С.В. Сизый

Математические задачи

Студенческие олимпиады математико-механического факультета Уральского госуниверситета

Рекомендовано УМС по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям: «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Механика»

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2009

УДК 51
ББК 22.1
С 34

Сизый С.В. **Математические задачи. Студенческие олимпиады математико-механического факультета Уральского госуниверситета.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 128 с. — ISBN 978-5-9221-1033-4.

Блестящая и озорная книжка-рассказ о современных математических состязаниях. В книге приводится целый ряд сложных и серьезных математических задач, часть из которых представляет собой открытие научных проблем. Изящные и доступные авторские комментарии к задачам превращают эту книгу в увлекательное чтение, доставляющее настоящее эстетическое наслаждение как своим математическим содержанием, так и юмористическим стилем автора.

Рекомендовано УМС по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Механика».

Рецензент:

Профессор кафедры алгебры и дискретной математики Уральского госуниверситета, доктор педагогических наук А. Г. Гейн

ISBN 978-5-9221-1033-4

Предисловие

Кому нужны олимпиады?

Студенческие олимпиады по математике? Вот еще, — наверняка скажут некоторые, — кому это сейчас может быть интересно? Помешанным на своей математике студентам-«ботаникам»? Косоглазым отличницам, которые ни разу не были в ночном клубе? Или чокнутым очкарикам, оторванным от жизни и никогда не целовавшимся с девушками? Вот далеко не полный список вопросов (в значительно смягченных формулировках), который мне приходилось слышать по поводу математических олимпиад из уст многих активных представителей нашего светлого будущего.

Прежде чем занимать бессмысленную оборону олимпиадно-математических позиций или же идти напролом на собственное молодое поколение, бомбя их систему ценностей мудрыми нравоучениями пожилого преподавателя (давно лишенного возможности самому посещать ночные клубы), я расскажу вам одну совсем свежую реальную историю.

Трое выпускников [1] математико-механического факультета Уральского госуниверситета работают в одной научно-производственной фирме, где худо-бедно и зарабатывают на жизнь. Нужда гонит их в командировку на один из крупнейших металлургических комбинатов России. В одном из цехов этого огромного завода стоит 16 прокатных линий, в окончании которых расположены специальные ножницы типа гильотины, разрезающие прокат на болванки (слябы) длиной примерно 3 метра, диаметром 1 метр. На выход из цеха эти болванки подаются общим конвейером, беспорядочно перемешиваясь с разных линий, но руководство завода хочет знать — какая болванка с какой линии! [2] Руководство завода решает, что 16 учетчиков-контроллеров, помечающих цветными мелками раскаленные болванки около каждых ножниц — это дорого, опасно и несовременно. Оно просит наших выпускников, оглохших и слегка контуженных часовой прогулкой по цеху, автоматизировать этот процесс.

[1] Один — 1988 г. выпуска, двое других — одногруппники 2004 г. выпуска.

[2] Это необходимо знать, поскольку разные линии могут выпускать прокат из разной стали, разного качества, для разных заказчиков.

Придя в себя, математики понимают, что срез болванки от каждых из 16 ножниц индивидуален, как отпечаток пальца, поэтому на выходе из цеха нужно просто установить телекамеру, сканирующую торец каждой болванки и решить математическую задачу распознавания образов. «Ерунда, а не вопрос!», — говорят они и штурмом за два дня и две ночи решают эту задачу, пишут программу и налаживают систему. Система оказывается лучше и дешевле зарубежных аналогов — страшно подумать, сколько денег за эту систему попросил бы, например, немецкий металлургический концерн «Сименс», если даже его какой-то хилый медицинский ультразвуковой томограф стоит около миллиона евро! [1)]

А наши выпускники-математики избавили родной металлургический комбинат от разорительного немецкого присутствия и, худо-бедно, им самим теперь есть что кушать и на что ходить с девушками в эти пресловутые ночные клубы. [2)]

Почему они смогли это сделать? И откуда такой «наглый кураж»? Почему они сумели не испугаться, понять задачу, формализовать ее, быстро придумать решение и реализовать его практически?

Да потому, что они уже раньше все это делали!!! Ответом на поставленные вопросы о невероятном интеллектуальном могуществе [3)] трех героев рассказанной истории служат две стороны одной медали, которая называется «университетское математическое образование».

Первая сторона — комичная. Наши выпускники тренировались совершать все эти интеллектуальные подвиги самим процессом обучения на математико-механическом факультете. Во время учебы студенты матмеха постоянно попадают в игрушечные ситуации, когда, в той или иной форме, они вынуждены быстро проделывать означенную выше цепочку: *стресс — задача — понимание — формализация — решение — реализация — расслабуха*. Как правило, такие ситуации спровоцированы разгильдяйством самих студентов — нежданно вызвали к доске на практике, а лекцию по этой теме прогулял; на второй паре надо сдать домашнюю контрольную, а вспомнил об этом только на первой паре; пришел на экзамен, а шпору отобрали и т. п. Крамольная мысль: извечно порицаемая всеми безалаберность в середине семестра и лень студентов играют огромную положительную роль! Благодаря лени и безалаберности, у некоторых студентов формируется способность в авральном порядке понимать и усваивать (например, перед экзаменом или зачетом) большой объем информации и быстро

[1)] Они ведь задешево только сотовые телефоны штампуют по 8 миллионов штук в год, а тут — штучный товар, телекамера с компьютером!

[2)] Здесь у автора проскользнула некоторая ирония.

[3)] Замените в предыдущей сноске глагол «проскользнула» на словосочетание «полилась широким потоком».

сдавать [1]) его любой ценой. Нет нужды разъяснять, сколь пригодились эти качества нашим выпускникам в командировке на металлургический комбинат!

Вторая сторона, объективная. Выпускники математико-механического факультета, в отличие от выпускников инженерного вуза, вооружены не набором прикладных рецептов, а основами фундаментальных знаний в области математики. Это, прежде всего, существенно организует их мышление, позволяет разбивать сложные задачи на последовательные части, воспитывает привычку постоянно контролировать ход своих мыслей. Кроме того, обладание фундаментальными знаниями, являющимися основой построения прикладных инженерных рецептов, придает твердую уверенность (тот самый «наглый кураж»!) в возможности решения неизвестной доселе практической задачи. Дескать, — а, даже если готового рецепта и нет, мы его придумаем, благо есть из чего!

Итак, вторую сторону медали «университетское математическое образование» составляет фундаментальное образование, насыщенное абстрактными понятиями, «бесполезными» теоремами и стройной системой взаимосвязей между своими понятиями. Студент, ухвативший принципы построения этой системы взаимосвязей, готов хотя бы к банальному копированию этой системы для конкретной практической задачи. К сожалению, в настоящее время молодые головы катастрофически разъедает система ценностей утилитарной атмосферы бизнеса, царящей повсюду. Студентов и работодателей снедает желание быстро получать востребованные в данный момент «практически нужные» и конкретные специальности, а синонимом фундаментального образования все чаще выступает словосочетание «абстрактное и бесполезное», а это далеко не так!

Теперь, для полноты картины, к университетскому образованию героев нашей истории остается добавить хороший практический опыт по предмету, который я бы условно назвал «программирование за деньги» — рутинный опыт изобретательства и кодировки на алгоритмическом языке конструкций, предназначенных для исполнения «глупых» требований разнообразных заказчиков. [2]) Такой опыт был приобретен

[1]) То есть *реализовывать* информацию, решать с ее помощью предложенные задачи, объяснять материал экзаменатору, придумывать алгоритмы, писать программы и т. п., то есть, в конечном итоге, облекать знания в материальную форму.

[2]) «Глупых» потому, что эти требования сформулированы крайне сумбурно и их еще надо понять! Что этот заказчик хочет? Какие задачи и в каком виде должна решать написанная программа? Как правило, заказчик сам этого не знает или не может сформулировать, а его разъяснительная речь полна междометий и противоречивых фантазий!

нашими выпускниками за время своей работы в научно-производственной фирме.

Итак, портрет универсального солдата, победителя сложных и неожиданных практических задач готов — *фундаментальное образование*, *психологические навыки*, *практический опыт*. Таких людей во всем мире считают специалистами экстра-класса, они постоянно востребованы и высоко оплачиваемы. «В проекте» выпускник математико-механического факультета УрГУ задуман именно таким.

Следующий тезис. Все перечисленные качества классного специалиста можно развивать и нужно тренировать. Что и кто может дать студенту опыт и навык аврального решения сложных и неожиданных практических задач? Что развивает качественные отличия студента математика от выпускника инженерного вуза? Ясно, что традиционного учебного процесса или случайных казусов (в виде изъятия шпоры на экзамене) совершенно недостаточно для систематической подготовки классного выпускника, приспособленного к условиям современного суматошного мира. В образовательном процессе нужны специальные мероприятия, целенаправленно бьющие в мишени фундаментальных знаний и психологической устойчивости.

На свете, по всей видимости, придумано очень много разных способов тренировки и обучения специалистов. Одним из возможных (и легко осуществимых на практике!) способов тренировки «боевых» навыков будущих профессионалов как раз и является студенческая математическая олимпиада. Но только эта олимпиада должна быть олимпиадой не в закоренелом смысле этого слова, а неким новым действом с большим числом творческих задач, проводимым в свободной форме и допускающим коллективные решения.

В свете такого понимания, математические олимпиады становятся неотъемлемой и органичной составляющей частью учебного процесса на математико-механическом факультете. В нынешних условиях они приобретают новую смысловую наполненность и становятся весомым вкладом в дело воспитания грамотных специалистов, востребованных в современном мире.

Новое понимание значимости математических олимпиад в корне отличается от традиционного, когда студенческая математическая олимпиада рассматривалась как нечто «необязательное и по желанию», как довесок в студенческой жизни, как состязание «избранных» в смекалке и сообразительности (проводившееся в набившей оскомину форме письменного экзамена), как чемпионат по применению натасканных навыков и стандартных приемов в решении «типовых» олимпиадных задач.

Олимпиада сегодня — это деловая игра, это моделирование реальных производственных ситуаций с неожиданными задачами, это привычка обрабатывать незнакомый материал, это воспитание стрессоустойчивости и навыков перенесения длительных пиковых нагрузок. Теперь это неотъемлемая (но демократично добровольная!) составляющая учебного процесса, яркая возможность получить особую «спецподготовку» для своей будущей профессиональной деятельности.

Ну, что, активные представители нашего светлого будущего, глумящиеся над судьбой косоглазых отличниц? Съели? Смотрите, какую железную аргументацию я привел в ответ на ваш вопрос о нужности математических олимпиад! Попытайтесь теперь самостоятельно ответить на вопрос, кому они могут быть интересны!?

Как проводятся олимпиады в Уральском университете?

В связи с изменениями, порожденными окружающей действительностью в самом смысле математических олимпиад, естественно изменилась и форма проведения студенческой олимпиады на математико-механическом факультете УрГУ. Бессмысленно стало собирать студентов в отдельных аудиториях на пару часов и контролировать, чтобы они не списывали и не разговаривали между собой. Это противоречит целям олимпиады — научить искать информацию и создавать коллективные решения. Мы не боимся давать задачи на дом, на двое суток. Мы разрешаем в процессе решения ходить в Интернет, в библиотеку, пользоваться чем и кем угодно.

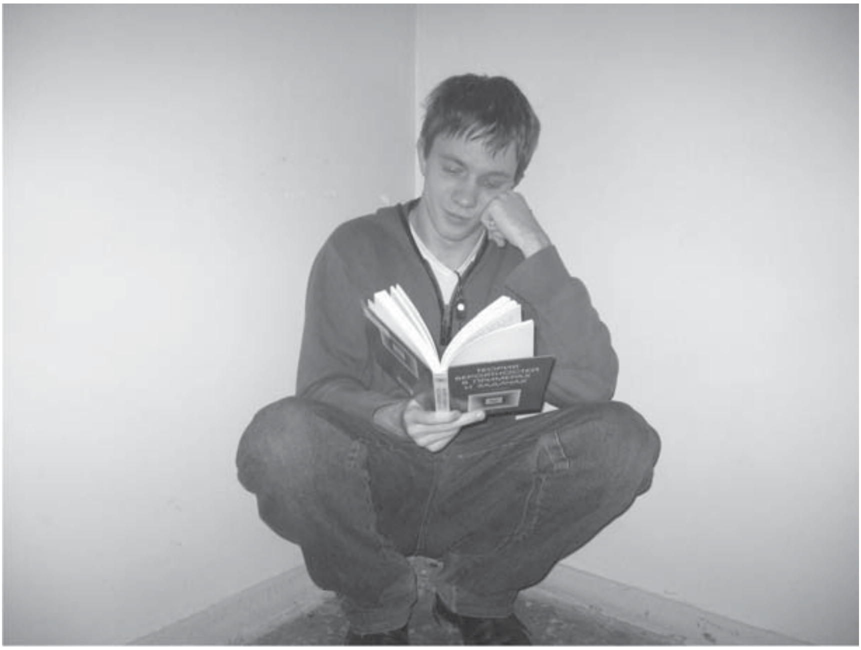
Если папа у Васи силен в математике — это хорошо. Сложность заданий такова, что папа решит эти задачи немногим быстрее Васи, если вообще решит. Если папа действительно силен в математике, он вовсе не станет решать задачи за Васю, поскольку в состоянии оценить, чего ему это будет стоить. Кроме того, в случае решения задачи папой, необходимо будет еще растолковать это решение Васе, что опять-таки льет воду на мельницу Васиной подготовки и соответствует целям проводимой олимпиады!

Итак, можно пользоваться чем и кем угодно. Можно объединяться в команды или решать в одиночестве. От участников требуется получить результат каким угодно способом, вразумительно оформить решения (что само по себе порой является очень нетривиальной задачей!) и сдать их в жюри к положенному сроку.

Традиционные 30 разношерстных задач делают свое дело — они позволяют жюри выявить победителей по числу правильно решенных задач и степени продвижения в недорешанных. Задачи разные — сложные и попроще, рассчитанные на знания первого курса (который тоже надо приучать к напрягам современного мира), и вообще никем еще не решенные открытые научные проблемы. Порой вся трудность задачи состоит в поиске необходимых понятий и определений, лежащих за

«Задачи повесили!» — студенты обсуждают олимпиадные задания в коридоре факультета

«Начало решения» — студенты обсуждают в аудитории условие задачи



«Отшельник» — участник команды, которому поручено в одиночестве решить одну из технических задач олимпиады

рамками университетской программы, а сама задача при этом очень проста.

Листочек с задачами выдается каждому желающему, без всякой регистрации и каких-либо формальностей — с этого момента студент и становится участником нашей математической олимпиады. Задачи расположены на листочке без всякого упорядочения по темам или по сложности. Ровно через 48 часов после выдачи заданий жюри заканчивает принимать решения.

Математическая олимпиада традиционно проводится в рамках ДММ. ДММ — это «День Математика и Механика» — ежегодный студенческий праздник весны любви юмора спорта и математики, масштабы и настрой которого еще не удалось адекватно отразить в своих репортажах ни одному журналисту. Чтобы понять и почувствовать позитивный настрой этого народного гуляния, надо просто самому участвовать в нем, ибо описать словами все происходящее на факультете в эту праздничную неделю просто невозможно.

Ежегодно, за полмесяца до математической олимпиады, на стенах факультета (на видных местах) вывешивается следующий канонический текст, выполненный крупными буквами (забота об очкариках) и украшенный разными цветочками (развивающий визуальный ряд для оторванных от жизни отличников).

Правила проведения студенческой математической олимпиады ДММ

- В Олимпиаде ДММ может принять участие любой студент или магистрант математико-механического факультета УрГУ, независимо от роста, пола, возраста и окраски. Граждане, составляющие дополнение к множеству студентов и магистрантов матмеха к официальному участию в Олимпиаде не допускаются.
- Задачи Олимпиады ДММ выдаются всем желающим на кафедре алгебры и дискретной математики в субботу, XX апреля, с 12.00 до 14.00.
- На решение задач по математике отводится 48 часов. Решения задач, оформленные в произвольной вразумительной форме, принимаются на кафедре алгебры и дискретной математики в понедельник, (XX+2) апреля, с 12.00 до 14.00.
- Решения, сданные после указанных сроков, рассматриваются как забавное изобразительное творчество авторов, ни к чему не обязывающее членов жюри.
- Решения задач должны быть написаны на бумаге разборчивым почерком. Цвет чернил должен заметно отличаться от цвета бумаги. Листы олимпиадной работы нужно занумеровать последовательными натуральными числами в порядке возрастания. Работы, выполненные неразборчивым почерком черной пастой на черной бумаге, рассматриваются членами жюри первые три минуты после их получения.
- В олимпиадном конкурсе участвуют сданные работы, а не их конкретные исполнители!
- Жюри Олимпиады ДММ оставляет за собой право потребовать у конкурсантов вразумительно объяснить представленные решения. Коллективные решения не запрещаются, но на работе должна быть указана фамилия человека, способного объяснить все изложенные в этой работе решения задач.
- Призовой фонд Олимпиады ДММ составляет ровно 30 000 рублей.
- Оргкомитет ДММ устанавливает следующие основные призы:

  1 место — 14 000 рублей (стипендия за полтора года)

  2 место — 8 000 рублей (1000 честных поездок на трамвае)

  3 место — 6 000 рублей (месячный оклад профессора УрГУ)

  Остальные 2 000 рублей являются двумя поощрительными однотысячными призами для индивидуалов, проявивших себя в решении отдельных задач.

- Награждение победителей состоится на Праздничном концерте, посвященном Открытию ДММ, в субботу, (XX+7) апреля.
- В успешном проведении Олимпиады ДММ профессионально заинтересованы Деканат математико-механического факультета, Оргкомитет ДММ и Фирмы XXXXX, XXXX, которые являются спонсорами этого состязания.
- Деканат математико-механического факультета и Оргкомитет ДММ желают всем участникам неудержимого полета Мысли, светлого Разума и серьезных Успехов!

Разумеется, далеко не все студенты, взявшие листочек с задачами, отваживаются сдать свои решения в жюри. Ежегодная статистика такова: смотрят задачи все студенты — около 600 человек, листочки с задачами берут на дом 150–170 человек, к назначенному сроку в жюри оказываются сданными 18–20 работ. Поскольку примерно половина этих работ коллективные (команды по 3–7 человек), то реально в эти два дня пишут решения олимпиадных задач около 50 человек! Согласитесь, — очень неплохой результат для добровольного состязания. Забавно наблюдать, как с утра в понедельник, в разных закоулках факультета порой прямо на полу сидят кучки студентов, сосредоточенно записывающие свои решения на листочки бумаги. А сколько людей еще просто размышляют над полученными задачами, просто стараются понять их условия, обсуждают между собой веселые формулировки! Тексты задач еще долгое время остаются висеть на стенах факультета для всеобщего обозрения.

Факультетская математическая олимпиада, таким образом, формирует у студентов ориентир в обучении, или, если угодно, — недостижимую высокую цель, вожделенный уровень профессионализма. Дескать, вот, господа студенты, чему вас учат по обычному учебному плану, а вот то высокое и недостижимое, к чему следует стремиться. Это реально сложно, не все даже решаются участвовать в этом процессе, хотя вход свободный и 30 тысяч призовых рублей для студентов — немалая сумма!

Забавное наблюдение. Победители, как правило, покупают себе новый сотовый телефон или обновляют ноутбук, а занявшие третье место весело гуляют на полученную сумму и пьют пиво в сквере за Оперным театром (традиционное место тусовки студентов УрГУ).

И, наконец, последнее, что хочется отметить про математические олимпиады и факультетские студенческие праздники в целом. Олимпиада по математике, как и ежегодные Дни Математика и Механика, составляют часть славы матмеха, являются одним из его брендов. В современных жестких условиях конкурентной борьбы вузов за абитуриентов на рынке образовательных услуг, ДММ и олимпиада — очень веские аргументы привлечения абитуриентов, желающих получить математическую или компьютерную специальность, на математико-механический факультет. Кроме того, что мир полнится слухами, абитуриенты сами посещают факультет в День открытых дверей (который традиционно проводится сразу после студенческого праздника), видят украшенные флажками коридоры, читают веселые тексты, смешно сформулированные задачи. Невольно у них формируется правильное впечатление — здесь интересно учиться, здесь есть живое человеческое общение и тут можно увлеченно постигать не застывшую, как в школе, а живую и такую манящую науку — математику!

«Задачи решены – деканат ликует» — декан факультета М. О. Асанов и замдекана А. Ю. Коврижных поздравляют студентов с победой в олимпиаде и с Днем Математика и Механика

«Награждение победителей» — ведущие праздничного концерта (справа — С. Сизый, автор этой книжки) объявляют со сцены имена победителей олимпиады

Команда факультета — бронзовые призеры чемпионата мира по программированию, Ванкувер, 2001 г. Слева направо сидят: Ю. Петров, Н. Шамгунов, Л. Волков; стоят: А. Клепинин, декан математико-механического факультета М. О. Асанов

Что ждет читателя в этой книжке?

Теперь кратко о собранных в этой книжке задачах.

Часть задач, естественно, не оригинальные, они почерпнуты из разных сборников. Специалистам они окажутся, скорей всего знакомы, но круг этих специалистов весьма узок, так что обижаться или злорадствовать по поводу увиденной здесь известной задачи не стоит, скорей всего она известна только вам и еще 0,000001 проценту населения земного шара. Большое количество задач сочинили в разные годы специально для наших олимпиад преподаватели математико-механического факультета: Ю. Ф. Долгий (бессменный поставщик задач с кафедры теоретической механики), М. В. Баклановский (кафедра вычислительной математики), А. Г. Гейн, В. Б. Репницкий, А. М. Шур, Д. С. Ананичев и ваш покорный слуга (все — с кафедры алгебры и дискретной математики), К. Н. Гурьянова (кафедра математического анализа) и многие другие.

Я намеренно не привожу в этой книжке обстоятельных решений задач (за редким исключением!), а только снабжаю задачи весьма вольными комментариями — гипсовая завершенность в творческих вопросах вредна. Некоторые задачи допускают различные толкования их условий и, соответственно, разные математические модели разбираемых ситуаций. Это значит, что ни решение, ни ответ у таких задач не предопределены однозначно. Кроме того, решения доброго десятка задач, приведенных в этой книжке, до сих пор человечеству неизвестны и эти задачи являются открытыми научными проблемами. Как говориться, я бы и рад написать их решение, но кишка тонка... Да и вообще, — что такое решение? Что оно по сравнению с удовольствием от процесса мышления и свободного полета фантазии (уместного, разумеется, в олимпиадной ситуации, но не в условиях, например, жестко регламентированного промышленного производства)?

Кроме того, предлагаемый вашему вниманию сборник задач появился на свет благодаря пожеланиям моего старшего коллеги по кафедре, профессора А. Г. Гейна, который мотивировал необходимость его создания словами: «...катастрофически не хватает задач для организации разнообразных математических боев, вузовских олимпиад....». Публикация подробных решений задач, в свете такой потребности, делает бессмысленной публикацию самих задач, ибо их уже будет просто невозможно использовать при проведении «традиционных» математических состязаний, например, в форме экзамена в изолированной от внешнего мира аудитории. Представьте-ка себе Единый Государственный Экзамен (ЕГЭ), решения задач которого заранее опубликованы!

Некоторые задачи повторялись из года в год (поскольку студенты не могли их сразу решить), некоторые видоизменялись, поэтому я привожу задачи без указания года их выдачи и в произвольном порядке. Пусть будет калейдоскоп, бог с ним! И по хронологии, и по тематике.

Это соответствует духу матмеховской олимпиады. Вся известная мне информация про историю задачи, про ее сложность, пути решения и, возможно, необходимые определения и наброски рассуждений, приводятся в комментарии к задаче.

Постскриптум

В конце этого предисловия автор хочет все-таки явно отметить, что он вполне адекватен и с иронией рассматривает всю первую часть текста предисловия. Она напичкана мотивацией и нравоучительными мыслями о значении математических олимпиад для современного математического образования, изобилует рассуждениями о существенной роли олимпиад в процессах формирования специалистов высокой квалификации. Что греха таить, даже многие диссертации грешат преувеличением значимости рассматриваемых в них вопросов, оправдывая этим преувеличением свою актуальность и высокую ценность работы. Авторы часто набивают себе цену, имитируя научный подход и используя псевдонаучную структуру рассуждений. В нашем же случае, автор вполне сознательно писал первую часть предисловия как полемически задорный текст-пародию на тяжеловесные дидактические нравоучения преподавателей старшего поколения в адрес всех без разбора молодых студентов.

На самом же деле, я несколько лет подряд занимался составлением и организацией математических олимпиад, а студенты участвовали в этих олимпиадах просто потому, что это было *интересно*, а вовсе не потому, что олимпиады «становятся в современных условиях важнейшей частью образовательного процесса». Еще раз повторю — я адекватен и реально смотрю на вещи. Человеческий интерес — вот основная движущая сила многих поступков, а не пресловутая «актуальность», «социальная востребованность» или желание заработать много денег. Бетховен писал музыку только потому, что был увлечен ею и, смею вас уверить, на своих произведениях почти ничего не заработал, перебиваясь частными уроками и небольшими гонорарами за выступления в качестве пианиста или дирижера. Вот и настоящий сборник задач есть просто результат человеческого интереса. Результат, разумеется, уступающий по значению творчеству Бетховена, но... Улыбка. Конец предисловия.

Ну, с Богом, уважаемые читатели! Знакомьтесь с задачами, удивляйтесь и думайте.

Задачи математических олимпиад ДММ

После номера каждой задачи указан вектор

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3.$$

Его компоненты являются *ориентировочным* количеством баллов, которое могут заработать за эту задачу: α — студент(ка) первого курса, β — студент(ка) второго курса, γ — студент(ка) курса старше второго.

На самом деле, эти баллы довольно редко учитываются при подведении итогов олимпиады. Они служат лишь ориентиром для студентов разных курсов (стоит ли вообще браться за эту задачу или нет?) и являются показателем, насколько сложной считают эту задачу составители олимпиады. Если же некоторая компонента вектора равна нулю, то это означает, что составители олимпиады считают эту задачу вовсе не предназначенной для соответствующего курса.

№ 1 (4,3,3). Дана бесконечная последовательность шаров, радиусы которых стремятся к нулю, а сумма объемов неограниченно возрастает. Докажите, что конечным числом шаров из этой последовательности можно почти заполнить любой куб (т. е. разность между объемом куба и суммарным объемом уложенных в него шаров можно сделать меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$).

Комментарий. Это довольно стандартная задача, требующая от участника аккуратного проведения простых и строгих рассуждений в духе современных университетских учебников по математическому анализу с последующей их аккуратной записью. Главное здесь — не жульничать!

№ 2 (5,4,3). Подкольцо $I \subset K$ называется идеалом кольца K, если произведение любого элемента кольца K на произвольный элемент подкольца I лежит в I. Идеал называется максимальным, если он не содержится ни в каком большем идеале, кроме самого кольца. Пусть $C[a,\, b]$ — кольцо непрерывных на отрезке $[a,\, b]$ функций с обычными операциями сложения и умножения функций. Найдите все максимальные идеалы этого кольца.

Комментарий. В этой задаче нет ничего особенного. Ее цель — напомнить студентам понятия идеала и кольца и дать поработать с этими понятиями в случае предоставленного им конкретного кольца функций. Максимальные идеалы кольца $C[a,\, b]$ описываются достаточно просто — попробуйте рассмотреть множество всех функций, которые обращаются в ноль в одной и той же фиксированной точке $x_0 \in [a, b]$ и удача, несомненно, придет к вам.

№ 3 (25,20,15). Пусть последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots \in$ $\in R$ периодична, начиная с некоторого числа $n \in N$. Докажите, что тогда ряд $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ на некотором невырожденном интервале представляет некоторую рациональную функцию $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q — многочлены. Верно ли обратное?

Комментарий. Прямое утверждение — задача не совсем уж простая, но вполне решаемая. Судите сами. Пусть $a_i = a_{i+r}$ при $i \geqslant s$.

Обозначим $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{s-1}x^{s-1}$ и $q(x) = a_s + a_{s+1}x + \ldots + a_{s+r-1}x^{r-1}$. Ну, тогда, при $|x| < 1$ получается

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = p(x) + \sum_{i=1}^{\infty} q(x)x^{si} = p(x) + q(x)\sum_{i=1}^{\infty} x^{si} = p(x) + \frac{x^s q(x)}{1 - x^s}$$

— рациональная функция, причем весьма специального вида. Поскольку при $q(x) \neq 0$ и $|x| > 1$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, очевидно, расходится, то он может представлять рациональную функцию на некотором интервале $(\alpha,\ \beta)$ в двух случаях — либо эта функция есть многочлен; либо эта функция имеет вид $\dfrac{P(x)}{1 - x^n}$, где $P(x)$ — многочлен, но тогда $(\alpha,\ \beta) \subset (-1,\ 1)$. Вот так.

Обратное утверждение, конечно же, неверно. Вот контрпример (наверняка, не самый простой, но первый пришедший мне в голову, поскольку в этот момент я держал в руках книжку о методе производящих функций в комбинаторике):

$$\frac{1 + x}{1 - 2x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot x^n,$$

при этом

$$f(n) = \frac{1}{2}\left[(1 + \sqrt{2}\,)^{n+1} + (1 - \sqrt{2}\,)^{n+1}\right]$$

— явно непериодическая последовательность действительных чисел. Функция $f(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $f(n) = 2f(n-1) + f(n-2)$ с начальными условиями $f(0) = 1, f(1) = 3$ и имеет простой комбинаторный смысл — это число слов длины n над трехбуквенным алфавитом $\{a, b, c\}$, в которых не встречаются комбинации букв ab и ba.

№ 4 (50,50,50). Пусть L — конечная решетка, содержащая n элементов. Верно ли, что в L найдется неразложимый в объединение элемент x (т. е. не представимый в виде объединения двух отличных от него элементов), для которого главный порядковый фильтр $J(x) = \{y \in L \mid y \geqslant x\}$ содержит не более $\lceil n/2 \rceil$ элементов, где $\lceil \alpha \rceil$ — наименьшее целое, большее или равное α.

Комментарий. Перед вами типичная «убойная» задача нашей олимпиады. Выглядит она просто и понятно, но, насколько мне известно, до настоящего момента это — открытая научная проблема, охарактеризованная в книге Р. Стенли по комбинаторике[1] не иначе как

[1] *Р. Стенли*. Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990.

«дьявольская». Там же отмечено, что эта задача равносильна некоторой другой открытой научной проблеме из теории упорядоченных множеств, поставленной П. Франкелем в 1985 г. После нескольких часов размышлений над этой задачей в попытках понять, в чем же, собственно, заключается ее сложность, она стала казаться мне разве лишь еще сложнее. Максимум, чего добились в этой задаче участники нашей олимпиады за отведенные им 48 час. — проверили и убедились, что утверждение задачи верно для всех решеток, содержащих не более семи элементов.

№ 5 (10,8,7). Последовательность задана соотношением $x_n = |x_{n-1} - 2x_{n-2}|$ с начальными значениями x_1 и x_2.

а). Докажите, что при $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ эта последовательность неограниченна.

б). Укажите все натуральные значения x_1 и x_2, при которых данная последовательность ограничена.

Комментарий. «Какая песня без баяна», какая олимпиада по математике без рекуррентно заданных последовательностей! Перед вами «олимпиадный» стандарт сложности подобных задач, приводящий к извечному русскому вопросу: «Что делать?». Вот если бы в данном рекуррентном соотношении не было знака модуля! Мы бы легко нашли явную формулу n-го члена последовательности $x_n = f(n)$ и ответили бы на все вопросы задачи. Но модуль мешает!

Вероятно, в решении этой задачи (и многих ей подобных) вам поможет изящный матричный взгляд на рекуррентный способ задания числовых последовательностей: если бы в данном рекуррентном соотношении не было знака модуля, то

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \text{т. е.} \quad \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Как вообще зависит поведение рекуррентной последовательности от определителя написанной матрицы? От значений ее собственных чисел? Что, вообще, происходит с вектором начальных значений при многократном действии на него данным линейным оператором? А что будет, если знак модуля все-таки поставить на свое место?

Разумеется, все эти, безусловно, интересные вопросы возникнут лишь в случае, если вы пойдете по намеченному выше матричному пути рассуждений — не забывайте, вы вправе выбирать любой другой способ решения задачи. Например, для «продвинутого» ученика средней школы вполне доступен следующий план — рассуждая «от противного», сперва понять, что если данная последовательность ограничена, то она периодическая. Далее придется сообразить, что если эта последовательность периодическая, то она обязана содержать член, являющийся четным числом, в то время как из заданных первых членов $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ все последующие члены последовательности получаются нечетными…

№ 6 (10,4,3). Найдите сумму ряда

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{160} + \ldots + \frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)} + \ldots.$$

Комментарий. Совершенно стандартная задача вычислительного характера, предназначенная как для проверки умений и навыков решать стандартные задачи, так и для «оттягивания на себя» того времени, которое участники хотели бы потратить на решение более сложных и более «дорогих» задач. Для решения конкретно этой и подобных задач обычно составляется функциональный (например степенной) ряд, наподобие

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)},$$

и замечается, что нужно найти число $f(1)$. Дифференцирование этого ряда дает геометрическую прогрессию

$$f'(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}},$$

сумма $f'(x) = \dfrac{2}{4 - x^2} - \dfrac{1}{2}$ которой легко находится по известной «школьной» формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Остается аккуратно проинтегрировать выражение для производной $f'(x)$, определить (исходя из условия $f(0) = 0$), чему равняется возникшая при интегрировании произвольная постоянная, и вычислить $f(1)$. Естественно, жюри олимпиады будет радо увидеть в проверяемой работе некоторые соображения относительно законности почленного дифференцирования ряда и его равномерной сходимости. Разумеется, я должен отметить, что вы вправе искать сумму этого ряда и каким-либо иным, в том числе и божественным способом — получить число-ответ в форме откровения свыше, после чего как-то убедить начисто лишенное божественных откровений жюри в правильности полученного ответа.

№ 7 (10,6,4). Докажите, что среди членов арифметических прогрессий

а) 5, 11, 17, 23, 29, …

б) 3, 7, 11, 15, 19, …

в) 11, 21, 31, 41, 51, …

бесконечно много простых чисел (ссылка на теорему Дирихле решением не считается).

Комментарий. Известно, что если в целочисленной арифметической прогрессии первый член и разность взаимно просты, то среди членов этой прогрессии содержится бесконечно много простых чисел. Более того, ряд, составленный из обратных величин к этим простым числам, расходится. Это классическое утверждение называется теоремой Дирихле и доказывается весьма сложно с использованием аппарата теории функций комплексного переменного, характеров Дирихле и тому подобных неэлементарных вещей. [1] В 1950 г. датский математик А. Сельберг придумал чрезвычайно сложное и хитроумное элементарное (без использования аппарата «высшей» математики) доказательство теоремы Дирихле, однако жить лучше от этого не стало. Вам, тем не менее, предлагается доказать бесконечность множества простых чисел в данных конкретных прогрессиях, используя лишь элементарные соображения о делимости натуральных чисел и основную теорему арифметики. Не думаю, что эта задача вызовет у вас серьезные затруднения.

