталкивающие заготовку от индуктора. Под действием этих сил и происходит деформация заготовки, заполняющей полость штампа (рис. 111, а). Магнитный импульс длится 20—30 мксек, создавая магнитное давление. На этом принципе сконструированы новые типы высокоскоростных молотов.

Взрывная штамповка получила пока применение главным образом для изготовления крупногабаритных деталей (рис. 111, б). Время детонации взрывчатых веществ составляет 20—30 мксек, а время деформации металла примерно в 100 раз больше. Поэтому

давление взрыва сообщает заготовке в начальный момент кинетическую энергию, необходимую для деформации и заполнения полости матрицы. При больших габаритах можно использовать и наземные устройства. При этом в случае разового использования можно в качестве резервуара применять картонные баки или полиэтиленовые мешки, а для матрицы использовать дешевые материалы — цемент, гипс, даже лед.

В качестве взрывчатого вещества применяют тротил (тринитротолуол, тол). Это бризантное взрывчатое вещество нормальной

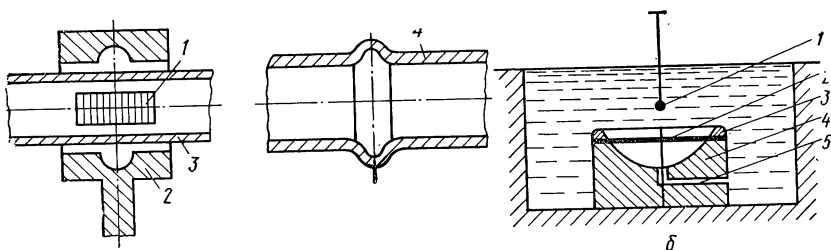


Рис. 111. Специальные виды штамповки:

*a* — магнетодинамическая штамповка (1 — индуктор; 2 — штамп; 3 — заготовка; 4 — отштампованная деталь); *б* — установка для взрывной штамповки (1 — взрывчатое вещество; 2 — заготовка; 3 — прижимное кольцо; 4 — матрица; 5 — канал для вакуумирования полости штампа)

мощности. Скорость детонации тротила  $7000$  м/сек. Давление подводного взрыва около  $13 \cdot 10^3$  Мн/м<sup>2</sup> ( $130000$  кг/см<sup>2</sup>). Скорость деформации металла при взрыве достигает  $100$  м/сек.

Состояние металла после приложения ударных волн отличается рядом особенностей по сравнению с состоянием при статическом напряжении. Например, металл упрочняется фактически до предельной величины при незначительных, иногда исчезающе малых остаточных деформациях. При этом создается тонкая структура с малым размером блоков, а плотность дислокаций достигает наибольшей наблюдавшейся в наклепанных металлах величины (до  $10^{12}$  см<sup>-2</sup>), получаемой при статической деформации на  $100$ — $200\%$  по относительному сдвигу. Таким образом в условиях высоких давлений, когда деформация затруднена за счет объемного напряженного состояния, при одной и той же степени остаточной деформации упрочнение сильнее, чем при относительно свободном пластическом течении. Структура металла, деформируемого ударной волной, имеет следующие особенности: а) развитие с начальных стадий деформации множественного скольжения, происходящего практически одновременно по многим непараллельным плоскостям; б) переход к интенсивному двойникованию, плотность которого необычайно высока — расстояние между соседними двойниками составляют всего  $10^{-4}$ — $10^{-6}$  см.

Обнаруженные в опытах особенности трудно объяснить на основании представлений об обычном дислокационном механизме пластической деформации, основанном на работе источников типа

Франка — Рида. Время действия высокого давления при взрывном нагружении составляет всего  $10^{-7}$ — $10^{-9}$  сек, и за это короткое время плотность дислокаций возрастает до  $10^{12}$  см<sup>-2</sup>/сек.

В этом случае при достижении касательными напряжениями величины теоретической прочности начинается интенсивная пластическая деформация за счет одновременного сдвига атомов вдоль плоскостей скольжения. Иными словами, металл ведет себя подобно жидкости.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безухов И. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., «Высшая школа», 1968. 520 с. с ил.
2. Смирнов В. С. Сборник задач по обработке металлов давлением. М., «Металлургия», 1973. 192 с. с ил.
3. Сторожев М. В., Попов Е. А. Теория обработки металлов давлением. М., «Машиностроение», 1971. 424 с. с ил.
4. Губкин С. И. Пластическая деформация металлов, т. I. 376 с. с ил.; т. II. 416 с. с ил.; т. III. 306 с. с ил. М., «Металлургия», 1961.
5. Смирнов В. С., Дурнев В. Д. Текстурирование металлов при прокатке. М., «Металлургия», 1971. 254 с. с ил.



## IX глава

### Волочение

#### 1. Способы волочения

Волочением (рис. 112) получают проволоку диаметром от 0,002 мм до 6—8 мм, прутки диаметром до 100 мм, трубы диаметром от 0,01 мм до 400 мм, квадратные, шестигранные, каплевидные, коробчатые и другие профили.

Из слитка диаметром 400 мм и длиной 1 м после прокатки и последующего волочения получается 162 км проволоки диаметром 1 мм или 16200 км проволоки диаметром 0,1 мм. При этом площадь поверхности возрастает в  $4 \cdot 10^3$  раза. В процессе волочения существенно изменяются физико-механические свойства металла. В частности, волочением можно добиться получения надлежащей текстуры обрабатываемого металла.

Основные способы волочения сплошных тел схематически показаны на рис. 112. Волочение с противонапряжением 2 применяют для уменьшения трения и повышения стойкости инструмента, так как при этом уменьшается давление на инструмент. В последнее время стали применять волочение с принудительной подачей смазки в очаг деформации 3. Это существенно снижает усилие волочения и дает возможность увеличить вытяжку. Волочение с подогревом 5 используют в случае низкой пластичности обрабатываемого материала. Например, вольфрам и молибден при волочении подогревают до 700—800°C. При волочении цинковой проволоки ее предварительно подогревают до 80—90°C, погружая заготовку в горячую воду. В процессе волочения температура проволоки увеличивается до 120—150°C. При этой температуре цинк имеет высокую пластичность в связи с образованием максимального количества плоскостей скольжения.

Волочение во вращающейся волоке 6 иногда применяют главным образом для получения равномерного износа по ее поверхности. Первоначально надежды, возлагавшиеся на существенное снижение коэффициента трения и усилия волочения при таком способе волочения, себя не оправдали. Оказалось, что для получения эффекта волоку необходимо вращать со скоростью в несколько

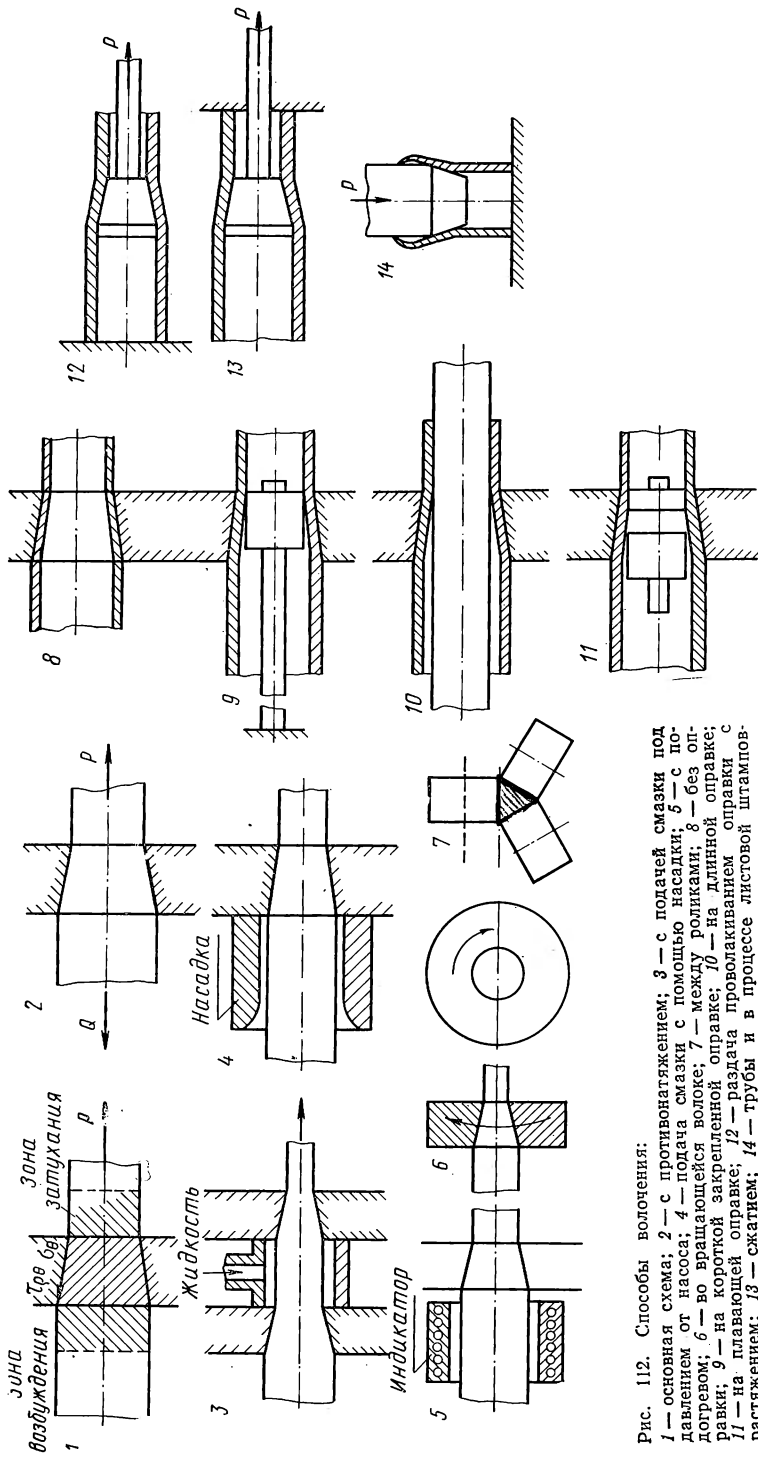


Рис. 112. Способы волочения:  
 1 — основная схема; 2 — с противонапряжением; 3 — с подачей смазки под давлением от насоса; 4 — подача смазки с помощью насадки; 5 — с подогревом; 6 — во вращающейся волоке; 7 — между роликками; 8 — без оправок; 9 — на короткой закрепленной оправке; 10 — на длинной оправке; 11 — на плавающей оправке; 12 — задача проволочиванием оправки с растяжением; 13 — сжатием; 14 — трубы и в процессе листового штампования со сжатием заготовки

десятков тысяч оборотов в минуту, что резко усложняет конструкцию волоочильного станка [1]. Однако при волочении титановой проволоки было установлено, что уже при числе оборотов волоки, равном 3300 в минуту, усилие волочения составляет 25% от усилия при волочении в неподвижную волоку [2]. При волочении между роликами 7 необходимое усилие и износ инструмента меньше, чем при обычном волочении, но конструкция волоки усложняется.

При волочении полых тел без оправки 8 во избежание потери устойчивости стенки или обрыва трубы деформация за каждый проход не должна превышать 30—35%. Если волочение производится на длинной оправке 10, то допустима степень деформации трубы до 55%. Однако влслед за волочением требуется довольно трудоемкая операция извлечения длинной оправки из трубы, что ограничивает применение этого способа волочения. Волочение на короткой оправке 9 с деформацией на 35—40% за один проход является наиболее распространенным. Волочение на самоустанавливающейся («плавающей») оправке 11 используют для изготовления длинных труб (до 400—500 м) небольшого диаметра, которые можно сматывать в бунты и, следовательно, использовать для волочения компактные станки с волочильными барабанами. Иногда используют волочение через две волоки для повышения суммарной величины деформации за один проход.

Раздача при волочении применяется для изготовления тонкостенных труб большого диаметра, калибровки труб по внутреннему диаметру, изготовления биметаллических труб. Раздача может осуществляться с растяжением и сжатием трубы. Раздача с растяжением 12 применяется для тонкостенных труб с толщиной стенки 1,5—2 мм и диаметром 20—50 мм и более. Раздача со сжатием трубы [13] применяется для толстостенных (более 4 мм) и коротких (не более 3—4 м) труб. За один проход диаметр труб увеличивается на 5—10 мм. Разновидностями раздачи с растяжением и со сжатием являются соответствующие операции листовой штамповки [14]. При раздаче с растяжением допустимое за один проход увеличение диаметра ограничено: возможен отрыв заготовки от фланца или образование продольных трещин под действием тангенциальных растягивающих напряжений. При раздаче со сжатием деформация тоже ограничена: возможна потеря устойчивости недеформируемой части перед оправкой или образование трещин в наиболее деформированной части.

Упомянутые здесь способы не исчерпывают, конечно, всего многообразия технологических процессов волочения. Например, используется комбинация волочения в роликовых и обычных волоках, известны многочисленные способы получения полых некруглых тел, различных сечений. Уменьшить площадь поперечного сечения металлических тел можно и простым растяжением.

Под действием силы, приложенной к переднему концу, а также нормальных и касательных напряжений, возникающих на контактной поверхности, в заготовке появляются растягивающие напряжения вдоль ее оси и сжимающие напряжения в плоскости попе-



речного сечения. Напряжения разного знака снижают сопротивление деформации. Это обстоятельство и наклеп обеспечивают возможность волочения.

Необходимое условие для осуществления процесса волочения состоит в том, что напряжение растяжения в вышедшем из волоки конце полосы, которое мы условимся называть напряжением волочения, должно быть меньше, чем предел текучести материала этого конца, т. е.  $p \leq \sigma_s$ . В противном случае будет происходить пластическое растяжение выходящего конца, деформация приобретает сосредоточенный характер, образуется шейка или несколько шеек и произойдет обрыв.

Очаг деформации при волочении включает в себя внеконтактную, контактную и переднюю внеконтактную зоны (на первом из рис. 112 схематически ограничены пунктирной линией). Под действием контактной зоны во внеконтактных зонах возникают напряжения и соответствующие им деформации. Они довольно быстро уменьшаются по мере удаления от сечений входа и выхода. Учитывая непрерывность процесса волочения, уместно заднюю внеконтактную зону назвать зоной возбуждения, а переднюю — зоной затухания внеконтактных напряжений и деформаций.

Изучение деформаций методом координатной сетки показывает, что при волочении наряду с деформацией растяжения имеют место сдвиги, тем более интенсивные, чем дальше элементарные ячейки расположены от оси протягиваемого прутка (рис. 113).

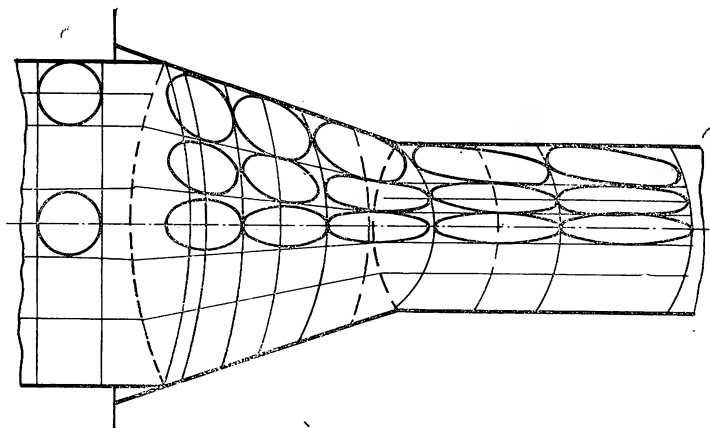


Рис. 113. Схема изменения координатной сетки при волочении круглого профиля через коническую волоку

## 2. Факторы, влияющие на процесс волочения

Кратко охарактеризуем влияние основных факторов на протекание процесса волочения и, главным образом, на усилие и напряжение волочения.

**Механические свойства металла.** Многочисленные опыты показывают, что между пределом прочности и усилием во-

лочения технических металлов существует линейная зависимость (рис. 114, а).

**Структура металла.** Металлы с однофазной структурой и минимальным количеством примесей можно подвергать волочению с большими степенями деформации за проход и минимальным числом отжигов между ними. При прочих равных условиях усилие волочения для таких металлов минимально по сравнению с другими структурами, а качество поверхности выше.

**Степень деформации.** Чрезмерно большие вытяжки при волочении ведут к нарушению условия осуществимости процесса волочения  $p \leq \sigma_s$ , т. е. к обрывам. При чрезмерно малых обжатиях очаг деформации значительно укорачивается, нагрузки приобретают сосредоточенный характер и деформации по сечению стержня становятся крайне неравномерными. В результате контактные напряжения резко возрастают, что приводит к быстрому износу инструмента. Вместе с тем механические свойства металла по сечению заметно изменяются. При увеличении степени деформации неравномерность уменьшается, поэтому контактные напряжения и связанный с ним износ уменьшаются, а механические свойства по сечению тела становятся более равномерными. Многочисленные опыты показывают, что зависимости между усилием, а также напряжением и логарифмом вытяжки близки к линейным (рис. 114, б).

**Скорость деформации.** Из материала гл. VII известно, что с ростом скорости обработки сопротивление деформации увеличивается. Вместе с тем в условиях волочения с ростом скорости происходит разогрев металла и слой смазки становится все более равномерным. При этом коэффициент трения уменьшается. В результате с увеличением скорости волочения до 5 м/мин напряжение несколько возрастает, а при дальнейшем росте скорости остается примерно постоянным. В начале процесса напряжение волочения достигает некоторого максимума, а затем уменьшается и стабилизируется (рис. 114, в). Наличие максимума обусловлено инерционными силами при захвате. При плавном захвате максимальное начальное напряжение волочения лишь на 5—10% больше напряжения в установившейся стадии, но при резком захвате оно может повыситься в 2—2,5 раза, что приведет к обрывам. При очень больших скоростях (35—40 м/сек и выше) снова можно наблюдать рост усилия волочения с ростом скорости за счет уменьшения вязкости смазки (рис. 114, г).

**Температура волочения.** Температура поверхностных слоев при волочении повышается под влиянием контактного трения. По исследованиям Е. В. Пальмова, температура на контактной поверхности волоки может достигать 600°C, а по данным Р. Б. Красильщикова [3] даже 750—800°C (рис. 114, д). В связи с этим при очень больших скоростях волочения может наступать явление «перетяжки» — образование по оси протягиваемого прутка на примерно равных расстояниях внутренних разрывов. Можно предполагать, что при наличии большого перепада температур по сечению

прутка резко изменяется характер напряженного состояния на его оси сразу же после выхода из канала волокна. Наружные более разогретые слои за счет теплового расширения оказывают воздействие на внутренние, вызывая появление в центральной зоне радиальных и тангенциальных растягивающих напряжения. В сочетании с растягивающими напряжениями от усилия волочения создается «жесткая» схема напряженного состояния, приводящая к разрывам. В результате разрыва происходит релаксация напряжений, но последние в процессе волочения снова нарастают, происходит очередной разрыв и т. д.

При волочении с подогревом невозможно получить большие вытяжки, так как при этом значительно уменьшается прочность вытягиваемого из волокна переднего конца и ухудшаются условия смазки в очаге деформации. Это приводит к росту усилия волочения и обрыву переднего конца. Поэтому незначительный подогрев применяется лишь при волочении высокопрочных металлов — молибдена, вольфрама, быстрорежущей стали и др., не теряющих при этой температуре способности к упрочнению.

Противонапряжение. Противонапряжение уменьшает нормальное давление на корпус волокна, износ которой в результате этого уменьшается. Уменьшается также нагрев волокна, температура металла и перепад температур по сечению тела, подвергающегося волочению. Вместе с тем с ростом усилия противонапряжения начиная с некоторой критической его величины увеличивается напряжение и полное усилие волочения. Поэтому величина напряжения противонапряжения ограничивается не только пределом текучести входящего в волокно конца полосы, но и прочностью выходящего из волокна конца обрабатываемого тела.

Трение и смазка. Ранее было показано, что трение увеличивает неравномерность деформации по сечению тела, напряже-

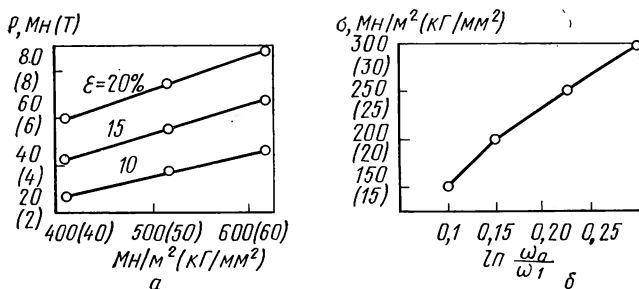
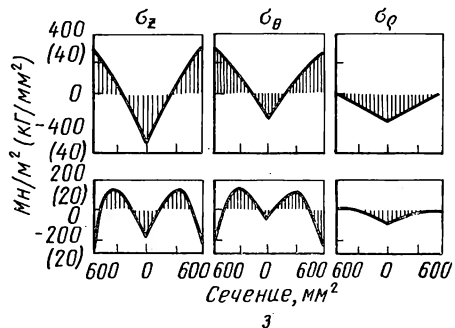
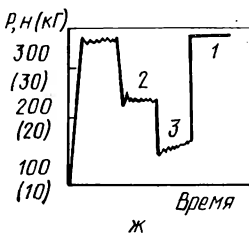
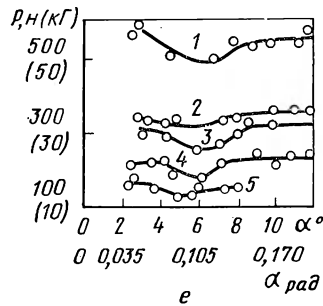
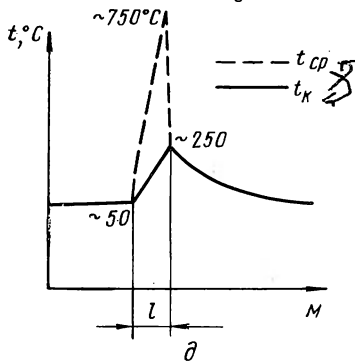
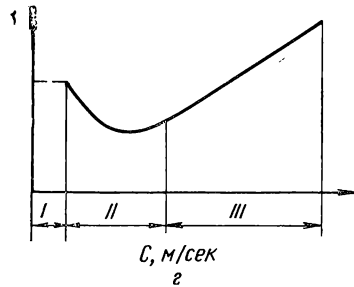
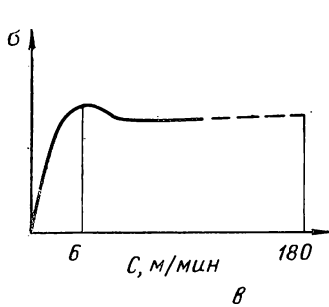


Рис. 114. Влияние основных факторов на процесс волочения:

*a* — зависимость между пределом прочности и усилием волочения стальных прутков диа-

ванной медной проволоки диаметром 0,7 и 0,4 мм от вытяжки ( $\lambda = \frac{\omega_0}{\omega_1}$ ) ( $\omega_0, \omega_1$  — пло-  
 низких скоростях;  $\varepsilon$  — то же, при высоких скоростях (I—III — области сухого, граничного  
 ной  $l$  при волочении ( $t_{cp}$  — средняя по сечению,  $t_k$  — на поверхности контакта);  $e$  —  
 талл; 3 — 30% никелевая латунь; 4 — 18%-ная никелевая латунь; 5 — латунь); ж — измене  
 2 и 3 — с поперечными и продольными ультразвуковыми колебаниями); з — эпюры оста

ние и усилие в процессах обработки давлением. Процессу волочения всегда предшествует операция травления и зачастую одна из операций покрытия: омеднение, оцинкование, фосфатирование и др. Покрытия в некоторой мере обладают смазочными свойствами, предохраняют металл от налипания на рабочую поверхность воло-



метром 20,8 мм при разных обжатиях  $\epsilon = \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_0}$ ; б — напряжения волочения нагартосца поперечного сечения до и после волочения); в — то же, от скорости волочения при

и жидкостного трения); д — распределение температуры металла в очаге деформации дли влияние угла  $\alpha$  на усилие волочения при 20% обжатия (1 — хромоникель; 2 — монельевые усилия волочения медной проволоки (1 — без наложения ультразвуковых колебаний; точных напряжений после волочения латунного стержня и последующей обкатки

ки, способствуют удержанию смазки на металле, и следовательно, повышают ее эффективность.

В процессе волочения, как правило, одновременно действуют различные виды трения — от полусухого до жидкостного. На рис. 114,2 схематически показана зависимость усилия от скорости волочения. Из рисунка следует, что в зоне перехода от граничного к жидкостному трению усилие волочения минимально. С увеличением скорости в зоне жидкостного трения усилие растет за счет повышения вязкости смазки.

Одной из причин, лимитирующих увеличение скоростей волочения, является высокая температура в зоне деформации, величина которой может быть уменьшена охлаждением. Режим жидкостного трения — эффективный путь увеличения скорости волочения и снижения коэффициента трения. Установлено, что при жидкостном трении коэффициент трения  $\mu = 0,002 \div 0,003$ , в то время как при волочении через алмазные и победитовые волокна  $\mu = 0,03 \div 0,06$ , а через стальные 0,1—0,12. Условия жидкостного трения можно создать, используя специальные насадки перед волочильной фильерой (см. рис. 112,4) Такая трубка-насадка способствует захвату смазки. При этом силы вязкости вызывают большое гидростатическое давление перед волочильным кольцом, за счет чего и создается режим жидкостного трения. В качестве смазки при этом применяют обычно мыльный порошок, использование которого позволяет значительно уменьшить длину насадки по сравнению с длиной насадки для жидкой смазки. Таким образом, основное условие создания гидродинамического режима трения заключается в том, чтобы создать постоянный приток смазки в зазор между волоком и металлом. Если при этом в волоке создается давление смазки, равное сопротивлению деформации металла, то жидкостное трение будет обеспечено.

Волочильный инструмент. Волокна изготавливаются из стали, твердых сплавов (победит и др.) и алмаза. Победит и алмаз

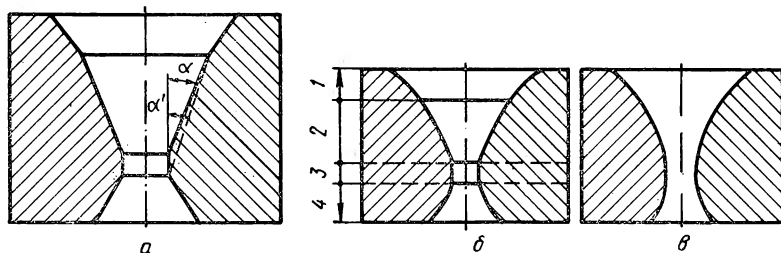


Рис 115. Волокна:

а — стальная коническая; б — победитовая коническая; в — радиальная

заделывают в специальные обоймы. В зависимости от материала конструктивная форма рабочей поверхности волок несколько различна, но все же их можно разделить на две группы: конические и радиальные (рис. 115). Продольный профиль конической волокна

состоит из следующих участков: входная и выходная воронки, рабочая и калибрующая части. Между ними имеются небольшие переходные участки. Длина калибрующего участка лежит в пределах  $(0,2—1,5)d$ , где  $d$ —диаметр изделия после волочения. Длина калибрующего участка всегда мала по сравнению с длиной рабочей части. Ввиду малой величины обжатия в калибрующей части влияние последней на усилие волочения невелико. Поэтому часто в процессе расчетов усилия волочения калибрующую часть вовсе исключают из рассмотрения или, следуя рекомендации И. Л. Перлина, вводят в расчет «приведенный» угол волочения  $\alpha'$  (см. рис. 115,а).

Радиальные волокна имеют перед коническими то преимущество, что их можно использовать как для больших, так и для малых обжатий. Однако усилие волочения в радиальных волокнах на 15—20% больше, чем в конических, и износ волочильного канала менее равномерен, так что радиальная волокна быстрее выходит из строя. В связи с этим радиальные волокна применяются сравнительно редко.

При увеличении угла конусности  $\alpha$  рабочей части волокна увеличивается величина суммарной сдвиговой деформации (рис. 113), возрастает степень упрочнения, повышаются контактные напряжения, ухудшаются условия трения. Все это приводит к увеличению усилия волочения. Вместе с тем с ростом угла  $\alpha$  уменьшается величина контактной поверхности, поэтому уменьшается нормальное давление металла на волоку и, как следствие,— усилие волочения.

В результате действия противоположных факторов при волочении тонких изделий существует оптимальный угол, которому соответствует минимальная величина усилия (напряжения) волочения (см. рис. 114, е). Установлено, что при обжатии 20—35% оптимальная величина угла  $\alpha$  в победитовой волоке равна  $0,096—0,105 \text{ рад}$  ( $5,5—6^\circ$ ). С увеличением обжатия оптимальный угол  $\alpha$  растет до  $0,28 \text{ рад}$  ( $16^\circ$ ), а в стальных волокнах — до  $0,25 \text{ рад}$  ( $20^\circ$ ). Угол, меньший  $0,07 \text{ рад}$  ( $4^\circ$ ), обычно не используется, так как при этом значительно увеличивается поверхность трения.

Ультразвуковые колебания. Наложение ультразвуковых колебаний на волоку как в направлении движения деформируемого металла при волочении, так и в поперечном направлении заметно снижает усилие волочения (рис. 114, ж). Механизм влияния ультразвуковых колебаний на механические свойства и усилие волочения аналогичен описанному в гл. VII и VIII. Отметим лишь, что одним из важнейших условий, необходимых для осуществления эффективного процесса волочения, является превышение скорости колебаний над скоростью волочения. Эти скорости должны различаться не менее чем в 2—3 раза. Замечено также, что использование энергии ультразвука способствует созданию условий жидкостного трения в процессе волочения и улучшению качества поверхности изделий.

Остаточные напряжения при волочении. При

волочении периферийные слои подвергаются большим деформациям сдвига в продольном направлении, чем центральные. После волочения за счет упругого последействия наружные слои укорачиваются в большей степени, чем центральные. В результате в центральных слоях возникают остаточные продольные напряжения сжатия, а в наружных слоях — напряжения растяжения. Остаточные напряжения взаимно уравниваются. Именно поэтому они и существуют в теле после снятия воздействия внешних сил (см. гл. V). Опыты показывают [1], что остаточные напряжения после волочения характеризуются эпюрами, изображенными на рис. 114, з.

Под действием тангенциальных и осевых периферийных растягивающих остаточных напряжений после волочения в металле иногда возникают продольные и поперечные трещины.

С увеличением дробности деформации при данной суммарной вытяжке степень неравномерности деформации по сечению прутка возрастает, и поэтому с уменьшением единичной вытяжки остаточные напряжения также растут за счет упругого последействия. Замечено, однако, что волочение с обжатием в последнем проходе, равном 0,8—1,5%, приводит к снижению остаточных напряжений. Дело в том, что при малых единичных вытяжках деформация становится столь неравномерной, что возникают дополнительные продольные напряжения сжатия на периферии и растяжения в центральной части. Напряжения от неравномерной деформации суммируются с напряжениями от внешних сил. Натяженное состояние становится более однородным и остаточные напряжения уменьшаются.

Уменьшение остаточных напряжений наблюдается также и в результате обкатки прутков после волочения с обжатием до 1,5—2%. В результате обкатки, как было показано в гл. V, за счет неравномерности деформации по сечению возникают напряжения противоположного знака. Они суммируются алгебраически с остаточными напряжениями, возникающими при волочении, что и приводит к уменьшению величины и изменению характера эпюры остаточных напряжений (см. рис. 114, з).

### 3. Краевая задача волочения

Для формулировки краевых условий используем гипотезу плоских сечений (рис. 116). При этом в случае плоской деформации краевая задача сводится к совместному решению приближенного уравнения равновесия (см. гл. V), условия пластичности с упрочнением (96) и кулоновым соотношением между касательными и нормальными контактными напряжениями:

$$\frac{d\sigma_p}{d\rho} + \frac{\sigma_p - \sigma_0}{\rho} + 2 \frac{\tau_{p\theta}}{\rho\alpha} = 0; \quad \sigma_p - \sigma_0 = \nu K \left(\frac{r}{\rho}\right)^n; \quad \tau_{p\theta} = \\ = -\mu\sigma_0. \quad (339)$$

Первое из этих уравнений на основании двух других приводится к виду

$$\frac{d\sigma_p}{d\rho} + \frac{\nu K}{\rho} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \frac{2\mu}{\alpha} \left[ \sigma_p - \nu K \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \right] \frac{1}{\rho} = 0$$

$$\text{или } \frac{d\sigma_p}{d\rho} + \frac{\nu K}{\rho} (1 + \delta) \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \frac{\delta\sigma_p}{\rho} = 0, \quad (340)$$

$$\text{где } \delta = \frac{2\mu}{\alpha}. \quad (341)$$

Мы получили линейное неоднородное уравнение первого порядка.

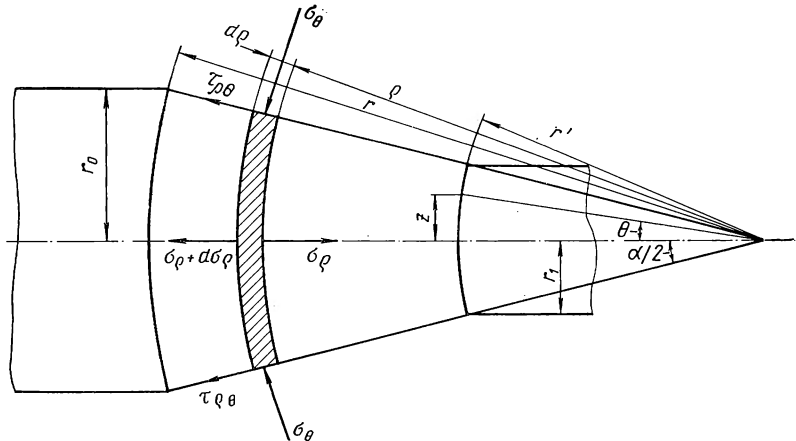


Рис. 116. Схема к расчету напряжений при волочении с использованием гипотезы плоских сечений

Решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d\sigma_p}{d\rho} - \delta \frac{\sigma_p}{\rho} = 0$$

будет таким:

$$\sigma_p = c \rho^\delta. \quad (342)$$

Неоднородное уравнение (340) решим, используя метод вариации произвольной постоянной в уравнении (342):

$$\frac{d\sigma_p}{d\rho} = \frac{dc}{d\rho} \rho^\delta + c \delta \rho^{\delta-1}.$$

С учетом этого уравнение (340) примет вид:

$$\frac{dc}{d\rho} \rho^\delta + c \delta \rho^{\delta-1} + \frac{\nu K}{\rho} (1 + \delta) \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - c \delta \rho^{\delta-1} = 0$$

$$\text{или } \frac{dc}{d\rho} = -\nu K (1 + \delta) r^n \rho^{-(\delta+n+1)}.$$

$$\text{Отсюда } c = \nu K \frac{1 + \delta}{\delta + n} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \rho^{-\delta} + c_1.$$



Поэтому из (342)

$$\sigma_p = \nu K \frac{1+\delta}{\delta+n} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n + c_1 \rho^\delta. \quad (343)$$

Граничное условие: в сечении входа в волоку ( $\rho=r$ ) контактное напряжение  $\sigma_\theta = -K$ . При этом второе из равенств (339) при  $\nu=+1$  дает  $\sigma_p = 0$ . Поэтому из равенства (343) получим

$$c_1 = -\frac{K}{r^\delta} \frac{1+\delta}{\delta+n}; \quad \sigma_p = K \frac{1+\delta}{\delta+n} \left[ \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \left(\frac{\rho}{r}\right)^\delta \right].$$

Принимая во внимание второе и третье из равенств (339), придем к следующим выражениям для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_p}{K} &= \frac{\delta+1}{\delta+n} \left[ \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \left(\frac{\rho}{r}\right)^\delta \right]; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{\delta+1}{\delta+n} \left[ \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \left(\frac{\rho}{r}\right)^\delta \right] - \\ &- \left(\frac{r}{\rho}\right)^n; \\ \frac{\tau_{p\theta}}{K} &= -\mu \left\{ \frac{\delta+1}{\delta+n} \left[ \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \left(\frac{\rho}{r}\right)^\delta \right] - \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (344)$$

Если за величину  $K$  принять среднее значение предела текучести при волочении, т. е. считать  $K=0,5 (K_0+K_1)$ , где  $K_0$  и  $K_1$  — пределы текучести до и после волочения, то в равенствах (344) можно принять  $n=0$ . Таким образом, формально задача будет сведена к случаю волочения идеально пластического металла с истинным сопротивлением деформации, равным  $K$ . С учетом этого замечания, считая  $n=0$ , из последних равенств получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_p}{K} &= \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^\delta \right]; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^\delta \right] - 1; \\ \frac{\tau_{p\theta}}{K} &= -\mu \left\{ \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^\delta \right] - 1 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (345)$$

Выражения (345) представляют собой обобщение полученных в свое время С. И. Губкиным, Заксом и И. Л. Перлиным формул для определения напряжения волочения. С использованием уравнений (344) и (345) на рис. 117 построены эпюры напряжений волочения. Из рассмотрения эпюр следует, что различие в величине напряжений, рассчитанных с учетом и без учета упрочнения наиболее заметно в средней части по длине очага деформации, в сечении же выхода такое различие невелико.

При волочении через круглую матрицу деформация уже не плоская, а осесимметричная, и здесь удобно, проектируя все силы на направление волочения, ввести не линейные единицы, а единицы площади. Для осесимметричной деформации условие пластичности с упрочнением выражается равенством (79), куда вместо

$K$  входят величины  $\sigma_s$ . Используя те же гипотезы, получим систему уравнений краевой задачи волочения круглого стержня:

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2 \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} + 2 \frac{\tau_{\rho\theta}}{\alpha\rho} = 0; \quad \sigma_\rho - \sigma_\theta = \nu\sigma_s \left(\frac{r}{\rho}\right)^n;$$

$$\tau_{\rho\theta} = -\mu\sigma_\theta.$$

Проведя аналогичные преобразования, найдем выражения для напряжений в случае осесимметричного волочения материала с упрочнением:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_\rho}{\sigma_s} &= \frac{1+\delta}{\delta+n} \left[ \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\delta} \right]; \quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_s} = \\ &= \frac{1+\delta}{\delta+n} \left[ \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\delta} \right] - \left(\frac{r}{\rho}\right)^n; \\ \frac{\tau_{\rho\theta}}{\sigma_s} &= -\mu \left\{ \frac{1+\delta}{\delta+n} \times \right. \\ &\times \left[ \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\delta} \right] - \left. \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \right\}. \end{aligned} \right\} (346)$$

При  $n=0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_\rho}{\sigma_s} &= \frac{1+\delta}{\delta} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\delta} \right]; \quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_s} = \frac{1+\delta}{\delta} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\delta} \right] - 1; \\ \frac{\tau_{\rho\theta}}{\sigma_s} &= -\mu \left\{ \frac{1+\delta}{\delta} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\delta} \right] - 1 \right\}. \end{aligned} \right\} (347)$$

#### 4. Напряженное состояние при волочении

Из соображений симметрии на оси подвергаемого волочению прутка, т. е. при  $\theta=0$ , касательные напряжения  $\tau_{\rho\theta}=0$ . Отсюда в решении (185) получим  $A=-B$ . Тогда решение (185) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= -m \left( \frac{c_1 \rho^a}{a} + \frac{c_2 \rho^b}{b} \right) \operatorname{ch} m\theta + \frac{K}{n} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n + c; \\ \sigma_\theta &= -m \left( \frac{c_1 \rho^a}{a} + \frac{c_2 \rho^b}{b} \right) \operatorname{ch} m\theta + K \left(\frac{1}{n} - 1\right) \left(\frac{r}{\rho}\right)^n + c; \\ \tau_{\rho\theta} &= (c_1 \rho^a + c_2 \rho^b) \operatorname{sh} m\theta; \quad m = \sqrt{a(a+2)} = \sqrt{b(b+2)}. \end{aligned} \right\} (348)$$

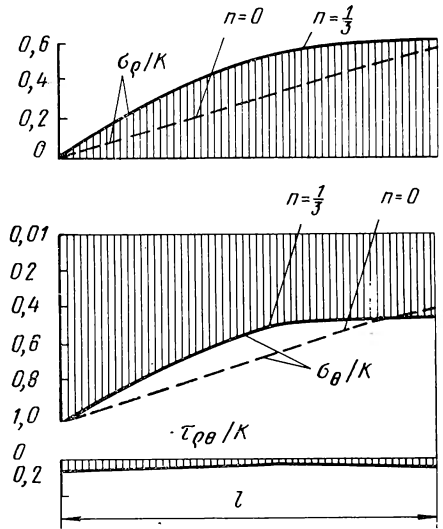


Рис. 117. Эпюры контактных напряжений при волочении. При наличии упрочнения ( $n=1/3$ ) и при  $n=0$   $\frac{r_0}{r_1}=1,5$ ;  $\mu=0,05$ ;  $\alpha=0,1(6^\circ)$ ;  $\delta=\frac{2\mu}{\alpha}=1$

В этих уравнениях  $c'_1 = A c_1$ ;  $c'_2 = A c_2$ . Для упрощения записи штрихи над константами  $c'_1$ ,  $c'_2$  опущены. Обозначим угол рабочего конуса волокна через  $\alpha/2$ . На основании третьих равенств из систем (344) и (346) имеем для  $r_{\rho\theta}$  при  $\theta = \alpha/2$ .

$$(c_1 \rho^a + c_2 \rho^b) \operatorname{sh} \frac{m \alpha}{2} = -\mu K \left[ \left( \frac{\delta+1}{\delta+n} - 1 \right) \left( \frac{r}{\rho} \right)^n - \left( \frac{\delta+1}{\delta+m} \right) \left( \frac{\rho}{r} \right)^\delta \right].$$

Это уравнение справедливо при любых значениях  $\rho$ . Поэтому можно записать два уравнения:

$$c_1 \rho^a = \mu K \frac{\frac{\delta+1}{\delta+n}}{\operatorname{sh} \frac{m \alpha}{2}} \left( \frac{\rho}{r} \right)^\delta; \quad c_2 \rho^b = -\mu K \frac{\frac{\delta+1}{\delta+n} - 1}{\operatorname{sh} \frac{m \alpha}{2}} \left( \frac{r}{\rho} \right)^n.$$

Сравнивая правую и левую части этих равенств, убеждаемся, что  $\rho^a = \rho^b$ ;  $a = \delta$ ;  $\rho^b = \rho^{-n}$ ;  $b = -n$ ;

$$c_1 = \mu K \frac{\frac{\delta+1}{\delta+n}}{\left( \operatorname{sh} \frac{m \alpha}{2} \right) r^\delta}; \quad c_2 = -\mu K \frac{\left( \frac{\delta+1}{\delta+n} - 1 \right) r^n}{\operatorname{sh} \frac{m \alpha}{2}}. \quad (349)$$

Теперь рассмотрим напряжение  $\sigma_\theta$ . При  $\theta = \alpha/2$  на основании равенств (344) и (348) можем записать:

$$\begin{aligned} & -m \left( \frac{c_1 \rho^a}{a} + \frac{c_2 \rho^b}{b} \right) \operatorname{ch} \frac{m \alpha}{2} + K \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{r}{\rho} \right)^n + c = \\ & = K \left[ \left( \frac{\delta+1}{\delta+n} - 1 \right) \left( \frac{r}{\rho} \right)^n - \frac{\delta+1}{\delta+n} \left( \frac{\rho}{r} \right)^\delta \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует:  $c = 0$ ,

$$\frac{m c_1}{a} \left( \operatorname{ch} \frac{m \alpha}{2} \right) \rho^a = K \frac{\delta+1}{\delta+n} \left( \frac{\rho}{r} \right)^\delta,$$

$$-\frac{m c_2}{b} \left( \operatorname{ch} \frac{m \alpha}{2} \right) \rho^b = K \left( \frac{\delta+1}{\delta+n} - 1 \right) \left( \frac{r}{\rho} \right)^n - K \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{r}{\rho} \right)^n$$

$$\text{или} \quad -\frac{m c_2}{b} \left( \operatorname{ch} \frac{m \alpha}{2} \right) \rho^b = K \left( \frac{\delta+1}{\delta+n} - \frac{1}{n} \right) \left( \frac{r}{\rho} \right)^n.$$

Из последних равенств получаем соотношения (349) и с учетом их новые выражения для констант:

$$c_1 = \frac{\delta}{m} K \frac{\delta+1}{\delta+n} \frac{1}{r^\delta} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{m \alpha}{2}}; \quad c_2 = \frac{n}{m} K \left( \frac{\delta+1}{\delta+n} - \frac{1}{n} \right) \frac{r^n}{\operatorname{ch} \frac{m \alpha}{2}}. \quad (351)$$

Приравнивая правые части выражений для константы  $c_1$  из уравнений (350) и (351), получим:

$$\mu = \frac{\delta}{m} \operatorname{th} \frac{m \alpha}{2}. \quad (352)$$

Приравнивая правые части выражений для константы  $c_2$ , получаем это же соотношение:

$$\mu = -\frac{n}{m} \frac{\frac{\delta+1}{\delta+n} - \frac{1}{n}}{\frac{\delta+1}{\delta+n} - 1} \operatorname{th} \frac{m\alpha}{2} = \frac{\delta}{m} \operatorname{th} \frac{m\alpha}{2}.$$

Введем обозначения

$$\Phi_1 = \frac{\operatorname{sh} m\theta}{\operatorname{sh} \frac{m\alpha}{2}}; \quad \Phi_2 = \frac{\operatorname{ch} m\theta}{\operatorname{ch} m \frac{\alpha}{2}}. \quad (353)$$

На основании соотношений (349)—(353) из решения системы (348) получим следующие выражения для напряжений при волочении:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_p}{K} &= \left\{ \frac{\delta+1}{\delta+n} \left[ \left( \frac{r}{\rho} \right)^n - \left( \frac{\rho}{r} \right)^\delta \right] - \frac{1}{n} \left( \frac{r}{\rho} \right)^n \right\} \Phi_2 + \frac{1}{n} \left( \frac{r}{\rho} \right)^n; \\ \frac{\sigma_\theta}{K} &= \left\{ \frac{\delta+1}{\delta+n} \left[ \left( \frac{r}{\rho} \right)^n - \left( \frac{\rho}{r} \right)^\delta \right] - \frac{1}{n} \left( \frac{r}{\rho} \right)^n \right\} \Phi_2 + \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{r}{\rho} \right)^n; \\ \frac{\tau_{p\theta}}{K} &= \mu \left\{ \frac{\delta+1}{\delta+n} \left[ \left( \frac{r}{\rho} \right)^n - \left( \frac{\rho}{r} \right)^\delta \right] - \left( \frac{r}{\rho} \right)^n \right\} \Phi_1. \end{aligned} \right\} \quad (354)$$

Если теперь подставить выражения (353) в дифференциальные уравнения равновесия (33), то каждое из них сводится к соотношению (352); иными словами, уравнения равновесия тождественно удовлетворяются функциями (354) и, следовательно, решения (354) в пределах принятых исходных допущений являются точными. Если в равенствах (354) считать  $n=0$ , то, переходя к пределу, получим:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{r}{\rho} \right)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{r}{\rho} \right)^n \ln \frac{r}{\rho}}{1} = \ln \frac{r}{\rho}$$

и равенства (354) приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_p}{K} &= \left\{ \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{r} \right)^\delta \right] - \ln \frac{r}{\rho} \right\} \Phi_2 + \ln \frac{r}{\rho}; \\ \frac{\sigma_\theta}{K} &= \left\{ \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{r} \right)^\delta \right] - \ln \frac{r}{\rho} \right\} \Phi_2 + \ln \frac{r}{\rho} - 1; \\ \frac{\tau_{p\theta}}{K} &= -\mu \left\{ \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{r} \right)^\delta \right] - 1 \right\} \Phi_1. \end{aligned} \right\} \quad (355)$$

В решении (348) величина  $m = \sqrt{a(a+2)} = \sqrt{b(b+2)}$ , т. е. величины  $a$ ,  $b$  являются корнями квадратного уравнения  $x^2 + 2x - m^2 = 0$ . В нашем случае корни  $x_1 = a = \delta$ ;  $x_2 = b = -n$ . Сумма корней квадратного уравнения равна коэффициенту при неизвестном в первой степени с обратным знаком, поэтому  $\delta - n = -2$  или  $n = \delta + 2$ .

В гл. III мы условились, что в законе упрочнения коэффициент  $0 \leq n \leq 1$ .

Вместе с тем всегда  $\delta \geq 0$ . Поэтому, считая, что кривая упрочнения выпуклая и считая  $\nu = -1$ , получим

$$\delta = \frac{1}{n} - 2. \quad (356)$$

Заметим сразу, что так как  $\delta \geq 0$ , то решение действительно для  $n \leq \frac{1}{2}$ .

Равенство (356) показывает, что решение задачи в рассматриваемом виде требует наличия связи между параметрами  $\delta = \frac{2\nu}{\alpha}$  и коэффициентом упрочнения  $n$ . Отсюда следует, что угол волочения  $\alpha$  и коэффициент трения  $\mu$  (точнее, соотношение между ними) определяются физическим законом — законом упрочнения. Таким образом, параметры волочильного инструмента следует выбирать с учетом закона упрочнения. Отступление от соотношения (356) будет приводить к нарушению условий равновесия, последствиями чего могут быть нарушения процесса волочения.

Прежде всего эти нарушения приведут к повышению усилия волочения. При очень больших отклонениях будут происходить обрывы. Таким образом, соотношение (356) соответствует минимальному напряжению волочения. Иными словами, при данном физическом законе упрочнения, определяемом величиной  $n$  и коэффициентом трения  $\mu$ , соотношением (356) определяется оптимальный угол волочения  $\alpha$  (см. разд. 2).

На рис. 118 приведены эпюры, построенные с использованием формул (355) и характеризующие изменение напряжений при во-

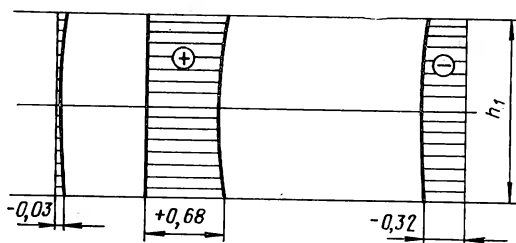


Рис. 118. Изменение напряжений по сечению при волочении в сечении:

$$\frac{r}{\rho} = 1,5; \mu = 0,1; \frac{\alpha}{2} = 0,1; \delta = 1; m = 1,73$$

лочении. Принимая во внимание, что абсолютная величина касательных напряжений во всех точках контура примерно на порядок ниже величин нормальных напряжений, можно констатировать, что обычно при волочении неравномерность напряженного состояния и деформаций невелика, так что в первом приближении справедлива гипотеза плоских сечений.

## 5. Усилие и напряжение волочения

В случае плоской деформации при волочении стержня элемент его площади в поперечном сечении выхода из волокна  $dF = r'd\theta$  (см. рис. 116). С учетом этого, используя первую из формул (354), усилие волочения можно выразить так:

$$P = \int_{(F)} \sigma_p dF = \frac{2Kr'}{\operatorname{ch} \frac{m\alpha}{2}} \left\{ \frac{\delta+1}{\delta+n} \left[ \left( \frac{r}{r'} \right)^n - \left( \frac{r'}{r} \right)^\delta \right] - \frac{1}{n} \left( \frac{r}{r'} \right)^n \right\} \int_0^{\alpha/2} \operatorname{ch} m\theta d\theta + 2 \frac{r'}{n} \left( \frac{r}{r'} \right)^n \int_0^{\alpha/2} d\theta.$$

$$\text{Здесь } \int_0^{\alpha/2} \operatorname{ch} m\theta d\theta = \frac{1}{m} \operatorname{sh} \frac{m\alpha}{2}.$$

Умножим и разделим первый член правой части равенства для усилия волочения на величину  $\alpha/2$ . Замечая (см. рис. 116), что  $r' \frac{\alpha}{2} \approx r_1$ ,  $\frac{r'}{r} = \frac{r_1}{r_0}$  и напряжение волочения  $\rho = \frac{P}{2r_1}$  получим:

$$\frac{\rho}{K} = \left\{ \frac{\delta+1}{\delta+n} \left[ \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^n - \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^\delta \right] - \frac{1}{n} \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^n \right\} \frac{\operatorname{th} \frac{m\alpha}{2}}{\frac{m\alpha}{2}} + \frac{1}{n} \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^n.$$

Величина  $m\alpha/2$  всегда меньше единицы  $\left( \frac{\operatorname{th} \frac{m\alpha}{2}}{\frac{m\alpha}{2}} \approx 1 \right)$ , поэтому:

$$\frac{\rho}{K} \approx \frac{\delta+1}{\delta+n} \left[ \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^n - \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^\delta \right] \quad (357)$$

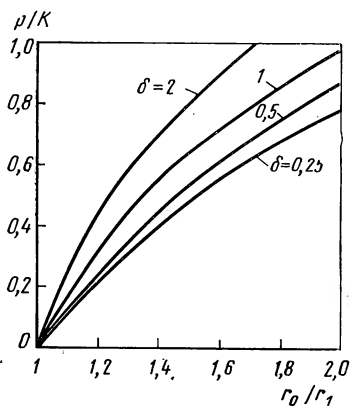


Рис. 119. Номограмма для определения напряжения волочения по формуле (358)

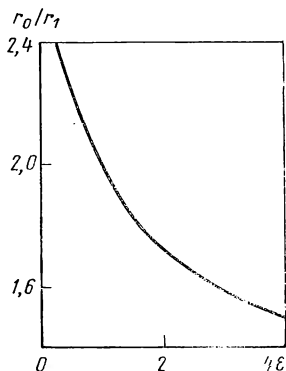


Рис. 120. Номограмма для определения предельного коэффициента обжатия при волочении

и если  $n=0$ , то

$$\frac{p}{K} = \frac{\delta + 1}{\delta} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^\delta \right]. \quad (358)$$

С использованием формулы (358) на рис. 119, а построена номограмма для определения напряжения волочения.

Устойчивый (без обрыва) процесс волочения возможен лишь при условии, если напряжение в выходящем конце не превышает истинного сопротивления деформации металла, подвергающегося волочению. Предельно возможную величину деформации получим, если в формуле (358) примем  $\frac{p}{K} = 1$ . Тогда

$$\frac{r_0}{r_1} = (\delta + 1)^{\frac{1}{\delta}}. \quad (359)$$

Из приведенной на рис. 120 кривой, построенной по зависимости (359), следует, что с ростом параметра  $\delta$  предельное обжатие при волочении уменьшается. Это является следствием совместного влияния коэффициента трения и фактора формы очага деформации  $\alpha$ .

## Х глава

### Прессование

#### 1. Способы прессования

В процессе прессования металл помещается в замкнутую полость контейнера и выдавливается из нее через матрицу. Основными способами являются прессование с прямым и обратным истечением. Из рис. 121, а следует, что при прессовании с прямым истечением направление движения пуансона, пресс-шайбы и выходящего из матрицы металла совпадают. При прессовании с обратным истечением они движутся в противоположном направлении (рис. 121, б). Иногда прессование с прямым и обратным истечением совмещают в одной операции (рис. 121, в). Так поступают при прессовании труб большого диаметра (100 мм и более). Наряду с прямым и обратным истечением используют схемы прессования с боковым истечением (рис. 121, г). Характер течения металла при боковом истечении обеспечивает минимальную разницу механических свойств изделия в поперечном и продольном направлениях. При боковом истечении на вертикальном прессе можно получить изделия максимально возможной длины.

Диаметр заготовки (слитка) колеблется от 60 мм на малых прессах до 1200 мм на больших. Прессованием можно получать изделия широкого сортамента: прутки диаметром от 5 до 200 мм, трубы диаметром от 18 до 380 мм с толщиной стенки от 1—1,5 мм и более, самые разнообразные профили и так называемые пане-

ли — широкие (до 1,5—2 м) и тонкие профили в виде листов с фасонными ребрами — выступами. Прессованием можно получить изделия, вовсе или почти не требующие дальнейшей обработки. Это обстоятельство, а также возможность быстрого перехода от производства одного изделия к производству другого простой сменой инструмента (матрицы, иглы, прессшайбы, контейнера)

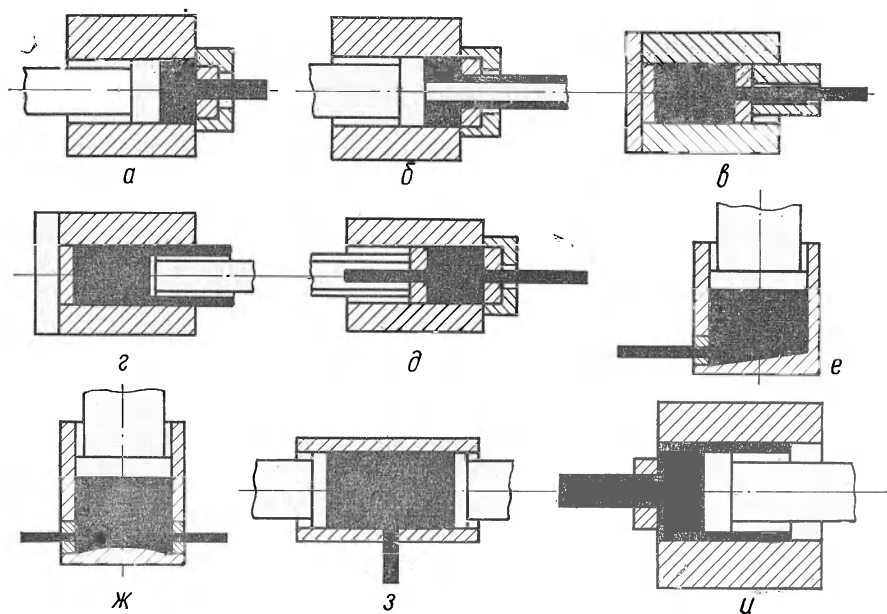


Рис. 121. Схемы процессов прессования:

*а* — с прямым истечением металла; *б* — с прямым истечением труб; *в* — с обратным истечением прутков; *г* — с обратным истечением труб; *д* — с совмещенными прямым и обратным методами истечения; *е* — с боковым истечением в один канал; *ж* — с боковым истечением в два канала; *з* — двусторонним боковым истечением; *и* — с «рубашкой»

обуславливают высокую эффективность процесса прессования и его маневренность.

Большим преимуществом прессования является возможность получения профилей сложной формы, которые нельзя получить прокаткой.

Схема всестороннего сжатия, затрудняющая межкристаллические сдвиги и разрушение, значительно увеличивает пластичность металлов в процессе прессования по сравнению с другими технологическими процессами с более «жесткой» схемой напряженного состояния. Поэтому обработке прессованием поддаются даже труднодеформируемые металлы и сплавы, мало пластичные в иных условиях. Вместе с тем наличие трехосного сжатия приводит к возникновению больших давлений в процессе обработки. Поэтому при прессовании расход энергии на единицу объема обрабатываемого металла получается весьма большим.



Прессование применяется в основном для производства изделий из цветных металлов. Наибольший объем из их числа занимают следующие: медь и ее сплавы; алюминий и его сплавы; никель и его сплавы; магний и его сплавы; цинк и его сплавы; титан и его сплавы.

Подвергают также прессованию в небольших количествах и стали, главным образом для прессования труб специального профиля, по форме отличающихся от круглых.

В последние два десятилетия в промышленных условиях во все возрастающих масштабах осуществляют прессование тугоплавких металлов: молибдена, вольфрама, ванадия, бериллия, ниобия, тантала и др.

При рассмотренных выше способах прессования в контейнере всегда остается некоторый объем металла, так называемый прессостаток, являющийся отходом. Для повышения выхода годного при прессовании металлов, однородных по составу, свободных от большого числа примесей и окислов, можно применять «непрерывное» прессование. В частности, так прессуют алюминиевые изделия. Прессование ведут с закрепленной на пуансоне прессшайбой. После прессования очередной заготовки прессостаток от нее остается в контейнере и в его полость подается новый слиток. Прессование возобновляется, в процессе его торец слитка сваривается с прессостатком так, что на готовом изделии место сварки обнаружить практически невозможно.

При прессовании дорогостоящих материалов применяют прессование без прессостатка. Например, при прессовании прутков из бериллия между прессшайбой и слитком закладывают прокладку из графита. Слиток выпрессовывают из контейнера полностью, а графитовая прокладка остается в контейнере в качестве прессостатка.

В некоторых случаях прессование осуществляют в условиях вакуума, в среде инертного газа, при жестко заданном температурном градиенте. При этом изделия могут охлаждаться в среде инертного газа или в воде.

В настоящее время наибольшее распространение получили прессы с гидравлическим приводом. Предпринимаются попытки использовать для осуществления прессования энергию взрыва. Все более широкое применение находят процессы прессования жидкостью и газом.

## 2. Особенности деформированного состояния при прессовании

Опыты показывают, что при прессовании с прямым истечением деформации сосредотачиваются у матрицы, т. е. у выхода из контейнера, если коэффициент трения металла о стенки контейнера невелик. Об этом свидетельствует, например, характер искажения координатной сетки на меридианальной плоскости разъема составных образцов, подвергаемых прессованию (рис. 122, а).

При больших силах трения металла о стенки контейнера пластическая деформация распространяется на весь объем и является крайне неравномерной (рис. 122, б).

Стальной стержень был вставлен в латунный слиток так, что при прессовании торец стержня располагался у прессшайбы. При прессовании с большими силами трения между слитком и стенками контейнера стержень оказался разорванным и его передняя часть ушла в пруток (рис. 123, а). Далее, по периферии латунного слитка были вставлены пронумерованные стальные штифты. При прессовании штифты, расположенные наиболее далеко от матрицы, вышли из нее первыми. Вместе с тем частично изменился порядок их расположения относительно друг друга (рис. 123, б).

В конце процесса прессования на задней торцовой поверхности заготовки образуется углубление в виде воронки, так называемая прессутяжка или прессутяжина (рис. 124, а).

В процессе прессования в углах контейнера, примыкающих к переднему торцовому срезу, образуются так называемые «мертвые» зоны (рис. 124, б), где перемещения металла относительно контейнера отсутствуют. Кривая, характеризующая зависимость давления прессования от перемещения пуансона, имеет три характерных участка. На участке 1 давление возрастает, на участке 2 давление уменьшается и на участке 3 снова возрастает (рис. 125, а).

Приведенное описание представляет собой обобщение большого числа опытных данных, на основании которых можно построить модель процесса деформации при прессовании с прямым истечением. Этот процесс можно разделить на следующие три стадии:

1. Распрессовка слитка в контейнере и заполнение прессуемым металлом канала матрицы, в процессе которых давление прессования возрастает (участок 1 на рис. 125, а). Эти явления происходят за счет того, что диаметр слитка всегда на 2—3% меньше диаметра контейнера. При воздействии прессшайбы на слиток последний осаживается по высоте на 6—8% и заполняет контейнер, что сопровождается ростом давления.

2. Стадия ламинарного течения, в процессе которого давление на пуансон уменьшается (участок 2 на рис. 125, а). В этой стадии поверхность соприкосновения слитка с контейнером постепенно уменьшается, уменьшается и суммарное сопротивление сил трения, с чем связано уменьшение давления на пуансон.

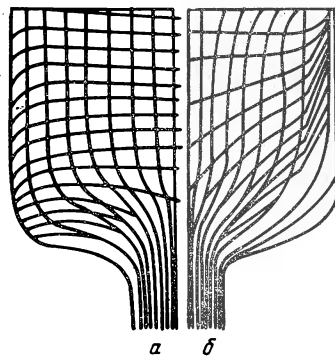


Рис. 122. Деформированная координатная сетка сплава ЛС59-1 после прессования:  
а — без смазки контейнера;  
б — со смазкой контейнера

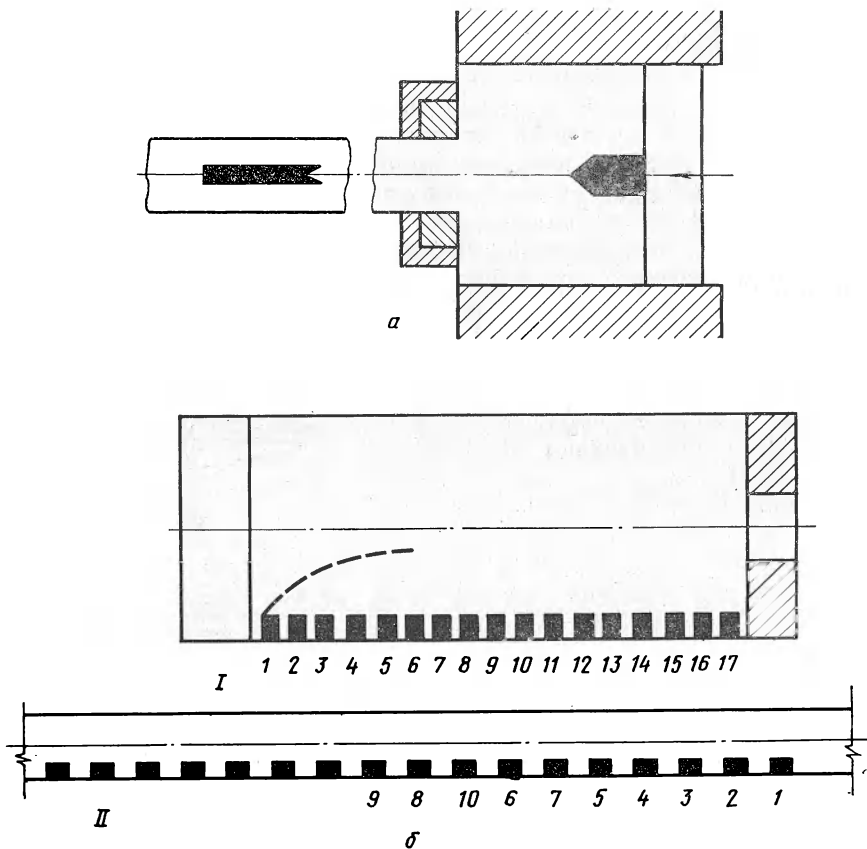


Рис. 123. Деформация латунного слитка при температуре 750—780°C:  
*a* — со стальным стержнем; *b* — со стальными вставками: *I* — до прессования; *II* — после прессования

3. Стадия турбулентного течения, в процессе которой давление на пуансон снова возрастает (участок 3 на рис. 125, *a*).

Очаг деформации в стадии ламинарного течения схематически можно представить так, как это показано на рис. 126, *a*. Зоны *I* у плоскости выхода из контейнера представляют собой упругие зоны, по границам которых скапливаются частицы с наружной окисленной поверхности слитка, что положительно сказывается на качестве изделия, но повышает усилие прессования, особенно в конце стадии турбулентного течения.

Границу *ab* зоны *I* можно найти исходя из условия минимума энергии, затрачиваемой на их образование [5]. Кривые *ab* представляют собой брахистохроны. Если матрица имеет коническую рабочую часть, то, как это рекомендует И. Л. Перлин [5], кривые *ab* можно в первом приближении принять за прямые, являющиеся

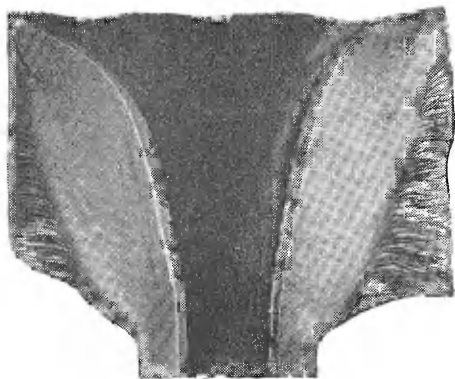


Рис. 124. Прессостаток с прессутяжной, полученный при прессовании прутка диаметром 82,5 мм из контейнера 205 мм, без смазки (мельхиор МНЖМц 30—0,8—1) (а) и прессостаток со скалыванием по поверхности упругой зоны при прессовании меди со смазкой (б)

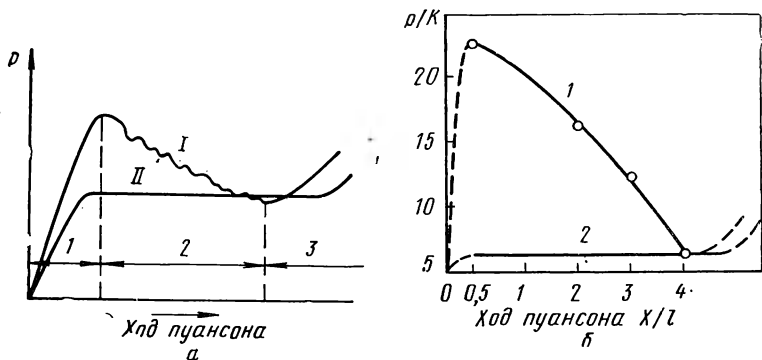
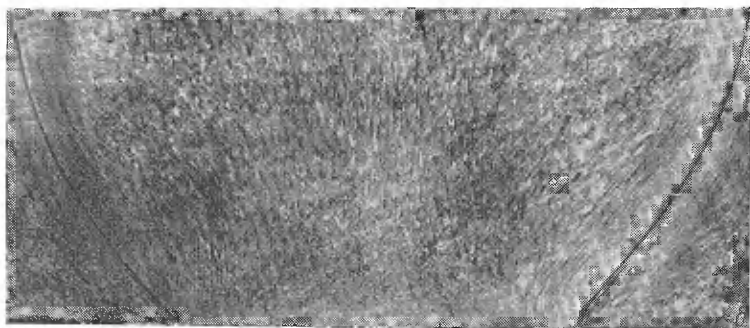


Рис. 125. Зависимость полного давления прессования от пути пуансона при прямом (I) и обратном (II) истечениях (а) (1—распрессовка; 2—ламинарное течение; 3—турбулентное течение) и среднего контактного напряжения на прессшайбе от хода пуансона по данным расчета ( $\delta=1/2, \lambda=10$ ) (б)

продолжением образующей рабочей конической части матрицы. У прессшайбы по оси контейнера также образуется упругая, почти недеформируемая зона *II*, размеры которой в процессе прессования постепенно изменяются по высоте и ширине и уменьшаются в объеме (например, до объема *II'*). Пережимы *III*, иногда образующиеся на боковой поверхности слитка, способствуют образованию упругой зоны *II*. Зона *IV* представляет собой зону пластической деформации, отсюда осуществляется течение металла в матрицу.

Схема очага деформации в стадии турбулентного течения приведена на рис. 126, б. В этой стадии по-прежнему продолжают существовать мертвые зоны *I*. Преимущественное течение частиц

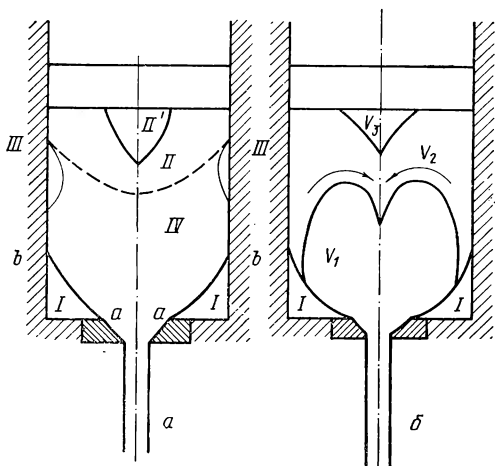


Рис. 126. Схема очага деформации в стадиях ламинарного (а) и турбулентного (б) течений

металла из зоны *IV* (рис. 126, а) в матрицу в стадии ламинарного движения приводит к тому, что эта зона постепенно уменьшается. В стадии турбулентного течения (рис. 126, б) появляется объем  $V_2$ , в котором осуществляется «вихревое» движение металла по направлению стрелок (рис. 126, б). Когда объем  $V_1$  вытечет, начинается истечение объема  $V_2$ . Замечено, что когда прессшайба находится на расстоянии, равном диаметру контейнера, от матрицы, частицы окисленного металла могут попадать с поверхности во внутренние слои прутка. Понятно, что на стадии турбулентного течения упругий объем *II* (рис. 126, а) исчезает. Его сменяет образующееся благодаря вихревому течению металла в объеме  $V_2$  воронкообразное углубление прессшайби  $V_3$ .

Из приведенного описания следует, что, изменяя условия прессования (уменьшая коэффициент трения, например), можно увеличить стадию ламинарного течения и, своевременно прекращая процесс прессования, избежать стадии турбулентного течения. Однако при этом всегда неизбежен некоторый прессостаток. Если даже не считаться с браком изделий (возникающим из-за попадания в них окисленного металла с боковой поверхности) и прессшайбиной, процесс прессования придется прекратить из-за наличия «мертвых» зон, находящихся в состоянии всестороннего сжатия, близкого к равномерному. Поэтому прессостаток при прессовании прямым методом достигает иногда 25% веса прессуемого слитка.

Опытные данные показывают, что при прессовании с обратным

истечением деформация металла сосредоточивается у матрицы, и перемещения металла на большей части контактной поверхности отсутствуют. Обычно протяженность пластической зоны составляет от 8 до 15% диаметра контейнера.

Сравним характер деформации координатных сеток при обратном и прямом прессовании (рис. 122), а также кривые, характеризующие зависимость давления прессования от пути пуансона (см. рис. 125). Из рассмотрения рис. 127 следует, что в данном случае

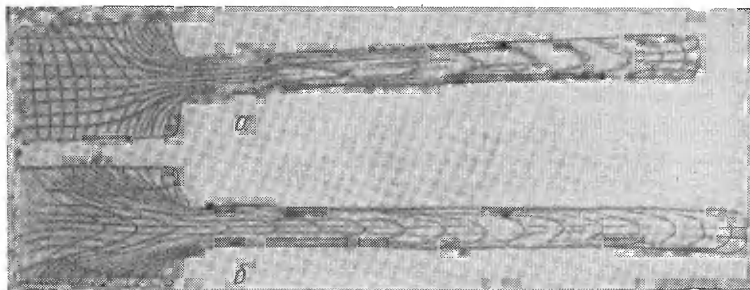


Рис. 127. Изменение координатных сеток при прессовании с обратным (а) и прямым (б) истечением (при прочих равных условиях)

при прочих равных условиях при обратном прессовании имеет место ламинарное течение, а при прямом — турбулентное. Из рис. 125 видно, что при обратном прессовании стадия ламинарного течения продолжительнее соответствующей стадии при прямом прессовании. Вместе с тем при обратном прессовании давление не зависит от пути пуансона и средняя его величина меньше, чем при прямом прессовании. Поскольку при обратном прессовании деформация сосредоточивается у матрицы, то прессуемая часть отсутствует, а мертвые зоны малы. В соответствии с этим прессостаток здесь значительно меньше, чем при прямом прессовании (до 5%). За счет малой величины мертвых зон наружные дефекты слитка попадают на поверхность и внутрь изделия с большей легкостью, чем при прямом прессовании, и качество изделий ухудшается. Поэтому прессование с обратным истечением применяют в случае, если к этому вынуждают недостаточная мощность пресса или необходимость получения изделий большой длины. Однако при этом особенно тщательно подготавливают поверхность заготовки.

### 3. Факторы, влияющие на процесс прессования

Прессуемый материал и его фазовое состояние. Прессование сплавов, имеющих фазовые превращения в интервале температур прессования, сопровождается изменением харак-

тера течения. Например, на рис. 128 показана координатная сетка, полученная после прессования образца из латуни Л59. Образцы 1 и 2, отпрессованные при температуре 780°C, имеют относительно равномерный характер истечения. Образцы 3 и 4 отпрессованы при 725°C; их течение неравномерно потому,

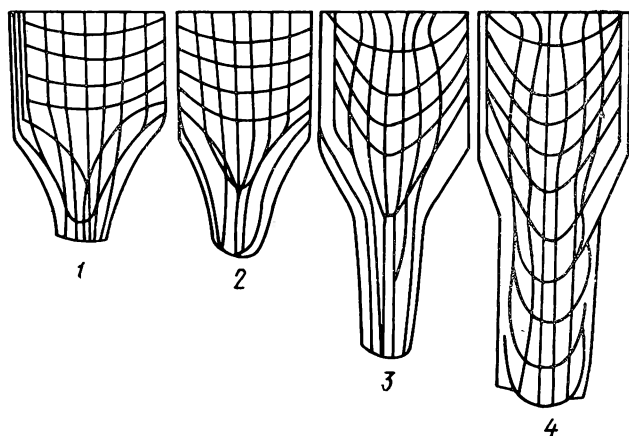


Рис. 128. Деформированная сетка латуни Л59 после прессования при 780°C (1, 2) и 725°C (3, 4)

что при этой температуре латунь была в двухфазном состоянии ( $\alpha + \beta$ ). Из этого примера следует, что прессование металла, состоящего из двух фаз, приводит к дополнительным напряжениям в объеме заготовки, вызванным фазовыми превращениями, и поэтому течение в этом случае менее равномерно. Таким образом, многофазные металлы желательнее прессовать в условиях, когда они состоят из какой-то одной фазы. Чистые металлы можно прессовать в широком интервале изменения температур, если в этом интервале они не имеют аллотропических превращений. Примеси в чистых металлах сильно сужают интервал температур прессования. Для установления интервала температур прессования сплавы различных металлов можно разделить на следующие три группы: а) сплавы, состоящие в твердом состоянии из двух и более фаз, при этом иногда приходится значительно понижать температуру прессования из-за образования эвтектик с низкой температурой плавления; б) однородные сплавы — твердые растворы, состоящие из одной фазы, температурный интервал которых шире, чем в предыдущем случае, но уже, чем для чистых металлов; в) сплавы с интерметаллическими соединениями, прессование которых возможно только в узком интервале температур, преимущественно высоких.

Степень деформации. Установлено, что механические свойства в центре и на поверхности изделия зависят от степени деформации в процессе прессования. Например, из рис. 129 сле-

дует, что при степени деформации до 20% пределы прочности наружных и внутренних зон прутка из магний-алюминиевого сплава одинаковы. Относительное сужение имеет одинаковую величину при обжатии до 35%. После этого с ростом обжатия различие механических свойств на поверхности и в центре возрастает, достигая максимума для предела прочности при обжатии в 60%, а для относительного сужения при 67%. Дальнейший рост обжатия вызывает уменьшение неравномерности механических свойств, которое при степени деформации, равной 92%, становится практически равным нулю. Этот пример показывает, что для получения изделий высокого качества, обладающих равномерными механическими свойствами по сечению, следует применять достаточно большие вытяжки. Опыт показывает, что для большинства металлов при прессовании из слитков вытяжка должна быть  $\geq 10-15$ , а при прессовании из заготовки  $\geq 5$ .

При чрезмерно малых обжатиях деформации локализуются у поверхности прутка, и поэтому в приведенном на рис. 129 случае механические испытания на растяжение образцов,

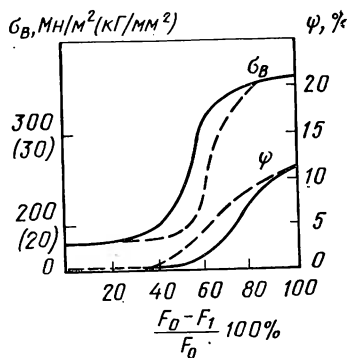


Рис. 129. Изменение предела прочности и относительного сужения шейки  $\psi$  при растяжении образцов из сплава с 90% марганца и 10% алюминия после прессования с разными обжатиями: — пробы поверхности — — — пробы из середины прутка

вырезанных из прутка, не дали различия в механических свойствах при малых обжатиях. Однако вредное влияние малых обжатий проявляется в появлении у поверхности изделий «ободка» крупнокристаллической структуры после их медленного охлаждения или отжига: интенсивная деформация у поверхности изделий приводит здесь к дроблению кристаллитов и последующему их росту при отжиге. Вред чрезмерно малых обжатий сказывается еще и в том, что при низких температурах в изделии возникают остаточные растягивающие напряжения на периферии прутка, которые могут привести здесь к появлению трещин.

Трение прессуемого металла о стенки контейнера. В предыдущем пункте было показано, что силы трения являются решающим фактором, определяющим характер течения, а следовательно, и напряженное состояние при прессовании. Установлено, что с ростом коэффициента трения величина упругих зон у прессшайбы и в углах контейнера со стороны, противоположной прессшайбе, возрастает, что способствует развитию турбулентного течения. Смазка на боковой поверхности прессуемой заготовки способствует ламинарному течению. Смазка контейнера особенно заметно влияет на характер течения и усилие прессования (рис. 127), хотя введение смазки в полость контейнера связано с техническими трудностями. Установлено также, что применение



смазки снижает среднее давление на прессшайбу (давление течения) при выдавливании сплавов алюминия, меди, цинка в 2,5—5 раз. Кроме этого, смазка замедляет охлаждение поверхности и уменьшает износ инструмента.

Смазка прессшайбы на характер течения влияет отрицательно. В этом случае течение по поверхности прессшайбы облегчается и увеличивается прессутяжина. Поэтому торцовую поверхность прессшайбы часто делают рифленой. Жидкой составляющей смазки обычно является машинное масло, а наполнителем — графит. При прессовании тугоплавких металлов в качестве смазочных материалов используют стекло и даже тонкие прокладки из пластичных металлов — алюминия и меди. Для расчета усилия прессования рекомендуются следующие значения коэффициента трения [6].

Медь . . . . .	0,25	Алюминий . . . . .	0,28
Латунь Л68 . . . . .	0,18	Алюминиевые сплавы	0,35
Л62 (до 725°C) . . . . .	0,20	Магний . . . . .	0,25
Л62 (св. 725°C) . . . . .	0,27	Магниеые сплавы . . . . .	0,28
ЛС59 (до 700°C) . . . . .	0,25	Титан и его сплавы	
		(>1000°C) . . . . .	0,30
ЛС59 (>700°C) . . . . .	0,27	То же (900°C) . . . . .	0,40

Для повышения равномерности течения предпринимаются попытки осуществлять прессование вовсе без контейнера, подавая заготовку в матрицу с помощью захватов. Иногда производят процесс прессования с так называемой «рубашкой» (рис. 121, д). При этом диаметр прессшайбы делают на 2—3 мм меньше диаметра полости контейнера. Металл срезается и выдавливается прессшайбой, а «рубашка» в виде тонкостенной оболочки остается в контейнере. Все поверхностные дефекты слитка или заготовки остаются в рубашке, которая удаляется с прессостатком, величина которого в данном случае составляет 8—10%.

С величиной коэффициента и сил трения при прямом методе прессования связано влияние длины слитка на усилие прессования.

Связь между усилием прессования и длиной слитка, отнесенной к его диаметру, характеризуется кривой, имеющей минимум. Такая зависимость обусловлена действием двух противоположных факторов: с уменьшением длины уменьшается поверхность трения и, следовательно, усилие прессования, в то же время с уменьшением длины слитка схема всестороннего сжатия в полости контейнера оказывается все более выраженной, что приводит к росту усилия прессования. При обратном методе прессования усилие прессования от длины слитка не зависит. Опыты показывают, что увеличение длины слитка не изменяет характер течения. Поэтому целесообразно производить прессование слитков максимальной длины, если только позволяет мощность прессы. При прессовании прямым методом длина слитка равна 1,5—3 и реже 5 диаметрам контейнера.

**Температура.** При горячем прессовании со смазкой с повышением температуры уменьшается коэффициент трения. Это спо-

собствует развитию ламинарного течения и благоприятно сказывается на качестве изделий, если не допускать перегрева металла. В связи с этим при прессовании часто используют подогрев контейнера. Подогрев контейнера оказывает благоприятное влияние непосредственно, поскольку при отсутствии значительного перепада температур по сечению у внутренних слоев уменьшается тенденция к опережению наружных слоев. В связи с этим уменьшается величина прессуемости. С ростом температуры значительно уменьшается усилие прессования. Это связано с уменьшением коэффициента трения, степени неравномерности деформации и предела текучести.

Характер течения металла существенно зависит от его теплопроводности и теплоемкости. Известно, что из всех промышленных металлов медь обладает наиболее высокой теплопроводностью. Несмотря на потери тепла через стенки контейнера поверхностными слоями металла, высокая теплопроводность обеспечивает быстрое выравнивание температуры по сечению медного слитка. Поэтому при прессовании меди, как правило, наблюдается относительно равномерное истечение. Так же влияет и теплоемкость: с ее повышением увеличивается тепловая инерция, а следовательно, уменьшаются температурные перепады и истечение становится равномернее.

**Скорость деформации.** При прессовании различают скорость прессования  $v_{пр}$  и скорость истечения  $v_{ист}$ . Скорость прессования равна скорости движения пуансона и прессшайбы. Скорость истечения равна скорости движения изделия, выходящего из матрицы. Из условия постоянства объема следует, что отношение скорости прессования к скорости истечения равно вытяжке:

$$\frac{v_{ист}}{v_{пр}} = \lambda.$$

Верхний предел скорости истечения при прессовании зависит от прочностных свойств металла, а также от образования специфического дефекта — «елочки». В связи с этим скорость истечения даже для одних и тех же металлов изменится в широких пределах. В настоящее время диапазон скоростей прессования цветных металлов находится в пределах от  $2 \cdot 10^{-4}$  до  $5 \cdot 10^{-1}$  м/сек, а для скоростей истечения — от  $7 \cdot 10^{-4}$  до 25 м/сек. Скорость деформации влияет на величину коэффициента трения и температуру при прессовании. Поэтому от скорости зависит характер течения металла и механические свойства изделия после прессования. С ростом скорости течение становится более равномерным. Более равномерными по длине оказываются и механические свойства изделий, поскольку уменьшается разность температур по длине.

**Прессовый инструмент.** В практике используют три типа матриц: конические, с одним и двумя рабочими конусами, плоские (цилиндрические) и радиальные. Конические матрицы с одним конусом (рис. 130, а) широко используются в промышленности [6]. При прочих равных условиях усилие прессования через

коническую матрицу меньше, чем в других случаях. С ростом угла  $\alpha$  образующей конической матрицы уменьшается поверхность трения и поэтому усилие прессования должно уменьшаться. Вместе с тем с ростом угла  $\alpha$  увеличивается степень неравномерности деформации при прессовании, растут дополнительные сдвиги и по-

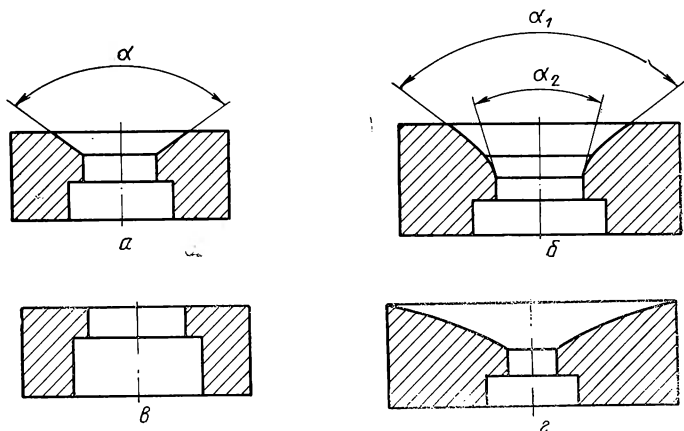


Рис. 130. Матрицы с одним конусом (а), с двумя конусами (б), плоская (в), радиальная (г)

этому усилие прессования должно повышаться. Таким образом, существует оптимальный угол образующей рабочего конуса матрицы. Установлено, что оптимальный угол лежит в пределах  $\alpha = 60-100^\circ$ . Обычно придерживаются больших значений этого угла с тем, чтобы обеспечить наличие мертвых зон и этим предотвратить попадание в изделие наружных загрязненных частей слитка. Для этого иногда применяют матрицы с двойным конусом (рис. 130). Первый конус с  $\alpha_1 = 100^\circ$  контактирует с мертвой зоной и служит для удержания поверхностных дефектов, а второй конус с  $\alpha_2 = 80^\circ$ , величина которого лежит в пределах оптимальных углов, сочетается с калибрующим очком матрицы. Длину калибрующего пояaska берут обычно равной 5—8 мм, но при тяжело прессуемых сплавах и крупных изделиях ее доводят до 25 мм с тем, чтобы увеличить стойкость матрицы, хотя с ростом длины пояaska и возрастает усилие прессования. Поэтому обычно воздерживаются от применения плоских матриц (рис. 130, в).

Однако при наличии плоских матриц образуются большие мертвые зоны, задерживающие выход дефектов в изделие. Поэтому в тех случаях, когда требуется получить очень чистую поверхность изделия, применяют плоскую матрицу.

Усилие при прессовании через радиальную матрицу (рис. 130, г) примерно на 30% больше, чем при прессовании через коническую. Несмотря на этот недостаток радиальные матрицы все же иногда применяют при прессовании материалов, обладающих способностью налипания на инструмент: алюминия, магния и т. п.

Чем больше периметр профиля при данной его площади, тем больше усилие прессования, так как возрастают сопротивления трения. Вместе с тем с ростом периметра по отношению к площади прессуемого профиля возрастает сопротивление деформации ввиду роста скорости охлаждения прессуемого металла. При прессовании изделий со сложной конфигурацией поперечного сечения необходимо обеспечить одинаковую вытяжку всех его элементов. Это достигается изменением длины калибрующего пояска и изменением радиуса сечения между рабочей и калибрующей частями матрицы. Чем тоньше стенка той или иной части профиля, тем больше радиус закругления и, следовательно, меньше длина пояска. Исследованиями установлено, что скорости истечения достаточно выравниваются, если на всех участках профиля отношения контактных поверхностей пояска к соответствующим частям сечения профиля равны между собой [6].

Прессовый инструмент работает в тяжелых условиях потому, что в случае горячего прессования 92—94% всей работы деформации превращается в тепло, вызывая повышение температуры в очаге деформации. Поэтому сделаны попытки использовать водоохлаждаемые матрицы. Опыты показали, что во избежание чрезмерного роста усилия прессования подачу воды в матрицу следует осуществлять по истечении из очага матрицы участка изделия длиной 0,5—1,2 м. По окончании операции прессования охлаждение отключается.

В случае прессования мелких изделий используют матрицы с несколькими каналами. Число каналов иногда доходит до 30, и они располагаются на равных расстояниях по концентрическим окружностям. При этом вследствие задержки в истечении поверхностных частей слитка прутки из каналов внешней концентрической окружности выходят короче прутков из каналов на внутренней окружности. При прессовании в многоканальную матрицу деформация более равномерна, прессуяжина меньше, чем при прессовании в одноканальную матрицу.

При прессовании труб используют полые слитки и пуансоны с иглами. Игла всегда расположена в центральной части слитка, и это способствует более равномерному течению, чем при прессовании прутков. Совмещение операций прошивки центрального отверстия и выдавливания трубы осуществляют только на пластичных сплавах алюминия, магния и меди. При изготовлении труб из тугоплавких металлов эти операции осуществляют отдельно на разных прессах или центральное отверстие предварительно высверливают.

Опыты показывают, что, применяя вогнутую или выпуклую поверхность прессшайбы, можно несколько уменьшить или увеличить прессуяжину по сравнению со случаем, когда прессшайба плоская. Однако влияние формы прессшайбы на характер течения сказывается мало. Поэтому практическое применение получили только плоские прессшайбы.

Вакуум и защитные среды. В последние годы все в

больших масштабах осуществляется прессование тугоплавких металлов — молибдена, ниобия, вольфрама, тантала и их сплавов, температура плавления которых равна 2400—3400°C. Эти сплавы окисляются и насыщаются газами в процессе обработки, что приводит к снижению их пластичности вследствие образования хрупких соединений.

Например, ниобий начинает окисляться уже при нагреве до 250°C. Окислы ниобия обволакивают слиток твердой коркой. При повышенных температурах ниобий окисляется на большую глубину. Молибден начинает окисляться при 400°C, а образующаяся на его поверхности трехокись молибдена начинает испаряться при 500°C. При 1150°C упругость пара трехокси молибдена достигает атмосферного давления и при деформации молибдена на воздухе образуется облако желтовато-белого дыма. Понижение качества металла за счет насыщения газами, потеря металла в окислах, соображения техники безопасности требуют создания условий для защиты тугоплавких металлов при нагреве и обработке давлением. На практике применяют следующие способы защиты: 1) нагрев в инертной или восстановительной атмосфере, деформация на воздухе, охлаждение в инертной среде; 2) нагрев в расплаве стекла при температуре 1200—1500°C, при этом пленка стекла предохраняет от окисления при нагреве и переносе из ванны к прессу, однако в процессе прессования пленка разрушается; 3) нагрев в вакуумированных стальных и других оболочках; 4) нанесение эмали на заготовку в холодном состоянии и последующие нагрев и прессование; 5) нагрев, последующее прессование и охлаждение в условиях вакуума.

При этом вакуумированию подвергается только рабочая зона. Глубина вакуума достигает  $1,33 \cdot 10^{-6}$  н/м<sup>2</sup> ( $10^{-4}$  мм рт. ст.). При нагреве ниобия в аргоне до 1600°C и деформации на воздухе кислород проникает в ниобий на глубину до 3 мм. При этом содержание кислорода на поверхности увеличивается примерно в 3 раза: с 0,02 до 0,06%. При нагреве и деформации в вакууме насыщение кислородом отсутствует<sup>1</sup>. Опыты показывают, что пластичность металлов и сплавов после обработки в вакууме существенно — примерно в 2 раза — возрастает, а прочность несколько (на 10—15%) уменьшается.

#### 4. Краевая задача прессования

Опыты, результаты которых были изложены в пунктах 2 и 3, показывают, что в углах контейнера образуются недеформируемые — «мертвые» зоны. Границу *ab* этих зон в первом приближении будем считать продолжением образующей рабочего конуса матрицы (рис. 131, а). В связи с этим введено понятие о «естествен-

<sup>1</sup> Певзнер С. В., Корнеев Н. И., Скугарев И. Г. Прессование металлов в вакууме. В сб. «Технология прессового оборудования». Изд. ВИЛС, 1967, с. 145.

ном» конусе прессования, ограниченном углом  $\alpha/2$  и радиусами  $r$  и  $r_1$ . При этом отношение  $\frac{r}{r_1} = \frac{h}{h_1}$  выступает в качестве количественной меры деформации при прессовании. Таким образом, расчет напряжений прессования, если использовать гипотезу плоских сечений и полагать деформацию плоской, сводится к совместному решению системы уравнений (339). Это решение, как мы убедились, имеет следующий вид:

$$\sigma_p = \nu K \frac{1 + \delta}{\delta + n} \left( \frac{r}{\rho} \right)^n + c \rho^\delta. \quad (360)$$

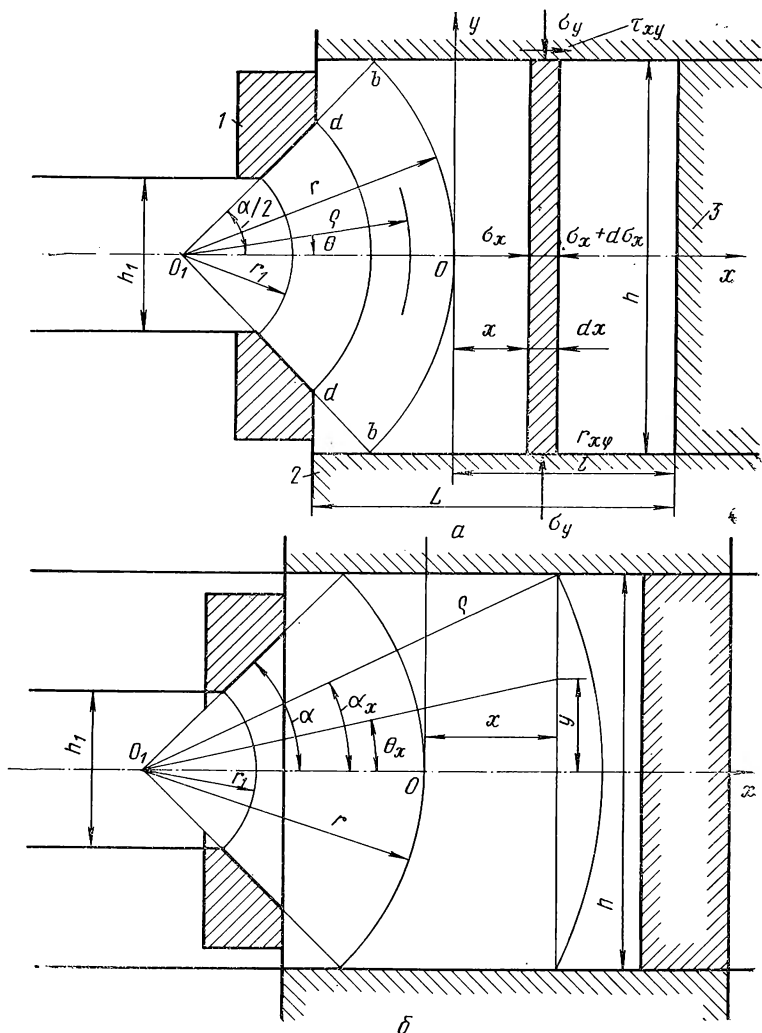


Рис. 131. Схемы к расчету напряжений при прессовании:  
 1 — матрица; 2 — контейнер; 3 — прессшайба

Константу  $c$  найдем из граничного условия: при  $\rho=r_1$  напряжение  $\sigma_\theta = -K$ , тогда из условия пластичности при  $\nu=+1$  имеем  $\sigma_\rho = 0$ , получим:

$$c = -\frac{K}{r_1^\delta} \frac{1+\delta}{\delta+n} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n.$$

Возвращаясь к уравнению (360), получим

$$\frac{\sigma_\rho}{K} = \frac{1+\delta}{\delta+n} \left[ \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^\delta \right]. \quad (361)$$

Используя второе и третье равенства из системы уравнений (339), будем иметь:

$$\frac{\sigma_\theta}{K} = \left[ \left(\frac{1+\delta}{\delta+n} - 1\right) \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \frac{1+\delta}{\delta+n} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^\delta \right]; \quad (362)$$

$$\frac{\tau_{\rho\theta}}{K} = \mu \left[ \left(\frac{1+\delta}{\delta+n} - 1\right) \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \frac{1+\delta}{\delta+n} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^\delta \right]. \quad (363)$$

Касательное напряжение на поверхности контакта не может превосходить половины истинного сопротивления деформации, с учетом упрочнения, поэтому всегда величина

$$\tau_{\rho\theta} \leq -\frac{K}{2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n. \quad (364)$$

Таким образом, на основании выражения (363) имеем

$$\mu \left[ \left(\frac{\delta+1}{\delta+n} - 1\right) \left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \frac{\delta+1}{\delta+n} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^\delta \right] \leq -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Отсюда после простых преобразований получим:

$$\frac{\rho}{r_1} \leq \left[ 1 - \left(\frac{2\mu-1}{2\mu}\right) \frac{\delta+n}{\delta+1} \right]^{\frac{1}{\delta+n}} \quad (365)$$

Это соотношение определяет величину координаты  $\rho$ , начиная с которой расчет касательного напряжения производят по (364).

Прессование металлов обычно производят в горячем состоянии. Поэтому можно упрочнение не учитывать, т. е. считать  $n=0$ . В таком случае из уравнений (361) и (362) получим:

$$\frac{\sigma_\rho}{K} = \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^\delta \right]; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^\delta \right] - 1. \quad (366)$$

$$\tau_{\rho\theta} = -\frac{K}{2}.$$

Касательное напряжение при  $n=0$  будет определяться равенствами

$$\frac{\tau_{\rho\theta}}{K} = +\mu \left\{ \frac{\delta+1}{\delta+n} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^\delta \right] - 1 \right\}; \quad \frac{\tau_{\rho\theta}}{K} = -\frac{1}{2}. \quad (367)$$

Условие, определяющее границу использования того или другого из этих равенств, получим из соотношения (365) в виде:

$$\frac{\rho}{r_1} \leq \left[ 1 - \frac{2\mu - 1}{2\mu} \frac{\delta}{\delta + 1} \right]^{\frac{1}{\delta}} \quad (368)$$

Опыты показывают, что ламинарное течение сменяется турбулентным, если силы трения приобретают значительную величину (см. пункт 2). Можно допустить, что турбулентное течение начинается тогда, когда коэффициент трения на поверхности контакта металла с матрицей или в естественном конусе достигает своего максимального значения  $\mu = 1/2$ , а касательное напряжение  $\tau_{\rho\theta} = -\frac{K}{2}$ .

Действительно, при этом перемещения металла у контактной поверхности будут затруднены, что приведет к перемещению с большими скоростями тех объемов металла, которые расположены ближе к оси прессуемой заготовки. При этом, используя равенства (365) и (368), имеем  $\rho/r_1 = 1$ : Иными словами, турбулентное течение охватывает весь объем металла уже в самом начале прессования так, что ламинарная стадия течения полностью исключается. Наоборот, с уменьшением  $\mu$ , как это следует из формул (365) и (368), область ламинарного течения расширяется, постепенно охватывая весь объем металла.

Можно принять, что, выходя из естественного конуса (в сечении, проходящем через точку  $O$  на рис. 131, а), металл попадает в полость цилиндрического контейнера. Из рис. 131, б следует, что в этом случае справедливы следующие геометрические соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= r + x; \quad r \approx \frac{h}{\alpha}; \quad r_1 = \frac{h_1}{\alpha}; \\ \frac{\rho}{r_1} &= \frac{r+x}{r_1} = \frac{r}{r_1} + \frac{x}{r_1} = \frac{h}{h_1} + \alpha \frac{x}{h_1}. \end{aligned} \right\} \quad (369)$$

Отношение  $\frac{h}{h_1} = \lambda$  представляет собой вытяжку при прессовании.

Отсюда  $h_1 = \frac{h}{\lambda}$ . Для удобства расчета координату  $x$  лучше отнести к длине  $l$  рабочей части контейнера (рис. 131, а).

Введем обозначение  $\eta = \frac{l}{h}$  (обычно  $\eta = 1,5-3$ ). В результате получим

$$\frac{\rho}{r_1} = \lambda \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right). \quad (370)$$



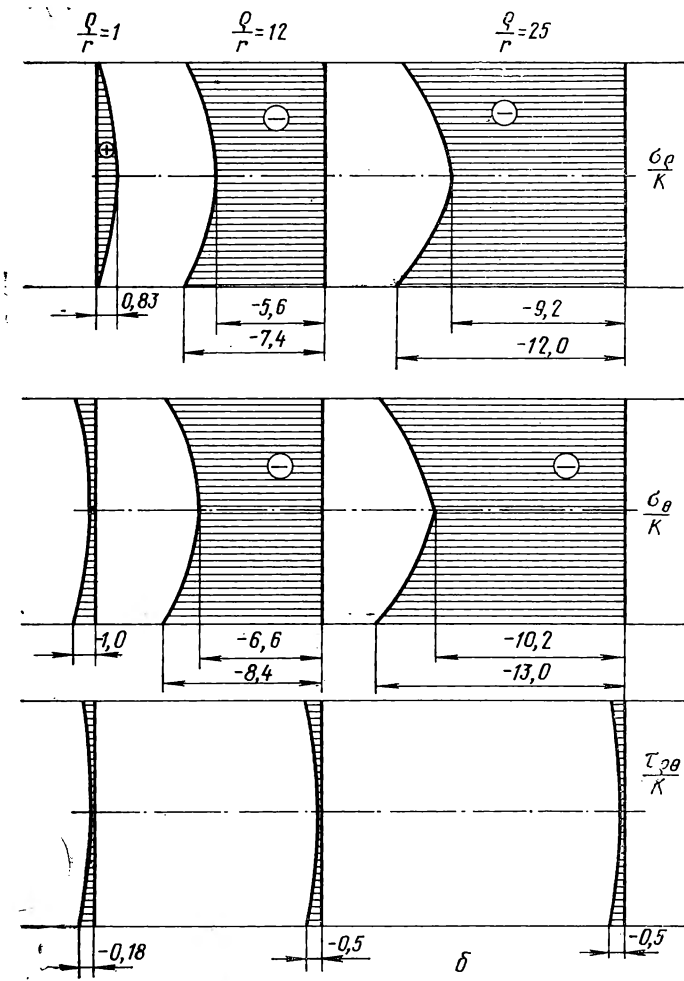
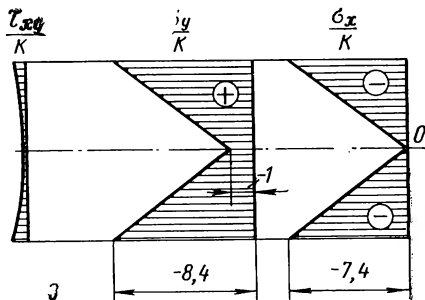


Рис. 132. Эпюры напряжений в матрице, в области естественного конуса и в полости контейнера при прямом прессовании:

$a$  — по длине;  $b$  — по высоте при ламинарном течении;  $c$  — по высоте при турбулентном течении в сечении  $\frac{r}{r_1} = 12$

$\alpha/2 = 0,707$  рад ( $45^\circ$ );  $\mu = 0,177$ ;  $\delta = \frac{r_1}{2\mu} = 1/2$



Таким образом, формулы (366) и (367) для расчета напряжений в матрице можно обобщить и для расчета напряжений в полости контейнера:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r}{K} = \frac{\sigma_x}{K} = \frac{\delta + 1}{\delta} \left[ 1 - \lambda^\delta \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right)^\delta \right]; \\ \frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{\sigma_y}{K} = \frac{\delta + 1}{\delta} \left[ 1 - \lambda^\delta \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right)^\delta \right] - 1; \\ \frac{\tau_{r\theta}}{K} = \frac{\tau_{xy}}{K} = -\mu \left\{ \frac{\delta + 1}{\delta} \left[ 1 - \lambda^\delta \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right)^\delta \right] - 1 \right\}; \\ \frac{\tau_{\rho\theta}}{K} = \frac{\tau_{xy}}{K} = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (371)$$

На рис. 132,  $a$  приведены построенные с использованием уравнений (366), (368), (371) эпюры напряжений в матрице, в области естественного конуса и в полости всего контейнера. Из равенств (371) вытекает, что первый член в правой их части выступает в качестве меры деформации при прессовании, а второй член учитывает влияние сил трения металла о стенки контейнера. В случае обратного метода прессования можно принять, что на участке  $0 \leq x \leq l$  перемещение металла относительно контактной поверхности отсутствует и, следовательно,  $x=0$ . Поэтому для прессования обратным методом из формул (371) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{K} = \frac{\delta + 1}{\delta} \left[ 1 - \lambda^\delta \right]; \quad \frac{\sigma_y}{K} = \frac{\delta + 1}{\delta} \left[ 1 - \lambda^\delta \right] - 1; \\ \frac{\tau_{xy}}{K} = -\mu \left\{ \frac{\delta + 1}{\delta} \left[ 1 - \lambda^\delta \right] - 1 \right\}; \quad \frac{\tau_{xy}}{K} = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (372)$$

Из анализа уравнений (372) следует, что при обратном истечении напряжения в полости контейнера во всех точках по его длине остаются постоянными, т. е. не зависят от координаты  $x$ . Напряжения в матрице при обратном истечении по ее длине переменны и рассчитываются по формулам (366) и (367).

## 5. Напряженное состояние при прессовании

Ввиду формальной аналогии между формулами (366) и (367) для прессования и формулами (345) для волочения мы можем не производя вычислений записать на основании равенств (355) следующие выражения, характеризующие напряженное состояние металла в матрице при прессовании,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r}{K} &= \left\{ \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta \right] - \ln \frac{r}{\rho} \right\} \varphi_2 + \ln \frac{r}{\rho}; \\ \frac{\sigma_\theta}{K} &= \left\{ \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta \right] - \ln \frac{r}{\rho} \right\} \varphi_2 + \ln \frac{r}{\rho} - 1; \\ \frac{\tau_{r\theta}}{K} &= -\mu \left\{ \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta \right] - 1 \right\} \varphi_1; \\ \frac{\tau_{r\theta}}{K} &= -\frac{1}{2} \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (373)$$

Здесь функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определяются уравнениями (353). Из рис. 131, б ясно, что для полости контейнера

$$\frac{r}{\rho} = \frac{r}{r+x} = \frac{1}{1 + \frac{x}{r}} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l}}.$$

Поэтому

$$\ln \frac{r}{\rho} = -\ln \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right). \quad (374)$$

Продолжая аналогию, мы можем записать для полости контейнера, принимая во внимание выражения (371) и (374):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{K} &= \left\{ \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \lambda^\delta \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right)^\delta \right] + \ln \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right) \right\} \times \\ &\times \varphi_{2x} - \ln \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right); \\ \frac{\sigma_y}{K} &= \left\{ \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \lambda^\delta \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right)^\delta \right] + \right. \\ &+ \left. \ln \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right) \right\} \varphi_{2x} - \ln \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right) - 1; \\ \frac{\tau_{xy}}{K} &= -\mu \left\{ \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \lambda^\delta \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right)^\delta \right] - 1 \right\} \varphi_{1x}; \\ \frac{\tau_{xy}}{K} &= -\frac{1}{2} \varphi_{1x}. \end{aligned} \right\} \quad (375)$$

В этих равенствах, по аналогии с равенствами (353):

$$\varphi_{1x} = \frac{\operatorname{sh} m \theta_x}{\operatorname{sh} \frac{m \alpha_x}{2}}; \quad \varphi_{2x} = \frac{\operatorname{ch} m \theta_x}{\operatorname{ch} \frac{m \alpha_x}{2}}. \quad (376)$$

Углы  $\alpha_x$  и  $\theta_x$  определяются на основании следующих соображений. Из рис. 131,б следует, что в полости контейнера на участке  $0 \leq x \leq l$  существуют следующие геометрические соотношения:

$$\frac{\alpha_x}{2} = \frac{h}{2(r+x)}; \quad \theta_x = \frac{y}{r+x}.$$

Принимая во внимание, что  $r = \frac{h}{\alpha}$ , получим:

$$\frac{\alpha_x}{2} = \frac{\alpha}{2 \left(1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l}\right)}; \quad \theta_x = \frac{\frac{\alpha}{\eta} \frac{y}{h}}{1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l}}. \quad (377)$$

На рис. 132,б приведены эпюры напряжений при прессовании, построенные с использованием формул (373). Напряженное состояние при прессовании характеризуется схемой всестороннего сжатия. Наличие такой схемы, как уже отмечалось, обуславливает возможность деформации металлических материалов, пластичность которых в условиях линейного напряженного состояния мала. Равенства (373) и (375) записаны в предположении, что неравномерность напряженного состояния и деформаций в полости контейнера не очень велика (см. рис. 132,б). Это соответствует случаю ламинарного течения. Пренебрегая логарифмическими членами в формулах (373) и (375), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_p}{K} &= \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta \right] \varphi_{2x}; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{\delta+1}{\delta} \times \\ &\times \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta \right] \varphi_{2x} - 1; \\ \frac{\tau_{p\theta}}{K} &= -\mu \left\{ \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta \right] - 1 \right\} \varphi_{1x}; \\ \frac{\tau_{p\theta}}{K} &= -\frac{1}{2} \varphi_{1x}. \end{aligned} \right\} \quad (378)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{K} &= \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \lambda^\delta \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right)^\delta \right] \varphi_{2x}; \\ \frac{\sigma_y}{K} &= \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \lambda^\delta \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right)^\delta \right] \varphi_{2x} - 1; \\ \frac{\tau_{xy}}{K} &= -\mu \left\{ \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \lambda^\delta \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right)^\delta \right] - 1 \right\} \varphi_{1x}; \\ \frac{\tau_{xy}}{K} &= -\frac{1}{2} \varphi_{1x}. \end{aligned} \right\} \quad (379)$$

Математически такое упрощение допустимо потому, что значение функции  $\varphi_{2x}$  в пределах изменения величины  $m\theta$  для условий прессования всегда близко к единице.

В случае турбулентного течения, возникающего при большом коэффициенте трения и на заключительном этапе прессования, следует ожидать возникновения иной схемы напряженного состояния, характеризующейся значительным изменением напряжений по объему прессуемого тела. Для описания такого состояния уместно воспользоваться условием минимума касательных напряжений на оси симметрии тела, т. е. принять, что  $dt_{r\theta}/d\theta=0$  при  $\theta=0$ .

Если использовать это условие, то мы получим в равенствах (181) соотношение между константами, содержащимися в функциях  $\varphi$ , в таком виде:  $A=B$ .

Проследив ход вычислений, легко установить, что в этом случае в равенствах (373) и (375) функции  $\varphi$  примут вид:

$$\varphi_{1x} = \frac{\text{ch } m\theta_x}{\text{ch } \frac{m\alpha_x}{2}}; \quad \varphi_{2x} = \frac{\text{sh } m\theta_x}{\text{sh } \frac{m\alpha_x}{2}}. \quad (380)$$

В сечении  $x=0$ , т. е. при  $\rho=r$  эпюры напряжений, построенные по формулам (378) и (379) (рис. 132, в), дадут нам убедительную картину напряженного состояния при турбулентном течении: в этом случае возникающие под действием внешних сил продольные напряжения в центральной зоне заготовки напротив матрицы значительно уменьшаются. В результате здесь облегчаются перемещения металла к матрице, чему способствуют поперечные напряжения, которые как бы выжимают металл в продольном направлении. Вместе с тем в периферийных частях, т. е. ближе к стенкам контейнера, металл находится в состоянии трехосного сжатия, что затрудняет его перемещения к матрице и вызывает возникновение турбулентного течения, описанного в пункте 2.

В заключение рассмотрим напряженное состояние при прессовании обратным методом. Опыты, результаты которых были приведены в пункте 2, свидетельствуют о том, что в этом случае деформации сосредоточиваются вблизи матрицы и что перемещения металла относительно поверхности контейнера имеют место лишь на небольшом участке также около матрицы. Если принять протяженность такого участка равным расстоянию между точками  $O$  и  $O_1$  (рис. 131) на оси контейнера, то в случае обратного течения расчет напряжений следует производить по формулам (373) или упрощенным формулам (378). Этим вносится предположение, что в объеме металла между плоскостью, проходящей через точку  $O$ , и прессшайбой имеется упругая зона, характеризующаяся однородным полем неравномерного всестороннего сжатия.

Поступая, как и в случае рассмотрения процесса волочения на основании первой из формул (375), получим следующие выражения для определения напряжения на прессшайбе:

$$\frac{p}{K} \approx \frac{\delta+1}{\delta} \left[ 1 - \lambda^{\delta} \left( 1 + \frac{\alpha}{\eta} \frac{x}{l} \right)^{\delta} \right]. \quad (381)$$

При вычислении среднего контактного напряжения на прессшайбе для случая прессования обратным методом в формуле (381) следует принять  $x=0$ . На рис. 125,б приведена кривая, характеризующая зависимость среднего контактного напряжения на прессшайбе от перемещения пуансона, построенная по зависимости (381). Результаты расчета вполне соответствуют кривым, полученным из опытов (см. пункт 2), и показывают преимущества обратного метода прессования в энергетическом отношении по сравнению с прямым.

## 6. Гидростатическое и газовое прессование

Гидростатическое прессование еще не имеет широкого применения в промышленности, но, несомненно, является перспективным технологическим процессом. Отметим его основные особенности.

При прессовании жестким пуансоном смазка, нанесенная на боковую поверхность и задний торец заготовки, оказывается в замкнутом объеме. В процессе прессования смазка сжимается, что приводит к росту давления. Если это давление станет равным давлению истечения прежде, чем объем смазки уменьшится настолько, что пуансон коснется заготовки, то заготовка не будет соприкасаться со стенками контейнера и пуансоном, а в очаге деформации при некоторых условиях возникает жидкостное трение и создадутся условия, характерные для гидропрессования.

Процесс гидропрессования можно осуществить без применения пуансона (рис. 133,а). Таким образом, гидростатическое прессование это — процесс выдавливания металла из контейнера, при котором вне очага деформации заготовка окружена средой, передающей на нее давление, а в очаге деформации между заготовкой и матрицей существует жидкостное трение. Давление при гидропрессования достигает  $3000 \text{ Мн/м}^2$  ( $30\,000 \text{ кг/см}^2$ ).

Форма и размеры заготовки в этом случае не определены же-

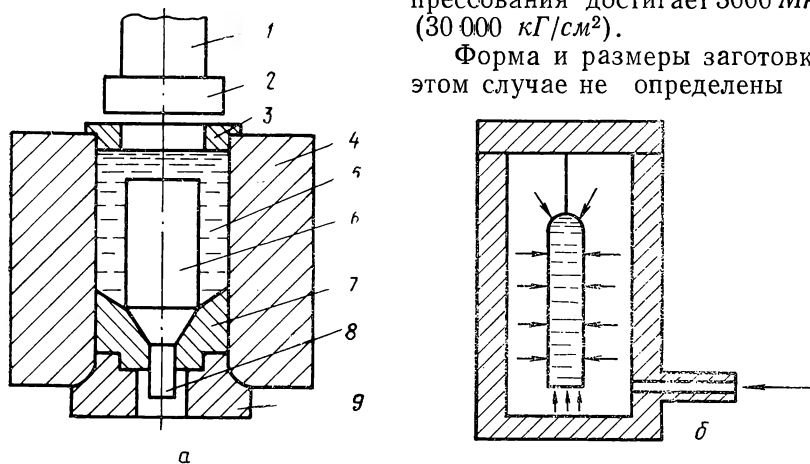


Рис. 133. Схема гидростатического прессования компактных тел (а) и пористых (б):

1 — пуансон; 2 — прессшайба; 3 — уплотнительное кольцо пуансона; 4 — контейнер; 5 — рабочая жидкость; 6 — заготовка; 7 — матрица; 8 — уплотнительное кольцо матрицы; 9 — опорная втулка матрицы

стко с формой и размерами полости контейнера. Поэтому маневренность в процессе гидропрессования гораздо шире, чем при обычном прессовании. Кроме того, деформация контейнера, пуансона и матрицы не влияет на процесс. Металл находится под высоким гидростатическим давлением, что значительно повышает его пластичность. Вместе с тем на большей части поверхности очага деформации существует жидкостное трение, что обеспечивает наибольшую равномерность распределения деформации по сечению. Это позволяет обрабатывать давлением наиболее труднодеформируемые материалы. Гидропрессование дает возможность легко осуществлять процесс истечения с противодавлением, что предотвращает появление трещин на изделии в момент выхода из матрицы.

При наличии обычного для практики холодного прессования относительного радиального зазора между заготовкой и контейнером 2% и давлении  $2000 \text{ Мн/м}^2$  ( $200 \text{ кг/мм}^2$ ) величина осадки заготовки равна 6,5%. Следовательно, при прессовании пуансоном ресурс пластичности хрупких металлов может быть использован уже на стадии распрессовки. При гидропрессовании операция распрессовки отсутствует, что устраняет одну из существенных причин разрушения хрупких материалов.

Уже до начала пластической деформации металл при гидропрессовании оказывается под действием высокого гидростатического давления. В этих условиях механические свойства металлов заметно изменяются: предел текучести возрастает, значительно интенсивнее развивается и процесс упрочнения.

При гидропрессовании усилие выдавливания на 10—15% меньше, чем при обычном прямом прессовании со смазкой, и на 20—30% меньше, чем при прессовании без смазки. Опыты показывают, что гидропрессование протекает в установившейся стадии при постоянном давлении на прессшайбу, что и понятно, если принять во внимание наличие жидкостного трения в этом процессе.

Описанный процесс гидропрессования осуществляется при комнатной температуре. Сочетание преимуществ воздействия высоких гидростатических давлений с преимуществами горячей деформации позволили бы намного расширить номенклатуру пластически деформируемых материалов из числа тех, которые пока такой деформации не поддаются. В связи с этим проводились опыты по гидропрессованию, в которых использовали расплавленный материал. Эти опыты не дали пока положительных результатов, но послужили основанием для попыток в процессе прессования нагретых заготовок использовать в качестве «жидкости» газ высокого давления, т. е. осуществить процесс газопрессования.

## **7. Операции листовой штамповки, связанные с прессованием**

Операции листовой штамповки разделяются на разделительные и формоизменяющие. Разделительные операции были охарактеризованы в главе VII при рассмотрении процесса разрушения.

Было отмечено, что для успешного осуществления этих операций необходима локализация деформаций в зоне действия инструмента.

Листовая штамповка, как правило, осуществляется с помощью матрицы и пуансона (рис. 134). Для того чтобы избежать локализации деформаций, которая в этом случае нежелательна, зазор между матрицей и пуансоном всегда оставляют несколько большим толщины заготовки, а радиусы закруглений рабочей части инструмента намного больше ее толщины. Чистовая формоизменяющая

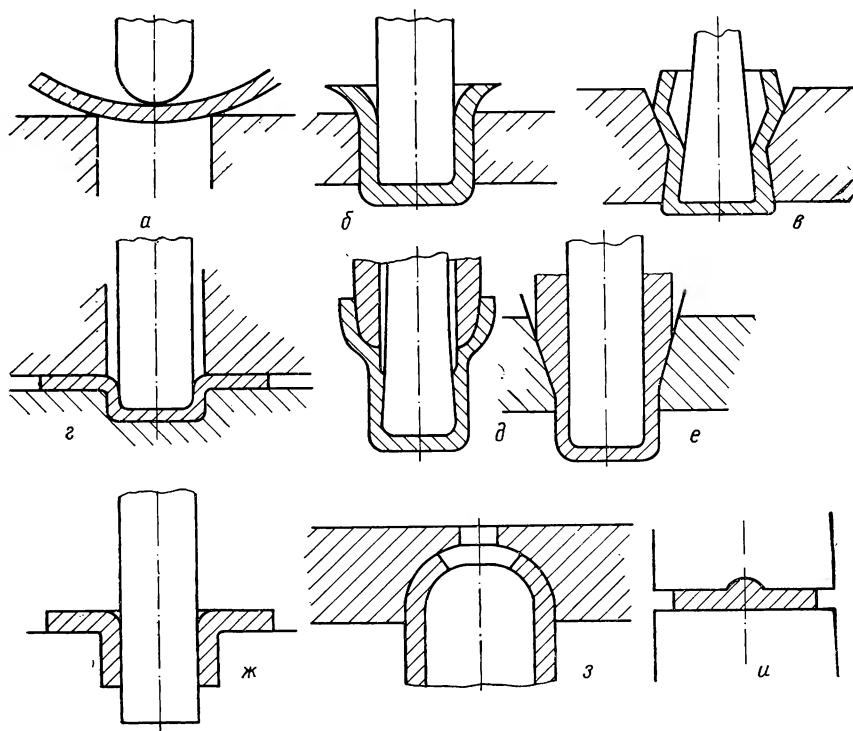


Рис. 134. Операции листовой штамповки, связанные с прессованием:

*а* — гибка; *б, в* — вытяжка без утонения стенки без прижима и с прижимом (*г, д*); *е* — вытяжка с утонением стенки; *ж* — отбортовка; *з* — обжим; *и* — формовка

штамповка представляет собой процесс получения полых изделий и может рассматриваться как разновидность прессования.

Листовой штамповкой изготавливают тонкостенные изделия из различных металлов и сплавов толщиной, не превышающей 0,05—4 мм, обычно без нагрева. В последние годы стали применять листовую штамповку для изготовления изделий из толстых листов и плит (днища котлов, реакторов и т. п.). При этом заготовки предварительно нагревают. Нагрев применяют и при штамповке малопластичных сплавов. К числу формоизменяющих операций листовой штамповки относятся следующие (рис. 134).



**Гибка** (рис. 134,а) — изменение кривизны срединной поверхности заготовки. Очаг деформации в зоне действия инструмента охватывает всю толщину заготовки так, что деформации постепенно уменьшаются до упругих в поперечном направлении. Эта операция была рассмотрена в гл. VI.

**Вытяжка без утонения стенки** (рис. 134, б—д) — превращение плоской заготовки в полое изделие (иногда называемое сверткой) или увеличение высоты полого полуфабриката протягиванием через матрицу с уменьшением поперечных размеров заготовки, но без принудительного ее утонения. Вытяжка без прижима (б, в) производится при малой ширине фланца, т. е. при малой разнице между диаметром заготовки и диаметром матрицы. В противном случае осуществляется вытяжка с прижимом (г, д).

**Вытяжка с утонением стенки** (рис. 134, е) — уменьшение высоты полого полуфабриката за счет уменьшения толщины его стенки.

**Отбортовка** (рис. 134, ж) — образование горловин вдавливанием в матрицу части заготовки с одновременным увеличением периметра предварительно пробитого в заготовке отверстия.

**Обжим** (рис. 134, з) — уменьшение поперечного сечения краевой части полого полуфабриката заталкиванием его в сужающуюся полость матрицы.

**Формовка** (рис. 134, и) — образование местных выпуклостей за счет уменьшения толщины заготовки при неизменных ее наружных размерах.

**Раздача** — протягивание пуансона в полую цилиндрическую заготовку таким образом, что ее поперечные размеры увеличиваются. Эта операция была рассмотрена в гл. IX.

При расчете напряжений и деформаций в операциях листовой штамповки рассматривают одномерную задачу. Такие расчеты можно найти в работах [7, 8]. Некоторые примеры приведены в задачнике по данному курсу [11].

## 8. Особенности прессования металлических порошков

Основными технологическими операциями порошковой металлургии являются следующие: приготовление порошков, получение порошковой шихты, прессование из шихты заготовок, спекание для придания прочности и необходимых физико-химических свойств изделиям и некоторые виды дополнительной обработки (калибровка, цементация, азотирование, закалка, пропитка и др.). Технология производства изделий из металлических порошков подобна технологии керамического производства. Отсюда появился термин «производство металлокерамики». Методами порошковой металлургии можно получать изделия почти из всех известных металлов и сплавов с большим технико-экономическим эффектом.

Важной особенностью является получение металлических изделий с особыми, не встречающимися в природе свойствами: пори-

стых (с объемом пор до 50%), так называемых «псевдосплавов» — неравновесных систем, которые не могут быть получены другими известными в металлургии способами, комбинаций металлов с неметаллами. Особое развитие порошковая металлургия получила во второй половине текущего столетия при производстве изделий из тугоплавких металлов.

В зависимости от метода изготовления частицы металлического порошка могут иметь размеры от долей микрона до долей миллиметра. Поэтому в  $1 \text{ см}^3$  содержится от нескольких миллионов до нескольких тысяч частиц, а их удельная поверхность — от долей квадратного метра до десятков квадратных метров на один грамм порошка.

Форма частиц зависит от способа изготовления и может быть сферической, каплеобразной, губчатой, тарельчатой, дендритной осколочной, волокнистой, лепестковой и представлять комбинацию этих форм в единице объема.

Технологические свойства порошков характеризуются рядом величин, а именно:

**Насыпная масса** — масса единицы объема свободно насыпанного порошка.

**Масса утряски** — определяется после утряски определенной навески до определенного объема. Масса утряски на 20—50% больше насыпной массы, а объем соответственно меньше.

**Пористость** — определяется отношением объема пор к объему свободно насыпанного порошка

$$P_0 = \frac{V_{\text{пор}}}{V_{\text{нас}}}. \quad (382)$$

Объем пор представляет собой разность между объемом свободно насыпанного порошка и объемом компактного металла:

$$V_{\text{пор}} = V_{\text{нас}} - V_{\text{м}}.$$

Таким образом, пористость выражается как

$$P_0 = \frac{V_{\text{нас}} - V_{\text{м}}}{V_{\text{пор}}} = 1 - \frac{V_{\text{м}}}{V_{\text{нас}}}.$$

Обозначая плотность порошка и металла  $\rho_{\text{нас}}$  и  $\rho_{\text{м}}$ , получим их веса:  $P = V_{\text{нас}}\rho_{\text{нас}}$ ;  $P = V_{\text{м}}\rho_{\text{м}}$ .

$$\text{Отсюда } P_0 = 1 - \frac{\rho_{\text{нас}}}{\rho_{\text{м}}}. \quad (383)$$

Введем понятие об относительной плотности как отношении объема металла к объему свободно насыпанного порошка:

$$\theta = \frac{V_{\text{м}}}{V_{\text{нас}}} = \frac{\rho_{\text{нас}}}{\rho_{\text{м}}}. \quad (384)$$

Последние два соотношения можно обобщить на порошки и изделия любой плотности:

$$П = 1 - \frac{\rho}{\rho_m}; \quad \theta = \frac{\rho}{\rho_m}.$$

Пористость и относительная плотность связаны соотношением:  
 $П + \theta = 1.$

Прессование металлических порошков включает в себя следующие операции: приготовление шихты из порошков соответствующего состава; дозировка и засыпка шихты в прессформы; прессование и извлечение брикета; спекание.

На рис. 135,а приведена схема одностороннего прессования. В процессе прессования порошка с увеличением давления его плотность возрастает. Процесс роста плотности состоит по существу из

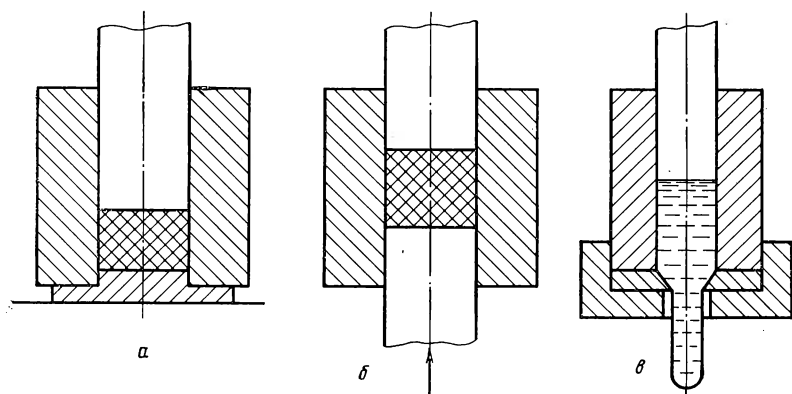


Рис. 135. Схема прессования металлических порошков:  
 а — одностороннее; б — двустороннее; в — в открытую матрицу

трех этапов. На первом этапе происходит взаимное перемещение частиц и заполнение пор. На втором этапе наблюдается разрушение «мостиков» и «арок», образуемых частицами порошка в процессе их взаимодействия, проникновение частиц в мелкие поры, перемещение частиц, неблагоприятно расположенных по направлению к действию сил, частичное «сдираание» окисных пленок. На третьем этапе осуществляется пластическая деформация частиц и разрушение некоторых из них, а также почти полное удаление окисных пленок и появление сил межзатомного взаимодействия. Резкой границы между перечисленными тремя стадиями процесса прессования порошков, по-видимому, не существует. Чем пластичнее материалы, тем раньше начинается уплотнение за счет деформации частиц и тем меньшее их число подвергается разрушению. Установлено также, что с уменьшением скорости прессования плотность брикетов возрастает.

Крупным недостатком одностороннего прессования в закрытую матрицу является значительная неравномерность плотности по высоте и поперечному сечению брикета, возникающая за счет торможения частиц при перемещении их относительно стенок матрицы под действием сил трения. По мере удаления от пуансона и от стенок матрицы плотность прессуемого брикета уменьшается, особенно по его высоте. Этот недостаток частично можно устранить, если применить двустороннее прессование (рис. 135, б). Однако при изготовлении достаточно высоких брикетов разность в величине плотности по объему остается значительной. Существенное уменьшение неравномерности плотности по длине можно получить при прессовании в открытую матрицу (рис. 135, в), т. е. используя известные методы прямого или обратного прессования. Такое прессование в порошковой металлургии получило наименование «мундштучного». При этом в порошковую шихту добавляют около 10% так называемого пластификатора (парафин, крахмал, декстрин и т. п.), наличие которого способствует сцеплению частиц и предохраняет изделие от разрушения после выхода из матрицы. В процессе последующего спекания пластификатор переходит в газообразное состояние и удаляется из отпрессованного изделия. Установлено, что при прессовании порошков минимальному усилию прессования соответствует угол конуса матрицы равный примерно  $\pi/4$ .

Оптимальные скорости истечения из матрицы при мундштучном прессовании невелики и равны 5—10 мм/сек. При увеличении скоростей пористость изделия по сечению получается неравномерной, что приводит к неравномерной усадке и короблению при спекании.

Отмеченные методы прессования приемлемы для получения изделий сравнительно малого веса и небольших размеров поперечного сечения. В таких изделиях допустимо некоторое колебание плотности. Гидростатическое прессование (рис. 133, б) позволяет получить заготовки с равномерной объемной плотностью, а размеры заготовки при этом могут достигать значительной величины (диаметр до 600 мм, высота до 1200 мм). При гидростатическом прессовании порошковая шихта помещается в эластичную (резиную или пластмассовую) оболочку с толщиной стенки 0,1—0,2 мм и подвергается всестороннему сжатию с помощью жидкости (воды, масла). Перед прессованием оболочка вводится в стальную гильзу. Давление жидкости создается с помощью насоса высокого давления или за счет взрыва специального заряда в жидкости. В последнее время в качестве среды, создающей давление, успешно применяют сжатые инертные газы. Недостатком такого метода является трудность в получении заданных размеров и хорошей поверхности изделий, что вынуждает применять последующую механическую обработку прессованной заготовки.

Для изготовления крупных изделий с равномерной плотностью перспективным является виброуплотнение на специальных вибрационных стендах. Опорные плиты стендов имеют частоту колебаний, измеряемую несколькими десятками герц. Специальная фор-

ма заполняется порошковой шихтой и помещается на опорную плиту. Исследования В. М. Яма<sup>1</sup> и др. показали, что в процессе колебаний форма большую часть времени «парит» в воздухе, не прикасаясь с опорными плитами. В результате частицы наиболее плотно упаковываются. Этому способствует внешняя сила, прилагаемая через верхнюю плиту от специального прижима и осуществляющая прессование брикета в своеобразных условиях.

По окончании прессования за счет упругого последействия происходит изменение размеров полученного брикета. «Рост» или «усадка» продолжается длительное время, в течение которого размеры брикетов уменьшаются по экспоненциальному закону. Обычно изменение размеров брикета по высоте не превышает 5—6%, а по поперечному сечению 2—3%. Иногда явление упругого последействия сопровождается возникновением трещин. Замечено, что факторы, увеличивающие прочность брикетов, уменьшают упругое последействие, а также что упругое последействие уменьшается с ростом пластичности частиц порошка. В процессе спекания, следующим за прессованием, происходит сцепление частиц порошка, изменяется форма пор, которая приближается к сферической. Одновременно происходит «усадка» или «рост» изделия, осуществляются десорбция газов, снятие остаточных напряжений, образование твердых растворов или химических соединений, если это обусловлено химическим составом порошка и температурой спекания. С позиций термодинамики спекание — это процесс восстановления атомно-кристаллической структуры частиц и перемещения атомов в положения, в которых свободная энергия системы минимальна. Таким образом, в основе спекания лежит диффузия, осложняемая другими явлениями, подробно рассматриваемыми в работах, посвященных порошковой металлургии [9].

## 9. Расчет напряжений и деформаций при прессовании металлических порошков

Важнейшим параметром, характеризующим изделия, получаемые из металлических порошков, является пористость. Поэтому поискам закона уплотнения пористых тел посвящено довольно много исследований. Оригинальное решение задачи, обобщающее эти исследования, предложено Н. Н. Целесиным\*.

Металлические порошки обладают двумя важнейшими специальными свойствами: дискретностью и сжимаемостью. Представим  $N$  каких-то объектов. Пусть эти объекты обладают способностью исчезать, причем вероятность исчезновения любого объекта в интервале изменения давления  $dp$  есть  $\omega_1 dp$ . Допустим также, что имеется некий механизм, приводящий к появлению новых объек-

<sup>1</sup> Смирнов В. С., Ям В. М. Характер взаимодействия слоя сыпучего материала с элементами установки при вибрационном уплотнении. Физика и химия обработки металлов. 1971, № 1, с. 120.

\* Смирнов В. С., Целесин Н. Н. О формуле уплотнения пористых тел. Известия АН СССР, Металлы, 1962, № 2, с. 195.

тов этого рода. Такое появление может обуславливаться либо «рождением» от уже присутствующих объектов, либо возникновением новых объектов вместо исчезающих старых. Вероятность «рождения» нового объекта от существующего в интервале давлений  $dp$  обозначим через  $\omega_2 dp$ , а количество новоявленных объектов, которые появляются вместо «погибших», — через  $n$ .

Таким образом, в интервале изменения давлений  $dp$  имеем следующее:  $dN$  — изменение числа объектов;  $N\omega_1 dp$  — количество исчезнувших объектов;  $N_2\omega_2 dp$  — количество объектов, рожденных от существующих;  $N\omega_1 n dp$  — количество объектов, вновь появившихся за это время.

Подведем итог:

$$dN = N\omega_2 dp + N\omega_1 n dp - N\omega_1 dp$$

$$\text{или } dN = N[\omega_2 + \omega_1(n-1)] dp.$$

$$\text{Отсюда } N = N_0 e^{-[\omega_2 + \omega_1(n-1)] p}.$$

Число исчезающих объектов принимают пропорциональным общему числу объектов и вероятности исчезновения каждого из них.

В процессе уплотнения порошка исчезающими объектами являются поры, поэтому пористость изменяется следующим образом:

$$P = P_0 e^{-[\omega_2 + \omega_1(n-1)] p}.$$

Очевидно, что  $\omega_2 = 0$ , так как новые поры могут появляться только в результате дробления старых. Следовательно,

$$P = P_0 e^{-\omega_1(n-1) p}. \quad (385)$$

Величина  $n$  определяет количество пор, появившихся вместо исчезнувших в интервале давления  $dp$ .

Уравнение (385) подтверждается многочисленными экспериментами. Оно получено также теоретически рядом исследователей, которые использовали другие предпосылки [10].

Из равенства (383) следует, что важнейший параметр изделия, полученного порошка — пористость — определяется величиной давления  $p$  на единицу поверхности пуансона.

Для пористого тела в состоянии свободной насыпки, по В. В. Соколовскому<sup>1</sup>, основными уравнениями теории пластичности являются уравнения равновесия и закон, определяющий соотношение между напряжениями, соответствующий условию пластичности для компактного тела:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \sin \alpha; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \rho \cos \alpha; \quad \tau_n = \sigma_n \operatorname{tg} \rho + K. \quad (386)$$

Здесь  $\rho$  — угол трения между частицами;

$K$  — коэффициент сцепления;

$\alpha$  — угол наклона оси  $x$  к горизонту.

<sup>1</sup> Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Физматгиз, 1960. 243 с. с ил.

Распределение размеров формы металлических частиц как генеральной совокупности описывается законом нормального распределения Гаусса. Поэтому эквивалентный размер частиц порошка можно определить как среднеарифметическое всех размеров, составляющих генеральную совокупность. Если расположение частиц в пространстве равновероятно, то, даже если частицы имеют различные размеры и форму по различным направлениям, можно ожидать, что на единицу длины по любому направлению приходится примерно одинаковое количество частиц. С учетом этого факта С. Е. Виноградовым рассмотрен вопрос о возможности применения к дискретным телам методов решения задач упругости и пластичности, разработанных для сплошных тел<sup>1</sup>. Для этого необходимо иметь критерий, позволяющий оценивать приемлемость таких методов.

Если выделить из объема тела кубик со стороной  $l$ , то внутри его окажется некоторое количество частиц порошка. Принимая  $l$  достаточно большим, можно считать, что взятые случайным образом пробы будут мало отличаться друг от друга по весу. При уменьшении ребра кубика мы получим в пределе плотность равной плотности компактного материала (событие  $A$ ) или равной нулю (событие  $B$ ). Следовательно, дискретность среды будет проявляться при определенном отношении среднего размера частицы к рассматриваемому объему. Если некоторый характерный линейный параметр  $l$  велик по сравнению со средним размером частицы, то среду можно рассматривать как непрерывную. Те величины, которые мы в дальнейшем рассматриваем, претерпевают, с одной стороны, локальные изменения, зависящие от распределения частиц, а с другой — общие, которые мы находим из уравнений, и чем больше рассматриваемый участок, тем больше сглаживаются эти локальные влияния.

Средний размер частицы  $d$ , и куб со стороной  $l$  можно рассматривать состоящим из  $\left(\frac{l}{d}\right)^3$  элементарных ячеек, часть которых приходится на частички порошка, а часть — на поры. Согласно теореме Лапласа, при достаточно большом количестве измерений вероятность того, что отклонение от средней плотности не превысит  $\delta$ , определяется по формуле:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-t^2} dt,$$

где

$$\alpha_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{2npq}}.$$

<sup>1</sup> Смирнов В. С., Павлов Н. Н., Виноградов С. Е. Применение вариационного принципа Ланграфа к задачам обработки давлением металлических порошков. Труды ЛПИ им. М. И. Калинина. № 315. М., «Машиностроение», 1970, с. 10.

Здесь  $q$  — вероятность появления события  $A$ ;  
 $p$  — вероятность появления события  $B$ ;  
 $n$  — число испытаний, в данном случае число элементарных ячеек;  
 $m_i$  — частота появления события  $A$ .

В применении к рассматриваемому случаю — количество ячеек в кубике, заполненных веществом. Пусть  $\theta$  — вероятность появления события  $A$ , в данном случае относительная плотность. Тогда соответственно нижнее и верхнее отклонения от средней плотности будут равны:

$$m_1 = n\theta(1 + \delta); \quad m_2 = n\theta(1 - \delta).$$

Далее, пусть  $\Pi = 1 - \theta$  — вероятность появления события  $B$ , т. е. относительная пористость. Тогда

$$\alpha_1 = + \frac{n\theta\delta}{\sqrt{2n\theta\Pi}}; \quad \alpha_2 = - \frac{n\theta\delta}{\sqrt{2n\theta\Pi}}$$

$$\text{и } Q = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} [Q(\alpha_1) - Q(\alpha_2)] = Q \left( \frac{n\theta\delta}{\sqrt{2n\theta\Pi}} \right).$$

В теории вероятности события считаются очень редкими, если вероятность их появления  $\leq 0,01$ , чему соответствует значение  $\alpha = 1,83$ . Тогда вероятность отклонения большего  $\delta$  будет очень редким явлением. Поэтому можно написать:

$$\alpha = \frac{n\theta\delta}{\sqrt{2n\theta\Pi}} = 1,83.$$

$$\text{Отсюда } \delta = 2,63 \sqrt{\frac{\Pi}{n\theta}}.$$

И так как  $\Pi = 1 - \theta$  и  $n = \left(\frac{l}{d}\right)^3$ , то

$$\delta = 2,63 \sqrt{\frac{1-\theta}{\theta}} \left(\frac{d}{l}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (387)$$

По этой формуле можно оценить погрешность при решении задач теории упругости и пластичности, возникающую из-за дискретности среды при применении методов, разработанных для непрерывных сред.

В ряде работ показано, что для прессования материалов с незначительными потерями на боковое трение справедлива зависимость:

$$p \left( \frac{V_x}{V_s} \right)^n = C,$$

где  $p$  — давление прессования;  
 $V_x$  — текущий объем прессуемого порошка;



$V_s$  — объем порошка, при котором начинается пластическая деформация частиц.

При достижении объема, равного величине  $V_s$ , давление прессования достигает предела текучести, т. е.  $c = \sigma_s$ . При дальнейшем прессовании давление превышает значение  $\sigma_s$ .

При прессовании в закрытую матрицу изменяется только высота прессуемого ребра, т. е.  $\frac{V_x}{V_s} = \frac{h_x}{h_s}$ . Деля и умножая сочетанные высоты на начальную высоту прессуемого порошка  $h_0$ , имеем:

$$p \left( \frac{h_x}{h_0} \cdot \frac{h_0}{h_s} \right)^n = c \quad \text{или} \quad p = c \left( \frac{h_0}{h_x}, \frac{h_s}{h_0} \right)^n.$$

Обозначим  $\frac{h_0}{h_x} = e_{xx}$ ;  $\frac{h_0}{h_s} = e_s$ . Обобщая эти величины, запишем:  $e_{xx} = e_i$ ;  $p = \sigma_i$ .

Таким образом, мы пришли к выражению (42) из гл. III:

$$\sigma_i = \sigma_s \left( \frac{e_i}{e_s} \right)^n.$$

Итак, задачи теории пластичности для пористого тела сводится, с погрешностью  $\delta$ , определяемой равенством (387), к известной из гл. V системе уравнений

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad \sigma_i = \sigma_s \left( \frac{e_i}{e_s} \right)^n$$

и аналогичной ей системе в цилиндрических координатах. Поэтому все уравнения, полученные в пунктах 4 и 5, справедливы с погрешностью  $\delta$  и для расчета параметров процесса прессования металлических порошков.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перлин И. Л., Ерманок М. Э. Теория вольчения. М., «Металлургия», 1971. 448 с. с ил.
2. Северденко В. П., Жилкин В. П. Основы теории и технологии вольчения проволоки из титановых сплавов. Минск, «Наука и техника», 1970. 203 с. с ил.
3. Красильщиков Р. Б. Деформационный нагрев и производительность вольчительного оборудования. М., «Металлургия», 1970. 167 с. с ил.
4. Северденко В. П., Клубович В. В., Степаненко А. В. Прокатка и вольчение с ультразвуком. Минск, «Наука и техника», 1970. 261 с. с ил.
5. Перлин И. Л. Теория прессования металлов. М., «Металлургия», 1972. 344 с. с ил.
6. Жолобов В. В., Зверев Г. И. Прессование металлов. М., «Металлургия», 1971. 455 с. с ил.
7. Сторожев М. В., Попов Е. А. Теория обработки металлов давлением. М., «Машиностроение», 1971. 424 с. с ил.
8. Попов Е. А. Основы теории листовой штамповки. М., «Машиностроение», 1968. 284 с. с ил.
9. Вязников Н. Ф., Ермаков С. С. Металлокерамические материалы и изделия. М., «Машиностроение», 1967. 224 с. с ил.
10. Жданович Г. М. Теория прессования металлических порошков. М., «Металлургия», 1969. 262 с. с ил.

11. Смирнов В. С. Сборник задач по обработке металлов давлением» М., «Металлургия», 1973. 192 с. с ил.
12. Чижиков Ю. М. Теория подобия и моделирование процессов обработки металлов давлением. М., «Металлургия», 1970. 125 с. с ил.
13. Смирнов В. С., Григорьев А. К., Карачунский А. Д. и др. Метод подобия в теории прокатки. Л., «Наука», 1971. 178 с. с ил.
14. Целиков А. И., Гришков А. И. Теория прокатки. М., «Металлургия», 1970. 360 с. с ил.
15. Зайков М. А. Режимы деформации и усилия при горячей прокатке. Свердловск, М., «Металлургияиздат», 1960. 302 с. с ил.
16. Колмогоров В. Л. Напряжения, деформации, разрушение. М., «Металлургия», 1970. 230 с. с ил.
17. Тетерин П. К. Теория поперечно-винтовой прокатки. М., «Металлургия», 1971. 368 с. с ил.
18. Воронцов В. К., Полухин П. И. Фотопластичность. М., «Металлургия», 1969. 400 с. с ил.
19. Смирнов В. С. Теория прокатки. М., «Металлургия», 1967. 460 с. с ил.
20. Тарновский И. Я., Леванов Л. И., Поксваткин М. А. Контактные напряжения при пластической деформации. М., «Металлургия», 1966. 279 с. с ил.
21. Романовский В. П. Справочник по холодной штамповке. М., «Машиностроение», 1971. 788 с. с ил.

## Краевая задача плоской прокатки

### 1. Условия захвата

Под естественным условием захвата подразумевается такое, при котором в момент захвата скорость поступательного движения полосы на бесконечно малую величину меньше горизонтальной составляющей окружной скорости валков (совпадающий со скоростью полосы по направлению) и в пределе их можно считать равными. Схема сил, действующих со стороны валков на полосу в момент ее соприкосновения с валками, изображена на рис. 136, а. Предполагается, что диаметры и окружные скорости валков одинаковы. Захват будет осуществлен, если горизонтальные составляющие сил нормального давления  $P$  будут меньше или (в пределе) равны горизонтальным составляющим  $T_x$  сил трения:  $2P_x \leq 2T_x$ .

Запишем два простых неравенства:

$$P \sin \alpha \leq T \cos \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha \leq \mu_3;$$

$$P \sin \alpha \leq P \mu_3 \cos \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \beta_3,$$

где  $\mu_3$  и  $\beta_3$  — коэффициент трения скольжения между металлом и поверхностью валков при захвате и угол трения;

$\alpha$  — угол захвата.

Итак, условие естественного захвата выглядит следующим образом:

$$\alpha \leq \beta_3, \tag{388}$$

т. е. для осуществления захвата необходимо, чтобы угол захвата был меньше угла трения. Из рис. 136, а видно, что при таком соотношении существует горизонтальная сила  $R_x = T_x - P_x$ , с помощью которой и осуществляется захват.

После захвата металла передний конец полосы обжимается валками и выходит за пределы очага деформации, начинается процесс установившейся прокатки. При этом равнодействующая нормальных сил  $P$  приложена где-то в средней части дуги захвата

в точке, которой соответствует угол  $\delta$  (рис. 136, б). Введем в рассмотрение величину

$$\psi = \frac{\delta}{\alpha}, \quad (389)$$

которую назовем коэффициентом точки приложения равнодействующей нормального давления. Установлено, что точка приложения равнодействующей отстоит от оси валков немного дальше,

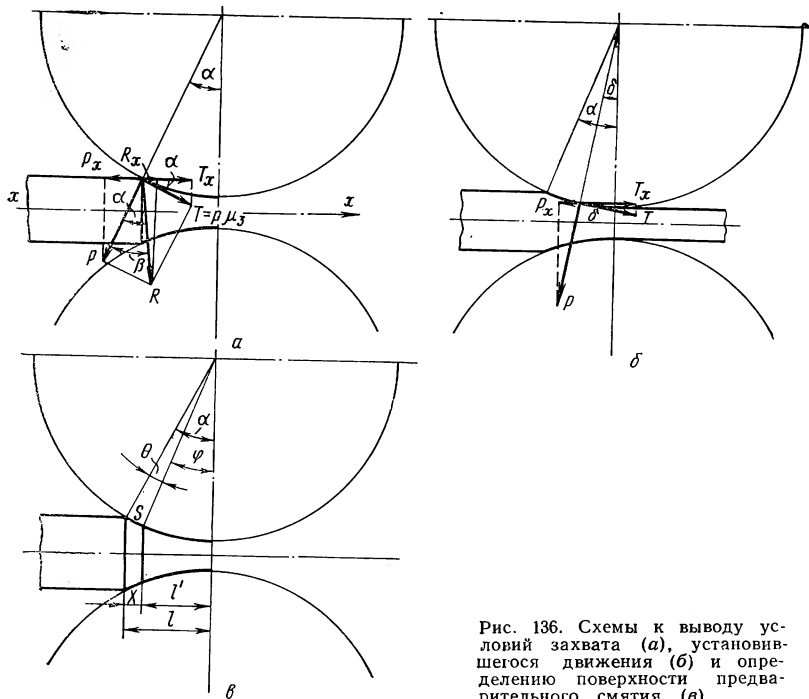


Рис. 136. Схемы к выводу условий захвата (а), установившегося движения (б) и определению поверхности предварительного смятия (в)

чем точка нейтрального сечения, в которой силы трения меняют знак и, следовательно, равны нулю. Различие в положении этих точек при обжатии в 30% не превышает 5—10%, а при обжатии 50% — 3—6%\*. Но этого оказывается достаточным, чтобы в точке приложения равнодействующей нормального давления существовали силы трения, совпадающие с направлением прокатки. Если в первом приближении принять, что между нормальными и касательными силами существует соотношение, определяемое законом сухого трения, то, аналогично предыдущему, получим следующее соотношение, характеризующее условие установившейся стадии прокатки:

$$\operatorname{tg} \delta \leq \mu; \quad \delta \leq \beta,$$

\* Королев А. А. Новые исследования деформации металла при прокатке. Труды ЦНИИТМАШ, вып. 53, Машгиз, 1953.

где  $\mu$  и  $\beta$  — коэффициент трения и угол трения при установившейся прокатке.

Если в первом приближении принять также, что точка приложения равнодействующей нормального давления приложена в середине угла захвата, то условие установившейся стадии прокатки будет иметь вид:

$$\alpha \leq 2\beta. \quad (390)$$

Поскольку  $\mu = \text{tg}\beta$ , то из соотношения (390) следует, что условия установившейся прокатки зависят от величины коэффициента трения, который подчиняется закономерностям, описанным в гл. 7, и, следовательно, изменяется с изменением условий прокатки.

Для определения коэффициентов трения при прокатке предложено большое число методов. Сравнение показало, что эти методы дают хорошую сходимость результатов, если отношение длины очага деформации к средней высоте его  $l/h \geq 4^*$ . Опытами установлено, что коэффициент трения в установившейся стадии прокатки меньше, чем при захвате. Несмотря на это, условия для осуществления установившейся стадии горячей прокатки обычно все же более благоприятны, чем для захвата.

При ударе полосы о валки происходит смятие горизонтальных кромок ее переднего конца. Как следует из рис. 136, в, горизонтальная проекция  $x$  поверхности предварительного смятия  $S$  может быть определена из следующих геометрических соотношений (рис. 136, в):

$$x = l - l' = \frac{1}{2} D \sin \alpha - \frac{1}{2} D \sin \varphi \approx \frac{1}{2} D (\alpha - \varphi) = \frac{1}{2} D \theta.$$

Вводя в рассмотрение среднюю скорость полосы на участке  $x$ , которому соответствует промежуток времени  $\Delta t$ , получим:

$$x = \frac{c_0}{2} \Delta t.$$

С использованием двух последних соотношений угол, соответствующий площадке смятия, можно найти из равенства:

$$\theta = \frac{c_0 \Delta t}{D}.$$

Таким образом, угол смятия прямо пропорционален скорости подачи полосы, промежутку времени, в течение которого происходит смятие кромок, и обратно пропорционален диаметру валков. Расчеты показывают, что при прокатке слитков крупных сечений угол смятия может достигать величин, лежащих в пределах от одной четверти до одной трети угла захвата. Отсюда следует, что повышение скорости подачи металла в валки может быть использовано в качестве фактора, увеличивающего угол захвата, а следовательно, и производительность прокатного стана за счет увеличе-

\* Теория прокатки. Под ред. А. П. Чекмарева М. Металлургиздат, 1962. 739 с. с ил.

ния величин обжатий. Максимально допустимые углы захвата, по данным А. И. Целикова [2], характеризуются следующими величинами:

Случаи прокатки	Угол захвата, рад (град)
Холодная прокатка стали и других металлов с поджатием валков после захвата:	
со смазкой на хорошо шлифованных валках	0,05—0,07 (3—4)
без смазки на грубых валках . . . . .	0,09—0,14 (5—8)
Горячая прокатка:	
стальных листов . . . . .	0,31—0,38 (18—22)
алюминия при 350°С . . . . .	0,35—0,38 (20—22)
никеля при 1100°С и мельхиора при 950°С . . . . .	0,38 (22)
латуни Л62 и Л68 при 800°С . . . . .	0,37—0,42 (21—24)
стальных сортовых профилей . . . . .	0,38—0,42 (22—24)
меди при 900°С . . . . .	0,47 (27)
Стальных профилей в валках с насеченной рифленной или наваренной поверхностью . . . . .	0,47—0,59 (27—34)

## 2. Опережение и отставание

Скорость поступательного движения конца полосы, выходящего из валков, больше, чем окружная скорость валков. Это явление получило название опережения. Скорость поступательного движения конца полосы, входящего в валки, меньше горизонтальной составляющей окружной скорости валков. Это явление получило название отставания.

Опережение и отставание являются результатом осадки полосы по высоте в процессе ее прокатки: при обжатии полосы металл перемещается с некоторой скоростью вправо и влево от нейтрального сечения  $NN$  (рис. 137, а). В зоне опережения горизонтальная составляющая окружной скорости валков суммируется с горизонтальной составляющей скорости перемещения металла, возникающего при его обжатии по высоте. Поэтому в зоне опережения на поверхности контакта скорость металла больше скорости валков. В зоне отставания из горизонтальной составляющей окружной скорости валков вычитается горизонтальная составляющая скорости поступательного перемещения металла, возникающего при его обжатии по высоте; поэтому в зоне отставания на поверхности контакта скорость металла меньше скорости валков.

Опережение и отставание при прокатке в значительной мере определяют характер распределения и величину контактных напряжений, а также величину уширения при прокатке. Величины опережения и отставания необходимо определять для правильного расчета скоростей входа и выхода полосы из валков непрерывного стана, для того чтобы избежать чрезмерного натяжения или образования петель между клетями непрерывного стана. Последние могут привести к нарушениям технологического процесса, авариям, а также к образованию дефектов прокатываемого металла.

Вследствие неравномерного обжатия по длине очага деформации нейтральное сечение смещено от середины дуги захвата к сечению выхода.

При определении опережения будем исходить из предположения, что гипотеза плоских сечений справедлива, т. е. горизонтальные составляющие вектора скорости равномерно распределены по высоте полосы и зона прилипания отсутствует. Эти условия при-

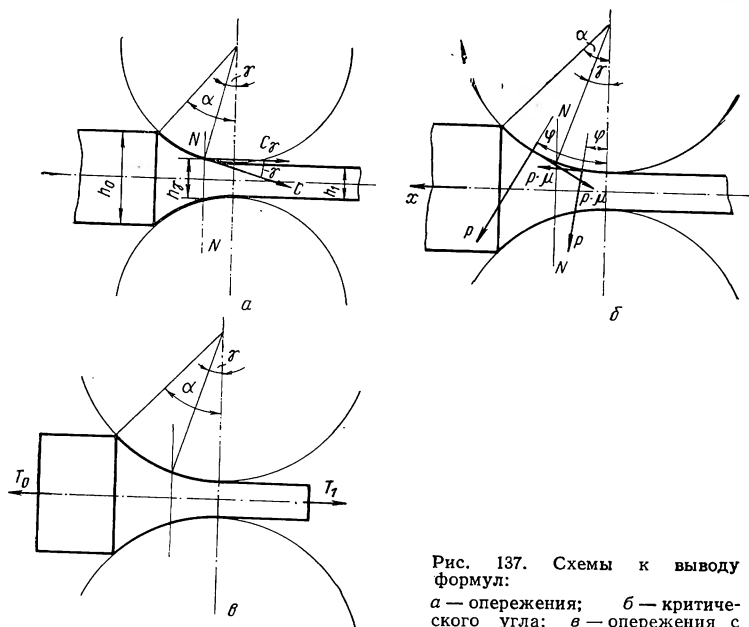


Рис. 137. Схемы к выводу формул:  
 а — опережения; б — критического угла; в — опережения с учетом натяжения

ближенно соблюдаются при прокатке листов и лент. Для этого случая величина опережения представляет наибольший интерес. Запишем условие постоянства секундного объема, проходящего при прокатке через нейтральное сечение  $NN'$  и сечение выхода, считая деформацию плоской (рис. 137, а), т. е. принимая, что  $b_\gamma = b_1$ ;  $h_\gamma c_\gamma = h_1 c_1$ .

В нейтральном сечении скользящего между поверхностями полосы и валков нет, поэтому здесь горизонтальная составляющая скорости металла и окружная скорость валков связаны соотношением:

$$c_\gamma = c \cos \gamma,$$

где  $\gamma$  — угол, соответствующий нейтральному сечению.

Условие постоянства секундного объема запишется в следующем виде:  $h_\gamma c \cos \gamma = h_1 c_1$ .

$$\text{Откуда } \frac{c_1}{c} = \frac{h_\gamma \cos \gamma}{h_1}.$$

Опережение  $S$  будем характеризовать удельной разностью скорости  $c_1$  полосы в сечении выхода и окружной скоростью валков  $c$ , т. е. величиной относительной скорости полосы и валков:

$$S = \frac{c_1 - c}{c} = \frac{c_1}{c} - 1. \quad (391)$$

Следовательно  $S = \frac{h_\gamma \cos \gamma}{h_1} - 1$ .