№ 8 (8,6,4). Для каждого $\alpha \in \mathsf{R}$ вычислите интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}.$$

Комментарий. Эту простенькую задачу на олимпиаде ДММ (кажется, 2002-го года) никто не решил, хотя, при этом, те же люди решали куда более сложные задачи! Несобственные интегралы, зависящие от параметра — традиционно «трудная» тема из математического анализа, и студенты ее побаиваются. А у студентов третьего курса еще свежи страхи от вычисления подобных интегралов методами теории функций комплексного переменного. Вот и боялись браться за эту задачу. А бояться не надо, надо решать! Тем более, что для решения этой задачи никаких специальных сведений из «трудных» разделов математического анализа и теории функций комплексного переменного вообще не требуется! Скажу вам по секрету, что этот интеграл вовсе не зависит от α. Чтобы убедиться в этом, разбейте интеграл на два слагаемых:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = J_1 + J_2$$

---

[1] См., например, книжку: *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. — М.: Наука, 1975.

и сделайте в первом интеграле J_1 замену $x = \frac{1}{y}$, не забыв правильно поставить новые пределы интегрирования. Вся хитрость задачи заключается в том, чтобы потом в преобразованном интеграле J_1 снова обозначить переменную y буквой x и привести подобные в сумме $J_1 + J_2$. Правильный ответ: $J_1 + J_2 = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, ну, а уж с этим несобственным интегралом вы, я думаю, справитесь самостоятельно. Таким образом, здесь мы имели дело со случаем «у страха глаза велики» и борьбу с такими случаями в рамках олимпиады необходимо сделать систематической и целенаправленной, регулярно подсовывая студентам подобные «страшные» задачи.

№ 9 (10,6,4). Какова вероятность вытащить из натурального ряда степень простого числа?

Комментарий. Известно, что на множестве всех натуральных чисел корректно определить вероятностную меру, удовлетворяющую всем стандартным аксиомам вероятности, невозможно. Поэтому в этой задаче под вероятностью, конечно же, понимается плотность множества степеней простых чисел в множестве всех натуральных чисел, т. е. предел

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{K(N)}{N},$$

где $K(N) = \sum\limits_{\substack{p,k\\ p\text{ — простое},\\ p^k\leqslant N}} 1$ — количество степеней простых чисел в начальном отрезке натурального ряда $[1;\, N]$.

Еще Леонарду Эйлеру было известно, что плотность множества всех простых чисел равна нулю (хотя ряд, составленный из обратных величин ко всем простым числам расходится). В 1850 г. Пафнутий Львович Чебышев доказал, что функция $\pi(N)$ — количество простых чисел, не превосходящих N, удовлетворяет неравенствам

$$0{,}89\,\frac{N}{\ln N} < \pi(N) < 1{,}11\,\frac{N}{\ln N}$$

при всех достаточно больших N. Это был исторически первый результат на пути к доказательству так называемого «закона распределения простых чисел» [1]), утверждающего, что имеет место асимптотическое равенство $\pi(N) \approx \frac{N}{\ln N}$. Из результата Чебышева следует,

[1]) О законе распределения простых чисел и само доказательство Чебышева (в несколько более слабой, но все равно пригодной для наших целей формулировке) см., например, в книжке: *Сизый С. В.* Лекции по теории чисел. — М.: Физматлит, 2007.

что «закон распределения простых чисел» справедлив с относительной погрешностью не более 11% и что интересующее нас отношение $\frac{\pi(N)}{N} < \frac{1{,}11}{\ln N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т. е. плотность простых чисел нулевая.

Я рассказал вам о результате Чебышева потому, что с его помощью достаточно просто оценить поведение интересующей нас дроби $\frac{K(N)}{N}$ — плотности степеней простых чисел в начальном отрезке натурального ряда. Правильный ответ на вопрос представленной олимпиадной задачи — ноль.

№ 10 (8,4,2). Пусть $X = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, 0, 0, \ldots) | \xi_i \in \mathsf{R}\}$ — совокупность всех бесконечных последовательностей действительных чисел, у которых все элементы, начиная с некоторого номера, равны нулю. Определим сумму двух последовательностей и умножение последовательности на скаляр естественным образом, а скалярное произведение определим по формуле $\langle \xi, \eta \rangle = \sum\limits_k \xi_k \eta_k$. Очевидно, что X становится евклидовым пространством. Покажите, что оператор $A : X \to X$, заданный формулой $A\xi = (\sum\limits_k \xi_k, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, является линейным и не имеет сопряженного.

Комментарий. Ничего запредельно сложного! Это классический пример линейного оператора в бесконечномерном евклидовом пространстве, у которого нет сопряженного оператора. Для первокурсников, живущих на своих занятиях по линейной алгебре в спокойном идиллическом мире конечномерных линейных пространств, этот пример будет весьма поучителен.

№ 11 (12,10,10) Конечную последовательность действительных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ назовем пилообразной, если для всех $k = 1, \ldots, n-2$ выполнено $(-1)^k(c_k - c_{k+1}) \leqslant 0$ или, наоборот, $(-1)^k(c_k - c_{k+1}) \geqslant 0$. Докажите, что последовательность пилообразна тогда и только тогда, когда она является последовательностью значений некоторого многочлена степени n с действительными коэффициентами в последовательных критических точках.

Комментарий. В 1956 г., в одной из заметок Американского Математического Общества было анонсировано утверждение, что для любых n комплексных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует многочлен степени $n+1$ со старшим коэффициентом 1, принимающий значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в нулях своей производной. Удивительно, что доказано это утверждение было лишь 9 лет спустя Р. Томом и доказательство оказалось весьма нетривиальным. В случае нашей олимпиадной задачи мы имеем дело с аналогичным утверждением, только числа $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ и коэффициенты искомого многочлена являются действительными — в такой ситуации задача значительно упрощается. В одну сторону утверждение задачи почти очевидно, а для того, чтобы указать в явном виде многочлен, принимающий заданные значения в своих критических точках (расположение которых на действительной оси тоже нужно еще удачно подобрать!), вам придется проявить некоторую изобретательность. Дерзайте!

№ 12 (6,3,3). Десятичная запись числа a состоит из n двоек. Докажите, что десятичная запись числа a^2 имеет вид:

$$\underbrace{4938271604938\ldots}_{n-1 \text{ цифра}}\underbrace{\ldots 1728395061728}_{n-1 \text{ цифра}}4,$$

где обе выделенные последовательности из $(n-1)$ цифры периодичны с периодом длины 9.

Комментарий. Это хорошая олимпиадная задача, которая вполне доступна даже студентам первого курса или «продвинутым» школьникам, поскольку никаких «особых» математических знаний для ее решения не требуется. Какие-либо наводящие соображения в комментариях к этой задаче представляются мне излишними.

№ 13 (0,15,5). Решите уравнение

$$f(x) = \lambda \int\limits_0^\pi (\cos(x+y))\, f(y)dy + a\sin x + b$$

для всевозможных значений параметров $\lambda, a, b \in \mathsf{R}$.

Комментарий. Перед вами интегральное уравнение типа уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. Это опять-таки совершенно стандартная техническая задача, призванная «оттянуть» на себя силы и время, которые можно было бы потратить на решение более сложных и «ценных» задач. Кроме того, студентам, безусловно, будет полезно в середине семестра повторить некоторые разделы из курса функционального анализа с целью более прочного их усвоения и успешной сдачи предстоящих экзаменов. На нашей олимпиаде участники, в случае командного решения, обычно по жребию назначают одного из членов команды для решения подобной задачи и он, бедняга, стиснув зубы, садится в одиночестве в угол аудитории и тратит часа два–три на аккуратную запись ее решения. Ну что, сказать вам ответ? На всякий случай, для контроля? Смотрите:

Если $\lambda \neq \pm\dfrac{2}{\pi}$, $(a, b$ — любые), то $f(x) = \dfrac{2(a-2\lambda b)}{2+\lambda\pi}\sin x + b$. Если $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$, то уравнение разрешимо при любых $a, b \in \mathsf{R}$ и $f(x) = = \dfrac{a\pi - 4b}{2\pi}\sin x + b + C_1\cos x$, где C_1 — произвольная постоянная. Если $\lambda = -\dfrac{2}{\pi}$, то уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $a\pi + 4b = 0$ и $f(x) = b + C_2\sin x$, где C_2 — произвольная постоянная.

№ 14 (7,7,7). Докажите, что для любых чисел $x \geqslant 0$ и $n \in \mathsf{N}$ выполнено неравенство

$$[nx] \geqslant \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \ldots + \frac{[nx]}{n},$$

где $[a]$ — целая часть числа a.

Комментарий. Эта задача весьма непроста, но по уровню предварительных математических знаний, необходимых для ее решения, вполне доступна и «продвинутым» школьникам. Кажется, эта задача впервые предлагалась на математической олимпиаде США в 1981 г. Поскольку средний уровень математической подготовки школьников в США все еще представляется мне существенно более низким, чем в России (по крайней мере пока, т. е. до проявления массовых негативных последствий очередного «перетряхивания» школьного образования в нашей стране и тотального введения практики Единого Государственного Экзамена и централизованного тестирования), я считаю, что у вас есть хорошие шансы успешно справиться с этой задачей. Торопитесь!

№ 15 (4,3,2) Докажите, что для любых векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ произвольного евклидова пространства справедливо равенство $\sum\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k a_k\right)^2 = 2^n\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2$, где левая сумма берется по всем 2^n различным наборам чисел $\varepsilon_k \in \{-1,\ 1\}$.

Комментарий. Индукцией, господа! Индукцией по числу векторов! Но если вы знакомы с Единой Теорией Всего, то утверждение задачи может легко получиться у вас и как тривиальное следствие из сто пятьдесят второго и триста шестнадцатого соотношений Великой Системы Уравнений Вселенной в ее канонической форме записи.

№ 16 (6,3,3). Найдите функцию $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такую, что

$$\begin{aligned}
&f(0) = 1,\\
&f(2x) = f(x)\cdot\cos^2 x,\\
&f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0).
\end{aligned}$$

Комментарий. Уже не помню где, я прочитал шутливый совет математикам, пишущим свои статьи в научные журналы: если вы хотите сделать свою статью совершенно непонятной читателю, надо вырвать из середины какого-нибудь доказательства пару страниц и вместо них вставить слово «следовательно». Шутки шутками, но большинство задач становятся «олимпиадными» именно благодаря «большому разрыву» между исходными данными и требуемым заключением задачи или же просто благодаря своей оторванности от контекста, в котором эти задачи возникли.

Вот и предложенная задача первоначально была достаточно рядовым упражнением в классическом учебнике по математическому анализу В. А. Зорича. [1] Однако, как известно, студенты в середине семестра книжек не читают, а если, благодаря этой задаче, они эту книжку откроют, то выйдет только польза.

В этом учебнике предложенная задача находится вот в каком контексте. События разворачиваются в параграфе «Предел функции». В задаче явно указано, что искомая функция непрерывна в нуле, а про ее непрерывность в остальных точках никаких предположений нет. Разумно, однако, сразу считать искомую функцию непрерывной всюду на области определения, ибо предъявление в жюри такой непрерывной функции, конечно, будет считаться решением. Отыскание же всех (в том числе, разрывных) функций, удовлетворяющих условиям задачи, является, на мой взгляд, несоизмеримо более сложной проблемой, чем обсуждаемая олимпиадная задача.

Так вот, в учебнике Зорича сначала идет небольшой рассказ про числовые бесконечные произведения, дается определение сходимости бесконечного произведения и значения бесконечного произведения как предела последовательности его частичных произведений. Затем формулируются два критерия сходимости бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} e_n$ (здесь и далее все $e_n > 0$):

1). Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} e_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln e_n$.

2). Если $e_n = 1 + \alpha_n$ и все α_n одного знака, то бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

[1] *Зорич В. А.* Математический анализ. — М.: Наука, 1981. — Т. 1.

После этого, последовательно, предлагается решить следующие упражнения:

А). Найдите $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n-1})$.

Б). Найдите $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}$ и докажите формулу Виета

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots}}\ldots$$

В). Найдите функцию $f(x)$ такую, что.... И дальше следует наша задача.

К предложенной задаче В. А. Зорич дает указание из семи символов: $x=2\cdot\dfrac{x}{2}$; от себя же я хочу еще добавить, что частичные произведения $P_k=\prod\limits_{n=1}^{k}\cos\dfrac{x}{2^n}$ лучше всего находить, умножая их на $\sin\dfrac{x}{2^k}$. Решите теперь самостоятельно предложенную «олимпиадную» задачу.

№ 17 (6,6,7). Найдите все значения $n\in\mathrm{N}$, $n>1$ и $r_n>0$, для которых на сфере единичного радиуса можно расположить непересекающиеся окружности $C_0, C_1, \ldots, C_n$ радиусов r_n каждую так, чтобы при любом значении $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ окружность C_i касалась окружностей C_0 и C_{i+1} (считаем, что $C_{n+1}=C_1$).

Комментарий. Это очень хорошая «школьная» задача по стереометрии. Придется потренироваться в рассматривании пирамидок внутри сферы, их плоских и двугранных углов. Правильный ответ: $n<6$, а при допустимых значениях $n=2,3,4,5$ радиусы окружностей равны

$$r_n=\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}}.$$

№ 18 (4,3,3). Докажите, что если число $1+2^n+4^n$ простое, то n — степень тройки.

Комментарий. Это довольно простое теоретико-числовое наблюдение. Докажите сначала, что число $1+2^n+4^n$ всегда делится на число $1+2^{3^k}+4^{3^k}$, где k — наибольшая степень тройки в разложении n

на простые множители. После этого утверждение задачи становится очевидным и дальнейшие комментарии к нему излишни. Правда, будет весьма полезно подумать, как изменится утверждение задачи и ход ее решения для выражения $1 + 5^n + 25^n$ и в чем тут дело?

№ 19 (15,15,15). Пусть p и q — произвольные натуральные числа. Докажите, что существует такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что для всех x из некоторого интервала $I \subseteq \mathsf{R}$ длины $1/q$ выполнено неравенство

$$\left|P(x) - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Комментарий. Формулировка этой задачи сильно напоминает классический факт из теории приближения действительных чисел рациональными числами — всякое иррациональное число допускает степенной порядок приближения $1/q^2$. Это означает буквально следующее: для любого иррационального числа $\alpha \in \mathsf{R}$ неравенство

$$0 < \left|\alpha - \frac{r}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

имеет бесконечное множество решений $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, следовательно, знаменатели q всех решений неограничены. Знание этого факта может сильно сбить с толку при попытках решить представленную олимпиадную задачу, учитывая, что эта задача сама по себе весьма непроста. В упомянутом классическом факте число α является данным, а числа (p, q) необходимо подбирать так, чтобы неравенство оказалось выполненным. В нашей же задаче как раз наоборот — числа (p, q) зафиксированы, а подбирать необходимо интервал $I \subseteq \mathsf{R}$ заданной длины и многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами.

Но даже участникам, необремененным излишними знаниями про приближения действительных чисел, вероятно, не сразу придет в голову, что (при $q > 1$) можно попробовать рассмотреть интервал $I = \left(\dfrac{1}{2q}, \dfrac{3}{2q}\right)$ как раз длины $\dfrac{1}{q}$. Так как $\dfrac{3}{2q} < 1$, можно подобрать число $m \in \mathbf{N}$ такое, что $\left(\dfrac{3}{2q}\right)^m < \dfrac{1}{q}$. Далее, можно составить вот такую разность $1 - \left(\dfrac{1}{2q}\right)^m$ и обозначить ее буквой φ. После этого в голову может прийти мысль выбрать натуральное число n столь большим, чтобы выполнялось $\varphi^n < \dfrac{1}{pq}$. После этого возможно, вам покажется уже совершенно естественным взять в качестве искомого многочлена полином

$$P(x) = \frac{p}{q}\Big(1 - (1 - qx^m)^n\Big)$$

и проверить, что, во-первых, все коэффициенты у него — целые числа, и что, во-вторых, он удовлетворяет неравенству, указанному в задаче, при всех x из заблаговременно выбранного интервала I. Вот такая дичь. Однако читателям, знакомым с доказательствами трансцендентности чисел e и π (предложенными, соответственно, Ш. Эрмитом и Ф. Линдеманом [1])), идея подобного подбора многочлена достаточно высокой степени, слабо уклоняющегося на данном интервале от заданного значения, покажется вовсе не «дикой», а вполне разумной и, уж точно, — не новой.

№ 20 (5,2,2). Пусть A и B — группы. Докажите, что если $A \times Z_p \cong B \times Z_p$ для некоторого простого p, то $A \cong B$.

Комментарий. Когда эта задача была представлена на олимпиаде, я, конечно, понимал, что она совсем не сложна, но не ожидал, что ее решат вообще все участники, даже первокурсники, на которых она, собственно и была рассчитана. Специалист по теории групп вообще скажет — что тут решать, ведь если группа G разложима в прямые произведения $G = A \times B$ и $G = A \times C$, то $B \cong C$. Ну так, дорогие читатели, запишите аккуратно доказательство требуемого утверждения и с легким сердцем переходите к следующей задаче!

№ 21 (10,8,8). Верно ли, что для любого отображения $f : \mathsf{Q} \to \mathsf{Q}$ найдутся три биекции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathsf{Q} \to \mathsf{Q}$ такие, что $f = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$.

Комментарий. Да, это действительно так, три такие биекции всегда можно построить, глядя на отображение f. Мой вам совет — воспользуйтесь тем, что все рациональные числа можно без повторений выстроить в последовательность $r_1, r_2, \ldots$ и рассмотрите последовательность значений $f(r_1), f(r_2), \ldots$. Вам, по сути, надо построить три таких последовательности $\{v_i^{(1)}\}$, $\{v_i^{(2)}\}$, $\{v_i^{(3)}\}$, что $f(r_i) = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + v_i^{(3)}$, причем $\{v_i^{(1)}\} \cup \{v_i^{(2)}\} \cup \{v_i^{(3)}\} = Q$ и каждое рациональное число встречается в этом объединении точно по одному разу. Немножко изобретательности и задача будет решена.

№ 22 (6,5,5). Штирлиц шифровал короткие донесения в центр. Текст сообщения (без пробелов, на русском языке) шифруется кодовым словом (известным центру) по следующему правилу: k-я буква шифровки имеет в русском алфавите номер,

---

[1]) С этими доказательствами можно познакомиться, например, в книжке: *Сизый С. В.* Лекции по теории чисел. — М.: Физматлит, 2007.

равный сумме по модулю 33 номеров k-х букв текста и кодового слова. Пример:

$$\begin{array}{l} \text{ВСЁХАНА} \\ \underline{\text{АБИТУРИЕНТ}} \\ \text{ГУПИФЯЙ} \end{array}$$

Помогите Мюллеру, знающему только обычную подпись Штирлица (Юстас), найти исходный текст и кодовое слово к шифровке:

РШДЫНЕЯТГГЭЦЫХПД.

Комментарий. Мне кажется, что эта задачка по основам криптографии в особых комментариях не нуждается. Почувствуйте себя полноправным сотрудником отдела дешифровки в структуре аппарата внешней разведки!

№ 23 (8,4,3). Докажите, что конечномерное векторное пространство над бесконечным полем нельзя представить в виде объединения конечного числа подпространств меньшей размерности.

Комментарий. Ну, конечно же нельзя! Где вы видели, чтобы конечное число плоскостей, проходящих через начало координат (подпространства размерности два) заполняли все трехмерное пространство? В общем, хорошая и не очень сложная задачка, особенно полезная студентам-первокурсникам, которые еще только начинают усваивать разницу между суммой и объединением подпространств. Рассуждайте и задачка решится!

№ 24 (6,6,7). Найдите все $n \in \mathsf{N}$ такие, что в пространстве R^n существует ограниченный выпуклый многогранник с 6 вершинами и 15 ребрами.

Комментарий. Разнообразие тематики задач нашей олимпиады порой шокирует. Прочитав эту задачу, я некоторое время находился в замешательстве — что же, собственно, надо делать? Потом потихонечку начал вспоминать определения. Гиперплоскостью в аффинном пространстве R^n называется аффинное подпространство размерности $n-1$. Всякая гиперплоскость разбивает R^n на два полупространства. Выпуклым многогранником в R^n называется выпуклая оболочка конечного числа точек. Такой выпуклый многогранник является ограниченным непустым пересечением конечного числа замкнутых полупространств. Размерностью выпуклого многогранника называется минимальная размерность содержащего его пространства. Ага! Значит, для решения задачи достаточно найти минимальную размерность $n \in \mathsf{N}$

такую, что в R^n существует выпуклый многогранник с 6 вершинами и 15 ребрами, а все более высокие размерности автоматически попадают в ответ.

Пересечение выпуклого многогранника с опорной гиперплоскостью называется гранью многогранника, граней конечное число. Каждая грань есть выпуклый многогранник меньшей размерности. Грани каждой грани являются гранями исходного многогранника. Одномерные грани называются ребрами, нульмерные — вершинами. Ограниченный n-мерный выпуклый многогранник имеет не менее $n+1$ вершины и является выпуклой оболочкой своих вершин. Если f_k — число k-мерных граней ограниченного выпуклого многогранника, то выполняется соотношение Эйлера: $f_0 - f_1 + \ldots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}\ldots$. Ну, а дальше, после некоторых раздумий, задача у меня как-то решилась... А у вас?

№ 25 (6,6,7). Найдите все определенные и непрерывные на полуоси $x > 0$ функции $f(x)$, удовлетворяющие функциональному уравнению $f(x^n) = \alpha \cdot f(x)$ при различных фиксированных значениях параметров $n \in \mathsf{N}$ и $\alpha \in \mathsf{R}$.

Комментарий. Эта задача предлагалась на олимпиаде для студентов Московского педагогического института в 1975 г. Она не кажется мне слишком сложной — это танцы вокруг логарифмических функций. Решайте, и задача решится.

№ 26 (0,5,5). Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{1+n^2}$.

Комментарий. О! Тут пахнет рядом Фурье — в числителе «косинус эн», в знаменателе очень характерный «эн квадрат». Эта задача случилась на студенческой олимпиаде мехмата МГУ [1] в 1975 г. Похоже, что перед нами типичная игра в «угадайку». Решение таких задач заключается в том, чтобы отгадать, какую же функцию авторы задачи разложили в ряд Фурье, а потом угадать — какое число они подставили в получившийся ряд Фурье вместо переменной!? В результате таких манипуляций у них возник числовой ряд, сумму которого они, нимало не смущаясь, и попросили вычислить — сами-то они подставляли свое число в исходную функцию, поэтому сумма ряда им самим досталась легко! И не надо, уважаемые читатели, кипеть от возмущения! Подобная технология придумывания задач — предъявление конечного результата с вопросом: «А из чего это получилось?» — довольно часто практикуется на мехмате МГУ даже для абитуриентов на вступительных экзаменах (см. задачу № 134 этой книжки). Уверяю вас, в этом нет абсолютно ничего страшного и ничего плохого! Наоборот, подоб-

---

[1] Механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

ная технология сочинения задач как раз и воспитывает настоящий исследовательский дух, поскольку исследователь, как правило, в своей работе имеет дело с каким-то явлением или эффектом (т. е. «конечным результатом» действия каких-то факторов), а его цель как ученого — докопаться до истинных причин возникновения наблюдаемого явления, т. е. как раз ответить на вопрос: «А из чего это получилось?».

Давайте вернемся к нашей задаче. Представляется разумным предположить, что авторы задачи раскладывали в ряд Фурье четную функцию (в данном ряду только косинусы!) на симметричном относительно нуля промежутке, скажем, на интервале $(-\pi, \pi)$. Я не знаю, как после таких предположений действовали студенты мехмата МГУ в 1975 г. — видимо, перебирали наудачу пришедшие им в голову «разумные» четные функции типа $|x|$, x^2, $\cos\lambda x$, $\operatorname{ch} x$ и т. д., раскладывали их в ряд Фурье на $(-\pi, \pi)$ и смотрели — не получится ли что-нибудь подходящее. Я же поступил очень просто (благо, условия проведения нашей олимпиады позволяют ее участникам сделать также!) — взял толстый справочник по математике и посмотрел, у какой четной функции в знаменателях коэффициентов ряда Фурье стоит $1 + n^2$? Оказалось — у гиперболического косинуса $\operatorname{ch} x$. Более того, мне повезло — в справочнике я наткнулся на функцию

$$f(x) = \frac{\pi}{2\operatorname{sh}\pi} \cdot \operatorname{ch} x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}},$$

которая на промежутке $(-\pi, \pi)$ раскладывается в ряд Фурье

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{1+n^2}.$$

Глядя на этот ряд, легко сообразить, что в него надо подставить $x = 1 - \pi$, ведь $\cos(1-\pi)n = (-1)^n \cos n$ и $(1-\pi) \in (-\pi, \pi)$. После этого все получается уже совсем легко — авторы задачи, оказывается, задумали число $f(1-\pi) - 1/2$. Ну, хитрецы!

Вам же, дорогие читатели, я советую хорошенько запомнить этот прием решения задач — с помощью небольшой интуиции, простых рассуждений и толстого справочника. В некоторых производственных ситуациях он может оказаться крайне эффективным!

Комментарий к найденному решению и ответу. После «победы» над предложенной задачей и написания столь «бравурного» комментария к ней мои восторги от успеха несколько поутихли и, положа руку на сердце, должен признаться вам, уважаемые читатели, что найденный ответ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{1-\pi} + e^{\pi-1}}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2},$$

увы, не принес мне ровным счетом никакого удовлетворения, и вот почему.

Вглядитесь внимательно в полученный ответ — что он собой представляет? Что я нашел? Вот, если бы, в результате вычислений у меня получилось, что сумма исходного ряда равна, скажем, 15, то я, несомненно, удовлетворился бы этим числом и больше ни о чем не переживал. Но ведь у меня получилось нечто совершенно другое! Я выразил искомую сумму ряда через значения некоторых специфических функций. Однако для отыскания этих значений, как известно любому мало-мальски грамотному математику, в свою очередь требуется вычисление сумм других рядов! Действительно, поскольку

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

то, «решив» предложенную задачу, я фактически нашел следующий ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\pi)^n}{n!} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi-1)^n}{n!}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-\pi)^n}{n!}} - \frac{1}{2}.$$

Согласитесь, — выглядит ужасно! Я подменил вычисление суммы ряда из условия задачи вычислением сумм нескольких других рядов, которые (в силу исторических традиций, сложившихся на нашей планете) считаются вычислимыми более просто, но и только! Я уж не стану говорить здесь о сложности вычисления числа π и его степеней — это отдельная песня. Не кажется ли вам, дорогие читатели, что исходная форма записи искомого действительного числа $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{1+n^2}$ гораздо проще и приятнее найденного мною ответа?

В обсуждаемой задаче мы вплотную сталкиваемся с извечными психологическими, мировоззренческими и философскими проблемами всей математики — что следует считать ответом к поставленной задаче? Нужно ли вообще решать поставленную задачу в свете предъявленных требований к будущему ответу? Почему у одних людей (например, у студентов-участников олимпиады МГУ 1975 г.) найденное «решение» вызывает восторг и удовлетворение, а другие люди склонны считать полученный «ответ» бессмысленной подменой одной формы записи действительного числа на другую? Можно ли вообще «найти» сумму данного ряда, и что вообще означает словосочетание «найти сумму» в рассматриваемом контексте? Вопросы, вопросы, вопросы…

В практической деятельности человечества все эти сложные вопросы возникают вследствие неизбежного сопоставления математических моделей и абстрактных результатов с реальными природными явлениями и потребностями пользователя. Математические олимпиады, на мой взгляд, — самое подходящее место для знакомства и обсуждения столь насущных и деликатных проблем нашей науки. Что касается традиционных школьных и вузовских узко-математических состязаний, проводимых в привычном формате, то мои пожелания составителям «типовых» олимпиадных заданий здесь таковы — постараться формулировать задачи так, чтобы их решения не вызывали сомнений в своей завершенности. Например, если бы наша задача с самого начала была предложена в форме: *доказать равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{1+n^2} - \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{e^{1-\pi} + e^{\pi-1}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} \right) = \frac{1}{2};$$

тогда полученное аналитическое выражение для «суммы ряда» и описанные выше манипуляции по его разысканию не породили бы у меня никакого дискомфорта даже после окончания эйфории от «победы над задачей».

№ 27 (10,10,10). Докажите, что любой полный граф с $2n$ вершинами можно покрыть n реберно непересекающимися цепями одинаковой длины.

Комментарий. Непростая задача! Чтобы как-то к ней подступиться, аккуратно нарисуйте на листочке бумаги шести-, восьми- и десятивершинный полные графы, после чего водите по их ребрам цветными карандашами, стараясь покрыть их разноцветными цепями одинаковой длины. Потом, когда вы все-таки будете пытаться доказать утверждение задачи индукцией по n, добавляя на индуктивном шаге к $2n$-вершинному полному графу новую пару вершин, эти цветные рисунки помогут вам легче раскусить, в чем же заключается сложность индуктивного шага и какой хитростью ее преодолеть.

№ 28 (10,9,9). Существует ли непрерывное отображение единичного отрезка $[0, 1]$ на единичный квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ такое, что прообразом каждой точки квадрата являются ровно две точки отрезка?

Комментарий. В 1890 г. итальянский математик Дж. Пеано поразил математический мир, построив непрерывную кривую (отображение) $f : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$, образом которой является единичный квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$. Впоследствии выяснилось, что не только единичный квадрат, но и любые локально связанные множества (т. е. множества, каждая точка которых обладает сколь угодно малой окрестностью, состоящей из точек этого множества) в евклидовом аффинном пространстве произвольной размерности являются непрерывными образами отрезка! Обалдеть! Куб, шар, бесконечномерный параллелепипед с красивым названием «Гильбертов кирпич» — все это непрерывные образы единичного отрезка! Это следствие одной замечательной общей теоремы, называемой теперь теоремой Хана–Мазуркевича. Однако в примере Пеано и в теореме Хана–Мазуркевича вовсе не идет речи о таких специфических свойствах устраиваемых там непрерывных отображений единичного отрезка, как инъективность или наличие у образов отображения заданного количества прообразов. Вам предстоит самостоятельно выяснить возможность присутствия у отображения одного из таких свойств.

Как обычно, у студентов, привыкших «ко всему готовенькому», наибольшее «раздражение» вызывает именно приведенная здесь формулировка задачи: «Существует ли...?». Сказали бы прямо — докажите, что существует, или — докажите, что не существует! А то ведь сразу и непонятно за что браться — то ли пример такого отображения строить, то ли опровергать его существование. Придется пробовать и то, и другое одновременно. Но именно такая формулировка и придает задаче настоящий исследовательский аромат, которого как раз не надо чураться! Будем смело осваивать азы научной деятельности!!!

После такого количества восклицательных знаков нужно отдышаться и спокойно приступить к решению задачи.

№ 29 (6,6,7). Найдите минимум суммы расстояний от фиксированной точки T трехмерного пространства до точек A, B и C, которые могут свободно передвигаться по трем скрещивающимся прямым a, b и c соответственно.

Комментарий. Решение предложенной олимпиадной задачи не должно вызвать у вас каких либо серьезных затруднений — точка T пространства зафиксирована, из нее можно опустить перпендикуляры на данные прямые.... Мне представляется более интересной другая (похожая на исходную) задача, где скрещивающиеся прямые по прежнему зафиксированы, а точке T разрешено двигаться. Требуется отыскать такую точку трехмерного пространства, что сумма расстояний от нее до трех данных скрещивающихся прямых минимальна. В подобных задачах, где идет абстрактная речь о трех скрещивающихся прямых в пространстве, всегда, по сути, идет речь о параллелепипеде, на ребрах которого эти прямые лежат. Такая интерпретация трех скрещивающихся прямых значительно облегчает умозрительное разглядывание воображаемой картинки, делая это занятие доступным даже во время поездки в трамвае. Не кажется ли вам, что искомая теперь точка T должна лежать где-то внутри этого параллелепипеда?

№ 30 (6,6,7). Единичный квадрат разбит на многоугольники (быть может, невыпуклые). Докажите, что если каждый из многоугольников помещается в круг диаметра $1/30$, то хотя бы один из этих многоугольников соприкасается (хотя бы в одной точке) не менее чем с шестью соседями.

Комментарий. Задач, подобных этой, на свете придумано великое множество. Это очень изощренная вариация на тему принципа Дирихле: если в n клетках сидит $n+1$ кролик, то, по крайней мере, в одной из клеток сидит не менее двух кроликов. В разных пособиях (направленных, видимо, на разную целевую аудиторию) этот принцип объясняется на всевозможных примерах — кролики в клетках, шары в урнах, заключенные в камерах и т. д., но везде суть одна и та же — много объектов размещается в малое количество мест. Вот и в нашей задаче возникает достаточно много многоугольников (в силу их малого диаметра), а размещены они все оказываются на малой площади, в единичном квадрате. Естественно, что эти интуитивные соображения являются ключом к решению нашей задачи. Отмечу только, что наши студенты на олимпиаде справились с этой задачей почти поголовно.

№ 31 (15,10,10). Найдите все значения параметра $a \in \mathsf{R}$, для которых уравнение $f(x) = f(x+a)$ имеет решение для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[0,\ 1]$ и принимающей на его концах равные значения.

Комментарий. О, это — классика! Этой красивой задаче уже много-много лет. Именно с решения этой задачи на первом курсе началось мое увлечение математикой не как сундуком сведений, а как изумительным стилем мышления. Отрезок какой длины a можно своими концами горизонтально (обязательное условие!) положить на график любой непрерывной на отрезке $[0,\ 1]$ функции с равными значениями на его концах? Невероятным образом оказывается, что длина такого отрезка может быть только числом вида $1/n$, где $n \in \mathsf{N}$. Потом я неоднократно вспоминал эту задачу, как хороший друг она продолжала приносить мне радость, давая возможность размышлять над своими вариациями. Пофантазируйте на ее тему! А что, если замкнуть отрезок $[0,\ 1]$ в окружность? А если рассмотреть оператор сдвига $f(x) \mapsto f(x+a)$ на пространстве непрерывных функций (уточните, каких?), то что же такое представляет собой ответ предложенной задачи для этого оператора? А если оператором сдвигать не числовую ось, а вращать окружность? И т. д., и т. п...

№ 32 (7,7,7). Даны n бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий. Докажите, что если прогрессии целочисленные и каждые две из них имеют общий член, то и все n прогрессий имеют общий член. Покажите, что для нецелочисленных прогрессий это может быть неверно. Докажите, что если арифметические прогрессии — произвольные и каждые три из них имеют общий член, то и все они имеют общий член.

Комментарий. Хорошая задачка, в которой естественно используются древнегреческие понятия соизмеримости отрезков и от которой веет началами современной теории Рамсея. Я не думаю, что в этой задаче нужно что-либо подсказывать — аккуратно рассуждайте и самостоятельно ищите ее решение, она не совсем проста, но и не запредельно сложная.

№ 33 (5,5,5). Докажите, что любая конечная последовательность цифр может являться началом десятичной записи некоторой степени двойки.

Комментарий. Да, это действительно так. Для доказательства данного утверждения нужно лишь понять, как в этой ситуации удачно применить знаменитый принцип Дирихле о большом количестве кроликов, расселяемых в малое количество клеток, и все будет «в шоколаде». А, может, вам удастся сделать большее — понять, что нужно приписать справа к данной конечной последовательности цифр, чтобы получилась десятичная запись степени двойки?

№ 34 (0,7,7). Привет от кафедры теоретической механики. Шар радиуса R вращается вокруг своего центра, который неподвижен. В момент, когда угловая скорость шара $\vec{\omega}$ и его угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ взаимно перпендикулярны, а их модули подчиняются условию $\varepsilon = \omega^2$, найдите те точки на поверхности шара, ускорения которых коллинеарны $\vec{\omega}$.