Абсолютное обжатие полосы между нейтральным сечением и сечением выхода равно

$$\Delta h_\gamma = D(1 - \cos \gamma).$$

Отсюда высота полосы в нейтральном сечении

$$h_\gamma = h_1 + D(1 - \cos \gamma).$$

Поэтому опережение можно вычислить по формуле:

$$S = \frac{[h_1 + D(1 - \cos \gamma)] \cos \gamma}{h_1} - 1. \quad (392)$$

Эту формулу (она выведена С. Финком) назовем точной (в пределах упомянутых выше допущений). После простейших преобразований она приобретает вид:

$$S = (1 - \cos \gamma) \left( \frac{D}{h_1} \cos \gamma - 1 \right).$$

Принимая во внимание, что

$$1 - \cos \gamma \approx \frac{\gamma^2}{2}; \quad \cos \gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2},$$

получим

$$S = \frac{\gamma^2}{2} \left[ \frac{D}{h_1} \left( 1 - \frac{\gamma^2}{2} \right) - 1 \right].$$

Пренебрегая четвертой степенью  $\gamma$  как величиной малой, получим отсюда формулу Экелунда:

$$S = \frac{\gamma^2}{2} \left( \frac{D}{h_1} - 1 \right). \quad (393)$$

При прокатке листов и лент отношение  $D/h_1$  на два-три порядка больше по сравнению с единицей. Поэтому можно пользоваться и такой приближенной формулой, известной в литературе как формула Дрездена — А. Ф. Головина:

$$S = \frac{D}{2h_1} \gamma^2. \quad (394)$$

По этой формуле следует, что опережение увеличивается с ростом нейтрального угла, диаметра валков и с уменьшением высоты полосы. Многочисленные исследования показывают, что качественное и количественное совпадение опытных данных и ре-



зультатов расчета по формулам (392)—(394) можно признать удовлетворительным, если речь идет о прокатке достаточно тонких полос и лент, у которых отношение длины очага деформации к его средней высоте равно 5—6 и более.

Запишем выражение элементарного объема, смещаемого по направлению прокатки справа от нейтрального сечения, т. е. в зоне опережения, как

$$dV_{l\gamma} = V_{\gamma} \frac{dl}{l}.$$

Из условия постоянства объема для случая плоской деформации следует:

$$\frac{l}{l} = - \frac{dh}{h}.$$

Таким образом  $dV_{l\gamma} = -V_{\gamma} \frac{dh}{h}$ .

Отсюда

$$V_{\gamma} \ln \frac{h_{\gamma}}{h_1} = V_{\gamma} \ln \left( \frac{h_1 + \Delta h_{\gamma}}{h_1} \right) = V_{\gamma} \ln \left( 1 + \frac{\Delta h_{\gamma}}{h_1} \right).$$

Воспользовавшись разложением логарифма в ряд, получим:

$$V_{l\gamma} \approx V_{\gamma} \frac{\Delta h_{\gamma}}{h_1}.$$

Обжатие в зоне опережения равно

$$\Delta h_{\gamma} = D(1 - \cos \gamma) = D 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \approx \frac{D \gamma^2}{2}.$$

Таким образом, объем, смещаемый в зоне опережения по направлению прокатки, определится как

$$V_{l\gamma} = V_{\gamma} \frac{D \gamma^2}{2h_1}.$$

Отсюда  $\frac{V_{l\gamma}}{V_{\gamma}} = \frac{D \gamma^2}{2h_1}$ , (395)

или  $\frac{V_{l\gamma}}{V_{\gamma}} = S$ . (396)

Рассматривая равенство (396), убеждаемся в том, что отношение объема, смещаемого по направлению прокатки, ко всему объему в зоне опережения численно равно величине опережения. Из равенства (395) следует, что отношение растет с ростом диаметра валков, нейтрального угла и с уменьшением конечной высоты полосы потому, что при этом увеличивается объем, смещаемый по длине полосы в зоне опережения.

В формулы (392)—(395) входит угол опережения  $\gamma$ , соответствующий нейтральному сечению  $NN$ , являющемуся границей между зонами опережения и отставания. Величину этого угла можно найти, учитывая условные равновесия сил. Проектируя все силы, приложенные от валков к прокатываемой полосе (рис. 137, б), на ось прокатки и приравнявая их нулю, получим:

$$\int_0^{\alpha} p \sin \varphi r d\varphi + \int_0^{\gamma} p \mu \cos \varphi r d\varphi - \int_{\gamma}^{\alpha} p \mu \cos \varphi r d\varphi = 0$$

$$\text{или } -\cos \varphi \Big|_0^{\alpha} + \mu \sin \varphi \Big|_0^{\gamma} - \mu \sin \varphi \Big|_{\gamma}^{\alpha} = 0.$$

Отсюда после простых преобразований получим известную формулу И. М. Павлова:

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{2} - \frac{1 - \cos \alpha}{2\mu}.$$

Заменяя значение синусов углами в радианах, получим следующую приближенную формулу:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{\alpha}{2\mu} \right). \quad (397)$$

Зависимость угла опережения от угла захвата  $\alpha$  характеризуется выпуклой кривой. Максимум этой кривой легко найти из условия  $d\gamma/da=0$ .

Это условие дает, что максимальное значение опережения имеет место, когда угол захвата равен коэффициенту трения:  $\alpha=\mu$ .

Далее, считая  $\gamma=0$  из уравнения (397), получим значения углов захвата, при которых опережение обращается в нуль:  $\alpha=0$ ;  $\alpha=2\mu$ .

Рис. 138 наглядно иллюстрирует зависимость угла опережения от коэффициента трения и угла захвата во всем интервале их изменения. В пределах  $0 \leq \alpha \leq \mu$  осуществляется установившийся процесс прокатки без буксования. В интервале  $\mu \leq \alpha \leq 2\mu$  наблюдается уже частичное буксование металла в валках. При  $\alpha=2\mu$ , когда угол опережения становится равным нулю, очаг деформации включает только зону скольжения — наступает явление полного буксования, при котором полоса не получает поступательного движения, хотя валки и вращаются.

Запишем теперь условие постоянства секундных объемов прокатываемой полосы для сечения входа и выхода:  $h_0 c_0 = h_1 c_1$  или

$$c_0 = c_1 \frac{h_1}{h_0}.$$

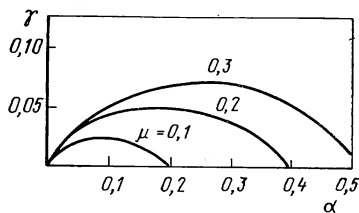


Рис. 138. Зависимость угла опережения от угла захвата и коэффициента трения

Таким образом, скорость входа полосы в валки равна скорости выхода полосы из валков, деленной на коэффициент вытяжки, который для случая плоской деформации равен

$$\lambda = \frac{h_0}{h_1}. \quad (398)$$

$$\text{Тогда } c_0 = c_1/\lambda. \quad (399)$$

Отставание при прокатке будем характеризовать равенством:

$$S_{от} = \frac{c_0 - c}{c} = \frac{c_0}{c} - 1.$$

На основании уравнения (399) имеем:

$$S_{от} = \frac{1}{\lambda} \frac{c_1}{c} - 1.$$

Но из равенства (391) следует, что

$$\frac{c_1}{c} = S + 1.$$

Поэтому

$$S_{от} = \frac{S + 1}{\lambda} - 1 = \frac{h_1}{h_0}(S + 1) - 1$$

$$\text{или } S_{от} = \left(1 - \frac{\Delta h}{h_0}\right)(S + 1) - 1. \quad (400)$$

Исследуя уравнение (399), можно найти, что отставание увеличивается с ростом обжатия и уменьшением опережения.

Эту зависимость легко понять, рассматривая отношение объема, смещаемого против направления прокатки, ко всему объему в зоне отставания [3, с. 248].

Полученные зависимости находятся в соответствии с опытными данными. На рис. 139, а приведена зависимость опережения от диаметра валков. В основе этой зависимости лежит тот факт, что с ростом диаметра валков увеличивается объем, смещаемый в направлении прокатки, это и приводит к увеличению опережения.

Из рис. 139, б следует, что с увеличением конечной толщины полосы опережение уменьшается. Это является следствием уменьшения смещаемого по длине полосы объема металла по отношению ко всему объему в зоне опережения.

На рис. 139, в приведена зависимость опережения от относительного обжатия. Опережение увеличивается до определенного максимума и затем начинает уменьшаться. Принимая во внимание, что  $h_1 = h_0 - \Delta h$ , перепишем уравнение (395) в таком виде:

$$S = \frac{V_{I\gamma}}{V_{\gamma}} = \frac{D \gamma^2}{2(h_0 - \Delta h)} = \frac{D \gamma^2}{2h_0 \left(1 - \frac{\Delta h}{h_0}\right)}. \quad (401)$$

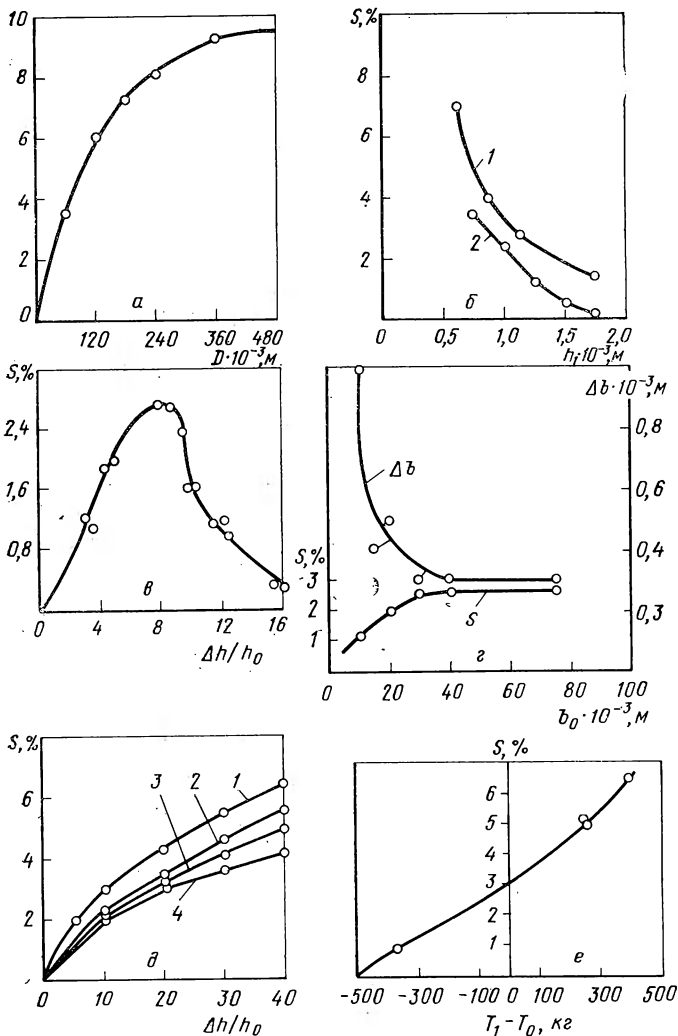


Рис. 139. Зависимость опережения от диаметра валков (а), высоты после прокатки (б), относительного обжатия (в), ширины полосы (г), температуры и обжатия (д), переднего и заднего натяжений (е)

Отсюда ясно, что с ростом линейного и относительного обжатия увеличивается объем, смещаемый в направлении прокатки в зоне опережения, в результате чего растет опережение. При этом, если угол захвата  $\alpha$  находится в пределах  $0 \leq \alpha \leq \mu$ , то с ростом обжатия (а следовательно, и угла  $\alpha$ ) увеличивается также и угол  $\gamma$  согласно формуле (397) и, значит, опережение.

Когда степень обжатия достигает величины, при которой в данных условиях прокатки выполняется неравенство  $\mu \leq \alpha \leq 2\mu$ , происходит прогрессивно нарастающее буксование, связанное с

настолько быстрым уменьшением угла  $\gamma$ , что рост обжатия его не компенсирует. Результатом является уменьшение опережения.

Наличие устойчивого буксования подтверждается экспериментально. Например, И. М. Павлов и В. К. Белосевич<sup>1</sup>, фотографируя процесс прокатки на пленку скоростной кинокамеры, установили, что при некоторых условиях может существовать вполне устойчивое отставание переднего конца полосы от валков, т. е. частичное буксование. В некоторых случаях величина его достигает до 40%.

Опережение можно наблюдать и при прокатке в неприводных валках, если полоса заталкивается (вдавливается) в валки или вытягивается из них.

На рис. 139,г приведена зависимость опережения от ширины полосы<sup>2</sup>. Здесь же приведена кривая, характеризующая зависимость линейного уширения от ширины полосы. Из рассмотрения рисунка следует, что в условиях данного опыта опережение увеличивается, а уширение уменьшается в пределах изменения ширины полосы от очень малых ее значений до 45 мм. При дальнейшем увеличении ширины полосы как уширение, так и опережение остаются постоянными. Эта взаимосвязь является следствием условия постоянства объема при прокатке.

На рис. 139,д показано, что при росте температуры прокатки стали от 685 до 1185°C опережение уменьшается. Это связано с уменьшением коэффициента трения при прокатке в этом интервале температур (см. рис. 93, в). Обращаясь к формуле (397), убеждаемся в том, что с уменьшением коэффициента трения доля объема, смещаемого по длине по всему объему, в зоне опережения уменьшается, с чем и связано уменьшение опережения.

Станы для прокатки тонких и длинных металлических лент обычно снабжаются специальными моталками, от которых к переднему и заднему концам полосы прикладываются растягивающие усилия  $T_1$  и  $T_0$ , схематически изображенные на рис. 137,в. Из рис. 139,е следует, что с ростом переднего натяжения  $T_1$  опережение увеличивается, а с ростом заднего натяжения  $T_0$  уменьшается [2]. Принимая во внимание равенства (394), (395) и (397), приходим к выводу, что здесь, как и выше, такая закономерность является следствием изменения в соотношении между объемами, смещаемыми по длине по всему объему в зоне очага деформации.

Как отмечалось, изложенная выше теория справедлива для прокатки низких (тонких) полос, когда приемлема гипотеза плоских сечений. При прокатке высоких полос явление опережения значительно усложняется. Об этом свидетельствуют опыты Ю. А. Одинокова<sup>3</sup>, который исследовал положение критического

<sup>1</sup> Павлов И. М., Белосевич В. К. «Известия вузов. Черная металлургия», 1961, № 10, с. 46—49.

<sup>2</sup> Павлов И. М. Теория прокатки и основы пластической деформации металлов. Л. — М. ОНТИ. 1938. 515 с. с ил.

<sup>3</sup> Одинокоев Ю. А. «Известия вузов. Черная металлургия», № 2, 1965. с. 87—92.

сечения при прокатке крупных слитков. Оказалось, что длина зоны опережения неодинакова на разных горизонтальных уровнях по высоте полосы. Для внутренних слоев (середина высоты) зона опережения растет и при  $\frac{l}{h} < 0,2$  ее длина даже превосходит длину очага деформации, определяемую чисто геометрическими соотношениями (рис. 140,а). При этих условиях скорость заднего конца оказывается большей скорости валков. Практически скорость почти всего металла, за исключением небольших объемов у

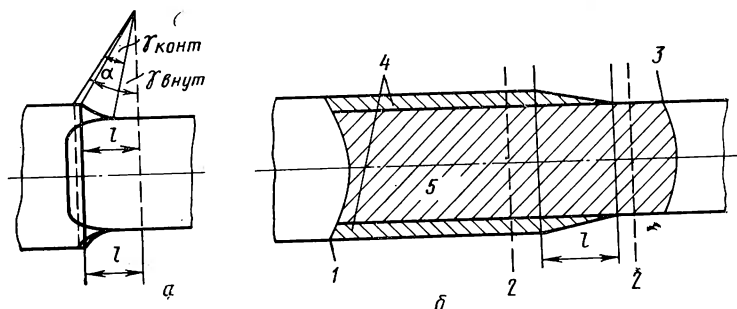


Рис. 140. Смещение нейтральной поверхности за пределы очага деформации:

а — по опытам Ю. А. Одинокова; б — данные расчета по равенству (461),  $h = 260$  мм;  $h_1 = 140$  мм;  $\alpha = 0,58$  рад;  $D = 667$  мм;  $l/h = 1$ ;  $\mu = 0,324$  (1, 2, 3 — границы микросдвигов; 4 — зона отставания; 5 — зона опережения)

поверхностей контакта, больше скорости валков. Возможность смещения критического сечения за пределы задней границы очага деформации еще в тридцатых годах текущего столетия предвидел А. Ф. Головин<sup>1</sup>. Такое смещение он объяснял непосредственным действием сил трения, приложенных со стороны валков к полосе, которые стремятся сообщить частицам в средней части по высоте полосы большую окружную скорость, чем имеют сами валки на поверхностях контакта.

### 3. Участки скольжения и прилипания

При прокатке на поверхностях контакта полосы и валков существуют участки застоя, торможения и скольжения. Наличие участков скольжения подтверждается наблюдаемыми в процессе прокатки опережением и отставанием. Очевидно, что опережение и отставание невозможны без взаимного скольжения металла и валков. Направление скольжения в зоне отставания противоположно направлению скольжения в зоне опережения. При прокатке соблюдается условие неразрывности прокатываемого металла. Отсюда следует, что в очаге деформации на поверхности контакта должен существовать некоторый участок, на котором скорости

<sup>1</sup> Головин А. Ф. Прокатка, ч. II. Свердловск — М. — Л. 1936. 235 с.

полосы и валков одинаковы, т. е. участка, где отсутствует скольжение.

Из опытных данных известно, что при прокатке тонких и широких полос ( $\frac{l}{h} \geq 1$ ;  $\frac{b}{h} \geq 5$ ) с хорошей степенью приближения оправдывается гипотеза плоских сечений: любое плоское до прокатки сечение полосы остается почти плоским и после прокатки смежные сечения почти не искривляются, а лишь перемещаются одно относительно другого с возрастающей скоростью по мере перехода от сечения входа к сечению выхода. Таким образом, в этом случае скорость перемещения частиц столь мало изменяется по высоте, что ее можно принять постоянной (рис. 141,а). Из гипоте-

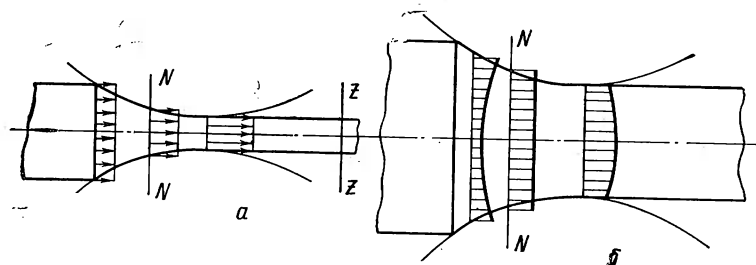


Рис. 141. Очаг деформации и эпюры скоростей при прокатке:  
а — низких полос; б — высоких полос

зы плоских сечений следует вывод, что на поверхностях контакта металла с валками существуют только участки скольжения, названные выше зонами отставания и опережения. И лишь в одной точке, через которую проходит нейтральное сечение, соответствующие скорости валков и металла, совпадают. Такие допущения, получившие обоснование в работах И. М. Павлова, позволяют получить достаточно простые решения задач о величине опережения, контактных напряжений и ряда других.

Однако при прокатке высоких полос гипотеза плоских сечений в ряде случаев оказывается уже несостоятельной. Подобно случаю сжатия высоких полос (см. гл. VIII), на контактных поверхностях металла с валками существуют участки прилипания, и скорости поступательного перемещения частиц в разных точках по высоте полосы одного сечения не одинаковы. Можно принять, что лишь в нейтральном сечении скорость полосы  $v_N$  по высоте постоянна. Тогда из условия постоянства секундного объема следует, что в зоне прилипания слева от нейтрального сечения эпюра скоростей будет иметь минимум в средней точке одного из того же сечения по высоте полосы, а справа от нейтрального сечения — максимум (рис. 141,б). В силу того же условия постоянства объема неравномерность скоростей по высоте полосы будет иметь место и в зонах скольжения.

Описанный характер распределения скоростей нашел обоснование в трудах А. Ф. Головина, И. А. Соболевского, А. И. Цели-

кова [2] и был подвергнут экспериментальной проверке. Рассмотрим, например, опыты И. Я. Тарновского, В. Б. Ляшкова, А. А. Поздеева и В. Н. Трубина<sup>1</sup>. В этих опытах медные и алюминиевые образцы были сварены из двух половин таким образом, что ширина каждой половины равнялась половине ширины образца. Среднюю часть полосы по длине не сваривали и на нее перед прокаткой наносили координатную сетку (рис. 142,а). Отношение

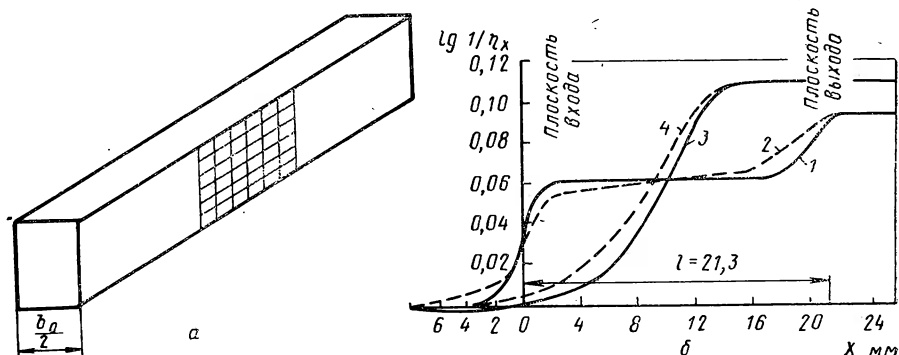


Рис. 142. Образцы из меди и алюминия с вертикальной координатной сеткой (а) и кривые нарастающих логарифмических коэффициентов относительного обжатия (б). Для контактного слоя:

1 — в середине ширины; 2 — у боковой поверхности. Для среднего по высоте слоя: 3 — в середине ширины; 4 — у боковой поверхности

ширины к высоте образцов было в пределах от 2 до 5. Прокатку производили на прокатном стане с диаметром валков 210 мм при скорости 0,1 м/сек. Температура при прокатке алюминия (99,8% Al) была равна 460—480°C, меди (98,8% Cu) 880—900°C. Когда часть образца с координатной сеткой заполняла очаг деформации, прокатку останавливали и недокат извлекали из валков. Концы полосы отрезали и ячейки координатной сетки измеряли с точностью до 0,01 мм. Вычисляя для каждой ячейки отношение высоты до и после прокатки, определяли обжатие в различных точках очага деформации.

Из рис. 142,б следует, что у слоев, прилегающих к контактной поверхности, коэффициент относительного обжатия по длине очага деформации (от сечения входа к сечению выхода) изменяется следующим образом: сначала относительное обжатие возрастает, затем на некотором участке очага деформации оно остается постоянным, и наконец, в зоне очага деформации около сечения выхода снова растет, достигая наибольшей величины в сечении выхода. Длина участков, на которых относительное обжатие остается постоянным, уменьшается при переходе от контактных к

<sup>1</sup> Тарновский И. Я., Поздеев А. А., Ляшков В. Б. Деформация металла при прокатке. М., Металлургиздат, 1956. 287 с. с ил.



средней части по высоте полосы. Горизонтальные участки соответствуют длине зоны затрудненной деформации, причем у контактной поверхности эта зона представляет собой участок прилипания. Точка пересечения кривых соответствует критическому сечению. Авторы установили далее, что прилипание имеет место не только вдоль очага деформации, но и в поперечном направлении.

Наряду с рассмотренными опытами, убедительно доказывающими наличие зоны прилипания при определенных условиях, известны опыты, проведенные в иных условиях, которые свидетельствуют или о почти полном отсутствии зоны прилипания, или о наличии участков, где перемещения металла относительно валков были очень малыми. Например, Келус и Кокрофт [3, с. 219] на основании своих опытных данных пришли к выводу о том, что если зона прилипания и имела место у нейтрального сечения, то ее длина не превышала  $1/50$  длины дуги контакта. А. М. Савченко<sup>1</sup> исследовал скольжение при прокатке полос с помощью электроконтактных отметчиков пути.

При этом прилипания по дуге касания обнаружено не было, но абсолютные перемещения на участке от  $1/2$  до  $1/3$  длины дуги до выходящего сечения составляли лишь десятые доли миллиметра.

Итак, при прокатке на поверхностях контакта металла с валками существуют участки скольжения и прилипания, соотношение между величинами которых зависит от условий прокатки. На участках скольжения касательное и нормальное напряжения связаны кулоновым соотношением.

Участок прилипания в свою очередь можно рассматривать состоящим из участков торможения и застоя. На участках торможения касательное напряжение достигает своего максимального значения, численно равного половине истинного сопротивления деформации металла в каждой данной точке контактной поверхности. На участке застоя касательное напряжение плавно изменяется от своего максимального значения до нуля в нейтральном сечении.

Характер перемещений частиц металла относительно поверхности валков на участках застоя и торможения идентичен. Отличие заключается лишь в том, что на участках застоя смещения столь малы, что соизмеримы по величине с упругими деформациями. Они изменяются от нуля в нейтральном сечении до некоторого максимума на границах зон застоя и торможения, продолжая, однако, в зоне торможения оставаться малыми. Это позволяет в дальнейших расчетах напряжений исключить из рассмотрений участки застоя, что приводит к некоторой (обычно небольшой) погрешности<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Савченко А. М. — «Пластическая и термическая обработка стали». М., Металлургиздат, 1962. (ЖМИ, вып. 8), с. 20—38.

<sup>2</sup> См. сн. на стр. 249.

#### 4. Внеконтактная деформация при прокатке

Под действием напряжений, возникающих во внешних частях полосы, последние претерпевают два вида деформаций: 1) локальные деформации, соизмеримые с объемом зерен металла, не сопровождаемые заметным изменением формы тела; 2) деформации локального характера, сопровождаемые более или менее значительным изменением формы. Деформации первого вида характерны для случаев прокатки тонких сечений. Деформации второго вида становятся ощутимыми при прокатке высоких, крупных сечений. В соответствии с характером напряженного состояния пластическая деформация под воздействием валков распространяется от контактных поверхностей к средней части по высоте постепенно. В практических условиях прокатка без вытяжки наблюдается, например, при прокатке слябов в ребровом калибре на блюминге и при обжатии кромок листового раската между вертикальными валками. При этом деформация неравномерна, что характеризуется принудительным уширением полосы у контактных поверхностей так, что ее боковые кромки приобретают вогнутость.

Пластически деформируется не только металл, расположенный непосредственно под поверхностями контакта, но и металл, находящийся во внеконтактных зонах. Еще В. Е. Грум-Гржимайло и Холленберг<sup>1</sup> считали, что перед входом в валки образуется утолщение полосы. А. П. Грудев и В. М. Полещук<sup>2</sup> исследовали внеконтактную деформацию при прокатке на гладких валках заднего конца полос сечением  $30 \times 50$  мм из алюминия, меди в холодном состоянии и стали Ст.3 при  $1000^\circ\text{C}$ . Перед входом в валки во всех случаях имела место неодинаковая по ширине высотная утяжка. Она достигла наибольшей величины в симметрично расположенных точках  $a, b$  при прокатке полос с отношением  $\frac{b_0}{h_0} < 1$  и в середине по ширине у полос с отношением  $\frac{b_0}{h_0} > 1$  (рис. 143,  $a, b$ ) и только при очень больших обжатиях на самых кромках полосы наблюдалось небольшое утолщение.

Утяжка полосы увеличивается с уменьшением отношения  $l/h$  и, например, при  $l/h = 0,27$  внеконтактная деформация составляет 39,3% от степени деформации в валках. Сравнение результатов, полученных при прокатке без смазки и со смазкой, показало, что величина сил трения мало влияет на величину внеконтактной деформации и что, следовательно, утяжка является результатом воздействия на внеконтактные зоны полосы той ее части, которая находится между валками.

Характер изменения утяжки по ширине авторы объясняют аналогией с изгибом. Известно, что при изгибе прямоугольной

<sup>1</sup> Грум-Гржимайло В. Е. Прокатка и калибровка. ОНТИ. 1933.

<sup>2</sup> Грудев А. П., Полещук В. М. В сб. «Прокатное производство» (ИЧМ) т. XXI. Изд-во «Металлургия», 1965, с. 212.

полосы ее поперечное сечение приобретает желобчатую форму и в месте изгиба полоса утоняется (рис. 143). Желобчатая форма является результатом действия продольных растягивающих напряжений во внешних слоях полосы и сжимающих во внутренних. Аналогичное явление наблюдалось бы, если бы полоса не имела сплошности по горизонтальной оси симметрии (пунктир на рис. 143, в). Но в силу неразрывности полоса приобретает форму, показанную на рисунке сплошными линиями. Таким образом, у кромок полосы возникают продольные напряжения растяжения, а в средней части по ширине — напряжения сжатия.

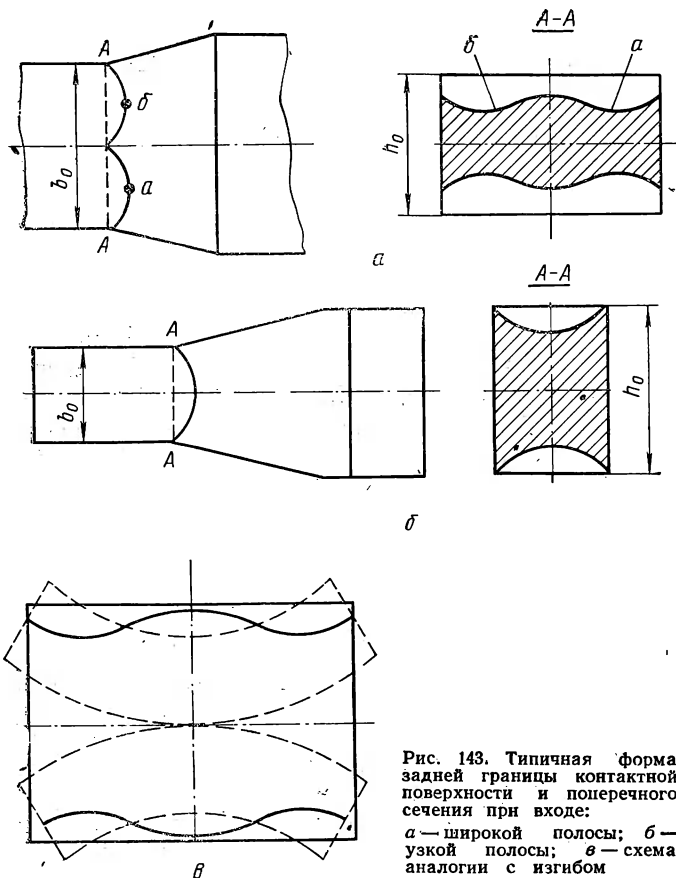


Рис. 143. Типичная форма задней границы контактной поверхности и поперечного сечения при входе:  
 $a$  — широкой полосы;  $b$  — узкой полосы;  $v$  — схема аналогии с изгибом

За счет утяжки длина «геометрического» очага деформации уменьшается. Это уменьшение можно найти по формуле

$$\frac{\Delta l}{l} = 1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta h_{\text{вн}}}{\Delta h}}, \quad (402)$$

где  $\Delta h_{\text{вн}}$  — «обжатие» перед входом в валки;  
 $\Delta h$  — суммарное обжатие полосы.

На основании опытов авторы построили кривую (рис. 144), которой рекомендуют пользоваться для учета уменьшения длины очага деформации при прокатке крупных сечений и вообще во всех случаях, когда отношение  $l/h$  мало.

По опытным данным других исследователей<sup>1</sup>, утяжку по высоте полосы до входа в валки можно определить по формуле

$$\Delta h_{\text{вн}} = 0,1 \operatorname{tg} \alpha h_0. \quad (403)$$

По данным ряда авторов, протяженность деформированных внеконтактных зон увеличивается с ростом обжатия и уменьшается с увеличением скорости прокатки. Вместе с тем протяженность этих зон изменяется и по высоте. При малых обжатиях длина их у контактных поверхностей больше, чем в середине высоты. С ростом обжатия это различие уменьшается. Экспериментально доказано также, что глубина распространения пластической деформации сжатия по высоте и протяженность внеконтактных зон в значительной степени зависят от ширины раската. Уменьшение ширины полосы, коэффициента трения при прокатке и увеличение прочности прокатываемого металла уменьшают продолговатую протяженность внеконтактных зон. При этом со стороны входного сечения напряжения во внеконтактной зоне достигают предела текучести. Исследование напряженного состояния при прокатке высоких тел, соответствующих случаю прокатки на блюминге с применением метода оптически активных покрытий, показало, что длина очага деформации может в 4—5 раз превышать длину очага деформации, если его вычислять исходя из геометрических соотношений [4].

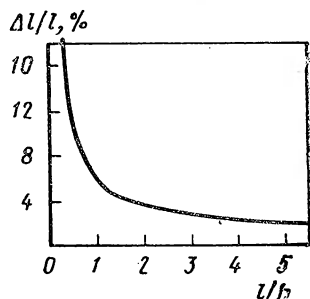


Рис. 144. Уменьшение длины контактной поверхности за счет высотной утяжки при увеличении параметра  $l/h$ .

## 5. Контактные напряжения

На рис. 145 приведена схема определения контактных напряжений при прокатке.

Из приведенного анализа следует, что для определения контактных напряжений на участках скольжения необходимо совместно решить три уравнения системы (202), в которой вместо условия идеальной пластичности взято условие пластичности с упрочнением:

$$\frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} + \frac{2\tau_r\theta}{\alpha\rho} = 0; \quad \sigma_r - \sigma_\theta = \nu K \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n; \quad \tau_r\theta = \pm \mu \sigma_\theta.$$

<sup>1</sup> Котельников Ю. П., Поздеев А. А., Иванецкий А. В. Влияние неравномерного распределения температуры по сечению полосы на мощность «Известия вузов. Черная металлургия», 1969, № 6, с. 83—86.

В последнем из этих уравнений знак минус относится к зоне отставания, а знак плюс к зоне опережения.

Рассмотрим ход решения для зоны отставания. Первое из этих уравнений с учетом двух других примет вид:

$$\frac{d\sigma_{\theta}}{d\rho} + \frac{\nu K(1-n)}{\rho} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n + \delta \frac{\sigma_{\theta}}{\rho} = 0, \quad (404)$$

$$\text{где } \delta = \frac{2\mu}{\alpha}. \quad (405)$$

Таким образом, мы получили неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Интегрируя соответствующее ему однородное уравнение

$$\frac{d\sigma_{\theta}}{d\rho} + \delta \frac{\sigma_{\theta}}{\rho} = 0,$$

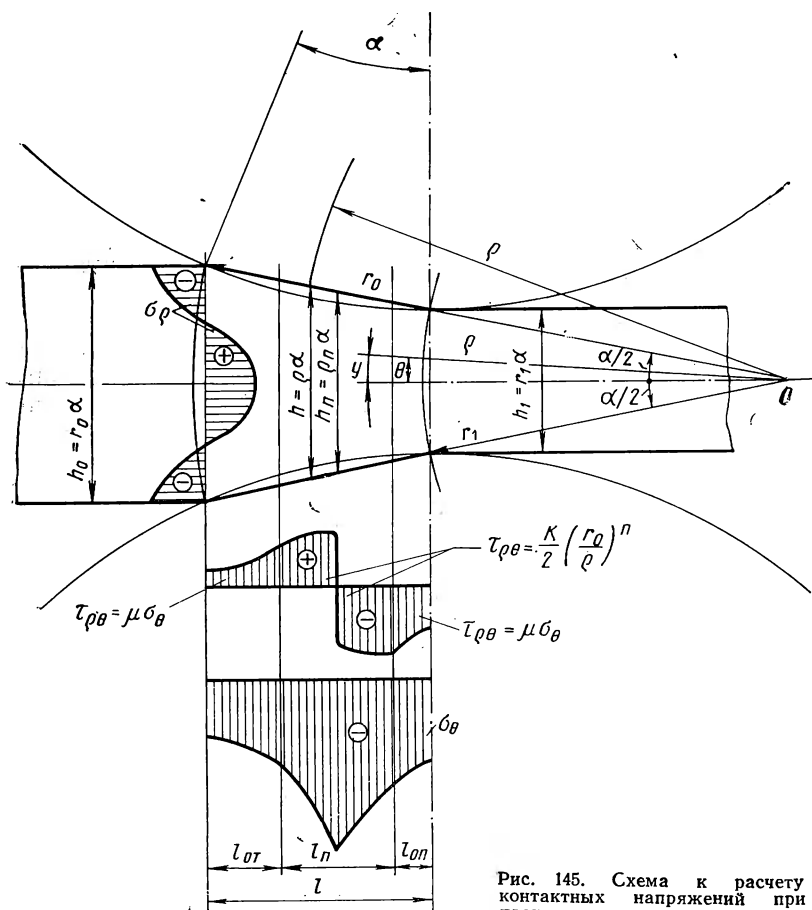


Рис. 145. Схема к расчету контактных напряжений при прокатке

получим

$$\sigma_{\theta} = C \rho^{-\delta}. \quad (406)$$

Неоднородное уравнение решим методом вариации произвольной постоянной. Допустим, что константа  $C$  — некоторая функция  $\rho$ . Подберем эту функцию так, чтобы  $\sigma_{\theta} = C\rho^{-\delta}$  удовлетворяло уравнению (404):

$$\frac{d\sigma_{\theta}}{d\rho} = \frac{dC}{d\rho} \rho^{-\delta} - C\delta\rho^{-\delta-1}. \quad (407)$$

С использованием выражений (406), (407) уравнение (404) примет следующий вид:

$$\frac{dC}{d\rho} \rho^{-\delta} + \nu(1-n) \frac{K}{\rho} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n = 0.$$

$$\text{Отсюда } C = -\nu(1-n) K r_0^n \frac{\rho^{\delta-n}}{\delta-n} + c_1.$$

Подставляя значение  $C$  в уравнение (406), получим:

$$\sigma_{\theta} = C_1 \rho^{-\delta} - \frac{\nu(1-n)}{\delta-n} K \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n. \quad (408)$$

В общем случае деформация полосы по высоте неравномерна. Проводя такие же рассуждения, как и ранее (раздел 4, гл. 8), получим следующее краевое условие для напряжения  $\sigma_{\theta} : \rho = r_0; \sigma_{\theta} = -n_3 K$ .

Здесь коэффициент влияния внешних зон  $n_3$  представляет собой коэффициент «упрочнения формы», возникающего в результате неравномерной деформации по высоте полосы при прокатке. Обозначим константу пластичности с учетом влияния внешних зон как:

$$n_3 K = K_3. \quad (409)$$

В дальнейшем для упрощения записи значок при величине  $K_3$  будем опускать, возвращаясь к соотношению (409) лишь в тех случаях, где это будет иметь принципиальное значение.

Итак, константу интегрирования  $C_1$  найдем из условия:  $\rho = r_0; \sigma_{\theta} = -K$ .

Поэтому из выражения (408) получаем:

$$C_1 = -\frac{\delta-1}{\delta-n} K r_0^{\delta}.$$

Подставляя это значение  $c_1$  в выражение (408), будем иметь

$$\frac{\sigma_{\theta}}{K} = -\frac{1}{\delta-n} \left[ (\delta-1) \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{\delta} + (1-n) \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n \right]. \quad (410)$$

Аналогично можно провести решение для зоны опережения. Как и ранее,  $\nu = +1$ . Граничное условие имеет вид:

$$\rho = r_1; \sigma_{\theta} = -K \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n.$$

В результате получим:

$$\frac{\sigma_{\theta}}{K} = -\frac{1}{\delta+n} \left[ (\delta+1) \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^{\delta} \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^n - (1-n) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right]. \quad (411)$$

В зоне отставания касательные напряжения направлены в сторону, противоположную оси  $\rho$  (см. рис. 145), а в зоне опережения их направления совпадают. Поэтому следует принять для зоны отставания  $\tau_{\rho\theta} = -\mu |\sigma_{\theta}|$ , а для зоны опережения  $\tau_{\rho\theta} = +\mu |\sigma_{\theta}|$ . Для зон отставания и опережения получим соответственно:

$$\frac{\tau_{\rho\theta}}{K} = -\frac{\mu}{\delta-n} \left[ (\delta-1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^{\delta} + (1-n) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right]. \quad (412)$$

$$\frac{\tau_{\rho\theta}}{K} = +\frac{\mu}{\delta+n} \left[ (\delta+1) \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^{\delta} \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^n - (1-n) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right]. \quad (413)$$

В зоне прилипания на участках торможения имеем:

$$\tau_{\rho\theta} = -\frac{1}{2} K \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n. \quad (414)$$

Это максимально возможное значение касательного напряжения на поверхностях контакта. Поэтому условие пластичности приобретает вид:

$$\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} = 0.$$

Таким образом, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\frac{d\sigma_{\rho}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\alpha\rho} = 0; \quad \sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} = 0; \quad \tau_{\rho\theta} = \frac{1}{2} \nu K \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n.$$

Эта система легко сводится к одному уравнению:

$$\frac{d\sigma_{\theta}}{d\rho} + \frac{\nu K}{\alpha\rho} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n = 0,$$

Интегрируя его, получим:

$$\sigma_{\theta} = -\frac{\nu K}{\alpha n} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n + C. \quad (415)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho = r_{от}; \quad \sigma_{\theta} = \sigma_{от} = \frac{K}{\delta-n} \left[ (\delta-1) \left( \frac{r_0}{r_{от}} \right)^{\delta} + (1-n) \left( \frac{r_0}{r_{от}} \right)^n \right]; \\ \rho = r_{оп}; \quad \sigma_{\theta} = \sigma_{оп} = -\frac{K}{\delta+n} \left[ (\delta+1) \left( \frac{r_{оп}}{r_1} \right)^{\delta} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^n - (1-n) \left( \frac{r_0}{r_{оп}} \right)^n \right]. \end{aligned} \right\} \quad (416)$$

Здесь  $r_{от}$ ,  $r_{оп}$  — координаты на границах зон отставания и опережения. Удовлетворяя этим условиям, получим соответственно:

$$C = \sigma_{от} + \frac{\nu K}{an} \left( \frac{r_0}{r_{от}} \right)^n; \quad C = \sigma_{оп} + \frac{\nu K}{an} \left( \frac{r_0}{r_{оп}} \right)^n$$

и окончательно выражения для напряжений:

$$\frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{\sigma_{от}}{K} - \frac{1}{an} \left[ \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n - \left( \frac{r_0}{r_{от}} \right)^n \right]; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{\sigma_{оп}}{K} - \frac{1}{an} \times$$

$$\times \left[ \left( \frac{r_0}{r_{оп}} \right)^n - \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right]. \quad (417)$$

Так как напряжение  $\sigma_\theta$  сжимающее и по абсолютному значению должно возрастать к нейтральному сечению, то в первом из этих уравнений принято  $\nu = -1$ , а во втором  $\nu = +1$ .

На границе зон отставания и прилипания имеем:

$$\mu \sigma_{от} = \frac{K}{2} \left( \frac{r_0}{r_{от}} \right)^n$$

$$\text{или} \quad \frac{\mu}{\delta - n} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{r_{от}} \right)^\delta + (1 - n) \left( \frac{r_0}{r_{от}} \right)^n \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{r_0}{r_{от}} \right)^n.$$

Аналогичные соотношения можно записать и для границы зон опережения и прилипания.

Из этих соотношений легко получить равенства для определения высоты на границах различных зон:

$$\frac{r_{от}}{r_0} = \left[ \frac{\delta - 1}{\frac{\delta - n}{2\mu} - (1 - n)} \right]^{\frac{1}{\delta - n}}; \quad \frac{r_{оп}}{r_1} = \left[ \frac{\delta + n}{2\mu} + (1 - n) \right]^{\frac{1}{\delta + 1}}. \quad (418)$$

Если упрочнение отсутствует ( $n=0$ ), то приведенные выше соотношения сводятся к следующим:

участки скольжения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_\theta}{K} &= -\frac{1}{\delta} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta + 1 \right]; & \frac{\tau_{\rho\theta}}{K} &= -\frac{\mu}{\delta} \times \\ &\times \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta + 1 \right]; \\ \frac{\sigma_\theta}{K} &= -\frac{1}{\delta} \left[ (\delta + 1) \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta - 1 \right]; & \frac{\tau_{\rho\theta}}{K} &= \frac{\mu}{\delta} \times \\ &\times \left[ (\delta + 1) \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta - 1 \right]; \end{aligned} \right\} \quad (419)$$

участки прилипания

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_\theta}{K} &= -\frac{1}{2\mu} \left[ 1 + \delta \ln \frac{r_{от}}{\rho} \right]; & \frac{\tau_{\rho\theta}}{K} &= -\frac{1}{2}; \\ \frac{\sigma_\theta}{K} &= -\frac{1}{2\mu} \left[ 1 + \delta \ln \frac{\rho}{r_{оп}} \right]; & \frac{\tau_{\rho\theta}}{K} &= \frac{1}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (420)$$



сечения, определяющие границы между зонами скольжения и прилипания:

$$\frac{r_{от}}{r_0} = \left( \frac{\delta - 1}{\frac{\delta}{2\mu} - 1} \right)^{\frac{1}{\delta}}; \quad \frac{r_{оп}}{r_1} = \left( \frac{\frac{\delta}{2\mu} + 1}{\delta + 1} \right)^{\frac{1}{\delta}}. \quad (421)$$

Радиус нейтрального сечения определяется по формуле:

$$r_n = \sqrt{r_{от} \cdot r_{оп}}. \quad (422)$$

Формулы (420) получены из формул (417) предельным переходом, когда величина  $n$  стремится к нулю. Эти формулы в несколько иной форме были получены ранее А. И. Целиковым и Е. П. Унксовым.

Результаты вычислений по теоретическим формулам подтверждаются опытными данными. При этом для определения контактных напряжений можно использовать поляризационно-оптический метод или штифтовые месдозы.

Вид эпюры нормальных контактных напряжений зависит от характера изменения касательных напряжений и степени неравномерности деформации полосы по ее высоте и ширине [5]. При

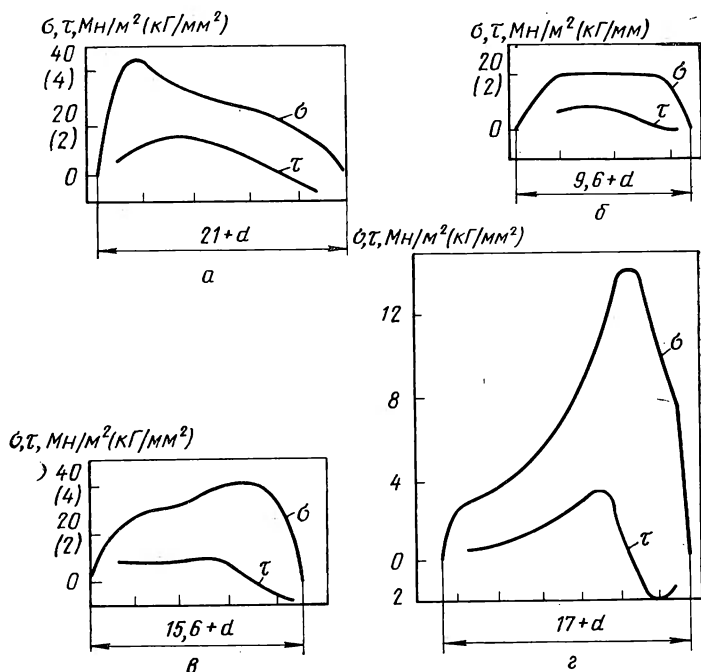


Рис. 146. Эпюры контактных напряжений по опытным данным:  
 а —  $l/h = 0,5$ ; б —  $l/h = 1,0$ ; в —  $l/h = 1,4$ ; г —  $l/h = 6,6$ ;  $d$  — диаметр штифта месдозы

$l/h < 0,5$  деформация по высоте полосы неравномерна и в начале дуги захвата пластической деформации в средней части ее может вообще не быть. В результате возникающих при этом продольных напряжений сжатия, о которых было сказано выше, максимум контактных напряжений на поверхности контакта располагается у точки входа металла в валки (рис. 146,а).

При отношении  $l/h \approx 1$  фактор неравномерности деформации по высоте почти себя не проявляет, и силы трения на поверхностях контакта незначительны. Поэтому максимум на эпюрах нормальных контактных напряжений отсутствует, а касательные напряжения невелики и плавно изменяются по длине очага деформации (рис. 146,б). С увеличением отношения  $l/h$  влияние сил трения усиливается; в результате чего на эпюре нормальных напряжений появляется максимум (рис. 146,в).

При достаточно большом отношении  $l/h$  контактные силы трения имеют значительную величину и переход их от минимального к максимальному значениям у нейтрального сечения происходит довольно резко. При этом нормальные напряжения в нейтральном сечении довольно велики и также резко уменьшаются по направлению к сечениям входа и выхода металла (рис. 146,г). Такая закономерность свидетельствует о малой протяженности зоны прилипания при большой величине отношения  $l/h$ .

## ХII глава

### Напряженное состояние при прокатке

#### 1. Напряженное состояние в объеме, ограниченном поверхностями контакта с валками

Будем исходить из условия минимума нормальных напряжений на оси полосы. Воспользуемся решением (185), приняв при этом  $A = -B$ .

Для зоны отставания, приравнивая правые части первого из равенств (185) и равенства (412) при  $\theta = \alpha/2$ , получим:

$$(C_1 \rho^a + C_2 \rho^b) \operatorname{sh} \frac{m\alpha}{2} = -\frac{K\mu}{\delta-n} \left[ (\delta-1) \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^\delta + (1-n) \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n \right].$$

Отсюда:

$$C_1 \operatorname{sh} \frac{m\alpha}{2} \rho^a = -K\mu \frac{\delta-1}{\delta-n} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^\delta; \quad C_2 \operatorname{sh} \frac{m\alpha}{2} \rho^b = -K\mu \frac{1-n}{\delta-n} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n.$$

В свою очередь из этих равенств следует, что:

$$\rho^a = \rho^{-\delta}; \quad a = -\delta; \quad \rho^b = \rho^{-n}; \quad b = -n; \quad (423)$$

$$C_1 = -K \mu \frac{\delta - 1}{\delta - n} \frac{r_0^\delta}{\operatorname{sh} \frac{m\alpha}{2}}; \quad C_2 = -K \mu \frac{1 - n}{\delta - n} \frac{r_0^n}{\operatorname{sh} \frac{m\alpha}{2}}. \quad (424)$$

Используя выражение для расчета напряжения  $\sigma_\theta$  при  $\theta = \frac{\alpha}{2}$  [равенства (410) и третьего из равенств (185)], получим:

$$\begin{aligned} & -m \left( \frac{C_1 \rho^a}{a} + \frac{C_2 \rho^b}{b} \right) \operatorname{ch} \frac{m\alpha}{2} + K \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n + C_3 = \\ & = -\frac{K}{\delta - n} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta + (1 - n) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\frac{m C_1}{a} \operatorname{ch} \frac{m\alpha}{2} \rho^a = K \frac{\delta - 1}{\delta - n} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta; \quad C = 0;$$

$$\frac{m C_2}{b} \operatorname{ch} \frac{m\alpha}{2} \rho^b = K \frac{1 - n}{\delta - n} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n + K \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n.$$

Из этих равенств снова можно получить соотношения (423) и, кроме того, уравнение для  $C_1$  и  $C_2$  в виде

$$C_1 = \frac{a}{m} K \frac{\delta - 1}{\delta - n} \frac{r_0^\delta}{\operatorname{ch} \frac{m\alpha}{2}}; \quad C_2 = \frac{b}{m} \frac{\delta}{n} K \frac{1 - n}{\delta - n} \frac{r_0^n}{\operatorname{ch} \frac{m\alpha}{2}}. \quad (425)$$

Приравнивая правые части выражений (424) и (425) для констант  $C_1$ , учитывая, что из условий (423)  $a = -\delta$ , найдем:

$$K \mu \frac{\delta - 1}{\delta - n} \frac{r_0^\delta}{\operatorname{sh} \frac{m\alpha}{2}} = \frac{\delta}{m} K \frac{\delta - 1}{\delta - n} \frac{r_0^\delta}{\operatorname{ch} \frac{m\alpha}{2}}$$

$$\text{или } \mu = \frac{\delta}{m} \operatorname{th} \frac{m\alpha}{2}. \quad (426)$$

Приравнивая правые части выражений (424) и (425) для констант  $C_2$  и учитывая, что из условия  $b = -n$ , получим известное соотношение (426). Таким образом, при выполнении равенства (426) константы  $C_1$  и  $C_2$ , выражаемые равенствами (424) и (425), одинаковы.

Окончательно для зоны отставания будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{\rho\theta}}{K} &= -\frac{\mu}{\delta - n} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta + (1 - n) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right] \Phi_1; \\ \frac{\sigma_\theta}{K} &= -\left\{ \frac{1}{\delta - n} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta + (1 - n) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right] + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right\} \Phi_2 + \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n; \\ \frac{\sigma_\rho}{K} &= \frac{\sigma_\theta}{K} + \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n. \end{aligned} \right\} \quad (427)$$

Здесь:

$$\varphi_1 = \frac{\operatorname{sh} m \theta}{\operatorname{sh} \frac{m a}{2}}; \quad \varphi_2 = \frac{\operatorname{ch} m \theta}{\operatorname{ch} \frac{m a}{2}}. \quad (428)$$

Дифференциальные уравнения равновесия с учетом выражений (423) и (426) удовлетворяются тождественно при подстановке в них напряжений в виде (427). Следовательно, решение (427) является точным в пределах принятых допущений.

Согласно условиям (423) имеем  $a = -\delta$ . Поэтому из равенства (182) получим:

$$m = \sqrt{\delta(\delta - 2)}. \quad (429)$$

Отсюда следует, что решение (427) действительно, если  $\delta = \frac{2\mu}{\alpha} \geq 2$

или  $\mu \geq \alpha$ . Из материала предыдущей главы известно, что это соотношение представляет собой условие естественного захвата при прокатке. Таким образом, решение (427) действительно для реально осуществимых условий прокатки. Вместе с тем в решении (185) или в решении (427), согласно равенству (182), величина  $m = \sqrt{a(a+2)} = \sqrt{b(b+2)}$ , т. е. величины  $a, b$  являются корнями квадратного уравнения:  $x^2 + 2x - m^2 = 0$ .

В рассматриваемом случае  $x_1 = a = -\delta$ ;  $x_2 = b = -n$ . Поскольку величина  $\delta \geq 2$ , при которой величина  $m = \sqrt{\delta(\delta - 2)}$  имеет вещественное значение, представляет собой условие захвата, то ее уместно использовать для уточнения второго корня приведенного выше квадратного уравнения, который равен  $b = -1 - \sqrt{1 + m^2} = -n$ , т. е.  $n = 1 + \sqrt{1 + m^2}$ .

Принимая во внимание уравнение (426), получим:  $n = 1 + \sqrt{(\delta - 1)^2} = \delta$ . Но в гл. V мы условились, что  $0 \leq n \leq 1$ . Поэтому, если принять обычный (выпуклый) вид кривой упрочнения, необходимо принять  $\nu = -1$ .

$$\delta = \frac{1}{n}. \quad (430)$$

Для зоны опережения можно провести аналогичные расчеты. Формулы для напряжений имеют в этом случае такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{\rho\theta}}{K} &= \frac{-\mu}{\delta + n} \left[ (\delta + 1) \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^n - (1 - n) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right] \varphi_1; \\ \frac{\sigma_\theta}{K} &= - \left\{ \frac{1}{\delta + n} \left[ (\delta + \frac{1}{n}) \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^n - (1 - n) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right] + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right\} \varphi_2 + \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n; \\ \frac{\sigma_\rho}{K} &= \frac{\sigma_\theta}{K} + \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n. \end{aligned} \right\} \quad (431)$$

В процессе расчета выясняется, что в зоне опережения  $a = \delta$ ;  $b = -n$ . В результате будем иметь:

$$m = \sqrt{\delta(\delta+2)}. \quad (432)$$

Таким образом, в зоне опережения условия захвата процесс прокатки не лимитируют.

Сумма корней квадратного уравнения равна коэффициенту при неизвестном в первой степени с обратным знаком. Поэтому из уравнения  $x^2 + 2x - m^2 = 0$ , корнями которого являются  $x_1 = a = \delta$ ,  $x_2 = b = -n$ , получим:  $\delta - n = -2$  или  $n = \delta + 2$ .

Принимая во внимание, что  $0 \leq n \leq 1$ , мы должны принять для «выпуклого» закона упрочнения  $\nu = -1$ . Окончательно будем иметь

$$\delta = \frac{1}{n} - 2. \quad (433)$$

Из соотношений (430) и (433) следует, что величина параметра  $\delta$  зависит от величины  $n$ ; иными словами, условия статического равновесия обязывают выбирать коэффициент трения и угол захвата при прокатке с учетом закона упрочнения.

Напряжения при прокатке были определены с использованием условия минимума нормальных напряжений на оси прокатываемой полосы. Если в качестве исходного принять условие минимума касательных напряжений при  $\theta = 0$ , т. е. считать, что  $A = B$ , то мы снова получим решения (427) и (431) с тем, однако, различием, что в этих решениях функции от  $\theta$  будут иметь следующие значения:

$$\varphi_1 = \frac{\operatorname{ch} m \theta}{\operatorname{ch} \frac{m \alpha}{2}}; \quad \varphi_2 = \frac{\operatorname{sh} m \theta}{\operatorname{sh} \frac{m \alpha}{2}}. \quad (434)$$

Перейдем теперь к определению напряжений в зоне прилипания. Здесь касательные напряжения на поверхности контакта достигают своего максимального значения, и поэтому условие пластичности имеет вид:  $\sigma_r + \sigma_\theta = 0$ .

Следовательно, для определения напряжений в объеме полосы необходимо воспользоваться формулами (183), а в качестве граничных условий принять формулы (414) и (417):

$$\tau_{r\theta} = \frac{K}{2} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n; \quad \sigma_\theta = \sigma_{от} - \frac{K}{\alpha n} \left[ \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n - \left( \frac{r_0}{r_{от}} \right)^n \right]. \quad (435)$$

Сначала будем считать, что степень неравномерности деформации по высоте полосы невелика, т. е. примем условие минимума нормальных напряжений на продольной оси симметрии, где в этом случае  $\tau_{r\theta} = 0$ .

В формулы (435) входит лишь один показатель степени  $-n$ .

Поэтому в формулах (183) можно считать константу  $C_1=0$ . Тогда получаем:

$$\tau_{p\theta} = C_2 \rho^b \operatorname{sh} m\theta; \quad \sigma_p = -\frac{m}{b} C_2 \rho^b \operatorname{ch} m\theta + C. \quad (436)$$

Для поверхностей контакта (при  $\theta = \frac{\alpha}{2}$ ) напряжения, выражаемые равенствами (435) и (436), одинаковы; поэтому

$$-C_2 \rho^b \operatorname{sh} \frac{m\alpha}{2} = -\frac{K}{2} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n;$$

$$-\frac{m}{b} C_2 \rho^b \operatorname{ch} \frac{m\alpha}{2} + C = \sigma_{от} - \frac{K}{\alpha n} \left[ \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n - \left(\frac{r_0}{r_{от}}\right)^n \right].$$

Отсюда следует ряд соотношений:

$$\rho^b = \rho^{-n}; \quad b = -n; \quad C = \frac{K}{\alpha n} \left(\frac{r_0}{r_{от}}\right)^n + \sigma_{от};$$

$$C_2 = \frac{K r_0^n}{2 \operatorname{sh} \frac{m\alpha}{2}}; \quad C_2 = -\frac{b}{m} \frac{K r_0^n}{\alpha n \operatorname{ch} \frac{m\alpha}{2}}.$$

Приравняв правые части последних равенств и принимая во внимание, что  $b=-n$ , получим:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{m\alpha} \operatorname{th} \frac{m\alpha}{2}. \quad (437)$$

Соотношение (437) является частным случаем равенства (426): при  $\mu=0,5$  они совпадают. Соотношения (426) и (437) являются фундаментальными: если они соблюдаются, то дифференциальные уравнения равновесия тождественно удовлетворяются и решение задачи является точным в пределах принятых допущений. Окончательно будем иметь для участка зоны прилипания, граничащего с зоной отставания:

$$\frac{\tau_{p\theta}}{K} = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n \Phi_1; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{\sigma_p}{K} = \frac{\sigma_{от}}{K} - \frac{1}{\alpha n} \left[ \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n - \left(\frac{r_0}{r_{от}}\right)^n \right] \Phi_2. \quad (438)$$

Аналогично для участка зоны прилипания, граничащего с зоной опережения, найдем:

$$\frac{\tau_{p\theta}}{K} = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n \Phi_1; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{\sigma_p}{K} = \frac{\sigma_{оп}}{K} - \frac{1}{\alpha n} \left[ \left(\frac{r_0}{r_{оп}}\right)^n - \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n \right] \Phi_2. \quad (439)$$

При отсутствии упрочнения  $n=0$ . Используя предельный переход из равенств (427) и (431), получим следующие выражения для расчета напряжений в зонах отставания и опережения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{p\theta}}{K} &= -\frac{\mu}{\delta} \left[ (\delta-1) \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^\delta + 1 \right] \Phi_1; \\ \frac{\sigma_\theta}{K} &= -\left\{ \frac{1}{\delta} \left[ (\delta-1) \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^\delta + 1 \right] + \ln \frac{r_0}{\rho} - 1 \right\} \Phi_2 + \ln \frac{r_0}{\rho} - 1; \\ \frac{\sigma_p}{K} &= -\left\{ \frac{1}{\delta} \left[ (\delta-1) \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^\delta + 1 \right] + \ln \frac{r_0}{\rho} - 1 \right\} \Phi_2 + \ln \frac{r_0}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (440)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{\rho\theta}}{K} &= -\frac{\mu}{\delta} \left[ (\delta + 1) \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta - 1 \right] \Phi_1; \\ \frac{\sigma_\theta}{K} &= - \left\{ \frac{1}{\delta} \left[ (\delta + 1) \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta - 1 \right] + \ln \frac{r_0}{\rho} - 1 \right\} \Phi_2 + \ln \frac{r_0}{\rho} - 1; \\ \frac{\sigma_\rho}{K} &= - \left\{ \frac{1}{\delta} \left[ (\delta + 1) \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta - 1 \right] + \ln \frac{r_0}{\rho} - 1 \right\} \Phi_2 + \ln \frac{r_0}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (441)$$

Для зоны прилипания будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{\rho\theta}}{K} &= -\frac{1}{2} \Phi_1; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{\sigma_\rho}{K} = \frac{\sigma_{от}}{K} - \frac{\Phi_2}{\alpha} \ln \frac{r_{от}}{\rho}; \\ \frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{\sigma_\rho}{K} &= \frac{\sigma_{оп}}{K} - \frac{\Phi_2}{\alpha} \ln \frac{\rho}{r_{оп}}. \end{aligned} \right\} \quad (442)$$

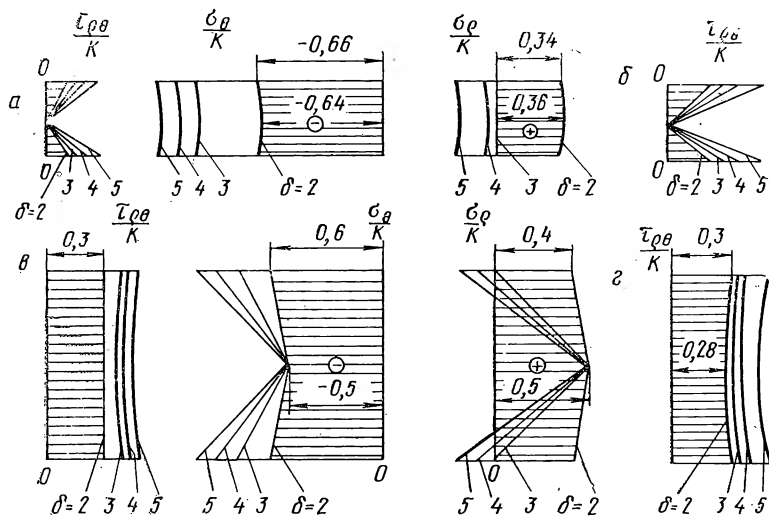
Здесь значения  $\sigma_{от}$  и  $\sigma_{оп}$  получены из выражений (440) и (441), если в выражениях для  $\sigma_\theta$  считать соответственно  $\rho = r_{от}$  и  $\rho = r_{оп}$ .

С использованием формул (440) и (441) на рис. 147 построены эпюры, характеризующие изменение напряжений по высоте тела в зонах отставания и опережения. Из рассмотрения рисунка следует, что эпюры напряжений по высоте тела, полученные из условий минимума нормальных напряжений ( $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , определяются равенствами (428)) значительно отличаются от эпюр, полученных из условия минимума касательных напряжений [ $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  определяются равенствами (434)].

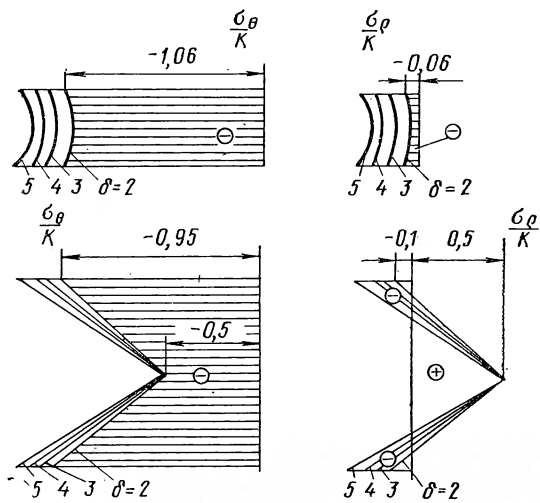
В первом случае касательные напряжения изменяются от максимума на контактной поверхности до нуля в средней части по высоте очага деформации. Нормальные напряжения уменьшаются к середине высоты полосы незначительно. Поэтому, принимая во внимание малую величину касательных напряжений по сравнению с нормальными, в этом случае в первом приближении можно считать справедливой гипотезу плоских сечений. Такая закономерность справедлива как для зоны отставания, так и для зоны опережения (рис. 147, а, б). Во втором случае касательные напряжения по высоте тела изменяются мало, а нормальные напряжения — значительно.

При этом как в зоне отставания, так и в зоне опережения напряжения  $\sigma_\theta$  уменьшаются при переходе от контактной поверхности к центральным слоям прокатываемой полосы. Интенсивность этого уменьшения увеличивается с ростом величины  $\delta$  (рис. 147, в, г). Сжимающие продольные напряжения  $\sigma_\rho$  уменьшаются до нуля в промежуточном сечении, положение которого смещается к горизонтальной оси симметрии с ростом величины  $\delta$ , а затем эти напряжения, изменив знак, достигают максимального значения на продольной оси симметрии прокатываемой полосы. Таким образом, в рассматриваемом случае продольные напряжения в средней части по высоте являются растягивающими. Известно, что при прокатке крупных сечений с малыми обжатиями в ряде случаев наблюдаются периодически повторяющиеся в сред-

ней части по высоте полосы разрушения, так называемые «скворечины». Из рассмотренного следует, что появление этих дефектов связано с наличием продольных растягивающих напряжений в местах их образования.



Зона отстаивания



Зона опережения

Рис. 147. Изменение напряжений по высоте тела в зонах отстаивания (а, б) и опережения (в, г). Эпюры а, б получены из условия минимума нормальных напряжений; эпюры в, г — из условия минимума касательных напряжений,  $h_0/h_1 = 1,645$



(чему соответствует неравенство  $\frac{r_0}{\rho} > 2,72$  и относительное обжатие  $\varepsilon > 0,63$ ), то и поперечные напряжения на продольной оси являются растягивающими. Сочетание продольных и поперечных растягивающих напряжений может привести к образованию трещин. Однако в условиях нормального процесса прокатки такое сочетание напряжений является довольно редким.

На основании приведенных выше формул и эпюр напряжений (рис. 147) можно констатировать, что по характеру напряженного состояния при прокатке можно выделить прокатку тонких полос, для которых в первом приближении справедлива гипотеза плоских сечений, и прокатку высоких полос, для которых распределение напряжений и деформаций по высоте неравномерно.

На рис. 148 приведены эпюры напряжений, возникающих при прокатке низких полос, когда зона прилипания отсутствует. Из

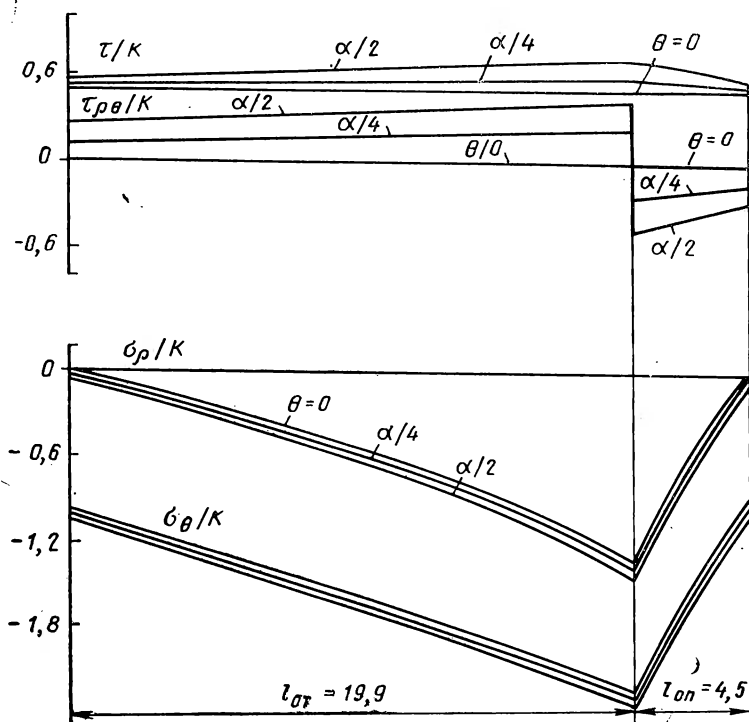


Рис. 148. Эпюры напряжений при прокатке тонких полос:  
 $h_0=18$  мм,  $h_1=7$  мм,  $D=200$  мм,  $\alpha=0,246$ ,  $\mu=0,15$ ,  $\delta=4,08$

рассмотрения эпюр ясно, что напряжения увеличиваются от входного и выходного сечений к нейтральному. Изменение напряжений по высоте прокатываемой полосы находится в соответствии с рис. 147, а, б. На рис. 147 и 148 приведены эпюры максимальных касательных напряжений  $\tau$ , под влиянием которых собственно и

осуществляется пластическая деформация. Эти напряжения определяются по формуле (44); на рис. 147, а, б и 148 показано, что максимальные скалывающие напряжения сравнительно мало изменяются по объему очага деформации. При этом во всех точках соблюдается необходимое для осуществления пластической деформации соотношения  $\tau \geq \frac{K}{2}$ . В связи с тем, что при  $\theta=0$   $\tau = K/2$ , а при  $\theta=\alpha/2$   $\tau \geq K/2$ , интенсивность пластической деформации в поверхностных слоях будет всегда несколько большей, чем в центральных слоях полосы.

На рис. 149 изображены эпюры контактных нормальных и максимальных скалывающих напряжений, возникающих при прокатке высоких полос при наличии зон прилипания. Как и при прокатке низких полос, нормальные напряжения  $\sigma_p$  и  $\sigma_\theta$  увеличиваются по направлению к нейтральному сечению. При этом на границах зоны прилипания напряжения  $\sigma_p$  скачкообразно (а в действительности в узкой полосе значений координаты  $\rho$ ) достигают величины напряжений  $\sigma_\theta$ . Это является результатом принятой в расчетах схемы, физический смысл которой заключается в изменении соотношения между напряжениями, как только силы трения на контактной поверхности достигнут своего максимального значения.

Касательные напряжения  $\tau_{p\theta}$  в зоне прилипания достигают своего максимального значения  $K/2$  и остаются постоянными. Максимальные скалывающие напряжения в зоне прилипания претерпевают характерный «провал», принимая минимально необходимое для пластической деформации значение, равное  $K/2$ .

## 2. Остаточные напряжения

Перепишем равенства (440) для зоны отставания в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{p\theta}}{K} &= -\frac{\mu}{\delta} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta + 1 \right] \Phi_1; \\ \frac{\sigma_\theta}{K} &= -\frac{1}{\delta} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta + 1 \right] \Phi_2 (1 - \eta) + (1 - \Phi_2) \left( \ln \frac{r_0}{\rho} - 1 \right); \\ \frac{\sigma_p}{K} &= -\left\{ \frac{1}{\delta} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta + 1 \right] - 1 \right\} \Phi_2 (1 - \eta) + \\ &+ (1 - \Phi_2) \ln \frac{r_0}{\rho} + \Phi_2 \eta. \end{aligned} \right\} \quad (443)$$

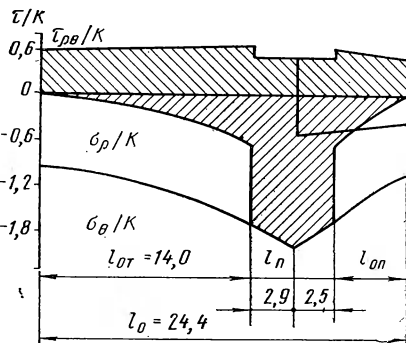


Рис. 149. Эпюры напряжений при прокатке высоких полос,  $h_0=13$  мм,  $h_1=7$  мм,  $D=200$  мм,  $\alpha=0,246$ ,  $\mu=0,3$ ,  $\delta=2,45$

В этих равенствах  $\eta$  — численный коэффициент, зависящий от параметров прокатки, определение величины которого будет приведено ниже.

Легко убедиться, что первые члены выражений для нормальных напряжений представляют собой напряжения от действия внешних сил (в. с.), а последующие — напряжения от неравномерности деформации (н. д.)

В процессе прокатки материал находится в пластическом состоянии, и следовательно, в любой точке очага деформации должно выполняться условие пластичности. В данном случае это имеет место; действительно, из выражений (443) следует, что

$$\left(\frac{\sigma_p}{K} - \frac{\sigma_\theta}{K}\right)_{в.с.} = \varphi_2 (1 - \eta); \quad \left(\frac{\sigma_p}{K} - \frac{\sigma_\theta}{K}\right)_{н.д.} = (1 - \varphi_2) + \varphi_2 \eta;$$

$$\frac{\sigma_p}{K} - \frac{\sigma_\theta}{K} = \left(\frac{\sigma_p}{K} - \frac{\sigma_\theta}{K}\right)_{в.с.} + \left(\frac{\sigma_p}{K} - \frac{\sigma_\theta}{K}\right)_{н.д.} = \varphi_2 (1 - \eta) + [(1 - \varphi_2) + \varphi_2 \eta] = 1.$$

После осуществления процесса прокатки внешние силы не действуют и напряжения от них исчезают. Напряжения, вызываемые неравномерной деформацией, переходят в остаточные. Эти напряжения можно получить из выражений (443) в следующем виде:

$$\frac{\sigma_\theta}{K} = (1 - \varphi_2) \left(\ln \frac{r_0}{r_1} - 1\right); \quad \frac{\sigma_p}{K} = (1 - \varphi_2) \ln \frac{r_0}{r_1} + \varphi_2 \eta. \quad (444)$$

Из геометрических соотношений следует, что в сечении выхода из очага деформации  $\frac{r_0}{r_1} = \frac{h_0}{h_1}$  и угол  $\theta$  в равенствах (428) или (434) для  $\varphi_2$  равен  $\theta = \alpha \frac{y}{h_1}$ . В результате равенство (444) приобретает следующий вид:

$$\frac{\sigma_y}{K} = (1 - \varphi_2) \left(\ln \frac{h_0}{h_1} - 1\right); \quad \frac{\sigma_x}{K} = (1 - \varphi_2) \ln \frac{h_0}{h_1} + \eta \varphi_2. \quad (445)$$

В этих выражениях коэффициент  $\eta$  изменяется от нуля до единицы. При  $\eta = 1$  имеем предельную величину напряжений, вызываемых неравномерной деформацией, которым будут соответствовать после снятия внешних сил максимальные остаточные напряжения. При  $\eta = 0$  получим предельную величину напряжений от внешних сил, при которых напряжения, возникающие за счет неравномерной деформации, равны нулю. Последний случай возможен при прокатке тонких полос с достаточно большими обжатиями. При этом металл между валками и во внеконтактных зонах будет находиться в пластическом состоянии. При всех других значениях  $\eta$ , т. е. при  $0 < \eta < 1$ , металл будет находиться в упругом состоянии.

Аналогичным образом получим соотношение (445) для зоны опережения. Из равенств (427) и (431) найдем выражения для

остаточных напряжений после прокатки металла, обладающего упрочнением:

$$\frac{\sigma_x}{K} = (1 - \Phi_2) \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{h_0}{h_1} \right)^n; \quad \frac{\sigma_x}{K} = (1 - \Phi_2) \frac{1}{n} \left( \frac{h_0}{h_1} \right)^n + \Phi_2 \left( \frac{h_0}{h_1} \right)^n \eta.$$

Из этих равенств следует, что с ростом степени упрочнения остаточные напряжения после прокатки увеличиваются.

Величину коэффициента  $\eta$  найдем из условия равенства нулю суммы проекций на ось  $x$  всех сил в любом поперечном сечении образца:

$$2 \int_0^{h/2} \sigma_x dy = 0.$$

Если принимать во внимание условие минимума нормальных напряжений по высоте полосы, т. е. допустить относительно равномерное распределение напряжений по высоте (большие обжатия, тонкие полосы), то величину  $\Phi_2$  необходимо определять по формуле (428), и тогда на основании уравнения (445) имеем:

$$\frac{\eta - \ln \frac{h_0}{h_1}}{\operatorname{ch} \frac{m\alpha}{2}} \int_0^{h_1/2} \operatorname{ch} m\alpha \frac{y}{h_1} dy + \ln \frac{h_0}{h_1} \int_0^{h_1/2} dy = 0.$$

Интегрируя это уравнение и подставляя пределы, получим:

$$\left( \eta - \ln \frac{h_0}{h_1} \right) \frac{2}{m\alpha} \operatorname{th} \frac{m\alpha}{2} + \ln \frac{h_0}{h_1} = 0.$$

$$\text{Отсюда } \eta = \left( 1 - \frac{m\alpha}{2} \operatorname{cth} \frac{m\alpha}{2} \right) \ln \frac{h_0}{h_1}. \quad (446)$$

Используя это выражение, из уравнений (445) будем иметь:

$$\frac{\sigma_x}{K} = \left( 1 - \Phi_2 \frac{m\alpha}{2} \operatorname{cth} \frac{m\alpha}{2} \right) \ln \frac{h_0}{h_1}.$$

Если исходить из условия минимума касательных напряжений по высоте полосы, т. е. допустить неравномерное распределение нормальных напряжений по высоте (малые обжатия) высокой полосы, то величину  $\Phi_2$  необходимо определять по формуле (434), и тогда на основании (445) имеем:

$$\frac{\eta - \ln \frac{h_0}{h_1}}{\operatorname{sh} \frac{m\alpha}{2}} \int_0^{\frac{h_1}{2}} \operatorname{sh} m\alpha \frac{y}{h_1} dy + \ln \frac{h_0}{h_1} \int_0^{\frac{h_1}{2}} dy = 0.$$

Интегрируя и подставляя пределы, найдем:

$$\left( \eta - \ln \frac{h_0}{h_1} \right) \frac{2}{m\alpha} \frac{\operatorname{ch} \frac{m\alpha}{2} - 1}{\operatorname{sh} \frac{m\alpha}{2}} + \ln \frac{h_0}{h_1} = 0.$$

$$\text{Отсюда } \eta = \ln \frac{h_0}{h_1} \left( 1 - \frac{m\alpha}{2} \frac{\text{sh} \frac{m\alpha}{2}}{\text{ch} \frac{m\alpha}{2} - 1} \right). \quad (447)$$

Используя выражение (447), из уравнения (445) получим:

$$\frac{\sigma_x}{K} = \ln \frac{h_0}{h_1} \left( 1 - \Phi_2 \frac{m\alpha}{2} \frac{\text{sh} \frac{m\alpha}{2}}{\text{ch} \frac{m\alpha}{2} - 1} \right).$$

Окончательно имеем следующие выражения для определения остаточных напряжений:

после прокатки низких полос

$$\frac{\sigma_y}{K} = \left( 1 - \frac{\text{ch} m\alpha \frac{y}{h}}{\text{ch} \frac{m\alpha}{2}} \right) \left( \ln \frac{h_0}{h_1} - 1 \right); \quad \frac{\sigma_x}{K} = \left( 1 - \frac{m\alpha}{2} \frac{\text{ch} m\alpha \frac{y}{h}}{\text{sh} \frac{m\alpha}{2}} \right) \ln \frac{h_0}{h_1}; \quad (448)$$

после прокатки высоких полос:

$$\frac{\sigma_y}{K} = \left( 1 - \frac{\text{sh} m\alpha \frac{y}{h}}{\text{sh} \frac{m\alpha}{2}} \right) \left( \ln \frac{h_0}{h_1} - 1 \right); \quad \frac{\sigma_x}{K} = \left( 1 - \frac{m\alpha}{2} \frac{\text{sh} m\alpha \frac{y}{h}}{\text{ch} \frac{m\alpha}{2} - 1} \right) \ln \frac{h_0}{h_1} \quad (449)$$

Используя равенства (448) и (449), легко убедиться, что первое из дифференциальных уравнений равновесия тождественно удовлетворяется, а второе приводится к виду:  $\text{sh} (m\alpha y/h) = 0$ .