Комментарий. Обратите внимание, сама формулировка задачи требует очень быстрого отыскания решения — точки нужно найти в момент, т. е. за один тот краткий миг, когда угловая скорость и угловое ускорение перпендикулярны. И не раньше, и не позже! Но шутки шутками, а с этой задачей (как и со многими другими задачами по теоретической механике) студенты-математики справлялись плохо. Видимо, все-таки, теоретическая механика подразумевает довольно специфический стиль размышлений, использование так называемых «физических соображений» и определенную физическую интуицию для математической формализации поставленной задачи (математического моделирования) и последующего ее математического решения. Умение математически моделировать физические явления систематически воспитывают у студентов-физиков (разумеется, в подобающих институтах, скажем, в МФТИ), но практически не уделяют этому внимания при подготовке «чистых» математиков. Это большой пробел! Одной только «чистой» математикой в современном мире выпускник-математик не проживет!

Что касается нашей задачи — описывайте вращение шара вокруг неподвижного центра каким-нибудь образом (скажем, углами Эйлера), вычисляйте угловую скорость и угловое ускорение, запишите на математическом языке условия задачи и задача решится! А вы почувствуете себя истинным Homo Sapiens, настоящим укротителем дикой природы силами разума.

№ 35 (6,6,7). Внутри правильного тетраэдра с ребром a летает муха, опьяненная ощущением свободы. Какой наименьший по длине замкнутый путь должна пролететь эта муха, чтобы побывать на всех гранях тетраэдра?

Комментарий. Это, должно быть, очень разумная муха! Наследить на каждой грани, вернуться в исходную точку да еще затратить при этом как можно меньше бензина! Вот если бы все опьяненные ощущением свободы вели бы себя столь же разумно! Как далеко вперед шагнула бы уже Россия!

Замкнутый путь наименьшей длины внутри тетраэдра отгадать несложно — это замкнутая четырехзвенная пространственная ломаная, соединяющая «хитро выбранные» точки на гранях тетраэдра (только не надо сразу думать, что это центры его граней, поищите и другие варианты!). Чуть больше усилий придется приложить, чтобы доказать минимальность длины этого пути. Это довольно частое явление в математике, когда строгое доказательство достаточно очевидной гипотезы требует значительных усилий — вспомните хотя бы изопериметрическую задачу: круг является фигурой наибольшей площади среди всех фигур данного периметра — «очевидный», но довольно сложно доказываемый факт.

№ 36 (8,6,4). Сообразите, при каких $n \in \mathsf{N}$ существует непрерывная в интервале $(0, 1)$ функция, принимающая каждое свое значение ровно n раз? Постройте пример такой функции для тех $n \in \mathsf{N}$, для которых это возможно.

Комментарий. Это — хорошая и понятная задача, самостоятельное решение которой принесет начинающему студенту-математику много пользы и ощущение уверенности в себе. Начинающим рекомендую сразу рассматривать функции, заданные не в интервале $(0, 1)$, а на всей действительной прямой $\mathbf{R}$ — для нашей задачи это ведь то же самое! Меня же не покидает ощущение, что предложенная задача имеет нечто общее с классической задачей № 31 из этой книжки, прелестями размышлений над вариациями которой я уже восторгался ранее в комментариях.

№ 37 (1,1,1). Разминка: вычислите произведение $(a + bi)\times$ $\times(c + di)$, выполнив лишь 3 умножения и 5 сложений вещественных чисел.

Комментарий. Это действительно легкая разминка для студентов-первокурсников и смышленых школьников. Обсуждать тут, собственно, нечего.

№ 38 (3,3,3). Прямая делит треугольник на две части равной площади и равного периметра. Докажите, что центр вписанной окружности лежит на этой прямой.

Комментарий. Несложная геометрическая задача, требующая для своего решения стандартного среднешкольного уровня предварительной подготовки.

№ 39 (7,4,2). Какую долю от объема n-мерного куба составляет объем вписанного в него n-мерного шара?

Комментарий. Предложенная задача — весьма любопытная для начинающих математиков встреча с многомерной геометрией. С n-мерным кубиком все понятно — объем n-мерного куба с ребром a, по определению, равен a^n и все тут. Решение задачи, таким образом, упирается в знание или отыскание объема шара. А вот n-мерный шар, должен сказать вам, — жутко любопытное образование, таящее в себе порой весьма неожиданные свойства. Прежде всего, уточню, что под n-мерным шаром (с центром в начале координат) в этой задаче понимается множество точек аффинного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + \ldots + (x_n - c_n)^2 \leqslant r^2$, где r — радиус шара, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — координаты некоторой фиксированной точки, называемой центром шара. Шар, таким образом, это множество всех точек пространства, расположенных от точки-центра на расстоянии не больше r. На олимпиаде подразумевалось, что участники приведут в своих решениях вычисление объема $V_n(r)$ n-мерного шара радиуса r — это сама по себе нетривиальная задача, что становится особенно понятным, если взглянуть на ответ:

$$V_n(r) = \frac{n/2}{\Gamma(n/2+1)} r^n = \frac{S_{n-1}}{n} r.$$

Здесь $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$ — гамма-функция Эйлера; S_{n-1} — поверхность граничной сферы. Пять примеров: $V_1(r) = 2r$, $V_2(r) = \pi \cdot r^2$, $V_3(r) = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3$, $V_4(r) = \dfrac{\pi^2}{2} \cdot r^4$, $V_5(r) = \dfrac{15}{8}\pi^2 r^5$,… далее считайте сами, используя известные свойства гамма-функции — для натуральных k выполнено $\Gamma(k+1) = k!$ и $\Gamma\left(k + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}$. Видно, что для получения такой формулы объема n-мерного шара от участника олимпиады требуется порядочная изобретательность в вычислении интегралов. Напишите теперь самостоятельно ответ к поставленной олимпиадной задаче об отношении объема шара и куба, а в качестве упражнения и довеска к обсуждаемой задаче я предлагаю вам самостоятельно доказать поразительное свойство многомерных шаров — с увеличением размерности шара, весь его объем «концентрируется» у его поверхности, а именно:

$$\frac{V_n(r) - V_n(r-\varepsilon)}{V_n(r)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

при любом сколь угодно малом фиксированном $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < r$. Объем сколь угодно тонкого верхнего слоя n-мерного шара почти равен объему самого шара при достаточно большом значении размерности! Это никак не укладывается в нашу интуицию, вскормленную трехмерным миром.

№ 40 (45,45,45). Какие значения может принимать отношение длин сторон прямоугольного листа, из которого можно склеить лист Мёбиуса, не разрывая и не сминая листа бумаги.

Комментарий. Это еще одна из убойных задач нашей олимпиады — ответ на вопрос этой задачи до настоящего времени неизвестен, получены только некоторые оценки требуемого отношения. Каждому ясно, что тонкую длинную полоску серпантина легко перекрутить и склеить концами в лист Мёбиуса, а из квадратного листа бумаги лист Мёбиуса склеить вряд ли удастся. Делайте что хотите, формализуйте задачу и решайте так, как вам шепнет само провидение ...

№ 41 (8,7,6). Верно ли, что если все корни многочлена $p(z)$, $z \in \mathsf{C}$, лежат в верхней полуплоскости, то и все корни его производной лежат в верхней полуплоскости?

Комментарий. Самая важная подсказка к задаче в подобной формулировке — да, верно. Более того, известна замечательная теорема Гаусса–Люка, утверждающая, что корни производной всякого многочлена принадлежат выпуклой оболочке корней самого многочлена. Тем участникам олимпиады, которые знают эту теорему (и, что еще лучше, — ее доказательство), жизнь становится легче на одну задачу. Это несколько опровергает известную сентенцию о том, что «знания умножают печаль».

№ 42 (6,5,4). Пусть многочлены $p(x)$ и $q(x)$ с действительными коэффициентами принимают целочисленные значения в одних и тех же точках. Доказать, что $p(x) - q(x)$ либо $p(x) + q(x)$ есть константа.

Комментарий. Это опять задача нацеленная, в основном, на первокурсников, поскольку она не требует для своего решения никаких специфических знаний, зато воспитывает умение грамотно проводить математические рассуждения. Начинайте рассуждать — обозначьте как-нибудь те точки, где оба многочлена принимают целочисленные значения; поймите, почему таких точек бесконечно много; составьте, если угодно, таблицу значений данных многочленов в этих точках; сообразите, почему эти многочлены обязаны быть одинаковой степени и т. д., и т. п...

№ 43 (25,20,20). Пес и хозяин оказались на противоположных берегах реки один напротив другого. Псина бросилась в воду и поплыла, все время держа курс на хозяина, со скоростью, которая в стоячей воде составила бы 2 километра в час. Скорость течения реки постоянна. Хозяин заметил, что собаку перестало сносить течением, лишь когда она преодолела $2/3$ ширины реки, и что, переплывая реку, псина затратила на 5 минут больше времени, чем на преодоление расстояния, равного ширине реки, в стоячей воде. Найдите, пожалуйста, ширину реки.

Комментарий. Это отменная оригинальная задача принадлежит Дж. Рейнольдсу (хотя эта задача и носит ярко выраженный «физический» характер, это вовсе не тот Рейнольдс, именем которого названа характеристика течения вязких жидкостей и газов — неизоморфных Рейнольдсов оказывается было минимум двое!) и опубликована на русском языке в ставшем уже библиографической редкостью сборнике: «Избранные задачи из журнала American Mathematical Monthly, 400 задач». — М.: Мир, 1977. В этом сборнике приводится решение предложенной задачи, которое, надо сказать, весьма непростое, но вполне понятное. Правильный ответ таков — ширина реки $1/2$ километра и собака переплывает ее за 20 минут.

№ 44 (16,16,15). Докажите, что если числа a, b, c при каждом натуральном n удовлетворяют равенству $[na] + [nb] = [nc]$, где $[x]$ — целая часть числа x, то хотя бы одно из чисел a, b является целым.

Комментарий. Весьма непростая задача с математической олимпиады 1983 г. в Народной Республике Болгарии. Решение этой задачи потребует минимума предварительных математических фактов и максимума умения проводить рассуждения с этими фактами. Докажите, сначала, что из условия задачи вытекает равенство $a + b = c$. Затем, рассуждая от противного, рассмотрите отдельно случаи, когда оба числа a, b рациональны, и, когда хотя бы одно из чисел a, b иррационально (во втором случае вам не обойтись без знаменитого принципа Дирихле про размещение $n+1$ зайца в n клетках). Должен сказать вам, что даже после этих подсказок вам вряд ли удастся решить эту задачу за два часа — на нашей олимпиаде за двое суток ее решили всего три участника.

№ 45 (6,6,7). На плоскости поставлено бесконечное число точек так, что всевозможные расстояния между любыми двумя точками — целые числа. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой. Укажите способ расстановки любого конечного числа точек на плоскости так, что все расстояния между любыми двумя точками — целые числа и эти точки не лежат на одной прямой.

Комментарий. Это классика комбинаторной геометрии! Довольно легко расставить на плоскости конечное число точек так, что все расстояния между ними будут целыми числами. Возьмите единичную окружность и поставьте на ней точки так, чтобы синусы всевозможных центральных углов между ними были рациональными числами (как этого добиться — придумайте самостоятельно, в этом соль задачи). Поскольку радиус окружности равен единице, рациональность синусов будет означать, что всевозможные попарные расстояния между поставленными точками суть рациональные числа. Теперь раздуйте (преобразованием подобия) единичную окружность в подходящее число раз (в общий знаменатель всех рациональных расстояний между точками) и все расстояния между вашими точками станут целыми! Этот пример — стандарт, стереотипное применение нашего математического опыта. Куда больше сообразительности потребуется для доказательства прямолинейного расположения бесконечного числа точек на целочисленных расстояниях друг от друга — доказательство этого факта весьма изящно и нетривиально. Фантазируйте, например, от противного, и успех будет. Если же, не смотря ни на что, успех так и не приходит к вам, то советую познакомиться с темно-красненькой книжкой: *Хадвигер Г., Дебруннер Г.* Комбинаторная геометрия на плоскости. — М.: Наука, 1965. В этой книжке вы найдете решение предложенной олимпиадной задачи и получите удовольствие от знакомства со многими другими красивыми вопросами комбинаторной геометрии.

№ 46 (6,6,7). Может ли функция $x^2 \sin x$ быть решением на интервале $(-a, a)$, $a > 0$, уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, где $p(x)$, $q(x)$ непрерывны на $(-a, a)$?

Комментарий. Нет, не может. Наконец-то встретилась задача про дифференциальные уравнения! Да еще и про линейные! Вспомните свойства решений линейных дифференциальных уравнений, и задача решится.

№ 47 (0,40,35). Докажите, что в четномерном евклидовом аффинном пространстве любая кривая с постоянными кривизнами лежит на сфере, а в нечетномерном пространстве — на цилиндре.

Комментарий. Это — хорошая творческая задача по дифференциальной геометрии кривых, вскрывающая удивительный факт мироздания — вид кривых с постоянными кривизнами в четномерных и нечетномерных пространствах сильно различается! Казалось, ну, чем таким принципиальным отличаются друг от друга пространства $\mathbf{R}^{127}$ и $\mathbf{R}^{128}$? Оказывается, они различаются видом лежащих в них кривых! Решение предложенной задачи можно найти на последних шести страницах книжки: *Ю. А. Аминов.* Дифференциальная геометрия и топология кривых. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. В этой книжке для изучения кривых применяется весьма громоздкий метод — рассмотрение уравнений Френе данной кривой как системы дифференциальных уравнений, которую надо решить, чтобы исследовать свойства полученных решений.

В процессе подготовки олимпиадных заданий мне удалось отыскать более наглядный геометрический подход к исследованию кривых. Я рассмотрел пространственный аналог понятия эволюты плоской кривой, и этот подход с успехом привел к решению предложенной задачи, перекрыв результаты последних шести страниц книжки Ю. А. Аминова, поскольку он позволил даже вычислить радиусы искомых сфер и цилиндров. Теперь этот метод опубликован в учебнике для университетов: *С. В. Сизый.* Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Физматлит, 2007.

К моему искреннему удивлению, четверо участников олимпиады того года, совершенно независимо друг от друга, справились с поставленной задачей в случае пространств четной размерности (более легкая часть задачи). Не сговариваясь, они действовали точно таким же «геометрическим» методом, который пришел мне в голову двумя неделями раньше, и получили правильный результат! Более того, двое участников так увлеклись, что спустя полмесяца после олимпиады они добили эту задачу и для случая пространств нечетной размерности, что стало основой их отличной курсовой работы и началом их самостоятельной научной деятельности.

По поводу этого случая мне приходят в голову две мысли, к которым я не знаю как относиться — хорошо это или плохо? Мысль первая: в процессе обучения на факультете мы каким-то образом приучаем студентов мыслить «шаблонно», сообразно своему восприятию математики (я почти уверен, что студенты Ю. А. Аминова, не сговариваясь, решали бы эту задачу по-другому). Мысль вторая: всякая качественно выполненная работа приносит результатов больше, чем от нее первоначально предполагалось получить.

№ 48 (10,9,8). Постройте континуальное семейство таких подмножеств натурального ряда, что для любой пары этих подмножеств одно из них содержится в другом.

Комментарий. Построение такого семейства множеств является не просто неожиданным красивым приемом, так сказать, игрой «чистого разума», это довольно часто употребляемый в научных исследованиях факт. На построении подобных семейств множеств натуральных чисел основываются, например, некоторые исследования различных типов аксиоматизируемости классов алгебраических систем и разнообразных вопросов родственной проблематики (отсутствие или наличие независимой системы аксиом у данного класса, конечная или бесконечная базируемость класса, устройство решетки его подклассов и т. п.). Поставленная олимпиадная задача является, таким образом, еще и утилитарным инструментом в научной работе математика-исследователя, и с этим инструментом неплохо ознакомиться заранее.

Требуется построить континуальное семейство множеств $\{N_\alpha\}$. Для этого построения занумеруйте натуральными числами (без повторений) все рациональные числа действительной прямой и рассмотрите множества рациональных чисел $Q_\alpha = \{x \in \mathbf{Q} | x < \alpha\}$ для каждого действительного числа $\alpha \in \mathbf{R}$. Ясно, что таких множеств континуум, что $Q_\alpha \subset Q_\beta$ при $\alpha < \beta$ и что натуральные номера элементов этих множеств (т. е. соответствие $Q_\alpha \mapsto N_\alpha$) имеют непосредственное отношение к решению нашей задачи. Дай Бог вам силы решить теперь эту задачу до конца, не обращаясь за помощью к старшим товарищам! Я прошу только об одном — надо хорошо понимать, что наша «дьявольская» изобретательность в построении примера обусловлена не каким-то сверхъестественным озарением, а изначальным четким пониманием — если два любых множества из семейства $\{N_\alpha\}$ должны быть сравнимы, то на континуальном множестве их индексов надо организовать линейный порядок! А что может быть лучше естественного линейного порядка на множестве действительных чисел?!

№ 49 (2,2,2). Найдите все непрерывные всюду определенные функции $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$, переводящие любое открытое множество в замкнутое.

Комментарий. Константы. А что, может быть, есть еще какие-нибудь такие функции?

№ 50 (45,35,35). Докажите, что для любых четырех точек на плоскости некоторое расстояние между двумя из этих точек не является нечетным целым числом.

Комментарий. Неожиданно, правда?! Мы тысячу раз ходили мимо четырех точек на плоскости и даже не задумывались о том, что все расстояния между ними не могут быть одновременно нечетными целыми числами! Эта эффектная задача, имеющая отношение к «евклидовой» теории Рамсея, почерпнута мной из книжки: *Грехем Р.* Начала теории Рамсея. — М.: Мир, 1984. В этой книжке она находится в контексте изумительных и сложных результатов про рамсеевские конфигурации в евклидовых пространствах и ее решение довольно естественно вытекает из этих результатов. Однако, как показал практический опыт, эту задачу можно решить и не будучи знакомым с основами рамсеевской теории. Правда, чтобы участники нашей олимпиады отыскали элементарное решение этой задачи, ее пришлось включать в списки олимпиадных заданий в течении трех лет подряд. Идея решения проста. Четыре точки в одной плоскости — это три компланарных вектора, это равенство нулю определителя, составленного из координат этих векторов. Если предположить противное, т. е. нечетность всех попарных расстояний между данными точками, то можно прийти к противоречию. Для этого придется показать невозможность равенства нулю подобного определителя из трех компланарных векторов, рассматривая это равенство по подходящему модулю (кажется, по $\bmod 8$). А может, вы найдете другой элементарный способ решения предложенной задачи?

№ 51 (15,10,10). На плоскости нарисовано k точек. Игра состоит в том, что двое по очереди соединяют какую-либо пару точек кривой линией, на которой ставится новая точка. Из каждой точки должно выходить не более трех линий и линии не должны пересекаться. Выигрывает тот, кто проведет последнюю линию.

а). Докажите, что при любом k игра кончается.

б). Найдите оптимальную стратегию при $k = 2$.

в). Найдите оптимальную стратегию при любом k.

Комментарий. О, эта игра — прекрасное «тихое» развлечение для студентов во время нудных лекций. Можно спокойно, без шума и разговоров, играть в нее где-нибудь на задней парте, не рискуя быть «застуканным» преподавателем и не опасаясь попасть под его праведный гнев. Поиграйте сначала в эту игру, а потом и задача решится сама собой.

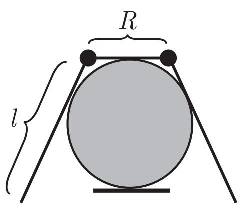
№ 52 (45,45,45). Докажите, что:

1). При любом раскрашивании плоскости в три цвета всегда найдется треугольник единичной площади с одноцветными вершинами.

2). При любом раскрашивании плоскости в два цвета всегда найдется прямоугольный треугольник единичной площади с одноцветными вершинами.

Комментарий. Это решенные, но очень сложные задачи рамсеевского типа. Если вам не удастся решить их самостоятельно, посмотрите некоторые соображения по поводу подобных задач в книжке: *Грехем Р.* Начала теории Рамсея. — М.: Мир, 1984. Подивитесь сложности приведенных там доказательств и, вполне вероятно, это избавит вас от необоснованного возникновения комплекса неполноценности по поводу неспособности решить предложенные задачи за один–два дня. Помните, что основная польза от подобных задач сокрыта в размышлениях над ними, а не в немедленном «кавалерийском» их решении — поверьте, взятие «наскоком» таких задач невозможно.

№ 53 (15,14,13). Три однородных стержня одинаковой линейной плотности соединены шарнирами и свободно лежат на поверхности гладкого цилиндра радиуса R (см. рисунок). Длина среднего стержня равна радиусу цилиндра. Какой длины l должны быть крайние стержни, чтобы средний стержень оторвался от поверхности цилиндра? При каком значении l средний стержень поднимется над цилиндром на высоту $R/2$?



Комментарий. Очередной привет с кафедры теоретической механики. Секрет решения подобных задач — полное погружение своего разума в сущность рассматриваемого явления. Странно, что эту не очень сложную задачу, предложенную на нашей олимпиаде в 2000 г., никто из участников не решил. Видимо, просто руки не дошли…

№ 54 (3,2,1). Приведите пример двух матриц A и B одинакового порядка таких, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} B^n$ существуют, а предел $\lim\limits_{n\to\infty} (AB)^n$ не существует.

Комментарий. Это — очень простая задача, и комментировать тут, собственно, нечего. Проявите небольшую изобретательность, и нужный пример возникнет.

№ 55 (10,4,3). Докажите, пожалуйста, что любой гомоморфизм аддитивной группы поля положительной характеристики в его мультипликативную группу переводит все элементы поля в единицу.

Комментарий. Перед вами не очень сложная задача со студенческой олимпиады мехмата МГУ 1976 г. — надо лишь немного порассуждать, и задача решится. Следите внимательно.

Пусть характеристика данного поля $\mathbf{F}$ равна p. Известно, что p обязано быть простым числом. Тогда в этом поле $(x-1)^p = x^p + (-1)^p$, поскольку в разложении левой части равенства по «биному Ньютона» все «внутренние» биномиальные коэффициенты $C_p^k = \dfrac{p!}{k!\,(p-k)!}$, $0 <$ $< k < p$, очевидно делятся на p. Значит, в поле $\mathbf{F}$ при $p > 2$ (т. е. p — нечетно), выполнено: $(x-1)^p = x^p - 1$, откуда следует, что в этом поле имеется единственный корень p-й степени из единицы и он равен единице. Если же характеристика поля $\mathbf{F}$ равна 2, то $(-1)^2 = 1$ и единственность квадратного корня из единицы вообще очевидна. Эти нехитрые соображения о единственности корня из единицы являются ключом к решению предложенной задачи.

Действительно, устроим гомоморфизм $\varphi : \mathbf{F}^+ \to \mathbf{F}^*$ аддитивной группы $\mathbf{F}^+$ нашего поля в его мультипликативную группу $\mathbf{F}^*$. Нет сомнения, что $\varphi(0+a) = \varphi(0)\varphi(a)$, значит, $\varphi(0) = 1$. Ну, теперь совсем очевидно, что для любого элемента $a \in \mathbf{F}$ выполнено:

$$1 = \varphi(0) = \varphi(\underbrace{a + a + \ldots + a}_{p \text{ раз}}) = \varphi^p(a),$$

следовательно, $\varphi(a) = 1$. Вот и все.

Какие факты нужно было знать заблаговременно для решения предложенной задачи? Реально нам потребовались два факта. Во-первых, характеристика p произвольного поля, в случае своей положительности, является простым числом. Во-вторых, «внутренние» биномиальные коэффициенты C_p^k делятся на это простое число p. Из этих фактов решение задачи вытекает легко. Впрочем, в курсе общей алгебры, который читается на нашем факультете, прямо на лекции в явном виде отмечается, что в поле простой характеристики p выполнены тождества $(x \pm y)^{p^n} = x^{p^n} \pm y^{p^n}$. Такая информация делает ненужным весь первый абзац из приведенного мной решения задачи, а саму задачу переводит из ранга «олимпиадных» в ранг «стандартных экзаменационных».

Нет сомнения, однако, что эта задача совершенно недоступна лицам, не понимающим смысла простых русских народных прилагательных «аддитивная» и «мультипликативная». Слава Богу — среди наших студентов таковых не оказалось, и с представленной задачей успешно справились почти все участники нашей олимпиады.

№ 56 (6,6,7). На координатной плоскости задана полоса $kx + b_1 \leqslant y \leqslant kx + b_2$, где k — иррационально; b_1 и b_2 — любые действительные числа ($b_1 < b_2$). Докажите, что:

а). В этой полосе содержится бесконечно много точек с целочисленными координатами.

б). Любая прямая на плоскости содержит разве лишь конечное число точек из этой полосы с целочисленными координатами.

Комментарий. Роскошная задача про несоизмеримость отрезков рациональной и иррациональной длины, вполне доступная даже школьникам старших классов. Предложенная задача не совсем тривиальна, поэтому рассуждайте внимательно и аккуратно.

№ 57 (10,10,10). Расшифруйте и решите ниженаписанную задачу:

Мьг фхркьчэщ дпхмйшыма цлрзтбш я пр мшълрдшф йьрлр щ тшрьънювп щр дэцэ ыш рвячуфт. Ощичрурь, бэм ещыгыпцжйпцъ йкхма цлрзтбщ жш чмыэць зкнгд ппждтбг.

Комментарий. Наконец-то в нашей книжке встретилась задача по криптографии, да еще плавно переходящая (после своей дешифровки) в задачу по алгебре. Посмотрели на нее наши студенты, поморщились... Но ведь расшифровали! И ведь решили! А вы сможете?

№ 58 (N, N, N). Ключ и замок — это тройки (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) натуральных чисел от 1 до N. Ключ открывает замок, если в замке и ключе совпадают хотя бы два числа из трех. Каково минимальное число ключей в связке, с помощью которой можно открыть любой замок?

Комментарий. Объекты задачи напоминают системы троек Штейнера, хотя, конечно, эта задача не про них. На олимпиаде эта задача «в шутку» была представлена как задача неограниченных возможностей и стоимости — чем больше нарешаешь, тем большее число N баллов получишь в свой зачет. Могу сказать с улыбкой, что уж один, два или даже три балла за эту задачу вам почти гарантированы. Однако на олимпиаде некоторые наши участники получали за эту задачу и по семь-восемь баллов, причем без организации и применения компьютерного перебора, а это уже вовсе нетривиально!

№ 59 (0,40,40). Рассмотрим следующую задачу: «Дан эйлеров граф $\boldsymbol{G}$ с эйлеровым циклом P. Существует ли гомоморфизм графа $\boldsymbol{G}$ на шести-элементный цикл такой, что образ P обходит цикл четное число раз?» Докажите, что эта задача NP–полна.

Комментарий. А вот и задача про необыкновенно популярную в наше время сложность вычислений. Честное слово, я не знаю решения этой задачи. Довольно прихотливое условие и необычность ее постановки рождают в моей голове подозрение, что решения этой задачи пока вообще никто не знает. Кроме того, у меня нет стопроцентной уверенности, что сформулированная задача действительно NP-полна. Похоже, перед нами открывается широкое поле для настоящей исследовательской деятельности, ведь задач, подобных этой, можно придумать великое множество...

№ 60 (30,20,15). Докажите, что если класс K алгебраических систем конечной сигнатуры σ бесконечно аксиоматизируем, то его дополнение $\overline{K}$ в классе всех систем сигнатуры σ неаксиоматизируемо.

Комментарий. Приятная встреча с математической логикой в рамках студенческой олимпиады. В условии задачи сформулирован достаточно известный факт, который доказывается с использованием теоремы компактности, или, что фактически то же самое, — теоремы о полноте Гёделя–Мальцева (совокупность Σ формул языка первого порядка непротиворечива тогда и только тогда, когда Σ выполнима). Причины появления этой задачи в рамках олимпиады совершенно ясны — организаторы хотят, чтобы как можно большее число студентов познакомились с фундаментальными понятиями оснований современной математики.

№ 61 (4,6,8). Боги нарисовали на плоскости оси координат и в первой четверти построили график функции $y = x + \dfrac{1}{x}$. Дворник Степанов стер оси координат, бережно сохранив божественный график в неприкосновенности. Можно ли с помощью циркуля и линейки восстановить обе оси?

Комментарий. В этой задаче есть над чем подумать — можно ли восстановить асимптоты данной кривой с помощью циркуля и линейки? Вот вопрос вопросов, за ответ на который можно, в зависимости от своего возраста, заработать от четырех до восьми баллов.

№ 62 (4,2,1). Очередная простая разминка. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Комментарий. Это действительно стандартное пятиминутное упражнение, достойное любого добротного сборника задач по математическому анализу. Разложите общий член ряда на простейшие дроби, после чего каждый член этого ряда запишется в виде суммы трех слагаемых. Аккуратно записывая слагаемые этого ряда в прямоугольную табличку по три штуки в каждую строчку (так легче увидеть, какие слагаемые вместе с какими взаимно уничтожаются), найдите выражение для n-й частичной суммы. После этого устремите n к бесконечности, а себя — к написанию правильного ответа. Как видите, — ничего сложного.

№ 63 (6,6,7). Пусть K — коммутативно-ассоциативное кольцо, $\operatorname{char} K = p$, т. е. $\forall\, x \in K \;\; px = 0$ (p — простое число). Пусть A — квадратная матрица над K, $\operatorname{tr} A$ — ее след. Докажите, что $\operatorname{tr}(A^p) = (\operatorname{tr} A)^p$.

Комментарий. Совсем не тривиальная задача по алгебре — ситуацию осложняет непривычность конечной характеристики и то обстоятельство, что K — не обязательно поле. Придется хорошенько подумать и провести аккуратные рассуждения. Решайте!

№ 64 (6,6,7). Докажите, что если число $\overline{a_0 a_1 \ldots a_n}$ — простое (здесь $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — цифры десятичной записи числа), то многочлен $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ неприводим над кольцом целых чисел.

Комментарий. Массу полезных сведений про неприводимость многочленов и различные признаки их неприводимости можно найти в замечательной книжке: *Прасолов В. В.* Многочлены. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2001. Что касается представленной задачи, то здесь все решается даже без обращения к специальной литературе. Давайте попробуем порассуждать — я только начну, а вы продолжите. Нам дано, как легко понять, что $f(10) = p$ — простое число. Рассуждаем от противного. Допустим, что $f(x) = g(x)h(x)$, где $g, h \in \mathbf{Z}[x]$ и $\deg g > 1$, $\deg h > 1$. Значит, можно считать, что $g(10) = \pm 1$, $h(10) = \pm p$. Дальше продолжайте самостоятельно. Что если попробовать рассмотреть значения многочлена $f(x)$ при некоторых других целых x? А какие могут быть корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ у многочлена $f(x) = a_0 \prod (x - \alpha_k)$, если все его коэффициенты удовлетворяют неравенству $0 \leqslant a_k \leqslant 9$, т. е. заведомо меньше 10? А каковы корни у многочленов $h(x)$ и $g(x)$? Какие выводы можно отсюда сделать?

№ 65 (6,6,7). Чугунный куб с ребром a вращается вокруг большой диагонали, что чудовищно опасно. Не подходя близко, найдите объем тела вращения.

Комментарий. Прекрасная задачка на развитие пространственного воображения и трехмерной пространственной интуиции у начинающих экспертов по вращению чугунных кубов и оловянных параллелепипедов. Самое главное — ухитриться сразу разглядеть в этой задаче невидимый невооруженным глазом однополостный гиперболоид и ситуация резко улучшится, но истинное счастье в предложенной задаче наступит лишь после грамотного и гармоничного использования рецепта вычисления объема тела вращения из курса математического анализа.

Правильный ответ: $V = \frac{\pi}{\sqrt{3}} a^3$.

№ 66 (25,20,20). Грязный отрезок длины a ползет по чисто вымытой плоскости, пачкая все точки, по которым прополз. Отрезку втемяшило повернуться на 360° и занять исходное положение. Какова наименьшая площадь фигуры, которую он замажет?

Комментарий. Какой некультурный отрезок, не уважающий труд уборщиц! Долгое время математики и уборщицы всего мира считали, что фигура наименьшей площади, которую замажет отрезок — некий «равносторонний криволинейный треугольник» (с вогнутыми внутрь сторонами), в вершины которого поочередно упирается своими концами грязный отрезок, скользя все время внутри этого треугольника. Однако в 1930 г. А. С. Безикович доказал, что ответом к этой задаче является область сколь угодно малой площади. Это означает, что для любого заданного $\varepsilon > 0$ можно указать такой способ передвижения отрезка, что отрезок повернется на 360° и замажет фигуру, площади меньше ε. Вам предлагается воспроизвести это удивительное доказательство тридцатых годов прошлого века или же обнаружить свое новое доказательство, более родное и понятное.

№ 67 (15,13,10). Будем говорить, что последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ сходится по Чезаро к числу $a \in \mathbf{R}$, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = a.$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной по Чезаро в точке a, если для любой числовой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся по Чезаро к числу a, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится по Чезаро к числу $f(a)$. Докажите, что:

1). Функция $f(x) = Ax + B$ непрерывна по Чезаро в любой точке.

2). Если функция $f(x)$ непрерывна по Чезаро хотя бы в одной точке $x_0 = a$, то она имеет вид $f(x) = Ax + B$.

Комментарий. Хороший комментарий к этой задаче наверняка мог бы написать специалист по методам суммирования рядов и расходящимся рядам — понятие сходимости по Чезаро берет свое начало именно из этих разделов математики. Итальянец Э. Чезаро в конце XIX в. предложил искать сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ специальным методом — не как обычно, отыскивая предел последовательности его частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, а находя предел средних арифметических его частичных сумм: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}$. Этот способ носит теперь название «суммирование ряда по методу Чезаро». Известно, что метод Чезаро *регулярен*. Это означает, что если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ в обычном смысле сходится к числу $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то эта последовательность сходится к тому же самому числу S и в смысле Чезаро — метод суммирования Чезаро не изменяет значения суммы сходящегося ряда. (Между прочим, доказательство этого факта не очень сложно и даже внесено в качестве задачи № 138 в легендарный задачник по математическому анализу Б. П. Демидовича — «нательную» книгу каждого студента-математика). Оказывается, обратное утверждение неверно. Например, последовательность частичных сумм гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится в обычном смысле (гармонический ряд, как известно, расходится!), но сходится в смысле Чезаро. Метод Чезаро делает расходящийся гармонический ряд «сходящимся»! Докажите-ка это самостоятельно!

Вы спросите: «Зачем это все нужно?». Отвечу вам вопросом на вопрос: «Если метод Чезаро даже из расходящегося ряда делает сходящийся, то что он сделает со сходящимся?!». Представляете, как он ускорит сходимость сходящегося ряда и вычисление его суммы! Практическая польза метода Чезаро для быстрого суммирования рядов (в частности, при компьютерных вычислениях) не вызывает никаких сомнений.

Как видно из предыдущего рассказа, сходимость по Чезаро обладает очень хорошими и практически полезными свойствами. Однако в качестве холодного дождика на восторги от этих свойств в предложенной олимпиадной задаче вам предлагается доказать довольно курьезный факт — если бы мы, руководствуясь благими намерениями облегчить всем жизнь, волюнтаристски заменили бы во всей математике понятие обычной сходимости на сходимость по Чезаро, то непрерывными функциями после такого вздорного события оказались бы линейные функции и только они. Что поделать — благими намерениями устлана дорога в ад…

№ 68 (6,6,7). А). Докажите, что при любом раскрашивании натурального ряда в конечное число цветов (каждое число выкрашено в один из цветов) уравнение $x + 2y - 3z = 0$ имеет одноцветное решение в натуральных числах.

Б). Раскрасьте натуральный ряд в конечное число цветов так, чтобы уравнение $x + y - 3z = 0$ не имело одноцветного решения в натуральных числах.

Комментарий. Это опять задача рамсеевской теории — утверждение задачи является следствием одной замечательной теоремы, обнаруженной венгерским математиком Р. Радо. Начиная с 1933 г., Р. Радо опубликовал целый ряд ярких результатов (полученных на основе своей диссертации, выполненной под руководством И. Шура). В этих работах он полностью ответил на следующий вопрос: «Какие системы однородных линейных уравнений с целыми коэффициентами обладают одноцветным решением при любом конечном раскрашивании (т. е. раскрашивании в конечное число цветов) множества натуральных чисел?» В частности, ответ, данный Радо для одного уравнения, выглядит следующим образом: «Уравнение с целыми коэффициентами обладает одноцветным решением в конечно раскрашенном множестве натуральных чисел тогда и только тогда, когда некоторая непустая сумма его коэффициентов равна нулю». Таким образом, как нетрудно видеть исходя из теоремы Радо, утверждение представленной олимпиадной задачи справедливо.

Доказательство теоремы Радо даже для случая одного уравнения весьма и весьма нетривиально — с этим доказательством можно познакомиться, например, в книжке: *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея. — М.: Мир, 1984. В представленной вашему вниманию олимпиадной задаче предлагается в случае конкретных уравнений попытаться обойтись без использования теоремы Радо — не будем стрелять из пушки по воробьям! Как и в задаче № 7 из этой книжки, давайте договоримся, что ссылка на известный фундаментальный результат решением не считается! Попытайтесь решить задачу так, как будто теорема Радо еще не открыта — кропотливое копание в натуральных числах принесет вам немало удовольствия.

№ 69 (6,6,7). Докажите, что многочлены Чебышева $T_n(x)$ коммутирующие, т. е. $\forall\, m, n \ \ \forall\, x \in \mathbf{R} \quad T_m(T_n(x)) = T_n(T_m(x))$.

Комментарий. Я не перестаю удивляться целым россыпям замечательных свойств многочленов $T_n(x)$, открытых русским математиком Чебышевым! Они наименее уклоняются от нуля на отрезке $[-1,\ 1]$; они и их производные наиболее быстро растут вне отрезка $[-1,\ 1]$; многочлены Чебышева образуют ортогональную систему функций на отрезке $[-1,\ 1]$ с весовой функцией $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ — вот наиболее популярные среди этих свойств.

В предложенной олимпиадной задаче вскрывается еще одно замечательное свойство этих многочленов — оказывается, они коммутируют друг с другом! Давайте разберемся в этом по порядку. Во-первых, многочлены Чебышева, о которых идет речь в данной задаче, суть $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Внимательное разглядывание этого определения и дает решение задачи в три строчки: пусть сначала $|x| \leqslant 1$. Тогда $x = \cos\varphi$, значит, $T_n(x) = \cos(n\varphi) = y$, поэтому $T_m(y) = \cos m(n\varphi)$, следовательно, $T_m(T_n(x)) = \cos mn\varphi = T_n(T_m(x))$. Поскольку требуемое равенство выполняется при всех $|x| \leqslant 1$, оно выполняется и при всех $x \in \mathbf{R}$.

Во-вторых, оказывается, что многочлены Чебышева являются в некотором смысле единственным нетривиальным примером коммутирующих многочленов — этот довольно сложный результат был получен в 1922 г. американским математиком Риттом. Оказывается, кроме многочленов Чебышева, коммутируют только пары многочленов, в определенном смысле эквивалентных итерациям одного и того же многочлена (как отображения), а также пары некоторых мономов. Все известные на сегодняшний день доказательства теоремы Ритта, описывающей пары коммутирующих многочленов, достаточно сложные. Точную формулировку и современное изложение доказательства теоремы Ритта можно посмотреть в книжке: *Прасолов В. В., Шварцман О. В.* Азбука римановых поверхностей. — М.: Фазис, 1999.

№ 70 (6,6,7). Известно, что все интегральные кривые уравнения $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ замкнуты и охватывают начало координат. Докажите пожалуйста, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \cdot f(t) + 1}{(f(t) - t) \cdot (t^2 + 1)}\, dt = 0.$$

Комментарий. Ничего не поделаешь — для решения задачи придется «качественно» покопаться в свойствах функции f. Комментировать в этой задаче, собственно, нечего. Нужно просто понять, как использовать тот факт, что поле направлений данного дифференциального уравнения зависит только от одного параметра — угла $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, т. е. все интегральные кривые уравнения $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ пересекают под одним и тем же углом $\operatorname{arctg}\left(f\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$ каждый луч, выходящий из начала координат и образующий с осью OX угол φ.

№ 71 (7,6,5). Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами спокойно сходится, $R_m = \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ — прекрасное обозначение для суммы его «хвоста» (т. е. остаточного члена). Вам нужно узнать, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{R_n}$, и написать об этом в жюри.

Комментарий. О, это классика! Это — задача из сокровищницы классических заданий по математическому анализу и она требует проведения аккуратного и педантичного доказательства, льющего воду на мельницу усвоения краеугольных понятий раздела «числовые ряды». Однако, по причине нетривиальности представленной задачи, преподаватель, ведущий практические занятия по математическому анализу, вряд ли решится давать ее студентам в аудитории — аккуратное ее решение грозит убить целую пару, что совершенно неприемлемо в условиях дефицита времени современных учебных планов. Тем не менее, я считаю, что с этой классической задачей было бы неплохо познакомиться каждому уважающему себя студенту-математику, поэтому она и была предложена в рамках нашей студенческой олимпиады (пусть и за относительно небольшое количество баллов). Ну, и, наконец, — подсказка (кстати, убивающая половину задачи): ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{R_n}$ расходится.

№ 72 (3,2,2). Пусть A — квадратная матрица порядка n, элементы которой — действительные числа. Убедите проверяющих в том, что если некоторая степень этой матрицы — нулевая матрица, то A^n — также нулевая матрица.

Комментарий. Говоря с использованием более «мудреных» терминов, требуется доказать, что если A — нильпотентная квадратная матрица порядка n степени нильпотентности k, то $k \leqslant n$. На мой взгляд — это «разминочная» задача, и доказательство требуемого утверждения не кажется мне слишком сложным — его вполне может изобрести любой первокурсник. А уж если этот первокурсник успешно дошел в изучении линейной алгебры аж до жордановой формы матрицы, то ему изобретать-то ничего особенно и не придется...

№ 73 (30,30,30). Алгебра Ли (без вопросительного знака) над полем R — это векторное пространство V над полем R с заданным на нем умножением векторов $[x, y] : V \times V \to V$, которое удовлетворяет аксиомам

$$\forall\, x \in V\; [x, x] = \vec{0} \ \text{ и } \ \forall\, x, y, z \in V\; [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x]y] = \vec{0}.$$

Размерность алгебры Ли — это размерность векторного пространства V. Найдите и опишите (разумеется, с точностью до изоморфизма) все алгебры Ли размерности три.

Комментарий. Это довольно известная задача — автору этих строк доводилось решать ее в бытность свою на третьем курсе математико-механического факультета в жажде получить зачет-автомат по спецкурсу «Алгебры Ли», но тогда эти попытки автора не увенчались успехом.

Классификация трехмерных алгебр Ли над полем действительных чисел получена более ста лет назад итальянским математиком Луиджи

Бианки. Я сам наблюдал, как специалист-математик [1]), работающий с алгебрами Ли, прочитав эту задачу, просто перечислил трехмерные лиевы алгебры по памяти, загибая пальцы на руках — благо пальцев двух рук для этого как раз хватает, ибо неизоморфных трехмерных алгебр Ли ровно десять. Для их описания, на мой взгляд, проще всего воспользоваться понятием структурных констант c_{ij}^k, т.е. чисел, определяющих лиево умножение базисных векторов e_1, e_2, e_3 данного линейного пространства V:

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^1 e_1 + c_{ij}^2 e_2 + c_{ij}^3 e_3.$$

Понятно, что для структурных констант алгебры Ли должны быть выполнены соотношения:

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad \text{и} \quad \sum_k (c_{ij}^k c_{kl}^m + c_{jl}^k c_{ki}^m + c_{li}^k c_{kj}^m) = 0.$$

Попробуйте рассмотреть, какими могут быть значения этих структурных констант и какие алгебры получаются при этих наборах значений. Чтобы избежать огромного перебора, попутно придется выбрать базис пространства V подходящим образом, т.е. максимально упростить вид матриц c_{ij}^k. Желаю вам удачи на этом пути — результат Бианки весьма нетривиален. Если же вас все-таки постигнет неудача, то решение этой задачи можно найти, например, в книжке: *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.

№ 74 (4,3,2). Даны векторы $a, b \in \mathbf{R}^3$. Составим последовательность векторных произведений: $a_1 = a \times b$, $a_n = a_{n-1} \times b$. При каких a и b эта последовательность сходится? Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ при $a = (1, -2, 1)$, $b = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Комментарий. Забавная разминочная задачка про свойства билинейного отображения $\times : (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3) \to \mathbf{R}^3$ (О Боже! В этой записи крестики $\times$ имеют разный смысл!). Задачка будет весьма полезна для студентов первого курса.

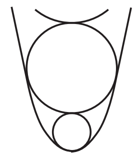
№ 75 (3,2,1). Применяя исконно русскую хитринку, решите уравнение: $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{n \text{ раз}} = 2$, где $x > 1$.

Комментарий. Это еще одна забавная (и довольно стандартная) разминочная задачка, весьма полезная для студентов первого курса

[1]) Профессор нашей кафедры А. Г. Гейн.

в плане обучения находить правильные обоснования своим действиям. Ну-ка, дорогие первокурсники, прологарифмировать-то прологарифмировали, а почему это можно? Почему равенство не нарушится? Напишите-ка аккуратно об этом в жюри!

№ 76 (4,4,4). В параболу $y = x^2$ вписана окружность максимального радиуса, касающаяся параболы в начале координат; вторая окружность вписана в параболу и касается первой; третья вписана в параболу и касается второй и т. д. (см. рисунок). Найдите радиус и центр n-й окружности.



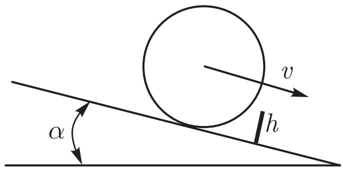
Комментарий. Еще одна приятная и несложная задачка по аналитической геометрии, нацеленная на формирование уверенности в своих силах, которая должна располагаться в головах и сердцах молодого поколения будущих математиков, обитающих на первом курсе математико-механического факультета.

№ 77 (0,5,7). Пусть $\Omega \subseteq \mathsf{R}^n$ — открытое множество, $D^k(\Omega)$ — совокупность всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на Ω с компактным носителем. Докажите, что линейное топологическое пространство $D^k(\Omega)$ не метризуемо; бочечно и борнологично; является пространством Монтеля.

Комментарий. Комментарии тут излишни. Совершенно ясно, для каких целей предложена эта задача — хочется научить участников олимпиады ничего не бояться, в жизни-то ведь всякие неожиданности бывают! Надо заставить себя покопаться в справочниках, энциклопедиях, учебниках по функциональному анализу и поработать с понятиями, выходящими за рамки стандартного университетского курса. Сама по себе представленная задачка совсем не сложная, поскольку ее решение состоит в простой проверке наличия указанных свойств у пространства $D^k(\Omega)$. Конечно, при решении этой задачи пресловутому Васе из предисловия этой книжки может существенно помочь папа, который «у Васи силен в математике». [1] Но, повторюсь, я не вижу в этом ничего плохого, поскольку даже при таком «решении» Вася все равно будет вынужден понять и запомнить и новые определения, и ход рассуждений, т. е. повысить свой уровень математической культуры — а это и есть одна из целей нашей математической олимпиады!

№ 78 (6,6,7). Абсолютно шероховатый и твердый обруч радиуса R катится по наклонной плоскости и натыкается на препятствие в виде штыря, высота которого равна $h = R/2$. Скорость

[1] Надо сказать, что папы, столь сильные в математике, что для них утверждение этой задачи очевидно, — большущая редкость.



обруча перед ударом о штырь равна v, угол наклона плоскости к горизонту равен α. Найдите все возможные значения скорости v, при которых обруч преодолевает препятствие, не отрываясь от штыря.

Комментарий. Хорошая задачка по теоретической механике. Любители, вперед! Если вы проникните своим разумом в таинство описанного процесса, привлекая физические соображения и механическую интуицию, то задача решится в несколько строк.

№ 79 (0,6,6). Вопрос: всегда ли куб неизмеримой по Лебегу функции $f : [a, b] \to \mathsf{R}$ является функцией, неизмеримой по Лебегу?

Комментарий. Да или нет? Вот в чем вопрос! Придумывать контрпример или доказывать утверждение? Размышляйте самостоятельно!

№ 80 (0,6,6). Найдите спектр оператора

$$A\,[x(t)] = f(t) \cdot x(\{t + h\}),$$

действующего в $L^2(0,\ 1)$, где h — фиксированное число, $\{t + h\}$ — дробная часть числа $t + h$, $f(t) \in C\,[0,\ 1]$, $f(0) = f(1)$.

Комментарий. Эта задача на интуитивном уровне довольно сильно перекликается с классическими задачами № 31 и № 36 из этой книжки, хотя требует более высокого уровня предварительной подготовки — необходимо располагать определенными сведениями из функционального анализа. Однако ответ в этой задаче даже интуитивно не имеет ничего общего с ответами задач № 31 и № 36: спектром данного оператора является окружность $\left\{\lambda;\ |\lambda| = e^{\int_0^1 \ln|f(t)|\,dt}\right\}$. Найти этот ответ не очень сложно, нужно просто упорно поискать.

№ 81 (8,8,8). Дан треугольник и радиусы r, R его вписанной и описанной окружностей. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

Комментарий. О, вот это задачка на радость первому курсу! Вспомнить школьные годы, попыхтеть над задачками по планиметрии! Ответом к этой известнейшей еще с дореволюционных времен классической задачке по планиметрии является выражение $\sqrt{R^2 - 2Rr}$, которое вам и требуется обнаружить где-то в процессе своего решения.

№ 82 (8,7,6). Докажите, что многочлен

$$f(x) = \frac{1}{630}x^9 - \frac{1}{21}x^7 + \frac{13}{30}x^5 - \frac{82}{63}x^3 + \frac{32}{35}x$$

при всех целых x принимает целые значения.

Комментарий. Действительно, многочлены с нецелыми коэффициентами, принимающие при всех целых значениях аргумента целые значения (целозначные многочлены), бывают. Один из примеров такого многочлена приведен в условии предложенной задачи, а вот еще несколько:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x, \qquad f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{15}x,$$

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)}{k!},$$

причем известно даже, что «биномиальные» многочлены $\binom{x}{k}$ образуют базис целозначных многочленов, т. е. любой целозначный многочлен $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$ степени k с рациональными коэффициентами представим в виде линейной комбинации биномиальных многочленов

$$f(x) = c_0\binom{x}{k} + c_1\binom{x}{k-1} + \ldots,$$

где все коэффициенты $c_0, c_1, \ldots$ — целые числа.

Мне, как неспециалисту в этих специфических разделах алгебры многочленов, трудно объяснить повышенный интерес к полиномам подобного сорта — скорей всего, изучение целозначных многочленов в математических трудах объясняется их курьезностью и простым человеческим любопытством, хотя возможно тому есть и другие причины, вызванные к жизни определенными практическими потребностями.

Более подробную и полную информацию о целозначных многочленах можно отыскать в книжке: *Прасолов В. В.* Многочлены. 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2001.

№ 83 (50,50,50). Посчитайте, какое наименьшее количество умножений надо выполнить, чтобы вычислить:

А) x^{15}?

Б) x^{1903}?

В) x^n, где $n \in \mathbf{N}$?

Естественно предполагается, что имеется возможность запоминать любое количество промежуточных результатов.

Комментарий. В общем случае (в части В) это никем еще не решенная задача, хотя ей уделяется (по понятным причинам) огромное внимание в математическом и компьютерном мире. В этой задаче идет речь о нахождении минимальной длины $l(n)$ так называемых *аддитивных цепочек* натуральных чисел, протянутых от 1 до n:

$$1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \ldots < n,$$

где каждое число a_k в этой цепочке является суммой некоторой пары чисел, стоящих в этой цепочке перед ним:

$$a_k = a_i + a_j, \quad i \leqslant j < k.$$

Поиск и оценка функции $l(n)$ — длины кратчайшей аддитивной цепочки, протянутой от 1 до n, является завораживающей и волнующей математической проблемой, которой посвящено множество научных трудов. Ясно, что $l(2^k) = k$, а вот вычисление $l(n)$ для других натуральных чисел наталкивается на существенные сложности. Нетрудно понять, что $l(nm) \leqslant l(n) + l(m)$. Довольно легко получается оценка $l(n) \geqslant \lceil \log_2 n \rceil$, где угловые скобки обозначают «верхнее целое», т. е. наименьшее целое, большее $\log_2 n$. Слегка попотев, можно самостоятельно понять, что $l(2^k + 2^m) = k + 1$, при $k > m$. В 1962 г. было доказано, что при $k > m > r$ справедливо $l(2^k + 2^m + 2^r) = k + 2$. Дальнейшие продвижения в вычислении значений функции $l(n)$ получаются только для чисел n очень уж «специального» вида. Дополнительную информацию, алгоритмы нахождения кратчайших цепочек и прекрасное обсуждение результатов по аддитивным цепочкам можно найти в классической книжке, ставшей уже своеобразной «библией» для специалистов по вычислительной математике и компьютерным наукам: *Кнут Д.*. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. «Получисленные алгоритмы». — М.: Мир, 1977.

Простым перебором находится, что $l(15) = 5$ (ответ к части задачи А); хорошо организованным машинным перебором участники нашей олимпиады определили, что $l(1903) = 15$ (ответ к части задачи Б); кроме того, участникам нашей олимпиады удалось за отведенные 48 часов составить таблицу значений функции $l(n)$ для всех $1 \leqslant n \leqslant 10\,000$. И хотя никаких особо примечательных закономерностей в поведении функции $l(n)$ «с ходу» обнаружить не удалось, я считаю достижения наших студентов в плане знакомства и размышления над этой сложнейшей задачей очень существенными и полезными. Ну, а если, дай Бог, кто-нибудь из читателей этой книжки всерьез заинтересуется этой задачей, то я буду считать свою миссию даже перевыполненной!

№ 84 (40,40,40). Темная ночь. На маленьком свободолюбивом острове радиуса ноль стоит прожектор, который освещает отрезок моря длиной в 1 километр. Прожектор вращается равномерно вокруг вертикальной оси, делая один оборот в минуту. Какова наименьшая скорость v_0, с которой должен двигаться вражеский катер, чтобы подплыть к острову незаметно?

Комментарий. Эта задача почерпнута мной из небольшого и довольно древнего сборничка задач студенческих математических олимпиад инженерного факультета Университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы, где она располагалась в разделе «логические задачи». В честь П. Лумумбы я несколько изменил оригинальную формулировку задачи, снабдив остров эпитетом «свободолюбивый», а катер — эпитетом «вражеский». Не могу судить, подозревали или нет авторы упомянутого сборника, сколь трудна эта задача на самом деле — ее решение в сборнике не приводится, но находится она там в контексте очень простеньких задачек, рассчитанных на студентов далеко не математического профиля, да, вдобавок, и русской зимы не видавших.

Ясно, что $v_0 \leqslant 1\,\dfrac{\text{км}}{\text{мин}}$, ведь скорости $1\,\dfrac{\text{км}}{\text{мин}}$ достаточно, чтобы просто доплыть до острова по прямой, пока прожектор делает свой оборот. Но ведь катер не обязан плыть к острову по прямой, он может плыть за лучом прожектора (или, наоборот, «удирать» от этого луча) с целью продлить время нахождения в просматриваемом прожектором круге. Если максимальная линейная скорость катера равна v, то для незаметного попадания на остров, катеру достаточно достичь «окружности безопасности» с центром в прожекторе и радиуса $R = \dfrac{v}{2\pi}$. Плывя по этой «окружности безопасности» за лучом прожектора, катер может бесконечно долго оставаться незамеченным, поскольку скорость луча на этой окружности просто совпадает с линейной скоростью катера. Легко понять, что если катер уже находится на окружности безопасности (в точке, не лежащей на луче прожектора), то он гарантированно сможет подобрать траекторию дальнейшего движения к острову, не опасаясь «засветиться» — это будет некая спираль, закручивающаяся на центр острова. Но какой должна быть траектория катера до попадания на окружность безопасности? В какой момент катеру выгодней начинать свое движение?

Когда наши студенты взялись за исследование поставленной задачи, обнаружились очень любопытные вещи. С помощью компьютерного моделирования удалось выяснить, что вид оптимальной траектории (оптимальной — по времени достижения катером острова) сильно зависит от заданного значения его скорости v и, что особенно поразительно, при малых значениях v (близких к искомому v_0), оптимальная траектория движения катера, возможно, даже не является гладкой! Похоже, что траектория катера терпит излом на окружности безопасности, а это может означать, что в классе гладких движений решения задачи о нахождении оптимальной траектории катера просто не существует!

Как же все-таки исследовать эту задачу, неожиданно превратившуюся из «логической задачи» в нетривиальную задачу теории оптимального управления?

Несмотря на мою вопиющую некомпетентность в теории управления (и это при наличии у нас в Екатеринбурге, в Институте математики и механики Уральского отделения РАН, блестящей научной школы по теории оптимального управления и дифференциальных игр!), я подозреваю, что решение задачи об отыскании оптимальной траектории катера хорошо известно в определенных кругах математиков и военных. Не надо обладать могучим воображением, чтобы заменить прожектор радиолокационной установкой, а вместо катера представить себе какую-нибудь вражескую крылатую ракету...

Справедливости ради надо отметить, что обсуждаемая олимпиадная задача не столь сложна, как общая проблема отыскания оптимальной траектории движения. Будущих инженеров стран Азии, Африки и латинской Америки вовсе и не просили отыскать оптимальную траекторию, а лишь просили определить *наименьшую возможную* скорость v_0 вражеского катера, который вознамерился незаметно поразить их свободолюбивый остров. Тем не менее, известное мне решение этой задачи (полученное профессором нашей кафедры А. Г. Гейном и любезно предоставленное мне для ознакомления, понимания и опубликования) представляется весьма нетривиальным. Судите сами — я привожу далее оригинальный текст А. Гейна.

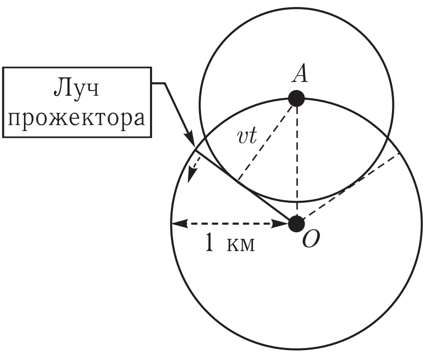


Рис. 1

«Пусть скорость катера равна v, точку входа катера в километровую зону обозначим буквой A. Ясно, что катер-нарушитель должен войти в охраняемую зону, как только луч пройдет точку A. За время t достижимыми для катера из точки A будут все точки внутри круга радиуса vt. Катер будет наверняка обнаружен, если пересечение двух кругов окажется внутри сектора, описанного прожектором (см. рис. 1).

Иными словами, при $t \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$2\pi(t-1) \geqslant \arcsin(vt).$$

Оно равносильно неравенству

$$v \leqslant \frac{\sin 2\pi t}{t}.$$

Таким образом, чтобы катер не был обнаружен, его скорость v должна быть больше, чем $v_0 = \sup\left(\frac{\sin 2\pi t}{t}\right)$ на луче $[1; +\infty)$. Значение

v_0 является глобальным максимумом указанной функции и достигается при некотором t_0, которое является наименьшим положительным корнем уравнения $2\pi t = \operatorname{tg}(2\pi t)$ на луче $[1; +\infty)$. Нетрудно проверить, что $t_0 < 1{,}23$ и это означает, что игра в догонялки при скорости, не превосходящей v_0, заканчивается в пределах четверти круга. Кроме того, из указанного уравнения для t_0 следует, что справедливо равенство $v_0 = 2\pi\cos(2\pi t_0)$.

Покажем теперь, что при скорости $v > v_0$ катер сможет незаметно добраться до острова. Как и ранее, окружностью безопасности называем окружность такого радиуса, при движении по которой скорость катера совпадает с линейной скоростью луча прожектора на этой окружности. Катер, достигнув этой окружности незамеченным, может сколь угодно долго двигаться по ней с данной скоростью, оставаясь необнаруженным. Для скорости v_0 радиус окружности безопасности равен $R = \dfrac{v_0}{2\pi} = \cos(2\pi t_0)$.

Построим прямоугольный треугольник ABO с гипотенузой AO и катетом v_0t_0 (см. рис. 2). Поскольку $v_0t_0 = \sin 2\pi(t_0 - 1)$, а гипотенуза

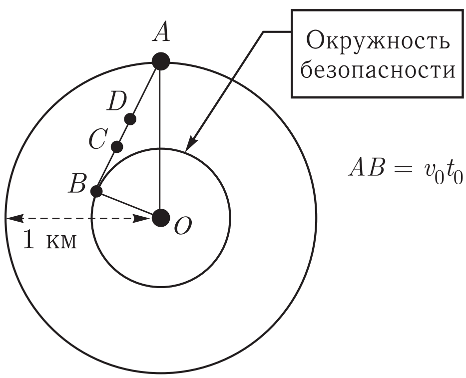


Рис. 2

этого треугольника равна 1, то $\angle AOB = 2\pi(t_0 - 1)$. Впрочем, это ясно и без всякой геометрии, ибо точка B — это точка, в которой луч прожектора догонит катер, если его скорость равна v_0, а сам катер будет двигаться по лучу AB. Катет OB того же треугольника равен, как нетрудно видеть, $\cos(2\pi t_0)$, т. е. точка B лежит на окружности безопасности для скорости v_0.

Покажем, что если катер будет двигаться по лучу AB со скоростью v_0, то луч прожектора не обнаружит катер раньше, чем тот достигнет точки B. Рассмотрим момент времени $t < t_0$. Пусть C — точка на луче AB, в которой окажется катер через время t, т. е. $AC = v_0t$. Пусть D — точка на луче AB, которую будет освещать луч прожектора через время t. Рассматривая треугольник ADO (на рис. 2), из теоремы синусов получаем

$$AD = \frac{\sin 2\pi(t-1)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi(t_0 - t)\right)} = \frac{\sin 2\pi(t-1)}{\cos 2\pi(t-t_0)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} AC - AD = 2\pi t\cos(2\pi t_0) - \frac{\sin 2\pi t}{\cos 2\pi(t-t_0)} &= \\ = \cos 2\pi t_0\left(2\pi t - (\operatorname{tg} 2\pi t_0 + \operatorname{tg} 2\pi(t-t_0))\right) &= \\ = \cos 2\pi t_0\left(2\pi t - 2\pi t_0 + \operatorname{tg} 2\pi(t_0-t)\right) &= \\ = \cos 2\pi t_0\left(\operatorname{tg} 2\pi(t_0-t) - 2\pi(t_0-t)\right)&. \end{aligned}$$

Учитывая неравенства $0 < t_0 - t < 1/4$, $t > 1$ и хорошо известное неравенство $\operatorname{tg}\alpha > \alpha$ при $0 < \alpha < \pi/2$, замечаем, что выражение в скобках положительно. Нас не догонят!!! [1)]

Стратегия катера при $v > v_0$ такова. Надо двигаться по отрезку AB до точки B, затем перейти на окружность безопасности и по ней догнать луч прожектора, но, конечно, не попадая в него, затем напрямую плыть к острову. [2)]»

Ну, как вам, уважаемые читатели, логическая задачка для инженерного факультета Университета дружбы народов?

№ 85 (10,10,10). Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно:

$$x_1 = b > 0, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + a/x_n}{2}.$$

При каких a и b эта последовательность сходится и к какому числу?

[1)] Дочитав оригинальный текст профессора А. Г. Гейна до этого эмоционального восклицания — цитаты из нашумевшего хита тинейджерской группы «Тату», я не только порадовался его знанию молодежного репертуара, но и задумался — на чьей же стороне он мыслит себя во время происходящего в задаче военного конфликта?! Между прочим, именно он придумал термин «окружность безопасности», — безопасности для кого? И меня с пути праведного сбил — до получения его текста я называл эту окружность «окружностью недостижимости».

[2)] Луч можно, конечно, и не догонять, а свернуть к острову раньше — как только станет ясно, что времени доплыть до острова незасвеченным при заданной скорости хватает, — но лень считать. В этой точке схода катера с окружности безопасности, видимо, как раз и происходит нарушение гладкости оптимальной траектории, о котором говорилось выше.

Комментарий. Типичная олимпиадная задача стандартно-олимпиадного уровня сложности про рекуррентно заданные последовательности. Пожалуйста, поразмышляйте о плохом поведении данной последовательности самостоятельно.

№ 86 (20,15,10). По прямой проселочной дороге длиной a случайно разбрелись n мирных сельских жителей. Какова вероятность того, что расстояние между любыми двумя соседними селянами оказалось не меньше b? (Селяне понимают, что такая задача имеет смысл только при $(n-1)b \leqslant a$).

Комментарий. Приятная встреча с теорией вероятностей на проселочной дороге. Для решения поставленной задачи нам потребуется минимум знаний про непрерывные случайные величины. Возьмем за начало координат один из концов дороги, тогда положение любого селянина задается его координатой $x \in [0, a]$ — случайной величиной с равномерной плотностью распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 1/a, & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0, & x \notin [0, a]. \end{cases}$$

А вот расположение n штук занумерованных и разбредшихся селян определяется вектором $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и я предлагаю сначала найти вероятность того, что $x_{i+1} \geqslant x_i + b$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Мое предложение выливается в вычисление банального «многоповторного» интеграла:

$$J = \int\limits_0^{a-(n-1)b} p(x_1)\,dx_1 \int\limits_{x_1+b}^{a-(n-2)b} p(x_2)\,dx_2 \ldots \int\limits_{x_{n-2}+b}^{a-b} p(x_{n-1})\,dx_{n-1} \int\limits_{x_{n-1}+b}^{a} p(x_n)\,dx_n.$$

Посчитайте, пожалуйста, этот интеграл самостоятельно. Видно, что основная сложность этой задачи состоит вовсе не в виртуозном владении понятиями теории вероятностей, а в способности правильно расставлять пределы интегрирования.

Вернемся к селянам. Поскольку существует всего $n!$ перестановок n селян на проселочной дороге, то искомым ответом к представленной пасторальной задаче будет число $J \cdot n!$, которое нисколько не удивит сельских жителей, поскольку им все равно.

№ 87 (0,15,12). Пусть C — произвольная окружность или прямая в комплексной плоскости. Докажите, что существует функция $f(z)$, аналитическая в каждой конечной точке z линии C и равная $\overline{z}$.

Комментарий. Хорошая задачка по теории функций комплексного переменного. Легко понять, что функция $z \mapsto \overline{z}$, переводящая каждое комплексное число в ему сопряженное, нигде не аналитична. Тем не менее, утверждение задачи остается справедливым не только для прямых и окружностей в комплексной плоскости, а даже для произвольных аналитических кривых, т. е. в качестве кривой C в нашей задаче можно взять образ интервала (a, b) вещественной оси комплексной плоскости при отображении этой плоскости произвольной аналитической функцией $\varphi(z)$. Тут нужно только потребовать, чтобы в достаточно малой комплексной окрестности интервала (a, b) функция $\varphi(z)$ была однозначной, и все.

Вот несложное, но не совсем банальное рассуждение. Пусть функция $\varphi(z)$, задающая кривую C, нам дана. Рассмотрим функцию $\psi(z) = \overline{\varphi(\overline{z})}$. Она отображает интервал (a, b) на кривую $\overline{C}$, симметричную кривой C относительно действительной оси. Пусть $\varphi^{-1}(z)$ — функция, обратная к $\varphi(z)$ и $f(z) = \psi\left(\varphi^{-1}(z)\right)$. Легко сообразить, что функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности кривой C и, что самое главное, $f(z) = \overline{z}$ для всех точек z, лежащих на кривой C. Подкорректируйте и приспособьте это рассуждение для получения ответов к представленной олимпиадной задаче самостоятельно. Видно, что для решения предложенной задачи никаких специальных сведений из теории функций комплексного переменного не требуется вовсе.

№ 88 (15,10,10). Докажите, что если перенумеровать подряд все простые числа, начиная с $p = 5$, то каждое простое число будет больше своего утроенного номера.

Комментарий. Да, именно так природа и устроена — утверждение представленной задачи справедливо и отыскать его доказательство вам предлагается самостоятельно. От себя добавлю только, что никаких специальных теоретико-числовых знаний, выходящих за рамки курса математики средней школы, для решения этой задачи не потребуется. Рассуждайте смело и ничего не бойтесь.

№ 89 (15,14,13). Верно ли, что число $\sqrt{999999 + 111111\sqrt{3}}$ не является квадратичной иррациональностью? Просветите членов жюри.

Комментарий. Ну, как обычно на олимпиаде! Придумали «от балды» какое-то дикое число и спросили про него что-то! И опять непонятно, что пытаться доказывать — само утверждение или же его отрицание! Уважаемые читатели, здесь я вам не помощник — я решал эту задачу очень давно и уже забыл, является ли это число корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами или нет. У меня ощущение, что является, а у вас?

№ 90 (25,25,25). Пусть $a, b \in \mathsf{Z}$ и многочлен $ax^2 + bx + 1$ неприводим над Z. Пусть $k \geqslant 7$, $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \times \ldots \times (x - a_k)$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — попарно различные целые числа. Сообразите, почему многочлен $a\left(f(x)\right)^2 + bf(x) + 1$ также неприводим над Z. Приведите шесть убедительных доводов, что условие $k \geqslant 7$ существенно.

Комментарий. Эта задача почерпнута из книжки: *Прасолов В. В.* Многочлены. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2001. (Не надо сразу тянуться на книжную полку за книжкой В. В. Прасолова, ибо решения конкретно этой задачи там как раз и не приводится!). Перед формулировкой представленной задачи в книжке Прасолова располагается следующее упражнение, являющееся существенной подсказкой к решению.

Упражнение. Пусть $g(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, принимающий значение $+1$ более чем в трех различных целых точках $x \in \mathsf{Z}$. Докажите, что $g(x) \neq -1$ при всех целых $x \in \mathsf{Z}$.

Выполните сначала это упражнение, а потом приступайте к решению олимпиадной задачи. Рассуждайте от противного, предположив, что многочлен $a\left(f(x)\right)^2 + bf(x) + 1$ раскладывается в произведение двух многочленов меньшей степени и подметив, что многочлен $a\left(f(x)\right)^2 + bf(x) + 1$ принимает значение $+1$ более чем в трех различных целых точках. В процессе рассуждения не забывайте, что жюри ждет от вас еще и шесть убедительных доводов, что условие $k \geqslant 7$ существенно, поэтому внимательно отслеживайте свои рассуждения, чтобы засечь, где и как используется то обстоятельство, что чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ больше шести. Желаю удачи!

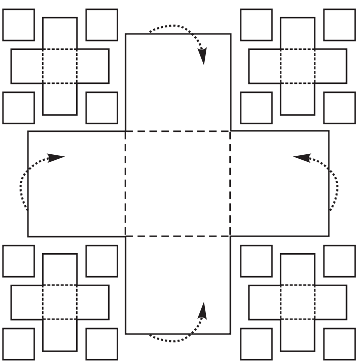
№ 91 (8,7,7). На плоскости расположены непересекающиеся открытые круги, каждый из которых касается по меньшей мере шести из остальных кругов (два круга «касаются», если они имеют единственную общую предельную точку). Докажите, что множество кругов бесконечно.