Таким образом, второе уравнение равновесия тождественно удовлетворяется только в центре сечения. Наибольшая погрешность получается при значении  $y = h/2$ . Здесь  $\text{sh} \frac{m\alpha}{2} = 0$ . Вспомним, что

$$\frac{m\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\delta(\delta + 2)} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{4\mu^2}{\alpha^2} + 4 \frac{\mu}{\alpha}} = \sqrt{\mu^2 + \mu\alpha}.$$

Отсюда видно, что при малых значениях  $\mu$  и  $\alpha$  можно принять:  $\text{sh} m\alpha/2 \approx 0$ , т. е. можно считать, что второе уравнение равновесия удовлетворяется с достаточной точностью и, следовательно, наше приближенное решение считать справедливым.

На рис. 150 с использованием уравнений (448), (449) построены эпюры остаточных напряжений в полосе после прокатки. Из рассмотрения рисунка следует, что нежелательно производить прокатку высоких полос с малыми обжатиями. В этом случае после прокатки в полосе будут существовать значительные по величине остаточные напряжения, причем в средней ее части по высоте эти напряжения будут растягивающими (рис. 150,а). При прокатке тонких полос деформация более равномерна и остаточные напряжения (рис. 150,б) будут значительно меньше, чем при прокатке высоких полос. Но и в этом случае в средней части по

высоте существуют растягивающие напряжения, однако их величина незначительна и они не представляют опасности для последующей службы изделий, изготовленных из прокатанной полосы.

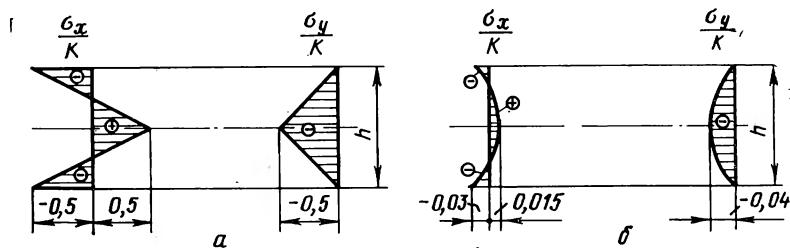


Рис. 150. Эпюры остаточных напряжений после прокатки высоких (а) и низких (б) полос,  $\mu=0,3$ ;  $\delta=2$ ,  $\alpha=0,3$ ,  $m = \sqrt{\delta(\delta+2)}=2,84$ ,  $m \alpha/2=0,427$ ,  $\ln \frac{h_0}{h_1} = 1/2$ ,  $\frac{\Delta h}{h_0} = 0,395$

Изложенный здесь метод определения остаточных напряжений можно применить при анализе процессов сжатия, волочения и прессования.

### 3. Зоны затрудненной деформации

На поверхностях контакта металла с валками в точках, соответствующих границе между зоной отставания и прилипания, имеем следующее соотношение:

$$\sigma_{от} = -\frac{\tau_{\rho\theta}}{\mu} = -\frac{K}{2\mu} \left(\frac{r_0}{r_{от}}\right)^n. \quad (450)$$

Вместе с тем, согласно формулам для определения нормальных напряжений (427), имеем:

$$\sigma_{от} = -\frac{1}{\delta-n} \left[ (\delta-1) \left(\frac{r_0}{r_{от}}\right)^\delta + (1-n) \left(\frac{r_0}{r_{от}}\right)^n \right].$$

Примем, что соотношение (450) справедливо и внутри очага деформации. Тогда можно записать:

$$\left\{ \frac{1}{\delta-n} \left[ (\delta-1) \left(\frac{r_0}{\rho_{от}}\right)^\delta + (1-n) \left(\frac{r_0}{\rho_{от}}\right)^n \right] + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \left(\frac{r_0}{\rho_{от}}\right)^n \right\} \Phi_2 + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \left(\frac{r_0}{\rho_{от}}\right)^n = \frac{K}{2\mu} \left(\frac{r_0}{\rho_{от}}\right)^n \Phi_1.$$

Из этого соотношения получим уравнение для радиуса кривой, являющейся границей между зонами прилипания и отставания, в следующем виде

$$\frac{\rho_{от}}{r_0} = \left[ \frac{(\delta-1) \Phi_2}{\frac{\delta-n}{2\mu} \Phi_1 + \frac{1-n}{n} (\delta-n-\delta \Phi_2)} \right]^{\frac{1}{\delta-n}}.$$

Аналогичным образом получим уравнение границы между зонами прилипания и опережения:

$$\frac{\rho_{оп}}{r_1} = \left[ \frac{\frac{\delta+n}{2\mu} \varphi_1 + \frac{1-n}{n} (\delta+n-\delta\varphi_1)}{(\delta+1)\varphi_2} \right]^{\frac{1}{\delta+n}}$$

Расчеты показывают, что без особой погрешности во втором слагаемом знаменателя первого равенства и во втором слагаемом числителя равенства для  $\rho_{оп}/r_0$  можно принять максимальное значение функции  $\varphi_2=1$ . В таком случае получим:

$$\frac{\rho_{от}}{r_0} = \left[ \frac{(\delta-1)\varphi_2}{\frac{\delta-n}{2\mu} \varphi_1 - (1-n)} \right]^{\frac{1}{\delta-n}}; \quad \frac{\rho_{оп}}{r_1} = \left[ \frac{\frac{\delta-n}{2\mu} \varphi_1 + (1-n)}{(\delta+1)\varphi_2} \right]^{\frac{1}{\delta+n}}$$

Расчеты показывают также, что наличие упрочнения мало влияет на положение границ зоны прилипания. Будем считать поэтому в последних равенствах  $n=0$ . Тогда получим:

$$\frac{\rho_{от}}{r_0} = \left[ \frac{(\delta-1)\varphi_2}{\frac{\delta}{2\mu} \varphi_1 - 1} \right]^{\frac{1}{\delta}}; \quad \frac{\rho_{оп}}{r_1} = \left[ \frac{\frac{\delta}{2\mu} \varphi_1 + 1}{(\delta+1)\varphi_2} \right]^{\frac{1}{\delta}} \quad (451)$$

При  $\varphi_1=\varphi_2=1$  эти формулы сводятся к равенствам (421).

Найдем значения функции  $\varphi_n$  и угла  $\theta_n$ , при которых кривые (451) пересекаются. Для этого приравняем правые части равенств (451):

$$r_0^{\delta} \frac{(\delta-1)\varphi_2}{\frac{\delta}{2\mu} \varphi_1 - 1} = r_1^{\delta} \frac{\frac{\delta}{2\mu} \varphi_1 + 1}{(\delta+1)\varphi_2}$$

Отсюда после простых преобразований найдем:

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{\left(\frac{\delta}{2\mu} \varphi_1\right)^2 - 1}{\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{\delta} (\delta^2 - 1)}}$$

Определим приближенные значения функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  для случая прокатки высоких полос.

Как было отмечено, величина  $m\alpha/2$  всегда мала по сравнению с единицей. Поэтому из уравнения (434) получим:

$$\varphi_1 \approx 1; \quad \varphi_2 \approx \frac{2\theta}{\alpha} \quad (452)$$

Таким образом, в точке пересечения кривых (451) имеем:

$$\varphi_n = \frac{2\theta_n}{\alpha} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\delta}{2\mu}\right)^2 - 1}{\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^\delta (\delta^2 - 1)}} \quad (453)$$

Кривые (451), пересекающиеся в точке, определяемой равенством (453), ограничивают зону затрудненной деформации. Действительно, граница зон затрудненной деформации при прокатке определяется точками, в которых разность нормальных напряжений обращается в нуль. На поверхности контакта и внутри полосы они соответствуют точкам, где нормальные напряжения достигают значения  $\sigma_{от}$  и  $\sigma_{оп}$ . Здесь, согласно предыдущему, имеем

$$\sigma_p - \sigma_\theta = 0.$$

Принимая во внимание условие плоской деформации  $\sigma_z = \frac{\sigma_p + \sigma_\theta}{2}$ , имеем для зоны затрудненной деформации следующее равенство:

$$-\sigma_p = -\sigma_\theta = -\sigma_z,$$

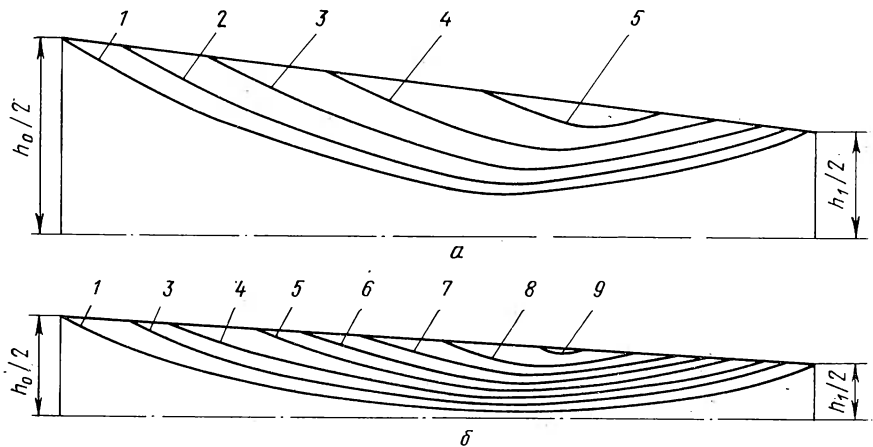


Рис. 151. Зоны затрудненной деформации при прокатке ( $D=200$  мм):  
 а -  $l/h=2$ ,  $h_0=19,5$ ,  $h_1=10,5$  мм,  $\alpha=0,3$ ,  $l=30$  мм; б -  $l/h=5$ ,  $h_0=3,02$  мм;  
 $h_1=1,68$  мм,  $\alpha=0,12$ ,  $l=12$  мм

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mu$	0,5	0,45	0,4	0,35	0,3	0,275	0,25	0,225	0,2



т. е. все напряжения являются напряжениями сжатия. Вместе с тем в зонах затрудненной деформации максимальные скальвающие напряжения

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_p - \sigma_\theta}{2}\right)^2} + \tau_{p\theta}^2 = \tau_{p\theta}$$

имеют минимально возможное для осуществления пластической деформации значение. Наличие значительных и равных по величине нормальных напряжений и минимально возможных для пластического течения скальвающих напряжений и обуславливает появление зон затрудненной деформации при прокатке. Таким образом, равенства (451) представляют собой уравнения кривых, описывающих зоны затрудненной деформации.

На рис. 151 с использованием уравнений (451) построены зоны затрудненной деформации для различных случаев прокатки. Из рассмотрения рисунка следует, что величина зон прилипания и затрудненной деформации увеличивается с ростом коэффициента трения и при  $\mu = 0,5$  зона прилипания распространяется на всю контактную поверхность, а объем зон затрудненной деформации максимален. Вместе с тем из рассмотрения рис. 151 видно, что с ростом отношения  $l/h$  объем зон затрудненной деформации возрастает по отношению к объему очага деформации.

#### 4. Нейтральное сечение и очаг деформации

Нейтральное сечение найдем из условия того, что в каждой его точке нормальные напряжения, вычисляемые по формулам для зон отставания и опережения, одинаковы. Допустим на первом этапе отсутствие зоны прилипания. Приравнивая правые части равенств (427) и (431), для напряжений  $\sigma_\theta$  при  $\rho = \rho_H$  получим:

$$\frac{1}{\delta - n} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho_H} \right)^\delta + (1 - n) \left( \frac{r_0}{\rho_H} \right)^n \right] = \frac{1}{\delta + n} \left[ (\delta + 1) \left( \frac{\rho_H}{r_1} \right)^\delta - (1 - n) \left( \frac{r_0}{\rho_H} \right)^n \right].$$

После несложных преобразований будем иметь:

$$\left( \frac{\rho_H}{r_1} \right)^{2\delta} - \frac{2\delta}{\delta - n} \frac{1 - n}{\delta + 1} \left( \frac{\rho_H}{r_1} \right)^\delta \left( \frac{\rho_H}{r_1} \right)^{-n} - \frac{\delta - 1}{\delta + 1} \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^{\delta - n} = 0.$$

В этом уравнении величины  $\left( \frac{\rho_H}{r_1} \right)^{-n} = \left( \frac{r_1}{\rho_H} \right)^n \approx 1$ . Тогда

$$\left( \frac{\rho_H}{r_1} \right)^{2\delta} - \frac{2\delta}{\delta + 1} \frac{1 - n}{\delta - n} \left( \frac{\rho_H}{r_1} \right)^\delta - \frac{\delta - 1}{\delta + 1} \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^{\delta - n} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\rho_H}{r_1} = \left[ \frac{\delta}{\delta + 1} \frac{1 - n}{\delta - n} + \sqrt{\left( \frac{\delta}{\delta + 1} \frac{1 - n}{\delta - n} \right)^2 + \frac{\delta - 1}{\delta + 1} \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^{\delta - n}} \right]^{\frac{1}{\delta}}, \quad (454)$$

т. е. с ростом упрочнения нейтральное сечение сдвигается в сторону выхода из валков.

При  $n=0$  это уравнение (454) сводится к известному соотношению [2]:

$$\frac{\rho_n}{r_1} = \left[ \frac{1}{\delta+1} + \sqrt{\frac{1}{(\delta+1)^2} + \frac{\delta-1}{\delta+1} \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}}. \quad (455)$$

Из уравнения (454) и (455) следует, что положение нейтрального сечения при отсутствии зоны прилипания (т. е. при прокатке тонких полос) не зависит от координаты  $\theta$ , что вполне увязывается с реализуемой в этом случае при прокатке гипотезой плоских сечений.

Определим теперь нейтральное сечение при наличии зоны прилипания. Для случая прокатки высоких полос с использованием равенств (442) можно написать:

$$\frac{\sigma_{от}}{K} = -\frac{\tau_{\rho\theta}}{K\mu} = -\frac{1}{2\mu} \varphi_1 = -1.$$

Это следует из того, что для высоких полос  $\varphi_1 \approx 1$  во всех точках по высоте полосы, а при  $r_{от} = \rho_{от}$   $\mu = 0,5$ . Аналогично:  $\frac{\sigma_{оп}}{K} = -1$ . При принятых допущениях формулы для нормальных напряжений примут вид:

$$\frac{\sigma_\theta}{K} = -1 - \frac{1}{\alpha} \varphi_2 \ln \frac{\rho_{от}}{\rho}; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = -1 - \frac{1}{\alpha} \varphi_2 \ln \frac{\rho}{\rho_{оп}}.$$

В нейтральном сечении напряжения, определяемые по этим формулам, должны быть одинаковы. Отсюда считая, что  $\rho = \rho_n$ , получим:

$$\ln \frac{\rho_{от}}{\rho_n} = \ln \frac{\rho_n}{\rho_{оп}}$$

$$\text{или } \rho_n = \sqrt{\rho_{от} \rho_{оп}}. \quad (456)$$

На поверхности полосы  $\rho_{от} = r_{от}$ ,  $\rho_{оп} = r_{оп}$  и формула (456) сводится к формуле (422). Расчеты показывают, что положения нейтрального сечения и при наличии упрочнения мало зависят от координаты  $\theta$ .

Как и в процессе сжатия (см. гл. VIII), под высокими полосами подразумеваются такие, при прокатке которых на поверхности контакта существует зона прилипания, ограничивающая со стороны валков зону затрудненной деформации. Протяженность зоны прилипания и прилегающих к ним зон затрудненной деформации может изменяться с изменением параметров процесса прокатки. К низким полосам относятся все те полосы, при прокатке которых на поверхности контакта отсутствует зона прилипания, а имеются лишь зоны отставания и опережения (участки скольжения).

Из геометрических соотношений очага деформации (см. рис. 145) следует, что

$$h_{от} = h_0 - 2l_{от} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad h_{оп} = h_1 + 2l_{оп} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Но  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta h}{2l}$ , поэтому

$$h_{от} = h_0 - l_{от} \frac{\Delta h}{l}; \quad h_{оп} = h_1 + l_{оп} \frac{\Delta h}{l},$$

или

$$\frac{h_{от}}{h_0} = 1 - \frac{l_{от}}{l} \frac{\Delta h}{h_0}; \quad \frac{h_{оп}}{h_1} = 1 + \frac{l_{оп}}{l} \frac{\Delta h}{h_1}.$$

Отсюда

$$\frac{l_{от}}{l} = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{h_{от}}{h_0} \right); \quad \frac{l_{оп}}{l} = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \left( \frac{h_{оп}}{h_1} - 1 \right); \quad (457)$$

$$\text{где } \varepsilon = \frac{\Delta h}{h_0}.$$

Как следует из рис. 145, длина зоны прилипания

$$l_{п} = l - (l_{от} + l_{оп})$$

и ее относительная длина

$$\frac{l_{п}}{l} = 1 - \left( \frac{l_{от}}{l} + \frac{l_{оп}}{l} \right).$$

На основании равенств (457)

$$\frac{l_{п}}{l} = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{r_{от}}{r_0} - (1 - \varepsilon) \frac{h_{оп}}{h_1} \right]$$

$$\text{или } \frac{l_{п}}{l} = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{r_{от}}{r_0} - (1 - \varepsilon) \frac{r_{оп}}{r_1} \right]. \quad (458)$$

Из формул (421) следует, что при  $\mu=0,5$   $l_{п}=l$ , т. е. зона прилипания распространяется на всю контактную поверхность. При этом полосы с любым отношением длины очага деформации к высоте являются «высокими».

$$\text{При } \frac{r_{от}}{r_0} \leq (1 - \varepsilon) \frac{r_{оп}}{r_1} \quad (459)$$

зона прилипания отсутствует и это соответствует случаю прокатки «низких» полос.

Преобразуем выражения для напряжения  $\sigma_0$  из равенств (440) и (441) для зон отставания и опережения следующим образом:

$$\frac{\sigma_0}{K} = -\frac{\delta-1}{\delta} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta \Phi_2 - \left[ \frac{1}{\delta} \Phi_2 + \left( \ln \frac{r_0}{\rho} - 1 \right) \Phi_2 - \left( \ln \frac{r_0}{\rho} - 1 \right) \right];$$

$$\frac{\sigma_0}{K} = -\frac{\delta+1}{\delta} \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta \Phi_2 + \left[ \frac{1}{\delta} \Phi_2 - \left( \ln \frac{r_0}{\rho} - 1 \right) \Phi_2 + \left( \ln \frac{r_0}{\rho} - 1 \right) \right].$$

Если теперь в квадратных скобках считать функцию  $\varphi_2=1$ , т. е. принять ее крайнее максимальное значение, то соответственно получим

$$\frac{\sigma_\theta}{K} = -\frac{1}{\delta} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta \varphi_2 + 1 \right]; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = - \\ - \frac{1}{\delta} \left[ (\delta + 1) \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^\delta \varphi_2 - 1 \right]. \quad (460)$$

Если к этим выражениям добавить соотношение  $\tau_{r\theta} = -\mu\sigma_\theta$ , то будем иметь приближенное решение о напряженном состоянии при прокатке, в чем легко убедиться: дифференциальные уравнения равновесия при малых  $\frac{m\alpha}{2}$  приближенно удовлетворяются.

Рассмотрим теперь случай прокатки с отрицательным опережением, о котором было упомянуто в п. 2 гл. XI. В этом особом случае прокатки скольжение практически имеет место по всей поверхности контакта, высота полосы значительна, т. е. обжатия малы и в средней части по высоте полосы нейтральное сечение находится за пределами очага деформации, представляя собой поверхность, примерно перпендикулярную направлению прокатки (рис. 140, а).

Для решения этой задачи, следовательно, необходимо в зоне отставания допустить возможность применимости гипотезы плоских сечений в средней части по высоте тела, т. е. в выражении для  $\sigma_\theta$  из равенств (460) принять  $\varphi_2 \approx 1$ . В зоне опережения выражение для  $\sigma_\theta$  необходимо взять из уравнения (460) в предположении, что функция  $\varphi_2 \approx \frac{2\theta}{\alpha}$ . Таким образом, получим:

$$(\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho_H} \right)^\delta + 1 = (\delta + 1) \left( \frac{\rho_H}{r_1} \right)^\delta \varphi_2 - 1.$$

$$\text{Отсюда} \left( \frac{\rho_H}{r_1} \right)^{2\delta} - \frac{1}{\varphi_2 (\delta + 1)} \left( \frac{\rho_H}{r_1} \right)^\delta - \frac{(\delta - 1)}{\varphi_2 (\delta + 1)} \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^\delta = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения имеет вид:

$$\left( \frac{\rho_H}{r_1} \right)^\delta = \frac{1}{\varphi_2 (\delta + 1)} + \sqrt{\frac{1}{\varphi_2^2 (\delta + 1)^2} + \frac{(\delta - 1)}{\varphi_2 (\delta + 1)} \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^\delta}. \quad (461)$$

С использованием уравнения (461) на рис. 140, б построены кривые, из рассмотрения которых следует, что при переходе от контактной поверхности к середине полосы по высоте нейтральное сечение смещается таким образом, что выходит в конце концов за пределы очага деформации.

В сечении на некотором расстоянии от входа в очаг деформации пластические деформации «затухают» и полоса движется уже как жесткое тело. Положение сечения можно определить по величине утяжки заднего конца (см. п. 4 гл. XI). Сечение проходит там, где утяжка равна нулю (пунктирная линия на рис. 140, б).

## 5. Влияние внешних зон

На рис. 152 приведена зависимость среднего нормального контактного напряжения от отношения длины очага деформации к его высоте по экспериментальным данным М. А. Зайкова, Г. С. Никитина и Ю. И. Синельникова, И. Я. Шамец. Аналогичные результаты приводятся во многих других работах.

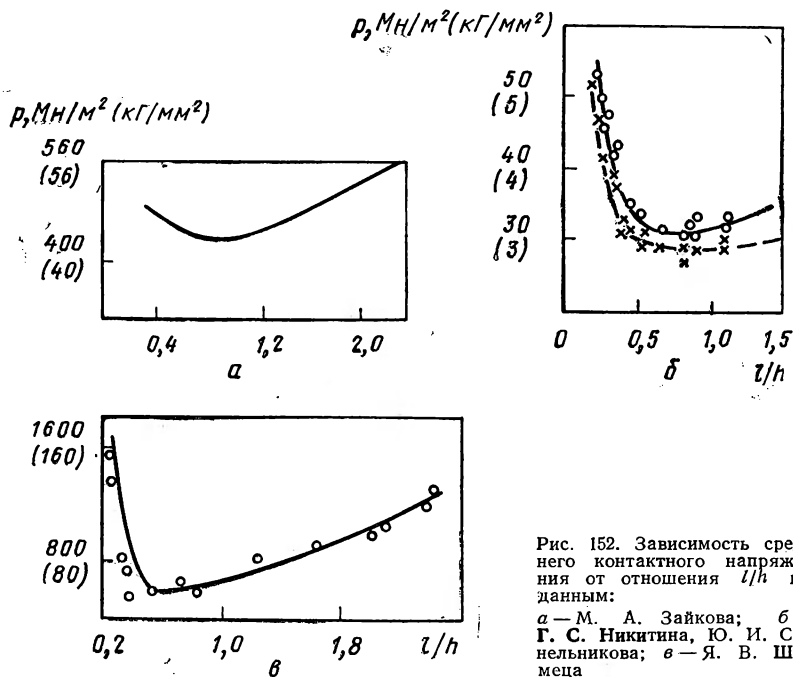


Рис. 152. Зависимость среднего контактного напряжения от отношения  $l/h$  по данным: а — М. А. Зайкова; б — Г. С. Никитина, Ю. И. Синельникова; в — Я. В. Ша-мца

Среднее давление при прокатке в зависимости от отношения  $l/h$  характеризуется вогнутой кривой, минимум которой обычно находится в пределах  $0,5 \leq \frac{l}{h} \leq 1,0$ .

Рост контактного напряжения с увеличением отношения  $l/h$  справа от точки минимума объясняется значительным влиянием сил трения на поверхности контакта, а также действием внешних частей полосы, которое является результатом неравномерной деформации по высоте полосы (п. 5, гл. XI). Это убедительно подтверждается опытами по прокатке образцов с внешними зонами и без них.

А. И. Целиков и В. В. Смирнов [2] рекомендуют полученную на основании опытных данных зависимость коэффициента, учитывающего влияние внешних зон от отношения  $l/h$ , в следующем виде:  $n_3 = (l/h)^{-0,4}$ .

М. А. Зайков [6] дополнил эту формулу, предложив учитывать влияние скорости деформации и отношения  $h/D$  таким образом:

$$n_3 = 0,6 \mu^{-0,03} \left(\frac{h}{D}\right)^{-0,25} \left(\frac{l}{h}\right)^{-0,4}.$$

А. К. Григорьев и А. Д. Карачунский [7], рассматривая условия равновесия продольных напряжений в сечении выхода при прокатке высокой полосы, получили следующую формулу:

$$n_3 = 1 + 0,656 \frac{h}{l} - 0,5 \operatorname{cth} \frac{l}{h}.$$

Аналогичную зависимость получил Во Мот, у которого  $n_3$  является функцией отношения  $l/h$  и угла захвата  $\alpha$ . Сомнительно, однако, чтобы влияние внешних зон при малых отношениях  $l/h$  было столь велико, как это следует из приведенных данных.

На основе положений теории размерностей с привлечением и опытных данных А. И. Целикова и В. С. Смирнова автором работы [3] получена следующая формула для определения коэффициента  $n_3$  в интервале изменения отношения  $0 \leq l/h \leq 1$ :

$$n_3 = 2 - \sqrt{\frac{l}{h}},$$

где  $h = \frac{h_0 + h_1}{2}$  и  $l = \sqrt{0,5 \Delta h D}$ .

При  $l/h \geq 1$  следует принимать  $n_3 = 1$ .

Как отмечалось ранее, при прокатке высоких полос за счет неравномерности деформации возникают продольные напряжения сжатия в верхней и нижней частях полосы по высоте, а в средней части — напряжения растяжения. Из условия равновесия следует, что

$$\int_0^{\alpha} \sigma_p d\theta = 0.$$

Для определения коэффициента влияния внешних зон при прокатке высоких полос точное значение функции  $\varphi_2$  заменим ее приближенными значением:  $\varphi_2 = 2\theta/\alpha$ .

Высокие полосы прокатывают в горячем состоянии. Поэтому допустим, что  $n=0$ , т. е. упрочнение металла отсутствует. Тогда на основании второго равенства системы (440) имеем для зоны отставания:

$$-\frac{2n_{30}}{\alpha} \left\{ \frac{1}{\delta} \left[ (\delta - 1) \left(\frac{r_0}{r_H}\right)^\delta + 1 \right] + \ln \frac{r_0}{r_H} - 1 \right\} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \theta d\theta + \ln \frac{r_0}{r_H} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} d\theta = 0.$$

Интегрируя и переходя к линейным единицам, будем иметь:

$$n_{30} = \frac{2 \delta \ln \frac{h_0}{h_H}}{(\delta - 1) \left( \frac{h_0}{h_H} \right)^\delta + 1 + \delta \left( \ln \frac{h_0}{h_H} - 1 \right)}.$$

Легко показать, что

$$\delta = \mu \frac{l}{h} \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon}, \text{ где } h = \frac{1}{2} (h_0 + h_1). \quad (462)$$

Поэтому

$$n_{30} = \frac{2 \mu \frac{l}{h} \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} \ln \frac{h_0}{h_H}}{\left( \mu \frac{l}{h} \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} - 1 \right) \left( \frac{h_0}{h_H} \right)^\mu \frac{l}{h} \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} + 1 + \mu \frac{l}{h} \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} \left( \ln \frac{h_0}{h_H} - 1 \right)}. \quad (463)$$

Рассмотренные выше опытные данные показывают, что коэффициент влияния внешних зон обычно достигает значения, равного единице при отношении  $l/h \approx 1$ . Считая  $n_{30} = 1$ , из уравнения (463) имеем:

$$\frac{2 \mu \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} \ln \frac{h_0}{h_H}}{\left( \mu \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} - 1 \right) \left( \frac{h_0}{h_H} \right)^\mu \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} + 1 + \mu \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} \left( \ln \frac{h_0}{h_H} - 1 \right)} = 1.$$

Отсюда получим значение коэффициента обжатия в нейтральном сечении, при котором  $n_{30} = 1$ :

$$\left( \frac{h_0}{h_H} \right)^\mu \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\mu \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} \ln \frac{h_0}{h_H}}{\mu \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} - 1} + 1.$$

Из соотношения (462) имеем  $\mu \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} = \delta \frac{h}{l}$ . Далее, считая  $h_H \approx h_1$  и возвращаясь к уравнению (463), получим

$$n_{30} = \frac{2 \delta \ln \frac{h_0}{h_1}}{(\delta - 1) \left( \frac{\delta \frac{h}{l} \ln \frac{h_0}{h_1}}{\delta \frac{h}{l} - 1} + 1 \right)^{\mu h} + \delta \left( \ln \frac{h_0}{h_1} - 1 \right) + 1}. \quad (464)$$

Это равенство учитывает влияние входящего в валки конца полосы на напряженное состояние. Аналогичным образом найдем уравнение, учитывающее влияние выходящего из валков конца полосы:

$$n_{31} = \frac{2 \delta \ln \frac{h_0}{h_1}}{(\delta + 1) \left( \frac{\delta \frac{h}{l} \ln \frac{h_0}{h_1}}{\delta \frac{h}{l} + 1} + 1 \right)^{l/h} + \delta \left( \ln \frac{h_0}{h_1} - 1 \right) - 1} \quad (465)$$

Из рассмотрения выражений (464) и (465) следует, что коэффициенты влияния внешних зон зависят от факторов  $\delta$ ,  $l/h$  и  $h_0/h_1$ . Если в формулах (464) и (465) принять  $\ln \frac{h_0}{h_1} = 1$ , то получим:

$$n_{30} = \frac{2 \delta}{(\delta - 1) \left( \frac{2 \delta \frac{h}{l} - 1}{\delta \frac{h}{l} - 1} \right)^{l/h} + 1}; \quad n_{31} = \frac{2 \delta}{(\delta + 1) \left( \frac{2 \delta \frac{h}{l} + 1}{\delta \frac{h}{l} + 1} \right)^{l/h} - 1} \quad (466)$$

Значение  $\ln \frac{h_0}{h_1} = 1$  соответствует коэффициенту обжатия  $\frac{h_0}{h_1} = 2,72$  и относительному обжатию  $\varepsilon = \frac{\Delta h}{h_0} = 0,63$ . Такие обжатия при прокатке высоких полос не применяются, но даже при этом допущении максимальная погрешность при вычислении в уравнениях (466) при величине  $l/h = 0,5$  не превышает 6,5% по сравнению с точными значениями, вычисленными по равенствам (464) и (465).

Формулы (466) получены для зон скольжения. Они справедливы и для зоны прилипания и в том случае, если эта зона распространяется на всю контактную поверхность. Дополнительный анализ показывает, что такая экстраполяция эквивалентна предположению об отсутствии скачка напряжений  $\sigma_p$  на границах между зонами отставания, опережения и прилипания.

Совместное влияние переднего и заднего концов полосы на напряженное состояние в очаге деформации можно учесть с помощью среднего значения коэффициента внешних зон:

$$n_3 = \frac{n_{30} + n_{31}}{2} \quad (467)$$

На рис. 153 приведены кривые, построенные с использованием формул (466)—(467) и характеризующие зависимость коэффициента внешних зон от параметров  $l/h$  и  $\delta$ . Из рассмотрения рисунка следует, что коэффициент  $n_{30}$ , учитывающий влияние входящего в валки конца полосы, при данном отношении  $l/h$  уменьшается с ростом величины  $\delta$ , а коэффициент  $n_{31}$ , учитывающий влияние выходя-



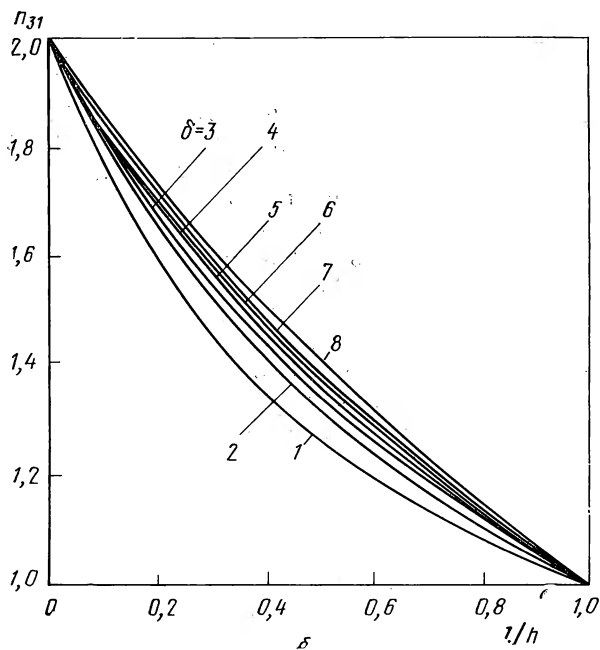
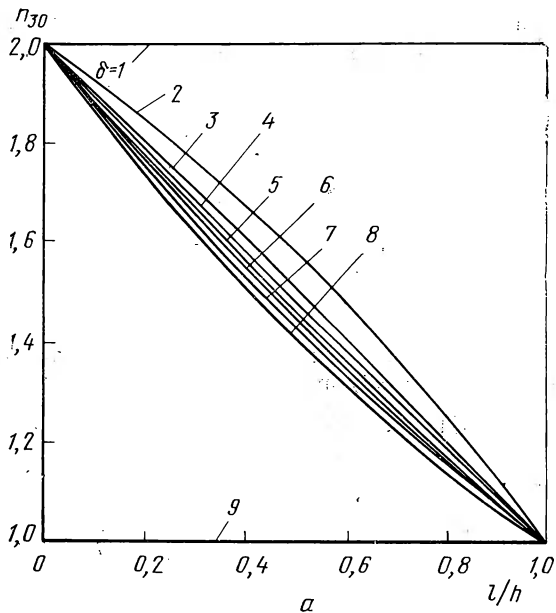
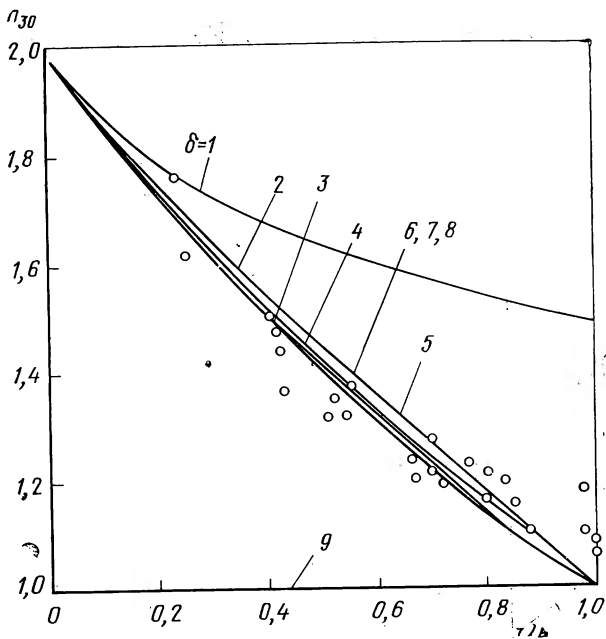


Рис. 153. Зависимость коэффициента  $n_3$  от величин  $\delta$  и  $l/h$  по формулам:  
 а — (466) и б — (467);



$v$  — по результатам опытов (точки на кривых)

щего из валков конца полосы, с ростом  $\delta$  возрастает. Вместе с тем предельное значение коэффициентов  $n_{30}$  и  $n_{31}$  одинаково и численно равно  $n_3 = 2$ .

Сравнение средних значений коэффициента  $n_3$  показывает, что уже при  $\delta \geq 5$  они перестают зависеть от параметра  $\delta$ . Это и понятно: при прокатке высоких полос силы трения на поверхностях контакта невелики и решающее влияние на напряженное состояние полосы оказывает неравномерность ее деформации по высоте.

А. Д. Карачунский [7] производил горячую прокатку на стане с диаметром валков 270 мм. Образцы имели прямоугольное сечение и были изготовлены из стали 08кп. На образцах делались надрезы с образованием короткого участка образца длиной  $l_0$  (рис. 154, а). Длину  $l_0$  подбирали такой, чтобы при прокатке происходило точное заполнение очага деформации при отсутствии внеконтактных зон (рис. 154, б). Осциллограммы энергосиловых параметров (давлений, крутящих моментов) позволяют определить отношение параметров естественного процесса и процесса прокатки без внеконтактных зон (рис. 154, в). Опыты производили, широко варьируя параметры  $l/h_0$ ,  $b_3/h$ ,  $\Delta h/h_0$ . Кроме того, варьировали температуру прокатки для того, чтобы экспериментально выяснить влияние условий контактного трения на коэффициент  $n_3$ . Результаты опытов представлены точками на рис. 153, в. Сравнение этих данных с расчетными данными показывает удовлетворительную сходимость.

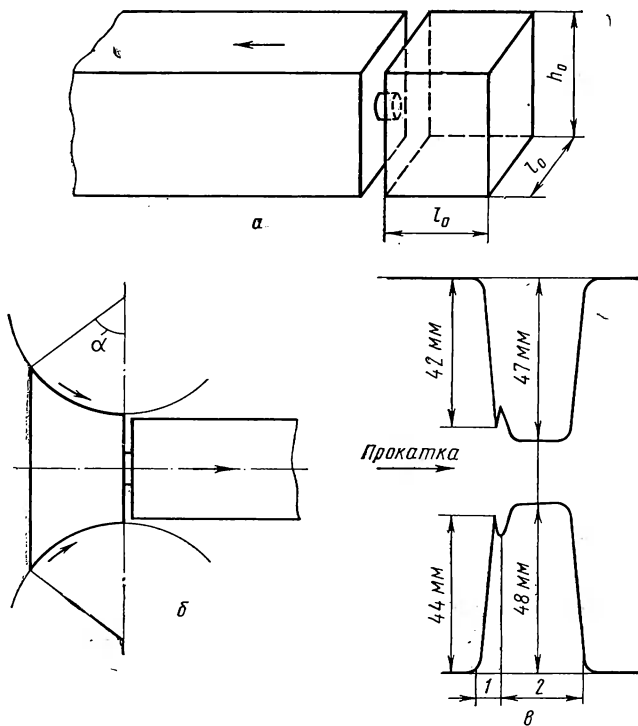


Рис. 154. Образец с поперечным надрезом (а), схема его прокатки (б) и осциллограммы прокатки (в)

На рис. 155 приведено распределение нормальных напряжений по высоте полосы в сечении входа в валки при значениях коэффициента  $n_3 = 1; 1,5$  и  $2$ . Несмотря на наличие значительных «подпирающих» напряжений  $\sigma_p$  у поверхности контакта при малых значениях отношения  $l/h$ , в центральной части полосы по высоте сохраняются значительные продольные растягивающие напряжения.

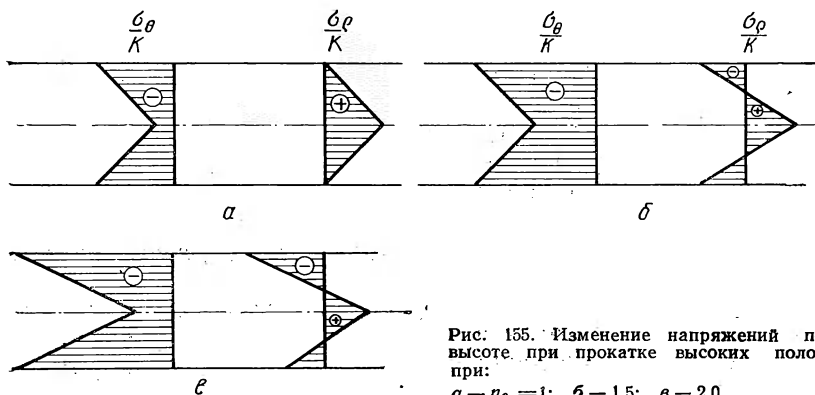


Рис. 155. Изменение напряжений по высоте при прокатке высоких полос при:  
а —  $n_3 = 1$ ; б —  $1,5$ ; в —  $2,0$

## 6. Напряжения во внешних частях полосы

При решении задачи начало координат и направление оси  $x$  выберем так, как показано на рис. 156. Решение упруго-пластической задачи будем проводить приближенно, считая сдвиги  $e_{xy}$  малыми по сравнению с деформациями  $e_{xx}$  и  $e_{yy}$ . В разделе 6 гл. V было показано, что при этом условии равенства (170)

$$\tau_{xy} = (C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}) (A e^{my} + B e^{-my});$$

$$\sigma_y = -(C_1 e^{mx} - C_2 e^{-mx}) (A e^{my} - B e^{-my}) + f(x);$$

$$\sigma_x = -(C_1 e^{mx} - C_2 e^{-mx}) (A e^{my} - B e^{-my}) + f_1(y)$$

представляют собой приближенное решение упругой задачи, если выполняются соотношения (209)–(211).

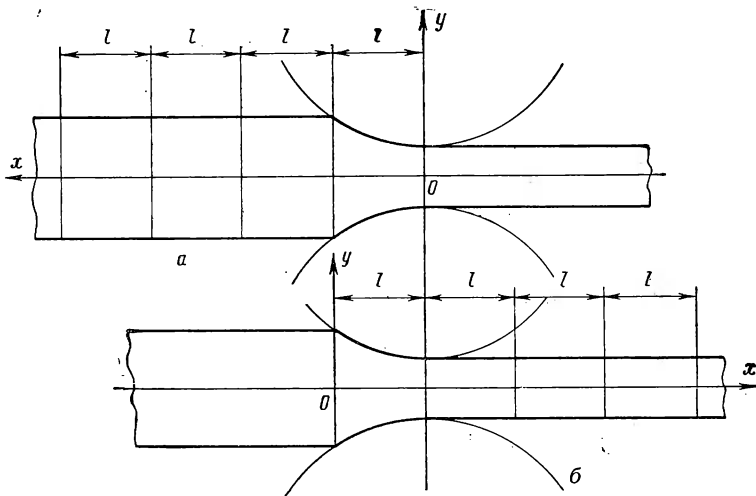


Рис. 156. Схема к расчету напряжений во внешних частях полосы при прокатке:

$a$  — в заднем конце;  $b$  — в переднем

На верхней и нижней поверхности внешних частей полосы нормальные к ним напряжения равны нулю. Это приводит к граничному условию:  $y = h/2$ ;  $\sigma_y = 0$ , на основании которого второе из приведенных равенств дает:

$$f(x) = (C_1 e^{mx} - C_2 e^{-mx}) \left( A e^{\frac{mh}{2}} - B e^{-\frac{mh}{2}} \right);$$

и мы получаем:

$$\sigma_y = \left( C_1 e^{mx} - C_2 e^{-mx} \right) \left[ \left( A e^{\frac{mh}{2}} - B e^{-\frac{mh}{2}} \right) - \left( A e^{my} - B e^{-my} \right) \right].$$

Для сечений входа и выхода ( $x=l$ ) справедливо условие пластичности  $\sigma_x - \sigma_y = \nu K$ , из которого для точки  $x=l$ ;  $y=h/2$  получим  $\sigma_x = \nu K$ . Тогда третье из равенств системы (170) дает:

$$f_1(y) = \nu k + (C_1 e^{ml} - C_2 e^{-ml}) \left( A e^{\frac{mh}{2}} - B e^{-\frac{mh}{2}} \right) = \text{const}$$

и, следовательно:

$$\sigma_x = (C_1 e^{ml} - C_2 e^{-ml}) \left( A e^{\frac{mh}{2}} - B e^{-\frac{mh}{2}} \right) - (C_1 e^{mx} - C_2 e^{-mx}) \left( A e^{my} - B e^{-my} \right) + \nu K.$$

Заметим, что выражения  $f(x)$  и  $f_1(y)$  находятся в соответствии с условиями (209) — (211).

При переходе от граничных сечений  $x=l$  в сторону положительного направления оси  $x$  напряжения могут только уменьшаться, причем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tau_{xy} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_y = \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_x = 0.$$

Поэтому будем считать, что:

$$C_1 = 0;$$

$$-C_2 e^{-ml} \left( A e^{\frac{mh}{2}} - B e^{-\frac{mh}{2}} \right) + \nu K = 0.$$

Обозначим  $C_2 A = A'$ ,  $C_2 B = B'$  и опустим штрихи.

Окончательно с использованием выражений (170) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= e^{-mx} (A e^{my} + B e^{-my}); \\ \sigma_y &= -e^{-mx} \left[ \left( A e^{\frac{mh}{2}} - B e^{-\frac{mh}{2}} \right) - (A e^{my} - B e^{-my}) \right]; \\ \sigma_x &= -e^{-mx} (A e^{my} - B e^{-my}). \end{aligned} \right\} \quad (468)$$

В качестве граничных условий используем равенства (443), принимая в них коэффициент  $\eta=1$  и величину  $\rho=r_1$ . Это равносильно введению допущения о предельной величине напряжений, вызываемых неравномерностью деформации, которая существует в сечениях входа и выхода в момент снятия нагрузок (см. раздел 2 данной главы). Переходя от цилиндрических координат к прямоугольным, из уравнений (443) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= -K \mu \varphi_1; \quad \sigma_y = K (1 - \varphi_2) \left( \ln \frac{h_0}{h_1} - 1 \right); \\ \sigma_x &= K (1 - \varphi_2) \ln \frac{h_0}{h_1} + K \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (469)$$

Коэффициент  $m$ , входящий в функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (434), согласно пункту 1 настоящей главы, равен  $m = \sqrt{\delta(\delta-2)}$ ,  $m = \sqrt{\delta(\delta+2)}$ .

Поэтому в качестве величины  $m$  целесообразно принять

$$m = \frac{1}{2}(\sqrt{\delta(\delta-2)} + \sqrt{\delta(\delta+2)}) = \frac{1}{2}\left(\delta\sqrt{1-\frac{2}{\delta}} + \delta\sqrt{1+\frac{2}{\delta}}\right) \approx \approx \frac{1}{2}\left[\delta\left(1-\frac{1}{\delta}\right) + \delta\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\right] = \delta = \frac{2\mu}{\alpha}. \quad (470)$$

Из рис. 145 ясно, что в очаге деформации существуют следующие соотношения:

$$\sin \theta = \frac{y}{\rho} \approx \theta; \quad \frac{h}{2} \approx \rho \frac{\alpha}{2}, \text{ откуда } \rho = \frac{h}{\alpha}, \text{ поэтому } \theta = \frac{y}{h} \alpha.$$

Принимая во внимание уравнение (470) и геометрические соотношения, можем записать:

$$m\theta = \delta \frac{y}{h} \alpha = \frac{2\mu}{\alpha} \frac{y}{h} \alpha = \frac{2\mu}{h} y.$$

Таким образом, при переходе от цилиндрических координат к прямоугольным замена безразмерной координаты  $\theta$  размерной координатой  $y$  приводит к замене безразмерной величины  $m = \frac{2\mu}{\alpha}$

размерной величиной  $m = \frac{2\mu}{h}$ . Это выражение совпадает с равенством (309), полученным в процессе решения задачи о напряженном состоянии при сжатии. Примем, что  $x=l$ . Используя первое и третье равенства систем (468) и (469), получим:

$$A e^{my} + B e^{-my} = -K \mu \varphi_1 e^{ml};$$

$$A e^{my} - B e^{-my} = K \left[ (1 - \varphi_2) \ln \frac{h_0}{h_1} + \varphi_2 \right] e^{ml}.$$

Отсюда

$$A e^{my} = \frac{K}{2} \left[ -\mu \varphi_1 + (1 - \varphi_2) \ln \frac{h_0}{h_1} + \varphi_2 \right] e^{ml};$$

$$A e^{-my} = \frac{K}{2} \left[ -\mu \varphi_1 - (1 - \varphi_2) \ln \frac{h_0}{h_1} - \varphi_2 \right] e^{ml}.$$

Подставляя значения этих функций в выражение (468), с учетом уравнения (470) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{xy}}{K} &= -\mu \varphi_1 e^{2\mu \frac{l}{h} \left(1 - \frac{x}{l}\right)}; \\ \frac{\sigma_y}{K} &= (1 - \varphi_2) \left( \ln \frac{h_0}{h_1} + 1 \right) e^{2\mu \frac{l}{h} \left(1 - \frac{x}{l}\right)}; \\ \frac{\sigma_x}{K} &= \left[ (1 - \varphi_2) \ln \frac{h_0}{h_1} + \varphi_2 \right] e^{2\mu \frac{l}{h} \left(1 - \frac{x}{l}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (471)$$

На рис. 157 приведены значения максимального касательного напряжения, отнесенного к истинному сопротивлению деформаций

в различных точках внешнего конца полосы при прокатке. Максимальное касательное напряжение, под влиянием которого осуществляется деформация полосы, вычисленное по формуле (44), определяется следующим равенством:

$$\frac{\tau}{K} = e^{2\mu \frac{l}{h} \left(1 - \frac{x}{l}\right)} \sqrt{1 + \mu^2 \varphi_1^2}. \quad (472)$$

Из рис. 157, а следует, что при переходе от сечений входа и выхода к середине очага деформации напряжения уменьшаются по

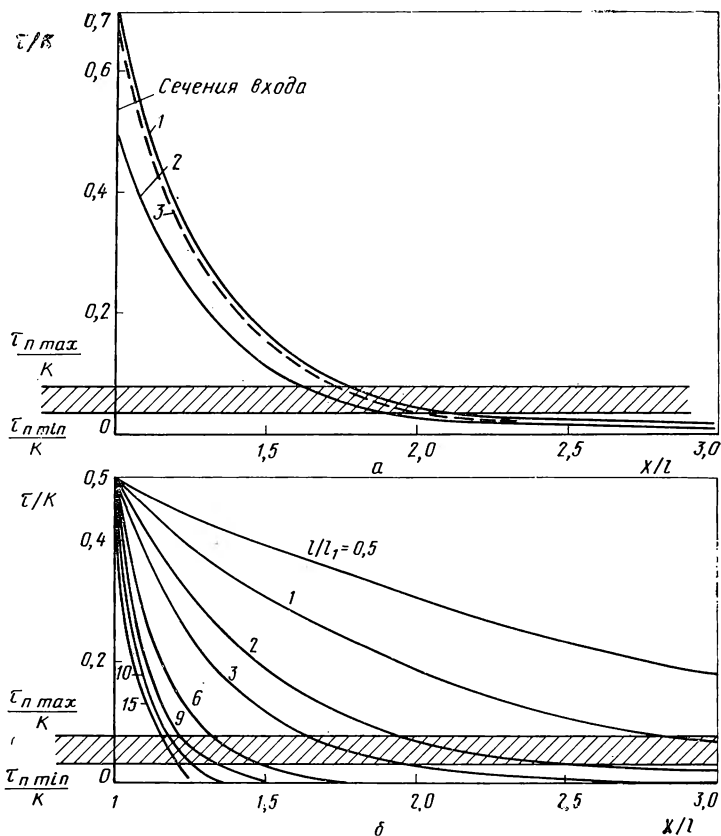


Рис. 157. Максимальные скалывающие напряжения: а — в различных точках по длине и высоте внешних концов полосы ( $l/h=3, \mu=0,5$ ); б — на поверхности полосы в различных точках по ее длине при разных отношениях  $l/l_1$

экспоненциальному закону, причем их величины на поверхности и в средней части по высоте полосы сближаются. Из рис. 157, б следует, что максимальные скалывающие напряжения в значительной степени зависят от отношения длины очага деформации к его вы-

соте  $h$ . С ростом этого отношения скалывающие напряжения уменьшаются более интенсивно.

Расчеты показывают, что характер кривых, характеризующих максимальные скалывающие напряжения при прокатке высоких и низких полос, в общем аналогичен. Для высоких полос необходимо учитывать влияние внешних зон, считая, что в формулах (471) и (472) вместо величины  $K$  фигурирует величина  $K_3 = n_3 K$ .

Полученные уравнения для определения действующих напряжений могут быть использованы и для определения протяженности зоны внеконтактной пластической деформации перед валками. В начале этой зоны напряжения не должны быть меньше величины, необходимой для необратимого передвижения дислокаций. В зависимости от ориентировки системы скольжения по отношению к действующим напряжениям величина последних, в соответствии с законом Шмида, может изменяться в определенных пределах, обусловленных геометрией скольжения. В частности, для кремнистого железа эти пределы определяются величиной, которая равна 0,04—0,08 предела текучести в условиях плоской деформации. Отмеченные пределы изменения напряжений, отнесенные к пределу текучести, приведены на рис. 157. Точки пересечения кривых максимальных скалывающих напряжений с линиями предельных напряжений, которые необходимы для движения дислокаций, ограничивают область, где следует ожидать появления первых пластических сдвигов, происходящих в процессе перемещения дислокаций. Протяженность этой области зависит от отношения длины очагов деформации к высоте полосы. Она уменьшается с ростом отношения  $l/h$ .

Приведенные результаты хорошо подтверждаются опытами Во Мота, который провел обширное исследование деформации внеконтактных зон при прокатке. Рассмотрим в качестве примера один из его опытов. Алюминиевая полоса (марки А99) после механической обработки подвергалась отжигу при температуре  $500^\circ\text{C}$  с выдержкой в течение 3 ч. При этом получили металл со средним размером зерна около 400  $\mu\text{м}$ . После отжига следовала электрополировка и прокатка. На рис. 158 приведена микрофотография верхней поверхности недоката. Если судить о наличии пластических деформаций по видимым полосам скольжения, то можно считать, что в данном случае длина «зоны затухания» приблизительно равна длине очага деформации, вычисленной из геометрических соображений. Во Мот в процессе опытов определял также микроскопический предел текучести алюминия. Используя прием, описанный выше (см. рис. 157), он убедился в сходимости результатов расчета по формуле (472) и опытных данных.

Приведенный в пункте 4 способ определения нейтрального сечения соответствует обычным представлениям о пластической деформации с макроскопических позиций. При этом деформируемое тело рассматривается как сплошная среда, и элементарные акты пластической деформации во внимание не принимаются. Теперь имеется возможность произвести увязку полученных результатов



с представлением о прокатке как о процессе, в котором пластическая деформация развивается перед входом в валки сначала в микроскопических объемах, постепенно охватывая весь очаг деформации, и снова уменьшается после выхода из валков.

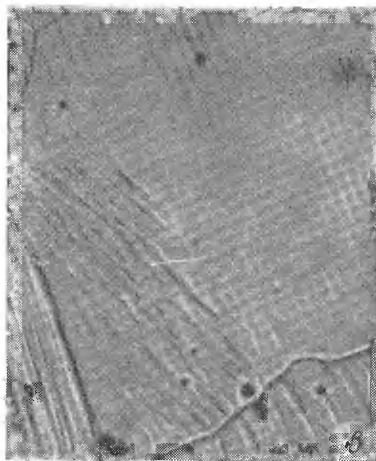
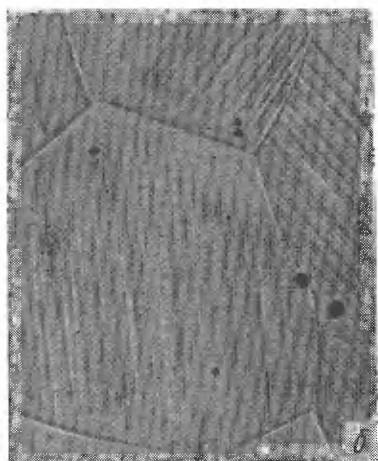
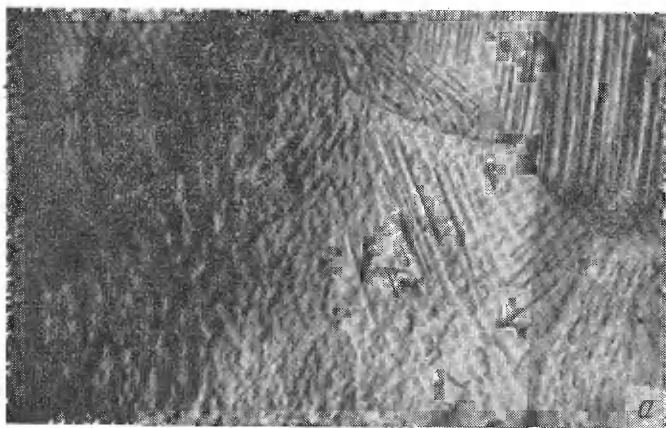


Рис. 158. Микрофотография верхней поверхности внеконтактной зоны со стороны входа в валки,  $\times 150$  при  $h_0=2,5$  мм;  $h_1=1,9$  мм;  $b/h=1,59$  мм;  $b_0=18$  мм;  $l'=4,8$  мм;  $l'/l=1,37$ :

*a* — зона у входа в валки; *б* — на расстоянии 1,5 мм от очага деформации; *в* — на расстоянии 3 мм

При холодной прокатке после выхода металла из валков в полосе появляются остаточные напряжения. В результате упрочнения предел текучести увеличивается и за счет большой плотности дислокаций движение их затрудняется. Поэтому протяженность зоны

«затухания» после выхода металла из валков должна быть меньше, чем перед входом в валки. Для зон отставания и опережения можно основываться на предположении о применимости гипотезы плоских сечений перед входом в очаг деформации и после выхода из него там, где деформации заканчиваются в отдельных микрообъемах, т. е. на границах между упругими и пластическими зонами. Для того чтобы определить границу распространения пластической деформации во входящем в валки и выходящем из них концах полосы, необходимо провести линию через точки пересечения кривых, построенных по уравнению (472), характеризующих величину максимальных скальвающих напряжений на разных уровнях по высоте полосы с прямой, характеризующей величину микроскопического предела текучести. На рис. 140, б показана область, ограничивающая пластическую деформацию при прокатке, размеры которой определены из этих соображений. Действительные размеры очага деформации при прокатке много больше и форма его значительно отличается от того очага, который определяется чисто геометрическими соотношениями. В соответствии с этим в действительности протяженность зон опережения и отставания также превышает предпологаемую.

На основании изложенного можно сделать следующие важные выводы:

1. Понятие об упругой деформации реальных кристаллических тел является условным. Даже при очень малых нагрузках, не выводящих тело в целом за пределы упругой деформации, в нем всегда имеются локальные объемы, находящиеся в пластическом состоянии.

2. Пластическая деформация тела не обязательно должна сопровождаться изменением макроскопических и даже микроскопических размеров этого тела. Поскольку в данном случае меняется только форма отдельных микрообъемов и эти изменения распределены в теле произвольно, то локальная деформация не приводит к изменению формы тела как целого.

3. При локальном воздействии сил (ковка крупных поковок, прокатка слябов на ребро и т. п.) весь объем обрабатываемого тела или большая его часть могут оказаться в пластическом состоянии.

4. Даже в простейших случаях нагружения напряжения в теле распределяются неравномерно. Следовательно, распределение деформаций также неравномерно. Поэтому гипотезу плоских сечений, часто используемую в приведенных расчетах, можно рассматривать как полезный прием оценки напряженного состояния тела только для случая деформации низких полос и определения контактных напряжений.

Изложенный в настоящем разделе способ расчета напряжений во внешних частях полосы можно использовать также для расчета процессов осадки и волочения.

## 7. Напряженное состояние и образование текстуры при прокатке

Образование текстуры при прокатке, как и при любом другом виде пластического изменения формы, определяется прежде всего характером напряженного состояния. Металл при прохождении по очагу деформации подвергается воздействию напряжений, величина и направление действия которых изменяются при переходе от одной зоны очага деформации в другую. На основании приведенных выше решений появляется возможность анализа текстуры прокатки.

Рассмотрим сначала случай прокатки высокой полосы, когда на поверхности контакта имеются две зоны скольжения ( $A, C$ ), между которыми располагается зона прилипания и зона затрудненной деформации  $B$  (рис. 159,  $a$ ).

Исследуем напряженное состояние элементарного объема, перемещающегося по траектории  $a'b'd'e'$ . На участке  $a'b'$  элементарный объем будет подвергаться воздействию возрастающих по экспоненциальному закону и различных по знаку нормальных напряжений и соответствующих им максимальных скалывающих напряжений. В тех точках, где последние достигают величины критиче-

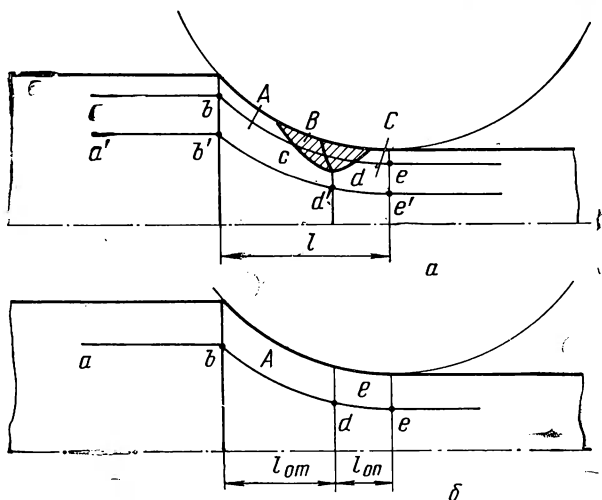


Рис. 159. Траектория элементарного объема в процессе прокатки высоких ( $a$ ) и низких полос ( $b$ )

ского скалывающего напряжения, необходимого для перемещения дислокаций (см. рис. 157), начинается пластическая деформация и, следовательно, формирование дислокационной структуры. Перед сечением входа металла в валки (точка  $b'$ ) и сразу же за ним уровень напряжений повышается, что интенсифицирует дробление зерен на блоки, их взаимные повороты, которые наиболее заметно прогрессируют на участке  $bc$  и значительно изменяют вид микроструктуры. В зоне  $A, C$  существует значительная разность нор-

мальных напряжений. Как следует из материала, изложенного в пункте 1, зоны *A* и *C* характеризуются одноименной схемой по длине полосы и разноименной схемой напряженного состояния по ее высоте. При этом разноименная схема в средней части по высоте оказывается весьма жесткой, напряжения являются растягивающими. Это имеет место во всех точках траектории  $b'd'e'$ . За сечением выхода из валков напряжения также уменьшаются; остаточная деформация здесь незначительна и формирование текстуры прекращается.

При перемещении элементарного объема по траектории *abcde* этот объем на участке *cd* попадает в зону затрудненной деформации *B*, где его напряженное состояние резко изменяется и металл оказывается в состоянии всестороннего сжатия. В зоне *C* элементарный объем,двигающийся по траектории *de*, снова оказывается в напряженном состоянии, аналогичном напряженному состоянию в зоне *A*.

Рассмотрим, далее, случай прокатки тонкой полосы, когда на поверхности контакта зона прилипания и соответствующая ей зона затрудненной деформации внутри полосы отсутствуют. Пластическая деформация, как и в первом случае, начинается еще перед входом металла в валки и заканчивается после выхода из них. Далее элементарный объем между точками *b* и *e* последовательно попадает в зоны *A* и *C* (рис. 159,б), напряженное состояние в очаге деформации характеризуется, как и в случае прокатки высоких полос, одноименной схемой по длине полосы и разноименной схемой по ее высоте. Но эти схемы во всех точках очага деформации оказываются весьма «мягкими» — значительных растягивающих напряжений нигде не возникает.

Сравнивая напряженные состояния элементарного объема при прокатке высоких и низких полос, нетрудно придти к выводу, что условия для формирования однородной по объему прокатываемого материала текстуры более благоприятны при прокатке низких полос. Из сопоставления напряженных состояний следует также, что применение высокоэффективных смазок должно уменьшать рассеяние текстуры по высоте полосы.

Ориентировка элементарного объема определится суммарным эффектом от воздействия напряжений в областях *A*, *B*, *C*. Основная деформация осуществляется на участках *bc* и *cd*. Участок *de*, в районе которого обжатие полосы незначительно, вероятно, не оказывает заметного влияния на формирование текстуры.

Степень действия каждой системы зависит при заданном соотношении областей *A*, *B*, *C* от положения слоя по высоте полосы. Чем ближе слой к поверхности, тем большее влияние он испытывает от воздействия системы зоны *B*. Наличие зоны *B* является одной из причин высокой неоднородности текстуры по высоте горячекатаной полосы. Текстура неоднородность увеличивается с ростом высоты полосы и при холодной прокатке.

Из изложенного следует, что на дислокационную структуру и текстуру прокатанного металла наиболее значительное влияние

оказывают следующие факторы: 1) граничные условия: состояние поверхности рабочих валков и форма калибров, смазка валков, температура прокатки; 2) геометрия очага деформации: отношение длины очага деформации к его высоте; 3) кристаллографическая ориентировка исходной заготовки, чередование направлений прокатки, химический состав металла.

Изменение дислокационной структуры и характера скольжения влияет на все параметры процессов прокатки.

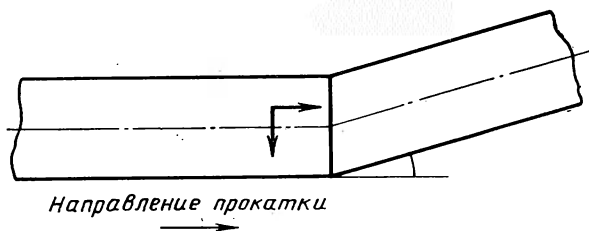


Рис. 160. Изгиб текстурованных образцов в плоскости прокатки

Опыты В. Д. Дурнева и Е. Ф. Сильниковой [8], в которых проводилась горячая и холодная прокатка образцов из кремнистой стали с различной исходной текстурой, показали, что наибольшее уширение наблюдается у образцов, текстурная ось которых располагается по их ширине. Меньше всего уширяются образцы с продольным расположением оси [100]. Образцы с вертикальной текстурной осью получили несколько большее уширение, чем образцы с продольной осью.

Образцы, у которых направление главной текстурной оси не совпадает с направлением прокатки, по ширине деформируются неравномерно. Это приводит к тому, что продольная ось как входящего в валки, так и выходящего из них концов полосы располагается под некоторыми углами по отношению к первоначальному направлению прокатки. При этом полоса изгибается в плоскости прокатки. Величину изгиба можно характеризовать углом между геометрическими осями участков полосы до входа в валки и после выхода из них (рис. 160). Практически отсутствует изгиб образцов, у которых направление [100] преимущественно расположено вдоль и по ширине заготовки. Наибольший изгиб (до 25 град.) наблюдался у образцов, направление ребра куба в которых составляло с осью прокатки угол в 30 град. Образцы, вырезанные под углом 60 град. к направлению [100], имели изгиб до 10 град. Повышение величины обжатия приводит к увеличению изгиба недокатов. При деформации образцов с текстурной осью (011) [100] течение металла проявляется преимущественно в направлении ребра куба. Поэтому в тех случаях, когда текстурная ось заготовки составляет с направлением прокатки некоторый угол, направление течения металла в очаге деформации не совпадает с осью прокатки, что и приводит к изгибу полосы в плоскости прокатки.

Угол текстурного отклонения  $\psi$  определяется углом между направлениями прокатки и главной деформацией и возрастает с ростом обжатия. При наклонном расположении текстурной оси плоскость изгиба не совпадает с плоскостью прокатки. В случае неравномерного распределения текстуры в исходной заготовке на изгиб полосы оказывает влияние соотношение объемов металла с той или иной ориентировкой.

При прокатке участков, текстурная ось которых расположена вдоль высоты, давление на валки меньше, чем на участках, где текстурная ось расположена вдоль ширины образца. Эти различия обусловлены особенностями взаимной ориентировки действующих напряжений и систем скольжения кристаллов. При прокатке образцов с ребровой текстурой имеются благоприятно расположенные для прохождения деформации системы скольжения. При прокатке в поперечном направлении все возможные системы скольжения ориентированы одинаково неблагоприятно по отношению к действующим в очаге деформации напряжениям. Поэтому в первом случае требуется меньше усилия для осуществления деформации.

Следовательно, при разработке технологических режимов прокатки текстурованных материалов необходимо учитывать текстурное строение заготовок, особенно если речь идет о получении плоского проката. Некоторые примеры возможных искажений профиля из-за текстурного строения заготовок приведены на рис. 161. Направление штриховок на рисунке соответствует направлению результирующей деформации, обусловленной кристаллографией

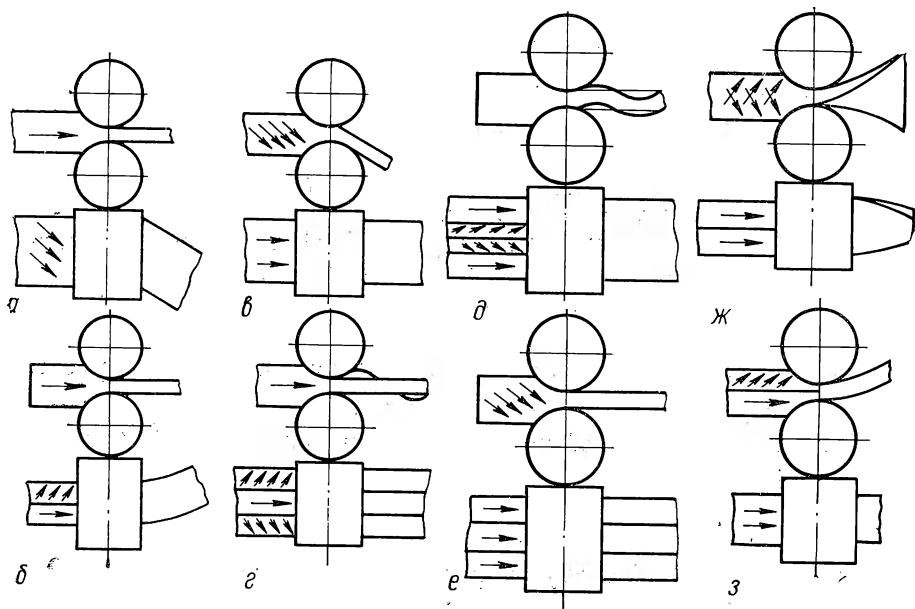


Рис. 161. Отклонение листов от плоской формы из-за текстурного влияния

скольжения. Приведенные на рисунке искажения профиля могут быть следствием неправильной калибровки и настройки прокатных валков, неравномерности нагрева металла, различия в диаметрах рабочих валков или их линейных скоростей, разной толщины по ширине исходной заготовки и т. п. Однако обычных мер, необходимых для устранения этих дефектов, может оказаться недостаточно, если не принимать во внимание текстурного влияния на точность проката. Текстурные искажения профиля могут быть устранены или уменьшены применением заготовок с достаточно высокой однородностью текстуры и соответствующим выбором направления прокатки по отношению к текстурной оси.

### ХIII глава

## Уширение

### 1. Факторы, влияющие на уширение

Известно, что вытяжка, опережение и контактные напряжения уменьшаются с ростом уширения. Правильное количественное выражение этих связей особенно важно для случаев прокатки узких полос на гладкой бочке и для прокатки в калибрах.

По предложению А. Ф. Головина, в качестве показателя поперечной деформации при прокатке часто используют отношение объема, смещаемого по ширине, к объему, смещаемому по высоте:

$$A = \frac{dV_z}{dV_y} = - \frac{V \frac{db}{b}}{V \frac{dh}{h}} = \frac{\ln \frac{b_1}{b}}{\ln \frac{h_0}{h_1}} = \frac{\ln \beta}{\ln \frac{1}{\eta}} = \frac{\epsilon_z}{\epsilon_y}. \quad (473)$$

В этом равенстве показатель поперечной деформации  $A$  изменяется в пределах от нуля до единицы.

Если  $A=0$ , то коэффициент уширения  $\beta=1$ , т. е. уширение равно нулю и весь объем, смещаемый по высоте, идет только на увеличение длины, и поэтому при  $A=0$  имеем  $\frac{1}{\eta} = \lambda$ .

Если  $A=1$ , то  $\beta = \frac{1}{\eta}$ , т. е. весь объем, смещаемый по высоте, идет только на уширение, поэтому при  $A=1$  имеем  $\lambda=1$ .

Если  $A=1/2$ , то коэффициент вытяжки равен коэффициенту уширения:

$$\beta = \lambda = \sqrt{\frac{1}{\eta}}.$$

Из формулы (473) следуют простые соотношения:

$$\frac{db}{b} = -A \frac{dh}{h}; \quad \ln \frac{b_1}{b_0} = A \ln \frac{A_0}{A_1}; \quad (474)$$

$$b_1 = b_0 \left( \frac{h_0}{h_1} \right)^A;$$

$$\Delta b = b_0 \left[ \left( \frac{1}{1-\varepsilon} \right)^A - 1 \right]; \quad (475)$$

$$\frac{\Delta b}{\Delta h} = \frac{b_0}{h_0 \varepsilon} \left[ \left( \frac{1}{1-\varepsilon} \right)^A - 1 \right]. \quad (476)$$

При умеренных обжатиях

$$A = \frac{\ln \left( 1 + \frac{\Delta b}{b_0} \right)}{\ln \left( 1 + \frac{\Delta h}{h_0} \right)} \approx \frac{\frac{\Delta b}{b_0}}{\frac{\Delta h}{h_0}},$$

$$\text{откуда } \frac{\Delta b}{\Delta h} \approx \frac{b_0}{h_0} A. \quad (477)$$

Величину  $\Delta b/\Delta h$  назовем показателем уширения. Если  $A = \text{const}$ , то соотношения (473)—(477) эквивалентны предположению, что деформации по объему полосы однородны. Несмотря на то что этот показатель вносит в определение поперечной деформации погрешность, увеличивающуюся с ростом коэффициента обжатия, его часто используют при обработке экспериментальных данных для количественной оценки зависимости уширения от различных факторов прокатки. Рассмотрим влияние этих факторов на уширение.

**Обжатие.** На рис. 162, а приведена зависимость показателя уширения от относительного обжатия, по данным И. М. Павлова и Н. С. Иванова. Опыты показывают, что кривая, характеризующая эту зависимость, имеет максимум при некоторой степени обжатия. Такая зависимость является результатом совместного влияния двух факторов, действующих в противоположных направлениях.

Первым фактором является относительное обжатие. Очевидно, что с его ростом объем, смещаемый по ширине, и, следовательно, уширение при прочих равных условиях возрастают.

Вторым фактором является уменьшение осевых сжимающих напряжений, которое происходит за счет изменения положения равнодействующих нормальных и касательных сил справа и слева от нейтрального сечения. С ростом обжатия длина поверхностей контакта металла и валков увеличивается. Поэтому равнодействующая нормальных давлений  $P_1$  слева от нейтрального сечения (рис. 162, в) отклоняется влево от вертикали. Соответственно изменяет свое положение и касательная сила трения  $T_1$ , перпендикулярная к силе  $P_1$ . Равнодействующую  $R_1$  сил  $P_1$  и  $T_1$  можно разложить на вертикальную и горизонтальную составляющие. Первая из них вызывает напряжения сжатия  $\sigma_y$  по высоте полосы, а вторая — напряжения сжатия  $\sigma_x$  по ее длине. В зоне опере-



жения система сил аналогична, но силы направлены в противоположную сторону (рис. 162, з). По условиям равновесия имеем:  $Q_1 = Q_2$ .

С ростом величины обжатия сила  $P_1$  продолжает отклоняться влево от вертикали. При этом сила  $Q_1$  и равная ей, но противоположно направленная сила  $Q_2$  уменьшаются, что приводит к умень-

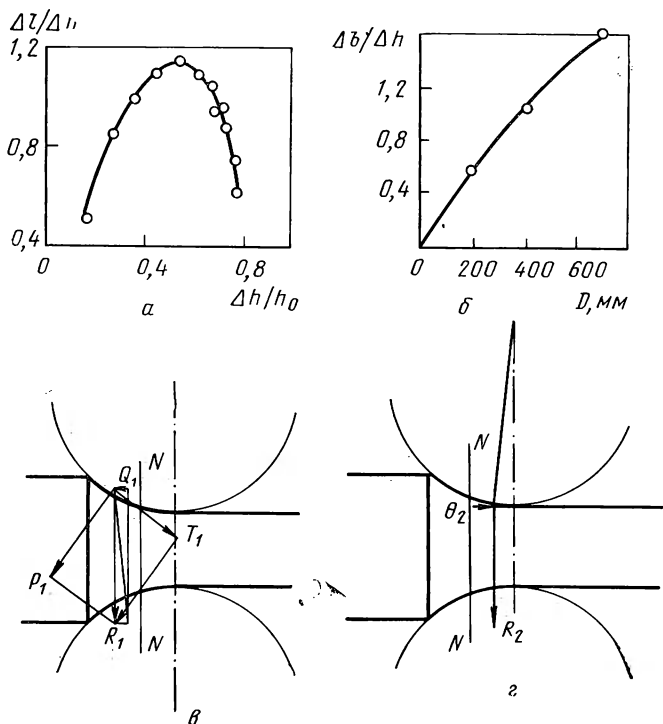


Рис. 162. Зависимость показателя уширения от относительного обжатия (а), диаметра валков (б) и поясняющая их схема действия сил слева (в) и справа (г) от нейтрального сечения

шению сжимающих осевых напряжений  $\sigma_x$ , вызванных силами  $Q_1$  и  $Q_2$ . Следовательно, уменьшается сопротивление перемещению металла в осевом направлении. Поэтому вытяжка увеличивается, а уширение уменьшается. Это следует из условия постоянства объема:  $\frac{1}{\eta} = \lambda\beta$ .

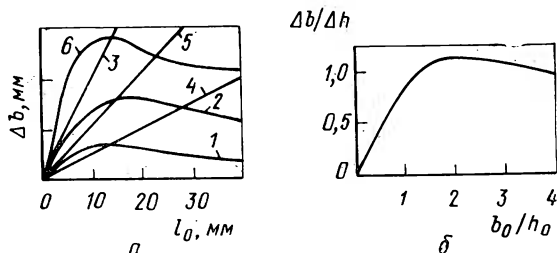
При малых величинах обжатий преобладает влияние первого из двух рассмотренных факторов, а при больших — второго. В результате кривая, характеризующая зависимость показателя уширения от величины обжатия, имеет максимум.

Диаметр валков. Из рис. 162, б следует, что с увеличе-

нием диаметра валков показатель уширения возрастает<sup>1</sup>. Это происходит потому, что при прочих равных условиях с ростом диаметра валков увеличивается длина очага. При этом повышаются силы трения на контактных поверхностях, направленные к нейтральному сечению (рис. 162, в, г). В результате сопротивление перемещению металла вдоль оси полосы увеличивается, напряжения  $\sigma_x$  растут, вытяжка уменьшается и, как следствие этого, увеличивается уширение.

Геометрические размеры очага деформации. Опыты показывают, что соотношения между средними значениями высоты, ширины и длины очага деформации оказывают на уширение заметное влияние. Например, на рис. 163, а приведены типичные кривые, характеризующие зависимость уширения от ширины полосы при прокатке<sup>2</sup>. Кривая, изображенная на этом рисунке, имеет максимум.

Рис. 163. Зависимость уширения по данным опыта (а) и показателя уширения по данным расчета ( $\varepsilon=0,3$ ;  $l/h_0=1$ ) от ширины полосы (б)



Запишем выражения, характеризующие относительное уширение и относительное обжатие:

$$\frac{\Delta b}{b_0} = \frac{b_1 - b_0}{b_0}; \quad \frac{\Delta h}{h_0} = \frac{h_0 - h_1}{h_0}.$$

Отсюда

$$\Delta b = (\beta - 1) b_0; \quad \Delta h = (1 - \eta) h_0; \quad \frac{\Delta b}{\Delta h} = \frac{(\beta - 1)}{(1 - \eta)} \cdot \frac{b_0}{h_0}.$$

Из последнего выражения ясно, что при определенной величине обжатия с ростом ширины полосы показатель уширения повышается. Влиянием этого геометрического фактора объясняется характер кривой зависимости показателя уширения от ширины полосы слева от точки максимума.

Вместе с тем с увеличением ширины полосы возрастают силы трения, действующие на поверхности контакта в поперечном направлении. Поэтому деформация полосы по существу приближается к плоской. Поперечные силы трения на поверхностях контак-

<sup>1</sup> Чижиков Ю. М. Прокатываемость стали и сплавов. М., Metallurgizdat, 1961. 451 с. с ил.

<sup>2</sup> Полухин П. И., Федосов И. М., Крупин А. В. М., и др. «Процессы прокатки». (МИСиС, № 40), М., Metallurgizdat, 1962, с. 66—83.

та с увеличением ширины полосы все заметнее сдерживают уширение. Таким образом, характер кривой зависимости показателя уширения от ширины полосы справа от точки максимума определяется в основном контактные силы трения.

При плоской деформации величина линейного уширения  $\Delta b$  за точкой максимума довольно быстро стабилизируется и при дальнейшем увеличении ширины остается постоянной. Наибольшее уширение при  $h_0/D < 0,05 \div 0,04$  соответствует равенству коэффициентов деформации в продольном и поперечном направлениях. В этом легко убедиться следующим образом.

Считая в условии постоянства объема  $\eta\beta\lambda = 1$  коэффициент вытяжки  $\lambda$  равным коэффициенту уширения  $\beta$ , можно найти, что:

$$\Delta b = \left( \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 \right) b_0.$$

Прямые, описываемые этим уравнением, пересекаются с кривой  $\Delta b = f(b_0)$  в точках, соответствующих максимуму уширения (рис. 163, а).

Равенству коэффициентов продольной и поперечной деформации соответствует отношение  $\frac{b_0}{l} = 1$ , т. е. коэффициенты уширения и вытяжки равны в случае, когда длина очага деформации приблизительно равна его ширине (рис. 164). Согласно опытным данным, точка максимума на кривой уширения не зависит от степени обжатия, что представляется вполне логичным, с учетом существующей связи, вытекающей из условия постоянства объема:

$$\beta = \lambda = \sqrt{\frac{1}{\eta}}.$$

В гл. VIII было показано, что при осадке параллелепипеда с прямоугольным поперечным сечением это сечение под действием сил трения стремится принять форму круга. В основе этого явления лежит тот факт, что при осадке напряжения  $\sigma_x$ , действующие вдоль более длинной оси параллелепипеда, увеличиваются быстрее, чем напряжения  $\sigma_z$ , действующие вдоль короткой оси (рис. 165, а). Поэтому происходит

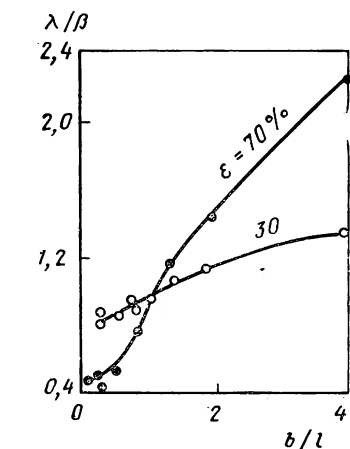


Рис. 164. Зависимость отношения коэффициентов вытяжки и уширения от отношения начальной ширины контактной поверхности к ее длине

выпучивание сторон и прямоугольное сечение превращается в эллиптическое. Рассмотрим теперь процесс прокатки.

Пусть соотношение между геометрическими размерами полосы таково, что средняя ширина очага деформации  $b$  меньше его длины  $l$  (рис. 165, б). Поскольку процесс прокатки является установившимся, а также поскольку существуют внешние концы по-

лосы, мы не будем наблюдать стремления проекции очага деформации принять форму круга. Однако условие наименьшего периметра проявится в данном случае таким образом, что при данном обжатии, объем, смещенный по ширине, будет больше объема, смещенного по длине, т. е. отношение  $\frac{\lambda}{\beta} < 1$ .

Если ширина очага деформации  $b$  больше его длины  $l$  (рис. 165, в), то объем, смещаемый по ширине, меньше объема, смещаемого в длину ( $\frac{\lambda}{\beta} > 1$ ). Если  $b \approx l$ , то объемы, смещаемые в длину и ширину, одинаковы. Этому случаю на рис. 164 соответствует

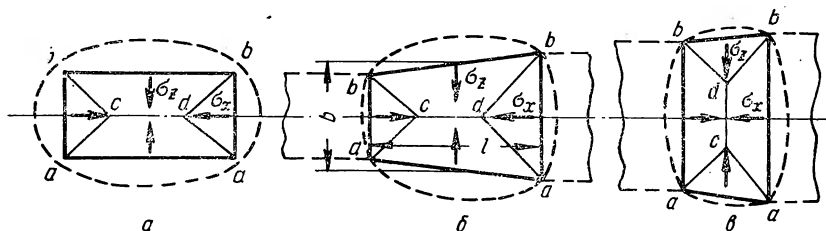


Рис. 165. Продольные и поперечные напряжения: *а* — при осадке параллелепипеда; *б* — при прокатке с длинным очагом деформации; *в* — с коротким очагом деформации

точка  $\frac{\lambda}{\beta} = 1$ . Из рассмотрения кривых ясно, что в широких очагах деформации ( $\frac{b_0}{l} \ll 1$ ) с увеличением обжатия доля объема, смещаемого в ширину, возрастает, а в длинных очагах эта доля с ростом обжатия уменьшается. Понятно, что в квадратных в плане очагах деформации она не должна зависеть от обжатия, что и иллюстрирует рис. 165.

Описанную закономерность хорошо дополняют опыты П. И. Полухина и др.<sup>1</sup>, которые исследовали зависимость среднего контактного напряжения при прокатке от ширины полосы. Кривая, характеризующая эту зависимость, претерпевает характерный излом в точке, где  $b_0 \approx l$  (рис. 166, а).

Схемы, приведенные на рис. 165, показывают, что средняя по ширине часть полосы стремится получить большую вытяжку, чем крайние ее части. Внешние части полосы выравнивают вытяжку по ширине. Поэтому средняя часть полосы стремится принудительно растянуть крайние. Последние же сопротивляются этому принуждению, оказывая влияние на среднюю часть. В результате в крайних частях возникают осевые напряжения растяжения, а в средней части — осевые напряжения сжатия. Поэтому при прокатке в валках, имеющих строго цилиндрическую форму, толщина полосы у кромок меньше, чем в средней ее части. При больших

<sup>1</sup> См. сн.<sup>2</sup> на стр. 377.

обжатиях под действием растягивающих напряжений иногда наблюдается утяжка кромок полосы и даже их разрушение. Утяжка кромок или уменьшение ширины ленты в процессе прокатки наблюдается и в случае приложения к заднему концу полосы растягивающих усилий, создающих достаточно большое натяжение.

При прокатке высоких сечений также происходит утяжка полосы по ширине<sup>1</sup>. В этом случае причиной утяжки является не-

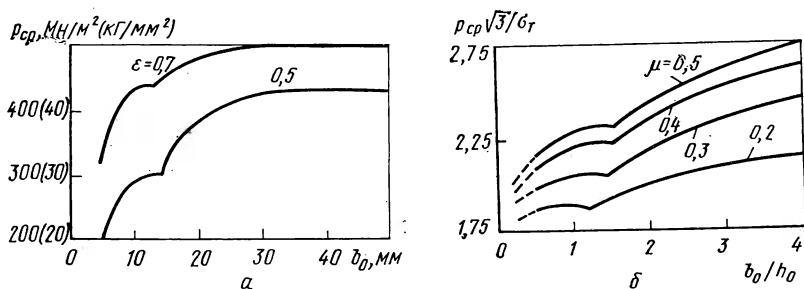


Рис. 166. Зависимость среднего контактного напряжения по данным опыта (а) и расчета (б) (при  $l/h_0 = 2$ ,  $\epsilon = 0,3$ ) от ширины полосы

равномерная деформация металла по высоте, величина которой увеличивается с уменьшением длины очага деформации. Неравномерность деформации объясняется сосредоточенным характером прилагаемых к полосе нагрузок, при которых, как было показано в гл. 4 и 5, напряжения на поверхностях контакта могут приобретать очень большую величину, а по мере удаления от этих поверхностей быстро уменьшаются. Поэтому у контактных поверхностей металл деформируется в большей степени, чем в средней части полосы по высоте, которая препятствует вытяжке. Под действием периферийных слоев средняя часть полосы испытывает напряжения растяжения, что вызывает появление утяжки по ширине. Крайние части полосы испытывают напряжения сжатия. В целом полоса имеет некоторую среднюю длину, и уширение контактных слоев является вынужденным. Величина уширения здесь увеличивается с уменьшением отношения  $l/h$ . При увеличении отношения  $l/h$  нагрузки становятся менее сосредоточенными, а деформации распределяются по высоте более равномерно. При дальнейшем увеличении отношения  $l/h$  боковые кромки полосы становятся выпуклыми.

Схемы статического и динамического нагружений. Величина и характер изменения уширения по высоте сечения должны существенно зависеть от наличия статических и динамических сил. Например, при вибрационном характере прилагаемых сил, подбирая надлежащим образом частоту колебаний,

<sup>1</sup> Теория прокатки крупных слитков, М., «Металлургия», 1968. 251 с. с ил. Авт.: А. П. Чекмарев, В. Л. Павлов, В. И. Мелешко, В. А. Токарев.

можно добиться равномерной деформации полосы по высоте со всеми вытекающими отсюда положительными последствиями [9].

При прокатке в калибрах схема нагружения обрабатываемого металла определяется формой калибра и поперечного сечения полосы.

Можно считать, что при прокатке в калибрах с выпуклым периметром средняя величина показателя уширения уменьшается, а в калибрах с вогнутым периметром увеличивается по сравнению со случаем прокатки на гладкой бочке. Вместе с тем средняя величина показателя уширения у полос как с выпуклым, так и с вогнутым периметрами при прокатке на гладкой бочке больше их значений, чем при прокатке прямоугольных полос.

**Коэффициент трения.** На рис. 167,а приведена зависимость уширения (отнесенного к диаметру валков) от величины обжатия при разных коэффициентах трения по данным Зибеля [3]. Из рассмотрения кривой следует, что при обжатиях, равных менее 33%, с ростом коэффициента трения уширение уменьшается, а при обжатиях более 33% уширение с ростом коэффициента трения увеличивается.

Воспользуемся условием наименьшего периметра. При осадке параллелепипеда с повышением коэффициента трения напряжение  $\sigma_x$ , действующее вдоль длинной его стороны, растет быстрее роста напряжения  $\sigma_z$ , действующего в поперечном направлении (рис. 165). Иными словами, в длинных очагах деформации  $\left(\frac{b}{l} < 1\right)$

сопротивление сил трения вдоль направления прокатки будет увеличиваться быстрее, чем сопротивление сил трения, действующих в направлении, ему перпендикулярном. В результате в длинных

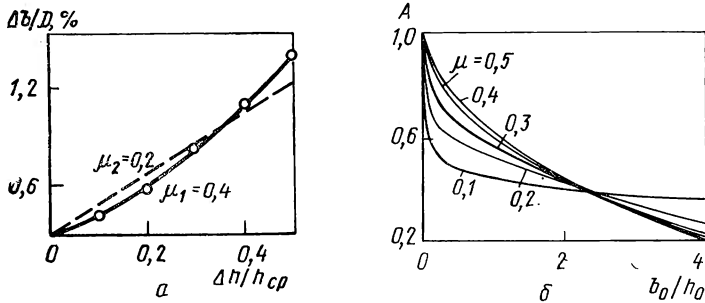


Рис. 167. Зависимость уширения, отнесенного к диаметру валков от обжатия ( $h/D=0,02$ ,  $b/h=3$ ) по данным опыта (а) и показателя уширения от ширины полосы ( $\varepsilon=0,3$ ;  $l/h=2$ ) по данным расчета (б)

очагах деформации с ростом коэффициента трения уширение увеличивается.

Если ширина очага деформации больше его длины  $\left(\frac{b}{l} > 1\right)$  — очаг деформации широкий), то с ростом коэффициента трения сопротивление трению в поперечном направлении растет быстрее,

чем сопротивление трению в продольном направлении, и уширение уменьшается.

В первом приближении можно принять, что при прокатке в калибрах профилей простейшей формы очаги деформации относятся к длинным. При прокатке листов и лент очаги деформации, как правило, бывают широкими. В последнем случае деформация приближается к плоской, и уширение мало. Поэтому часто при расчетах деформации листов и лент уширение принимают равным нулю.

Из изложенного следует, что все факторы, влияющие на величину коэффициента трения, изменяют и величину уширения. Рассмотрим важнейшие из этих факторов, принимая во внимание содержание пункта 1 гл. VIII.

Состояние поверхности инструмента и обрабатываемого тела. С улучшением качества обработки валков и полосы показатель уширения будет уменьшаться для длинных очагов деформации и увеличиваться для широких очагов деформации. При этом влияние класса чистоты поверхности полосы (особенно при горячей прокатке) меньше, чем класса чистоты поверхности валков.

Контактное напряжение. С ростом нормального контактного напряжения коэффициент трения уменьшается. Поэтому с ростом контактного напряжения показатель уширения уменьшается для длинных и растет для широких очагов деформации.

Температура прокатки. Зависимость коэффициента трения от температуры описывается кривой с максимумом (рис. 93, в). Поэтому показатель уширения при температуре, соответствующей максимуму коэффициента трения, для длинных очагов деформации будет иметь максимум, а для широких очагов деформации — минимум.

Это положение хорошо иллюстрирует результаты опытов. Как следует из рисунка 168, а, зависимость показателя уширения от температуры характеризуется кривой с резко выраженным максимумом при больших величинах обжатий (60 и 70%) и кривой, имеющей минимум при обжатиях, равных 30%. Кривые с максимумом соответствуют длинным очагам деформации. Кривая с минимумом — короткому очагу деформации.

Скорость прокатки. Поскольку с ростом скорости прокатки коэффициент трения уменьшается, то показатель уширения при этом будет уменьшаться для длинных очагов деформации и увеличиваться для коротких.

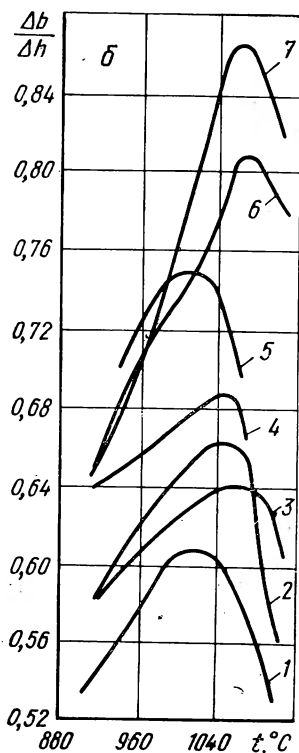
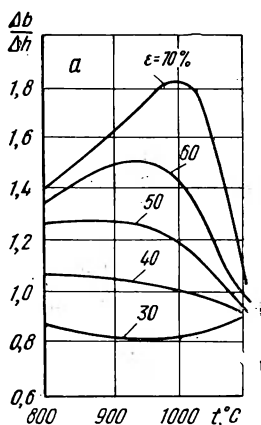
Смазка. Чем выше качество смазки, тем меньше коэффициент трения, поэтому тем меньше показатель уширения для длинных очагов деформации и больше для широких очагов деформации.

Наклеп металла. С ростом твердости прокатываемого металла и поверхности валков коэффициент трения уменьшается. Поэтому показатель уширения уменьшается для длинных очагов деформации и увеличивается для широких.

Структура металла. Опытные данные [3] показывают, что структура металла заметно влияет на показатель уширения. Однако выявить закономерную связь между характером структуры и показателем уширения на основании этих опытов не удастся.

Рис. 168. Зависимость показателя уширения от температуры при прокатке:

*a* — стали 30 при разных относительных обжатиях; *б* — сталей с различным содержанием хрома (1 — 0,1% С; 2 — 1,03% С; 16,7% Сг; 3 — 1,05% С, 0,5 Сг; 4 — 0,2% С; 12% Сг; 5 — 0,22% С; 17,5% Сг; 2% Ni; 6 — 0,09% С; 13% Сг; 7 — 0,04% С, 18% Сг)



Химический состав. От химического состава зависит состав окалины и ее свойства, т. е. коэффициент трения и, как следствие, уширение. Известно, например, что хромоникелевые и хромистые стали при нагреве покрываются слоем сухой малопластичной окалины, а окалина на поверхности заготовок из низкоуглеродистой стали, содержащей повышенный процент серы, весьма пластична и даже обладает жидкотекучестью.

Известно также, что хромоникелевые и кремнистые стали уширяются в условиях сортовой прокатки больше, а эти же стали с повышенным содержанием серы уширяются меньше, чем углеродистые стали. На рис. 168,б приведены другие характерные примеры. Для условий сортовой прокатки в качестве наиболее общего правила можно сформулировать следующее: все добавки в стали, повышающие температуру размягчения и плавления окалины, увеличивают уширение, а добавки, понижающие эту температуру, уменьшают уширение.



Вместе с тем химический состав металла, несомненно, должен влиять на уширение не только через окалину, но и непосредственно. Выяснить степень этого влияния можно с помощью проведения опытов по прокатке на воздухе, в нейтральных средах, а также в вакууме.

Задача об уширении при прокатке принадлежит к числу тех, строгое решение которых методами современной теории пластичности пока невозможно. Действительно, эта задача является трехмерной (объемной). Решение такой задачи, как мы видели в гл. V, сводится к совместному решению 18 уравнений с 18 неизвестными и удовлетворению соответствующих граничных условий. Получающаяся в процессе решения совокупность дифференциальных уравнений в частных производных не поддается решению даже численными методами с помощью ЭЦВМ. Поэтому при проведении теоретических решений задачи об уширении принимают целый ряд различных упрощений.

В качестве примера такого упрощенного подхода можно привести теорию «параллелепипедного сжатия» А. Ф. Головина. А. Ф. Головин применил эту теорию к условиям прокатки, разделив очаг деформации на две зоны «стремления к уширению» (они показаны на рис. 165) и две зоны «стремления к вытяжке». А. И. Целиков и затем А. И. Гришков, несмотря на условность деления на такие зоны, успешно применили эту идею для приближенного расчета уширения [1].

К числу приближенных теоретических решений можно отнести также решения, полученные вариационным методом<sup>1</sup>. Известно также около 40 эмпирических формул для определения уширения<sup>2</sup>. Результаты расчета по этим формулам справедливы лишь для тех условий, в которых они были получены.

Имеются и полуэмпирические решения задачи об уширении. В таких решениях, используя теоретические предпосылки, получают приближенный результат, который качественно отражает зависимость уширения от основных факторов процесса прокатки. Количественное соответствие результатов расчета с опытными данными осуществляется с помощью введения коэффициентов, полученных из экспериментальных данных.

К числу таких решений относится и метод, основанный на теории размерностей [3].

Анализ показывает, что с помощью теории размерностей можно получить большинство из известных эмпирических формул для расчета уширения. При этом выявляется полнота вводимых различными авторами допущений и границы применимости формул. Таким образом, можно получить, например, формулу С. И. Губ-

---

<sup>1</sup> См. напр. Тарновский И. Я. Поздеев А. А., Ганаго О. А. и др. Теория обработки металлов давлением. Металлургиздат. 1963. 672 с. с ил.

<sup>2</sup> Сводку формул можно найти в статье: Смирнов В. С., Григорьев А. К., Лунев В. А. — «Обработка металлов давлением», (ЛПИ, вып. 243), Л. Машгиз, 1965. с. 69—78.

кина [3], применимую для длинных очагов деформации. Эта формула имеет следующий вид:

$$\text{при } \frac{b_0}{h_0} \leq 1 \quad \frac{\Delta b}{\Delta h} = \frac{b_0}{h_0} \left( 1 + \frac{\Delta h}{h_0} \right) \left( \mu \sqrt{\frac{\Delta h}{h_0} \frac{D}{h_0}} - \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h_0} \right);$$

$$\text{при } \frac{b_0}{h_0} \geq 1 \quad \frac{\Delta b}{\Delta h} = \left( 1 + \frac{\Delta h}{h_0} \right) \left( \mu \sqrt{\frac{\Delta h}{h_0} \frac{D}{h_0}} - \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h_0} \right).$$

Ниже излагается в несколько упрощенной трактовке приближенный метод расчета, основанный на применении «двусторонней» гипотезы плоских сечений, и предложенный А. К. Григорьевым [10]. При этом предполагается, что деформация однородна по главным осям, т. е. выпучивание боковых сторон полосы при прокатке отсутствует.

## 2. Кинематические условия процесса прокатки с уширением

Обозначим абсолютную величину скорости входа полосы в очаг деформации  $v_0^*$ . Тогда горизонтальная компонента скорости в произвольном сечении очага деформации (рис. 169,а) равна:

$$v_x = - \frac{h_0 b_0}{h b}. \quad (478)$$

Примем соотношение между скоростью деформации в поперечном и вертикальном направлениях постоянным по очагу деформации

$$A = - \frac{\dot{\varepsilon}_z}{\dot{\varepsilon}_y}. \quad (479)$$

Из формулы (478) на основании равенства (479) следует, что

$$v_x = - v_0 \left( \frac{h_0}{h} \right)^{1-A}. \quad (480)$$

Компоненты вектора скорости по осям координат (см. гл. V) для упрощения дальнейшего изложения обозначим как:  $u = v_x$ ;  $v = v_y$ ;  $w = v_z$ .

Далее, используем кинематические соотношения:

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (481)$$

Используя уравнение (480), нетрудно найти, что

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dx}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial h} = v_0 (1 - A) \left( \frac{h_0}{h} \right)^{1-A} \frac{1}{h}.$$

\* В разделах 2—4 составляющие вектора скорости перемещения частиц металла обозначаются буквами  $v$  с соответствующими индексами, а составляющие тензора скорости деформаций — буквами  $\varepsilon$ .

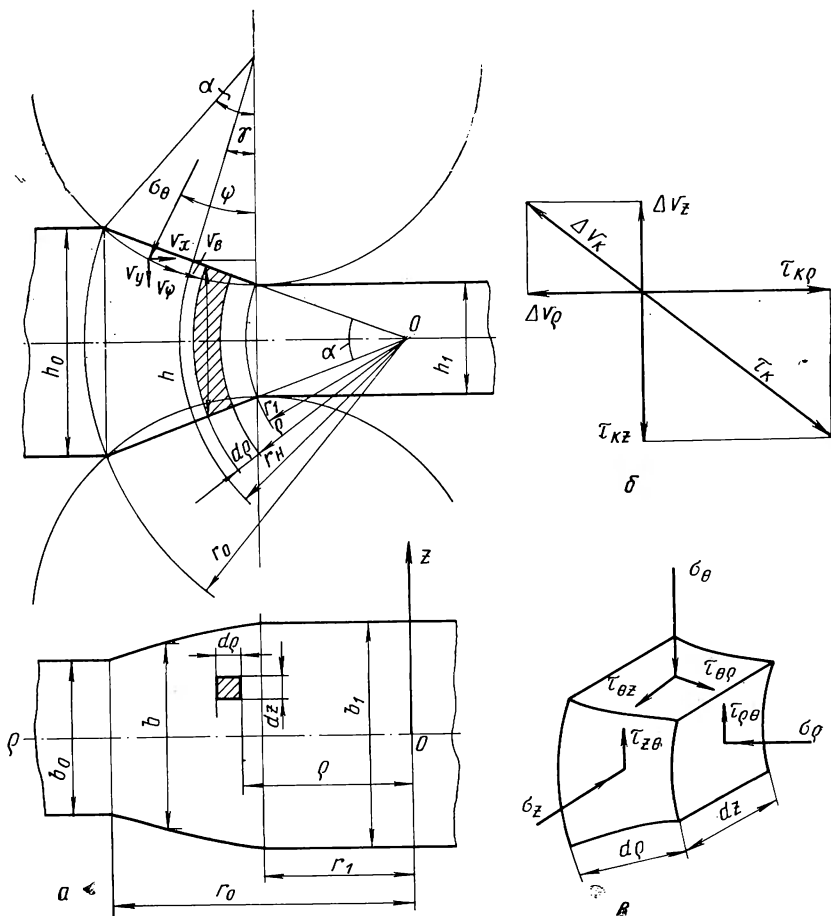


Рис. 169. Очаг деформации при прокатке (а), схема контактных сил и скоростей (б), схема действующих напряжений (в)

Поэтому

$$\dot{\epsilon}_x = (1 - A) \frac{v_0}{h} \left( \frac{h_0}{h} \right)^{1-A} \frac{dh}{dx}. \quad (482)$$

Учитывая условие постоянства секундного объема

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_t = 0 \quad (483)$$

и соотношение (479), скорость обжатия можно выразить как

$$\dot{\epsilon}_y = - \frac{\dot{\epsilon}_x}{1 - A}. \quad (484)$$

Тогда на основании выражений (482) и (479) находим

$$\dot{\varepsilon}_y = - \frac{v_0}{h} \left( \frac{h_0}{h} \right)^{1-A} \frac{dh}{h}; \quad (485)$$

$$\dot{\varepsilon}_z = A \frac{v_0}{h} \left( \frac{h_0}{h} \right)^{1-A} \frac{dh}{dx}. \quad (486)$$

Компоненты вектора скорости  $v_y$  и  $v_z$  найдем интегрированием второго и третьего уравнений системы (481) при условиях:  $v_y=0$  при  $y=0$ ;  $v_z=0$  при  $z=0$ .

Интегрирование дает следующие результаты:

$$v_y = - \frac{v_0}{h} \left( \frac{h_0}{h} \right)^{1-A} y \frac{dh}{dx}; \quad (487)$$

$$v_z = A \frac{v_0}{h} \left( \frac{h_0}{h} \right)^{1-A} z \frac{dh}{dx}. \quad (488)$$

Мы видим, что от  $y$  зависит только компонента  $v_y$ ; выражение для составляющей  $v_y$  на поверхности контакта получим при  $y=h/2$ .

Скорость движения металла вдоль дуги захвата определяется по формуле (рис. 169, а):

$$v_\psi = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (489)$$

или такими соотношениями:

$$v_\psi = \frac{v_y}{\sin \psi} = \frac{v_x}{\cos \psi}. \quad (490)$$

По любой из формул (489) — (490) при  $y=h=h/2$  и принимая во внимание, что

$$\frac{dh}{dx} = 2 \operatorname{tg} \psi, \quad (491)$$

вычислим

$$v_\psi = - v_0 \left( \frac{h_0}{h} \right)^{1-A} \frac{1}{\cos \psi}. \quad (492)$$

Скорость относительного смещения металла по поверхности вала равна:

$$\Delta v_\psi = v_\psi - v_B;$$

$$\Delta v_\psi = v_\psi - v_B = v_B - v_0 \left( \frac{h_0}{h} \right)^{1-A} \frac{1}{\cos \psi}; \quad (493)$$

Из этого выражения исключим  $v_0$ . В нейтральном сечении, т. е. при  $h=h_N$ , скорость относительного смещения равна нулю. Поэтому, считая в уравнении (493)  $\Delta v_\psi = 0$ , найдем:

$$v_0 = v_B \left( \frac{r_N}{r_0} \right)^{1-A} \cos \psi_N. \quad (494)$$

Скорость относительного поперечного смещения равна

$$\Delta v_z = v_z - 0 = v_z. \quad (495)$$

Таким образом, на основании выражений (488), (491), (493)—(495) получаем:

$$\Delta v_\psi = v_b \left[ 1 - \left( \frac{h_0}{h} \right)^{1-A} \frac{\cos \psi_H}{\cos \psi} \right];$$

$$\Delta v_z = A \frac{v_b}{h} \left( \frac{h_H}{h} \right)^{1-A} z \cos \psi_H \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}.$$

Считая  $h_H = r_H \alpha$ ;  $h = r \alpha$  и приняв  $\cos \psi_H \approx \cos \psi \approx 1$ ;  $\operatorname{tg} \psi = \psi$   
 $\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2}$ , получим

$$\Delta v_\psi = v_b \left[ 1 - \left( \frac{r_H}{r} \right)^{1-A} \right]; \Delta v_z = 2A \frac{v_b}{r} \left( \frac{r_H}{r} \right)^{1-A} z. \quad (496)$$

По этим выражениям для составляющих определяется вектор скорости относительного смещения в плоскости, касательной к поверхности валков (см. рис. 169,б):

$$\Delta v_k = \sqrt{\Delta v_\psi^2 + \Delta v_z^2}. \quad (497)$$

Полученные выражения характеризуют кинематику процесса и содержат две неизвестные величины:  $A$  и  $r_H$ . Эти величины не могут быть определены без привлечения дополнительных уравнений. Такими уравнениями являются уравнения статического равновесия и физические уравнения связи между напряжениями и скоростями деформаций. Величину  $r_H$  можно было и не вводить, но тогда вместо  $r_H$  была бы неизвестной скорость входа металла в очаг деформации.

### 3. Статические условия при прокатке с уширением

В основе предположения об однородности деформации по высоте и ширине лежит «двусторонняя» гипотеза плоских сечений. Элемент тела (рис. 169,в) до и после деформации продолжает быть ограниченным двумя парами параллельных плоскостей, нормальными к которым являются оси  $z$  и  $\rho$ .

Касательными напряжениями  $\tau_{\rho z} = \tau_{z\rho}$  пренебрегаем. В этом случае второе дифференциальное уравнение системы (41) тождественно удовлетворяется, а первое и третье, усредняя напряжения вдоль координаты  $\theta$ , следует переписать в следующем виде:

$$\int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} d\theta + \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} d\theta + \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} d\theta = 0;$$

$$\int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} d\theta + \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} d\theta = 0$$

или

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} d\theta + \frac{1}{\rho} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} d\tau_{\rho\theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\theta} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} d\theta = 0;$$

$$\frac{\sigma \sigma_z}{\partial z} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} d\theta + \frac{1}{\rho} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} d\tau_{z\theta} = 0.$$

Проинтегрируем по  $\theta$ :

$$\frac{\alpha}{2} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\alpha}{2} \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} + \frac{1}{\rho} [(\tau_{\rho\theta})_{\theta=\frac{\alpha}{2}} - (\tau_{\rho\theta})_{\theta=0}] = 0;$$

$$\frac{\alpha}{2} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} [(\tau_{z\theta})_{\theta=\frac{\alpha}{2}} - (\tau_{z\theta})_{\theta=0}] = 0.$$

Принимая

$$(\tau_{\rho\theta})_{\theta=\frac{\alpha}{2}} = \tau_{\rho\theta} = \tau_{k\rho} \quad (\tau_{z\theta})_{\theta=0} = 0;$$

$$(\tau_{z\theta})_{\theta=\frac{\alpha}{2}} = \tau_{z\theta} = \tau_{kz} \quad (\tau_{z\theta})_{\theta=0} = 0,$$

получим с учетом введенных обозначений известные уравнения равновесия в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} + \frac{2\tau_{k\rho}}{\rho\alpha} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{2\tau_{kz}}{\rho\alpha} = 0.$$

Векторы удельной силы трения  $\tau_k$  на поверхности контакта направлены противоположно вектору относительного смещения  $\Delta v_k$  (рис. 169, б). Разлагая вектор силы трения по двум направлениям — по оси  $z$  и по касательной к окружности валков, получим;

$$\tau_{kz} = \tau_k \frac{\Delta v_z}{\sqrt{\Delta v_z^2 + \Delta v_\rho^2}}; \quad \tau_{k\rho} = \tau_k \frac{\Delta v_\rho}{\sqrt{\Delta v_z^2 + \Delta v_\rho^2}}.$$

Считаем, что величины переднего и заднего натяжения известны:  $\rho = r_0$ ;  $\sigma_\rho = \sigma_0$ ;  $\rho = r_1$ ;  $\sigma_\rho = \sigma_1$ .

На боковых гранях очага деформации нормальные к поверхности напряжения равны нулю:

$$\sigma_z = 0 \text{ при } z = \frac{b}{2} = \frac{b_0}{2} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^A.$$

Этих статических условий достаточно для интегрирования уравнений равновесия и определения величины  $\rho_n$ , если известен показатель поперечной деформации.

Необходимо, однако, оговориться, что условия  $\sigma_\rho = \sigma_1$  при  $\rho = r_1$  и  $\sigma_\rho = \sigma_0$  при  $\rho = r_0$  одновременно точно выполнять невозможно. Поэтому примем статическое условие на входе в очаг деформации в интегральной форме:

$$\frac{2}{b_0} \int_0^{\frac{b_0}{2}} \sigma_\rho dz = 0.$$

Если выполнить точно статическое условие на входе в очаг деформации ( $\rho = r_0$ ), то придется в усредненной форме задавать условие на выходе ( $\rho = r_1$ ).

В цилиндрических координатах показатель поперечной деформации запишется в следующем виде:

$$A = - \frac{\dot{\epsilon}_z}{\dot{\epsilon}_\theta}.$$

Принимая во внимание, что, согласно формуле (93),  $E' = \frac{\sigma_i}{\dot{\epsilon}_i}$  и среднее напряжение  $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ , получим из формул (64):

$$\sigma_\rho - \sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\epsilon}_{\rho\rho}; \quad \sigma_\theta - \sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\epsilon}_{\theta\theta}; \quad \sigma_z - \sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\epsilon}_{zz}.$$

Разделим третье уравнение этой системы на второе и с учетом принятых в этих разделах обозначений, получим

$$\frac{\sigma_z - \sigma}{\sigma_y - \sigma} = \frac{\dot{\epsilon}_z}{\dot{\epsilon}_\rho} = -A.$$

Отсюда получим усредненный по высоте показатель уширения:

$$A = - \frac{2\sigma_z - \sigma_\rho - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_\rho - \sigma_z}.$$

Возьмем теперь условие пластичности в форме

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta \sigma_s,$$

где коэффициент, учитывающий влияние среднего напряжения  $\sigma_2$ , согласно формуле (84), равен

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} = \frac{2}{\sqrt{3 - \mu_\epsilon^2}}.$$

В эту формулу входят величины, определяемые равенствами (63):

$$\mu_{\sigma} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad \text{и} \quad \mu_{\dot{\epsilon}} = \frac{2\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}.$$

Пусть показатель поперечной деформации  $A > \frac{1}{2}$  (при этом  $\sigma_1 \approx \sigma_z$ ), тогда  $A = -\frac{\dot{\epsilon}_z}{\dot{\epsilon}_\theta} = -\frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_3}$  и  $\dot{\epsilon}_1 = -A\dot{\epsilon}_3$ .

Из условия постоянства секундного объема следует  $\dot{\epsilon}_2 = -\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3$ . Поэтому принимаем, что

$$\mu_{\epsilon} = 3\frac{A-1}{A+1} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{2}{\sqrt{3+\mu_{\epsilon}^2}} = \frac{1+A}{\sqrt{3}\sqrt{1-A+A^2}}.$$

Если  $A < \frac{1}{2}$  (при этом  $\sigma_1 \approx \sigma_\rho$ ), то, проведя аналогичные выкладки, будем иметь:

$$\mu_{\dot{\epsilon}} = \frac{3A}{2-A} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{2-A}{\sqrt{3}\sqrt{1-A+A^2}}.$$

Таким образом, коэффициент Лоде имеет два значения. В качестве величины напряжения  $\sigma_1$  выбирают наименьшее из двух значений напряжений:  $\sigma_\rho$  и  $\sigma_z$ .

#### 4. Система уравнений для расчета уширения при прокатке и ее решение

Запишем общую систему уравнений с учетом результатов, полученных в п. 2 и 3:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} + \frac{2\tau_k}{\rho\alpha} \frac{\Delta v_\rho}{\sqrt{\Delta v_z^2 + \Delta v_\rho^2}} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{2\tau_k}{\rho\alpha} \frac{\Delta v_z}{\sqrt{\Delta v_z^2 + \Delta v_\rho^2}} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (498)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \sigma_z + \frac{(1+A)\sigma_s}{\sqrt{3}\sqrt{1-A+A^2}} \quad \text{при} \quad A > \frac{1}{2}; \\ \sigma_\theta &= \sigma_\rho + \frac{(2-A)\sigma_s}{\sqrt{3}\sqrt{1-A+A^2}} \quad \text{при} \quad A < \frac{1}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (499)$$

$$A = \frac{\bar{\sigma}_\rho - \bar{\sigma}_\theta - 2\bar{\sigma}_z}{2\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_\rho - \bar{\sigma}_z}; \quad (500)$$

$$\Delta v_\rho = v_b \left[ 1 - \left( \frac{r_H}{\rho} \right)^{1-A} \right]; \quad \Delta v_z = 2A \frac{v_b}{\rho} \left( \frac{r_H}{\rho} \right)^{1-A}; \quad (501)$$



$$\left. \begin{aligned} \tau_k &= \mu \sigma_\theta \text{ при } \mu \sigma_\theta \leq \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}; \\ \tau_k &= \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \text{ при } \mu \sigma_\theta > \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}; \end{aligned} \right\} \quad (502)$$

$$b = b_0 \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^{1-A}. \quad (503)$$

Усреднение напряжений производится по известным формулам:

$$\bar{\sigma}_\rho = \frac{\int_{r_1}^{r_0} \int_0^{\frac{b}{2}} \sigma_\rho d\rho dz}{\int_{r_1}^{r_0} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^A d\rho} \quad \text{и т. д.} \quad (504)$$

Решение этой системы уравнений можно осуществить лишь в численной форме с использованием ЭЦВМ. Преобразуем уравнение к безразмерному виду. За основные единицы принимаем для напряжений  $\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$ , для линейных размеров  $r_0$  и для скоростей  $v_b$ .

При этом, например, второе из уравнений равновесия примет вид:

$$\frac{\partial \left( \frac{\sigma_z}{\sigma_s / \sqrt{3}} \right)}{\partial \left( \frac{z}{r_0} \right)} + \frac{2 \frac{\tau_k}{\sigma_s / \sqrt{3}}}{\frac{\rho}{r_0}} \frac{\Delta v_z}{\sqrt{\Delta v_z^2 + \Delta v_\rho^2}} = 0.$$

Для краткости обозначим  $\frac{\sigma_z}{\sigma_s / \sqrt{3}} = \sigma_z$ ;  $\frac{z}{r_0} = z$  и т. д.

$$\text{Тогда} \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{2 \tau_k}{\rho \alpha} \frac{\Delta v_z}{\sqrt{\Delta v_z^2 + \Delta v_\rho^2}} = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Следующим шагом является преобразование полученных уравнений к конечно-разностной форме с учетом того, что для решения этой системы используется метод сеток. При этом на горизонтальную проекцию очага деформации накладывается сетка (рис. 170) с разными величинами расстояний между узлами по  $\rho$  ( $\Delta \rho$ ) и  $z$  ( $\Delta z$ ). Криволинейный контур боковой поверхности аппроксимируется ступенчатым контуром, проведенным через узлы сетки, наиболее близкие к этому криволинейному контуру.

Координаты узла сетки характеризуются двумя числами  $i$  и  $j$ , отсчитываемыми от начала координат по  $z$  и  $\rho$ . Число узлов, расположенных по ширине, неодинаково и зависит от величины  $\rho$ . Запишем, например, второе уравнение равновесия в конечных разностях:

$$\frac{\sigma_z^{i+1, j} - \sigma_z^{i, j}}{\Delta z} = - \frac{2 \tau_k^{i, j}}{\alpha \rho^{i, j}} \frac{\Delta v_{z, ij}}{\sqrt{\Delta v_{z, ij}^2 + \Delta v_{\rho, ij}^2}}.$$

Граничные условия будут иметь вид:

$$\sigma_\rho = \sigma_1 \text{ при } \rho = r_1;$$

$$\sigma_z = 0 \text{ при } r = \frac{b}{2};$$

$$\frac{1}{m_j + 1} \sum_{i=0}^{m_j} \sigma_\rho^{i,j} = \bar{\sigma}_{\rho z 0} = \sigma_0 \text{ при } \rho = r_0.$$

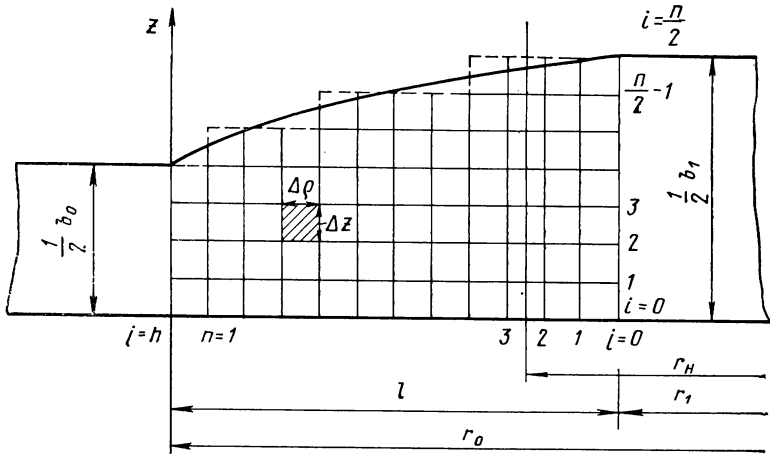


Рис. 170. Сетка для интегрирования уравнений равновесия для процесса прокатки

Величины конечных приращений координат определяются по формулам:

$$\Delta x = \frac{r_1 - r_0}{n}; \quad \Delta z = \frac{b_1}{n},$$

где  $n$  — выбранное целое число, определяющее величину шага по  $x$  и  $z$ ;

$m_j$  — значение  $i$  для узлов сетки, наиболее близко лежащих к боковому контакту, заданному уравнением (503).

Решение задачи о прокатке с уширением сводится к организации двух итерационных процессов по параметрам  $A$  и  $r_H$ . Алгоритм решения должен предусматривать задание первоначальных значений  $A$  и  $r_H$  в пределах:  $0 < A < 1$ ;  $r_0 < r_H < r_1$ .

Затем при выбранных значениях переменных  $A$  и  $r_H$  производится интегрирование уравнений равновесия (498). При этом используются условия пластичности (499) для определения напряжения  $\sigma_\theta$ . В результате интегрирования определяются эпюры напряжений, по которым рассчитываются средние значения напряжений  $\bar{\sigma}_\rho$ ,  $\bar{\sigma}_\theta$ ,  $\bar{\sigma}_z$  с использованием формул (504). При интегрировании уравнений равновесия в качестве граничных условий приня-

ты условия на свободной боковой поверхности и в плоскости выхода металла из очага деформации. Напряжения в плоскости входа в очаг деформации определяются в результате интегрирования уравнений равновесия последовательным переходом от одного узла ячейки к другому начиная от плоскости выхода. Поэтому в общем случае напряжения на входе будут отличаться от принятой величины заднего натяжения (подпора)  $\sigma_0$ . Это отличие является критерием правильности задания параметра  $r_n$ .

Признаком правильности выбора параметра  $A$  является совпадение с требуемой точностью заданного значения  $A$  с полученным по формуле (500). При невыполнении хотя бы одного из этих условий значения  $A$  и  $r_n$  должны быть изменены и последовательные приближения должны продолжаться до выполнения обоих требований.

В качестве нулевого приближения для координат критического сечения выбрано следующее значение:  $r_n = 0,25(r_0 - r_1)$ . Для вычисления нулевого приближения показателя поперечной деформации использовали формулу

$$A = \frac{r_0 - r_1}{(r_0 - r_1) + b_{cp}},$$

$$\text{где } b_{cp} = \frac{1}{2}(b_0 + b_1) = \frac{b_0}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{1-\varepsilon} \right)^A \right].$$

В результате формула нулевого приближения показателя поперечной деформации имеет вид:

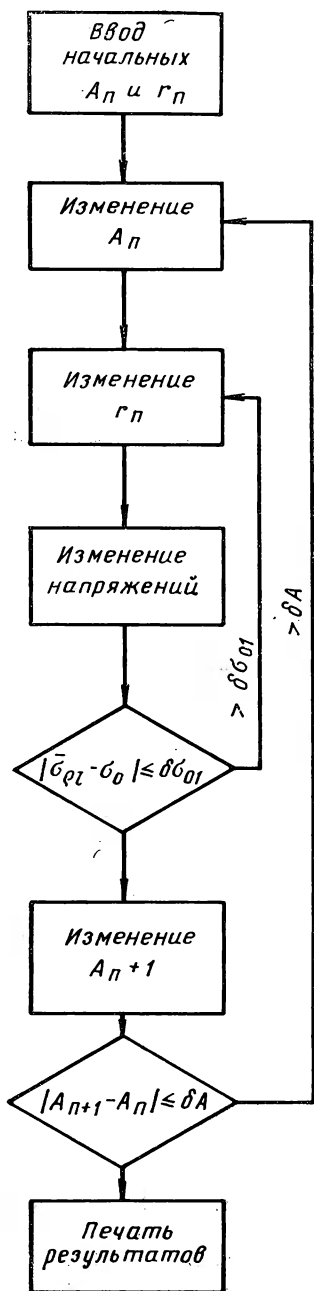
$$A \approx \frac{r_0 - r_1}{r_0 - r_1 + \frac{b_0}{2} [1 + (1-\varepsilon)^{-A}]}. \quad (505)$$

Для вычисления параметра  $A$  по этой формуле необходимо провести вспомогательные итерации по  $A$  начиная, например, с  $A = 0,5$ . На рис. 171 приведена схема организации итерационных циклов. Процесс последовательных приближений величин  $A$  и  $r_n$  построен следующим образом.

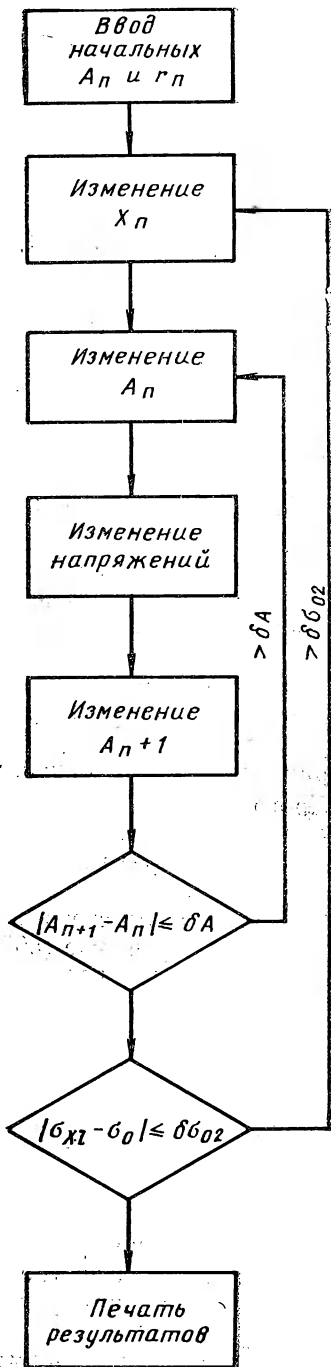
На первом этапе (рис. 171,а) при постоянном значении показателя поперечной деформации  $A$  происходит изменение величины  $r_n$  до выполнения граничного условия на входе с некоторой грубой оценкой  $\delta\sigma_{01}$ :

$$|\bar{\sigma}_{pe} - \sigma_0| \leq \delta\sigma_{01}.$$

После достижения заданной точности  $\delta\sigma_{01}$  производится проверка правильности задания показателя  $A$ . Для этого вычисляется величина  $A_{n+1}$  по формуле (500) и сравнивается со значением  $A_n$ . Разность  $A_{n+1} - A_n$  характеризует точность задания величины  $A$ . Если требуемая точность  $\delta A$  не достигнута, то задается новое значение величины  $A$  и рассмотренный выше процесс возобнов-



а



б

Рис. 171. Схема организации итерационных циклов при решении задач об уширении при прокатке

ляется. В качестве следующего приближения принимается среднее арифметическое значение заданной величины  $A$  и полученной из уравнения (28):

$$A'_{n+1} = \frac{A_{n+1} + A_n}{2}.$$

При одновременном достижении требуемой точности по  $A$  и грубой точности по  $r_n$ , контролируемой с помощью величины  $\delta\sigma_{01}$ , порядок последовательных приближений изменяется (рис. 171,б). При постоянном значении  $r_n$  производится изменение показателя  $A$  так же, как это было описано выше. При достижении точности  $\delta A$  проверяется выполнение граничного условия на входе в очаг деформации для заданного  $r_n$ .

Если требуемое граничное условие не выполняется, то величина  $r_n$  изменяется и снова производится итерации по  $A$  до достижения требуемой точности  $\delta A$ .

Процесс второго этапа вычислений повторяется до одновременного выполнения граничного условия с требуемой повышенной точностью  $\delta\sigma_{01}$  и получения прежней точности  $\delta A$ .

Изложенное выше чередование порядка итераций обеспечивает достижение любой наперед заданной точности по обоим параметрам.

А. К. Григорьев тщательно разработал и реализовал решение задачи о прокатке с уширением в прямоугольных координатах [10], общая схема которой была с использованием цилиндрических координат кратко изложена выше.

Программирование задачи о прокатке проводилось для ЭЦВМ УРАЛ-2 и БЭСМ-2. В соответствии с описанным выше алгоритмом блок-схема программы [10, с. 132] включает в себя совокупность команд трех видов:

1. Команды для счета по формулам, например по формуле  $\tau_k = \mu\sigma_y$  или по формуле (505).

2. Команды для реализации разветвляющихся программ. Например:

$$\tau_k = \mu\sigma_y, \text{ если } \mu\sigma_y < \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}};$$

$$\tau_k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}, \text{ если } \mu\sigma_y \geq \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}.$$

3. Команды для реализации циклических программ. В данном случае циклические программы реализуются так, что в них число циклов заранее неизвестно, оно зависит от промежуточных результатов вычислений и определяется условием достижения заданной точности.

На основании численного решения А. К. Григорьев построил кривые, характеризующие зависимость уширения от основных параметров процесса прокатки. Приведем несколько примеров.

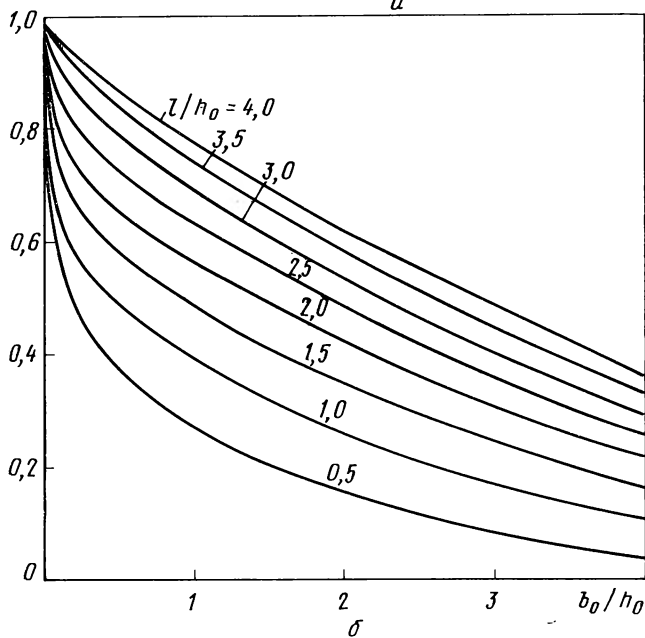
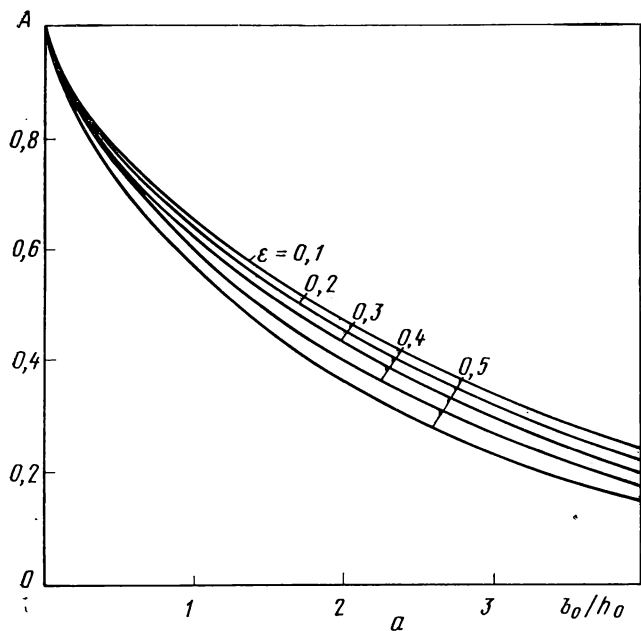


Рис. 172. Номограммы для определения показателя поперечной деформации:

$a$  — зависимость от относительных ширины полосы и обжатия ( $\mu=0,3$ ;  $l/h_0=1$ );  $b$  — зависимость от отношений  $l/h_0$  и  $b_0/h_0$  при  $\mu=0,3$

Из рассмотрения кривых на рис. 163,б следует, что с изменением ширины полосы при переходе от узкого очага деформации к широкому происходит качественное изменение характера влияния коэффициента трения, что вполне согласуется с опытными данными (см. рис. 163,а) и теоретическими представлениями. На рис. 166,б приведена кривая, характеризующая влияние ширины полосы  $b_0/h_0$  на среднее контактное напряжение  $\frac{P_{ср} \sqrt{3}}{\sigma_s}$  по данным расчета. При увеличении ширины полосы среднее контактное напряжение увеличивается, но при некотором значении  $b_0/h_0$  образуется точка излома, которая имеется и при экспериментальном исследовании этой закономерности (рис. 166,а).

Проведенные расчеты показали, что точка излома соответствует равенству подпиряющих напряжений и размеров очага деформации ( $\sigma_x = \sigma_z b_0 \approx 1$ ). Из рис. 166,б следует, что увеличение ширины полосы может привести к повышению среднего контактного напряжения в несколько раз. Следовательно, применение формул, выведенных для плоской деформации, может привести к значительным ошибкам в расчете давлений при прокатке узких полос. Вместе с тем непосредственно само уширение может оказывать влияние на давление только через коэффициент Лоде  $\beta$ , поэтому изменение показателя  $A$  может изменять среднее контактное напряжение лишь в пределах 15%.

Таким образом, теоретическое решение трехмерной задачи прокатки с уширением, базирующейся на приближенной гипотезе плоских сечений, позволяет получить качественную и количественную оценку этого сложного явления процесса прокатки.

На рис. 172 приведены номограммы для определения показателя поперечной деформации, построенные с использованием расчетных данных.

## **XIV** глава

### **Давление на валки и момент прокатки**

#### **1. Давление на валки и среднее контактное напряжение**

Давление на валки определяет напряженное состояние и характер деформации металла в валках. С давлением на валки связаны опережение, уширение, условия захвата, величина и координата точки приложения равнодействующей давления, момент, мощность, расход энергии и точность прокатки. От величины и характера распределения давления по дуге захвата зависит износ валков, срок их службы.

Напомним, что среднее контактное нормальное напряжение есть отношение суммарного давления к проекции площади очага деформации на горизонтальную плоскость:

$$p = \frac{P}{F} = \frac{P}{bl}.$$

Как и ранее (см. гл. VIII), среднее давление на валки при прокатке с уширением представим в виде:

$$p = K n_{\sigma} n_{\beta} n_{\alpha}, \quad (506)$$

где истинное сопротивление металла деформации определяется по формуле:

$$K = n_{\nu} n_{\eta} \sigma_s. \quad (507)$$

Перейдем к определению коэффициентов, входящих в формулы (506) и (507). Сначала определим коэффициент подпора  $n_{\sigma}$ . Полное давление на валки при прокатке ( $P$ ) равно сумме давлений в зонах опережения ( $P_{оп}$ ), отставания ( $P_{от}$ ) и прилипания ( $P_{п}$ ):

$$P = P_{оп} + P_{от} + P_{п}.$$

На основании равенств (419) и (420) получим:

$$P = \frac{K}{\delta} \int_{r_1}^{r_{оп}} \left[ (\delta + 1) \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^{\delta} - 1 \right] d\rho + \frac{K}{2\mu} \int_{r_{оп}}^{r_{п}} \left( 1 + \delta \ln \frac{\rho}{r_{оп}} \right) d\rho +$$

$$+ \frac{K}{2\mu} \int_{r_n}^{r_{от}} \left( 1 + \delta \ln \frac{r_{от}}{\rho} \right) d\rho + \frac{K}{\delta} \int_{r_{от}}^{r_0} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^{\delta} + 1 \right] d\rho.$$

Здесь:

$$\int_{r_1}^{r_{оп}} \left[ (\delta + 1) \left( \frac{\rho}{r_1} \right)^{\delta} - 1 \right] d\rho = r_{оп} \left[ \left( \frac{r_{оп}}{r_1} \right)^{\delta} - 1 \right];$$

$$\int_{r_{от}}^{r_0} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^{\delta} + 1 \right] d\rho = r_{от} \left[ \left( \frac{r_0}{r_{от}} \right)^{\delta} - 1 \right];$$

$$\int_{r_{оп}}^{r_{п}} \left( 1 + \delta \ln \frac{\rho}{r_{оп}} \right) d\rho + \int_{r_{п}}^{r_{от}} \left( 1 + \delta \ln \frac{r_{от}}{\rho} \right) d\rho = r_{от} - r_{оп} +$$

$$+ \delta (r_{оп} + r_{от} - 2r_{п}) + \delta r_{п} \ln \frac{r_{п}^2}{r_{оп} \cdot r_{от}} = r_{от} - r_{оп} +$$

$$+ \delta (\sqrt{r_{от}} - \sqrt{r_{оп}})^2.$$



В последнем выражении, согласно формуле (422), принято, что  $r_n = \sqrt{r_{от} r_{оп}}$ .

Окончательно для определения величины полного давления на валки без учета влияния внешних зон и ширины полосы можно записать следующую формулу:

$$P = K \left\{ \frac{r_{от}}{\delta} \left[ \left( \frac{r_0}{r_{от}} \right)^\delta - 1 \right] + \frac{r_{оп}}{\delta} \left[ \left( \frac{r_{оп}}{r_1} \right)^\delta - 1 \right] + \frac{1}{2\mu} [(r_{от} - r_{оп}) + \delta (\sqrt{r_{от}} - \sqrt{r_{оп}})^2] \right\}.$$

Среднее контактное напряжение и коэффициент подпора определяются из простых соотношений:

$$p = \frac{P}{bl} = \frac{P}{l}; \quad n_\sigma = \frac{p}{K};$$

Здесь  $l$  — длина очага деформации при прокатке. Далее удобно перейти от цилиндрических координат к прямоугольным.

Принимая во внимание геометрические соотношения

$$l = \frac{\Delta h}{\alpha}; \quad h_0 = r_0 \alpha; \quad h_{от} = r_{от} \alpha; \quad h_{оп} = r_{оп} \alpha; \quad h_1 = r_1 \alpha,$$

получим

$$n_\sigma = \frac{1}{\Delta h} \left\{ \frac{h_{от}}{\delta} \left[ \left( \frac{h_0}{h_{от}} \right)^\delta - 1 \right] + \frac{h_{оп}}{\delta} \left[ \left( \frac{h_{оп}}{h_1} - 1 \right) \right] + \frac{1}{2\mu} [(h_{от} - h_{оп}) + \delta (\sqrt{h_{от}} - \sqrt{h_{оп}})^2] \right\}. \quad (508)$$

Если на поверхности контакта зоны прилипания нет, то  $h_{оп} = h_{от} = h_n$ , и равенство (3) приводится к виду

$$n_\sigma = \frac{h_n}{\Delta h \delta} \left[ \left( \frac{h_0}{h_n} \right)^\delta + \left( \frac{h_n}{h_1} \right)^\delta - 2 \right].$$

Выразим отношение  $h_0/h_n$  через  $h_1/h_n$ , принимая во внимание равенство нормальных контактных напряжений в нейтральном сечении:

$$\left( \frac{h_0}{h_n} \right)^\delta = \frac{1}{\delta - 1} \left[ (\delta + 1) \left( \frac{h_n}{h_1} \right)^2 - 2 \right].$$

Поэтому

$$n_\sigma = \frac{2 h_1}{\Delta h (\delta - 1)} \left( \frac{h_n}{h_1} \right) \left[ \left( \frac{h_n}{h_1} \right)^\delta - 1 \right], \quad \bullet$$

$$\text{или } n_\sigma = \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\delta-1)} \left( \frac{h_n}{h_1} \right) \left[ \left( \frac{h_n}{h_1} \right)^\delta - 1 \right]. \quad (509)$$

В последнем равенстве  $\varepsilon = \Delta h/h_0$  — относительное обжатие.

Отношение  $h_n/h_1$  вычисляют по формуле (455), которая после сложных преобразований принимает вид:

$$\frac{h_n}{h_1} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{\delta^2 + 1}{(1 + \varepsilon)^\delta}}}{\delta + 1} \right\}^{\frac{1}{\delta}}. \quad (510)$$

С использованием уравнений (509) и (510) на рис. 173 построена номограмма для определения коэффициента подпора  $h_\sigma$  при наличии скольжения на поверхностях контакта металла с валками.

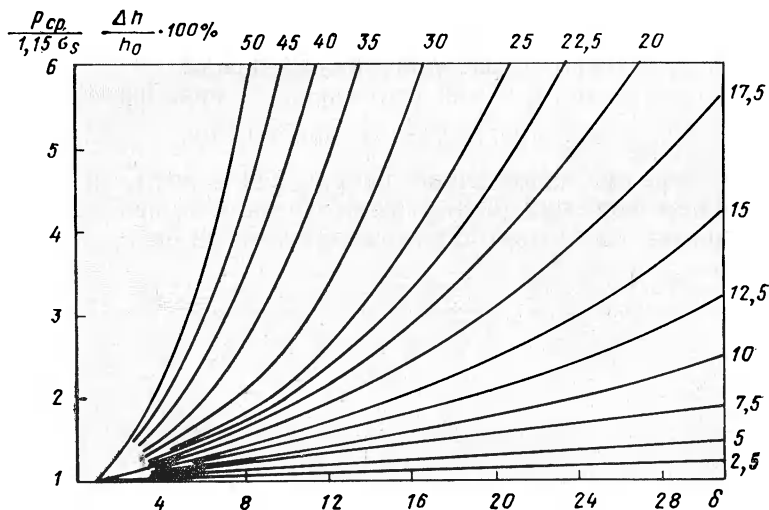


Рис. 173. Номограмма для определения коэффициента  $n_\sigma = \rho/1,15 \sigma_s$  при наличии только зон скольжения

Если коэффициент трения  $\mu=0,5$ , то прилипание распространяется на всю контактную поверхность. При этом  $h_{от}=h_o$ ,  $h_{оп}=h_1$ , и равенство (508) приобретает вид:

$$n_\sigma = 1 + \frac{\delta}{\varepsilon} (1 - \sqrt{1 - \varepsilon})^2. \quad (511)$$

Уравнение (511), как показано в [3, с. 301], с небольшой погрешностью можно использовать для вычисления  $n_\sigma$  и в случае, когда на поверхности контакта существуют участки прилипания и участки скольжения.

В гл. XII было получено уравнение (458) для определения длины зоны прилипания, которое с учетом равенств (451) при  $\varphi_1=\varphi_2=1$  примет такой вид:

$$\frac{l_n}{l} = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \left( \frac{\frac{\delta - 1}{\delta}}{\frac{\delta}{2\mu} - 1} \right)^{\frac{1}{\delta}} - (1 - \varepsilon) \left( \frac{\frac{\delta}{2\mu} + 1}{\delta + 1} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right]. \quad (512)$$

Приравнивая левую часть уравнения (512) нулю, найдем условие, при котором зона прилипания исчезает. Получим:

$$\left(\frac{\delta}{2\mu}\right)^2 - 1 = \frac{\delta^2 - 1}{(1-\varepsilon)\delta}.$$

Отсюда условие, при котором зоны прилипания нет, будет иметь следующий вид:

$$\mu \leq \frac{\delta}{2 \sqrt{\frac{\delta^2 - 1}{(1-\varepsilon)\delta} + 1}} = B. \quad (513)$$

Рассмотрим различные варианты:

$\mu \leq B$  — существуют только участки скольжения;

$\mu \geq B$  — существуют участки скольжения и прилипания;

$\mu = \frac{1}{2}$  — существует только участок прилипания.

По номограмме, приведенной на рис. 174 и построенной с использованием формулы (513), можно установить, при каких условиях на контактной поверхности существует зона прилипания.

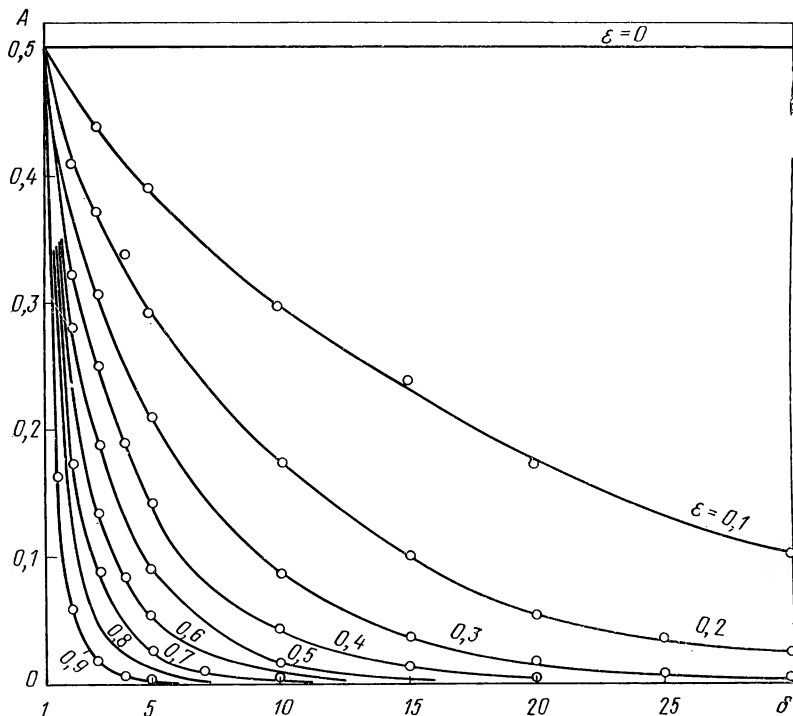


Рис. 174. Номограмма критерия  $B \left( B = \frac{\delta}{2 \sqrt{\frac{\delta^2 - 1}{(1-\varepsilon)\delta} + 1}} \right)$ , определяющего существование участков скольжения и прилипания

## 2. Учет влияния ширины полосы, внешних зон, скорости и наклепа

Влияние среднего главного напряжения на величину контактного напряжения определим, используя положение теории размерностей.

Примем за основные единицы измерения системы СИ по ГОСТ 9867—61. В этой системе применяются три основных независимых единицы измерения: длина в метрах, масса в килограммах, время в секундах.

Кроме этих независимых величин, в научных исследованиях применяется множество производных величин измерения, которые являются некоторыми комбинациями основных, определяя тем самым их размерность.

Размерность производной величины измерения может быть представлена в виде степенного одночлена из основных единиц. Не приводя строгого доказательства этого положения дадим лишь некоторые из производных единиц измерения, наиболее часто используемых для анализа процессов обработки металлов давлением (табл. 4).

Т а б л и ц а 4

Единицы измерения, используемые для анализа процессов обработки металлов давлением

Характеристика	Обозначение	Единицы измерения СИ (CGS)	Характеристика	Обозначение	Единицы измерения СИ (CGS)
Сила	$n$	$n$ ( $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{сек}^2$ )	Площадь	$\omega$	$\text{м}^2$ ( $\text{м}^2$ )
Нормальное напряжение	$\sigma$	$n/\text{м}^2$ ( $\text{кг}/\text{м} \cdot \text{сек}$ )	Объем	$V$	$\text{м}^3$ ( $\text{м}^3$ )
Касательное напряжение	$\tau$	$n/\text{м}^2$ ( $\text{кг}/\text{м} \cdot \text{сек}^2$ )	Скорость	$c$	$\text{м} \cdot \text{сек}$ ( $\text{м} \cdot \text{сек}$ )
			Ускорение	$g$	$\text{м}/\text{сек}^2$ ( $\text{м}/\text{сек}^2$ )
			Плотность	$\gamma$	$\text{кг}/\text{м}^3$ ( $\text{г}/\text{см}^3$ )

Уравнение, описывающее какой-либо процесс обработки металлов давлением, как и всякое физическое уравнение, можно представить так, чтобы все его члены выражались при помощи одной системы единиц измерения. Тогда все члены такого уравнения будут иметь одинаковую размерность, т. е. будут однородными. Условие однородности справедливо для всех физических закономерностей, в том числе и для тех, вид которых еще неизвестен. Следовательно, если из общезначимых соображений и с помощью эксперимента выявлены факторы, определяющие данную закономерность, то конкретный вид ее может быть определен с помощью анализа размерностей.

Метод теории размерностей указывает логические пути группировки факторов в особые безразмерные комплексы, за счет введения которых результаты данного эксперимента можно обобщить для целой группы подобных явлений. Этот метод особенно полезен,

когда нет математической интерпретации явления или математическое решение затруднено. Правильность формулы, выведенной на основании теории размерностей, как и вывод всякой формулы, ограничена правильностью и полнотой сделанных при ее выводе предположений, но если исходные предпосылки сформулированы с достаточной полнотой, то выводы теории размерностей будут, безусловно, правильными.

При использовании теории размерностей для решения поставленной задачи обычно ставят две серии опытов. Первая серия — физические опыты для выявления факторов, влияющих на явление. Вторая серия — для определения численного значения параметров, определяющих процесс. Проверка формул, полученных на основе теории размерностей должна производиться сравнением с данными опытов, проведенных в условиях, отличающихся от тех, для которых они выведены.

При прочих равных условиях контактное напряжение при прокатке есть функция нормального напряжения  $\sigma = Kn_\sigma n_3$ , касательного напряжения  $\tau$ , действующего в направлении ширины полосы, собственно ширины полосы  $b$  и высоты полосы  $h$ :  $p = f(\sigma, \tau, b, h)$ .

Представим правую часть этого выражения в виде степенного многочлена:

$$p = \sum_1^n A_n \sigma^{a_n} b^{c_n} h^{d_n} \tau^{f_n},$$

а левую как сумму предела текучести  $\sigma_s$  и некоторого добавочного члена  $\sigma'$ , имеющего размерность напряжений, который характеризует превышение истинного напряжения над пределом текучести за счет влияния упомянутых выше факторов. В соответствии с этим в правой части последнего равенства ограничимся двумя первыми членами:

$$\sigma + \sigma' = \sum_1^2 A_n \sigma^{a_n} b^{c_n} h^{d_n} \tau^{f_n}.$$

Из равенства размерностей правой и левой частей

$$\frac{H}{M^2} = \left(\frac{H}{M^2}\right) M^{c_n} M^{d_n} \left(\frac{H}{M^2}\right)^{f_n}$$

$$\text{или } HM^2 = H^{a_n + f_n} M^{-2a_n + c_n + d_n - 2f_n}$$

следует, что  $1 = a_n + f_n; -2 = -2a_n + c_n + d_n - 2f_n$ .

Из этой системы двух уравнений получим:

$$a_n = 1 - f_n; d_n = c_n.$$

В таком случае:

$$p = \sum_1^2 A_n \sigma_s^{1-f_n} b^{c_n} h^{-c_n} \tau^{f_n}$$

$$\text{или } \frac{\rho}{\sigma_s} = \sum_1^2 A_n \left( \frac{\tau}{\sigma_s} \right)^{f_n} \left( \frac{b}{h} \right)^{e_n}.$$

Отношение касательного напряжения к пределу текучести представляет собой коэффициент трения  $\frac{\tau}{\sigma_s} = \mu$ , а отношение  $\frac{\rho}{\sigma_s} = n_{\beta}$  коэффициент, учитывающий влияние среднего главного напряжения; поэтому

$$n_{\beta} = \frac{\rho}{\sigma_s} = 1 + \frac{\sigma'}{\sigma_s} = A_1 \mu^{d_1} \left( \frac{b}{h} \right)^{b_1} + A_2 \mu^{d_2} \left( \frac{b}{h} \right)^{b_2}. \quad (514)$$

Коэффициент  $n_{\beta}$  изменяется, как известно из гл. 3, в следующих пределах:  $1,0 \leq n_{\beta} \leq 1,155$ . Случаю плоской деформации соответствует  $n_{\beta} = 1,155$ . Случаю, когда деформация имеет место в направлении всех трех главных осей, соответствует  $n_{\beta} = 1$ . Очевидно:  $\lim n_{\beta} = 1$ ;  $b/h \rightarrow 0$ .

Из равенства (514) следует, что это возможно лишь при условии, если один из членов его правой части (например, первый) численно равен единице, т. е. при условии:  $d_1=0$ ;  $b_1=0$ ;  $A_1=1$ . Эти значения коэффициентов легко получить также и почленным сравнением правой и левой частей равенства. Следовательно:

$$n_{\beta} = 1 + A_2 \mu^{d_2} \left( \frac{b}{h} \right)^{b_2}.$$

На основании опытов можно принять:  $A_2 = 1/3$ ;  $d_2 = 1$ ;  $b_2 = 1$ . Окончательно

$$n_{\beta} = 1 + \frac{\mu}{3} \cdot \frac{b}{h}. \quad (515)$$

В этом равенстве  $b$ ,  $h$  — средняя ширина и высота полосы при прокатке:

$$b = \frac{b_0 + b_1}{2}; \quad h = \frac{h_0 + h_1}{2}.$$

Определим предельную величину отношения  $b/h$ , при котором равенство (515) еще справедливо.

Считая

$$1 + \frac{\mu}{3} \frac{b}{h} = 1,155, \quad \text{получим } \frac{b}{h} = \frac{0,465}{\mu}.$$

Итак:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } 0 < \frac{b}{h} \leq \frac{0,465}{\mu} \quad n_{\beta} = 1 + \frac{\mu}{3} \cdot \frac{b}{h}; \\ \text{при } \frac{b}{h} \geq \frac{0,465}{\mu} \quad n_{\beta} = 1,155 = \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{array} \right\} \quad (516)$$

Из этих равенств следует, что при  $\mu=0$  деформация становится плоской лишь при бесконечно большом отношении  $b/h$ . При  $\mu=0,1$  деформация становится плоской при  $b/h=4,65 \approx 5$ . Когда же коэффициент трения равен своему предельному значению  $\mu=0,5$ , то  $b/h=0,93 \approx 1$ .

Коэффициент влияния внешних зон определяется по формулам, приведенным в п. V гл. XII или по номограмме (рис. 153).

Соображения по поводу определения коэффициентов, учитывающих влияние скорости и наклепа, даны в п. 9 гл. VIII.

Пример. Рассчитать давление металла на валки при холодной прокатке ленты из малоуглеродистой стали. Предел текучести стали до прокатки  $\sigma_s=460 \text{ Мн/м}^2$  ( $45 \text{ кг/мм}^2$ ) и после прокатки  $\sigma_s=620 \text{ Мн/м}^2$  ( $61 \text{ кг/мм}^2$ ). Толщина ленты до и после прокатки:  $h_0=3 \text{ мм}$  и  $h_1=2 \text{ мм}$ . Ширина ленты  $b_0 \approx b_1=100 \text{ мм}$ . Коэффициент трения при прокатке  $\mu=0,15$ , диаметр валков  $D=200 \text{ мм}$ . Скорость прокатки  $c=3 \text{ м/сек}$ . Средняя высота  $h = \frac{h_0 + h_1}{2} = 2,5 \text{ мм}$ . Отношение

$$\frac{b}{h} = \frac{100}{2,5} = 40 > \frac{0,465}{\mu} = \frac{0,465}{0,15} = 3,1$$

Следовательно, в данном случае деформация плоская:  $n_p = 1,155$ .

Длина очага деформации приблизительно (без учета упругого сплющивания валков) равна

$$l \approx \sqrt{0,5 \Delta h D} \approx \sqrt{0,5 \cdot 1 \cdot 200} = 10 \text{ мм}.$$

Отношение  $\frac{l}{h} = \frac{10}{2,5} = 4 > 1$ . Поэтому коэффициент, учитывающий влияние внешних зон,  $n_s=1$ . Относительное обжатие при прокатке  $\frac{\Delta h}{h_0} = \frac{3-2}{3} = 0,333$ . Скорость деформации при прокатке, согласно формуле (277):

$$u = \frac{c}{l} \cdot \frac{\Delta h}{h_0} = \frac{3000}{10} \cdot 0,333 \approx 100 \text{ сек}^{-1}.$$

Скоростной коэффициент (см. рис. 12, гл. 7):  $n_v=1,07$ . Коэффициент, учитывающий влияние наклепа, определим по равенству (332):

$$n_n = \frac{K_0 + K_1}{2 K_0} = \frac{\sigma_s + \sigma_{s_1}}{2 \sigma_s} = \frac{460 + 620}{2 \cdot 460} = 1,18.$$

Истинное сопротивление деформации металла при прокатке:

$$K = n_p \cdot n_v \cdot n_n \cdot \sigma_s = 1,155 \cdot 1,07 \cdot 1,18 \cdot \sigma_s = 1,45 \sigma_s = 1,45 \cdot 460 = 665 \text{ Мн/м}^2 \text{ (} 65 \text{ кг/мм}^2 \text{)}.$$

Выясним, имеется ли на контактных поверхностях зона прилипания. Предварительно уточним длину очага деформации, вычислив ее методом последовательных приближений по формулам (158). Удобнее, однако, воспользоваться приближенной формулой, полученной из формулы (158), вывод которой дан в гл. XI сборника задач по настоящему курсу [11]:

$$l = 0,11 \cdot 10^{-4} K R + \sqrt{\Delta h R + (0,11 \cdot 10^{-4} K R)^2} = 0,11 \cdot 10^{-4} \cdot 665 \cdot 0,1 + \sqrt{1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 + (0,11 \cdot 10^{-4} \cdot 665 \cdot 0,1)^2} = 0,73 \cdot 10^{-3} + 10,25 \cdot 10^{-3} \approx 11 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 11 \text{ мм}.$$

Таким образом, в данном случае упругое сплющивание валков увеличивает длину очага деформации на 1 мм, или 10% по сравнению с той длиной очага деформации, которая получается на основании геометрических отношений. Угол захвата  $\alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta h}{l} = \frac{1}{11} = 0,091$ . Параметр  $\delta = \frac{2\mu}{\alpha} = \frac{2 \cdot 0,15}{0,04} = 3,3$ . Далее по номограмме (рис. 174) получаем  $B=0,25$ . Таким образом,  $\mu = 0,15 < 0,25$ ; следовательно, по номограмме (рис. 173) получим:  $\frac{p}{K} = n_{\sigma} = 1,40$ . Среднее контактное напряжение  $p = n_{\sigma} K = 1,40 \cdot 665 = 930 \text{ Мн/м}^2$  (93 кг/мм<sup>2</sup>). Полное давление на валки

$$P = p b \cdot l = 930 \cdot 100 \cdot 10,87 = 1010 \text{ Кн} (\sim 100 \text{ Т}).$$

### 3. Момент и мощность при прокатке на гладкой бочке

Момент  $M_{\text{дв}}$  на валу двигателя прокатного стана можно представить в виде суммы четырех составляющих:

$$M_{\text{дв}} = M_{\text{пр}} + M_{\text{тр}} + M_{\text{х.х}} + M_{\text{дин}}$$

где  $M_{\text{пр}}$  — момент прокатки, т. е. момент, необходимый для преодоления сопротивления деформации металла;

$M_{\text{тр}}$  — момент, необходимый для преодоления сопротивлений сил трения, возникающих в подшипниках прокатного стана во время деформации полосы валками;

$M_{\text{х.х}}$  — момент, необходимый для преодоления сопротивлений сил трения во время холостого хода стана;

$M_{\text{дин}}$  — динамический момент, т. е. момент, необходимый для преодоления сил инерции, если вращение валков осуществляется неравномерно.

Момент трения  $M_{\text{тр}}$  не включает в себя момент холостого хода  $M_{\text{х.х}}$  потому, что в процессе расчета удобнее эти составляющие момента двигателя вычислять раздельно.

Момент прокатки  $M_{\text{пр}}$  для простейшего случая прокатки вычисляется следующим образом. Диаметр прокатных валков в рассматриваемом случае одинаков, окружные скорости валков равны, пластичность полосы во всех ее точках в очаге деформации можно считать постоянной или изменяющейся симметрично относительно оси прокатки. Поэтому закон распределения давления по дуге захвата верхнего и нижнего валков одинаков. Поэтому координаты точек приложения равнодействующих давлений  $P$ , действующих со стороны верхнего и нижнего валков на металл, одинаковы (рис. 175). Если, кроме этих сил, на металл больше никаких сил не действует, а движение полосы равномерно, то равнодействующие должны быть равны между собой. Кроме того, из условия равновесия следует, что они должны быть направлены по одной прямой навстречу друг другу и расположены в плоскости, параллельной той, которая проходит через оси прокатных валков.