Комментарий. Красивая и совершенно понятная задача, доступная всем участникам, независимо от возраста, пола и предварительной математической подготовки. Используйте «принцип крайнего» — предположите, что множество кругов конечно, рассмотрите круг наименьшего радиуса, поймите, что его обязаны касаться шесть других кругов точно такого же радиуса и т. д. Задачка решится и принесет вам эстетическое ублаготворение.

№ 92 (15,10,10). Василий хочет написать многочлен 2004-й степени, все корни которого (включая комплексные) образуют арифметическую прогрессию. Три первых члена он уже написал «от балды»: $x^{2004} - 2005x^{2003} + 2006x^{2002}$. И призадумался — какой коэффициент ему написать при x^{2001}? Помогите Васе.

Комментарий. Коэффициенты a_k всякого многочлена $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ со старшим коэффициентом, равным единице, являются значениями (взятыми с подходящим знаком) основных симметрических многочленов от его корней — хорошо известный факт, открытый Ньютоном и называемый, обычно, теоремой Виета. Исходя из этого факта, я, конечно, смогу помочь Васе написать следующий коэффициент, но вот щекотливая ситуация — я не знаю, сможет ли Вася или кто-нибудь другой успешно выполнить поставленную задачу до конца? Счастливая ли у Васи «балда»? Не окажется ли система уравнений с уже написанными Васей коэффициентами несовместной? Существует ли вообще многочлен 2004-й степени с корнями, образующими арифметическую прогрессию, и с данными тремя старшими коэффициентами? Помогите сначала Васе, а потом постарайтесь ответить на мои вопросы. Желаю успеха!

№ 93 (40,40,40). «Миф о Сизифе». Мужик-фанатик нашел где-то квадратный лист бумаги 1м × 1м, отрезал по углам четыре одинаковых квадрата и из получившейся заготовки склеил коробочку (см. рисунок). Оставшиеся 4 одинаковых квадрата не давали ему покоя, и он тоже склеил из них коробочки, отрезав от углов всех квадратов одинаковые квадратики. Оставшиеся 16 одинаковых квадратиков не давали ему покоя, и он снова склеил из них коробочки, отрезав от углов всех квадратиков одинаковые квадратики. Оставшиеся 64 одинаковых квадратика не давали ему покоя, и он снова… и снова… и снова… Мужик работает до сих пор, а вы, тем временем, найдите максимальный суммарный объем коробочек, которые могут получиться у мужика, если не дать ему умереть.



Комментарий. Неожиданная и весьма эффектная интерпретация банально-стандартной школьной задачи на «применение производной» для нахождения экстремума функции. Только в школе мужик, как правило, успевает склеить одну первую коробочку и вовсе не оптимизирует количество и размеры отходов. Сильные сомнения вызывает мнение, будто для достижения максимального суммарного объема бесконечного числа коробочек, надо на каждом шаге изготавливать из имеющихся квадратиков коробочки максимального объема — «жадный» алгоритм не всегда оптимален. Мой товарищ — специалист по теории управления, увидев эту задачу, воскликнул: «Все понятно! Тут надо использовать принцип оптимальности Беллмана!». Поясню: принцип Беллмана утверждает, что если некоторый конец траектории рассматриваемого процесса не является оптимальным, то и вся траектория этого процесса не оптимальна. Помилуйте! Как это использовать? Как оптимизировать объем коробочек «с конца траектории» процесса их склейки? С тем же успехом мой товарищ мог воскликнуть: «Все понятно! Тут надо использовать систему аксиом теории множеств Цермело–Френкеля!».

В момент написания предыдущего абзаца я не располагал правильным решением этой задачи, а в рамках нашей олимпиады за два отведенных дня эту задачу никто из участников не решил. Тем более интригующим и удивительным для меня явился бумажный листок, любезно предоставленный мне моим старшим коллегой по кафедре А. Г. Гейном. В процессе предварительного прочтения и рецензирования рукописи книжки, профессор А. Г. Гейн с пониманием отнесся к нелегкой судьбе обреченного клейщика коробочек — он решил предложенную задачу и, во имя спасения новоиспеченного Сизифа, написал на листочке бумаги следующий текст.

«Речь, по-видимому, идет о вычислении предела суммы объемов всех склеенных коробочек и наибольшем значении этого предела. Пусть искомое наибольшее значение этого предела равно V. Пусть, при этом, на первом шаге были вырезаны квадратики со стороной x (мужику пришло озарение свыше, что в первый раз надо резать именно так). Покончив со склейкой первой коробочки, мужик глядит на оставшийся отрезанный квадратик со стороной x и понимает, что перед ним исходная задача: резать и клеить дальше так, чтобы снова получился наибольший суммарный объем. Тем самым, мы стоим перед конфигурацией, которая подобна исходной с коэффициентом подобия x. Поэтому максимальный (предельный) суммарный объем, который может получиться из квадратика со стороной x, равен x^3V. А главный вывод таков: чтобы получить наибольший суммарный объем, надо стороны каждого следующего квадратика резать в той же пропорции, что и для исходного. Не зря же мужику сказали свыше только то, как резать первый квадрат! [1]

Теперь будем помнить только то правило, которое мы только что сформулировали, и забудем, каким именно было значение x. Но тогда справедливо равенство: $V = x(1-2x)^2 + 4x^3V$, и при неко-

[1] От себя добавлю с восторгом: вот он — принцип оптимальности Беллмана! Суммарный объем будет максимальным только тогда, когда после каждой очередной склеенной коробочки все оставшиеся коробочки будут клеить так, чтобы их суммарный объем был максимален (каждый конец траектории процесса был оптимален)!

тором значении x объем V достигает своего максимума. Поскольку $V = \dfrac{x(1-2x)^2}{1-4x^3}$, то нахождение максимума объема — рутинная задачка по математическому анализу. Надо только помнить, что по смыслу задачи $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$. Нетрудно проверить, что на этом отрезке у функции $V(x)$ только одна точка максимума. Правда, желающим ее найти придется решить уравнение четвертой степени. Но это ничто, по сравнению с вечностью процесса резки и склейки!

Не скрою, что на идею решения меня натолкнула известная притча Зенона об Ахиллесе, который никогда не догонит черепаху. Ведь только мужик покончил с клейкой одной коробочки, а перед ним снова четыре квадратика!..

Впрочем, если вы хорошенько подумаете (в духе Зенона, или, еще лучше, — Вейерштрасса), то обнаружите в решении некий изъян. По крайней мере, я, будучи на месте жюри, полный балл за такое решение не поставил бы...»

№ 94 (15,10,7). Пусть числа $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathsf{C}$ таковы, что для всех натуральных m число $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k^m$ — целое. Докажите, что тогда все коэффициенты многочлена $f(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} (x - z_k)$ — целые числа.

Комментарий. Как и в задаче № 92, начну свой комментарий с фразы: «Коэффициенты a_k всякого многочлена $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ являются значениями (взятыми с подходящим знаком) основных симметрических многочленов от его корней». Остается только понять, почему из целозначности всех степенных сумм вида $s_m(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_1^m + z_2^m + \ldots + z_n^m$ следует целозначность значений основных симметрических многочленов:

$$\sigma_k(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} z_{i_1} z_{i_2} \cdot \ldots \cdot z_{i_k} = (-1)^k a_k.$$

Уверяю вас — отыскать доказательство только что высказанного утверждения не очень сложно, так что благословляю вас на самостоятельные поиски. И пусть заветным ориентиром в ваших поисках служит прекрасный образ нужного вам соотношения, из которого вытекут все ответы на стоящие перед вами вопросы:

$$\sigma_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \cdots & s_1 \end{vmatrix}.$$

Выведите эту формулу и поймите, почему этот определитель делится на $k!$ нацело при целых s_i, после чего останется только поздравить себя с успехом.

№ 95 (3,2,1). Делайте что хотите, но исключите y из системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x^3 + 3xy^4 - 4x^2y^2 + y + 1 = 0, \\ 3x + 5x^3y^2 - 2xy^5 - xy + 2 = 0. \end{cases}$$

Комментарий. Странно, но участники нашей олимпиады не могли решить эту простейшую стандартную задачу три года подряд — это результат выпадения из начального университетского курса алгебры такого классического понятия, как результант двух многочленов и его применений. На результанты и дискриминанты у лекторов просто не остается времени, а жаль! И только когда на четвертый год выдачи представленной задачи в ее формулировке появилась приписка: «Решите ее наконец! Вы что, не умеете определители-результанты считать?», студенты сподобились покопаться в учебниках, удивиться существованию столь простого способа исключения неизвестной из системы алгебраических уравнений, и написать ответ в жюри. Всю необходимую информацию про результант многочленов и описание этого эффектного способа исключения переменных читатели могут найти в уже неоднократно упоминавшейся здесь книжке: *Прасолов В. В.* Многочлены. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2001.

№ 96 (8,6,5). Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathrm{C}$ — вершины правильного n-угольника, z_0 — его центр. Докажите, что если $f(z)$ — многочлен степени не выше $n-1$, то

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) = f(z_0).$$

Комментарий. Совсем несложная задача. Многочлен $f(z)$ степени $l \leqslant n-1$ однозначно определяется своими значениями $w_1 = f(z_1), \ldots, w_{l+1} = f(z_{l+1})$ в $l+1$ различных точках (каковыми, конечно, являются вершины $z_1, \ldots, z_{l+1}$ правильного n-угольника). Ну, так напишите в явном виде многочлен $f(z)$, скажем, в форме интерполяционного многочлена Лагранжа, и проверьте для него требуемое утверждение — несколько дополнительных очков к олимпиадной работе вам обеспечены.

№ 97 (20,20,20). Найдите наибольший объем ортогональной проекции единичного n-мерного куба на $(n-1)$-мерную плоскость. Начните решать задачу с $n = 3$, называя объем проекции площадью.

Комментарий. Эта совершенно естественная задача неожиданно оказалась весьма сложной — непосредственно за два олимпиадных дня для случая кубика произвольной размерности, никто из наших студентов ее не решил. Зато наибольшую площадь проекции трехмерного кубика отыскали все, кто эту задачу брался решать. А как сложится у вас?

№ 98 (25,25,25). Жители дурдома постоянно хотят положить единичный отрезок на раскрашенную в несколько цветов плоскость R^2 так, чтобы концы отрезка оказались в точках одинакового цвета. Докажите, что:

А). Как бы главврач не старался раскрасить плоскость в три цвета, пациенты смогут положить отрезок так, как хотят.

В). Главврач может так раскрасить плоскость в семь цветов, что выполнить желание пациентов не смогут даже постоянные гости заведения и любимчики всего персонала — суперумные космические пришельцы с овальными рожами.

Комментарий. Это довольно сложная, но вполне решаемая задача рамсеевского типа. В качестве довеска к этой задаче естественно спросить — какое же минимальное количество цветов потребуется главврачу для раскраски плоскости так, чтобы пациенты не смогли исполнить свое желание? Хватит ли ему, например, четырех красок? Попытайтесь найти ответы на эти вопросы и переходите к следующей задаче, являющейся продолжением настоящей тематики.

№ 99 (20,20,20). Теперь вы — нормальный человек. Чтобы убедить в этом себя и всех окружающих, разместите плоский двумерный единичный квадрат в произвольно раскрашенном в два цвета шестимерном пространстве R^6 так, чтобы все четыре вершины квадрата имели одинаковый цвет.

Комментарий. О-па! Да в формулировке задачи содержится кое-какая издевка! Поскольку вы абсолютно нормальный человек, вам и без моих подсказок должно прийти в голову рассмотреть следующее множество S точек шестимерного пространства:

$$S = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_6) \,\middle|\, \begin{array}{ll} x_i = 1/\sqrt{2} & \text{для двух разных индексов } i, \\ x_i = 0 & \text{для остальных индексов } i \end{array} \right\}.$$

Каждое 2-раскрашивание пространства R^6 индуцирует 2-раскрашивание множества S и вам остается только понять, почему среди вершин этого множества найдутся четыре вершины одного цвета, образующие единичный квадрат. Согласитесь, вряд ли в мире найдется нечто более естественное для нормального человека! Особенно приятно отметить, что представленная олимпиадная задача всего за два дня состязаний выявила большое количество таких нормальных людей среди студентов математико-механического факультета УрГУ.

№ 100 (45,45,45). Некто N задумал два натуральных числа, каждое из которых больше единицы, но их сумма меньше ста. Затем Некто N тихонько сообщил математику Пете Произведение этих чисел, а математику Сереже их Сумму. Некто N не стал делать секрета лишь из того, что у Сережи — Сумма, а у Пети — Произведение. Далее между Петей и Сережей состоялся диалог:

Петя: — Пожалуй, я не смогу сразу назвать эти числа...

Сережа: — Я сразу знал, что ты не сможешь их назвать...

Петя: — Тогда я могу их назвать.

Сережа: — Ну, тогда и я могу их назвать.

Назовите задуманные числа.

Комментарий. Да уж, ничего не скажешь! Сложная эффектная задача, производящая в первый момент знакомства с ней шокирующее впечатление. Для ее успешного решения потребуется не только умение проводить качественные рассуждения, но и знание некоторых фактов из теории чисел. Происхождения этой задачи я не знаю, несомненно одно — ее автор классный математик, и теперь эта задача является частью «золотого» математического фольклора. Поскольку после предъявления этой задачи на олимпиаде студенты буквально достали меня вопросами, как она решается и можно ли ее вообще однозначно решить — уж больно мизерной выглядит информация из состоявшегося диалога — я не откажу себе в удовольствии привести здесь решение этой задачи полностью.

Пусть задуманы числа x и y, известно, что $x + y < 100$, $x > 1$, $y > 1$. Состоявшийся диалог содержит четыре фразы — четыре условия. Числа x и y не могут быть оба простыми, иначе не выполнялось бы первое условие. Согласно гипотезе Гольдбаха, всякое четное число есть сумма двух простых (гипотеза Гольдбаха до сих пор не доказана, но уж для четных чисел первой сотни, уверяю вас, она проверена). Следовательно, $x + y$ не может быть четным числом, иначе не выполнялось бы второе условие. Далее, если $x + y > 53$, то возможен вариант $x = 53$, $y = (x + y) - 53$. В этом случае не выполняется первое условие, так как если в произведении xy есть простой множитель больше 50, то ответ для Пети однозначен.

Если $x + y$ двумя различными способами представляется в виде $2^k + p$, где p — простое число, то в этом случае выполняются условия

1–3, но не выполняется условие 4. Таким образом, для числа $x+y$ остаются следующие варианты: 5, 17, 29, 41, 47, 53. Непосредственным перебором убеждаемся, что единственное решение дают числа $x=13$, $y=4$.

№ 101 (3,3,3). Доказать, что если стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то ее разность равна радиусу вписанной окружности.

Комментарий. Настоящий отдых после предыдущей задачи. Не думаю, что в этой несложной планиметрической задачке нужно что-либо комментировать — ее надо просто решить и все.

№ 102 (3,2,2). Функция $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ такова, что для некоторого $a > 0$ выполнено

$$\forall\, x \in \mathsf{R}\, f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}\,.$$

Докажите, что функция f периодична и для $a = 1$ приведите пример такой функции, отличной от константы.

Комментарий. Несложная, но полезная для начинающих задача, поскольку она напоминает своим решением многочисленные примеры получения желанных следствий из данных условий с помощью алгебраических преобразований — такими выводами изобилуют как классические математические теории, так и современные научные работы. Вот первая пришедшая в голову иллюстрация: доказать, что из тождества идемпотентности (например, в алгебре Ли) $\forall\, x(x^2 = 0)$ следует условие антикоммутативности $\forall\, xy\,(xy = -yx)$. Тут надо в тождество $\forall\, x(x^2 = 0)$ вместо x подставить $x+y$, аккуратно раскрыть скобки, безжалостно зачеркнуть в получившемся выражении x^2 и y^2, разнести по разные стороны от знака равенства слагаемые xy и yx, и нужное следствие готово.

В приведенной задаче требуется из данного тождества вывести условие периодичности: $\exists\, T > 0\ \forall\, x \in \mathsf{R}\ \ f(x+T) = f(x)$. Ну, значит, надо просто «поколдовать» с исходным тождеством — возвести его один раз в квадрат, заменить оставшийся корень на выражение $f(x+a) - \dfrac{1}{2}$, где-то, по ходу дела, вместо x подставить $x-a$, принять во внимание, что функция $f(x)$ строго положительна на всей оси R, и тогда из тождества, данного в задаче, вытечет следствие

$$\forall\, x \in \mathsf{R}\ \ f(x-a) = f(x+a),$$

которое, естественно, означает периодичность функции $f(x)$. После проделанных преобразований будет совсем несложно сконструировать пример подходящей периодической функции для значения $a = 1$. Простенько и приятно.

№ 103 (6,6,5). Придумайте пример функции $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$, график которой всюду плотно заполняет плоскость.

Комментарий. В этой задаче требуется некоторая изобретательность — нужно построить такое всюду плотное множество на координатной плоскости XOY, чтобы каждая вертикальная прямая пересекалась с этим множеством лишь в одной точке. Попробуйте сначала построить такое множество, например, в единичном квадрате $(0, 1) \times (0, 1)$, а уж потом «растянуть» этот квадрат на всю плоскость.

№ 104 (4,3,3). Докажите, что $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n\text{ раз}} - \underbrace{22\ldots2}_{n\text{ раз}}} = \underbrace{33\ldots3}_{n\text{ раз}}$.

Комментарий. Утверждение этой простенькой задачи действительно справедливо и доказать это совсем несложно. Однако (вы, несомненно, улыбнетесь) на математической (!) олимпиаде стран Магриба [1] в 1986 г. эта задача звучала в куда более изуверской формулировке: найти все тройки цифр x, y, z, для которых при любом значении $n \in \mathsf{N}$ справедливо равенство

$$\sqrt{\underbrace{\overline{xx\ldots x}}_{2n\text{ раз}} - \underbrace{\overline{yy\ldots y}}_{n\text{ раз}}} = \underbrace{\overline{zz\ldots z}}_{n\text{ раз}}.$$

Бедные жители северной Африки, несчастные математики Марокко! За что им выпала такая «марокка»???

№ 105 (6,6,7). Попробуйте отыскать такую хитрую (т. е. не равную тождественно нулю или единице) функцию $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$, что

$$\forall\, x, y \in \mathsf{R}\ \ f(x) \cdot f(y) = f(x - y).$$

Комментарий. Первым на нашей планете интересовался решениями подобных функциональных уравнений француз Огюстен Коши. Он исследовал уравнения следующих четырех видов:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(x+y) = f(x)f(y),$$
$$f(xy) = f(x) + f(y), \qquad f(xy) = f(x)f(y).$$

Коши установил, что непрерывные решения этих четырех уравнений имеют, соответственно, вид: Cx, e^{Cx}, $C\ln x$, x^C, где C —

[1] Коренное арабское название территории Африки к западу от Египта — Ливия, Тунис, Алжир, Марокко.

произвольная постоянная (в классе разрывных функций могут быть и другие решения).

В предложенной олимпиадной задаче вам предлагается повторить подвиг О. Коши для функционального уравнения, внешне очень похожего на четыре выписанных выше. Для повторения подвига Коши потребуется определенная изобретательность и некоторая фантазия — а что же вы хотели, это математика! Давид Гильберт однажды с нескрываемым сожалением произнес про своего ученика: «Для математики у него не хватило фантазии, поэтому он стал поэтом...». Подключите к работе максимум выдумки — и удача, несомненно, придет к вам!

№ 106 (4,3,3). Докажите, что краевая задача

$$\begin{cases} y'' = x^{10}y, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \quad y(-1) = y(1) = 0 \end{cases}$$

не имеет решений, кроме тривиального решения $y(x) \equiv 0$.

Комментарий. Мало кто из студентов вообще брался за эту несложную задачу, которая лишь «для острастки» сформулирована в терминах дифференциальных уравнений, хотя, на самом деле, для ее решения никаких сведений из теории краевых задач не требуется — все вполне доступно даже первокурсникам. Мы уже встречались в этой книжке со столь же «страшной» задачей — № 8. О банальности представленной задачи судите сами — вот набросок рассуждений, ведущих к ее решению.

Если $y(x) \neq \mathrm{const}$, то, например, $\max\limits_{[-1,\,1]} y(x) = y(x_1) > 0$, а $y''(x_1) < 0$ — выпуклость вверх. Однако это противоречит равенству $y''(x_1) = x_1^{10}y(x_1)$... Ну, уж доведите дальше «до ума» эти простенькие рассуждения самостоятельно.

№ 107 (20,15,15). Из гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ удалены все члены, знаменатели которых содержат хотя бы одну из цифр 3, 7, 1. Сходится ли оставшийся ряд?

Комментарий. Цифры 3, 7, 1 по замыслу авторов задачи, это, несомненно — тройка, семерка, туз! А как же иначе? Авторы, видимо, рассчитывали, что подобное обстоятельство нагонит необъяснимого мистического страху на участников олимпиады, а это в разы затруднит решение предложенной задачи. Не тут-то было! Наших студентов на испуг не возьмешь!

Опытные люди знают, что нам предложена известная классическая (сложная, но вполне решаемая) задача, в которой конкретика выбрасываемых цифр не имеет никакого значения. Поразмыслите над этой задачей самостоятельно, оцените как-нибудь частичные суммы оставшегося ряда, и решение придет к вам. Между делом я предлагаю вам доказать следующий факт — ряд, составленный из обратных величин к членам произвольной бесконечной арифметической прогрессии из натуральных чисел расходится.

№ 108 (6,6,6). Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — возрастающие последовательности положительных чисел, такие, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$ расходятся. Верно ли, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n+b_n}$ тоже расходится?

Комментарий. Вот опять — то ли «да», то ли «нет»?! Что в этой задаче пытаться доказывать — сходимость или расходимость ряда? Я специально не буду вам подсказывать — пусть эта несложная задачка решится у вас самостоятельно, а ее решение принесет вам уверенность и удовлетворение.

№ 109 (8,7,6). Докажите, что если центр тяжести треугольника совпадает с центром тяжести его границы, то треугольник равносторонний.

Комментарий. Это несложная задача. Вспомните классическое (из курса теоретической механики) определение центра тяжести тела через интеграл, предположите противное к условию утверждение, и задача решится. Впрочем, у этой несложной задачи существует и вполне элементарное «школьное» решение без всяких интегралов с помощью небольшого изящного рассуждения, которое я и предлагаю вам отыскать. Может, вам повезет?

№ 110 (50,50,50). Пусть $\{a_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ расходится. Докажите, что из чисел $\{a_n\}$ можно выбрать три числа, образующие арифметическую прогрессию.

Комментарий. Это очередная «убойная» задача и ее решение человечеству до сих пор неизвестно, хотя, по мнению многих посвященных в эту задачу математиков, ее утверждение верно. Мастер постановок подобных непробиваемых проблем — венгерский математик Пауль Эрдеш — преподнес математическому миру эту задачу в более сильной формулировке. Он просит доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ расходится, то из последовательности $\{a_n\}$ можно выбрать сколь угодно длинную арифметическую прогрессию. Как обычно, в своей непринужденной манере, которая в случае этой задачи выглядит совершенно издевательской, П. Эрдеш предлагает за ее решение награду — 3000 \$, либо эквивалент в фунтах, бриллиантах, нефти или золоте. Должен сообщить вам, что я неоднократно предпринимал попытки обогатиться на решении этой задачи, но каждый раз мои размышления заходили в тупик, и вожделенный блеск бриллиантов тускнел, как глаза засыпающего ежика.

О сложности поставленной Эрдешем задачи косвенно говорит еще тот факт, что ее решение дало бы ответ на стоящую уже пару столетий нерешенную теоретико-числовую проблему — сколь длинными могут быть арифметические прогрессии, целиком состоящие из простых чисел? Дело в том, что еще Эйлер подметил расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{p_n}$, составленного из обратных величин к простым числам, и положительный ответ на проблему Эрдеша гарантировал бы наличие сколь угодно длинных кусков арифметических прогрессий в последовательности всех простых чисел.

Отмечу еще, что из положительного решения проблемы Эрдеша легко вытекает утверждение чрезвычайно сложно доказываемой теоремы другого венгерского математика — Е. Семериди (доказана в 1975 г.): если множество $A \subseteq \mathbf{N}$ натуральных чисел имеет положительную (верхнюю) плотность, т. е. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|A \cap [1, n]|}{n} > 0$, то в множестве A содержатся произвольно длинные арифметические прогрессии. (К сожалению, множество простых чисел имеет нулевую плотность и теорема Семериди для решения проблемы об арифметических прогрессиях в простых числах совершенно непригодна!). Одним из этапов покорения теоремы Семериди стало доказательство (К. Ф. Рот, 1953 г.) «промежуточного» утверждения о том, что из положительной плотности множества $A \subseteq \mathbf{N}$ следует наличие в A трехчленной арифметической прогрессии. Именно этот «промежуточный» этап вызвал к жизни предложенную на нашей олимпиаде «ослабленную» формулировку гипотезы Эрдеша.

Мои личные попытки доказать гипотезу Эрдеша в этой ослабленной формулировке привели меня к открытию целого ряда удивительных фактов о натуральных числах. Перечислю некоторые из них, надеясь, что у читателей они вызовут не только удивление, но и некоторые важные ассоциации. Итак, пища для размышлений:

1. Любая возрастающая геометрическая прогрессия не содержит никаких, даже трехчленных, арифметических прогрессий. Ряд из обратных величин к членам геометрической прогрессии сходится. Плотность любой геометрической прогрессии нулевая. Все это отлично согласуется с утверждением Эрдеша.

Попытаемся «опровергнуть» гипотезу Эрдеша — будем строить множество $B_3 \subseteq \mathbf{N}$, $B_3 = \{b_1 < b_2 < \ldots\}$ так, чтобы оно не содержало *трехчленных* арифметических прогрессий, но было, по возможности, «наиболее плотным». Мы хотим, чтобы суммы обратных величин к членам B_3 были как можно больше (чтобы, если повезет, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ стал расходящимся). Применим «жадный» алгоритм — будем двигаться слева направо по натуральному ряду $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ и каждый раз вычеркивать из него то число, которое образует трехчленную арифметическую прогрессию (являясь ее третьим членом) с некоторыми предыдущими невычеркнутыми числами. В результате останется очень интересное множество $B_3 = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 14, 28, \ldots\}$. Интуиция (и, увы, пока только интуиция!) говорит нам, что мы построили, в некотором смысле, «максимально плотное» множество без трехчленных арифметических прогрессий.

Выполнение этого «жадного» алгоритма можно мыслить себе и таким образом — на каждом шаге мы приписываем к образовавшемуся на предыдущем шаге множеству то наименьшее натуральное число, которое не образует с уже написанными элементами арифметических прогрессий. «Жадный» алгоритм добавляет на каждом шаге к строящемуся множеству B_3 число b_n с максимально возможным значением дроби $\dfrac{1}{b_n}$. В сложившейся на данный момент работы алгоритма ситуации это максимально возможно увеличивает частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ — вот она, жадность! Однако можно доказать, что плотность построенного множества B_3 нулевая (хотя бы, в силу теоремы Семериди), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ самым удивительным образом сходится и (о, Боже!) его сумму удалось оценить: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n} \leqslant 3$. Вот если бы теперь каким-то невероятным образом нам удалось доказать, что множество $B_3 = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 13\ldots\}$ дает (среди всех множеств без арифметических прогрессий) максимальную сумму ряда из своих обратных величин, то проблема Эрдеша была бы решена! Но «жадный» алгоритм не всегда оптимален! Известно, что «жадный» алгоритм оптимален тогда и только тогда, когда он работает на структуре матроида, но где здесь тот матроид, на котором оптимален предложенный алгоритм, как его разглядеть?

2. Зафиксируем *простое* число p. Построим подобным же образом, действуя с помощью «жадного» алгоритма, «максимально плотное» множество $B_p \subseteq \mathbf{N}$, которое не содержит p-членных арифметических прогрессий — будем двигаться по натуральному ряду слева направо и каждый раз вычеркивать то число, которое образует p-членную арифметическую прогрессию (являясь ее последним членом) с некоторыми

предыдущими невычеркнутыми числами. В этом случае для суммы ряда из обратных величин к элементам множества B_p справедлива оценка: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{b_n} \leqslant p$. Более того, компьютерные эксперименты с вычислением частичных сумм этих рядов наталкивают на совсем уж мистическую мысль — суммы этих рядов в точности равны p. Каковы оценки для аналогичных множеств B_s, не содержащих арифметических прогрессий, длина которых является составным числом, я не знаю — в случае составного s ситуация усложняется и компьютерный эксперимент показывает, что, например, при $s = 4$ сумма соответствующего ряда из обратных величин не равна 4. Но, во всяком случае, у меня нет никаких сомнений в их сходимости.

3. Знаменитое канторово совершенное множество $\boldsymbol{c}$ на отрезке $[0, 1]$ строится индуктивным процессом. Отрезок $[0, 1]$ делится на три равные части и средний открытый интервал выкидывается. Оставшиеся две трети отрезка снова делятся на три равные части и средние открытые интервалы из них выкидываются и т. д. Оставшееся множество точек на отрезке $[0, 1]$ и составляет $\boldsymbol{c}$. Множество $\boldsymbol{c}$ имеет мощность континуума, меру ноль и не содержит трехчленных арифметических прогрессий! Это совершенно очевидно, ведь каждым шагом построения канторова множества из трехчленных арифметических прогрессий отрезка $[0, 1]$ выбрасываются средние члены. Канторово множество $\boldsymbol{c}$ состоит из всех чисел отрезка $[0, 1]$, не содержащих в своей троичной записи цифры 1. Если при построении множества $\boldsymbol{c}$ выбрасывать каждый раз не средние интервалы, а крайние правые, то останется множество чисел отрезка $[0, 1]$, не содержащих в своей троичной записи цифры 2 и также не содержащее трехчленных арифметических прогрессий (ибо при таком способе построения из трехчленных прогрессий будут выбрасываться крайние правые члены).

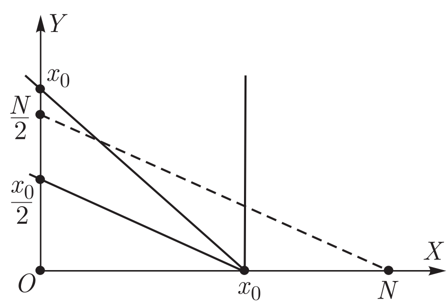
4. Сдвинем по числовой оси построенное выше множество B_3 на единицу влево (или, если угодно, начнем действовать «жадным» алгоритмом с числа 0). Получится новое множество $\widetilde{B}_3 = \{0, 1, 3, 4, 9, 10, \ldots\}$, которое, естественно, тоже не содержит трехчленных арифметических прогрессий. Легко понять, что множество $\widetilde{B}_3$ составляют в точности те натуральные числа, которые в своей троичной записи не содержат цифры 2 — здесь аналогия с канторовым совершенным множеством просто выпирает на передний план! Аналогично устроены множества $\widetilde{B}_q$ — сдвинутые на единицу влево множества B_q, не содержащие q-членных арифметических прогрессий. Элементы $\widetilde{B}_q$ — это в точности те натуральные числа, которые не содержат в своей записи в q-ичной системе счисления цифры $\overline{q-1}$.

5. Назовем множество $M \subseteq [1, N] \subset \mathbf{N}$ *максимально плотным* в начальном отрезке натуральных чисел $[1, N]$, если оно не содержит трехчленных арифметических прогрессий, а добавление к нему

любого числа из отрезка $[1, N]$ лишает его этого свойства. Изучение максимально плотных множеств чрезвычайно интересно для решения проблемы Эрдеша. Верно ли, что всякое максимально плотное в отрезке $[1,\ 3^k]$ множество M (т. е. M из начального отрезка натуральных чисел от 1 до k-й степени тройки и M не содержит трехчленных арифметических прогрессий) может быть получено в результате работы следующего недетерминированного алгоритма. Делим отрезок $[1,\ 3^k]$ на три равные части, наугад выбираем одну из них и выкидываем. Каждую из двух оставшихся третей отрезка снова делим на три равные части и выкидываем наугад выбранные трети этих третей и т. д. Работа этого недетерминированного алгоритма есть не что иное, как случайный спуск по ветвям троичного дерева (растущего вниз) из корня-верхушки до k-го уровня вниз, причем в каждой вершине случайно осуществляется выбор двух из трех возможных направлений дальнейшего спуска.

6. Рискну, наконец, предложить вам красивую геометрическую интерпретацию следующей задачи: «Какое наименьшее количество чисел нужно выкинуть из начального отрезка $[1, N]$ натурального ряда, чтобы оставшееся множество не содержало трехчленных арифметических прогрессий, т. е. было максимально плотным?». Будем изображать трехчленную арифметическую прогрессию (a_1, a_2, a_3) точкой на координатной плоскости XOY с координатами (a_1, d), где a_1 — первый член прогрессии, $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ — ее разность. Точки оси OX, т. е. прогрессии вида $(a_1,\ 0)$, будем отождествлять с натуральными числами.

Легко сообразить, что удаление из натурального ряда некоторого числа x_0 (см. рисунок) влечет исчезновение из натурального ряда всех прогрессий, в которых x_0 является первым членом (на плоскости XOY вертикальным лучом вычеркиваются точки вида (x_0, d)); влечет исчезновение прогрессий, в которых x_0 является вторым членом (вычеркиваются точки вида $(x_0 - d,\ d)$, лежащие на среднем наклонном луче); и влечет исчезновение прогрессий, в которых число x_0 является третьим членом



(удаляются точки вида $(x_0 - 2d,\ d)$ на самом левом наклонном луче). На координатной плоскости XOY возникает «куст» из трех лучей с началом в точке x_0, который вычеркивает все трехчленные арифметические прогрессии, в которых фигурирует число x_0. Легко понять, что все трехчленные арифметические прогрессии, целиком лежащие в отрезке $[1, N]$, изображаются точками нашей плоскости из показанного на рисунке треугольника с вершинами $\left\{O; N; \frac{N}{2}\right\}$. Вопрос: какое наименьшее количество «кустов» надо расставить на отрезке $[1, N]$, чтобы их лучи вычеркнули все внутренние точки треугольника $\left\{O; N; \frac{N}{2}\right\}$ с целыми координатами?

Давайте я остановлю здесь перечисление своих фантазий на тему этой замечательной проблемы Эрдеша — нет сомнения, что каждый увлекшийся этой проблемой способен выдумать их никак не меньше. Ясно одно — решение этой задачи даже в нашей ослабленной «олимпиадной» формулировке чрезвычайно сложно и будет являться существенным продвижением в решении общей проблемы. В силу некоторых разумных соображений, я абсолютно уверен, что если кто-нибудь научится выбирать из данного в задаче множества $\{a_n\}$ натуральных чисел трехчленную арифметическую прогрессию, то я научусь выбирать и сколь угодно длинную, решив тем самым проблему Эрдеша в общей постановке.

Коллеги! Помогайте! Я поделюсь бриллиантами.

№ 111 (4,2,2). Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, если последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_{n+4} = a_{n+3} + a_{n+1} + a_n$ и $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 5$.

Комментарий. Нет нужды говорить, что подобных задач можно придумать миллионы! Поскольку для последовательностей, заданных линейным рекуррентным соотношением, разработана масса классических регулярных методов их изучения, то обсуждать в этой задаче, собственно, нечего. Разве что для конкретной последовательности вы придумаете какой-нибудь хитрый финт, который позволит получить ответ на вопрос задачи в две строчки, но это вряд ли...