Но металл, находящийся в очаге деформации, оказывает на валки то же действие, что и валки на металл (рис. 175,б).



На основании изложенного момент, необходимый для вращения обоих валков, можно определить как

$$M_{пр} = 2R a$$

$$\text{или } M_{пр} = P D \sin \delta,$$

где  $a$ ,  $\delta$  — плечо и угол, соответствующие точке приложения равнодействующей;

$D$  — диаметр валков.

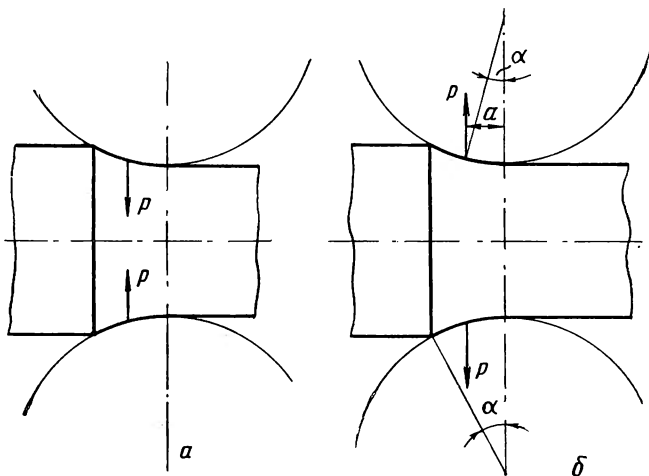


Рис. 175. Действие валков на металл (а) и металла на валки (б) (угол приложения силы  $P$  равен  $\delta$ )

Коэффициент положения равнодействующей давления металла на валки обозначим следующим образом:  $\psi = a/l \approx \delta/a$ . В таком случае

$$M_{пр} = 2 l \psi \sqrt{0,5 \Delta h D}. \quad (517)$$

О. Я. Мельничук [7] провел обширное исследование зависимости коэффициента положения равнодействующей от различных факторов при прокатке стали, свинца, алюминия и титана на станах 110, 210, 250 и при прокатке слитков типа КЛ-14, 1П-14,5 на блюминге-слябинге 1150 Череповецкого завода. При прокатке на блюминге-слябинге 1150 коэффициент  $\psi$  уменьшается с уменьшением толщины раската и не зависит от скорости прокатки в пределах ее изменения от 0,5 до 4 м/сек. Однако коэффициент положения равнодействующей зависит от химического состава и температуры прокатки, уменьшается с ростом содержания углерода и увеличивается с ростом температуры по закону:  $\psi = 0,16 + 0,000217t$ .

Коэффициент равнодействующей давления металла на валки может изменяться в довольно широком интервале: от 0,65 до 0,25. При этом величина его увеличивается при увеличении толщины по-

лосы до прокатки, температуры прокатки, коэффициента контактного трения, угла захвата при постоянном обжатии и уменьшается при увеличении катающего диаметра валков, содержания углерода в стали, относительного обжатия при постоянном угле захвата.

Установлено далее, что коэффициент положения равнодействующей давления не зависит от ширины полосы, а также относительного обжатия и угла захвата при прокатке полос одинаковой исходной толщины в интервале изменения относительного обжатия от 5 до 50% для стали и свинца и от 5 до 40% для алюминия и титана. На рис. 176 приведены некоторые результаты исследований О. Я. Мельничука.

Коэффициент положения равнодействующей можно определить и теоретически, используя для этого формулы, полученные в предыдущих параграфах. Способ определения вытекает из очевидного положения, согласно которому координата точки приложения равнодействующей соответствует центру тяжести эпюры давлений на контактных поверхностях металла с валками.

Момент добавочных сил трения  $M_{\text{тр}}$  представляет собой сумму момента, необходимого для преодоления сопротивлений трения в подшипниках валков прокатного стана, и момента, необходимого для преодоления сопротивлений сил трения в передаточных механизмах стана.

Момент, необходимый для преодоления сопротивлений сил трения в подшипниках валков стана, равен:

$$M_{\text{тр}_1} = qP \frac{d}{2} f,$$

где  $q$  — число валков;

$P$  — давление металла на валки;

$d$  — диаметр шеек прокатных валков;

$f$  — коэффициент трения в подшипниках.

Момент сил трения в передаточном механизме, приведенный к валу двигателя, определится как

$$M_{\text{тр}_2} = \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) \frac{M_{\text{пр}} + M_{\text{тр}}}{i},$$

где  $\eta$  — коэффициент полезного действия передачи от двигателя к валкам;

$i$  — передаточное число от двигателя к валкам;

$M_{\text{пр}}$  — момент прокатки;

$M_{\text{тр}}$  — момент сил трения в подшипниках валков, приведенных к последним.

Общий момент, затрачиваемый на преодоление сил трения, приведенный к валу двигателя, будет таким:

$$M_{\text{тр}} = \frac{M_{\text{тр}_1}}{i \eta} + \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) \frac{M_{\text{пр}}}{i}.$$

$$\text{или } M_{\text{тр}} = \frac{M_{\text{тр}_1}}{i} + M_{\text{тр}_2}.$$

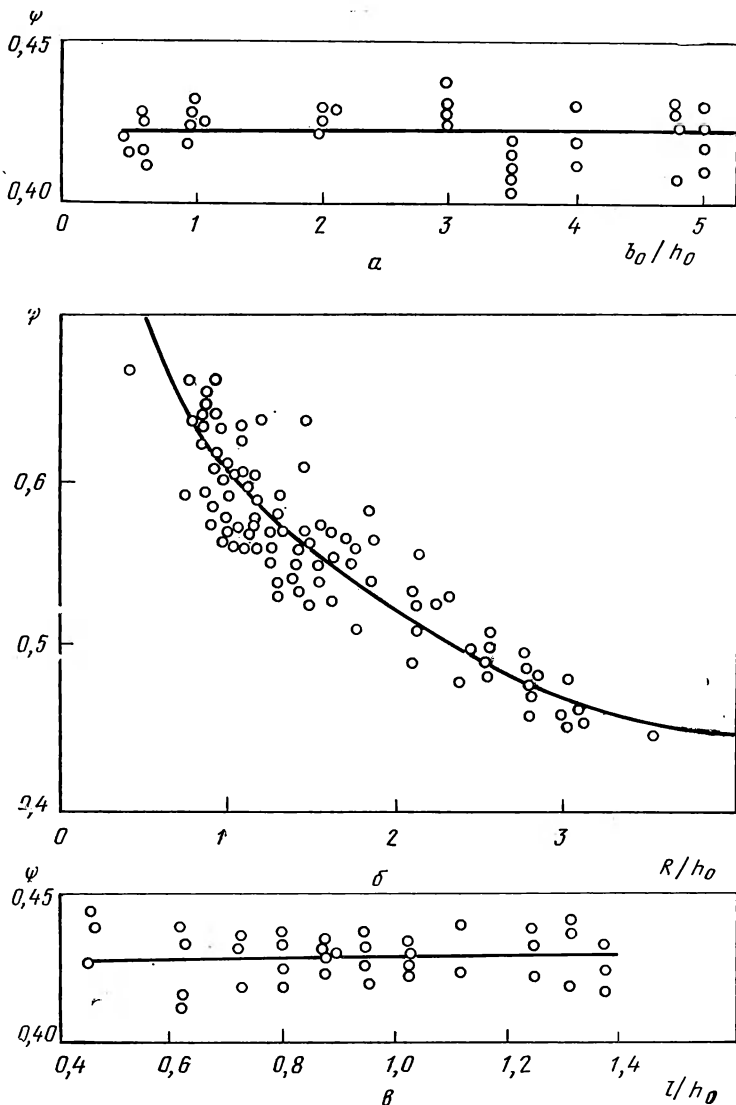


Рис. 176. Зависимость коэффициента плеча равнодействующей от различных параметров прокатки стали:  
 а — от  $b_0/h_0$  (стан 250,  $D/h = 9,0$ ;  $t = 1100^\circ\text{C}$ ); б — от  $D/2h_0$  (стан 1150, слиток 08КП;  $t = 1250\text{--}1150^\circ\text{C}$ ); в — от  $l/h$  (стан 110, сталь Ст.3,  $R/h_0 = 3,3$ ;  $t = 1200^\circ\text{C}$ )

Суммарный момент холостого хода, приведенный к валу двигателя, требующийся для вращения  $n$  деталей, равен:

$$M_{x.x} = \sum_1^n \frac{G f_n d_n}{2 i_n},$$

где  $G$  — масса данной детали;  
 $f_n$  — коэффициент трения в подшипниках;  
 $d_{ц}$  — диаметр цапф;  
 $i_n$  — передаточное число между двигателем и данной деталью.

Динамический момент  $M_{дин}$  возникает лишь в случае неравномерного вращения валков. Поэтому при определении момента двигателя для прокатного стана динамический момент учитывают при расчете реверсивных станов с часто повторяющимся режимом разгона и торможения валков, а также при расчете станов, при наличии приводов с маховиками и в некоторых других случаях, когда неравномерность вращения валков достаточно заметна:

$$M_{дин} = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{GD^2}{38,4} \frac{dn}{dt} [\text{дж}] = \frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt},$$

где  $I$  — момент инерции вращающихся частей стана;  
 $\omega$  — угловая скорость;  
 $t$  — время;  
 $G$  — масса вращающихся частей стана;  
 $D$  — приведенный диаметр инерции вращающихся частей стана;  
 $n$  — число оборотов двигателя в минуту.

В случае ускорения  $M_{дин}$  имеет знак плюс, при торможении динамический момент отрицателен.

Определив величину моментов двигателя во время прохода металла между валками и во время пауз, можно найти мощность двигателя в процессе прокатки и во время пауз по формуле:  $M = M_{дв} \omega$ .

При вычислении мощности привода стана приходится учитывать способность двигателя к перегрузке, проверять его на нагрев. Если есть маховик или другие тяжелые вращающиеся части, создающие значительный динамический момент, то строят график изменения мощности или момента прокатки во времени — так называемую нагрузочную диаграмму.

Описание используемой при этом методики выходит за рамки настоящей книги и дано в специальных руководствах [12].

Расчет энергосиловых параметров прокатки можно осуществлять и другими методами, например по расходу работы, используя опытные данные, характеризующие зависимость расхода энергии на тонну проката от удлинения. Описание и критическую оценку этих методов можно найти в книгах [2, 5, 12, 13].

#### 4. Давление металла на валки при прокатке в калибрах

Для производства фасонного проката применяют валки, на рабочей части каждого из которых делают врезы по окружности. Эти врезы носят название ручьев. Просвет, образованный двумя ручьями в плоскости, проведенной через оси прокатных валков, который в процессе прокатки заполняется металлом, называется калибром.

Профилем называется поперечное сечение полосы. Профиль близок по форме к калибру, но ввиду незаполнения (а иногда и переполнения) калибра точного их совпадения, как правило, не бывает. Все профили можно разделить на две группы.

Простые, которые имеют выпуклый периметр: квадратные, круглые, прямоугольные, шестиугольные, овальные и им подобные.

Фланцевые, которые имеют вогнутый периметр и более сложную конфигурацию: двутавровые балки, швеллеры, рельсы и другие, состоящие обычно из трех элементов, расположенных под некоторым углом друг к другу.

Существует еще группа профилей, занимающих промежуточные положения между простыми и фланцевыми, например угловые. Эти профили по особенностям прокатки и характеру деформации можно отнести к простым профилям. Ниже мы рассмотрим только случай прокатки простых профилей.

Из опытных данных следует, что величина контактного напряжения в значительной степени зависит от схемы напряженного состояния объемов, примыкающих к данному участку контактной поверхности. Вместе с тем распределение напряжений вдоль дуги контакта гораздо ближе к равномерному, чем этого можно было ожидать [13].

Исследование (см. [5]) распределения нормальных контактных напряжений при прокатке в калибрах систем овал—квадрат, овал—круг, овал—овал, ромб—квадрат показало, что контактные напряжения распределены по ширине калибров таким образом, что имеют максимальную величину в тех сечениях, где металл претерпевает наибольшее обжатие (рис. 177).

Вместе с тем влияние заземления полосы, например, в ящичных калибрах на среднее давление прокатки невелико: оно увеличивается по сравнению с давлением при прокатке на гладкой бочке

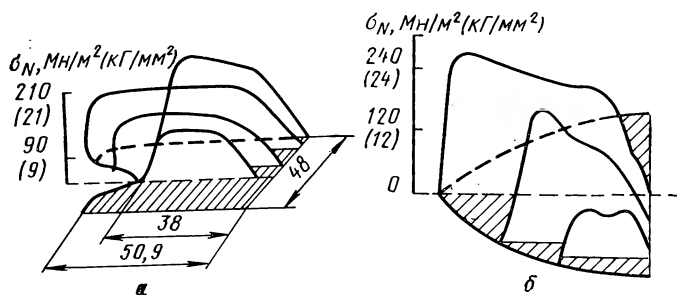


Рис. 177. Распределение нормальных контактных напряжений по длине очага деформации при прокатке стали:  
а — квадрата в овале; б — овала в квадрате

только на 10—15%, что непосредственно следует и из уравнения пластичности.

В сортаменте прокатываемых изделий Советского Союза насчи-

тывается около 1000 профилей. При этом число их из года в год увеличивается. Поэтому рациональным является построение общей теории, базирующейся на законах подобия, применительно к целым группам или классам прокатываемых профилей. Это позволило бы сравнительно просто осуществлять как расчеты деформаций и усилий, так и надлежащий математический анализ процесса прокатки в калибрах. Такой анализ особенно важен в связи с необходимостью использовать его результаты для автоматизации прокатных станов.

Основная идея такого метода была высказана еще в 1936 г. А. Ф. Головиным<sup>1</sup>, который ввел понятие о так называемых соответственных полосах, согласно которому полоса фасонного сечения и полоса с прямоугольным сечением называются соответственными, если площади и отношение сходственных осей (сторон их поперечного сечения) равны. Разовьем эту идею с позиций теории подобия.

Подобными условиями деформации называются такие, при которых удовлетворены условия геометрического, физического и механического подобия [14, 15].

Геометрически подобными называются такие тела, отношение характерных площадей сечения которых равно квадрату отношения их линейных размеров, а отношение объемов равно кубу отношения их линейных размеров:

$$\frac{F'}{F''} = a^2, \quad \frac{V'}{V''} = a^3.$$

Заметим, что если характерные площади сечений, а также объемы тел одинаковы, то

$$\frac{F'}{F''} = 1, \quad \frac{V'}{V''} = 1$$

и, следовательно:  $F' = F''$ ,  $V' = V''$ ,

т. е. размеры модели и натура совпадают.

Понятно, что ввиду различия геометрической формы соответственных полос можно говорить лишь об их приближенном геометрическом подобии.

Пусть мы имеем некоторый фасонный профиль и его требуется преобразовать к профилю прямоугольной формы (рис. 178).

Введем следующие обозначения:

$h, b, a = \frac{b}{H}$ ,  $\omega$  — высота, ширина, отношение ширины к высоте и площадь фасонного профиля;

$h_c, b_c, a_c = \frac{b_c}{h_c}$ ,  $\omega_c$  — те же величины для соответственного прямоугольного профиля.

<sup>1</sup> Головин А. Ф. Прокатка. Калибровка, ч. III. Свердловск М Л. 1936. 220 с.

Размеры соответственных профилей связаны между собой формулами, вытекающими из их определения:

$$b_c = a h_c; \quad \omega = h_c b_c.$$

Откуда:

$$h_c = \sqrt{\frac{\omega}{a}}; \quad b_c = a h_c. \quad (518)$$

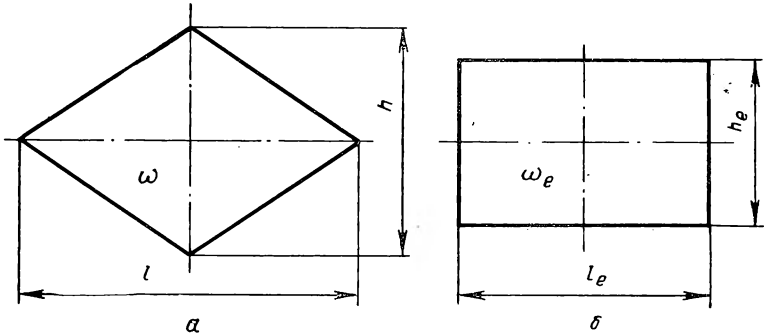


Рис. 178. Фасонный и соответственный ему прямоугольный профили

Условие постоянства объема для соответственной прямоугольной полосы можно написать в следующем виде:

$$\frac{h_{1c}}{h_{0c}} \cdot \frac{b_{1c}}{b_{0c}} \cdot \frac{l_{1c}}{l_{0c}} = 1$$

$$\text{или } \eta_c \beta_c \lambda_c = 1.$$

Для полос фасонного сечения условие постоянства объема по форме может точно совпадать с записанным выше или отличаться от него численными множителями, зависящими от формы поперечных сечений полосы до и после прокатки. Например, при прокатке ромбического сечения в ромбическое этот множитель равен 1, а при прокатке квадрата в эллипс  $\sqrt{\pi/2}$ .

Эти коэффициенты учитывают различие в значениях высоты и ширины профиля по его сечению, и поэтому их уместно называть коэффициентами преобразования сечения. Тогда условие постоянства объема можно записать в таком виде:

$$\gamma^2 \frac{h_1}{h_0} \frac{b_1}{b_0} \frac{l_1}{l_0} = 1 \quad (519)$$

$$\text{или } \gamma_\eta \frac{h_1}{h_0} j_\beta \frac{b_1}{b_0} \frac{l_1}{l_0} = 1, \quad (520)$$

причем

$$\gamma^2 = j_\eta j_\beta. \quad (521)$$

Равенство (520) можно переписать так:

$$\gamma \beta \lambda = 1, \quad (522)$$

где коэффициенты деформации полосы равны:

$$\gamma = \gamma_\gamma \frac{h_1}{h_0}; \quad \beta = \gamma_\beta \frac{b_1}{b_0}; \quad \lambda = \frac{l_1}{l_0}. \quad (523)$$

В равенствах (519)—(523)  $\gamma, \gamma_\gamma, \gamma_\beta$  — коэффициенты преобразования сечения по площади, по высоте и по ширине.

Для полос фасонного сечения напомним следующее соотношение:

$$m = \frac{a_1}{a_0} = \frac{b_1/h_1}{b_0/h_0} = \frac{b_1}{b_0} \frac{h_0}{h_1}.$$

На основании работы [18] имеем

$$m = \frac{\gamma_\gamma}{\gamma_\beta} \frac{\beta}{\eta};$$

$$\text{откуда } \beta = m \frac{\gamma_\beta}{\gamma_\gamma} \eta.$$

С учетом этого соотношения условие постоянства объема приобретает вид:

$$m \frac{\gamma_\beta}{\gamma_\gamma} \eta^2 \lambda = 1,$$

$$\text{откуда } \eta = \frac{1}{\sqrt{m \lambda \frac{\gamma_\beta}{\gamma}}}. \quad (524)$$

Для соответственных полос запишем ряд соотношений:

$$m_c = \frac{a_{1c}}{a_{0c}} = \frac{b_{1c}/h_{1c}}{b_{0c}/h_{0c}} = \frac{l_{1c}}{b_{0c}} \frac{h_{0c}}{h_{1c}}; \quad (525)$$

$$m_c = \frac{\beta_c}{\eta_c}; \quad \beta_c = m_c \eta_c;$$

$$m_c \eta_c^2 \lambda = 1; \quad \eta_c = \frac{1}{\sqrt{m_c \lambda_e}}.$$

Имея в виду, что отношение осей у соответственных полос одинаково, убеждается в том, что  $m = m_c$ .

Далее, вытяжки у соответственных полос одинаковы по определению. Поэтому для того, чтобы коэффициенты деформации соответственных полос по высоте были одинаковы, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\gamma_\beta = \gamma_\gamma = \gamma, \quad (526)$$

что следует из сравнения соотношений (524) и (525). Тогда из условия постоянства объема немедленно будет следовать и равенство приведенных коэффициентов деформации соответственных



полос по ширине. Опыты, проведенные А. К. Григорьевым и Н. Х. Давильбековым<sup>1</sup>, доказали, что соотношение (520) для простых профилей соблюдается.

Итак, поскольку коэффициенты преобразования сечения у соответственных полос по ширине и высоте одинаковы, то коэффициенты их деформации по высоте, ширине и длине также одинаковы, т. е.

$$\frac{h_{0c}}{h_{1c}} = \frac{1}{\eta_c} = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\gamma} \frac{h_0}{h_1}; \quad \frac{b_{1c}}{b_{0c}} = \beta_c = \beta = \gamma \frac{b_1}{b_0}; \quad \lambda_c = \lambda. \quad (527)$$

Эти исходные соотношения дают возможность далее доказать [3, с. 344], что для соответственных профилей одинаковы объемы, заключенные в пределах очага деформации; объемы, смещенные по длине, высоте и ширине очага деформации; секундные объемы, средняя длина, ширина и площадь горизонтальной проекции очага деформации; опережение и отставание; отношение площади контактной поверхности к объему очага деформации. Наконец, отношения полных поверхностей к объему очага деформации равны в первом приближении. Итак, геометрическое подобие для соответственных полос соблюдается с хорошей степенью приближения.

**Рассмотрим следующие условия физического подобия тел при их пластической деформации:**

1. Сравнимые тела должны иметь одинаковый химический состав и структуру в сходственных точках. Это условие трудно осуществимо при наличии разницы в объемах природы и модели, поскольку воспроизвести одинаковую структуру в образцах разного объема без применения специальных приемов (например, электрошлакового переплава) невозможно. Но при наличии одинаковых объемов и контактных поверхностей модели и природы эти условия можно принять приближенно соблюдаемыми.

2. Процесс деформации модели и природы должен длиться одинаковое время, т. е.  $\tau = idem$ . Это требование связано с тем, что модель и натура должны находиться в одинаковых условиях с тем, чтобы физические и физико-химические процессы, имеющие место во время пластической деформации, прошли в одинаковой мере.

3. В каждый данный момент, отвечающий одной и той же величине относительной деформации от начала пластической обработки тел, температуры модели и природы в любых соответственных их точках должны быть одинаковы. При этом будет обеспечено одно и то же сопротивление деформации модели и природы. Это условие обеспечивается, если  $\tau = idem$ . Однако требование одинакового времени деформации равносильно условию одинаковых относительных скоростей деформации модели и природы, т. е.  $c = idem$ . В общем случае при разных размерах модели и природы условия  $t = idem$  и  $c = idem$  находятся в противоречии друг с другом.

<sup>1</sup> Смирнов В. С., Григорьев А. К., Давильбеков И. Х. Деформация металлов в ромбических и овальных калибрах. М., «Металлургия», 1967 118 с. с ил.

В. Л. Дурнев показал [8], что если при прокатке соблюдается условие геометрического подобия и сходственные размеры соответственных полос одинаковы, то при этом средняя скорость и длина пробега дислокаций (см. гл. I) в них одинаковы. В результате у соответственных полос при данном химическом составе все физико-химические процессы в материале будут протекать с равными скоростями. По расчетам В. Д. Дурнева, согласно которым при прокатке отожженного железа с толщины 0,5 до 0,35 мм в валках диаметром 100 мм при скорости прокатки 1 м/сек, средняя скорость и длина пробега дислокаций равны соответственно 5,3 см/сек и 1,7 мкм. Средняя длина пробега приблизительно соответствует среднему размеру блока, который в данном случае оценивается величиной 2 мкм. В случае соответственных полос приведенные размеры модели и натуре совпадают и все перечисленные выше требования физического подобия приближенно согласуются.

Если тела геометрически подобны, то условия их механического подобия сводятся к тому, чтобы в случае аналогичного по характеру статического нагружения внешними силами  $P$  и давлениями  $p$ , значения этих величин у натуре и у модели были равны между собой  $P/F = \text{idem}$  или  $p = \text{idem}$ .

Характер статического нагружения у фасонной и прямоугольной соответственных полос различен, поэтому точное соблюдение условий механического подобия в данном случае невозможно.

Следует иметь в виду, что проведенные выше рассуждения относились к соответственной прямоугольной полосе, которая представляет собой некоторый расчетный эквивалент фасонного профиля. Возникает вопрос, в какой мере этот расчетный эквивалент соответствует действительным условиям прокатки прямоугольной полосы на гладкой бочке. Опыты Н. Н. Павлова [3, с. 346] показали, что поверхности контакта прямоугольных полос отличались по величине от поверхностей контакта фасонных полос с валками в большую сторону.

Это объясняется следующими причинами.

Равенство коэффициентов деформации при прокатке фасонных полос и соответственных им расчетных, как было показано выше, вытекает из условия постоянства объема и из того факта, что объемы, заключенные в пределах очага деформации, и объемы, смещаемые по высоте, ширине и длине, у таких полос одинаковы. Характер действующих в калибрах и на гладкой бочке сил в данном случае не учитывается, поскольку речь идет о простом пересчете геометрических размеров полос до и после прокатки по формулам (518) преобразования сечений.

При практическом осуществлении прокатки фасонной полосы в калибрах и прямоугольной полосы, исходные размеры которой равны соответственным на гладкой бочке, возникает система сил, зависящая от размеров и формы калибра и полосы и от степени заполнения калибра. Иными словами, несоответствие коэффициентов деформации в данном случае обусловлено различием в статической

системе сил, приложенных со стороны калибра к полосе фасонного профиля и со стороны бочки валков к полосе прямоугольного профиля.

Это различие можно учесть при помощи эмпирических поправочных коэффициентов уширения [3, с. 353]. В результате коэффициенты деформации фасонного профиля в калибре и прямоугольного на гладкой бочке будут одинаковы, т. е. они будут соответственными.

Однако поправка на уширение важна для расчета деформации полосы, а не расчета давлений на валки. Если размеры полосы до и после прокатки известны, то расчет давлений будет достаточно точным и без введения поправки на уширение. Это следует из многочисленных опытов, которые показывают, что характер статического нагружения оказывает слабое влияние на величину среднего давления при прокатке фасонных полос:  $p \approx p_c$ . Объясняется это тем, что при прокатке фасонных полос, в элементах сечения полосы, имеющих обжатие, отличное от среднего, возбуждаются дополнительно осевые сжимающие напряжения в зонах повышенного обжатия и растягивающие напряжения в зонах пониженного обжатия ( $\pm \sigma'_p$ ) вследствие одинаковой для всего сечения вытяжки. Дополнительные напряжения, в соответствии с уравнением пластичности, увеличивают или уменьшают контактные напряжения в этом сечении:  $\sigma_\theta = K + (\sigma_p + \sigma'_p)$ . Осевые напряжения  $\sigma'_p$  взаимно уравновешиваются, т. е. их алгебраическая сумма по всему сечению полосы равна нулю. Поэтому на среднее давление прокатки эти дополнительные напряжения влияния не оказывают [6].

Итак, можно принять, что средние давления при прокатке соответственных полос одинаковы. Вместе с тем выше было показано, что площади контактных поверхностей у соответственных полос одинаковы. Следовательно, суммарное давление на валки соответственных полос также одинаково:  $P = pF = p_c F_c = P_c$ .

Отсюда следует, что и работа прокатки, затрачиваемая на деформацию соответственных полос, одинакова:  $A = A_c$ .

Это следует из того, что коэффициенты деформации, объемы, заключенные в пределах очага деформации, и давления при прокатке соответственных полос одинаковы:

$$A = p V \ln \lambda = p_c V_c \ln \lambda_c = A_c.$$

Итак, различие в характере статического нагружения не вносит существенного различия между величинами средних и суммарных давлений, а также работ прокатки соответственных полос.

Все изложенное дает нам право производить расчеты давления на валки, работы, момента и мощности прокатки простых профилей, используя достаточно обоснованный с позиций теории подобия метод соответственной полосы.

## Особые случаи прокатки

### 1. Прокатка многослойных металлов

Рассмотрим основные проблемы производства многослойных металлов на примере прокатки (рис. 179).

Перед прокаткой поверхности листов подвергают тщательной очистке для того, чтобы облегчить процесс схватывания — взаимного сцепления металлов. Схватывание, как правило, осуществляется в первых пропусках. Предложены многочисленные гипотезы

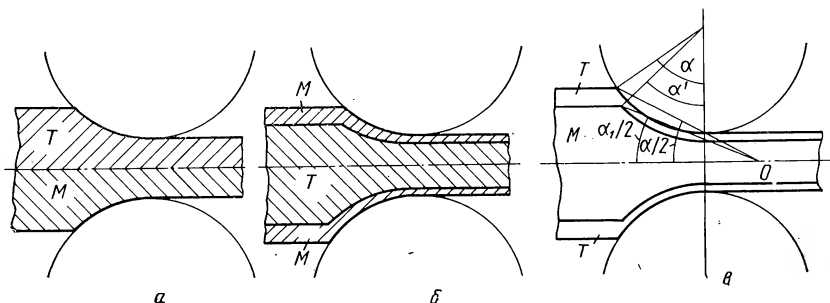


Рис. 179. Способы прокатки двухслойных и трехслойных металлов

схватывания — рекристаллизационная, диффузионная, пленочная, энергетическая, дислокационная. Каждая из этих гипотез, взятая в отдельности, не дает удовлетворительного объяснения всех особенностей весьма сложного явления схватывания. Создание удовлетворительной теории лежит, по-видимому, на пути синтеза различных гипотез. Однако можно утверждать, что на механические свойства биметаллических соединений большое влияние оказывают процессы диффузии в переходной зоне. Диффузионные процессы могут увеличивать или уменьшать прочность соединений.

Кратко охарактеризуем основные факторы, влияющие на схватывание металлов, и некоторые особенности последующей прокатки.

**Толщина окисной пленки.** В главе 8 было показано, что на поверхности металлов всегда существует пленка окислов, адсорбированных газов и органических веществ. Они затрудняют схватывание и в ряде случаев делают его невозможным. Удаление окисной пленки осложняется тем, что после удаления она быстро образуется и прочно удерживается на поверхности. Например, окисная пленка на железе в течение 1 мин достигает толщины 2,0 нм (20Å), а через час равна 24Å. Чем более хрупкая поверхностная окисная пленка (т. е. чем больше отношение твердости окисла к твердости металла), тем легче происходит ее разрушение в процессе прокатки, тем меньше обжатие, необходимое для образования

прочных металлических связей между слоями металлов. В качестве хрупкой пленки может служить тонкий наклепанный поверхностный слой металла, благоприятно влияющий на схватывание.

**Степень деформации.** Известно, что для схватывания необходимо первоначальное совместное обжатие металлов с некоторым сдвигом металла по поверхностям контакта, в процессе которого разрушаются окислы и другие вещества на этих поверхностях, и иногда они становятся почти ювенильными. Определенная величина сдвига поверхностных слоев существует практически всегда, поскольку механические свойства прокатываемых металлов, как правило, различны и на поверхности всегда существуют силы трения.

Для разных многослойных металлов величина первоначального обжатия, необходимого для схватывания, изменяется в широких пределах — от 8 до 80%. Анализ опытных данных, а также теоретические выводы показывают, что для осуществления схватывания тех или иных металлов необходимо некоторое минимальное контактное напряжение. Одно и то же контактное напряжение при данном обжатии можно получить, изменяя толщину соединяемых слоев, соотношение между толщинами слоев, диаметр валков, силы контактного трения и другие факторы. Если эти факторы неизменны, контактное напряжение будет зависеть только от величины обжатия.

В первом проходе до тех пор, пока схватывание еще не произошло, величина обжатия слоев различна, происходит сдвиг — «сползание» одного слоя с другого. В дальнейших проходах также имеет место неравномерная деформация слоев. Степень неравномерности зависит от соотношения сопротивления деформации прокатываемых металлов, соотношения толщины слоев, взаимного расположения слоев и параметров очага деформации. В связи с этим часто при прокатке многослойных полос наблюдается изгиб. Изгиб предотвращают подбором параметров очага деформации и с помощью проводок. Результатом является возникновение дополнительных напряжений от неравномерной деформации, переходящих после прокатки в остаточные, которые могут уменьшить срок службы изделий из многослойного металла.

**Соотношение толщины слоев в пакете.** Установлено, что при неизменной толщине основного слоя с увеличением толщины покрытия прочность соединения металлов уменьшается, если прочие условия прокатки остаются неизменными. Это объясняется уменьшением величины контактных напряжений на поверхности соединяемых слоев. Толщина лакирующего слоя при прокатке зависит от последующего использования многослойного металла и может составлять от 1 до 50% толщины пакета.

**Температура.** Прочность сцепления слоев увеличивается с увеличением температуры, так как при нагреве пластичность металлов растет и увеличивается влияние диффузионных процессов на схватывание металлов. Однако с ростом температуры ускоряется скорость окисления металлов, появляются окисные пленки, по-

является опасность возникновения хрупких интерметаллидов и легкоплавких эвтектик, что ухудшает схватывание. Таким образом, у каждой пары металлов существует своя критическая температура нагрева, превышать которую не следует. Эта температура зависит от большого числа факторов и обычно составляет 0,7—0,8 абсолютной температуры плавления соединяемых металлов.

**Состав окружающей среды.** Схватывание осуществляется наилучшим образом в условиях вакуума и в нейтральных средах. Наименее благоприятны условия для схватывания и последующей прокатки на воздухе, так что ряд многослойных металлов, в композицию которых входят металлы, обладающие высокой химической активностью (например, титан), прокатывать на воздухе невозможно. В настоящее время широко практикуют использование специальных вакуумированных пакетов: многослойные заготовки после соответствующей очистки укладываются в стальные сварные оболочки; с помощью вакуумного насоса в них создается разрежение  $133\text{--}266 \text{ н/м}^2$  (1—2 мм рт. ст.), после чего трубка, через которую производилось разрежение, заваривается. Практика показала технико-экономическую целесообразность использования таких вакуумированных пакетов для проката ряда биметаллов.

**Промежуточные прослойки** при прокатке многослойных металлов используются довольно часто. Их вводят между основным и плакирующим слоями металлов для предохранения от окисления поверхностей соединяемых металлов, для исключения непосредственного контакта между металлами, при котором возникают нежелательные интерметаллические соединения и карбидные включения, для создания вязкого и прочного переходного слоя, для облегчения соединения разнородных металлов, что сопровождается уменьшением контактных напряжений и, следовательно, уменьшением обжата, необходимого для схватывания. Прослойки можно наносить наплавлением, электролизом, заливкой, укладывать в виде тонких листов или фольги между соединяемыми металлами.

Во многих случаях без прослоек невозможно получить многослойные металлы удовлетворительного качества. Например, прочное соединение в биметалле титан—сталь (сплав ВТО-1 и Ст. 3) без прослоек получить невозможно. Использование двойной прокладки из фольги, никеля и ванадия позволяет получить достаточно прочное соединение титана со сталью, если прокатка происходит в вакуумированных пакетах. Последующий отжиг улучшает свойства полученного биметалла. При этом прослойка ванадия превращается в соединение системы V—Ti—Ni, а прослойка никеля — в соединение системы Fe—Ni—V—Ti переменных составов. Величина переходной зоны между титаном и сталью составляет 40—60 мкм. Эта зона обладает прочностью и пластичностью, которые не уступают прочности и пластичности титана и стали.

## 2. Напряженное состояние при прокатке многослойных металлов

Рассмотрим напряженное состояние при прокатке трехслойного металла (рис. 179, в). Примем, что наружные слои  $T$  имеют более высокое истинное сопротивление деформации  $K_T$ , чем внутренний слой  $M$ , сопротивление деформации которого равно  $K_M$ .

Граница между слоями определяется углом  $\alpha_1/2$ .

В соответствии с формулами (477), для наружных слоев металла ( $\varphi_1 \geq \varphi_1'$ ;  $\varphi_2 \geq \varphi_2'$ ) в зоне отставания будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\rho \theta T} &= \frac{-\mu}{\delta - n} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta + (1 - n) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right] \varphi_1; \\ \frac{\sigma_{\theta T}}{K_T} &= - \left\{ \frac{1}{\delta - n} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta + (1 - n) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right] + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right\} \varphi_2 + \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \frac{r_0}{\rho}^n; \\ \frac{\sigma_{\rho T}}{K_T} &= \frac{\sigma_\theta}{K_T} + \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n. \end{aligned} \right\} \quad (528)$$

Для внутреннего слоя ( $\varphi_1 \leq \varphi_1'$ ;  $\varphi_2 \leq \varphi_2'$ ) запишем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{\rho \theta M}}{K_M} &= - \frac{\mu}{\delta - n} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta + (1 - n) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right] \varphi_1; \\ \frac{\sigma_{\theta M}}{K_M} &= - \left\{ \frac{1}{\delta - n} \left[ (\delta - 1) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^\delta + (1 - n) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right] + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n \right\} \varphi_2 + \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n; \\ \frac{\sigma_{\rho M}}{K_M} &= \frac{\sigma_\theta}{K_M} + \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^n. \end{aligned} \right\} \quad (529)$$

Аналогичные соотношения можно записать и для зоны опережения.

Условия непрерывности напряжений на границе внешнего и внутреннего выражаются в следующем виде:

$$\varphi_1 = \varphi_1'; \quad \varphi_2 = \varphi_2'; \quad \frac{\tau_{\rho \theta T}}{K_T} = \frac{\tau_{\rho \theta M}}{K_M}; \quad \frac{\sigma_{\theta T}}{K_T} = \frac{\sigma_{\theta M}}{K_M}; \quad \frac{\sigma_{\rho T}}{K_T} = \frac{\sigma_{\rho M}}{K_M}.$$

Легко убедиться, что абсолютные значения напряжений будут непрерывны, если  $K_T = K_M$ . В противном случае (при  $K_T \neq K_M$ ) напряжения будут претерпевать разрыв, и если максимальные касательные напряжения  $\tau$  окажутся такими, что

$$\tau = \frac{K_T - K_M}{2} \geq \frac{K_M}{2},$$

то будет происходить взаимный сдвиг — сползание слоев. Как было отмечено в предыдущем пункте, такой сдвиг полезен в первом проходе, так как способствует схватыванию слоев.

После схватывания в процессе прокатки образуется переходный слой толщиной 20—60 *мкм*. Толщина этого слоя мала по сравнению с толщиной прокатываемого пакета, и разрыв напряжений здесь можно интерпретировать как очень быстрый переход истинного сопротивления деформации от величины  $K_M$  к величине  $K_T$ . Вместе с тем, поскольку в переходном слое произошла взаимная диффузия металлов, то хотя по толщине этого слоя истинное сопротивление переменное, но в каждой из его точек соблюдается соотношение:  $K_T = K_M$ . Поэтому максимальное касательное напряжение  $\tau = \frac{K_T - K_M}{2} = 0$ , и совместная прокатка разнородных слоев без их разрыва по плоскости контакта становится возможной.

Произведем теперь оценку величины остаточных напряжений, возникающих при прокатке многослойных металлов.

Из материала гл. XII известно, что после прокатки напряжения от внешних сил исчезают, а напряжения от неравномерной деформации переходят в остаточные. При этом разность нормальных напряжений становится меньше величины истинного сопротивления деформации  $K$ .

Под величиной  $K$  мы условимся понимать истинное сопротивление металла после прокатки. В таком случае можно воспользоваться формулами (444):

$$\frac{\sigma_y}{K_1} = (1 - \varphi_2) \left( \ln \frac{h_0}{h_1} - 1 \right); \quad \frac{\sigma_x}{K} = (1 - \varphi_2) \ln \frac{h_0}{h_1} + \eta \varphi_2. \quad (530)$$

При прокатке многослойных металлов коэффициент теплового линейного расширения слоев в общем случае различен. Но слои скреплены между собой. Поэтому в процессе охлаждения за счет неравномерной усадки возникают дополнительные температурные напряжения, величина которых по любому из координатных направлений равна  $E\alpha T$ , где  $E$  модуль нормальной упругости при температуре  $T$ ;  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения.

Считая, что высота биметаллического листа много меньше его длины, будем пренебрегать изменением его размеров по высоте, т. е. примем, что относительное изменение высоты  $e_{yy} = 0$ . Поэтому для рассматриваемой задачи из формул (444) получим соответственно для наружных и внутренних слоев следующие выражения:

$$\frac{\sigma_{yT}}{K_T} = (1 - \varphi_2) \left( \ln \frac{h_0}{h_1} - 1 \right); \quad \frac{\sigma_{xT}}{K_T} = (1 - \varphi_2) \ln \frac{h_0}{h_1} + \eta \varphi_2 + \nu \frac{E_T}{K_T} \alpha_T T. \quad (531)$$

$$\frac{\sigma_{yM}}{K_M} = (1 - \varphi_2) \left( \ln \frac{h_0}{h_1} - 1 \right); \quad \frac{\sigma_{xM}}{K_M} = (1 - \varphi_2) \ln \frac{h_0}{h_1} + \eta \varphi_2 + \nu \frac{E_M}{K_M} \alpha_M T. \quad (532)$$



В этих равенствах  $\nu = \pm 1$ . Знак выбирается с учетом величины коэффициента линейного расширения. Если, например, коэффициент  $\alpha_T$  у наружных слоев меньше, чем у внутренних, то в процессе усадки при охлаждении наружные слои окажутся сжатыми (чему соответствует  $\nu = -1$ ), а внутренние — растянутыми (для них  $\nu = +1$ ).

Величину коэффициента  $\eta$  найдем из условия, согласно которому сумма проекций всех внутренних сил на ось  $x$  равна нулю. Записывая выражения для продольных напряжений, в несколько преобразованном виде будем иметь:

$$\begin{aligned} & \left( \eta - \ln \frac{h_0}{h_1} \right) K_T \int_{\frac{h'}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \varphi_2 dy + K_T \ln \frac{h_0}{h_1} \int_{\frac{h'}{2}}^{\frac{h_1}{2}} dy + \nu E_T \alpha_T T \int_{\frac{h'}{2}}^{\frac{h_1}{2}} dy + \\ & + \left( \eta - \ln \frac{h_0}{h_1} \right) K_M \int_0^{\frac{h'}{2}} \varphi_2 dy + K_M \ln \frac{h_0}{h_1} \int_0^{\frac{h'}{2}} dy + \nu E_M \alpha_M T \int_0^{\frac{h'}{2}} dy = 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что знаки температурных напряжений в наружном и внутреннем слоях различны и что в каждой точке переходного слоя  $E_M \alpha_M = E_T \alpha_T$ , сумму интегралов, содержащих эти величины, положим равной нулю.

Далее рассмотрим интересный случай, когда прокатка производится с малыми обжатиями, что приводит к значительной неравномерности деформации. В таком случае  $\varphi_2$  определим по формуле (434). Тогда

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\left( \eta - \ln \frac{h_0}{h_1} \right) K_T}{\operatorname{sh} \frac{m\alpha}{2}} \int_{\frac{h'}{2}}^{\frac{h}{2}} \operatorname{sh} m\alpha \frac{y}{h_1} dy + K_T \ln \frac{h_0}{h_1} \int_{\frac{h'}{2}}^{\frac{h}{2}} dy + \\ & + \frac{\left( \eta - \ln \frac{h_0}{h_1} \right) K_M}{\operatorname{sh} \frac{m\alpha}{2}} \int_0^{\frac{h'}{2}} \operatorname{sh} \frac{m\alpha}{h_1} y dy + K_M \ln \frac{h_0}{h_1} \int_0^{\frac{h'}{2}} dy = 0. \end{aligned} \right\} \quad (533)$$

$$\text{Заметим, что } \frac{m\alpha}{h_1} \frac{h'}{2} = \frac{m\alpha}{2} \frac{h'}{h_1} = \frac{m\alpha}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{m\alpha'}{2};$$

с учетом этого будем иметь

$$\int_{\frac{h'}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \operatorname{sh} m\alpha \frac{y}{h_1} dy = \frac{h_1}{m\alpha} \left( \operatorname{ch} \frac{m\alpha}{2} - \operatorname{ch} \frac{m\alpha'}{2} \right); \quad \int_{\frac{h'}{2}}^{\frac{h}{2}} dy = \frac{h-h'}{2};$$

$$\int_0^{\frac{h'}{2}} \operatorname{sh} m \alpha \frac{y}{h_1} dy = \frac{h_1}{m \alpha} \left( \operatorname{ch} \frac{m \alpha'}{2} - 1 \right); \int_0^{\frac{h'}{2}} dy = \frac{h'}{2}.$$

Подставив значения интегралов в уравнение (533) и произведя преобразования, получим следующее выражение для определения коэффициента  $\eta$ :

$$\eta = \left\{ 1 - \frac{m \alpha}{2} \frac{\operatorname{sh} \frac{m \alpha}{2} \left[ \frac{K_T}{K_M} \left( 1 - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) + \frac{\alpha'}{\alpha} \right]}{\frac{K_T}{K_M} \left( \operatorname{ch} \frac{m \alpha}{2} - \operatorname{ch} \frac{m \alpha'}{2} \right) + \operatorname{ch} \frac{m \alpha'}{2} - 1} \right\} \ln \frac{h_0}{h_1}. \quad (534)$$

Если принять  $K_T = K_M$ , то сразу получим равенство (447), что свидетельствует о правильности вычислений.

На рис. 180 приведены эпюры остаточных напряжений после прокатки по схеме, приведенной на рис. 179, в для одного из конк-

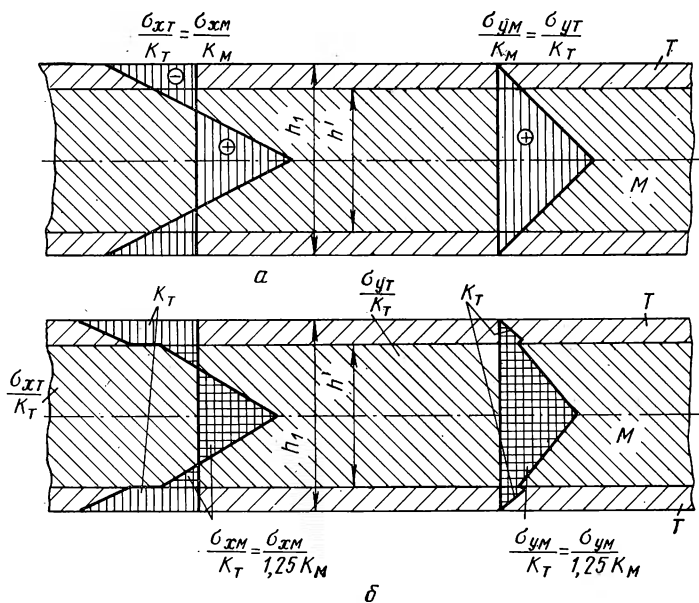


Рис. 180. Эпюры остаточных напряжений после прокатки (по схеме 179, в) трехслойной металлической полосы:

а — напряжения в каждом слое отнесены к его пределу текучести; б — абсолютное значение напряжений,  $\Delta h/h_0 = 0,395$ ;  $\ln \frac{h_0}{h_1} = 0,5$ ;  $\mu = 0,3$ ;

$\alpha = 0,3$ ;  $\alpha'/\alpha = 0,75$ ;  $\delta = 2$ ;  $m \sqrt{\delta(\delta+2)} = 2,84$ ;  $k_M/k_T = 1,25$

ретных случаев, построенные с использованием формул (531), (532), (534). При этом считаем, что коэффициенты температурного расширения слоев одинаковы. Из рассмотрения рисунка следует,

что если в каждом слое напряжение разделить на значение предела текучести слоя, то соблюдается непрерывность напряжений (рис. 180). Если брать абсолютные значения напряжений (см. рис. 180), то на границе слоев  $M$  и  $T$  получается разрыв. Однако известно, что сечение  $h=h'$  расположено в переходном слое малой толщины по сравнению с толщиной полосы  $h_1$  и разрыв напряжений здесь физически оправдан. Поэтому формулами (531), (532) и (534) можно пользоваться для расчета остаточных напряжений в основных слоях. Аналогичным образом можно рассчитать остаточные напряжения для других случаев прокатки многослойных металлов.

### 3. Прокатка в вакууме и нейтральных средах

Производство чистых, в особенности тугоплавких металлов, осуществляют спеканием, индукционной и дуговой плавкой в вакууме и инертных средах, зонной очисткой в вакууме, электроннолучевой плавкой в вакууме и другими способами. Полученные и очищенные в вакууме металлы желательнее подвергнуть дальнейшей пластической обработке также в вакууме или нейтральных средах (аргон, гелий и др.). Это особенно относится к производству изделий, которые в дальнейшем должны работать в условиях вакуума — в различных приборах, в космосе и подобных условиях. Следует иметь в виду общее положение о том, что материалы, которым предстоит работать в условиях вакуума, должны быть, как правило, и изготовлены в вакууме; в противном случае нельзя гарантировать надежность работы изготовленных из них устройств. Установлено, что некоторые материалы (например молибден), однажды обезгаженные прогревом в вакууме, в дальнейшем не поглощают газы при нахождении на воздухе. Например, при повторном невысоком нагреве молибдена выделялись газы в объеме, соответствующем мономолекулярному слою поверхности адсорбции. Это свойство придает обработке в вакууме особую ценность.

Известны следующие сочетания процессов нагрева и пластической обработки металлов:

Условия нагрева	Условия деформации и охлаждения
Воздух . . . . .	Воздух
Газозащитная среда . . . . .	»
«           »           . . . . .	Газозащитная среда
Вакуум . . . . .	Воздух
»           . . . . .	Газозащитная среда
»           . . . . .	Вакуум

Уже ранние опыты (1953—1954 гг.) показали, что при обработке молибдена и вольфрама при 2000°C по первому варианту потери на окисление в десятки раз превышают потери на окисление при обработке его по третьему варианту.

Процессы взаимодействия металлов с газами объединяют несколько частных процессов, в том числе адсорбцию, растворение и диффузию газа в металле, зарождение и рост продуктов реакции, процессы переноса атомов металла и газа через пленку продуктов реакции, испарение продуктов реакции и т. п. Любой из этих частных процессов может определять скорость суммарного процесса — это зависит от свойств металла и условий обработки (температуры металла, давления газа, времени реакции, состояния поверхности, состава сплава и других факторов).

В процессе нагрева и горячей пластической деформации металлов в вакууме может происходить как дегазация, так и поглощение газов.

Для выяснения оптимальных условий прокатки металлов в вакууме ряд ученых [16] считают возможным использовать известные термодинамические данные относительно устойчивости окислов и других химических соединений газов с металлами.

Критерием термодинамической устойчивости окисла является его упругость диссоциации. Используя положения химической термодинамики, можно рассчитать упругость диссоциации окислов ряда чистых металлов и сопоставить их с парциальными давлениями газов в вакууме. Расчеты показали, что для таких металлов, как вольфрам, молибден, никель и медь, можно получить значения парциального давления кислорода, равного упругости диссоциации соответствующего окисла, и тем самым предотвратить химическое взаимодействие металла с газом на поверхности раздела двух фаз. Для других металлов, например для ниобия, тантала, циркония, титана и хрома, равновесное состояние при обработке их давлением в вакууме и в инертных средах практически недостижимо и, следовательно, имеется термодинамическая вероятность окисления.

Теоретические расчеты, дающие возможность определить направление химических реакций на основании изменения изобарно-изотермического потенциала, на практике пригодны только при достаточно высоких давлениях. При низких давлениях на процессы взаимодействия металлов с газами оказывает большое влияние адсорбция.

Кроме того, термодинамические расчеты не учитывают кинетику процесса. Поэтому такие расчеты следует рассматривать как ориентировочные, дающие возможность сравнительной оценки поведения различных металлов в вакууме.

Газы при взаимодействии с металлами не только образуют химические соединения, но и растворяются в них с образованием твердых растворов. Например, растворимость двухатомных газов в титане при вакууме  $0,28 \text{ мн/м}^2$  ( $2,1 \cdot 10^{-2} \text{ мм рт. ст.}$ ) равна  $2,5 \text{ нн/м}^2$  ( $1,87 \cdot 10^{-7} \text{ мм рт. ст.}$ ), а при вакууме  $2,8 \text{ нн/м}^2$  ( $2,1 \cdot 10^{-7} \text{ мм рт. ст.}$ ) — только  $2,5 \text{ мкн/м}^2$  ( $1,87 \cdot 10^{-4} \text{ мм рт. ст.}$ ). Из этого примера следует, что растворимость газов в титане при низком вакууме на несколько порядков выше, чем при высоком. Отсюда ясно, что при обработке технических металлов в высоком вакууме возможна

дегазация металла, а при обработке особо чистых металлов возможно насыщение последних газами.

В вакууме или нейтральной среде за счет уменьшения парциальных давлений активных газов уменьшается толщина и изменяются физико-химические свойства пленки на поверхности обрабатываемого тела. При понижении парциальных давлений ниже упругости диссоциации данных соединений поверхность металла может вовсе освободиться от пленок.

По-видимому, выделение газов происходит достаточно медленно. Об этом свидетельствует тот факт, что во время прокатки наблюдается дополнительное выделение газов из металла. При этом с увеличением величины обжата увеличивается количество выделяющихся газов. На это количество влияет изменение состояния металла при деформации: взаимодействие дислокаций с примесями, возникновение плоскостей скольжения, новых границ зерен, блоков и вскрытие поверхностей, в результате чего образуются пути для более легкой диффузии.

Известны лабораторные и полупромышленные установки для прокатки металлов следующих типов:

1. Герметизированные отделения, в которых расположены основное и вспомогательное оборудование стана и обслуживающий персонал работает в особых скафандрах.

2. Установки, где в вакуумной камере размещена только рабочая клеть прокатного стана.

3. Установки, где в вакуумной камере расположены только рабочие валки.

Третий тип установок предпочтительнее ввиду меньших трудностей по поддержанию вакуума. Одни и те же установки обычно используют для прокатки в вакууме и нейтральных средах. Процессы адсорбции, конденсации и десорбции, играющие существенную роль при прокатке в вакууме, зависят от взаимодействия образца и стенок камер откачиваемых систем с молекулами остаточных газов.

Все описанные обстоятельства в значительной степени влияют на физико-химические и механические свойства металлов, условия взаимодействия инструмента и металла, на напряженное состояние и характер деформаций последнего.

На рис. 181 изображена зависимость коэффициента трения от температуры при прокатке циркония. Эта зависимость при прокатке циркония на воздухе характеризуется обычной для такого случая кривой с максимумом, объяснение которому дано в гл. VIII. При прокатке в вакууме  $0,133 \text{ Мн/м}^2$  ( $1 \cdot 10^{-2} \text{ мм рт. ст.}$ ) кривая имеет минимум

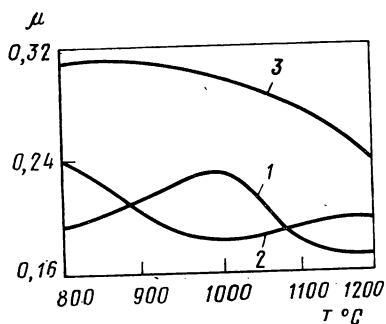


Рис. 181. Зависимость коэффициента трения при прокатке циркония от температуры на воздухе и в условиях вакуума:  
1 — на воздухе; 2 — в вакууме  $1,33 \cdot 10^{-6} \text{ н/км}^2$  ( $1 \cdot 10^{-2} \text{ мм рт. ст.}$ ); 3 — в вакууме  $0,133 \cdot 10^{-2} \text{ н/км}^2$  ( $1 \cdot 10^{-4} \text{ мм рт. ст.}$ )

Слева от минимума проявляется роль молекулярного взаимодействия относительно чистых в условиях вакуума поверхностей. Справа от минимума происходит образование все более толстой растрескивающей пленки, создающей смешанный контакт. При прокатке в более глубоком вакууме  $1,33 \text{ мкн/м}^2$  ( $1 \cdot 10^{-4} \text{ мм рт. ст.}$ ) коэффициент трения с ростом температуры монотонно уменьшается в связи с изменением свойств окисной пленки при относительно высоком вакууме.

Из гл. VIII известно также, что при прокатке на воздухе коэффициент трения уменьшается с увеличением скорости прокатки. При прокатке в вакууме коэффициент трения, наоборот, несколько увеличивается с ростом скорости. Это можно объяснить тем, что при увеличении скорости температура поверхностных слоев металла повышается и в зоне контакта увеличивается схватывание чистых поверхностей металла и валков. Выявлено, что средний коэффициент трения при прокатке стали в вакууме  $1,33 \cdot 10^{-6} \text{ н/м}^2$  ( $10^{-4} \text{ мм рт. ст.}$ ) на 20—25% выше, чем при прокатке на воздухе. В связи с ростом коэффициента трения среднее контактное напряжение при прокатке в вакууме выше, чем при прокатке на воздухе.

Из опытных данных известно также, что в условиях вакуума с ростом коэффициента трения опережение уменьшается, что противоречит, на первый взгляд, обычным представлениям о природе опережения (см. гл. XI). Это явление можно объяснить развитием зоны прилипания, за счет чего уменьшается зона опережения.

Особенностью уширения при прокатке в вакууме является то, что уширение происходит за счет выпучивания боковых кромок полосы, так называемого бочкообразования. При обжатиях до 25—30% этот вид уширения является единственным. Уширения, развивающегося за счет скольжения металла в поперечном направлении по контактной поверхности, при прокатке в вакууме не происходит. При обжатиях более 30% появляется уширение за счет перехода металла с боковых граней на контактную поверхность.

В силу особых условий, которые создаются при высокотемпературной обработке давлением в вакууме (практическое отсутствие окисных пленок, высокие температуры, большие контактные напряжения и силы трения), повышается роль сил молекулярного взаимодействия и создаются благоприятные условия для образования металлической связи между прокатываемой полосой и валками, проявлением чего является налипание металла на валки. Налипание резко понижает стойкость валков, вызывает необходимость их частых перевалок и перешлифовок и не позволяет получать изделия с высоким качеством поверхности. Установлено, что наименьшая склонность к налипанию имеет место при прокатке в металллокерамических валках, а также в валах из стали мартенситно-карбидного класса.

В результате прокатки в вакууме и защитных средах прочность и пластичность ряда металлов увеличиваются по сравнению с теми же характеристиками после прокатки на воздухе (рис. 182). Это

обстоятельство в ряде случаев является очень важным для последующей работы изделий, изготовленных из вакуумного проката.

У металлов, нагретых и прокатанных в вакууме, структура более равномерная и крупнозернистая, чем при нагреве и прокатке

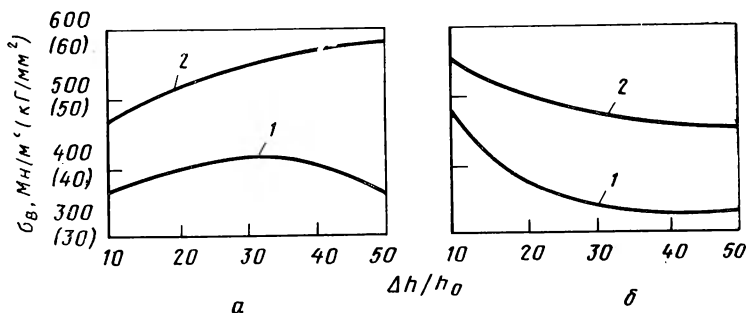


Рис. 182. Предел прочности (а) и относительное удлинение  $\delta$  (б) при растяжении пробы после его прокатки при 1000°C на воздухе (кривые 1) и в вакууме  $1,33 \cdot 10^{-4}$  н/м<sup>2</sup> ( $1 \cdot 10^{-2}$  мм рт. ст.) (кривые 2)

на воздухе. Возможно, что это является следствием очистки металла по внутренним границам (поверхностям раздела) и несколько меньшей скоростью охлаждения в вакууме.

#### 4. Прокатка металлических порошков

Еще в 1843 г. Г. Бессемер, пропуская бронзовый порошок через валки, получил куски прокатанной ленты. Однако только через 100 лет прокатка порошков впервые получила практическое применение.

При прокатке металлических порошков происходит существенное изменение свойств материала, аналогичное изменению агрегатного состояния вещества: превращение сыпучего тела в твердое пористое, обладающее некоторой упругостью и прочностью.

Прокатку металлических порошков обычно осуществляют в двухвалковом прокатном стане, оси валков которого, как правило, расположены в горизонтальной плоскости и реže в вертикальной (рис. 183, а, б). Подача порошка в валки и регулирование его секундного расхода осуществляются с помощью бункеров, шиберов и дозирующих устройств разной конструкции. Прокатку порошка обычно производят между выступающими частями валка, которые охватывают стенки бункера (рис. 183, в). После прокатки или спекания получается пористая лента. Если нужна лента без пор, то после спекания производится повторное уплотнение, прокатка и спекание.

Углом подачи порошка  $\alpha_0$  называется угол, определяющий уровень порошка или сечение  $H$ , отсекаемое дозирующими устройствами (рис. 183, а). При достижении определенной для каждого порошка величины угла  $\alpha_0$  толщина и плотность проката далее уже не зависят от угла подачи.

Углом прокатки называется угол  $\alpha_{пр}$ , длина дуги которого служит основанием эпюры контактных напряжений. Углу прокатки отвечает сечение  $h_{пр}$ , отделяющее зону подачи порошка от зоны уплотнения. По длине дуги угла прокатки наблюдаются отставание и опережение. Начиная с угла  $\alpha_{пр}$  происходит изменение плотности от насыпной массы утряски порошка до плотности сырой ленты.

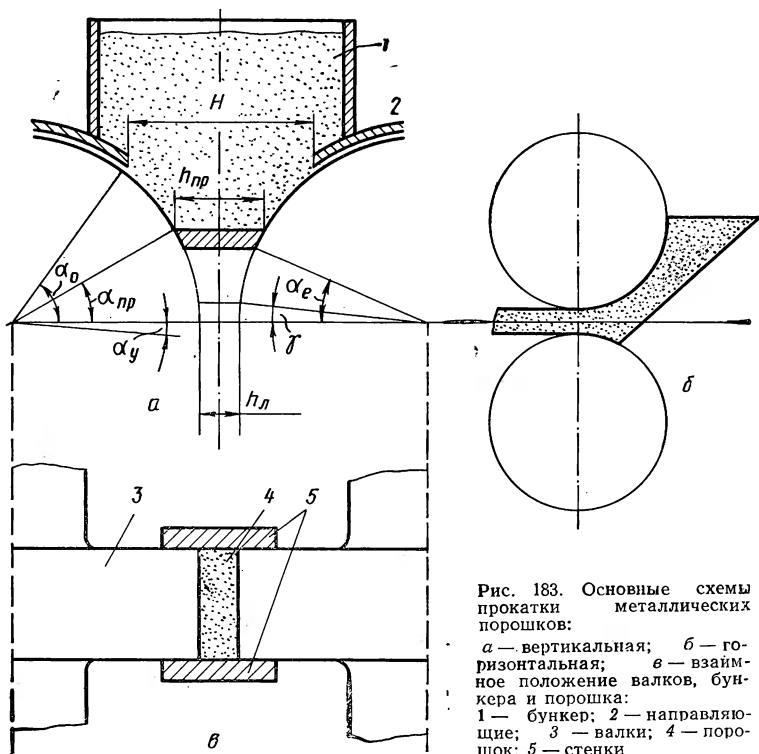


Рис. 183. Основные схемы прокатки металлических порошков:  
 а — вертикальная; б — горизонтальная; в — взаимное положение валков, бункера и порошка:  
 1 — бункер; 2 — направляющие; 3 — валки; 4 — порошок; 5 — стенки

Углом спрессовывания  $\alpha_c$  называется угол, соответствующий сечению раздела между сыпучим и спрессованным валками материалом в зоне уплотнения.

Углом упругого сжатия валков  $\alpha_y$  называется угол, характеризующий увеличение зоны деформации за счет упругой деформации валков при прокатке.

Наконец, показанный на рис. 183 угол  $\gamma$  представляет собой угол нейтрального сечения между зонами опережения и отставания. При прокатке порошков происходит изменение их плоскости. Поэтому вместо условия постоянства объема здесь действительно условие постоянства массы: масса металлокерамического проката равна массе порошка, необходимой для его получения:

$$h_{пр} b_0 l_0 \rho_y = h_{л} b_1 l_1 \rho_{л},$$



где  $h_{\text{пр}}, b_0, l_0$  — объем порошка перед зоной деформации;  
 $h_{\text{л}}, b_1, l_1$  — объем после прохождения зоны деформации;  
 $\rho_y$  и  $\rho_{\text{л}}$  — плотность порошка в сечении начала зоны деформации, равная насыпной массе утряски порошка, и плотность ленты.

Из этого равенства следует:

$$\frac{h_{\text{пр}}}{h_{\text{л}}} = \frac{b_{\text{л}}}{b_0} \frac{l_1}{l_0} \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_y} \quad (535)$$

Отношение толщины порошка в начале зоны деформации  $h_{\text{пр}}$  к толщине проката  $h_{\text{л}}$  называется коэффициентом спрессовывания  $z_c$ :

$$\varepsilon_c = \frac{h_{\text{пр}}}{h_{\text{л}}} \quad (536)$$

Отношение  $l_1/l_0$  — коэффициент вытяжки.

$$\text{Отношение } \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_y} = z \quad (537)$$

называется коэффициентом уплотнения.

Если принять, что уширение отсутствует ( $b_1/b_0=1$ ), то из уравнения (535) получим, что коэффициент вытяжки равен

$$\lambda = \frac{z_c}{z}; \quad (538)$$

из геометрических соотношений очага деформации имеем

$$h_{\text{пр}} = h_{\text{л}} + \alpha_{\text{пр}}^2 \frac{D}{h_{\text{л}}}.$$

Отсюда коэффициент спрессовывания определится как

$$z_c = 1 + \frac{\alpha_{\text{пр}}^2}{2} \frac{D}{h_{\text{л}}}. \quad (539)$$

Используя экспериментальные данные о толщине, плотности порошка и ленты и угле прокатки, можно по равенствам (537)—(539) рассчитать коэффициент вытяжки. Расчеты показывают, что коэффициент вытяжки при изменении зазора между валками и плотности проката остается для данного материала постоянным. В этом заключается одно из существенных отличий прокатки металлических порошков от прокатки компактных материалов, где увеличение обжатия по высоте ленты приводит к увеличению вытяжки.

По исследованиям Н. Н. Павлова<sup>1</sup>, расположение порошка в бункере и в зазоре между валками характеризуется двумя зонами. В первой зоне—зоне сыпучести осуществляется вертикальное перемещение порошка вниз под действием сил тяжести. Во второй зоне — зоне уплотнения одновременное перемещение в вертикальном и горизонтальном направлениях. Здесь происходит уплотнение порошка под действием валков. Киносъемкой со скоростью 24 кадра

<sup>1</sup> Смирнов В. С., Павлов Н. Н. Движение порошка при вертикальной прокатке. Труды ЛПИ. № 260. Изд. ЛПИ., 1965, с. 18—21.

в секунду было зафиксировано более 100 фаз движения порошка, имеющего послойную засыпку. Прокатку производили на стане с диаметром валков 450 мм, скорость вращения которых составляла 12 мм/сек. Сравнение кинокадров (рис. 184) показывает, что в начальной стадии движения порошка его вертикальная скорость неравномерна. Линии равных скоростей приведены на рис. 185,а.

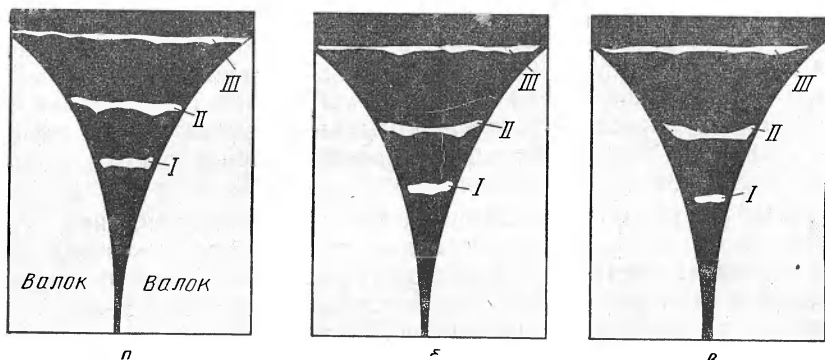


Рис. 184. Кинокадры съемки процесса движения порошка при прокатке: а — до прокатки; б — через 4 сек; в — через 10 сек. Состав порошка 67,4% Fe; 15,6% FeO 1,1% Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

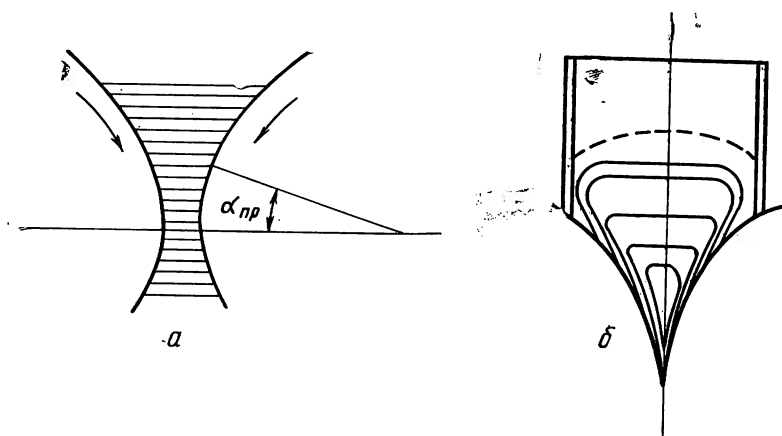


Рис. 185. Линии равных скоростей при движении порошка при прокатке: а — на основании анализа кинокадров; б — на основании наблюдений за перемещением свинцовых шариков в порошке [17]

Однако в начале зоны уплотнения наступает выравнивание скоростей в горизонтальной плоскости.

Согласно опытам Г. А. Виноградова [17], вращающиеся валки силами трения увлекают находящиеся у поверхностей валков частицы порошка и транспортируют его в зону спрессовывания со ско-

ростью, превышающей скорость частиц в средней части бункера. При этом скорость всех частиц порошка значительно меньше окружной скорости валков. Убыль порошка в нижней части бункера у контактных поверхностей пополняется частицами, опускающимися вертикально вдоль стенок бункера. Поэтому горизонтальные слои порошка, опускаясь, изгибаются выпуклостью вверх и затем превращаются в петлю так, что располагающаяся в центре часть петли занимает горизонтальное положение (рис. 185). Результаты описанных опытов позволяют сделать вывод о возможности применения для зоны уплотнения гипотезы плоских сечений. Вместе с тем опыты показывают, что на большей части контакта с валками скорость частиц порошка значительно меньше окружной скорости валков и лишь на очень небольшом участке за нейтральным сечением развивается процесс опережения.

Опыты и расчеты показывают, что если геометрические параметры процесса прокатки одинаковы, то при прокатке металлических порошков отставание в несколько раз больше, чем при прокатке компактных металлов. В соответствии с этим опережение при прокатке металлических порошков даже при прокатке тонких лент всегда невелико — от десятых долей процента до 1—2%.

В процессе прокатки из пор порошка в направлении, встречном направлению его подачи, выжимается воздух. При прокатке порошков с частицами размером более 50 *мкм* это не оказывает заметного влияния.

Но при прокатке тонких порошков их сыпучесть, плотность и прочность сырых лент уменьшаются. Если прокатка производится в атмосфере газов (водород, углекислый газ, азот, аргон и др.), то эти параметры уменьшаются с увеличением вязкости газа. При прокатке в вакууме прочность, плотность и толщина лент выше, чем при прокатке в атмосфере.

Толщина проката всегда больше первоначально установленного раствора валков. При этом зависимость толщины ленты от величины зазора между валками описывается линейной функцией, что свидетельствует от том, что это является следствием упругих деформаций валков, станин и других деталей стана.

Толщина и плотность пористых лент из порошков зависят при прочих равных условиях от раствора валков, ширины проката и уровня порошка в зоне деформации. Толщина проката увеличивается с увеличением ширины ленты из-за повышения общего давления на валки и увеличения упругих деформаций клетки. Плотность проката уменьшается при уменьшении коэффициента спрессовывания  $z = \frac{H}{h_L}$  и увеличении толщины ленты  $h_L$ . Но при достижении определенного для каждого порошка угла подачи  $\alpha_0$  исходная толщина  $H$  порошковой шихты (см. рис. 183) уже не влияет на плотность ленты. В результате верхний предел толщины ленты, получаемой прокаткой из порошков, ограничен. Даже на станах с очень большим диаметром валков (до 900 *мм*) толщина ленты не превышает 10—12 *мм*.

Если принять коэффициент вытяжки  $\lambda=1$ , то из уравнения (538) следует, что коэффициент спрессовывания  $z_c$  равен коэффициенту уплотнения  $z$  или

$$\frac{H}{h_d} = \frac{\rho_1}{\rho_n} \quad (540)$$

Из этого уравнения можно определить плотность ленты, если заданы коэффициент спрессовывания и насыпная масса порошка.

Распределение плотности проката по длине очага деформации можно получить на основании анализа эпюр контактных напряжений и данных, получаемых расчетом по уравнению (540).

Эпюры контактных напряжений в зоне деформации при прокатке металлических порошков незначительно отличаются от эпюр при прокатке компактных металлов (рис. 186, а).

В начале зоны деформации плотность порошка примерно равна плотности утряски  $\rho_y$ , а в точке максимума — плотности ленты  $\rho_d$ . Этой величины плотность достигает в нейтральном сечении, т. е. при максимальном контактном напряжении, после чего в зоне опережения и упругого сжатия валков остается постоянной.

Кривую изменения плотности (рис. 186, б) можно разделить на три участка: ускоренного уплотнения (I), замедленного уплотнения (II) и постоянной плотности (III). Границей между участками I и II является точка перегиба на кривой уплотнения.

На основании расчетных и опытных данных известно, что величина максимального контактного напряжения на дуге захвата определяется плотностью и мало зависит от толщины металлокерамического проката. Отсюда можно сделать вывод, что изменение величины обжатия практически не влияет на величину максимального контактного напряжения.

Расчет контактных напряжений при прокатке металлических порошков с погрешностью  $\delta$  можно производить по равенствам, приведенным в гл. XI. Обоснование этому было дано в п. 9. гл. X.

## 5. Прокатка в ультразвуковом поле [9]

Ультразвуковые колебания можно подводить к валкам или прокатываемой полосе. Установлено, что первый способ более эффективен. При подводе колебаний к бочкам валков им можно сообщить продольные, радиальные или крутильные колебания. Длина

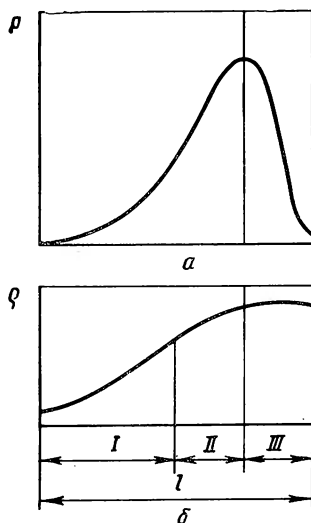


Рис. 186. Эпюры контактных напряжений (а) и кривая изменения плотности (б) в очаге деформации при прокатке металлических порошков

волны должна быть резонансной, т. е. кратной целому числу полу- волн, диаметр валка должен быть значительно меньше длины вол- ны и переход от бочки к шейке плавным. При подводе к валкам радиальных колебаний последние периодически изменяют свой ди- амметр. Прокатка может осуществляться либо в «пучности», либо в узле ультразвуковых колебаний (рис. 187).

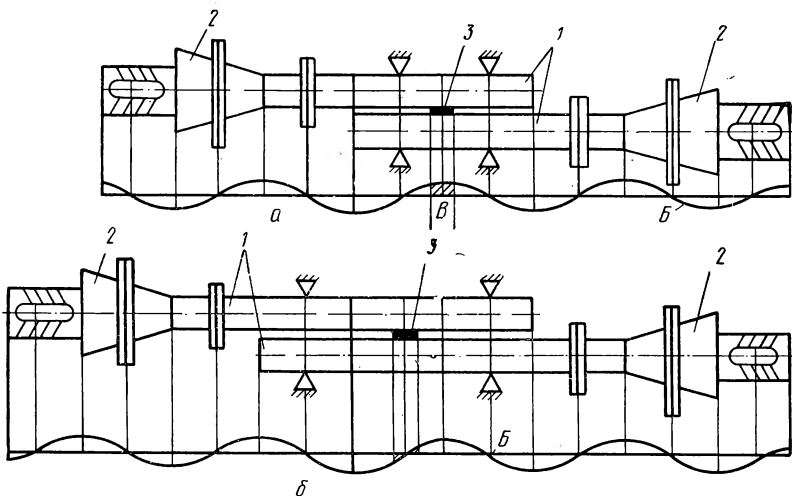


Рис. 187. Схема прокатки в пучности (а) и узле (б) продольных ультразвуковых колебаний:

1 — валки; 2 — преобразователи продольных колебаний; 3 — прокатываемая полоса

Из опытных данных следует, что ультразвуковые колебания ухудшают условия захвата за счет снижения коэффициента трения. Поэтому для обеспечения естественного захвата включение ультра- звукового генератора следует производить тотчас же вслед за по- дачей полосы в валки.

Основные закономерности процесса рассмотрим на примере про- катки с продольными ультразвуковыми колебаниями валков. По сравнению с прокаткой в обычных условиях наложение ультразву- ка вызывает изменение напряженного состояния в очаге деформации. В первом случае силы трения по ширине очага деформации направлены к вертикальной оси симметрии полосы (рис. 188,а). Во втором случае колебания валков в противофазе создают кон- тактные касательные напряжения, направленные на каждой кон- тактной поверхности только в одну сторону, но так, что на проти- воположных поверхностях они всегда действуют в противополож- ные стороны (рис. 188,б). При этом касательные напряжения ста- новятся активными, они способствуют деформации полосы, что приводит к уменьшению нормальных контактных напряжений и давления прокатки. Уменьшение давления обусловлено также исчезновением зоны прилипания и уменьшением сил контактного тре- ния в направлении прокатки за счет изменения направления век-

тора сил трения в каждой точке контактной поверхности. Касательные напряжения по мере перехода от контактных поверхностей к средней части по высоте полосы уменьшаются. Поэтому при одинаковой амплитуде колебаний эффективность от воздействия ультразвука с увеличением толщины полосы также будут уменьшаться.

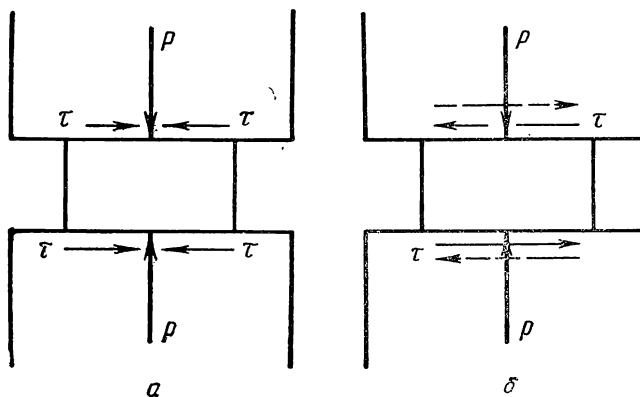


Рис. 188. Схемы действия нормальных и касательных контактных напряжений:  
 а — в обычных условиях; б — с продольными ультразвуковыми колебаниями

Из рис. 189,а следует, что давление на валки при прокатке с ультразвуковыми колебаниями уменьшается с ростом амплитуды колебаний. На этом же рисунке нанесены кривые коэффициента  $n_p$ , характеризующего степень изменения давления при прокатке с ультразвуком  $P_y$  по сравнению с прокаткой без ультразвука  $P_\delta$ :

$$n_p = \frac{P_\delta - P_y}{P_\delta} \cdot 100\%.$$

Из рис. 189 следует, что с увеличением обжатия кривая степени снижения усилия деформации  $n_p$  переходит через максимум при обжатии около 15%. Наличие максимума обусловлено действием двух факторов: возрастающих с ростом обжатия контактных касательных напряжений, облегчающих деформацию и снижающих давление на валки, и ростом коэффициента трения, повышающего давление на валки. Такая трактовка подтверждается зависимостью от обжатия опережения (рис. 189,б) и коэффициента трения (рис. 189,в) при разных амплитудах колебаний. При малых обжатиях с ультразвуковыми колебаниями опережение получается отрицательным, так что с ростом амплитуды возрастает его абсолютная величина. С ростом обжатия опережение переходит из отрицательной области в положительную и при обжатиях на 25—40% превышает величину опережения при прокатке без ультразвука. Соответственно опережению изменяется и коэффициент трения. Описанное явление обусловлено изменением контактных условий.

При малых обжатиях окисная пленка на поверхности полосы еще не разрушена, микросхватывание отсутствует и под действием ультразвуковых колебаний валков вследствие изменения направления вектора относительной скорости и силы трения происходит снижение коэффициента трения. С увеличением обжатия развивается процесс схватывания вследствие разрушения описанной пленки. Этот процесс интенсифицируется с увеличением амплитуды ко-

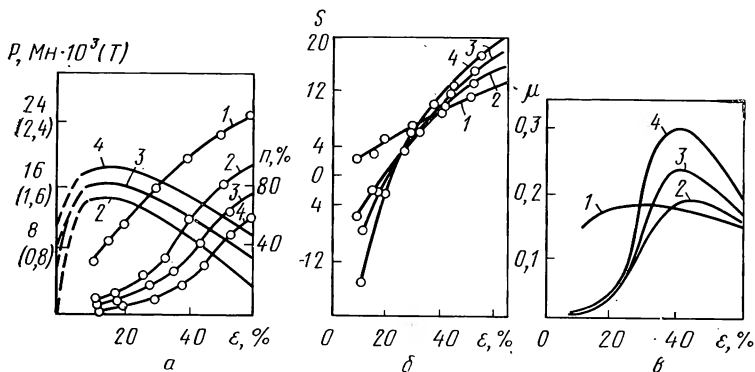


Рис. 189. Изменение давления на валки  $P$  и коэффициента эффективности  $\eta$  (а), опережения (б) и коэффициента трения (в) под действием ультразвуковых колебаний (1 — без ультразвука; 2—4 — при наложении ультразвуковых колебаний с амплитудой 0,006; 0,0085; 0,013 мм соответственно)

лебаний. При обжатиях 40% и более величина их столь значительна, что развивается интенсивнее скольжение металла по поверхности валков, процесс схватывания замедляется и коэффициент трения понижается.

Далее опыты показывают, что при наложении ультразвуковых колебаний повышается эффективность действия смазки, а также класс чистоты поверхности полосы. Последнее является следствием уменьшения коэффициента трения и сглаживания шероховатостей на полосе под действием продольных колебаний валков.

С ростом окружной скорости валков при прокатке в ультразвуковом поле давление на валки увеличивается, но всегда остается значительно меньше давления на валки при прокатке без ультразвука.

Закономерности прокатки с радиальными ультразвуковыми колебаниями в общем аналогичны тем, которые наблюдаются при наличии продольных колебаний. Основным фактором, вызывающим снижение давления прокатки, является уменьшение контактного трения под действием радиальных ультразвуковых колебаний валков.

Уменьшению давления на валки способствует также уменьшение статического предела текучести (см. п. 6, гл. VII), уменьшение упругого прогиба и сплющивания валков.

Использование ультразвуковых колебаний при прокатке еще не нашло широкого применения в промышленности. Однако не подлежит сомнению, что процессам такого рода принадлежит большое будущее.

## 6. Беслитковая прокатка<sup>1</sup>

Идея беслитковой прокатки металлов—процесса, совмещающего литье с деформацией полосы в валках, была высказана еще в 1848 г. Г. Бессемером. Однако это предложение было реализовано лишь в последние годы пока при производстве цветных металлов.

За последние 10 лет наметились два направления в развитии беслитковой прокатки: 1) процесс с подводом жидкого металла снизу в ванну, расположенную в горизонтальной плоскости прокатки; 2) процесс с подводом жидкого металла сбоку в ванну, расположенную в вертикальной плоскости прокатки. В принципе оба процесса равноценны.

На рис. 190 приведена принципиальная схема расположения оборудования и распределения температур в агрегате беслитковой прокатки лент из алюминиевых сплавов на Ленинградском заводе по обработке цветных металлов. Рабочие валки имеют диаметр 500 и длину бочки 1200 мм. На установке изготовляют алюминиевую ленту толщиной 6—8 мм, шириной 1000 мм в рулонах массой 10 т для последующей прокатки более тонкой ленты и фольги. Скорость вращения валков может изменяться в пределах от 0,1 до

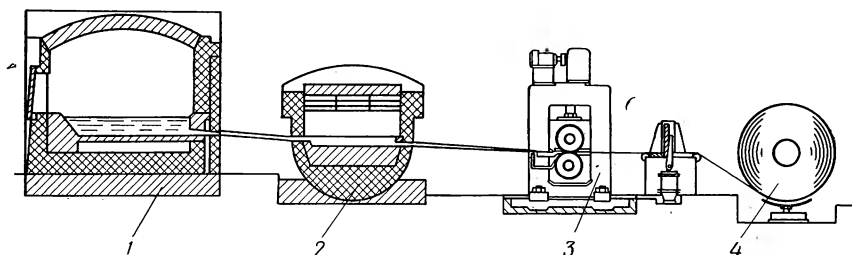
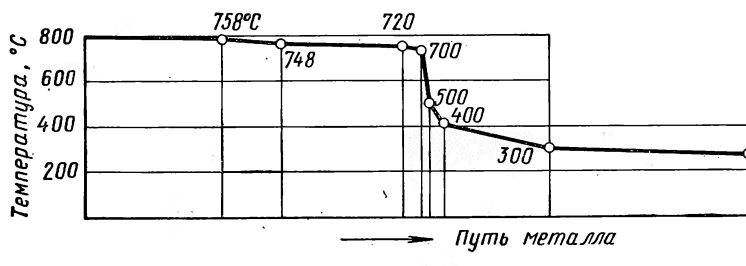


Рис. 190 Принципиальная схема беслитковой прокатки алюминиевой ленты

<sup>1</sup> Этот раздел написан по материалам кандидатской диссертации директора Ленинградского завода по обработке цветных металлов Ф. Т. Маленка.



2 м/мин. Мощность привода клетки и моталок равна соответственно 150 и 15 квт. Натяжение ленты от 0 до 30 кн (от 0 до 3 Т). Производительность стана при ширине ленты 0,5 м составляет 0,5 т/ч.

Бесслитковая прокатка представляет собой совокупность трех основных процессов: гидродинамического, происходящего при входе жидкого металла в валки-кристаллизаторы, затвердевания жидкого металла и деформации металла. Все эти процессы происходят

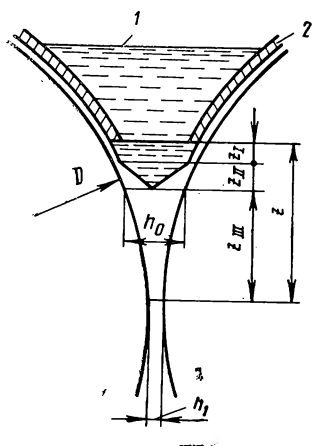


Рис. 191. Зоны кристаллизации и деформации при бесслитковой прокатке

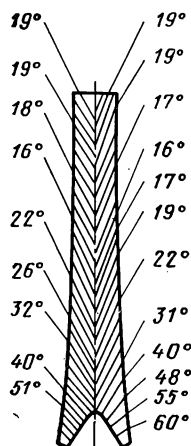


Рис. 192. Ориентировка макроструктуры недоката ленты

в зоне, ограниченной движущимися поверхностями валков, последовательно и взаимно накладываясь друг на друга.

На рис. 191 показана зона  $z$  кристаллизации и деформации при бесслитковой прокатке. Зона  $z$ , простирающаяся от насадки до осевой плоскости валков, включает в себя следующие три участка:

- $z_I$  — зона отвода теплоты перегрева;
- $z_{II}$  — зона затвердевания металла, частично включающая в себя зону отвода теплоты перегрева;
- $z_{III}$  — зона деформации металла.

Зона деформации металла, как при обычной прокатке, может включать в себя зоны отставания, опережения и прилипания. Условия прокатки при входе кристаллизующегося металла в зону деформации значительно отличаются от условий обычной прокатки: вместо заднего «жесткого» конца в валки подается жидкий металл. Роль входящего конца выполняют все более утолщающиеся корочки металла, затвердевающие на охлаждаемой поверхности валков. В этом отношении бесслитковая прокатка напоминает процесс прокатки металлических порошков: роль затвердевающих корочек играют наружные слои порошка, увлекаемые силами трения в зону деформации.

Температура закристаллизовавшегося металла при входе в область прокатки близка к температуре кристаллизации. Слои у кон-

тактных поверхностей с валками имеют меньшую температуру, большую прочность и меньшую пластичность, чем центральные. В связи с этим наибольшую скорость имеют слои, находящиеся в контакте с валками и наименьшую — средние слои. По предварительным данным, при бесслитковой прокатке на поверхности валков имеются только зоны опережения и прилипания, а зона отставания отсутствует. Это подтверждается макроструктурой недокатов. Установлено, что в начальный момент роста столбчатые кристаллы ориентируются перпендикулярно к поверхности кристаллизации, т. е. примерно под углом  $0,85—1,19 \text{ рад}$  ( $50—70^\circ$ ) к вертикали. По мере перемещения ленты угол ориентации столбчатых кристаллов должен был бы увеличиваться в соответствии с ориентацией поверхности валка, на которой растет кристалл. В действительности же такого явления не наблюдается. Это объясняется тем, что в зоне  $z_{III}$ , где имеются одновременно и твердая и жидкая фазы, происходит деформация растущих кристаллов. Из-за разницы температур средние слои металла значительно пластичнее слоев у поверхности валков. Поэтому контактирующие с поверхностями валков слои металла остаются неподвижными относительно последних вплоть до нейтрального сечения. В результате по мере продвижения листа к выходу из валков кристаллиты вытягиваются и изменяют ориентацию, уменьшая угол наклона к вертикали с  $0,85—1,19 \text{ рад}$  ( $50—70 \text{ град.}$ ) в начале зоны II до  $0,25—0,59 \text{ рад}$  ( $15—35 \text{ град.}$ ) в нейтральном сечении. Затем угол наклона кристаллитов к вертикали несколько увеличивается за счет опережения. По ориентации кристаллитов в недокате и листе можно приблизительно определить положение нейтрального сечения. Этому сечению соответствует наименьший угол наклона кристаллов к вертикали.

На рис. 192 изображена схема ориентации кристаллитов в недокате алюминия марки А5, полученном при следующих условиях: диаметр валков  $510 \text{ мм}$ , ширина листа  $600 \text{ мм}$ , толщина листа  $8 \text{ мм}$ , температура металла в распределителе  $670^\circ\text{C}$ , расстояние от носка распределителя до оси валков  $60 \text{ мм}$ . Судя по ориентации кристаллитов, нейтральное сечение находится там, где кристаллиты расположены под углом  $0,25 \text{ рад}$  ( $16^\circ$ ), т. е. на расстоянии  $12 \text{ мм}$  от плоскости выхода из валков. Угол нейтрального сечения  $0,045 \text{ рад}$  ( $2^\circ 40'$ ), а угол захвата  $\lambda = 0,205 \text{ рад}$  ( $12^\circ$ ). В качестве примера на рис. 193 приведена макроструктура алюминиевой ленты, полученной на установке бесслитковой прокатки завода по обработке цветных металлов в Ленинграде.

Отметим некоторые связи между основными параметрами бесслитковой прокатки. Установлено, что с ростом скорости прокатки температура подаваемого в валки жидкого металла должен соответственно понижаться (рис. 194,а), соответственно снижается и температура валков (рис. 194,б). С увеличением скорости длина зоны кристаллизации увеличивается (рис. 194,в), что приводит, очевидно, к уменьшению среднего контактного напряжения с ростом скорости прокатки (рис. 194,г). Эта зависимость прямо противоположна той, которая наблюдается при обычной прокатке.



Рис. 193. Макроструктура алюминиевой ленты, полученной на установке БПЛ при скорости прокатки 0,7 м/мин и толщине 8,5 мм.  $\times 340$

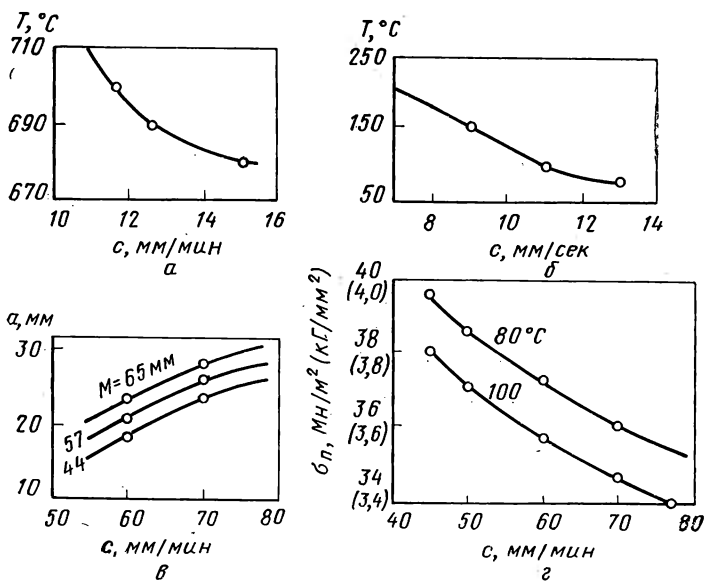


Рис. 194. Зависимость различных параметров от скорости прокатки: а — температуры металла; б — температуры валков; в — длины зоны кристаллизации ( $M$  — расстояние от валка до насадки); г — среднего контактного напряжения

К 1970 г. в мире насчитывалось до 100 агрегатов бесслитковой прокатки, предназначенных, главным образом для обработки алюминиевых сплавов. Строительство их продолжается все ускоряющимися темпами. Оно обусловлено высокими технико-экономическими показателями процесса бесслитковой прокатки: малые потери металла в отходы, высокая производительность и др. Вместе с тем при освоении процесса бесслитковой прокатки возникает ряд серьезных затруднений, поскольку основные закономерности этого процесса еще недостаточно изучены.

Наряду с описанным способом бесслитковой прокатки нашли широкое применение особые литейно-прокатные машины для производства алюминиевой проволоки—катанки. В стадии освоения находится прокатка катанки из меди, медных сплавов и стали. В дальнейшем бесслитковая прокатка будет развиваться ускоряющимися темпами. Отсюда возникает необходимость ускоренного развития ее теории на основе соответствующих экспериментальных исследований.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Целиков А. И. Основы теории прокатки. М., «Металлургия», 1965. 247 с. с ил.
2. Целиков А. И., Гришков А. И. Теория прокатки. М., «Металлургия», 1971. 360 с. с ил.
3. Смирнов В. С. Теория прокатки. М., «Металлургия», 1967. 460 с. с ил.
4. Воронцов В. К., Полухин П. И. Фотопластичность. М., «Металлургия», 1969. 400 с. с ил.
5. Чекмарев А. П., Нефедов А. И., Николаев В. А. Теория продольной прокатки. Харьков, Книжное издательство, 1965. 212 с. с ил.
6. Зайков М. А. Режимы деформации и усилий при горячей прокатке. Свердловск, Metallurgizdat, 1960. 302 с. с ил.
7. Смирнов В. С., Григорьев А. К., Карачунский А. Д. и др. Метод подобия в теории прокатки. Л., «Наука», 1971. 178 с. с ил.
8. Смирнов В. С., Дурнев В. Д. Текстуобразование металлов при прокатке. М., «Металлургия», 1971. 254 с. с ил.
9. Северденко В. П., Клубович В. В., Степаненко А. В. Прокатка и волочение с ультразвуком. Минск, «Наука и техника», 1970. 261 с. с ил.
10. Смирнов В. С., Григорьев А. К. Применение ЭЦВМ для расчета параметров прокатки. М., «Металлургия», 1970. 230 с. с ил.
11. Смирнов В. С. Сборник задач по обработке металлов давлением, М., «Металлургия», 1973. 192 с. с ил.
12. Целиков А. И. Теория расчета усилий в прокатных станах. М., Metallurgizdat, 1962. 494 с. с ил.
13. Северденко В. П. Основы теории прокатки. Минск, «Наука и техника», 1969. 242 с. с ил.
14. Глубкин С. И. Пластическая деформация металлов. т. I. 376 с. с ил.; т. II. 416 с. с ил.; т. III. 306 с. с ил.
15. Чижиков Ю. М. Теория подобия и моделирования процессов обработки металлов давлением. М., «Металлургия», 1970. 125 с. с ил.
16. Крупин А. В., Соловьев В. Я. Пластическая деформация тугоплавких металлов, М., «Металлургия», 1971. 350 с. с ил.
17. Виноградов Г. А., Семенов Ю. Н., Катрус О. А. и др. Прокатка металлических порошков. М., «Металлургия», 1969. 382 с. с ил.



## XVI глава

## Поперечная прокатка

## 1. Контактная поверхность и обжатие при поперечной прокатке

Поперечная прокатка лежит в основе процесса прошивки — главной технологической операции современного способа производства бесшовных труб. В последние годы освоена периодическая горячая и холодная поперечно-винтовая прокатка шаров, шестерен, заготовок под штамповку различных деталей машиностроения, ребристых труб и других изделий<sup>1</sup>. Освоение новых и дальнейшее совершенствование существующих технологических процессов, в особенности процессов производства бесшовных трубных изделий, основанных на поперечной прокатке, продолжается все ускоряющимися темпами. Это обуславливает необходимость дальнейшего изучения поперечной прокатки и развития ее теории.

В первом приближении поперечную прокатку можно уподобить ковке цилиндра по образующей, когда после каждого удара он поворачивается на малый угол, т. е. поперечной ковке (см. рис. 195, а, б). Уменьшение радиуса заготовки за половину ее оборота равно:

$$\Delta r = \left( R - \sqrt{R^2 - b'^2} \right) + \left( r - \sqrt{r^2 - b'^2} \right),$$

где  $R = \frac{D}{2}$  — радиус вала;  $r = \frac{d}{2} + \Delta r$  — радиус заготовки.

Это уравнение можно записать в ином виде:

$$\Delta r = R \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{b'}{R} \right)^2} \right] + r \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{b'}{r} \right)^2} \right].$$

Величины  $b'/R$  и  $b'/r$  всегда значительно меньше единицы.

<sup>1</sup> См. например, Смирнов В. С., Александров В. П., Васильчиков М. В. и др. Поперечная прокатка в машиностроении. М. — Л. Машгиз, 1957. 375 с. с ил.; Васильчиков М. В., Волков М. М. Поперечно-винтовая прокатка изделий с винтовой поверхностью. М., «Машиностроение», 1968. 140 с. с ил.

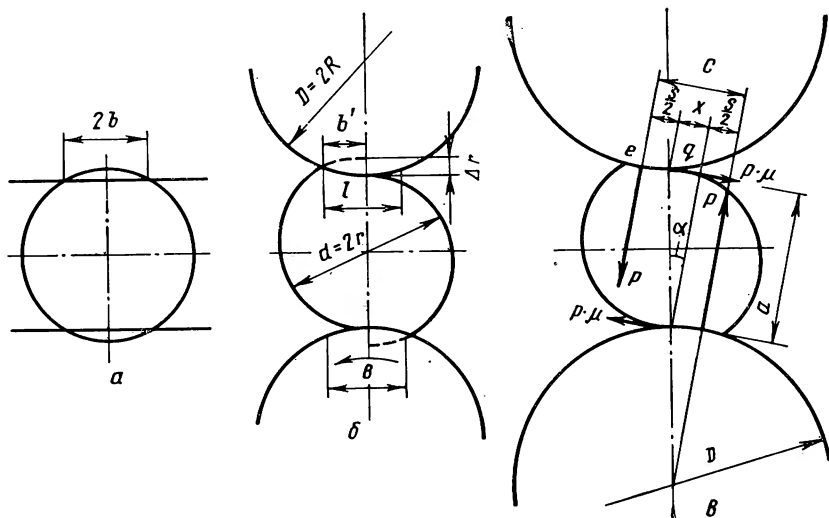


Рис. 195. Схемы к выводу формул для определения ширины контактной поверхности при поперечной ковке (а), прокатке (б), а также предельной ширины поверхности контакта и обжатия (в)

Воспользовавшись разложением в ряд, получим:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{b'}{R}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b'}{R}\right)^2; \quad \sqrt{1 - \left(\frac{b'}{r}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b'}{r}\right)^2.$$

Принимая это во внимание, имеем:

$$b' = \sqrt{\frac{2Rr}{R+r}} \Delta r = \sqrt{\frac{r \Delta r d + 2D(\Delta r)^2}{D + d + 2\Delta r}} \approx \sqrt{\frac{d \Delta r}{1 + \frac{D}{d}}}. \quad (541)$$

Если прокатные валки заменить плитами, то отношение  $d/D$  следует считать равным нулю. Тогда

$$b' = \sqrt{\Delta r d} \text{ или } \frac{b'}{d} = \sqrt{\epsilon},$$

где  $\epsilon = \Delta r/d$  — обжатие заготовки за половину ее оборота в валках.

Такое обжатие в дальнейшем будем называть единичным.

В процессе прокатки заготовка приобретает овальность, за счет чего ширина контактной поверхности возрастает до величины  $b = \psi b'$  так, как это показано на рис. 195, б пунктиром.

Поэтому можно записать, что

$$\frac{b}{d} = \psi \sqrt{\epsilon}. \quad (542)$$

Коэффициент  $\psi$  учитывает приращение ширины контактной поверхности вследствие овализации сечения.

Силы трения  $P\mu$ , приложенные со стороны валков к заготовке (рис. 195, в), образуют момент  $M_1 = P\mu a$ , который вызывает вращение заготовки.

Нормальные силы  $P$  создают момент  $M_2 = Pc$ , который направлен в сторону, противоположную направлению вращения заготовки. Вращение заготовки в валках прекращается в том случае, когда  $M_1 = M_2$  или  $\mu a = c$ . (543)

Ради упрощения выводов дугу  $lg$  заменим хордой и примем, что силы  $P$  приложены к заготовке в середине этих хорд.

Обозначая длину хорды через  $s$ , можно выразить плечо следующим образом:  $c = s + d \sin \alpha$ . Далее, из чертежа (рис. 195) следует, что  $a = d \cos \alpha$ . Подставляя значения  $c$  и  $a$  в равенство (543), имеем:  $s/d = \mu \cos \alpha - \sin \alpha$ .

Легко видеть, что

$$\sin \alpha = \frac{s}{D}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{s}{D}\right)^2}.$$

$$\text{Поэтому } \frac{s}{d} = \mu \sqrt{1 - \left(\frac{s}{D}\right)^2} - \frac{s}{D}.$$

$$\text{Откуда } \frac{s}{D} = \frac{\mu}{\sqrt{\left(1 + \frac{d}{D}\right)^2 + \mu^2 \left(\frac{d}{D}\right)^2}}.$$

Коэффициент трения всегда меньше половины, поэтому второй член под радикалом всегда мал по сравнению с первым. Отсюда приближенно предельное отношение ширины контактной площадки к диаметру заготовки будет равно:  $s/d \approx \mu (1 + d/D)$ .

Принимая во внимание овализацию, за счет которой ширина контактной поверхности возрастает до величины  $b = \psi s \approx \psi b'$ , можно записать:

$$\frac{b}{d} \approx \frac{\psi \mu}{1 + \frac{d}{D}}. \quad (544)$$

На основании уравнений (542) и (544) получим

$$\frac{\psi \mu}{1 + \frac{d}{D}} = \psi \sqrt{\epsilon_{\text{пр}}}.$$

Отсюда предельные единичные обжатия

$$\epsilon_{\text{пр}} = \left(\frac{\mu}{1 + \frac{d}{D}}\right)^2.$$

Принимая  $\mu = 0,15$  и считая, что  $\frac{d}{D} = 0$ , из последнего равенства найдем:  $\epsilon_{\text{пр}} = 0,0225$  или 2,25%.

Таким образом, обжатие за половину оборота при поперечной прокатке невелико.

## 2. Деформированное и напряженное состояние в начальный момент прокатки

Как следует из предыдущего параграфа, нагрузки при поперечной прокатке носят почти сосредоточенный характер. Поэтому деформация по сечению заготовки неравномерна. В первый момент приложения сил от валков, пока заготовка только начинает свое вращательное движение, можно воспользоваться результатом решения плоской задачи (см. гл. IV) о нагружении цилиндра по образующей двумя сосредоточенными силами (см. рис. 196,а). Согласно этому решению, напряжения в центре диска выражаются там равенствами (145). Полученное решение должно удовлетворять уравнению пластичности  $\sigma_r + \sigma_\theta = \nu K$ . Последнее уравнение является точным для того сечения, где направления главных и произвольно выбранных осей совпадают, т. е. для сечения, где  $\theta = 0$ . Поэтому с учетом равенств (145) имеем:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -\frac{4P}{\pi r} = \nu K.$$

Отсюда  $\frac{P}{\pi r} = -\nu \frac{K}{4}$ . Принимая  $\nu = -1$ , получим

$$\frac{P}{\pi r} = \frac{K}{4}, \quad (545)$$

и равенства (145) приобретают вид:

$$\sigma_r = -\frac{K}{4} (1 + 2 \cos 2\theta); \quad \sigma_\theta = -\frac{K}{4} (1 - 2 \cos \theta);$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{K}{2} \sin 2\theta. \quad (546)$$

Отсюда следует, что напряжения от внешних сил в центре диска по линии действия этих сил, т. е. при  $\theta = 0$ , имеют следующие значения:

$$\sigma_r = -\frac{3}{4} K; \quad \sigma_\theta = \frac{1}{4} K; \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (547)$$

Этими значениями воспользуемся в качестве граничных условий для определения напряжений от внешних сил в центре заготовки при поперечной прокатке.

Для определения граничных условий на контуре заготовки используем упрощенную схему поперечной прокатки, изображенную на рис. 196,б. Как следует из рисунка, рассматривается случай прокатки между валками очень большого радиуса.

Из опытных данных\* известно, что между заготовкой и валками существует скольжение, зона опережения практически отсутствует и на поверхности контакта имеется лишь зона отставания. Поэтому

\* Осадчий В. Я., Павлов И. М., Гетия И. Г. и др. — «Обработка металлов давлением». Изд. МЭИ, 1965. (МИСиС и МЭИ. Сб. № 61. Ч. 1), с. 71—78.



нормальное и касательное контактные напряжения увеличиваются от точки  $A$  при входе к точке  $B$  при выходе из валков, как это показано на рис. 196, б.

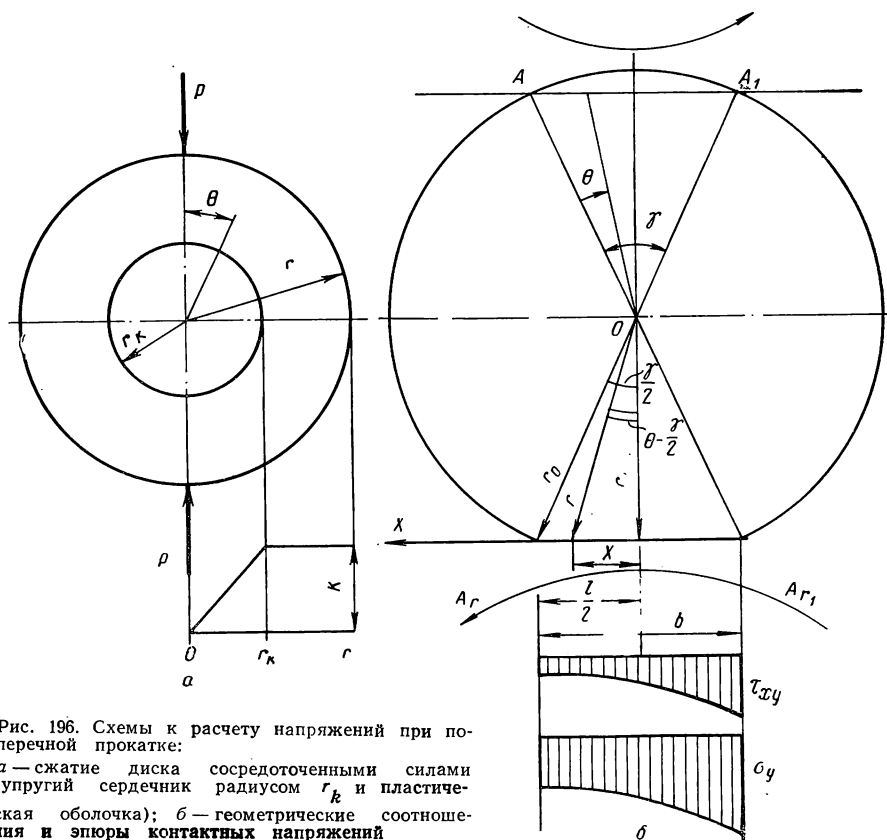


Рис. 196. Схемы к расчету напряжений при поперечной прокатке:  $a$  — сжатие диска сосредоточенными силами (упругий сердечник радиусом  $r_k$  и пластическая оболочка);  $b$  — геометрические соотношения и эпюры контактных напряжений

Для определения контактных напряжений будем использовать гипотезу плоских сечений, т. е. используем систему уравнений (195), которая для данного случая примет вид:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + 2 \frac{\tau_{xy}}{2r} = 0; \quad \sigma_x - \sigma_y = \nu K; \quad \tau_{xy} = \mu \sigma_y.$$

В результате интегрирования получим:

$$\sigma_y = + c e^{-\frac{\mu}{r_1} x}.$$

Принимая во внимание граничное условие, согласно которому при  $\sigma_y = -K$ , получим

$$\sigma_y = -K e^{\frac{\mu}{r_1} \left( \frac{b}{2} - x \right)}$$

Из рис. 196,б следует, что

$$\frac{b}{2} = r_0 \sin \frac{\gamma}{2}; \quad x = r \sin \left( \frac{\gamma}{2} - \theta \right);$$

$$r_0 = \frac{r_1}{\cos \frac{\gamma}{2}}; \quad r = \frac{r_1}{\cos \left( \frac{\gamma}{2} - \theta \right)}.$$

Поэтому  $\frac{b}{2} = r_1 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}; \quad x = r_1 \operatorname{tg} \left( \frac{\gamma}{2} - \theta \right)$

и, следовательно

$$\frac{\mu}{r_1} \left( \frac{b}{2} - x \right) = \mu \left[ \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg} \left( \frac{\gamma}{2} - \theta \right) \right].$$

Ввиду малой величины углов можем записать

$$\sigma_y = -K e^{\mu \theta}$$

и принять  $\sigma_y = \sigma_\rho$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{\rho\theta}$ .

Следовательно, на поверхности контакта ( $\rho = r$ ) имеем:

$$\sigma_\rho = -K e^{\mu \theta}; \quad \tau_{\rho\theta} = -\mu K e^{\mu \theta}. \quad (548)$$

Касательные напряжения в центре диска не должны быть бесконечно велики. Поэтому в равенствах (181) сразу положим  $c_2 = 0$ . Тогда они приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\rho\theta} &= c_1 \rho^a \varphi_1; \\ \sigma_\rho &= -c_1' \rho^a \varphi_2 - \nu K \ln \rho + c; \quad \sigma_\theta = -c_1' \rho^a \varphi_2 - \nu K (\ln \rho + 1) + c, \end{aligned} \right\} (549)$$

где

$$\varphi_1 = A e^{m\theta} + B e^{-m\theta}; \quad \varphi_2 = A e^{m\theta} - B e^{-m\theta}; \quad c_1' = -\frac{m c_1}{a}. \quad (550)$$

В п. 2 гл. XII на примере продольной прокатки было показано, что решение (181) и, следовательно, решение (549) можно трактовать как совокупность напряжений от внешних сил и от неравномерности деформации. Запишем решение (549) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\rho\theta} &= c_1 \rho^b \varphi_1; \\ \sigma_\rho &= c_1' \rho^a \varphi_2 + c - \nu K \ln \rho + c' + \nu K \eta \cdot \varphi_2; \\ \sigma_\theta &= c_1' \rho^a \varphi_2 + c - \nu K (1 - \eta) - \nu K \ln \rho + c' - \nu K \eta (1 - \varphi_2). \end{aligned} \right\} (551)$$

Как и в случае продольной прокатки, равенства (551) можно трактовать как совокупность напряжений от внешних сил (В. С.) и напряжений, вызванных неравномерной деформацией (Н. Д.):

$$\sigma_{\rho\theta}^{B,C} = c_1 \rho^a \varphi_1; \quad \sigma_{\rho\theta}^{B,C} = c_1' \rho^a \varphi_2 + c; \quad \sigma_{\theta}^{B,C} = c_1' \rho^a \varphi_2 + c - \nu K (1 - \eta); \quad (552)$$

$$\sigma_{\rho}^{H,D} = -\nu K \ln \rho + c' + \nu K \eta \cdot \varphi_2; \quad \sigma_{\theta}^{H,D} = -\nu K \ln \rho + c' - \nu K \eta (1 - \varphi_2). \quad (553)$$

Проведя несложные преобразования, подобные проведенным в гл. 12, получим:

$$\sigma_{\rho}^{B.C} - \sigma_{\theta}^{B.C} = \nu K (1 - \eta); \quad \sigma_{\rho}^{H.D} - \sigma_{\theta}^{H.D} = \nu K \eta. \quad (554)$$

Отсюда следует, что

$$(\sigma_{\rho}^{B.C} - \sigma_{\theta}^{B.C}) + (\sigma_{\rho}^{H.D} - \sigma_{\theta}^{H.D}) = \nu K, \\ \text{т. е. } \sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} = \nu K, \quad (555)$$

где  $0 \leq \eta \leq 1$ .

Как следует из равенств (554), при  $\eta=0$  разность напряжений, связанных неравномерной деформацией, отсутствует и существует только разность напряжений от внешних сил, величина которой равна  $\nu K$ . Это соответствует случаю, когда напряжения от неравномерности деформации при прокатке не возникают.

При  $\eta=1$  имеет место другой крайний случай: из равенств (554) следует, что разность напряжений от внешних сил равна нулю, и существует только разность напряжений от неравномерности деформации, равная  $\nu K$ . Это соответствует случаю, когда напряжения от внешних сил исчезли после прекращения нагружения, а напряжения, вызванные неравномерной деформацией, превратились в остаточные.

При  $0 \leq \eta \leq 1$  существуют одновременно и напряжения от внешних сил, и напряжения от неравномерности деформации и условие пластичности имеет обычный вид (555). При продольной прокатке значения  $\eta$  были подобраны так, что в рассмотренных двух крайних случаях они имели как раз обратную величину. Для случая поперечной прокатки запись в форме (553) и (554) упрощает решение.

Сначала определим напряжения от внешних сил  $P$ , считая их сосредоточенными в точках ( $\rho=r_0=r$ ,  $\theta=0$ ) (рис. 196, а). Тогда из условия асимметрии касательного напряжения в точке приложения сосредоточенной силы (см. рис. 43) получаем  $\tau_{\rho\theta}=0$ . При этом первое из равенств (550) дает:  $A+B=0$ , т. е.  $B=-A$ . С учетом этого второе из равенств (550) приобретает вид  $\varphi_2=A-B=2A$ . Не сужая общности решения, допустим, что  $2A=1$ . В результате получим из уравнений (552):

$$\sigma_{\rho}^{B.C} = c_1' \rho^a + c; \quad \sigma_{\theta}^{B.C} = c_1' \rho^a + c - \nu K (1 - \eta). \quad (556)$$

Принимая во внимание равенства (547) и (548), при  $\theta=0$  для напряжения  $\sigma_{\rho}$  найдем следующие граничные условия:

$$\rho=0; \quad \rho=r; \quad \sigma_{\rho} = -\frac{3K}{4}; \quad \sigma_{\rho} = -K.$$

Тогда первое из равенств (556) дает:

$$c = \frac{3K}{4}; \quad c_1' = \frac{K}{4r^a}.$$

Согласно уравнению (547), в центре заготовки должно удовлетворяться еще одно условие:  $\rho=0$ . Используем это условие для того, чтобы определить величину  $\eta$ . При  $\rho=0$  с учетом значения константы  $c = -\frac{3K}{4}$  второе из равенств (556) дает:

$$\frac{K}{4} = -\frac{3K}{4} - \nu K(1 - \eta).$$

$$\text{Отсюда } \eta = 1 + \frac{1}{\nu}.$$

При  $\nu = +1$  получаем  $\eta = 2$ , при  $\nu = -1$  оказывается, что  $\eta = 0$ . Отбрасывая противоречащее смыслу задачи значение  $\eta = 2$ , приходится принять  $\nu = -1$  и  $\eta = 0$ .

Обращаясь снова к равенствам (556), получаем:

$$\frac{\sigma_{\rho}^{\text{B.C.}}}{K} = -\frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\rho}{a} \right)^a + 3 \right]; \quad \frac{\sigma_{\theta}^{\text{B.C.}}}{K} = -\frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\rho}{a} \right)^a + 3 \right] + 1. \quad (557)$$

Из пункта I известно, что при поперечной прокатке угол  $\theta$  всегда мал. Поэтому напряжения при  $\theta=0$  и  $\theta=\gamma$  будут мало отличаться между собой. Это дает возможность, принимая во внимание граничные условия (548), обобщить решение (557) при изменении угла  $\theta$  в пределах  $0 \leq \theta \leq \gamma$  в таком виде:

$$\frac{\sigma_{\rho}^{\text{B.C.}}}{K} = -\frac{1}{4} e^{\mu \theta} \left[ \left( \frac{\rho}{r} \right)^a + 3 \right]; \quad \frac{\sigma_{\theta}^{\text{B.C.}}}{K} = -\frac{1}{4} e^{\mu \theta} \left[ \left( \frac{\rho}{r} \right)^a + 3 \right] + 1. \quad (558)$$

Если радиус заготовки велик, то напряжения от внешних сил в ее центре можно принять равными нулю. Этому крайнему случаю будет соответствовать величина  $\eta = 1$ . Тогда равенства (556) получим в виде:

$$\sigma_{\rho}^{\text{B.C.}} = \sigma_{\theta}^{\text{B.C.}} = c' \rho^a + c. \quad (559)$$

На основании уравнений (547) и (548) из условий

$$\theta = 0; \quad \rho = 0; \quad \sigma_{\rho}^{\text{B.C.}} = 0; \quad \rho = r; \quad \sigma_{\rho}^{\text{B.C.}} = -K$$

и уравнения (19) будем иметь следующее равенство:

$$\sigma_{\rho}^{\text{B.C.}} = \sigma_{\theta}^{\text{B.C.}} = -K \left( \frac{\rho}{r} \right)^a, \quad (560)$$

и обобщая его на интервал  $0 \leq \theta \leq \gamma$ :

$$\sigma_{\rho}^{\text{B.C.}} = \sigma_{\theta}^{\text{B.C.}} = -K e^{\mu \theta} \left( \frac{\rho}{r} \right)^a. \quad (561)$$

На рис. 197 приведены эпюры напряжений, построенные с использованием формул (558) и (561).

Определим теперь величину обжатия, соответствующую началу пластической деформации в центре заготовки. При поперечной прокатке нагрузка прикладывается к телу на площадке шириной  $b$  (рис. 196, б). При длине цилиндра, равной единице, будем иметь  $P = pb$ .

Согласно равенству (545), деформация распространяется до центра сечения, когда

$$\frac{P}{\pi r} = \frac{pb}{\pi r} = \frac{K}{4},$$

где  $p$  — среднее контактное напряжение. Поэтому:

$$\frac{b}{r} = \frac{\pi}{r} \frac{K}{p} \quad \text{или} \quad \frac{b}{d} = \frac{\pi}{8} \frac{K}{p}. \quad (562)$$

В гл. VIII мы приняли для плоской деформации, что среднее контактное напряжение равно:  $p = n_\sigma n_3 K$ .

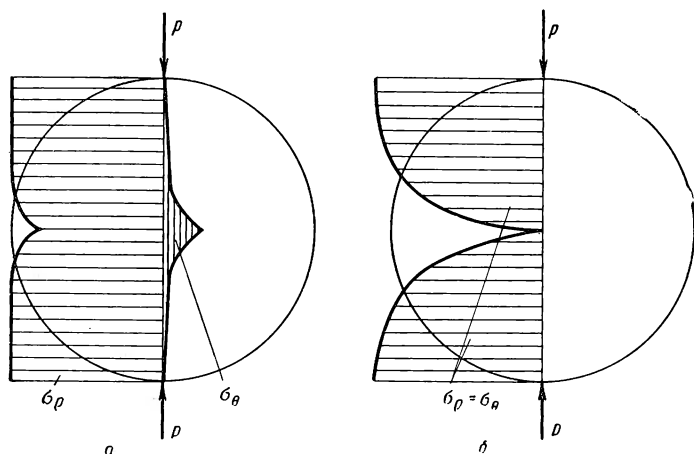


Рис. 197. Эпюры напряжений, возникших от действия внешних сил при сжатии диска сосредоточенными силами и рассчитанных: а — по формуле (557); б — по формулам (560),  $\alpha = 0,125$

Ввиду сосредоточенного характера нагрузки отношение ширины контактной поверхности к диаметру при поперечной прокатке будет величиной малой. Поэтому можно пренебречь влиянием трения на поверхностях контакта и считать  $n_\sigma = 1$ .

Следовательно:  $p = n_3 K$ . Поэтому, согласно формуле (562),  $\frac{b}{d} = \frac{\pi}{8 n_3}$  и обжатие по диаметру с учетом формулы (542) равно

$$\epsilon = \left( \frac{\pi}{8 n_3 \psi} \right)^2. \quad (563)$$

Отсюда следует, что обжатие, которое соответствует началу пластической деформации в центре сечения, при поперечной прокатке уменьшается с ростом коэффициентов  $\psi$  и  $n_3$ .

По данным А. П. Чекмарева и В. И. Бибы<sup>1</sup>, ширина контактной поверхности, определяемая без учета овализации, а также перекоса валков и смещения оси прошивки, при косо́й прокатке отличается от определенных по теоретическим формулам в 1,3—1,6 раза. Если для случая поперечной прокатки принять  $\psi=1,4$ , то обжатие по диаметру, при котором пластическая деформация проникает до центра сечения, равно

$$\epsilon \approx \frac{0,08}{n_3^2}. \quad (564)$$

Выше мы приняли  $n_\sigma=1$ . Этому соответствует значение  $\delta=1$ . Согласно данным упомянутых выше опытов, при поперечной прокатке имеет место проскальзывание заготовки относительно валков так, что на поверхности контакта существует только зона отставания. Обращаясь к номограмме (см. рис. 153,а), убеждаемся, что при  $\delta=1$  коэффициент  $n_{30}=n_3$  для этого случая равен 2. При  $n_3=2$  получаем из формулы (564), что  $\epsilon \approx 2\%$ .

Такую же величину обжатия для данного случая получил и В. А. Лунев<sup>2</sup> на основании более строгого обследования и сравнения результатов упругой задачи и задачи о касании штампа по образующей пластического диска. Результаты теоретических расчетов В. А. Лунев сравнил с результатами опытов при прокатке образцов, составленных из концентрических цилиндров, плотно вставленных друг в друга, и получил кривую, характеризующую распространение пластической деформации по сечению заготовки (рис. 198).

С. И. Орлов и В. В. Швейкин, осаживая свинцовые образцы, спаянные сплавом Вуда из нескольких частей при наличии координатной сетки по линии разъема, установили, что пластическая деформация затухает от периферийных к центральному слоям, если единичные обжатия не превышают 4%. При более высоких обжатиях максимальная деформация перемещается в центральные слои, и при единичном обжатии, величина которого более 18—20%, деформация минимальна в периферийных слоях и максимальна в центре сечения. Опыты В. П. Северденко и Б. А. Каледина<sup>1</sup>, проведенные на свинцовых образцах по той же методике, показали, что убывание деформации к центру сечения наблюдается при единичных обжатиях до 8%. И. А. Ефимов<sup>2</sup>, наблюдая при ковке изменение размеров концентрических окружностей, нанесенных на торце образца, установил, что описываемое явление имеет место при единичных обжатиях до 3%. И. А. Фомичев величину такого предельного единичного обжатия определяет в 5% [1].

<sup>1</sup> Чекмарев А. П., Биба В. И. Кинематические и силовые условия действия оправки косовалкового прошивного стана. Сб. «Технический прогресс в трубном производстве». М., «Металлургия», 1965. с. 107—132;

<sup>2</sup> Лунев В. А. — «Обработка металлов давлением» Л., Машгиз, 1964. (Труды ЛПИ, Сб. № 238), с. 47—55

Таким образом, несмотря на некоторое различие в данных различных исследований, можно утверждать, что при поперечной и ко-сой прокатке, когда обжатия невелики, происходит убывание интенсивности пластической деформации от периферийных слоев к центру сечения за счет малой величины единичных обжатий.

Если пластическая деформация не распространялась до центра сечения, то в центре на основании равенств (546) можно принять следующие выражения для расчета напряжений:

$$\sigma_r = -n \frac{K}{4} (1 + 2 \cos 2\theta); \quad \sigma_\theta = -n \frac{K}{4} (1 - 2 \cos 2\theta), \quad (565)$$

где коэффициент  $n$  изменяется в пределах от нуля до единицы в зависимости от величины внешней нагрузки или, что то же самое, обжатия.

Величину  $n$  можно найти на основании равенств (169) и (565) из простого соотношения

$$\frac{P}{\pi r} (1 + 2 \cos 2\theta) = n \frac{K}{4} (1 + 2 \cos 2\theta).$$

Отсюда  $n = 4P/\pi rK$ , но  $P = pb$  и  $r = \frac{d}{2}$ .

$$\text{Поэтому } n = \frac{\delta}{\pi} \frac{p}{K} \frac{b}{d} = 2,55 n_3 \frac{b}{d}.$$

и на основании уравнения (542)

$$n = 2,55 n_3 \psi \sqrt{\epsilon}. \quad (566)$$

### 3. Деформированное и напряженное состояние в установившейся стадии прокатки

После ряда последовательных единичных обжатий в заготовке возникают напряжения, вызванные неравномерностью деформации по диаметру под действием сосредоточенных нагрузок от внешних сил. Вне валков на контуре заготовки, т. е. при  $\rho = r$ , касательное напряжение  $\tau_{r\theta} = 0$ . Тогда, согласно первому равенству системы (549), с учетом соотношений (550) получим

$$c_1 r^a (A e^{m\theta} + B e^{-m\theta}) = 0.$$

Отсюда следует, что  $A = B = 0$ , т. е.  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ .

В таком случае в объемах заготовки, не подвергающихся непосредственному воздействию валков, согласно равенствам (553), будем иметь

$$\sigma_r^{н.д} = -\nu K \ln \rho + c'; \quad \sigma_\theta^{н.д} = -\nu K \ln \rho + c' - \nu K \eta.$$

На свободной от нагрузок поверхности заготовок, т. е. при  $\rho = r$ , радиальные напряжения  $\sigma_r = 0$ . Тогда постоянную  $c'$  найдем как  $c' = \nu K \ln r$

и при  $\nu = +1$  получаем

$$\sigma_{\rho}^{\text{н.д}} = \ln \frac{r}{\rho}; \quad \frac{\sigma_{\theta}^{\text{н.д}}}{K} = \ln \frac{r}{\rho} - \eta. \quad (567)$$

Если принять, что в зонах заготовки, находящихся вне валков, напряжений от внешних сил нет, то следует принять  $\eta = 1$ . Это означает, что напряжения от неравномерности деформации вне валков эквивалентны остаточным и они оказываются равными

$$\frac{\sigma_{\rho}}{K} = \ln \frac{r}{\rho}; \quad \frac{\sigma_{\theta}}{K} = \ln \frac{r}{\rho} - 1. \quad (568)$$

В зонах под валками одновременно действуют напряжения и от внешних сил, и от неравномерности деформации. Их сумма представляет собой рабочие напряжения. Но в таком случае, как было показано в предыдущем пункте, следует принять  $\eta = 0$ . Тогда для зон под валками, согласно равенствам (558) и (567), при  $\eta = 0$  получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{\rho}}{K} &= -\frac{1}{4} e^{\mu\theta} \left[ \left( \frac{\rho}{a} \right)^a + 3 \right] + \ln \frac{r}{\rho}; \\ \frac{\sigma_{\theta}}{K} &= -\frac{1}{4} e^{\mu\theta} \left[ \left( \frac{\rho}{r} \right)^a + 3 \right] + \ln \frac{r}{\rho} + 1; \\ \frac{\tau_{\rho\theta}}{K} &= -\frac{\mu}{4} e^{\mu\theta} \left[ \left( \frac{\rho}{r} \right)^a + 3 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (569)$$

После того как заготовка получит некоторое число единичных обжатий, напряжения, возникающие за счет неравномерной деформации, в центре сечения значительно возрастут и напряжениями от внешних сил здесь можно пренебречь. Тогда, на основании равенств (561) и (568), напряженное состояние можно охарактеризовать следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{\rho}}{K} &= e^{\mu\theta} \left( \frac{\rho}{r} \right)^a + \ln \frac{r}{\rho}; \quad \frac{\sigma_{\theta}}{K} = -e^{\mu\theta} \left( \frac{\rho}{r} \right)^a + \ln \frac{r}{\rho} - 1; \\ \frac{\tau_{\rho\theta}}{K} &= -\mu e^{\mu\theta} \left( \frac{\rho}{r} \right)^a. \end{aligned} \right\} \quad (570)$$

В приведенных выше равенствах остается неизвестной величина  $a$ . Определим ее, приравняв правые части выражений (549) с учетом соотношений (550) и (570) для напряжений  $\sigma_{\rho}$ :

$$\begin{aligned} -\frac{c_1 m}{a} \rho^a (A e^{m\theta} - B e^{-m\theta}) - \nu K \ln \rho + c &= -K \left( \frac{\rho}{r} \right)^a e^{\mu\theta} + \\ + K \ln r - K \ln \rho. \end{aligned}$$

Сравнивая правую и левую части, получим уже известные нам выражения констант:

$$\frac{2 A c_1 m}{a} = \frac{K}{r^a}; \quad B = 0; \quad c = K \ln r; \quad \nu = +1,$$



и кроме того:  $m = \mu$ . Вспоминая, что, согласно равенству (182):  
 $a = -1 + \sqrt{1 + m^2}$ ,

$$\text{получим } a = -1 + \sqrt{1 + \mu^2} \approx -1 + 1 + \frac{\mu^2}{2} = \frac{\mu^2}{2}. \quad (571)$$

На рис. 199 с использованием уравнений (558) и (567) построены эпюры напряжений от внешних сил (сплошные линии), от неравномерности деформации и суммарных напряжений в зонах над валками, построенные с использованием уравнений (568) и (569).

Эпюры напряжений  $\sigma_z$  построены с учетом условия  $\sigma_z = 0,5(\sigma_p + \sigma_\theta)$  плоской деформации.

Для зон вне валков напряжения от неравномерной деформации, определяемые равенствами (568), являются и рабочими, поскольку

принято, что здесь напряжения от внешних сил отсутствуют.

Возникновение напряженного состояния, характеризуемого эпюрами, приведенными на рис. 199, объясняется следующим образом.

Представим заготовку составленную из ряда вставленных друг в друга концентрических полых цилиндров и сердечника. Каждый наружный цилиндр подвергается прокатке на внутреннем, как на оправке. За счет того, что напряжения от внешних сил имеют на периферии максимальную величину, наружные цилиндры деформируются по толщине стенки более интенсивно по сравнению с внутренними, и диаметр у наружных цилиндров возрастает больше, чем диаметр внутренних,

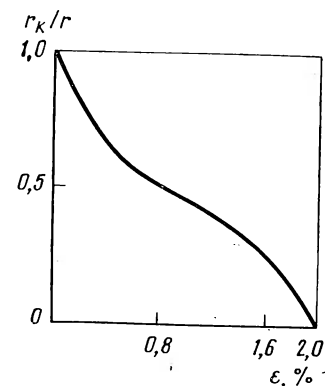


Рис. 198. Зависимость радиуса  $r_k$  упругой зоны от степени обжатия

т. е. происходит расслаивание. Такой процесс действительно имеет место при условии отсутствия связи между цилиндрами<sup>1</sup>.

В реальном процессе прокатки расслаивания металла не наблюдаются из-за наличия сплошности. Однако стремление к расслаиванию у сплошного тела существует. Поэтому в областях тела, которые не подвержены действию сжимающих напряжений, возникают напряжения растяжения в радиальном направлении. Когда эти объемы оказываются в сфере действия сжимающих напряжений от валков, то радиальные напряжения сжатия от сил, приложенных со стороны валков, суммируются с радиальными напряжениями растяжения, рис. 199,б). По условиям равновесия радиальные растягивающие напряжения, возникающие из-за неравномерной деформации, равны нулю на контуре заготовки и увеличиваются при переходе к ее центру вследствие неравномерного распределения остаточной деформации по поперечному сечению.

<sup>1</sup> Смирнов В. С. Поперечная прокатка. М. — Свердловск, Машгиз, 1948. 195 с. с ил.

С ростом числа единичных обжатий, т. е. суммарного обжатия по диаметру, радиальные напряжения от неравномерной деформации возрастают и в некоторый момент обработки становятся в центре заготовки больше сжимающих напряжений, вызываемых внешними силами.

Действующие в процессе обработки рабочие напряжения (рис. 199) являются алгебраической суммой напряжений от внешних сил и напряжений от неравномерной деформации.

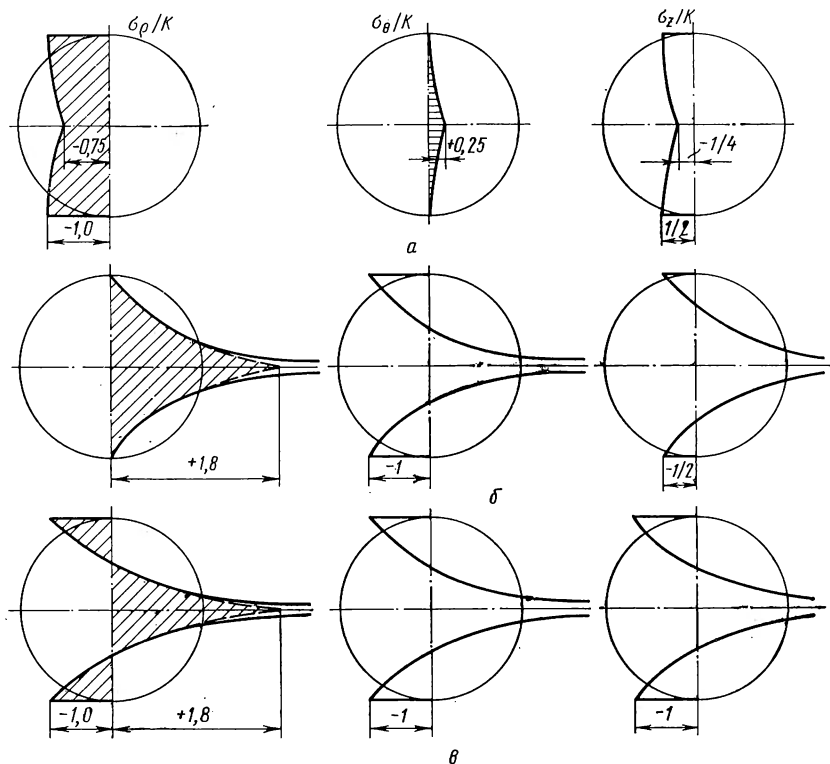


Рис. 199. Эпюры нормальных напряжений при установившейся поперечной прокатке по линии действия приложенных нагрузок:

а — от внешних сил; б — от неравномерной деформации; в — суммарные  $\epsilon = 1,6\%$ ;  $r_k = 0,25$ ;  $\alpha = 0,125$ ;  $\mu = 0,5$

Таким образом, после некоторого обжатия по диаметру в осевой зоне заготовки возникают радиальные растягивающие напряжения, несмотря на наличие сжимающих напряжений от действия валков.

В зависимости от направления выбранной элементарной площадки величина растягивающих напряжений в центре различна.

Элементарное кольцо на участке, находящемся под непосредственным воздействием валков, получает некоторое обжатие. Если бы частицы обжимаемого участка не были связаны с частицами ос-

гальной части тела, то этот элемент свободно бы удлинялся. Ввиду сплошности металла удлинению препятствуют неизбежные части элементарного кольца. Поэтому осевая часть тела испытывает растягивающие тангенциальные напряжения, а периферийная часть — сжимающие тангенциальные напряжения. Поскольку наружные кольца получают большую осадку по толщине, чем внутренние, то сжимающие тангенциальные напряжения максимальны на периферии тела, а растягивающие тангенциальные напряжения возникающие от внешних сил (рис. 199,а), алгебраически суммируются с напряжениями от неравномерности деформации (рис. 199,б) и эпюра рабочих напряжений приобретает вид, изображенный на рис. 199,в.

Раскатка периферийных концентрических слоев вызывает изменение не только их диаметра, но и длины. Периферийные слои при прокатке обжимаются по толщине, и внешний диаметр заготовки уменьшается. Поэтому длина периферийных концентрических слоев увеличивается и, следовательно, наружная часть заготовки увеличивает свою длину по сравнению с первоначальной. Наибольшее уменьшение толщины получают периферийные кольца. Следовательно, наибольшую вытяжку заготовка получает по контуру. С другой стороны, если радиальные растягивающие напряжения имеют в осевой части заготовки достаточно большую величину, то под их действием элементарные цилиндры в осевой зоне могут утолщаться. Утолщение осевых элементарных цилиндров может происходить за счет сокращения их длины — утяжки в осевом направлении.

Периферийная часть тела, энергично удлиняющаяся вдоль оси, тянет за собой стремящуюся укоротиться сердцевину. Последняя сопротивляется воздействию периферийной зоны, и поэтому в осевой зоне возникают осевые растягивающие напряжения. И как реакция по отношению к этим напряжениям, в периферийной зоне возникают осевые сжимающие напряжения. Осевые напряжения от действия внешних сил (рис. 199,а) алгебраически суммируются с напряжениями от неравномерности деформации (рис. 199,б) так, что эпюра рабочих напряжений приобретает вид, изображенный на рис. 199,в.

Итак, в некоторый момент обработки в осевой зоне заготовки металл оказывается в состоянии всестороннего неравномерного растяжения. Из формул (568)—(570) следует, что в центре заготовки (где  $\rho=0$ ) нормальные напряжения приобретают бесконечно большую величину. Точка  $\rho=0$  представляет собой особую точку, наличие которой обусловлено выбором начала цилиндрической системы координат в центре кругового сечения. В действительных условиях бесконечно большие напряжения в центре сечения не реализуются потому, что, как только рабочие напряжения достигнут некоторого уровня в локальных микрообъемах, начинается процесс пластического течения, заканчивающийся разрушением, о чем будет сказано подробнее в следующем пункте. В связи с этим дадим приближенное решение о распределении напряжений при по-

перечной прокатке, исключаяющее существование напряжения бесконечно большой величины в центре сечения заготовки.

Выше было показано, что при малых единичных обжатиях пластическая деформация не проникает до центра сечения. В таком случае поперечное сечение заготовки можно представить состоящим из пластической оболочки и упругого сердечника, радиус которого обозначим через  $r_k$  (рис. 196,а). В пластической оболочке возникают напряжения, которые описываются формулами (568)—(570), при этом справедливо условие пластичности в виде (555). В упругом сердечнике разность напряжений  $\sigma_\rho - \sigma_\theta \leq \nu K$ , и для определения напряжений должны быть привлечены уравнения теории упругости. Решение подобной упруго-пластической задачи приведено в [3].

Будем решать задачу о распределении напряжений при поперечной прокатке, приняв для упругой зоны приближенный закон:

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = K \rho / r_k.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением равновесия

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0,$$

$$\text{получим } \sigma_\rho = -K \frac{\rho}{r_k} + c.$$

Приняв граничные условия:  $\rho = r_k$ ;  $\sigma_\rho = K \ln \frac{r}{r_k}$ ,

вытекающее из равенств (568), получим для зон вне валков в упругом сердечнике ( $0 \leq \rho \leq r_k$ )

$$\frac{\sigma_\rho}{K} = \ln \frac{r}{r_k} - \frac{\rho}{r_k} + 1; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = \ln \frac{r}{r_k} - 2 \frac{\rho}{r_k} + 1. \quad (572)$$

В таком случае для упругого сердечника в зонах над валками на основании уравнений (561) и (572) получим:

$$\frac{\sigma_\rho}{K} = -e^{\mu \theta} \left( \frac{\rho}{r} \right)^a - \frac{\rho}{r_k} + \ln \frac{r}{r_k} + 1; \quad \frac{\sigma_\theta}{K} = e^{\mu \theta} \left( \frac{\rho}{r} \right)^a - 2 \frac{\rho}{r_k} + \ln \frac{r}{r_k} + 1. \quad (573)$$

С использованием равенств (573) на рис. 199 построены для примера эпюры напряжений  $\sigma_\rho$  (на рисунке соответствующие эпюры заштрихованы). Эпюры напряжений  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_z$  имеют аналогичный характер. Таким образом, растягивающие нормальные напряжения в центральной точке имеют большую, но все же конечную величину. Разность напряжений в этой точке равна нулю. Поэтому максимальные скальвающие напряжения  $\tau = \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} = 0$ . Этот результат следует рассматривать как приближение, справедливое при малых обжатиях.

На основании уравнений (565) имеем разность напряжений от действия внешних сил, при  $\theta=0$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = nK.$$

Принимая во внимание равенство (566), получим следующее выражение для максимальных скалывающих напряжений:

$$\frac{\tau}{K} = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} = 1,275 n_3 \psi \sqrt{\epsilon}. \quad (574)$$

С использованием равенства (34) при  $n_3=2$  и  $\psi=1,4$  на рис. 200 построена кривая, из рассмотрения которой следует, что касательные напряжения в центре сечения малы при очень малых обжатиях и достигают половины истинного сопротивления, когда обжатие достигает предельной величины, равной 2%.

На рис. 201 представлены эпюры нормальных напряжений при прокатке и два (из многих возможных) варианта изменения по поперечному сечению заготовки хрупкой прочности (см. гл.

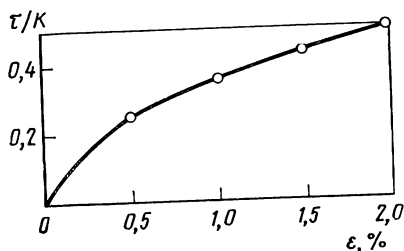


Рис. 200. Зависимость максимального скалывающего напряжения от обжатия

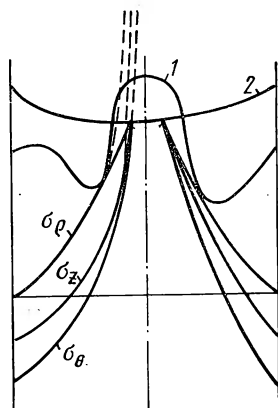


Рис. 201. Эпюры нормальных напряжений и варианты (1, 2) изменения сопротивления отрыву по поперечному сечению заготовки

VII), которая в применении к поликристаллическим телам получила наименьшие сопротивления отрыву. Если сопротивление отрыву изменяется по поперечному сечению согласно кривой 1, то действующие напряжения достигают значения сопротивления отрыву в некотором промежуточном кольцевом сечении прежде, чем на оси. В этом случае разрушение происходит по этому кольцевому сечению и образуется кольцевая полость. Такой характер разрушения наблюдается довольно часто при прокатке специальных сталей (быстрорежущих и им подобных), дюралюминия, армко-железа и реже — алюминия.

Если изменение сопротивления отрыву по поперечному сечению выражается кривой 2, то действующие напряжения достигают значения сопротивления отрыву в центре поперечного сечения заготовки прежде, чем в других точках. Тогда полость вскрывается в центре. Этот вид разрушения имеет место при прокатке

большинства низкоуглеродистых и среднеуглеродистых сталей, свинца и других подобных материалов.

В качестве мер борьбы с образованием кольцевой полости можно рекомендовать мероприятия, обеспечивающие получение возможно более однородного по сечению слитка металла, а также применение коротких очагов деформации, больших единичных и малых суммарных обжатий.

Описанные выше результаты были получены для предельного случая плоской деформации длинного круглого сечения. Другим предельным случаем является случай плоского напряженного состояния когда прокатке подвергается тонкая круглая пластинка-шайба. При этом имеем плоское напряженное состояние (см. гл. 2) и осевое напряжение равно нулю во всем объеме пластинки. Поэтому максимальные скалывающие напряжения, являющиеся полуразностью нормальных, в центре сечения достигают половины предела текучести уже при очень малых обжатиях. В процессе прокатки в центре сечения пластическая деформация постепенно приобретает значительную величину и заканчивается разрушением от касательных напряжений.

Если толщину пластинки постепенно увеличивать, то мы перейдем от плоского напряженного состояния к плоской деформации и в соответствии с этим — от разрушения от касательных напряжений к разрушению от нормальных напряжений.

#### **4. Дислокационный механизм деформации и разрушения при поперечной прокатке**

Описание напряженного состояния и деформации при поперечной прокатке, приведенное в предыдущем параграфе, носило макроскопический характер. Дадим этому процессу трактовку с микроскопических позиций, разработанную Б. Ю. Садовниковым под руководством автора на основании многочисленных и тщательно поставленных экспериментов<sup>1</sup>. Б. Ю. Садовников начал с исследования плотности алюминиевых образцов до и после поперечной прокатки потому, что плотность металлов и сплавов является одной из важнейших физических характеристик, зависящих от фазового и структурного состояний материала и от происходящих в нем превращений. Исследованию были подвергнуты образцы из алюминия марки А99 (ГОСТ 11069—64\*) диаметром 20 мм и длиной 45 мм.

Как отмечалось, плотность образцов определяли до и после прокатки. Опыты показали, что при выдержке отожженных образцов на воздухе без нагрузки алюминий с течением времени приобретает максимальную плотность, т. е. происходит залечивание дефектов. После такой выдержки при поперечной прокатке происходит дальнейшее быстрое возрастание средней плотности до

<sup>1</sup> Владимиров В. И., Садовников Б. В., Смирнов В. С. Исследование разрушения алюминия при поперечной прокатке методом измерения плотности. ФХОМ, 1971

максимальной при обжатиях до 2,2%, а затем с увеличением обжатия выше 3,5—4% средняя плотность резко уменьшается (рис. 202) и происходит разрушение центральной части образца. При единичных обжатиях 0,1—0,4% критическое обжатие изменяется очень незначительно и имеет минимальную величину. При единичных обжатиях  $>0,4\%$  критическое обжатие возрастает с увели-

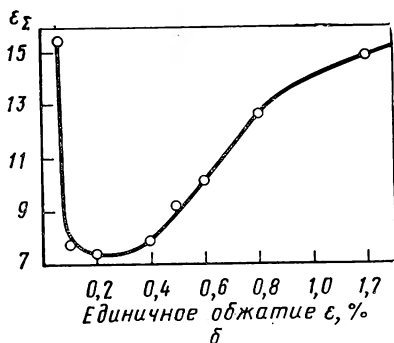
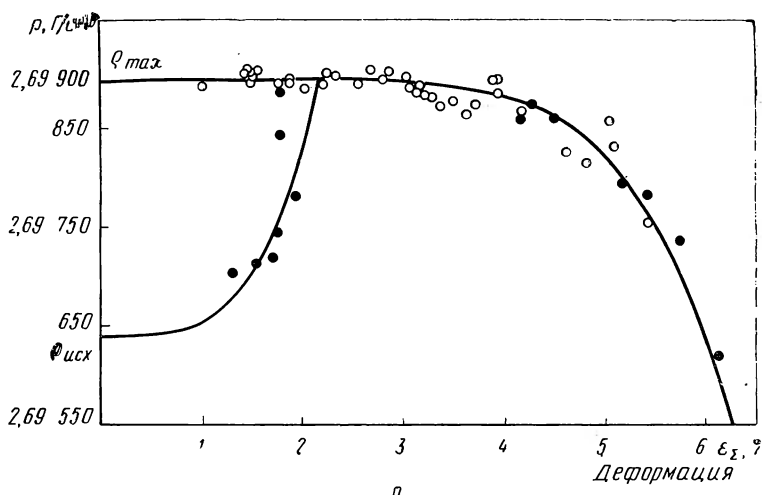


Рис. 202. Изменение плотности (а) и критического обжатия (б) при поперечной прокатке алюминиевых образцов. Отжиг образцов при 500°C (○) и 600°C (●). За критическое обжатие ( $\epsilon_{\Sigma}$ ) принято суммарное обжатие, при котором дефект плотности ( $\Delta\rho$ ) равен  $10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>

чением единичных. При единичных обжатиях  $<0,1\%$  критическое обжатие также возрастает и наблюдается отслаивание материала с наружной поверхности образца.

Установлено, что изменение плотности при поперечной прокатке имеет критическую величину, которая при диаметре образца 20 мм лежит в пределах  $(1-2) \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>. Это соответствует поре объемом  $(1-2) \cdot 10^{-2}$  см<sup>3</sup> с размером 0,1×0,1×2 см. Локальное критическое изменение плотности имеет еще большее значение. В описываемых условиях изменение плотности достигает

критической величины при суммарном обжатии образца по диаметру 5,6—15% в зависимости от единичных обжатий.

Если величина плотности меньше критической, то после прекращения процесса прокатки и выдержки образцов на воздухе происходит залечивание образовавшихся дефектов. Если величина изменения плотности превышает критическую, то в центре заготовки образуется полость, которая не исчезает с течением времени. При достаточно большой величине начальной полости под действием остаточных напряжений она продолжает развиваться после прокатки и может «прорасти» до торцевой поверхности, что подтверждают рентгенограммы образцов (рис. 203).

При комнатной температуре скорость залечивания дефектов не зависит от размеров и определяется только тем приростом коли-

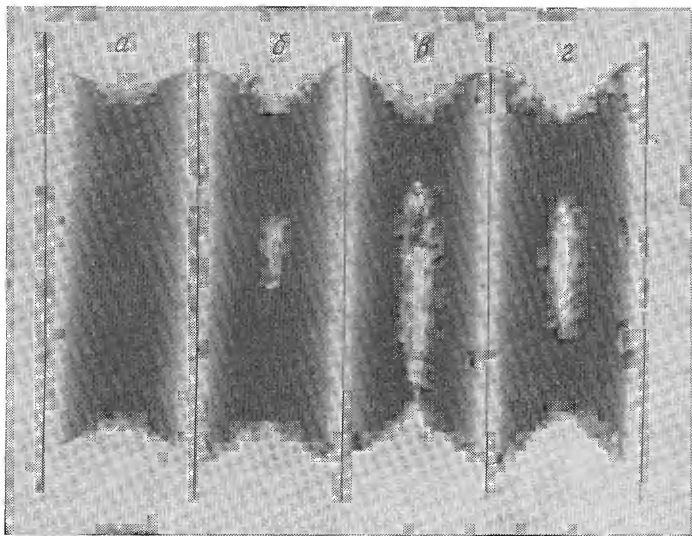


Рис. 203. Рентгенограмма образцов после поперечной прокатки при изменении плотности,  $г/см^2$ :

а —  $10^{-3}$ ; б —  $2,7 \cdot 10^{-3}$ ; в —  $16 \cdot 10^{-3}$ ; г —  $31,7 \cdot 10^{-3}$

чества дефектов, который имел место в процессе пластической деформации.

Согласно предварительным расчетам, дислокационная структура, образующаяся в условиях поперечной прокатки, способствует зарождению пор, но для их эффективного роста необходима небольшая пластическая деформация (1%) в месте зарождения поры, т. е. в центре образца.

Далее была исследована дислокационная структура алюминиевых образцов до и после поперечной прокатки в различных условиях. Для выявления дислокаций был использован метод ямок травления, линий скольжения, оптическая и электронная микро-



скопия. Это исследование позволило построить следующую модель дислокационного механизма при поперечной прокатке.

На рис. 204,а изображено одно из меридиональных сечений заготовки. В процессе деформации металла, в объемах, удаленных от торцов не более чем на расстояние  $1-1,5d$ , эффективные краевые

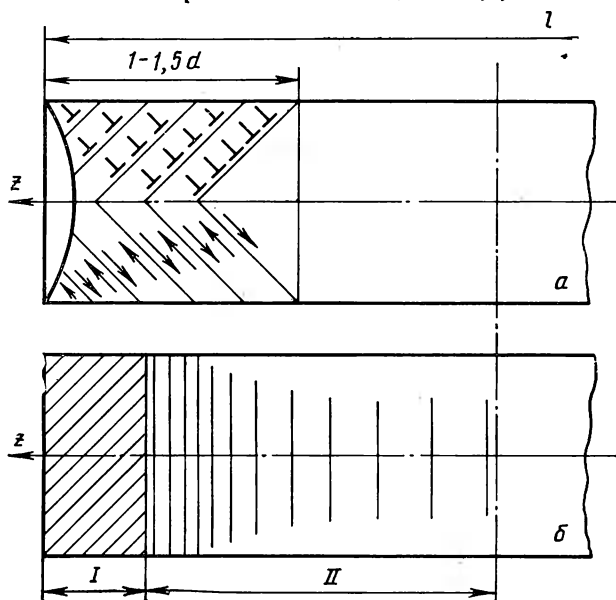


Рис. 204. Схема движения краевых дислокаций в объемах длиной  $1-1,5d$  (а) и полосы скольжения на боковой поверхности (б)

дислокации<sup>1</sup> одного знака движутся по своим линиям скольжения под некоторым углом к торцовой поверхности, а дислокации другого знака — к боковой поверхности заготовки по направлению стрелок. На рис. 205 приведены линии скольжения с дислокациями в продольном сечении образца при большом увеличении. Линии

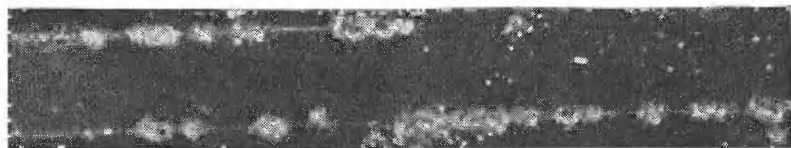


Рис. 205. Линии скольжения в продольном сечении образца при большом увеличении. Видны ямки травления в местах выхода дислокаций (суммарное обжатие  $\epsilon_{\Sigma} = 1,4\%$ , единичные обжатия  $\epsilon = 0,8\%$ )

<sup>1</sup> Под «эффективными» дислокациями понимают прямолинейные дислокации, длина которых сравнима с размерами образца, движущегося вдоль преимущественных направлений движения реальных дислокаций (т. е. вдоль линий течения) и создающих те же действующие напряжения, что и реальные дислокации.

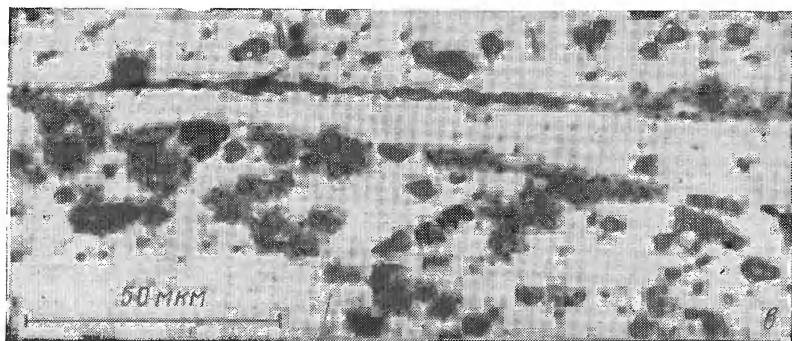
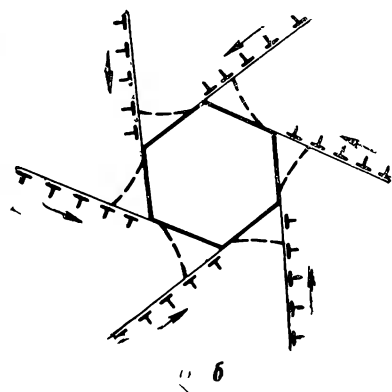
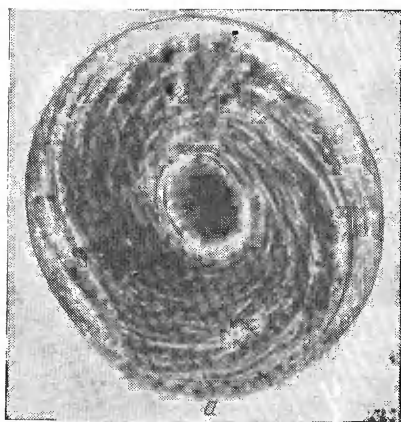


Рис. 206. Линии течения:  
**а** — в поперечном сечении образца ( $\epsilon_{\Sigma} = 9,1\%$ ,  $\epsilon = 0,2\%$ ) — макроскопическая картина;  
**б** — схема движения дислокаций при увеличении диаметра отверстия; **в** — при большем увеличении — видна кольцевая дислокационная структура

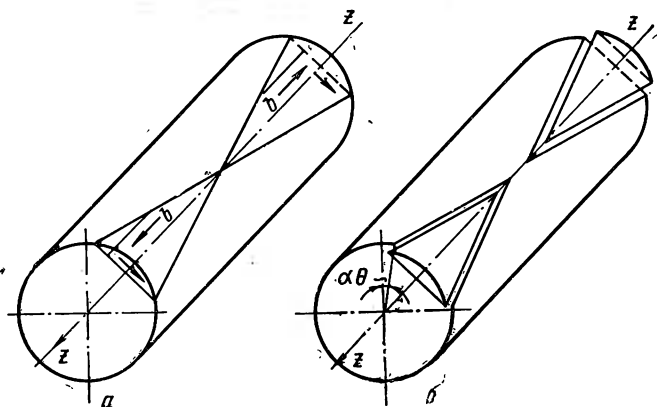


Рис. 207. Схема, поясняющая сдвиги в продольном направлении при повороте заготовки на угол  $d\theta$

скольжения были выявлены методом ямок травления. При полном обороте заготовки возникают конические поверхности скольжения, представляющие собой в микромасштабе совокупность большого числа пересекающихся плоскостей скольжения, образующих конический многогранник. В результате выхода дислокаций на торцовую поверхность она становится вогнутой, а на боковой поверхности образца после электрополировки и травления виден ряд параллельных линий, перпендикулярных продольной оси образца. Эти линии представляют собой ступеньки, образовавшиеся при выходе на боковую поверхность краевых дислокаций при движении по соответствующим коническим поверхностям скольжения (рис. 204, б, участок II).

Этот процесс дополняется движением винтовых дислокаций вдоль оси, которое также приводит к сдвигам в продольном направлении. На рис. 206, а приведены линии течения в поперечном сечении образца, прокатанного при суммарном обжатии  $\epsilon_{\Sigma} = 9,1\%$  и единичном обжатии  $\epsilon = 0,2\%$ , а на рис. 206, б показан участок кольцевой дислокационной структуры, образованной винтовыми дислокациями при большом увеличении.

Из материала гл. I известно, что при наличии винтовой дислокации направление сдвига совпадает с направлением оси дислокации. Поэтому при повороте заготовки в валках из положения *a* в положение *б* (рис. 207) на угол  $d\theta$  происходит сдвиг в продольном направлении, кратный вектору Бюргерса *b*. Величина сдвига максимальна на периферии. Поэтому при полном обороте заготовки на торце образуется чашеобразная вогнутость. Скорость сдвига в продольном направлении суммируется со скоростью вращения заготовки. В результате в непосредственной близости от торцов заготовки следы этих сдвигов должны проявляться на боковой ее поверхности в виде линий скольжения, расположенных под некоторым углом к продольной оси образца, как на участке I рис. 204, б. Существование участков I и II подтверждается опытами, из результатов которых следует, что количество поперечных полос скольжения на боковой поверхности уменьшается с увеличением расстояния от торцов заготовки (рис. 208).

В предыдущем пункте было отмечено, что максимальные скалывающие напряжения и соответствующая им пластическая деформация с ростом обжатия распространяются от периферии к центру заготовки. В соответствии с этим и конические поверхности скольжения с ростом обжатия распространяются от периферии к центру. Когда поверхности замкнутся на оси заготовки, дальнейший выход дислокаций на торцовую поверхность затрудняется. Дислокации затормаживаются, образуется барьер, напоминающий барьер Котрелла (см. рис. 85, в гл. VII), но дислокации расположены не на двух пересекающихся плоскостях, а на конической поверхности (рис. 204, а).