№ 112 (3,3,3). На множестве $\{0, 1, 2\}$ функция $\varphi(x, y)$ задана таблицей

$\varphi(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$
$x=0$	2	1	1
$x=1$	0	1	2
$x=2$	1	0	2

Найдите полином над Z_3, равный этой функции как функция.

Комментарий. Тут дана не очень сложная задача по алгебре — из раздела «конечные поля» или, если угодно, задача по логике — из раздела «трехзначная логика». В общем, представленная задача относится к уже ставшим традиционными в университетских курсах разделам дискретной математики с методами решения подобных задач, уже давно ставшими стандартными. Аккуратно выполните рассказанные в лекциях инструкции, и задача решится.

№ 113 (50,50,50). Чудо! Рассмотрим следующий алгоритм, работающий с натуральными числами.

Берем натуральное число. Если оно четное, то делим его на 2, если оно нечетное, то умножаем на 3 и прибавляем 1. С получившимся числом повторяем ту же процедуру — если оно четное, то делим его на 2, если оно нечетное, то умножаем его на 3 и прибавляем 1 и т. д.

Докажите, что, начав с любого натурального числа выполнять описанный алгоритм, вы рано или поздно получите число 1.

Комментарий. Это — знаменитая «проблема $3n+1$». Удивительно то, что, несмотря на элементарность и простоту своей формулировки, она остается до сих пор нерешенной научной проблемой! (Во второй половине XX в. этой проблемой, в частности, довольно активно занимались в Германии, где существует классическая научная школа по теории чисел, но, увы — безуспешно!).

Мне, в свое время, довелось довольно долго думать над этой задачей, и эти раздумья привели меня к вере, что утверждение задачи справедливо — я проверил это утверждение на компьютере для всех чисел, меньших 10^{15}. Я понимаю, что для решения проблемы достаточно доказать следующее утверждение — начав работать алгоритмом с любого *нечетного* натурального числа, мы рано или поздно получим число, меньшее исходного. Я умею строить классы натуральных чисел, от которых описанная в задаче процедура приводит к степени двойки, выполняя фиксированную произвольно заданную последовательность делений на 2 и умножений на 3. Я даже умею доказывать, что плотность (в множестве всех натуральных чисел) множества тех чисел, из которых заданный алгоритм делает единицу, равна 1. Но я не могу решить саму задачу!!!! У меня создается ощущение, что мы в этой задаче имеем дело с каким-то загадочным и почти мистическим явлением природы! Ну, скажите на милость, почему, выполняя этот алгоритм с натуральными числами, на двойку придется делить чаще, чем умножать на три? И не просто чаще, а не менее, чем в $\dfrac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}58496\ldots$ раза чаще!?

№ 114 (30,30,30). Нео и Морфеус играют в Матрицу $n \times n$. Вначале Матрица пуста. Игроки по очереди ставят в нее числа 0 или 1. После заполнения Матрицы вычисляется ее Определитель. Если Определитель Матрицы равен нулю, то выиграл Нео, иначе — выиграл Морфеус.

а). Докажите, что при четном n Нео всегда может выиграть, играя вторым.

б.) Докажите, что при нечетном n Нео всегда может выиграть, играя первым.

в). Кто выигрывает в двух оставшихся случаях назначения очередности ходов (при $n > 2$)?

Комментарий. Весьма привлекательная и совсем не простая комбинаторная задача. Случаи а) и б) разбираются с некоторым трудом. В случае в) я не знаю ни решения этой задачи, ни правильного ответа.

№ 115 (25,25,25). Буратино и Карабас-Барабас играют в ДНК. Имеется неограниченный запас нуклеотидов A, C, G, T. Игроки строят цепочку ДНК, добавляя по очереди по одному нуклеотиду к одному и тому же концу цепочки. Запрещается повторять последний ход соперника. Буратино выигрывает, если в некоторый момент игры ДНК заканчивается двумя последовательными одинаковыми фрагментами (любой длины). Карабас выигрывает, если длина цепочки достигает 10^9.

а). Лиса-Алиса советует Буратино всегда делать один и тот же ход (например, A). Докажите, что она — плохой советчик.

б). Кто побеждает при оптимальной игре обеих сторон?

Комментарий. Когда автор этой задачи, специалист по комбинаторике слов Арсений Михайлович Шур представлял ее на олимпиаду ДММ, он не знал решения пункта б). Но студенты решили эту задачу прямо во время олимпиады, причем оба пункта! Решение представляет собой достаточно изящное и нетривиальное рассуждение. По моей просьбе, А. М. Шур восстановил это решение и предоставил мне следующий текст.

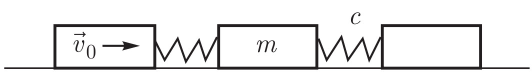
а). Заметим, что при описанной стратегии выигрыш Буратино всегда фиксируется в момент, когда последовательность ходов Карабаса заканчивается парой одинаковых фрагментов. Карабас, имея в единоличном распоряжении целых три различных нуклеотида, может без труда уклониться от такой ситуации. Существование бесконечных слов в трехбуквенном алфавите без повторяющихся фрагментов было доказано в 1906 г. норвежским математиком Акселем Туэ, «дедушкой» комбинаторики слов. Впрочем, воспроизвести этот результат не так просто, а «подглядеть» его можно, к примеру, в книге: *Саломаа А.* Жемчужины теории формальных языков. — М.: Мир, 1986; или, что более доступно и естественно для студентов матмеха УрГУ, — в учебнике: *Шур А. М.* Комбинаторика слов. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2003.

б). Проверьте, что следующая простая стратегия приносит победу Буратино не позднее десятого хода (неважно, кто ходит первым):

— первые два хода Буратино должны быть различны;

— если Буратино не может выиграть очередным ходом, он должен повторить предпоследний ход Карабаса.

№ 116 (0,10,8). На совершенно гладкой горизонтальной плоскости покоится система из трех тел, соединенных пружинами (массы всех тел равны m, жесткости пружин — c). В некоторый момент первому телу сообщили скорость $\vec{v}_0$ (см. рисунок). Найдите верхние границы абсолютных скоростей всех тел в ходе движения системы.

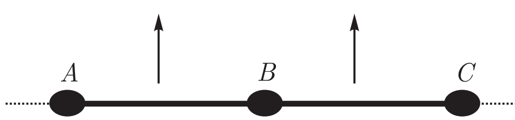


Комментарий. Все-таки я не устаю восхищаться изобретательностью в придумывании задач, присущей моим коллегам с кафедры теоретической механики! Но еще больше меня восхищает тот факт, что все эти изощренные задачи по динамике решаются одним и тем же способом — составлением системы уравнений Лагранжа второго рода и аккуратным решением этой системы.

№ 117 (0,10,8). Два одинаковых однородных стержня AB и BC шарнирно соединены в точке B и движутся поступательно в горизонтальной плоскости, оставаясь на одной прямой, перпендикулярной направлению движения. Конец A внезапно шарнирно закрепляется. Докажите, что:

а). Сразу после удара угловая скорость стержня AB в 3 раза превышает угловую скорость стержня BC.

б). При дальнейшем движении, когда стержни снова окажутся на одной прямой, угловая скорость стержня BC будет в 9 раз больше угловой скорости стержня AB.



Комментарий. Все совершенно понятно — система стержней работает, как плетка. Должен сказать, что формулировки задач, предлагаемых кафедрой теоретической механики, иногда трогают меня до глубины души — «конец A внезапно закрепляется...». Это не иначе, как проделки Кащея Бессмертного под покровом ночи, когда никто этого не ждет.... От такого страха и сердце может внезапно остановиться! Однако не бойтесь, это не очень сложная задача по кинематике.

№ 118 (4,3,2). Для каждого значения $n \in \mathsf{N}$ решите уравнение

$$(x + y)^n = x^n + y^n.$$

Комментарий. Это довольно простая задачка по арифметике, нацеленная на выработку у начинающих математиков рефлекса аккуратно проводить разбор случаев различных значений параметра (в нашей задаче — значения показателя $n \in \mathsf{N}$). Начинайте. Пусть $n = 1$, тогда, очевидно, решениями уравнения являются... Пусть теперь n — четное число... Пусть, наконец, n — нечетное... Докажем теперь, что других решений у этого уравнения нет, для чего введем новую переменную $z = \dfrac{y}{x}$ и... После этих слов любой грамотный профессионал-математик согласится со мной, что я, фактически, рассказал вам решение этой задачи почти что полностью!

№ 119 (3,3,3). На плоскости боги нарисовали правильный шестиугольник со стороной a и снабдили вас линейкой без делений. Теперь вы, пользуясь только этой линейкой и карандашом, для любого значения $n \in \mathsf{N}$, большего единицы, постройте отрезок длины a/n.

Комментарий. Вот так! Оказывается, математические Олимпийские игры зародились еще в Древней Греции, а их организаторами были очень уважаемые персоны! Доподлинно известно, что древнегреческие боги были настоящими мастерами в изобретении изощренных приколов над мирными жителями Эллады — представленная задача еще раз это неопровержимо доказывает. Но древнегреческий математик Фалес Милетский отыскал способ изящно решить эту задачу, посрамив, в очередной раз, потуги обитателей Олимпа. Повторите сегодня достижение Фалеса, представляя себе, что в роли богов-неудачников теперь выступают организаторы Олимпиады и члены жюри.

№ 120 (0,15,15). Пусть $\{a, b\}$ — алфавит и w — слово над этим алфавитом. Обозначим через $A(w)$ число вхождений буквы a в w, а через $B(w)$ — число вхождений буквы b в w. Обозначим через L язык, состоящий из тех слов, для которых $A(w)$ и $B(w)$ взаимно просты. Является ли язык L регулярным?

Комментарий. Хорошая задачка по дискретной математике, явно перекликающаяся с более поздней задачей наших олимпиад, помещенной под № 173 в этой книжке. Внимание! Просьба всем заинтересованным и азартным читателям закрыть в этом месте глаза, ибо дальше в тексте последует подсказка, убивающая половину задачи и ее исследовательский дух. Правильный ответ — нет, не является.

№ 121 (6,5,4). При каких $x \in \mathsf{R}$ последовательность

$$f_n(x) = \sin(7^n \pi \cdot x)$$

сходится и к какому пределу?

Комментарий. Открою вам секрет — число 7 не играет в этой задаче никакой существенной магической роли и в условии задачи его можно заменить любым нечетным целым числом $q > 1$.

Решение представленной задачи не очень сложно, особенно если сразу условиться рассматривать углы по $\mathrm{mod}(2\pi)$. Действительно, если последовательность $f_n(x)$ сходится, то последовательность аргументов-углов $\varphi_n = q^n \pi \cdot x$ либо имеет единственный (по $\mathrm{mod}(2\pi)$) предел t, либо распадается на две подпоследовательности, сходящиеся к углам t и $\pi - t \not\equiv t (\mathrm{mod} 2\pi)$. Рассмотрите два этих случая самостоятельно, после чего проверьте свои ответы методом их сравнения с правильными:

$$\text{либо } x = \frac{2m}{q^N(q-1)} \text{ и предел равен } \sin\frac{2m\pi}{q-1};$$

$$\text{либо } x = \frac{2m+1}{q^N(q+1)} \text{ и предел равен } \sin\frac{(2m+1)\pi}{q+1},$$

где m и N — любые целые числа.

№ 122 (7,6,5). Пусть $f(x)$ — действительная функция, которая определена и непрерывна на некотором фиксированном подмножестве $M \subseteq [0,\ 1]$. Докажите, что $f(x)$ можно доопределить в остальных точках отрезка $[0,\ 1]$ так хитро, что она останется непрерывной на M.

Комментарий. Не очень сложная задача, которая, на мой взгляд, однако, совершенно недоступна нынешним студентам инженерных вузов — в такие глубины понимания сути понятия непрерывности будущие инженеры обычно не погружаются. А студентам-математикам здесь следует строго сказать: «Ну, а что вы хотели?» Вам поневоле придется вспомнить строгие определения! Что значит, что функция непрерывна в точке? Что значит, что функция непрерывна на заданном множестве? После того, как вы вспомните и прочувствуете эти определения, вам остается изобрести процедуру доопределения функции, аккуратно написать ее и направить свое письмо в жюри.

№ 123 (6,5,5). Докажите, что если непрерывная функция $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ удовлетворяет тождеству $f(f(f(x))) \equiv x$, то $f(x) \equiv x$.

Приведите пример функции $g : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ такой, что $g(x) \not\equiv x$ и $g(g(g(x))) \equiv x$.

Комментарий. Это хорошая задачка, в особенности полезная первокурсникам. Пример разрывной функции $g : R \to R$ такой, что $g(x) \not\equiv x$ и удовлетворяющей тождеству $g(g(g(x))) \equiv x$ привести легко:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \notin \{1, 2, 3\}, \\ 2, & x = 1, \\ 3, & x = 2, \\ 1, & x = 3, \end{cases}$$

— функция $g(x)$ циклически переставляет числа $\{1, 2, 3\}$, а остальные значения аргумента «оставляет на месте». А вот какую роль сыграют соображения непрерывности функции $f(x)$, удовлетворяющей тождеству $f(f(f(x))) \equiv x$, при доказательстве того, что она вообще все значения своего аргумента обязана «оставлять на месте», я предлагаю вам выяснить самостоятельно.

№ 124 (4,4,4). В пространстве отмечено 37 различных точек с целыми координатами. Никакие три из этих точек не лежат на одной прямой. Докажите, что из них можно выбрать три точки, образующие треугольник, у которого точка пересечения медиан имеет целые координаты.

Комментарий. Очередная изощренная вариация на тему принципа Дирихле о вечном жилищном вопросе для большого количества кроликов, которым не хватает жилплощади. В самом деле — точек пересечения медиан много, а возможных значений дробных частей у их координат всего три — $\{0, 1/3, 2/3\}$. Разнообразия в выборе дробных частей для координат мало, вот и придется одной из точек довольствоваться координатами с нулевой дробной частью…

№ 125 (7,6,6). На достаточно большом расстоянии друг от друга напишите две единицы. Вставьте между ними двойку. Затем между любыми двумя числами, сумма которых равна 3, впишите тройку. Между любыми двумя числами, сумма которых равна 4, впишите четверку и так далее. Сколько раз вы впишите число n?

Комментарий. В этой олимпиадной задаче речь идет о так называемой «диатомической последовательности Штерна». Читателям, знакомым с понятием дробей Фарея, эта задача покажется довольно простой. О дробях Фарея можно прочитать в классической книжке: *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981. Это не совсем простое чтение, поскольку все необходимые сведения о дробях Фарея приведены книжке в Виноградова в форме задач.

Однако поскольку понятие ряда Фарея не является столь уж популярным в университетских курсах, проще будет решать эту задачу «в лоб», не устанавливая прямых аналогий с дробями Фарея. Правильный ответ $\varphi(n)$, где $n > 1$, а $\varphi(n)$ — знаменитая функция Эйлера, равная количеству чисел, взаимно простых с n и меньших n.

№ 126 (8,6,5). Обозначим через $\rho(x)$ плотность множества натуральных чисел, имеющих делитель из отрезка $[x, 2x]$. Докажите, что

$$\lim_{x\to\infty} \rho(x) = 0.$$

Комментарий. Иными словами, в условии задачи утверждается, что чисел с большими делителями «мало» и этих чисел становиться тем меньше, чем большие требования к размеру их делителя мы предъявляем. Числа, имеющие делитель $x_0 \in [x, 2x]$, образуют арифметическую прогрессию $x_0, 2x_0, 3x_0, \ldots$, плотность которой не превосходит $1/x_0$. Мой вам совет — посчитайте общее количество таких арифметических прогрессий, члены которых делятся на числа из отрезка $[x, 2x]$ (учтите, что некоторые из этих прогрессий имеют непустое пересечение между собой) и аккуратно оцените сверху значение функции $\rho(x)$ как плотность объединения арифметических прогрессий. Столь разумные и осмысленные действия (к тому же еще и благословленные автором этой книжки), должны привести вас к успеху в решении представленной олимпиадной задачи.

№ 127 (6,3,3). Пусть функция $f(x)$ бесконечно много раз дифференцируема на интервале $(-a, a)$ и пусть последовательность производных $f^{(n)}(x)$ равномерно сходится на $(-a, a)$. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(0) = 1$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$.

Комментарий. Очень простая задача, почерпнутая со студенческой олимпиады МФТИ 1976 г. и предложенная нашим участникам для придания им уверенности в своих силах и для воспитания умения с первого взгляда распознавать простые задачи среди массы сложных. В условиях задачи равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = g(x)$ можно проинтегрировать почленно:

$$\int\limits_0^x g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \bigl(f^{n-1}(x) - f^{n-1}(0)\bigr) = g(x) - 1,$$

значит, $g'(x) = g(x)$ и $g(0) = 1$. В силу единственности решения задачи Коши и достаточно высокого уровня нашей математической подготовки, получаем правильный ответ: e^x.

№ 128 (0,8,7). Пусть α — гладкая плоская простая и регулярная кривая с непрерывной кривизной, ограничивающая выпуклую область $D \subseteq \mathrm{R}^2$. Определим функцию $\rho(x, y)$, равную кратчайшему расстоянию от точки (x, y) до кривой α, взятому со знаком плюс, если $(x, y) \notin D$, и со знаком минус, если $(x, y) \in D$. Докажите, что при достаточно малом $R > 0$ выполнено:

$$\iint\limits_{|\rho| \leqslant R} \rho(x, y)\, dx\, dy = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Комментарий. Эта задача, как и предыдущая, № 127, обязана своим рождением студенческой математической олимпиаде МФТИ, но только уже следующего, 1977 г. В отличие от своей предшественницы, эта задача реально сложная и требует для своего решения хорошего понимания основ дифференциальной геометрии кривых (уравнений Френе плоской регулярной кривой, геометрического смысла кривизны и т. п.). Видимо, после послабления в 1976 г., в 1977 г. студентам-физикам решено было показать «где раки зимуют»!

Коллеги! Прислушайтесь к моему доброму совету — считайте сразу, что данная кривая натурально параметризована. Сообразите, что область интегрирования $|\rho| \leqslant R$ — эдакую «приграничную полосу» вдоль кривой — можно параметризовать так: $p(s, t) = \alpha(s) + t \cdot \vec{\nu}(s)$, где $p(s, t)$ — точка области, $|t| \leqslant R$, $\vec{\nu}(s)$ — единичный вектор нормали кривой $\alpha(s)$. Докажите, что отображение $p(s, t)$ является взаимно-однозначным отображением прямоугольника

$$s_0 \leqslant s \leqslant s_0 + l, \quad |t| \leqslant R \quad (\text{здесь } l \text{ — длина всей кривой } \alpha)$$

на приграничную полосу $|\rho| \leqslant R$. Факт взаимной однозначности отображения $p(s, t)$ понадобится вам для того, чтобы вычислять искомый интеграл не по «корявой» приграничной полосе $|\rho| \leqslant R$, а по прямоугольнику, причем в новых координатах s, t подынтегральная функция $\rho(x, y)$ просто равна t. Для правильного вычисления двойного интеграла в новых координатах, не забудьте умножить подынтегральное выражение на якобиан перехода, который тоже еще нужно вычислить, используя уравнения Френе! В общем, как любят говорить студентам преподаватели МФТИ: «Работайте, работайте! Солнце еще высоко!». И они правы! Я считаю, что самостоятельное решение этой задачи вполне доступно студентам-математикам второго курса и надо его от них добиться!

№ 129 (10,10,10). Докажите, что уравнение $y' = y^2 + x$ с начальным условием $y(0) = 0$ не имеет решения на интервале $(0,\ 3)$.

Комментарий. Эта задача предлагалась на студенческой олимпиаде мехмата МГУ в 1976 г. Ее решение не потребует от вас никаких специфических знаний из области дифференциальных уравнений, но, при рассуждении «от противного», потребует проявить «знатную» изобретательность в получении противоречия. Давайте я вам немножко подскажу. Если $y(x)$ — решение данного уравнения на интервале $(0,\ 3)$ и $y(0) = 0$, то на интервале $(0,\ 3)$ всюду $y' > 0$, $y > 0$ и $y(x)$ монотонно возрастает. Где противоречие? А попробуйте рассмотреть функцию $g(x) = \operatorname{arctg}(y(x))$ и доказать, что из условий задачи следует, что на интервале $(0,\ 3)$ обязано выполняться неравенство $g(x) \geqslant x - 1$. «Ну, и что в этом страшного?» — спросите вы. Действительно, мало ли какие неравенства выполняются для каких-то взятых с потолка функций! Только вот наше неравенство означает $g(2,9) \geqslant 1,9 > \frac{\pi}{2}$, а это невозможно! Оказывается, если интегральная кривая выходит из начала координат, то условие $y' = y^2 + x$ означает, что кривая обязана подниматься вверх столь быстро, что она не успеет дойти до вертикальной прямой $x = 3$, а уйдет «в бесконечность» уже при $x < 2{,}9$. Согласитесь, «знатная» изобретательность для отыскания такого эффектного решения задачи очень пригодится.

№ 130 (5,5,5). Докажите, что любое целое число можно представить в виде суммы пяти кубов целых чисел.

Комментарий. Это — известная задача. Доказательство приведенного утверждения несколько необычно — для каждого целого числа непосредственно пишется его представление в виде суммы пяти кубов: $6n = (n+1)^3 + (-n)^3 + (-n)^3 + (n-1)^3 + 0^3$ — числа, кратные 6, представимы даже в виде суммы четырех кубов. Далее:

$$\begin{aligned}
6n + 1 &= 6n + 1^3;\\
6n + 2 &= 6(n-1) + 2^3;\\
6n + 3 &= 6(n-4) + 3^3;\\
6n + 4 &= 6(n+2) + (-2)^3;\\
6n + 5 &= 6(n+1) + (-1)^3.
\end{aligned}$$

Проблематика, с которой связана наша олимпиадная задача, очень популярна в научных кругах специалистов по теории чисел — представление чисел данного класса в виде суммы одинаковых степеней чисел из некоторого другого класса.

В этой области человеческих знаний известна следующая замечательная общая теорема: *для любого натурального k существует такое натуральное $N(k)$, что каждое натуральное число представимо в виде суммы не более чем $N(k)$ слагаемых, являющихся k-ми степенями натуральных чисел.*

У этой теоремы было известно несколько различных неэлементарных доказательств, но в 1942 г. ленинградский(!!!) математик Ю. В. Линник, находясь на фронте(!!!), придумал чисто арифметическое элементарное ее доказательство, которое, тем не менее, является исключительно сложным (см., например, потрясающую классическую книжку: *Хинчин А. Я.* Три жемчужины теории чисел. — ОГИЗ Гостехиздат, 1947. Эта уникальная книжка потрясающа не только своим математическим содержанием, но и тем, что основана на фронтовой переписке А. Я. Хинчина и Ю. В. Линника). Что касается функций типа функции $N(k)$, то здесь в настоящее время почти ничего не известно. Представленная олимпиадная задача утверждает, что всякое целое число представимо в виде суммы пяти кубов целых чисел. Всякое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов и число 4 не может быть уменьшено, т. е. $N(2) = 4$. Всякое натуральное число представимо в виде суммы девяти кубов натуральных чисел и, опять таки, число 9 нельзя уменьшить, т. е. $N(3) = 9$. Всякое натуральное число представимо в виде суммы не более 21 штуки четвертых степеней, но про точность этой оценки мы пока ничего не знаем (кажется, ее можно уменьшить до 19), т. е. $N(4) \leqslant 21$. Далее — полный туман.

Всякое рациональное число представимо в виде суммы трех кубов рациональных чисел, причем доказательство этого утверждения (найденное в 1825 г.) укладывается в одну строчку и выглядит потрясающе:

$$a = \left(\frac{a^3 - 3^6}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6}\right)^3 + \left(\frac{-a^3 + 3^5a + 3^6}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6}\right)^3 + \left(\frac{a^2 + 3^4a}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6}\right)^3$$

— совершенно непонятно, как до него додуматься! Объяснением секретов разыскания подобных доказательств занимается алгебраическая геометрия; читателям, заинтересованным приведенным примером, рекомендую хорошую, но весьма непростую книжку: *Манин Ю. И.* Кубические формы. Алгебра, геометрия, арифметика. — М.: Наука, 1972.

В качестве дополнения к нашей олимпиадной задаче, а также неплохого развлечения, предлагаю читателям следующую задачу: доказать, что число 1 не может быть представлено в виде суммы двух кубов отличных от нуля рациональных чисел.

№ 131 (8,8,8). Найдите вероятность p_n того, что случайно составленный из элементов поля $\mathbf{Z}_2$ определитель порядка n окажется отличен от нуля. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Комментарий. Эта задача предлагалась на студенческой олимпиаде мехмата МГУ в 1976 г., хотя в научных кругах была известна и раньше. Это непростая, но и не запредельно сложная комбинаторная задача, подразумевающая аккуратный подсчет числа отличных от нуля определителей порядка n, т. е. числа различных линейно независимых над полем $\mathbf{Z}_2$ упорядоченных наборов из n строк длины n. Рассуждайте, пожалуйста, самостоятельно — для контроля я приведу только правильный окончательный ответ:

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right).$$

А попробуйте-ка решить эту же самую задачу над полем действительных чисел при условии, что определители порядка n случайно составляются только из нулей и единиц! Почувствуйте разницу!

№ 132 (2,1,1). Столбцы матрицы A попарно ортогональны. Докажите, что $|\det A|$ равен произведению длин вектор-столбцов.

Комментарий. Да ерунда, это почти очевидно. Мне вообще кажется, что всякий добросовестный лектор, исполняющий для первокурсников линейную алгебру, не станет «скрывать правду» и непременно отметит сформулированное свойство в подходящем месте своего лекционного курса. Эта тривиальная задача направлена исключительно на поддержание «боевого духа» участников олимпиады, придание им уверенности в своих силах и развитие умения «с первого взгляда» выделять простые задачи из общей массы разношерстных олимпиадных заданий.

№ 133 (5,4,3). Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$ — бесконечно много раз непрерывно дифференцируемая функция. Сколько существует различных производных порядка k от функции f?

Комментарий. Это понятная и не очень сложная задача комбинаторного характера. В приведенной формулировке наша героиня № 133 предлагалась даже на студенческой математической олимпиаде мехмата МГУ в 1976 г. Разумеется, ее решение предполагает аккуратный и не совсем тривиальный комбинаторный подсчет производных k-го порядка, которые *могут* быть различны, но участники олимпиады в нашем университете в шутку, но очень справедливо ворчали по поводу «МГУшной» формулировки этой задачи: «Сколько производных, сколько производных.... Зависит от функции! Если функция f линейная, то всего одна! (При $k \geqslant 2$, естественно)». Правильный ответ — различных производных порядка k у функции от n переменных может быть не более, чем C_{n+k-1}^{k}, причем у функции $f = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^k$ их в точности C_{n+k-1}^{k} а, например, у функции $f = e^{x_1+x_2+\ldots+x_n}$ — только одна.

№ 134 (6,3,3). (Придумана под впечатлением от «дичковатых» задач со вступительных экзаменов на мехмат МГУ по их образу и подобию). Сколько непересекающихся интервалов содержит ортогональная проекция фигуры

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 18x^3 - 20y^3 - 20x^2y - 18xy^2 + \\ + 162x^2 + 174y^2 + 156xy - 624x - 652y + 1064 < 0$$

на прямую $4x - 3y + 20 = 0$?

Комментарий. Задачи вступительных экзаменов в МГУ названы «дичковатыми» потому, что для успешного решения такой задачи на экзамене, надо хорошо понимать, как ее придумали. Мы уже встречались с подобными задачами и способами их придумывания в примере № 26 этого сборника. Подобный уровень понимания технологии выдумывания задач по курсу школьной математики вряд ли достижим в процессе изучения математики в средней школе даже очень сильными учениками. При этом я вовсе не оспариваю право МГУ предлагать поступающим на экзаменах такие задачи, а даже радуюсь столь высокому уровню требований к абитуриентам — должны же в России быть вузы, где по-честному сложно!

Что касается представленной задачи — я просто взял уравнения двух касающихся кривых второго порядка (кажется, — обычных окружностей), перемножил их, поставил знак строгого неравенства вместо знака «равно» и написал уравнение подходящий прямой, в проекции на которую видно «дырку» между касающимися квадриками. Согласитесь — надо обладать чертовской догадливостью, чтобы успешно разложить на квадратные множители приведенный в задаче многочлен четвертой степени. А если бы я перемножил три квадрики!?

№ 135 (3,2,2). Детская задача. В метрическом пространстве (X, ρ) постройте открытый шар $O(a, r) = \{\, x \in X | \rho(a, x) < r\}$ и замкнутый шар $Z(a, r) = \{\, x \in X | \rho(a, x) \leqslant r\}$ с общим центром и одинаковыми радиусами такие, что замыкание $O(a, r)$ не совпадает с $Z(a, r)$. И не донимайте с этой задачей своего преподавателя по математическому анализу!!!.

Комментарий. Мне кажется, что к этой поучительной задачке какие-либо комментарии излишни — придумайте подходящий пример самостоятельно.

№ 136 (4,4,4). Молодежная задача. В полном метрическом пространстве (X, ρ) постройте бесконечную последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, пересечение которых пусто.

Комментарий. Эта поучительная задачка чуть-чуть посложнее предыдущей и будет очень полезна первокурсникам для постижения сути вопроса — какие такие скрытые мотивы вызывают к жизни «очевидную» на первый взгляд «лемму о вложенных отрезках»? Примеров, подходящих под условия этой олимпиадной задачки, можно придумать великое множество. Вот один из них.

Рассмотрим множество $X = \{2, 3, 4, \ldots\} = N \backslash \{1\}$ и определим на X метрику, полагая

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 0, & \text{если } m = n, \\ 1 + \dfrac{1}{\min\{n,m\}}, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

Проверьте-ка самостоятельно, что эта функция действительно является метрикой и что (X, ρ) — полное метрическое пространство. Рассмотрите, наконец, следующие множества в пространстве (X, ρ):

$$Z_n = \{n,\, n+1,\, n+2, \ldots\}.$$

Убедитесь, что Z_n — замкнутый шар радиуса $1 + \dfrac{1}{n}$ с центром в точке $n+1$, что $Z_{n+1} \subset Z_n$, и что $\bigcap\limits_{n=2}^{\infty} Z_n = \varnothing$. Изящно, правда?

«Математика состоит из примеров, господа!» — говорил Давид Гильберт.

№ 137 (25,25,25). Тонкая комбинаторная задача (не для слабонервных). Функцией выбора f на семействе множеств $\{X_\alpha | \alpha \in J\}$ называется произвольная функция $f : J \to \cup X_\alpha$ такая, что $f(\alpha) \in X_\alpha$. Пусть на произвольном семействе непересекающихся двухэлементных множеств существует функция выбора. Докажите, что тогда функция выбора существует на произвольном семействе непересекающихся четырехэлементных множеств.

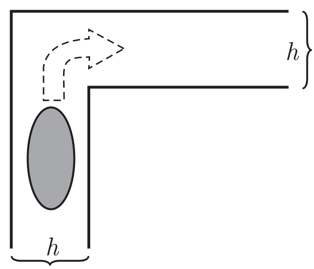
Комментарий. Под «мистическим» номером 137 (тройка, семерка, туз!) в форме задачи представлен известный и весьма нетривиальный факт, впервые подмеченный выдающимся американским математиком Альфредом Тарским. Самостоятельные раздумья над этой задачей («с чистого листа», без подглядок в справочную литературу) потребуют от вас минимум специфических знаний, но изрядного напряжения головного мозга. Если вам удастся самостоятельно решить эту задачу, вы с полным правом можете считать себя по-настоящему одаренным математиком, и я готов вас с этим искренне поздравить. Но даже если вы почерпнете из какого-нибудь источника оригинальное и необыкновенно изящное авторское рассуждение Тарского, вы испытаете от его понимания истинное эстетическое наслаждение.

В качестве любопытной информации в русле проблематики представленной задачи добавлю следующее. Пусть C_n означает утверждение «на произвольном семействе n-элементных множеств существует функция выбора». Доказательство импликации $C_2 \to C_4$ в точности составляет содержание обсуждаемой задачи, и эта импликация доказана Тарским. Возникает естественный общий вопрос: «Какие утверждения C_n выводятся из заданных наборов утверждений $\{C_{k_1}, C_{k_2}, \ldots\}$?» Удивительно, но этой тематике в математическом мире посвящено довольно большое число работ и получены разнообразные теоремы, дающие необходимые и достаточные условия такой выводимости в разных конкретных ситуациях. Вот характерный пример: из C_2 следует C_n тогда и только тогда, когда $n = 1$, $n = 2$ или $n = 4$ (нетривиальная часть «только тогда» доказана Мостовским и Йехом). Разумеется, в общей своей постановке, задача о выводимости C_n из утверждений с другими номерами еще далека от своего окончательного решения. Если кто-нибудь из читателей этой книжки, к моему глубочайшему удовлетворению, увлечется этой проблематикой, то он имеет все шансы, кроме эстетического наслаждения, получить еще и серию новых ярких результатов, которые вполне могут составить основу его будущей докторской диссертации.

№ 138 (25,20,20). Нарисуйте на плоскости aOb множество точек (a, b) таких, что по прямоугольно-заворачивающему коридору ширины h (см. рисунок) можно протащить:

а) эллипс с полуосями a и b;

б) прямоугольник со сторонами a и b.



Комментарий. Нет нужды разъяснять читателям, что эта задача придумана мной в тот момент, когда мы с друзьями во время переезда пытались затащить шкаф в мою квартиру. Плоский двумерный вариант этой задачи, представленный на олимпиаде, не очень сложен — просто сначала ответьте на вопрос: отрезок какой максимальной длины можно протащить по этому Г-образному коридору? После получения ответа на вопрос про отрезок, вам будет уже гораздо легче рассмотреть случаи прямоугольника и эллипса.

Написанным выше абзацем можно было бы и закончить комментарии к представленной олимпиадной задаче, однако последующие беседы с друзьями-математиками, таскавшими мебель, дали мне богатую пищу для размышлений, и я позволю себе немного пофантазировать на тему данной задачи — протаскивания одних фигур сквозь другие. Ясно, что можно придумать великое множество ее вариаций, менять форму коридора, его ширину на входе и на выходе, просить протаскивать разные фигуры — треугольники, овалы, трапеции и т. д. Все эти вариации, несомненно, могут оказаться гораздо сложнее исходной задачи и размышлять над ними весьма интересно. Однако даже для плоского случая куда более сложным и непонятным представляется вопрос: фигуру какой *наибольшей* площади можно протащить по этому Г-образному коридору? Ответа на этот вопрос, имеющий характер задачи вариационного исчисления, а также подступов к нахождению этого ответа я не знаю. [1])

Все становится неизмеримо более сложным, если рассматривать трехмерные варианты этих задач. Пусть имеется аналогичный Г-образный коридор ширины h_1 и высоты h_2. Каких размеров прямоугольный параллелепипед можно протащить по этому коридору? В трехмерном пространстве шкаф ведь можно кантовать, наклонять, поворачивать вокруг разных осей, изменять его положение в пространстве непосредственно в процессе прохождения угла коридора! Увеличение числа степеней свободы шкафа по сравнению с плоским случаем, делает задачу значительно сложней!

Если пытаться сформулировать эту задачу в наиболее общем виде, то получится примерно следующее. Имеется жесткий тоннель (коридор) произвольной фиксированной формы (параметры этой формы считаем заданными в каком-нибудь виде, например — системой неравенств). Этот тоннель может иметь внутри себя выемки, ложбины, выступы, углы, закругления, да что угодно! Пусть, кроме того, дано некоторое тело фиксированной формы, которое, в общем случае, также может быть не обязательно выпуклым, иметь проемы, ложбины, выступы и т. п. Вопрос — можно ли данное тело протащить по данному тоннелю или оно в нем застрянет?

В столь общей формулировке задача выглядит необъятной и совершенно неприступной. Попробуем упростить ее, заменив, для начала, протяженный тоннель на дырку в стене (т. е. отверстие в двумерной плоскости) некоторой фиксированной формы. Можно ли данное трехмерное тело протолкнуть в эту плоскую дыру? Но даже в этой ослабленной формулировке задача приводит меня в трепет. Я совершенно не понимаю, в каких терминах и с помощью какого математического аппарата следует искать ответ в подобных задачах? С каким разделом математики мы вообще имеем здесь дело? Что это? Геометрия? Топология? Где вообще та математика, которая рассматривает подобные вопросы? Ее нет!

А что уж говорить про многочисленные задачи вариационного характера, возникающие в рамках проблематики протаскивания тел по тоннелям! Тело с какой наименьшей площадью поверхности нельзя протащить в данную дыру? Тело какого наибольшего объема в эту дыру пройдет? И так далее, и тому подобное, и совершенно непонятно,

[1]) Насколько мне известно, вопрос о нахождении фигуры наибольшей площади, которую можно протащить по Г-образному коридору, является открытой научной проблемой, обсуждавшейся еще в шестидесятые годы прошлого столетия известным геометром Г. Хадвигером.

как подступаться к решению подобных задач. Методов их решения в настоящее время, по сути, нет никаких. Мне кажется, что разработка таких методов — одно из перспективных направлений развития математики.

Нет нужды, однако, говорить, сколь большое значение имеют подобные задачи для технических и промышленно-производственных приложений. Как хозяйка запихивает длинный кривой огурец в банку с узким горлышком? Как автослесарь вставляет замок в дверцу автомобиля через отверстие внизу дверцы? Как наиболее быстро собирать сложные механизмы, в которых одни детали хитрым образом входят внутрь других? Да что далеко ходить! Россия располагает гениальным примером решения подобной трехмерной задачи о продвижении одного тела весьма сложной конфигурации внутри другого — вы когда-нибудь разбирали автомат Калашникова? Затвор (прямо скажем, далеко не шарообразной формы!) движется по своему «коридору» с хитрыми выступами и, слегка поворачиваясь, запирает патрон в патроннике. И ничего не заедает и не заклинивает!!! Все гладко и без усилий «входит и выходит», как сказал бы ослик Иа. Для меня абсолютная загадка, как Михаил Афанасьевич Калашников, контуженный, лежа на больничной койке, «в уме» смог придумать столь сложную и изящную пространственную конфигурацию, которая, исполненная в металле, стала одним из символов нашей Страны и ее национальной гордостью.

№ 139 (8,8,8). Найдите наименьшее число плоскостей, которые разбивают обычный трехмерный куб на 300 частей ненулевого объема.

Комментарий. Рассуждайте индукцией по числу плоскостей, господа! Правильный ответ — 13, причем дюжиной плоскостей куб можно разбить максимум на 299 частей и, как теперь становится понятно, число 300 в формулировке представленной задачи взято сосем не случайно.

№ 140 (35,35,35). Как легко, порой, придумать задачу по дискретной математике и как трудно понять — с какой стороны потом подступиться к ее решению! Судите сами: рассмотрим язык L над алфавитом $\{0, 1\}$, состоящий из всех слов, являющихся двоичной записью простых чисел и только их. Выясните:

а) будет ли L регулярным?

б) будет ли L контекстно-свободным?

в) постройте, на худой конец, автомат с двумя магазинами, порождающий L.

Комментарий. По поводу этой оригинальной задачи могу сказать лишь одно — эмоциональное восклицание в ее формулировке абсолютно справедливо! Из теории автоматов известно, что, поскольку существует алгоритм, перечисляющий простые числа (решето Эратосфена), то п. в) представленной олимпиадной задачи заведомо можно выполнить (что, кстати сказать, и сделали в явном виде в своих работах несколько участников нашей олимпиады за отведенное олимпиадное время).

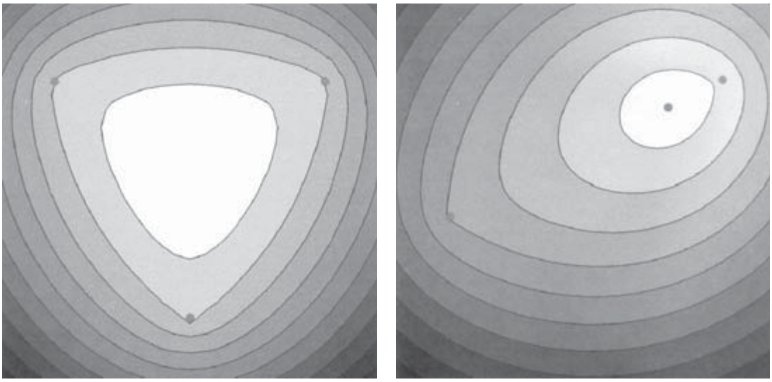
Что касается пп. а) и б), то они, как говорится, «сидели на трубэ» — что с ними делать, мы, авторы этой задачи, действительно толком не знаем. Тем не менее, некоторые наши соображения по поводу пп. а) и б) могут сослужить хорошую службу читателям, поэтому я приведу их здесь: скорее всего, ответы на вопросы этих пунктов отрицательны, но получить эти ответы быстро вряд ли удастся. Для решения п. б) можно попытаться применить к языку L классическое свойство контекстно-свободных языков, известное как «лемма о накачке», и убедиться, в конце концов, что полученная бесконечная серия слов содержит запись составного числа, но мы не уверены, что этот путь гарантированно приведет к успеху.

В случае п. а) можно попробовать обойтись только количественными рассуждениями. Известно, что количество простых чисел, не превосходящих n, можно оценить как $\dfrac{n}{\ln n} + o\Big(\dfrac{n}{\ln n}\Big)$. Следовательно, количество простых чисел, записываемых ровно n двоичными цифрами, оценивается как $\dfrac{2^n}{n \ln 2} + o\Big(\dfrac{2^n}{n}\Big)$. В то же время известно, что количество слов длины n в любом регулярном языке над бинарным алфавитом оценивается либо как $\dfrac{2^n}{k} + o\Big(a^n\Big)$, где k — константа и $a < 2$, либо как $o(a^n)$, где $a < 2$. (Удивительно, что приведенные оценки получаются вариациями на тему классической теоремы Фробениуса–Перрона о неотрицательных матрицах — с теоремой Фробениуса–Перрона мы еще встретимся в этой книжке в задаче № 157.) Сравнивая приведенные оценки, легко понять, что язык L не может быть регулярным.

Коллеги! Может быть, стоит бросить в атаку на первые два пункта этой задачи всю мощь коллективного читательского разума?

№ 141 (10,9,8). Эллипсищем назовем множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до ***трех*** заданных точек-фокусов есть величина постоянная. Нарисуйте эллипсищи, фокусы которых: а) различны и лежат на одной прямой; б) лежат в вершинах равностороннего треугольника. При каком расположении фокусов эллипсище не является выпуклым?

Комментарий. Эллипсище — забавное обобщение понятия эллипса на случай трех фокусов. Эллипсище является, в общем случае, алгебраической кривой шестого порядка, которая, как нетрудно доказать, всегда выпукла. Изображения требуемых в задаче эллипсищ (для разных значений заданной постоянной суммы расстояний до фокусов) можно поразглядывать на следующих рисунках.



Эти рисунки любезно предоставлены мне для публикации одной из наших команд-участниц олимпиады.

Со времен древней Греции всем известен способ рисования обычного эллипса с помощью двух гвоздиков, вбитых в плоскость, и веревочки, привязанной своими концами к этим гвоздикам (разумеется, длина веревочки должна быть больше расстояния между гвоздиками). Надо оттянуть веревочку карандашиком и передвигать кончик карандаша по плоскости так, чтобы веревочка скользила по карандашу и все время оставалась натянутой — кончик карандаша выпишет на плоскости эллипс с фокусами-гвоздиками, а сумма расстояний от точек этого эллипса до фокусов есть величина постоянная и равная длине веревочки. Попробуйте самостоятельно придумать аналогичную конструкцию из трех гвоздиков и веревочки для рисования эллипсища — в свое время, когда нам, авторам этой задачи, удалось придумать эту нехитрую конструкцию, мы испытали настоящий детский восторг от своего изобретения и с азартом рисовали эллипсищи, вбивая гвоздики в разные места поверхности моего письменного стола. Стол мы, конечно, безнадежно испортили, зато удовольствие получили огромное!

Разумеется, можно пойти дальше в своих фантазиях — рассматривать эллипсищи с произвольным конечным числом фокусов и интересоваться их свойствами. А, может быть, даже имеет смысл поизучать эллипсищи с бесконечным числом фокусов?

№ 142 (0,10,10). Смерть Кащея хранится в яйце, имеющем форму шестимерного эллипсоида, заданного уравнением:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + mx_6^2 = 100,$$

где m — количество прожитых Кащеем лет. Русский богатырь — некто Добрыня, разрубил это яйцо плоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$. По вылетевшей из яйца утке Добрыня хочет ударить ракетой класса «земля–утка», скорость которой должна быть не менее

$$\max\left(|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| + |x_6|\right),$$

разыскиваемого для тех $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, которые удовлетворяют как уравнению эллипсоида, так и уравнению секущей плоскости. Найдите

$$\inf_{m\geqslant 0}\left(\max\left(|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| + |x_6|\right)\right)$$

и определите, достигается ли он при каком-нибудь значении m.

Комментарий. Типичная русская народная задача на условный минимакс с ярко выраженным национальным колоритом и традиционно немотивированными попытками богатыря применить современные системы вооружений для поражения неадекватных целей. Покопайтесь в этой задаче самостоятельно, а я лишь для контроля сообщу вам правильный ответ:

$$\inf_{m\geqslant 0}\left(\max\left(|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| + |x_6|\right)\right) = 4\sqrt{30}$$

и этот инфимум не достигается.

№ 143 (4,4,4). В квадрате со стороной 50 расположена ломаная. Убедите себя и жюри в том, что если расстояние от любой точки квадрата хотя бы до одной точки ломаной не больше 1, то длина всей ломаной больше 1248.

Комментарий. Очередная вариация на тему принципа Дирихле о размещении чего-то большого внутри чего-то маленького. Пусть L — произвольная ломаная на плоскости и $\overline{L} = \{p \in \mathbf{R}^2 | \rho(p, L) \leqslant 1\}$, где $\rho(p, L)$ — расстояние от точки p до ближайшей точки ломаной L. Множество $\overline{L}$ — эдакая «приграничная полоса» (с «закругленными» концами) ширины 2 вдоль данной ломаной. Попробуйте показать, например, индукцией по числу звеньев ломаной L, что площадь полосы $\overline{L}$ не превосходит числа $\pi + 2|L|$, где $|L|$ — длина ломаной. После доказательства такого утверждения эта несложная задачка решится сама собой. Все участники нашей олимпиады справились с этой задачей легко и непринужденно.

№ 144 (10,8,5). В последовательности неотрицательных чисел $\{C_n\}$ для любых m и n выполняется $C_{m+n} \leqslant C_m \cdot C_n$. Докажите, что последовательность $\{\sqrt[n]{C_n}\}$ сходится.

Комментарий. Перед вами прекрасное и, я бы даже сказал, классическое упражнение по теме «предел последовательности» для студентов-первокурсников. Это показательная [1] форма записи знаменитой задачи № 137 из настольной книги каждого студента-математика — задачника Б. П. Демидовича по математическому анализу:

137. *Пусть числовая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяет условию*

$$0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n \quad (m,\, n = 1,\, 2, \ldots)\,.$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$ *существует.*

Задача № 137 из «Демидовича» знаменита не только мистическим сочетанием цифр в ее номере — тройка, семерка, туз! Она — первое по-настоящему серьезное испытание для начинающего студента-первокурсника на длинном и тернистом пути изучения «мудреного» раздела математики, который именуется «математический анализ». Прологарифмируйте последовательность из условия нашей олимпиадной задачи и вы, фактически, попадете в условия задачи Демидовича. Это простое наблюдение является ключом к поиску «легкого» решения представленной олимпиадной задачи — если неохота изобретать решение самому, можно, на худой конец, поискать его идею в каком-нибудь «Антидемидовиче» [2]. Однако реальная польза от этой задачи наступит только при условии самостоятельного ее решения, поэтому искренне советую всем студентам младших курсов, взявшимся за эту задачу, не искать легких путей.

№ 145 (8,6,5). Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами

$$f(x) = x^{35} + a_1x^{34} + a_2x^{33} + \ldots + a_{34}x + 571$$

неприводим над кольцом Z, если абсолютная величина каждого коэффициента $a_1, a_2, \ldots, a_{34}$ не превосходит числа 15.

---

[1] Прилагательное «показательная» здесь можно понимать даже в двух смыслах — показательная в смысле «яркая, демонстративная» и показательная в смысле «показательная функция».

[2] Метким термином «Антидемидович» студенты называют разнообразные учебные пособия и решебники, издаваемые в настоящее время разными издательствами в невероятных количествах и содержащие решения задач из задачника Б. П. Демидовича. Кроме библиотеки, означенные пособия можно легко обнаружить практически в любой комнате студенческого общежития математико-механического факультета.

Комментарий. В настоящее время придумано довольно много признаков неприводимости многочленов над кольцом Z и утверждение представленной задачи может быть обслужено одним из так называемых «признаков неприводимости многочленов с доминирующим коэффициентом». Оказывается, справедлив такой факт. Пусть $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x \pm p$ — многочлен с целыми коэффициентами, причем p простое число. Тогда если $p > 1 + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|$, то многочлен $f(x)$ неприводим над кольцом Z. Доказательство сформулированного признака неприводимости вполне доступно изобрести даже студенту первого курса — рекомендую рассуждать «от противного» и понять, что «противное» предположение влечет наличие у многочлена $f(x)$ корня α, модуль которого меньше единицы. Тогда из равенства $f(\alpha) = 0$ следует, что

$$p = |\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha| \leqslant 1 + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|$$

— противоречие с условием доминирования свободного члена.

После доказательства сформулированного признака неприводимости, ответ к нашей задаче получается даром, поскольку 571 — простое число.

№ 146 (0,20,20). Докажите, что модели $\langle\omega, \leqslant\rangle$ и $\langle\omega + \omega^* + \omega, \leqslant\rangle$ неизоморфны, но элементарно эквивалентны. Здесь $\omega + \omega^* + \omega$ означает порядковый тип натуральных чисел, за которыми следуют все целые.

Комментарий. Хорошая, известная и весьма непростая задача из классического раздела математической логики — теории моделей. Пусть σ — некоторая фиксированная сигнатура (в нашем случае σ состоит из одного двухместного бинарного предиката $\leqslant$). Элементарной теорией модели $\langle M; \sigma\rangle$ называется множество всех предложений логики первого порядка данной сигнатуры σ, истинных на модели $\langle M; \sigma\rangle$. Две модели называются элементарно эквивалентными, если их элементарные теории совпадают. Иными словами, элементарно эквивалентные модели невозможно отличить друг от друга никаким предложением логики первого порядка, поскольку всякое такое предложение, истинное на одной модели, обязано быть истинным и на другой. Классическим примером пары неизоморфных, но элементарно эквивалентных моделей являются модели $\langle\mathbf{Q}; \leqslant\rangle$ и $\langle\mathbf{R}; \leqslant\rangle$ — рациональные числа и действительные числа с обычным отношением порядка. Очевидно, что эти модели неизоморфны просто потому, что множества их элементов имеют разную мощность, однако довольно легко показать, что всякое предложение первого порядка сигнатуры $\leqslant$ либо выполняется на той и на другой модели одновременно, либо одновременно ложно на них.

В математической логике придумано несколько разных способов доказательства элементарной эквивалентности моделей. В нашем конкретном случае для моделей из представленной задачи вполне подойдут два из них — либо метод элиминации кванторов, либо игровой критерий Эренфойхта (имеющий образное название «игра математика с чертом», а говоря «по-научному» — критерий элементарной эквивалентности в терминах частичных изоморфизмов). С описанием и доказательствами работоспособности этих методов можно познакомиться в книжках: *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. — М.: Наука, 1987; или *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. — М.: Мир, 1977. Ознакомьтесь с этими методами и выбирайте для решения представленной задачи тот метод, который вам больше понравится. Нужно сказать только, что критерий в терминах частичных изоморфизмов является универсальным и общеприменимым методом (поэтому он, собственно, и носит титул «критерий»), в то время как метод элиминации кванторов применим далеко не всегда — уже сам факт, что элементарные теории моделей из нашей задачи допускают элиминацию кванторов, является существенной подсказкой читателю, взявшемуся на досуге над этой задачей поразмышлять.

Отмечу напоследок, что в рамках нашего факультетского состязания, цель представленной олимпиадной задачи — познакомить студентов с «нетрадиционными» разделами математической логики — оказалась достигнутой. Более того, в пяти сданных работах эта задача оказалась решена — трое участников выбрали элиминацию кванторов, две команды предпочли игру Эренфойхта. Молодцы! Покопались в литературе, отыскали нужные сведения и решили поставленную задачу.

№ 147 (7,7,7). Коллеги! Помогите Васе! Докажите Маше, что при $a > b > 1$ выполняется $a^{b^a} > b^{a^b}$ — только тогда Маша согласится выйти за Васю замуж.

Комментарий. Вопреки кажущейся простоте и «стандартности», эта задача весьма непроста и потребует для своего решения некоторой изобретательности. Представленная задача впервые предлагалась на студенческой олимпиаде мехмата МГУ в 1976 г. и, разумеется, не имела столь кричаще-мотивационной формулировки, побуждающей к ее немедленному решению. Студенты нашего факультета просто не смогли равнодушно пройти мимо Васиной беды и за два олимпиадных дня дружно решили эту непростую задачу — вот только Вася к этому моменту Машу уже разлюбил. И, слава богу, пусть сидит в девках — с такими запросами она бы еще доказательство гипотезы Римана с Васи потребовала!

№ 148 (7,6,6). Пусть интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и равен J. Докажите, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\Big(x - \dfrac{1}{x}\Big)dx$ тоже сходится и равен J.

Комментарий. Эта задача предлагалась на студенческой олимпиаде МФТИ в 1976 г. и, как вы сейчас увидите, имеет ярко выраженную «прикладную» направленность — развить у студентов-физиков (будущих теоретиков) столь необходимые им навыки жонглирования формулами. Вот решение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\Big(x-\frac{1}{x}\Big)dx = \int_{0}^{+\infty} f\Big(x-\frac{1}{x}\Big)dx + \int_{-\infty}^{0} f\Big(x-\frac{1}{x}\Big)dx = J_1 + J_2.$$

В каждом интеграле сделаем замену переменной $x - \dfrac{1}{x} = t$. Тогда при $x > 0$ получим $x = \dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}$, а при $x < 0$ будет $x = \dfrac{t-\sqrt{t^2+4}}{2}$. Значит,

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Big(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\Big)dt,$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Big(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\Big)dt.$$

По признаку Абеля (в этом месте я рекомендую заглянуть в учебник по математическому анализу!), интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt$ сходится, если сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$. Следовательно, интегралы J_1 и J_2 сходятся и

$$J_1 + J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt.$$

Я не знаю, как справлялись с этой задачей будущие физики-теоретики из Московского физико-технического института, но участники нашей олимпиады традиционно стушевались перед «страшными» интегралами. Как и в обсуждавшейся ранее «задаче-страшилке» № 8 из этой книжки, наши студенты показали в представленной задаче предельно низкий результат — задачу просто никто не решал и не решил. Это обстоятельство и побудило меня привести здесь решение этой, в общем-то, несложной задачи полностью. Ребята! Не надо бояться! Надо решать, и задача решиться!

№ 149 (8,8,8). Пусть L — конечномерное линейное пространство над полем R и $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ — линейные функционалы на L, причем $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}\varphi_i \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. Докажите, что:

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_k\varphi_k, \quad \text{где } c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathrm{R}.$$

Комментарий. Хорошая задачка по линейной алгебре. Вспомните, что в конечномерном линейном пространстве L каждый линейный функционал φ представляется в виде скалярного произведения $\varphi(x) = (a, x)$ на подходящий фиксированный вектор $a \in L$ и смело приступайте к решению задачи. Что значит, что ядро одного функционала лежит внутри ядра другого? Когда набор функционалов вида $\varphi_a(x) = (a, x)$ образует базис сопряженного пространства L^*?

№ 150 (50,50,50). Плоскость произвольно раскрасили в конечное число цветов. Будем называть треугольник одноцветным, если его вершины оказались окрашены в одинаковый цвет. Докажите, что найдется цвет, значения площадей всех одноцветных треугольников которого заполняют луч $(0, +\infty)$.

Комментарий. «Юбилейная» задача нашего сборника № 150, по закону жанра, должна быть сложной и она таковой является. Более того, эта успешно решенная к настоящему моменту проблема рамсеевского типа в роли олимпиадной задачи является не просто сложной, а очень сложной. Как и ее родственницы (см. задачи №№ 50, 52, 68, 98 из этой книжки), представленная задача вряд ли подпустит к себе «с первого захода» и основная польза от подобных задач, как я уже неоднократно говорил, заключается в неторопливых размышлениях над ними, а не в немедленном их «кавалерийском» решении. Весьма полезные сведения, способные оказать существенную помощь в решении этой задачи, можно отыскать в уже упоминавшейся здесь книжке: *Грехем Р.* Начала теории Рамсея. — М.: Мир, 1984, в главе «Общая теорема рамсеевского умножения».

№ 151 (10,9,8). Нетрезвый гражданин ползает по ребрам куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Из любой вершины он ползет по одному из ребер, выходящему из этой вершины, с вероятностью $1/3$. Выползает он из вершины A; вершины B_1 и C_1 суть вытрезвители, попав в которые гражданин больше уже никуда не ползет. С какой вероятностью он попадет в вытрезвитель B_1? А в вытрезвитель C_1? С какой вероятностью он вообще не попадет в вытрезвитель?

Комментарий. О, это классика! Случайные блуждания граждан — весьма распространенное явление не только в России. Но нашей национальной отличительной особенностью, безусловно, являются вытрезвители, из которых уже никто никуда не ползет. Фундаментальным и весьма нравоучительным фактом мироздания (в круге вопросов, связанных со случайными блужданиями нетрезвых граждан по ребрам конечных графов) является неизбежное попадание граждан в вытрезвитель с вероятностью единица!

Попробуйте самостоятельно доказать такой общий и, на мой взгляд, весьма удивительный факт. Пусть у каждой вершины конечного связного графа для всех ребер, инцидентных с этой вершиной, указаны вероятности выхода точки из этой вершины по соответствующему ребру, и все эти вероятности строго положительны. Тогда при неограниченном времени блуждания, каждую вершину графа блуждающая точка посетит с вероятностью единица.

Должен сказать, что сформулированный факт, при всей его ясности и простоте формулировки, имеет далеко идущие аналогии как научного, так и прикладного характера. В этом факте просматривается дискретный аналог знаменитой теоремы Пуанкаре «о возвращении» из теории динамических систем (Пуанкаре открыл эту теорему во времена своего увлечения небесной механикой), а вопрос о частоте возвращения точки в исходную вершину графа вообще приводит нас в круг интересов эргодической теории... Читателю, заинтересовавшемуся теоремой Пуанкаре и связанными с ней вопросами, рекомендую для первоначального знакомства нетолстую и очень качественно написанную книжку: *Окстоби Дж.* Мера и категория. — М.: Мир, 1974. Что касается разделов теории вероятностей, изучающих случайные блуждания, то тут список литературы может получиться весьма обширным, поэтому любознательному читателю будет гораздо проще обратиться к математической энциклопедии или любой поисковой системе во всемирной паутине, где он, несомненно, самостоятельно найдет интересующие его ссылки.

В заключение этого комментария сообщу, наконец, правильный ответ к комментируемой задаче: вероятность попасть в вытрезвитель B_1 равна 4/7, вероятность отдохнуть в вытрезвителе C_1 равна 3/7. Думайте и делайте правильные выводы!

№ 152 (3,2,1). Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Докажите, что тождество $f(\sin x) \equiv \cos x$ не может выполняться ни на каком отрезке $[a, b]$. Разумеется, авторы задачи не «лопухи» и дополнительно ставят условие $b > a$.

Комментарий. Это простая задача и комментировать в ней, собственно, нечего. Рассуждайте от противного, возведите, например, «противное» тождество в квадрат, обратите внимание на степени получившихся многочленов, и противоречие не заставит себя долго ждать.

№ 153 (3,3,3). Пусть A — множество на прямой, все точки которого изолированные. Докажите, что A представимо в виде пересечения открытого и замкнутого множеств.

Комментарий. Эта задачка — не очень сложное упражнение на развитие интуиции в области общей топологии.

№ 154 (10,8,7). Пусть $M \subseteq [0,\ 1]$ — измеримое множество и мера $\mu(M) = m > 0$. Найдите меру множества

$$D = \{x \in [0,\ 1] |\ \exists\, n \in \mathsf{N},\ \exists\, y \in M\ x = \{ny\}\},$$

где $\{a\}$ — дробная часть числа a.

Комментарий. Это интересная и не очень простая задача про множество дробных частей чисел, кратных элементам из множества M. Однако ответ к этой задаче почти очевиден для всякого более-менее опытного математика с воспитанной в повседневной научно-преподавательской практике интуицией — мера множества D равна единице. На такую мысль, во-первых, косвенно наталкивает известная теорема Дирихле о поведении дробных частей последовательности $\{na | n = 1, 2, \ldots\}$ — если число $a \in \mathbf{R}$ иррационально, то дробные части $\{na\}$ чисел na $(n = 1, 2, \ldots)$ всюду плотно заполняют отрезок $[0,\ 1]$. Ясно, что если $M \subseteq [0,\ 1]$ — множество положительной меры, то оно содержит хотя бы одно иррациональное число (ведь мера всякого счетного множества, в частности, множества всех рациональных чисел, — нулевая!). Стало быть, опытный математик сразу понимает, что исследуемое множество D заведомо всюду плотно на отрезке $[0,\ 1]$. Далее, интуиция рождает правильный ответ к представленной задаче из очень простого соображения. Пусть запись kM означает множество $\{kx | x \in M\}$. Возьмем в качестве множества $M \subseteq [0,\ 1]$ отрезок $M = [0;\ 0,1]$. Тогда, очевидно, уже первые десять натуральных чисел породят десять кратных множества $M = [0;\ 0,1]$, которые просто целиком заполнят весь отрезок $[0,\ 1]$, т. е. $(M \cup 2M \cup \ldots \cup 10M) = [0,\ 1]$, стало быть, в этом простейшем случае мера множества $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{nM\}$, очевидно, равна единице. Теперь осталось только искусно применить ремесло доказательства теорем в духе классической теории меры и теории функций действительного переменного — доказать правильность предположенного ответа для произвольного множества $M \subseteq [0,\ 1]$ положительной меры. Желаю вам успеха.

№ 155 (6,6,7). Василий взял прямоугольник $k \times n$ (НОД$(k, n) = 1$), в котором проведена диагональ, разбил его на клеточки 1×1 и составил ***код*** прямоугольника следующим образом: двигаясь вдоль диагонали, он каждое ее пересечение с горизонтальной границей клеточки кодировал нулем, а каждое пересечение с вертикальной границей — единицей. (Например, прямоугольник 2×3 Вася закодировал бы как 101.) Полученный код Вася зашифровал: он выписал в столбик все его циклические перестановки, упорядочил их по возрастанию и у получившейся квадратной матрицы взял последний столбик. Что получилось у Васи в результате? А почему?

Комментарий. Прекрасная задача по комбинаторике! Поразмышляйте над ней самостоятельно — она принесет вам эстетическое наслаждение.

№ 156 (15,14,13). Как известно, ДНК представляет собой длинную последовательность нуклеотидов A,C,G и T. Биолог Гриша Мендельсон, исследуя одну цепочку ДНК, обнаружил, что после A в ней с вероятностью 1/6 идет снова A, с вероятностями 1/3, 1/6 и 1/3 C, G и T соответственно. Для нуклеотида C данные вероятности равны 1/2, 1/8, 1/4 и 1/8; для G — 1/4, 1/6, 1/3 и 1/4; для T — 1/4, 1/3, 1/3 и 1/12. Какое слово из трех букв встречается в этой цепочке наиболее часто?

Комментарий. Ох, и горазды русские люди выдумывать задачи про слово из трех букв! Для решения задачи рекомендую подсчитать вероятность появления в цепочке ДНК каждого из возможных трехбуквенных слов и убедиться, что наибольшую вероятность 159/3336 имеет слово ACA, означающее, видимо, залихватский выкрик грузина, танцующего лезгинку и не выговаривающего две буквы C подряд.

№ 157 (20,15,10). Все элементы квадратной матрицы M положительны, так же как и все координаты вектор-столбца $\vec{x}$ соответствующего размера. Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\|M^{n+1}\vec{x}\|}{\|M^n\vec{x}\|}$? Если да, то чему он равен? (Здесь $\|\ldots\|$ обозначает l_1-норму вектора, т. е. сумму его координат.)

Комментарий. Нетривиальная задача про положительные матрицы, пользующиеся в настоящее время очень большим спросом в экономико-математических исследованиях. Указанный в формулировке задачи предел, естественно, существует и не зависит от выбора положительного вектора $\vec{x}$ — иначе мы бы такую задачу и не придумали. При решении этой задачи вам значительно сэкономит силы теорема Фробениуса–Перрона, которая утверждает, в частности, что любая положительная квадратная матрица A всегда имеет вещественное положительное собственное число $\lambda(A) > 0$, которое является простым корнем ее характеристического многочлена и превосходит модули всех остальных собственных чисел. Этому максимальному собственному числу $\lambda(A)$ соответствует собственный вектор матрицы A с положительными координатами. Так вот, правильный ответ на предложенную олимпиадную задачу таков — искомый предел равен $\lambda(M)$. Думайте, рассуждайте, и задача решится.

№ 158 (5,2,2). Дан ориентированный граф G (петли и кратные дуги допускаются). Докажите, что G сильно связен тогда и только тогда, когда при любой нумерации его вершин матрица смежности не будет иметь вид $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$, где A и B — произвольные квадратные матрицы.

Комментарий. Эта задача представляет собой довольно простое наблюдение из теории графов и комментарии здесь излишни.

№ 159 (10,8,6). Традиционный подарок прилетел от кафедры теоретической механики. Два одинаковых стержня AB и BC соединены в точке B идеальным шарниром. Точку A заставляют двигаться параллельно внешней биссектрисе угла ABC. Найти отношение угловых скоростей AB и BC, если $\angle ABC = \alpha$.

Комментарий. Традиционный подарок от кафедры теоретической механики на нашей олимпиаде традиционно решило очень мало участников, несмотря на достаточную простоту условия подарка и несложность его решения. А как получится у вас, дорогие читатели? Вот ответ: $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{2+\cos\alpha}{8/3 - 3\cos\alpha}$.

№ 160 (25,25,25). [1] Докажите, что многочлен $x^5 - x + k$ раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbb{Z}$ квадратного и кубического многочленов тогда и только тогда, когда

$$k = \pm 15, \quad k = \pm 22440, \quad k = \pm 2759640.$$

Комментарий. Это утверждение, вызывающее вполне законное удивление, обнаружил и опубликовал в зарубежном научном журнале некто S. Rabinowitz в 1988 г. Почему бы не попросить доказать это утверждение в рамках факультетской олимпиады? Три команды участников, независимо друг от друга, за отведенные 48 часов повторили научный подвиг Рабиновича и представили в жюри правильные доказательства. Спасибо этим участникам, поскольку мы, члены жюри, статью Рабиновича не смогли ни прочитать, ни даже достать, а доказательство узнать очень хотелось. Надо сказать, что оно оказалось весьма изощренным! Потребовались такие понятия, как результант двух многочленов, диофантовы уравнения... После некоторых рассуждений задача свелась к решению в целых числах уравнения $5x^4 + 4 = b^2$, по поводу которого известно, что $5y^2 + 4$ может быть полным квадратом,

[1] *Rabinowitz S.* The factorization of $x^5 \pm x + n$ // Math. Mod. — 1988. — V. 61. — P. 191–193.

только если $y = x^2$ — число Фибоначчи. Среди чисел Фибоначчи, опять таки известно, полными квадратами являются только числа 0, 1 и 144 — вот откуда берутся указанные в задаче три случая разложимости тринома $x^5 - x + k$ в произведение неприводимых квадратного и кубического многочленов! Но даже теперь, когда я приоткрыл тайну решения предложенной «олимпиадной» задачи, аккуратное проведение доказательства остается весьма нетривиальной задачей и принесет вам немало удовольствия. Желаю успеха!

№ 161 (15,15,15). Задача, случайно выдуманная студентом в коридоре факультета, когда он лихорадочно (для сдачи какого-то зачета) программировал алгоритм проверки пребывания одного треугольника внутри другого, если заданы *координаты вершин* этих треугольников. Лихорадочная фантазия студента породила следующую дичь: на плоскости даны два треугольника *со сторонами* a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 соответственно. При каких условиях на эти шесть чисел один из этих треугольников можно расположить внутри другого?

Комментарий. К своему удивлению, покопавшись в специальной литературе, я обнаружил, что это известная классическая задача по комбинаторной планиметрии, называемая «проблемой Штейнгауза» и ответ на нее получен почти сто лет назад! (*Post K. A.* «Triangle in a Triangle: on a problem of Steinhaus»). Восемнадцать неравенств совершенно жуткого вида, связывающие стороны двух данных треугольников, дают необходимые и достаточные условия возможности расположения одного треугольника внутри другого. Глядя широко раскрытыми от изумления глазами на эти неравенства, я понял, что 15 баллов, обещанных участникам нашей олимпиады за эту задачу — ничтожно малое вознаграждение за кропотливый труд по ее решению. Ничего не поделаешь — нас, организаторов олимпиады, подвела интуиция, и мы ошиблись в оценке сложности задачи, случайно услышанной в коридоре…

№ 162 (6,6,7). Задорная молодежная задача!!! Какое максимальное число ребер может иметь n-вершинный плоский граф?

Комментарий. Предложенная задача относится к серии комбинаторных задач на графах, называемых «задачей о запрещенных подграфах» и сформулированной в общем виде П. Эрдешем: как велико может быть число

$$f = f(n; G_1, G_2, \dots)$$

— число ребер n-вершинного графа, не содержащего в себе в качестве подграфов заданных графов $G_1, G_2, \dots$? Разумеется, что в такой общей постановке эта задача неимоверно сложна, а ее многочисленные частные случаи (для конкретных типов запрещаемых графов $G_1, G_2, \ldots$) — предмет многих и многих научных исследований.

Наша олимпиадная задача является частным случаем проблемы Эрдеша потому, что согласно теореме Понтрягина–Куратовского граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов $G_1, G_2, \ldots$, гомеоморфных графам K_5 (полный пятиэлементный граф) и $K_{3,3}$ (полный двудольный граф с тремя вершинами в каждой доле). Несмотря на свою столь весомую прародительницу — общую проблему о запрещенных подграфах, предложенная олимпиадная «задорная молодежная задача» не слишком сложна. Я надеюсь, что читатели легко справятся с ней самостоятельно. Правильный ответ: $f = 3n - 6$. Экстремальным графом, на котором это число достигается, является триангуляция, экстремальность которой сразу следует из знаменитого соотношения Эйлера $n - f + \Gamma = 2$.