Коническую поверхность, образованную одной линией скольжения (рис. 209, а), можно представить как поверхность, состоящую из *n* дислокационных петель с вектором Бюргерса *b* и пере-



Рис. 208. Линии скольжения на боковой поверхности алюминиевого образца:  
*a* — у торца; ( $\epsilon_{\Sigma} = 1,4\%$ ,  $\epsilon = 0,8\%$ ); *b* — на расстоянии 9 мм от торца ( $\epsilon_{\Sigma} = 7,1\%$ ,  $\epsilon = 0,4\%$ ). Электрополировка в течение 10 мин и последующее травление в 5%-ном водном растворе HF (стрелкой указана ось образца *O-Z*)

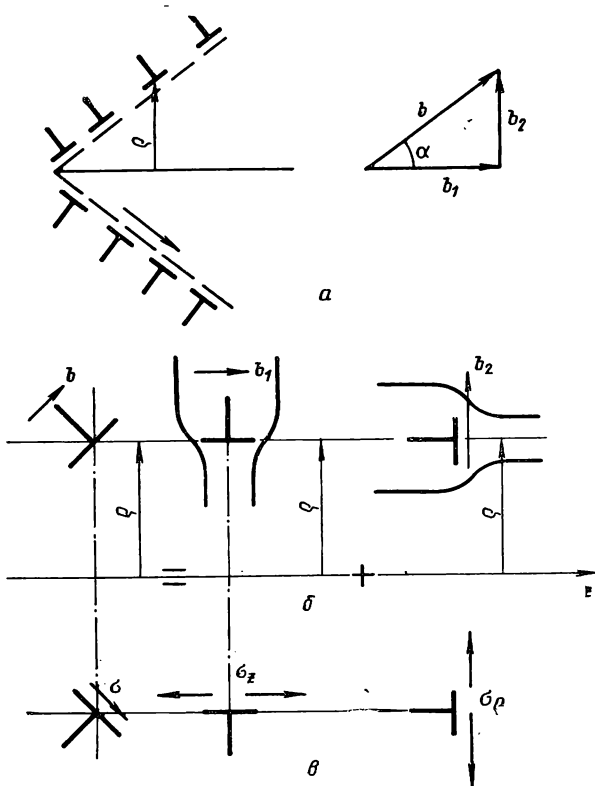


Рис. 209. Коническая поверхность скольжения (*a*) и схемы, поясняющие возникновение осевых и радиальных напряжений (*b*, *в*)

менным радиусом  $\rho$ , вызывающих напряжение  $\sigma$ . Каждую из таких петель можно представить как сумму двух петель с векторами Бюргерса  $b_1$  и  $b_2$  (рис. 209, б). Вектор Бюргерса  $b_1$  направлен вдоль оси  $z$ , а вектор  $b_2$  направлен по радиусу  $\rho$ . Напряжения соответственно равны  $\sigma_z = \frac{Gb_1}{2\pi Kr_1}$   $\sigma_\rho = \frac{Gb_2}{2\pi Kr_2}$

(см. гл. I) и являются растягивающими (рис. 209, в). Судя по расположению линий скольжения на боковой поверхности образца и в меридиональном сечении заготовки, угол  $\alpha$  близок к величине  $\pi/4$ . При достижении некоторой плотности дислокаций внутри конуса (рис. 207, а) у его вершины с наибольшей вероятностью должно произойти разрушение и образоваться пора.

По схеме Котрелла для зарождения трещин при напряжении 250—300  $Mn/m^2$  (25—30  $KГ/мм^2$ ) требуется 20—30 дислокаций. В рассматриваемом случае за счет «жесткой» схемы напряженного состояния это количество будет меньше. Зародившаяся пора служит местом стока дислокаций, т. е. своеобразной торцевой поверхностью для участка образца, расположенного дальше по оси. При раскрытии поры напряжения растяжения исчезают и описанный процесс возобновляется. Так появляется ряд периодически повторяющихся пор. Образовавшиеся поры растут за счет дальнейшей пластической деформации и объединяются, образуя полость вдоль оси заготовки.

Согласно формуле (561), величина  $\left(\frac{\rho}{r}\right)^a e^{\mu\theta}$  представляет собой напряжения от действия внешних сил, если единичные обжатия достаточно малы. Воспользуемся этим выражением для того, чтобы найти границу зоны затрудненной деформации. В гл. XII отмечалось, что в зоне затрудненной деформации сжимающие нормальные напряжения численно равны между собой, а максимальные касательные напряжения, в соответствии с формулой (44), имеют минимально возможную для осуществления пластической деформации величину, которая равна  $\tau = \tau_r\theta$ . Границу зоны затрудненной деформации найдем из условия:

$$\frac{\sigma_\rho}{K} = \frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{\sigma_z}{K} = -1.$$

Принимая во внимание это условие из уравнения (561) получим:

$$\frac{\rho}{r} = e^{-\frac{\mu\theta}{a}} = e^{\frac{-\mu\theta}{\sqrt{1+\mu^2}-1}} \approx e^{-2\frac{\theta}{\mu}}. \quad (575)$$

С использованием уравнения (575) на рис. 210 построены кривые, ограничивающие зоны затрудненной деформации для одного из случаев поперечной прокатки. Клинообразные объемы зон, деформация которых затруднена всесторонними сжимающими нормальными напряжениями, внедряются в податливую, более пластичную массу остальной части заготовки. При этом ввиду сосре-

доточенного характера напрузок наиболее интенсивно деформируются объемы, расположенные между зонами затрудненной деформации и линиями скольжения 1, 2 и 3, 4. По мере удаления от них интенсивность деформации уменьшается, так как напрузка распределяется на все большую площадь.

Эта модель деформации хорошо подтверждается опытами и косвенно полученным из расчета полем линий скольжения для поперечнойковки [3].

Рассмотрим теперь деформацию и напряженное состояние в средней части по длине заготовки, удаленной от торцов на расстояние  $1-1,5d$ . Выделим линии скольжения 1, 2, ограничивающие область наиболее интенсивного течения около зоны затрудненной деформации (рис. 211,а).

Рассмотрим взаимодействие двух дислокаций движущихся по направлению этих линий. Пусть вектор Бюргерса каждой из них равен  $b$ .

Линии скольжения пересекаются под углом  $\pi/2$ , и дислокацию с вектором Бюргерса  $b$  можно представить в виде двух дислока-

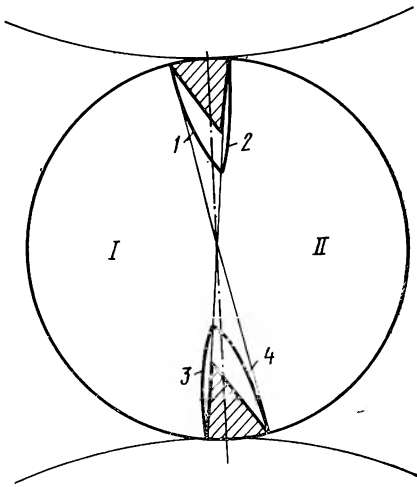


Рис. 210. Зоны затрудненной деформации при поперечной прокатке ( $\mu = 0,5$ ,  $\epsilon = 0,25\%$ )

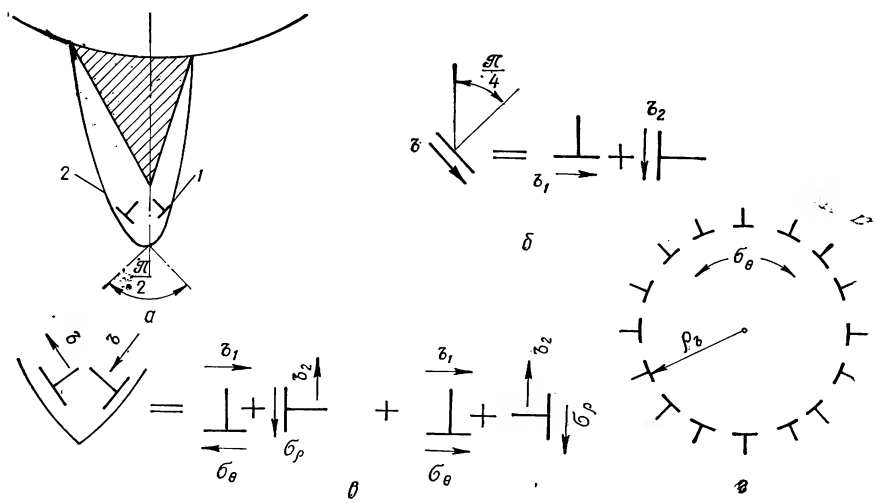


Рис. 211. Схемы, поясняющие возникновение растягивающих напряжений  $\sigma_\theta$

ций с векторами Бюргерса  $b_1 = b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} b$  (рис. 211,б). Суммарное действие дислокаций  $b_1$  и  $b_2$  будет аналогично действию одной дислокации с вектором Бюргерса  $b$ . Тогда две дислокации в месте пересечения линий скольжения можно представить как совокупность четырех дислокаций с векторами Бюргерса  $b_1$  и  $b_2$  (рис. 209,в). В процессе прокатки при повороте на угол  $d\theta$  будут появляться по две дислокации на концах каждых двух линий скольжения с вектором Бюргерса  $b_1$  и  $b_2$ . Всякий раз при повороте на угол  $d\theta$  дислокации с вектором Бюргерса  $b_2$  аннигилируют или образуют дислокационный диполь с быстро губящимся (на расстояниях порядка атомных) полем напряжений, а дислокации с вектором  $b_1$  при полном обороте заготовки образуют цилиндрическую поверхность с радиусом  $r_b$ . Иными словами, мы получим круг из дислокаций с вектором Бюргерса  $b_1$  и радиусом  $r_b$  (рис. 211,г), содержащим поле растягивающих напряжений, имеющее большую протяженность. Назовем его эффективным кругом дислокаций. Внутри этого круга возникает растягивающее напряжение  $\sigma_\theta$ .

Таким образом, несмотря на наличие внешних сжимающих сил, приложенных от валков, напряжения в сечении образца под дислокацией будут растягивающими, а над дислокацией — сжимающими. Этот факт многими исследователями не учитывается. Одни считают, что если по какому-то направлению действуют сжимающие внешние нагрузки, то по всему сечению образца в данном направлении будут действовать напряжения сжатия, что не соответствует действительности. Другие допускают существование дополнительных напряжений растяжения в центре образца, вызванных неравномерностью деформации, но при суммировании дополнительных напряжений и напряжений от действия внешних сил получают напряжения сжатия вдоль линии действия нагрузки от валков и напряжения растяжения вдоль двух других осей [2].

В первый момент такое положение будет правильным, т. е. по существу рассматривается случай сжатия цилиндра сосредоточенными силами (см. пункт 2). Но уже после одного оборота заготовки необходимо учитывать дополнительные напряжения в центре, возникшие от всех дислокаций «эффективного» круга. При этом в результате небольшого числа единичных обжатий суммарные напряжения в центре заготовки окажутся растягивающими даже по направлению линии действия внешних сил.

При увеличении степени единичных обжатий пластическая деформация проникает до центра, линии скольжения от противоположных точек боковой поверхности пересекаются. При этом в центре заготовки исчезают ориентированные напряжения, а остаются только переменные микронапряжения от дислокаций разных знаков. В этом случае дислокации противоположного знака, движутся к центру по линиям скольжения 1, 2 и 3, 4 (см. рис. 210). В центре заготовки они аннигилируют, образуя по мере

ее вращения все новые атомные плоскости, по которым под действием максимальных искаляющих напряжений осуществляется скольжение остальных дислокаций, т. е. идет уже процесс, подобный обычной осадке.

## 5. Влияние важнейших факторов на деформацию и разрушение

На рис. 212 приведены кривые, характеризующие зависимость вытяжки заготовки по контуру и оси в зависимости от отношения длины к диаметру при постоянных обжатиях, построенные с использованием опытных данных. Из рисунка следует, что при отношениях  $l_0/d_0 < 3$  по оси вращения наблюдается утяжка, а при отношениях  $l/d > 3$  — удлинение. При отношении  $l_0/d_0 = 3$  длина заготовки остается неизменной при любом обжатии до тех пор,

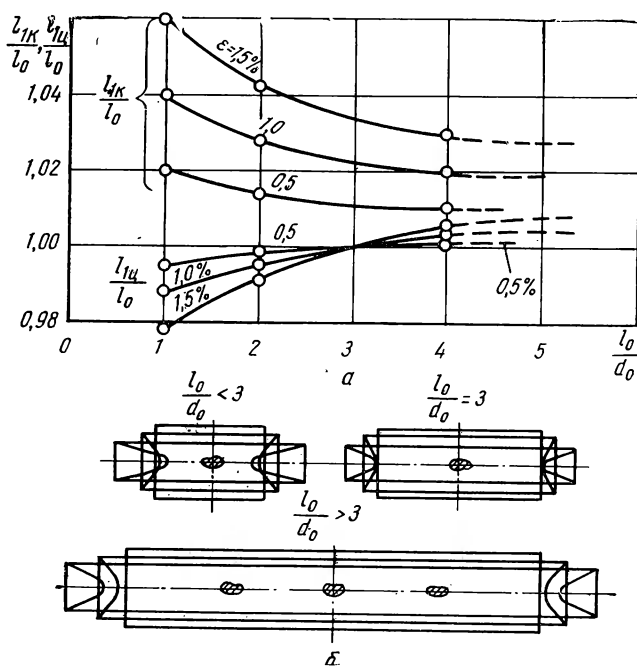


Рис. 212. Зависимость вытяжки по контуру и по оси заготовки от отношения ее длины к диаметру:

а — данные опытов; б — поясняющая схема

пока на ее оси не вскрыется полость. Описанное явление характеризуется схемой, изображенной на рис. 212, б. Эти опыты показывают, что при отношении  $l_0/d_0 = 3$  деформация на оси заготовки становится плоской. Из результатов опытов также следует, что приращение длины по оси заготовки при отношении  $l_0/d_0 > 3$  яв-



ляется результатом образования пустот на ее оси и растяжения заготовки по оси  $z$  под действием напряжений  $\sigma_z$ .

Явление утяжки есть результат совместного воздействия сосредоточенных нагрузок и сил контактного трения на заготовку, объем которой в процессе деформации не изменяется. Расположенная у торцов периферийная часть заготовки в зоне под валами, не встречая значительных сопротивлений трения, имеет возможность столь интенсивного удлинения, что должна пополняться металлом из осевой части.

Механизм этого сложного явления заключается в том, что дислокации одного знака движутся к боковой поверхности, образуя на ней ступеньки и приводя к удлинению этой поверхности. Дислокации другого знака движутся к торцовым поверхностям заготовки, образуя на ней ступеньки «отрицательного знака», что приводит к утяжке осевой зоны. Б. В. Садовников<sup>1</sup> наблюдал увеличение утяжки алюминиевых образцов в течение 2—3 дней после прокатки: здесь проявляют себя ориентированные остаточные напряжения первого рода, вызываемые группами дислокаций одного знака.

При поперечной прокатке за счет развития упругой и пластической деформации в осевой части заготовки происходит разрушение. Поэтому следует ожидать закономерного изменения величин, характеризующих ее геометрические размеры в направлении оси, при обжатии по диаметру во время прокатки. Образование полости должно внести изменение в эти закономерности в связи с переходом от пластической деформации к разрушению в осевой

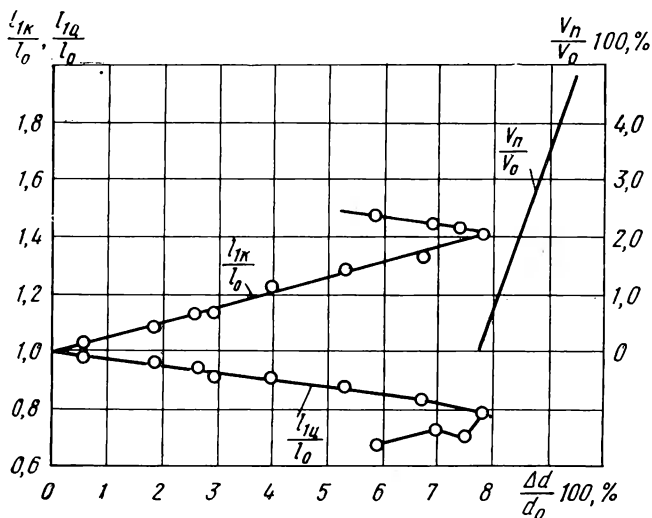


Рис. 213. Зависимость вытяжки, заготовки по контуру и оси и изменения объема полости от обжатия. Сталь с 0,16% С при 1060°С

<sup>1</sup> См. сноску на стр. 461.

части заготовки. Это положение хорошо иллюстрируется опытными данными, полученными при прокатке стальных цилиндров при температуре 1060°C. Прокатку производили на стане с диаметром валков 400 мм (рис. 213).

При обжатии, равном 7,75%, наблюдается резкий перегиб кривых, характеризующих зависимость вытяжки заготовки от степени обжатия по контуру и по оси. На графике нанесена кривая, характеризующая изменение удельной величины полости  $V_{II}/V_0 \cdot 100\%$  в зависимости от степени обжатия, которая показывает, что при обжатии на 7,75% в осевой зоне заготовки происходит разрушение.

С ростом образовавшейся полости происходит резкое изменение направления кривых, характеризующих вытяжку заготовки по контуру и по оси. Следовательно, наблюдение за изменением размеров заготовки при прокатке дает возможность определить критическое обжатие, т. е. обжатие, при котором начинается разрушение сердцевины в различных условиях прокатки.

Например, на рис. 214 приведена зависимость критического обжатия при прокатке заготовок из свинца и стали от отношения длины заготовки к диаметру.

Эта зависимость построена по экспериментальным данным. Из рассмотрения графика следует, что с увеличением длины заготовки критическое обжатие уменьшается. При этом начиная с отношения длины к диаметру заготовки, равного двум, критическое обжатие мало меняется при дальнейшем возрастании длины заготовки.

Опыты показывают, что в соответствии с критическим обжатием изменяется и характер разрушения. У коротких ( $b_0/d_0 < 3$ ) свинцовых и стальных заготовок разрушение начинается прежде всего в середине и постепенно распространяется к торцам. Это объясняется тем, что в средней части заготовки по ее длине растягивающие напряжения в осевой зоне имеют наибольшую величину, а их разность — наименьшую, и напряжения в этой области достигают значения сопротивления открыту.

Отмеченное обстоятельство является результатом того, что в средней части по длине заготовки раскатка в тангенциальном направлении и степень неравномерности деформации по сечению значительно больше, чем у ее торцов.

Это обусловлено формулой контактных поверхностей и силами трения. Поверхности контакта вытянуты вдоль оси заготовки, и от силы трения, действующие по длине поверхностей контакта, больше, чем силы трения, действующие в поперечном направлении. В соответствии с этим действие подпиратьющих осевых сил проявится больше в средней части по длине заготовки, чем у ее торцов.

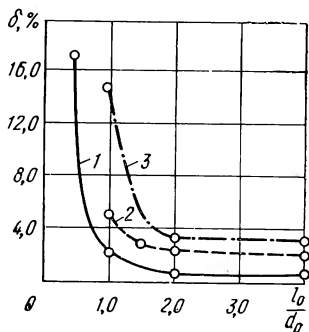


Рис. 214. Зависимость критического обжатия от отношения длины заготовки к диаметру

Далее, опыты показывают, что в свинцовых и стальных заготовках, у которых длина в три и более раза превышает диаметр, разрушение происходит в виде отдельных «раковин», как это схематически показано на рис. 212.

Изучение большого количества стальных и свинцовых заготовок, разрезанных по меридиональному сечению после прокатки, показывает, что в длинных образцах раковины вскрываются на расстояниях, численно равных 1—1,5 диаметра от торцов заготовки и друг от друга, а в коротких — в середине заготовки. Отсюда следует, что в длинных заготовках на расстояниях, равных 1—1,5 диаметрам от торцов, разность нормальных напряжений становится небольшой, а сама величина напряжений, начиная с этой границы в средней части заготовок, мало изменяется по длине. В полном соответствии с этим находится зависимость критического обжатия от длины заготовки (рис. 214). Когда отношение  $l_0/d_0 < 2$ , имеет место значительная разность напряжений по длине заготовки, которая постепенно уменьшается с ростом степени обжатия. В этом случае требуется сравнительно большая осадка по диаметру, чтобы осуществиться разрушение в осевой зоне заготовки. Например, для свинцового образца с отношением  $l_0/d_0 = 0,5$  критическое обжатие равно 17%. С увеличением длины критическое обжатие уменьшается и у свинцового образца с отношением  $l_0/d_0 = 2,0$  равно примерно 0,5%.

Если отношение  $l_0/d_0 > 2$ , длина практически не влияет на величину критического обжатия. Следовательно, схематически процесс разрушения можно описать следующим образом.

Когда действующие напряжения где-либо в средней части заготовки достигают значения, равного сопротивлению отрыву, в этом месте образуется раковина. Эта раковина играет роль границы для других частей заготовки и на расстоянии 1—1,5 диаметра от нее снова происходит разрушение.

Этот процесс идет дальше, пока не образуется ряд раковин, расположенных на расстоянии 1—1,5 диаметра заготовки друг от друга. Раковины растут вдоль оси заготовки и объединяются, образуя общую полость. У торцов разность напряжений наиболее значительна и разрушение происходит позднее. Касательные напряжения в этом месте вызывают значительную пластическую деформацию. В осевой зоне деформация заканчивается вязким разрушением, причем процесс разрушения ускоряется распространяющимися из средней части заготовки трещинами. Из опытных данных следует, что, несмотря на возможные отступления, описанная закономерность в разрушении осевой зоны выражена достаточно четко.

Как следует из рис. 214, критическое обжатие при прокатке коротких свинцовых заготовок более чем в 30 раз превышает критическое обжатие при прокатке длинных. Результаты специально поставленных опытов показывают, что при прокатке очень коротких заготовок критические обжатия всегда имеют значительную величину, а разрушение при этом носит вязкий характер.

Изложенная в пункте 4 дислокационная модель разрушения относилась к процессу поперечной прокатки достаточно длинных заготовок ( $l/d > 2 \div 3$ ). На основании опытных данных можно высказать следующее утверждение: при переходе от прокатки длинных заготовок к прокатке более коротких в центре сечения будет иметь место постепенный переход от схемы трехосного растяжения, вызванного дислокационными полями напряжений, к схеме двухосного растяжения. Это вызвано уменьшением радиуса эффективного круга (т. е. уменьшением величин напряжений  $\sigma_\theta$ ) от величины  $\rho_v$  на границах средней и крайних частей заготовки (т. е. на расстоянии 1,0—1,5  $d$  от торцов) до нуля на этих торцах.

Вместе с тем при прокатке коротких заготовок в центре сечения будут уменьшаться растягивающие напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_z$ , поскольку при этом у торцовых срезов не могут развиваться значительные по величине напряжения от дислокаций из-за малой длины заготовки.

Иными словами, при уменьшении длины заготовки напряжения от дислокаций начинают уменьшаться быстрее, чем по закону  $1/r$ , где  $r$  — расстояние от оси дислокации. Поэтому в коротких заготовках дальнедействующие поля ориентированных напряжений от дислокационного круга радиусом  $\rho_v$  исчезают.

Из рис. 215 следует, что склонность к разрушению при прокатке в трехвалковом стане сильно уменьшается по сравнению со случаем прокатки в двухвалковом стане. Объясняется это тем, что при увеличении числа валков напряженное состояние в пределе переходит к равномерно распределенному по боковой поверхнос-

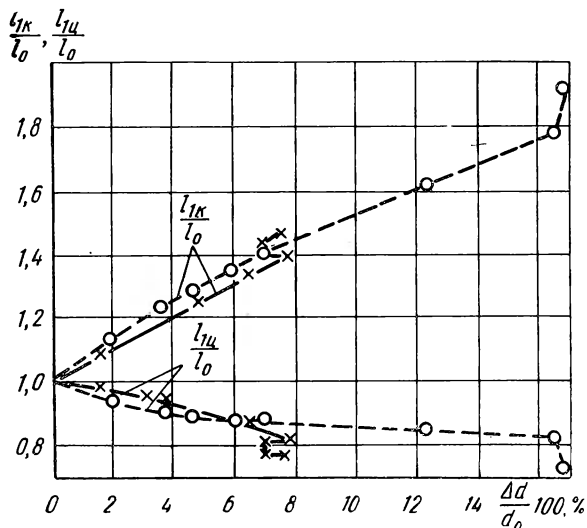


Рис. 215. Зависимость вытяжки заготовки по контуру и оси от обжатия при прокатке на двухвалковом (сплошные линии) и трехвалковом (пунктирные линии) станах для стали с 0,16% С при 1000°C ( $d_0 = 37,5$  мм,  $l_0 = 26$  мм)

ти давлению. Это уменьшает растягивающие напряжения в радиальном и тангенциальном направлениях, за счет чего деформация осуществляется без разрушения. Поэтому были предприняты попытки применения трехвалковых станков для прошивки труднодеформируемых сплавов, склонных к разрушению даже при наличии небольших растягивающих напряжений [4].

Результаты приведенных опытов показывают, что при поперечной прокатке опасность разрушения в осевой зоне уменьшается, если затрудняется тангенциальная раскатка и облегчается истечение металла в осевом направлении. Этого можно добиться применением соответствующей калибровки валков, а также натяжением, создаваемым внешней растягивающей силой, приложенной вдоль оси заготовки. При этом радиус «эффективного» круга дислокаций уменьшается до нуля и происходит деформация без разрушения.

Влияние различных факторов на критическое обжатие в процессах ковки круглых тел, поперечной прокатки, поперечно-винтовой прокатки и прошивки по данным специальных опытов и заводской прокатки представлено в табл. 5.

Таблица 5

Зависимость критического обжатия от основных факторов процесса обработки

Фактор (предполагается, что в процессе изменения возрастает)	Ковка круглых тел	Поперечная прокатка		Поперечно-винтовая прокатка		В трехвалковых станках
		на гладкой бочке	на калиброванных валках	в конических валках	в валках с винтовыми калибрами	
Единичное обжатие	Увеличивается	Увеличивается	Увеличивается	Увеличивается	Увеличивается	Увеличивается
Длина очага деформации	Уменьшается	Уменьшается	Уменьшается	Уменьшается	Уменьшается	Уменьшается
Отношение диаметра заготовки к диаметру валков	»	»	»	»	»	»
Число валков, участвующих в деформации <sup>1</sup>	—	Увеличивается	Увеличивается	Увеличивается	Увеличивается	Увеличивается
Температура	Увеличивается	При наличии коротких очагов деформации увеличивается, при наличии длинных очагов деформации уменьшается				
Число подогревов	»	Увеличивается	Увеличивается	Увеличивается	Увеличивается	Увеличивается
Скорость деформации	Уменьшается	Уменьшается	Уменьшается	Уменьшается	Уменьшается	Уменьшается
Натяжение <sup>2</sup>	»	Увеличивается	Увеличивается	Увеличивается	Увеличивается	Увеличивается

<sup>1</sup> Увеличивается при переходе от плоских бойков к вырезным.

<sup>2</sup> При чрезмерном натяжении изменяется характер образующейся полости.

Как следует из таблицы, зависимость между различными факторами и критическим обжатием в различных процессах одинакова. Наблюдаемые отступления объясняются индивидуальными особенностями этих процессов. Поэтому для каждого из них существует свой дислокационный механизм деформации.

## XVII глава

### Косая (винтовая) прокатка

#### 1. Кинематические условия процесса винтовой прокатки

На рис. 216 показана схема расположения валков в станах с бочкообразными, дисковыми и грибовидными валками [1]. Несмотря на существенные отличия в форме инструмента, принцип технологического процесса — поперечно-винтовая прокатка остается неизменным. Одинаковыми являются также и основные геометрические соотношения в очаге деформации. Это обстоятельство позволяет рассмотреть основные закономерности процесса на примере прошивки в станах с бочкообразными валками.

П. К. Тетерин [4] получил следующее приближенное условие захвата в станах винтовой прокатки:

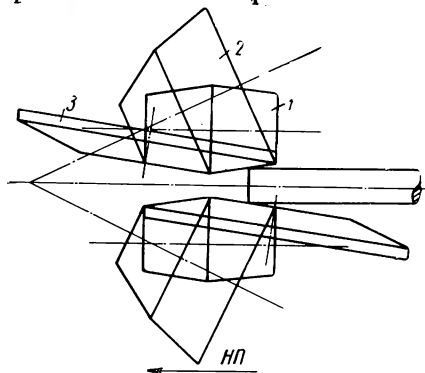


Рис. 216. Схема расположения валков прошивных станов с бочкообразными (1), грибовидными (2) и дисковыми (3) валками

$$\frac{b}{d} \leq \frac{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 \alpha_1} \cos^2 \beta}{1 + \frac{d}{D}}$$

где  $\alpha_1$  — угол наклона образующей конуса валка к его оси на участке захвата, который носит название конуса прошивки;

$\beta$  — угол подачи, т. е. угол наклона оси валка к оси прокатки, совпадающей с осью заготовки, подаваемой в валки.

Это выражение определяет условие свободного вращения заготовки и одновременно удовлетворяет условиям ее осевого вытягивания. Угол подачи невелик, поэтому можно принять  $\cos \beta \approx 1$ . Тогда получим

$$\frac{b}{d} \leq \frac{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 \alpha_1}}{1 + \frac{d}{D}}, \quad (576)$$

При  $\alpha_1=0$  эта формула представляет собой условие (544) осуществимости вращения заготовки в валках в случае поперечной прокатки на гладкой бочке. Из формулы (576) следует, что захват улучшается с ростом коэффициента трения и уменьшением конусности валка. Принимая во внимание, что  $\sin \alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1$ , а  $\mu = \operatorname{tg} \beta_3$  при  $\alpha_1 = \beta_3$ , получаем условие естественного захвата продольной прокатки (см. п. 1 гл. II).

Выражение (576) определяет условие так называемого первичного захвата. В момент, когда носок оправки коснется центральной точки торца заготовки, должно выполняться более жесткое условие вторичного захвата [4].

Как следует из рис. 217, валки прошивного стана расположены по отношению к оси прокатки под углом  $\beta$ , величина которого

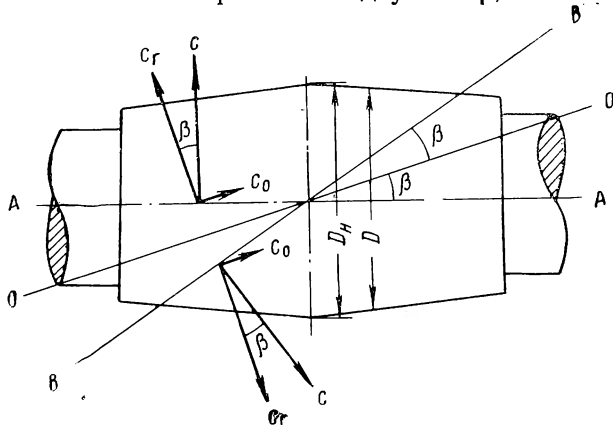


Рис. 217. Схема к определению осевой и тангенциальной скоростей валка

обычно не превышает  $0,1-0,15 \text{ рад}$  ( $6-9^\circ$ ) и лишь в редких случаях достигает  $0,25 \text{ рад}$  ( $15^\circ$ ). Окружная скорость каждой точки на поверхности контакта валков с заготовкой равна

$$c = \frac{\pi D n}{60}.$$

Металл в этой же точке движется со скоростью

$$c_\mu = \eta c, \quad (577)$$

где  $\eta$  — коэффициент скольжения.

При  $\eta > 1$  металл опережает валки, а при  $\eta < 1$  металл отстает от валков. Составляющие скорости валка в направлении, параллельном оси  $OO$  заготовки, и в направлении, перпендикулярном оси, будут (рис. 217):

$$c_0 = c \sin \beta; \quad (578)$$

$$c_r = c \cos \beta. \quad (579)$$

Между заготовкой и валками имеет место некоторое проскальзывание, которое учтем коэффициентами тангенциального  $\eta_T$  и осевого  $\eta_o$  скольжения.

В таком случае скорости поступательного и вращательного движения заготовки будут соответственно равны.

$$c_{o.м} = \eta_o c_o = \eta_o c \sin \beta, \quad (580)$$

$$c_{T.м} = \eta_T c_T = \eta_T c \cos \beta. \quad (581)$$

Коэффициенты скольжения связаны между собой соотношением, вытекающим из формулы (рис. 218):

$$c_{\mu} = \sqrt{c_{o.м}^2 + c_{T.м}^2} \quad (582)$$

и формул (577), (580) и (581):

$$\eta = \sqrt{\eta_o^2 \sin^2 \beta + \eta_T^2 \cos^2 \beta}. \quad (583)$$

При поперечной прокатке  $\beta=0$ , поэтому  $\eta=\eta_T$ ; при продольной прокатке  $\beta=\pi/2$ , и тогда  $\eta=\eta_o$ .

Направление скорости перемещения металла зависит от соотношения коэффициентов осевого и тангенциального скольжения.

Из рис. 218, а также из формул (580), (581) следует, что

$$\operatorname{tg} \beta_{\mu} = \frac{c_{o.м}}{c_{T.м}} = \frac{\eta_o}{\eta_T} \operatorname{tg} \beta.$$

Обычно  $\eta_o < \eta_T$ , поэтому  $\beta_{\mu} < \beta$  (рис. 218, б).

Из формул (577), (582) и (583) следует, что в тех случаях, когда  $\eta > 1$ , абсолютная скорость металла может быть даже больше окружной скорости вала.

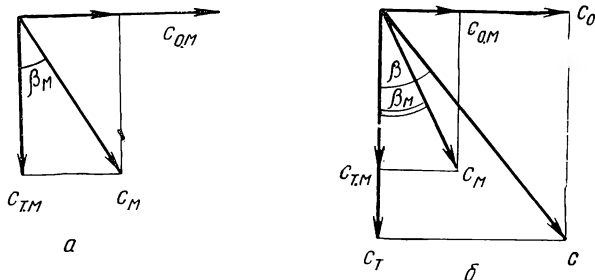


Рис. 218. Соотношение между скоростями в осевом и тангенциальном направлениях:

а — металла; б — металла и валков, если  $\beta > \beta_{\mu}$

В последние годы начинают входить в употребление трехвалковые станы, у которых шейки валков опираются на подшипники, расположенные под углом  $2,04 \text{ рад}$  ( $120^\circ$ ) друг к другу. Опыты показывают, что осевое скольжение в трехвалковом стане



меньше, чем в двухвалковом, на 20—60%, а расход энергии меньше в 1,5—1,8 раза. Это объясняется лучшими условиями захвата, уменьшением сопротивлений трения в тангенциальном направлении ввиду отсутствия линеек.

При достаточно больших обжатиях перед носком оправки прошивка в трехвалковом стане идет с опережением. Например, при обжатии в пережиме 15% и перед носком оправки 11% коэффициент осевого скольжения был равен 1,01—1,07, а примерно при тех же обжатиях в двухвалковом стане 0,9.

Прошивку можно разделить на три стадии: 1) заполнение металлочага деформации, которое продолжается от момента соприкосновения заготовки с валками до начала выхода готовой гильзы; 2) стадия установившегося процесса; 3) освобождение металлом очага деформации.

Многочисленные опыты показывают, что устойчивый процесс прошивки может происходить как при отсутствии, так и при наличии нейтрального сечения, перпендикулярного оси заготовки. Вместе с тем имеется нейтральное сечение, которое делит очаг деформации по его длине на зоны осевого отставания и опережения. Чаще, однако, прошивка происходит лишь при наличии зоны осевого отставания.

При скольжении в тангенциальном направлении могут образовываться одно или два нейтральных сечения и соответственно одна или две зоны опережения при входе и выходе из очага деформации (рис. 219). Чаще, однако, наблюдается одна задняя зона опережения согласно эпюре А. Обычно длина этой зоны равна 0,2—0,4 от длины очага деформации  $l$  в конусе прошивки.

Скольжение в тангенциальном направлении обусловлено двумя причинами. Одной из причин является изменение по длине соотношений между диаметром валков заготовки, которое обусловлено конусностью валков. Вторая причина — пластическая деформация, происходящая за счет тангенциальной раскатки металла. Обычно коэффициент тангенциального скольжения изменяется в довольно узких пределах:  $\eta_T = 0,80 \div 1,05$ .

Осевое скольжение, как и тангенциальное, также является следствием геометрического фактора и пластической деформации.

На основании анализа теоретических и экспериментальных данных, проведенных в книге [5], можно рекомендовать следующие выражения для определения коэффициента осевого скольжения на выходе гильзы из валков:

$$\eta_o = 1 - 0,1 \left( 1 + \frac{d_3}{D_n} \right) \frac{\epsilon_n}{\mu_\beta}, \quad (584)$$

где  $d_3$  — диаметр заготовки;

$D_n$  — диаметр валка в пережиме;

$\epsilon_n$  — суммарное обжатие в пережиме;

$\beta$  — угол подачи;

$\mu$  — коэффициент трения прокатываемой заготовки о валки.

Из условия постоянства секундных объемов имеем

$$c_{o.m} = c_n \frac{F_n}{F} = c_n \frac{1}{\lambda_n},$$

где  $c_{o.m}, F$  — скорость и площадь поперечного сечения в данной точке;

$c_n, F_n$  — скорость и площадь, соответствующая диаметру валков в сечении, проходящем через носок оправки;

$\lambda_n$  — вытяжка, соответствующая этому сечению;

$$c_n = \eta_0 \frac{\pi n}{60} D_n \sin \beta.$$

Если торец конца оправки совпадает с пережимом валков, то  $D_n = D_n$ ; скорость поступательного движения, которую иначе называют скоростью подачи, будет равна

$$c_x = c_{o.m} \eta_0 \frac{\pi n}{60} D_n \sin \beta \frac{F_n}{F}. \quad (585)$$

Шаг подачи  $S$  равен произведению скорости подачи  $C_{o.m}$  на время одного полуоборота заготовки  $\tau = 60/2n_3$ , где  $n_3$  — число оборотов заготовки.

Поэтому

$$S = \frac{c_{o.m}}{n_3} 30. \quad (586)$$

Число оборотов заготовки в минуту можно определить из равенства

$$\eta_T \frac{\pi n}{60} D \cos \beta = \frac{\pi n_3}{60} d,$$

в котором левая часть — выражение составляющей окружной скорости валков, перпендикулярной оси заготовки — формула (578), а правая часть — выражение окружной скорости заготовки.

Отсюда

$$n_3 = \eta_T \frac{D}{d_3} n \cos \beta. \quad (587)$$

Принимая во внимание уравнения (585) и (587), получим из выражения (586):

$$S = 3,14 \frac{\eta_0}{\eta_T} \cdot \frac{D_n}{D} \cdot \frac{F_n}{F} \cdot \frac{d_3}{2} \operatorname{tg} \beta. \quad (588)$$

С кинематикой поперечно-винтовой прокатки тесно связана скорость деформации при прошивке. Согласно п. 5 гл. VII, относительная скорость деформации в любом сечении конуса прошивки выражается следующим образом:  $u_x = \frac{2c_z}{d}$  причем вертикальная составляющая  $c_z$  скорости подачи  $c_x$  равна:  $c_z = c_x \operatorname{tg} \alpha_1$ .

$$\text{Поэтому } u_x = \frac{2c_x \operatorname{tg} \alpha_1}{d}, \quad (589)$$

Определим среднюю скорость деформации в конусе прошивки. По формуле (585) скорости подачи при входе в валки и при выходе из конуса прошивки равны:

$$c_{x3} = \eta_0 \frac{\pi n}{60} D_n \sin \beta \left( \frac{d_n}{d_3} \right)^2; \quad c_{xn} = \eta_0 \frac{\pi n}{60} D_n \sin \beta.$$

Поэтому средняя величина скорости подачи в конусе прошивки определяется как

$$c_{cp} = \frac{1}{2} \eta_0 \frac{\pi n}{60} D_n \sin \beta \left[ 1 + \left( \frac{d_n}{d_3} \right)^2 \right].$$

Средний диаметр заготовки в конусе прошивки равен  $d = \frac{d_3 + d_n}{2}$ .

На основании равенства (589) и последних двух соотношений средняя скорость деформации в конусе прошивки будет выражаться формулой:

$$u = 2 \eta_0 \frac{\pi n}{60} \frac{D_n}{d_3} \sin \beta \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{1 + \left( \frac{d_n}{d_3} \right)^2}{1 + \frac{d_n}{d_3}}.$$

Диаметры заготовки при входе в валки и в конце конуса прошивки мало отличаются. Считая,  $d_3 \approx d_n$ , получим последнюю формулу в таком виде:

$$u_1 = 2 \eta_0 \frac{\pi n}{60} \frac{D_n}{d_3} \sin \beta \operatorname{tg} \alpha_1. \quad (590)$$

Определим среднюю скорость деформации в конусе раскатки. Здесь, аналогично выражению (589), имеем для каждой точки поверхности контакта

$$u_x = \frac{c_x \operatorname{tg} \alpha_2}{t_x}, \quad (591)$$

где  $t_x$  — толщина стенки прошиваемой гильзы.

Согласно формуле (585), скорости подачи при входе в конус раскатки и при выходе из него равны:

$$c_{xn} = \eta_0 \frac{\pi n}{60} D_n \sin \beta; \quad c_{xг} = \eta_0 \frac{\pi n}{60} D_n \sin \beta \frac{F_n}{F_r}.$$

Средняя величина скорости определится как

$$c_{cp} = \frac{1}{2} \eta_0 \frac{\pi n}{60} D_n \sin \beta \left( 1 + \frac{F_n}{F_r} \right).$$

Среднюю толщину стенки гильзы найдем следующим образом:

$$t_{cp} = \frac{\frac{d_n}{2} + t_r}{2} = \frac{d_n}{2} \left( \frac{1 + \frac{2t_r}{d_n}}{2} \right) \approx \frac{d_n}{4} \left( 1 + \frac{2t_r}{d_n} \right),$$

где  $t_r$  — средняя толщина стенки гильзы.

На основании выражения (591) средняя скорость деформации в конусе раскатки будет равна

$$u_2 = 2 \gamma_0 \frac{\pi n}{60} \frac{D_H}{d_3} \sin \beta \operatorname{tg} \alpha_2 \frac{1 + \frac{F_H}{F_r}}{1 + \frac{2 t_r}{d_3}} \quad (592)$$

С использованием выражений (590) и (592) получим выражение средней скорости деформации при прошивке в таком виде:

$$u = \gamma_0 \frac{\pi n}{60} \frac{D_H}{d_3} \sin \beta \left( \operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \frac{1 + \frac{F_H}{F_r}}{1 + \frac{2 t_r}{d_3}} \right) \quad (593)$$

$$\text{или } u = \gamma_0 v_n \frac{\sin \beta}{d_3} \left( \operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \frac{1 + \frac{F_H}{F_r}}{1 + \frac{2 t_r}{d_3}} \right) \quad (594)$$

Определив по формулам (593) и (594) среднюю скорость деформации в очаге деформации, можно найти значения соответствующих скоростных коэффициентов  $n_v$  см. п. 5, гл. VII).

## 2. Площадь поверхности контакта заготовки с валками при прошивке

При прошивке на оправке очаг деформации можно разделить на следующие четыре зоны (рис. 219): I — зона прокатки сплошной заготовки между двумя валками; II — зона раскатки на ци-

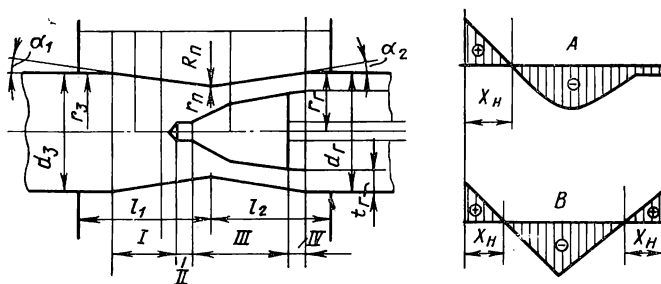


Рис. 219. Схема очага деформации при прошивке и возможные эпюры тангенциального скольжения

линдрической поверхности носка оправки; III — зона раскатки между валками и боковой поверхностью оправки; IV — зона обкатки и округления гильзы. Как видно из рисунка, зоны I, II и часть зоны III до пережима валков образуют входной конус, ина-

че называемый конусом прошивки. Остальная часть зоны III и зоны IV образует выходной конус, иначе называемый конусом раскатки.

Для расчетов процесса косо́й прокатки и, в частности, прошивки необходимо знать размеры очага деформации: его длину, ширину поверхностей контакта заготовки с валками и оправкой, расстояние между осью прошивки и валками.

Общая длина контактной поверхности  $l$  равна сумме длин  $l_1$  во входном конусе (конусе прессовки) и выходном конусе  $l_2$  (конусе раскатки); без учета перекоса валков эти длины равны (см. рис. 219)

$$l_1 = \frac{r_3 - r_{\text{п}}}{\text{tg } \alpha_1}, \quad (595)$$

$$l_2 = \frac{r_1 - r_{\text{п}}}{\text{tg } \alpha_2}, \quad (596)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  — угол входного и выходного конусов и валков;  
 $r_3, r_r, r_{\text{п}}$  — радиусы заготовки и гильзы и половина расстояния между валками в пережиме.

Расчеты показывают, что величины  $l_1$  и  $l_2$ , вычисленные по равенствам (595) и (596), на 9—12% превышают длину входного и выходного конусов, если учесть угол перекоса валков  $\beta$  [5]. Рассмотрим произвольное сечение I—I заготовки в конусе прошивки (рис. 220). За половину оборота в валках заготовка переместится на величину шага подачи  $S$  и займет положение 2—2. При этом произойдет обжатие на величину  $\Delta r = r_1 - r_2 = S \text{ tg } \alpha_1$ .

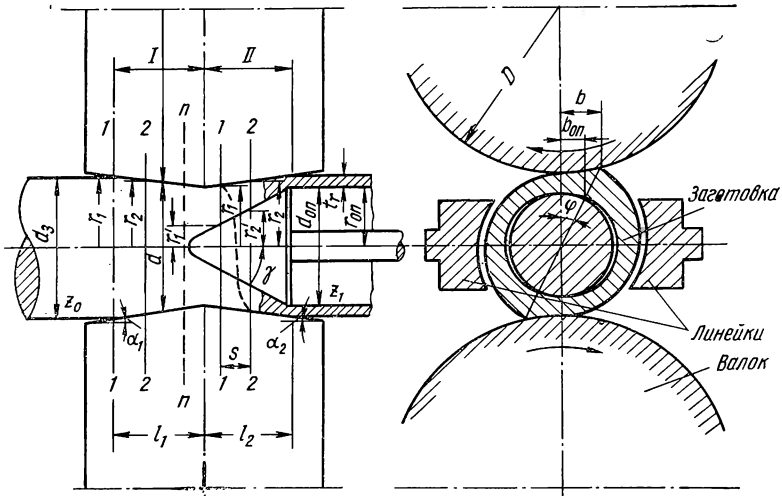


Рис. 220. Очаг деформации при прокатке на прошивном стане

Принимая во внимание выражение (588), получим

$$\Delta r = 3,14 \frac{\eta_0}{\eta_r} \cdot \frac{D_n}{D} \cdot \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{d}{2} \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha_1. \quad (597)$$

Ширина контактной поверхности в сечении 2—2, согласно формулам (541), будет равна

$$b = \sqrt{\frac{d \Delta r}{1 + d/D}}.$$

Расчеты по этой формуле дают заниженные значения, так как при этом не учитывается овализация сечения. Поэтому для расчетов ширины контактной поверхности лучше воспользоваться формулой (542):

$$b = \psi \sqrt{\Delta r d}, \quad (598)$$

в которой, согласно опытным данным<sup>1</sup>, коэффициент овальности можно рассчитать по следующей формуле:

$$\psi = 0,715 \left( \psi_m - 1 \right) \frac{x}{l_1} - \psi_0. \quad (599)$$

В этой формуле  $x$  — текущая координата, т. е. расстояние от нулевого сечения, проведенного через пережим валков, до данного;  $l_1$  — длина конуса прошивки, определяемая по формуле (595);  $\psi_m = 1,11 \div 1,13$ ;  $\psi_0 = 1,08 \div 1,09$

Коэффициент овальности в конусе раскатки можно принимать:

$$\psi = 1,7 \div 2$$

Рассмотрим произвольное сечение 1—1 заготовки в конусе раскатки (рис. 220). За половину оборота заготовки в валках оно переместится на величину шага подачи в положение 2—2. Толщина стенки за счет обжатия валками на оправке уменьшится на величину

$$\Delta r = r_1 - r'_1 - (r_2 - r'_2) \quad \text{или} \quad \Delta = (r'_2 - r'_1) - (r_2 - r_1).$$

Но, как следует из рис. 220:

$$r_2 - r_1 = S \operatorname{tg} \alpha_2; \quad r'_2 - r'_1 = S \operatorname{tg} \varphi.$$

Следовательно:

$$\Delta r = S (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha_2), \quad (600)$$

где  $\varphi$  — угол конуса оправки.

Если теперь воспользоваться равенством (598), то, как и выше, можно определить ширину контактной поверхности в конусе раскатки. Однако этот расчет даст заниженные значения ширины контактной поверхности. Занижение является результатом того, что на большей части конуса раскатки между валком и оправкой прокатке подвергается сравнительно тонкостенное полое тело. Поэтому осуществляется подгиб стенки к валку, обусловленный тангенци-

<sup>1</sup> Казакевич Г. С. — «Обработка металлов давлением». Л., «Машиностроение», 1965. (Труды ЛПИ. Сб. № 243), с. 157—166.

альным подпором, который к тому же на большей части длины конуса раскатки дополняется стесняющим действием линеек. В результате происходит утолщение стенки гильзы (рис. 221), за счет чего возрастает величина обжатия за половину оборота. По данным работы [5], единичное обжатие вследствие утолщения стенки увеличивается примерно в 1,3—1,8 раза. Поэтому для расчета ширины контактной поверхности обжатие, рассчитанное по формуле (600), следует увеличить в 1,5 раза, т. е. принять что  $\Delta r = 1,5 S (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha_2)$ . Тогда с учетом равенства (588) получим

$$\Delta r = 1,5 \pi \frac{\eta_0}{\eta_r} \cdot \frac{D_n}{D} \cdot \frac{1}{\lambda_n} \frac{d}{2} \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha_2). \quad (601)$$

Заметим, что ширина контактной поверхности будет увеличиваться и за счет овализации сечения. Это увеличение можно учесть с помощью коэффициента овальности, определяемого по формуле (599), если в ней величину  $l_1$  заменить величиной  $l_2$  определяемой по формуле (596).

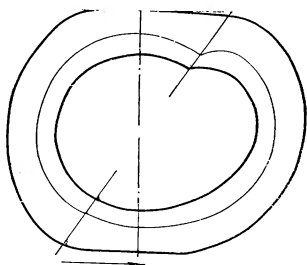


Рис. 221. Поперечный срез гильзы с утолщением стенки на входе в очаг деформации. Стрелкой показано направление вращения заготовки

Ввиду того, что ширина контактной поверхности изменяется по длине очага деформации, его разбивают на  $m$  участков параллельными сечениями, отстоящими друг от друга на расстоянии  $\Delta l$ , и для каждого из них по формулам (599), (597) и (601) определяют величину  $b$ . Общую площадь контактной поверхности подсчитывают по формуле

$$F = \sum_{n=2}^m \frac{b_n + b_{n+1}}{2} \Delta l. \quad (602)$$

### 3. Деформированное и напряженное состояние при прошивке

Средние частные обжатия в конусе прошивки находятся в пределах 0,5—1,2%, а количество циклов в минуту равно от 5 до 20 [6]. По другим данным (Московского института стали и сплавов), средние частные обжатия в конусе прошивки находятся в пределах 0,5—5%, нижний предел относится к обычно применяемым усилиям подачи 0,14—0,17 рад (8—10 град.), а верхний — к 0,44—0,5 рад (25—30 град.).

В связи с малыми величинами обжатий и углов перекося валков напряженное состояние в конусе прошивки определяет процесс поперечной прокатки. При одинаковом диаметре валков давление линеек на заготовку незначительно. Поэтому воздействием на заготовку направляющих линеек в конусе прошивки пренебрегают.

Рассмотрим сечение 1—1 в конусе прошивки (см. рис. 220). Допустим, что заготовка совершила бесконечно малый поворот. Тогда в зонах, подвергающихся непосредственному воздействию валков, возникают радиальные напряжения сжатия, которые име-

ют максимальную величину, соответствующую давлению, на поверхностях контакта.

При переходе от поверхности контакта к центру сечения радиальные сжимающие напряжения уменьшаются, так как они распределены по большей площади. В частях заготовки, не подвергающихся непосредственному воздействию валков, под действием внешних сил возникают радиальные напряжения, величина и знак которых изменяются в зависимости от положения рассматриваемого меридиального сечения. Таким образом, напряжения сжатия имеют максимальную величину у поверхности контакта.

Когда заготовка последовательно совершает один, два и более оборотов в валках, сечение  $1-1$  перемещается в положение  $2-2$  и т. д. причем между коническими поверхностями валков осуществляется обжатие заготовки по диаметру. Ввиду малой ширины контактной поверхности нагрузки, приложенные со стороны валков к заготовке, носят сосредоточенный характер. Поэтому периферийные слои заготовки обжимаются по толщине в большей степени, чем центральные и стремятся оторваться от центральной зоны. В силу условия сплошности такого отслаивания произойти не может.

Поэтому в заготовке возникают взаимно уравновешивающиеся радиальные напряжения, которые, таким образом, являются результатом неравномерной деформации по сечению.

В процессе обжатия вращающейся заготовки радиальные растягивающие напряжения, возникающие в зонах, не подвергающихся непосредственному воздействию валков некоторого сечения  $nn$ , не успевают релаксировать при кратковременном пребывании в зонах под валками.

Напряжения, определяющие процесс деформации, являются суммой напряжений от действия внешних сил и напряжений от неравномерности деформации и для поперечного сечения  $nn$  изображаются эпюрами на рис. 189. Используя результаты, приведенные в гл. XVI, получим для сечения  $nn$  эпюры тангенциальных и осевых напряжений, изображенные на рисунке (187).

Опыты показывают, что в зоне прошивки направляющие линейки или ролики оказывают незначительные воздействия на заготовку.

Таким образом, характер напряженного состояния в зоне прошивки принципиально не будет отличаться от характера распределения напряжений при поперечной прокатке.

Оправка, применяемая при прошивке, оказывает весьма сложное влияние на склонность металла к разрушению. Носок оправки давит на металл, уменьшает неравномерность деформации по объему заготовки, уменьшает величину растягивающих напряжений в осевой зоне и увеличивает их разность. Боковая поверхность оправки за счет действия сил трения на поверхностях контакта с металлом препятствует течению металла в осевом направлении на периферии, увеличивает неравномерность деформации по объему заготовки и, следовательно, увеличивает растягивающие напряжения



и их разность в осевой зоне. Таким образом, должна существовать оптимальная форма оправки, при которой склонность к разрушению минимальна. Это подтверждается опытами [1], согласно которым оправка и оптимальное отношение длины оправки к ее диаметру лежат в пределах 1,5—2.

Внешние, непрерывно изменяющиеся по длине концы  $z_0$  и  $z_1$  заготовки-гильзы (рис. 220) уменьшают степень неравномерности деформации по ее сечению. Поэтому при наличии необрабатываемых валками концов величина растягивающих напряжений в осевой зоне меньше, а разность их больше по сравнению с тем случаем, когда концы  $z_0$  и  $z_1$  отсутствуют. В соответствии с этим вскрытие полости в первом случае будет происходить при больших обжатиях, чем во втором.

Влияние концов заготовки хорошо иллюстрируется при прокатке заготовки из стали 1X18H10T в гильзу (рис. 222) [6]. На внутренней поверхности гильзы имеются короткие участки с трещинами, расположенными недалеко от переднего и заднего концов гильзы. Такое расположение трещин можно объяснить следующим образом. Когда прошивка только начинается, длина очага деформации по сравнению с диаметром еще мала и в осевой зоне существует значительная разность напряжений, а величина растягивающих напряжений мала. По мере заполнения конуса прошивки формируется «эффективный» круг дислокаций (см. гл. XVI), в результате чего повышается величина растягивающих напряжений в центре заготовки, под действием которых происходит образование макропор, слияние их в крупные поры и трещины. После заполнения конуса прошивки начинается установившийся процесс при наличии внешних необрабатываемых валками концов заготовки. Эти концы уменьшают степень неравномерности и деформации по сечению. Поэтому радиус эффективного круга дислокаций и величина растягивающих напряжений в нем уменьшаются и прошивка происходит без нарушения сплошности. В заключительный неустановившийся период прокатки задний необрабатываемый валками конец заготовки исчезает, очаг деформации снова уменьшается и изменение характера напряженного состояния происходит в обратном порядке, вызывая тот же конечный эффект: внутренние разрушения на некотором участке по длине гильзы недалеко от ее заднего конца.

На рис. 222 видно также продольное расслоение в стенке, которое представляет собой кольцевую трещину в плоскости, перпендикулярной поперечному сечению гильзы. О причинах кольцевого разрушения, к которому как раз особенно склонны специальные стали, было сказано в гл. XVI. Наличие разрушения в непосредственной близости к участкам, параллельным общим трещинам, вполне согласуется с приведенным объяснением.

Процесс, происходящий в зоне раскатки, можно рассматривать в плоскости, перпендикулярной оси заготовки, как своеобразную прокатку бесконечной кольцевой полосы между тремя валками, где роль одного из валков выполняет оправка.

В зоне раскатки на процесс деформации существенное влияние оказывают направляющие линейки, которые в значительной мере определяют соотношение между объемами металла, смещаемыми в осевом и тангенциальном направлениях при раскатке образующейся гильзы между валками на оправке. Действительно, согласно опытным данным (см., например, [5]), давление металла на линейку в конусе раскатки обычно лежит в пределах от 0,3 до 0,4 давления на валки.

Таким образом, в зоне раскатки процесс определяется явлениями, подобными продольной прокатке.

Итак, перекося валков и связанное с ним осевое перемещение вносят элементы продольной прокатки в зону прошивки и элементы поперечной прокатки в зону раскатки.

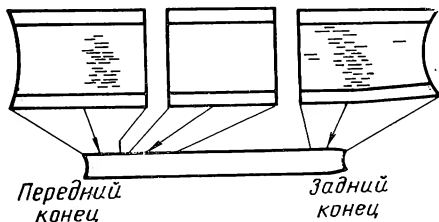


Рис. 222. Образование осевого и кольцевого разрушений при переходе от неустановившегося к установившемуся процессу

При прошивке следует различать процесс разрушения перед носком оправки и процесс образования центрального отверстия, формируемого оправкой, который представляет собой процесс пластической деформации, а не разрушения.

При осуществлении нормального процесса прошивки для обеспечения продукции высокого качества (отсутствие плен на внутренней поверхности труб) процесс ведут так, чтобы разрушение перед носком оправки отсутствовало и происходил лишь один процесс пластического течения металла вокруг оправки. Опасным в этом случае является не всякое разрушение перед носком оправки, а лавинообразное, связанное с пластическим ростом центральной поры. Начальный же этап разрушения ( $\Delta\rho \leq 10^{-3} \text{ г/см}^3$ ) дает микропоры, которые, как было показано в п. 4 гл. XVI, могут залечиваться или под влиянием температуры (выдержка на воздухе), или при сжатии в процессе раскатки между оправкой и валками. Поэтому, по видимому, мелкие поры ( $\Delta\rho \leq 10^{-3} \text{ г/см}^3$ ) не опасны, так как они будут «залечиваться» на оправке.

По опытным данным, критическое обжатие при прокатке без оправки несколько меньше, чем критическое обжатие при прошивке заготовок на оправке, что находится в полном соответствии с изложенной выше теорией. С изменением коэффициента вытяжки оно изменяется незначительно. Это позволяет результаты опытов кривой прокатки без оправки использовать для анализа процесса прошивки.

Зависимость критического обжатия при кривой прокатке от факторов прокатки аналогична той, которая наблюдается при поперечной прокатке (см. табл. 4).

Из изложенного выше становится очевидным, что дислокационные механизмы деформации в конусе прошивки при кривой прокат-

ке и в очаге деформации при поперечной прокатке аналогичны (п. 4 гл. XVI). Дислокационный механизм деформации при раскате на оправке стана косой прокатки аналогичен дислокационному механизму в очаге деформации при продольной прокатке (п. 6 гл. XII).

#### 4. Давление на валки прошивного стана

На рис. 223 приведены эпюры нормальных напряжений на поверхностях контакта валков с прокатываемым металлом<sup>1</sup>. Из рассмотрения эпюр следует, что при поперечной винтовой прокатке распределение контактных напряжений характеризуется куполообразными кривыми с максимумом около входа металла в валки. Это позволяет высказать утверждение, что на поверхности контакта, по крайней мере в зоне прошивки, имеет место только зона отстаивания. Опыты показали, что с увеличением относительного обжатия и отношения  $b/D$  нормальное контактное напряжение уменьшается.

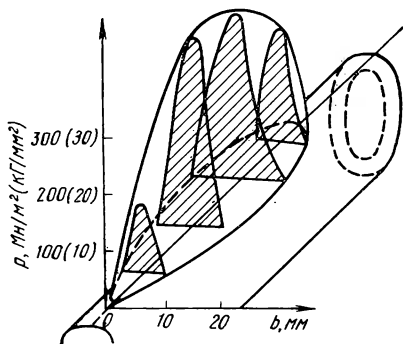


Рис. 223. Эпюра нормальных контактных напряжений при прошивке

Из рис. 224, а следует что в условиях опыта, результаты которого приведены, величина мак-

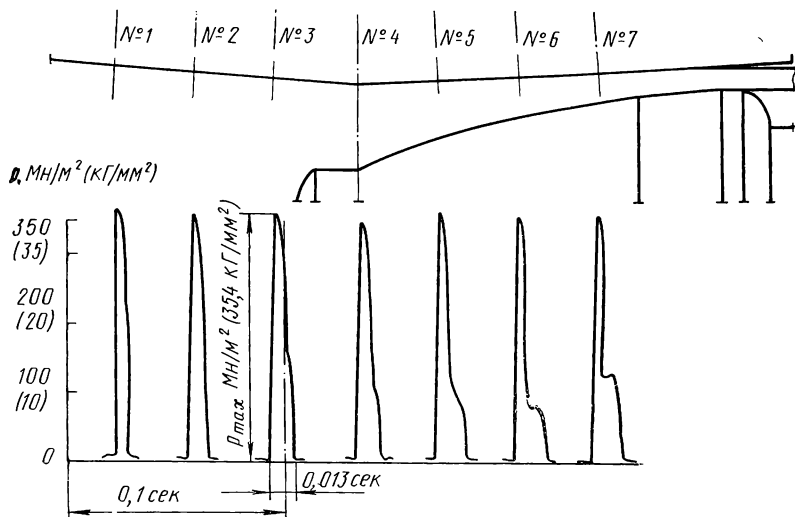


Рис. 224. Распределение контактных напряжений в очаге деформации при прошивке

<sup>1</sup> Осадчий В. Я — «Процессы прокатки». М., Metallurgizdat, 1962. (МИСиС. Сб. № 40), с. 338—342.

симальных контактных напряжений по длине очага деформации остается постоянной. В условиях другого опыта (рис. 224) контактные напряжения уменьшаются от пережима к выходу из валков. В зоне прошивки влияние неконтактных зон примерно соответствует влиянию сил трения и геометрического фактора, определяемого отношением ширины площади контакта к толщине стенки гильзы.

Наличие перегибов, горизонтальных площадок и вторых максимумов на эпюрах в конусе раскатки (рис. 224) является результатом возникающих при прокатке гильз утолщений стенки (рис. 221).

На рис. 225, а приведена зависимость средних контактных напряжений от окружной скорости валков [5]. Обращают на себя внимание высокие значения контактных напряжений, доходящие почти до  $250 \text{ Мн/м}^2$  ( $20 \text{ кг/мм}^2$ ) при температуре прокатки,  $1200^\circ\text{C}$ .

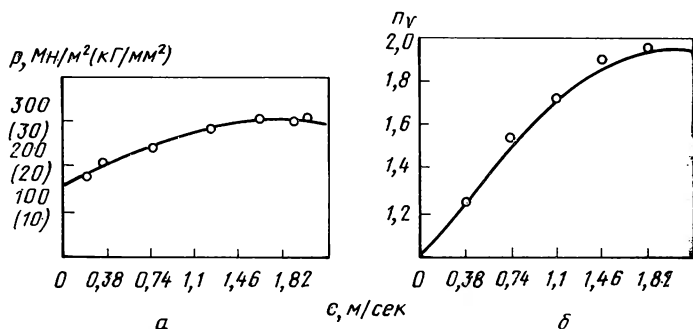


Рис. 225. Зависимость среднего контактного напряжения (а) и среднего коэффициента (б) от окружной скорости валков. Углеродистая сталь при  $1160\text{--}1180^\circ\text{C}$

Наконец, из многочисленных опытов известно, что с ростом осевого скольжения давление на валки уменьшается. Это является результатом уменьшения единичных обжатий.

Таким образом, важнейшими факторами, влияющими на величину давления при поперечно-винтовой прокатке, являются величина единичного обжатия, наличие внешних зон, скорость прокатки и связанная с ней скорость деформации металла. С учетом приведенных данных рассмотрим задачу об определении давления на валки прошивного стана.

Как и при продольной прокатке, среднее контактное напряжение в данном случае равно  $p = n_\sigma n_\nu n_\nu n_\nu \sigma_s$ .

В зоне прошивки отношение ширины контактной поверхности к диаметру заготовки всегда много меньше единицы (обычно  $0,05 \div 0,2$ ). В зоне раскатки отношение ширины контактной поверхности к толщине стенки гильзы составляет десятки доли единицы у носка оправки и не превышает единицы у ее калибрующей части. Таким образом, соотношение между геометрическими размерами прокатываемого тела таково, что силы трения на контактной поверхности невелики и, следовательно, коэффициент подпора  $n_\nu$  в случае прошивки можно принять равным единице.

Ввиду того, что вытяжка, приходящаяся на половину оборота прошиваемой заготовки в валках, невелика, деформацию можно приближенно принять плоской. Тогда  $n_3=1,155$ . Для условий прошивки, производящейся в горячем состоянии,  $n_H=1$ .

Как было отмечено в разделе 1 гл. XVII, в конусе прошивки на поверхности контакта заготовки с валками в тангенциальном направлении существуют зоны скольжения. При этом в одном и том же поперечном сечении всегда существует либо только зона опережения, составляющая не более 20—40% от длины конуса прошивки, либо зона отставания. А так как в конусе прошивки процесс определяется закономерностями поперечной прокатки, то на основании материала, изложенного в п. 2 гл. 16, необходимо принять  $n_3=2$ . Это следует и из номограмм (см. рис. 153). Поскольку мы приняли  $n_\sigma=1$ , то этому соответствует  $\delta=1$ , и из упомянутой номограммы мы получаем  $n_3=2$ . Поэтому и в конусе раскатки мы должны тоже принять  $n_3=2$ . Наконец, для учета влияния скорости на рис. 225, б, по данным работы [5], построена кривая скоростного коэффициента  $n_v$ .

Таким образом, для условий прошивки можно записать

$$p = n_3 n_v 1,55 \sigma_s = 2 n_v K = K'. \quad (603)$$

При окружных скоростях валков, применяемых в настоящее время при прошивке, скоростной коэффициент  $n_v \approx 2$ . Таким образом:  $p = K' = 2 \cdot 2K = 4K$ .

Если учесть величину истинного напряжения при статическом растяжении, то большая величина среднего контактного напряжения при прошивке (рис. 225, а) уже не вызывает удивления.

Рассчитав величину среднего контактного напряжения по формуле (603) и величину контактной поверхности по формуле (602), определим затем давление металла на валки как  $P = pF$ .

## 5. Давление на оправку прошивного стана

Установлено [5], что среднее давление на носок оправки, суммарное давление на оправку, а также затрачиваемая работа и время прошивки имеют минимум при некотором оптимальном обжатии перед носком оправки. Рассмотрим задачу расчета давления на оправку с учетом этого положения.

Ввиду малого угла перекося валков и малых единичных обжатий напряжения в конусе прошивки будут незначительно отличаться от напряжений при поперечной прокатке в условиях плоской деформации. В таком случае напряжения, действующие в направлении оси заготовки, будут равны полусумме радиальных и тангенциальных:  $\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta)$ .

Отвлечемся сначала от реальных условий прошивки и представим себе, что в неподвижную заготовку начинает принудительно внедряться носок оправки. Для определения напряжений, возник-

кающих при этом в центре заготовки, можно воспользоваться формулами (546), на основании которых мы получим:  $\frac{\sigma_z}{K} = -\frac{1}{4}$ .

Такой же результат дают формулы (558), если считать, что  $\theta=0$  и  $\rho=0$ .

Определим теперь среднее контактное напряжение, которое возникло бы, если бы оправка полностью внедрялась в неподвижную заготовку. Для этого воспользуемся равенствами (29). На их основании осевое напряжение равно

$$\frac{\sigma_z}{K_1} = \frac{1}{4} e^{\mu \theta} \left[ \left( \frac{\rho}{r} \right)^a + 3 \right] + \frac{1}{2} + \ln \frac{r}{\rho}. \quad (604)$$

Определим сначала осевое давление  $Q$  на оправку:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{K} = & -2 \int_0^{\gamma} \int_0^{r_{\text{оп}}} \frac{1}{4} e^{\mu \theta} \left[ \left( \frac{\rho}{r} \right)^a + 3 \right] \rho d\rho d\theta + \int_0^{\gamma} \int_0^{r_{\text{оп}}} \rho d\rho d\theta + \\ & + 2 \int_0^{\gamma} \int_0^{r_{\text{оп}}} \rho \ln \frac{r}{\rho} d\rho d\theta. \end{aligned}$$

Возьмем интегралы

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{\mu \theta} d\theta &= \frac{e^{2\mu \pi} - 1}{\mu}; \\ \int_0^{r_{\text{оп}}} \left[ \left( \frac{\rho}{r} \right)^a + 3 \right] \rho d\rho &= \frac{1}{r^a} \int_0^{r_{\text{оп}}} \rho^{a+1} d\rho + 3 \int_0^{r_{\text{оп}}} \rho d\rho = \\ &= r_{\text{оп}}^2 \left[ \frac{1}{a+2} \left( \frac{r_{\text{оп}}}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \right]; \\ \int_0^{r_{\text{оп}}} \rho d\rho &= \frac{r_{\text{оп}}^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (605)$$

Таким образом:

$$\frac{Q}{K} = -\frac{1}{4} \frac{e^{2\mu \pi} - 1}{\mu} r_{\text{оп}}^2 \left[ \frac{1}{a+2} \left( \frac{r_{\text{оп}}}{r} \right)^a + \frac{1}{2} \right].$$

Ввиду малости величин  $\mu$ ,  $\gamma$  и принимая во внимание, что  $\frac{r_{\text{оп}}}{r}$  обычно не меньше 0,7, мы можем написать

$$\begin{aligned} a &= -1 + \sqrt{1 + \mu^2} \approx -1 + 1 + \frac{\mu^2}{2} = \frac{\mu^2}{2}; \quad \frac{1}{a+2} \left( \frac{r_{\text{оп}}}{r} \right)^a = \\ &= \frac{1}{\frac{\mu^2}{2} + 2} \left( \frac{r_{\text{оп}}}{r} \right)^{\frac{\mu^2}{2}} \approx \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (606)$$

С учетом этих соотношений получим

$$\frac{Q}{K} = \left[ 1 - \frac{e^{2\mu\pi}}{\mu} \right] \frac{r_{\text{оп}}^2}{2}.$$

Принимая во внимание, что среднее контактное напряжение на оправке равно

$$q = \frac{Q}{\pi r_{\text{оп}}^2},$$

окончательно будем иметь 
$$\frac{q}{K} = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 - \frac{e^{2\mu\pi} - 1}{\mu} \right].$$

Если судить по рис. 225, то величина скоростного коэффициента в диапазоне окружных скоростей валков, обычно используемых при прошивке, по-видимому, равна  $n_v \approx 2$ . Вместе с тем мы убедились в разделе 2, что величина  $n_s = 2$ . Следовательно, получаем

$$K = 2 \cdot 2 K' = 4K',$$

где  $K = 1,155\sigma_s$ , т. е. истинное сопротивление металла в условиях плоской деформации при статическом нагружении.

С учетом этого расчет по проведенной выше формуле для среднего контактного напряжения на оправке дает следующие результаты:

$$\mu = 0; \quad \mu = 0,25; \quad \mu = 0,50; \quad q = -3,36 K'; \quad q = -9,04 K';$$

$$q = -27,6 K'.$$

Отсюда следует, что если заготовки неподвижны, то после начального проникновения оправки в центральную часть заготовки ее дальнейшее внедрение оказалось бы неосуществимым, если бы речь шла об изготовлении достаточно длинных полых тел, каковыми являются прошитые гильзы.

В действительности же в условиях прошивки заготовка, прежде чем ее торец войдет в контакт с оправкой, пройдет значительную часть конуса захвата. Здесь в результате ряда небольших единичных обжатий в ней возникнут дополнительные напряжения от неравномерности деформации. Для этого случая напряжения  $\sigma_z$  будут определяться из формул (570).

Для осевого напряжения с использованием этих формул получим

$$\frac{\sigma_z}{K} = -e^{\mu\theta} \left( \frac{\rho}{r} \right)^a + \ln \frac{r}{\rho} - \frac{1}{2}.$$

Заготовка соприкасается с оправкой лишь на участке, соответствующем углу  $\gamma$  (рис. 220). Поэтому осевое давление на оправку определится из равенства

$$\frac{Q}{K} = -2 \int_0^{\gamma} \int_0^{r_{\text{оп}}} e^{\mu\theta} \left( \frac{\rho}{r} \right)^a \rho d\rho d\theta + 2 \int_0^{\gamma} \int_0^{r_{\text{оп}}} \rho \ln \frac{r}{\rho} d\rho d\theta - \int_0^{\gamma} \int_0^{r_{\text{оп}}} \rho d\rho d\theta.$$

Интегрируя его по  $\theta$  и меняя знак у логарифма, получим

$$\frac{Q}{K} = -2 \frac{e^{\mu \gamma} - 1}{\mu} \int_0^{r_{\text{оп}}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^a \rho d\rho - \gamma \int_0^{r_{\text{оп}}} \rho d\rho - 2\gamma \int_0^{r_{\text{оп}}} \rho \ln \frac{\rho}{2} d\rho.$$

В этом равенстве

$$\int_0^{r_{\text{оп}}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^a \rho d\rho = \frac{r_{\text{оп}}^2}{a+2} \left(\frac{r_{\text{оп}}}{r}\right)^a; \quad \int_0^{r_{\text{оп}}} \rho d\rho = \frac{r_{\text{оп}}^2}{2}.$$

Последний из интегралов в равенстве для  $Q/K$  преобразуем, приняв

$$\frac{\rho}{r} = \xi; \quad \rho = \xi r; \quad d\rho = r d\xi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{r_{\text{оп}}} \rho \ln \frac{\rho}{r} d\rho &= r^2 \int_0^{\frac{r_{\text{оп}}}{r}} \xi \ln \xi d\xi = r^2 \left[ \xi \left( \frac{1}{2} \ln \xi - \frac{1}{4} \right) \right]_0^{\frac{r_{\text{оп}}}{r}} = \\ &= r^2 \left( \frac{r_{\text{оп}}}{r} \right)^2 \left( \frac{1}{2} \ln \frac{r_{\text{оп}}}{r} - \frac{1}{4} \right) = r_{\text{оп}}^2 \left( \frac{1}{2} \ln \frac{r_{\text{оп}}}{r} - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Используя результаты вычислений, получим следующие выражения для осевого давления на оправку:

$$\frac{Q_1}{K_1} = 2 \frac{e^{\mu \gamma} - 1}{\mu} \frac{r_{\text{оп}}^2}{a+2} \left(\frac{r_{\text{оп}}}{r}\right)^a - \frac{\gamma r_{\text{оп}}^2}{2} - 2\gamma r_{\text{оп}}^2 \left( \frac{1}{2} \ln \frac{r_{\text{оп}}}{r} - \frac{1}{4} \right);$$

$$\frac{Q}{K} = -\gamma r_{\text{оп}}^2 \left[ 2 \frac{e^{\mu \gamma} - 1}{\mu \gamma (a+2)} \left(\frac{r_{\text{оп}}}{r}\right)^a - \ln \frac{r}{r_{\text{оп}}} \right]. \quad (607)$$

Ввиду малости угла  $\gamma$  и величины  $\mu$  можем написать:

$$\frac{e^{\mu \gamma} - 1}{\mu \gamma} \approx \frac{1 + \mu \gamma - 1}{\mu \gamma} = 1.$$

Тогда с учетом соотношений (606) из уравнения (607) получим

$$\frac{Q}{K} = -\gamma r_{\text{оп}}^2 \left( 1 - \ln \frac{r}{r_{\text{оп}}} \right). \quad (608)$$

Величина  $F_{\text{оп}1} = \frac{\gamma r_{\text{оп}} r_{\text{оп}}}{2}$  представляет собой приближенное выражение проекции площади контакта оправки с металлом на плоскость, перпендикулярную оси прошивки. Таких площадей две. Поэтому среднее «лобовое» контактное напряжение на оправке равно  $q = Q/2F_{\text{оп}}$ .

При этом из уравнений (607) и (608), отбрасывая знак минус для упрощения записи, получаем

$$\frac{q}{K} = 2 \frac{e^{\mu \gamma} - 1}{\mu \gamma (a+2)} \left(\frac{r_{\text{оп}}}{r}\right)^a - \ln \frac{r}{r_{\text{оп}}}, \quad (609)$$



$$\frac{q}{K} = 1 - \ln \frac{r}{r_{\text{оп}}} . \quad (610)$$

Если для определения контактного напряжения на оправке использовать равенства (604), то с помощью расчета, аналогичного приведенному, мы снова получим равенства (610). Этот результат свидетельствует о правильности сделанного выше допущения; в центре сечения заготовки в установившемся процессе поперечно-винтовой прокатки напряжения от внешних сил можно не учитывать.

Ввиду того, что отношение толщины стенки гильзы  $t_r$  к радиусу оправки меньше единицы, можем написать:

$$\ln \frac{r}{r_{\text{оп}}} = \ln \frac{r_{\text{оп}} + t_r}{r_{\text{оп}}} = \ln \left( 1 + \frac{t_r}{r_{\text{оп}}} \right) \approx \frac{t_r}{r_{\text{оп}}} = 2 \frac{t_r}{d_{\text{оп}}} .$$

Поэтому из (609) получим

$$\frac{q}{K} \approx 1 - 2 \frac{t_r}{d_{\text{оп}}} . \quad (611)$$

Отношение толщины стенки гильзы к диаметру оправки обычно лежит в пределах  $0,1 \leq t_r/d_{\text{оп}} \leq 0,4$ .

Тогда среднее осевое контактное напряжение на оправке равно:  $q = (0,2 \div 0,8) K$ .

На основании опытных данных А. П. Чекмарев и В. И. Биба [5] установили, что среднее контактное напряжение на носке оправки меньше величины истинного сопротивления деформаций металла. Обычно оно равно  $q = (0,6 \div 0,8) \sigma_s$ , а напряжение в центре торца носка оправки:  $q = (0,2 \div 0,4) \sigma_s$ .

Если известно среднее давление на оправку, то суммарное осевое давление на оправку определяется по формуле

$$Q = \frac{1}{2} q d_{\text{оп}} b_{\text{оп}} . \quad (612)$$

Толщина стенки гильзы и диаметр оправки всегда известны из так называемой таблицы прокатки. Величина истинного сопротивления деформации вычисляется по равенству (603).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фомичев И. А. Косая прокатка. Харьков, Металлургиздат, 1963. 262 с. с ил.
2. Смирнов В. С. Теория прокатки. М., «Металлургия», 1967. 460 с. с ил.
3. Томленов А. Д. Механика процессов обработки металлов давлением. М., Машгиз, 1963. 234 с. с ил.
4. Тетерин П. К. Теория поперечно-винтовой прокатки. М., «Металлургия», 1971. 368 с. с ил.
5. Чекмарев А. П., Ханнин М. М., Ваткин Я. Л. и др. Прошивка в косо-валковых станах. М., «Металлургия», 1967.
6. Чекмарев А. П., Матвеев Ю. М., Выдрин В. Н., Финкельштейн Я. С. Интенсификация поперечно-винтовой прокатки. М., 1970. 184 с. с ил.
7. Смирнов В. С. Сборник задач по обработке металлов давлением. М., «Металлургия», 1973. 192 с. с ил.