Читателям, самостоятельно справившимся с предложенной олимпиадной задачей, в качестве пищи для дальнейшего увлекательного размышления предлагаю поискать доказательство знаменитой (и, насколько мне известно, пока еще никем не доказанной) гипотезы Дирака: если n-вершинный граф имеет $3n - 5$ ребер, то он содержит подграф, гомеоморфный K_5.

№ 163 (15,14,14). Числа от 1 до 99999 записываются каждое на отдельном листочке, причем запись каждого числа содержит 5 цифр (числа, меньшие 10^4, начинаются нужным количеством нулей, например $367 = 00367$). Цифры 0, 1 и 8 в прямом и перевернутом виде выглядят одинаково, а 6 при переворачивании превращается в 9 и наоборот. Поэтому для чисел, например 89166 и 99168, можно заготовить только один листок. Сколько всего листов понадобится?

Комментарий. Хорошая комбинаторная задача, решение которой — сугубо индивидуальный процесс каждого решающего, ведь рассуждать в подобных комбинаторных задачах можно многими разными способами. Правильный ответ: 98475 листов.

№ 164 (20,18,17). Тонкая комбинаторная задача. Числа $1, 2, 3, \ldots, n$ расположены подряд по кругу на огромном листе бумаги. Рехнувшийся дворник Степанов, всерьез озабоченный развитием математики на среднем Урале, двигается по кругу (начиная с единицы) и бесследно уничтожает каждое второе число. Найдите последнее оставшееся в живых число N. Укажите явное выражение $N = N(n)$.

Комментарий. Довольно хитрая задача, требующая определенной доли терпения. Рекомендую сначала отыскать вот такую рекуррентную формулу для остающегося в живых числа: $N = N(n) = \{N(n-1)+2\}_{\bmod n}$, где эти фигурные скобки означают наименьший положительный вычет по модулю n. А уже потом, используя эту рекуррентную формулу, будет гораздо легче получить правильный ответ:

$$N(n) = 2n - 2^{[\log_2 n]+1} + 1.$$

№ 165 (15,10,7). В помощь экзаменатору. Убойный дополнительный вопрос на экзамене по математическому анализу! Функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале (a, b) и $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ при всех $x \in (a, b)$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$. Зафиксируем $x_0 \in (a, b)$. Может ли ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 расходиться при всех $x \neq x_0$?

Комментарий. А вы как думали? Конечно может! Кажущаяся простота степенных рядов, порожденная обилием «правильных» примеров в стандартных задачниках по «высшей математике», ой как обманчива! Ряды Тейлора и Маклорена (последний очень любил подставлять в ряд Тейлора значение $x_0 = 0$) оказались гораздо коварнее их создателей! Эти ряды могут спокойно сходиться в любой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 не к той функции, которая была в них разложена, а могут и вовсе расходиться во всех точках окрестности $O(x_0)$, кроме точки x_0. В общем, никакой идиллии!

А вот вам и подходящий пример подобного «отвратительного» поведения ряда Маклорена — у функции $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n}\cos(n^2x)$ ряд Маклорена сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$. Действительно, функция $f(x)$ всюду бесконечно дифференцируема (проверьте это самостоятельно, обратив внимание на множители e^{-n}, присутствующие во всех рядах, получаемых последовательным дифференцированием исходного ряда — они обеспечивают равномерную сходимость всех этих рядов). Ряд Маклорена функции $f(x)$ содержит лишь члены четной степени. Для абсолютной величины члена порядка $2k$ этого ряда справедливо неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k}e^{-n}n^{4k}}{(2k)!} > e^{-n}\cdot\left(\frac{n^2x}{2k}\right)^{2k}$$

при $x \neq 0$ и любом $n = 0, 1, 2, \ldots$. В частности, при $n = 2k$ получается

$$e^{-n}\cdot\left(\frac{n^2x}{2k}\right)^{2k} = \left(\frac{2kx}{e}\right)^{2k} > 1,$$

если только $k > |e/2x|$. А это означает, что ряд Маклорена функции $f(x)$ преспокойно расходится при всех $x \neq 0$. Какое неслыханное коварство! Подобным вопросом на экзамене по математическому анализу можно завалить практически любого студента! Кроме участников нашей олимпиады.

Под конец комментария отмечу, что еще один подобный пример коварного поведения ряда Маклорена некоторой функции можно отыскать в роскошном зоопарке примеров из анализа — классической книжке: *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. — М.: Мир, 1967. Загляните туда, не пожалеете.

№ 166 (8,6,5). Люди! Ау-у! Отыщите, при каких $a_0 \in \mathbf{R}$ последовательность $a_0, a_1, \ldots$, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$, возрастает?

Комментарий. Техническая задача про рекуррентные последовательности, нацеленная на придание участникам олимпиады уверенности в своих силах. Поймите сначала, что данная последовательность удовлетворяет линейному однородному рекуррентному соотношению:

$$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n + 6a_{n-1}, \\ a_1 = 1 - 3a_0, \end{cases}$$

после чего задача будет вынуждена решиться. Правильный ответ — заданная последовательность монотонно возрастает всего при одном значении своего начального члена, а именно: $a_0 = 1/5$.

№ 167 (3,2,2). Задачка для продвинутых школьников. Найдите все $x \in \mathbf{Z}$ такие, что $2x^2 - x - 36$ является квадратом простого числа.

Комментарий. Это действительно совсем несложная задача. Заметьте, что

$$2x^2 - x - 36 = (2x-9)(x+4) = p^2, \quad p \text{ — простое},$$

и рассмотрите все различные возможные случаи разложения числа p^2 на целые сомножители $(2x-9)$ и $(x+4)$. Правильный ответ: $x = 5$, $x = 13$.

№ 168 (10,10,10). Несложная задачка на внимательность мозга. Докажите, что число

$$\frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$$

является целым при любых $m, n \in \mathbf{N}$.

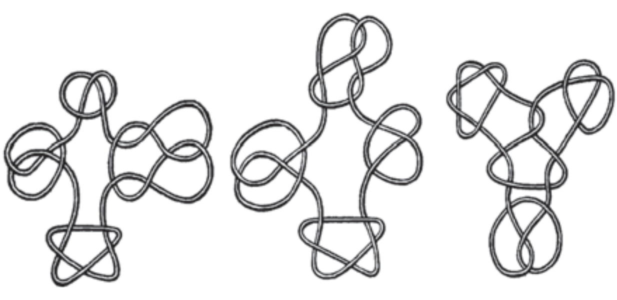
Комментарий. Должен сказать, что вопреки лихому заявлению из формулировки задачи, эта задача не совсем проста — ее придется решать непосредственно самим головным мозгом, а не только его внимательностью. Представленная задача впервые предлагалась для членов жюри на школьной математической олимпиаде США в 1975 г. На соревновании американских математиков была сделана существенная подсказка — перед пожеланием доказать целочисленность выписанной в условии задачи дроби, предлагалось проверить, что для любых неотрицательных действительных чисел x, y справедливо неравенство

$$[5x] + [5y] \geqslant [3x + y] + [3y + x],$$

где $[a]$ — как обычно, целая часть числа a.

Внутренний голос почему-то говорит мне, что после получения такой «подсказки», представленная олимпиадная задача решается куда как быстрей! Но не стоит завидовать американским математикам, — «подсказку» ведь надо было еще самостоятельно доказать! Отмечу, что участники нашей олимпиады прекрасно обошлись без всяких подсказок и успешно справились с предложенной задачей. Похоже, что взяться за ее решение студентов побудила именно лихая формулировка с прилагательным «несложная». В подтверждение этой мысли взгляните на действительно простые задачи № 8 и № 148 из этой книжки — за них боялись браться именно из-за «страшной» формулировки и «ужасных» интегралов, хотя по своей сложности они значительно уступают обсуждаемой задаче № 168 про целочисленность дроби. Студенты «опрометчиво» хватались за эту «несложную задачку на внимательность мозга» и она неожиданно получалась! Нравоучительный вывод — дорогу осилит идущий.

№ 169 (10,8,8). Преодолейте себя и докажите членам жюри, что все три нарисованных узла изотопны в $\mathbf{R}^3$:



Оформить свое решение понятным образом также является вашей задачей.

Комментарий. Несложная задача на установление изотопности узлов — для ее решения достаточно знать операцию «протаскивания» заузливания сквозь другое заузливание. Однако истинное восхищение вызвало у меня итоговое оформление решения данной задачи «понятным образом», предложенное нашими студентами во время олимпиады. Они представили в жюри лазерный диск с мультипликационным фильмом! На экране монитора все отлично видно — как один узел непрерывно перестраивается в другой под бодрый аккомпанемент группы «Биттлз»! Браво!

№ 170 (0,7,7). Тренируем пространственное воображение. Докажите, что поверхность, заданная в $\mathbf{R}^4$ системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2+z^2}{1+t^2} = 2z, \\ \dfrac{x}{t} = \sqrt{x^2+y^2}\,, \end{cases}$$

замкнута и неориентируема.

Комментарий. Представленная задача требует некоторых предварительных сведений из дифференциальной геометрии, точнее — геометрии гладких многообразий. Слово «поверхность» в этой задаче — вольность речи, на самом деле данная система уравнений задает некоторое гладкое двумерное многообразие, вложенное в $\mathbf{R}^4$. Для успешного решения этой задачи рекомендую придумать параметризацию заданного многообразия тригонометрическими функциями и указать на нем замкнутый дезориентирующий путь, однократный обход вдоль которого изменяет ориентацию стандартного базиса касательного пространства этого многообразия. Все необходимые предварительные сведения для решения предложенной задачи можно отыскать в книжке: *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.

№ 171 (5,3,2). Детский вопрос по алгебре. Квадратная матрица такова, что в каждом ее столбце есть ровно два ненулевых элемента: диагональный, который больше 1, и недиагональный, равный 1. Может ли эта матрица быть вырожденной?

Комментарий. Ну, конечно же, не может! Определитель матрицы (a_{ij}) равен нулю тогда и только тогда, когда строки этой матрицы линейно зависимы. Рассуждаем «от противного». Ну, пусть существует нетривиальная линейная комбинация строк $\alpha_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ этой матрицы, равная нулевому вектору: $\lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_n\alpha_n = 0$. Вспомним хорошо известный прием рассуждения при решении олимпиадных задач — «принцип крайнего»: рассмотрим максимальный по модулю коэффициент λ_k. Имеем: $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j a_{jk} = 0$, но, с другой стороны, эта сумма равна $\lambda_k a_{kk} + \lambda_r a_{rk}$ при некотором r, ведь в столбце всего два ненулевых элемента! При этом $a_{rk} = 1$, поэтому $\lambda_r = -a_{kk}\lambda_k$ и $|\lambda_r| > |\lambda_k|$ — противоречие. Что эта простенькая задача делала на студенческой олимпиаде мехмата МГУ в 1975 г. — ума не приложу! Видимо, она предназначалась, как и на нашей олимпиаде, для того, чтобы «обстрелять» первокурсников-новобранцев.

№ 172 (9,9,9). Докажите, что множество $M \subseteq \mathbf{R}^n$ имеет меру нуль тогда и только тогда, когда M можно покрыть счетным множеством открытых кубов суммарного конечного объема так, что каждая точка множества M окажется покрытой бесконечным множеством кубов.

Комментарий. Совершенно понятное и вполне ожидаемое утверждение из теории меры. Комментировать в этой задаче нечего, просто рассуждайте аккуратно, и задача решится.

№ 173 (10,8,8). AB). Алфавит языка поклонников шведской группы «**ABBA**» состоит из двух букв, а их язык содержит все слова, в которых количество вхождений одной буквы взаимно просто с количеством вхождений другой. Распознаваем ли этот язык конечным детерминированным автоматом?

BA). Теперь спросим по-другому. Известно, что алфавит некоторого языка состоит из двух букв, сам язык распознаваем конечным детерминированным автоматом и состоит из слов, в которых количества вхождений каждой буквы — простые числа. Может ли этот язык быть бесконечным?

Комментарий. Перед вами пара прекрасных задач по дискретной математике, не лишенных красивой изюминки. Я понимаю, что оглашение правильных ответов к этим задачам убивает весь их исследовательский дух и очарование неизвестности в угадывании верного предположения, которое предстоит доказывать. Поэтому наиболее азартным читателям я рекомендую прервать в этом месте чтение комментария, а для всех остальных просто любопытных математиков сообщу по секрету правильные ответы: в части AB) — язык не распознаваем, в части BA) — язык не может быть бесконечным. А вот уж доказательства этих утверждений одинаково сложно найти как азартным, так и просто любопытным математикам, поэтому я, с легким сердцем, предоставляю всем читателям равные возможности и предлагаю отыскать эти доказательства самостоятельно!

№ 174 (0,12,10). Привет от кафедры теоретической механики! Эллиптический обруч с полуосями a и b $(a > b)$ находится в горизонтальной плоскости и может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Сотрудники ЗАГСА надели на обруч колечко, которое скользит относительно обруча без трения. Система выводится из состояния покоя — колечку, первоначально расположенному в наиболее удаленной от центра обруча точке, пинком придают начальную скорость v_0, направленную по касательной к эллипсу. Найдите максимальное значение $\omega_{\max}$ угловой скорости обруча. (Размерами колечка пренебрегите, массы колечка и обруча считайте равными, а радиус инерции обруча считайте равным a.)

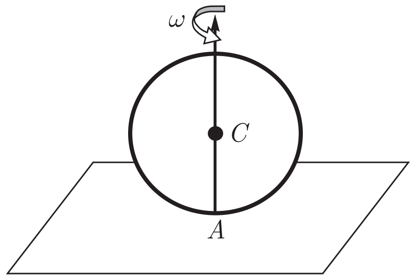
Комментарий. Не очень сложная задачка по теоретической механике для добросовестных студентов, владеющих понятиями интеграла энергии и интеграла кинетического момента. Загляните для верности и освежения в памяти этих понятий в любой приличный учебник по теоретической механике, а я, тем временем, сообщу вам правильный ответ для контроля вашего же решения:

$$\omega_{\max} = v_0 \frac{a^2 - b^2}{a(a^2 + b^2)}.$$

№ 175 (6,6,6). Поклонникам граффити. В $\mathbf{R}^3$ дан выпуклый многогранник с $n \geqslant 5$ гранями, из каждой вершины которого выходит ровно по три ребра. Два игрока — Вова и Абдурахман ибн Салиб аль Хасан-заде по очереди пишут свое имя на одну из свободных граней, причем Вова начинает гадить первым. Для победы требуется написать свое имя на трех гранях, имеющих общую вершину. Кто победит, если будет правильно играть?

Комментарий. Это довольно простая задача впервые предлагалась на математической олимпиаде Румынии в 1978 г. (разумеется, в более благопристойной формулировке). Следовательно, по уровню предварительных сведений, необходимых для ее решения, представленная задача вполне доступна школьникам старших классов. Докажите сначала, что данный многогранник имеет хотя бы одну грань, не являющуюся треугольником. После этого станет почти очевидно, что Вове достаточно начать игру именно с этой не треугольной грани, чтобы победить Абдурахмана ибн Салиба аль Хасана-заде на третьем ходу игры.

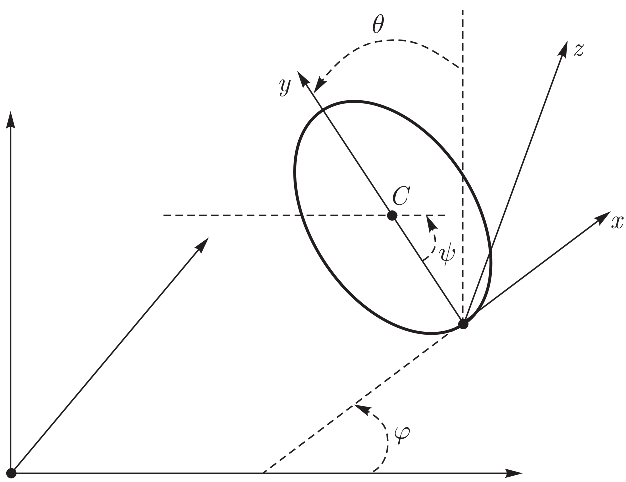
№ 176 (0,25,25). Еще один привет от теоретических механиков! Найдите условия устойчивости вращения однородного круглого обруча вокруг вертикального диаметра по отношению к углу отклонения плоскости обруча от вертикального положения. При движении обруч опирается на горизонтальную плоскость и в точке соприкосновения с этой плоскостью не проскальзывает. Масса обруча m, радиус R, а его угловая скорость стационарного движения ω_0.



Комментарий. Как сообщил мне автор этой задачи Ю. Ф. Долгий, она навеяна задачкой из классического задачника по теоретической механике И. В. Мещерского. Вот только в задачнике Мещерского обруч все время опирается на одну и ту же фиксированную точку горизонтальной плоскости и обручу запрещено кататься по этой плоскости, а с такими ограничениями задача становится бессмысленной по сути своей. Вы когда-нибудь крутили монету на столе? При вращении монета не остается на месте, точка касания монеты со столом перемещается, совершая круговые движения вокруг первоначального места закручивания монеты. И, надо сказать, действительно, — вращающаяся монета остается устойчивой и не падает на стол, пока ее угловая скорость не станет (вследствие трения) меньше некоторого критического значения $\omega_{\text{крит}}$, после которого происходит потеря устойчивости.

Чтобы дать возможность читателям почувствовать уровень сложности этой естественной задачи, я опять-таки отступлю от общего правила и приведу здесь ее решение полностью, стараясь подражать стилю настоящих теоретических механиков.

Посмотрите в течение нескольких минут на приведенный рисунок и постарайтесь понять, какая хитрость на нем изображена — это подвижная система координат $Axyz$, связанная с вращающимся обручем. Обозначим проекции угловой скорости $\vec{\omega}$ обруча на оси подвижной системы координат $Axyz$ через p, q, r, соответственно.



Интеграл энергии:

$$\frac{3mR^2}{4}p^2 + \frac{mR^2}{4}q^2 + mR^2r^2 + mgR\cos\theta = \widetilde{h}. \tag{1}$$

Теорема об изменении кинетического момента:

$$\left.\frac{d\vec{K}_A}{dt}\right|_{\text{подвижн}} + [(\vec{\omega} - \dot{\psi}\cdot\vec{z}_0),\, \vec{K}_A] + [\vec{V}_A^C,\, M\vec{V}_C] = \vec{M}_A. \tag{2}$$

Здесь:

$$\vec{K}_A = \frac{3mR^2}{2}p\vec{x}_0 + \frac{mR^2}{2}q\vec{y}_0 + 2mR^2r\vec{z}_0,$$

$$\vec{V}_C = -r\vec{x}_0 + p\vec{z}_0, \quad \vec{V}_A^C = -\dot{\psi}\cdot\vec{x}_0, \quad \vec{M}_A = (-mRg\sin\theta)\vec{x}_0.$$

Проектируя (2) на оси Ayи Az, находим

$$\frac{3mR^2}{2}\dot{q} - mR^2pr + \frac{mR^2}{2}pq\cdot\operatorname{tg}\theta = 0, \quad 2mR^2\dot{r} - mR^2pq = 0.$$

Учитывая, что $p = -\dot{\theta}$, получим систему уравнений

$$\frac{dq}{d\theta} = -2r + q\operatorname{tg}\theta, \quad \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{2}q.$$

Из интеграла энергии находим

$$\dot{\theta}^2 = \widetilde{h} - \frac{4}{3}\left(\frac{g}{r}\cos\theta + r^2(\theta) + \frac{1}{4}q^2(\theta)\right) = \widetilde{h} - \Pi(\theta).$$

Для стационарного движения $\theta_0 = 0$, $q_0 = \omega_0$, $r_0 = 0$. Условие устойчивости по отношению к возмущениям координаты θ имеет вид

$$\frac{d^2\Pi(0)}{d\theta^2} > 0.$$

Вычисляем:

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = \frac{4}{3}\Big(-\frac{g}{R}\cos\theta + 2r'^2 + \frac{1}{2}q'^2 + 2rr'' + \frac{1}{2}qq''\Big),$$

$$q_0' = 0, \quad r_0' = -\frac{1}{2}\omega_0,$$

$$q_0'' = -2r_0' + q_0'\operatorname{tg}\theta_0 + \frac{q_0}{\cos^2\theta_0} = 2\omega_0, \quad r_0'' = -\frac{1}{2}q_0' = 0.$$

Тогда

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = \frac{4}{3}\Big(-\frac{g}{R} + 2r'^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 + \omega_0^2\Big) > 0,$$

откуда получается ответ: $\omega_0 > \sqrt{\dfrac{2g}{3R}}$. Уф-ф!

Увидев этот текст, один мой коллега по кафедре взмахнул рукой перед глазами и воскликнул: «Ой, мамочка!». Однако уверяю вас, настоящие теоретические механики именно так и думают! Я это знаю совершенно точно, ведь дверь кафедры теоретической механики расположена в коридоре университета как раз напротив двери нашей кафедры (алгебры и дискретной математики), поэтому вечером там все отлично слышно!

№ 177 (40,40,40). Сюрприз по заявкам любителей «хэш-функций» и поклонников теории Рамсея. Пусть множество M содержит ровно m элементов. Функцию $f : M \to \mathbf{R}$ будем называть l-функцией, если она принимает не более l различных значений. Будем говорить, что l-функция f *разбрасывает* k-элементное подмножество $P \subset M$, если $\forall\, x, y \in P \;\; x \neq y \to f(x) \neq f(y)$ (ну, разумеется, $l \geqslant k$, смышленые мои). Пусть теперь $l < m$. Какое наименьшее число l-функций вам потребуется, чтобы любое k-элементное подмножество $K \subset M$ разбрасывалось некоторой l-функцией из вашего набора?

Комментарий. Предложенная задача чрезвычайно сложна, но ее решение исключительно важно для практических приложений — специалисты в области программирования, теории алгоритмов, хранения и организации быстрого доступа к большим объемам информации, поиска и выделения в больших объемах данных нужных сведений подтвердят вам исключительную важность этой задачи.

Ситуация с решением этой задачи довольно любопытная и очень характерная для современного этапа развития математики — смещения центра тяжести научных исследований и финансовых вложений от разделов непрерывной математики в сторону дискретной математики и логики конечных объектов. Здесь мы имеем дело с явлением, являющимся порождением нового времени, эпохи бурного развития информационных технологий и компьютерных наук, словом, всего того, что сейчас принято обозначать расплывчатым термином «Computer Science». Математики считают эту задачу нерешенной открытой проблемой, поскольку «явной формулы», дающей наименьшее число l-функций, пока никто не указал.

Однако бурное развитие Computer Science и финансовой подпитки этого направления исследований привело к возникновению огромного потока людей, порой недостаточно образованных в области математики, и, вследствие своей безграмотности, дерзко и смело берущихся за решение подобных сложнейших задач. Количество публикуемых научных работ в области Computer Science уже в десятки раз перевешивает все остальные математические публикации. С точки зрения классически-ортодоксальных профессионалов-математиков ситуация напоминает армию (скорее даже саранчу) малограмотных любителей, которые своими доморощенными методами пытаются доказать Великую теорему Ферма. Естественно, что у «классических» математиков этот вал «безграмотных» работ вызывает раздражение.

Но какое дело этой многочисленной армии компьютерщиков до мнения высокомерных математиков! Ведь речь идет о решении насущных практических задач, и эти решения у них, естественно, возникают!

Но пикантность ситуации заключается в том, что решения насущных задач возникают у компьютерщиков на непривычном для математиков языке, на совершенно другом уровне мышления, в нововведенных терминах и понятиях, незнакомых классическим математикам, потому часто невоспринимаемых ими и даже, порой, отторгаемых. Разумеется, компьютерщики нередко в своих работах изобретают велосипед, но какое им до этого дело, ведь главное — практический результат! Иной раз становится совершенно очевидно, что компьютерщики могли бы очень легко решить ту или иную свою задачу, имей они хоть малейшее представление о конечных группах, конечных полях, автоматах, многозначных логиках и т. д. Пренебрежение фундаментальным математическим образованием делает вал их научных работ на 90 % наполненным шелухой и пустыми примитивными статьями. Тем не менее это — обычная и очень естественная ситуация взрывного развития какой-либо области науки. Это абсолютно нормально, и так уже неоднократно бывало в свое время с другими областями науки, спорта, художественного творчества. Спортсмены очень хорошо знают, что на 1000 любителей некоторого вида спорта приходится только один Мастер спорта, на 1000 мастеров — один Мастер спорта международного класса, на десяток международников — один чемпион мира. Что поделать, только такой ценой достигается прорыв в любой области человеческой деятельности! Пройдет время, зерна отделятся от плевел, пена осядет и все встанет на свои места — Computer Science неизбежно сформируется как стройная и хорошо организованная область человеческих знаний, как наука, в конце концов.

Так вот, специалисты-алгоритмисты-программисты, в противовес «классическим» математикам, считают, что предложенная задача решена, поскольку Роберт Э. Тарьян (а вот это — очень грамотный математик и крупнейший специалист в области быстрых алгоритмов, профессор Принстонского университета) считает ее решенной. Тарьян со своей командой опубликовал «решение» этой задачи в терминах построения алгоритма, который бы находил за разумное время требуемый минимальный разбрасывающий набор l-функций. Считайте как хотите — решена эта задача в научном сообществе или еще нет, но специфичность ситуации с этой задачей как раз и заключается в возможности уточнения требований к форме ожидаемого решения, к толкованию самого термина «решение» в соответствии с потребностями практики. Безусловная практическая важность этой задачи не вызывает никаких сомнений, а размышления над ее «классически-математическим» решением принесут вам немалую пользу.

№ 178 (3,2,1). Просто возьмите и решите уравнение

$$\big(\sin(x-y)+1\big)\cdot\big(2\cos(2x-y)+1\big)=6.$$

Комментарий. Это простая разминочная задача, предназначенная для школьников и первокурсников. Комментировать в этой задаче нечего, сообщу только правильные ответы:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi(k+m);\\ y=-\pi+2\pi(2k+m), \end{cases}$$

где, как обычно, $k, m\in\mathbf{Z}$ — произвольные целые числа, обыкновенно присутствующие в ответах к разного рода тригонометрическим уравнениям, которые набили оскомину каждому, кто мало-мальски освоил современный курс школьной математики, в изобилии напичканный (по непонятным мне причинам) совершенно бессмысленным тригонометрическим мусором, лишенным всяких перспектив дальнейшего практического применения.

№ 179 (9,6,5). Докажите, что при любом $n\in\mathbf{N}$ имеет место равенство

$$\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\ldots<k_i\leqslant n}\frac{1}{k_1\cdot k_2\cdot\ldots\cdot k_i}=n,$$

где суммирование происходит по всевозможным наборам натуральных чисел $k_1<k_2<\ldots<k_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Комментарий. Представленную задачу не очень сложно решить «в лоб», подробно расписав искомую сумму, приведя подходящие слагаемые к общему знаменателю, и воспользовавшись основной теоремой арифметики и достаточно простыми комбинаторными соображениями. Однако это весьма громоздкий и утомительный путь решения со множеством «писанины». Неплохим, на мой взгляд, является также доказательство требуемого утверждения индукцией по n — это более короткий путь к цели. Однако я не могу отказать себе в удовольствии предложить вашему вниманию следующее изящное рассуждение, эффектно решающее предложенную задачу и полностью соответствующее моим художественно-математическим представлениям о так называемом «неожиданном и красивом решении». Вот оно.

Рассмотрим многочлен

$$f(x)=\Big(x+\frac{1}{1}\Big)\Big(x+\frac{1}{2}\Big)\Big(x+\frac{1}{3}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(x+\frac{1}{n}\Big)=$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n.$$

Согласно теореме Виета

$$a_1 = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{1}{k_1}; \quad a_2 = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n} \frac{1}{k_1 k_2}; \ldots; \quad a_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}.$$

Тогда искомая в задаче сумма равна

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = f(1) - 1 =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 =$$
$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} - 1 = (n+1) - 1 = n,$$

что, собственно, и требовалось. Не правда ли, — изящно, просто и эффектно! Однако я, конечно, понимаю, что изобрести непосредственно во время олимпиады подобное решение — не что иное, как «высший пилотаж», исполнить который по силам только исключительно одаренным людям, имеющим очень качественную предварительную подготовку. Студенты нашего факультета за два отведенных олимпиадных дня подобного решения не предложили. Это, однако, вовсе не означает, что среди наших студентов нет «исключительно одаренных...» и «имеющих...» — надеюсь, читатели понимают, что импликация $(A \to B)$ не равносильна импликации $(\neg A \to \neg B)$.

№ 180 (30,30,30). Четырех ковбоев **А**, **В**, **С**, **Д** привели к Шерифу и хорошо поговорили со всеми. Каждый ковбой говорит правду в среднем лишь в одном из трех случаев. Оставшись с глазу на глаз с Шерифом, **А** утверждает, что **В** отрицает, что **С** сказал правду, будто **Д** лжет. Какова вероятность того, что **Д** сказал правду?

Комментарий. Перед вами знаменитая задача Артура Эддингтона «о четырех лжецах», опубликованная в его книге «Новые пути в науке» [1]. В этой книге А. Эддингтон, пользуясь методом исключения, нашел, что искомая вероятность равна $\frac{25}{81}$. В замечательной книжке: Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly». Сборник, 400 задач / Пер. с англ. Ю. А. Данилова. — М.: Мир, 1977, приводится совершенно иное решение задачи Эддингтона, дающее значение искомой вероятности $\frac{13}{81}$. В олимпиадных работах наших студентов встречаются также ответы $\frac{25}{73}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{15}{43}$, причем в каждом

[1] *Eddington A. S.* New Pathways in Science. — Cambridge, 1935.

случае в работах приводятся исключительно разумные доводы, почему искомая вероятность должна быть именно такой. На мой взгляд, в этой ситуации нет ничего комичного. Мы имеем здесь дело с многочисленными возможными формализациями расплывчатой (с точки зрения требований традиционной математической строгости, разумеется) формулировки самой задачи и, в частности, с возможностью неоднозначной «расстановки скобок» в логическом выражении «**А** утверждает, что **В** отрицает, что **С** сказал правду, будто **Д** лжет». Фактически, мы здесь имеем дело с различными математическими моделями исследуемого явления, которые формировались людьми, решавшими эту задачу, на основании своего личного опыта и личного психологического восприятия фразы естественного языка, написанной Эддингтоном. Ну, а различные модели, естественно, влекут различные ответы.

Задача Эддингтона «о лжецах» прекрасно иллюстрирует мысль, сказанную во введении к этой книжке: «...я намеренно не привожу в этой книжке обстоятельных решений задач — гипсовая завершенность в творческих вопросах вредна. Некоторые задачи допускают различные толкования их условий и, соответственно, разные математические модели разбираемых ситуаций. Это значит, что ни решение, ни ответ у таких задач не предопределены однозначно... Да и вообще, — что такое решение? Что оно по сравнению с удовольствием от процесса мышления и свободного полета фантазии...» Задача Эддингтона, таким образом, оказывается прекрасным полигоном для размышлений, споров и разбора различных нюансов ее понимания.

Давайте же не будем уподобляться непоседливому юноше, который говорит: «Не успокоюсь, пока не узнаю правильного решения!» Давайте признаем, что математика, как и окружающий нас мир, не всегда предопределена и детерминирована. Давайте признаем, наконец, что во многих ситуациях «правильные решения» могут быть совершенно разными для разных людей, по-разному понимающих условия поставленной задачи, да и, порой, уже заранее ожидающих различные результаты.

№ 181 (2,1,1). Потеха для первого курса. Объясните, ради грядущего благополучия, почему числа

$$C_n^k,\ C_{n+1}^k,\ C_{n+2}^k,\ \ldots,\ C_{n+k}^k, \quad \text{где } n \geqslant k,$$

не имеют общих натуральных делителей, кроме единицы.

Комментарий. Это очень простая задача, предназначенная для придания участникам олимпиады уверенности в своих силах. Комментировать тут, собственно, нечего — задача вполне подойдет для районной математической олимпиады школьников.

№ 182 (7,6,5). Задача на радость «ботанам». Докажите, что для того, чтобы линейное топологическое пространство E было борнологическим и относительно ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы его топология была нижней гранью семейства нормированных топологий в E.

Комментарий. Уважаемые читатели! Все, что я хотел сказать по поводу представленной олимпиадной задачи и оправданности ее появления на нашей олимпиадной сцене, уже было сказано мной в комментарии к задаче № 77 из этой книжки. Повторяться не буду, а поэтому просто предлагаю вам обратиться к вышенаписанному фрагменту текста после задачи № 77.

№ 183 (7,6,5). Разминка по теории чисел:

А). Докажите, что если разность кубов двух последовательных целых чисел является квадратом некоторого целого числа q, то q представимо в виде суммы квадратов двух последовательных натуральных чисел.

Б). Докажите, что если разность d кубов двух последовательных целых чисел является квадратом некоторого целого числа, то d представима в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

Комментарий. На олимпиаде, вследствие моей невнимательности, эта задача была опубликована в следующем виде: «Докажите, что если разность кубов двух последовательных целых чисел является квадратом некоторого целого числа, то она представима в виде суммы квадратов двух последовательных целых чисел». Буквально через 10 минут после выдачи заданий, ко мне подошли студенты и сказали: «Это не так! Контрпример: $8^3 - 7^3 = 169 = 13^2$ — не представимо в виде суммы двух квадратов *последовательных* целых чисел!». Этот эпизод заставил меня подумать, что у нас на факультете учатся очень одаренные люди, какие-то настоящие Рамануджаны, для которых «каждое натуральное число является их личным другом» [1)] и гордость за молодое поколение переполнила мое сердце. В сданных работах студенты написали, что формулировка задачи допускает два вида разумного исправления, переформулировали ее этими двумя способами и привели решения. Поэтому в настоящей книжке я привожу обе формулировки этой симпатичной и не очень сложной задачки про целые числа.

№ 184 (15,16,17). Пусть $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < p_{n+1} < \ldots$ — последовательные простые числа. Докажите себе и членам жю-

[1)] Известное высказывание английского математика Г. Харди о гениально одаренном индийском математике Рамануджане.

ри, что число

$$\frac{p_n!}{p_n(p_n+1)(p_n+2)\cdot\ldots\cdot(p_{n+1}-1)}$$

— всегда целое, за исключением случая, когда $p_n = 3$.

Комментарий. Перед вами известная и весьма сложная задача П. Эрдеша, которая, как показал опыт проведения наших олимпиад, вполне решаема методом «интеллектуального штурма» за два дня. Неторопливые размышления над этой задачей принесут вам немало удовольствия, а для отчаявшихся решить ее самостоятельно укажу место, где ее решение можно отыскать — сборник «Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly», 400 задач / Пер. с англ. Ю. А. Данилова. — М.: Мир, 1977.

№ 185 (6,6,7). Найдите наиболее точное значение суммы баллов, которую вы сможете заработать за решения задач из этой книжки.

Комментарий. Перед вами завершающая и самая сложная задача этой книжки, решение которой может продолжаться всю жизнь. Как автор книги и преподаватель математики, я был бы счастлив, если бы у некоторых читателей именно так и произошло, и ответ к этой задаче они, в нарушение правил проведения нашей олимпиады, предъявляли бы уже не в жюри, а гораздо Выше ...

Мне будет исключительно приятно, если некоторые из приведенных в этом сборнике задач и вариации на их тему увлекут читателей настолько, что станут предметом их долгих размышлений или, даже более того, предметом их самостоятельных научных исследований.

Искренне благодарю всех читателей
и желаю больших творческих успехов!

С уважением, С. В. Сизый